

Diploma Thesis

Free and forced coupled flexural-torsional vibrations of beams with open or closed cross section

submitted in satisfaction of the requirements for the degree of
Diplom-Ingenieur
of the TU Wien, Faculty of Civil Engineering

Diplomarbeit

Freie und erzwungene Biegedrillschwingungen elastischer Balken mit offenem oder geschlossenem Querschnitt

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieurs
eingereicht an der Technischen Universität Wien, Fakultät für Bauingenieurwesen

von

Galeb El Chabaan

Matr.Nr.: 01228538

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. **Rudolf Heuer**

Institut für Hochbau, Baudynamik und Gebäudetechnik
Forschungsbereich Strukturdynamik und Risikobewertung von Tragwerken
Technische Universität Wien
Karlsplatz 13/208-01, 1040 Wien, Österreich

Wien, im Februar 2019

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei jenen bedanken, die mich während meiner gesamten Studienzeit sowie beim Verfassen dieser Diplomarbeit unterstützt haben.

Ganz besonders bedanken möchte ich mich bei meinem Diplomarbeitsbetreuer *Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Rudolf Heuer* für sehr freundliche und geduldige Unterstützung und kompetente Begleitung über die gesamte Arbeitszeit.

Ein großes Dankeschön gilt meiner Familie, vor allem meinen Eltern, die mir die Ausbildung überhaupt ermöglicht haben und auf deren Unterstützung ich zu jeder Zeit zählen konnte und kann.

Ich danke euch allen von Herzen!

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit werden freie und erzwungene schiefe Biegedrillschwingungen elastischer kontinuierlicher Träger, insbesondere von Balken mit offenem oder geschlossenem dünnwandigen Querschnitt untersucht. Im ersten Teil werden die theoretischen Grundlagen zur Beschreibung der Biegeschwingungen um zwei aufeinander senkrechte Achsen gekoppelt mit den Torsionsschwingungen behandelt. Dabei wird die Lösung des gekoppelten partiellen Differentialgleichungssystems mit Hilfe der Modalanalyse gefunden. Eine Verbesserung dieser Lösung erfolgt durch Aufspaltung der Verformungsgrößen in einen quasistatischen und in einen komplementären dynamischen Anteil, wobei der quasistatische Anteil analytisch exakt berechnet werden kann. Unter Berücksichtigung der linear viskosen Dämpfung wird die Schwingungsantwort inkrementell durch Diskretisierung der Zeit ermittelt.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wird die numerische Untersuchung der gekoppelten schiefen Biegedrillschwingung an einem Balken unter dynamischer Anregung durchgeführt. Aufgrund dieser numerischen Untersuchung wird gezeigt, inwieweit sich die Schwingungsantwort zwischen Balken mit offenem und geschlossenem dünnwandigen Querschnitt voneinander unterscheiden, wenn die Querschnittsabmessungen so gewählt sind, dass beide Querschnitte annähernd die gleiche Querschnittsfläche (zwei Einfeldträger mit annähernd gleicher Massenbelegung) und annähernd das gleiche Trägheitsmoment bezüglich der y -Achse haben. Im Rahmen dieser Analyse werden zwei dynamische Lastfälle betrachtet und die gewonnenen Ergebnisse abschließend diskutiert.

Abstract

This master's thesis investigates free and forced coupled flexural-torsional vibrations of a continuous elastic beam with open or closed thin-walled cross section. The first part of the thesis presents the theoretical background of coupled flexural vibrations in two orthogonal directions and torsional vibration. The solution for the coupled partial differential equations is found through modal analysis, while the improved solution is achieved by separating the geometric displacement coordinates into the quasistatic and the complementary dynamic part, so that the quasistatic part could be calculated analytically. Taking linear viscous damping into account, the incremental time discretization is used to determine the dynamic response.

The second part of this thesis deals with the numerical investigation of coupled biaxial flexural and torsional vibrations of the beam under dynamic excitation. This numerical analysis shows differences in dynamic response between the beam with open and closed thin-walled cross section for which the dimensions are chosen in such a way so that they have approximately equal cross-sectional surface area (hence, their beams have approximately equal mass per unit length) as well as approximately equal moment of inertia with respect to y -axis. Within this analysis, two dynamic load cases are considered and the results obtained are thereafter discussed.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Herleitung der gekoppelten Bewegungsgleichungen	4
2.2	Freie Schwingung	7
2.2.1	Homogene Lösung der freien ungedämpften Schwingung	7
2.2.2	Bestimmung der Eigenkreisfrequenz eines frei drehbar gelagerten Balkens	12
2.2.3	Orthogonalitätsbeziehungen der Eigenfunktionen	13
2.3	Erzwungene Schwingung	16
2.3.1	Berücksichtigung viskoser Dämpfung	19
2.4	Inkrementelle Formulierung der Schwingungsantwort	20
3	Numerische Untersuchung	24
3.1	Querschnitts- und Materialangaben	25
3.2	Lastfall 1 - Impulsartige Anregung in horizontaler Richtung	27
3.2.1	Zeitverläufe der Schwingungsantwort des Balkens mit dem offenen Querschnitt	31
3.2.2	Zeitverläufe der Schwingungsantwort des Balkens mit dem geschlossenen Querschnitt	34
3.2.3	Vergleich der Schwingungsantwort zwischen Balken mit offenem und geschlossenem Querschnitt	37
3.3	Lastfall 2 - Sinusförmige periodische Anregung in vertikaler Richtung	40
3.3.1	Zeitverläufe der Schwingungsantwort des Balkens mit dem offenen Querschnitt	45
3.3.2	Zeitverläufe der Schwingungsantwort des Balkens mit dem geschlossenen Querschnitt	48
3.3.3	Vergleich der Schwingungsantwort zwischen Balken mit offenem und geschlossenem Querschnitt	51
4	Zusammenfassung	54
	Literaturverzeichnis	55
	Anhang	56

Symbolverzeichnis

Lateinische Symbole

Symbol	Einheit	Beschreibung
A	$[\text{m}^2]$	Querschnittsfläche
C_j	$[1/\text{m}]$	Konstante
c_y	$[\text{m}]$	Abstand zwischen C_S und C_M in y -Richtung
c_z	$[\text{m}]$	Abstand zwischen C_S und C_M in z -Richtung
C_M	$[-]$	Massenmittelpunkt
C_S	$[-]$	Schubmittelpunkt
E	$[\text{N}/\text{m}^2]$	Elastizitätsmodul
e	$[-]$	<i>Eulersche</i> Zahl
e_y	$[\text{m}]$	Lastexzentrizität zur C_S -Achse in y -Richtung
e_z	$[\text{m}]$	Lastexzentrizität zur C_S -Achse in z -Richtung
f	$[\text{Hz}]$	Eigenfrequenz
f_D	$[\text{Hz}]$	gedämpfte Eigenfrequenz
f_E	$[\text{Hz}]$	Erregerfrequenz
G	$[\text{N}/\text{m}^2]$	Schubmodul
H	$[-]$	Konstante
i	$[-]$	imaginäre Zahl ($i = \sqrt{-1}$)
I_o	$[\text{m}^4]$	polares Trägheitsmoment
I_t	$[\text{m}^4]$	Torsionsträgheitsmoment
I_y	$[\text{m}^4]$	Trägheitsmoment um die y -Achse
I_z	$[\text{m}^4]$	Trägheitsmoment um die z -Achse
I_φ	$[\text{m}^6]$	Wölbwiderstand
J	$[1/\text{m}]$	Konstante
K	$[-]$	Konstante
l	$[\text{m}]$	Trägerlänge
\bar{m}	$[\text{kg}/\text{m}]$	Masse pro Längeneinheit

M_x	[Nm]	Torsionsmoment
m_x	[Nm/m]	Streckentorsionsmoment
M_y	[Nm]	Biegemoment um die y -Achse
M_z	[Nm]	Biegemoment um die z -Achse
M_φ	[Nm ²]	Wölbbimoment
N	[–]	Anzahl der Eigenfunktionen
n	[–]	Schwingungsform
O	[–]	Ursprung des Koordinatensystems, Steifigkeitsmittelpunkt
$P_n(t)$	[N]	generalisierte Belastung
P_y	[N]	Einzelkraft in y -Richtung
Q_y	[N]	Querkraft in y -Richtung
q_y	[N/m]	Streckenlast in y -Richtung
Q_z	[N]	Querkraft in z -Richtung
q_z	[N/m]	Streckenlast in z -Richtung
q_0	[N/m]	Belastungsamplitude
$q_{z,dyn}$	[N/m]	dynamische Streckenlast in z -Richtung
$q_{z,st}$	[N/m]	statische Streckenlast in z -Richtung
t	[s]	Zeit
v_s	[m]	Verschiebung des Schubmittelpunktes C_s in y -Richtung
w_s	[m]	Verschiebung des Schubmittelpunktes C_s in z -Richtung
x	[m]	Trägerlängskoordinate
\tilde{y}_O	[m]	\tilde{y} -Koordinate des Steifigkeitsmittelpunktes - Grundsystem
y	[m]	Querschnittskoordinate
$Y(t)$	[m]	modale Koordinate
y_L	[m]	y -Koordinate des Lastangriffspunktes
y_M	[m]	y -Koordinate des Massenmittelpunktes C_M
y_S	[m]	y -Koordinate des Schubmittelpunktes C_S
\tilde{z}_O	[m]	\tilde{z} -Koordinate des Steifigkeitsmittelpunktes - Grundsystem
z	[m]	Querschnittskoordinate
z_L	[m]	z -Koordinate des Lastangriffspunktes
z_M	[m]	z -Koordinate des Massenmittelpunktes C_M
z_S	[m]	z -Koordinate des Schubmittelpunktes C_S

Griechische Symbole

Symbol	Einheit	Beschreibung
Δ	[–]	Inkrement
$\delta(t)$	[1/s]	<i>Dirac'sche</i> Deltafunktion
δ_{nm}	[–]	<i>Kronecker-Delta</i>
ζ	[–]	<i>Lehr'sches</i> Dämpfungsmaß
ϑ	[–]	Verdrehung um die Schubmittelpunktachse C_s
ν_E	[rad/s]	Erregerkreisfrequenz
π	[–]	Kreiszahl
ρ	[kg/m ³]	Dichte
σ_i	[N/m ²]	Normalspannung im Querschnittspunkt i
$\phi(x)$	[–]	Eigenfunktion
$\chi(x)$	[–]	Eigenfunktion
$\psi(x)$	[1/m]	Eigenfunktion
ω	[rad/s]	Eigenkreisfrequenz
ω_D	[rad/s]	gedämpfte Eigenkreisfrequenz

Indizes

Symbol	Beschreibung
$(\dot{\cdot})$	Ableitung nach der Zeit
$(\ddot{\cdot})_{,x}$	Ableitung nach der Trägerlängskoordinate x
$(\ddot{\cdot})_{,a}$	geforderte Anzahl der Ableitungen nach x
$(\ddot{\cdot})_i$	Querschnittspunkt i
$(\ddot{\cdot})_m$	m -te Schwingungsform
$(\ddot{\cdot})_n$	n -te Schwingungsform
$(\ddot{\cdot})^D$	komplementärer dynamischer Anteil
$(\ddot{\cdot})^S$	quasistatischer Anteil

Kapitel 1

Einleitung

Die zunehmende Tendenz zum Einsatz neuartiger, leichter und hochwertiger Werkstoffe führt zu immer leichteren und schlankeren Tragkonstruktionen. Dadurch werden die Tragwerke schwingungsempfindlicher bei dynamischen Einwirkungen von Menschen, Maschinen, Verkehr, Wind, Erdbeben, usw. Bei Tragwerken mit offenem oder geschlossenem dünnwandigen Querschnitt, bei welchem Schubmittelpunkt C_S und Massenmittelpunkt C_M nicht zusammenfallen, tritt eine Kopplung von Biege- und Torsionsschwingung auf. Diese Schwingungsantwort eines Tragwerkes wird in der Literatur auch als gekoppelte Biegedrillschwingung bezeichnet.

Die Biegedrillschwingung eines frei drehbar gelagerten Balkens wird von Nowacki [5] beschrieben, wobei freie und erzwungene harmonische Schwingungen untersucht werden. Eine Aufspaltung der Schwingungsantwort in einen quasistatischen und in einen komplementären dynamischen Anteil wird in [1, 2] als deutlicher Vorteil dargestellt. Der quasistatische Anteil wird nach entwickelten Reihenformeln von Rubin [7] berechnet, während der komplementäre dynamische Anteil mit Hilfe des *Duhamel*'schen Faltungsintegrals gelöst wird. Dabei wird die Lösung der Biegedrillschwingungen elastischer kontinuierlicher Träger mit offenem, einfach symmetrischem Querschnitt inkrementell durch Zeitdiskretisierung gefunden. In [1, 2, 5] wird die Kopplung der Biegeschwingung um eine Achse und Torsionsschwingung berücksichtigt. Die freie und erzwungene schiefe Biegedrillschwingung bzw. Biegeschwingungen um zwei aufeinander senkrechte Achsen gekoppelt mit der Torsionsschwingung werden von Luza [4] gezeigt. Die gekoppelte schiefe Biegedrillschwingung eines kontinuierlichen Brückenträgers mit Berücksichtigung der Wirkung des Flüssigkeitstilgers untersucht Reiterer [6].

Im Rahmen dieser Arbeit werden freie und erzwungene Biegedrillschwingungen eines geraden, beidseitig gelenkig gabelgelagerten Balkens mit offenem oder geschlossenem dünnwandigen Querschnitt analysiert. Der Balken besteht aus einem linear elastischen, homogenen, isotropen Werkstoff mit konstanter Massenbelegung ρA . Der Ursprung O des kartesischen Koordinatensystems liegt im Steifigkeitsmittelpunkt, wobei die Achse durch den Schubmittelpunkt C_S bzw. die Schubmittelpunktachse als Drillachse gewählt wird.

Unter der Voraussetzung, dass die Querschnittsform durch den Verformungsvorgang nicht verändert wird, lässt sich die Verschiebung eines materiellen Punktes auf dem starren Querschnitt durch zwei translatorische Verschiebungen des Schubmittelpunktes C_s und Verdrehung um die Schubmittelpunktachse beschreiben. Die Verschiebung des Schubmittelpunktes C_s in y - bzw. z -Richtung wird mit $v_s(x, t)$ bzw. $w_s(x, t)$ und die Verdrehung um die Schubmittelpunktachse wird mit $\vartheta(x, t)$ bezeichnet. Diese drei Verformungsgrößen $v_s(x, t)$, $w_s(x, t)$ und $\vartheta(x, t)$ werden in unendliche Reihen nach den Eigenfunktionen entwickelt und in modale Koordinaten transformiert, um gekoppelte partielle Differentialgleichungen zur Beschreibung der gekoppelten schiefen Biegedrillschwingung zu lösen. Eine Verbesserung der Lösung erfolgt durch Aufspaltung der Verformungsgrößen in einen quasistatischen und in einen komplementären dynamischen Anteil, wobei es möglich wird, den quasistatischen Anteil analytisch exakt zu lösen und die Zahl der Reihenglieder bei der modalen Überlagerung zu reduzieren. Unter Berücksichtigung der linear viskosen Dämpfung mit den modalen Dämpfungskoeffizienten ζ_n wird die Schwingungsantwort inkrementell formuliert.

Im zweiten Teil der Arbeit wird die numerische Untersuchung der Biegedrillschwingung an einem Balken mit offenem bzw. geschlossenem dünnwandigen Querschnitt durchgeführt. Insbesondere wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass der offene und geschlossene Querschnitt fast die gleiche Querschnittsfläche und fast das gleiche Trägheitsmoment bezüglich der y -Achse besitzen. Ausgehend von der Tatsache, dass beide Querschnitte nahezu gleiche Querschnittsflächen aufweisen, hat der Balken in beiden Varianten der Querschnittsform annähernd die gleiche Masse. Im Zuge dieser Analyse werden zwei dynamische Lastfälle untersucht, nämlich die horizontale Anregung durch impulsartige Einzelkraft in Feldmitte und die vertikale Anregung durch zeitlich periodische Streckenlast. Zur Berechnung des quasistatischen Anteils werden die analytischen Lösungen gemäß der Theorie I. Ordnung und die Analogie zum Biegeträger mit Längszugkraft gemäß der Theorie II. Ordnung verwendet. Für jeden Lastfall und jede Querschnittsform werden die zeitliche Verläufe der Verformungsgrößen, der Schnittgrößen und der maximal auftretenden Normalspannung in Balkenmitte dargestellt. Dabei werden auch die zeitliche Verläufe der Schwingungsantwort mit offenem und geschlossenem Querschnitt gegenübergestellt.

Der Text dieser Arbeit ist mit dem Textverarbeitungsprogramm \LaTeX verfasst worden. Mit Hilfe der mathematischen Software *MATLAB R2017b* sind die gesamten numerischen Analysen durchgeführt und zeitliche Verläufe der Schwingungsantwort dargestellt worden. Die restlichen Abbildungen sind durch das Programm *AutoCAD 2017* erstellt worden.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

Es wird ein gerader Träger mit einem unsymmetrischen, dünnwandigen, gemischt offen-geschlossenen Querschnitt betrachtet, der durch beliebig verteilte statische und dynamische Streckenlasten $q_y(x, t)$ und $q_z(x, t)$ belastet wird, wie in Abbildung 2.1 dargestellt.

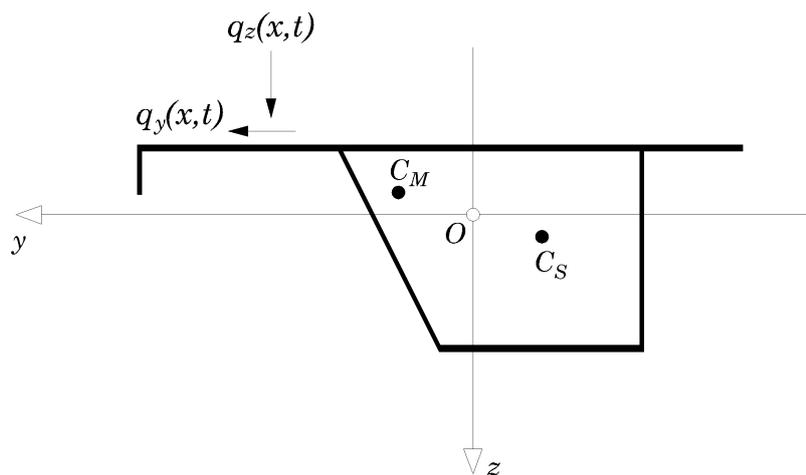


Abb. 2.1: Gemischt offen-geschlossener Querschnitt und beliebige Streckenlast

Der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems ist so gewählt, dass die x -Achse entlang der Schwerpunkte der Querschnittsflächen verläuft. Die y - und z -Achse weisen in Richtung der beiden Trägheitshauptachsen. Eine wesentliche Voraussetzung für das Entstehen der gekoppelten Biegedrillschwingungen ist, dass der Massenmittelpunkt C_M nicht mit dem Schubmittelpunkt C_S zusammenfällt. Im Fall der unsymmetrischen Querschnittsform und der unsymmetrischen Belastung, bei denen der Steifigkeitsmittelpunkt O , der Massenmittelpunkt C_M und der Schubmittelpunkt C_S nicht zusammenfallen, treten Schwingungen in Form von Kopplung der Biege- und Torsionsschwingung auf.

Der Impulssatz in z - bzw. y -Richtung verknüpft die absolute Translationsbeschleunigung des Massenmittelpunktes C_M mit der Resultierenden der auf den Schubmittelpunkt C_S wirkenden Kräfte in Bewegungsrichtung:

$$\begin{aligned} \vec{e}_z : \quad & -Q_z(x, t) + q_z(x, t) dx + \left[Q_z(x, t) + \frac{\partial Q_z(x, t)}{\partial x} dx \right] = \bar{m}(x) dx \left[\frac{\partial^2 w_s(x, t)}{\partial t^2} + \right. \\ & \left. + \left(y_M(x) - y_S(x) \right) \frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (2.3a)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_y : \quad & -Q_y(x, t) + q_y(x, t) dx + \left[Q_y(x, t) + \frac{\partial Q_y(x, t)}{\partial x} dx \right] = \bar{m}(x) dx \left[\frac{\partial^2 v_s(x, t)}{\partial t^2} - \right. \\ & \left. - \left(z_M(x) - z_S(x) \right) \frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (2.3b)$$

Der Drallsatz verbindet die zeitliche Änderung des Dralls mit der Summe der wirkenden Momente bezogen auf den Schubmittelpunkt C_S :

$$\begin{aligned} \hat{C}_S : \quad & -M_x(x, t) + m_x(x, t) dx + \left[M_x(x, t) + \frac{\partial M_x(x, t)}{\partial x} dx \right] = \rho I_o(x) dx \frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial t^2} + \\ & + \bar{m}(x) dx \left(y_M(x) - y_S(x) \right)^2 \frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial t^2} + \bar{m}(x) dx \left(z_M(x) - z_S(x) \right)^2 \frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial t^2} + \\ & + \bar{m}(x) dx \left(y_M(x) - y_S(x) \right) \frac{\partial^2 w_s(x, t)}{\partial t^2} - \bar{m}(x) dx \left(z_M(x) - z_S(x) \right) \frac{\partial^2 v_s(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.3c)$$

Im Folgenden wird einen schlanken, schubstarreren Träger mit linear elastischem Materialverhalten und konstanten Steifigkeiten betrachtet, wobei $y_M(x)$, $z_M(x)$, $y_S(x)$, $z_S(x)$, $A(x)$, $I_y(x)$, $I_z(x)$, $I_o(x)$, $I_\varphi(x)$, $I_t(x)$ und $\bar{m}(x)$ konstant über die Trägerlänge sind. Dividiert man die Gleichungen (2.3) durch dx und führt den Grenzübergang $dx \rightarrow 0$ durch, ergibt sich durch Einsetzen der folgenden konstitutiven Beziehungen, [3, 8]

$$\frac{\partial Q_z(x, t)}{\partial x} = -EI_y \frac{\partial^4 w_s(x, t)}{\partial x^4} \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial Q_y(x, t)}{\partial x} = -EI_z \frac{\partial^4 v_s(x, t)}{\partial x^4} \quad (2.4b)$$

$$\frac{\partial M_x(x, t)}{\partial x} = -EI_\varphi \frac{\partial^4 \vartheta(x, t)}{\partial x^4} + GI_t \frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.4c)$$

das gekoppelte partielle Differentialgleichungssystem in $w_s(x, t)$, $v_s(x, t)$ und $\vartheta(x, t)$

$$EI_y w_s(x, t)_{,xxxx} + \bar{m} \left[\ddot{w}_s(x, t) + c_y \ddot{\vartheta}(x, t) \right] = q_z(x, t) \quad (2.5a)$$

$$EI_z v_s(x, t)_{,xxxx} + \bar{m} \left[\ddot{v}_s(x, t) - c_z \ddot{\vartheta}(x, t) \right] = q_y(x, t) \quad (2.5b)$$

$$EI_\varphi \vartheta(x, t)_{,xxxx} - GI_t \vartheta(x, t)_{,xx} + \bar{m} \left[I_{oc} \ddot{\vartheta}(x, t) + c_y \ddot{w}_s(x, t) - c_z \ddot{v}_s(x, t) \right] = m_x(x, t) \quad (2.5c)$$

mit den eingeführten Abkürzungen

$$c_y = y_M - y_S, \quad c_z = z_M - z_S, \quad I_{oc} = \frac{I_o}{A} + c_y^2 + c_z^2. \quad (2.6)$$

Die hier vorkommenden Produkte aus Werkstoffmodul und Trägheitsmoment werden vier verschiedene Querschnittsteifigkeiten definiert, nämlich die Biegesteifigkeiten in zwei zueinander senkrechten Richtungen EI_y und EI_z , die Wölbsteifigkeit EI_φ und die Torsionssteifigkeit GI_t . Mit c_y und c_z wird der Abstand zwischen Schubmittelpunkt C_S und Massenmittelpunkt C_M in y - bzw. z -Richtung bezeichnet. Weiterhin wird eine Indexschreibweise $(\cdot)_{,x} = \partial(\cdot)/\partial x$ eingeführt, wobei der Index hinter dem Komma die Ableitung nach der Trägerlängskoordinate bezeichnet. Der Überpunkt $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$ ist *Newton'sche* Notation für die Ableitung nach der Zeit. Zur Lösung der Gleichungen (2.5) sind Anfangs- und Rand- bzw. Übergangsbedingung notwendig. Im Fall eines beidseitig gelenkig gabelgelagerten Balkens gelten folgende Randbedingungen, [2, 5]:

$$w(0, t) = 0 \quad w(l, t) = 0 \quad (2.7a)$$

$$M_y(0, t) = -EI_y w(0, t)_{,xx} = 0 \quad M_y(l, t) = -EI_y w(l, t)_{,xx} = 0 \quad (2.7b)$$

$$v(0, t) = 0 \quad v(l, t) = 0 \quad (2.7c)$$

$$M_z(0, t) = -EI_z v(0, t)_{,xx} = 0 \quad M_z(l, t) = -EI_z v(l, t)_{,xx} = 0 \quad (2.7d)$$

$$\vartheta(0, t) = 0 \quad \vartheta(l, t) = 0 \quad (2.7e)$$

$$M_\varphi(0, t) = -EI_\varphi \vartheta(0, t)_{,xx} = 0 \quad M_\varphi(l, t) = -EI_\varphi \vartheta(l, t)_{,xx} = 0 \quad (2.7f)$$

2.2 Freie Schwingung

Das homogene partielle Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten erhält man durch Nullsetzen der rechten Seite von Gleichungen (2.5):

$$EI_y w_s(x, t)_{,xxxx} + \bar{m} \left[\ddot{w}_s(x, t) + c_y \ddot{\vartheta}(x, t) \right] = 0 \quad (2.8a)$$

$$EI_z v_s(x, t)_{,xxxx} + \bar{m} \left[\ddot{v}_s(x, t) - c_z \ddot{\vartheta}(x, t) \right] = 0 \quad (2.8b)$$

$$EI_\varphi \vartheta(x, t)_{,xxxx} - GI_t \vartheta(x, t)_{,xx} + \bar{m} \left[I_{oc} \ddot{\vartheta}(x, t) + c_y \ddot{w}_s(x, t) - c_z \ddot{v}_s(x, t) \right] = 0 \quad (2.8c)$$

In diesem Fall wirken keine äußeren Kräfte $q_z(x, t) = 0$, $q_y(x, t) = 0$, und $m_x(x, t) = 0$ auf den schwingenden Träger, daher handelt es sich um die freie Biegedrillschwingung.

2.2.1 Homogene Lösung der freien ungedämpften Schwingung

Die Lösung des homogenen partiellen Differentialgleichungssystems (2.8) kann mit Hilfe der Separationsansätze von *Bernoulli* gewonnen werden:

$$w_s(x, t) = \phi(x) Y(t), \quad v_s(x, t) = \chi(x) Y(t), \quad \vartheta(x, t) = \psi(x) Y(t). \quad (2.9)$$

Einsetzen von (2.9) in die Gleichungen (2.8) liefert:

$$EI_y \phi(x)_{,xxxx} Y(t) + \bar{m} \left[\phi(x) + c_y \psi(x) \right] \ddot{Y}(t) = 0 \quad (2.10a)$$

$$EI_z \chi(x)_{,xxxx} Y(t) + \bar{m} \left[\chi(x) - c_z \psi(x) \right] \ddot{Y}(t) = 0 \quad (2.10b)$$

$$\left[EI_\varphi \psi(x)_{,xxxx} - GI_t \psi(x)_{,xx} \right] Y(t) + \bar{m} \left[I_{oc} \psi(x) + c_y \phi(x) - c_z \chi(x) \right] \ddot{Y}(t) = 0 \quad (2.10c)$$

Die Trennung der Zeitvariablen von Ortsvariablen liefert:

$$-\frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{EI_y}{\bar{m}} \frac{\phi(x)_{,xxxx}}{\phi(x) + c_y \psi(x)} \equiv \omega^2 \quad (2.11a)$$

$$-\frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{EI_z}{\bar{m}} \frac{\chi(x)_{,xxxx}}{\chi(x) - c_z \psi(x)} \equiv \omega^2 \quad (2.11b)$$

$$-\frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{1}{\bar{m}} \frac{EI_\varphi \psi(x)_{,xxxx} - GI_t \psi(x)_{,xx}}{I_{oc} \psi(x) + c_y \phi(x) - c_z \chi(x)} \equiv \omega^2 \quad (2.11c)$$

Da diese drei Gleichungen (2.11) zu jedem Zeitpunkt t und an jeder Stelle x erfüllt sein müssen, kann es sich bei beiden Seiten nur um dieselbe Konstante handeln, die mit ω^2 bezeichnet wird. Aus dem zeitabhängigen Teil erhält man die Gleichung der freien Schwingung des ungedämpften Einmassenschwingers für die modale Koordinate $Y(t)$:

$$\ddot{Y}(t) + \omega^2 Y(t) = 0 \quad (2.12)$$

wobei ω die Eigenkreisfrequenz ist. Aus den ortsabhängigen Teile der Gleichungen (2.11) ergibt sich ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem für die Eigenfunktionen $\phi(x)$, $\chi(x)$ und $\psi(x)$:

$$\frac{EI_y}{\bar{m}} \phi(x)_{,xxxx} - \omega^2 [\phi(x) + c_y \psi(x)] = 0 \quad (2.13a)$$

$$\frac{EI_z}{\bar{m}} \chi(x)_{,xxxx} - \omega^2 [\chi(x) - c_z \psi(x)] = 0 \quad (2.13b)$$

$$\frac{EI_\varphi}{\bar{m}} \psi(x)_{,xxxx} - \frac{GI_t}{\bar{m}} \psi(x)_{,xx} - \omega^2 [I_{oc} \psi(x) + c_y \phi(x) - c_z \chi(x)] = 0 \quad (2.13c)$$

Die Lösung der Gleichungen (2.13) kann mit den folgenden drei Ansätzen gefunden werden:

$$\phi(x) = K e^{\lambda x}, \quad \chi(x) = H e^{\lambda x}, \quad \psi(x) = J e^{\lambda x}. \quad (2.14)$$

Einsetzen von (2.14) in (2.13) liefert:

$$\left[\frac{EI_y}{\bar{m}} \lambda^4 K - \omega^2 (K + c_y J) \right] e^{\lambda x} = 0 \quad (2.15a)$$

$$\left[\frac{EI_z}{\bar{m}} \lambda^4 H - \omega^2 (H - c_z J) \right] e^{\lambda x} = 0 \quad (2.15b)$$

$$\left[\frac{EI_\varphi}{\bar{m}} \lambda^4 J - \frac{GI_t}{\bar{m}} \lambda^4 J - \omega^2 (I_{oc} J + c_y K - c_z H) \right] e^{\lambda x} = 0 \quad (2.15c)$$

Aus diesem System lauten die Zusammenhänge zwischen den Konstanten K , H und J wie folgt:

$$K = \frac{c_y \omega^2}{\frac{EI_y}{\bar{m}} \lambda^4 - \omega^2} J \quad H = \frac{-c_z \omega^2}{\frac{EI_z}{\bar{m}} \lambda^4 - \omega^2} J \quad (2.16)$$

Verwendung von (2.16) in (2.15c) liefert ein Polynom zwölften Grades

$$k_6 \lambda^{12} + k_5 \lambda^{10} + k_4 \lambda^8 + k_3 \lambda^6 + k_2 \lambda^4 + k_1 \lambda^2 + k_0 = 0 \quad (2.17)$$

mit konstanten Koeffizienten für λ :

$$k_0 = -\omega^6 \bar{m}^3 \frac{I_o}{A}$$

$$k_1 = -\omega^4 \bar{m}^2 GI_t$$

$$k_2 = \omega^4 \bar{m}^2 E \left[I_\varphi + I_{oc} (I_y + I_z) - I_z c_y^2 - I_y c_z^2 \right]$$

$$k_3 = \omega^2 \bar{m} E G I_t (I_y + I_z)$$

$$k_4 = -\omega^2 \bar{m} E^2 \left[I_\varphi (I_y + I_z) + I_y I_z I_{oc} \right]$$

$$k_5 = -E^2 G I_y I_z I_t$$

$$k_6 = E^3 I_y I_z I_\varphi$$

Nach der Substitution $\lambda^2 = \kappa$ führt Gleichung (2.17) auf ein Polynom sechsten Grades, dessen Nullstellen numerisch ermittelt werden können. Aufgrund der Linearität der partiellen Differentialgleichungen (2.13) ergibt sich die vollständige Lösung der Eigenfunktionen durch Superposition:

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{12} \frac{c_y \omega^2}{\frac{EI_y}{\bar{m}} \lambda_j^4 - \omega^2} J_j e^{\lambda_j x} \quad (2.18a)$$

$$\chi(x) = \sum_{j=1}^{12} \frac{-c_z \omega^2}{\frac{EI_z}{\bar{m}} \lambda_j^4 - \omega^2} J_j e^{\lambda_j x} \quad (2.18b)$$

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{12} J_j e^{\lambda_j x} \quad (2.18c)$$

wobei J_1, \dots, J_{12} komplexe Konstanten bezeichnen. Aus der Gleichung (2.17) erkennt man, dass das Polynom nur gerade Potenzen von λ enthält, daher lauten jeweils vier Lösungen:

$$\lambda_{4j-3}, \lambda_{4j-2} = \pm \varepsilon_j \quad \lambda_{4j-1}, \lambda_{4j} = \pm i \varepsilon_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.19)$$

Anstatt der Exponentialfunktionen kann man auch trigonometrische und hyperbolische Funktionen wählen, und zwar mittels der *Eulerschen Formel*, [4, 6, 8]. In diesem Fall lauten die Ansatzfunktionen wie folgt:

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \left[C_{4j-3} \sin \varepsilon_j x + C_{4j-2} \cos \varepsilon_j x + C_{4j-1} \sinh \varepsilon_j x + C_{4j} \cosh \varepsilon_j x \right] \quad (2.20a)$$

$$\chi(x) = \sum_{j=1}^3 \beta_j \left[C_{4j-3} \sin \varepsilon_j x + C_{4j-2} \cos \varepsilon_j x + C_{4j-1} \sinh \varepsilon_j x + C_{4j} \cosh \varepsilon_j x \right] \quad (2.20b)$$

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^3 \left[C_{4j-3} \sin \varepsilon_j x + C_{4j-2} \cos \varepsilon_j x + C_{4j-1} \sinh \varepsilon_j x + C_{4j} \cosh \varepsilon_j x \right] \quad (2.20c)$$

mit Hilfwerten

$$\alpha_j = \frac{c_y \omega^2}{\frac{EI_y}{\bar{m}} \varepsilon_j^4 - \omega^2} \quad \beta_j = \frac{-c_z \omega^2}{\frac{EI_z}{\bar{m}} \varepsilon_j^4 - \omega^2}$$

Um passende Randbedingungen zu erfüllen, benötigt man vier Gleichungen für jede der drei Lagekoordinaten $w(x, t)$, $v(x, t)$ und $\vartheta(x, t)$. Man erhält daher zwölf homogene Gleichungen, deren Koeffizienten in der folgenden Matrix zusammengefasst sind:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

mit den Teilmatrizen

$$\mathbf{A}_{1j} = \alpha_{1j} \begin{bmatrix} \sin_{,a} \varepsilon_j x & \cos_{,a} \varepsilon_j x & \sinh_{,a} \varepsilon_j x & \cosh_{,a} \varepsilon_j x \\ \sin_{,a} \varepsilon_j x & \cos_{,a} \varepsilon_j x & \sinh_{,a} \varepsilon_j x & \cosh_{,a} \varepsilon_j x \\ \sin_{,a} \varepsilon_j x & \cos_{,a} \varepsilon_j x & \sinh_{,a} \varepsilon_j x & \cosh_{,a} \varepsilon_j x \\ \sin_{,a} \varepsilon_j x & \cos_{,a} \varepsilon_j x & \sinh_{,a} \varepsilon_j x & \cosh_{,a} \varepsilon_j x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{2j} = \beta_{2j} \begin{bmatrix} \sin_{,a} \varepsilon_j x & \cos_{,a} \varepsilon_j x & \sinh_{,a} \varepsilon_j x & \cosh_{,a} \varepsilon_j x \\ \sin_{,a} \varepsilon_j x & \cos_{,a} \varepsilon_j x & \sinh_{,a} \varepsilon_j x & \cosh_{,a} \varepsilon_j x \\ \sin_{,a} \varepsilon_j x & \cos_{,a} \varepsilon_j x & \sinh_{,a} \varepsilon_j x & \cosh_{,a} \varepsilon_j x \\ \sin_{,a} \varepsilon_j x & \cos_{,a} \varepsilon_j x & \sinh_{,a} \varepsilon_j x & \cosh_{,a} \varepsilon_j x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{3j} = \begin{bmatrix} \sin_{,a} \varepsilon_j x & \cos_{,a} \varepsilon_j x & \sinh_{,a} \varepsilon_j x & \cosh_{,a} \varepsilon_j x \\ \sin_{,a} \varepsilon_j x & \cos_{,a} \varepsilon_j x & \sinh_{,a} \varepsilon_j x & \cosh_{,a} \varepsilon_j x \\ \sin_{,a} \varepsilon_j x & \cos_{,a} \varepsilon_j x & \sinh_{,a} \varepsilon_j x & \cosh_{,a} \varepsilon_j x \\ \sin_{,a} \varepsilon_j x & \cos_{,a} \varepsilon_j x & \sinh_{,a} \varepsilon_j x & \cosh_{,a} \varepsilon_j x \end{bmatrix}$$

Dabei bedeutet $(\cdot)_{,a}$ die Anzahl der Ableitungen, die speziell für jede Randbedingung benötigt wird. Dieses Gleichungssystem hat nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} verschwindet

$$\det \mathbf{A} = 0, \quad (2.22)$$

woraus sich die transzendente Frequenzgleichung zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenz ω ergibt. Ein Träger mit kontinuierlicher Massenverteilung besitzt unendlich viele Eigenkreisfrequenzen, von denen jedoch baulynamisch nur die niedrigsten ($\omega_n \leq 30 \cdot 2\pi \text{ rad/s}$) von Interesse sind.

2.2.2 Bestimmung der Eigenkreisfrequenz eines frei drehbar gelagerten Balkens

Betrachtet man einen frei drehbar gelagerten Balken mit den Randbedingungen nach Gleichungen (2.7), dann liefert die Eigenwertanalyse die folgenden Eigenfunktionen, [6, 8]:

$$\phi_n(x) = K_n \sin \lambda_n x, \quad \chi_n(x) = H_n \sin \lambda_n x, \quad \psi_n(x) = J_n \sin \lambda_n x, \quad (2.23)$$

$$\text{mit } \lambda_n = \frac{n\pi}{l}.$$

Einsetzen von (2.23) in das gekoppelte Differentialgleichungssystem (2.13) liefert das homogene Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\omega}_n^2 - \omega_n^2 & 0 & -c_y \omega_n^2 \\ 0 & \bar{\bar{\omega}}_n^2 - \omega_n^2 & c_z \omega_n^2 \\ -c_y \omega_n^2 / I_{oc} & c_z \omega_n^2 / I_{oc} & \hat{\omega}_n^2 - \omega_n^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} K_n \\ H_n \\ J_n \end{bmatrix}}_{\vec{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{0}} \quad (2.24)$$

mit den entkoppelten quadratischen Eigenkreisfrequenzen

$$\bar{\omega}_n^2 = \frac{EI_y}{\bar{m}} \lambda_n^4, \quad \bar{\bar{\omega}}_n^2 = \frac{EI_z}{\bar{m}} \lambda_n^4, \quad \hat{\omega}_n^2 = \frac{EI_\varphi \lambda_n^2 + GI_t}{\bar{m} I_{oc}} \lambda_n^2.$$

Durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante $||\mathbf{A}||$ erhält man folgende Frequenzgleichung

$$k_3 \omega_n^6 + k_2 \omega_n^4 + k_1 \omega_n^2 + k_0 = 0 \quad (2.25)$$

mit den Koeffizienten

$$k_0 = \bar{\omega}_n^2 \bar{\omega}_n^2 \hat{\omega}_n^2$$

$$k_1 = - \left(\bar{\omega}_n^2 \bar{\omega}_n^2 + \bar{\omega}_n^2 \hat{\omega}_n^2 + \bar{\omega}_n^2 \hat{\omega}_n^2 \right)$$

$$k_2 = \bar{\omega}_n^2 + \bar{\omega}_n^2 + \hat{\omega}_n^2 - \frac{c_y^2 \bar{\omega}_n^2 + c_z^2 \bar{\omega}_n^2}{I_{oc}}$$

$$k_3 = \frac{c_y^2 + c_z^2}{I_{oc}} - 1$$

Dabei handelt es sich um die kubische Gleichung für das Quadrat der n -ten Eigenkreisfrequenz ω_n^2 , deren drei Lösungen ω_{n1}^2 , ω_{n2}^2 und ω_{n3}^2 numerisch ermittelt werden können. Die Zusammenhänge zwischen den Konstanten K_n , H_n und J_n gemäß (2.16) lauten

$$K_{nj} = \frac{c_y \omega_{nj}^2}{\frac{EI_y}{\bar{m}} \lambda_n^4 - \omega_{nj}^2} J_{nj} \quad H_{nj} = \frac{-c_z \omega_{nj}^2}{\frac{EI_z}{\bar{m}} \lambda_n^4 - \omega_{nj}^2} J_{nj} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.26)$$

wobei die Werte J_{nj} aus den Orthogonalitätsbeziehungen der Eigenfunktionen zu bestimmen sind.

2.2.3 Orthogonalitätsbeziehungen der Eigenfunktionen

Die Eigenschaft der Orthogonalität der Eigenschwingungsformen spielt bei der Modalanalyse der Schwingungssysteme eine wichtige Rolle. Dazu werden zunächst die Gleichungen (2.13) für die n -te und m -te Schwingungsform angeschrieben, dann mit $\phi_m(x)$ bzw. $\chi_m(x)$ bzw. $\psi_m(x)$ und $\phi_n(x)$ bzw. $\chi_n(x)$ bzw. $\psi_n(x)$ multipliziert, [2, 4, 6].

Durch Addition aller drei Gleichungen für n -te bzw. m -te Schwingungsform erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \bar{m} \omega_n^2 \left(\phi_n(x) \phi_m(x) + c_y \psi_n(x) \phi_m(x) \right) + \bar{m} \omega_n^2 \left(\chi_n(x) \chi_m(x) - c_z \psi_n(x) \chi_m(x) \right) + \\ & + \bar{m} \omega_n^2 \left(I_{oc} \psi_n(x) \psi_m(x) + c_y \phi_n(x) \psi_m(x) - c_z \chi_n(x) \psi_m(x) \right) = EI_y \phi_n(x)_{,xxxx} \phi_m(x) \\ & + EI_z \chi_n(x)_{,xxxx} \chi_m(x) + EI_\varphi \psi_n(x)_{,xxxx} \psi_m(x) - GI_t \psi_n(x)_{,xx} \psi_m(x) \end{aligned} \quad (2.27a)$$

$$\begin{aligned} & \bar{m} \omega_m^2 \left(\phi_m(x) \phi_n(x) + c_y \psi_m(x) \phi_n(x) \right) + \bar{m} \omega_m^2 \left(\chi_m(x) \chi_n(x) - c_z \psi_m(x) \chi_n(x) \right) + \\ & + \bar{m} \omega_m^2 \left(I_{oc} \psi_m(x) \psi_n(x) + c_y \phi_m(x) \psi_n(x) - c_z \chi_m(x) \psi_n(x) \right) = EI_y \phi_m(x)_{,xxxx} \phi_n(x) \\ & + EI_z \chi_m(x)_{,xxxx} \chi_n(x) + EI_\varphi \psi_m(x)_{,xxxx} \psi_n(x) - GI_t \psi_m(x)_{,xx} \psi_n(x) \end{aligned} \quad (2.27b)$$

Subtraktion der Gleichung (2.27b) von Gleichung (2.27a) und anschließende Integration über die Trägerlänge l liefert:

$$\begin{aligned} & \bar{m} (\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^l \left[\phi_n(x) \phi_m(x) + c_y \left(\psi_n(x) \phi_m(x) + \phi_n(x) \psi_m(x) \right) + \chi_n(x) \chi_m(x) - \right. \\ & \quad \left. - c_z \left(\psi_n(x) \chi_m(x) + \chi_n(x) \psi_m(x) \right) + I_{oc} \psi_n(x) \psi_m(x) \right] dx = \\ & = \int_0^l \left[EI_y \left(\phi_n(x)_{,xxxx} \phi_m(x) - \phi_m(x)_{,xxxx} \phi_n(x) \right) + EI_z \left(\chi_n(x)_{,xxxx} \chi_m(x) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \chi_m(x)_{,xxxx} \chi_n(x) \right) + EI_\varphi \left(\psi_n(x)_{,xxxx} \psi_m(x) - \psi_m(x)_{,xxxx} \psi_n(x) \right) - \right. \\ & \quad \left. - GI_t \left(\psi_n(x)_{,xx} \psi_m(x) - \psi_m(x)_{,xx} \psi_n(x) \right) \right] dx \end{aligned} \quad (2.28)$$

Berücksichtigt man klassische Randbedingungen, wie z.B. Gleichungen (2.7), dann verschwindet das zweite Integral der Gleichung (2.28) - selbstadjungierter Differentialoperator.

Nach einer entsprechenden Normierung der Eigenfunktionen ergibt sich die folgende verallgemeinerte Orthogonalitätsbeziehung der Eigenfunktionen:

$$\int_0^l \left[\phi_n(x) \phi_m(x) + c_y \left(\psi_n(x) \phi_m(x) + \phi_n(x) \psi_m(x) \right) + \chi_n(x) \chi_m(x) - c_z \left(\psi_n(x) \chi_m(x) + \chi_n(x) \psi_m(x) \right) + I_{oc} \psi_n(x) \psi_m(x) \right] dx = \delta_{nm} \quad (2.29)$$

mit dem *Kronecker-Delta*

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases}$$

Nach Division der Gleichung (2.27a) durch $\bar{m} \omega_n^2$ und Integration über die Trägerlänge l ergibt sich die folgende identische Gleichung oder Identität:

$$\int_0^l \left[\phi_n(x) \phi_m(x) + c_y \left(\psi_n(x) \phi_m(x) + \phi_n(x) \psi_m(x) \right) + \chi_n(x) \chi_m(x) - c_z \left(\psi_n(x) \chi_m(x) + \chi_n(x) \psi_m(x) \right) + I_{oc} \psi_n(x) \psi_m(x) \right] dx = \frac{1}{\bar{m} \omega_n^2} \int_0^l \left[EI_y \phi_n(x),_{xxxx} \phi_m(x) + EI_z \chi_n(x),_{xxxx} \chi_m(x) + EI_\varphi \psi_n(x),_{xxxx} \psi_m(x) - GI_t \psi_n(x),_{xx} \psi_m(x) \right] dx \quad (2.30)$$

Wie bereits im vorherigen Abschnitt erwähnt, werden die Konstanten J_{nj} eines frei drehbar gelagerten Balkens mittels der Orthogonalitätsbeziehungen der Eigenfunktionen bestimmt. Einsetzen von (2.23) in (2.29), unter gleichzeitiger Berücksichtigung von (2.26) liefert:

$$J_{nj} = \sqrt{\frac{2}{l \left[\left(\frac{c_y \omega_{nj}^2}{\bar{\omega}_n^2 - \omega_{nj}^2} \right)^2 + 2 \frac{c_y^2 \omega_{nj}^2}{\bar{\omega}_n^2 - \omega_{nj}^2} + \left(\frac{-c_z \omega_{nj}^2}{\bar{\omega}_n^2 - \omega_{nj}^2} \right)^2 + 2 \frac{c_z^2 \omega_{nj}^2}{\bar{\omega}_n^2 - \omega_{nj}^2} + I_{oc} \right]}} \quad (2.31)$$

2.3 Erzwungene Schwingung

Um die erzwungene Schwingung zu berechnen, werden die Verformungsgrößen $w_s(x, t)$, $v_s(x, t)$ und $\vartheta(x, t)$ in einen quasistatischen $(.)^S$ und in einen komplementären dynamischen Anteil $(.)^D$ unterteilt, [1, 2]:

$$w_s(x, t) = w_s^S(x, t) + w_s^D(x, t) \quad (2.32a)$$

$$v_s(x, t) = v_s^S(x, t) + v_s^D(x, t) \quad (2.32b)$$

$$\vartheta(x, t) = \vartheta^S(x, t) + \vartheta^D(x, t) \quad (2.32c)$$

Einsetzen von (2.32) in das Differentialgleichungssystem (2.5), unter gleichzeitiger Berücksichtigung den Differentialgleichungen des korrespondierenden statischen Problems

$$EI_y w_s^S(x, t)_{,xxxx} = q_z(x, t) \quad (2.33a)$$

$$EI_z v_s^S(x, t)_{,xxxx} = q_y(x, t) \quad (2.33b)$$

$$EI_\varphi \vartheta^S(x, t)_{,xxxx} - GI_t \vartheta^S(x, t)_{,xx} = m_x(x, t) \quad (2.33c)$$

liefert folgende Gleichungen, die den komplementären dynamischen Anteil der Schwingungsantwort beschreiben:

$$EI_y w_s^D(x, t)_{,xxxx} + \bar{m} \left[\ddot{w}_s^D(x, t) + c_y \ddot{\vartheta}^D(x, t) \right] = -\bar{m} \left[\ddot{w}_s^S(x, t) + c_y \ddot{\vartheta}^S(x, t) \right] \quad (2.34a)$$

$$EI_z v_s^D(x, t)_{,xxxx} + \bar{m} \left[\ddot{v}_s^D(x, t) - c_z \ddot{\vartheta}^D(x, t) \right] = -\bar{m} \left[\ddot{v}_s^S(x, t) - c_z \ddot{\vartheta}^S(x, t) \right] \quad (2.34b)$$

$$\begin{aligned} EI_\varphi \vartheta^D(x, t)_{,xxxx} - GI_t \vartheta^D(x, t)_{,xx} + \bar{m} \left[I_{oc} \ddot{\vartheta}^D(x, t) + c_y \ddot{w}_s^D(x, t) - c_z \ddot{v}_s^D(x, t) \right] = \\ = -\bar{m} \left[I_{oc} \ddot{\vartheta}^S(x, t) + c_y \ddot{w}_s^S(x, t) - c_z \ddot{v}_s^S(x, t) \right] \end{aligned} \quad (2.34c)$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems werden die Verformungsfunktionen w_s^S , v_s^S , ϑ^S , w_s^D , v_s^D und ϑ^D in einen einzigen Satz von modalen Koordinaten $Y(t)$ transformiert:

$$w_s^S(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) Y_n(t) \qquad w_s^D(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) Y_n(t) \qquad (2.35a)$$

$$v_s^S(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(x) Y_n(t) \qquad v_s^D(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(x) Y_n(t) \qquad (2.35b)$$

$$\vartheta^S(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) Y_n(t) \qquad \vartheta^D(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) Y_n(t) \qquad (2.35c)$$

Einsetzen der modalen Reihenentwicklungen (2.35) in die Gleichungen (2.34), sowie Multiplikation der Gleichung (2.34a) mit $\phi_m(x)$, Gleichung (2.34b) mit $\chi_m(x)$ und Gleichung (2.34c) mit $\psi_m(x)$ führt auf ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen für die modalen Koordinaten $Y_n(t)$. Addition dieser drei Gleichungen und Integration über die Trägerlänge l liefert:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \left\{ \ddot{Y}_n^D(t) \bar{m} \left[\phi_n(x) \phi_m(x) + c_y \left(\psi_n(x) \phi_m(x) + \phi_n(x) \psi_m(x) \right) + \chi_n(x) \chi_m(x) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - c_z \left(\psi_n(x) \chi_m(x) + \chi_n(x) \psi_m(x) \right) + I_{oc} \psi_n(x) \psi_m(x) \right] + Y_n^D(t) \left[EI_y \phi_n(x)_{,xxxx} \phi_m(x) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + EI_z \chi_n(x)_{,xxxx} \chi_m(x) + EI_\varphi \psi_n(x)_{,xxxx} \psi_m(x) - GI_t \psi_n(x)_{,xx} \psi_m(x) \right] \right\} dx = \\ & = - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \ddot{Y}_n^S(t) \bar{m} \left[\phi_n(x) \phi_m(x) + c_y \left(\psi_n(x) \phi_m(x) + \phi_n(x) \psi_m(x) \right) + \chi_n(x) \chi_m(x) - \right. \\ & \quad \left. - c_z \left(\psi_n(x) \chi_m(x) + \chi_n(x) \psi_m(x) \right) + I_{oc} \psi_n(x) \psi_m(x) \right] dx \end{aligned} \qquad (2.36)$$

Verwendung der Orthogonalitätsbeziehung (2.29) und der Identität (2.30) liefert folgende Schwingungsgleichung für die komplementären modalen Koordinaten:

$$\ddot{Y}_n^D(t) + \omega_n^2 Y_n^D(t) = -\ddot{Y}_n^S(t) \quad (2.37)$$

Zur Ermittlung $Y_n^S(t)$ werden die modalen Reihenentwicklungen (2.35) in die Gleichungen (2.33) eingesetzt. Multipliziert man die Gleichung (2.33a) mit $\phi_m(x)$, Gleichung (2.33b) mit $\chi_m(x)$, sowie Gleichung (2.33c) mit $\psi_m(x)$ und addiert man dieser drei Gleichungen, so erhält man nach Integration über die Trägerlänge l unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsbeziehung (2.29) und der Identität (2.30) folgende Gleichung:

$$Y_n^S(t) = \frac{1}{\bar{m} \omega_n^2} P_n(t) \quad (2.38)$$

mit der generalisierten Belastung:

$$P_n(t) = \int_0^l \left[q_z(x, t) \phi_n(x) + q_y(x, t) \chi_n(x) + m_x(x, t) \psi_n(x) \right] dx \quad (2.39)$$

Einsetzen von (2.38) in Gleichung (2.37) liefert die modale Gleichung der komplementären dynamischen Schwingungsantwort:

$$\ddot{Y}_n^D(t) + \omega_n^2 Y_n^D(t) = -\frac{1}{\bar{m} \omega_n^2} \ddot{P}_n(t) \quad (2.40)$$

Die gesuchte Lösung kann mit Hilfe des *Duhamel*'schen Faltungsintegrals gefunden werden:

$$Y_n^D(t) = Y_n^D(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{Y}_n^D(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t - \frac{1}{\bar{m} \omega_n^3} \int_0^t \ddot{P}_n(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (2.41)$$

Aufgrund der für die Differentialgleichungen (2.33) bereits existierenden analytischen Lösungen werden die quasistatischen Anteile $w_s^S(x, t)$, $v_s^S(x, t)$ und $\vartheta^S(x, t)$ nicht modal entwickelt, sondern exakt analytisch berechnet. Dadurch reduziert sich die Zahl der Reihenglieder bei der modalen Entwicklung der komplementären dynamischen Anteile. Die Berechnung der quasistatischen Verdrehung $\vartheta^S(x, t)$ erfolgt dabei mit Hilfe der Analogie zum Biegeträger mit Längszugkraft nach Theorie II. Ordnung.

2.3.1 Berücksichtigung viskoser Dämpfung

Eine nachträgliche Berücksichtigung der linear viskosen Dämpfung kann durchgeführt werden, sodass die Gleichung (2.37) erweitert wird zu

$$\ddot{Y}_n^D(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{Y}_n^D(t) + \omega_n^2 Y_n^D(t) = -\ddot{Y}_n^S(t) - 2\zeta_n \omega_n \dot{Y}_n^S(t) \quad (2.42)$$

wobei ζ_n der Lehr'sche Dämpfungskoeffizient bezeichnet.

Einsetzen von (2.38) in die Gleichung (2.42) liefert die Differentialgleichung der viskos gedämpften komplementären modalen Koordinate

$$\ddot{Y}_n^D(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{Y}_n^D(t) + \omega_n^2 Y_n^D(t) = -\frac{1}{\bar{m} \omega_n^2} \ddot{P}_n(t) - 2\zeta_n \omega_n \frac{1}{\bar{m} \omega_n^2} \dot{P}_n(t) \quad (2.43)$$

Die gesuchte Lösung kann auch mit Hilfe des *Duhamel*'schen Faltungsintegrals gefunden werden:

$$\begin{aligned} Y_n^D(t) = e^{-\zeta_n \omega_n t} & \left[\left(\cos \omega_{Dn} t + \frac{\omega_n}{\omega_{Dn}} \zeta_n \sin \omega_{Dn} t \right) Y_n^D(0) + \frac{1}{\omega_{Dn}} \sin \omega_{Dn} t \dot{Y}_n^D(0) \right] - \\ & - \frac{1}{\bar{m} \omega_n^2} \frac{1}{\omega_{Dn}} \int_0^t \left(\ddot{P}_n(\tau) + 2\zeta_n \omega_n \dot{P}_n(\tau) \right) e^{-\zeta_n \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_{Dn} (t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.44)$$

wobei

$$\omega_{Dn} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} \quad (2.45)$$

die gedämpfte Eigenkreisfrequenz bezeichnet.

2.4 Inkrementelle Formulierung der Schwingungsantwort

Die Zeitintegration in Gleichung (2.44) erfolgt inkrementell durch Diskretisierung der Zeit. Dabei geht man davon aus, dass die Zustandsgrößen des Trägers zum Anfangszeitpunkt t_a des Zeitintervalls $\Delta t = t_{a+1} - t_a$ vorhanden sind. Die inkrementelle Schwingungsantwort wird im Zeitintervall Δt aus den Anfangsbedingungen zur Zeit t_a und den folgenden bekannten Änderungen der Belastung berechnet, [1, 2]:

$$\Delta q_z(x, \Delta t) = q_z(x, t_{a+1}) - q_z(x, t_a) \quad (2.46a)$$

$$\Delta q_y(x, \Delta t) = q_y(x, t_{a+1}) - q_y(x, t_a) \quad (2.46b)$$

$$\Delta m_x(x, \Delta t) = m_x(x, t_{a+1}) - m_x(x, t_a) \quad (2.46c)$$

Um die Zeitverläufe der Belastungsinkremente im Zeitintervall Δt zu beschreiben, wird folgender Diskretisierungsansatz verwendet:

$$\Delta q_z(x, \bar{\tau}) = \Delta q_z(x) g(\bar{\tau}) \quad (2.47a)$$

$$\Delta q_y(x, \bar{\tau}) = \Delta q_y(x) g(\bar{\tau}) \quad (2.47b)$$

$$\Delta m_x(x, \bar{\tau}) = \Delta m_x(x) g(\bar{\tau}) \quad (2.47c)$$

mit der Rampenfunktion

$$g(\bar{\tau}) = \begin{cases} 1 & \bar{\tau} \geq \Delta t \\ \bar{\tau}/\Delta t & 0 \leq \bar{\tau} \leq \Delta t \\ 0 & \bar{\tau} \leq 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

Daraus erfolgen die zeitabhängigen Erregerterme für die Geschwindigkeit:

$$\Delta \dot{q}_z(x, \bar{\tau}) = \Delta q_z(x) \dot{g}(\bar{\tau}) = \frac{\Delta q_z(x)}{\Delta t} \quad (2.49a)$$

$$\Delta \dot{q}_y(x, \bar{\tau}) = \Delta q_y(x) \dot{g}(\bar{\tau}) = \frac{\Delta q_y(x)}{\Delta t} \quad (2.49b)$$

$$\Delta \dot{m}_x(x, \bar{\tau}) = \Delta m_x(x) \dot{g}(\bar{\tau}) = \frac{\Delta m_x(x)}{\Delta t} \quad (2.49c)$$

und für die Beschleunigung der Belastung im Zeitinkrement:

$$\Delta \ddot{q}_z(x, \bar{\tau}) = \Delta q_z(x) \ddot{g}(\bar{\tau}) = \frac{\Delta q_z(x)}{\Delta t} \left[\delta(0) - \delta(\Delta t) \right] \quad (2.50a)$$

$$\Delta \ddot{q}_y(x, \bar{\tau}) = \Delta q_y(x) \ddot{g}(\bar{\tau}) = \frac{\Delta q_y(x)}{\Delta t} \left[\delta(0) - \delta(\Delta t) \right] \quad (2.50b)$$

$$\Delta \ddot{m}_x(x, \bar{\tau}) = \Delta m_x(x) \ddot{g}(\bar{\tau}) = \frac{\Delta m_x(x)}{\Delta t} \left[\delta(0) - \delta(\Delta t) \right] \quad (2.50c)$$

wobei δ die *Dirac*'sche Deltafunktion bezeichnet. Kombination von (2.44) mit den Gleichungen (2.49) und den Gleichungen (2.50) liefert das Inkrement der komplementären dynamischen Koordinaten:

$$\Delta Y_n^D = \dot{\mathfrak{J}}_n Y_n^D(t_a) + \mathfrak{J}_n \dot{Y}_n^D(t_a) - \frac{1}{\bar{m} \omega_n^2} \mathfrak{D}_n \Delta P_n \quad (2.51)$$

mit dem Inkrement der generalisierten Belastung

$$\Delta P_n = \int_0^l \left[\Delta q_z(x) \phi_n(x) + \Delta q_y(x) \chi_n(x) + \Delta m_x(x) \psi_n(x) \right] dx \quad (2.52)$$

und mit den folgenden Abkürzungen

$$\dot{\mathfrak{J}}_n = e^{-\zeta_n \omega_n \Delta t} \left(\cos \omega_{Dn} \Delta t + \frac{\omega_n}{\omega_{Dn}} \zeta_n \sin \omega_{Dn} \Delta t \right) - 1 \quad (2.53a)$$

$$\mathfrak{J}_n = \frac{1}{\omega_{Dn}} e^{-\zeta_n \omega_n \Delta t} \sin \omega_{Dn} \Delta t \quad (2.53b)$$

$$\mathfrak{D}_n = \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{\Delta t} \left[2 \zeta_n + e^{-\zeta_n \omega_n \Delta t} \left(\frac{\omega_n}{\omega_{Dn}} \sin \omega_{Dn} \Delta t (1 - 2 \zeta_n^2) - 2 \zeta_n \cos \omega_{Dn} \Delta t \right) \right] \quad (2.53c)$$

Das Geschwindigkeitsinkrement der komplementären dynamischen Koordinate ist definiert als

$$\Delta \dot{Y}_n^D = \dot{\mathfrak{J}}_n Y_n^D(t_a) + \mathfrak{J}_n \dot{Y}_n^D(t_a) - \frac{1}{\bar{m} \omega_n^2} \dot{\mathfrak{D}}_n \Delta P_n \quad (2.54)$$

mit den Abkürzungen

$$\dot{\mathfrak{J}}_n = e^{-\zeta_n \omega_n \Delta t} \left(-\frac{\omega_n^2}{\omega_{Dn}} \zeta_n^2 - \omega_{Dn} \right) \sin \omega_{Dn} \Delta t \quad (2.55a)$$

$$\mathfrak{J}_n = e^{-\zeta_n \omega_n \Delta t} \left(\cos \omega_{Dn} \Delta t - \frac{\omega_n}{\omega_{Dn}} \zeta_n \sin \omega_{Dn} \Delta t \right) - 1 \quad (2.55b)$$

$$\dot{\mathfrak{D}}_n = \frac{1}{\Delta t} \left[e^{-\zeta_n \omega_n \Delta t} \left(\cos \omega_{Dn} \Delta t + b_n \sin \omega_{Dn} \Delta t \right) - 1 \right] \quad (2.55c)$$

und

$$b_n = \zeta_n \left[2 \frac{\omega_{Dn}}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega_{Dn}} (1 - 2 \zeta_n^2) \right] \quad (2.56)$$

Durch Addition der exakten quasistatischen Inkremente und der komplementären dynamischen Inkremente erhält man schließlich die Verformungsincremente:

$$\Delta w_s(x) = \Delta w_s^S(x) + \sum_{n=1}^N \Delta Y_n^D \phi_n(x) \quad (2.57a)$$

$$\Delta v_s(x) = \Delta v_s^S(x) + \sum_{n=1}^N \Delta Y_n^D \chi_n(x) \quad (2.57b)$$

$$\Delta \vartheta(x) = \Delta \vartheta^S(x) + \sum_{n=1}^N \Delta Y_n^D \psi_n(x) \quad (2.57c)$$

wobei eine endliche Anzahl von N Eigenfunktionen für die praktische Berechnung berücksichtigt wird.

3.1 Querschnitts- und Materialangaben

Die Stützweite l beträgt 25 m. Die Querschnittsabmessungen sind in der nachstehenden Tabelle 3.1 gelistet.

		Offener Querschnitt	Geschlossener Querschnitt
Breite	b [mm]	4000	3500
Feldbreite	b_F [mm]	2500	1850
Obergurtdicke	t_{OG} [mm]	12	12
Höhe	h [mm]	1000	930
Steghöhe	h_s [mm]	966	906
Stegdick	t_s [mm]	10	10
Untergurtbreite	b_{UG} [mm]	350	1860
Untergurtdicke	t_{UG} [mm]	22	12

Tab. 3.1: Querschnittsabmessungen

Die aus Stahlblechen gefertigten Querschnitte werden durch die folgenden Materialkennwerte beschrieben:

$$\text{Elastizitätsmodul} \quad E = 21000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{Schubmodul} \quad G = 8000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{Dichte} \quad \rho = 7850 \text{ kg/m}^3$$

Die beiden dünnwandigen Querschnitte werden durch ihre Profilmittellinie idealisiert. Nach Idealisierung der Querschnitte werden die für die Spannungsermittlung relevanten Querschnittspunkte nummeriert, wie in Abbildung 3.2 dargestellt.

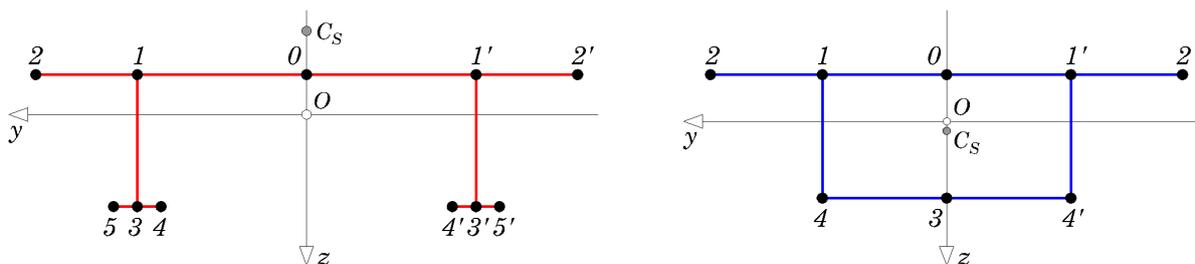


Abb. 3.2: Idealisierung durch Profilmittellinie

Für diese einfachsymmetrischen Querschnitte verlaufen die Koordinaten y sowie Wölbkoordinaten φ antimetrisch bezüglich der z -Achse, wobei die natürliche Drillachse der Schubmittelpunktachse C_s entspricht. Die Querschnittswerte des offenen und geschlossenen dünnwandigen Querschnittes werden nach dem Profilmittellinienmodell berechnet und in der folgenden Tabelle 3.2 zusammengefasst.

		Offener Querschnitt	Geschlossener Querschnitt
Querschnittsfläche	A [cm ²]	830.60	825.60
Trägheitsmoment um y -Achse	I_y [cm ⁴]	1380784.60	1381465.94
Trägheitsmoment um z -Achse	I_z [cm ⁴]	11893845.83	6491590.00
Polares Trägheitsmoment	I_o [cm ⁴]	13274630.43	7873055.94
Wölbwiderstand	I_φ [cm ⁶]	20772322260.53	500630589.92
Torsionsträgheitsmoment	I_t [cm ⁴]	544.39	2345583.80
Steifigkeitsmittelpunktlage O	\tilde{y}_o [mm]	0.00	0.00
	\tilde{z}_o [mm]	298.59	348.92
Schubmittelpunktlage C_s	y_s [mm]	0.00	0.00
	z_s [mm]	-623.11	68.82

Tab. 3.2: Querschnittswerte

Wie aus Tabelle 3.2 zu erkennen ist, sind die Querschnittsabmessungen so gewählt, dass die beiden Querschnittsflächen und die beiden Trägheitsmomente um y -Achse fast gleich groß sind.

3.2 Lastfall 1 - Impulsartige Anregung in horizontaler Richtung

Der Balken wird in Feldmitte durch eine impulsartige Einzelkraft von $P_y(x, t) = 5\,000\text{ kN}$ zu Biegedrillschwingungen angeregt, wie in Abbildung 3.3 dargestellt.

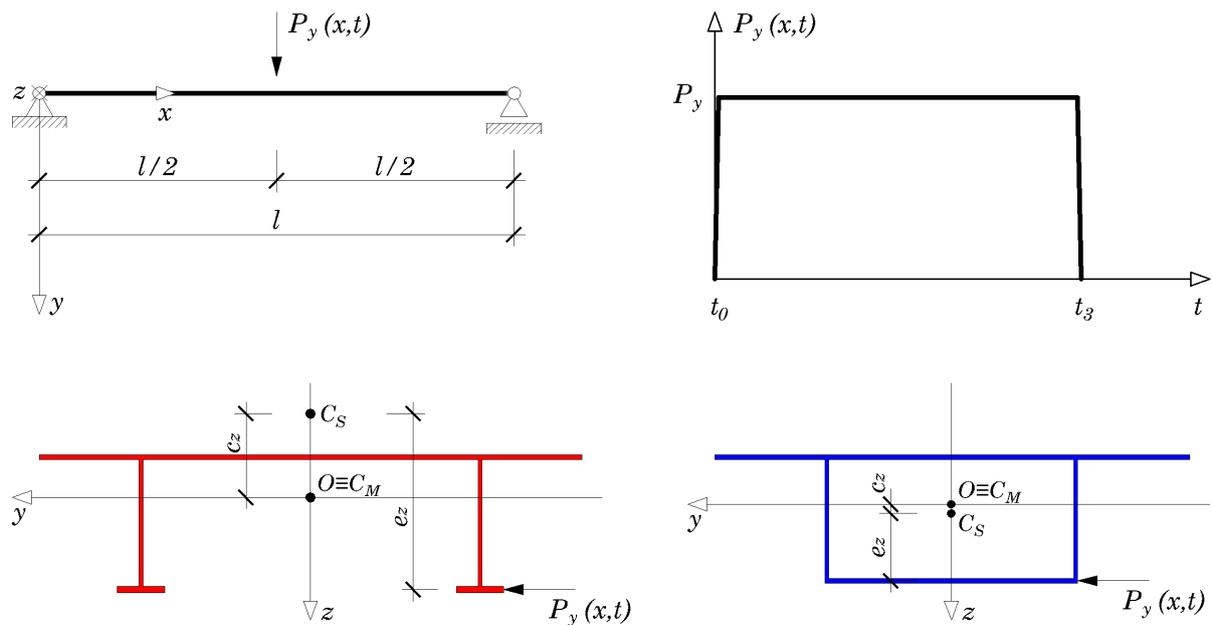


Abb. 3.3: Orts- und Zeitverlauf der Belastung

Die Impulsdauer beträgt 1 ms , wobei folgende Zeitpunkte zu beachten sind:

- $t_0 = 0.00000\text{ s}$ - Anfangszeitpunkt der zunehmenden Belastung
- $t_1 = 0.00009\text{ s}$ - Anfangszeitpunkt der konstanten Belastung
- $t_2 = 0.00099\text{ s}$ - Anfangszeitpunkt der abnehmenden Belastung
- $t_3 = 0.00100\text{ s}$ - Endzeitpunkt der abnehmenden Belastung

Die Lastexzentrizität e_z zur Schubmittelpunktachse C_s ist für die beiden Querschnitte angegeben:

		Offener Querschnitt	Geschlossener Querschnitt
Lastexzentrizität in z -Richtung	e_z [m]	1.30	0.50

Tab. 3.3: Lastexzentrizitäten e_z

Die Masse des tragenden Querschnittes, die Ausbaumasse sowie die Gesamtmasse sind in der folgenden Tabelle 3.4 zusammengefasst. Dabei wird angenommen, dass die Ausbaumasse 20 % der Masse des tragenden Querschnittes beträgt.

			Offener Querschnitt	Geschlossener Querschnitt
Querschnitt	$\bar{m}_{QS} = \rho A$	[kg/m]	652.02	648.10
Ausbaumasse	$\bar{m}_{AM} = 0.2 \cdot \bar{m}_{QS}$	[kg/m]	130.40	129.62
Gesamtmasse	$\bar{m} = \sum \bar{m}_i$	[kg/m]	782.42	777.72

Tab. 3.4: Massen

In diesem Lastfall ist der Massenmittelpunkt C_M identisch mit dem Steifigkeitsmittelpunkt O , wobei die Lage des Massenmittelpunktes C_M in Bezug auf den Schubmittelpunkt C_s durch die in Tabelle 3.5 angeführten Abstände beschrieben wird.

		Offener Querschnitt	Geschlossener Querschnitt
Abstand in y -Richtung	c_y [m]	0.00	0.00
Abstand in z -Richtung	c_z [m]	0.62	-0.07

Tab. 3.5: Abstände zwischen Massenmittelpunkt C_M und Schubmittelpunkt C_s

Die Berechnung der Eigenfrequenzen des gekoppelten Systems erfolgt gemäß Eigenwertanalyse in Unterabschnitt 2.2.2 mit nachträglicher modaler Berücksichtigung des Lehr'schen Dämpfungsmaßes von $\zeta_n = 0.007$. Die gedämpften Eigenfrequenzen $f_{D,nj}$ sind in der folgenden Tabelle 3.6 gelistet.

	Offener Querschnitt		Geschlossener Querschnitt	
	j=1	j=2	j=1	j=2
n=1	15.97	4.18	31.84	10.52
n=2	63.91	16.70	63.86	42.01
n=3	143.79	37.56	98.70	91.93
n=4	255.62	66.76	169.33	127.41
n=5	399.41	104.31	264.09	160.18
n=6	575.15	150.21	380.07	193.24
n=7	782.84	204.44	517.17	226.76
n=8	1022.48	267.02	675.38	260.84

Tab. 3.6: Gedämpfte Eigenfrequenzen $f_{D,nj}$ [Hz]

Bei der Berechnung der Schwingungsantwort von Balken treten nur die komplementären dynamischen Anteile auf, da es sich um freie gedämpfte Biegedrillschwingungen handelt, die nach der Impulsanregung entstehen. Der komplementäre dynamische Anteil der Verformungsgrößen $w_s(x, t)$, $v_s(x, t)$ und $\vartheta(x, t)$ wird gemäß Gleichungen (2.35) modal entwickelt. Mit Hilfe der linearen konstitutiven Beziehungen lassen sich die komplementären dynamischen Biegemomente $M_y^D(x, t)$ und $M_z^D(x, t)$ sowie die Wölbmomente $M_\varphi^D(x, t)$ auch modal entwickeln:

$$M_y^D(x, t) = -EI_y \sum_{n=1}^8 \phi_n(x)_{,xx} Y_n(t) = EI_y \sum_{n=1}^8 K_{nj} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Y_n(t) \quad (3.1a)$$

$$M_z^D(x, t) = -EI_z \sum_{n=1}^8 \chi_n(x)_{,xx} Y_n(t) = EI_z \sum_{n=1}^8 H_{nj} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Y_n(t) \quad (3.1b)$$

$$M_\varphi^D(x, t) = -EI_\varphi \sum_{n=1}^8 \psi_n(x)_{,xx} Y_n(t) = EI_\varphi \sum_{n=1}^8 J_{nj} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) Y_n(t) \quad (3.1c)$$

wobei die Konstanten K_{nj} , H_{nj} und J_{nj} aus den Gleichungen (2.26) und (2.31) berechnet werden.

Die Normalspannungsermittlung an den in Abbildung 3.2 dargestellten Querschnittspunkten erfolgt nach der folgenden Gleichung:

$$\sigma_i(x, t) = \sigma_i(M_y) + \sigma_i(M_z) + \sigma_i(M_\varphi) = \frac{M_y^D(x, t)}{I_y} z_i + \frac{M_z^D(x, t)}{I_z} y_i + \frac{M_\varphi^D(x, t)}{I_\varphi} \varphi_i \quad (3.2)$$

wobei der Index i den Querschnittspunkt bezeichnet.

In den nachfolgenden Unterabschnitten 3.2.1 und 3.2.2 werden die zeitlichen Verläufe der Schwingungsantwort in Balkenmitte mit offenem und geschlossenem Querschnitt dargestellt. Dabei werden die erste Eigenschwingungsform und die ersten acht bzw. die ersten vier ungeraden Eigenschwingungsformen berücksichtigt, da in diesem Fall nur die ungeraden symmetrischen Eigenschwingungsformen maßgebend sind. Ein Vergleich der Schwingungsantworten zwischen Balken mit offenem und geschlossenem Querschnitt wird in Unterabschnitt 3.2.3 gezeigt.

3.2.1 Zeitverläufe der Schwingungsantwort des Balkens mit dem offenen Querschnitt

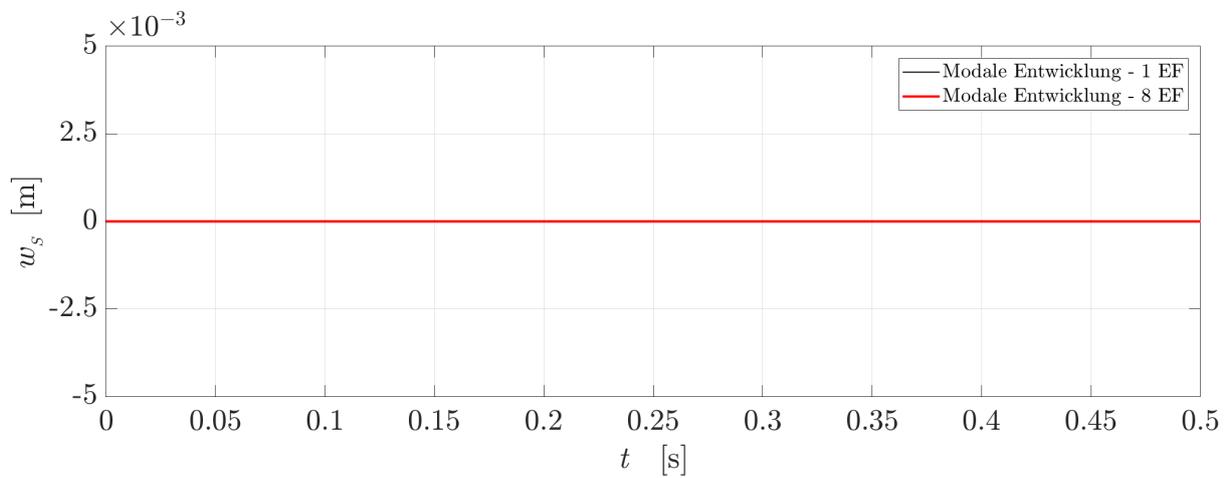


Abb. 3.4: Zeitverlauf der Verschiebung $w_s(x, t)$ in Balkenmitte

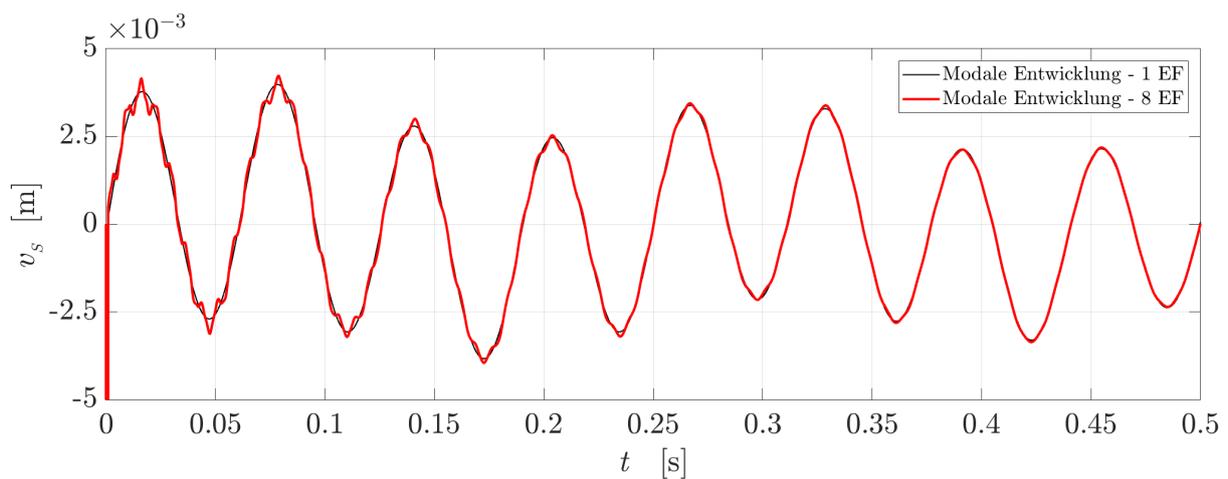


Abb. 3.5: Zeitverlauf der Verschiebung $v_s(x, t)$ in Balkenmitte

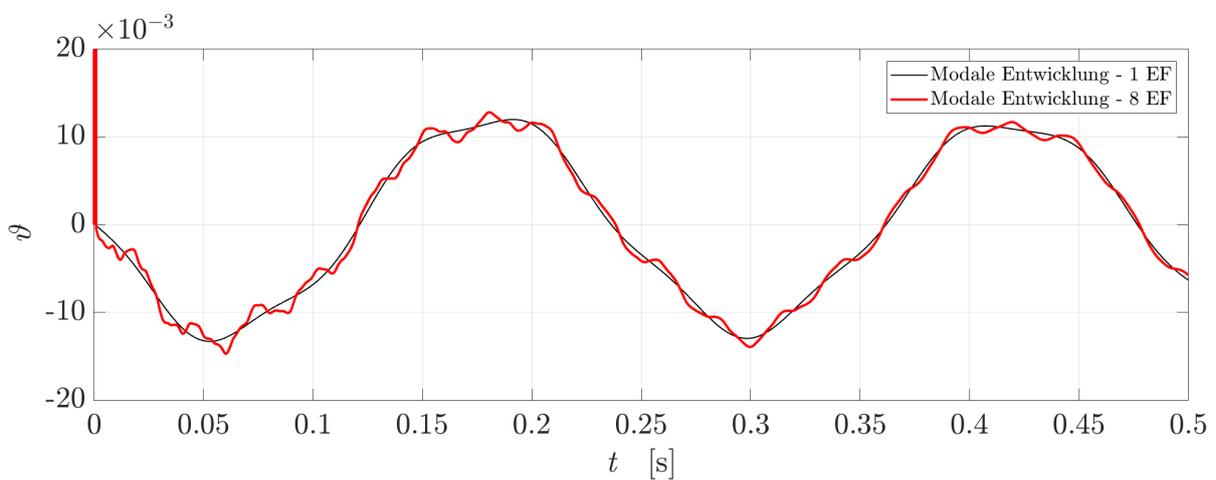


Abb. 3.6: Zeitverlauf der Verdrillung $\vartheta(x, t)$ in Balkenmitte

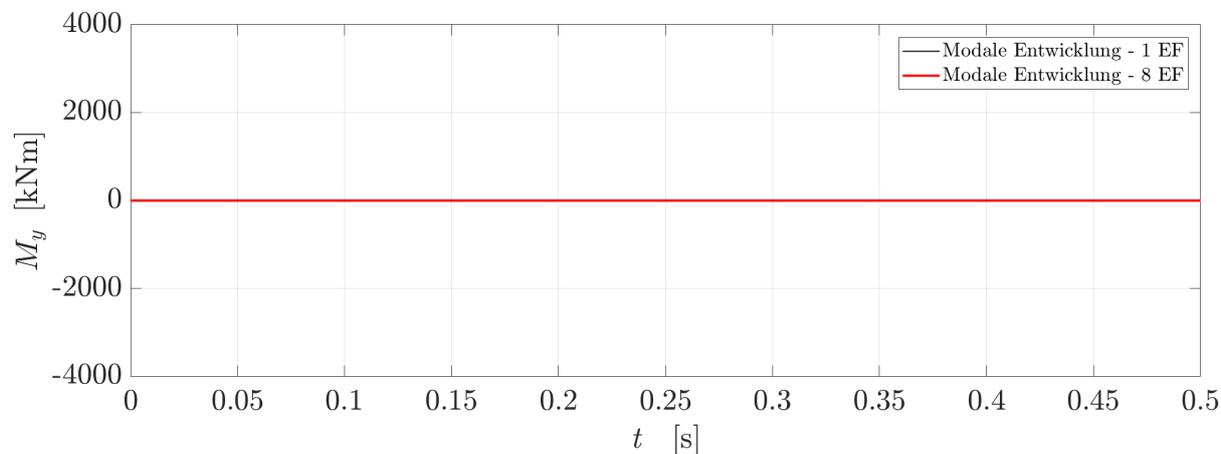


Abb. 3.7: Zeitverlauf des Biegemoments $M_y(x,t)$ in Balkenmitte

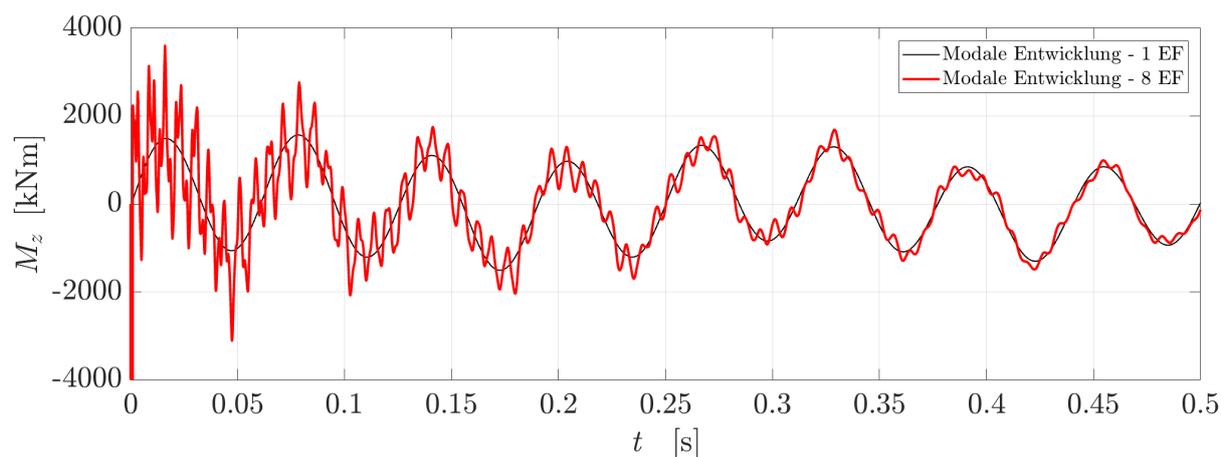


Abb. 3.8: Zeitverlauf des Biegemoments $M_z(x,t)$ in Balkenmitte

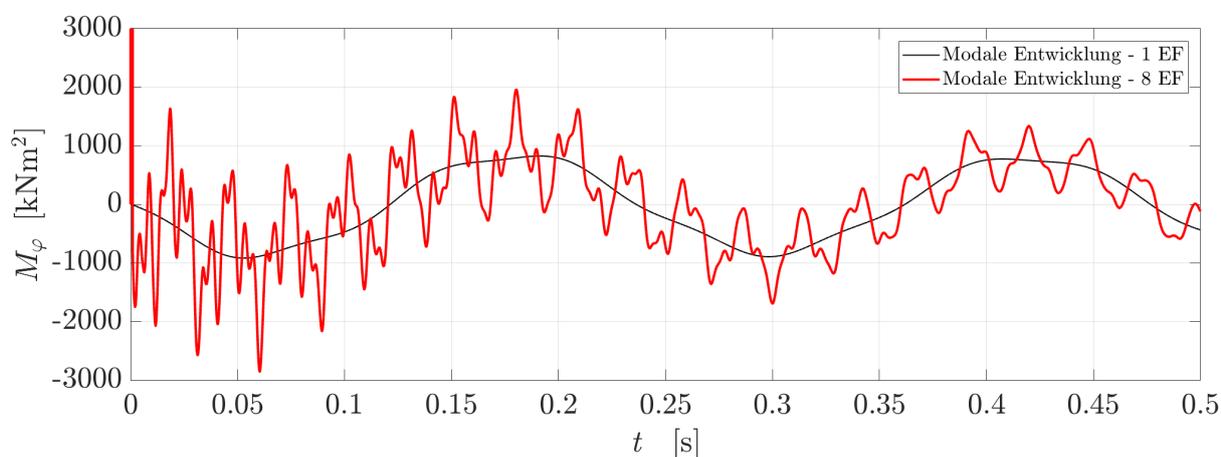


Abb. 3.9: Zeitverlauf des Wölbbimoments $M_\varphi(x,t)$ in Balkenmitte

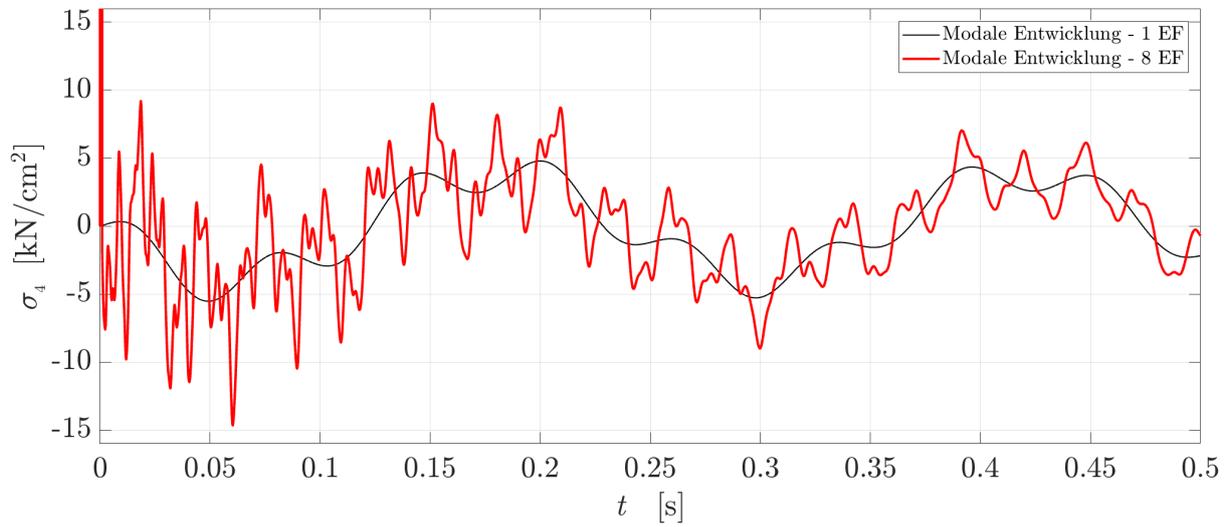


Abb. 3.10: Zeitverlauf der Normalspannung $\sigma_4(x, t)$ im Querschnittspunkt 4

3.2.2 Zeitverläufe der Schwingungsantwort des Balkens mit dem geschlossenen Querschnitt

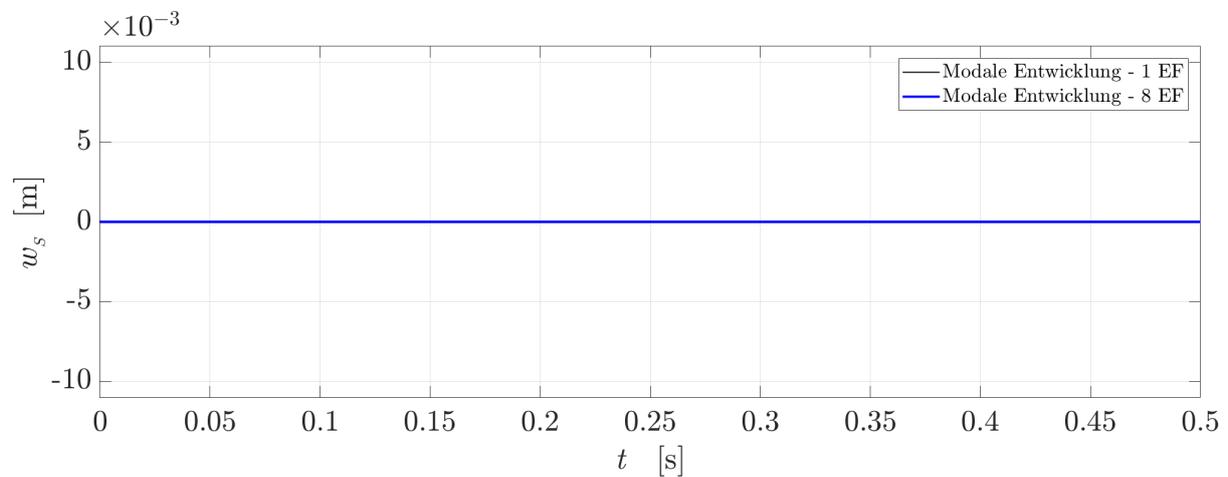


Abb. 3.11: Zeitverlauf der Verschiebung $w_s(x, t)$ in Balkenmitte

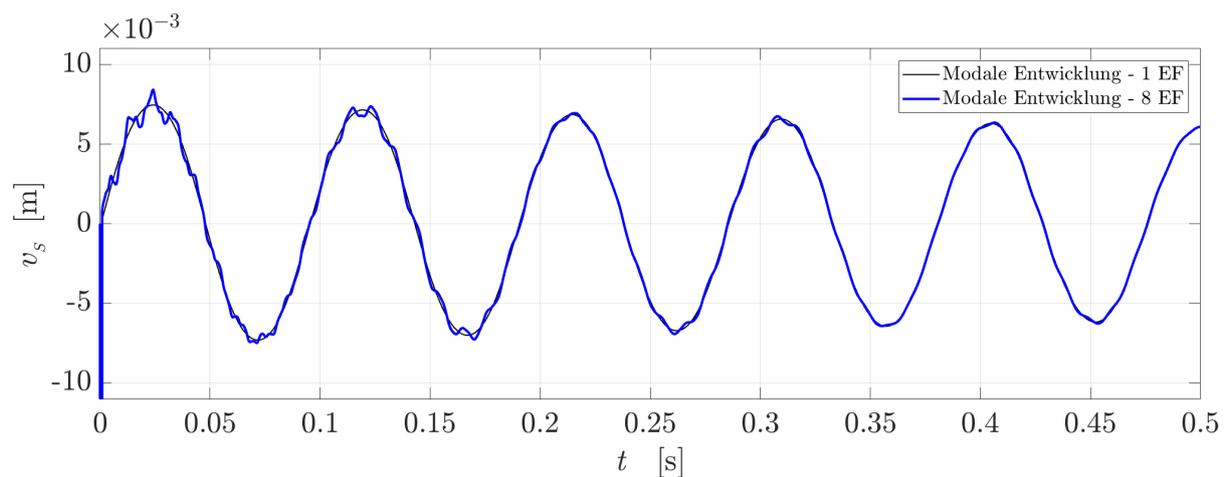


Abb. 3.12: Zeitverlauf der Verschiebung $v_s(x, t)$ in Balkenmitte

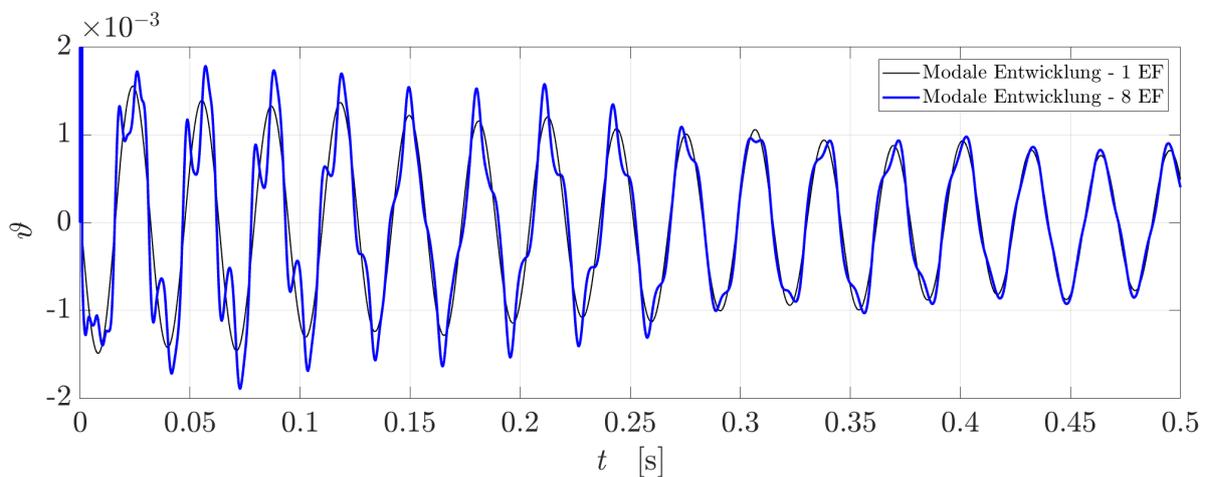


Abb. 3.13: Zeitverlauf der Verdrillung $\vartheta(x, t)$ in Balkenmitte

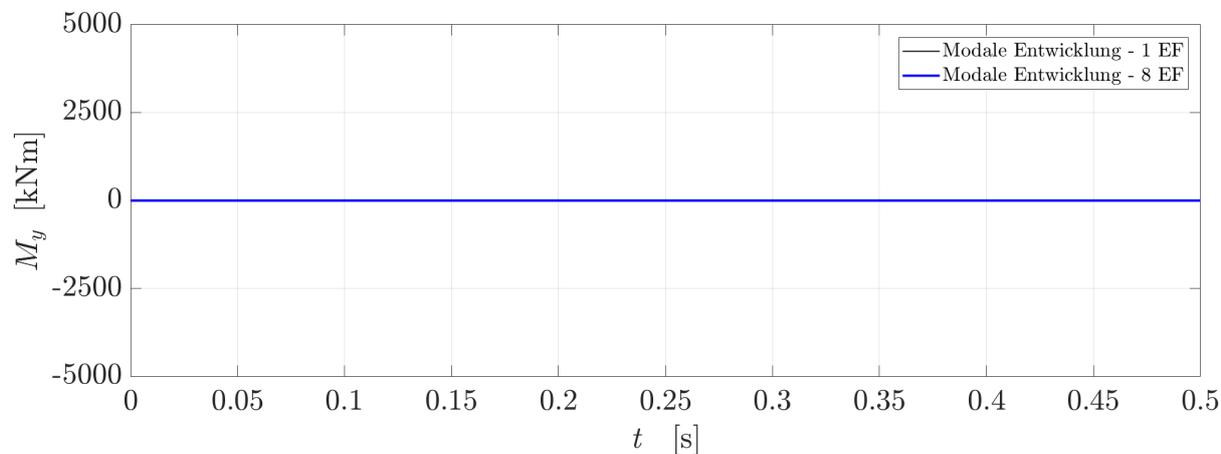


Abb. 3.14: Zeitverlauf des Biegemoments $M_y(x,t)$ in Balkenmitte

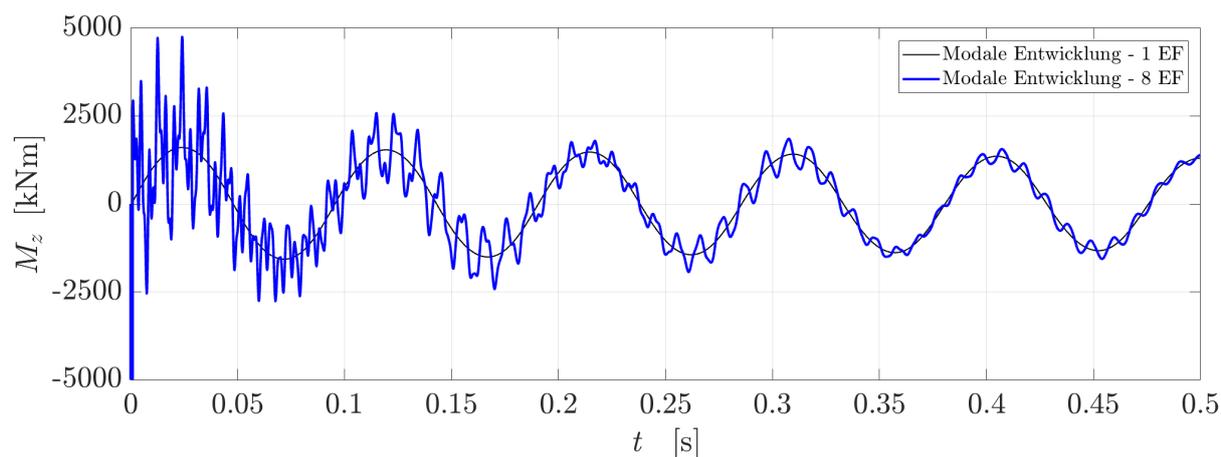


Abb. 3.15: Zeitverlauf des Biegemoments $M_z(x,t)$ in Balkenmitte

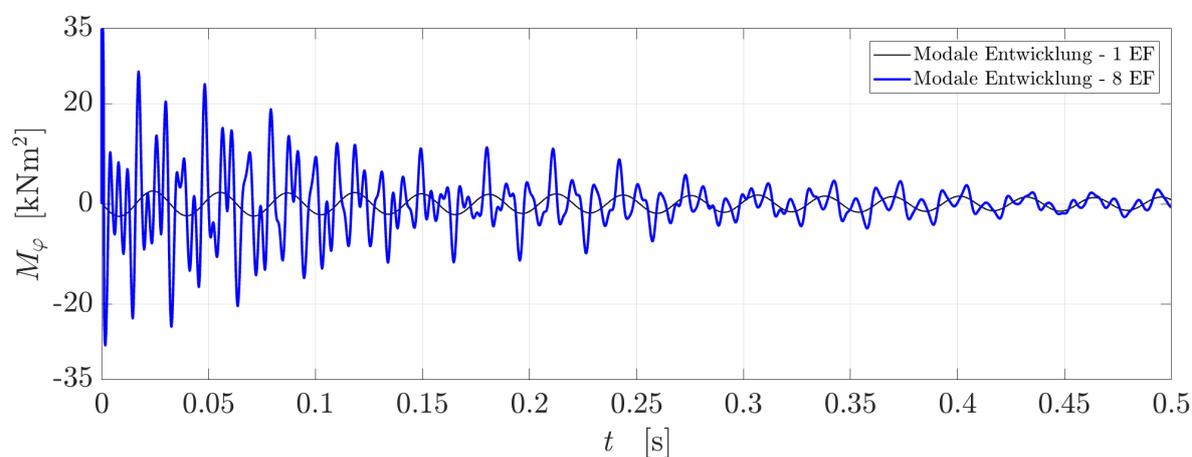


Abb. 3.16: Zeitverlauf des Wölbmoments $M_\varphi(x,t)$ in Balkenmitte

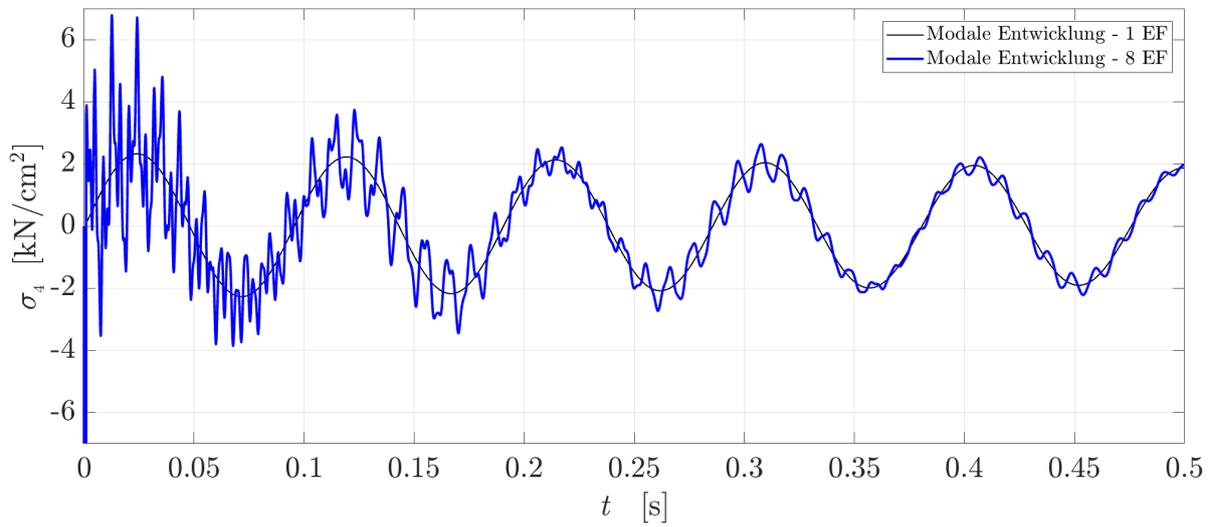


Abb. 3.17: Zeitverlauf der Normalspannung $\sigma_4(x, t)$ im Querschnittspunkt 4

3.2.3 Vergleich der Schwingungsantwort zwischen Balken mit offenem und geschlossenem Querschnitt

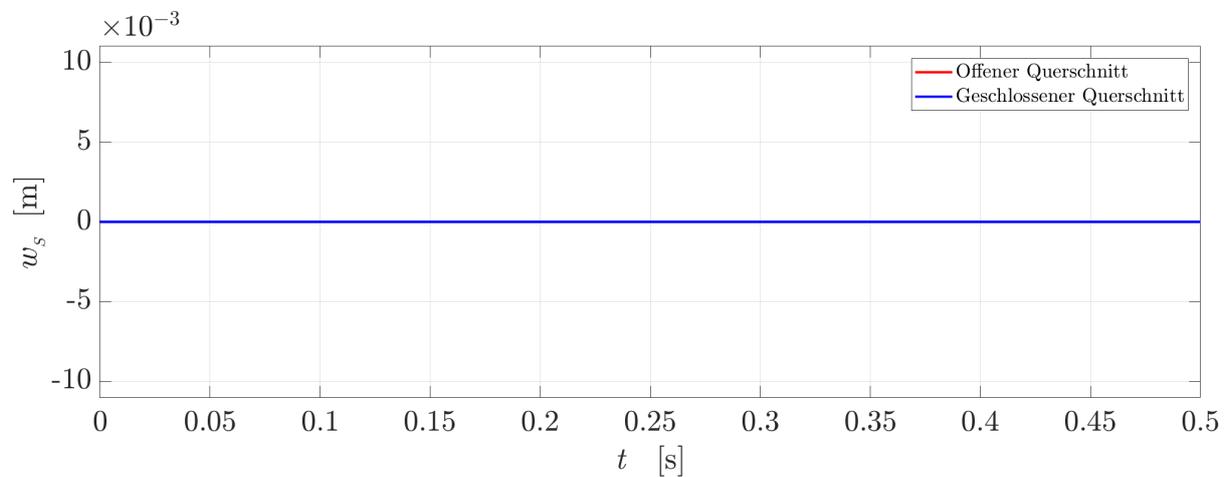


Abb. 3.18: Zeitverlauf der Verschiebung $w_s(x, t)$ in Balkenmitte

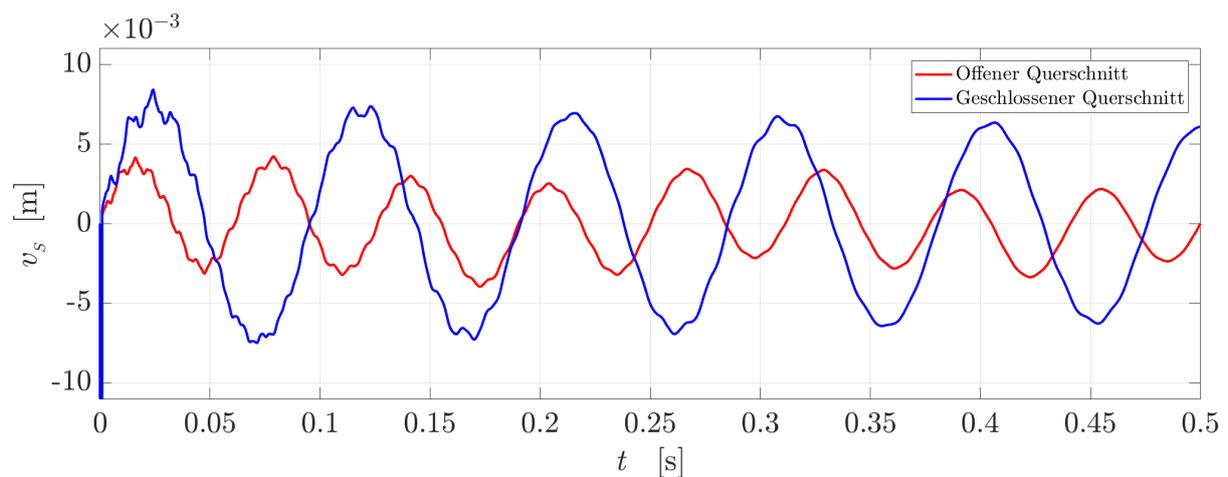


Abb. 3.19: Zeitverlauf der Verschiebung $v_s(x, t)$ in Balkenmitte

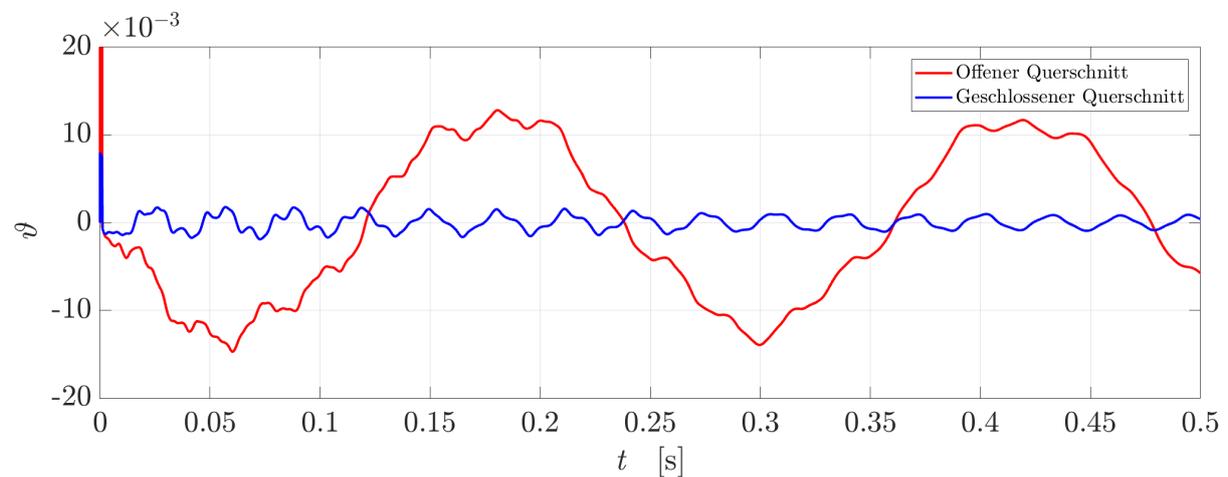


Abb. 3.20: Zeitverlauf der Verdrillung $\vartheta(x, t)$ in Balkenmitte

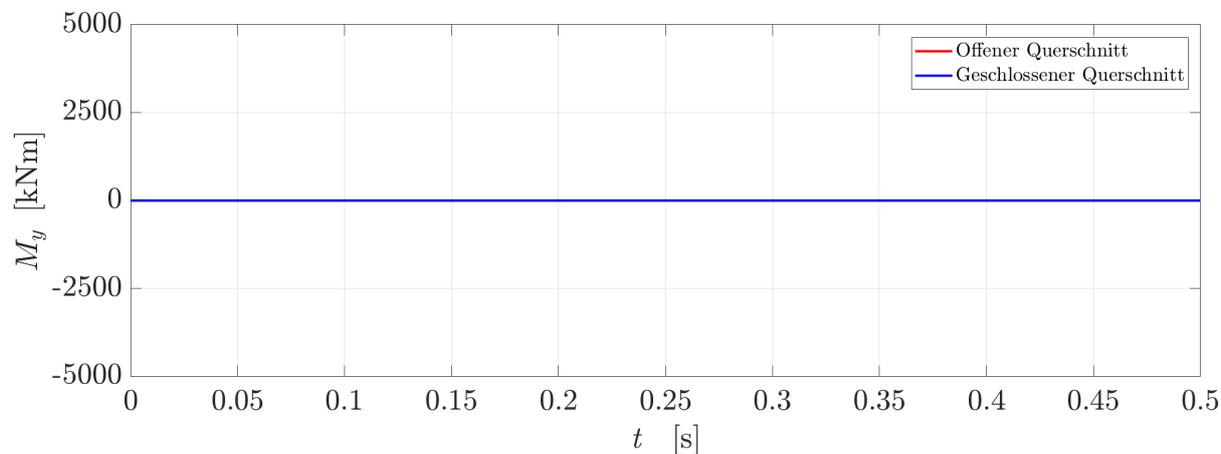


Abb. 3.21: Zeitverlauf des Biegemoments $M_y(x, t)$ in Balkenmitte

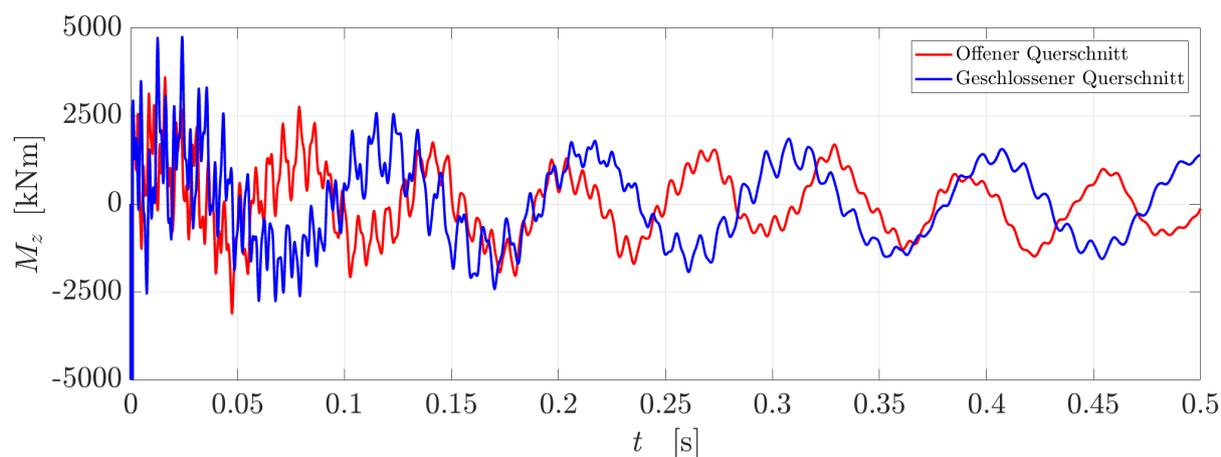


Abb. 3.22: Zeitverlauf des Biegemoments $M_z(x, t)$ in Balkenmitte

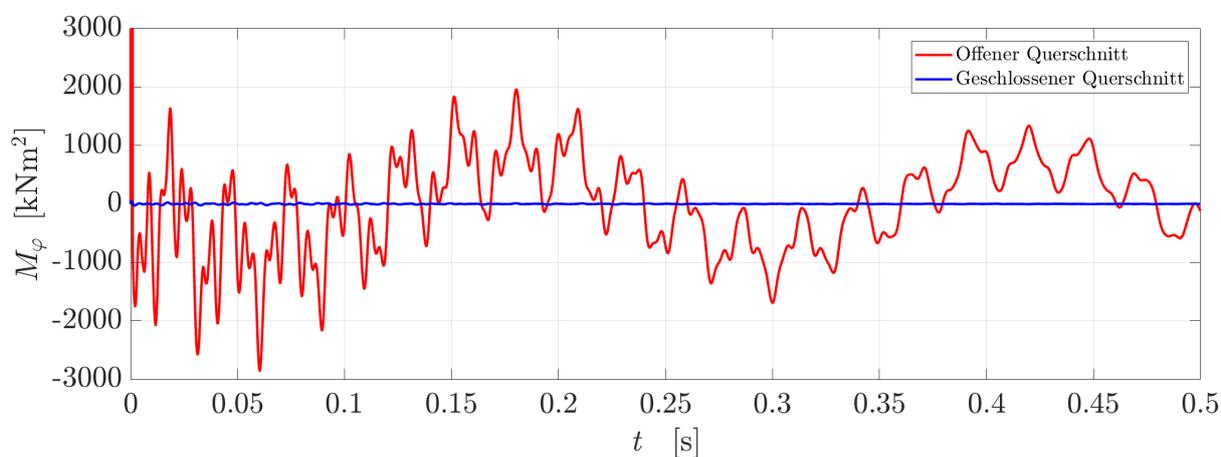


Abb. 3.23: Zeitverlauf des Wölbmoments $M_\varphi(x, t)$ in Balkenmitte

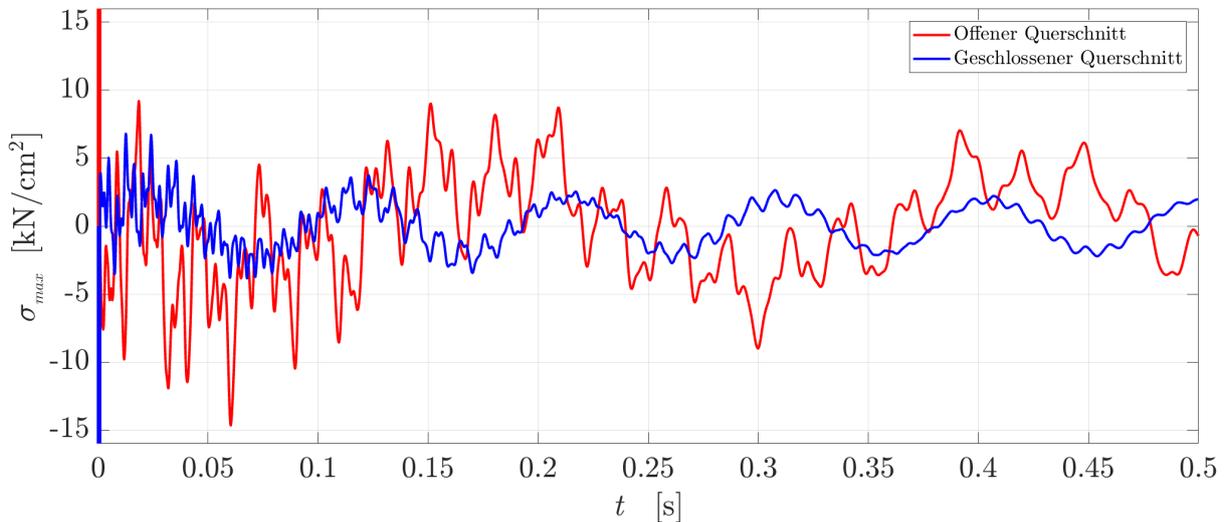


Abb. 3.24: Zeitverlauf der Normalspannung $\sigma_4(x, t)$ im Querschnittspunkt 4

In diesem Lastfall werden freie gedämpfte Biegedrillschwingungen betrachtet, die nach der Impulsanregung entstehen. Die Ermittlung der Schwingungsantwort erfolgt mit einer und mit acht Eigenfunktionen. Während die erste Eigenschwingungsform zur hinreichend genauen Approximation der Verformungsgrößen ausreicht, sind jedoch die ersten acht bzw. ersten vier symmetrischen Eigenschwingungsformen zur Approximation der Schnittgrößen und der Spannungen erforderlich. Aus diesem Grund wurde entschieden, die ersten acht Eigenschwingungsformen zur Approximation der komplementären dynamischen Antwort sowohl im Vergleich der Schwingungsantworten als auch im zweiten Lastfall zu verwenden. Insbesondere wird darauf hingewiesen, dass keine vertikale Verschiebung des Schubmittelpunktes $w_s(x, t)$ und kein Biegemoment um die y -Achse $M_y(x, t)$ auftreten, da weder der Abstand in der y -Richtung zwischen dem Massenmittelpunkt C_M und dem Schubmittelpunkt C_S noch die dynamische Anregung in z -Richtung vorhanden ist. Die horizontalen Verschiebungsamplituden $v_s(x, t)$ und Biegemomentamplituden um die z -Achse $M_z(x, t)$ sind aufgrund der größeren Biegesteifigkeit um die z -Achse bei dem Balken mit offenem Querschnitt kleiner als bei dem Balken mit geschlossenem Querschnitt. Im Gegensatz dazu weist der geschlossene Querschnitt die größere Torsionssteifigkeit auf, die zu wesentlich kleineren Vedrillungsamplituden $\vartheta(x, t)$ und den Wölbmomentamplituden $M_\varphi(x, t)$ führt. Abschließend ist der zeitliche Verlauf der Normalspannung im Querschnittspunkt 4 dargestellt, wobei anzumerken ist, dass die maximalen Spannungen im offenen Querschnitt auftreten.

3.3 Lastfall 2 - Sinusförmige periodische Anregung in vertikaler Richtung

Der Balken ist durch eine statische $q_{z,st}(x)$ und eine dynamische Streckenlast $q_{z,dyn}(x,t)$ belastet, wie in Abbildung 3.25 dargestellt.

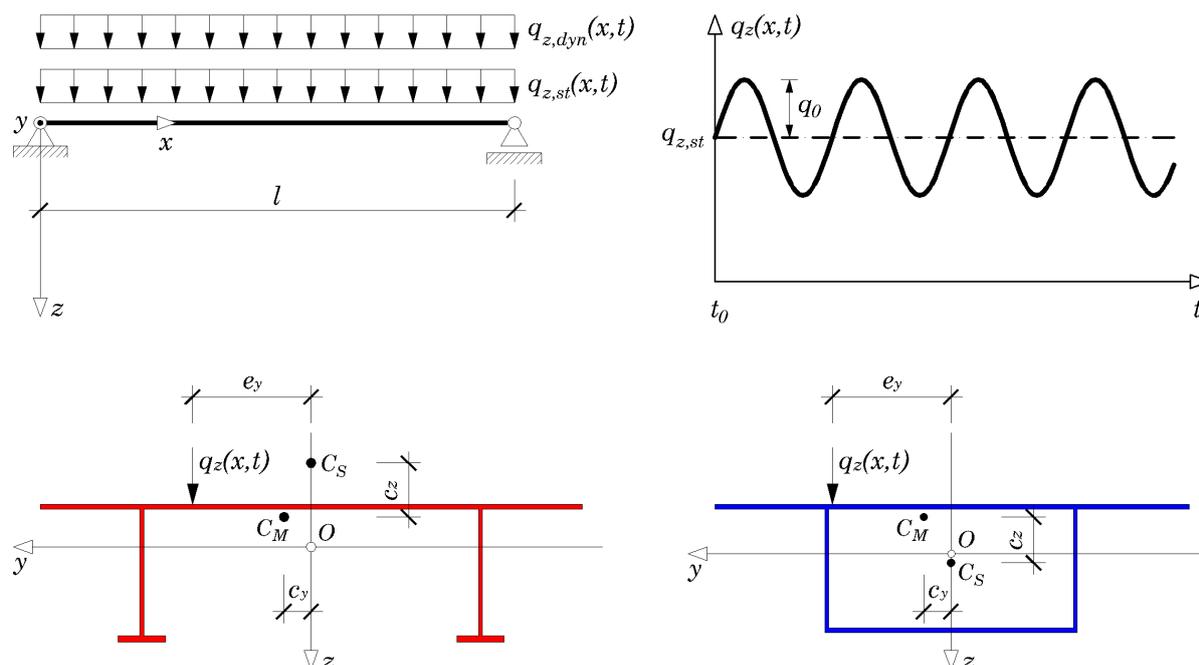


Abb. 3.25: Orts- und Zeitverlauf der Belastung

Eine konstante statische Streckenlast von $q_{z,st}(x) = 2.1 \text{ kN/m}$ wirkt bereits einige Zeit vor dem Zeitpunkt t_0 , ab dem die dynamische Streckenlast $q_{z,dyn}(x,t)$ mit der Erregerfrequenz von $f_E = 2 \text{ Hz}$ auftritt. Die Belastungsamplitude q_0 beträgt 40% der statischen Last $q_{z,st}(x)$. Daraus ergibt sich die folgende gesamte Streckenlast:

$$q_z(x,t) = q_{z,st}(x) + q_{z,dyn}(x,t) = q_{z,st} + q_0 \sin(\nu_E t) = 2.1 + 0.84 \sin(4\pi t) \quad (3.3)$$

wobei $\nu_E = 2\pi \cdot f_E$ die Erregerkreisfrequenz bezeichnet.

Die Lastexzentrizität e_y zur Schubmittelpunktachse C_s ist für die beiden Querschnitte angegeben:

		Offener Querschnitt	Geschlossener Querschnitt
Lastexzentrizität in y -Richtung	e_y [m]	0.875	0.875

Tab. 3.7: Lastexzentrizitäten e_y

In der folgenden Tabelle 3.8 sind die Masse des tragenden Querschnittes, die Ausbaumasse, die Masse aus Lastfall und Gesamtmasse zusammengefasst, wobei die Ausbaumasse mit 20 % der Masse des tragenden Querschnittes anzunehmen ist.

			Offener Querschnitt	Geschlossener Querschnitt
Querschnitt	$\bar{m}_{QS} = \rho A$	[kg/m]	652.02	648.10
Ausbaumasse	$\bar{m}_{AM} = 0.2 \cdot \bar{m}_{QS}$	[kg/m]	130.40	129.62
Statische Last	$\bar{m}_{SL} = q_{z,st} \cdot 10^2$	[kg/m]	210.00	210.00
Gesamtmasse	$\bar{m} = \sum \bar{m}_i$	[kg/m]	992.42	987.72

Tab. 3.8: Massen

Durch die exzentrische statische Last $q_{z,st}(x)$ ergibt sich eine exzentrische Lage des Massenmittelpunktes C_M gegen den Steifigkeitsmittelpunkt O . Die Lage des Massenmittelpunktes C_M in Bezug auf den Schubmittelpunkt C_s wird durch die in Tabelle 3.9 angeführten Abstände beschrieben.

		Offener Querschnitt	Geschlossener Querschnitt
Abstand in y -Richtung	c_y [m]	0.20	0.20
Abstand in z -Richtung	c_z [m]	0.40	-0.35

Tab. 3.9: Abstände zwischen Massenmittelpunkt C_M und Schubmittelpunkt C_s

Aufgrund der Querschnitts- und Materialangaben sowie unter Berücksichtigung des Lehr'schen Dämpfungsmaßes von $\zeta_n = 0.03$ ergeben sich die folgenden gedämpften Eigenfrequenzen $f_{D,nj}$ für die ersten acht Eigenschwingungsformen:

	Offener Querschnitt			Geschlossener Querschnitt		
	j=1	j=2	j=3	j=1	j=2	j=3
n=1	13.29	4.50	3.78	28.48	9.26	4.30
n=2	53.14	18.00	15.10	59.22	35.72	17.18
n=3	119.58	40.49	33.96	101.10	71.01	38.53
n=4	212.58	71.98	60.37	166.57	103.23	67.99
n=5	332.15	112.46	94.32	254.50	134.83	104.39
n=6	478.30	161.94	135.81	363.05	172.29	143.17
n=7	651.02	220.42	184.86	491.74	223.19	177.34
n=8	850.31	287.89	241.44	640.40	286.62	208.06

Tab. 3.10: Gedämpfte Eigenfrequenzen $f_{D,nj}$ [Hz]

Die zeitliche Antwort des Systems unter statischer Wirkung $q_{z,st}(x)$ und die quasistatische Antwort sind mittels der analytischen Lösungsformeln exakt zu berechnen, während die komplementäre dynamische Schwingungsantwort nach den Eigenfunktionen zu entwickeln sind. Der statische bzw. quasistatische Anteil der Verschiebung $w_s(x, t)$ und des Biegemoments $M_y(x, t)$ wird nach Theorie I. Ordnung wie folgt berechnet, [7]:

$$w_s^S(\xi) = \frac{\xi \xi'}{24} (1 + \xi \xi') \frac{q_z l^4}{EI_y} \quad (3.4)$$

$$M_y^S(\xi) = \frac{1}{2} \xi \xi' q_z l^2 \quad (3.5)$$

Dabei ist

$$q_z = q_{z,st} \quad \text{für die statische Last } q_{z,st}$$

$$q_z = q_0 \quad \text{für den quasistatischen Anteil } q_0$$

Der statische bzw. quasistatische Anteil der Verdrehung $\vartheta(x, t)$ und des Wölbmoments $M_\varphi(x, t)$ wird mit Hilfe der Analogie zum Biegeträger mit Längszugkraft nach Theorie II. Ordnung bestimmt, [3, 7]:

$$\vartheta^S(\xi) = \left[\frac{1}{2} \xi \xi' - \frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{\cosh \varepsilon(0.5 - \xi)}{\cosh \varepsilon/2} \right) \right] \frac{m_x l^2}{GI_t} \quad (3.6)$$

$$M_\varphi^S(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{\cosh \varepsilon(0.5 - \xi)}{\cosh \varepsilon/2} \right) m_x l^2 \quad (3.7)$$

mit der Stabkennzahl (Abklinggrad) $\varepsilon = l \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\varphi}}$.

Dabei ist

$$m_x = q_{z,st} \cdot e_y \quad \text{für die statische Last } q_{z,st}$$

$$m_x = q_0 \cdot e_y \quad \text{für den quasistatischen Anteil } q_0$$

Die Werte $\xi = x/l$ und $\xi' = 1 - \xi$ bezeichnen die Stelle, wo die Funktionen berechnet werden.

Die komplementären dynamischen Verformungsgrößen $w_s^D(x, t)$, $v_s^D(x, t)$ und $\vartheta^D(x, t)$ sowie die komplementären dynamischen Schnittgrößen $M_y^D(x, t)$, $M_z^D(x, t)$ und $M_\varphi^D(x, t)$ werden gemäß Gleichungen (2.35) und (3.1) modal entwickelt. Durch Addition aller Anteile erhält man die gesamte Biegemomente $M_y(x, t)$ und $M_z(x, t)$ sowie das gesamte Wölbmoment $M_\varphi(x, t)$:

$$M_y(x, t) = M_y^S(x, t) + M_y^D(x, t) \quad (3.8a)$$

$$M_z(x, t) = M_z^D(x, t) \quad (3.8b)$$

$$M_\varphi(x, t) = M_\varphi^S(x, t) + M_\varphi^D(x, t) \quad (3.8c)$$

Die Ermittlung der gesamten Normalspannung an den in Abbildung 3.2 dargestellten Querschnittspunkten erfolgt nach der folgenden Gleichung:

$$\sigma_i(x, t) = \sigma_i(M_y) + \sigma_i(M_z) + \sigma_i(M_\varphi) = \frac{M_y(x, t)}{I_y} z_i + \frac{M_z(x, t)}{I_z} y_i + \frac{M_\varphi(x, t)}{I_\varphi} \varphi_i \quad (3.9)$$

wobei der Index i den Querschnittspunkt bezeichnet.

Die zeitlichen Verläufe der Schwingungsantwort in Balkenmitte mit offenem und geschlossenem Querschnitt werden in den nachfolgenden Unterabschnitten 3.3.1 und 3.3.2 dargestellt. Dabei werden die ersten acht bzw. die ersten vier symmetrischen Eigenschwingungsformen berücksichtigt. Ein Vergleich der Schwingungsantworten zwischen Balken mit offenem und geschlossenem Querschnitt wird in Unterabschnitt 3.3.3 gezeigt.

3.3.1 Zeitverläufe der Schwingungsantwort des Balkens mit dem offenen Querschnitt

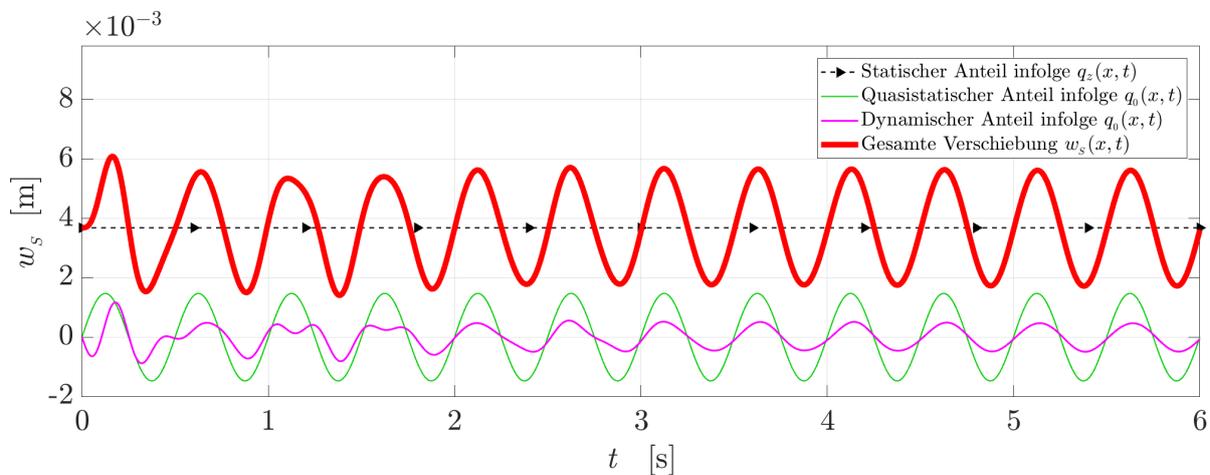


Abb. 3.26: Zeitverlauf der Verschiebung $w_s(x,t)$ in Balkenmitte

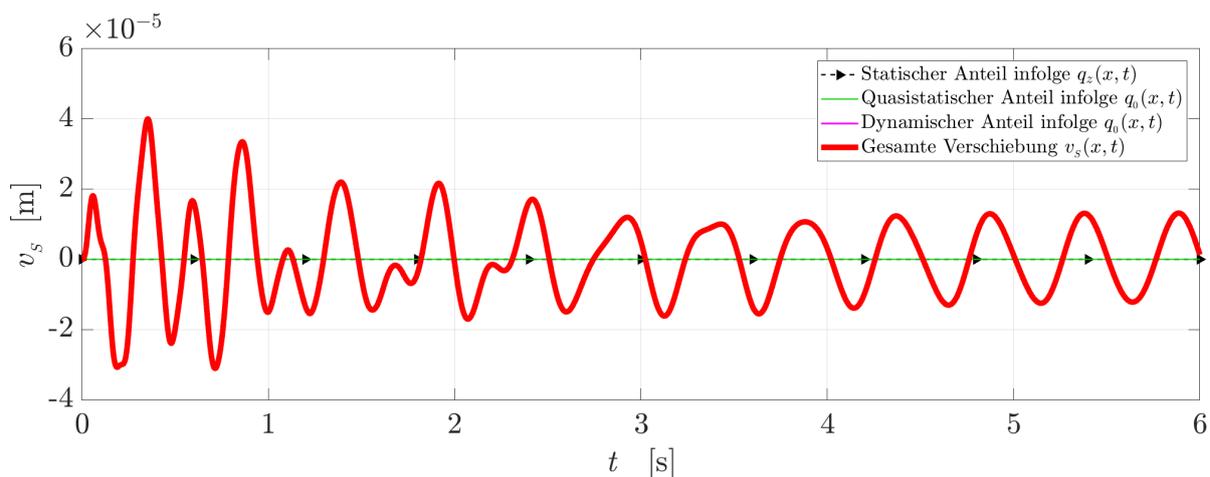


Abb. 3.27: Zeitverlauf der Verschiebung $v_s(x,t)$ in Balkenmitte

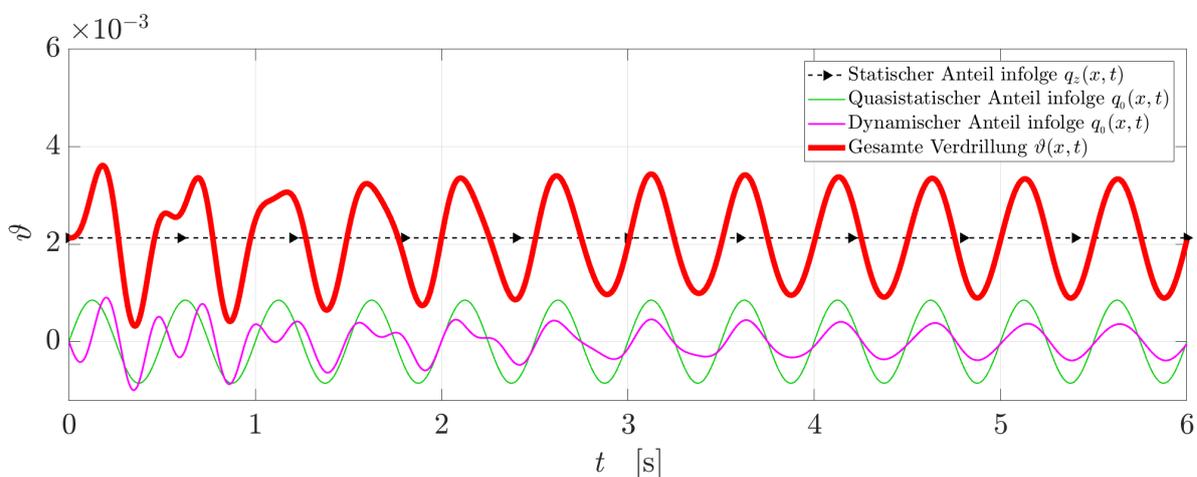


Abb. 3.28: Zeitverlauf der Verdrillung $\vartheta(x,t)$ in Balkenmitte

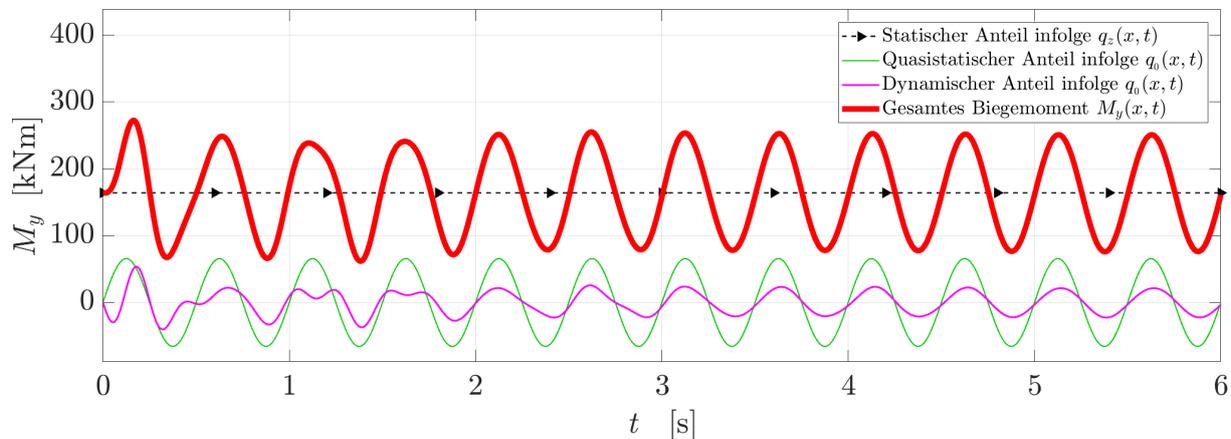


Abb. 3.29: Zeitverlauf des Biegemoments $M_y(x, t)$ in Balkenmitte

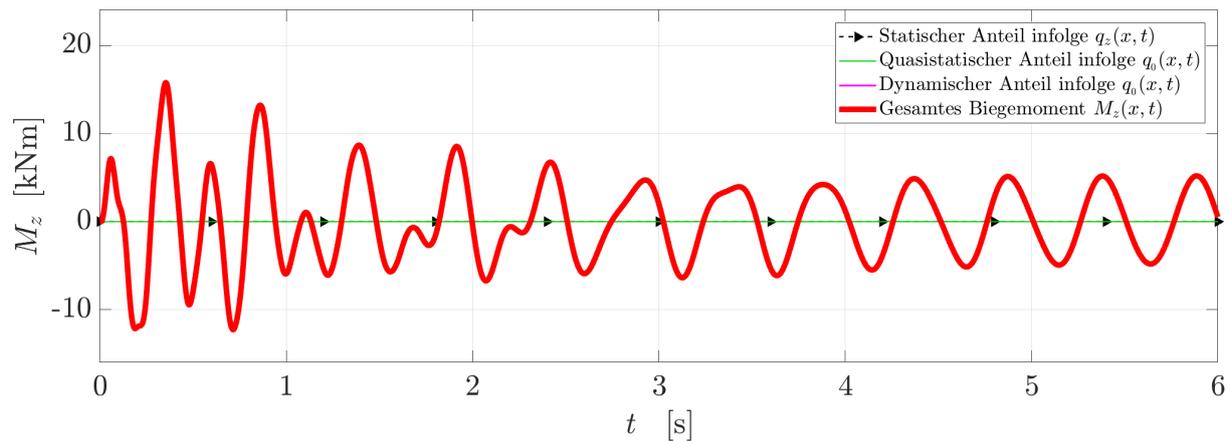


Abb. 3.30: Zeitverlauf des Biegemoments $M_z(x, t)$ in Balkenmitte

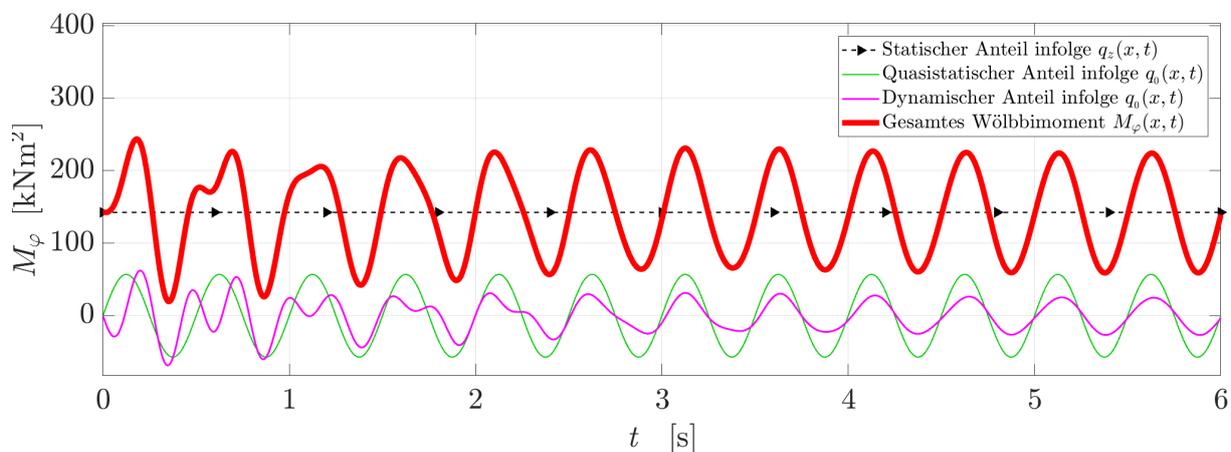


Abb. 3.31: Zeitverlauf des Wölbmoments $M_\varphi(x, t)$ in Balkenmitte

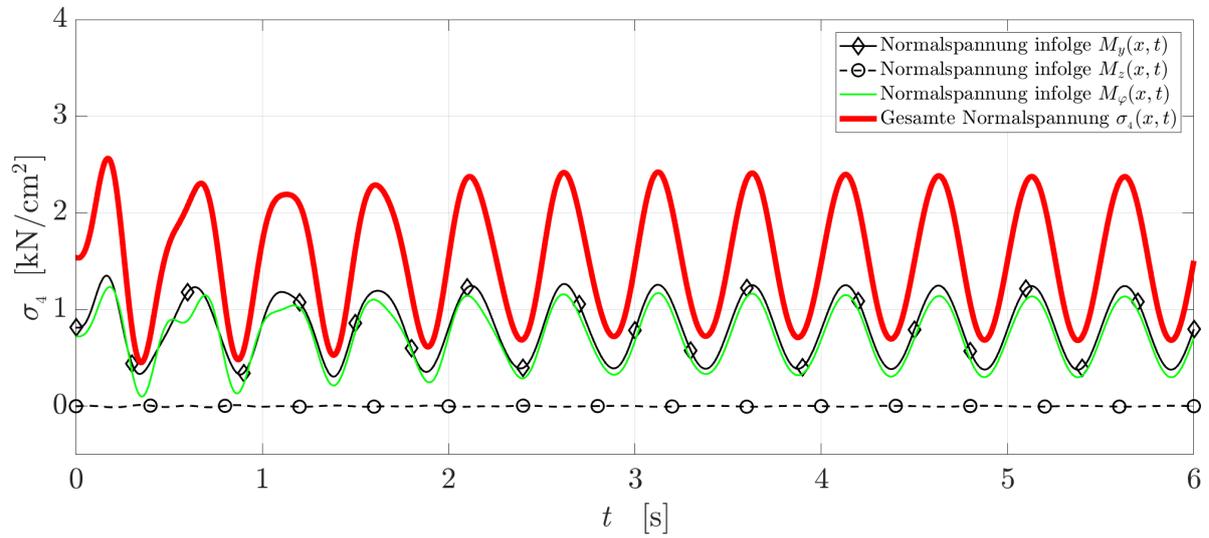


Abb. 3.32: Zeitverlauf der Normalspannung $\sigma_4(x, t)$ im Querschnittspunkt 4

3.3.2 Zeitverläufe der Schwingungsantwort des Balkens mit dem geschlossenen Querschnitt

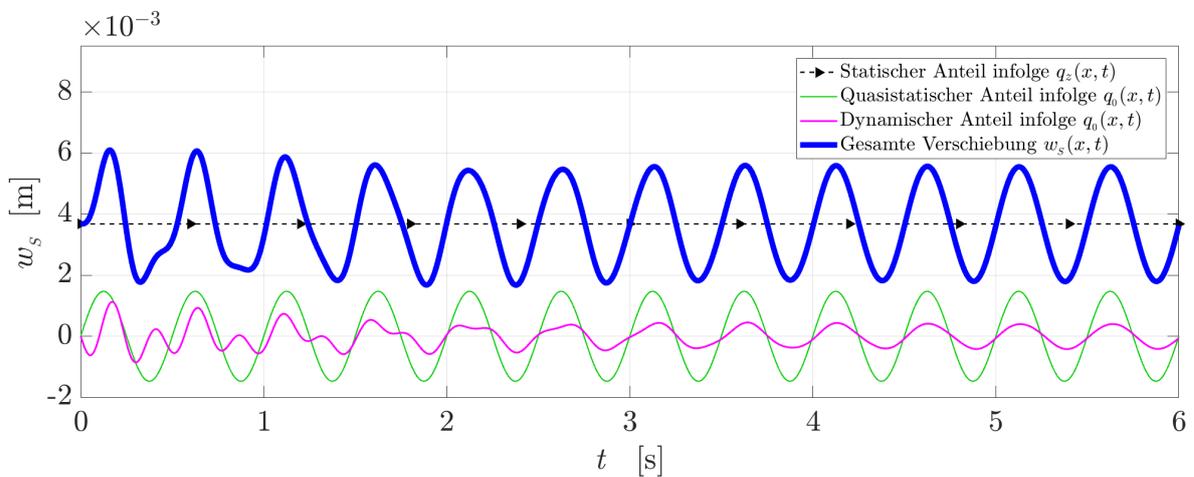


Abb. 3.33: Zeitverlauf der Verschiebung $w_s(x, t)$ in Balkenmitte

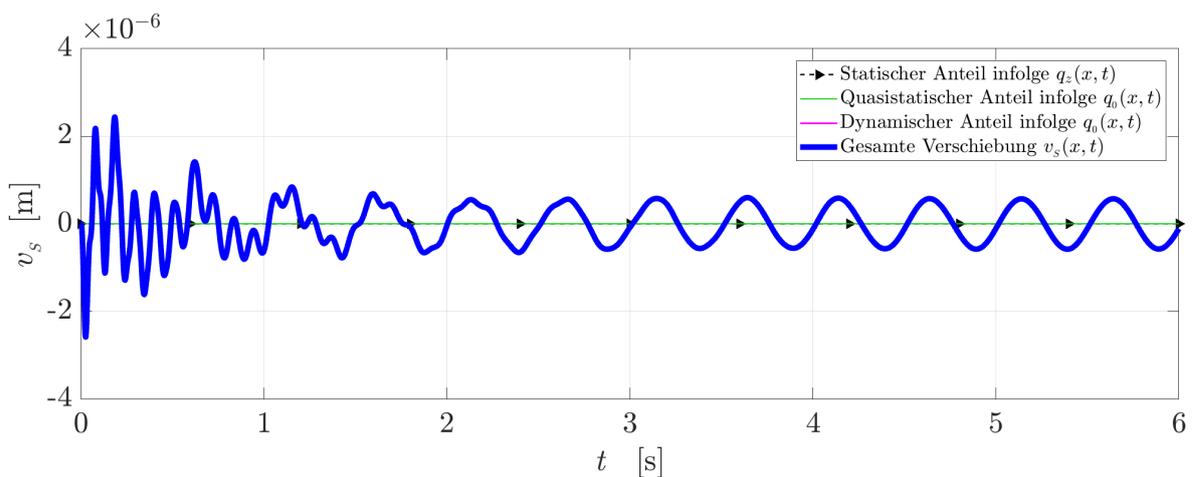


Abb. 3.34: Zeitverlauf der Verschiebung $v_s(x, t)$ in Balkenmitte

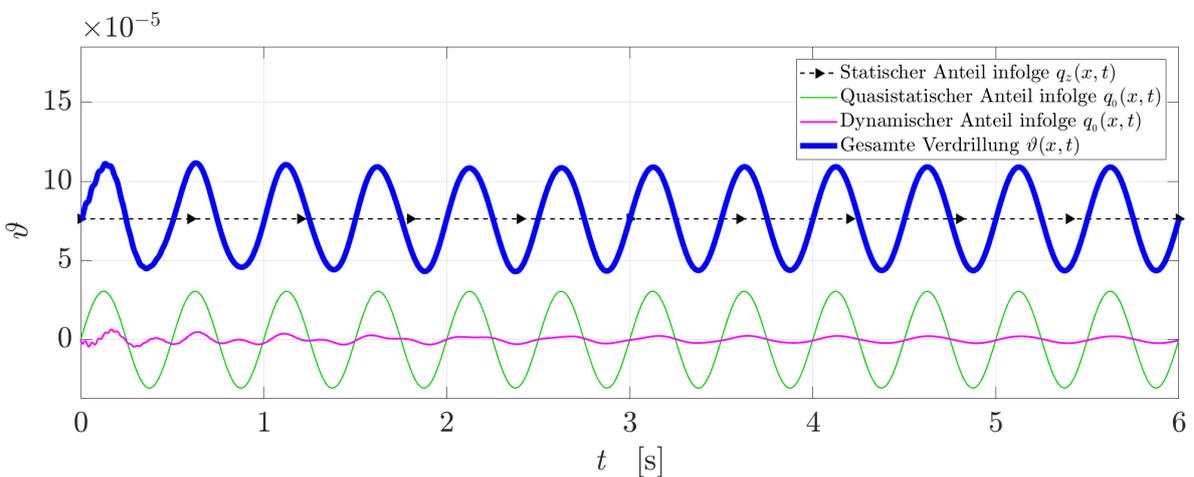


Abb. 3.35: Zeitverlauf der Verdrillung $\vartheta(x, t)$ in Balkenmitte

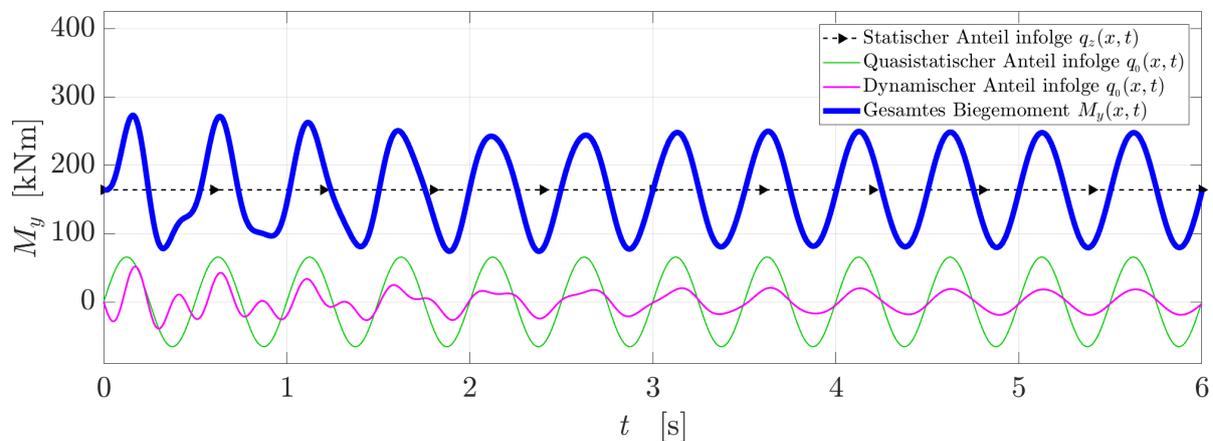


Abb. 3.36: Zeitverlauf des Biegemoments $M_y(x,t)$ in Balkenmitte

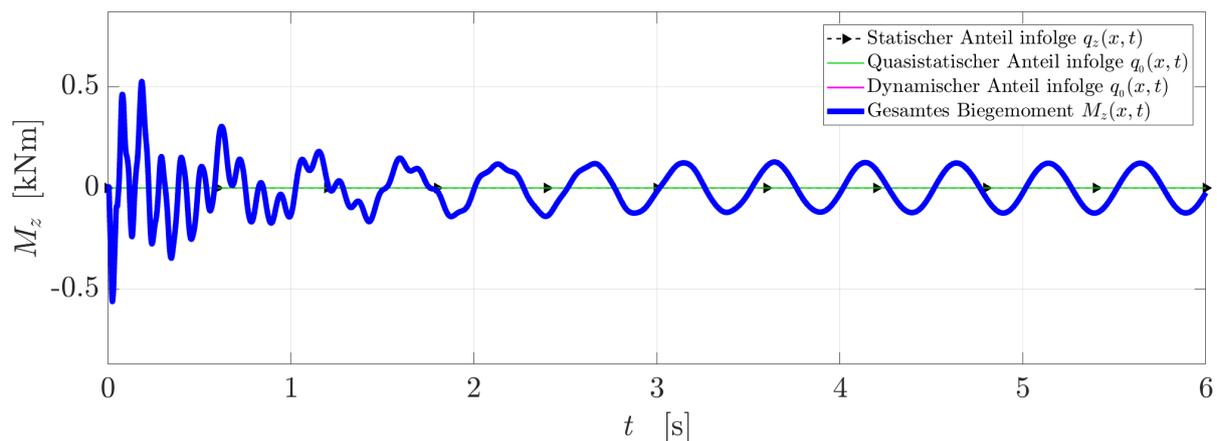


Abb. 3.37: Zeitverlauf des Biegemoments $M_z(x,t)$ in Balkenmitte

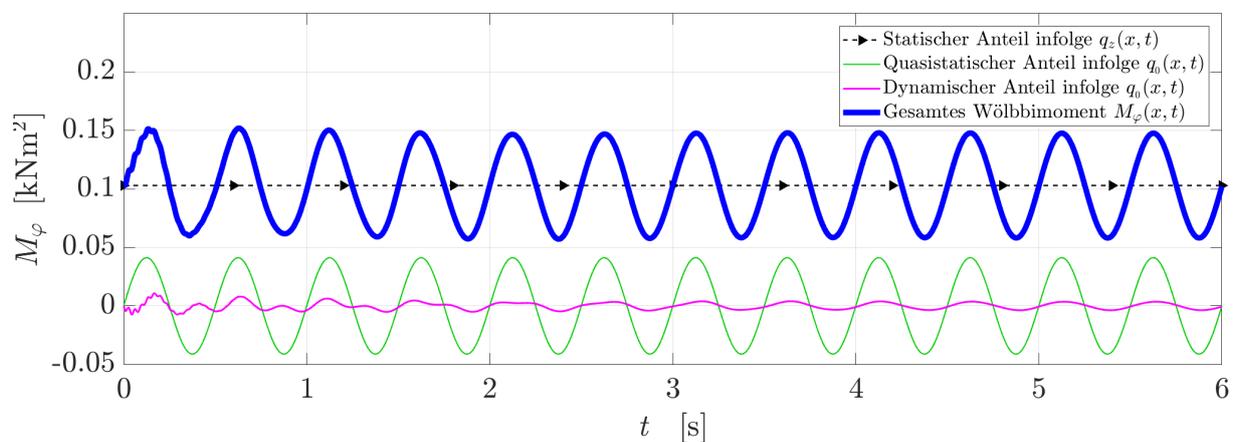


Abb. 3.38: Zeitverlauf des Wölbmoments $M_\varphi(x,t)$ in Balkenmitte

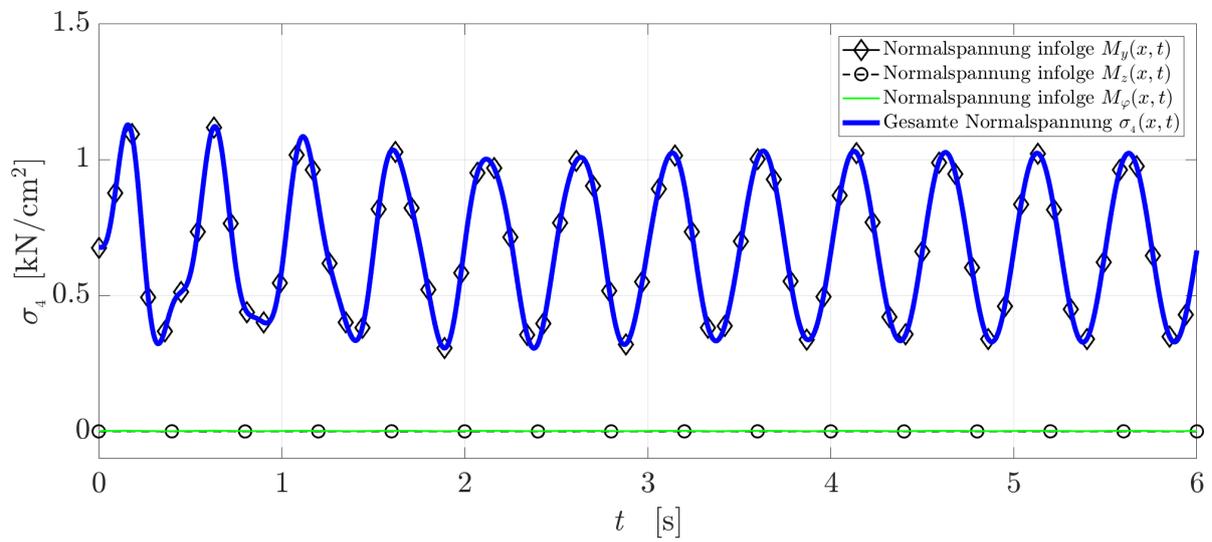


Abb. 3.39: Zeitverlauf der Normalspannung $\sigma_4(x, t)$ im Querschnittspunkt 4

3.3.3 Vergleich der Schwingungsantwort zwischen Balken mit offenem und geschlossenem Querschnitt

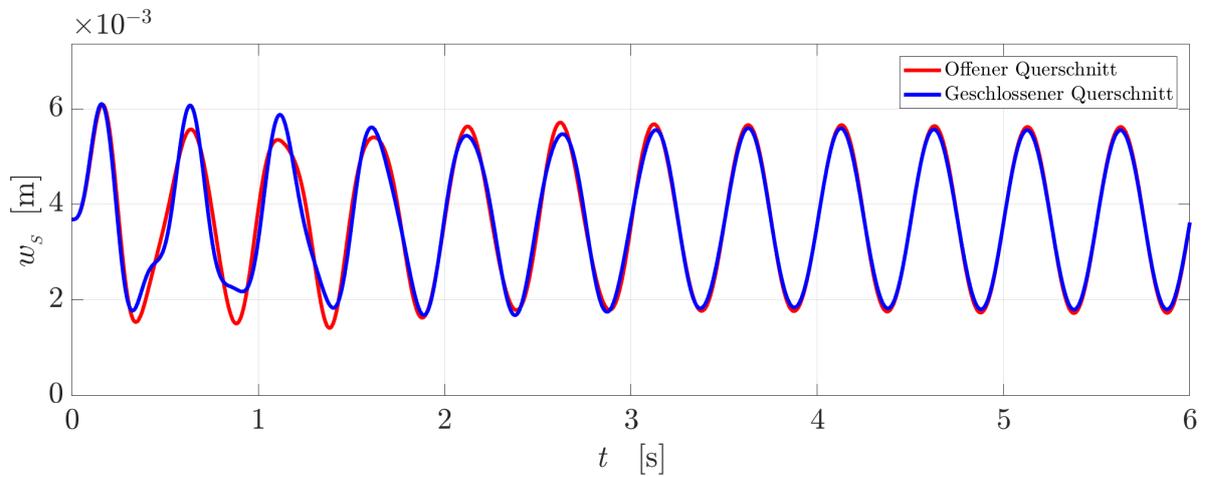


Abb. 3.40: Zeitverlauf der Verschiebung $w_s(x, t)$ in Balkenmitte

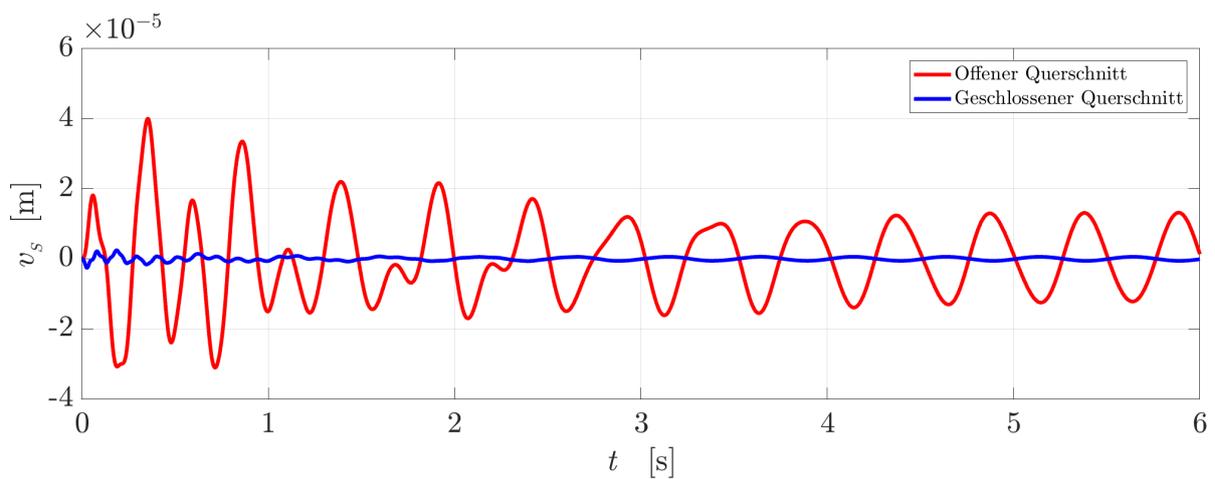


Abb. 3.41: Zeitverlauf der Verschiebung $v_s(x, t)$ in Balkenmitte

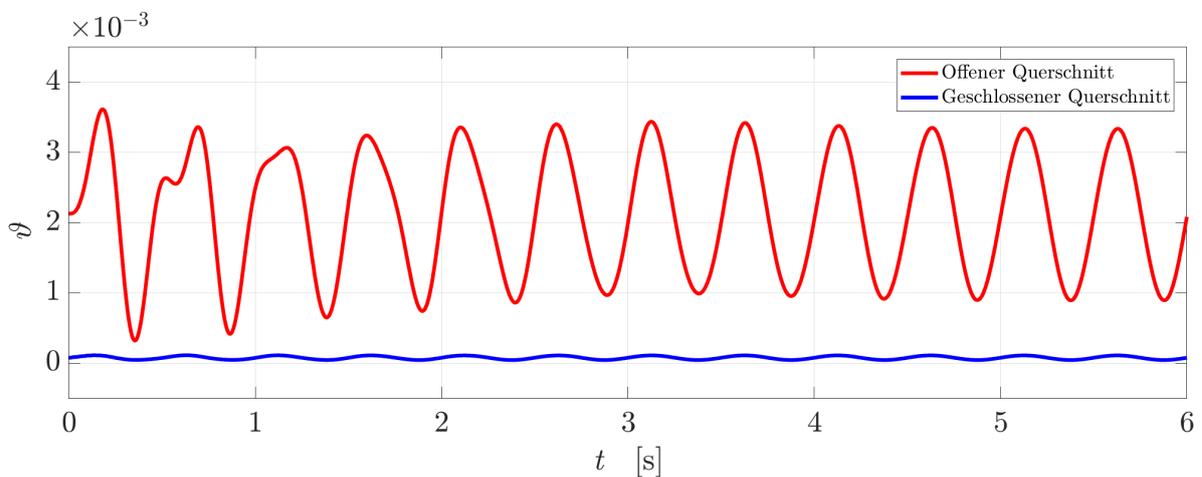


Abb. 3.42: Zeitverlauf der Verdrillung $\vartheta(x, t)$ in Balkenmitte

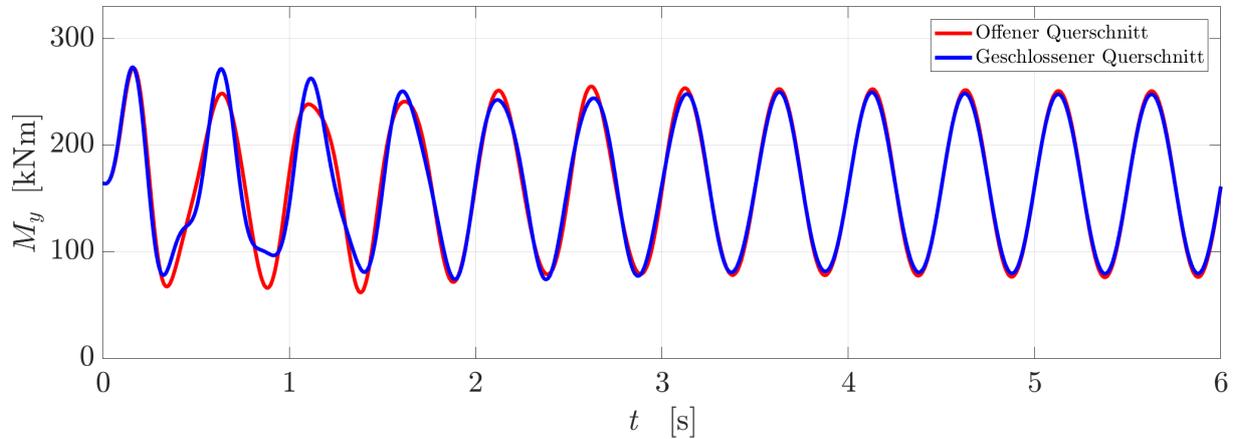


Abb. 3.43: Zeitverlauf des Biegemoments $M_y(x,t)$ in Balkenmitte

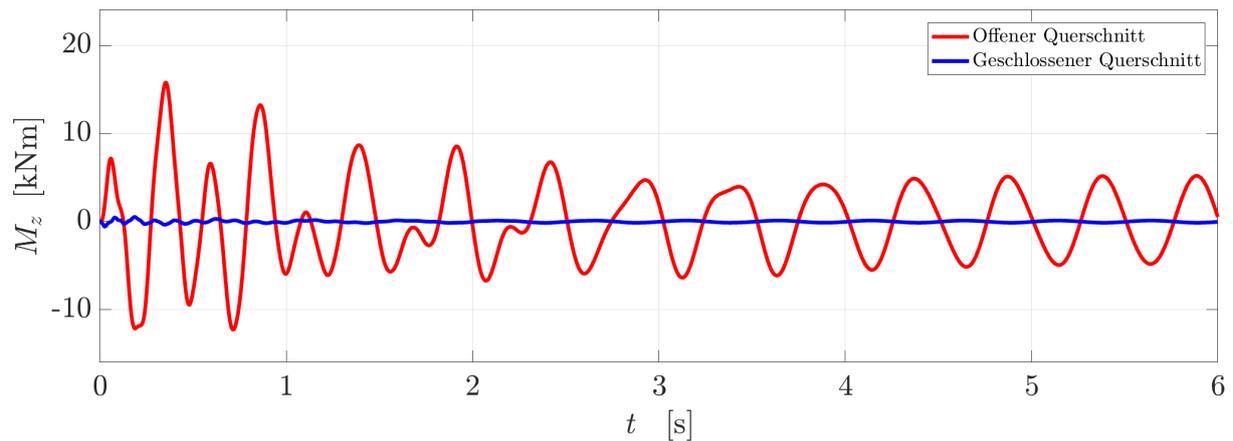


Abb. 3.44: Zeitverlauf des Biegemoments $M_z(x,t)$ in Balkenmitte

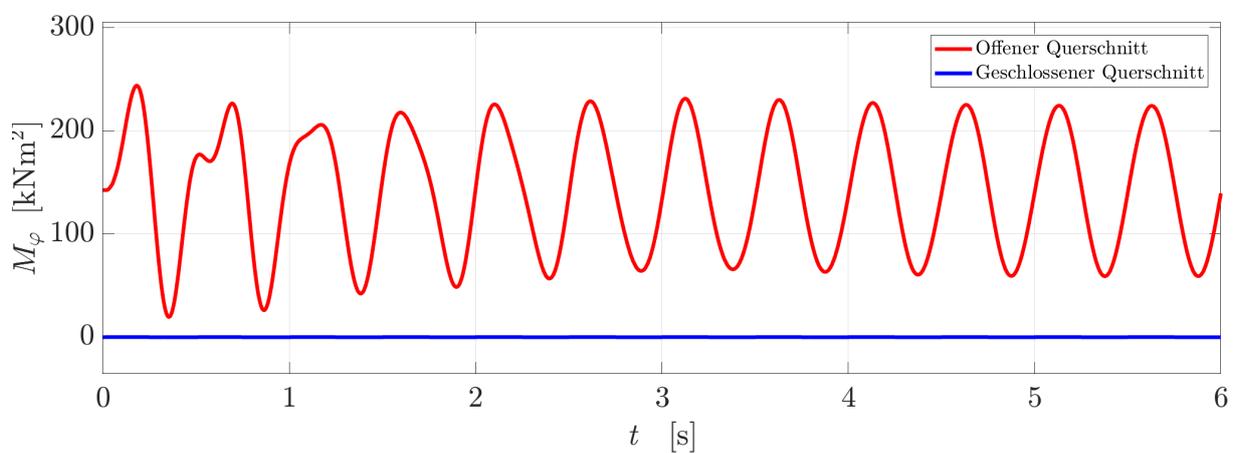


Abb. 3.45: Zeitverlauf des Wölbmoments $M_\varphi(x,t)$ in Balkenmitte

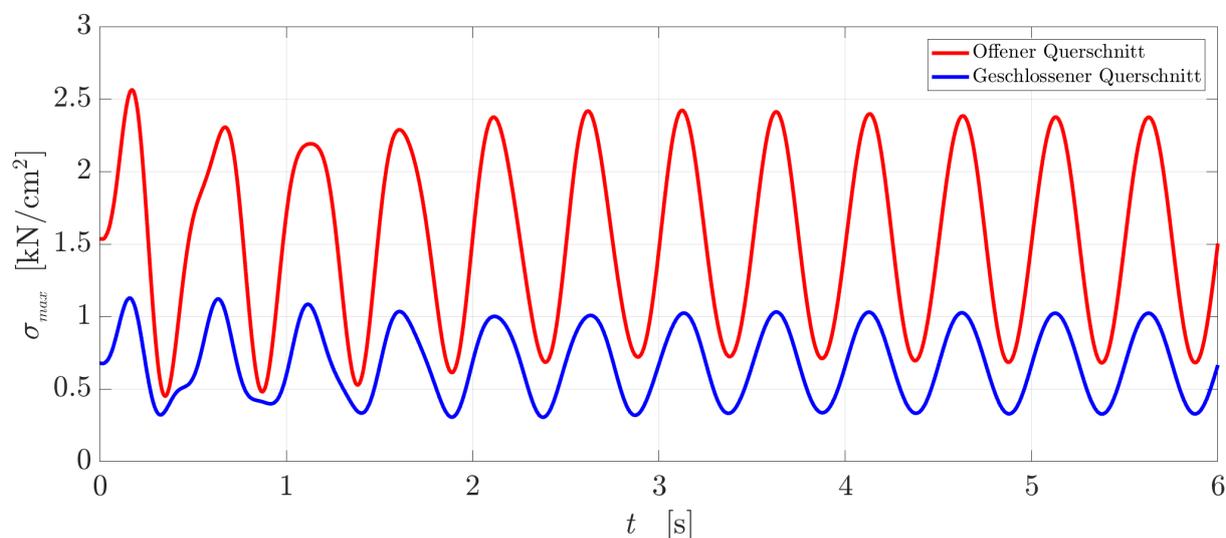


Abb. 3.46: Zeitverlauf der Normalspannung $\sigma_4(x, t)$ im Querschnittspunkt 4

Aufgrund der nahezu gleichen Biegesteifigkeit um die y -Achse zwischen den beiden Querschnittsformen ergibt sich ein nahezu identischer Zeitverlauf der vertikalen Verschiebung $w_s(x, t)$ sowie des Biegemoments $M_y(x, t)$. Jedoch sind die horizontalen Verschiebungsamplituden $v_s(x, t)$ und die Biegemomentamplituden $M_z(x, t)$ bei dem offenen Querschnitt wesentlich größer als bei dem geschlossenen Querschnitt, obwohl der offene Querschnitt größere Biegesteifigkeit um die z -Achse und Wölbsteifigkeit besitzt. Grund dafür ist der erhebliche Einfluss der Torsionssteifigkeit auf den komplementären dynamischen Anteil der Schwingungsantwort, wobei die größere Torsionssteifigkeit des geschlossenen Querschnittes zu kleineren horizontalen Verschiebungsamplituden $v_s(x, t)$ und damit auch zu kleineren Biegemomentamplituden $M_z(x, t)$ führt. Besonders große Unterschiede zwischen der Schwingungsantwort des Balkens mit offenem und geschlossenem Querschnitt sind bei dem Zeitverlauf der Verdrillung $\vartheta(x, t)$ und des Wölbmomentes $M_\varphi(x, t)$ ersichtlich, da in diesem Fall der Einfluss der Torsionssteifigkeit nicht nur auf den komplementären dynamischen Anteil sondern auch auf den statischen und quasistatischen Anteil vorhanden ist. Wegen der geringen Torsionssteifigkeit des offenen Querschnittes sind sowohl die Verdrillungsamplituden $\vartheta(x, t)$ als auch die Wölbmomentamplituden $M_\varphi(x, t)$ wesentlich größer als bei dem geschlossenen Querschnitt. Abschließend wird die Auswirkung der Querschnittsform auf die maximale Normalspannung im Balken gezeigt, woraus man erkennen kann, dass die größeren Normalspannungen im Balken mit dem offenen Querschnitt auftreten.

Kapitel 4

Zusammenfassung

Bei der Analyse der freien und erzwungenen schiefen Biegedrillschwingungen elastischer kontinuierlicher Träger wurde gezeigt, dass die Lösung der gekoppelten partiellen Differentialgleichungen, die mit Hilfe der Modalanalyse gefunden wurde, durch Aufspaltung der Verformungsgrößen in einen quasistatischen und in einen komplementären dynamischen Anteil verbessert werden kann. Damit ist es möglich, den quasistatischen Anteil nach exakten analytischen Lösungen zu berechnen und die Zahl der Reihenglieder bei der modalen Überlagerung zu verringern. Der Einfluss der linear viskosen Dämpfung an der Schwingungsantwort wurde mit den modalen Dämpfungskoeffizienten ζ_n berücksichtigt.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wurde numerisch untersucht, wie sich die Querschnittsform auf die Schwingungsantwort eines beidseitig gelenkig gabelgelagerten Balkens auswirkt. Zu diesem Zweck wurden zwei Querschnittsformen analysiert, nämlich einer mit offenem und einer mit geschlossenem dünnwandigen Querschnitt, deren Querschnittsflächen und deren Trägheitsmomente um die y -Achse fast gleich groß sind. Aufgrund dieser Tatsache, dass die beiden Querschnittsformen annähernd die gleiche Querschnittsfläche besitzen, weist der Balken sowohl mit dem offenen als auch mit dem geschlossenen Querschnitt annähernd die gleiche Masse auf. Im Rahmen dieser Analyse wurden zwei dynamische Lastfälle untersucht. Beim ersten Lastfall handelte es sich um eine impulsartige Einzelkraft in Feldmitte, die den Balken aus der Ruhelage auslenkte um freie gedämpfte Biegedrillschwingungen zu erzeugen. Die Approximation der komplementären dynamischen Schwingungsantwort erfolgte mit einer und mit acht Eigenfunktionen. Im zweiten Lastfall wurde der Balken durch eine zeitlich harmonische Streckenlast angeregt. Für die Ermittlung der Schwingungsantwort wurde eine Unterteilung der gesuchten Größen in den jeweils statischen, quasistatischen und komplementären dynamischen Anteil durchgeführt, wobei der statische und quasistatische Anteil mit Hilfe der exakten analytischen Formeln berechnet werden konnte.

Basierend auf den dargestellten Ergebnissen der numerischen Analyse ergibt sich die signifikante Aussage, dass sich ein geschlossener Querschnitt bei Biegedrillschwingungen elastischer Balken wesentlich günstiger im Vergleich zu einem offenen Querschnitt verhält.

Literaturverzeichnis

- [1] C. Adam, R. Heuer und A. Druml. „Biegedrillschwingungen elastischer kontinuierlicher Träger mit offenem, einfach symmetrischem Querschnitt“. In: *ÖIAZ* 142.3 (1997), S. 175–179.
- [2] A. Druml. „Biegedrillschwingungen elastischer kontinuierlicher Balkentragwerke - ein analytisches Lösungsverfahren“. Diplomarbeit. Technische Universität Wien, 1996.
- [3] J. Fink. „Studienblätter zur Vorlesung Stahlbau 3“. Institut für Stahlbau der Technischen Universität Wien, 2005.
- [4] G. Luza. „Personeninduzierte Schwingungen von biege- und torsionssteifen, gedämpften Brücken“. Dissertation. Technische Universität Wien, 1997.
- [5] W. Nowacki. *Baudynamik*. Springer-Verlag, Wien, New York, 1974.
- [6] M. Reiterer. „Schwingungsdämpfung von Baukonstruktionen, insbesondere von Brücken“. Dissertation. Technische Universität Wien, 2004.
- [7] H. Rubin. „Studienblätter zur Vorlesung Baustatik 2“. Institut für Baustatik der Technischen Universität Wien, 2008.
- [8] F. Ziegler. *Mechanics of solids and fluids*. Springer-Verlag New York, Inc., 1998.

Anhang

1	Script - <i>Berechnung der elastischen Schwingungsantwort</i>	57
2	Funktion - <i>Zeitverlauf der Belastung</i>	68
3	Funktion - <i>Analytische Berechnung der quasistatischen Anteile</i>	69
4	Funktion - <i>Querschnittswerte für offene dünnwandige Profile</i>	72
5	Funktion - <i>Querschnittswerte für geschlossene dünnwandige Profile</i>	74
6	Script - <i>Graphische Darstellung der zeitlichen Verläufe</i>	76

MATLAB Code 1: Script - Berechnung der elastischen Schwingungsantwort

```

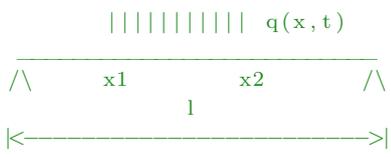
1  %%%%%%%%%%% Freie und erzwungene Biegedrillschwingungen elastischer Balken %%%%%%%%%%%
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% mit offenem oder geschlossenem Querschnitt %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3
4  % Galeb EL CHABAAN, 01228538
5
6  clear
7  close all
8  clc
9
10 %% ANGABEN %% *****
11
12 % Abmessungen ----- %
13 l=25;                % Laenge                [m]
14 nx=2501;            % Anzahl der diskreten Punkte            [-]
15
16 % Querschnitt ----- %
17 b=4000;              % Breite                [mm]
18 b_F=2500;            % Feldbreite            [mm]
19 t_OG=12;             % Obergurtdicke        [mm]
20 h=1000;              % Hoehe                [mm]
21 t_S=10;              % Stegdicke            [mm]
22 b_UG=350;            % Untergurtbreite      [mm]
23 t_UG=22;             % Untergurtdicke      [mm]
24
25 % Materialparameter ----- %
26 E=21000;             % Elastizitaetsmodul   [kN/cm^2]
27 G=8000;              % Schubmodul           [kN/cm^2]
28 rho=7850;            % Dichte                [kg/m^3]
29 zeta=0.03;           % Lehr'sches Daempfungsmass [-]
30
31 % Modale Analyse ----- %
32 N=8;                 % Anzahl der Eigenfunktionen [-]
33
34 % Berechnung: Stabpunkt G ----- %
35 x_G=l/2;             % Traegerlaengskoordinate x [m]
36
37 % Berechnung: Querschnittspunkt i ----- %
38 i=4;                 % siehe Abbildung in "Querschnittswerte.m" [-]
39
40 %% QUERSCHNITTSWERTE [cm] (MAILAB-Funktion) %% *****
41 [A, Iy, Iz, Io, Iphi, It, yS, zS, y_i, z_i, phi_i] = Querschnittswerte_offen(b, b_F, t_OG, h,
42                                     t_S, b_UG, t_UG, i);
43
44 %% ORTSVERLAUF DER BELASTUNG %% *****
45
46 % Lastfall 1 - Einzellast ----- %
47 %
48 %          | P(x,t)
49 %          |
50 %          V
51 %
52 %          _____
53 %          /\      xP      /\
54 %          |-----|
55 %
56 Pz=0;                % Einzelkraft in z-Richtung [kN]
57 xPz=0;                % Angriffspunkt [m]
58
59 Py=5000;              % Einzelkraft in y-Richtung [kN]
60 xPy=l/2;              % Angriffspunkt [m]

```

```

61 | % Lastfall 2 - Gleichlast ----- %
62 | %
63 | %
64 | %          ||||| q(x,t)
65 | %          -----
66 | %      /\      x1      x2      /\
67 | %          |
68 | %      <----->|
69 | %
70 | %
71 | q_z=2.1;          % Streckenlast in z-Richtung          [kN/m]
72 | x1_z=0;           % Anfangspunkt der Last                      [m]
73 | x2_z=1;           % Endpunkt der Last                      [m]
74 |
75 | q_y=0;            % Streckenlast in y-Richtung          [kN/m]
76 | x1_y=0;           % Anfangspunkt der Last                      [m]
77 | x2_y=0;           % Endpunkt der Last                      [m]
78 |
79 | % Lastexzentrizitaet ----- %
80 | e_y=0.875;        % in y-Richtung                      [m]
81 | e_z=0;            % in z-Richtung                      [m]
82 |
83 | % Massenanteil ----- %
84 | m_EG=1;           % Eigengewicht des tragenden Querschnittes  [-]
85 | m_KO=0.2;         % Teil des EG - nicht tragende Konstruktio  [-]
86 | m_LF1=1;          % Anteil aus dem Lastfall 1                [-]
87 |
88 | % Erdbeschleunigung ----- %
89 | g=10;             % in z-Richtung                      [m/s^2]
90 |
91 | % Abstand zwischen Schubmittelpunkt und Massenmittelpunkt ----- %
92 | c_y=20;           % in y-Richtung                      [cm]
93 | c_z=40;           % in z-Richtung                      [cm]
94 |
95 |
96 | % ----- %
97 | % Lastverlauf (eintagen "1" fuer Lastfall 1 oder "2" fuer Lastfall 2)
98 | Lastfall=2;
99 | % ===== %
100 |
101 |
102 |
103 | %% ZEITVERLAUF DER BELASTUNG %% *****
104 | t=6;              % Zeit                      [s]
105 | nt=6001;         % Anzahl der Zeitpunkte          [-]
106 |
107 | % Zeitverlauf 1 - nichtperiodische Anregung ----- %
108 | %
109 | %          q
110 | %          |
111 | %          |
112 | %          |
113 | %          |
114 | %          |
115 | %          |
116 | %          |
117 | %          |
118 | %          |
119 | %          |
120 | %          |
121 | %          |
122 | %          |
123 | %          |

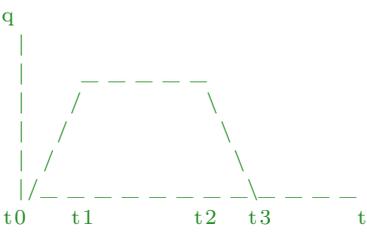
```



```

118 | t0=0;             % Anfangszeitpunkt der zunehmenden Belastung [s]
119 | t1=0.00001;      % Anfangszeitpunkt der konstanten Belastung   [s]
120 | t2=0.00099;      % Anfangszeitpunkt der abnehmenden Belastung  [s]
121 | t3=0.001;        % Endzeitpunkt der abnehmenden Belastung      [s]
122 |
123 | % ----- %

```




```

185 omega(n,:)=sqrt(roots(k(n,:)));
186 omega_D(n,:)=omega(n,:)*sqrt(1-zeta^2);
187 f_D(n,:)=omega_D(n,:)/(2*pi());
188
189 KJ(n,:)=omega(n,:).^2*c_y/10^2./(OMEGA_w2(n,:)-omega(n,:).^2);
190 HJ(n,:)=omega(n,:).^2*c_z/10^2./(OMEGA_v2(n,:)-omega(n,:).^2);
191 J(n,:)=sqrt(2./(1*(KJ(n,:).*(KJ(n,:)+2*c_y/10^2)+HJ(n,:).*(HJ(n,:)-
192 -2*c_z/10^2)+Ioc/10^4)));
193 K(n,:)=KJ(n,:).*J(n,:);
194 H(n,:)=HJ(n,:).*J(n,:);
195
196 Phi=@(n,x) K(n,:)*sin(lambda(n)*x);
197 Chi=@(n,x) H(n,:)*sin(lambda(n)*x);
198 Psi=@(n,x) J(n,:)*sin(lambda(n)*x);
199
200 Phi_xx=@(n,x) -K(n,:)*lambda(n)^2*sin(lambda(n)*x);
201 Chi_xx=@(n,x) -H(n,:)*lambda(n)^2*sin(lambda(n)*x);
202 Psi_xx=@(n,x) -J(n,:)*lambda(n)^2*sin(lambda(n)*x);
203
204 I_Phi(n,:)=integral(@(x)Phi(n,x),x1_z,x2_z,'ArrayValued',true);
205 I_Chi(n,:)=integral(@(x)Chi(n,x),x1_y,x2_y,'ArrayValued',true);
206 I_Psi_z(n,:)=integral(@(x)Psi(n,x),x1_z,x2_z,'ArrayValued',true);
207 I_Psi_y(n,:)=integral(@(x)Psi(n,x),x1_y,x2_y,'ArrayValued',true);
208
209 if (c_z~=0 & c_y~=0)
210     YD(n,:,1)=[0 0 0];
211     YDp(n,:,1)=[0 0 0];
212 else
213     YD(n,:,1)=[0 0];
214     YDp(n,:,1)=[0 0];
215 end
216 w_Smod(n,1)=0;
217 w_Dmod(n,1)=0;
218 v_Smod(n,1)=0;
219 v_Dmod(n,1)=0;
220 theta_Smod(n,1)=0;
221 theta_Dmod(n,1)=0;
222 My_Smod(n,1)=0;
223 My_Dmod(n,1)=0;
224 Mz_Smod(n,1)=0;
225 Mz_Dmod(n,1)=0;
226 Mphi_Smod(n,1)=0;
227 Mphi_Dmod(n,1)=0;
228 dq_t(n,1)=0;
229
230 a=2;
231 while (1)
232     dt(n,a)=ti(a)-ti(a-1);
233     Jnp(n,:)=exp(-zeta*omega(n,:)*dt(n,a)).*(cos(omega_D(n,:)*dt(n,a))+
234 +omega(n,:)/omega_D(n,:)*zeta*sin(omega_D(n,:)*dt(n,a)))-1;
235     Jn(n,:)=1./omega_D(n,:).*exp(-zeta*omega(n,:)*dt(n,a)).*sin(omega_D(n,:)*
236 *dt(n,a));
237     Dn(n,:)=(2*zeta+exp(-zeta*omega(n,:)*dt(n,a)).*(omega(n,:)./omega_D(n,:).*
238 *sin(omega_D(n,:)*dt(n,a))*(1-2*zeta^2)-2*zeta*cos(omega_D(n,:)*
239 *dt(n,a))))./(omega(n,:)*dt(n,a));
240     Jpnp(n,:)=exp(-zeta*omega(n,:)*dt(n,a)).*(-omega(n,:).^2/omega_D(n,:).*
241 *zeta^2-omega_D(n,:)).*sin(omega_D(n,:)*dt(n,a));
242     Jpn(n,:)=exp(-zeta*omega(n,:)*dt(n,a)).*(cos(omega(n,:)*dt(n,a))-
243 -omega(n,:)/omega_D(n,:)*zeta*sin(omega_D(n,:)*dt(n,a)))-1;
244     bn(n,:)=zeta*(2*omega_D(n,:)./omega(n,:)-omega(n,:)./omega_D(n,:)*
245 *(1-2*zeta^2));
246     Dnp(n,:)=(exp(-zeta*omega(n,:)*dt(n,a)).*(cos(omega_D(n,:)*dt(n,a))+
247 +bn(n,:).*sin(omega_D(n,:)*dt(n,a)))-1)/dt(n,a);

```

```

248     if Zeitverlauf==1
249
250         if Lastfall==1
251
252             Pg(n,:) = Phi(n, xPz) * Pz + Chi(n, xPy) * Py + Psi(n, xPz) * Mx_z +
253                 + Psi(n, xPy) * Mx_y;
254         else
255             Pg(n,:) = I_Phi(n, :) * q_z + I_Chi(n, :) * q_y + I_Psi_z(n, :) * mx_z +
256                 + I_Psi_y(n, :) * mx_y;
257         end
258
259
260     if ti(a) <= t1
261
262         dq_t(n, a) = (ti(a) - ti(a-1)) ./ (t1 - t0);
263
264         % Berechnung der quasistatischen Antwort
265         dYS(n, :, a) = Pg(n, :) * dq_t(n, a) ./ (m * omega(n, :).^2) * 10^3;
266
267         dwS(n, :, a) = Phi(n, x_G) .* dYS(n, :, a);
268         w_Smod(n, a) = w_Smod(n, a-1) + sum(dwS(n, :, a));
269
270         dvS(n, :, a) = Chi(n, x_G) .* dYS(n, :, a);
271         v_Smod(n, a) = v_Smod(n, a-1) + sum(dvS(n, :, a));
272
273         dthetaS(n, :, a) = Psi(n, x_G) .* dYS(n, :, a);
274         theta_Smod(n, a) = theta_Smod(n, a-1) + sum(dthetaS(n, :, a));
275
276         dMy_S(n, :, a) = -Phi_xx(n, x_G) .* E * Iy .* dYS(n, :, a) / 10^4;
277         My_Smod(n, a) = My_Smod(n, a-1) + sum(dMy_S(n, :, a));
278
279         dMz_S(n, :, a) = -Chi_xx(n, x_G) .* E * Iz .* dYS(n, :, a) / 10^4;
280         Mz_Smod(n, a) = Mz_Smod(n, a-1) + sum(dMz_S(n, :, a));
281
282         dMphi_S(n, :, a) = -Psi_xx(n, x_G) .* E * Iphi .* dYS(n, :, a) / 10^8;
283         Mphi_Smod(n, a) = Mphi_Smod(n, a-1) + sum(dMphi_S(n, :, a));
284
285
286         % Berechnung der komplimentaeren dynamischen Antwort
287         dYD(n, :, a) = Jnp(n, :) .* YD(n, :, a-1) + Jn(n, :) .* YDp(n, :, a-1) -
288             - 1 ./ (m * omega(n, :).^2 / 10^3) .* Dn(n, :) .* Pg(n, :) * dq_t(n, a);
289         dYDp(n, :, a) = Jpnp(n, :) .* YD(n, :, a-1) + Jpn(n, :) .* YDp(n, :, a-1) -
290             - 1 ./ (m * omega(n, :).^2 / 10^3) .* Dnp(n, :) .* Pg(n, :) * dq_t(n, a);
291         YD(n, :, a) = YD(n, :, a-1) + dYD(n, :, a);
292         YDp(n, :, a) = YDp(n, :, a-1) + dYDp(n, :, a);
293
294         dwD(n, :, a) = Phi(n, x_G) .* dYD(n, :, a);
295         w_Dmod(n, a) = w_Dmod(n, a-1) + sum(dwD(n, :, a));
296
297         dvD(n, :, a) = Chi(n, x_G) .* dYD(n, :, a);
298         v_Dmod(n, a) = v_Dmod(n, a-1) + sum(dvD(n, :, a));
299
300         dthetaD(n, :, a) = Psi(n, x_G) .* dYD(n, :, a);
301         theta_Dmod(n, a) = theta_Dmod(n, a-1) + sum(dthetaD(n, :, a));
302
303         dMy_D(n, :, a) = -Phi_xx(n, x_G) .* dYD(n, :, a) * E * Iy / 10^4;
304         My_Dmod(n, a) = My_Dmod(n, a-1) + sum(dMy_D(n, :, a));
305
306         dMz_D(n, :, a) = -Chi_xx(n, x_G) .* dYD(n, :, a) * E * Iz / 10^4;
307         Mz_Dmod(n, a) = Mz_Dmod(n, a-1) + sum(dMz_D(n, :, a));
308
309         dMphi_D(n, :, a) = -Psi_xx(n, x_G) .* dYD(n, :, a) * E * Iphi / 10^8;
310         Mphi_Dmod(n, a) = Mphi_Dmod(n, a-1) + sum(dMphi_D(n, :, a));

```

```

311         elseif (ti(a)<=t2 & ti(a)>t1)
312
313             dq_t(n,a)=0;
314
315             % Berechnung der quasistatischen Antwort
316             w_Smod(n,a)=w_Smod(n,a-1);
317             v_Smod(n,a)=v_Smod(n,a-1);
318             theta_Smod(n,a)=theta_Smod(n,a-1);
319             My_Smod(n,a)=My_Smod(n,a-1);
320             Mz_Smod(n,a)=Mz_Smod(n,a-1);
321             Mphi_Smod(n,a)=Mphi_Smod(n,a-1);
322
323             % Berechnung der komplimentaeren dynamischen Antwort
324             dYD(n,:,a)=Jnp(n,:) .* YD(n,:,a-1)+Jn(n,:) .* YDp(n,:,a-1)-
325                 -1./(m*omega(n,:).^2/10^3) .* Dn(n,:) .* Pg(n,:) *dq_t(n,a);
326             dYDp(n,:,a)=Jpnp(n,:) .* YD(n,:,a-1)+Jpn(n,:) .* YDp(n,:,a-1)-
327                 -1./(m*omega(n,:).^2/10^3) .* Dnp(n,:) .* Pg(n,:) *dq_t(n,a);
328             YD(n,:,a)=YD(n,:,a-1)+dYD(n,:,a);
329             YDp(n,:,a)=YDp(n,:,a-1)+dYDp(n,:,a);
330
331             dwD(n,:,a)=Phi(n,x_G) .* dYD(n,:,a);
332             w_Dmod(n,a)=w_Dmod(n,a-1)+sum(dwD(n,:,a));
333
334             dvD(n,:,a)=Chi(n,x_G) .* dYD(n,:,a);
335             v_Dmod(n,a)=v_Dmod(n,a-1)+sum(dvD(n,:,a));
336
337             dthetaD(n,:,a)=Psi(n,x_G) .* dYD(n,:,a);
338             theta_Dmod(n,a)=theta_Dmod(n,a-1)+sum(dthetaD(n,:,a));
339
340             dMy_D(n,:,a)=-Phi_xx(n,x_G) .* dYD(n,:,a) *E*Iy /10^4;
341             My_Dmod(n,a)=My_Dmod(n,a-1)+sum(dMy_D(n,:,a));
342
343             dMz_D(n,:,a)=-Chi_xx(n,x_G) .* dYD(n,:,a) *E*Iz /10^4;
344             Mz_Dmod(n,a)=Mz_Dmod(n,a-1)+sum(dMz_D(n,:,a));
345
346             dMphi_D(n,:,a)=-Psi_xx(n,x_G) .* dYD(n,:,a) *E*Iphi /10^8;
347             Mphi_Dmod(n,a)=Mphi_Dmod(n,a-1)+sum(dMphi_D(n,:,a));
348
349
350         elseif (ti(a)<=t3 & ti(a)>t2)
351
352             dq_t(n,a)=(ti(a-1)-ti(a))/(t3-t2);
353
354             % Berechnung der quasistatischen Antwort
355             dYS(n,:,a)=Pg(n,:) *dq_t(n,a) ./ (m*omega(n,:).^2) *10^3;
356
357             dwS(n,:,a)=Phi(n,x_G) .* dYS(n,:,a);
358             w_Smod(n,a)=w_Smod(n,a-1)+sum(dwS(n,:,a));
359
360             dvS(n,:,a)=Chi(n,x_G) .* dYS(n,:,a);
361             v_Smod(n,a)=v_Smod(n,a-1)+sum(dvS(n,:,a));
362
363             dthetaS(n,:,a)=Psi(n,x_G) .* dYS(n,:,a);
364             theta_Smod(n,a)=theta_Smod(n,a-1)+sum(dthetaS(n,:,a));
365
366             dMy_S(n,:,a)=-Phi_xx(n,x_G) .*E*Iy .*dYS(n,:,a) /10^4;
367             My_Smod(n,a)=My_Smod(n,a-1)+sum(dMy_S(n,:,a));
368
369             dMz_S(n,:,a)=-Chi_xx(n,x_G) .*E*Iz .*dYS(n,:,a) /10^4;
370             Mz_Smod(n,a)=Mz_Smod(n,a-1)+sum(dMz_S(n,:,a));
371
372             dMphi_S(n,:,a)=-Psi_xx(n,x_G) .*E*Iphi .*dYS(n,:,a) /10^8;
373             Mphi_Smod(n,a)=Mphi_Smod(n,a-1)+sum(dMphi_S(n,:,a));

```

```

374 % Berechnung der komplimentaeren dynamischen Antwort
375 dYD(n, :, a) = Jnp(n, :) .* YD(n, :, a-1) + Jn(n, :) .* YDp(n, :, a-1) -
376     -1 ./ (m * omega(n, :).^2 / 10^3) .* Dn(n, :) .* Pg(n, :) * dq_t(n, a);
377 dYDp(n, :, a) = Jpnp(n, :) .* YD(n, :, a-1) + Jpn(n, :) .* YDp(n, :, a-1) -
378     -1 ./ (m * omega(n, :).^2 / 10^3) .* Dnp(n, :) .* Pg(n, :) * dq_t(n, a);
379 YD(n, :, a) = YD(n, :, a-1) + dYD(n, :, a);
380 YDp(n, :, a) = YDp(n, :, a-1) + dYDp(n, :, a);
381
382 dwD(n, :, a) = Phi(n, x_G) .* dYD(n, :, a);
383 w_Dmod(n, a) = w_Dmod(n, a-1) + sum(dwD(n, :, a));
384
385 dvD(n, :, a) = Chi(n, x_G) .* dYD(n, :, a);
386 v_Dmod(n, a) = v_Dmod(n, a-1) + sum(dvD(n, :, a));
387
388 dthetaD(n, :, a) = Psi(n, x_G) .* dYD(n, :, a);
389 theta_Dmod(n, a) = theta_Dmod(n, a-1) + sum(dthetaD(n, :, a));
390
391 dMy_D(n, :, a) = -Phi_xx(n, x_G) .* dYD(n, :, a) * E * Iy / 10^4;
392 My_Dmod(n, a) = My_Dmod(n, a-1) + sum(dMy_D(n, :, a));
393
394 dMz_D(n, :, a) = -Chi_xx(n, x_G) .* dYD(n, :, a) * E * Iz / 10^4;
395 Mz_Dmod(n, a) = Mz_Dmod(n, a-1) + sum(dMz_D(n, :, a));
396
397 dMphi_D(n, :, a) = -Psi_xx(n, x_G) .* dYD(n, :, a) * E * Iphi / 10^8;
398 Mphi_Dmod(n, a) = Mphi_Dmod(n, a-1) + sum(dMphi_D(n, :, a));
399
400
401
402 elseif ti(a) > t3
403
404     dq_t(n, a) = 0;
405
406 % Berechnung der quasistatischen Antwort
407 dYS(n, :, a) = Pg(n, :) * dq_t(n, a) ./ (m * omega(n, :).^2) * 10^3;
408
409 dwS(n, :, a) = Phi(n, x_G) .* dYS(n, :, a);
410 w_Smod(n, a) = w_Smod(n, a-1) + sum(dwS(n, :, a));
411
412 dvS(n, :, a) = Chi(n, x_G) .* dYS(n, :, a);
413 v_Smod(n, a) = v_Smod(n, a-1) + sum(dvS(n, :, a));
414
415 dthetaS(n, :, a) = Psi(n, x_G) .* dYS(n, :, a);
416 theta_Smod(n, a) = theta_Smod(n, a-1) + sum(dthetaS(n, :, a));
417
418 dMy_S(n, :, a) = -Phi_xx(n, x_G) .* E * Iy .* dYS(n, :, a) / 10^4;
419 My_Smod(n, a) = My_Smod(n, a-1) + sum(dMy_S(n, :, a));
420
421 dMz_S(n, :, a) = -Chi_xx(n, x_G) .* E * Iz .* dYS(n, :, a) / 10^4;
422 Mz_Smod(n, a) = Mz_Smod(n, a-1) + sum(dMz_S(n, :, a));
423
424 dMphi_S(n, :, a) = -Psi_xx(n, x_G) .* E * Iphi .* dYS(n, :, a) / 10^8;
425 Mphi_Smod(n, a) = Mphi_Smod(n, a-1) + sum(dMphi_S(n, :, a));
426
427 % Berechnung der komplimentaeren dynamischen Antwort
428 dYD(n, :, a) = Jnp(n, :) .* YD(n, :, a-1) + Jn(n, :) .* YDp(n, :, a-1) -
429     -1 ./ (m * omega(n, :).^2 / 10^3) .* Dn(n, :) .* Pg(n, :) * dq_t(n, a);
430 dYDp(n, :, a) = Jpnp(n, :) .* YD(n, :, a-1) + Jpn(n, :) .* YDp(n, :, a-1) -
431     -1 ./ (m * omega(n, :).^2 / 10^3) .* Dnp(n, :) .* Pg(n, :) * dq_t(n, a);
432 YD(n, :, a) = YD(n, :, a-1) + dYD(n, :, a);
433 YDp(n, :, a) = YDp(n, :, a-1) + dYDp(n, :, a);
434
435 dwD(n, :, a) = Phi(n, x_G) .* dYD(n, :, a);
436 w_Dmod(n, a) = w_Dmod(n, a-1) + sum(dwD(n, :, a));

```

```

437         dvD(n, :, a)=Chi(n, x_G) .* dYD(n, :, a);
438         v_Dmod(n, a)=v_Dmod(n, a-1)+sum(dvD(n, :, a));
439
440         dthetaD(n, :, a)=Psi(n, x_G) .* dYD(n, :, a);
441         theta_Dmod(n, a)=theta_Dmod(n, a-1)+sum(dthetaD(n, :, a));
442
443         dMy_D(n, :, a)=-Phi_xx(n, x_G) .* dYD(n, :, a) * E * Iy / 10^4;
444         My_Dmod(n, a)=My_Dmod(n, a-1)+sum(dMy_D(n, :, a));
445
446         dMz_D(n, :, a)=-Chi_xx(n, x_G) .* dYD(n, :, a) * E * Iz / 10^4;
447         Mz_Dmod(n, a)=Mz_Dmod(n, a-1)+sum(dMz_D(n, :, a));
448
449         dMphi_D(n, :, a)=-Psi_xx(n, x_G) .* dYD(n, :, a) * E * Iphi / 10^8;
450         Mphi_Dmod(n, a)=Mphi_Dmod(n, a-1)+sum(dMphi_D(n, :, a));
451
452     end
453
454
455
456     elseif Zeitverlauf==2
457
458         if Lastfall==1
459
460             Pg(n, :)=Phi(n, xPz) * Pz * p0 + Chi(n, xPy) * Py * p0 + Psi(n, xPz) * Mx_z * p0 +
461                 + Psi(n, xPy) * Mx_y * p0;
462         else
463
464             Pg(n, :)=I_Phi(n, :) * q_z * p0 + I_Chi(n, :) * q_y * p0 + I_Psi_z(n, :) * mx_z * p0 +
465                 + I_Psi_y(n, :) * mx_y * p0;
466         end
467
468
469         dq_t(n, a)=qt(a)-qt(a-1);
470
471
472         % Berechnung der quasistatischen Antwort
473         dYS(n, :, a)=Pg(n, :) * dq_t(n, a) ./ (m * omega(n, :).^2) * 10^3;
474
475         dwS(n, :, a)=Phi(n, x_G) .* dYS(n, :, a);
476         w_Smod(n, a)=w_Smod(n, a-1)+sum(dwS(n, :, a));
477
478         dvS(n, :, a)=Chi(n, x_G) .* dYS(n, :, a);
479         v_Smod(n, a)=v_Smod(n, a-1)+sum(dvS(n, :, a));
480
481         dthetaS(n, :, a)=Psi(n, x_G) .* dYS(n, :, a);
482         theta_Smod(n, a)=theta_Smod(n, a-1)+sum(dthetaS(n, :, a));
483
484         dMy_S(n, :, a)=-Phi_xx(n, x_G) .* E * Iy .* dYS(n, :, a) / 10^4;
485         My_Smod(n, a)=My_Smod(n, a-1)+sum(dMy_S(n, :, a));
486
487         dMz_S(n, :, a)=-Chi_xx(n, x_G) .* E * Iz .* dYS(n, :, a) / 10^4;
488         Mz_Smod(n, a)=Mz_Smod(n, a-1)+sum(dMz_S(n, :, a));
489
490         dMphi_S(n, :, a)=-Psi_xx(n, x_G) .* E * Iphi .* dYS(n, :, a) / 10^8;
491         Mphi_Smod(n, a)=Mphi_Smod(n, a-1)+sum(dMphi_S(n, :, a));
492
493         % Berechnung der komplmentären dynamischen Antwort
494         dYD(n, :, a)=Jnp(n, :) .* YD(n, :, a-1) + Jn(n, :) .* YDp(n, :, a-1) -
495             - 1 ./ (m * omega(n, :).^2 / 10^3) .* Dn(n, :) .* Pg(n, :) * dq_t(n, a);
496         dYDp(n, :, a)=Jpnp(n, :) .* YD(n, :, a-1) + Jpn(n, :) .* YDp(n, :, a-1) -
497             - 1 ./ (m * omega(n, :).^2 / 10^3) .* Dnp(n, :) .* Pg(n, :) * dq_t(n, a);
498         YD(n, :, a)=YD(n, :, a-1) + dYD(n, :, a);
499         YDp(n, :, a)=YDp(n, :, a-1) + dYDp(n, :, a);

```

```

500     dwD(n, :, a)=Phi(n,x_G).*dYD(n, :, a);
501     w_Dmod(n, a)=w_Dmod(n, a-1)+sum(dwD(n, :, a));
502
503     dvD(n, :, a)=Chi(n,x_G).*dYD(n, :, a);
504     v_Dmod(n, a)=v_Dmod(n, a-1)+sum(dvD(n, :, a));
505
506     dthetaD(n, :, a)=Psi(n,x_G).*dYD(n, :, a);
507     theta_Dmod(n, a)=theta_Dmod(n, a-1)+sum(dthetaD(n, :, a));
508
509     dMy_D(n, :, a)=-Phi_xx(n,x_G).*dYD(n, :, a)*E*Iy/10^4;
510     My_Dmod(n, a)=My_Dmod(n, a-1)+sum(dMy_D(n, :, a));
511
512     dMz_D(n, :, a)=-Chi_xx(n,x_G).*dYD(n, :, a)*E*Iz/10^4;
513     Mz_Dmod(n, a)=Mz_Dmod(n, a-1)+sum(dMz_D(n, :, a));
514
515     dMphi_D(n, :, a)=-Psi_xx(n,x_G).*dYD(n, :, a)*E*Iphi/10^8;
516     Mphi_Dmod(n, a)=Mphi_Dmod(n, a-1)+sum(dMphi_D(n, :, a));
517
518     end
519     if ti(a)>=t, break, end
520     a=a+1;
521 end
522 end
523
524
525
526 w_STATmod=sum(w_Smod,1);
527 w_DYN=sum(w_Dmod,1);
528
529 v_STATmod=sum(v_Smod,1);
530 v_DYN=sum(v_Dmod,1);
531
532 theta_STATmod=sum(theta_Smod,1);
533 theta_DYN=sum(theta_Dmod,1);
534
535 My_STATmod=sum(My_Smod,1);
536 My_DYN=sum(My_Dmod,1);
537
538 Mz_STATmod=sum(Mz_Smod,1);
539 Mz_DYN=sum(Mz_Dmod,1);
540
541 Mphi_STATmod=sum(Mphi_Smod,1);
542 Mphi_DYN=sum(Mphi_Dmod,1);
543
544 Sigma_My_STATmod_1EF=My_Smod(1, :)*z_i/Iy*10;
545 Sigma_Mz_STATmod_1EF=Mz_Smod(1, :)*y_i/Iz*10;
546 Sigma_Mphi_STATmod_1EF=Mphi_Smod(1, :)*phi_i/Iphi*10^2;
547 Sigma_STATmod_1EF=Sigma_My_STATmod_1EF+Sigma_Mz_STATmod_1EF+Sigma_Mphi_STATmod_1EF;
548
549 Sigma_My_DYN_1EF=My_Dmod(1, :)*z_i/Iy*10;
550 Sigma_Mz_DYN_1EF=Mz_Dmod(1, :)*y_i/Iz*10;
551 Sigma_Mphi_DYN_1EF=Mphi_Dmod(1, :)*phi_i/Iphi*10^2;
552 Sigma_DYN_1EF=Sigma_My_DYN_1EF+Sigma_Mz_DYN_1EF+Sigma_Mphi_DYN_1EF;
553
554 Sigma_My_STATmod=My_STATmod*z_i/Iy*10;
555 Sigma_Mz_STATmod=Mz_STATmod*y_i/Iz*10;
556 Sigma_Mphi_STATmod=Mphi_STATmod*phi_i/Iphi*10^2;
557 Sigma_STATmod=Sigma_My_STATmod+Sigma_Mz_STATmod+Sigma_Mphi_STATmod;
558
559 Sigma_My_DYN=My_DYN*z_i/Iy*10;
560 Sigma_Mz_DYN=Mz_DYN*y_i/Iz*10;
561 Sigma_Mphi_DYN=Mphi_DYN*phi_i/Iphi*10^2;
562 Sigma_DYN=Sigma_My_DYN+Sigma_Mz_DYN+Sigma_Mphi_DYN;

```

```

563 %% ANALOGIE ZUM BIEGETRAEGER MIT LAENGSZUGKRAFT NACH THEORIE II. ORDNUNG %% *****
564
565 % MATLAB-Function: "Quasistatisch_exakt.m"
566
567 [w_stat_I, w_stat_II, v_stat_I, v_stat_II, My_stat_I, My_stat_II, Mz_stat_I, Mz_stat_II] =
568 Quasistatisch_exakt(E, G, Iy, Iz, Iphi, It, l, x, q_z, q_y, mx_z, mx_y, x1_z, x2_z, x1_y, x2_y, Pz,
569 Py, Mx_z, Mx_y, xPz, xPy, Lastfall);
570
571 j=x_G/l*(nx-1)+1;
572
573
574 if Zeitverlauf==1
575
576     w_STATex=w_stat_I(j)*qt;
577     v_STATex=v_stat_I(j)*qt;
578     theta_w_STATex=w_stat_II(j)*qt;
579     theta_v_STATex=v_stat_II(j)*qt;
580     theta_STATex=theta_w_STATex+theta_v_STATex;
581     My_STATex=My_stat_I(j)*qt;
582     Mz_STATex=Mz_stat_I(j)*qt;
583     Mphi_STATex=(My_stat_II(j)+Mz_stat_II(j))*qt;
584
585 elseif Zeitverlauf==2
586
587     if p0==1
588
589         SK=zeros(1, numel(ti));
590
591     elseif p0>=0 && p0<1
592
593         SK=ones(1, numel(ti));
594
595     end
596
597     w_STATex=w_stat_I(j)*SK;
598     v_STATex=v_stat_I(j)*SK;
599     theta_w_STATex=w_stat_II(j).*SK;
600     theta_v_STATex=v_stat_II(j).*SK;
601     theta_STATex=theta_w_STATex+theta_v_STATex;
602     My_STATex=My_stat_I(j)*SK;
603     Mz_STATex=Mz_stat_I(j)*SK;
604     Mphi_STATex=(My_stat_II(j)+Mz_stat_II(j))*SK;
605
606     w_p0_STATex=w_stat_I(j)*p0*qt;
607     v_p0_STATex=v_stat_I(j)*p0*qt;
608     theta_w_p0_STATex=w_stat_II(j)*p0*qt;
609     theta_v_p0_STATex=v_stat_II(j)*p0*qt;
610     theta_p0_STATex=theta_w_p0_STATex+theta_v_p0_STATex;
611     My_p0_STATex=My_stat_I(j)*p0*qt;
612     Mz_p0_STATex=Mz_stat_I(j)*p0*qt;
613     Mphi_p0_STATex=(My_stat_II(j)+Mz_stat_II(j))*p0*qt;
614
615     Sigma_My_p0_STATex=My_p0_STATex*z_i/Iy*10;
616     Sigma_Mz_p0_STATex=Mz_p0_STATex*y_i/Iz*10;
617     Sigma_Mphi_p0_STATex=Mphi_p0_STATex*phi_i/Iphi*10^2;
618     Sigma_p0_STATex=Sigma_My_p0_STATex+Sigma_Mz_p0_STATex+Sigma_Mphi_p0_STATex;
619
620 end
621
622 Sigma_My_STATex=My_STATex*z_i/Iy*10;
623 Sigma_Mz_STATex=Mz_STATex*y_i/Iz*10;
624 Sigma_Mphi_STATex=Mphi_STATex*phi_i/Iphi*10^2;
625 Sigma_STATex=Sigma_My_STATex+Sigma_Mz_STATex+Sigma_Mphi_STATex;

```

```

626 %% AUFSUMMIERUNG *****
627
628 if Zeitverlauf==1
629
630     % Modale Entwicklung
631     w_modal_1EF=w_Smod(1, :)+w_Dmod(1, :);
632     v_modal_1EF=v_Smod(1, :)+v_Dmod(1, :);
633     theta_modal_1EF=theta_Smod(1, :)+theta_Dmod(1, :);
634     My_modal_1EF=My_Smod(1, :)+My_Dmod(1, :);
635     Mz_modal_1EF=Mz_Smod(1, :)+Mz_Dmod(1, :);
636     Mphi_modal_1EF=Mphi_Smod(1, :)+Mphi_Dmod(1, :);
637     Sigma_My_modal_1EF=Sigma_My_STATmod_1EF+Sigma_My_DYN_1EF;
638     Sigma_Mz_modal_1EF=Sigma_Mz_STATmod_1EF+Sigma_Mz_DYN_1EF;
639     Sigma_Mphi_modal_1EF=Sigma_Mphi_STATmod_1EF+Sigma_Mphi_DYN_1EF;
640     Sigma_modal_1EF=Sigma_STATmod_1EF+Sigma_DYN_1EF;
641
642     w_modal=w_STATmod+w_DYN;
643     v_modal=v_STATmod+v_DYN;
644     theta_modal=theta_STATmod+theta_DYN;
645     My_modal=My_STATmod+My_DYN;
646     Mz_modal=Mz_STATmod+Mz_DYN;
647     Mphi_modal=Mphi_STATmod+Mphi_DYN;
648     Sigma_My_modal=Sigma_My_STATmod+Sigma_My_DYN;
649     Sigma_Mz_modal=Sigma_Mz_STATmod+Sigma_Mz_DYN;
650     Sigma_Mphi_modal=Sigma_Mphi_STATmod+Sigma_Mphi_DYN;
651     Sigma_modal=Sigma_STATmod+Sigma_DYN;
652
653     % Quasistatischer Anteil – exakt
654     w_exakt_1EF=w_STATex+w_Dmod(1, :);
655     v_exakt_1EF=v_STATex+v_Dmod(1, :);
656     theta_exakt_1EF=theta_STATex+theta_Dmod(1, :);
657     My_exakt_1EF=My_STATex+My_Dmod(1, :);
658     Mz_exakt_1EF=Mz_STATex+Mz_Dmod(1, :);
659     Mphi_exakt_1EF=Mphi_STATex+Mphi_Dmod(1, :);
660     Sigma_My_exakt_1EF=Sigma_My_STATex+Sigma_My_DYN_1EF;
661     Sigma_Mz_exakt_1EF=Sigma_Mz_STATex+Sigma_Mz_DYN_1EF;
662     Sigma_Mphi_exakt_1EF=Sigma_Mphi_STATex+Sigma_Mphi_DYN_1EF;
663     Sigma_exakt_1EF=Sigma_STATex+Sigma_DYN_1EF;
664
665     w_exakt=w_STATex+w_DYN;
666     v_exakt=v_STATex+v_DYN;
667     theta_exakt=theta_STATex+theta_DYN;
668     My_exakt=My_STATex+My_DYN;
669     Mz_exakt=Mz_STATex+Mz_DYN;
670     Mphi_exakt=Mphi_STATex+Mphi_DYN;
671     Sigma_My_exakt=Sigma_My_STATex+Sigma_My_DYN;
672     Sigma_Mz_exakt=Sigma_Mz_STATex+Sigma_Mz_DYN;
673     Sigma_Mphi_exakt=Sigma_Mphi_STATex+Sigma_Mphi_DYN;
674     Sigma_exakt=Sigma_STATex+Sigma_DYN;
675
676 elseif Zeitverlauf==2
677
678     w=w_STATex+w_p0_STATex+w_DYN;
679     v=v_STATex+v_p0_STATex+v_DYN;
680     theta=theta_STATex+theta_p0_STATex+theta_DYN;
681     My=My_STATex+My_p0_STATex+My_DYN;
682     Mz=Mz_STATex+Mz_p0_STATex+Mz_DYN;
683     Mphi=Mphi_STATex+Mphi_p0_STATex+Mphi_DYN;
684     Sigma_My=Sigma_My_STATex+Sigma_My_p0_STATex+Sigma_My_DYN;
685     Sigma_Mz=Sigma_Mz_STATex+Sigma_Mz_p0_STATex+Sigma_Mz_DYN;
686     Sigma_Mphi=Sigma_Mphi_STATex+Sigma_Mphi_p0_STATex+Sigma_Mphi_DYN;
687     Sigma=Sigma_STATex+Sigma_p0_STATex+Sigma_DYN;
688 end

```

```

689 %% FEHLERMELDUNG %% *****
690
691 if (m_LF1~=0 && x1_z~=0) || (m_LF1~=0 && x2_z~=1)
692
693     error('m_LF1~=0 & x1_z~=0 & x2_z~=1 —> keine kontinuierliche Masse LF1');
694
695 end
696
697 if p0>1
698
699     error('p0>1 —> Anfangsbedingung anpassen!!!');
700
701 end
702
703
704 %% ANZEIGE %% *****
705
706 % Materialparameter ----- %
707 materialparameter.E=E;          materialparameter.G=G;
708 materialparameter.rho=rho;      materialparameter.zeta=zeta;
709
710 % Querschnittswerte ----- %
711 querschnittswerte.A=A;          querschnittswerte.Iy=Iy;
712 querschnittswerte.Iz=Iz;        querschnittswerte.Io=Io;
713 querschnittswerte.Iphi=Iphi;    querschnittswerte.It=It;
714 querschnittswerte.yS=yS;        querschnittswerte.zS=zS;
715 querschnittswerte.y_i=y_i;      querschnittswerte.z_i=z_i;
716 querschnittswerte.phi_i=phi_i;
717
718 % Ergebnisse der quasistatischen Anteile ----- %
719 disp(['x =', num2str(x(j)), ' m'])
720 disp(['w_stat_I =', num2str(w_stat_I(j)), ' m'])
721 disp(['v_stat_I =', num2str(v_stat_I(j)), ' m'])
722 disp(['theta =', num2str(w_stat_II(j)), ' -'])
723 disp(['My_stat =', num2str(My_stat_I(j)), ' kNm'])
724 disp(['Mz_stat =', num2str(Mz_stat_I(j)), ' kNm'])
725 disp(['Mphi_stat =', num2str(My_stat_II(j)+Mz_stat_II(j)), ' kNm^2'])
726 disp(['Sigma_max=', num2str(max(Sigma)), ' kN/cm^2'])
727 disp(['Sigma_min=', num2str(min(Sigma)), ' kN/cm^2'])

```

MATLAB Code 2: Funktion - Zeitverlauf der Belastung

```

1 function [qt] = Belastung_Zeitverlauf(ti,t0,t1,t2,t3,q0,nu,Zeitverlauf)
2
3 if Zeitverlauf==1
4     for i=1:length(ti)
5         if (ti(i)>=t0 & ti(i)<t1)
6             qt(i)=(ti(i)-t0)./(t1-t0);
7         elseif (ti(i)>=t1 & ti(i)<=t2)
8             qt(i)=1;
9         elseif (ti(i)>t2 & ti(i)<=t3)
10            qt(i)=(t3-ti(i))./(t3-t2);
11        else
12            qt(i)=0;
13        end
14    end
15 elseif Zeitverlauf==2
16     qt=sin(nu*ti);
17 end
18 end

```

MATLAB Code 3: Funktion - Analytische Berechnung der quasistatischen Anteile

```

1 function [w_stat_I, w_stat_II, v_stat_I, v_stat_II, My_stat_I, My_stat_II, Mz_stat_I,
2           Mz_stat_II] = Quasistatisch_exakt(E, G, Iy, Iz, Iphi, It, l, x, q_z, q_y, mx_z,
3           mx_y, x1_z, x2_z, x1_y, x2_y, Pz, Py, Mx_z, Mx_y, xPz, xPy, Lastfall)
4
5 % Berechnung der Verschiebungs- und Schnittgroessen nach Theorie I. und II. Ordnung
6
7
8 epsilon=l*sqrt(G*It/(E*Iphi))*10^2;
9
10 if Lastfall==1
11
12     for j=1:length(x)
13
14         xi(j)=x(j)/l;
15         xi_q(j)=1-xi(j);
16         alpha_z=xPz/l;
17         alpha_zq=1-alpha_z;
18
19         if x(j)<xPz
20             w_stat_I(j)=alpha_zq*xi(j)/6*(1-alpha_zq^2-xi(j)^2)*Pz*l^3/(E*Iy/10^4);
21
22             w_stat_II(j)=(alpha_zq*xi(j)-sinh(epsilon*alpha_zq)*sinh(epsilon*xi(j)))/
23                 /(epsilon*sinh(epsilon))*Mx_z*l/(G*It/10^4);
24
25             My_stat_I(j)=alpha_zq*xi(j)*Pz*l;
26
27             My_stat_II(j)=(sinh(epsilon*alpha_zq)*sinh(epsilon*xi(j)))/
28                 /(epsilon*sinh(epsilon))*Mx_z*l;
29
30         else
31             w_stat_I(j)=alpha_z*xi_q(j)/6*(1-alpha_z^2-xi_q(j)^2)*Pz*l^3/(E*Iy/10^4)
32
33             w_stat_II(j)=(alpha_z*xi_q(j)-sinh(epsilon*alpha_z)*sinh(epsilon*
34                 xi_q(j)))/(epsilon*sinh(epsilon))*Mx_z*l/(G*It/10^4);
35
36             My_stat_I(j)=alpha_z*xi_q(j)*Pz*l;
37
38             My_stat_II(j)=(sinh(epsilon*alpha_z)*sinh(epsilon*xi_q(j)))/
39                 /(epsilon*sinh(epsilon))*Mx_z*l;
40         end
41
42         alpha_y=xPy/l;
43         alpha_yq=1-alpha_y;
44
45         if x(j)<xPy
46             v_stat_I(j)=alpha_yq*xi(j)/6*(1-alpha_yq^2-xi(j)^2)*Py*l^3/(E*Iz/10^4);
47
48             v_stat_II(j)=(alpha_yq*xi(j)-sinh(epsilon*alpha_yq)*sinh(epsilon*xi(j)))/
49                 /(epsilon*sinh(epsilon))*Mx_y*l/(G*It/10^4);
50
51             Mz_stat_I(j)=alpha_yq*xi(j)*Py*l;
52
53             Mz_stat_II(j)=(sinh(epsilon*alpha_yq)*sinh(epsilon*xi(j)))/
54                 /(epsilon*sinh(epsilon))*Mx_y*l;
55
56         else
57             v_stat_I(j)=alpha_y*xi_q(j)/6*(1-alpha_y^2-xi_q(j)^2)*Py*l^3/(E*Iz/10^4)
58
59             v_stat_II(j)=(alpha_y*xi_q(j)-sinh(epsilon*alpha_z)*sinh(epsilon*
60                 xi_q(j)))/(epsilon*sinh(epsilon))*Mx_y*l/(G*It/10^4);

```

```

61         Mz_stat_I(j)=alpha_y*xi_q(j)*Py*1;
62
63         Mz_stat_II(j)=(sinh(epsilon*alpha_y)*sinh(epsilon*xi_q(j)))/
64             /(epsilon*sinh(epsilon))*Mx_y*1;
65     end
66 end
67
68 elseif Lastfall==2
69     for j=1:length(x)
70
71         xi(j)=x(j)/l;
72         xi_q(j)=1-xi(j);
73         alpha_z=x1_z/l;
74         alpha_zq=1-alpha_z;
75         beta_z=1-x2_z/l;
76         beta_zq=x2_z/l;
77
78         if x(j)<x1_z
79
80             w_stat_I(j)=1/24*(alpha_zq^2-beta_z^2)*xi(j)*(2-alpha_zq^2-beta_z^2-
81                 -2*xi(j)^2)*q_z*1^4/(E*Iy/10^4);
82
83             w_stat_II(j)=(sinh(epsilon*xi(j))/(epsilon^2*sinh(epsilon))*
84                 *(cosh(epsilon*beta_z)-cosh(epsilon*alpha_zq))+
85                 +xi(j)/2*(alpha_zq^2-beta_z^2))*mx_z*1^2/(G*It/10^4);
86
87             My_stat_I(j)=xi(j)/2*(alpha_zq^2-beta_z^2)*q_z*1^2;
88
89             My_stat_II(j)=sinh(epsilon*xi(j))/(epsilon^2*sinh(epsilon))*
90                 *(cosh(epsilon*alpha_zq)-cosh(epsilon*beta_z))*mx_z*1^2;
91
92         elseif (x(j)<=x2_z & x(j)>=x1_z)
93
94             w_stat_I(j)=1/24*((alpha_zq^2-beta_z^2)*xi(j)*(2-alpha_zq^2-beta_z^2-
95                 -2*xi(j)^2)+(xi(j)-alpha_z)^4)*q_z*1^4/(E*Iy/10^4);
96
97             w_stat_II(j)=(1/epsilon^2*((cosh(epsilon*beta_z)*sinh(epsilon*xi(j))+
98                 +cosh(epsilon*alpha_z)*sinh(epsilon*xi_q(j)))/sinh(epsilon)
99                 -1)+1/2*(xi(j).*xi_q(j)-xi(j)*beta_z^2-xi_q(j)*alpha_z^2))*
100                 *mx_z*1^2/(G*It/10^4);
101
102             My_stat_I(j)=1/2*(xi(j)*xi_q(j)-xi(j)*beta_z^2-xi_q(j)*alpha_z^2)*
103                 *q_z*1^2;
104
105             My_stat_II(j)=1/epsilon^2*(1-(cosh(epsilon*beta_z)*sinh(epsilon*xi(j))+
106                 +cosh(epsilon*alpha_z)*sinh(epsilon*xi_q(j)))/
107                 /sinh(epsilon))*mx_z*1^2;
108
109         else
110
111             w_stat_I(j)=1/24*(beta_zq^2-alpha_z^2)*xi_q(j)*(2-beta_zq^2-alpha_z^2-
112                 -2*xi_q(j)^2)*q_z*1^4/(E*Iy/10^4);
113
114             w_stat_II(j)=(sinh(epsilon*xi_q(j))/(epsilon^2*sinh(epsilon))*
115                 *(cosh(epsilon*alpha_z)-cosh(epsilon*beta_zq))+
116                 +xi_q(j)/2*(beta_zq^2-alpha_z^2))*mx_z*1^2/(G*It/10^4);
117
118             My_stat_I(j)=xi_q(j)/2*(beta_zq^2-alpha_z^2)*q_z*1^2;
119
120             My_stat_II(j)=sinh(epsilon*xi_q(j))/(epsilon^2*sinh(epsilon))*
121                 *(cosh(epsilon*beta_zq)-cosh(epsilon*alpha_z))*mx_z*1^2;
122
123         end

```

```

124     alpha_y=x1_y/1;
125     alpha_yq=1-alpha_y;
126     beta_y=1-x2_y/1;
127     beta_yq=x2_y/1;
128
129     if x(j)<x1_y
130
131         v_stat_I(j)=1/24*(alpha_yq^2-beta_y^2)*xi(j)*(2-alpha_yq^2-beta_y^2-
132             -2*xi(j)^2)*q_y*l^4/(E*Iz/10^4);
133
134         v_stat_II(j)=(sinh(epsilon*xi(j))/(epsilon^2*sinh(epsilon))*
135             *(cosh(epsilon*beta_y)-cosh(epsilon*alpha_yq))+
136             +xi(j)/2*(alpha_yq^2-beta_y^2))*mx_y*l^2/(G*It/10^4);
137
138         Mz_stat_I(j)=xi(j)/2*(alpha_yq^2-beta_y^2)*q_y*l^2;
139
140         Mz_stat_II(j)=sinh(epsilon*xi(j))/(epsilon^2*sinh(epsilon))*
141             *(cosh(epsilon*alpha_yq)-cosh(epsilon*beta_y))*mx_y*l^2;
142
143     elseif (x(j)<=x2_y & x(j)>=x1_y)
144
145         v_stat_I(j)=1/24*((alpha_yq^2-beta_y^2)*xi(j)*(2-alpha_yq^2-beta_y^2-
146             -2*xi(j)^2)+(xi(j)-alpha_y)^4)*q_y*l^4/(E*Iz/10^4);
147
148         v_stat_II(j)=(1/epsilon^2*((cosh(epsilon*beta_y)*sinh(epsilon*xi(j))+
149             +cosh(epsilon*alpha_y)*sinh(epsilon*xi_q(j)))/sinh(epsilon)-
150             -1)+1/2*(xi(j)*xi_q(j)-xi(j)*beta_y^2-xi_q(j)*alpha_y^2))*
151             *mx_y*l^2/(G*It/10^4);
152
153         Mz_stat_I(j)=1/2*(xi(j)*xi_q(j)-xi(j)*beta_y^2-xi_q(j)*alpha_y^2)*
154             *q_y*l^2;
155
156         Mz_stat_II(j)=1/epsilon^2*(1-(cosh(epsilon*beta_y)*sinh(epsilon*xi(j))+
157             +cosh(epsilon*alpha_y)*sinh(epsilon*xi_q(j)))/
158             /sinh(epsilon))*mx_y*l^2;
159
160     else
161
162         v_stat_I(j)=1/24*(beta_yq^2-alpha_y^2)*xi_q(j)*(2-beta_yq^2-alpha_y^2-
163             -2*xi_q(j)^2)*q_y*l^4/(E*Iz/10^4);
164
165         v_stat_II(j)=(sinh(epsilon*xi_q(j))/(epsilon^2*sinh(epsilon))*
166             *(cosh(epsilon*alpha_y)-cosh(epsilon*beta_yq))+
167             +xi_q(j)/2*(beta_yq^2-alpha_y^2))*mx_y*l^2/(G*It/10^4);
168
169
170         Mz_stat_I(j)=xi_q(j)/2*(beta_yq^2-alpha_y^2)*q_y*l^2;
171
172         Mz_stat_II(j)=sinh(epsilon*xi_q(j))/(epsilon^2*sinh(epsilon))*
173             *(cosh(epsilon*beta_yq)-cosh(epsilon*alpha_y))*mx_y*l^2;
174
175     end
176 end
177 else
178
179     disp('Belastung definieren!')
180
181 end
182 end

```

MATLAB Code 4: Funktion - *Querschnittswerte für offene dünnwandige Profile*

```

1 function [A, Iy , Iz , Io , Iphi , It , yS , zS , y_i , z_i , phi_i] = Querschnittswerte_offen(b,b_F,
2                                     t_OG,h,t_S,b_UG,t_UG, i)
3
4 % Berechnung der Querschnittswerte – duennwandiger offener Querschnitt ----- %
5 %
6 %
7 %
8 %
9 %
10 %
11 %
12 %
13 %
14 %
15 %
16
17 h_S=h-t_OG/2-t_UG/2;
18 b_K=(b-b_F)/2;
19 A=(b*t_OG+2*h_S*t_S+2*b_UG*t_UG)/10^2;
20
21 % Flaechenintegrale 1. Ordnung am Grundsystem:
22 Sy_G=(h_S^2*t_S+2*b_UG*t_UG*h_S)/10^3;
23 Sz_G=0;
24 Sphi_G=0;
25
26 % Flaechenintegrale 2. Ordnung am Grundsystem:
27 Iy_G=(2*h_S^3*t_S/3+2*b_UG*t_UG*h_S^2)/10^4;
28 Iz_G=(2*(b_F/2+b_K)^3*t_OG/3+b_F^2*h_S*t_S/2+b_F^2*b_UG*t_UG/2+b_UG^3*t_UG/6)/10^4;
29 Iyz_G=0;
30 Iyphi_G=0;
31 Izphi_G=(b_F^2*h_S^2*t_S/4+b_F^2*b_UG*h_S*t_UG/2-b_UG^3*h_S*t_UG/6)/10^5;
32 Iphi_G=(b_F^2*h_S^3*t_S/6+b_F^2*b_UG*h_S^2*t_UG/2+b_UG^3*h_S^2*t_UG/6)/10^6;
33
34 % Schwerpunkt:
35 y0=Sz_G/A*10;
36 z0=Sy_G/A*10;
37
38 phiA=Sphi_G/A*10^2;
39
40 % Koordinaten der Punkte:
41 y_0=0;
42 z_0=-z0;
43 y_1=b_F/2;
44 z_1=-z0;
45 y_2=b_F/2+b_K;
46 z_2=-z0;
47 y_3=b_F/2;
48 z_3=h_S-z0;
49 y_4=b_F/2-b_UG/2;
50 z_4=h_S-z0;
51 y_5=b_F/2+b_UG/2;
52 z_5=h_S-z0;
53
54 % Woelbordinate am Einheitssystem:
55 phiE_0=0-phiA;
56 phiE_1=0-phiA;
57 phiE_2=0-phiA;
58 phiE_3=b_F/2*h_S-phiA;
59 phiE_4=phiE_3+h_S*b_UG/2-phiA;
60 phiE_5=phiE_3-h_S*b_UG/2-phiA;

```

```

61 % Flaechenintegrale 2. Ordnung am Einheitssystem :
62 Iy_E=Iy_G-Sy_G^2/A;
63 Iz_E=Iz_G-Sz_G^2/A;
64 Iyz_E=Iyz_G-Sz_G*Sy_G/A;
65 Iyphi_E=Iyphi_G-Sy_G*Sphi_G/A;
66 Izphi_E=Izphi_G-Sz_G*Sphi_G/A;
67 Iphi_E=Iphi_G-Sphi_G^2/A;
68
69 % Schubmittelpunkt :
70 yS_E=(Iyphi_E*Iz_E-Izphi_E*Iyz_E)/(Iz_E*Iy_E-Iyz_E^2)*10;
71 zS_E=(Iyphi_E*Iyz_E-Izphi_E*Iy_E)/(Iz_E*Iy_E-Iyz_E^2)*10;
72
73 yS=yS_E-y0;
74 zS=zS_E-z0;
75
76 % Woelbordinate am Hauptsystem :
77 phi_0=phiE_0+y_0*zS_E;
78 phi_1=phiE_1+y_1*zS_E;
79 phi_2=phiE_2+y_2*zS_E;
80 phi_3=phiE_3+y_3*zS_E;
81 phi_4=phiE_4+y_4*zS_E;
82 phi_5=phiE_5+y_5*zS_E;
83
84 % Flaechenintegrale 2. Ordnung am Hauptsystem :
85 Iy=1/2*((Iz_E+Iy_E)-sqrt((Iz_E-Iy_E)^2+4*Iyz_E^2));
86 Iz=1/2*((Iz_E+Iy_E)+sqrt((Iz_E-Iy_E)^2+4*Iyz_E^2));
87 Io=Iy+Iz;
88 Iphi=Iphi_E+zS_E*Izphi_E/10-yS_E*Iyphi_E/10;
89
90 % Torsionstraegheitsmoment :
91 It=(b*t_UG^3+2*h_S*t_S^3+2*b_UG*t_UG^3)/3/10^4;
92
93 % Querschnittpunkte :
94 if i==0
95     y_i=y_0;
96     z_i=z_0;
97     phi_i=phi_0;
98 elseif i==1
99     y_i=y_1;
100    z_i=z_1;
101    phi_i=phi_1;
102 elseif i==2
103    y_i=y_2;
104    z_i=z_2;
105    phi_i=phi_2;
106 elseif i==3
107    y_i=y_3;
108    z_i=z_3;
109    phi_i=phi_3;
110 elseif i==4
111    y_i=y_4;
112    z_i=z_4;
113    phi_i=phi_4;
114 elseif i==5
115    y_i=y_5;
116    z_i=z_5;
117    phi_i=phi_5;
118 else
119     disp('Fehler !!!')
120 end
121 end

```

MATLAB Code 5: Funktion - Querschnittswerte für geschlossene dünnwandige Profile

```

1 function [A, Iy, Iz, Io, Iphi, It, yS, zS, y_i, z_i, phi_i] = Querschnittswerte_geschlossen
2                                     (b, b_F, t_OG, h, t_S, t_UG, i)
3
4 % Berechnung der Querschnittswerte – duennwandiger geschlossener Querschnitt —— %
5 %
6 %
7 %
8 %
9 %
10 %
11 %
12 %
13 %
14 %
15 %
16 %
17 %
18
19 h_S=h-t_OG/2-t_UG/2;
20 b_K=(b-b_F)/2;
21 A=(b*t_OG+2*h_S*t_S+b_F*t_UG)/10^2;
22 Am=(b_F*h_S)/10^2;
23 I_ds_t=b_F/t_OG+2*h_S/t_S+b_F/t_UG;
24 T_Gtheta_x=2*Am/I_ds_t*10^2;
25
26 % Flaechenintegrale 1. Ordnung am Grundsystem:
27 Sy_G=(h_S^2*t_S+b_F*h_S*t_UG)/10^3;
28 Sz_G=0;
29 Sphi_G=0;
30
31 % Flaechenintegrale 2. Ordnung am Grundsystem:
32 Iy_G=(2*h_S^3*t_S/3+b_F*h_S^2*t_UG)/10^4;
33 Iz_G=(b^3*t_OG/12+b_F^2*h_S*t_S/2+b_F^3*t_UG/12)/10^4;
34 Iyz_G=0;
35 Iyphi_G=0;
36 Izphi_G=(b_F^2*h_S^2*t_S/4+b_F^3*h_S*t_UG/6)/10^5;
37 Iphi_G=(b_F^2*h_S^3*t_S/4+7/12*b_F^3*h_S^2*t_UG)/10^6;
38
39 % Schwerpunkt:
40 y0=Sz_G/A*10;
41 z0=Sy_G/A*10;
42
43 % Koordinaten der Punkte:
44 y_0=0;
45 z_0=-z0;
46 y_1=b_F/2;
47 z_1=-z0;
48 y_2=b_F/2+b_K;
49 z_2=-z0;
50 y_3=0;
51 z_3=h_S-z0;
52 y_4=b_F/2;
53 z_4=h_S-z0;
54
55 % Woelbordinate am Einheitssystem:
56 phiE_0=0;
57 phiE_1=-y_1/t_OG*T_Gtheta_x;
58 phiE_2=phiE_1;
59 phiE_3=b_F*h_S-(b_F/2/t_OG+h_S/t_S+b_F/2/t_UG)*T_Gtheta_x;
60 phiE_4=b_F/2*h_S-(b_F/2/t_OG+h_S/t_S)*T_Gtheta_x;

```

```

61 % Flaechenintegrale 2. Ordnung am Einheitssystem :
62 Iy_E=Iy_G-Sy_G^2/A;
63 Iz_E=Iz_G-Sz_G^2/A;
64 Iyz_E=Iyz_G-Sz_G*Sy_G/A;
65 Iyphi_E=0;
66 Izphi_E=2*(b_F/6*y_1*phiE_1*t_OG+b_K/2*(y_1+y_2)*phiE_2*t_OG...
67     +h_S/2*(phiE_1+phiE_4)*y_4*t_S+b_F/6*y_4*phiE_4*t_UG)/10^5;
68
69 % Schubmittelpunkt :
70 yS_E=(Iyphi_E*Iz_E-Izphi_E*Iyz_E)/(Iz_E*Iy_E-Iyz_E^2)*10;
71 zS_E=(Iyphi_E*Iyz_E-Izphi_E*Iy_E)/(Iz_E*Iy_E-Iyz_E^2)*10;
72
73 yS=yS_E-y0;
74 zS=zS_E-z0;
75
76 % Woelbordinate am Hauptssystem :
77 phi_0=phiE_0+y_0*zS_E;
78 phi_1=phiE_1+y_1*zS_E;
79 phi_2=phiE_2+y_2*zS_E;
80 phi_3=phiE_3+y_3*zS_E;
81 phi_4=phiE_4+y_4*zS_E;
82
83 % Flaechenintegrale 2. Ordnung am Hauptssystem :
84 Iy=1/2*((Iz_E+Iy_E)-sqrt((Iz_E-Iy_E)^2+4*Iyz_E^2));
85 Iz=1/2*((Iz_E+Iy_E)+sqrt((Iz_E-Iy_E)^2+4*Iyz_E^2));
86 Io=Iy+Iz;
87 Iphi=(b_F*phi_1^2*t_OG/3+2*b_K*t_OG*(phi_1^2+phi_1*phi_2+phi_2^2)/3+...
88     +2*h_S*t_S*(phi_1^2+phi_1*phi_4+phi_4^2)/3+b_F*phi_4^2*t_UG/3)/10^6;
89
90 % Torsionstraegheitsmoment :
91 It=((b*t_OG^3+2*h_S*t_S^3+b_F*t_UG^3)/3+4*(b_F*h_S)^2/(b_F/t_OG+2*h_S/t_S+b_F/t_UG))
92     /10^4;
93
94 % Querschnittpunkte :
95 if i==0
96     y_i=y_0;
97     z_i=z_0;
98     phi_i=phi_0;
99 elseif i==1
100    y_i=y_1;
101    z_i=z_1;
102    phi_i=phi_1;
103 elseif i==2
104    y_i=y_2;
105    z_i=z_2;
106    phi_i=phi_2;
107 elseif i==3
108    y_i=y_3;
109    z_i=z_3;
110    phi_i=phi_3;
111 elseif i==4
112    y_i=y_4;
113    z_i=z_4;
114    phi_i=phi_4;
115 else
116     disp('Fehler!!!')
117 end
118 end

```

MATLAB Code 6: Script - Graphische Darstellung der zeitlichen Verläufe

```

1 %% Zeitverlaeufe der gekoppelten Biegedrillschwingungen ----- %
2
3
4 figure(1)
5 ax = axes('Position',[0.075 0.13 0.919 0.79]);
6 ax.ActivePositionProperty = 'outerposition';
7 plot(ti(:,1:length(w_STATex)),w_STATex,'—>', 'MarkerIndices',1:600:length(w_STATex)
8     , 'MarkerFaceColor','k', 'MarkerSize',6, 'color','k', 'linewidth',1.1)
9 hold on
10 plot(ti(:,1:length(w_p0_STATex)),w_p0_STATex,'-', 'color',[0 0.8 0], 'linewidth',1)
11 hold on
12 plot(ti(:,1:length(w_Dmod)),w_Dmod(1,:), '-', 'color','k', 'linewidth',1)
13 hold on
14 plot(ti(:,1:length(w_DYN)),w_DYN,'-', 'color','m', 'linewidth',1.5)
15 hold on
16 plot(ti(:,1:length(w)),w,'-', 'color','r', 'linewidth',4.5)
17 grid on
18 set(gca, 'FontSize',24, 'TickLabelInterpreter','latex')
19 xlabel('\it t \rm\hspace{0.3em} [s]', 'FontSize',25)
20 ylabel('$ w_{_S} \rm\hspace{0.5em} [m]$', 'FontSize',25);
21 ylim([-0.002 0.0098])
22 h=legend('Statischer Anteil infolge $q_z(x,t)$', 'Quasistatischer Anteil infolge $q_{_0}$
23     $(x,t)$', 'Dynamischer Anteil infolge $q_{_0}(x,t)$', 'Gesamte Verschiebung $w_{_S}$
24     $(x,t)$', 'location','Northeast');
25 set(h, 'FontSize',16, 'Interpreter','latex')
26 set(gcf, 'Position', [150 200 1300 520]);
27
28
29 figure(2)
30 ax = axes('Position',[0.075 0.13 0.919 0.79]);
31 ax.ActivePositionProperty = 'outerposition';
32 plot(ti(:,1:length(v_STATex)),v_STATex,'—>', 'MarkerIndices',1:600:length(v_STATex)
33     , 'MarkerFaceColor','k', 'MarkerSize',6, 'color','k', 'linewidth',1.1)
34 hold on
35 plot(ti(:,1:length(v_p0_STATex)),v_p0_STATex,'-', 'color',[0 0.8 0], 'linewidth',1)
36 hold on
37 plot(ti(:,1:length(v_Dmod)),v_Dmod(1,:), '-', 'color','k', 'linewidth',1)
38 hold on
39 plot(ti(:,1:length(v_DYN)),v_DYN,'-', 'color','m', 'linewidth',1.5)
40 hold on
41 plot(ti(:,1:length(v)),v,'-', 'color','r', 'linewidth',4.5)
42 grid on
43 set(gca, 'FontSize',24, 'TickLabelInterpreter','latex')
44 xlabel('\it t \rm\hspace{0.3em} [s]', 'FontSize',25)
45 ylabel('$ v_{_S} \rm\hspace{0.5em} [m]$', 'FontSize',25);
46 ylim([-0.002 0.0098])
47 h=legend('Statischer Anteil infolge $q_z(x,t)$', 'Quasistatischer Anteil infolge $q_{_0}$
48     $(x,t)$', 'Dynamischer Anteil infolge $q_{_0}(x,t)$', 'Gesamte Verschiebung $v_{_S}$
49     $(x,t)$', 'location','Northeast');
50 set(h, 'FontSize',16, 'Interpreter','latex')
51 set(gcf, 'Position', [150 200 1300 520]);
52
53
54 figure(3)
55 ax = axes('Position',[0.075 0.13 0.919 0.79]);
56 ax.ActivePositionProperty = 'outerposition';
57 plot(ti(:,1:length(theta_STATex)),theta_STATex,'—>', 'MarkerIndices',1:600:length(theta_STATex),
58     'MarkerFaceColor','k', 'MarkerSize',6, 'color','k', 'linewidth',1.1)
59 hold on

```

```

53 plot(ti(:,1:length(theta_p0_STATex)),theta_p0_STATex,'-','color',[0 0.8 0],'linewidth',1)
54 hold on
55 plot(ti(:,1:length(theta_Dmod)),theta_Dmod(1,:), '-','color','k','linewidth',1)
56 hold on
57 plot(ti(:,1:length(theta_DYN)),theta_DYN, '-','color','m','linewidth',1.5)
58 hold on
59 plot(ti(:,1:length(theta)),theta, '-','color','r','linewidth',4.5)
60 grid on
61 set(gca,'FontSize',24,'TickLabelInterpreter','latex')
62 xlabel('\it t \rm\hspace{0.3em} [s]','FontSize',25)
63 ylabel('$ \vartheta \rm\hspace{0.5em}$','FontSize',25);
64 ylim([-0.0012 0.006]);
65 h=legend('Statischer Anteil infolge  $q_z(x,t)$ ','Quasistatischer Anteil infolge  $q_{_0}(x,t)$ ','Dynamischer Anteil infolge  $q_{_0}(x,t)$ ','Gesamte Verdrillung  $\vartheta(x,t)$ ','location','Northeast');
66 set(h,'FontSize',16,'Interpreter','latex')
67 set(gcf,'Position',[150 200 1300 520]);
68
69
70 figure(4)
71 ax = axes('Position',[0.075 0.13 0.919 0.79]);
72 ax.ActivePositionProperty = 'outerposition';
73 plot(ti(:,1:length(My_STATex)),My_STATex,'— >','MarkerIndices',1:600:length(My_STATex),'MarkerFaceColor','k','MarkerSize',6,'color','k','linewidth',1.1)
74 hold on
75 plot(ti(:,1:length(My_p0_STATex)),My_p0_STATex,'-','color',[0 0.8 0],'linewidth',1)
76 hold on
77 plot(ti(:,1:length(My_Dmod)),My_Dmod(1,:), '-','color','k','linewidth',1)
78 hold on
79 plot(ti(:,1:length(My_DYN)),My_DYN, '-','color','m','linewidth',1.5)
80 hold on
81 plot(ti(:,1:length(My)),My, '-','color','r','linewidth',4.5)
82 grid on
83 set(gca,'FontSize',24,'TickLabelInterpreter','latex')
84 xlabel('\it t \rm\hspace{0.3em} [s]','FontSize',25)
85 ylabel('$M_y \rm\hspace{0.5em} [kNm]$','FontSize',25);
86 ylim([-88 438]);
87 h=legend('Statischer Anteil infolge  $q_z(x,t)$ ','Quasistatischer Anteil infolge  $q_{_0}(x,t)$ ','Dynamischer Anteil infolge  $q_{_0}(x,t)$ ','Gesamtes Biegemoment  $M_y(x,t)$ ','location','Northeast');
88 set(h,'FontSize',16,'Interpreter','latex')
89 set(gcf,'Position',[150 200 1300 520]);
90
91
92 figure(5)
93 ax = axes('Position',[0.075 0.13 0.919 0.79]);
94 ax.ActivePositionProperty = 'outerposition';
95 plot(ti(:,1:length(Mz_STATex)),Mz_STATex,'— >','MarkerIndices',1:600:length(Mz_STATex),'MarkerFaceColor','k','MarkerSize',6,'color','k','linewidth',1.1)
96 hold on
97 plot(ti(:,1:length(Mz_p0_STATex)),Mz_p0_STATex,'-','color',[0 0.8 0],'linewidth',1)
98 hold on
99 plot(ti(:,1:length(Mz_Dmod)),Mz_Dmod(1,:), '-','color','k','linewidth',1)
100 hold on
101 plot(ti(:,1:length(Mz_DYN)),Mz_DYN, '-','color','m','linewidth',1.5)
102 hold on
103 plot(ti(:,1:length(Mz)),Mz, '-','color','r','linewidth',4.5)
104 grid on
105 set(gca,'FontSize',24,'TickLabelInterpreter','latex')
106 xlabel('\it t \rm\hspace{0.3em} [s]','FontSize',25)

```

```

107 ylabel('$M_z \rm\hspace{0.5em} [kNm]$', 'FontSize', 25);
108 ylim([-15.9 24]);
109 h=legend('Statischer Anteil infolge $q_z(x,t)$', 'Quasistatischer Anteil infolge $q_{_0}\{x,t\}$', 'Dynamischer Anteil infolge $q_{_0}\{x,t\}$', 'Gesamtes Biegemoment $M_z(x,t)$', 'location', 'Northeast');
110 set(h, 'FontSize', 16, 'Interpreter', 'latex')
111 set(gcf, 'Position', [150 200 1300 520]);
112
113
114 figure(6)
115 ax = axes('Position', [0.075 0.13 0.919 0.79]);
116 ax.ActivePositionProperty = 'outerposition';
117 plot(ti(:, 1:length(Mphi_STATex)), Mphi_STATex, '-->', 'MarkerIndices', 1:600:length(Mphi_STATex), 'MarkerFaceColor', 'k', 'MarkerSize', 6, 'color', 'k', 'linewidth', 1.1)
118 hold on
119 plot(ti(:, 1:length(Mphi_p0_STATex)), Mphi_p0_STATex, '-', 'color', '[0 0.8 0]', 'linewidth', 1)
120 hold on
121 plot(ti(:, 1:length(Mphi_Dmod)), Mphi_Dmod(1,:), '-', 'color', 'k', 'linewidth', 1)
122 hold on
123 plot(ti(:, 1:length(Mphi_DYN)), Mphi_DYN, '-', 'color', 'm', 'linewidth', 1.5)
124 hold on
125 plot(ti(:, 1:length(Mphi)), Mphi, '-', 'color', 'r', 'linewidth', 4.5)
126 grid on
127 set(gca, 'FontSize', 24, 'TickLabelInterpreter', 'latex')
128 xlabel('\it t \rm\hspace{0.3em} [s]', 'FontSize', 25)
129 ylabel('$M_{\varphi} \rm\hspace{0.5em} [kNm^2]$', 'FontSize', 25);
130 ylim([-82 403]);
131 h=legend('Statischer Anteil infolge $q_z(x,t)$', 'Quasistatischer Anteil infolge $q_{_0}\{x,t\}$', 'Dynamischer Anteil infolge $q_{_0}\{x,t\}$', 'Gesamtes W\olbbimoment $M_{\varphi}(x,t)$', 'location', 'Northeast');
132 set(h, 'FontSize', 16, 'Interpreter', 'latex')
133 set(gcf, 'Position', [150 200 1300 520]);
134
135
136 figure(7)
137 ax = axes('Position', [0.075 0.13 0.919 0.79]);
138 ax.ActivePositionProperty = 'outerposition';
139 plot(ti(:, 1:length(Sigma_DYN_1EF)), Sigma_DYN_1EF, '-', 'color', 'k', 'linewidth', 1)
140 hold on
141 plot(ti(:, 1:length(Sigma_DYN)), Sigma_DYN, '-', 'color', 'r', 'linewidth', 2)
142 hold on
143 plot(ti(:, 1:length(Sigma_My)), Sigma_My, '-d', 'MarkerIndices', 1:300:length(Sigma_My), 'MarkerSize', 10, 'color', '[0 0 0]', 'linewidth', 1.5)
144 hold on
145 plot(ti(:, 1:length(Sigma_Mz)), Sigma_Mz, '-o', 'MarkerIndices', 1:400:length(Sigma_Mz), 'MarkerSize', 10, 'color', '[0 0 0]', 'linewidth', 1.5)
146 hold on
147 plot(ti(:, 1:length(Sigma_Mphi)), Sigma_Mphi, '-', 'color', '[0 1 0]', 'linewidth', 1.5)
148 hold on
149 plot(ti(:, 1:length(Sigma)), Sigma, '-', 'color', 'r', 'linewidth', 4.5)
150 grid on
151 set(gca, 'FontSize', 24, 'TickLabelInterpreter', 'latex')
152 xlabel('\it t \rm\hspace{0.3em} [s]', 'FontSize', 25)
153 ylabel(['$\sigma_{_{' , num2str(i), '}} \rm\hspace{0.5em} [kN/cm^2]$', ], 'FontSize', 25)
154 ;
154 ylim([-0.5 4]);
155 h=legend(['Normalspannung infolge $M_y(x,t)$', ['Normalspannung infolge $M_z(x,t)$'
], ['Normalspannung infolge $M_{\varphi}(x,t)$', ['Gesamte Normalspannung $
sigma_{_{' , num2str(i), '}}(x,t)$' ]]);
156 set(h, 'FontSize', 16, 'FontName', 'Cambria', 'Interpreter', 'latex')
157 set(gcf, 'Position', [150 100 1300 620]);

```