

Studienrichtung Vermessungswesen
Technische Universität Wien

GEOWISSENSCHAFTLICHE
MITTEILUNGEN

Heft 17

**Die photographische Differentialumbildung
gekrümmter Flächen
mit Beispielen aus der Architekturbildmessung**

von
E. VOZIKIS

Veröffentlichung des Institutes für Photogrammetrie

Geowiss. Mitt.
17, 1979

Wien, im Dezember 1979

Studienrichtung Vermessungswesen
Technische Universität Wien

**GEOWISSENSCHAFTLICHE
MITTEILUNGEN**

Heft 17

**Die photographische Differentialumbildung
gekrümmter Flächen
mit Beispielen aus der Architekturbildmessung**

von
E. VOZIKIS

Veröffentlichung des Institutes für Photogrammetrie

Geowiss. Mitt.
17, 1979

Wien, im Dezember 1979

Herausgeber und Verleger: o.Prof.Dr.-Ing.K.Kraus
Vorstand des Instituts für Photogrammetrie
der Technischen Universität Wien
A-1040 Wien, Gußhausstraße 27-29

Die Kosten für den Druck wurden größtenteils aus eigenen Einnahmen des Instituts für Photogrammetrie der TU Wien getragen

Einband: Fa. F. Manhardt, Wien

Druck der Seiten 61, 65: Fa. Lischkar & Co., Wien

Druck der übrigen Seiten: ÖHTUW - Vervielfältigung, Wien

Auflage: 600 Stück

KURZFASSUNG

Seit einigen Jahren beschäftigt sich das Institut für Photogrammetrie der TU Wien mit der Differentialumbildung. Die entwickelten Computerprogramme -bekannt unter der Bezeichnung SORA- sind für das Differentialumbildegerät Avioplan OR1 der Firma Wild ausgelegt. Neben der Hauptanwendung der digital gesteuerten Differentialumbildung, der Orthophoto- und Stereoorthophotoherstellung, spielen die Sonderanwendungen eine immer größere Rolle.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Erweiterung der digital gesteuerten Differentialumbildung auf die photographische Verebnung gekrümmter Flächen. Dabei werden die im allgemeinen nichtabwickelbaren Objektflächen auf abwickelbare Flächen (Zylinder, Kegel, Polyeder etc.), die möglichst gut an die Objektflächen angepaßt werden, projiziert. Neben der mathematischen Behandlung der Problemstellungen wurden die Computerprogramme entwickelt und folgende praktische Beispiele bearbeitet:

- Abwicklung eines Zylinders (Rote Halle, Pergamon),
- Verebnung eines historischen Globus (Blaeu-Globus, Österreichische Nationalbibliothek),
- Verebnung einer sphärischen Kuppel (Kloster "Ossios Loukas", Griechenland),
- Verebnung einer elliptischen Kuppel (Wiener Karlskirche).

Im letzten Kapitel werden die verschiedenen Fehlereinflüsse diskutiert und die geometrischen Genauigkeiten abgeschätzt.

<u>INHALTSVERZEICHNIS</u>	(Seite)
1. VORWORT.....	5
2. EINLEITUNG.....	6
3. ANWENDUNG DER KONVENTIONELLEN DIFFERENTIALUMBILDUNG IN DER ARCHITEKTURBILDMESSUNG.....	7
4. DIFFERENTIALUMBILDUNG MIT HILFE DES SYSTEMES AVIOPLAN-SORA.....	8
4.1. Grundprinzip des Avioplans.....	8
4.2. Notwendige Schritte bei einer Umbildung mit dem system AVIOPLAN-SORA.....	10
4.3. Das Programmpaket SORA.....	11
5. ANPASSUNG EINES DREIACHSIGEN ELLIPSOIDES AN EINIGE PASSPUNKTE.....	12
5.1. Theorie der Anpassung.....	12
5.1.1. Verschiebung des Koordinatenursprunges in den Ellipsoidmittelpunkt.....	15
5.1.2. Drehung des Koordinatensystemes in die Hauptachsen des Ellipsoides.....	17
5.1.3. Besonderheiten bei der Kugel und beim Rotations- ellipsoid.....	18
5.2. Programmrealisierung.....	19
6. VEREBNUNG EINER KUGEL MIT HILFE EINES SCHNITTZY- LINDERS UND EINER TANGENTIALEBENE.....	21
6.1. Allgemeines.....	21
6.2. Definition des schneidenden Zylinders.....	23
6.3. Grundprinzip der Abwicklung eines Zylinders.....	24
6.4. Grundprinzip der Verebnung einer Kugel.....	27
6.5. Programmrealisierung.....	33
6.6. Praktisches Beispiel (Globus).....	34
7. VEREBNUNG EINER KUGEL MIT HILFE EINES POLYEDERS.....	38
7.1. Allgemeines.....	38
7.2. Definition des Polyeders.....	39
7.3. Mathematisches Grundprinzip der Verebnung.....	41
7.4. Programmrealisierung.....	45

7.5.	Praktisches Beispiel (Ossios Loukas-Kuppel).....	46
8.	VEREBNUNG EINES DREIACHSIGEN ELLIPSOIDES MIT HILFE EINES POLYEDERS.....	49
8.1.	Allgemeines.....	49
8.2.	Definition des Polyeders.....	49
8.3.	Mathematisches Grundprinzip der Verebnung.....	53
8.4.	Programmrealisierung.....	58
8.5.	Praktisches Beispiel (Wiener Karlskirche - Kuppel).....	59
9.	GENAUIGKEITSUNTERSUCHUNGEN.....	67
9.1.	Allgemeines.....	67
9.2.	Projektionsverzerrungen.....	68
9.3.	Interpolationsfehler.....	71
9.4.	Bauungenauigkeitsfehler.....	75
10.	SCHLUSSBEMERKUNGEN.....	78
11.	LITERATUR.....	80
12.	ANHÄNGE.....	83
12.1.	Anhang 5.1: Beweis, daß bei einem Ellipsoid $a'_{00} \neq 0$ ist	83
12.2.	Anhang 5.2: Geometrische Interpretation der beim Aus- gleich des Kapitels 5.1. (Formeln (5.4) bis (5.6)) an- gesetzten Restfehler v_i	83
12.3.	Anhang 5.3: Flußdiagramm zum Programm DEFELID.....	86
12.4.	Anhang 6.1: Flußdiagramm zum Programm STREIF.....	87
12.5.	Anhang 6.2: Flußdiagramm zum Programm POLKAP.....	88
12.6.	Anhang 7.1: Flußdiagramm zum Programm TROUL.....	89
12.7.	Anhang 8.1: Beweis, daß die vier Schnittpunkte 1, 2, 3, 4 der Ellipsen (h_i) , (h_{i+1}) , (z_j) , (z_{j+1}) in einer Ebene liegen.....	90
12.8.	Anhang 8.2: Flußdiagramm zum Programm ELLID.....	91
12.9.	Anhang 9.1: Flußdiagramm zum Programm ACCUR1.....	92
12.10.	Anhang 9.2: Flußdiagramm zum Programm ACCUR2.....	93
12.11.	Anhang 9.3: Flußdiagramm zum Programm ACCUR3.....	94
	LEBENS LAUF.....	95

1. VORWORT

Die vorliegende Arbeit wurde in den Jahren 1977-1979 am Institut für Photogrammetrie der TU Wien angefertigt. Dieses Institut beschäftigt sich seit einigen Jahren mit Problemen der Differentialumbildung, vor allem in der Luftbildmessung. Mit dieser Arbeit soll eine Erweiterung der Differentialumbildung auf die Architekturbildmessung, insbesondere für Anwendungen in der Denkmalpflege, erreicht werden.

Beim Aufbau der Arbeit wurde besonders berücksichtigt, daß die theoretischen Überlegungen auf die Erfordernisse der Praxis leicht übertragbar sind. Zum besseren Verständnis der auftretenden Probleme wurden einige häufig vorkommende Fälle detailliert behandelt.

An dieser Stelle möchte ich auch meinen aufrichtigen Dank Herrn Prof.Dr.K. K r a u s für die Anregung dieser wissenschaftlichen Arbeit und für die finanzielle Unterstützung während meines Aufenthaltes am Institut, Herrn Prof.Dr. W. P i l l e w i z e r * für die Übernahme des Koreferates, Herrn Dipl.-Ing. J. J a n s a für seine Hilfe auf dem Gebiete der EDV und gemeinsam mit Herrn Dipl.-Ing. H. K a g e r für verschiedene Gedanken bei der theoretischen Konzeption aussprechen. Für Anregungen zur Anwendung der Methode in der Praxis danke ich Herrn Dr. H. F o r a m i t t i.

*Diese Arbeit wird bei der Technischen Naturwissenschaftlichen Fakultät der Technischen Universität Wien zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Technischen Wissenschaften eingereicht.

2. EINLEITUNG

Die jüngste Entwicklung eines Differentialumbildegerätes mit digitaler Steuerung ermöglicht die Anwendung der photographischen Differentialumbildung nicht nur für die Herstellung konventioneller Orthophotos sondern auch für spezielle Aufgabenstellungen.

Am Institut für Photogrammetrie der TU Wien wurden für das Differentialumbildegerät Avioplan OR1 der Firma Wild /23/ vielfältige Anwendungsmöglichkeiten vorgeschlagen /12/.

Anhand der entwickelten Computerprogramme und der Bearbeitung von Beispielen auf dem Gebiet

- der Orthophoto- und Stereoorthophotographie /17/,
- der Rektifizierung von multispektralen Scanneraufnahmen /18/,
- der Entzerrung stark geneigter Aufnahmen ebener Objekte /13/, /27/ und
- der photographischen Entzerrung abwickelbarer Regelflächen /5/, /14/

konnte bewiesen werden, daß dieses Verfahren Ergebnisse liefert, die den Bedürfnissen der Praxis entsprechen.

Im Laufe der Zeit zeigte sich, daß weitere Problemstellungen der Denkmalpfleger, Restauratoren, Architekten und Archäologen ebenfalls mit Hilfe der digital gesteuerten Differentialumbildung gelöst werden können. Die vordringlichsten Aufgaben, die die photogrammetrische Abteilung des Bundesdenkmalamtes Wien und die Kartensammlung der Österreichischen Nationalbibliothek an das Institut für Photogrammetrie herangetragen haben, waren die Verebnung von ellipsoidförmigen Kuppeln sowie die Verebnung von alten Globen.

Das Ziel dieser Arbeit ist daher, die digital gesteuerte Differentialumbildung mit dem Avioplan OR1 auch auf die Verebnung nichtabwickelbarer Flächen theoretisch und programmtechnisch zu erweitern. Um den Beweis für die Tauglichkeit dieses Verfahrens zu liefern, werden die Ergebnisse einiger Beispiele präsentiert. Außerdem wird eine detaillierte Genauigkeitsuntersuchung angeschlossen.

Bevor jedoch die Verebnung nichtabwickelbarer Flächen behandelt wird, werden die bisher auf dem Gebiet der Architekturbildmessung verwendeten Verfahren sowie die allgemeinen Voraussetzungen (wie z.B. die Funktionsweise des Avioplans, die prinzipiellen Eigenschaften des Programmpaketes SORA, der Software des Avioplans) besprochen.

3. ANWENDUNG DER KONVENTIONELLEN DIFFERENTIALUMBILDUNG IN DER ARCHITEKTURBILDMESSUNG

Vor allem auf dem Gebiet der Denkmalpflege steht man immer vor der Aufgabe, Objekte mit zahlreichen Details auszuwerten. Bei einer klassischen photogrammetrischen Auswertung mittels eines Stereoautographen ist lediglich eine Strichzeichnung möglich, d.h. der Informationsgehalt der photographischen Vorlage wird auf die wesentlichen Linienelemente reduziert. Diese Aufgabe des Reduzierens obliegt der augenblicklichen Auffassung des Operateurs. Vergessene oder als nicht wichtig angesehene Details sind später nicht oder nur mehr schwer rekonstruierbar. Außerdem stellt die dafür notwendige umfangreiche zeitintensive manuelle Arbeit die Wirtschaftlichkeit besonders bei sehr detailreichen Bildern in Frage.

Daher war man schon seit längerem bemüht, die Strichauswertung durch photographische Bilder, welche durch Umbildung der Originalbilder entstanden sind, zu ersetzen. Kann die auszuwertende Objektfläche durch eine Ebene approximiert werden, so ist diese Aufgabe mit Hilfe eines gewöhnlichen Entzerrungsgerätes in vielen Fällen zufriedenstellend zu lösen. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, besteht die Möglichkeit mit Hilfe eines Orthophotogerätes die gewünschten Grund- oder Aufrißdarstellungen zu erhalten /19/, /20/, /21/. Dabei wird das Objekt-wie bei der üblichen Strichauswertung- mit einer orthogonalen Parallelprojektion auf eine Ebene projiziert.

Für diese Projektion sind die Kenntnis des optischen Strahlenganges während der Aufnahme und die geometrische Beschaffenheit der Objektoberfläche notwendig. In einem Stereoauswertegerät ist es einerseits möglich, den Aufnahmestrahlangang wieder herzustellen und andererseits Informationen über die

Objektoberfläche zu erhalten. Mit Hilfe dieser Angaben kann ein Orthophotogerät die Objektoberfläche in kleinen Bereichen durch Ebenen annähern und die entsprechenden Bildteile durch Entzerrung auf die Bezugsebene photographisch abbilden. Ist aber die Objektoberfläche mathematisch geschlossen darstellbar (z.B. als Gleichung eines Ellipsoides), so kann nur mit Hilfe der neuen, digital gesteuerten Orthophotogeräte der gewünschte Grund- und Aufriß ohne Zuhilfenahme eines Stereoauswertegerätes erlangt werden. Selbst die Notwendigkeit eines Stereobildpaares ist nicht mehr gegeben.

Bei vielen Projekten zeigte es sich immer wieder, daß bei krummen Flächen eine Grund- und Aufrißdarstellung nicht genügt, sondern eine Abwicklung oder eine Approximation der gekrümmten Fläche durch eine abwickelbare Hilfsfläche (Projektionsfläche) von der Praxis gefordert wird. Die beiden Aufgaben können, wie in dieser Arbeit dokumentiert wird, mit der digital gesteuerten Differentialumbildung gelöst werden. Selbstverständlich können solche Umbildungen auch mit der digitalen Bildverarbeitung /3/ gemacht werden, worauf aber hier nicht eingegangen wird.

4. DIFFERENTIALUMBILDUNG MIT HILFE DES SYSTEMES AVIOPLAN-SORA

4.1. Grundprinzip des Avioplans

Das digital gesteuerte Differentialumbildeggerät Avioplan OR1 wurde am XIII. ISP Kongress von der Firma Wild Heerbrugg vorgestellt /23/. In diesem Gerät werden die optischen Elemente der Bildübertragung mit Hilfe eines Prozeßrechners gesteuert. Abbildung 4.1. zeigt das Grundprinzip des Avioplan OR1. Der OR1 kann ein Bild (Vorlage) photographisch so umbilden, daß aus einem beliebigen Raster der Vorlage ein quadratisches Raster im Abbild entsteht. Die Umbildung erfolgt durch lineare Interpolation entlang der vier Rasterseiten, sodaß man sie mathematisch als eine bilineare Transformation definieren kann:

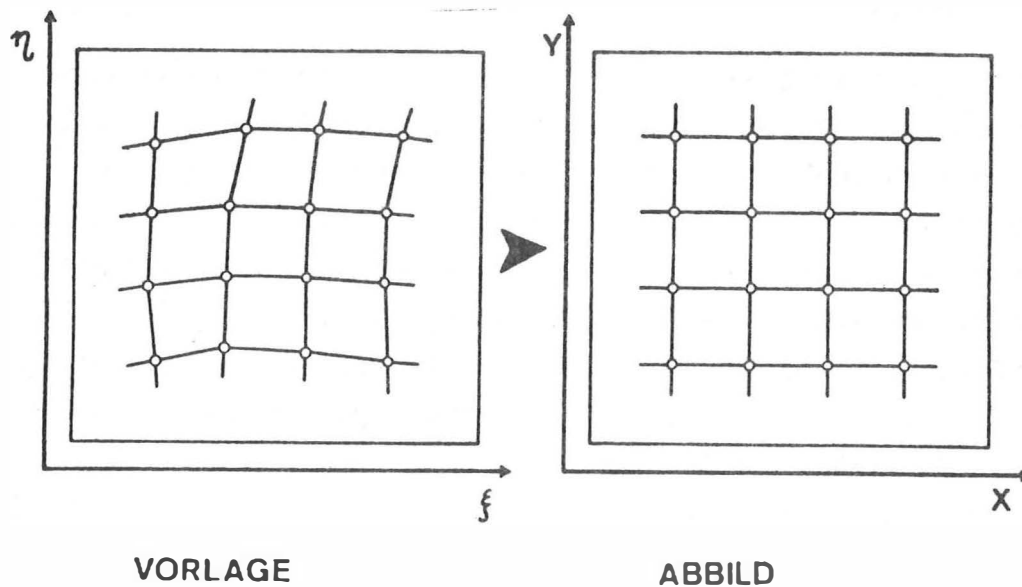


Fig.4.1.: Grundprinzip des Avioplan OR1

$$\begin{aligned}\xi_i &= a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i y_i \\ \eta_i &= b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i + b_3 x_i y_i\end{aligned}\tag{4.1}$$

Dabei sind: ξ_i, η_i ($i=1,2,3,4$) die Koordinaten der Eckpunkte eines Viereckes in der photographischen Vorlage, x_i, y_i die Koordinaten der Eckpunkte des entsprechenden Quadrates im Abbild, und a_n, b_n ($n=0,1,2,3$) die Parameter der bilinearen Transformation.

Für diese Umbildung benötigt der Avioplan auf einem Magnetband die Koordinaten ξ und η der Punkte des unregelmäßigen Rasters in einem Bildkoordinatensystem (ξ, η) .

Es ist jedoch zu beachten, daß nur die Eckpunkte des unregelmäßigen und quadratischen Rasters einander exakt entsprechen. Die Linien des unregelmäßigen Rasters müßten nämlich gekrümmt sein. Bei genügend kleinen Maschen wird aber der aus dieser Approximation entstandene Fehler vernachlässigbar klein. Eine Untersuchung dieses Interpolationsfehlers wird im Kapitel 9.3 durchgeführt.

4.2. Notwendige Schritte bei einer Umbildung mit dem System AVIOPLAN-SORA

In den vorausgegangenen Ausführungen wurde dargestellt, daß dem AvioPlan auf Magnetband die Koordinaten ξ und η eines unregelmäßigen Rasters zu übergeben sind und das Umbildegerät damit aus dem eingelegten Bild ein neues photographisches Bild (=Abbild) erzeugt, das in seinen geometrischen Eigenschaften einem quadratischen Raster entspricht.

Die EDV-Arbeit in einem beliebigen Universalcomputer beginnt deshalb damit, im Abbild einen quadratischen Raster zu definieren. Die Fläche, in der das Abbild erzeugt werden soll, muß abwickelbar sein (z.B. Zylinder, Kegel, Ebene). In Abb.4.2 ist diese Fläche mit (R) bezeichnet.

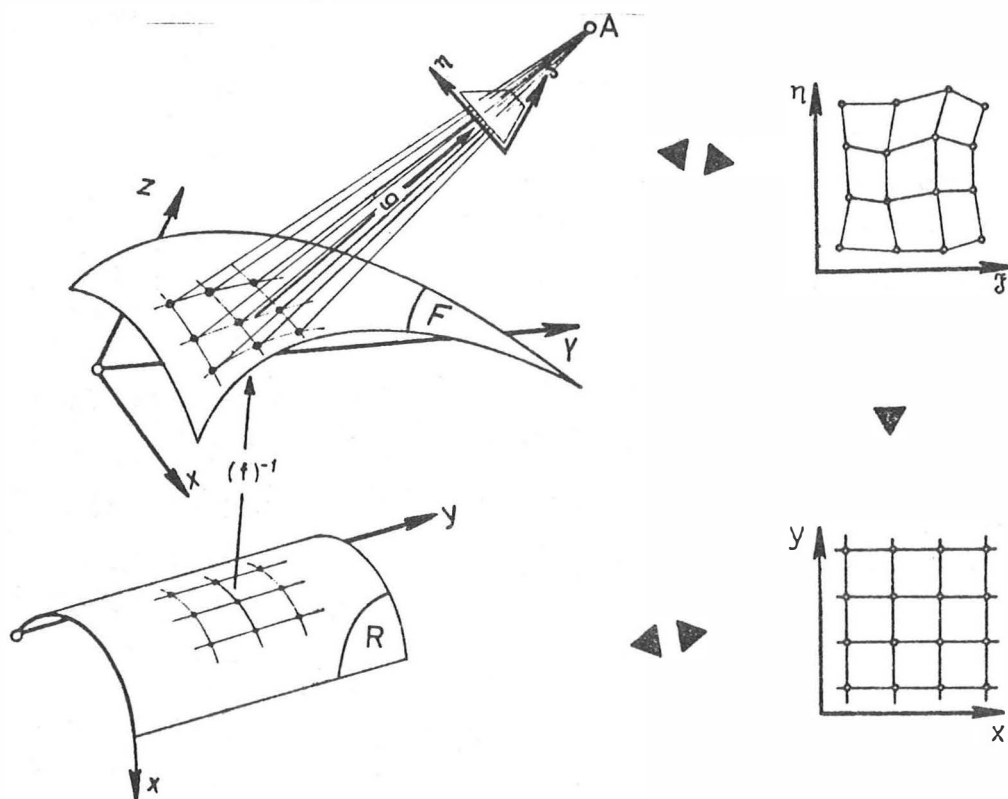


Abb.4.2: Differentialumbildung mit dem System AVIOPLAN-SORA

Die Fläche (R) ist andererseits auch die Projektionsfläche, auf die die Objektoberfläche (F) projiziert werden soll. Der zweite Schritt des EDV-Programmes ist deshalb, mit den inversen Abbildungsgleichungen $(f)^{-1}$ den quadratischen xy-Raster (s = Rasterweite) auf die Objektoberfläche (F) zu übertragen.

Zum Schluß erfolgt die Transformation der Objektoberfläche mit den Gleichungen der Zentralprojektion, d.h. mit den Elementen der inneren und äußeren Orientierung, in das für die Umbildung zu verwendende Bild (=Vorlage).

Die auf Magnetband ausgegebenen Bildkoordinaten ξ und η dieser Punkte dienen dann zur Steuerung der Umbildung im Avioplan.

Einen Spezialfall stellt das Orthophoto dar. Die Projektionsfläche ist eine Ebene; die Projektionsart ist eine orthogonale Parallelprojektion. Bei einem Stereopartner /12/ ist die Projektionsfläche auch eine Ebene; die Projektionsart ist aber eine parallele Schrägprojektion.

Ist die Objektoberfläche abwickelbar, kann sie gleichzeitig als Projektionsfläche dienen. Das Endergebnis entspricht in diesem Fall der Abwicklung der Objektoberfläche (Abb.4.3).

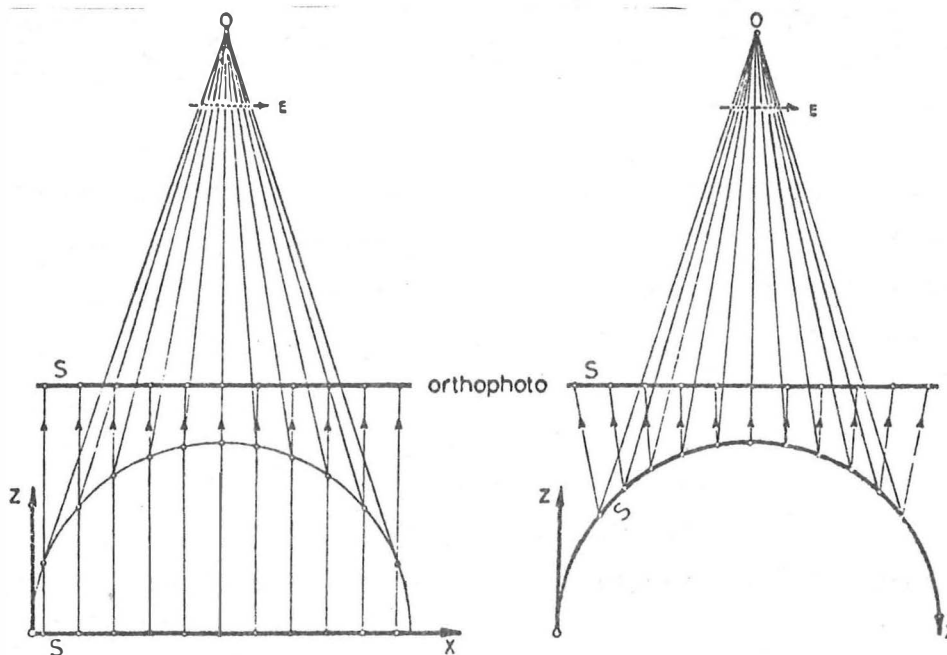


Abb.4.3: Differentialumbildung einer abwickelbaren Fläche;
(links: konventionelles Orthophoto; rechts: Abwicklung der Fläche)

4.3. Das Programmpaket SORA

Das Programmpaket SORA (Software für die Off-line Rektifizierung mit dem Avioplan) wurde im Auftrag der Firma Wild am Institut für Photogrammetrie der TU Wien entwickelt. SORA-OP /12/, /17/ ist das wichtigste Programm. Es führt die Berechnungen zur Herstellung von Orthophotos durch. Die Be-

rechnungen erfolgen in zwei Programmteilen:

Im Teil I wird der quadratische xy-Raster auf der Projektionsebene definiert. Anhand von gemessenen, unregelmäßig verteilten Punkten der Objektoberfläche werden die z-Werte in den Punkten des xy-Rasters durch Interpolation ermittelt, was einer Orthogonalprojektion der Objektoberfläche auf die Projektionsebene entspricht.

Im Teil II wird aufgrund vorhandener Paßpunkte die äußere und, bei Verwendung von Amateuraufnahmen, die innere Orientierung der Aufnahme berechnet. Danach werden die Rasterpunkte von der Objektoberfläche mit Hilfe einer Zentralprojektion, mit dem Aufnahmestandpunkt als Projektionszentrum, ins Bild transformiert. Die Bildkoordinaten dieser Rasterpunkte sowie einige Parameter, die für die Steuerung und die Bedienung des Avioplans notwendig sind, werden auf Magnetband ausgegeben.

In der vorliegenden Arbeit wird nur der Teil II des Programmes SORA-OP verwendet. Der Teil I wird durch verschiedene Programme, die von dem jeweiligen Umbildungsfall abhängig sind, ersetzt.

5. ANPASSUNG EINES DREIACHSIGEN ELLIPSOIDES AN EINIGE PAßPUNKTE

Bei den einleitend erwähnten Problemstellungen ist die Objektoberfläche in der Regel durch geschlossene mathematische Beziehungen darstellbar. Die Parameter dieser Beziehungen sind aber im allgemeinen nicht bekannt. Sie müssen aus einigen Objektoberflächenpunkten (Paßpunkten), die auf geodätische oder photogrammetrische Weise bestimmt wurden, rechnerisch ermittelt werden. Es wurde daher das FORTRAN-Programm DEFELID entwickelt, das eine Fläche zweiter Ordnung (=Quadrik) an gegebene Punkte anpaßt.

5.1. Theorie der Anpassung

Wir nehmen an, daß auf der zu bestimmenden Fläche n Paßpunkte

in einem lokalen Koordinatensystem $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$ vorhanden sind. Da die Koordinaten der Paßpunkte mit Meßfehlern behaftet sind und der Bau gewisse Abweichungen gegenüber der Planung (=Bauungenauigkeit) aufweist, gibt es in der Regel keine Quadrik die genau durch die vorhandenen Paßpunkte hindurch geht. Das Problem besteht also darin, jene Fläche zweiter Ordnung zu finden, die am besten die vorhandenen Paßpunkte annähert.

Eine Quadrik kann analytisch durch ein vollständiges Polynom zweiter Ordnung dargestellt werden:

$$\begin{aligned} a'_{11}\tilde{X}^2 + a'_{22}\tilde{Y}^2 + a'_{33}\tilde{Z}^2 + 2a'_{12}\tilde{X}\tilde{Y} + 2a'_{13}\tilde{X}\tilde{Z} + 2a'_{23}\tilde{Y}\tilde{Z} + \\ + 2a'_{01}\tilde{X} + 2a'_{02}\tilde{Y} + 2a'_{03}\tilde{Z} + a'_{00} = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Da bei einem Ellipsoid $a'_{00} \neq 0$ ist (Anhang 5.1), kann man durch a'_{00} dividieren:

$$\begin{aligned} a_{11}\tilde{X}^2 + a_{22}\tilde{Y}^2 + a_{33}\tilde{Z}^2 + 2a_{12}\tilde{X}\tilde{Y} + 2a_{13}\tilde{X}\tilde{Z} + 2a_{23}\tilde{Y}\tilde{Z} + \\ + 2a_{01}\tilde{X} + 2a_{02}\tilde{Y} + 2a_{03}\tilde{Z} + 1 = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Auf diese Weise werden die 10 Parameter der Gleichung (5.1) auf neun reduziert. Setzen wir für \tilde{X} , \tilde{Y} , \tilde{Z} die Koordinaten \tilde{X}_i , \tilde{Y}_i , \tilde{Z}_i des Punktes P_i ein, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} a_{11}\tilde{X}_i^2 + a_{22}\tilde{Y}_i^2 + a_{33}\tilde{Z}_i^2 + 2a_{12}\tilde{X}_i\tilde{Y}_i + 2a_{13}\tilde{X}_i\tilde{Z}_i + 2a_{23}\tilde{Y}_i\tilde{Z}_i + \\ + 2a_{01}\tilde{X}_i + 2a_{02}\tilde{Y}_i + 2a_{03}\tilde{Z}_i + 1 = v_i \end{aligned} \quad (5.3)$$

wobei zwei Fälle zu unterscheiden sind: $v_i = 0$ für $n=9$ und $v_i \neq 0$ für $n > 9$. Die zu bestimmenden Parameter a_{jk} sind im zweiten Fall die Lösungen der folgenden Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen:

$$A \cdot X = L + V \quad (5.4)$$

$$\text{mit } A = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^2 & \tilde{y}_1^2 & \tilde{z}_1^2 & \tilde{x}_1\tilde{y}_1 & \tilde{x}_1\tilde{z}_1 & \tilde{y}_1\tilde{z}_1 & \tilde{x}_1 & \tilde{y}_1 & \tilde{z}_1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \tilde{x}_n^2 & \tilde{y}_n^2 & \tilde{z}_n^2 & \tilde{x}_n\tilde{y}_n & \tilde{x}_n\tilde{z}_n & \tilde{y}_n\tilde{z}_n & \tilde{x}_n & \tilde{y}_n & \tilde{z}_n \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -1 \\ . \\ -1 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} v_1 \\ . \\ v_n \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$X = [a_{11} \ a_{22} \ a_{33} \ a_{12}^* \ a_{13}^* \ a_{23}^* \ a_{01}^* \ a_{02}^* \ a_{03}^*]^T \text{ mit } a_{jk}^* = 2a_{jk}$$

Mit der Bedingung $V^T V = \min$ lautet die Lösung des Systemes (5.4) nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$A^T, A, X = A^T, L \Rightarrow X = M^{-1}, U \text{ mit } M = A^T, A \text{ und } U = A^T, L \quad (5.6)$$

Eine Deutung der Verbesserungen v_i wird im Anhang 5.2 nachgeholt. Anhand der durch den Ausgleich ermittelten Parameter a_{jk} ist zunächst zu prüfen, ob die Koeffizienten a_{jk} einem Ellipsoid genügen. Dafür müssen folgende Bedingungen erfüllt sein /6/:

$$\text{DET} \delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \text{DET} \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5.7)$$

$$\text{und } S \cdot \delta > 0 \text{ mit } S = \sum_{i=1}^3 a_{ii} \text{ und } \text{Größe} T = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{13}^2 - a_{12}^2 > 0$$

Anschließend ist aus der allgemeinen Gleichung (5.2) des Ellipsoides, dessen Koordinatenursprung nicht mit dem Mittelpunkt zusammenfällt und dessen Koordinatenachsen gegenüber den Hauptachsen des Ellipsoides verdreht sind, die Normalform

$$(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) - 1 = 0 \quad (5.8)$$

des Ellipsoides abzuleiten (Abb.5.1). Diese Umformung erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird der Koordinatenursprung in den Mittelpunkt des Ellipsoides gebracht und anschließend erfolgt die Drehung des Koordinatensystemes in die Hauptachsen des Ellipsoides.

5.1.1. Verschiebung des Koordinatenursprunges in den Ellipsoidmittelpunkt

Die Gleichung eines Ellipsoides mit dem Koordinatenursprung im Ellipsoidmittelpunkt hat die Form /7/:

$$\bar{a}_{11}\bar{X}^2 + \bar{a}_{22}\bar{Y}^2 + \bar{a}_{33}\bar{Z}^2 + 2\bar{a}_{12}\bar{X}\bar{Y} + 2\bar{a}_{13}\bar{X}\bar{Z} + 2\bar{a}_{23}\bar{Y}\bar{Z} + \bar{a}_{00} = 0 \quad (5.9)$$

Es ist nun die Aufgabe zu lösen, wie aus den durch die Ausgleichung (5.4) ermittelten Koeffizienten a_{jk} der Gleichung (5.2) einerseits die Koeffizienten \bar{a}_{jk} der Gleichung (5.9), und zum anderen die Translationen $D\tilde{X}$, $D\tilde{Y}$, $D\tilde{Z}$ (Abb.5.1) berechnet werden können.

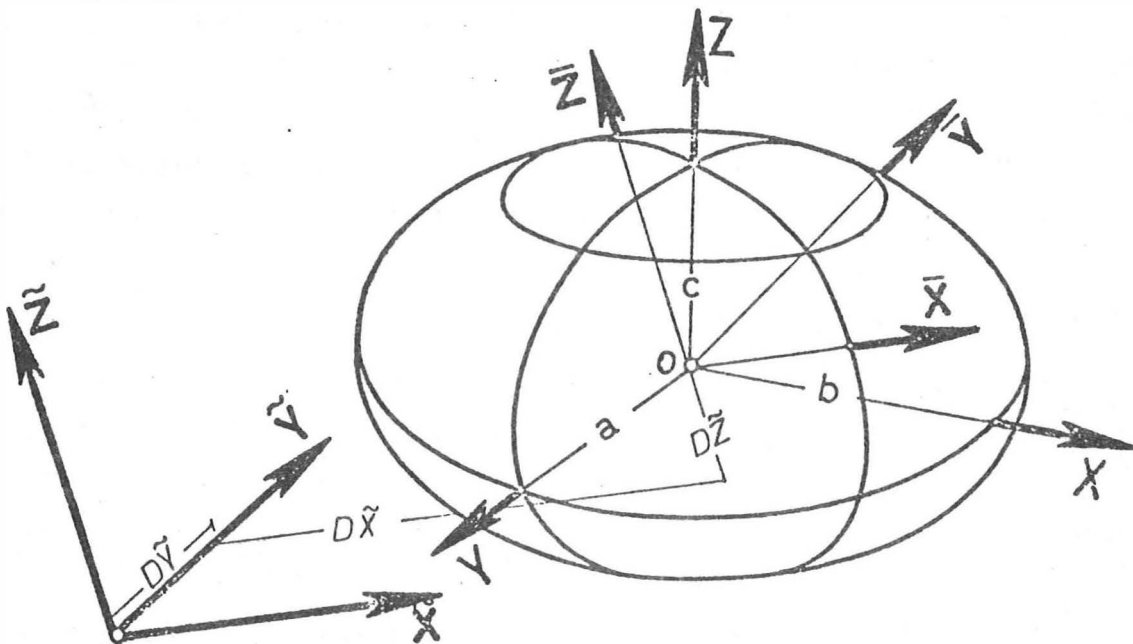


Abb.5.1: Lage und Orientierung des Ellipsoides

Zu diesem Zweck dividiert man die Gleichung (5.9) durch \bar{a}_{00} und bezeichnet die neuen Koeffizienten mit \bar{a}_{jk} :

$$\bar{a}_{11}\bar{X}^2 + \bar{a}_{22}\bar{Y}^2 + \bar{a}_{33}\bar{Z}^2 + 2\bar{a}_{12}\bar{X}\bar{Y} + 2\bar{a}_{13}\bar{X}\bar{Z} + 2\bar{a}_{23}\bar{Y}\bar{Z} + \bar{a}_{00} = 0 \quad (5.10)$$

Anstelle der Koordinaten \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} kann man aber auch schreiben:

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D\tilde{X} \\ D\tilde{Y} \\ D\tilde{Z} \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \bar{X} = \tilde{X} - D\tilde{X} \quad (5.11)$$

(5.11) in (5.10) :

$$\begin{aligned} & \bar{a}_{11}\tilde{X}^2 + \bar{a}_{22}\tilde{Y}^2 + \bar{a}_{33}\tilde{Z}^2 + 2\bar{a}_{12}\tilde{X}\tilde{Y} + 2\bar{a}_{13}\tilde{X}\tilde{Z} + 2\bar{a}_{23}\tilde{Y}\tilde{Z} - \\ & - 2(\bar{a}_{11}D\tilde{X} + \bar{a}_{12}D\tilde{Y} + \bar{a}_{13}D\tilde{Z})\tilde{X} - 2(\bar{a}_{12}D\tilde{X} + \bar{a}_{22}D\tilde{Y} + \bar{a}_{23}D\tilde{Z})\tilde{Y} - \\ & - 2(\bar{a}_{13}D\tilde{X} + \bar{a}_{23}D\tilde{Y} + \bar{a}_{33}D\tilde{Z})\tilde{Z} + \\ & + (\bar{a}_{11}D\tilde{X}^2 + \bar{a}_{22}D\tilde{Y}^2 + \bar{a}_{33}D\tilde{Z}^2 + 2\bar{a}_{12}D\tilde{X}D\tilde{Y} + 2\bar{a}_{13}D\tilde{X}D\tilde{Z} + 2\bar{a}_{23}D\tilde{Y}D\tilde{Z}) + \bar{a}_{00} = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Die Gleichung (5.12) repräsentiert aber die Gleichung eines Ellipsoides mit dem Koordinatenursprung außerhalb des Ellipsoidmittelpunktes. Außerdem ist eine Division durch \bar{a}'_{00} erfolgt, sodaß die Gleichung (5.12) mit der Gleichung (5.2) äquivalent sein muß. Deshalb kann ein Koeffizientenvergleich angestellt werden, der zu folgenden Ergebnissen führt:

a) Identität folgender Koeffizienten:

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Gegen eine Verschiebung des Koordinatensystemes sind diese Koeffizienten also invariant.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 2(\bar{a}_{11}D\tilde{X} + \bar{a}_{12}D\tilde{Y} + \bar{a}_{13}D\tilde{Z}) = -2a_{01} \\ & 2(\bar{a}_{12}D\tilde{X} + \bar{a}_{22}D\tilde{Y} + \bar{a}_{23}D\tilde{Z}) = -2a_{02} \\ & 2(\bar{a}_{13}D\tilde{X} + \bar{a}_{23}D\tilde{Y} + \bar{a}_{33}D\tilde{Z}) = -2a_{03} \end{aligned}$$

oder unter Berücksichtigung der Identitäten (5.13):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D\tilde{X} \\ D\tilde{Y} \\ D\tilde{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.14)$$

Die Beziehungen (5.14) sind ein lineares Gleichungssystem, aus dem die Translationen $D\tilde{X}$, $D\tilde{Y}$, $D\tilde{Z}$ ermittelt werden können.

$$c) \quad \bar{a}_{11}D\tilde{X}^2 + \bar{a}_{22}D\tilde{Y}^2 + \bar{a}_{33}D\tilde{Z}^2 + 2\bar{a}_{12}D\tilde{X}D\tilde{Y} + 2\bar{a}_{13}D\tilde{X}D\tilde{Z} + 2\bar{a}_{23}D\tilde{Y}D\tilde{Z} + \bar{a}_{00} = 1$$

Unter Beachtung der Identitäten (5.13) ergibt sich der in Gleichung (5.10) noch fehlende Koeffizient \bar{a}_{00} aus:

$$\bar{a}_{00} = 1 - (\bar{a}_{11}D\tilde{X}^2 + \bar{a}_{22}D\tilde{Y}^2 + \bar{a}_{33}D\tilde{Z}^2 + 2\bar{a}_{12}D\tilde{X}D\tilde{Y} + 2\bar{a}_{13}D\tilde{X}D\tilde{Z} + 2\bar{a}_{23}D\tilde{Y}D\tilde{Z}) \quad (5.15)$$

5.1.2. Drehung des Koordinatensystemes in die Hauptachsen des Ellipsoides

Die Gleichung des Ellipsoides in einem gegen die Hauptachsen gedrehten, aber im Ellipsoidmittelpunkt liegenden Koordinatensystem hat die Form (5.10), die in Matrizen Schreibweise wie folgt formuliert werden kann:

$$\begin{bmatrix} - \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} + \bar{a}_{00} = 0 \quad \text{oder} \quad \bar{X}^T \bar{A} \cdot \bar{X} + \bar{a}_{00} = 0 \quad (5.16)$$

Aus dieser Gleichung soll durch Umformungen die Normalform (5.8) entstehen. Zu diesem Zweck führt man zunächst eine Drehung ein:

$$\bar{X} = R \cdot X, \quad R = \text{orthogonale räumliche Rotationsmatrix} \quad (5.17)$$

Andererseits kann die symmetrische Matrix \bar{A} der Gleichung (5.16) in eine solche orthogonale Rotationsmatrix R , d.s. die

drei Eigenvektoren der Matrix A , und in eine Diagonalmatrix D , d.s. die drei Eigenwerte d_{ii} der Matrix A , zerlegt werden /4/, /8/, /29/:

$$A = R \cdot D \cdot R^T \quad (5.18)$$

(5.17) und (5.18) in (5.16):

$$\underbrace{X^T R^T R \cdot D \cdot R^T R}_{\underline{A}} \cdot X = \underbrace{X^T R^T A \cdot R}_{\underline{D}} \cdot X = X^T D \cdot X = -\bar{a}_{00} \quad (5.19)$$

In ausführlicher Schreibweise:

$$d_{11}x^2 + d_{22}y^2 + d_{33}z^2 - \bar{a}_{00} = 0 \quad (5.20)$$

Damit lauten die Hauptachsen a , b , c des Ellipsoides (Abb.5.1):

$$a = \sqrt{-\bar{a}_{00}/d_{11}}, \quad b = \sqrt{-\bar{a}_{00}/d_{22}}, \quad c = \sqrt{-\bar{a}_{00}/d_{33}} \quad (5.21)$$

5.1.3. Besonderheiten bei der Kugel und beim Rotationsellipsoid

Wenn die Fläche sehr stark einer Kugel nahe kommt, sind zwangsläufig die Drehwinkel der Rotationsmatrix R (5.17) sehr unsicher bestimmt. Die Unsicherheit kann man dadurch beheben, daß man die Unbekannten a_{12}^* , a_{13}^* und a_{23}^* des Verbesserungsgleichungssystems (5.4) bzw. (5.5) Null setzt. Das Problem kann aber auch - was programmtechnisch günstiger ist - unter Beibehaltung der ursprünglichen Verbesserungsgleichungen gelöst werden, indem man folgende Verbesserungsgleichungen hinzufügt:

$$\begin{aligned} a_{12}^* &= v_{12} \\ a_{13}^* &= v_{13} \\ a_{23}^* &= v_{23} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Durch Vorschreibung großer Gewichte für die Verbesserungen v_{12} , v_{13} , v_{23} tendieren die Unbekannten a_{12}^* , a_{13}^* , a_{23}^* mehr oder

weniger gegen Null, d.h. die Hauptachsen des (kugelförmigen) Ellipsoides werden parallel zu den Achsen des Koordinatensystemes $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$ der Paßpunkte. Ein solches Ergebnis ist auch deshalb zu begrüßen, weil dadurch die Äquatorialebene (=XY-Ebene) in Abhängigkeit der Wahl der Gewichte für die Verbesserungen v_{13} und v_{23} horizontalisiert werden kann. Voraussetzung ist natürlich, daß die Paßpunkte in einem horizontalisierten Koordinatensystem $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$ gegeben sind.

Entspricht die Fläche sehr stark einem Rotationsellipsoid, ist nur einer der Koeffizienten (5.22) unsicher bestimmt. Man wird deshalb nur eine der Verbesserungsgleichungen (5.22) mit einem entsprechend hohen Gewicht zum Gleichungssystem (5.4) bzw. (5.5) hinzufügen.

5.2. Programmrealisierung

Das Computerprogramm DEFELID, das diese Anpassung auf der Basis der besprochenen Theorie durchführt, ist im Anhang 5.3 in der Form eines Flußdiagrammes beschrieben. Das Programm führt im wesentlichen folgende Operationen durch:

- a) Einlesen der Paßpunktkoordinaten im dreidimensionalen Koordinatensystem $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$,
- b) Aufstellen des Verbesserungsgleichungssystemes (5.4) bzw. (5.5) und eventuell (5.22) für die neun Unbekannten a_{jk} und Lösung des dazugehörigen Normalgleichungssystemes (5.6),
- c) Kontrolle anhand der Beziehungen (5.7), ob die neun Koeffizienten a_{jk} ein Ellipsoid definieren,
- d) Berechnung der Translationen $D\tilde{X}$, $D\tilde{Y}$, $D\tilde{Z}$ aus dem linearen Gleichungssystem (5.14) und des Koeffizienten \bar{a}_{00} aus der Beziehung (5.15),
- e) Zerlegung der Matrix \hat{A} in eine orthogonale Drehmatrix R mit den Winkeln α , β , γ , und in ihre Eigenwerte d_{ii}

entsprechend der Gleichung (5.18),

- f) Berechnung der Hauptachsen des Ellipsoides nach den Beziehungen (5.21),
- g) Transformation der Paßpunkte vom $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$ -System in das (X, Y, Z) -System entsprechend der Gleichung:

$$X = R^T (\tilde{X} - D\tilde{X}) \quad (5.23)$$

Die Rechenoperationen b, d, e und f werden vom Unterprogramm SOLIM durchgeführt, das im Rechenzentrum der TU Wien als Bibliotheksprogramm vorhanden ist.

Um zu den Verbesserungen u_i zu kommen, die von dem willkürlichen Koordinatensystem der Paßpunkte unabhängig sind (siehe Anhang 5.3), wiederholt man die gesamte Ausgleichung mit den Paßpunktkoordinaten im (X, Y, Z) -System.

6. VEREBNUNG EINER KUGEL MIT HILFE EINES SCHNITT- ZYLINDERS UND EINER TANGENTIALEBENE

6.1. Allgemeines

Bei der Dokumentation und Restaurierung wertvoller Globen tritt häufig das Problem auf, Globen meridianstreifenweise wieder verebnen zu müssen; mit anderen Worten, der Arbeitsvorgang der Herstellung eines Globus ist umzukehren. Für diese Problemstellung konnte bisher keine leistungsfähige Methode gefunden werden; das Problem wurde empirisch, photographisch oder zeichnerisch unter Verwendung primitiv konstruierter Geräte gelöst /11/.

Ein Globus (Kugel) ist eine Fläche zweiter Ordnung und kann daher ohne Verzerrungen nicht auf eine Ebene abgewickelt werden. Um die Verzerrungen möglichst gering zu halten, projiziert man die Kugeloberfläche auf eine eng mit der Kugel in Verbindung gebrachte abwickelbare Regelfläche. Es wurde überlegt, die in der Kartographie angewandten Projektionsflächen zu verwenden:

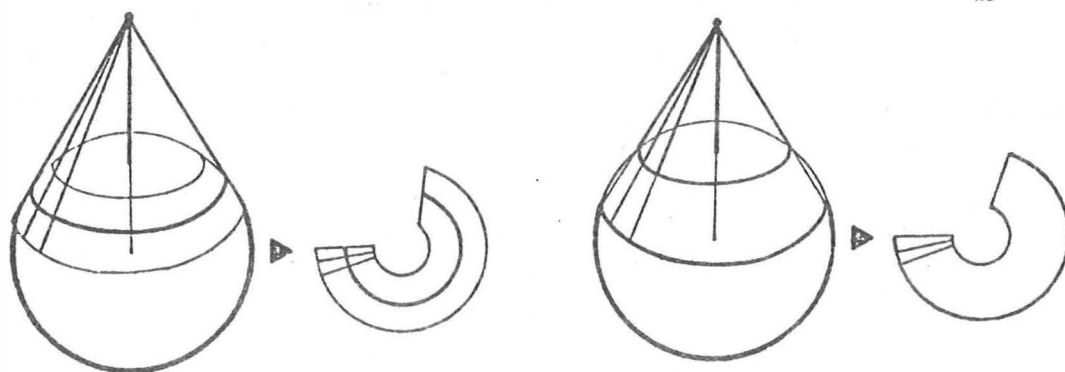


Fig.6.1: Anwendung eines tangierenden oder schneidenden Kegels

Z.B. einen Kegel, der die Kugel in einem Parallelkreis berührt oder sie in zwei Parallelkreisen schneidet (Abb.6.1). Die Ergebnisse sind jedoch nicht zweckentsprechend, da diese Methode keine Meridianstreifen ergibt. Geht die Kegelspitze nach Unendlich, so ergibt sich ein tangierender oder schneidender Zylinder (Abb.6.2). Doch auch dieser Lösungsweg mußte aus dem gleichen Grund ausgeschlossen werden.

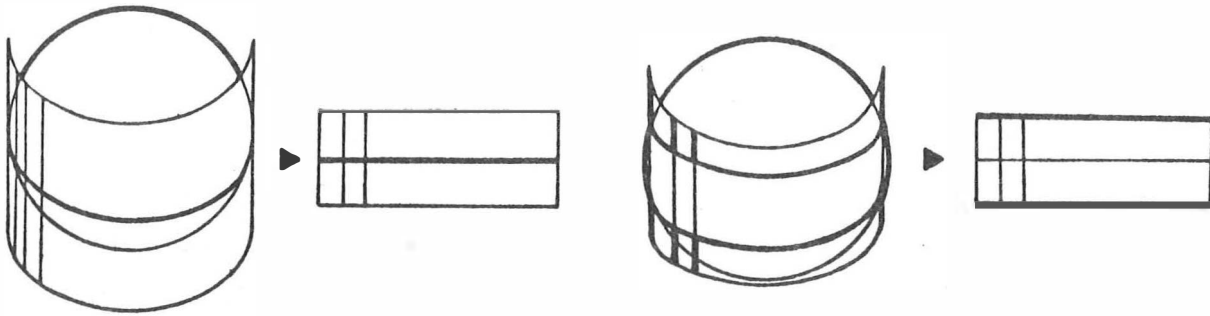


Fig.6.2: Anwendung eines tangierenden oder schneidenden Zylinders mit Achse senkrecht zum Äquator.

Wählen wir den Zylinder aber so, daß seine Achse in der Äquatorialebene liegt, kommt das Ergebnis der Forderung am nächsten. In diesem Fall ergibt sich nämlich ein kreisförmiger (tangierend) und ein elliptischer (schneidend) Zylinder (Abb.6.3).

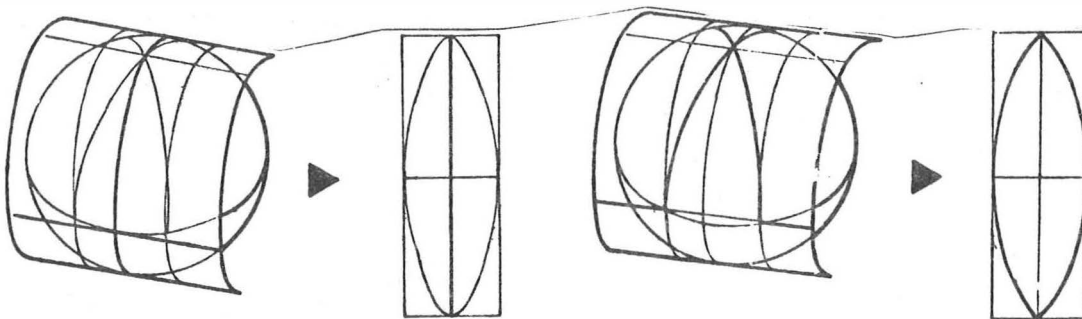


Fig.6.3: Anwendung eines tangierenden oder schneidenden Zylinders mit Achse im Äquator

Um die Entscheidung für den tangierenden oder schneidenden Zylinder zu erleichtern, verfolgen wir den Weg der Herstellung eines Globus. Versuchen wir eine Kugel mit einer Karte zu bekleben, sehen wir, daß es unmöglich ist, eine ebene Fläche auf eine Kugel ohne Verzerrungen aufzukleben. Der Globushersteller hilft sich dadurch, daß er die Karte nicht in einem Stück sondern in Teilen zu kleben versucht /28/. Er zeichnet die Karte in Form der Abbildung 6.4, befeuchtet jeden Streifen separat und klebt sie auf die Kugel anhand von vorher markierten Meridianen. Die Streifen sind also auf der Kugel so kaschiert,

daß ihre Begrenzungslinien verzerrungsfrei werden. Je kleiner die Streifen sind, um so kleiner sind die Verzerrungen.

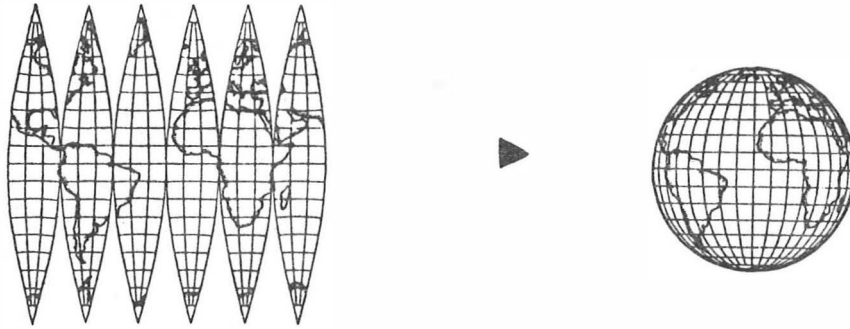


Fig.6.4: Arbeitsvorgang der Herstellung eines Globus

Wir sehen daraus, daß wir als Hilfsfläche einen Zylinder verwenden sollten, der die Kugel in zwei Meridianen schneidet. Diese Meridiane werden bei der Verebnung der Kugel (Abwicklung des Zylinders) verzerrungsfrei bleiben, da sie auf dem Mantel des abzuwickelnden Zylinders liegen.

6.2. Definition des schneidenden Zylinders

Wie schon erwähnt, sollte der als Projektionsfläche verwendete Zylinder zwei Meridiane der Kugel enthalten. Diese nennen wir "Begrenzungsmeridiane" und bezeichnen sie mit (m_1) und (m_2) . Die Schnittpunkte dieser Meridiane mit dem Äquator bezeichnen wir mit M_1 und M_2 . Um den Zylinder zu definieren, sind zuerst die Meridiane (m_1) und (m_2) festzulegen. Dadurch ist der Winkel $(2 \cdot d\lambda)$, den die Begrenzungsmeridiane bilden, auch festgelegt (Abb.6.5). Der Schnittzylinder wird jetzt so definiert, daß -seine Achse durch den Kugelmittelpunkt geht und in der Äquatorialebene liegt und -jede Gerade seines Mantels Punkte der zwei Begrenzungsmeridiane verbindet.

Es ist offensichtlich, daß so ein elliptischer Zylinder mit folgenden Parameter der Basisellipse entsteht:

$$a=r \cdot \cos(d\lambda), \quad b=r (= \text{Radius der Kugel}) \quad (6.1)$$

Wir definieren nun ein kartesisches Koordinatensystem (X,Y,Z) so, daß sein Achsenursprung mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfällt, seine Y-Achse parallel zur Zylinderachse ist und seine Z-Achse durch den Pol geht.

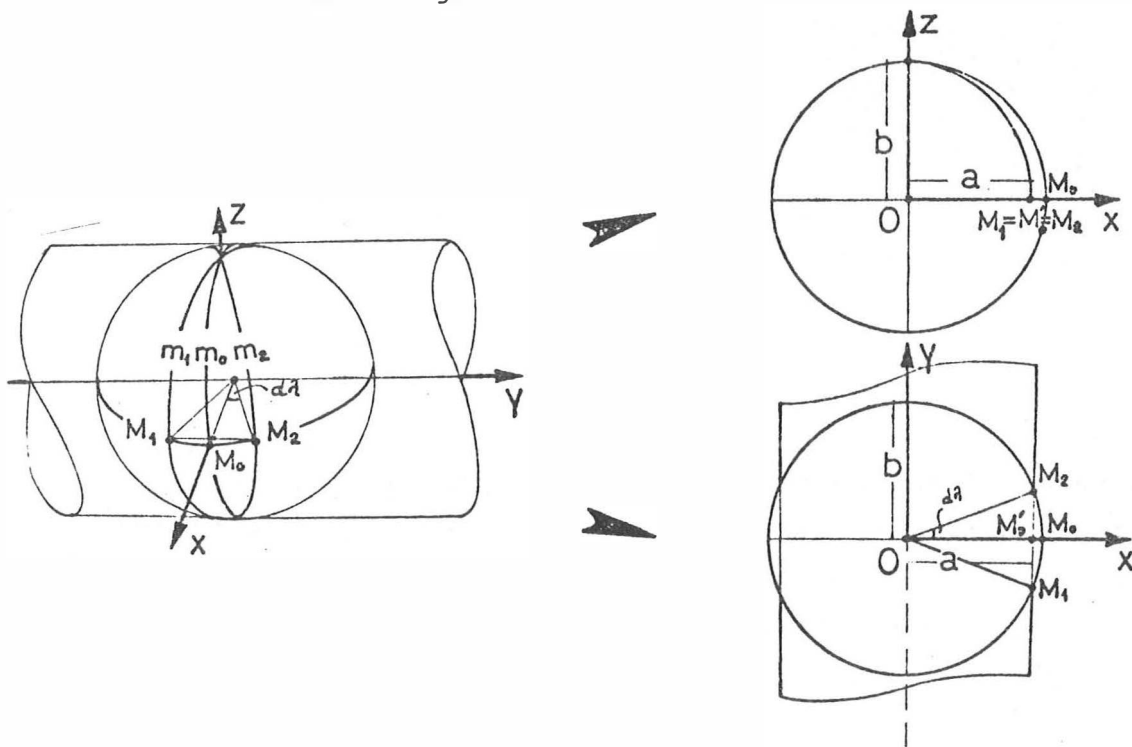


Fig.6.5: Definition des Schnittzylinders

Im folgenden werden wir den Meridian (m_0) , der in der XZ-Ebene liegt, "Hauptmeridian" nennen, und seinen Schnittpunkt mit dem Äquator mit M_0 bezeichnen.

Je kleiner der Winkel $d\lambda$ ist, um so besser entsprechen einander der Zylindermantel und die Kugeloberfläche zwischen den Meridianen (m_1) und (m_2) .

6.3. Grundprinzip der Abwicklung eines Zylinders

Wir beschränken uns zunächst auf die Abwicklung des Zylinders und erst im nächsten Abschnitt kommen wir wieder auf die Verbiegung der Kugel.

Die photographische Abwicklung eines Zylinders kann mit Hilfe

der Differentialumbildung wie folgt verwirklicht werden:

Wir definieren uns ein kartesisches Koordinatensystem (X, Y, Z) , wobei die Y -Achse mit der Zylinderachse zusammenfällt, und nehmen an, daß der Zylindermantel schon auf der XY -Ebene abgewickelt ist. Weiters definieren wir uns in der XY -Ebene einen quadratischen Raster, der wieder über den Zylindermantel gelegt wird. Anhand vorhandener Paßpunkte werden die Parameter der äußeren und eventuell der inneren Orientierung der Aufnahme berechnet und die Rasterpunkte vom Zylindermantel mit Hilfe der Abbildungsgleichungen ins Bild transformiert (Abb.6.6).

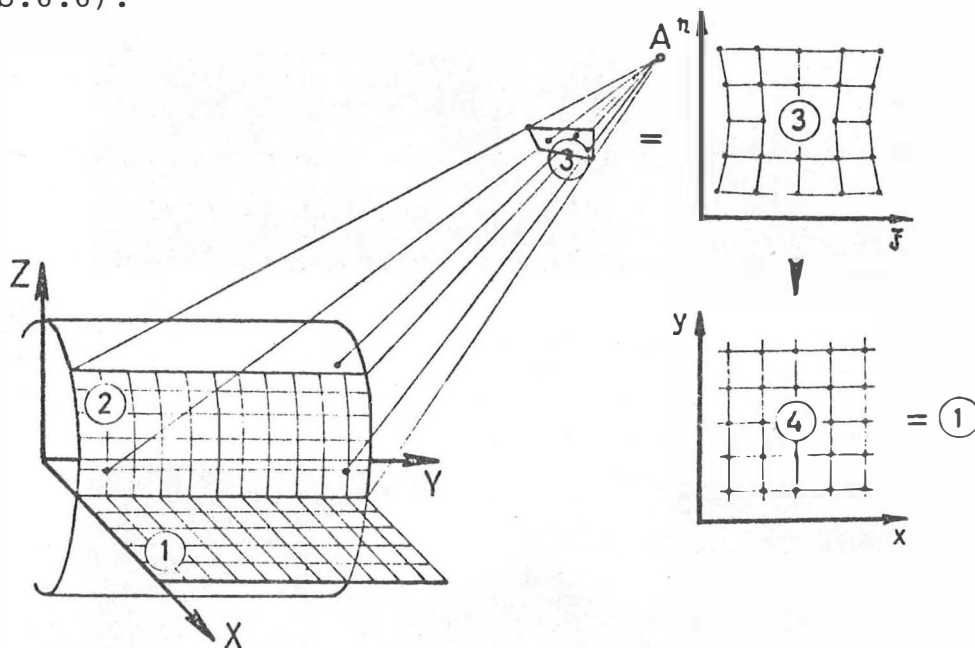


Abb.6.6: Prinzip der differentiellen Abwicklung eines Zylinders

Dem quadratischen Raster ist somit ein verzerrter Raster in der photographischen Vorlage zugeordnet. Formen wir das Bild so um, daß der verzerrte Raster die Form des Rasters der XY -Ebene -multipliziert mit einem Maßstabsfaktor- annimmt, so bekommen wir als Produkt dieser Umformung ein neues Bild, das geometrisch der Abwicklung des Zylinders entspricht. Wie schon bekannt, wird diese Umformung vom AVIOPLAN durchgeführt. Diese Methode wurde in der Praxis bis jetzt einige Male für die photographische Abwicklung kreisförmiger Zylinder erfolg-

reich eingesetzt (siehe Abb.6.7) /5/, /14/.

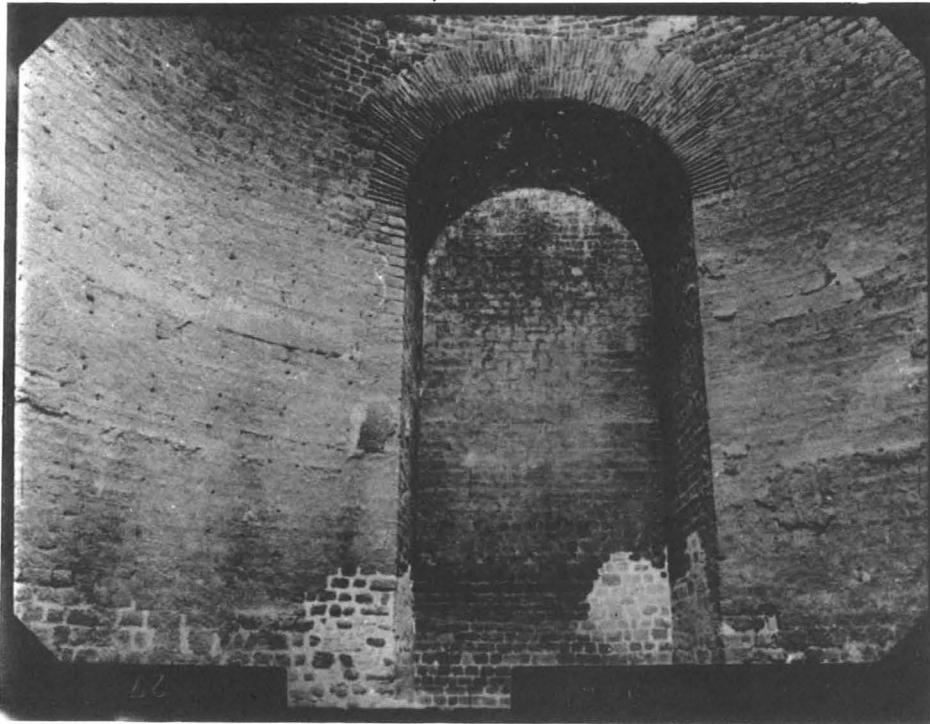


Abb.6.7a: PERGAMON (Rote Halle); Aufnahme der zylindrischen Fläche mit der Wild P31, die der Lehrstuhl für Photogrammetrie der TU München zur Verfügung gestellt hat.

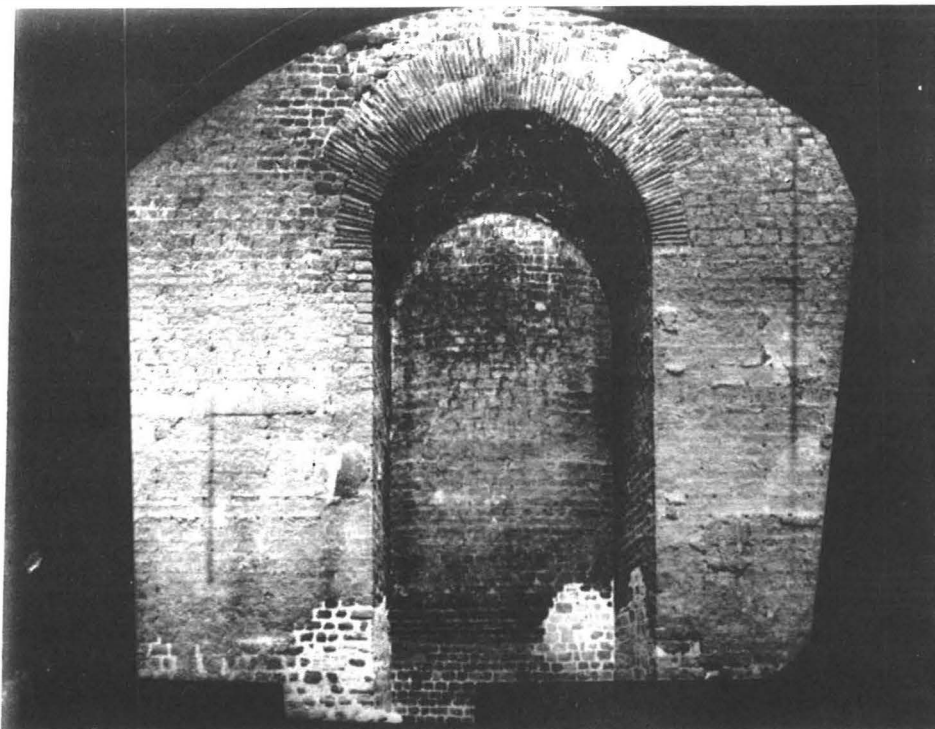


Abb.6.7b: PERGAMON (Rote Halle); Ergebnis der Differentialumbildung (Originalmaßstab 1:30)

6.4. Grundprinzip der Verebnung einer Kugel

In der Praxis ist es unwirtschaftlich, die Winkel $d\lambda$ so klein zu machen, daß die Kugeloberfläche fast ohne Verzerrungen umgebildet wird. Für größere $d\lambda$ wird der Raster -vor der Transformation ins Bild- vom Zylindermantel auf die Kugeloberfläche projiziert.

Als Projektion wurde eine Orthogonalprojektion zum Zylindermantel gewählt, da diese Projektion im wesentlichen dem Arbeitsvorgang der Globenherstellung entspricht.

Im abgewickelten Zylinder ist der Mittelmeridian (m_0) des sphärischen Zweieckes verkürzt abgebildet. Der Äquator ist - ebenfalls etwas verkürzt- als Gerade und die Parallelkreise sind in Abhängigkeit von der geographischen Breite gekrümmt abgebildet. Verfolgen wir nun ausführlich die Hauptschritte des Prozesses der Verebnung einer Kugel mit Hilfe der Differentialumbildung:

1. Zuerst ist der Schnittzylinder festzulegen. Das geschieht aufgrund eines gewählten Winkels $d\lambda$ (s.Kap.6.2.).
2. Dann ist ein quadratischer Raster mit bekannter Rasterweite s auf dem Mantel des Zylinders auszubreiten (Abb.6.8):

Der Raster wird profilweise so definiert, daß die Profile in die Y-Richtung laufen. Die gesamte Ausdehnung des Rasters in Y- und Z-Richtung nennen wir s_y und s_z .

$$\begin{aligned} s_y &= \overline{M_1 M_2} = 2 \cdot (\overline{M_1 M'_0}) = 2 \cdot r \cdot \sin(d\lambda) \\ s_z &= \int_0^{Z_0} \sqrt{(r^2 - \sin^2(d\lambda) \cdot Z^2) / (r^2 - Z^2)} \cdot dZ \end{aligned} \quad (6.2)$$

In (6.2) ist Z_0 die Z-Koordinate des ersten Punktes des letzten Profiles. Zu den Beziehungen (6.2) kommen wir nach folgenden Schritten (Basisellipse):

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 - z^2} \Rightarrow \frac{dx}{dz} = \frac{-a \cdot z}{b \cdot \sqrt{b^2 - z^2}} \\ (ds_z)^2 &= dz^2 + dx^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

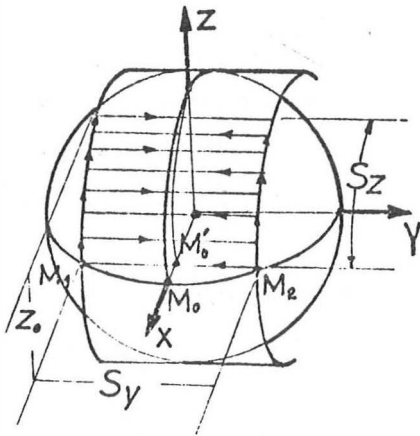


Fig. 6.8: Definition der Ausdehnung des Rasters

$$\frac{(ds_z)^2}{(dZ)^2} = 1 + \frac{(dX)^2}{(dZ)^2} = 1 + \frac{a \cdot Z^2}{b^4 - b^2 \cdot Z^2} \quad (6.3)$$

(6.1) in (6.3) ergibt (6.2).
Sodann ist die Anzahl Nprof der Profile und die Anzahl Npkt der Punkte pro Profil zu errechnen:

$$N_{\text{prof}} = s_z / s$$

$$N_{\text{pkt}} = s_y / s$$

Ein Rasterpunkt P_{ij} kann nun im System (X, Y, Z) festgelegt werden:

$$X_{ij} = f_1(s, i, a, b), Y_{ij} = (j-1) \cdot s, Z_{ij} = f_2(s, i, a, b) \quad (6.4)$$

In (6.4) ist die Bestimmung der X_{ij} - und Z_{ij} -Koordinaten noch immer offen. Es ist offensichtlich, daß jeder Punkt P_{nj} ($j=1, 2, \dots, N_{\text{pkt}}$) des Profiles n die gleichen X und Z Koordinaten und verschiedene Y -Koordinate hat. Es genügt also, den ersten Punkt P_{i1} eines jeden Profiles i zu berechnen. Seine Koordinaten sind eine Funktion des Profiles, zu dem er gehört, der Basisellipse (a, b) , und der Rasterweite s .

Diese Punkte P_{i1} ($i=1, 2, \dots, N_{\text{prof}}$) teilen unter diesen Voraussetzungen die Ellipse (a, b) in gleiche Bogenlängen s . Es besteht also das Problem, den Punkt P_{i+1} der Ellipse zu bestimmen, der von dem vorhergehenden Punkt P_i um die Bogenlänge s entfernt ist (Abb. 6.9). Dazu definieren wir im Punkt P_i die Tangente (t_i) der Ellipse und die Normale (n_i) auf (t_i) :

$$(t_i): Z = k_t X + l_t, k_t = -(b^2/a^2) \cdot (X_i/Z_i), l_t = b^2/Z_i \quad (6.5)$$

$$(n_i): Z = k_n X + l_n, k_n = (a^2/b^2) \cdot (Z_i/X_i), l_n = Z_i(1 - a^2/b^2) \quad (6.6)$$

Auf (n_i) definieren wir den Punkt O_k (auf der Seite des Mittelpunktes) so, daß

$$\overline{O_k P_i} = a^2 \cdot b^2 \cdot \sqrt{((X_i^2/a^4) + (Z_i^2/b^4))}^3 = r_k \quad (6.7)$$

wobei r_k der Radius des Krümmungskreises der Ellipse im Punkt P_i ist. Die Koordinaten X_{Ok} und Z_{Ok} des Punktes O_k ergeben sich aus:

$$X_{Ok} = X_i - DX, Z_{Ok} = Z_i - DZ \quad (6.8)$$

mit $DX = r_k \cdot \cos(\mu_n)$, $DZ = r_k \cdot \sin(\mu_n)$ und $\mu_n = \arctan(k_n)$

Von den zwei Lösungspaaren (6.11) behalten wir jenes mit dem größeren Z und bezeichnen es mit (X_{i+1}, Z_{i+1}) . Der Punkt $P_{i+1}(X_{i+1}, Z_{i+1})$ ist der gesuchte Punkt.

Es ist jedoch zu beachten, daß dieses Verfahren eine Näherungsmethode darstellt und bei großen Krümmungsverhältnissen oder bei großen Bogenlängen ein Fehler auftritt, der beachtet werden muß. Die berechnete Bogenlänge auf der Ellipse zwischen dem Ausgangspunkt P_i und dem erhaltenen Punkt P_{i+1} müßte mit der vorgegebenen Bogenlänge s übereinstimmen. Da das in der Regel nicht zutrifft, ist das geschilderte Verfahren so lange zu wiederholen bis eine akzeptable Übereinstimmung erreicht ist. Bei der ersten Wiederholung ist der Punkt P_{i+1} der Ausgangspunkt und die Bogenlänge jene Differenz, die sich aus der vorgegebenen Bogenlänge s und der aus den Punkten P_i und P_{i+1} berechneten Bogenlänge ergibt.

3. Projektion des Rasters vom Zylindermantel auf die Oberfläche so, daß die Projektionsstrahlen orthogonal zu ihm stehen. Mit Hilfe der Abb.6.10 ist leicht zu sehen, daß für alle Punkt P_{nj} ($j=1,2,\dots,N_{pkt}$) des Profiles n , der Projektionsvektor zu sich parallel bleibt und in Ebenen (E_j), die senkrecht zur Zylinderachse stehen und durch die Punkte P_{nj} gehen, liegt. Es ändern sich bei dieser Projektion also nur die X und Z Koordinaten:

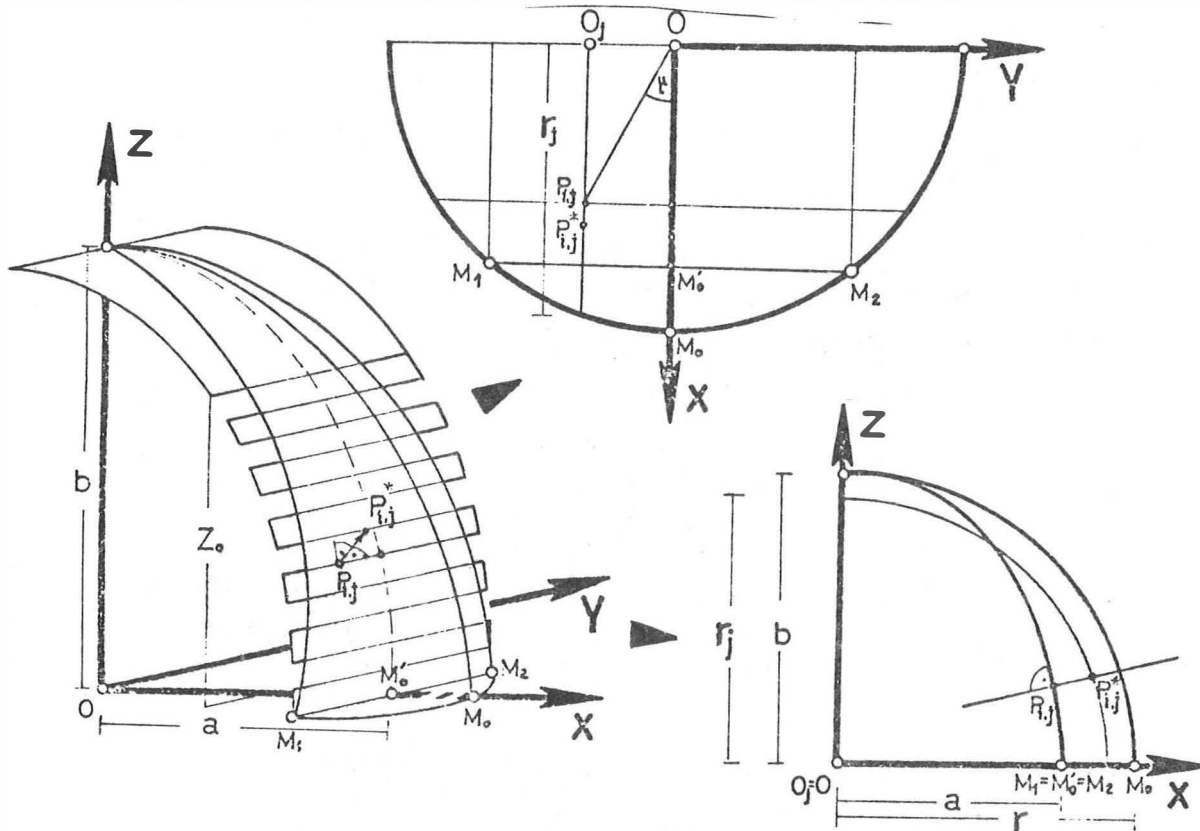


Fig.6.10: Projektion eines Rasterpunktes vom Zylinder auf die Kugel

Um die Koordinaten X_{ij}^* und Z_{ij}^* des Punktes P_{ij}^* (Projektion von P_{ij} auf die Kugel) zu errechnen, können wir davon ausgehen, daß die Ebenen (E_j) die Kugel in Kreisen schneiden. Der jeweilige Mittelpunkt O_j liegt auf der Y-Achse in folgendem Abstand vom Kugelmittelpunkt:

$$\overline{OO_j} = Y_{ij}, \quad r_j = \sqrt{r^2 - Y_{ij}^2} \quad (6.12)$$

Der Punkt P_{ij}^* befindet sich auf dem Kreis (O_j, r_j). Das Problem besteht nun darin, P_{ij}^* so festzulegen, daß er auf einer Normalen zur Ellipse (a, b) liegt (Abb. 6.10). Dazu definieren wir die Tangente (t_i) der Ellipse im Punkt P_{ij} und ihre Normale (n_i), die durch den Punkt P_{ij} geht:

$$(t_i): Z = k_t X + l_t, \quad k_t = -(b^2/a^2)(X_{ij}/Z_{ij}), \quad l_t = b^2 Z_{ij}^{-1} \quad (6.13)$$

$$(n_i): Z = k_n X + l_n, \quad k_n = (a^2/b^2)(Z_{ij}/X_{ij}), \quad l_n = Z_{ij}(1 - a^2/b^2) \quad (6.14)$$

Der Punkt P_{ij}^* ist dann als Schnittpunkt der Geraden (n_i) und des Kreises (O_j, r_j) definiert; seine Koordinaten sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} X^2 + Z^2 - r_j^2 &= 0 \\ Z &= k_n X + l_n \end{aligned} \right| \Rightarrow \left. \begin{aligned} A_n X^2 + B_n X + C_n &= 0 \\ Z &= k_n X + l_n \end{aligned} \right| \Rightarrow \\ & X_1 = (-B_n + \sqrt{D_n}) / (2A_n), \quad Z_1 = k_n X_1 + l_n \\ & X_2 = (-B_n - \sqrt{D_n}) / (2A_n), \quad Z_2 = k_n X_2 + l_n \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\text{mit } A_n = 1 + k_n^2, \quad B_n = 2k_n l_n, \quad C_n = l_n^2 - r_j^2, \quad D_n = B_n^2 - 4A_n C_n$$

Von den zwei Lösungspaaren (6.15) verwenden wir jenes mit dem größeren Z und nennen es (X_o, Z_o). Der auf die Kugel transformierte Rasterpunkt P_{ij} hat also folgende Koordinaten:

$$X_{ij}^* = X_o, \quad Y_{ij}^* = Y_{ij}, \quad Z_{ij}^* = Z_o \quad (i=1, 2, \dots, N_{\text{prof}}, \quad j=1, 2, \dots, N_{\text{pkt}}) \quad (6.16)$$

4. Berechnung der Parameter der äußeren und eventuell der inneren Orientierung der Aufnahme aufgrund vorhandener Paßpunkte.
5. Transformation der Rasterpunkte P_{ij}^* von der Kugeloberfläche ins Bild mit Hilfe der Abbildungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\xi_{ij} &= \xi_0 - c \cdot \frac{r_{11}(x_{ij}^* - x_A) + r_{21}(y_{ij}^* - y_A) + r_{31}(z_{ij}^* - z_A)}{r_{31}(x_{ij}^* - x_A) + r_{23}(y_{ij}^* - y_A) + r_{33}(z_{ij}^* - z_A)} \\ \eta_{ij} &= \eta_0 - c \cdot \frac{r_{12}(x_{ij}^* - x_A) + r_{22}(y_{ij}^* - y_A) + r_{32}(z_{ij}^* - z_A)}{r_{31}(x_{ij}^* - x_A) + r_{23}(y_{ij}^* - y_A) + r_{33}(z_{ij}^* - z_A)}\end{aligned}\quad (6.17)$$

ξ_{ij} , η_{ij} sind die Bildkoordinaten des Punktes P_{ij}^* ,
 ξ_0 , η_0 sind die Bildkoordinaten des Hauptpunktes und
 c die Kammerkonstante,

x_A , y_A , z_A sind die im Schritt 4 gerechneten Koordinaten des Projektionszentrums A (=Aufnahmestandpunkt),
 r_{nm} ($n, m=1, 2, 3$) sind die Elemente der Drehmatrix $R(\omega, \varphi, \kappa)$ die ebenfalls im Schritt 4 berechnet wurden,
 x_{ij}^* , y_{ij}^* , z_{ij}^* sind die Koordinaten des Rasterpunktes P_{ij}^* im Kugelsystem (X, Y, Z) .

6. Umbildung der photographischen Vorlage (Bild) so, daß der auf ihr liegende Raster eine quadratische Form annimmt (Quadratseite = $s \cdot \text{Maßstabsfaktor}$).

Obwohl nach der beschriebenen Technik das Kugelzweieck bis zum Pol hergestellt werden könnte, ist es aus fertigungstechnischen Gründen vorteilhafter den Kugelstreifen nur bis zu einem bestimmten Breitenkreis (φ_0) zu erzeugen. Der gesamte Bereich des Poles wird in der Form einer Polkappe produziert. Als Projektionsart bietet sich der mittabstandstreue Azimutalentwurf (längentreue Meridiane und im Pol Winkeltreue) an.

Dieser Azimutalentwurf kann aus einer etwa in der Verlängerung der Z-Achse gemachten Aufnahme nach folgenden Schritten hergestellt werden:

1. Definition der Größe des Rasters anhand des bekannten Breitenkreises φ_0 auf der im Pol befindlichen Tangentialebene (R_0) in (Abb. 6.11):

$$s_R = (\pi \cdot r / 2 - r \cdot \varphi_0) \cdot 2 = r \cdot (\pi - 2 \cdot \varphi_0) \quad (6.18)$$

2. Definition der Anzahl N_{prof} der Profile und N_{pkt} der Punkte pro Profil:

$$N_{\text{prof}} = N_{\text{pkt}} = s_R / s$$

3. Definition eines kartesischen Koordinatensystemes (x,y) , das auf (R_0) liegt. Die x -Achse wird parallel zur X -Achse des Kugelsystemes angenommen und der Ursprung fällt mit dem Pol zusammen.
4. Berechnung des quadratischen Rasters im System (x,y) .
5. Projektion des Rasters von der Ebene (R_0) auf die Kugeloberfläche mit den Eigenschaften der mittabstandstreuen Azimutalprojektion:

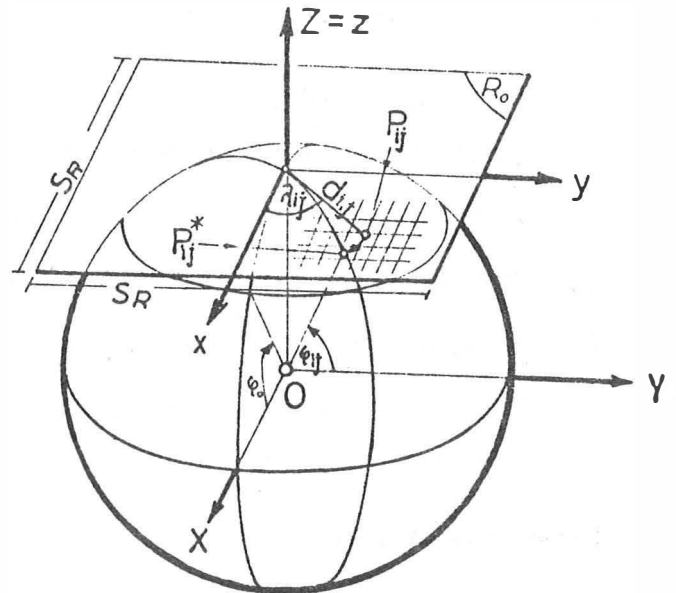


Abb.6.11: Azimutale mittabstandstreue Projektion bei der Verebnung des Polbereiches

$$\begin{aligned} d_{ij}^2 &= x_{ij}^2 + y_{ij}^2 & x_{ij}^* &= r \cos(\varphi_{ij}) \cos(\lambda_{ij}) \\ \lambda_{ij} &= \arctan(y_{ij}/x_{ij}), & y_{ij}^* &= r \cos(\varphi_{ij}) \sin(\lambda_{ij}) \\ \varphi_{ij} &= \pi/2 - d_{ij}/r & z_{ij}^* &= r \sin(\lambda_{ij}) \end{aligned} \quad (6.19)$$

6. Durchführung der Schritte 4,5 und 6 der Seite 31 und 32.

6.5. Programmrealisierung

Die Computerprogramme STREIF und POLKAP, die auf der Basis der beschriebenen Theorie die Herstellung der Kugelstreifen und der Polkappe durchführen, sind im Anhang 6.1 und 6.2 in der Form eines Flußdiagrammes beschrieben. Dabei wird davon ausgegangen, daß der Radius r und die Lage des Mittelpunktkoordinatensystemes (X,Y,Z) bekannt sind bzw. mit dem Programm DEFELID (Abschnitt 5) vorher ermittelt wurden.

Die Programme führen folgende Operationen durch:

Programm STREIF:

1. Einlesen von $d\lambda$, r , s und der Koordinaten X, Y, Z von Paßpunkten im Kugelsystem,
2. Definition des Schnittzylinders,
3. Definition des quadratischen Rasters auf dem Zylindermantel,
4. Projektion des Rasters vom Mantel auf die Kugeloberfläche,
5. Vorbereitung einiger Parameter, die für das Starten des zweiten Teiles des Programmes SORA-OP notwendig sind.

Programm POLKAP:

1. Einlesen von φ_0 , r , s und der Koordinaten X, Y, Z von Paßpunkten im Kugelsystem,
2. Definition des quadratischen Rasters auf der im Pol befindlichen Tangentialebene (R_0),
3. Projektion des Rasters auf die Kugeloberfläche,
4. Rechenoperation 5. des Programmes STREIF.

Der zweite Teil vom SORA-OP führt die Schritte 4 und 5 der Seite 31 durch und schreibt die zur Steuerung des AVIOPLAN notwendigen Parameter und die Bildkoordinaten der Eckpunkte des deformierten Rasters auf Magnetband.

6.6. Praktisches Beispiel

Im Auftrag der österreichischen Nationalbibliothek wurde nach der beschriebenen Methode ein Erdglobus von Willem BLAEU (Durchmesser 68cm, Amsterdam um 1645, ÖNB-Globus 25) verebnet. Für diese Aufnahmen danke ich Herrn Ing. J. Tschannerl (Institut für Photogrammetrie TU Wien) und Herrn A. Janderka (Österreichische Nationalbibliothek).

Die folgende Seite ist ein Auszug aus der Veröffentlichung /15/.

Der Globus wurde mit der Linhof Technika aufgenommen. Grundsätzlich könnten aus einer photographischen Aufnahme mehrere Globusstreifen abgeleitet werden. Aus photographischen und Genauigkeitsgründen ist es allerdings empfehlenswert, jeden Globusstreifen getrennt zu photographieren, und zwar eine Aufnahme etwa in 25° nördlicher Breite und eine etwa in 25° südlicher Breite. Abb.6.13 demonstriert eine nördliche Aufnahme. Als $d\lambda$ zwischen den Begrenzungsmeridianen wurden 20° genommen, daher waren für jede Halbkugel 18 Aufnahmen erforderlich. Wegen der Halterung des Globus benötigt man für jede Polkappe zusätzlich 2 Aufnahmen, sodaß insgesamt 40 photographische Vorlagen für die Verebnung anfielen.

Die Aufnahmeentfernung betrug bei einem 150mm Objektiv ca. 1,20m. Die drei Koordinaten des Aufnahmeortes A und die Parameter der Aufnahmerichtung im Koordinatensystem (X,Y,Z) des Globus, die für die oben erwähnten Abbildungsgleichungen der Zentralprojektion bekannt sein müssen, wurden nicht durch direkte Messungen, sondern auf rechnerische Weise aus Paßpunkten bestimmt (Abb.6.12). Da als Paßpunkte die Schnittpunkte der

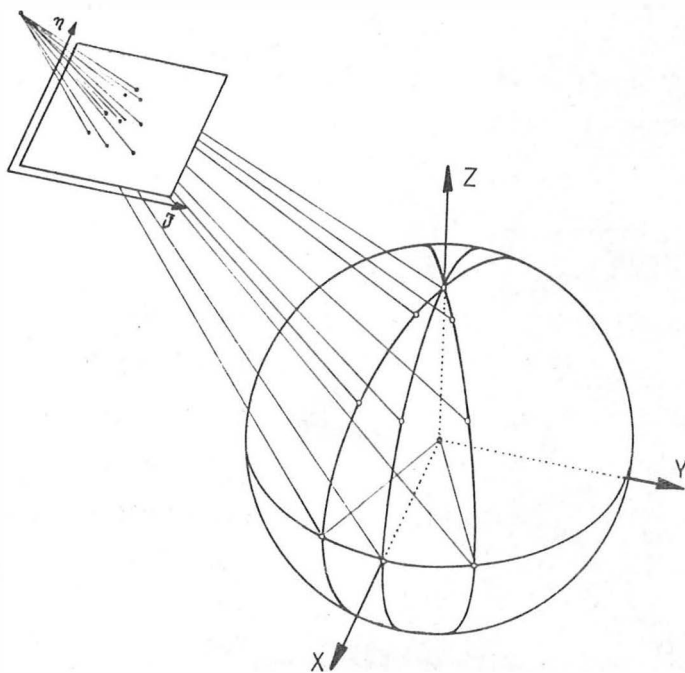


Abb.6.12: Orientierung der Aufnahme
anhand von Paßpunkten

Meridiane und Breitenkreise dienten, konnten ihre räumlichen Koordinaten X, Y und Z berechnet werden. Die dazugehörigen Bildkoordinaten ξ und η wurden am Komparator Wild-STK1 gemessen. Für die rechnerische Ermittlung der Koordinaten der Aufnahmeorte und der Parameter der Aufnahmerichtungen der 40 Aufnahmen wurden im Durchschnitt 20 Paßpunkte herangezogen. Die infolge der vorhandenen Überbestimmung in den gemessenen Bildkoordinaten aufgetretenen Widersprüche

hatten eine Streuung -ausgedrückt in der Form der statistischen Standardabweichung- von $\pm 0,02\text{mm}$.

Aus formattechnischen Gründen wurde die Auswertung nicht unmittelbar für einen Globus mit dem Durchmesser von 68cm, sondern für einen im Maßstab 1:3 verkleinerten Globus durchgeführt. Bezogen auf den verkleinerten Globus betrug die Maschenweite des auf dem elliptischen Zylinder bzw. in der Tangentialebene definierten Rasters 5mm. Demzufolge entstanden die Abbildungen im AVIOPLAN in Profilstreifen mit einer Breite von ebenfalls 5mm.

Abb.6.14 zeigt einige Globusstreifen im Maßstab 1:3. Die Längentreue der Begrenzungsmeridiane kann mit der Entfernung zwischen den Parallelkreisen, die sich zu $10^{\circ} \cdot 360 / (\rho^{\circ} \cdot 3) = 19,8\text{mm}$



Abb.6.13: Aufnahme des nördlichen Teiles eines Globusstreifens

ergibt, überprüft werden. Ein Ergebnis der mittabstandstreuen Azimutalprojektion zeigt Abb.6.15. Auch hier haben die Parallelkreise einen Abstand von 19,8mm.

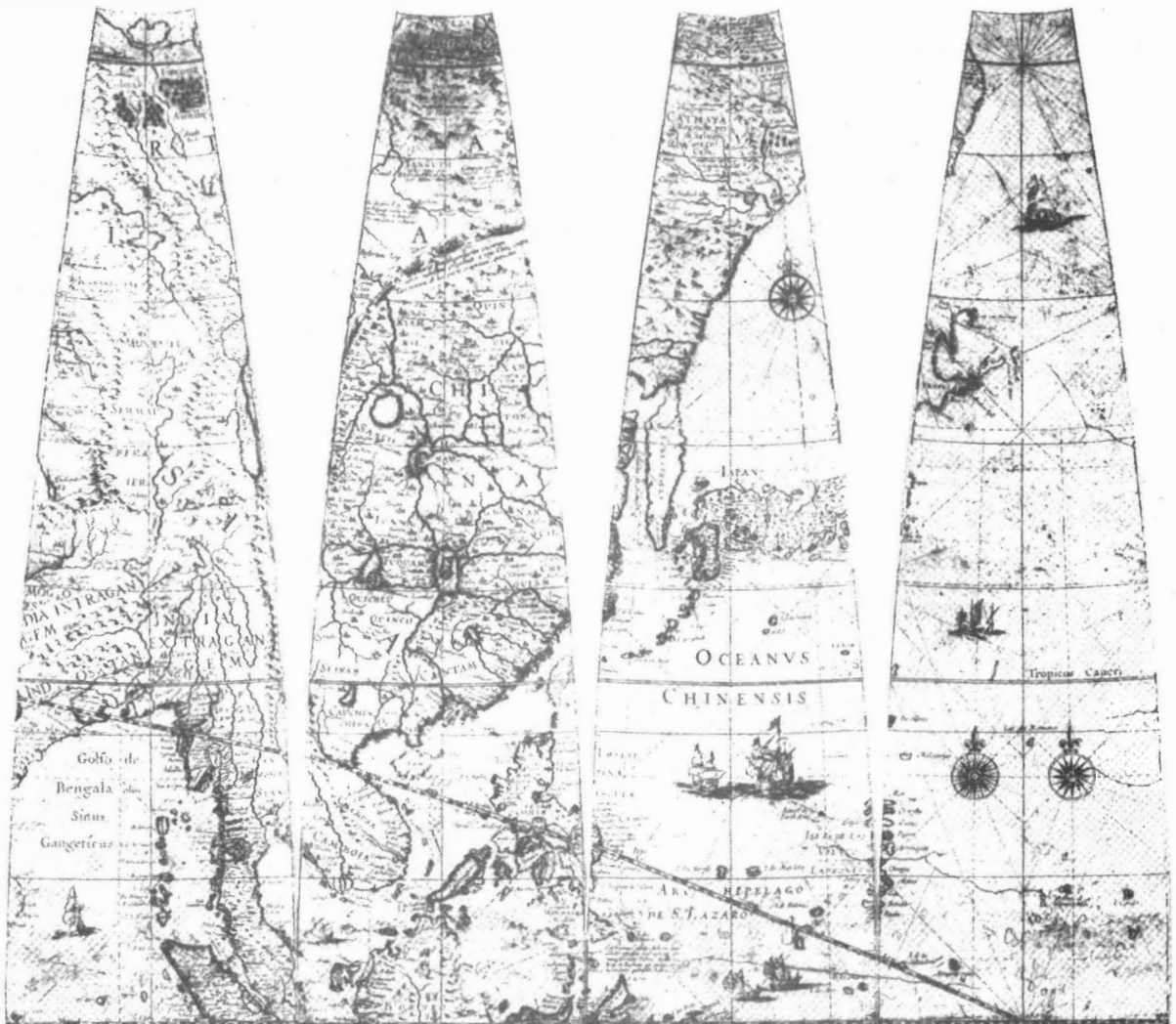
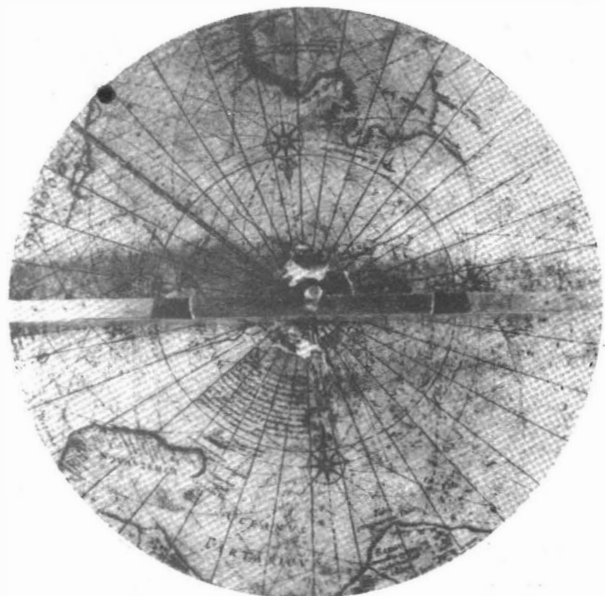


Abb.6.14: Verebnete Globusstreifen im Maßstab 1:3

Abb.6.15: Mittabstandstreue Azimutalprojektion der nördlichen Polkappe im Maßstab 1:3



7. VEREBNUNG EINER KUGEL MIT HILFE EINES POLYEDERS

7.1. Allgemeines

Für die Architektur und Denkmalpflege sowie für Restaurierungsarbeiten wird oft die Dokumentation von Kuppeln in Form von "Kartons" verschiedener Größe verlangt (siehe Nachwort von Dr.H.Foramitti in /25/). Als Karton versteht man in diesem Fall einen ebenen Plan, auf dem ein Teil der Kuppel mit möglichst kleinen Verzerrungen abgebildet ist. Für die Restaurierung benötigt man einen solchen Plan im Maßstab 1:1; für die Dokumentation genügt auch ein kleinerer Maßstab.

Auf Anregung der Photogrammetrischen Abteilung des Bundesdenkmalamtes Wien wurde die Methode der Differentialumbildung zur Herstellung solcher Kartons erprobt.

Dazu wurden ähnliche Überlegungen wie bei der Verebnung des Globus angestellt, um die geeigneteste Projektionsfläche zu definieren. In diesem Fall eignet sich als Fläche besonders ein Polyeder (Abb.7.1).

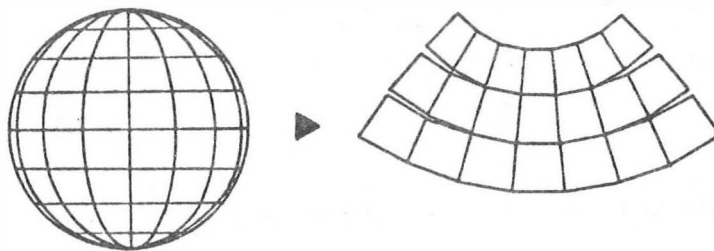


Abb.7.1: Anwendung eines Polyeders als Projektionsfläche

Je größer die Anzahl der Kartons des Polyeders ist, um so besser nähert sich dieser der Kugeloberfläche an. Die Anzahl der Kartons für einen gegebenen Kugelradius r ist abhängig von der Grundseite eines Kartons entlang des Äquators und vom Kartonrand entlang eines Kugelmeridianes.

In der Praxis wurde versucht die Wirtschaftlichkeit mit der Genauigkeit der Methode in Einklang zu bringen; mit anderen Worten, ihre Größe ergibt sich als Kompromiß zwischen einer möglichst kleinen Anzahl von Kartons und einer möglichst großen

Genauigkeit. Die Verzerrungen auf den Kartons ergeben sich durch die Projektion der Kugeloberfläche auf das Polyeder. Als Projektionsart bietet sich in diesem Fall die Zentralprojektion -mit dem Kugelmittelpunkt als Projektionszentrum- an. Für den Bereich des Scheitelpunktes kann ebenfalls die Zentralprojektion oder -wie beim Globus- eine mittabstandstreue Azimutalprojektion verwendet werden.

7.2. Definition des Polyeders

Zuerst wird ein kartesisches Koordinatensystem (X,Y,Z) , Kugelsystem genannt, so definiert, daß sein Achsenursprung mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfällt, und die X- und Y-Achsen eine horizontale Ebene bilden.

Die Zuordnung des Polyeders zur Kugel kann dadurch verdeutlicht werden, daß die Kugel mit zwei Gruppen von Ebenen (H) und (Z) geschnitten wird (Abb.7.2). Die Ebenen (H) liegen horizontal

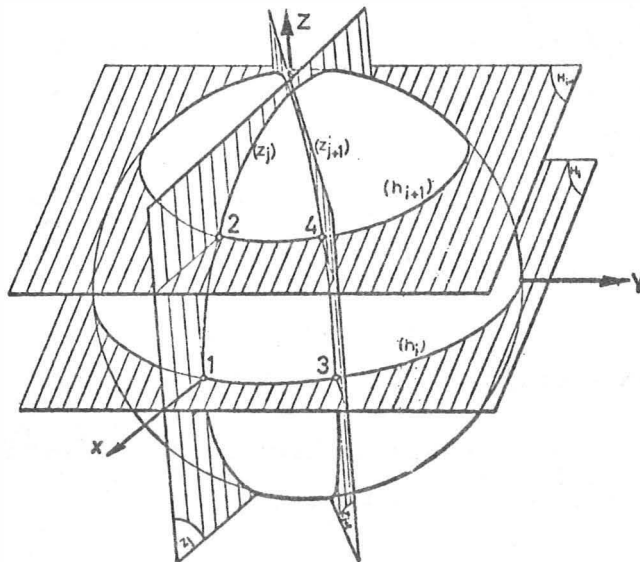


Abb.7.2: Zuordnung des Polyeders zur Kugel

und die Ebenen (Z) schneiden sich in der verikal stehenden Mittelachse Z. Der Schnittwinkel $d\lambda$ liegt der konstant gehaltenen Bogenlänge S gegenüber (Abb.7.3). Die Schnittkurve der Ebenen (Z) mit der Kugel sind Großkreise, die die Z-Achse enthalten (Meridiane), und die Ebenen (H) schneiden die Kugel in Parallelkreisen. Die Schnittpunkte 1, 2, 3 und 4 zweier solcher Meridiane und Parallelkreise sind die Ecken einer Ebene

des Polyeders. Eine solche Ebene ist ein Karton im Sinne des Kapitels 7.1. Jeder Karton hat die Form eines Trapezes. Alle Trapeze eines Streifens sind gleich groß. Im folgenden werden wir - die XY-Ebene "Äquatoriale",

- ihre Schnittkurve mit der Kugel "Äquator",
- den Schnittpunkt der Z-Achse mit der Kugel "Pol" und
- den Meridian durch die X-Achse "Hauptmeridian"

nennen. Die Definition der Kartons erfolgt streifenweise:

Dabei beginnen wir im Punkt A (Abb.7.3):

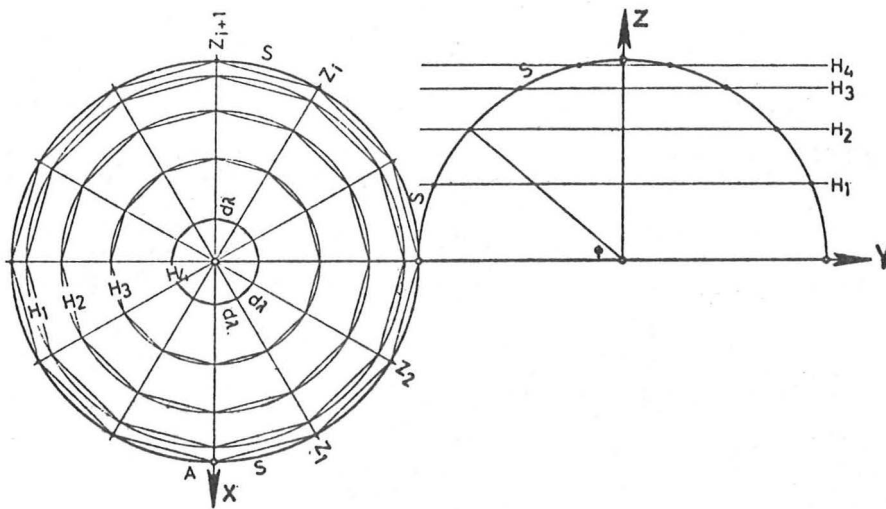


Abb.7.3: Definition des Polyeders

$$X_1 = X_A, Y_1 = Y_A, Z_1 = Z_A = 0 \quad (7.1)$$

Auf Grund der bekannten Bogenlänge S ergibt sich der Punkt 2 des ersten und der weiteren Kartons aus:

$$\begin{aligned} X_2 &= r \cdot \cos(\varphi_1 + d\varphi) \cdot \cos(\lambda_1), & Y_2 &= r \cdot \cos(\varphi_1 + d\varphi) \cdot \sin(\lambda_1), \\ Z_2 &= r \cdot \sin(\varphi_1 + d\varphi) \end{aligned} \quad (7.2)$$

mit $\varphi_1 = \arctan(Z_1/X_1)$, $\lambda_1 = \arctan(Y_1/X_1)$, $d\varphi = d\lambda = S/r$

Der Punkt 3 des ersten und der weiteren Kartons folgt aus:

$$\begin{aligned} X_3 &= r \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\lambda_1 + d\lambda), & Y_3 &= r \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\lambda_1 + \\ & & + d\lambda), & Z_3 &= r \cdot \sin(\varphi_1) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Schließlich lauten die Koordinaten des Punktes 4 des ersten und der weiteren Kartons:

$$\begin{aligned} X_4 &= r \cdot \cos(\varphi_1 + d\varphi) \cdot \cos(\lambda_1 + d\lambda), \quad Y_4 = r \cdot \cos(\varphi_1 + \\ &+ d\varphi) \cdot \sin(\lambda_1 + d\lambda), \quad Z_4 = r \cdot \sin(\varphi_1 + d\varphi) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Nach Berechnung des ersten Kartons des ersten Streifens werden die Punkte 3 und 4 dieses Kartons für den nächsten Karton als Eckpunkte 1 und 2 angenommen und mit Hilfe der Gleichungen (7.3) und (7.4) seine Eckpunkte 3 und 4 berechnet. Auf diesem Weg sind alle n Kartons des ersten Streifens ($n=2 \cdot \pi \cdot r/S$) definiert. Die Kartons des zweiten Streifens werden dann so festgelegt, daß die bekannten Eckpunkte 2 und 4 des ersten Streifens jeweils den Eckpunkten 1 und 3 des zweiten Streifens entsprechen usw. Der Prozeß wird beendet, wenn der Eckpunkt 2 oder 4 eines Kartons gleich oder größer als ein bestimmter Z_0 -Wert ist.

7.3. Mathematisches Grundprinzip der Verebnung

Wie im Kapitel 4.2. beschrieben, besteht das Prinzip der Differentialumbildung darin, daß man

- im Abbild (Ebene des Kartons) einen quadratischen Raster definiert,
- diesen Raster mit Hilfe der Abbildungsgleichungen der Zentralprojektion (mit dem Kugelmittelpunkt als Projektionszentrum) auf die Objektoberfläche projiziert,
- diese Objektpunkte in die photographische Vorlage (Bild) mit Hilfe der Zentralprojektion (Aufnahmestandpunkt als Projektionszentrum) transformiert und
- die Vorlage so umbildet, daß der so erhaltene verzernte Raster eine quadratische Form annimmt.

Zur Durchführung dieser Schritte arbeiten wir wie folgt:

Für jeden Karton (R) wird ein lokales Koordinatensystem (x, y, z) so definiert (Abb.7.4), daß in der Polyederkante $\overline{13}$ die y -

Achse liegt und die x-Achse senkrecht auf y steht. Die Koordinaten der vier Eckpunkte 1, 2, 3 und 4 des Kartons (R) werden nun im (x,y,z)-System errechnet:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0 & , & \quad y_1 = 0 & , & \quad z_1 = 0 \\
 x_2 &= s_{12} \cdot \sin(\mu) & , & \quad y_2 = s_{12} \cdot \cos(\mu) & , & \quad z_2 = 0 \\
 x_3 &= x_1 & , & \quad y_3 = s_{13} & , & \quad z_3 = 0 \\
 x_4 &= x_2 & , & \quad y_4 = y_2 + s_{24} & , & \quad z_4 = 0
 \end{aligned}
 \tag{7.5}$$

mit $\mu = \arccos(s_{13} - s_{24}) / (2 \cdot s_{12})$,

$$s_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

Die Anzahl Nprof der Profile und die Anzahl Npkt der Punkte pro Profil folgen dann aus:

$$N_{\text{prof}} = x_2 / s, \quad N_{\text{pkt}} = s_{13} / s \quad \text{mit } s = \text{Rasterweite} \tag{7.6}$$

Nach Definition des quadratischen Rasters in der xy-Ebene des Systemes (x,y,z) werden die Parameter der dreidimensionalen Ähnlichkeitstransformation, die notwendig ist, um vom (x,y,z)-System ins (X,Y,Z)-System überzugehen, anhand der Koordinaten der vier Eckpunkte in beiden Systemen berechnet. Die Parameter dieser Transformation werden mit einer Ausgleichung bestimmt, da für die Bestimmung ihrer Parameter nur 3 Punkte erforderlich wären, aber 4 Punkte (Eckpunkte) vorhanden sind. Die Verbesserungen der Ausgleichungen sind lediglich die Auswirkung der Rechenungenauigkeit.

Der Raster wird dann ins Kugelsystem (X,Y,Z) transformiert:

$$\begin{bmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ Z_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + R \cdot \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

wobei: X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} sind die Koordinaten eines auf dem Karton liegenden Punktes P_{ij} im Kugelsystem,
 X_1, Y_1, Z_1 sind die Koordinaten des Eckpunktes 1 des Kartons im Kugelsystem,
 $R(\alpha, \beta, \gamma)$ ist die Drehmatrix des (x,y,z)-Systemes

in Bezug auf das (X,Y,Z) -System,

x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} sind die Koordinaten des Punktes P_{ij} im System des Kartons.

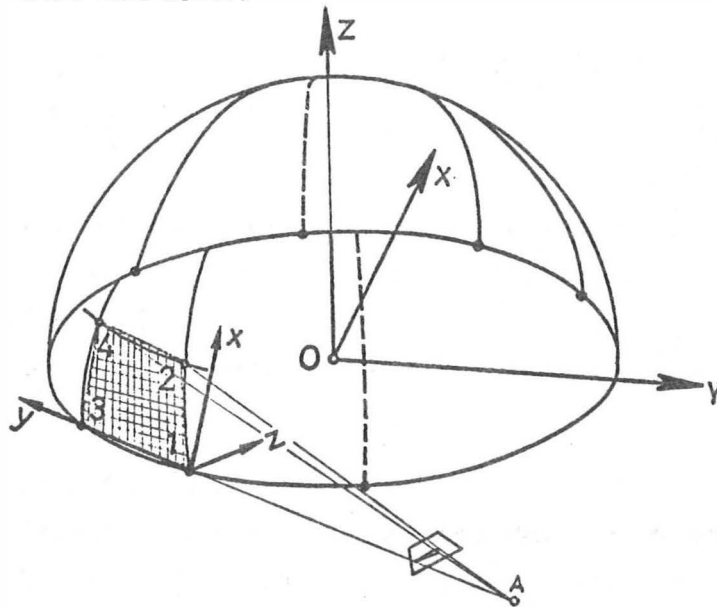


Abb.7.4: Festlegung des Kartonsystemes im Kugelsystem

Vom Karton werden anschließend die Rasterpunkte mit Hilfe einer Zentralprojektion (Kugelmittelpunkt als Projektionszentrum) auf die Kugel wie folgt projiziert:

Die Gerade (g), die durch den Rasterpunkt P_{ij} und den Kugelmittelpunkt geht, ist als Schnittgerade zweier Ebenen (E_1) und (E_2) definiert:

$$(E_1): (X-X_O)(Y_{ij}-Y_O)=(X_{ij}-X_O)(Y-Y_O) \quad (7.8)$$

$$(E_2): (X-X_O)(Z_{ij}-Z_O)=(X_{ij}-X_O)(Z-Z_O)$$

$$\text{mit } X_O=Y_O=Z_O \text{ folgt: } Z=(Z_{ij}/X_{ij})X, Y=(Y_{ij}/X_{ij})X \quad (7.9)$$

Schnittpunkt P_{ij}^* dieser Geraden mit der Kugel (O,r) :

$$\begin{array}{l|l} x^2+y^2+z^2-r^2=0 & x^2(x_{ij}^2+y_{ij}^2+z_{ij}^2)-x_{ij}^2y^2=0 \\ Y=(Y_{ij}/X_{ij})X & \Rightarrow Y=(Y_{ij}/X_{ij})X \\ Z=(Z_{ij}/X_{ij})X & Z=(Z_{ij}/X_{ij})X \end{array} \quad (7.10)$$

Das Gleichungssystem (7.10) ergibt zwei Schnittpunkte, wobei der Punkt mit dem positiven Z-Wert unter die Bezeichnung P_{ij}^*

weiter verwendet wird:

$$\begin{aligned} X_{ij}^* &= X_{ij} \cdot r \cdot \sqrt{X_{ij}^2 + Y_{ij}^2 + Z_{ij}^2} \\ Y_{ij}^* &= (Y_{ij}/X_{ij}) \cdot X_{ij}^* \\ Z_{ij}^* &= (Z_{ij}/X_{ij}) \cdot X_{ij}^* \end{aligned} \quad (7.11)$$

Mit Hilfe von Paßpunkten werden dann die Parameter der äußeren und eventuell der inneren Orientierung der Aufnahme errechnet. Die Punkte P_{ij}^* der Kugeloberfläche werden schließlich mittels einer Zentralprojektion mit dem Aufnahmestandpunkt als Projektionszentrum ins Bild transformiert (Formel 6.17).

Die Kartons werden vom Äquator zum Pol kleiner; im Pol nehmen sie die Form eines Dreieckes an. Diese Dreiecke wären aber für die Arbeit des Restaurators unbequem. Darum ist die Produktion der Kartons nur bis zu einem bestimmten Parallelkreis (φ_0) fortzusetzen und der Gesamtbereich des Poles auf einen einzigen Karton umzubilden.

Dieser Karton (R_0) ist von den Deckseiten der Kartons des letzten Streifens begrenzt und hat somit die Form eines ebenen Vieleckes mit gleich großen Seiten. Die Herstellung dieses Kartons erfolgt nach dem gleichen Prinzip, das in folgenden Schritten abläuft (Abb. 7.5):

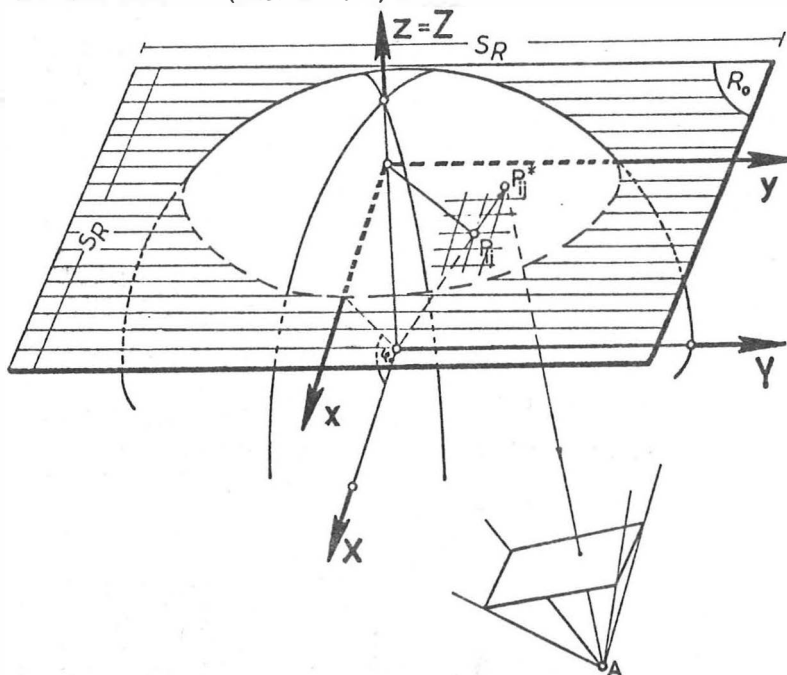


Abb. 7.5: Umbildung des Bereiches im Scheitelpunkt

- Definition der Größe des Rasters aufgrund des bekannten Parallelkreises (φ_0):

$$s_R = r \cdot (\pi - 2 \cdot \varphi_0) \quad (7.12)$$

- Definition der Anzahl Nprof der Profile und der Anzahl Npkt der Punkte pro Profil:

$$N_{\text{prof}} = N_{\text{pkt}} = s_R / s$$

- Definition eines kartesischen Koordinatensystemes (x, y, z), das auf (R_0) liegt und dessen z-Achse mit der Z-Achse des Kugel-systemes (X, Y, Z) zusammenfällt,
- Definition des quadratischen Rasters auf (R_0) im (x, y, z)-System,
- Transformation des Rasters ins Kugelsystem (Formel 7.7 mit $R = \text{Einheitsmatrix}$ und $X_1 = Y_1 = 0$),
- Projektion des Rasters von der Ebene (R_0) auf die Kugeloberfläche mit Hilfe einer Zentralprojektion (Kugelmittelpunkt als Projektionszentrum, Formeln (7.8) bis (7.11)),
- Transformation des Rasters von der Kugeloberfläche ins Bild mit Hilfe einer Zentralprojektion mit dem Aufnahmestandpunkt als Projektionszentrum (Formel (6.17)).

Da bei der Herstellung sowohl der seitlich angeordneten Kartons als auch des Polkartons die gleiche Projektionsart (Zentralprojektion mit dem Kugelmittelpunkt als Projektionszentrum) verwendet wurde, bestehen keine Klaffungen oder Bildlücken zwischen den verschiedenen Kartons.

7.4. Programmrealisierung

Für die praktische Durchführung der genannten Methode wurde das FORTRAN-Programm TROUL entwickelt, das im Anhang 7.1 in Form eines Flußdiagrammes angegeben ist. Es führt folgende Aufgaben aus:

- Definition des Polyeders und Speicherung der Koordinaten

der vier Eckpunkte aller Kartons,

- Definition des quadratischen Rasters auf dem gewünschten Karton,
- Berechnung der Parameter der dreidimensionalen Ähnlichkeitstransformation mit Hilfe des Unterprogrammes ORTRA3 (Institut für Photogrammetrie der TU Wien),
- Transformation des Rasters vom Kartonsystem (x,y,z) ins Kugelsystem (X,Y,Z) ,
- Projektion der Rasterpunkte vom Karton auf die Objektoberfläche (Kugeloberfläche) mit Hilfe einer Zentralprojektion (Kugelmittelpunkt als Projektionszentrum),
- Transformation der Paßpunkte und Rasterpunkte vom Kugelsystem ins Kartonsystem,
- Errechnung von einigen Parametern, die für das Starten des zweiten Teiles des Programmes SORA-OP notwendig sind.

7.5. Praktisches Beispiel

Um die Methode zu erproben, wurde die Kuppel der Katholiken-Kirche des byzantinischen Klosters "Ossios Loukas", Griechenland, bearbeitet. Von Prof. Dr. J. B a d e k a s (Institut für Photogrammetrie der NTU Athen) wurden eine Stereoaufnahme der Kuppel und Paßpunktunterlagen zu Verfügung gestellt. Die Aufnahmen wurden in vertikaler Richtung mit der Wild P31 bei kombiniertem Tages- und Kunstlicht gemacht. Sie sollten im Rahmen einer Diplomarbeit nur für eine Strichauswertung verwendet werden. Für eine qualitativ hochwertige Umbildung ist der gewählte Bildmaßstab leider zu klein.

Als Paßpunkte konnten nur 5 Punkte aus den Unterlagen gefunden werden. Die beiden Bilder wurden deshalb in den Wild STK1 eingelegt und gut identifizierbare Details der Fresken als zusätzliche Paßpunkte gemessen. Nach einer rechnerischen relativen und absoluten Orientierung des Stereopaars hatte man auch die räumlichen Koordinaten der zusätzlichen Paßpunkte im lokalen System $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$. Die zwanzig neuen Paßpunkte wurden so gewählt, daß sie eine gute Verteilung in der Kuppel ergaben. An-

hand der lokalen Koordinaten aller Paßpunkte wurde mit Hilfe des Programmes DEFELID (siehe Kapitel 5) die Lage $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0)$ und Orientierung (α, β, γ) eines Ellipsoides berechnet. Bei den drei Achsen wurden Abweichungen nur von 12cm festgestellt, so daß die Kuppel als eine Kugel mit einem Radius von 4.28m angenommen wurde.

Zum Zeitpunkt der Bearbeitung dieses Beispieles enthielt das Programm DEFELID noch nicht die zusätzlichen Gleichungen (5.22). Das Koordinatensystem der Kugel hat deshalb die Neigungen $\alpha = 4^g.16$ und $\beta = 0^g.99$ gegenüber den X- und Y-Achsen, obwohl die Horizontierung des Kugelsystemes zweckmäßiger gemessen wäre. Die Kartons wurden in zwei Streifen (Streifen 1: $\varphi = 22^g.28$ bis $44^g.56$, und Streifen 2: $\varphi = 44^g.56$ bis $66^g.84$) angeordnet. Jeder Streifen enthielt 18 Kartons. Im Äquator und im Hauptmeridian ist die Bogenlänge jeder Seite 1.50m. Die Produkte dieser Umbildung wurden im Maßstab 1:30 geliefert. Ihre Seiten besitzen folgende Größen (in cm):

	GRUNDSEITE	DECKSEITE	LINKER bzw. RECHTER RAND
STREIFEN 1:	4.61	3.61	4.97
STREIFEN 2:	3.61	2.17	4.97

Die so erhaltenen Kartons können entweder entlang der vertikalen oder horizontalen Begrenzungslinie klaffungsfrei zusammengelegt werden. Aus einer der beiden Aufnahmen (Abb.7.6) wurden sowohl die Kartons der Streifen als auch der Polkarton umgebildet. Abb.7.7 zeigt die Kartons der zwei Streifen entlang der horizontalen Begrenzungslinie zusammengelegt.



Abb.7.6: "OSSIOS LOUKAS", Griechenland: Aufnahme mit der Wild P31

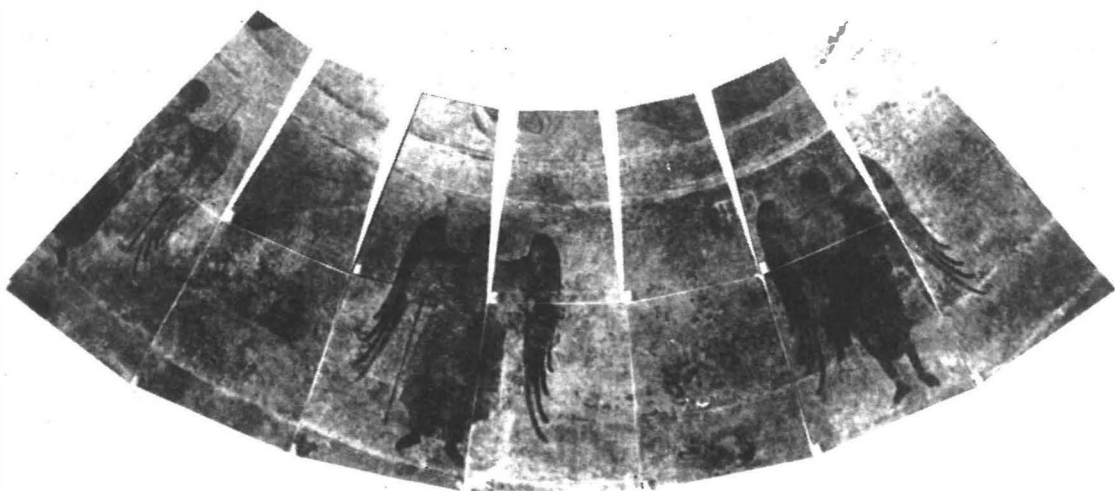


Abb.7.7: "OSSIOS LOUKAS", Griechenland: Kartons des ersten und zweiten Streifens zusammengelegt entlang der horizontalen Begrenzungslinie (Originalmaßstab 1:30)

8. VEREBNUNG EINES DREIACHSIGEN ELLIPSOIDES MIT HILFE EINES POLYEDERS

8.1. Allgemeines

Die bis jetzt besprochenen Methoden beschränken sich auf die Kugel. Eine große Anzahl von Kuppeln erweist sich aber nicht als kugelförmig. Darum wurde eine allgemeinere Fläche gesucht, die die Kugel als Grenzfall einschließt. Als solche Fläche bot sich ein dreiachsiges Ellipsoid und als Projektionsfläche wieder ein Polyeder an.

Die Lösung des Problems der Verebnung eines dreiachsigen Ellipsoides erfolgt in zwei Hauptschritten:

1. zuerst ist die Fläche des Ellipsoides auf die Ebenen des Polyeders zu projizieren, und
2. anschließend die Polyederfläche zu verebnen.

Für die Projektion des Ellipsoides auf das Polyeder eignet sich besonders eine orthogonale Projektion auf das Ellipsoid (eine auf das Polyeder orthogonale Projektion oder eine Zentralprojektion mit dem Ellipsoidmittelpunkt als Projektionszentrum führt zu Bildlücken entlang der Kanten des Polyeders).

8.2. Definition des Polyeders

Zuerst definieren wir ein kartesisches Koordinatensystem (X,Y,Z) , dessen Achsen mit den Halbachsen a , b und c des Ellipsoides zusammenfallen (Abb.8.1).

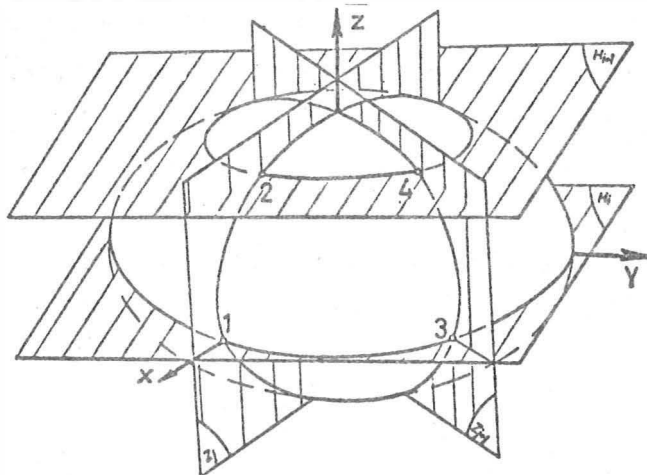


Abb.8.1: Zuordnung des Polyeders zum Ellipsoid

Die Zuordnung des Polyeders zum Ellipsoid kann dadurch verdeutlicht werden, daß das Ellipsoid mit zwei Gruppen von Ebenen (H) und (Z) geschnitten wird. Die Ebenen (H) sind parallel zur XY-Ebene (Äquatorialebene), und die Ebenen (Z) enthalten die Z-Achse. Die Abstände der Ebenen (H) werden durch gleich lange Bogenabschnitte S entlang des Hauptmeridianes (Meridian dessen Ebene die X- und Z-Achsen enthält) festgelegt. Zwei benachbarte Ebenen (Z_j) und (Z_{j+1}) bilden einen Winkel $d\lambda_j$, dem die konstante Bogenlänge S auf der Äquatorialellipse gegenüberliegt (Abb.8.2). Die Ebenen (Z_j) schneiden -in Abhängigkeit des Winkels $d\lambda_j$ (Abb.8.2)- das Ellipsoid in verschiedenen

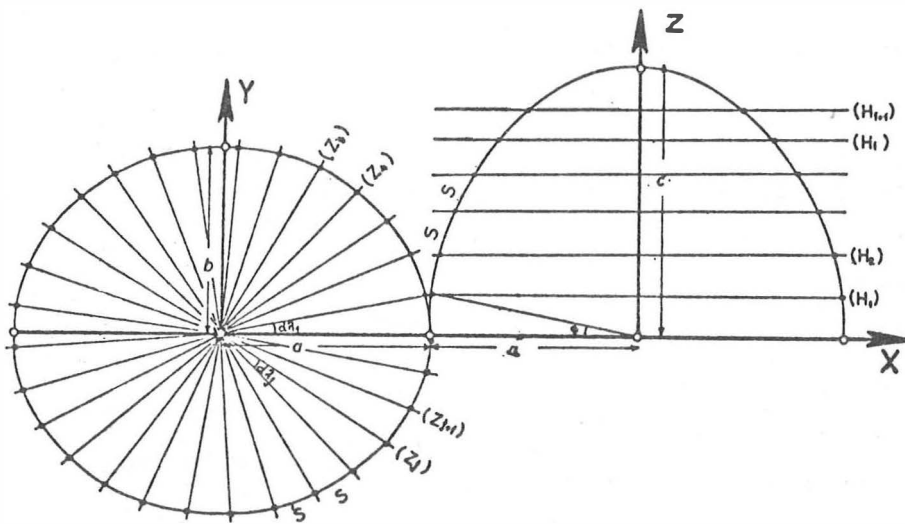


Abb.8.2: Definition des Polyeders

Schnittkurven (z_j). Diese Schnittkurven sind Ellipsen, die eine gemeinsame Halbachse haben (die Halbachse c des Ellipsoids). Ihre andere Halbachse a_j (Schnittgerade der Äquatorialellipse mit der Ebene (Z_j)) ist eine Funktion des Winkels λ_j und der Halbachsen a und b des Ellipsoids (Abb.8.2). Zu den Halbachsen a_j kommt man nach folgenden Ableitungen (Abb.8.3):

$$(X/a)^2 + (Y/b)^2 = 1 \implies a^2 b^2 = b^2 X^2 + a^2 Y^2 \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} a_j^2 &= a_j^2 (b^2 X^2 + a^2 Y^2) / (b^2 X^2 + a^2 Y^2) = \\ &= (b^2 X^2 + a^2 Y^2) / (b^2 (X^2/a_j^2) + a^2 (Y^2/a_j^2)) \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$(8.1) \text{ in } (8.2) : a_j^2 = a^2 b^2 / (b^2 (X^2/a_j^2) + a^2 (Y^2/a_j^2)) \quad (8.3)$$

$$\text{Andererseits gilt: } \cos(\lambda_j) = X/a_j \text{ und } \sin(\lambda_j) = Y/a_j \quad (8.4)$$

(8.4) in (8.3): $a_j^2 = a^2 b^2 / (b^2 \cos^2(\lambda_j) + a^2 \sin^2(\lambda_j))$ oder nach Einführung des Quadrates der numerischen Exzentrizität $e_1^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ ergibt sich:

$$a_j = \frac{b}{\sqrt{1 - e_1^2 \cos^2(\lambda_j)}} \quad (8.5)$$

Damit ist jede Schnittellipse (a_j, c) der Ebenen (Z_j) mit dem Ellipsoid festgelegt. Nun wären noch die Schnittkurven (h_i) der Ebenen (H_i) mit dem Ellipsoid zu bestimmen, und zwar in Abhängigkeit der verschiedenen Z_i vom Äquator. Die Schnittkurven (h_i) sind auch Ellipsen. Auf eine detaillierte mathematische Formulierung kann hier verzichtet werden. Im Anhang (8.1) ist sie zum Teil nachgeholt.

Wenn nun die Drehung der Ebene (Z) von $\lambda=0^\circ$ bis 400° und die Verschiebung der Ebene (H) von $Z=-c$ bis $+c$ abläuft, ist die Ellipsoidoberfläche mit zwei Scharen von Schnittellipsen bedeckt. Die Schnittpunkte der Schnittkurven zweier benachbarten Ebenen (H_i) , (H_{i+1}) und (Z_j) , (Z_{j+1}) sind die Eckpunkte 1, 2, 3 und 4 einer Ebene (R) des Polyeders (Abb.8.1). Eine solche Ebene ist wieder ein Karton im Sinne des Abschnittes 7.1. Im Anhang (8.1) ist bewiesen, daß diese vier Eckpunkte eines Kartons in einer Ebene liegen.

Die Definition der Koordinaten der Eckpunkte aller Kartons im Ellipsoidsystem (X, Y, Z) läuft in folgender Reihenfolge ab (Abb.8.3):

- Einteilung der Äquatorialellipse (a, b) in n gleiche Bogenlängen S :

$$n = (4(1/b) \int_0^b \sqrt{(b^2 - e_1^2 Y^2) / (b^2 - Y^2)} dY) / S \quad (8.6)$$

Die Koordinaten X , Y der $n+1$ Punkte $A_j^1 (j=1, 2, \dots, (n+1))$ ergeben sich aus den Beziehungen der Seite 28 bis 29 .

- Einteilung der Ellipse (a, c) des Hauptmeridianes in m gleiche Bogenlängen S :

$$m = \left(\frac{1}{c} \right) \int_0^c \sqrt{\frac{(c^2 - e_2^2 z^2)}{(c^2 - z^2)}} dz / S \quad (8.7)$$

mit $e_2^2 = (a^2 - c^2) / a^2$

Die Koordinaten X, Z der $m+1$ Punkte $A_1^i (i=1, 2, \dots, (m+1))$ ergeben sich aus den Beziehungen der Seite 28 bis 29.

- Berechnung der Halbachsen a_j der Ellipsen (a_j, c) für jeden Punkt A_j^1 mit der Formel (8.5), wobei $\lambda_j = \arctan(Y_j/X_j)$.
- Berechnung der Punkte A_j^2 auf den Ellipsen (a_j, c) so, daß $z_{A_j^2} = z_{A_1^2}$.

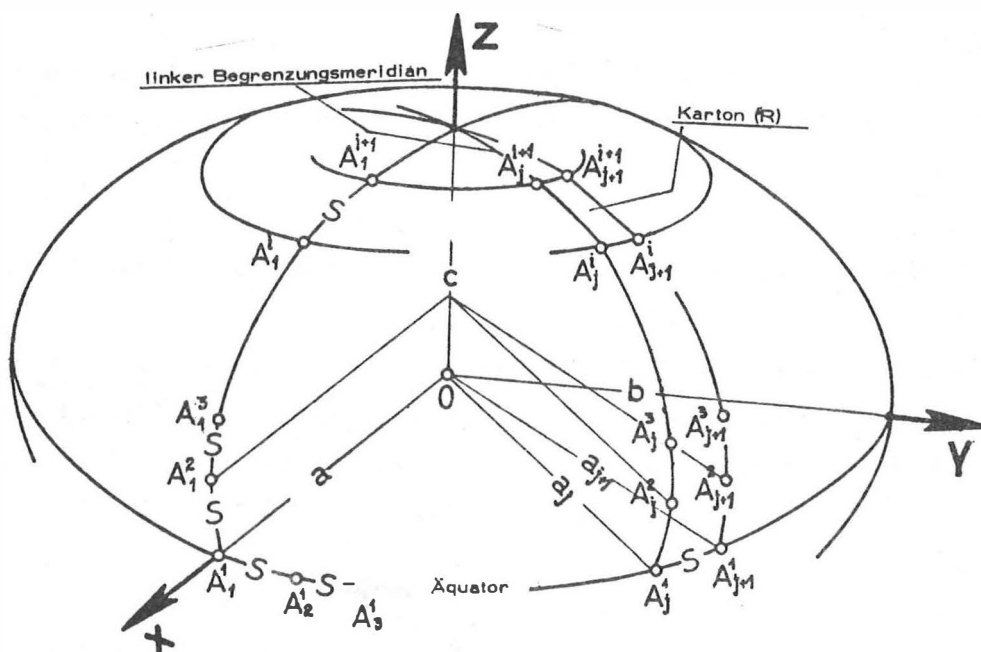


Abb. 8.3: Festlegung der Eckpunkte des Kartons (R) des Polyeders

Somit sind $n+1$ Punkte $A_j^2 (j=1, 2, \dots, (n+1))$ definiert, die in einer gemeinsamen Ebene liegen und nichts anderes als die oberen Eckpunkte der Kartons des ersten Streifens sind.

- Wiederholung dieses Prozesses für die Punkte $A_j^3 (j=1, 2, \dots, (n+1))$ mit $z_{A_j^3} = z_{A_1^3}$, usw.

Nach m Wiederholungen haben wir in das Ellipsoid das Polyeder eingeschrieben. Seine Ebenen werden vom Äquator zum Pol zu kleiner. Sie haben die Form eines Trapezes. Dort, wo die Krümmung

der Begrenzungsellipse bzw. des Begrenzungsmeridianes kleiner ist, bilden die Ebenen (Z_j) einen größeren Winkel bzw. haben die Ebenen (H_i) einen größeren Abstand von einander als in Bereichen mit größerer Krümmung.

8.3. Mathematisches Grundprinzip der Verebnung

Wie schon bekannt, erfolgt die Verebnung des Ellipsoides nach folgenden Schritten:

- Definition eines quadratischen Rasters mit der Rasterweite s im Abbild (Ebene des Polyeders),
- Projektion des Rasters auf das Ellipsoid so, daß die Projektionsrichtung normal zur Ellipsoidoberfläche steht,
- Projektion des auf die Objektoberfläche (Ellipsoid) projizierten Rasters ins Bild (Vorlage) mit Hilfe einer Zentralprojektion mit dem Aufnahmestandpunkt als Projektionszentrum, usw.

Die Realisierung dieser Schritte beginnt mit der Definition eines lokalen kartesischen Koordinatensystemes (x, y, z) mit dem Ursprung im Eckpunkt 1 auf jeden Karton (R). Die y -Achse geht durch die Eckpunkte 1 und 3; die x -Achse liegt in der Ebene des Kartons und die z -Achse steht schließlich senkrecht auf dem Karton (Abb.8.4). Jedes lokale System hängt über eine

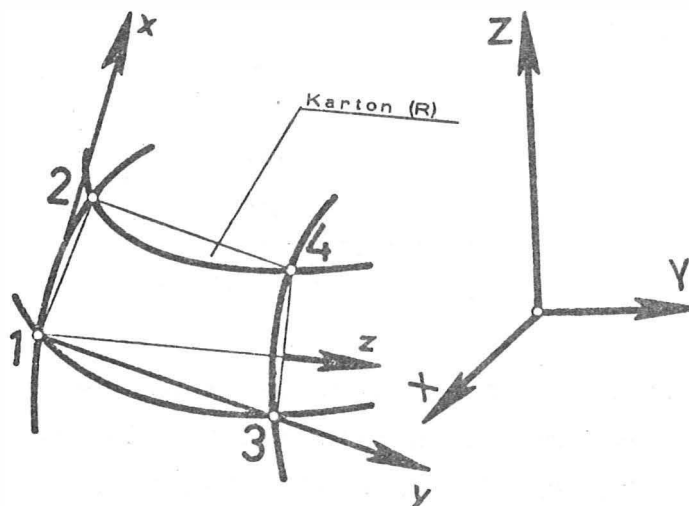


Abb.8.4: Festlegung des Kartons auf dem Ellipsoid

räumliche Transformation (drei Translationen und drei Drehungen) mit dem zentral gelagerten Ellipsoidsystem (X,Y,Z) zusammen (siehe auch Seite 42, Formel 7.7).

Die Koordinaten der vier Eckpunkte im lokalen System des Kartons können anhand der im Ellipsoidsystem bekannten Koordinaten berechnet werden (Abb.8.5):

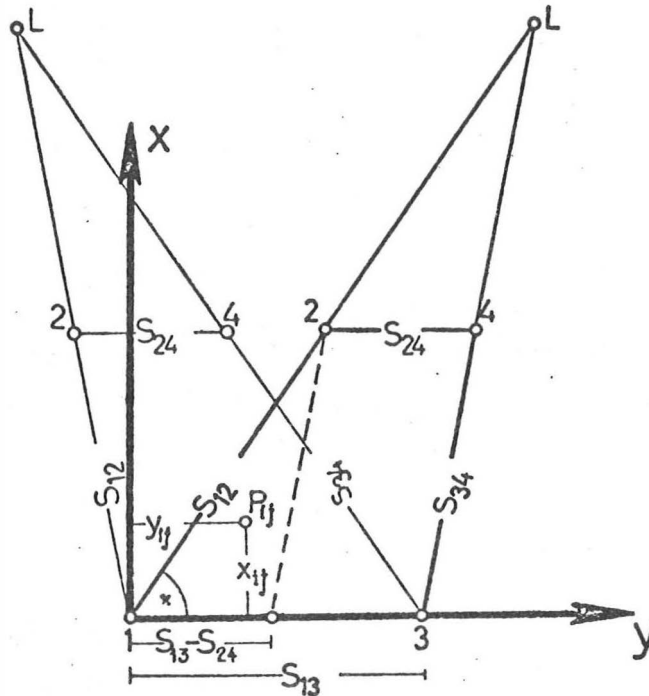


Abb.8.5: Festlegung der Eckpunkte 1, 2, 3 und 4 im lokalen System des Kartons (R)

$$\kappa = \arccos(s_{12}^2 + (s_{13} - s_{34})^2) / (2 \cdot s_{12} \cdot (s_{13} - s_{24})) \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned} 1 : & (0, 0, 0) \\ 2 : & (s_{12} \cdot \sin(\kappa), s_{12} \cdot \cos(\kappa), 0) \\ 3 : & (0, s_{13}, 0) \\ 4 : & (x_2, y_2 + s_{24}, 0) \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\text{mit } s_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

Dann wird ein quadratisches Raster mit der Rasterweite s auf den Karton im System (x,y,z) definiert, wobei sich die Anzahl N_{prof} der Profile und die Anzahl N_{pkt} der Punkte pro Profil wie folgt ergibt:

$$N_{\text{prof}} = \frac{x_2}{s}, \quad N_{\text{pkt}} = (\max(y_1, y_2, y_3, y_4) - \min(y_1, y_2, y_3, y_4)) / s \quad (8.10)$$

Anschließend werden die Rasterpunkte vom lokalen System (x,y,z) ins Ellipsoidsystem (X,Y,Z) transformiert (Formel 7.7).

Jetzt muß der Raster vom Karton auf das Ellipsoid orthogonal projiziert werden. Für die Durchführung dieser Projektion wurde eine iterative Methode entwickelt, die auf folgenden Gedanken basiert (Abb.8.6):

- Gesucht ist die Richtung \vec{d} , die einen Punkt P_{ij} des Kartons senkrecht auf das Ellipsoid bringt.
- Diese unbekannte Richtung wird zuerst mit einer anderen Richtung \vec{d}_0 approximiert, die auf dem Karton senkrecht steht. Die Richtung \vec{d}_0 ist im normalen Vektor R_0 auf die Ebene des Kartons $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_0 + D_0 = 0$ enthalten. Der Vektor \mathbf{r} verbindet einen beliebigen Punkt des Kartons mit dem Ellipsoidmittelpunkt; \mathbf{e}_0 ist der Einheitsvektor von R_0 ; D_0 bedeutet den Abstand des Ellipsoidmittelpunktes vom Karton.
- Die Gerade (g_0) , die durch P_{ij} geht und die Richtung \vec{d}_0 enthält, hat die Gleichung $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{ij}}) \times R_0 = 0$. Der Vektor \mathbf{r} verbindet in diesem Fall einen beliebigen Punkt der Geraden (g_0) mit dem Ellipsoidmittelpunkt. Die Gerade (g_0) schneidet das Ellipsoid im Punkt P_0^* .
- Der Normalenvektor R_1 auf die in P_0^* tangierende Ebene $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1 + D_1 = 0$ enthält die Richtung \vec{d}_1 .
- Die Gerade (g_1) , die durch P_{ij} geht und die Richtung \vec{d}_1 enthält, hat die Gleichung $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_{ij}}) \times R_1 = 0$. Sie schneidet das Ellipsoid im Punkt P_1^* , in dem eine neue Tangentialebene (te_2) definiert werden kann, usw.

Die Iteration wird beendet, wenn der Abstand $\overline{P_k^* P_{k+1}^*}$ kleiner als eine vorgegebene Schranke ist. Die Praxis hat gezeigt, daß die Methode sehr schnell konvergiert.

Hinter der benützten Vektorschreibweise verbergen sich folgende Rechenoperationen:

Die Ebene des Kartons hat die Gleichung:

$$A_0 X + B_0 Y + C_0 Z + D_0 = 0 \quad (8.11)$$

$$\begin{aligned} \text{mit : } A_O &= Y_1 Z_2 + Y_2 Z_3 + Y_3 Z_1 - Y_1 Z_3 - Y_2 Z_1 - Y_3 Z_2 \\ B_O &= X_1 Z_3 + X_2 Z_1 + X_3 Z_2 - X_1 Z_2 - X_2 Z_3 - X_3 Z_1 \\ C_O &= X_1 Y_2 + X_2 Y_3 + X_3 Y_1 - X_1 Y_3 - X_2 Y_1 - X_3 Y_2 \\ D_O &= X_1 Y_3 Z_2 + X_2 Y_1 Z_3 + X_3 Y_2 Z_1 - \\ &\quad - (X_1 Y_2 Z_3 + X_2 Y_3 Z_1 + X_3 Y_1 Z_2) \end{aligned}$$

Die Gerade (g_O), die durch P_{ij} geht und senkrecht auf dem Karton steht, hat die Gleichung:

$$(X - X_{ij}) / A_O = (Y - Y_{ij}) / B_O = (Z - Z_{ij}) / C_O \quad (8.12)$$

Der Schnittpunkt P_O^* der Geraden (g_O) mit dem Ellipsoid (a, b, c) ergibt sich als Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} XB_O - X_{ij}B_O &= YA_O - Y_{ij}A_O & Y &= (B_O X - B_O X_{ij} + A_O Y_{ij}) / A_O \\ XC_O - X_{ij}C_O &= ZA_O - Z_{ij}A_O & \implies Z &= (C_O X - C_O X_{ij} + A_O Z_{ij}) / A_O \implies \\ X^2/a^2 + Y^2/b^2 + Z^2/c^2 &= 1 & 1 &= X^2/a^2 + Y^2/b^2 + Z^2/c^2 \\ Y &= (B_O X - B_O X_{ij} + A_O Y_{ij}) / A_O \\ \implies Z &= (C_O X - C_O X_{ij} + A_O Z_{ij}) / A_O & (8.13) \\ O &= A^* X^2 + B^* X + C^* \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die beiden Lösungen:

$$\begin{aligned} X_1^* &= (-B^* + \sqrt{D^*}) / (2A^*), & Y_1^* &= (B_O X_1^* - B_O X_{ij} + A_O Y_{ij}) \\ & & Z_1^* &= (C_O X_1^* - C_O X_{ij} + A_O Z_{ij}) \\ X_2^* &= (-B^* - \sqrt{D^*}) / (2A^*), & Y_2^* &= (B_O X_2^* - B_O X_{ij} + A_O Y_{ij}) \\ & & Z_2^* &= (C_O X_2^* - C_O X_{ij} + A_O Z_{ij}) \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$\text{mit } A^* = A_O^2 b^2 c^2 + B_O^2 a^2 c^2 + C_O^2 a^2 b^2$$

$$B^* = 2a^2 (B_O c^2 (A_O Y_{ij} - B_O X_{ij}) + C_O b^2 (A_O Z_{ij} - C_O X_{ij}))$$

$$\begin{aligned} C^* &= a^2 (c^2 (B_O X_{ij} (B_O X_{ij} - A_O Y_{ij}) + A_O Y_{ij} (A_O Y_{ij} - B_O X_{ij})) + \\ &\quad + b^2 (C_O X_{ij} (C_O X_{ij} - A_O Z_{ij}) + A_O Z_{ij} (A_O Z_{ij} - C_O X_{ij})) - A_O^2 b^2 c^2 \end{aligned}$$

$$D^* = B^{*2} - 4A^*C^*$$

Von den zwei Lösungen des Gleichungssystems (8.13) verwenden wir die mit dem positiven Z-Wert und bezeichnen sie mit (X_O^*, Y_O^*, Z_O^*) . Die Tangentialebene (te_1) des Ellipsoides im Punkt $P_O^*(X_O^*, Y_O^*, Z_O^*)$ wird berechnet aus:

$$(te_1): A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1 = 0 \quad (8.15)$$

$$\text{mit } A_1 = X_O^* b^2 c^2, B_1 = Y_O^* a^2 c^2, C_1 = Z_O^* a^2 b^2, D_1 = -a^2 b^2 c^2$$

Der Schnittpunkt P_1 der Geraden (g_1) , die durch P_{ij} geht und senkrecht auf der Tangentialebene (te_1) steht, mit dem Ellipsoid ergibt sich aus den Formeln (8.13) und (8.14) wobei für A_O, B_O, C_O, D_O die Größen A_1, B_1, C_1, D_1 zu setzen sind, usw.

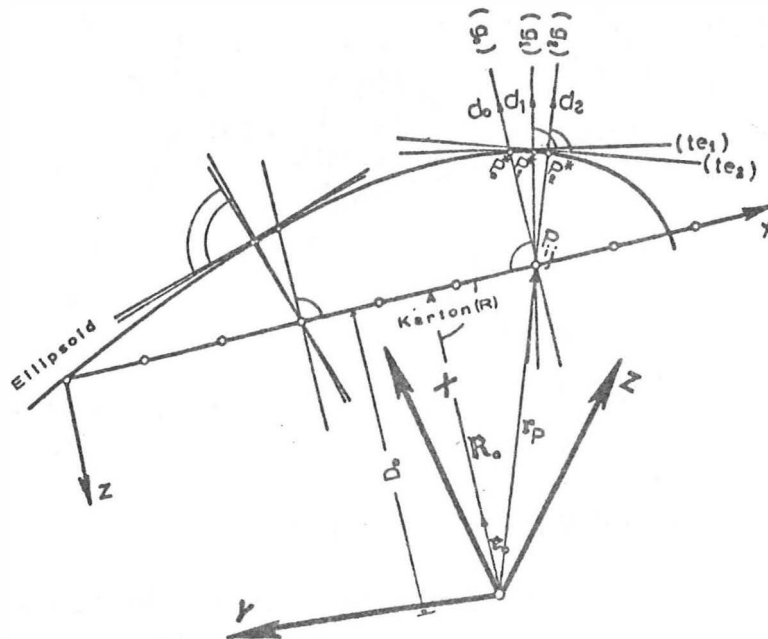


Abb.8.6: Projektion des Rasterpunktes P_{ij} vom Karton auf das Ellipsoid

Anhand vorhandener Paßpunkte wird dann die äußere und eventuell die innere Orientierung der Aufnahme berechnet und der Raster von der Objektoberfläche ins Bild transformiert, usw.

Aus den gleichen Gründen wie bei Kapitel 7 werden die Kartons nur bis zu einer bestimmten Horizontalebene (H_i) erzeugt. Der Polbereich wird zusammenhängend auf einen eigenen Karton umge-

bildet (Abb.8.7). Dieser Karton hat die Form eines ebenen Vieleckes. Seine Seiten sind die oberen Begrenzungslinien der Kartons des letzten Streifens. Die Umbildung erfolgt hier wie bei der Herstellung der seitlichen Kartons:

- Definition des quadratischen Rasters auf der Ebene des Vieleckes,
- Orthogonalprojektion der Rasterpunkte auf das Ellipsoid,
- Transformation der Rasterpunkte von der Ellipsoidoberfläche ins Bild, usw.

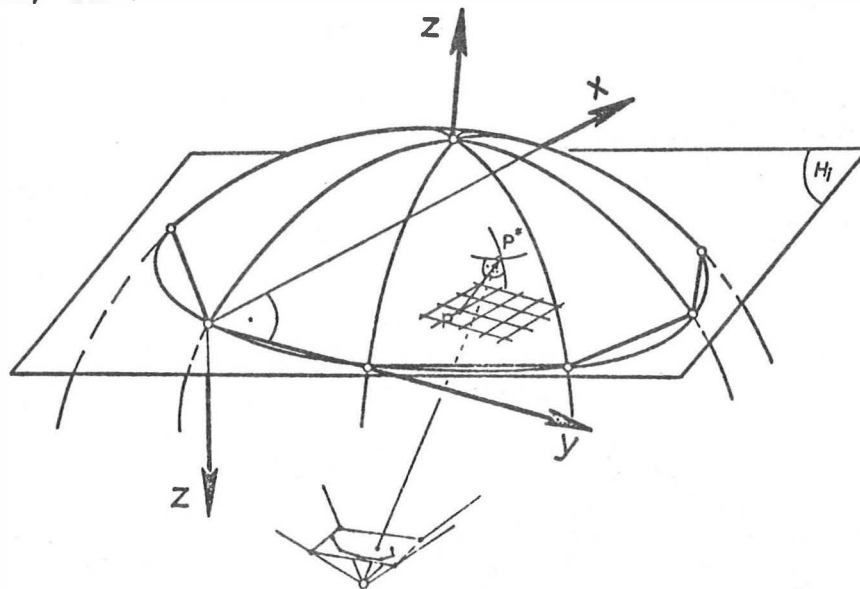


Abb.8.7: Definition des Kartons für die Umbildung im Polbereich

8.4. Programmrealisierung

Für die Realisierung der obgenannten Methode wurde das FORTRAN-Programm ELLID entwickelt, das im Anhang 8.2 in Form eines Flußdiagrammes zusammengestellt ist.

Das Programm definiert die Ebenen des Polyeders und speichert die Koordinaten ihrer Eckpunkte im Ellipsoidsystem auf einer Magnetplatte. Dann greift es zum gewünschten Karton und anhand seiner Eckpunkte berechnet es den quadratischen Raster im lokalen System des Kartons. Anschließend werden mit Hilfe des Unterprogrammes ORTRA3 (Institut für Photogrammetrie der TU Wien) die Parameter der dreidimensionalen Transformation vom lokalen System des Kartons ins Ellipsoidsystem berechnet. Nach Transformation der Rasterpunkte ins Ellipsoidsystem projiziert das Programm die

Rasterpunkte senkrecht zur Ellipsoidoberfläche. Zum Schluß werden Paßpunkte und Rasterpunkte vom Ellipsoidsystem ins Kartonsystem transformiert und einige Parameter, die für das Starten des zweiten Teiles des Programmes SORA-OP notwendig sind, berechnet. Die Fortsetzung läuft in der bekannten Weise.

8.5. Praktisches Beispiel

Als Beispiel wurde nach Anregung von Herrn Dr. H. F o r a - m i t t i die Kuppel der Karlskirche bearbeitet. Für Restaurierungs- und Dokumentationszwecke sollten seit langem die Fresken der Kuppelinnenseite photographisch abgewickelt werden. Der Hochschuljubiläumsfonds der Stadt Wien hat dieses Projekt finanziell unterstützt.

Um einen guten Bildmaßstab zu erreichen, der die Umbildung im Maßstab 1:50 bis 1:10 erlaubt, wurde die Kuppel nicht vom Boden sondern vom Kuppelrundgang aus photographiert. Die Aufnahmen wurden mit der Wild P31 bei Tageslicht gemacht (Abb.8.12). Von jedem Fenster des Kuppelrundganges wurden zwei Aufnahmen angefertigt, eine mit dem exzentrischen Mittelpunkt des Bildformates nach links, und eine nach rechts. In allen Fenstern standen Stative, auf die abwechselnd die Zieltafeln und die Kamera gesetzt wurden. Nach dem Photographieren wurden mit dem elektronischen Entfernungsmeßgerät Wild DI3S die Distanzen und mit dem Theodolit Wild T2 die Richtungen in zwei Sätzen zu den sichtbaren Stativen gemessen. Aus den Messungen berechnete das Programm NETZ 3D (Institut für Landesvermessung der TU Wien) nach einem dreidimensionalen Netzausgleich /10/, die Raumkoordinaten der Aufnahmestandpunkte in einem lokalen Koordinatensystem $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$.

Für die Bestimmung der Form der Kuppel und ihrer Lage und Orientierung im lokalen System wurden gut identifizierbare Details der Fresken als Paßpunkte -insgesamt 32- zusätzlich bestimmt. Die Richtungen zu jedem Paßpunkt wurden von drei verschiedenen Standpunkten aus mit dem Wild T2 gemessen. Ihre Koordinaten im System $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$ ergaben sich aus Vorwärtsschnitten. Für jedes Koordinatentripel $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ ergaben sich drei Werte (Zweierkombination der drei gemessenen Richtungen). Die Mittelung ergab end-

gültige Koordinaten der Paßpunkte. Mit Hilfe des Programmes DEFELID (siehe Kapitel 5) wurden die Parameter jenes Ellipsoides, das die Kuppel approximiert, berechnet, und Lage und Orientierung im lokalen System bestimmt. Danach wurden Standpunkte und Paßpunkte vom lokalen System $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$ in das Ellipsoidsystem (X, Y, Z) transformiert (Formel 5.23).

Die Kartons wurden mit Hilfe der in diesem Kapitel beschriebenen Methode im Maßstab 1:30 produziert. Um einen besseren Eindruck von der Verebnung der gesamten Kuppel zu bekommen, wurden alle vier Eckpunkte eines jeden Kartons vom dreidimensionalen Kartonsystem in ein übergeordnetes ebenes System transformiert und am CORAGRAPH DC2, den der Fond zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung zur Verfügung gestellt hat, gezeichnet (Abb.8.13). Auf jeden umgebildeten Karton wurden seine vier Eckpunkte und die Begrenzungslinien auf das Negativ graviert. Auf diese Weise erkennt man, daß beim Zusammenfügen der einzelnen Kartons keine Übertragungsfehler auftreten. Zur Demonstration sind in der Abb.8.14 die 5 Kartons der ersten 10 Streifen zusammengelegt.



Abb. 8.12: Karlskirche, Wien: Aufnahme mit der Wild P 31

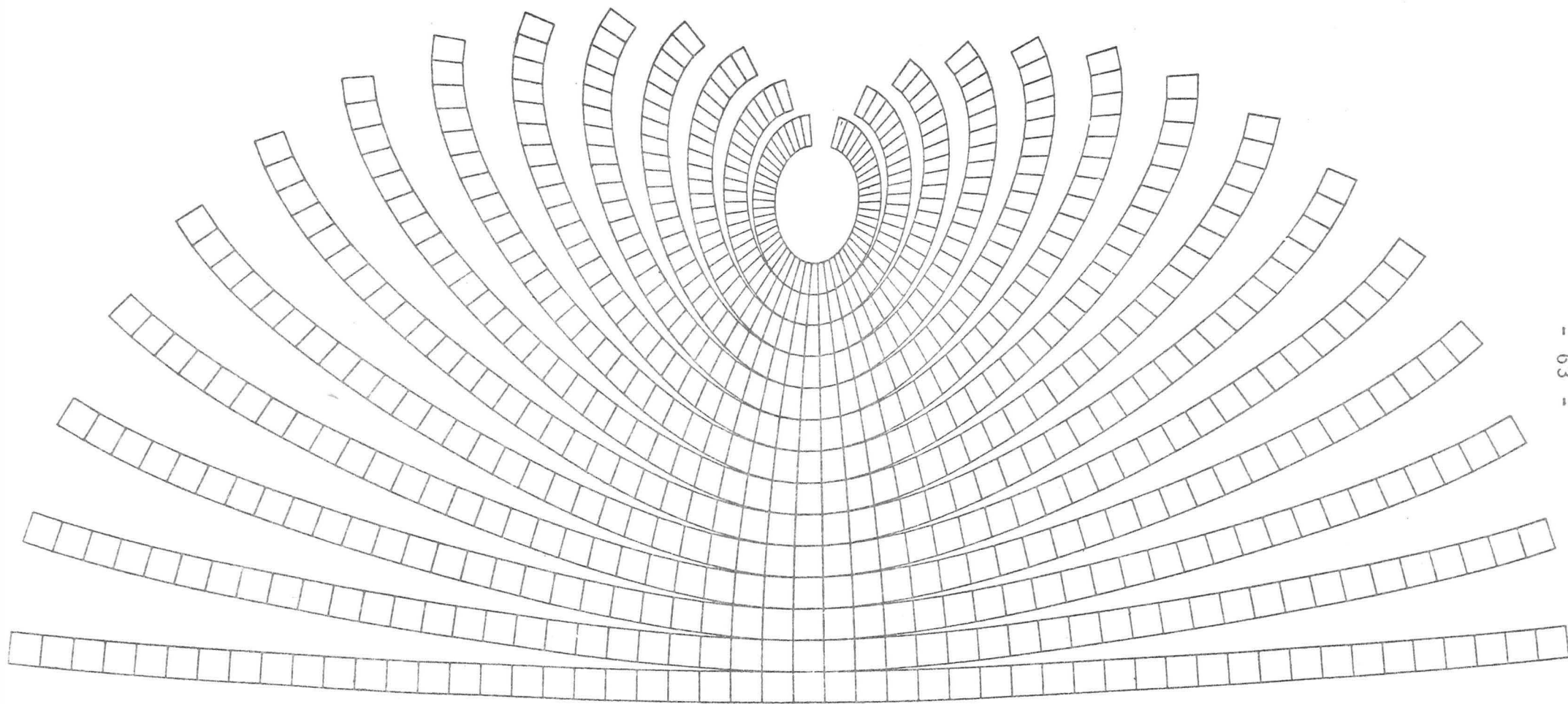


Abb.8.13: Abwicklung der gesamten Polyederfläche (Original-
maßstab 1:200), gezeichnet am CORAGRAPH DC2

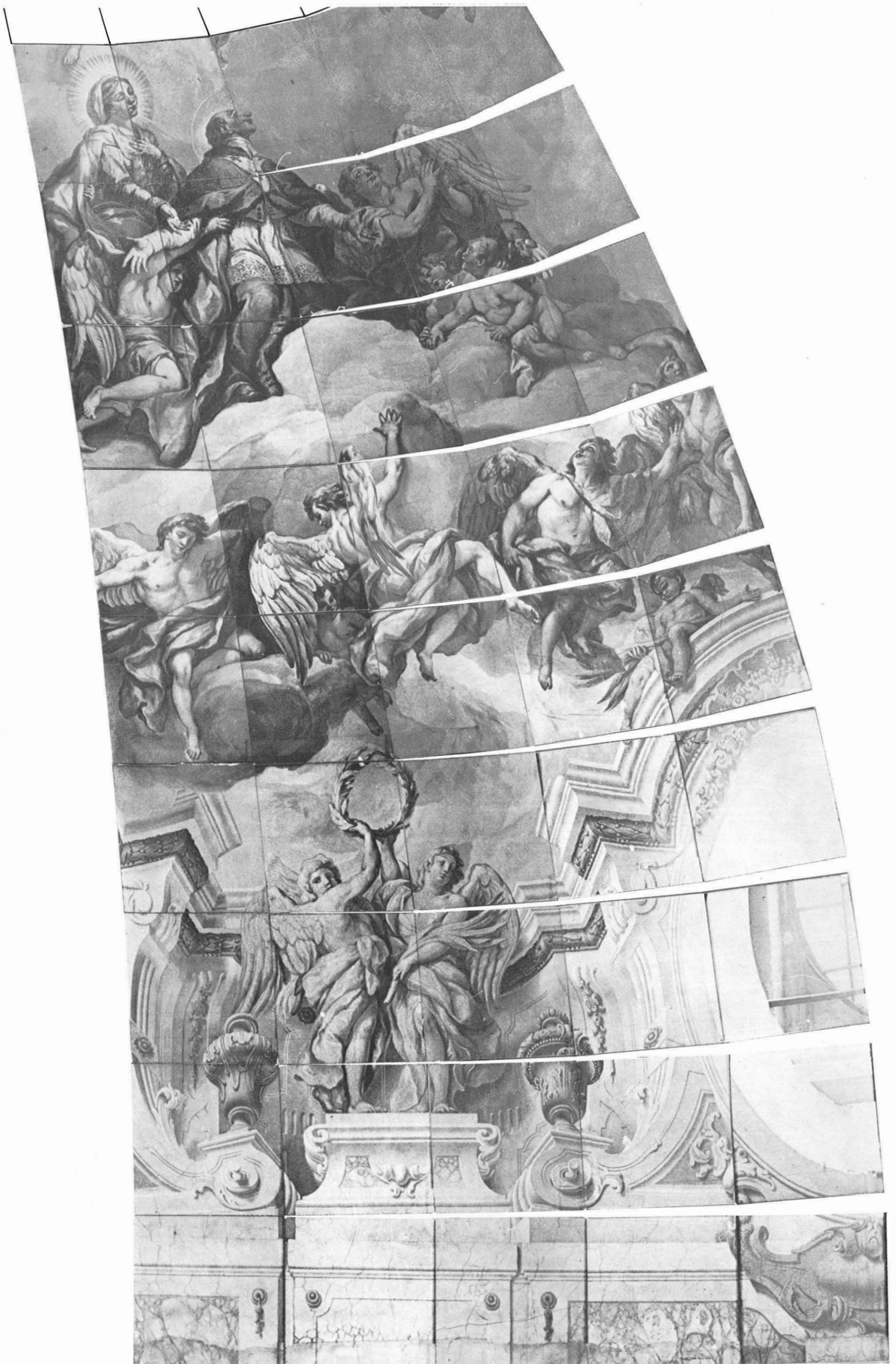


Abb. 8.14: Kartons im Maßstab 1:50 von $\varphi = 0^\circ$ bis $\varphi = 77^\circ 21'$ und von $\lambda = 0^\circ$ bis $\lambda = 34^\circ 33'$

9. GENAUIGKEITSUNTERSUCHUNGEN

9.1. Allgemeines

In den vorhergehenden Kapiteln wurde hauptsächlich die photographische Verebnung einer Kugel und eines dreiachsigen Ellipsoides unter Verwendung verschiedenartiger Projektionsflächen behandelt.

Da die zu verebnenden Flächen in der Regel in zwei Richtungen gekrümmt sind, entstehen bei der Verebnung Verzerrungen. Ihre Größe hängt von der angewandten Projektionsfläche sowie von der verwendeten Projektion auf die Projektionsfläche ab.

In diesem Abschnitt (9.2) werden diese Projektionsverzerrungen untersucht. Dabei wird die in der Kartographie übliche formalistische Betrachtungsweise aus den folgenden beiden Gründen nicht eingeschlagen:

- Die angewandten Projektionen können im allgemeinen nur mit Hilfe eines iterativen Prozesses formuliert werden, sodaß die formalistische Beschreibung der Verzerrungen große Schwierigkeiten machen würde.
- In erster Linie ist man an konkreten Zahlen für die Verzerrungen interessiert, die sich für die verschiedenen Projektionen und Projektionsflächen auf numerischem Weg immer nach den gleichen Überlegungen ermitteln lassen.

Es wurde deshalb ein FORTRAN-Programm entwickelt, das auf numerischem Weg die Verzerrungen in beliebigen Punkten berechnet.

Unabhängig von diesen Verzerrungen wird die Genauigkeit des photographischen Endergebnisses noch von folgenden Fehlern beeinflusst:

- Annahme, daß die Punkte des verzerrten Rasters im Bild geradlinig verbunden werden und entlang der Rasterseiten linear interpoliert wird, und
- Bauungenauigkeit (Abweichung des Baues von der mathematisch definierten Oberfläche).

Die entsprechenden Fehler nennen wir "Interpolations"- und "Bauungenauigkeitsfehler". Auch diese Fehler werden in diesem Kapitel ((9.3) und (9.4)) mit Hilfe von dazu entwickelten Programmen behandelt.

9.2. Projektionsverzerrungen

Nennen wir die zu verebnende Fläche (F) und die abwickelbare Projektionsfläche (R). Es wird zwar der quadratische Raster auf (R) definiert und mit Hilfe des Algorithmus $(f)^{-1}$ auf (F) übertragen, doch entspricht diese Vorgangsweise einer Projektion von (F) auf (R) mit dem Algorithmus (f) (Abb.9.1).

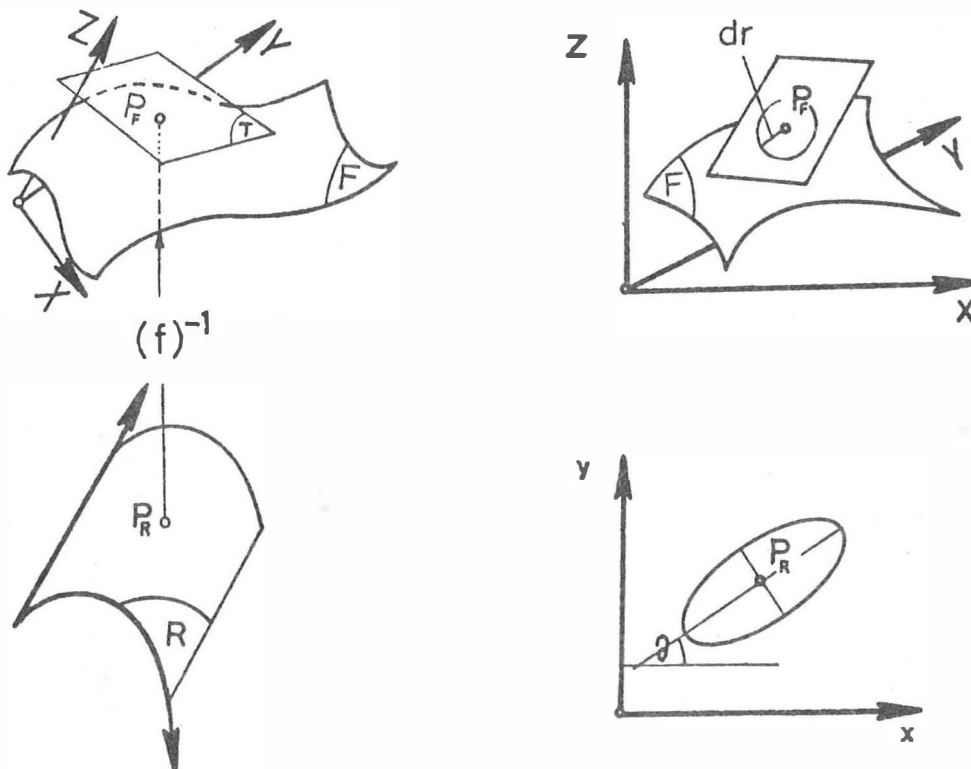


Abb.9.1: Definition der Indikatrix

Um die Verzerrungen dieser Projektion in einem beliebigen Punkt P_R zu errechnen, definieren wir die Tangentialebene (T) auf (F) im Punkt P_F und einen infinitesimalen Kreis $(P, dr)_F$ in P_F auf (T). Wie bei der formalistischen Betrachtungsweise der Verzerrungen in der Kartographie nehmen wir auch hier an, daß für den infinitesimalen Bereich die Beziehung zwischen (F) und (R)

eine Affinität ist. Das bedeutet, daß der Kreis $(P, dr)_F$ zu einer Ellipse $(P, a, b)_R$ wird, wenn man ihn mit Hilfe von (f) auf (R) bringt. Die Ellipse $(P, a, b)_R$ ist nichts anderes als die Tissotsche Indikatrix, mit deren Hilfe man die Verzerrungen berechnen kann.

Für die komplizierteste Umbildung in dieser Arbeit, die Umbildung des dreiachsigen Ellipsoids mit Hilfe des Polyeders, wurde ein FORTRAN-Programm (Programm ACCUR1, Flußdiagramm im Anhang 9.1) entwickelt und die Verzerrungen berechnet.

Im Fall der Kugel braucht man nur $a=b=c=r$ zu setzen. Wenn eine andere Projektionsfläche angewandt wird (z.B. Zylinder), arbeitet man nach dem gleichen Prinzip.

Das Programm basiert auf dem Gedanken, daß im Punkt P_F des Ellipsoids in der Tangentialebene (T) zunächst ein Kreis $(P, dr)_F$ mit sehr kleinem Radius dr definiert wird (Abb.9.2). Die Normale zu (T), die durch den Punkt P_F geht, schneidet den Karton (R) im Punkt P_R . Dieser Punkt ist Mittelpunkt der Indikatrix im Abbild. Da für den Bereich des Kreises die Beziehung zwischen dem Ellipsoid bzw. der Tangentialebene (T) und dem Karton (R) als Affinität angenommen werden kann, kann die Indikatrix sehr leicht als Funktion des Winkels α zwischen den Ebenen (T) und (R) festgelegt werden (Abb.9.2).

Der kreisförmige Zylinder, dessen Achse normal zur Ebene (T) steht, schneidet den Karton (R) in einer Ellipse mit den Achsen a_R und b_R , die durch die folgenden Beziehungen errechnet werden können.:

$$a_R = dr / \cos(\alpha), \quad b_R = dr \quad (9.1)$$

Für die Definition der Indikatrix genügt also, die Richtung der Schnittgeraden (ϵ) zwischen (T) und (R) zu ermitteln. Wenn (T) und (R) parallel sind, ist die Indikatrix gleich einem Kreis mit dem Radius dr .

Das Programm ACCUR1 definiert einen quadratischen Raster auf (R) und projiziert ihn orthogonal auf die Ellipsoidoberfläche. In jedem Punkt P_F des so entstandenen Rasters wird nun die

$$C_R = X_1 Y_2 + X_2 Y_3 + X_3 Y_1 - X_1 Y_3 - X_2 Y_1 - X_3 Y_2 \quad (9.5)$$

$$D_R = X_1 Y_3 Z_2 + X_2 Y_1 Z_3 + X_3 Y_2 Z_1 - X_1 Y_2 Z_3 - X_2 Y_3 Z_1 - X_3 Y_1 Z_2$$

Der Winkel α :

$$\alpha = \arccos((A_R A_T + B_R B_T + C_R C_T) / (\sqrt{(A_R^2 + B_R^2 + C_R^2)} \sqrt{(A_T^2 + B_T^2 + C_T^2)})) \quad (9.6)$$

Um die Richtung der a_R -Achse zu bekommen, wird die Normale (n)

$$(n): (X - X_{PF}) / A_R = (Y - Y_{PF}) / B_R = (Z - Z_{PF}) / C_R \quad (9.7)$$

auf dem Karton (R) durch den Punkt P_F bestimmt. Der Schnittpunkt P_N zwischen (n) und (R) hat folgende Koordinaten:

$$X_{PN} = X_{PF} - A_R \rho, \quad Y_{PN} = Y_{PF} - B_R \rho, \quad Z_{PN} = Z_{PF} - C_R \rho \quad (9.8)$$

$$\text{wobei: } \rho = ((A_R X_{PF} + B_R Y_{PF} + C_R Z_{PF} + D_R) / (A_R^2 + B_R^2 + C_R^2))$$

Transformieren wir nun die Punkte P_R und P_N vom (X,Y,Z)-System ins (x,y,z)-System (Formel 7.7), so ist auf dem Karton die Indikatrix festgelegt. Der Mittelpunkt ist der Punkt P_R und die a_R -Achse bildet mit der y-Achse den Winkel

$$\vartheta = \arctan((x_{PN} - x_{PR}) / (y_{PN} - y_{PR})) \quad (9.9)$$

In der Abb.9.3 sind Ergebnisse dieses Programmes für das praktische Beispiel des Kapitels 8. angegeben. Anhand der gerechneten Indikatrizen kann man die Längen-, Winkel-, und Flächenverzerrungen in einem bestimmten Punkt errechnen /28/.

9.3. Interpolationsfehler

Wie im Kapitel 3. gesagt, erfolgt die Differentialumbildung unter der Bedingung, daß die beliebigen Vierecke im Bild zu Quadraten im Abbild werden. Die Annahmen, daß die Punkte des verzerrten Rasters im Bild geradlinig verbunden werden und entlang der Rasterseiten linear interpoliert wird, führt zu Fehlern im photographischen Ergebnis der Umbildung. Um solche

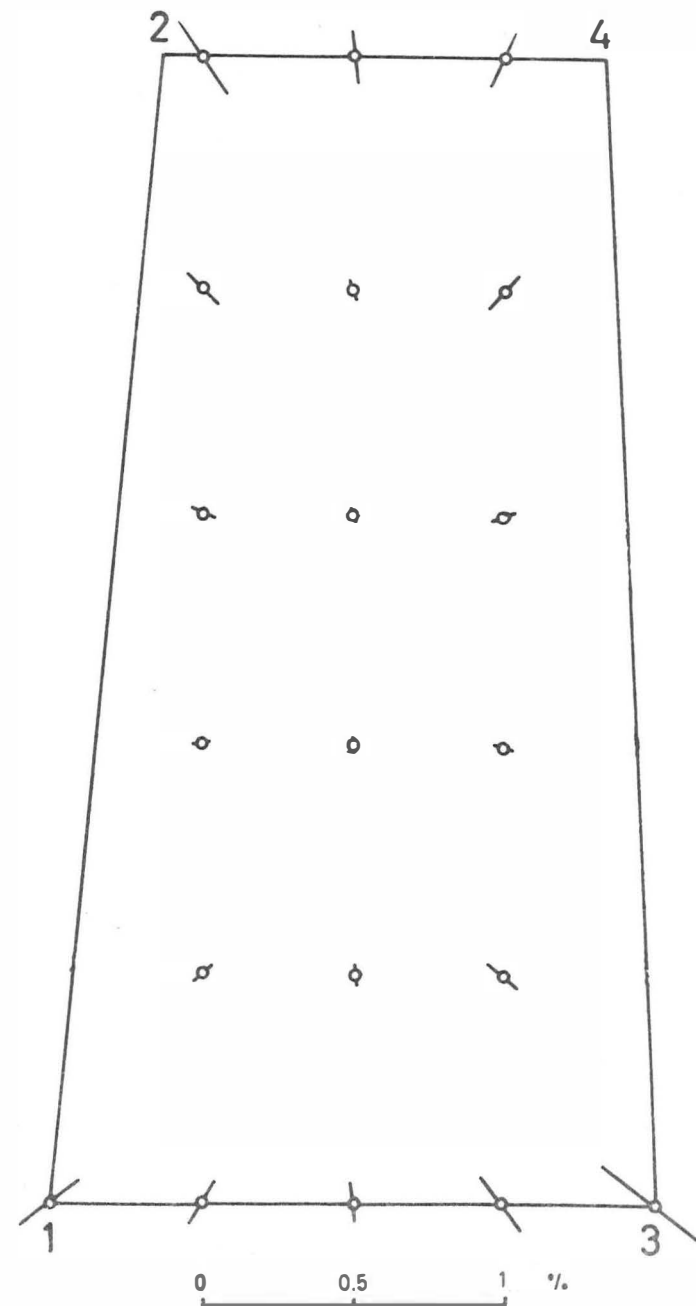
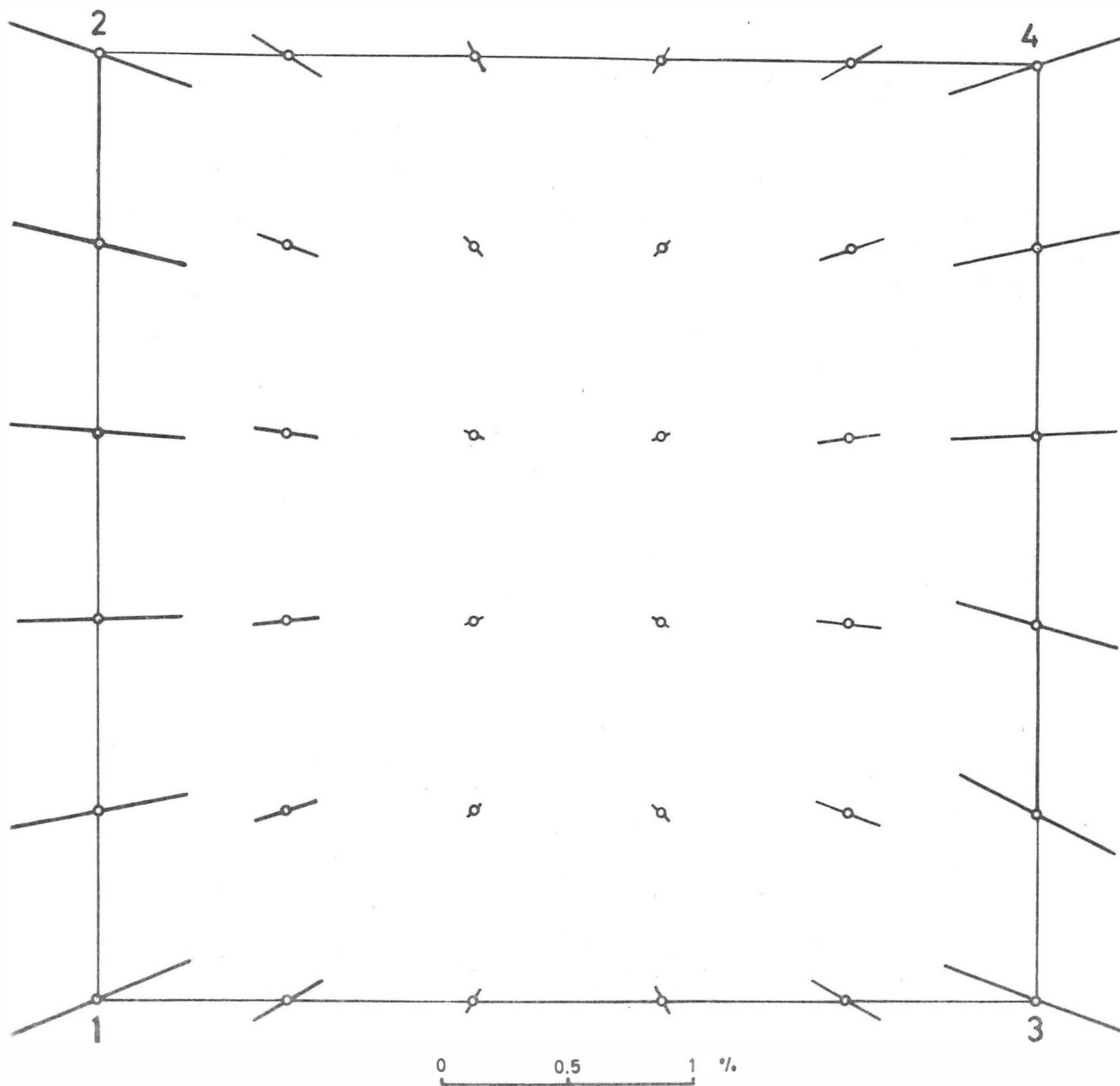


Abb. 9.3: Richtung und Länge (Verhältnis der großen gegenüber der kleinen Achse der Indikatrix in %) der Hauptverzerrungsachse; links: 1.Karton des 1.Streifens; rechts: 1.Karton des 10.Streifens

Um die Fehler zu bestimmen, stellen wir folgende Gedanken an: Wir nennen Q_i die Eckpunkte und M_i die Seitenmittelpunkte eines Quadrates im Abbild. Nach der Durchführung der bekannten Rechenschritte enthält das Quadrat im Bild die Form eines Viereckes mit den Eckpunkten q_i . Nach den gleichen Rechenschritten kann man auch die Seitenmittelpunkte M_i vom Abbild in die Vorlage transformieren. Diese Punkte sind im Abb.9.4 mit m'_i bezeichnet. Andererseits sind die Punkte m_i die Seitenmittelpunkte in der Vorlage. Der Interpolationsfehler entspricht daher dem Abstand $\overline{m_i m'_i}$. Allerdings ist die Größe des Interpolationsfehlers im Abbild von Interesse, d.h. die Abstände $\overline{m_i m'_i}$ sind in die Abstände $\overline{M_i M'_i}$ umzurechnen.

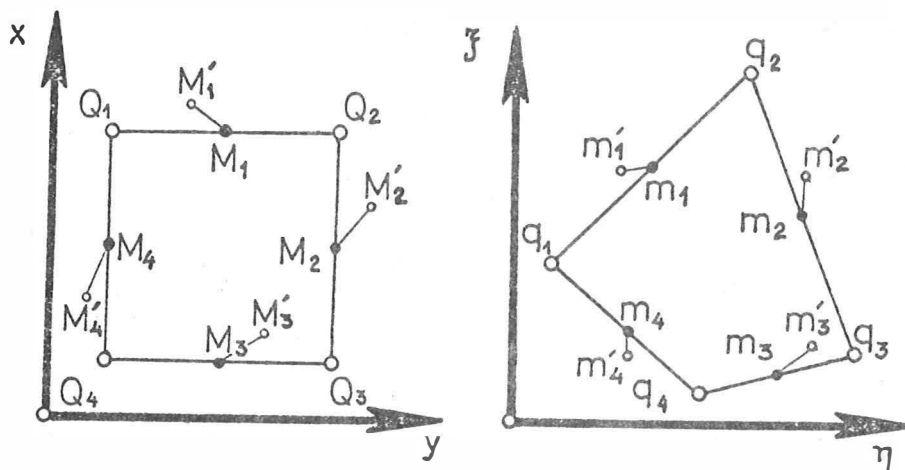


Abb.9.4: Definition des Interpolationsfehlers im Abbild und in der Vorlage

Für die Untersuchung solcher Fehler, die bei der photographischen Umbildung eines dreiachsigen Ellipsoides mit Hilfe eines Polyeders entstehen, wurde ein FORTRAN-Programm entwickelt (Programm ACCUR2, Flußdiagramm im Anhang 9.2), das folgendes leistet:

- Festlegung des zu untersuchenden Kartons (R) im Ellipsoidsystem (X, Y, Z) ,
- Definition eines quadratischen Rasters (Punkte Q_i im Abb.9.4) im ebenen System (x, y, z) des Kartons (R),
- Definition der Seitenmittelpunkte (Punkte M_i im Abb.9.4) im quadratischen Raster,
- Transformation der Raster- und Seitenmittelpunkte von dem

Karton- ins Ellipsoidsystem (Formel 7.7),

- Transformation der Raster- und Seitenmittelpunkte von dem Karton orthogonal auf die Ellipsoidoberfläche (Formeln 8.11-8.15),
- Transformation der Raster- und Seitenmittelpunkte vom Ellipsoid ins Bild (Formel 6.17); die notwendigen Parameter der inneren und äußeren Orientierung der Aufnahme werden vom SORA-Protokoll, das ausschließlich der Herstellung der Kartons entstand, entnommen; die so erhaltenen Bildpunkte sind die Punkte q_i und m'_i im Sinne der Abb.9.4.
- Berechnung der Bildkoordinaten ξ_{m_i}, η_{m_i} der Seitenmittelpunkte m_i im Bild,

- Berechnung des Einflusses des Interpolationsfehlers $\overline{m_i m'_i}$ im umgebildeten Produkt (Orthophoto), d.h. Berechnung von $\overline{M_i M'_i}$:

Es genügt, die Punkte m'_i vom Bild ins Orthophoto (Punkte M'_i) nach dem Arbeitsvorgang des Avioplan zurück zu transformieren. Anhand der Bildkoordinaten ξ_{q_n}, η_{q_n} der vier Eckpunkte $n(=1,2,3,4)$ eines Rasterquadrates und seiner Karton-Koordinaten x_{Q_n}, y_{Q_n} werden die Parameter a_l, b_l ($l=0,1,2,3$) der bilinearen Transformation (4.1) berechnet. Dann müssen wir anhand der bekannten Koordinaten $x_{M'_n}$ und $y_{M'_n}$ ermitteln. Dazu lösen wir -nach einem Vorschlag von Herrn Dipl.-Ing. J. J a n s a- die zweite Gleichung der Beziehungen (4.1) nach y auf:

$$y = (\eta - b_0 - b_1 x) / (b_2 + b_3 x) \quad (9.10)$$

und setzen diesen Wert in die erste Gleichung der Beziehungen (4.1):

$$\begin{aligned} \xi(b_2 + b_3 x) &= a_0(b_2 + b_3 x) + a_1 x(b_2 + b_3 x) + a_2(\eta - b_0 - b_1 x) + a_3 x(\eta - b_0 - b_1 x) \Rightarrow \\ \Rightarrow Ax^2 + Bx + C &= 0 \text{ mit } \begin{cases} A = a_1 b_3 - a_3 b_1, \\ B = (a_1 b_2 - a_2 b_1) + (b_3(a_0 - \xi) - a_3(b_0 - \eta)) \\ C = b_2(a_0 - \xi) - a_2(b_0 - \eta) \end{cases} \end{aligned} \quad (9.11)$$

(9.11) ist eine quadratische Gleichung für x . Sie liefert zwei Lösungen:

$$x_1 = (-B + \sqrt{D}) / (2A) \text{ und } x_2 = (-B - \sqrt{D}) / (2A) \text{ mit } D = B^2 - 4AC \quad (9.12)$$

Die Werte $x_{1,2}$ setzen wir in (9.10) ein und erhalten zwei Lösungspaare (x_1, y_1) und (x_2, y_2) . Als eigentlichen Lösung nehmen wir jenes Lösungspaar, das innerhalb des im (x, y) -System definierten Quadrates liegt.

Ergebnisse dieser Untersuchung sind für das Beispiel des Kapitels 8.5 in den Abb.9.5 und 9.6 angegeben (die Fehlervektoren

beziehen sich auf das Objekt, der Vergrößerungsmaßstab ist also 20:1). Betrachtet man diese Abbildungen, scheinen die Vektoren fehlerhaft und widersprüchlich zu sein. Da die bilineare Interpolation aber für jedes Rasterviereck getrennt erfolgt, beziehen sich die Vektoren jeweils auf das Viereck, in das der Pfeil zeigt. Innerhalb eines Viereckes ändern sich die Verzerrungen nur stetig (Beispiel im Abb.9.5) Die Rasterseiten sind dagegen Unstetigkeitsstellen.

9.4. Bauungenauigkeitsfehler

Bei allen Methoden wurden die Rasterpunkte von der Hilfsfläche auf eine theoretisch bestimmte Fläche projiziert. In Wirklichkeit gibt es aber Abweichungen zwischen der mathematisch definierten Fläche (soll-Fläche) und der Wirklichkeit (ist-Fläche) (Abb.9.7).

Zur Untersuchung solcher Fehler bei der Verebnung eines dreiachsigen Ellipsoides mit Hilfe eines Polyeders wurde ein FORTRAN-Programm (Programm ACCUR3, Flußdiagramm im Anhang 9.3.) entwickelt. Das Programm basiert auf folgenden Überlegungen:

- Festlegung des zu untersuchenden Kartons (R) im Ellipsoidsystem (X, Y, Z) ,
- Definition eines quadratischen Rasters im ebenen System (x, y, z) des Kartons (R),
- Transformation der Rasterpunkte vom Kartonsystem ins Ellipsoidsystem,
- Projektion der Rasterpunkte vom Karton orthogonal auf die Ellipsoidoberfläche,
- Schnitt des Projektionsvektors mit der ist-Fläche:
In Unkenntnis der ist-Fläche wird für die Fehleruntersuchung eine Parallelfäche in einem vorgegebenen Abstand v angenommen, sodaß der Punkt I auf dem Projektionsvektor \overline{PS} in einem Abstand v von S liegt (Abb.9.7). Der Abstand v kann positiv und negativ in das Programm eingegeben werden. Für eine genaue Untersuchung der Fehler infolge Bauungenauigkeit in einem speziellen Fall ist die Kenntnis der tatsächlichen Oberflächenform unbedingt notwendig, die z.B. durch eine Stereoauswertung gewonnen werden könnte.
- Transformation der Punkte S und I in das Bild (die dazu notwendigen Parameter der inneren und äußeren Orientierung werden

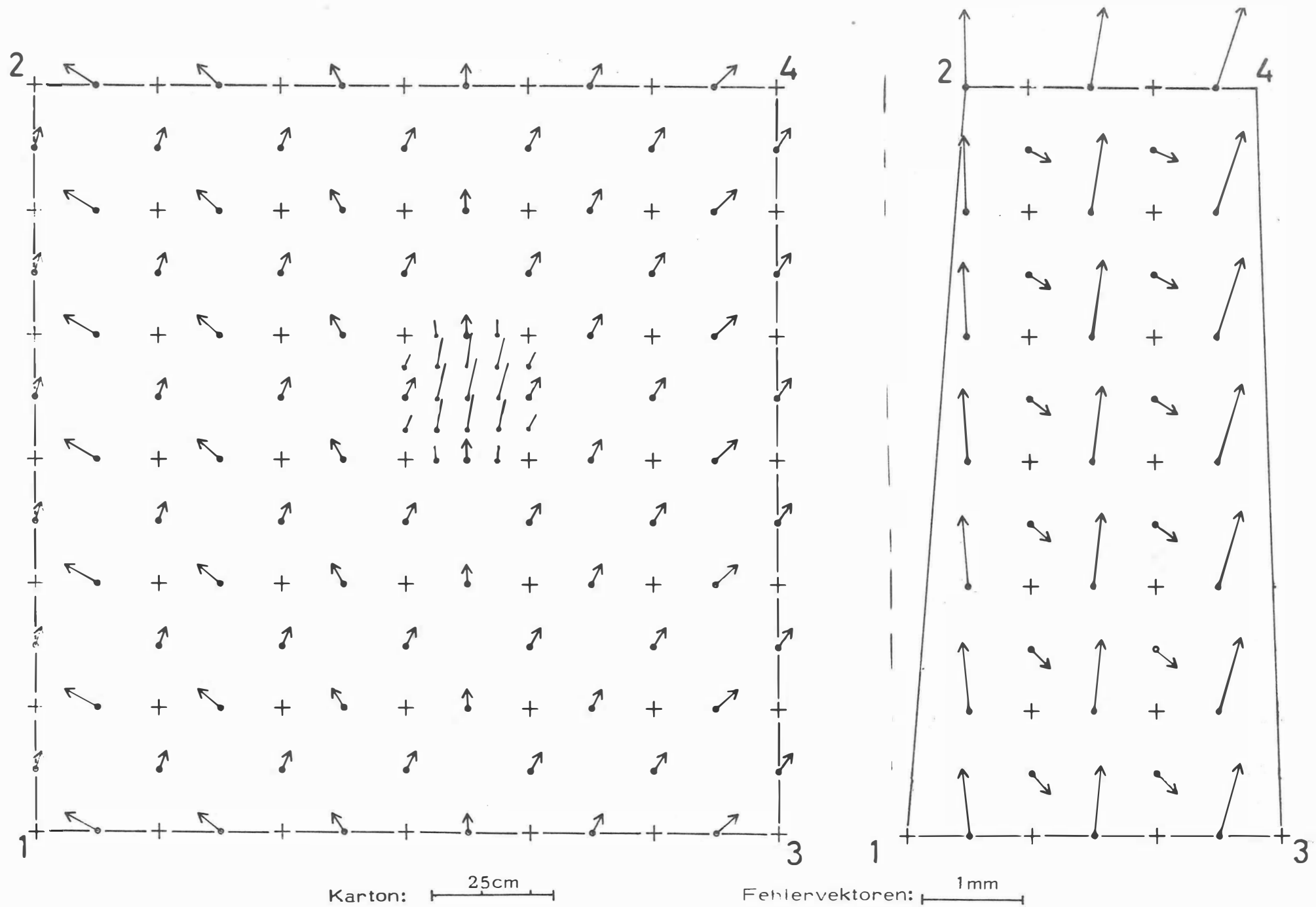


Abb.9.5: Interpolationsfehler für den 1.Karton des ersten (links) und zehnten (rechts) Streifens für das praktische Beispiel des 8.Kapitels

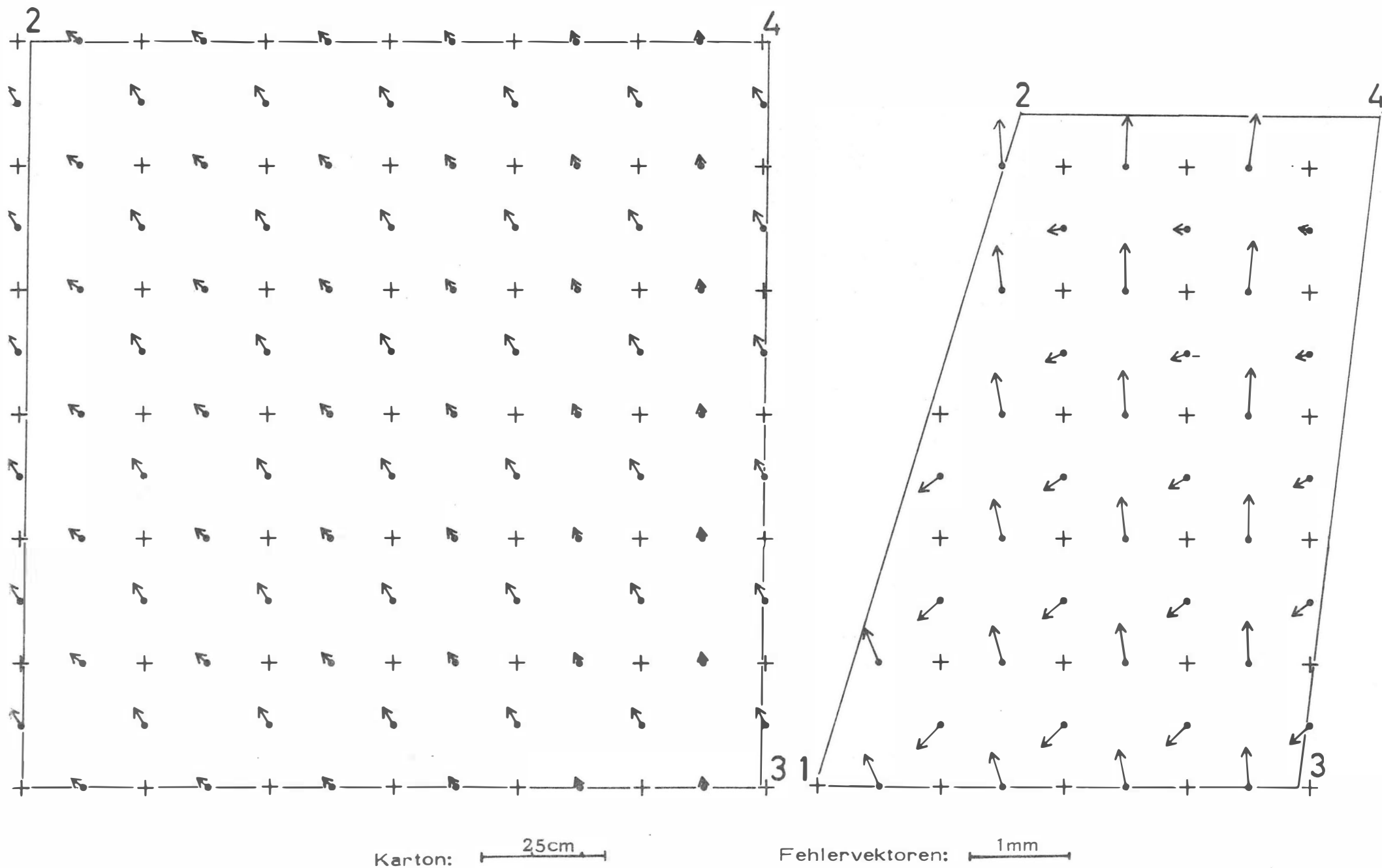


Abb.9.6: Interpolationsfehler für den 5.Karton des ersten (links) und zehnten (rechts) Streifens für das praktische Beispiel des 8.Kapitels

dem SORA-Protokoll, das anlässlich der Herstellung der Kartons entstand, entnommen und Bezeichnung dieser Punkte mit s und i ,

- Berechnung des Einflusses der Bauungenauigkeit \overline{si} auf das Endprodukt der Umbildung (Orthophoto):

Jedem Rasterpunkt entsprechen zwei Bildpunkte i und s . Nach der Umbildung werden die Punkte s die Ecken des quadratischen Rasters. Die Punkte i zeigen die Position der Eckpunkte des Rasters, wenn man an-

statt der soll-Fläche die ist-Fläche genommen hätte. Die Punkte i und s nach der Umbildung bezeichnen wir mit i' und s' . Der Fehler infolge Bauungenauigkeit im Orthophoto ergibt sich dann aus den Strecken $\overline{s'i'}$. Um diese Strecken zu bestimmen, simulieren wir die Arbeitsweise des Avioplans, getrennt für jedes Viereck, mit Hilfe der Formeln (9.10) bis (9.12) der Seite 74. Jeder Punkt i gehört aber zu vier Vierecken. Es ist also unbestimmt, mit welchem Viereck transformiert werden soll. Um diese Unbestimmtheit zu umgehen, werden wir den Punkt i in jenem Viereck transformieren, in welchem er ein innerer Punkt ist.

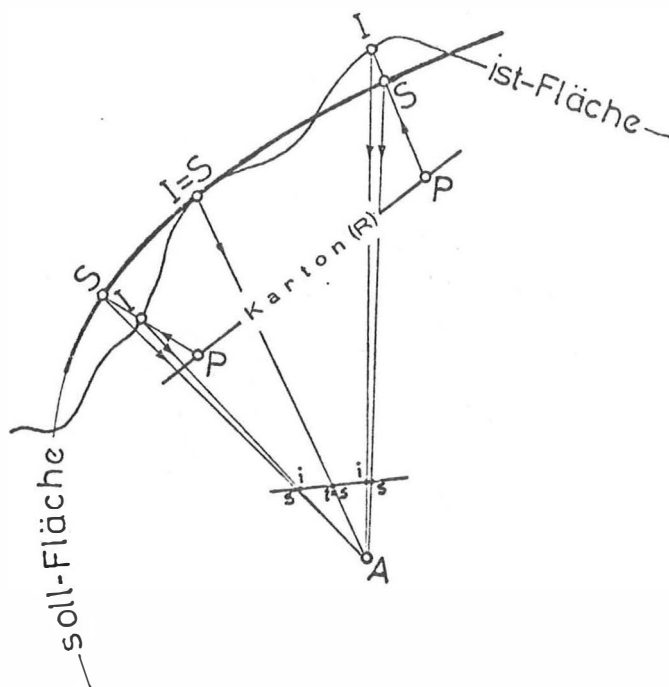


Abb.9.7: Bauungenauigkeit

Ergebnisse dieser Genauigkeitsuntersuchung sind in Abb.9.8, für das praktische Beispiel des Kapitels 8.5 veranschaulicht.

Karton		1	3	5	Ellipsoidparameter (m): Karton (m):	
Streifen	1	1.726	1.025	1.313	a=14.08, b=9.45, c=16.12	S=1.50
	3	1.902	1.143	2.744	A u f n a h m e:	
	5	2.150	1.873	1.873	$X_0=10.25, Y_0=7.83, Z_0=1.32$ (m)	
	7	2.384	1.675	1.935	$\omega=23.4831, \varphi=18.2642, \kappa=1.8391$ (g)	
	9	2.922	2.149	2.047	B a u u n g e n a u i g k e i t:	
					$v = 5$ (cm)	

Abb.9.8: Größter Fehler (in cm) infolge Bauungenauigkeit für 3 Kartons des 1., 3., 5., 7. und 9. Streifens des praktischen Beispiels 8.5.

10. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Mit dieser Arbeit wurde die Anwendung der Differentialumbildung auf die Verebnung nichtabwickelbaren Flächen erweitert. Die bisher in der Photogrammetrie als Projektionsfläche verwendete Bezugsebene wurde durch abwickelbare Flächen ersetzt.

Die Möglichkeit der rechnerischen Bestimmung der Parameter der äußeren und eventuell auch der inneren Orientierung aus Paßpunkten erleichtert die Aufnahmeplanung. Es muß weder der Aufnahmeort noch die Aufnahmerichtung an Ort und Stelle genau festgelegt werden.

Die Objektoberfläche wird durch geschlossene mathematische Beziehungen erfaßt. Die Parameter dieser Beziehungen können in der Regel aus einigen Paßpunkten ermittelt werden. Im allgemeinen werden deshalb keine Stereo- sondern nur Monoaufnahmen gemacht. Die Wirkungsweise der Methode konnte anhand praktischer Beispiele demonstriert werden. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß

- das umgebildete photographische Produkt eine sehr gute Bildqualität besitzt,
- sowohl Schwarzweiß- als auch Farbaufnahmen umgebildet werden können,
- während des Umbildungsvorganges keine Dunkelkammer benötigt wird,
- durch Verkleinerung des Rasters auf der Projektionsfläche die Genauigkeit beliebig gesteigert werden kann,
- sowohl Meß- als auch Amateuraufnahmen verwendet werden können, und
- sie wesentlich wirtschaftlicher ist als ein auf der digitalen Bildverarbeitung fußendes Verfahren.

Die Durchführung praktischer Beispiele zeigt nur einen kleinen Teil der möglichen Anwendungsbereiche. Es wäre z.B. denkbar, mit diesem Verfahren aus Satellitenbildern auch Globen oder Karten in den gängigen Projektionen der Atlanten herzustellen. Es ist jedoch zu bedenken, daß für alle Umbildungen dieser Art die Installation des zweiten Teiles des Programmes SORA-OP notwendig ist und ein Differentialumbildegerät Avioplan-OR1 zu Verfügung stehen muß.

11. LITERATUR

- /1/ ACKERMANN, F.; SCHFIDEFSKY, K. Photogrammetrie, B.G.Teubner, Stuttgart 1976
- /2/ ALBERTZ, J.; KREILING, W. Photogrammetrisches Taschenbuch, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe 1975
- /3/ BAEHR, H.-P. Digital Rectification of a Facade, Presented Paper, ISP Kongress, Comission III, Moscow 1978
- /4/ BLASCHKE, W. Analytische Geometrie, Mathematische Reihe, Band 16, Verlag Birkhäuser, Stuttgart 1954
- /5/ BOZ IKHE, E. Φωτογραφικά άναπτύγματα κανονικών επιφανειών, Τριμ. έπιστημ. έκδοση Τ.Ε.Ε., Τεύχος 4, 'Αθήνα 1978
- /6/ BRONSTEIN, I.; SEMENDJAJEW, K. Taschenbuch der Mathematik, Leipzig 1969
- /7/ ΔΑΣ ΚΑΛΟΠΟΥΛΟΣ, Δ. Έφηρεοσμένη Γραμμική Άλγεβρα, Τεύχος 1 και 2, 'Αθήνα 1972
- /3/ ΔΑΣ ΚΑΛΟΠΟΥΛΟΣ, Δ. Άνώτερα Μαθηματικά, 'Αθήνα 1972
- /9/ ΔΑΣ ΚΑΛΟΠΟΥΛΟΣ, Δ. Γενικά Μαθηματικά, 'Αθήνα 1972
- /10/ ELLMIGER, A. ALGOL-Programm NETZ-3D, Mitteilungen des Institutes für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH Zürich, Version 1975
- /11/ KOHLER, A. Die Verebnung von Globen-eine neue Methode zur Lösung eines alten Problemes, der Globusfreund, Nr.25-27, Wien 1978
- /12/ KRAUS, K. Anwendungsmöglichkeit eines digital gesteuerten Differentialumbildeggerätes, Geowiss.Mitteilungen der TU Wien, Heft Nr.8, 1976, engl.: Applications of a digitally-controlled Orthophoto Instrument, Presented Paper, XIII. ISP Congress, Helsinki 1976
- /13/ KRAUS, K. Wild Aviopaln-OR1 löst Spezialaufgaben, Wild Reporter, 12:10-11
- /14/ KRAUS, K; TSCHANNERL, J. Zur photographischen Entzerrung abwickelbarer Regelflächen, BuL, 168-170, 1976 oder Architektur-

- Photogrammetrie III, Arbeitsheft 18 des Landes-
konservators Rheinland, 117-12, 1977
- /15/ KRAUS, K.;
VOZIKIS, E. Die Verebnung von Globen mit Hilfe der Diffe-
rentialumbildung, der Globusfreund, Nr.25-27,
55-61, Wien 1978
- /16/ ΛΑΔΟΙΟΥΔΟΣ, . Στοιχεία Προβολικής Γεωμετρίας, Τόμος 1 και 2,
'Ελληνική Μαθηματική Βιβλιοθήκη, 'Αθήνα 1971
- /17/ OTEPKA, G.;
LOITSCH, J. Ein Programm zur digital gesteuerten Orthopho-
toproduktion, Geowiss. Mitteilungen der TU Wien,
Heft 8, 1976; engl.: A Computer Programm for
Digitally-Controlled Production of Orthophotos,
Presented Paper, XIII. ISP Congress, Helsinki 1976
- /18/ OTEPKA, G. Praktische Erfahrungen bei der Rektifizierung von
MSS-Bildern, Geowiss. Mitteilungen der TU Wien,
Heft 8, 1976; engl.: Practical experiences in
the rectification of MSS-Images, Presented Pa-
per, XIII. ISP Congress, Helsinki 1976
- /19/ SEEGER, E. Orthophotography in Architectural Photogrammetry,
Invited Paper, XIII ISP Congress, Helsinki 1976
- /20/ SEEGER, E. Das Orthophotofervahren bei der Bauaufnahme am
Beispiel Schloß Linderhof, BuL, Heft 5, 1974
- /21/ SITEK, Z. Experience with the Application of Orthophotos
in Architecture, Presented Paper, XIII. ISP
Congress, Helsinki 1976
- /22/ STEPHANI , M. Problemstellungen und Leistungsmerkmale der
Architekturphotogrammetrie dargestellt am Bei-
spiel der Kirche "IL GESU" Rom, Presented Pa-
per, V. CIPA Congress, Sibenik 1978
- /23/ STEWARDSON, P. The Wild Avioplan-OR1 Orthophoto System, Pre-
sented Paper, XIII. ISP Congress, Helsinki 1976
- /24/ TASCHNER, R. Differentialgeometrie für Geodäten, Manz Verlag,
Wien 1978
- /25/ VOZIKIS, E.;
KRAUS, K. Zur photographischen Verebnung von Kuppeln, Pre-
sented Paper, V. CIPA Congress, Sibenik 1978

- /26/ VOZIKIS, E. Photographic Way of laying out elliptical cou-
polas, Presented Paper, V. ICAP Congress, Cra-
cow 1979
- /27/ VOZIKIS, E. Differential Rectification of oblique photo-
graphs of plane objects, Photogrammetria, 35
(1979)81-91, Amsterdam
- /28/ WAGNER, K. Kartographische Netzentwürfe, Bibliographisches
Institut Mannheim, 1972
- /30/ ZURMÜHL, R. Matrizen und ihre technischen Anwendungen, Sprin-
ger Verlag, Berlin 1964

12. ANHÄNGE

12.1. Anhang 5.1

Beweis, daß bei einem Ellipsoid $a'_{00} \neq 0$ ist:

(5.1) kann in Matrizenschreibweise wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a'_{00} & a'_{01} & a'_{02} & a'_{03} \\ a'_{01} & a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{02} & a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{03} & a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = X^T W X = 0$$

Laut /4/ muß bei einem Ellipsoid die Determinante $|W| \neq 0$ sein.
Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} & a'_{00} \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix} + a'_{01} \begin{vmatrix} a'_{01} & a'_{02} & a'_{03} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix} + a'_{02} \begin{vmatrix} a'_{01} & a'_{02} & a'_{03} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix} + \\ & + a'_{03} \begin{vmatrix} a'_{01} & a'_{02} & a'_{03} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (12.1)$$

Die Koeffizienten a'_{01} , a'_{02} und a'_{03} können durchaus Null werden, z.B. wenn der Koordinatenursprung mit dem Mittelpunkt des Ellipsoides zusammenfällt und die Koordinatenachsen in den Hauptachsen des Ellipsoides liegen (siehe Gleichung (5.8)). Andererseits muß bei einem Ellipsoid die bei a'_{00} stehende Unterdeterminante ungleich Null sein /4/. Damit ist bewiesen, daß a'_{00} bei einem Ellipsoid immer von Null verschieden sein muß.

12.2. Anhang 5.2

Geometrische Interpretation der bei dem Ausgleich des Kapitels 5.1. (Formeln (5.4) bis (5.6)) angesetzten Restfehler v_i :

Die Verbesserungen der Ausgleichung mit den Paßpunktkoordinaten (X, Y, Z) im Ellipsoidsystem wurden am Ende des Abschnittes 5.2. mit u_i bezeichnet. Sie ergeben sich für den Punkt P_i aus:

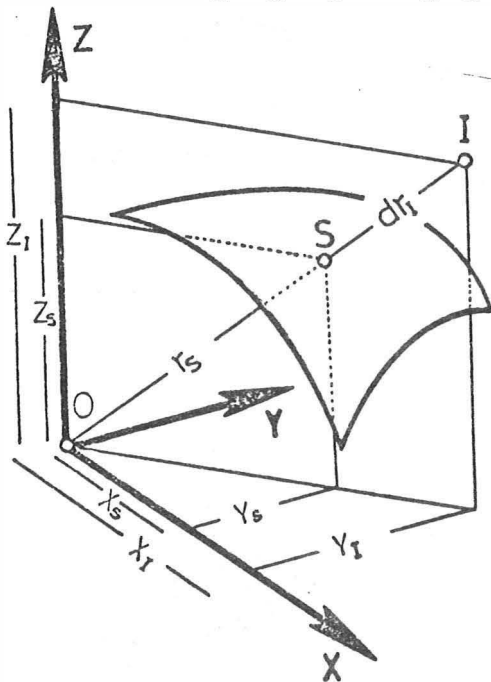
$$\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} + \frac{z_i^2}{c^2} = 1 + u_i \quad (12.3)$$

Der Punkt P_i liegt nicht auf dem Ellipsoid. Ein Punkt P_s , der gegenüber P_i um (DX, DY, DZ) verschoben ist, liegt auf dem Ellipsoid, wenn folgende Gleichung gilt:

$$\frac{x_s^2}{a^2} + \frac{y_s^2}{b^2} + \frac{z_s^2}{c^2} = 1 \quad (12.4)$$

Ersetzen wir in (12.3) $x_s = x_i - DX$, $y_s = y_i - DY$, $z_s = z_i - DZ$, so ergibt sich:

$$\frac{x_s^2}{a^2} + \frac{y_s^2}{b^2} + \frac{z_s^2}{c^2} + 2\left(\frac{x_s DX}{a} + \frac{y_s DY}{b} + \frac{z_s DZ}{c}\right) + \frac{DX^2}{a^2} + \frac{DY^2}{b^2} + \frac{DZ^2}{c^2} = 1 + u_i \quad (12.5)$$



Wenn die Punkte P_i , P_s und O (O ist der Ellipsoidmittelpunkt) in einer Geraden liegen, dann gilt (Abb.12.1):

$$\frac{x_s}{DX} = \frac{y_s}{DY} = \frac{z_s}{DZ} = \frac{r_s}{dr} \quad (12.6)$$

(12.6) in (12.5):

$$\frac{dr_i^2}{r_s^2} \left(\frac{x_s^2}{a^2} + \frac{y_s^2}{b^2} + \frac{z_s^2}{c^2} \right) + 2 \frac{dr_i}{r_s} \left(\frac{x_s DX}{a} + \frac{y_s DY}{b} + \frac{z_s DZ}{c} \right) = u_i \quad (12.7)$$

Abb.12.1: Interpretation der Verbesserungen

mit (12.4) und $dr_i = r_i - r_s$ folgt:

$$\begin{aligned} r_i^2 / r_s^2 - 1 = u_i &\implies r_s^2 = r_i^2 / (1 + u_i) \\ \text{wobei } r_i &= \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \end{aligned} \quad (12.8)$$

Mit Beschränkung auf Glieder 1.Ordnung bekommt man:

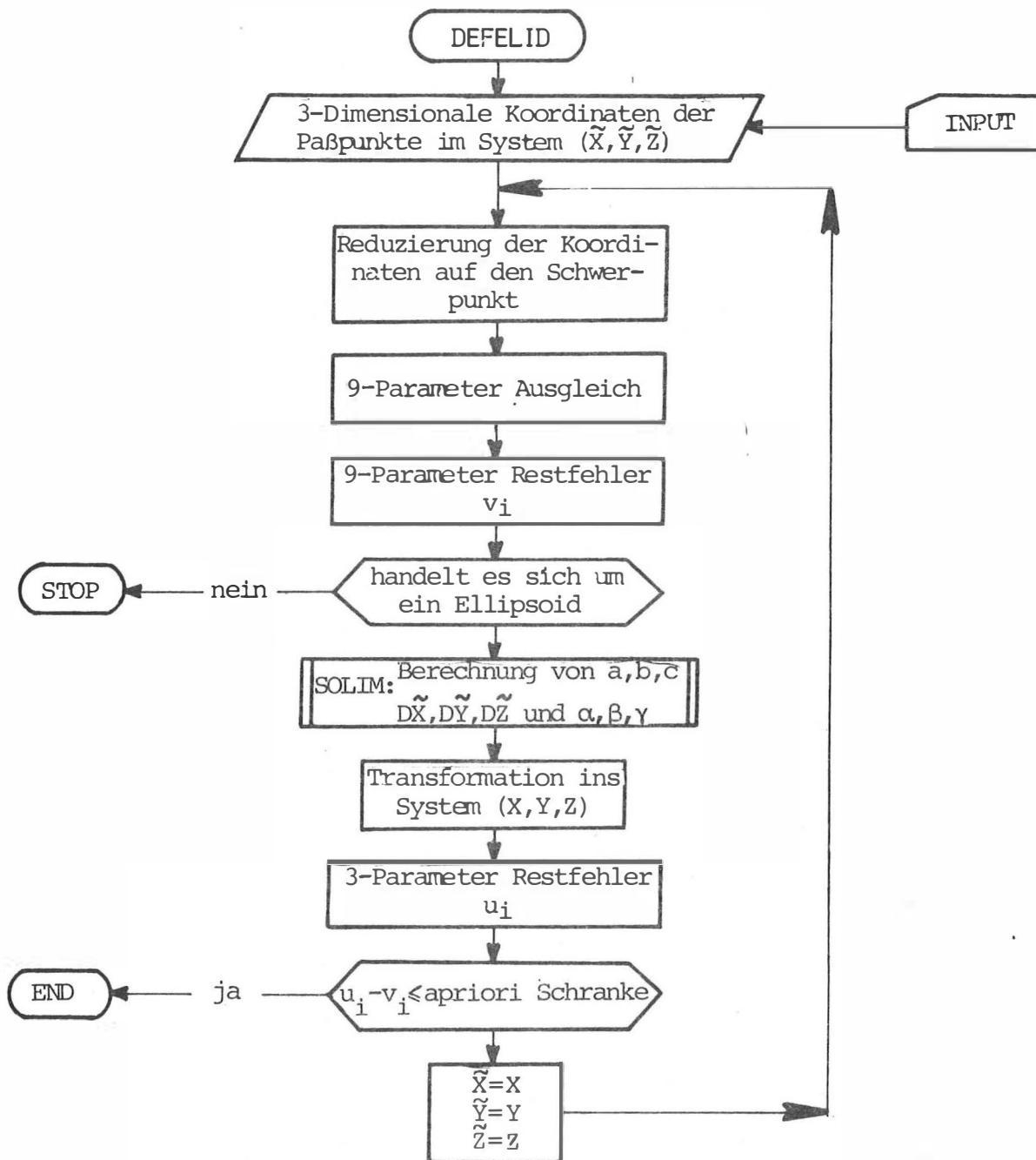
$$r_i^2 - 2r_i dr_i \approx r_i^2 (1 - u_i) \implies dr_i \approx \frac{1}{2} r_i u_i \quad (12.9)$$

Ergebnis:

- a) Ist die zu bestimmende Fläche eine Kugel, ist der Ausgleich mit den Verbesserungen u_i eine strenge Ausgleichung, d.h. die Abstände der Paßpunkte gegenüber der Kugel werden in der Quadratsumme ein Minimum. Die Faktoren $\frac{1}{2} \cdot r_i$ sind für alle Punkte gleich und deshalb im Ausgleich wirkungslos. Mit Hilfe von (12.9) können nach dem Ausgleich aus den u_i die Abstände dr_i berechnet werden.
- b) Je mehr das Ellipsoid von der Kugel abweicht, desto mehr wird der Ausgleich mit den Verbesserungen u_i ein Näherungsverfahren. Die Abhängigkeit der Verbesserungen u_i von r_i könnte man aber dadurch kompensieren, daß man "Gewichte" $p=r_i^2$ einführt. Mit diesen "Gewichten" würden die Verbesserungen des Ausgleichs -abgesehen von einem konstanten Faktor- den Abschnitten dr_i auf der Verbindungslinie $\bar{O}\bar{I}$ entsprechen. Ein Ausgleich, in dem nicht diese Abschnitte dr_i sondern die Ellipsoidabstände minimiert werden, könnte man ebenfalls durch Einführung entsprechenden "Gewichte" berücksichtigen
- c) Insgesamt ist aber festzustellen, daß sich die Näherungsausgleichung mit den Verbesserungen u_i von einem strengen Ausgleich nur durch "Gewichte" unterscheidet, die bekanntlich nur einen geringen Einfluß auf die Genauigkeit des Endresultates haben.

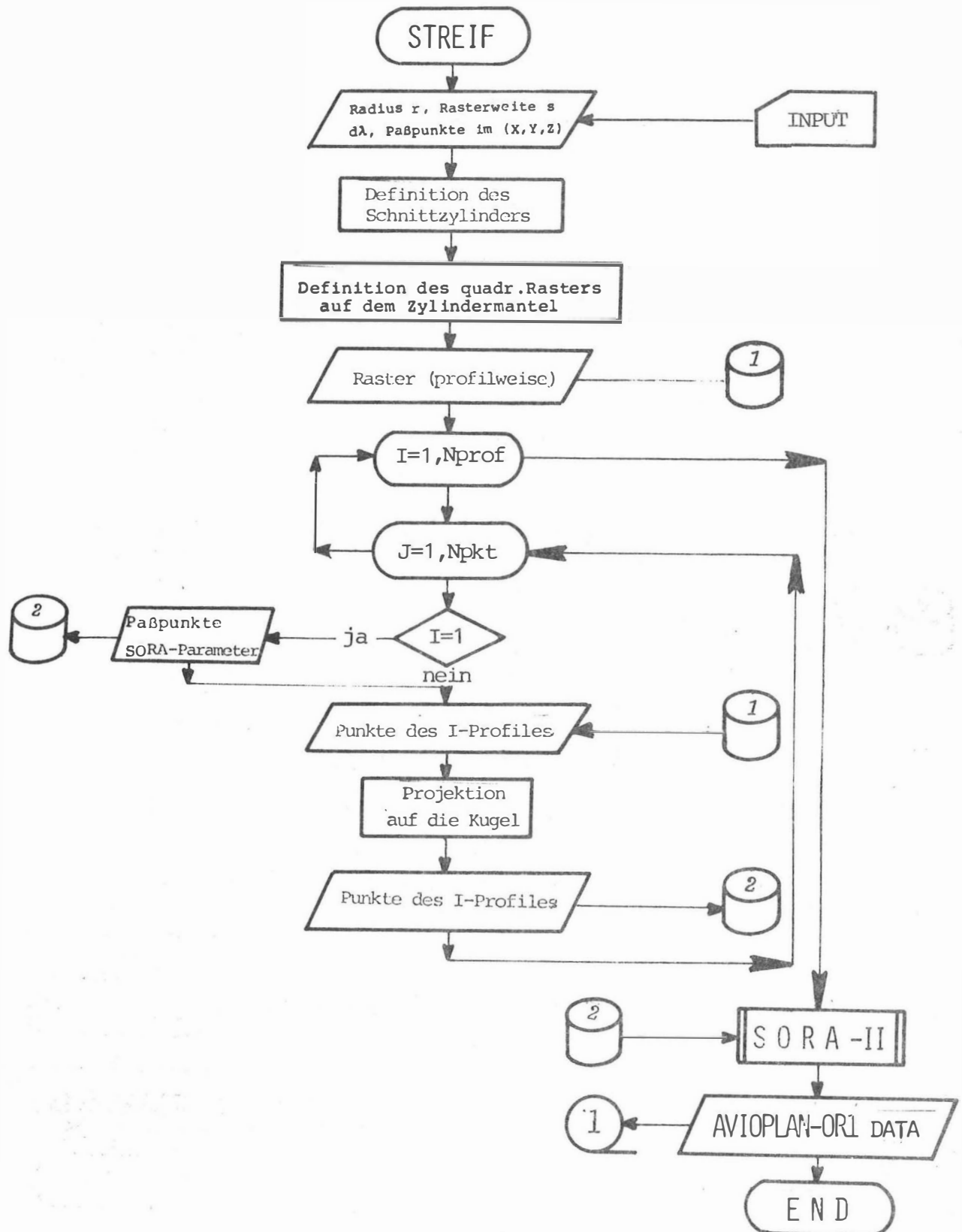
12.3. Anhang 5.3

Flußdiagramm zum Programm DEFELID:



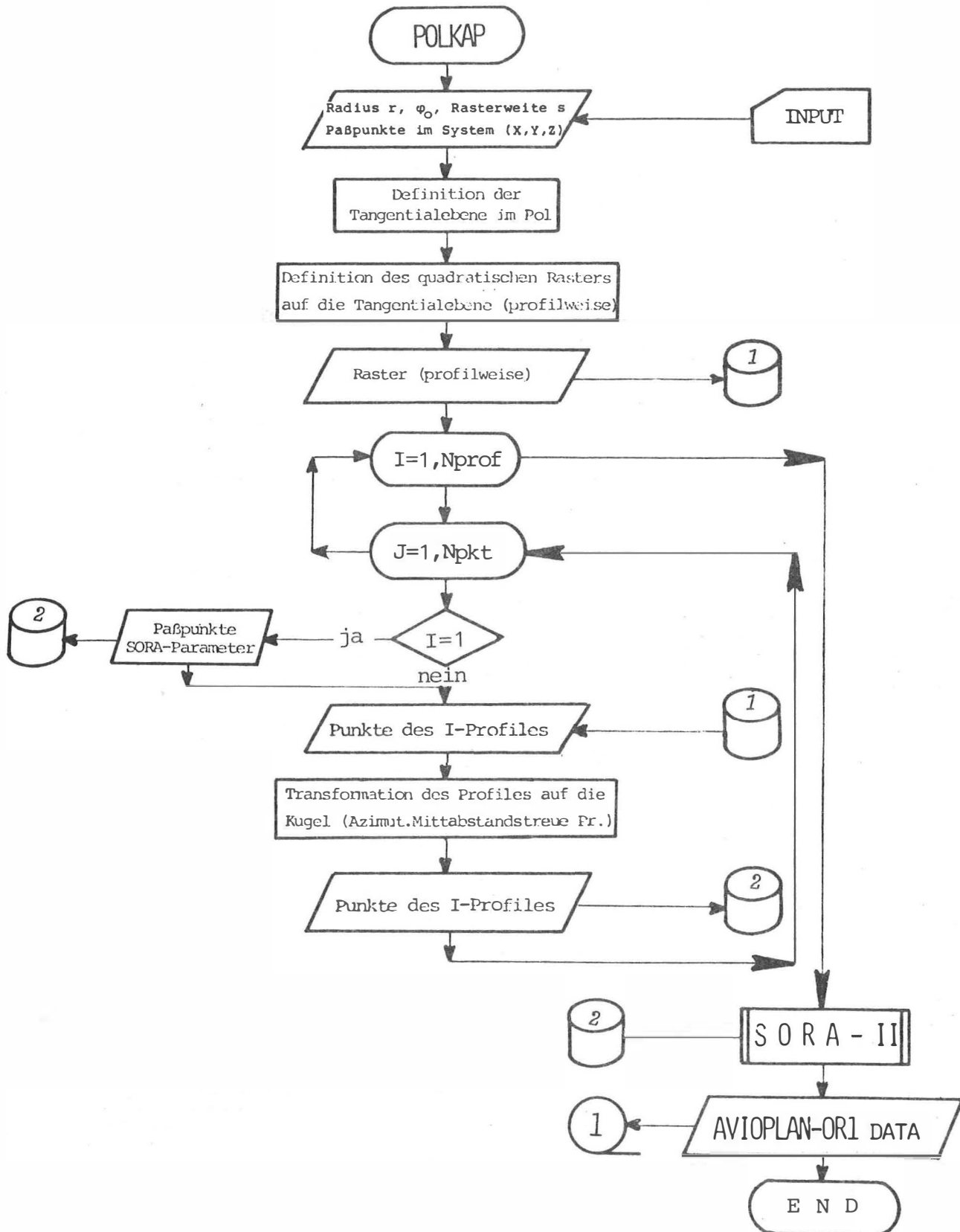
12.4. Anhang 6.1

Flußdiagramm zum Programm STREIF:



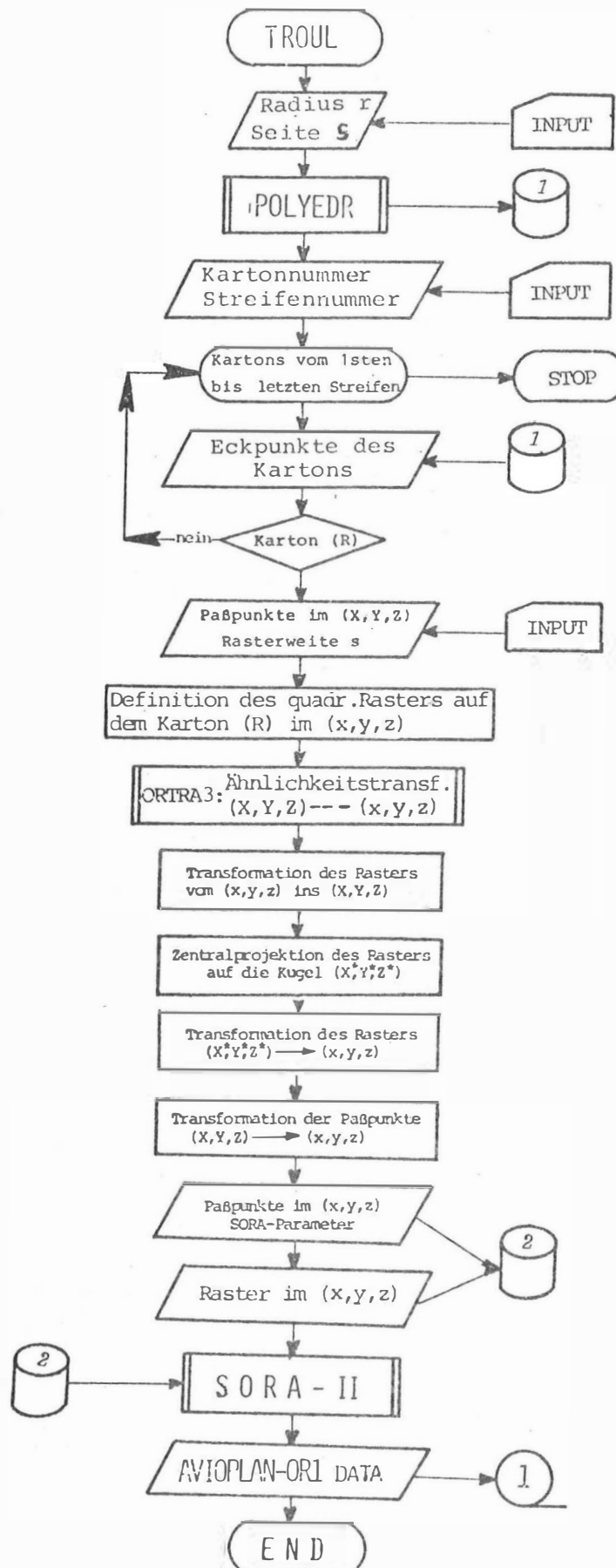
12.5. Anhang 6.2

Flußdiagramm zum Programm POLKAP:



12.6. Anhang 7.1

Flußdiagramm zum Programm TROUL:



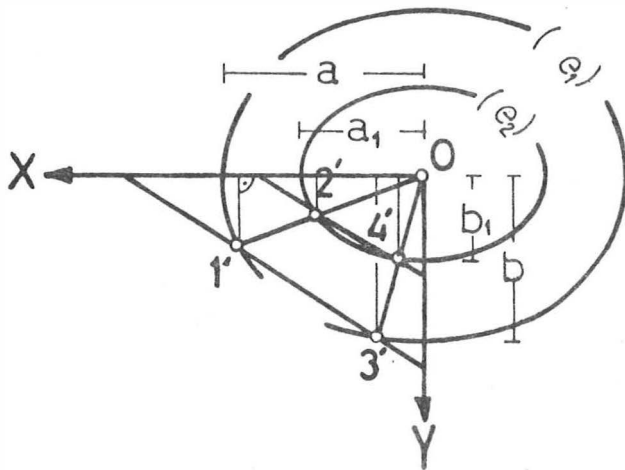
12.7. Anhang 8.1

Beweis, daß die vier Schnittpunkte der Ellipsen (h_i) , (h_{i+1}) , (z_j) und (z_{j+1}) in einer Ebene liegen:

Es genügt zu beweisen, daß sich die Richtungen $\overline{12}$ und $\overline{34}$ in einem Punkt schneiden. Ein eventueller Schnittpunkt kann nur auf der Z-Achse liegen.

Es ist ausreichend, den Beweis mit folgenden vier Punkten zu führen:

$$1: (X_1, Y_1, 0), 2: (X_2, Y_2, Z_2), 3: (X_3, Y_3, 0), 4: (X_4, Y_4, Z_4) \quad (12.10)$$



Die Grundriß-Projektion der vier Eckpunkte 1, 2, 3 und 4 auf die XY-Ebene haben wir mit 1', 2', 3' und 4' bezeichnet. Die Richtungen $\overline{1'2'}$ und $\overline{3'4'}$ schneiden sich im Ellipsenmittelpunkt. Zur Klärung der Frage, ob die Seiten $\overline{1'3'}$ und $\overline{2'4'}$ parallel sind, machen wir folgende Ableitung:

$$\begin{aligned} \text{Ellipse } (a,b): x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1 &\Rightarrow x = (a/c) \sqrt{c^2 - z^2} \\ \text{Ellipse } (b,c): y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 &\Rightarrow y = (b/c) \sqrt{c^2 - z^2} \end{aligned} \quad (12.11)$$

Setzen wir für X die Halbachse a_1 und für Y die Halbachse b_1 , so erhalten wir:

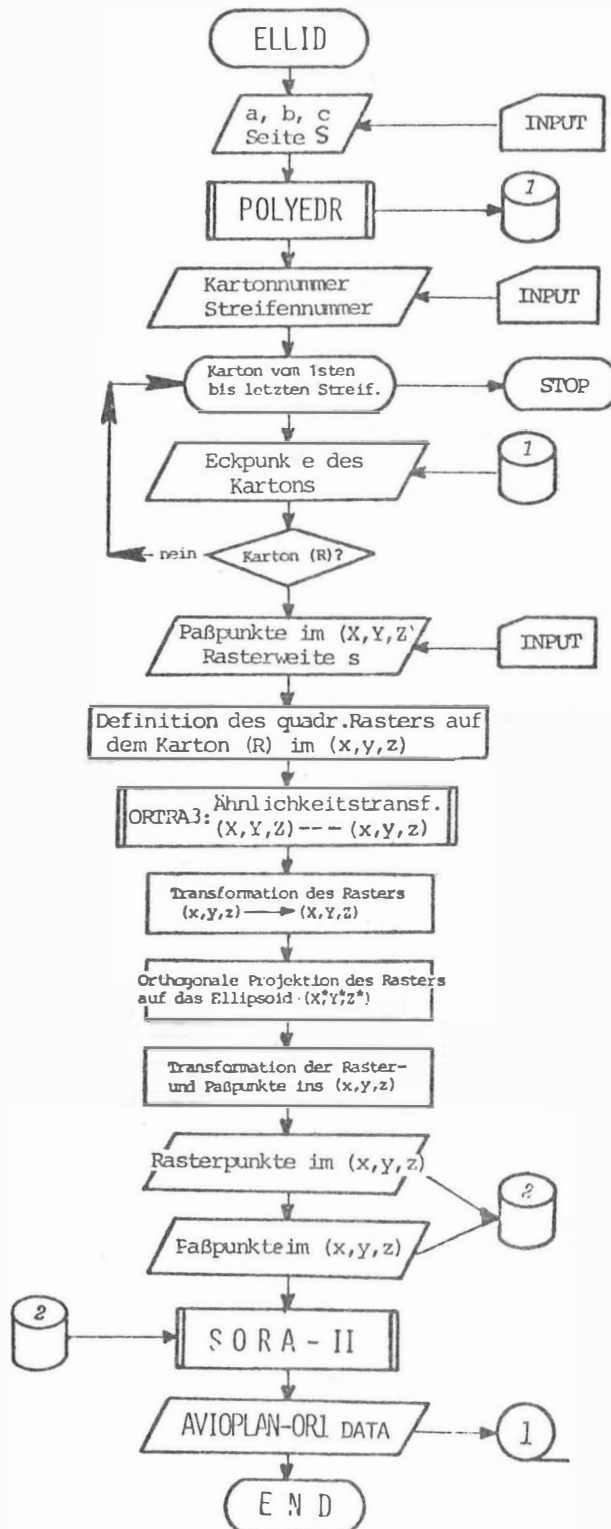
$$a_1 = (a/c) \sqrt{c^2 - z_a^2}, \quad b_1 = (b/c) \sqrt{c^2 - z_b^2} \quad (12.12)$$

Da $z_a = z_b$, ist die Ellipse (e_2) eine maßstäbliche Verkleinerung der Ellipse (e_1) . Durch eine Verkleinerung bleiben die Richtungen aber erhalten, d.h. die Richtung $\overline{1'3'}$ ist parallel zur Richtung $\overline{2'4'}$. Andererseits liegen die Geraden $\overline{13}$ und $\overline{24}$ in zwei parallelen Ebenen im Anstand $z_a = z_b$. Infolgedessen liegen die beiden Seiten

$\overline{13}$ und $\overline{24}$ in einer Ebene und sie sind zueinander parallel, was zu beweisen war.

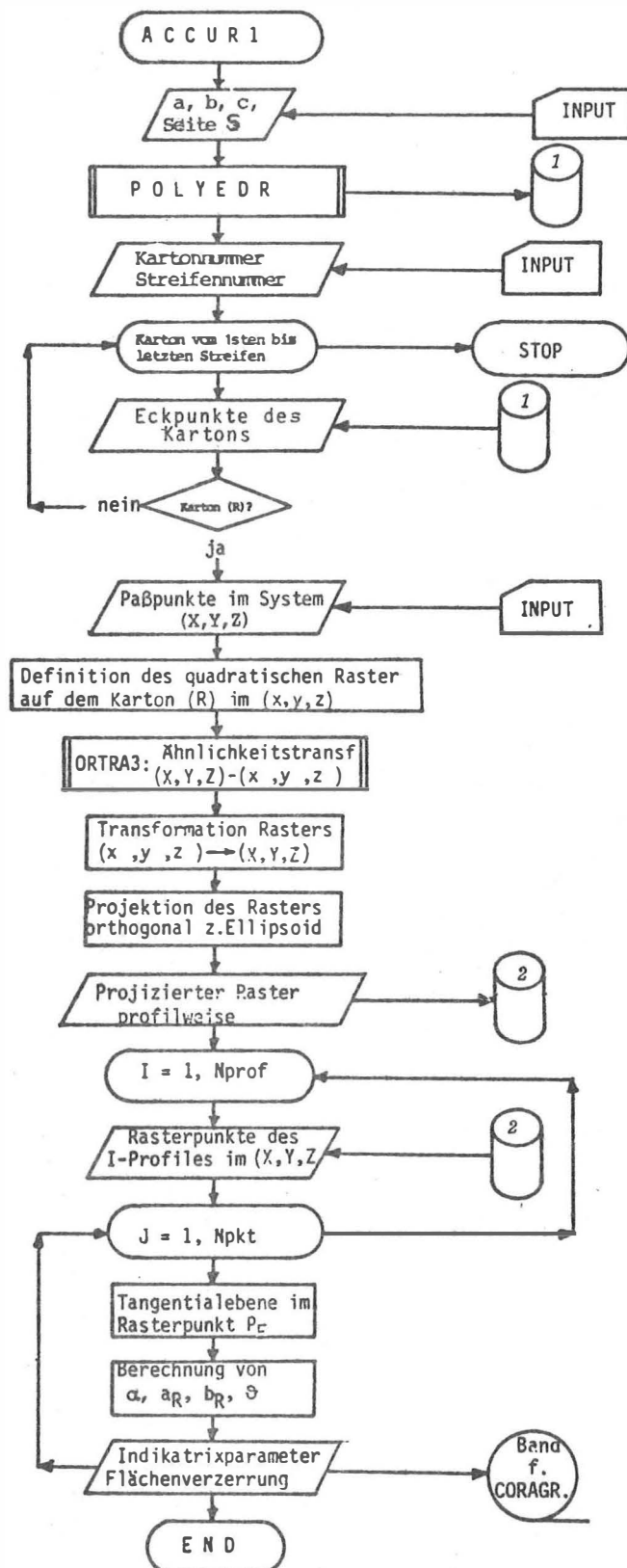
12.8. Anhang 8.2

Flußdiagramm zum Programm ELLID:



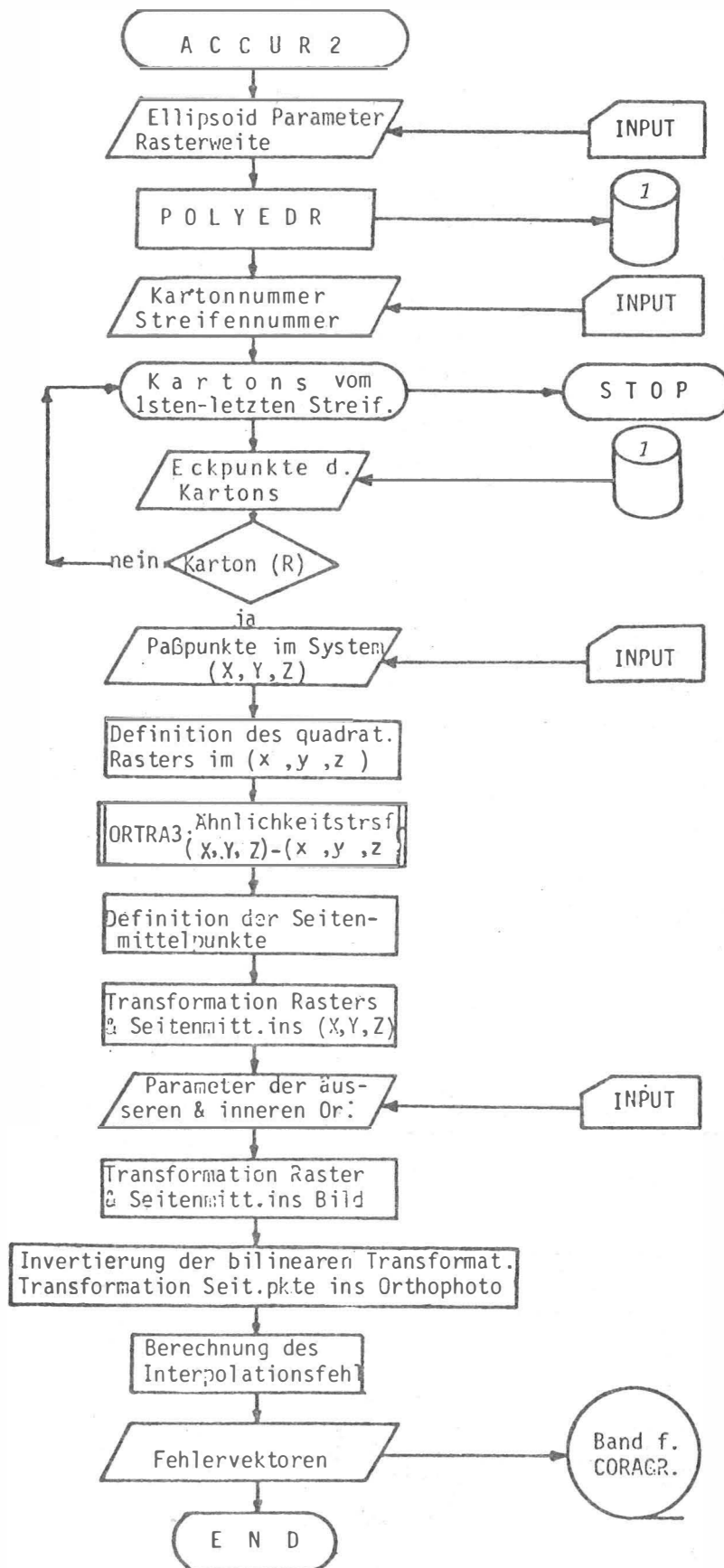
12.9. Anhang 9.1

Flußdiagramm zum Programm ACCUR1:



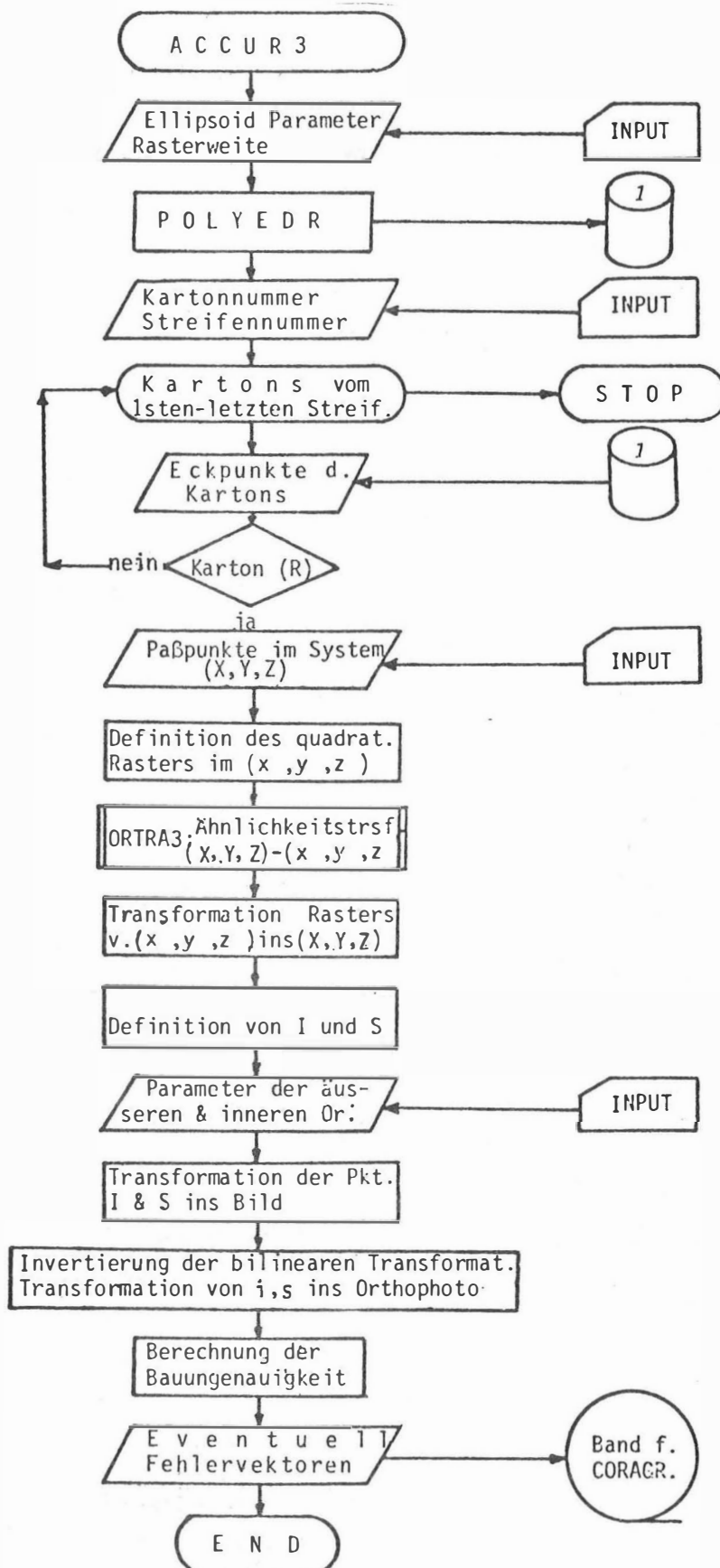
12.10. Anhang 9.2

Flußdiagramm zum Programm ACCUR2



12.11. Anhang 9.3

Flußdiagramm zum Programm ACCUR3:



Evangelos VOZIKIS

LEBENS LAUF

- 1954 Evangelos VOZIKIS, geboren am 18.3.1954 in Itea-Parnassidos (Griechenland); Eltern: Georgios VOZIKIS, Maria VOZIKI (geb. BOURAZANI).
- 1960-1966 Besuch der Volksschule in Itea.
- 1966-1969 Besuch des Gymnasiums in Amfissa (Parnassis).
- 1967 Einjähriges Stipendium des Bundeslandes Fokis.
- 1969-1972 Besuch des Lyceums in Piräus.
- 1972 Preis der griechischen mathematischen Gesellschaft (E.M.E.) nach der panhellenischen Prüfung 1972.
- 1972 Aufnahmeprüfung für die griechischen Universitäten.
- 1972-1976 Studium an der NTU (National Technical University) in Athen.
- 1976 Dipl.-Ing. für Agronomie und Vermessungswesen.
- 1976 Preis der griechischen Arbeiter- und Angestellten-organization, für die Beendigung des Studiums im kürzesten Zeitraum, als arbeitender Student.
- seit 1977 Freier Mitarbeiter des Institutes für Photogrammetrie der TU Wien.
- 1977-1979 Stipendiat des Österreichischen Ministeriums für Wissenschaft und Forschung.

Ich bin verheiratet mit Elfriede VOZIKIS, geb.KRANS. Wir haben zwei Kinder. Seit 1976 bin ich in Österreich und seit 1978 habe ich unbefristete Aufenthaltsgenehmigung in Österreich.

Bisher erschienen:

- Heft 1 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1970 - 1973, Dezember 1973.
- Heft 2 EGGER-PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Taschenrechner HP 45 und HP 65, Programme und Anwendung im Vermessungswesen, 1. Auflage, März 1974, Special Edition in English, Juli 1974, 2. verbesserte Auflage, November 1974.
- Heft 3 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1973 - 1974, September 1974.
- Heft 4 EGGER-PALFINGER-PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Tektronix-Tischrechner TEK 31, Programmbibliothek für den Einsatz im Vermessungswesen, November 1974.
- Heft 5 K. LEDERSTEGGER, Die horizontale Isostasie und das isostatische Geoid, Februar 1975.
- Heft 6 F. REICHHART, Katalog von FK4 Horrebow-Paaren für Breiten von $+ 30^{\circ}$ bis $+ 60^{\circ}$, Oktober 1975.
- Heft 7 Arbeiten aus dem Institut für Höhere Geodäsie, Wien, Dezember 1975.
- Heft 8 Veröffentlichungen des Instituts für Photogrammetrie zum XIII. Internationalen Kongreß für Photogrammetrie in Helsinki 1976, Wien, Juli 1976.
- Heft 9 Veröffentlichung des Instituts für Kartographie und Reproduktionstechnik, W.PILLEWIZER, Felsdarstellung aus Orthophotos, Wien, Juni 1976.
- Heft 10 PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Der Einsatz des programmierbaren Taschenrechners Texas Instruments SR-52 mit Drucker PC-100 in der ingenieurgeodätischen Rechentechnik, Wien, Mai 1976.
- Heft 11 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1974 - 1976, November 1976.
- Heft 12 Kartographische Vorträge der Geodätischen Informationstage 1976, Wien, Mai 1977.
- Heft 13 Veröffentlichung des Instituts für Photogrammetrie anlässlich des 80. Geburtstages von Prof. Dr.h.c. K. Neumaier, Wien, Januar 1978.

- Heft 14 L.MOLNAR, Self Checking Analytical Relative Orientation and Strip Formation, Wien, Dezember 1978.
- Heft 15 Veröffentlichung des Instituts für Landesvermessung anlässlich des 80. Geburtstages von Prof. Dr. Alois Barvir, Wien, Januar 1979, (z. Z. im Druck).
- Heft 16 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1976 - 1979, Wien, November 1979.