



---

# Modellierung und Regelung von hydraulischen Aktorsystemen mit langen Druckleitungen

## DIPLOMARBEIT

Ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines  
Diplom-Ingenieurs (Dipl.-Ing.)

unter der Leitung von

Associate Prof. Dr.Ing. W. Kemmetmüller  
Dipl. Ing. Lukas Marko

eingereicht an der

Technischen Universität Wien  
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik  
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

von

Christopher Pietschnig  
Matrikelnummer 1125819  
Kinzerplatz 10-11/6/1  
1210 Wien  
Österreich

Wien, im Juli 2018

# Abstract

Content of this work is the mathematical modelling and controlling of a hydraulic system, consisting of a valve, long pipelines and a cylinder. In most works, the influence of the pipelines is neglected. However, with increasing length of the pipes, effects like damping, reflections and delays get a significant influence on control behaviour.

In the first part of this thesis, a mathematical model of the considered system is prepared. Starting from the partial differential equations, which describe the pipelines, reduced models are created by means of spatial discretization with the spectral element method (SEM). These models are compared with the method of characteristics (MOC). The behaviour of the system, with and without pipelines, is shown by simulation. These models form the basis of the control strategy and the simulative test.

The first considered control strategy is based on exact input output linearisation of the system. The controller is implemented for the system without pipelines and its robustness is proved. It is shown that this controller concept is working stable only for relatively short pipes. Therefore, the possibility of taking the pipelines into account is examined. It turns out that the relative degree of the system depends on the chosen discretization and that mathematical expressions are already very big for a small amount of discretization points. This makes the implementation very difficult, such that this approach is no longer traced in this thesis.

In the second step, a model predictive control is developed and exhaustively tested, whereby this controller is also first designed without including the pipelines. It is shown, that with this implementation, a more robust control concept is found than with the input output linearisation. Moreover, with model predictive control the pipes can be taken into account for the controller. This, however, requires more computational power. The outcomes show that a dynamic feedforward can be implemented in that way. Moreover, with this concept, the length of the pipelines can be slightly extended and the resulting system can still be controlled stable. However, because of the chosen discretization and the chosen integration procedure, numerical inaccuracies appear in this simulation. Therefore, controlling long pipes is not directly possible with this control concept.

# Kurzzusammenfassung

Der Inhalt dieser Arbeit ist die mathematische Modellierung und Regelung eines hydraulischen Systems, bestehend aus Ventil, langen Rohrleitungen und Zylinder. In den meisten Arbeiten wird der Einfluss von Leitungen vernachlässigt. Bei zunehmender Länge der Rohrleitungen haben Effekte wie Dämpfung, Reflexionen und Verzögerungen allerdings einen erheblichen Einfluss auf das Regelungsverhalten.

Im ersten Teil dieser Diplomarbeit wird ein mathematisches Modell des hydraulischen Systems erstellt. Ausgehend von den partiellen Differentialgleichungen zur Beschreibung der Rohrleitungen werden reduzierte Modelle mittels einer spektralen Elemente-Methode (SEM) durch örtliche Diskretisierung erstellt. Diese Modelle werden mit der Methode der Charakteristiken (MOC) verglichen. Das Verhalten des Systems, mit und ohne Rohrleitungen, wird simulativ analysiert. Dieses mathematische Modell bildet die Grundlage für den Entwurf einer Regelungsstrategie und den simulativen Test.

Die erste betrachtete Regelungsstrategie beruht auf einer exakten Eingangs-Ausgangslinearisierung des Systems. Dieser Regler wird für das System ohne Rohrleitungen entworfen und auf seine Robustheit untersucht. Es zeigt sich, dass dieses Regelungskonzept nur für relativ kurze Rohrleitungen stabil arbeitet. Darum wird untersucht ob es möglich ist die Leitungen im Regler mitzubersichtigen. Es zeigt sich, dass der relative Grad des Systems von der gewählten Diskretisierung abhängt und die mathematischen Ausdrücke bereits bei geringer Anzahl der Diskretisierungspunkte sehr groß werden. Dies gestaltet die Implementierung sehr aufwendig, weshalb dieser Ansatz in dieser Diplomarbeit nicht weiter verfolgt wird.

Im zweiten Schritt wird eine modellprädiktive Regelung entwickelt, wobei auch dieser Regler erst ohne Berücksichtigung der Rohrleitungen implementiert und wesentlich getestet wird. Es zeigt sich, dass mit dieser Implementierung bereits ein robusteres Regelungskonzept gegeben ist, als mit der Eingangs-Ausgangslinearisierung. Zudem werden bei der modellprädiktiven Regelung die Rohrleitungen im Regler systematisch mitberücksichtigt. Dies erfordert allerdings einen wesentlich höheren Rechenaufwand. Die Ergebnisse zeigen, dass eine dynamische Vorsteuerung auf diese Art implementiert werden kann. Außerdem können mit diesem Konzept die Leitungen geringfügig verlängert und das resultierende System dennoch stabil geregelt werden. Aufgrund der gewählten Diskretisierung und dem gewählten Integrationsverfahren kommt es bei dieser Implementierung allerdings zu numerischen Ungenauigkeiten. Aus diesem Grund ist eine Regelung langer Rohrleitungen mit diesem Regelungskonzept nicht direkt möglich.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Literaturstudie . . . . .	2
1.2	Gliederung der Arbeit . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Mathematisches Modell</b>	<b>5</b>
2.1	Hydraulikzylinder . . . . .	5
2.2	Hydraulikventil . . . . .	8
2.2.1	Volumenstromgleichungen . . . . .	8
2.2.2	Ventilleckage . . . . .	9
2.3	System ohne Rohrleitungen . . . . .	12
2.4	System mit Rohrleitungen . . . . .	13
2.4.1	Spektrale Elemente Methode . . . . .	15
	Implementierung . . . . .	16
	Randbedingungen . . . . .	20
2.5	Simulationen des Gesamtmodells . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Exakte Eingangs-Ausgangslinearisierung</b>	<b>26</b>
3.1	Reglerentwurf ohne Rohrleitungen . . . . .	26
3.1.1	Simulationsergebnisse . . . . .	28
3.2	Test der Eingangs-Ausgangslinearisierung mit Rohrleitungen . . . . .	29
3.3	Reglerentwurf mit Rohrleitungen . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Modellprädiktive Regelung</b>	<b>36</b>
4.1	Gradienten-Projektionsmethode . . . . .	36
4.1.1	Algorithmus . . . . .	37
4.1.2	Integrationsverfahren . . . . .	38
4.1.3	Gütefunktional . . . . .	42
4.1.4	Adaptive Liniensuche . . . . .	43
4.1.5	Diskrete Implementierung . . . . .	44
4.2	MPC ohne Rohrleitungen . . . . .	44
4.2.1	Simulationsergebnisse . . . . .	44
4.3	MPC mit Rohrleitungen . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>70</b>
<b>A</b>	<b>Parameter</b>	<b>72</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Schematischer Aufbau eines Schlingenhebers [3]. . . . .	1
1.2	Schematischer Aufbau des vereinfachten hydraulischen Teilsystems. . . . .	2
2.1	Schematischer Aufbau des Hydraulikzylinders. . . . .	5
2.2	Stetige Näherung für die Reibung im Hydraulikzylinder. . . . .	7
2.3	Schematischer Aufbau einer hydraulischen Vollbrücke [3]. . . . .	8
2.4	Blockschaltbild der Ventildynamik. . . . .	9
2.5	Sprungantwort der Ventildynamik. . . . .	10
2.6	Skizzen zur Leckage des Servoventils für $q_{v,a}$ (a) und $q_{v,b}$ (a). . . . .	10
2.7	Ventilkennlinien (a) ohne und (b) mit Leckage. . . . .	12
2.8	Simuliertes Verhalten von Ventil und Zylinder bei rechteckförmiger Vorgabe der Ventilposition $u_d$ . . . . .	14
2.9	Skizze zur Definition der Legendre-Gauss-Lobatto Knoten bis zur Ordnung $N = 5$ . . . . .	17
2.10	Lagrange Polynome für $M = 3$ , $N_1 = 2$ , $N_2 = 4$ und $N_3 = 3$ . . . . .	17
2.11	Rechteckförmige Vorgabe der Ventilposition $u_d$ . . . . .	23
2.12	Vergleich der SEM und MOC Lösung des Gesamtsystems bei rechteckförmiger Vorgabe der Ventilposition $u_d$ nach Abbildung 2.11. . . . .	24
2.13	Einfluss der Rohrleitungslängen auf das Gesamtsystem bei rechteckförmiger Vorgabe der Ventilposition $u_d$ nach Abbildung 2.11. . . . .	25
3.1	Solltrajektorie für die Zylinderkraft $F_{z,d}$ . . . . .	28
3.2	Regelung des Systems ohne Rohrleitungen und ohne Ventilleckage mittels Eingangs-Ausgangslinearisierung. . . . .	30
3.3	Regelung des Systems ohne Rohrleitungen und mit Ventilleckage mittels Eingangs-Ausgangslinearisierung. . . . .	31
3.4	Vergleich der Regelung des Systems ohne Rohrleitungen, ohne und mit Ventilleckage mittels Eingangs-Ausgangslinearisierung. . . . .	32
3.5	Regelung des Systems mit Rohrleitungen verschiedener Länge mittels Eingangs-Ausgangslinearisierung. . . . .	33
4.1	Vergleich der Integrationsverfahren. . . . .	41
4.2	Detail zum Vergleich der Integrationsverfahren aus Abbildung 4.1. . . . .	42
4.3	Straffunktion für die Ventilstellung $u$ . . . . .	43
4.4	Dynamische Vorsteuerung (MHTP) des Systems ohne Rohrleitungen und mit nominellen Parametern. . . . .	48
4.5	Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen und mit nominellen Parametern im Vergleich mit dem Ergebnis der exakten Eingangs-Ausgangslinearisierung. . . . .	49

4.6	Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen, mit Ventilleckage und nominellen Parametern. . . . .	50
4.7	Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen mit Variation von $N_{iter}$ . . . . .	52
4.8	Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen mit Variation von $N_{int}$ . . . . .	53
4.9	Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen mit Variation von $T_{hor}$ . . . . .	54
4.10	Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen mit Variation von $T_s$ . . . . .	55
4.11	Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen mit sprungartiger Änderung des Fußpunktes der Feder $s_{0,c}$ . . . . .	56
4.12	Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen mit sprungartiger Änderung des Fußpunktes der Feder $s_{0,c}$ und Parameterschätzer. . . . .	58
4.13	Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen, mit Ventilleckage, sprungartiger Änderung des Fußpunktes der Feder $s_{0,c}$ und Parameterschätzer. . . . .	59
4.14	Vergleich der Simulationsergebnisse von MHTP und MPC, entworfen ohne Rohrleitungsmodell, anhand eines Simulationsmodells mit Rohrleitungen der Länge $L_{nom}/2$ . . . . .	60
4.15	Regelung (MPC), entworfen ohne Rohrleitungsmodell, eines Simulationsmodells mit Rohrleitungen der Länge $L_{nom}/2$ bei sprungartiger Änderung des Fußpunktes der Feder $s_{0,c}$ und Parameterschätzer. . . . .	62
4.16	Regelung (MPC), entworfen ohne Rohrleitungsmodell, eines Simulationsmodells mit Rohrleitungen der Länge $2L_{nom}/3$ . . . . .	63
4.17	Vergleich der Simulationsergebnisse der MHTP, einmal entworfen ohne Rohrleitungsmodell und einmal entworfen mit Rohrleitungsmodell, anhand eines Simulationsmodells mit Rohrleitungen der Länge $L_{nom}$ . . . . .	64
4.18	Vergleich der Simulationsergebnisse der MPC, einmal entworfen ohne Rohrleitungsmodell und einmal entworfen mit Rohrleitungsmodell, anhand eines Simulationsmodells mit Rohrleitungen der Länge $2L_{nom}/3$ . . . . .	66
4.19	Regelung (MPC), entworfen mit Rohrleitungsmodell, eines Simulationsmodells mit Rohrleitungen der Länge $L_{nom}$ . . . . .	67
4.20	Regelung (MPC), entworfen mit Rohrleitungsmodell, eines Simulationsmodells mit Rohrleitungen der Länge $2L_{nom}/3$ mit Ventilleckage. . . . .	68
4.21	Regelung (MPC), entworfen mit Rohrleitungsmodell, eines Simulationsmodells mit Rohrleitungen der Länge $2L_{nom}/3$ bei sprungartiger Änderung des Fußpunktes der Feder $s_{0,c}$ und Parameterschätzer. . . . .	69

# 1 Einleitung

Hydraulische Aktuatoren werden in vielen industriellen Anwendungen eingesetzt. Verglichen mit elektrischen Aktuatoren bieten sie den Vorteil hoher Leistungsdichte bei vergleichsweise geringer Baugröße. Speziell in Arbeitsbereichen die große Kräfte bzw. Drehmomente erfordern, sind sie unabdingbar. Einen weiteren Vorteil bietet die flexible Verbindung der Komponenten durch Druckleitungen. Dieser bautechnische Vorteil wirkt sich allerdings nachteilig auf das Regelungsverhalten hydraulischer Systeme aus [1, 2].

In dieser Arbeit wird ein hydraulisches Teilsystem, einer Bandwalzstraße betrachtet. Um den Bandzug zwischen zwei Walzen einzustellen kommt eine hydraulisch aktuierte Schlingenhebevorrichtung zum Einsatz. Die Abbildung 1.1 zeigt den Aufbau einer solchen Bandwalzstraße. Die Schlingenhebergeometrie wird in [3] ausführlich diskutiert.

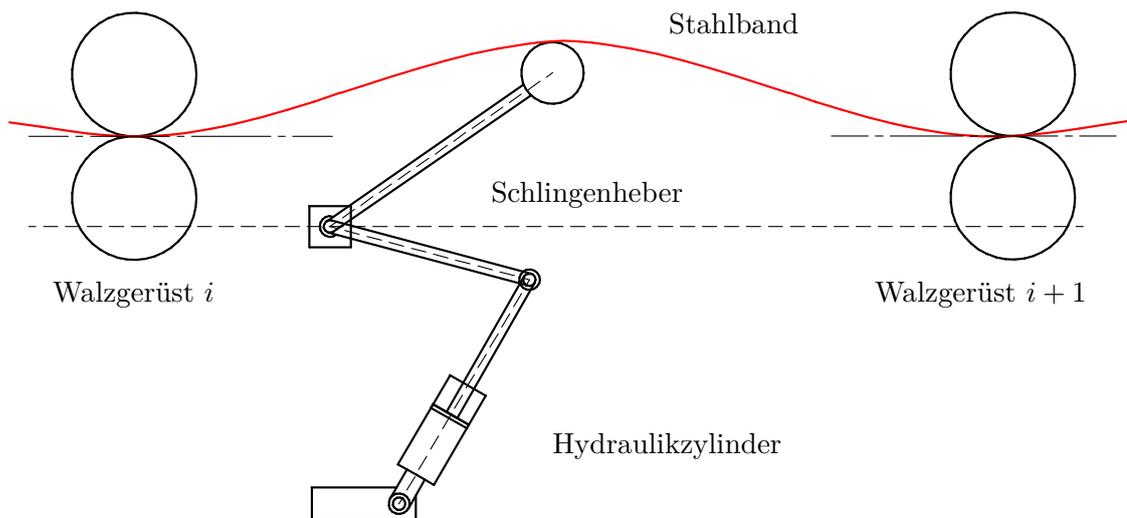


Abbildung 1.1: Schematischer Aufbau eines Schlingenhebers [3].

Diese Arbeit behandelt das Teilsystem zur Ansteuerung des Schlingenhebers. Dieses besteht aus einem Servoventil, einem doppelwirkenden Zylinder und langen Druckleitungen, welche diese Komponenten verbinden. Der Zylinder und das Stahlband werden dabei vereinfachend als Ersatzmasse und -feder angenommen. Die Abbildung 1.2 zeigt den schematischen Aufbau dieses Ersatzsystems.

Bei der mathematischen Beschreibung und Regelung hydraulischer Systeme ist es üblich die verbindenden Verrohrungen zu vernachlässigen [4, 5]. Abhängig von der Länge der Leitung und den dynamischen Anforderungen ist diese Vereinfachung allerdings nicht mehr gerechtfertigt. Um das Regelungsverhalten bei langen Rohrleitungen zu verbessern

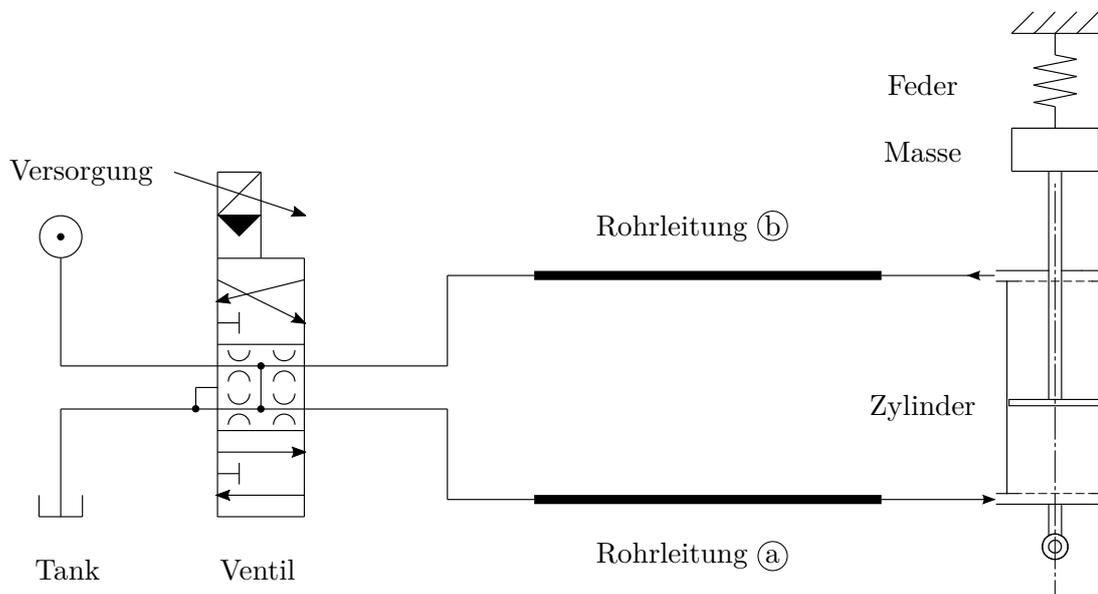


Abbildung 1.2: Schematischer Aufbau des vereinfachten hydraulischen Teilsystems.

wird in dieser Arbeit das System aus Abbildung 1.2 mathematisch modelliert, die Effekte der Druckleitungen untersucht und die Entwicklung eines robusten Regelungskonzeptes untersucht.

Die Herausforderungen an eine Regelung des Systems aus Abbildung 1.2 liegen vor allem in den langen Druckleitungen. Je nach Abschluss der Leitungen kann es zu Reflexionen des Eingangssignals kommen. Dies führt zu Schwingungen im System. Außerdem kommt das Eingangssignal verzögert am Ende der Leitung an. Sowohl Reflexionen als auch die Zeitverzögerung erschweren die hochdynamische Regelung von Systemen mit langen Leitungen.

Eine weitere Schwierigkeit bei der Regelung des Systems besteht darin, dass mit einem Servoventil keine getrennte Beeinflussung der Volumenströme in die beiden Rohrleitungen möglich ist. Dies schränkt, wie noch im Detail gezeigt wird, die Freiheiten des Reglerentwurfes, insbesondere für den Fall langer Rohrleitungen maßgeblich ein.

## 1.1 Literaturstudie

In der Literatur werden verschiedene Regelungskonzepte zur Positions- bzw. Kraftregelung von hydraulischen Zylindern untersucht. In [4, 5] werden Regelungskonzepte hydraulischer Systeme vorgestellt bei denen die Druckleitungen vernachlässigt werden. In [4] wird dazu ein Backstepping basierter, kaskadierter Regler für die Position eines symmetrischen Zylinders entwickelt. In [5] wird die Zylinderkraft für ein Warmbandwalzwerk mittels linearem Regler geregelt. Beide Arbeiten vernachlässigen die Verrohrungen zwischen Ventil und Zylinder, da diese sehr kurz sind. Die Vernachlässigung der Druckleitungen ist für die

Arbeiten [4, 5] daher gerechtfertigt. Für das hydraulische System dieser Arbeit ist diese Annahme nicht zulässig.

In [1, 2] wird der Einfluss von Druckleitungen in einem hydraulischen System bestehend aus Zylinder und Servoventil untersucht. Der Einfluss bei offenem und geschlossenem Regelkreis ist in [1] zusammengefasst. In [2] werden die Druckleitungen durch eine lineare Approximation genähert. Die Näherung basiert auf der Annahme, dass die Rohrleitungen als eine Multiplikation endlich vieler Übertragungsfunktionen zweiter Ordnung approximiert werden kann. In [1, 2] werden keine Regelungskonzepte entworfen, es wird allerdings unter anderem vorgeschlagen die Druckleitungsdynamik mittels inversem Modell zu kompensieren.

Während [1, 2] auf die Effekte der Rohrleitungen eingehen, stellen [6, 7] Konzepte zur Regelung bei langen Druckleitungen vor. Eine Möglichkeit die Zeitverzögerungen aufgrund der Rohrleitungen im Regler mitzuberücksichtigen ist durch einen Smith-Prädiktor gegeben. In [6] wird ein Smith-Prädiktor mit einem PI-PD Smith-Prädiktor zur Positionsregelung eines Hydraulikzylinders verglichen. Es zeigt sich, dass mit dem PI-PD Smith Predictor eine schnellere und dennoch stabile Regelung realisierbar ist. In [7] wird eine weitere Verbesserung des Smith-Prädiktors vorgestellt, bei der dieser mit einer Sliding-Mode Regelung kombiniert wird. Mit diesem Ansatz kann in [7] eine bessere Regelgüte und Robustheit gegen Modellungenauigkeiten gezeigt werden. Diese Konzepte haben jedoch die Einschränkung, dass sie ausschließlich die Zeitverzögerung aufgrund der Rohrleitung berücksichtigen.

In [8] wird ein Wasserreservoir, das mittels Rohrleitung an ein tiefer gelegenes Ventil gekoppelt ist, betrachtet. Der Volumenstrom und der Druck am Ventil werden mittels modellprädiktiver Regelung (MPC) geregelt. Bei diesem Reglerentwurf wird die Rohrleitung berücksichtigt. Als Vorteil der MPC wird in [8] außerdem erwähnt, dass es systematisch möglich ist Beschränkungen zu berücksichtigen. In [8] wird die Stabilität dieser Regelung simulativ gezeigt. Diese Untersuchungen bilden damit eine interessante Grundlage für den Reglerentwurf in dieser Arbeit.

## 1.2 Gliederung der Arbeit

Die mathematische Beschreibung des Systems aus Abbildung 1.2 erfolgt in Kapitel 2. Hier werden die Druckaufbaugleichungen des Zylinders, die Zylinderreibung und die Volumenstromgleichungen des Servoventils beschrieben. Die Modellierung der Druckleitungen führt auf partiellen Differentialgleichungen (PDGln), für die ein geeignetes Diskretisierungsverfahren gewählt werden muss. Kapitel 2 behandelt außerdem die Diskretisierung mittels spektraler Elemente-Methode (SEM) und fasst die Gleichungen des Gesamtsystems in kompakter Form zusammen. Am Ende von Kapitel 2 wird der Einfluss der Druckleitungen auf das dynamische Verhalten des Gesamtsystems simulativ untersucht.

In Kapitel 3 wird ein Regler basierend auf exakter Eingangs-Ausgangslinearisierung entworfen. Bei diesem Reglerentwurf werden die Rohrleitungen vernachlässigt. Dieser Regler wird anschließend auf seine Robustheit abhängig von der Rohrleitungslänge untersucht. Wie sich zeigt, funktioniert dieses Verfahren nur für relativ kurze Verrohrungen robust, weshalb ein alternativer Ansatz entwickelt werden muss.

In Kapitel 4 wird eine MPC basierend auf der Gradienten-Projektionsmethode implementiert. Im ersten Schritt werden die Druckleitungen wie in Kapitel 3 für die Implementierung des Reglers vernachlässigt. Der Algorithmus wird im Detail diskutiert und eine Parameterstudie der MPC-Parameter durchgeführt. Anschließend wird der Regler auf seine Regelgüte in Abhängigkeit der Rohrleitungslängen untersucht. Im letzten Teil von Kapitel 4 werden die Druckleitungen im Regler systematisch mitberücksichtigt. Die Güte dieser Regelstrategie wird wiederum durch Simulationen untersucht.

Das Kapitel 5 fasst die Ergebnisse der Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf mögliche weitere Arbeiten zu diesem Thema.

## 2 Mathematisches Modell

In diesem Kapitel wird auf die mathematische Beschreibung des hydraulischen Systems aus Abbildung 1.2 eingegangen. Zunächst wird in Abschnitt 2.1 der hydraulische Zylinder behandelt. Es werden die Druckaufbaugleichungen hergeleitet und die Zylinderreibung modelliert. Der Abschnitt 2.2 beschreibt die Modellierung des Hydraulikventils. Für das bis dahin gewonnene Modell wird in Abschnitt 2.3 eine Simulationsstudie durchgeführt. In Abschnitt 2.4 werden die partiellen Differentialgleichungen (PDGln) zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens der Rohrleitungen zwischen Ventil und Zylinder hergeleitet, welche in Abschnitt 2.4.1 mittels SEM diskretisiert werden. Der Abschnitt 2.4.1 gibt außerdem einen kurzen Überblick über mögliche Diskretisierungsverfahren und die Vor- bzw. Nachteile der SEM. Diese wird im Anschluss implementiert und die Wahl der Randbedingungen wird erklärt. In Abschnitt 2.5 wird das gesamte mathematische Modell mittels Simulationsstudien untersucht.

### 2.1 Hydraulikzylinder

Bei dem in dieser Arbeit behandelten Zylinder handelt es sich um einen doppeltwirkenden Einstangenzyylinder wie in Abbildung 2.1 dargestellt. Das dynamische Verhalten des

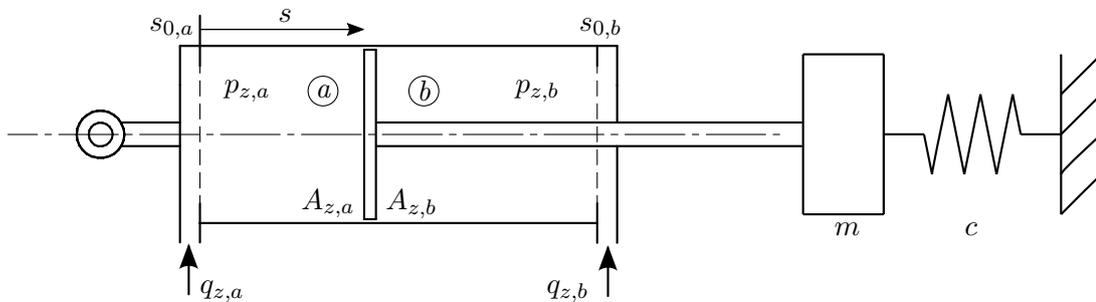


Abbildung 2.1: Schematischer Aufbau des Hydraulikzylinders.

Zylinders lässt sich durch ein mechanisches und ein hydraulisches Teilsystem beschreiben. Das Modell für das hydraulische Teilsystem basiert auf der Massenerhaltung in den Zylinderkammern. Entsprechend [9] ergibt sich für den Zylinder aus Abbildung 2.1

$$\frac{d}{dt} m_{z,a}(p_{z,a}, s) = q_{z,a} \rho_{z,a}(p_{z,a}) \quad (2.1a)$$

$$\frac{d}{dt} m_{z,b}(p_{z,b}, s) = q_{z,b} \rho_{z,b}(p_{z,b}) \quad (2.1b)$$

Dabei bezeichnen  $m_{z,a}$  und  $m_{z,b}$  die Massen des Öls in den Zylinderkammern  $\textcircled{a}$  bzw.  $\textcircled{b}$ ,  $p_{z,a}$  und  $p_{z,b}$  den jeweiligen Kammerdruck und  $q_{z,a}$  und  $q_{z,b}$  die Volumenströme in die Zylinderkammer  $\textcircled{a}$  bzw.  $\textcircled{b}$ . Weiters beschreiben  $\rho_{z,a}$  und  $\rho_{z,b}$  die Massendichte des Öls. Es wird davon ausgegangen, dass die Leckage zwischen den Zylinderkammern vernachlässigbar ist. Mit den Massen des Öls

$$m_{z,a}(p_{z,a}, s) = \rho_{z,a}(p_{z,a})V_a(s) \quad (2.2a)$$

$$m_{z,b}(p_{z,b}, s) = \rho_{z,b}(p_{z,b})V_b(s) , \quad (2.2b)$$

wobei  $V_a$  und  $V_b$  das Volumen der jeweiligen Kammer beschreibt, ergibt sich (2.1) zu

$$\frac{d\rho_a}{dp_{z,a}} \frac{dp_{z,a}}{dt} V_a + \rho_a(p_{z,a}) \frac{d}{dt} V_a = q_{z,a} \rho_a(p_{z,a}) \quad (2.3a)$$

$$\frac{d\rho_b}{dp_{z,b}} \frac{dp_{z,b}}{dt} V_b + \rho_b(p_{z,b}) \frac{d}{dt} V_b = q_{z,b} \rho_b(p_{z,b}) . \quad (2.3b)$$

Da bei Erreichen der Endlagen des Zylinders Öl in den Zylinderkammern verbleibt ist es sinnvoll Offsetvolumina mit Hilfe der Längen  $s_{0,a}$  und  $s_{0,b}$  zu definieren. Die Kammervolumina unter Berücksichtigung der Offsetvolumina ergeben sich dann als

$$V_a = A_{z,a}(s + s_{0,a}) \quad (2.4a)$$

$$V_b = A_{z,b}(s_{max} - s + s_{0,b}) , \quad (2.4b)$$

mit den effektiven Zylinderflächen  $A_{z,a}$  und  $A_{z,b}$ , der Zylinderposition  $s$  und dem maximalen Hub des Zylinders  $s_{max}$ . Wird der Kompressionsmodul  $\beta$  des verwendeten Hydrauliköls

$$\beta = \rho_i \frac{\partial p_{z,i}}{\partial \rho_i}, \quad i \in \{a, b\} \quad (2.5)$$

als konstant angenommen, so ergibt sich (2.3) mit (2.4), (2.5) zu

$$\frac{d}{dt} p_{z,a} = \frac{\beta}{A_{z,a}(s + s_{0,a})} (q_{z,a} - A_{z,a} w) \quad (2.6a)$$

$$\frac{d}{dt} p_{z,b} = \frac{\beta}{A_{z,b}(s_{max} - s + s_{0,b})} (q_{z,b} + A_{z,b} w) . \quad (2.6b)$$

Die Bewegungsgleichungen des mechanischen Teilsystems folgen direkt aus der Impulserhaltung der Zylinderstange zu

$$\frac{d}{dt} s = w \quad (2.7a)$$

$$\frac{d}{dt} w = \frac{1}{m} (F_z - F_{ext} - F_r) . \quad (2.7b)$$

Dabei bezeichnet  $w = \dot{s}$  die Kolbengeschwindigkeit,  $m$  die Summe aus Stangen- und Lastmasse,  $F_z$  die Druckkraft,  $F_{ext}$  eine externe Lastkraft und  $F_r$  die Reibkraft im Zylinder. Die Zylinderkraft  $F_z$  zufolge der Druckdifferenz zwischen den beiden Zylinderkammern ergibt sich zu

$$F_z = A_{z,a} p_{z,a} - A_{z,b} p_{z,b} . \quad (2.8)$$

Als externe Kraft wird eine Federkraft der Form

$$F_{ext} = c(s - s_{0,c}) , \quad (2.9)$$

mit der Federsteifigkeit  $c$  und der entspannten Länge der Feder  $s_{0,c}$  angenommen. Diese Kraft dient in weiterer Folge als einfaches Ersatzmodell für das elastische Verhalten des Stahlbandes in der Warmbreitbandstraße. Die Reibkraft  $F_r$  setzt sich im Allgemeinen aus Haftreibung, Coulombscher Reibung und geschwindigkeitsproportionaler, viskoser Reibung zusammen [10]. Die Identifikation in [3] zeigt, dass für die gegebene Anwendung der Coulombsche Anteil dominiert. Daher wird in dieser Arbeit ein Reibmodell der Form

$$F_r = r_0 \tanh\left(\frac{w}{w_0}\right) + r_1 w \quad (2.10)$$

angenommen. Abbildung 2.2 zeigt die gewählte Zylinderreibung in Abhängigkeit der Geschwindigkeit. Die entsprechenden Parameterwerte für  $r_0$ ,  $r_1$  und  $w_0$  sind im Anhang in Tabelle A.1 aufgelistet.

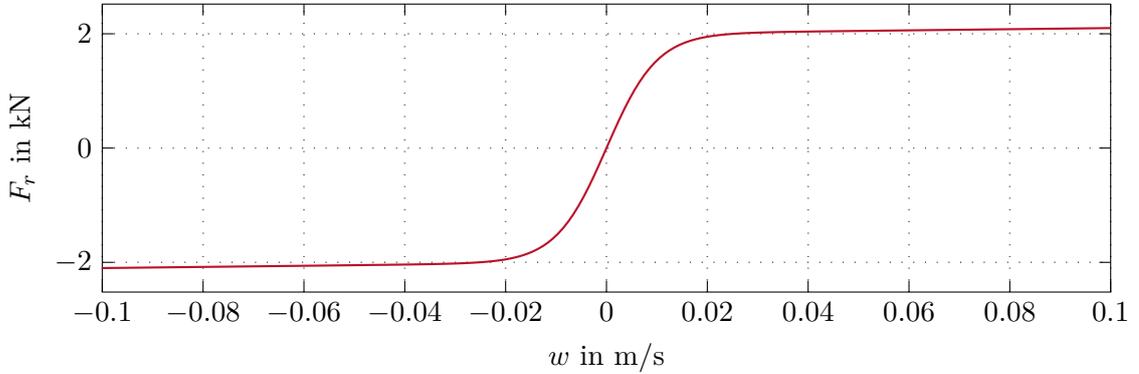


Abbildung 2.2: Stetige Näherung für die Reibung im Hydraulikzylinder.

Unter Berücksichtigung von (2.4) bis (2.10) ergibt sich aus (2.3) und (2.7) das mathematische Modell des Zylinders zu

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_z = \mathbf{f}_z(\mathbf{x}_z) + \mathbf{g}_z(\mathbf{x}_z) \begin{bmatrix} q_{z,a} \\ q_{z,b} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x}_z^T = [p_{z,a} \ p_{z,b} \ s \ w]$  und

$$\mathbf{f}_z(\mathbf{x}_z) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta w}{s+s_{0,a}} \\ \frac{\beta w}{s_{max}-s+s_{0,b}} \\ w \\ \frac{1}{m} (F_z - F_{ext} - F_r) \end{bmatrix} \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{g}_z(\mathbf{x}_z) = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{A_{z,a}(s+s_{0,a})} & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{A_{z,b}(s_{max}-s+s_{0,b})} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (2.12b)$$

Die beiden Volumenströme  $q_{z,a}$  und  $q_{z,b}$  bilden dabei die Eingänge des Subsystems.

## 2.2 Hydraulikventil

Dieser Abschnitt behandelt die mathematische Modellierung des Hydraulikventils. Dieses wird in Anlehnung an das Servoventil der Firma Moog der Baureihe D661 [11] modelliert. Alle für die weitere Modellierung relevanten Parameter des 4/3 Proportionalwegeventils sind im Anhang in Tabelle A.1 zusammengefasst.

### 2.2.1 Volumenstromgleichungen

Zunächst wird die Leckage des Ventils vernachlässigt und die Volumenströme in Abhängigkeit der Ventilstellung berechnet. Abbildung 2.3 zeigt die Skizze einer hydraulischen Vollbrücke. Der Versorgungsdruck  $p_s$  und der Tankdruck  $p_t$  werden konstant angenommen.

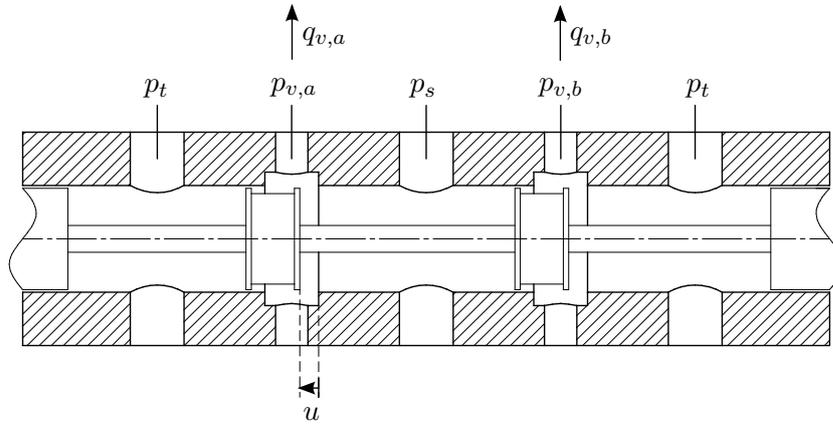


Abbildung 2.3: Schematischer Aufbau einer hydraulischen Vollbrücke [3].

Die Größen  $p_{v,a}$  und  $p_{v,b}$  sowie  $q_{v,a}$  und  $q_{v,b}$  beschreiben den Druck und Volumenstrom in den Arbeitsanschlüssen des Ventils. Außerdem bezeichnet  $u$  die normierte Position des Ventilschiebers. Wie in [9] gezeigt, ergibt sich für Ventile dieser Bauart der Volumenstrom zu

$$q_{v,a} = \begin{cases} K_{v,a} \sqrt{|p_s - p_{v,a}|} \operatorname{sign}(p_s - p_{v,a}) u, & u \geq 0 \\ K_{v,a} \sqrt{|p_{v,a} - p_t|} \operatorname{sign}(p_{v,a} - p_t) u, & u < 0 \end{cases} \quad (2.13a)$$

$$q_{v,b} = \begin{cases} -K_{v,b} \sqrt{|p_{v,b} - p_t|} \operatorname{sign}(p_{v,b} - p_t) u, & u \geq 0 \\ -K_{v,b} \sqrt{|p_s - p_{v,b}|} \operatorname{sign}(p_s - p_{v,b}) u, & u < 0, \end{cases} \quad (2.13b)$$

mit den Ventilkoeffizienten  $K_{v,a}$  und  $K_{v,b}$ . In Anlehnung an [11] berechnen sich diese Parameter aus dem Nennfluss  $q_N$  und dem Nenndruckabfall  $\Delta p_N$  zu

$$K_{v,a} = \frac{q_N}{\sqrt{\Delta p_N}} = \frac{90 \text{ l/min}}{\sqrt{35 \text{ bar}}} = 8.0178 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^3}{\text{s} \sqrt{\text{Pa}}}. \quad (2.14)$$

In dieser Arbeit wird ein Ventil mit an die Zylinderflächen angepassten Öffnungsflächen angenommen. Dies bedeutet, dass die Kolbenflächen des Zylinders und die Ventilöffnungsflächen aufeinander abgestimmt sind. Dazu wird der Ventilkoeffizient der Rückleitung

über die Zylinderflächen entsprechend

$$K_{v,b} = K_{v,a} \frac{A_{z,b}}{A_{z,a}} = 4.0891 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^3}{\text{s}\sqrt{\text{Pa}}} \quad (2.15)$$

skaliert. Aufgrund der Tatsache, dass sich die Ventilstellung nicht beliebig schnell ändern kann, wird das Ventilmodell im Weiteren um die Dynamik des Ventilschiebers erweitert. In [11] kann bei einem Versorgungsdruck von 290 bar eine Anstiegszeit von etwa 6 ms abgelesen werden. Zur mathematischen Modellierung dieser Dynamik wird eine Steigungsbeschränkung mit einem maximalen Anstieg von  $\pm 167$  1/s und ein lineares Verzögerungsglied zweiter Ordnung verwendet. Abbildung 2.4 zeigt das Blockschaltbild der Ventildynamik. Das dynamische Verhalten des Verzögerungsglieds wird dabei durch

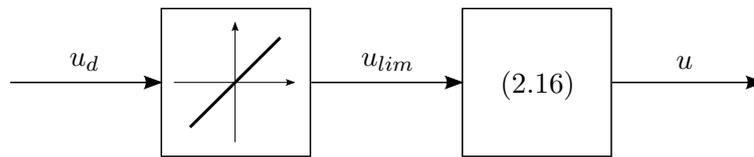


Abbildung 2.4: Blockschaltbild der Ventildynamik.

das Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}}_v = \mathbf{A}_v \mathbf{x}_v + \mathbf{b}_v u_{lim} \quad (2.16a)$$

$$u = \mathbf{c}_v^T \mathbf{x}_v \quad (2.16b)$$

mit

$$\mathbf{A}_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ a_0 \end{bmatrix} \quad (2.17a)$$

$$\mathbf{c}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.17b)$$

mit  $a_0 = 4 \cdot 10^6$  und  $a_1 = 4 \cdot 10^3$  dargestellt. Die Eigenwerte wurden dabei zu  $\lambda_{v,12} = -2000$  1/s gewählt um die Ventilkennlinie aus [11] bestmöglich zu approximieren. Abbildung 2.5 zeigt die Sprungantwort dieser Ventildynamik.

### 2.2.2 Ventilleckage

Die Leckage des Ventils sorgt dafür, dass auch bei Ventilstellung  $u = 0$  Volumenströme  $q_{v,a}$  und  $q_{v,b}$  in die Rohrleitung bzw. in den Zylinder entstehen. In Abbildung 2.6 ist ein Ersatzmodell für die Ventilleckage beider Steuerkanten dargestellt. Mit  $u_{off}$  wird dabei die Öffnung des Ventils bei  $u = 0$  bezeichnet. Man kann erkennen, dass sich für  $u = 0$  sowohl ein Volumenstrom von der Versorgung zum Arbeitsanschluss  $q_{s,a}$  bzw.  $q_{s,b}$ , als auch von der Leitung zum Tank  $q_{t,a}$  bzw.  $q_{t,b}$  einstellt. Erst für ein ausreichend positives bzw. negatives  $u$  wird einer der beiden Volumenströme unterbrochen. Dieser Sachverhalt kann

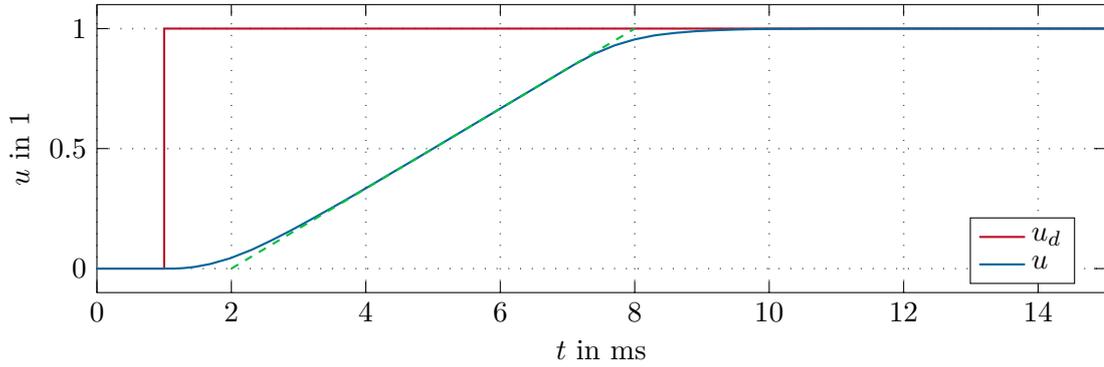
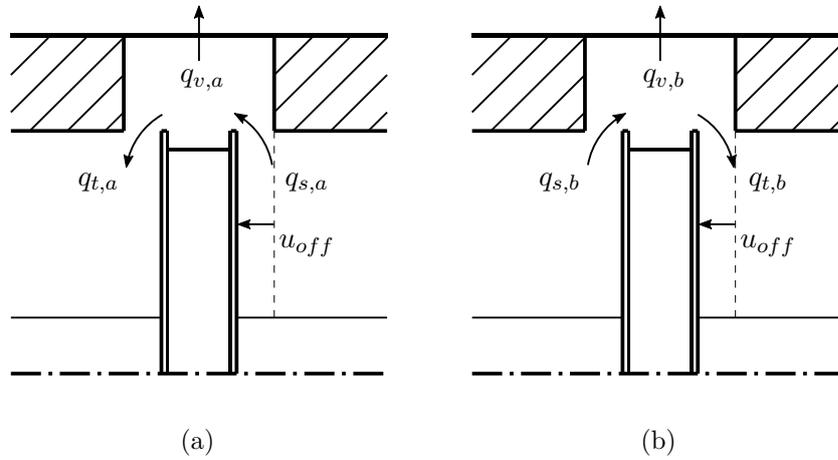


Abbildung 2.5: Sprungantwort der Ventildynamik.

Abbildung 2.6: Skizzen zur Leckage des Servoventils für  $q_{v,a}$  (a) und  $q_{v,b}$  (a).

durch einen Offset  $u_{off}$  in den Volumenstromgleichungen näherungsweise berücksichtigt werden. Dadurch erweitert sich (2.13) zu

$$q_{s,a} = \begin{cases} K_{v,a} \sqrt{|p_s - p_{v,a}|} \text{sign}(p_s - p_{v,a})(u + u_{off}), & u > -u_{off} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.18a)$$

$$q_{t,a} = \begin{cases} K_{v,a} \sqrt{|p_{v,a} - p_t|} \text{sign}(p_{v,a} - p_t)(u_{off} - u), & u < u_{off} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.18b)$$

$$q_{s,b} = \begin{cases} K_{v,b} \sqrt{|p_s - p_{v,b}|} \text{sign}(p_s - p_{v,b})(u_{off} - u), & u < u_{off} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.18c)$$

$$q_{t,b} = \begin{cases} K_{v,b} \sqrt{|p_{v,b} - p_t|} \text{sign}(p_{v,b} - p_t)(u + u_{off}), & u > -u_{off} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.18d)$$

mit

$$q_{v,a} = q_{s,a} - q_{t,a} \quad (2.18e)$$

$$q_{v,b} = q_{s,b} - q_{t,b} . \quad (2.18f)$$

Der Offset des Ventils  $u_{off}$  wird dabei so eingestellt, dass sich für  $u = 0$  und

$$q_{s,a} = q_{t,a} \quad (2.19a)$$

$$q_{s,b} = q_{t,b} \quad (2.19b)$$

entsprechend den Angaben in [11] ein Fluss von

$$q_{s,a} + q_{s,b} = 4.5 \text{ l/min} \quad (2.20)$$

einstellt. Aus (2.18) und (2.19) folgt zunächst

$$p_{v,a} = \frac{p_s + p_t}{2} \quad (2.21a)$$

$$p_{v,b} = \frac{p_s + p_t}{2} . \quad (2.21b)$$

Gemeinsam mit (2.18) in (2.20) folgt daraus der Ventiloffset zu  $u_{off} = 0.0163$ . Abbildung 2.7 zeigt die resultierenden Ventilkennlinien ohne und mit Ventilleckage für den typischen Arbeitspunkt des druckkraftfreien Zylinders

$$p_{z,a} = (p_s + p_t) \frac{A_{z,b}}{A_{z,a} + A_{z,b}} \quad (2.22a)$$

$$p_{z,b} = (p_s + p_t) \frac{A_{z,a}}{A_{z,a} + A_{z,b}} \quad (2.22b)$$

$$s = s_{0,c} \quad (2.22c)$$

$$w = 0 . \quad (2.22d)$$

Zahlenwerte für die Drücke, Zylinderflächen und die entspannte Länge der Feder sind in Tabelle A.1 angegeben. Man erkennt, dass die Kennlinien mit Ventilleckage Knicke bei  $u = -u_{off}$  und  $u = u_{off}$  aufweisen. Für  $u < -u_{off}$  werden die Flüsse  $q_{s,a}$  und  $q_{t,b}$  und für  $u > u_{off}$  werden die Flüsse  $q_{t,a}$  sowie  $q_{s,b}$  unterbrochen. In diesen Bereichen entsprechen die Steigungen der Kennlinien jenen der Kennlinien ohne Ventilleckage. Im Bereich  $u \in [-u_{off}, u_{off}]$  überlagern sich die Flüsse  $q_{s,a}$  und  $q_{t,a}$  bzw.  $q_{s,b}$  und  $q_{t,b}$ , was zu einer höheren Steigung führt. Aus der Ventilkennlinie ist außerdem abzulesen, dass mit Ventilleckage eine negative Ventilstellung

$$u_0 = -0.00271 \quad (2.23)$$

nötig ist um in diesem Arbeitspunkt stationär  $q_{v,a} = 0$  und  $q_{v,b} = 0$  zu erhalten.

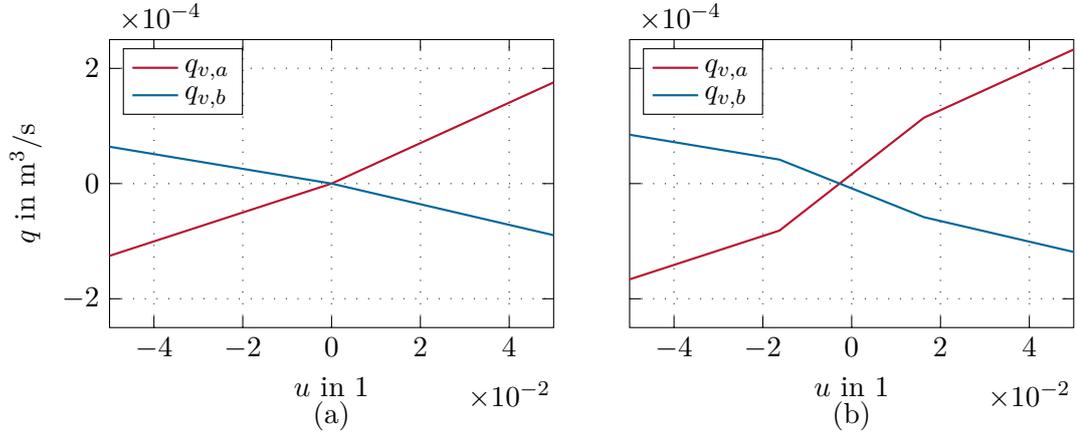


Abbildung 2.7: Ventilkennlinien (a) ohne und (b) mit Leckage.

## 2.3 System ohne Rohrleitungen

In diesem Abschnitt wird das System bestehend aus Zylinder und Ventil ohne Rohrleitung untersucht. Das System ohne Rohrleitung wird so verschaltet, dass

$$q_{v,a} = q_{z,a} \quad (2.24a)$$

$$q_{v,b} = q_{z,b} \quad (2.24b)$$

$$p_{v,a} = p_{z,a} \quad (2.24c)$$

$$p_{v,b} = p_{z,b} \quad (2.24d)$$

gilt. Damit folgen die Gleichungen des Systems ohne Rohrleitungen zu

$$\dot{\mathbf{x}}_z = \mathbf{f}_z(\mathbf{x}_z) + \mathbf{g}_z(\mathbf{x}_z) \begin{bmatrix} q_{s,a} - q_{t,a} \\ q_{s,b} - q_{t,b} \end{bmatrix} \quad (2.25a)$$

mit

$$q_{s,a} = \begin{cases} K_{v,a} \sqrt{|p_s - p_{v,a}|} \text{sgn}(p_s - p_{v,a})(u + u_{off}), & u > -u_{off} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.25b)$$

$$q_{t,a} = \begin{cases} K_{v,a} \sqrt{|p_{v,a} - p_t|} \text{sgn}(p_{v,a} - p_t)(u_{off} - u), & u < u_{off} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.25c)$$

$$q_{s,b} = \begin{cases} K_{v,b} \sqrt{|p_s - p_{v,b}|} \text{sgn}(p_s - p_{v,b})(u_{off} - u), & u < u_{off} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.25d)$$

$$q_{t,b} = \begin{cases} K_{v,b} \sqrt{|p_{v,b} - p_t|} \text{sgn}(p_{v,b} - p_t)(u + u_{off}), & u > -u_{off} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.25e)$$

und

$$\dot{\mathbf{x}}_v = \mathbf{A}_v \mathbf{x}_v + \mathbf{b}_v u_{lim} \quad (2.25f)$$

$$u = \mathbf{c}_v^T \mathbf{x}_v . \quad (2.25g)$$

Von primärem Interesse ist im Folgenden vor allem das Schwingungsverhalten und die maximal erreichbaren Geschwindigkeiten des Zylinders. Das Modell beinhaltet die Ventildynamik, die Ventilleckage, die Reibung und die externe Federkraft. Alle Simulationen starten im stationären Punkt (2.22), in dem die Druckkraft  $F_z$  verschwindet und die Feder ihre entspannte Länge annimmt. Abbildung 2.8 zeigt Simulationsergebnisse für eine rechteckförmige Vorgabe der Ventilposition  $u_d$ . Die Simulation zeigt, dass durch die schnelle Änderung der Ventilstellung Schwingungen mit einer Periodendauer von etwa 45 ms angeregt werden. Dies entspricht den Eigenwerten des um (2.22) linearisierten Systems. Vergleicht man das Schwingungsverhalten des Systems bei offenem und geschlossenem Ventil, erkennt man, dass das offene Ventil dämpfend wirkt. Aufgrund der Reibung im Zylinder und der Dämpfung durch das offene Ventil, klingt die Schwingung nach wenigen Perioden ab. Da nach dem ersten Sprung das Ventil geöffnet bleibt, klingen die Schwingungen rascher ab als nach dem zweiten Sprung. Dieser Effekt kann sowohl in der Simulation ohne als auch mit Ventilleckage beobachtet werden. Bei maximaler Ventilstellung ist außerdem eine maximale nutzbare Geschwindigkeit von etwa 0.4 m/s abzulesen. Bei Ventilstellung  $u = 0$  stellt sich aufgrund der Ventilleckage eine geringe Änderung der Kammerdrücken  $p_{z,a}$  und  $p_{z,b}$  und der Zylinderposition  $s$ , ein.

## 2.4 System mit Rohrleitungen

Dieser Abschnitt beschreibt die mathematische Modellierung der Rohrleitungen, welche Zylinder und Ventil verbinden. Da die Modellierung beider Leitungen analog erfolgt wird in diesem Abschnitt nicht zwischen Zu- und Rückleitung unterschieden. Für die Modellierung relevante Parameter sind im Anhang in Tabelle A.1 angegeben. Nach [12, 13] kann der Druck- und Volumenstromverlauf in langen Rohrleitungen mit guter Genauigkeit durch ein hyperbolisches System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in der Form

$$\frac{\partial p_l(z, t)}{\partial t} + \frac{a_l^2 \rho_l}{A_l} \frac{\partial q_l(z, t)}{\partial z} = 0 \quad (2.26a)$$

$$\frac{\partial q_l(z, t)}{\partial t} + \frac{A_l}{\rho_l} \frac{\partial p_l(z, t)}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{f_D |q_l(z, t)| q_l(z, t)}{A_l D_l} \quad (2.26b)$$

beschrieben werden. Hier beschreibt  $f_D$  den Darcy-Weisbach-Reibungskoeffizienten,  $a_l$  die lokale Wellengeschwindigkeit,  $D_l$  den Rohrdurchmesser,  $A_l = D_l^2 \pi / 4$  den Leitungsquerschnitt und  $L$  die Rohrleitungslänge. Die rechte Seite von (2.26b) modelliert die Reibungsverluste in der Rohrleitung. Als Randbedingungen werden für beide Rohrleitungen der Ventilverluststrom am Beginn der Leitung und der Kammerdruck im Zylinder am Ende der Rohrleitung gewählt d. h.

$$q_l(0, t) = q_v(t) \quad (2.27a)$$

$$p_l(L, t) = p_z(t) . \quad (2.27b)$$

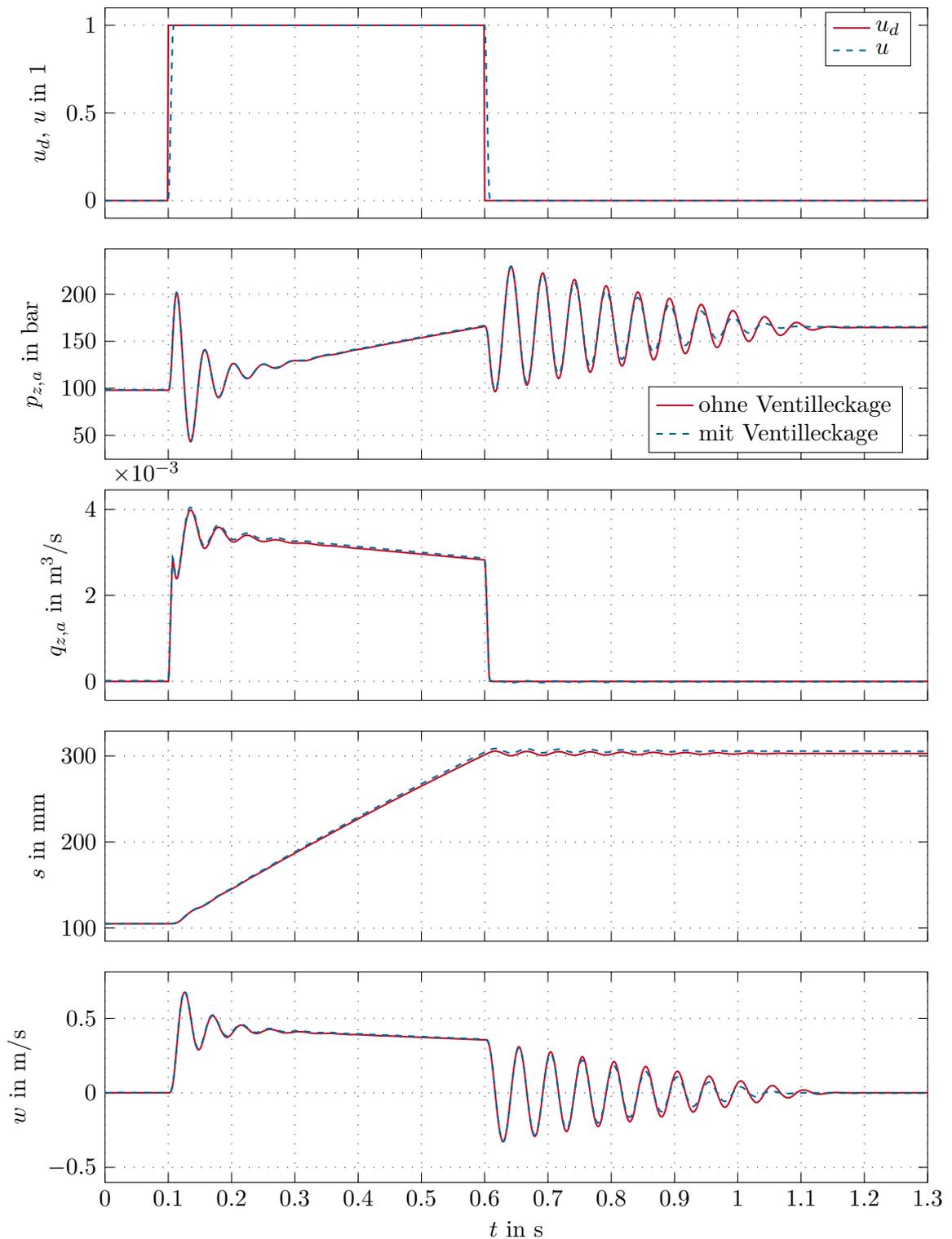


Abbildung 2.8: Simuliertes Verhalten von Ventil und Zylinder bei rechteckförmiger Vorgabe der Ventilposition  $u_d$ .

Für die Abschätzung des Reibungskoeffizienten  $f_D$  wird die Reynolds-Zahl

$$\text{Re} = \frac{v_l L}{\nu} \quad (2.28)$$

mit der typischen Strömungsgeschwindigkeit  $v_l$  und der kinematischen Viskosität  $\nu$  gemäß Tabelle A.1 benötigt. Typische Strömungsgeschwindigkeiten können aus Abbildung 2.8 mit

$$v_l = \frac{q_a}{A_l} \approx 5.65 \text{ m/s} \quad (2.29)$$

abgelesen werden. Für hydraulisch glatte Rohre und  $10^5 < \text{Re} < 5 \cdot 10^6$  kann die Formel von Nikuradse [14] entsprechend

$$f_D = 0.0032 + 0.221 \text{Re}^{-0.237} \quad (2.30)$$

für die Bestimmung eines Richtwerts für  $f_D$  benutzt werden. Mit (2.26) sind alle zur Beschreibung der Rohrleitung nötigen Gleichungen gegeben. Für die numerische Simulation muss eine Methode zur Diskretisierung des Systems von PDGln gewählt werden. Für solche Leitungsgleichungen wurde in [15] die SEM als effiziente Methode zur örtlichen Diskretisierung vorgestellt.

### 2.4.1 Spektrale Elemente Methode

Viele naturwissenschaftliche oder technische Problemstellungen führen bei ihrer mathematischen Beschreibung auf ein System hyperbolischer PDGln. Es handelt sich um Wellengleichungen wie sie auch bei der Beschreibung elektromagnetischer Wellen auftreten. Für diese Gleichungen ist häufig keine analytische Lösung möglich.

Für die numerische Simulation von PDGln ist es daher notwendig diese sowohl örtlich als auch zeitlich zu diskretisieren. Für Leitungsgleichungen wie (2.26) ist die Methode der Charakteristiken (MOC) [12, 13] ein gängiges und numerisch robustes Lösungsverfahren.

Die Idee der MOC besteht darin die Charakteristiken zu finden, entlang derer die betrachtete PDGl als gewöhnliche Differentialgleichung (DGl) angeschrieben werden kann. Die MOC kann daher als eine Koordinatentransformation auf DGln verstanden werden. Ein Nachteil dieser Methode ist, dass sie nur für konstante Querschnitte und Wellengeschwindigkeiten gut funktioniert, da die räumliche und zeitliche Diskretisierung durch die Wellenlaufzeit gekoppelt sind. Um mit der MOC eine hohe zeitliche Auflösung zu erzielen, sind daher auch viele örtliche Diskretisierungspunkte nötig. Dies führt zu einer hohen Anzahl von Systemvariablen, was sich negativ auf die Rechenzeit auswirkt.

Ein weiteres Verfahren zur Diskretisierung von PDGln sind Spektralmethoden [16]. Dabei werden Ansatzfunktionen gewählt die sich über das gesamte Rechengebiet erstrecken. Typischerweise werden bei periodischen Randwertproblemen harmonische Funktionen und bei nicht periodischen Randwertproblemen Polynome als Ansatzfunktionen gewählt. Bei den Spektralmethoden werden im Gegensatz zur MOC die Gewichtungen der Ansatzfunktionen (die Spektralkoeffizienten) so bestimmt, dass die PDGln bestmöglich erfüllt werden. Die Genauigkeit der Lösung hängt von der Anzahl und Wahl der Ansatzfunktionen ab. Ein wesentlicher Vorteil der Spektralmethoden ist, dass diese bei geschickter Wahl der Ansatzfunktionen verhältnismäßig geringen Rechenaufwand erfordern. Nachteilig an dieser

Methode ist, dass sie im Allgemeinen nur für relativ einfache geometrische Strukturen anwendbar ist. Deshalb wird in [16] eine Verbesserung dieser Methode in Form der Spektral Element Methode (SEM) vorgeschlagen. Bei der SEM werden die Rohrleitungen zunächst in Elemente geteilt. Anschließend wird auf jedem dieser Elemente eine Spektralmethode angewandt.

Die in diesem Abschnitt gewählte Diskretisierung ist die Basis für die späteren Reglerentwürfe in dieser Arbeit. Es ist daher vorteilhaft die Systemordnung so gering wie möglich zu halten. Aus diesem Grund kommt in dieser Arbeit die SEM für die örtliche Diskretisierung der Rohrleitungen zum Einsatz. Auf ihre Implementierung wird im Folgenden näher eingegangen.

### Implementierung

Die Formulierung der SEM für (2.26) entspricht der in [15–17] vorgestellten Formulierung. Dabei wird das Gebiet einer Rohrleitung  $\Omega = [0, L]$  in  $M$  Elemente  $\Omega_i = [\bar{z}_{i-1}, \bar{z}_i]$  mit  $0 = \bar{z}_0 < \dots < \bar{z}_M = L$  geteilt und auf jedem dieser Elemente eine Spektralmethode angewandt. Die Länge eines Elementes wird dabei mit  $\Delta z_i = \bar{z}_i - \bar{z}_{i-1}$  bezeichnet. Es gilt daher  $L = \sum_{i=1}^M \Delta z_i$ . Auf jedem Element der Rohrleitung werden die Ansatzfunktionen in einer lokalen Variable  $\zeta_i \in [-1, 1]$  formuliert. Der Zusammenhang mit der globalen Variable  $z \in [0, L]$  ist durch die Transformation

$$z = \Gamma_i(\zeta) = \bar{z}_{i-1} + \frac{1 + \zeta_i}{2} \Delta z_i, \quad \zeta \in [-1, 1] \quad (2.31)$$

und der Inversen

$$\zeta_i = \Gamma_i^{-1}(z) = 2 \frac{z - \bar{z}_{i-1}}{\Delta z_i} - 1, \quad z \in \Omega_i \quad (2.32)$$

gegeben.

Auf jedem Element werden die Legendre-Gauss-Lobatto Knoten  $\zeta_{i,j}$  gemäß [15–17] definiert. Diese sind die Nullstellen des Polynoms  $(1 - \zeta_i)^2 P'_{N_i}(\zeta_i)$  mit  $\zeta_i \in [-1, 1]$ , wobei  $P'_{N_i}(\zeta)$  die Ableitung des Legendre Polynoms  $P_{N_i}(\zeta)$  der Ordnung  $N_i$ , mit  $i \in [1, M]$ , ist. Bei  $\zeta_{i,j}$  handelt es sich daher um die  $j$ -te Nullstelle des  $i$ -ten Elementes. Abbildung 2.9 zeigt diese Polynome und ihre Nullstellen bis zur Ordnung  $N = 5$ . Als Basisfunktionen der SEM werden die Lagrange-Polynome

$$l_{i,j}(\zeta_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N_i} \frac{\zeta_i - \zeta_{i,k}}{\zeta_{i,j} - \zeta_{i,k}}, \quad \zeta_i \in [-1, 1], \quad j \in [0, N_i], \quad (2.33)$$

mit der Eigenschaft

$$l_{i,j}(\zeta_{i,k}) = \delta_{j,k}, \quad (2.34)$$

wobei  $\delta_{j,k}$  das Kroneckersymbol bezeichnet ( $\delta_{j,j} = 1, \delta_{i,j} = 0$  für  $i \neq j$ ), definiert. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass es aus numerischen Stabilitätsgründen vorteilhaft ist die Berechnung von (2.33) nicht direkt auf Basis der angegebenen Definition durchzuführen sondern auf die baryzentrische Formulierung [16] zurückzugreifen. Abbildung 2.10 zeigt die Ansatzfunktionen  $l_{i,j}(z)$  für  $M = 3, N_1 = 2, N_2 = 4$  und  $N_3 = 3$ .

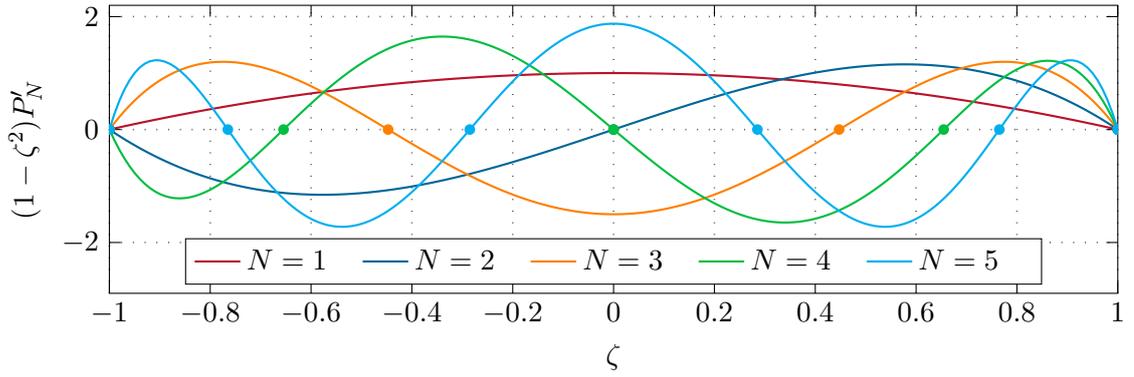


Abbildung 2.9: Skizze zur Definition der Legendre-Gauss-Lobatto Knoten bis zur Ordnung  $N = 5$ .

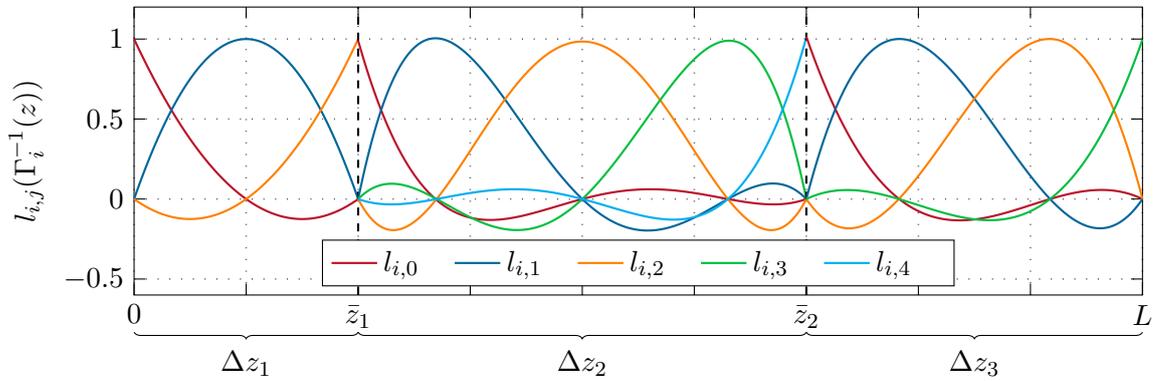


Abbildung 2.10: Lagrange Polynome für  $M = 3$ ,  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 4$  und  $N_3 = 3$ .

Mit

$$\Phi_{i,j}(z) = \begin{cases} l_{i,j}(\Gamma_i^{-1}(z)), & z \in \Omega_i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.35)$$

werden die Ansatzfunktionen (2.33) global auf dem Rechengebiet definiert.

Mit dieser Definition kann der Druck  $p_l(z, t)$  und der Fluss  $q_l(z, t)$  mittels

$$p_l(z, t) \approx \sum_{i=1}^M \sum_{j=0}^{N_i} p_{l,i,j}(t) \Phi_{i,j}(z) \quad (2.36a)$$

$$q_l(z, t) \approx \sum_{i=1}^M \sum_{j=0}^{N_i} q_{l,i,j}(t) \Phi_{i,j}(z) \quad (2.36b)$$

approximiert werden, wobei  $p_{l,i,j}(t)$  und  $q_{l,i,j}(t)$  den Drücken bzw. Flüssen am zugehörigen Legendre-Gauss-Lobatto Knoten entsprechen. Gemäß [16, 17] folgen für die PDGln aus

(2.26) die Differentialgleichungen

$$\bar{\mathbf{M}}_p \frac{d\bar{\mathbf{p}}_l}{dt} = \bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{q}}_l - q_l^*(L, t)\bar{\mathbf{e}}_{\bar{n}} + q_l^*(0, t)\bar{\mathbf{e}}_1 \quad (2.37a)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_q \frac{d\bar{\mathbf{q}}_l}{dt} = \bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{p}}_l - \bar{\mathbf{M}}_R \text{diag}(|\bar{\mathbf{q}}_l|)\bar{\mathbf{q}}_l - p_l^*(L, t)\bar{\mathbf{e}}_{\bar{n}} + p_l^*(0, t)\bar{\mathbf{e}}_1 \quad (2.37b)$$

in vektorieller Form. Dabei werden die Vektoren

$$\bar{\mathbf{p}}_l = \begin{bmatrix} p_{l,1,0} & \cdots & p_{l,1,N_1} & p_{l,2,0} & \cdots & p_{l,M,N_M} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \quad (2.38a)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_l = \begin{bmatrix} q_{l,1,0} & \cdots & q_{l,1,N_1} & q_{l,2,0} & \cdots & q_{l,M,N_M} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\bar{n}}, \quad (2.38b)$$

mit  $\bar{n} = \sum_{i=1}^M N_i + 1$ , die diagonalen Massenmatrizen

$$\bar{\mathbf{M}}_p = \frac{A_l}{2a_l^2 \rho_l} \text{diag} \left( \Delta z_1 \omega_{1,0} \quad \cdots \quad \Delta z_1 \omega_{1,N_1} \quad \Delta z_2 \omega_{2,0} \quad \cdots \quad \Delta z_M \omega_{M,N_M} \right) \quad (2.39a)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_q = \frac{\rho_l}{2A_l} \text{diag} \left( \Delta z_1 \omega_{1,0} \quad \cdots \quad \Delta z_1 \omega_{1,N_1} \quad \Delta z_2 \omega_{2,0} \quad \cdots \quad \Delta z_M \omega_{M,N_M} \right) \quad (2.39b)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_R = \frac{f_D \rho_l}{4A_l^2 D_l} \text{diag} \left( \Delta z_1 \omega_{1,0} \quad \cdots \quad \Delta z_1 \omega_{1,N_1} \quad \Delta z_2 \omega_{2,0} \quad \cdots \quad \Delta z_M \omega_{M,N_M} \right) \quad (2.39c)$$

mit den Gewichtungen für die Legendre-Gauss-Lobatto Quadratur

$$\omega_{i,j} = \frac{2}{N_i(N_i + 1)} \frac{1}{L_{N_i}(\zeta_{i,j})^2} \quad (2.40)$$

gemäß [15–17], die Konvektionsmatrix

$$\bar{\mathbf{S}} = \text{diag} \left( \bar{\mathbf{S}}_1, \bar{\mathbf{S}}_2, \dots, \bar{\mathbf{S}}_M \right) \quad (2.41)$$

mit

$$\bar{\mathbf{S}}_i = \begin{bmatrix} \omega_{i,0} \frac{dl_{i,0}(\zeta)}{d\zeta}(\zeta_0) & \cdots & \omega_{i,N_i} \frac{dl_{i,0}(\zeta)}{d\zeta}(\zeta_{N_i}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{i,0} \frac{dl_{i,N_i}(\zeta)}{d\zeta}(\zeta_0) & \cdots & \omega_{i,N_i} \frac{dl_{i,N_i}(\zeta)}{d\zeta}(\zeta_{N_i}) \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

mit  $i \in [1, M]$  und die Einheitsvektoren  $\bar{\mathbf{e}}_1$  bzw.  $\bar{\mathbf{e}}_{\bar{n}} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ , definiert. Die Größen  $p_l^*$  und  $q_l^*$  ermöglichen die Berücksichtigung der geforderten Randbedingungen und werden im nachfolgenden Abschnitt genauer beschrieben.

Die Matrix  $\bar{\mathbf{S}}_i$  hat die Struktur

$$\bar{\mathbf{S}}_i = \begin{bmatrix} -0.5 & * & \cdots & \cdots & * \\ * & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & * \\ * & \cdots & \cdots & * & 0.5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_i+1 \times N_i+1}, \quad (2.43)$$

welche für Untersuchungen in den nachfolgenden Kapiteln interessant ist. Für die Elemente von  $\bar{\mathbf{S}}_i$  mit  $k \neq l$  gilt dabei  $\bar{S}_i[k, l] = -\bar{S}_i[l, k]$ . Aufgrund der Kopplungsbedingungen

$$p_{l,i,N_i}(t) = p_{l,i+1,0}(t) \quad (2.44a)$$

$$q_{l,i,N_i}(t) = q_{l,i+1,0}(t) \quad (2.44b)$$

sind die Einträge an den Übergängen der Elemente gleich, womit die Dimension von  $\bar{\mathbf{p}}_l$ ,  $\bar{\mathbf{q}}_l$ , der Massenmatrizen  $\bar{\mathbf{M}}_p$ ,  $\bar{\mathbf{M}}_q$  und  $\bar{\mathbf{M}}_R$  und der Konvektionsmatrix  $\bar{\mathbf{S}}$  für eine eindeutige Formulierung reduziert werden muss. Die Transformation

$$\bar{\mathbf{p}}_l = \mathbf{T}\mathbf{p}_l \quad (2.45a)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_l = \mathbf{T}\mathbf{q}_l, \quad (2.45b)$$

mit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times N_1} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times N_{M-1}} & \mathbf{0}_{1 \times N_M} \\ \mathbf{0}_{N_1+1 \times 1} & \mathbf{H}_{N_1} & \cdots & \mathbf{0}_{N_1+1 \times N_{M-1}} & \mathbf{0}_{N_1+1 \times N_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{N_{M-1}+1 \times 1} & \mathbf{0}_{N_{M-1}+1 \times N_1} & \cdots & \mathbf{H}_{N_{M-1}} & \mathbf{0}_{N_{M-1}+1 \times N_M} \\ \mathbf{0}_{N_M \times 1} & \mathbf{0}_{N_M \times N_1} & \cdots & \mathbf{0}_{N_M \times N_{M-1}} & \mathbf{E}_{N_M} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

und

$$\mathbf{H}_{N_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

führt auf eine Formulierung ohne redundante Einträge [17]. Die Massenmatrizen und die Konvektionsmatrix transformieren sich dabei zu

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{M}}_p \mathbf{T} \quad (2.48a)$$

$$\mathbf{M}_q = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{M}}_q \mathbf{T} \quad (2.48b)$$

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{M}}_R \mathbf{T} \quad (2.48c)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{S}} \mathbf{T}. \quad (2.48d)$$

Für die Vektoren  $\mathbf{p}_l$  und  $\mathbf{q}_l$  gilt  $\mathbf{p}_l, \mathbf{q}_l \in \mathbb{R}^n$  mit  $n = 1 + \sum_{i=1}^M N_i$ . Die Massenmatrizen  $\mathbf{M}_p$ ,



Eine numerisch stabile Möglichkeit stellt die Wahl

$$p_l^l(0, t) = p_{l,1,0} \quad (2.52a)$$

$$p_l^r(0, t) = p_{l,1,0} \quad (2.52b)$$

$$q_l^l(0, t) = 2q_v(p_l^*(0, t), u) - q_{l,1,0} \quad (2.52c)$$

$$q_l^r(0, t) = q_{l,1,0} \quad (2.52d)$$

mit  $q_v$  aus (2.13) bzw. (2.18), dar [15]. Mit dieser Wahl folgt

$$p_l^*(0, t) = p_{l,1,0} + \frac{a_l \rho_l}{A_l} (q_v(p_l^*(0, t), u) - q_{l,1,0}) \quad (2.53a)$$

$$q_l^*(0, t) = q_v(p_l^*(0, t), u) \quad (2.53b)$$

Aufgrund der Fallunterscheidung in (2.13) und (2.18) muss bei der Lösung von (2.53a) zwischen, positiver und negativer Ventilposition  $u$  unterschieden werden. Ohne Ventilleckage gilt es eine quadratische Gleichung zu lösen. Mit Ventilleckage ergibt sich ein Polynom vierter Ordnung welches mittels Newton-Raphson-Verfahren gelöst wird [18–20]. Das zu lösende Gleichungssystem ist für die Rohrleitung  $\textcircled{a}$  mit Ventilleckage im Bereich  $-u_{off} < u < u_{off}$  beispielhaft angeschrieben

$$\begin{aligned} p_{l,a}^*(0, t) = p_{l,a,1,0} + \frac{a_{l,a} \rho_{l,a}}{A_{l,a}} K_{v,a} \left( \sqrt{p_s - p_{l,a}^*(0, t)} (u + u_{off}) \right. \\ \left. - \sqrt{p_{l,a}^*(0, t) - p_t} (u_{off} - u) - q_{l,a,1,0} \right) \quad (2.54) \end{aligned}$$

Dabei wird zur besseren Lesbarkeit  $p_s > p_{l,a}^*(0, t) > p_t$  angenommen, was in allen Arbeitsbereichen dieser Arbeit gerechtfertigt ist. Die Randwerte am Ende der Leitungen werden zu

$$p_l^l(L, t) = p_{l,M,N_M} \quad (2.55a)$$

$$p_l^r(L, t) = 2p_z - p_{l,M,N_M} \quad (2.55b)$$

$$q_l^l(L, t) = q_{l,M,N_M} \quad (2.55c)$$

$$q_l^r(L, t) = q_{l,M,N_M} \quad (2.55d)$$

mit dem Zylinderkammerdruck  $p_z$  gewählt. Daraus folgt

$$p_l^*(L, t) = p_z \quad (2.56a)$$

$$q_l^*(L, t) = q_{l,M,N_M} + \frac{A_l}{a_l \rho_l} (p_{l,M,N_M} - p_z) \quad (2.56b)$$

Mit diesem Ergebnis sind alle nötigen Gleichungen zur mathematischen Beschreibung des Systems gegeben. Die Druckaufbaugleichungen des Zylinders (2.11), die diskretisierten Differentialgleichungen für die Rohrleitungen (2.50), sowie die Volumenstromgleichungen (2.18), seien hier noch einmal zusammengefasst.

$$\dot{\mathbf{x}}_z = \mathbf{f}_z(\mathbf{x}_z) + \mathbf{g}_z(\mathbf{x}_z) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{n,a}^T \mathbf{q}_{l,a} \\ \mathbf{e}_{n,b}^T \mathbf{q}_{l,b} \end{bmatrix} \quad (2.57a)$$

$$\mathbf{M}_{p,a} \frac{d\mathbf{p}_{l,a}}{dt} = \left( \mathbf{S}_a - \mathbf{e}_{n,a} \mathbf{e}_{n,a}^T \right) \mathbf{q}_{l,a} - \frac{A_{l,a}}{a_{l,a} \rho_{l,a}} \left( \mathbf{e}_{n,a} \mathbf{e}_{n,a}^T \mathbf{p}_{l,a} - p_{z,a} \mathbf{e}_{n,a} \right) + q_{l,a}^*(0, t) \mathbf{e}_{1,a} \quad (2.57b)$$

$$\mathbf{M}_{q,a} \frac{d\mathbf{q}_{l,a}}{dt} = \mathbf{S}_a \mathbf{p}_{l,a} - \mathbf{M}_{R,a} \text{diag}(|\mathbf{q}_{l,a}|) \mathbf{q}_{l,a} - p_{z,a} \mathbf{e}_{n,a} + p_{l,a}^*(0, t) \mathbf{e}_{1,a} \quad (2.57c)$$

$$\mathbf{M}_{p,b} \frac{d\mathbf{p}_{l,b}}{dt} = \left( \mathbf{S}_b - \mathbf{e}_{n,b} \mathbf{e}_{n,b}^T \right) \mathbf{q}_{l,b} - \frac{A_{l,b}}{a_{l,b} \rho_{l,b}} \left( \mathbf{e}_{n,b} \mathbf{e}_{n,b}^T \mathbf{p}_{l,b} - p_{z,b} \mathbf{e}_{n,b} \right) + q_{l,b}^*(0, t) \mathbf{e}_{1,b} \quad (2.57d)$$

$$\mathbf{M}_{q,b} \frac{d\mathbf{q}_{l,b}}{dt} = \mathbf{S}_b \mathbf{p}_{l,b} - \mathbf{M}_{R,b} \text{diag}(|\mathbf{q}_{l,b}|) \mathbf{q}_{l,b} - p_{z,b} \mathbf{e}_{n,b} + p_{l,b}^*(0, t) \mathbf{e}_{1,b} \quad (2.57e)$$

$$q_{s,a} = \begin{cases} K_{v,a} \sqrt{|p_s - p_{l,a}^*(0, t)|} \text{sign}(p_s - p_{l,a}^*(0, t)) (u + u_{off}), & u > -u_{off} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.57f)$$

$$q_{t,a} = \begin{cases} K_{v,a} \sqrt{|p_{l,a}^*(0, t) - p_t|} \text{sign}(p_{l,a}^*(0, t) - p_t) (u_{off} - u), & u < u_{off} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.57g)$$

$$q_{s,b} = \begin{cases} K_{v,b} \sqrt{|p_s - p_{l,b}^*(0, t)|} \text{sign}(p_s - p_{l,b}^*(0, t)) (u_{off} - u), & u < u_{off} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.57h)$$

$$q_{t,b} = \begin{cases} K_{v,b} \sqrt{|p_{l,b}^*(0, t) - p_t|} \text{sign}(p_{l,b}^*(0, t) - p_t) (u + u_{off}), & u > -u_{off} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.57i)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_v = \mathbf{A}_v \mathbf{x}_v + \mathbf{b}_v u_{lim} \quad (2.57j)$$

$$u = \mathbf{c}_v^T \mathbf{x}_v \quad (2.57k)$$

$$p_{l,a}^*(0, t) = p_{l,a,1,0} + \frac{a_{l,a} \rho_{l,a}}{A_{l,a}} \left( q_{s,a} \left( p_{l,a}^*(0, t), u \right) - q_{t,a} \left( p_{l,a}^*(0, t), u \right) - q_{l,a,1,0} \right) \quad (2.57l)$$

$$q_{l,a}^*(0, t) = q_{s,a} \left( p_{l,a}^*(0, t), u \right) - q_{t,a} \left( p_{l,a}^*(0, t), u \right) \quad (2.57m)$$

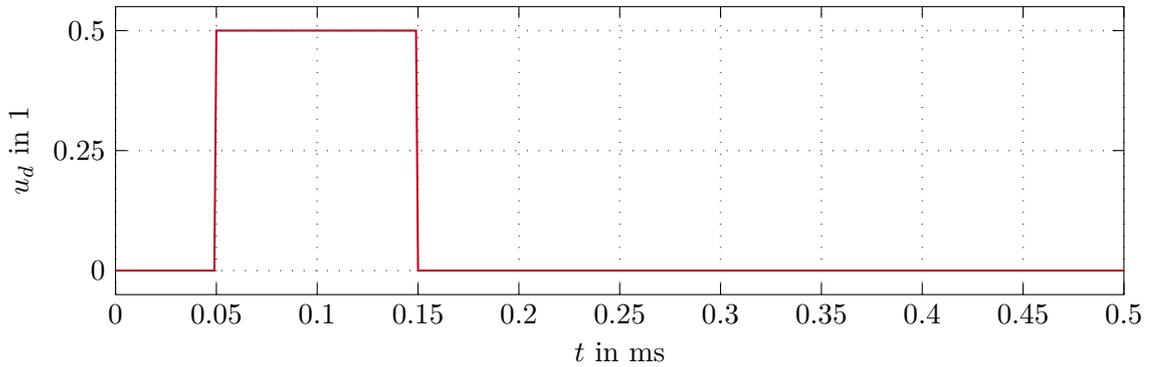
$$p_{l,b}^*(0, t) = p_{l,b,1,0} + \frac{a_{l,b} \rho_{l,b}}{A_{l,b}} \left( q_{s,b} \left( p_{l,b}^*(0, t), u \right) - q_{t,b} \left( p_{l,b}^*(0, t), u \right) - q_{l,b,1,0} \right) \quad (2.57n)$$

$$q_{l,b}^*(0, t) = q_{s,b} \left( p_{l,b}^*(0, t), u \right) - q_{t,b} \left( p_{l,b}^*(0, t), u \right) \quad (2.57o)$$

Sie bilden die Basis für alle weiteren Simulationen und Reglerentwurfverfahren.

## 2.5 Simulationen des Gesamtmodells

In diesem Abschnitt werden einige Simulationen mit dem Gesamtmodell nach (2.57) durchgeführt. Zunächst werden die Ergebnisse der SEM und der MOC verglichen. Auf diese Weise kann untersucht werden, welche Wahl der Parameter der Diskretisierung für die SEM sinnvoll ist. Zur besseren Interpretierbarkeit wird bei der nachfolgenden Simulation die Leckage im Ventil vernachlässigt. Für das System wird ein rechteckförmiger Verlauf der Ventilposition entsprechend Abbildung 2.11 vorgegeben. Für die MOC

Abbildung 2.11: Rechteckförmige Vorgabe der Ventilposition  $u_d$ .

werden 1001 äquidistante Punkte entlang einer Leitung zur Diskretisierung verwendet. Diese Punktzahl ist so groß gewählt, dass eine Erhöhung der Diskretisierungspunkte die Genauigkeit der MOC nicht mehr erhöht. Für die SEM folgen zwei Simulationen. Bei der ersten Simulation werden die Rohrleitungen in  $M = 2$  Elemente geteilt und auf jedem dieser Element Ansatzfunktionen der Ordnung  $N_i = 2$  gewählt. Daraus ergeben sich  $N = 5$  Diskretisierungspunkte für jede Leitung. Bei der zweiten Simulation werden die Rohrleitungen in  $M = 3$  Teile geteilt und auf jedem Element werden Ansatzfunktionen der Ordnung  $N_i = 3$  gewählt, woraus sich  $N = 10$  Diskretisierungspunkte pro Druckleitung ergeben. Abbildung 2.12 zeigt die Ergebnisse der Simulation. Bei der Diskretisierung mit nur  $N = 5$  Punkten liefert die SEM bereits eine grobe Approximation der MOC Lösung. Druckspitzen können mit dieser Diskretisierung jedoch nicht genau genug aufgelöst werden. Die SEM mit  $N = 10$  Punkten bildet diese wesentlich besser ab. Man erkennt außerdem, dass das mechanische Teilsystem sowohl mit  $N = 5$  als auch mit  $N = 10$  Punkten gut abgebildet wird. Wie sich zeigt, stellt die SEM mit  $N = 10$  für die weiteren Simulationen in dieser Arbeit einen geeigneten Mittelweg zwischen Rechenaufwand und Approximationsgenauigkeit dar.

In der nachfolgenden Simulation wird der Einfluss der Rohrleitungslängen auf das dynamische Verhalten des Gesamtsystems näher untersucht. Dazu wird das Verhalten des Systems bei verschiedenen Rohrleitungslängen simuliert.  $L_{nom}$  bezeichnet in weiterer Folge die nominellen Druckleitungslängen  $L_a$  und  $L_b$  gemäß Tabelle A.1. Als Soll-Vorgabe für die Ventilstellung wird wiederum der Verlauf aus Abbildung 2.11 gewählt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 2.13 dargestellt. Die Simulation zeigt, dass sich mit steigender Rohrleitungslänge eine immer größere Periodendauer in den Schwingungen einstellt. Dies ist auf die Wellenlaufzeit  $T_l = L/a_l$  zurückzuführen. Außerdem führt die Wellenlaufzeit dazu, dass die Änderung in der Ventilstellung bei nomineller Rohrlänge erst nach einer Verzögerung von  $T_{l,a,nom} \approx 11$  ms in den Zylinderdrücken zu erkennen ist. Man erkennt außerdem deutlich, dass sich die Zustände zum Zeitpunkt  $t = 0.15$  s unterscheiden, was zu unterschiedlichem Schwingungsverhalten bei geschlossenem Ventil führt.

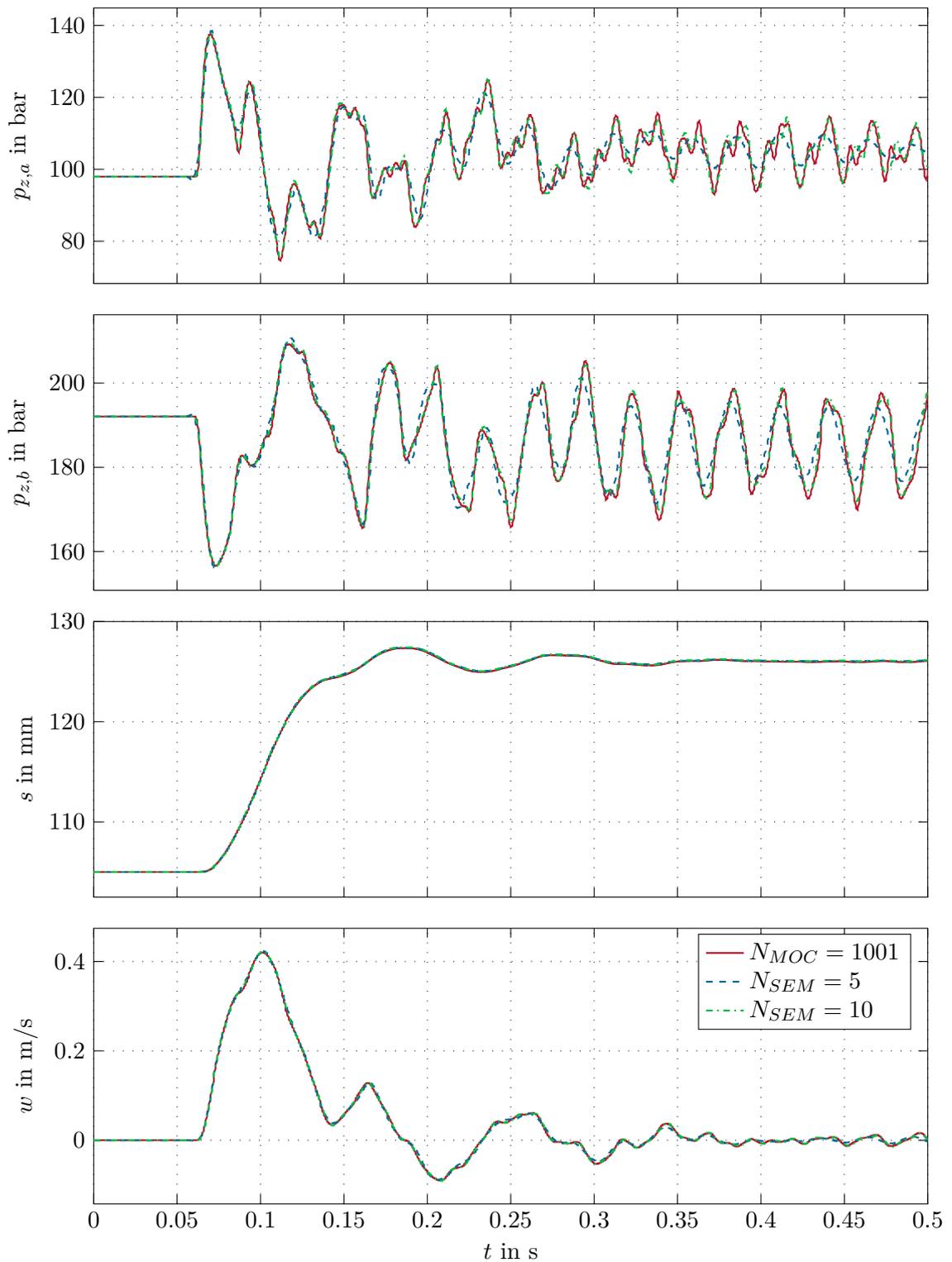


Abbildung 2.12: Vergleich der SEM und MOC Lösung des Gesamtsystems bei rechteckförmiger Vorgabe der Ventilposition  $u_d$  nach Abbildung 2.11.

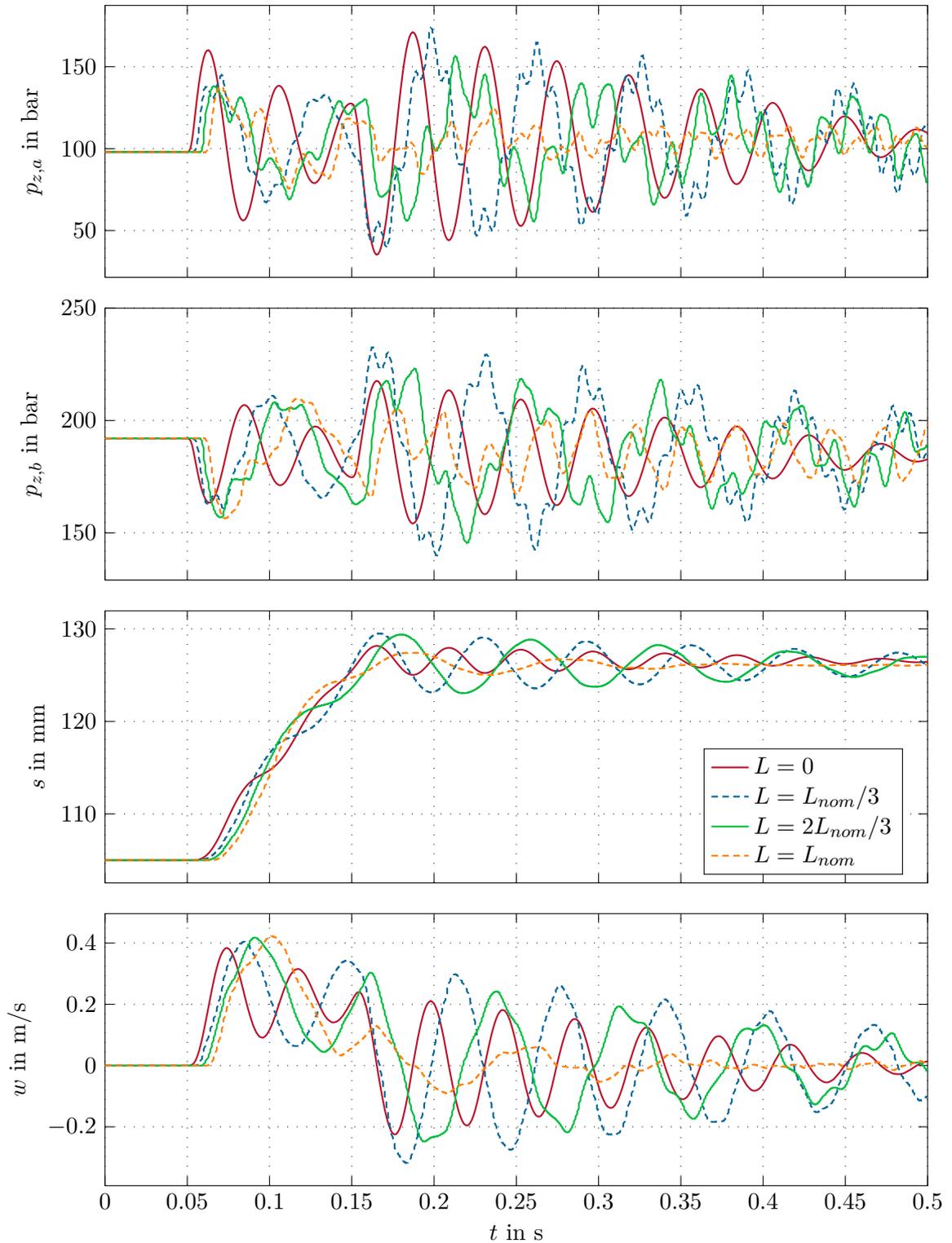


Abbildung 2.13: Einfluss der Rohrleitungslängen auf das Gesamtsystem bei rechteckförmiger Vorgabe der Ventilposition  $u_d$  nach Abbildung 2.11.

## 3 Exakte Eingangs-Ausgangslinearisierung

In diesem Kapitel wird basierend auf den Modellen aus Kapitel 2 eine Zustandsrückführung für das hydraulische System ohne Rohrleitungen entworfen. Für nichtlineare Systeme mit affinem Eingang wie (2.57) bietet sich die exakte Eingangs-Ausgangslinearisierung als Entwurfsverfahren an [10]. Das Ziel der Regelungsaufgabe ist es einer vorgegebene Druckkrafttrajektorie zu folgen. Dazu wird in Abschnitt 3.1 der Entwurf des Stellgesetzes diskutiert. In Abschnitt 3.1.1 wird der Regler anschließend am hydraulischen System ohne Rohrleitungen simulativ getestet. Abschließend zeigt der Abschnitt 3.2 den Einfluss der Druckleitungen auf den geschlossenen Kreis. In Abschnitt 3.3 wird die Berücksichtigung der Leitungen im Regler untersucht.

### 3.1 Reglerentwurf ohne Rohrleitungen

Das System ohne Rohrleitungen ist in (2.25) zusammengefasst. Beim Reglerentwurf werden die Ventilleckage sowie die (sehr schnelle) Ventildynamik (2.16) vernachlässigt. Für den Reglerentwurf ist es sinnvoll zuerst eine reguläre Zustandstransformation

$$\mathbf{x}_T = \begin{bmatrix} F_z \\ p_\Sigma \\ s \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{z,a} & -A_{z,b} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_a \\ p_b \\ s \\ w \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

auf die neuen Zustände in Form der Zylinderkraft  $F_z$  gemäß (2.8) und des Summendrucks

$$p_\Sigma = p_{z,a} + p_{z,b} \quad (3.2)$$

durchzuführen. Mit dieser Transformation kann das System ohne Rohrleitung auf die Form

$$\dot{\mathbf{x}}_T = \mathbf{f}_T(\mathbf{x}_T) + \mathbf{g}_T(\mathbf{x}_T)u, \quad (3.3)$$

mit den transformierten Zuständen  $\mathbf{x}_T$  aus (3.1) und der Stellgröße  $u$  gebracht werden. Da die Ventildynamik für den Reglerentwurf vernachlässigt wird, entspricht die Stellgröße  $u$  hier direkt der momentanen Ventilstellung. Aus (2.25) folgt

$$\mathbf{f}_T(\mathbf{x}_T) = \begin{bmatrix} -\beta w \left( \frac{A_{z,a}}{s+s_{0,a}} + \frac{A_{z,b}}{s_{max}-s+s_{0,b}} \right) \\ -\beta w \left( \frac{1}{s+s_{0,a}} - \frac{1}{s_{max}-s+s_{0,b}} \right) \\ w \\ \frac{1}{m} \left( F_z - c(s - s_{0,c}) - r_0 \tanh\left(\frac{w}{w_0}\right) - r_1 w \right) \end{bmatrix} \quad (3.4a)$$

und

$$\mathbf{g}_T(\mathbf{x}_T) = \begin{cases} \mathbf{g}_T^+(\mathbf{x}_T) & \text{für } u \geq 0 \\ \mathbf{g}_T^-(\mathbf{x}_T) & \text{für } u < 0 \end{cases} \quad (3.4b)$$

mit

$$\mathbf{g}_T^+(\mathbf{x}_T) = \begin{bmatrix} \beta \left( \frac{K_{v,a}}{s+s_{0,a}} \sqrt{p_s - \frac{A_{z,b}p_\Sigma + F_z}{A_{z,a} + A_{z,b}}} + \frac{K_{v,b}}{s_{max} - s + s_{0,b}} \sqrt{\frac{A_{z,a}p_\Sigma - F_z}{A_{z,a} + A_{z,b}} - p_t} \right) \\ \beta \left( \frac{K_{v,a}}{A_{z,a}(s+s_{0,a})} \sqrt{p_s - \frac{A_{z,b}p_\Sigma + F_z}{A_{z,a} + A_{z,b}}} - \frac{K_{v,b}}{A_{z,b}(s_{max} - s + s_{0,b})} \sqrt{\frac{A_{z,a}p_\Sigma - F_z}{A_{z,a} + A_{z,b}} - p_t} \right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4c)$$

$$\mathbf{g}_T^-(\mathbf{x}_T) = \begin{bmatrix} \beta \left( \frac{K_{v,a}}{s+s_{0,a}} \sqrt{\frac{A_{z,b}p_\Sigma + F_z}{A_{z,a} + A_{z,b}} - p_t} + \frac{K_{v,b}}{s_{max} - s + s_{0,b}} \sqrt{p_s - \frac{A_{z,a}p_\Sigma - F_z}{A_{z,a} + A_{z,b}}} \right) \\ \beta \left( \frac{K_{v,a}}{A_{z,a}(s+s_{0,a})} \sqrt{\frac{A_{z,b}p_\Sigma + F_z}{A_{z,a} + A_{z,b}} - p_t} - \frac{K_{v,b}}{A_{z,b}(s_{max} - s + s_{0,b})} \sqrt{p_s - \frac{A_{z,a}p_\Sigma - F_z}{A_{z,a} + A_{z,b}}} \right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \quad (3.4d)$$

Um die Formulierung kompakt zu halten wurde in (3.4)  $p_s > p_{z,a}, p_{z,b} > p_t$  angenommen, was in allen Arbeitsbereichen dieser Arbeit gerechtfertigt ist. Als zu regelnder Ausgang wird die Zylinderkraft

$$y = h_T(\mathbf{x}_T) = F_z \quad (3.5)$$

gewählt. Aus der zeitlichen Ableitung des Ausgangs

$$\dot{y} = L_{\mathbf{f}_T} h_T(\mathbf{x}_T) + L_{\mathbf{g}_T} h_T(\mathbf{x}_T) u, \quad (3.6)$$

mit den Lie-Ableitungen

$$L_{\mathbf{f}_T} h_T(\mathbf{x}_T) = \frac{\partial h_T(\mathbf{x}_T)}{\partial \mathbf{x}_T} \mathbf{f}_T(\mathbf{x}_T) \quad (3.7a)$$

$$L_{\mathbf{g}_T} h_T(\mathbf{x}_T) = \frac{\partial h_T(\mathbf{x}_T)}{\partial \mathbf{x}_T} \mathbf{g}_T(\mathbf{x}_T) \quad (3.7b)$$

erkennt man, dass die Stellgröße  $u$  bereits in der ersten zeitlichen Ableitung des Ausgangs  $y$  auftritt. Das System hat daher einen relativen Grad von  $r = 1$  [10]. Daraus folgt, dass die Nulldynamik die Dimension  $n_T - r = 3$  besitzt. Für die Stabilität des geschlossenen Kreises ist es wesentlich, dass die Nulldynamik stabil ist. Die Stabilität der Nulldynamik wird simulativ gezeigt.

Mit der Zustandsrückführung

$$u = \frac{1}{L_{\mathbf{g}_T} h_T(\mathbf{x}_T)} (\tilde{u} - L_{\mathbf{f}_T} h_T(\mathbf{x}_T)) \quad (3.8)$$

erhält man ein lineares Eingangs- Ausgangsverhalten vom neuen Eingang  $\tilde{u}$  zum Ausgang  $y$ . Entsprechend (3.4b) muss hier zwischen positiven und negativen Stellgrößen

$$u_+ = \frac{\tilde{u} + \beta w \left( \frac{A_{z,a}}{s+s_{0,a}} + \frac{A_{z,b}}{s_{max} - s + s_{0,b}} \right)}{\beta \left( \frac{K_{v,a}}{s+s_{0,a}} \sqrt{p_s - \frac{A_{z,b}p_\Sigma + F_z}{A_{z,a} + A_{z,b}}} + \frac{K_{v,b}}{s_{max} - s + s_{0,b}} \sqrt{\frac{A_{z,a}p_\Sigma - F_z}{A_{z,a} + A_{z,b}} - p_t} \right)} \quad (3.9a)$$

$$u_- = \frac{\tilde{u} + \beta w \left( \frac{A_{z,a}}{s+s_{0,a}} + \frac{A_{z,b}}{s_{max}-s+s_{0,b}} \right)}{\beta \left( \frac{K_{v,a}}{s+s_{0,a}} \sqrt{\frac{A_{z,b}p\Sigma+F_z}{A_{z,a}+A_{z,b}}} - pt + \frac{K_{v,b}}{s_{max}-s+s_{0,b}} \sqrt{ps - \frac{A_{z,a}p\Sigma-F_z}{A_{z,a}+A_{z,b}}} \right)} \quad (3.9b)$$

unterschieden werden.

Um einer vorgegebenen Krafttrajektorie  $y_d$  folgen zu können und bleibende Regelabweichungen trotz Modellunsicherheiten und Parameterungenauigkeiten zu vermeiden, wird für die Eingangsgröße  $\tilde{u}$  das Stellgesetz

$$\tilde{u} = \dot{y}_d - k_1(y - y_d) - k_0 \int_0^t (y - y_d) d\tau, \quad (3.10)$$

mit den Konstanten,  $k_0, k_1 > 0$ , gewählt. Die Konstanten  $k_0$  und  $k_1$  werden später durch Simulationsstudien ermittelt.

### 3.1.1 Simulationsergebnisse

In diesem Abschnitt wird die Funktion des, basierend auf exakter Eingangs-Ausgangslinearisation entworfenen, Reglers am System ohne Rohrleitung getestet. Für die nachfolgenden Untersuchungen wird von einem Sollkraftverlauf entsprechend Abbildung 3.1 ausgegangen. Dabei handelt es sich um drei Arbeitspunktwechsel bei denen, ausgehend von  $y_0 = 0$  kN

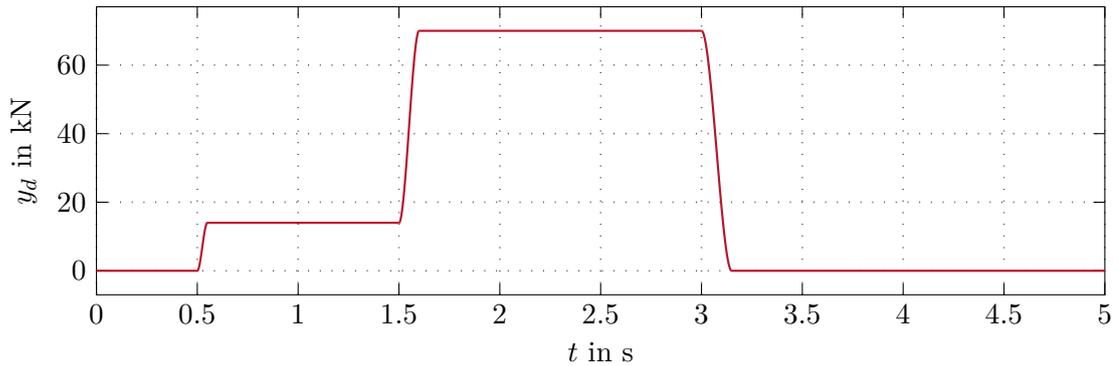


Abbildung 3.1: Solltrajektorie für die Zylinderkraft  $F_{z,d}$ .

die stationären Punkte  $y_1 = 14$  kN,  $y_2 = 70$  kN und  $y_3 = 0$  kN angefahren werden. Der Übergang zwischen den Arbeitspunkten wird dabei in der Form

$$y_d(t) = y_j + (y_{j+1} - y_j) \sum_{i=r+1}^{2r+1} \xi_i \left( \frac{t - t_{j,0}}{t_{j,1} - t_{j,0}} \right)^i, \quad j \in [0, 2], \quad t \in [t_{j,0}, t_{j,1}] \quad (3.11)$$

mit den Übergangszeiten

$$t_{0,0} = 0,5 \text{ s} \quad t_{0,1} = 0,55 \text{ s} \quad (3.12a)$$

$$t_{1,0} = 1,5 \text{ s} \quad t_{1,1} = 1,6 \text{ s} \quad (3.12b)$$

$$t_{2,0} = 3 \text{ s} \quad t_{2,1} = 3,15 \text{ s} \quad (3.12c)$$

und den Koeffizienten  $\xi_2 = 3$  und  $\xi_3 = -2$  gewählt [21]. Durch diese Wahl wird sichergestellt, dass  $y_d$   $r$ -fach stetig differenzierbar ist und damit den im Entwurf getroffenen Annahmen entspricht. Um Abweichungen übersichtlicher darzustellen wird der Fehler der Kraft

$$e_{F_z} = F_z - F_{z,d} \quad (3.13)$$

definiert. Der Regler wird mit einer Reglerabtastratezeit von  $T_s = 1$  ms implementiert und Messrauschen wird vernachlässigt. Simulationsstudien zeigen, dass die Parameter  $k_0 = 10$  und  $k_1 = 650$  eine gute Wahl darstellen. In der ersten Simulation wird die Ventilleckage vernachlässigt. Das Ergebnis ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Der geschlossene Kreis kann dem ersten Arbeitspunktwechsel sehr gut folgen. In der Stellgröße ist gut zu erkennen, dass ein mögliches Überschwingen in der Kraft kompensiert wird. Im Zylinderhub  $s$  und dessen Ableitung  $w$  erkennt man, dass es zu gedämpften Schwingungen kommt, was die Stabilität der Nulldynamik zeigt. Beim zweiten und dritten Arbeitspunktwechsel wird die Stellgrößenbeschränkung von  $\pm 1$  erreicht. Bis zum Erreichen der Beschränkung folgt die Kraft der Vorgabe. Die schlagartige Beschränkung in  $u$  führt zu einer Schwingung in der Kraft. Stationär kommt es zu keinen Abweichungen.

In der nächsten Simulation wird die Ventilleckage im Simulationsmodell berücksichtigt. Die Reglerparameter werden dabei wieder zu  $k_0 = 10$  und  $k_1 = 650$  gewählt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.3 dargestellt. In dieser Simulation erkennt man, dass es aufgrund der Ventilleckage zu Schwingungen in der Kraft kommt. Diese sind auf die geänderte Steigung der Flüsse  $q_{v,a}$  und  $q_{v,b}$  in Abhängigkeit von  $u$ , wie auch in Abbildung 2.7 gezeigt, zurückzuführen. Für Stellgrößen  $-u_{off} < u < u_{off}$  hat sich die Kompensation (3.9) daher im Vergleich zur vorherigen Simulation verschlechtert. Man erkennt, dass es bei kleinen Stellgrößen daher zu einer Überkompensation der Kraft kommt. Stationär stellt sich allerdings auch bei dieser Regelung die gewünschte Kraft ein.

Zum Vergleich ist in Abbildung 3.4 der erste Arbeitspunktwechsel mit und ohne Ventilleckage dargestellt. Man erkennt, dass es sowohl ohne als auch mit Ventilleckage zu Schwankungen in der Kraft kommt. Diese sind auf die Knicke in der Ventilkennlinie gemäß Abbildung 2.7 sowie die Abtastratezeit zurückzuführen. Dass dieser Effekt auch ohne Ventilleckage vorhanden ist, liegt daran, dass durch die Abtastratezeit  $T_s$  die Umschaltung zwischen  $u_+$  und  $u_-$  gemäß (3.9) nicht perfekt erfolgen kann.

## 3.2 Test der Eingangs-Ausgangslinearisierung mit Rohrleitungen

In diesem Abschnitt wird der entworfene Regler auf das System mit Rohrleitungen aufgeschaltet. Um nur den Einfluss der Druckleitungen darzustellen wird die Ventilleckage in dieser Simulation vernachlässigt. Es werden Simulationen mit den Rohrleitungslängen  $L_{nom}/15$  und  $L_{nom}/5$  durchgeführt. Um die Stabilität des geschlossenen Kreises zu gewährleisten werden für die Simulation mit  $L_{nom}/15$  die Reglerparameter  $k_0 = 10$  und  $k_1 = 650$ , und für  $L_{nom}/5$  die Reglerparameter  $k_0 = 0.1$  und  $k_1 = 4$  verwendet. Die Ergebnisse der Simulationen sind in Abbildung 3.5 dargestellt. Die Abbildung zeigt, dass der Regler für kurze Rohrleitungen ein Ergebnis liefert, welches kaum vom Verhalten des geschlossenen Kreises ohne Rohrleitungen zu unterscheiden ist. Für die Simulation mit  $L_{nom}/5$  muss für ein stabiles Ergebnis ein langsamerer Regler verwendet werden. Ein schneller eingestellter

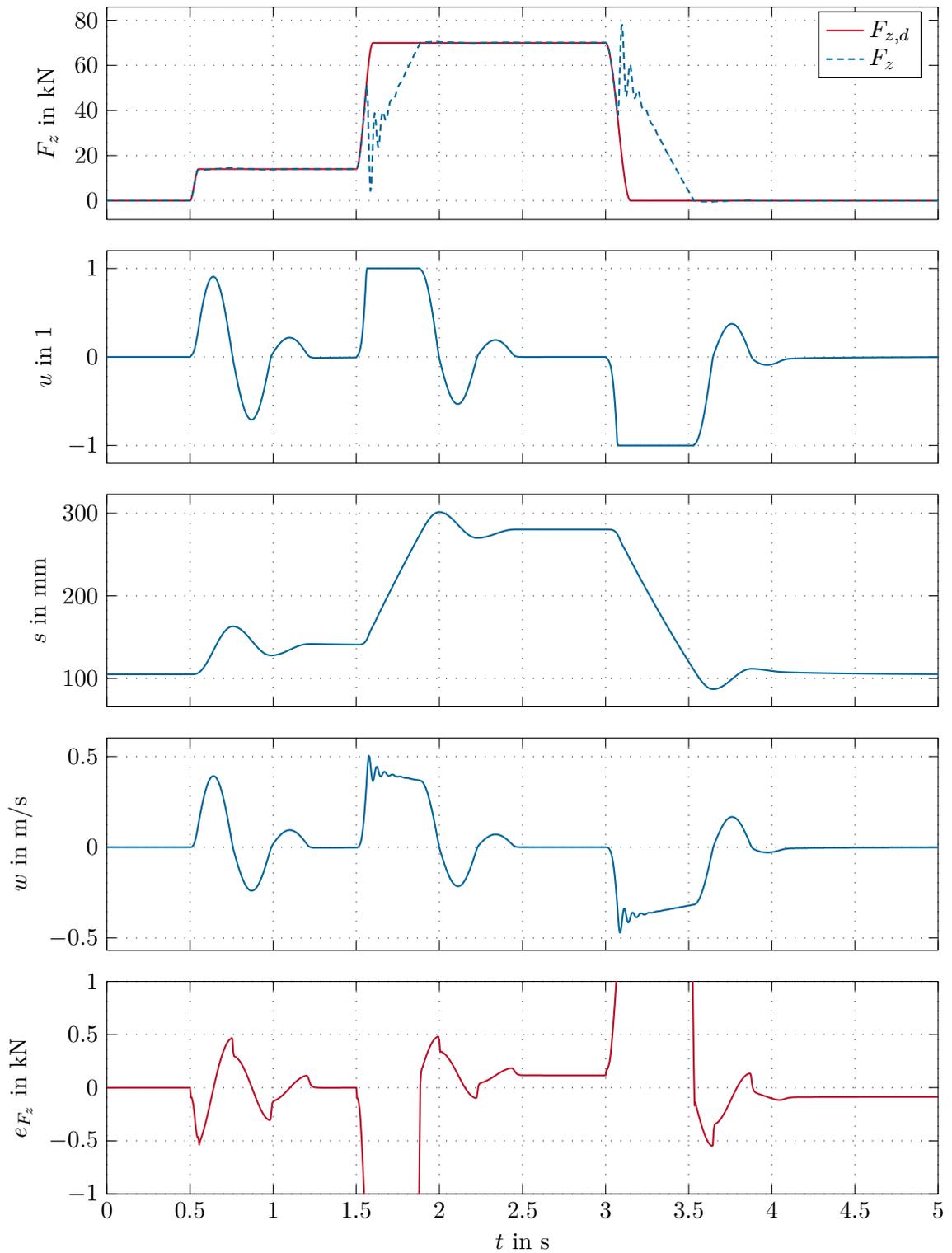


Abbildung 3.2: Regelung des Systems ohne Rohrleitungen und ohne Ventilleckage mittels Eingangs-Ausganglinearisierung.

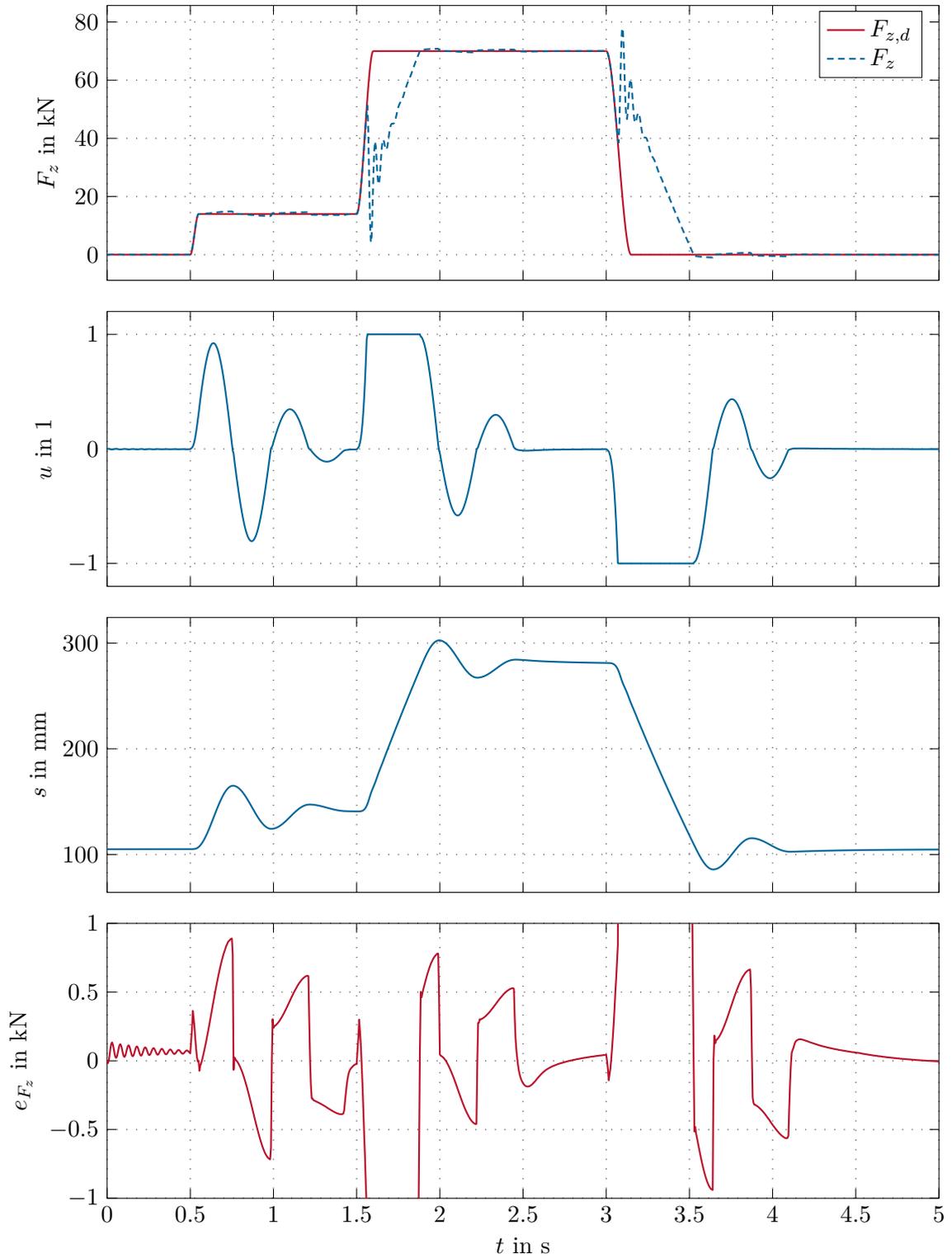


Abbildung 3.3: Regelung des Systems ohne Rohrleitungen und mit Ventilleckage mittels Eingangs-Ausgangslinearisierung.

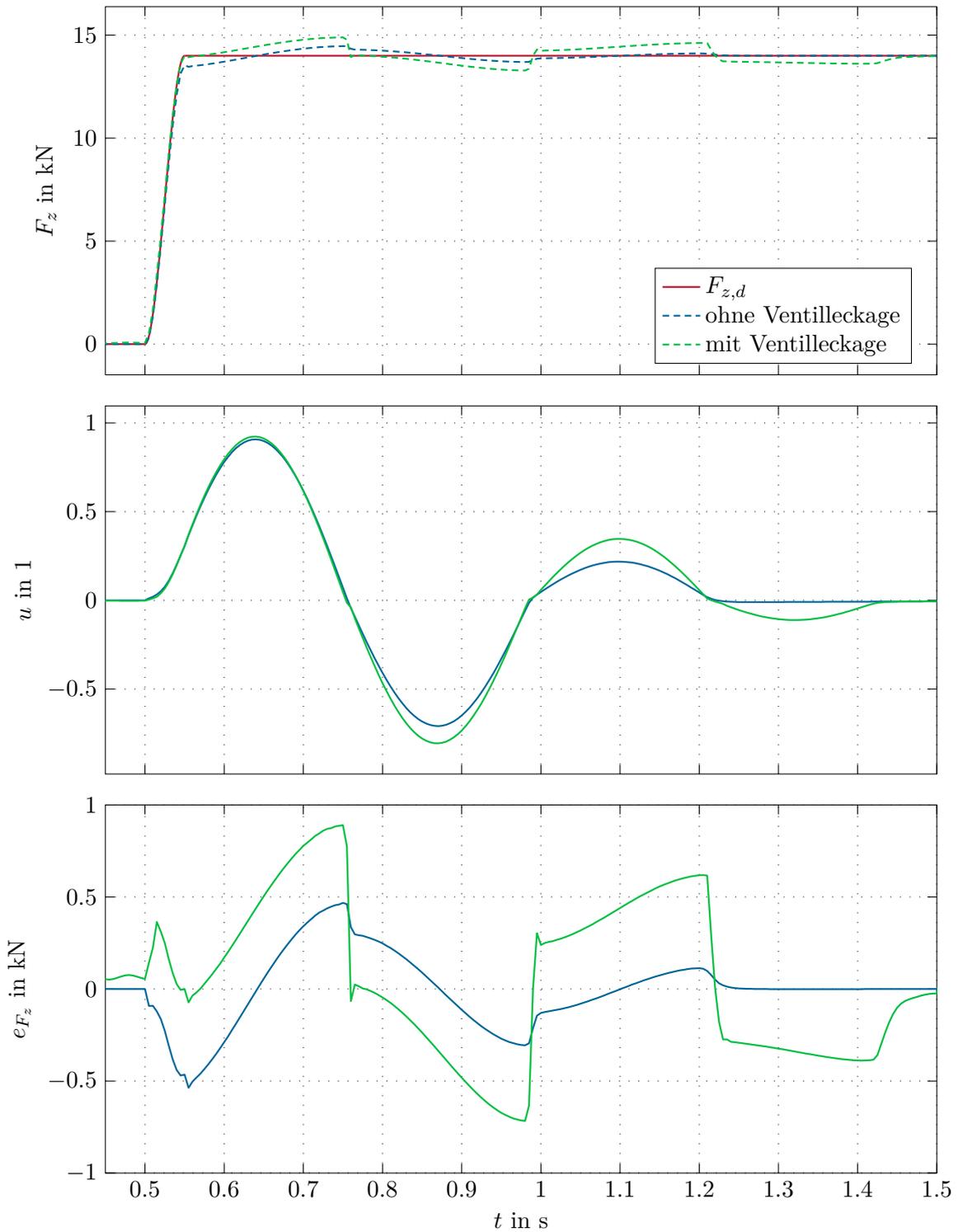


Abbildung 3.4: Vergleich der Regelung des Systems ohne Rohrleitungen, ohne und mit Ventilleckage mittels Eingangs-Ausgangslinearisation.

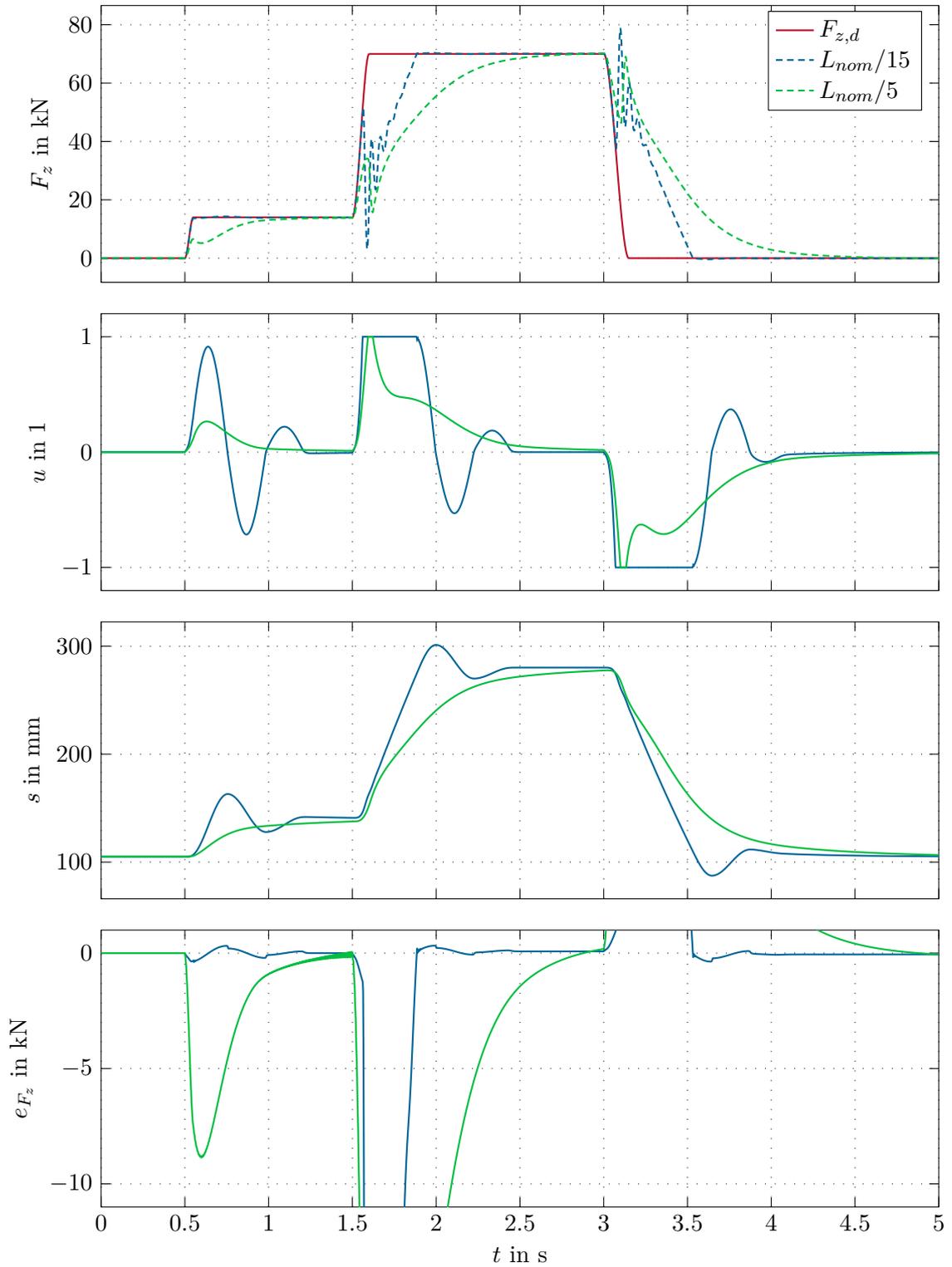


Abbildung 3.5: Regelung des Systems mit Rohrleitungen verschiedener Länge mittels Eingangs-Ausganglinearisierung.

Regler bzw. eine weitere Verlängerung der Druckleitungen führen in Simulationsstudien zu einem instabilen Ergebnis.

Die Ergebnisse zeigen, dass die Eingangs-Ausgangslinearisierung für kurze Rohrleitung ein geeignetes Entwurfsverfahren darstellt. Leitungen ab einer Länge von etwa  $L_{nom}/5$  führen jedoch zu einer drastischen Verschlechterung der Regelgüte des geschlossenen Kreises bzw. sogar zur Instabilität. Um auch bei längeren Verrohrungen ein stabiles Verhalten zu erzielen, muss daher ein anderes Regelungskonzept verwendet werden.

### 3.3 Reglerentwurf mit Rohrleitungen

Eine Verbesserungsmöglichkeit der Eingangs-Ausgangslinearisierung stellt die Berücksichtigung der Druckleitungen im Regler dar. Dies gestaltet sich aufgrund der gewählten Diskretisierung jedoch schwierig. Man stellt fest, dass eine allgemeine Implementierung schwierig ist, da der relative Grad abhängig von der gewählten SEM Diskretisierung ist. Im Folgenden wird das Problem skizziert. Dafür sei zunächst o. B. d. A.  $M = M_a \leq M_b$  angenommen. Für die zeitliche Ableitung des Ausgangs  $y = F_z$  folgt, gemäß (2.11)

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_{z,a}\dot{p}_{z,a} - A_{z,b}\dot{p}_{z,b} \\ &= \frac{\beta}{s - s_{0,a}} \left( \underbrace{q_{z,a}}_{\mathbf{e}_{n,a}^T \mathbf{q}_{l,a}} - A_{z,a}w \right) - \frac{\beta}{s_{max} - s + s_{0,b}} \left( \underbrace{q_{z,b}}_{\mathbf{e}_{n,b}^T \mathbf{q}_{l,b}} + A_{z,b}w \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Erneutes Ableiten des Ausgangs liefert

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{\beta}{s - s_{0,a}} \left( \mathbf{e}_{n,a}^T \dot{\mathbf{q}}_{l,a} - A_{z,a}\dot{w} \right) - \frac{\beta}{s_{max} - s - s_{0,b}} \left( \mathbf{e}_{n,b}^T \dot{\mathbf{q}}_{l,b} + A_{z,b}\dot{w} \right) \\ &\quad - \frac{\beta}{(s - s_{0,a})^2} \left( \mathbf{e}_{n,a}^T \mathbf{q}_{l,a} - A_{z,a}w \right) \dot{s} - \frac{\beta}{(s_{max} - s - s_{0,b})^2} \left( \mathbf{e}_{n,b}^T \mathbf{q}_{l,b} + A_{z,b}w \right) \dot{s}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ableitungen von  $s$  und  $w$  führen gemäß (2.11) auf die Differentialgleichung für  $F_z$  und daher auf (3.14). Aus diesem Grund und da  $M_a \leq M_b$  gewählt wurde, genügt es für die Bestimmung des relativen Grades  $\mathbf{e}_{n,a}^T \dot{\mathbf{q}}_{l,a}$  aus (3.15) näher zu betrachten. Mit (2.50) erhält man

$$\mathbf{e}_{n,a}^T \dot{\mathbf{q}}_{l,a} = \mathbf{e}_{n,a}^T \left( \mathbf{M}_{q,a}^{-1} \left( \mathbf{S}_a \mathbf{p}_{l,a} - \mathbf{M}_{R,a} \text{diag}(|\mathbf{q}_{l,a}|) \mathbf{q}_{l,a} - \underbrace{p_{l,a}^*(L,t)}_{p_{z,a}} \mathbf{e}_{n,a} + p_{l,a}^*(0,t) \mathbf{e}_{1,a} \right) \right). \quad (3.16)$$

Aus den Randbedingungen der Rohrleitungen (2.57) erkennt man, dass die Stellgröße  $u$  zwar in  $p_{l,a}^*(0,t)$  vorkommt, das Produkt aus  $\mathbf{e}_{n,a}^T \left( \mathbf{M}_{q,a}^{-1} \mathbf{e}_{1,a} \right)$  jedoch gleich 0 ist. Für die dritte Ableitung  $y^{(3)}$  genügt es den Term  $\mathbf{e}_{n,a}^T \left( \mathbf{M}_{q,a}^{-1} \mathbf{S}_a \mathbf{p}_{l,a} \right)$  weiter zu untersuchen, da die Ableitung aller anderer Terme in (3.16) nicht direkt von der Stellgröße  $u$  abhängen. Es folgt

$$\mathbf{e}_{n,a}^T \left( \mathbf{M}_{q,a}^{-1} \mathbf{S}_a \dot{\mathbf{p}}_{l,a} \right) = \mathbf{e}_{n,a}^T \left( \mathbf{M}_{q,a}^{-1} \mathbf{S}_a \mathbf{M}_{p,a}^{-1} \left( \mathbf{S}_a \mathbf{q}_{l,a} - \dot{q}_{l,a}^*(L,t) \mathbf{e}_{n,a} + \dot{q}_{l,a}^*(0,t) \mathbf{e}_{1,a} \right) \right). \quad (3.17)$$

Der Term  $q_{l,a}^*(0, t)$  in (3.17) enthält die Stellgröße  $u$ . Für relativen Grad  $r = 3$  muss das Produkt  $\mathbf{e}_{n,a}^T \left( \mathbf{M}_{q,a}^{-1} \mathbf{S}_a \mathbf{M}_{p,a}^{-1} \right) \mathbf{e}_{1,a}$  ungleich 0 sein. Bei den inversen Massenmatrizen  $\mathbf{M}_{q,a}^{-1}$  und  $\mathbf{M}_{p,a}^{-1}$  handelt es sich, unabhängig von der Diskretisierung, um Diagonalmatrizen. Auf die Struktur von  $\mathbf{S}_a$  wurde bereits im Zuge von (2.49) näher eingegangen. Man erkennt, dass der relative Grad gleich 3 ist, falls das Element in der ersten Spalte und letzten Zeile von  $\mathbf{S}_a$  ungleich 0 ist. Dies ist für  $M = 1$  der Fall. Andernfalls muss die Ableitung des Produktes  $\mathbf{e}_{n,a}^T \left( \mathbf{M}_{q,a}^{-1} \mathbf{S}_a \mathbf{M}_{p,a}^{-1} \mathbf{S}_a \mathbf{q}_{l,a} \right)$  weiter untersucht werden. Die Ableitung von  $\mathbf{q}_{l,a}$  ist bereits in (3.16) dargestellt. Man erkennt, dass sich die Ableitungen (3.16) und (3.17) nun so lange abwechselnd wiederholen bis das Produkt

$$\mathbf{e}_{n,a}^T \left( \mathbf{M}_{q,a}^{-1} \mathbf{S}_a \mathbf{M}_{p,a}^{-1} \dots \mathbf{M}_{p,a}^{-1} \right) \mathbf{e}_{1,a}, \quad M \dots \text{ungerade} \quad (3.18a)$$

$$\mathbf{e}_{n,a}^T \left( \mathbf{M}_{q,a}^{-1} \mathbf{S}_a \mathbf{M}_{p,a}^{-1} \dots \mathbf{M}_{q,a}^{-1} \right) \mathbf{e}_{1,a}, \quad M \dots \text{gerade} \quad (3.18b)$$

ungleich 0 ist. Damit ist der relative Grad  $r$  nur von der Wahl von  $M$  abhängig und unabhängig von  $N_i$ . Für den relativen Grad  $r$  folgt daraus

$$r = 2 + M. \quad (3.19)$$

Für die bisherige Untersuchung wurde für die Diskretisierung  $M_a \leq M_b$  vorausgesetzt. Im Allgemeinen folgt der relative Grad gemäß (3.19) mit  $M = \min\{M_a, M_b\}$ .

Im Folgenden wird für beide Rohrleitungen eine Diskretisierung mit  $M = 3$  und  $N_i = 3$  mit  $i \in [1, 3]$ , wie sie in Abschnitt 2.5 diskutiert wurde, gewählt. Das System mit Rohrleitungen nach (2.57) kann damit wiederum in eingangsaffiner Form als

$$\dot{\mathbf{x}}_l = \mathbf{f}_l(\mathbf{x}_l) + \mathbf{g}_l(\mathbf{x}_l)u \quad (3.20)$$

angeschrieben werden. Mit (3.19) folgt der relative Grad zu  $r = 5$ . Dies führt auf eine Zustandsrückführung

$$u = \frac{1}{\mathbf{L}_{\mathbf{g}_l} \mathbf{L}_{\mathbf{f}_l}^{(4)} h_l(\mathbf{x}_l)} \left( \tilde{u} - \mathbf{L}_{\mathbf{f}_l}^{(5)} h_l(\mathbf{x}_l) \right), \quad (3.21)$$

mit  $\mathbf{f}_l$  und  $\mathbf{g}_l$  gemäß (3.20). Die Implementierung von (3.21) führt zu sehr umfangreichen Ausdrücken für die Lie-Ableitungen  $\mathbf{L}_{\mathbf{g}_l} \mathbf{L}_{\mathbf{f}_l}^{(4)} h_l(\mathbf{x}_l)$  und  $\mathbf{L}_{\mathbf{f}_l}^{(5)} h_l(\mathbf{x}_l)$ . Die numerische Auswertung dieser Ausdrücke stellt sich dabei als äußerst problematisch dar, wodurch in weiterer Folge auch eine spezifische Implementierung nicht zielführend ist.

Es zeigt sich, dass mit der exakten Eingangs-Ausgangslinearisierung eine stabile Regelung für kurze Rohrleitungen gegeben ist. Bei längeren Rohren ist nur mehr eine sehr langsame Regelung stabil möglich. Die Berücksichtigung der Leitungen in diesem Regelungskonzept erweist sich aufgrund von (3.19) als schwierig. Für die hochdynamische Regelung längerer Rohrleitungen muss daher ein anderes Regelungskonzept untersucht werden.

## 4 Modellprädiktive Regelung

In diesem Kapitel wird eine modellprädiktive Regelung (MPC) für das hydraulische System aus Abbildung 1.2 entwickelt. Bei der MPC handelt es sich um ein optimierungsbasiertes Regelungskonzept, bei dem die Stellgröße aus einer Minimierungsaufgabe ermittelt wird. Die MPC liefert daher im aktuellen Zeithorizont die optimale Stellgröße für die Minimierungsaufgabe. Dies und die Tatsache, dass Stellgrößenbeschränkungen sowie Beschränkungen in den Zuständen systematisch mitberücksichtigt werden können, machen die MPC speziell für nichtlineare Systeme zu einem effektiven Werkzeug. Je nachdem, ob die gemessenen bzw. geschätzten Zustände des Systems oder die prädizierten Zustände zurückgeführt werden, ist es möglich den Algorithmus als Regelung (MPC) bzw. als dynamische Vorsteuerung, auch Moving Horizon Trajectory Planing (MHTP) genannt, zu betreiben.

Zur Lösung der in der MPC auftretenden Optimierungsaufgabe gibt es in der Literatur viele Ansätze [22–26]. Aus Gründen der echtzeitfähigen Implementierbarkeit basiert der Algorithmus dieser Arbeit auf der Gradienten-Projektionsmethode mit adaptiver Liniensuche [24, 25]. Mit diesem Algorithmus ist es möglich, eine feste Anzahl an Iterationen vorzugeben und die Suche nach Erreichen dieser abzubrechen. Dies macht den Algorithmus zu einer so genannten suboptimalen, jedoch recheneffizienten, MPC Formulierung. Eine Diskussion der Stabilität und Optimalität dieses Verfahrens ist z. B. in [24, 25] dargestellt.

In Abschnitt 4.1 werden der Algorithmus und die Implementierung näher erklärt. In Abschnitt 4.2 werden die Rohrleitungen vorerst im Regler vernachlässigt. Es wird außerdem die Funktion der MHTP und der MPC am Modell ohne und mit Rohrleitungen untersucht. In Abschnitt 4.3 wird der Algorithmus aus Abschnitt 4.1 um die Gleichungen der Rohrleitungen erweitert. Dieser Abschnitt zeigt weiterhin die Ergebnisse dieser Implementierung.

### 4.1 Gradienten-Projektionsmethode

Wie schon eingangs erwähnt, basiert der Algorithmus auf den Arbeiten [24, 25]. Beim Entwurf der MPC wird die Ventilleckage vernachlässigt. Um die Ventildynamik im Regler näherungsweise abzubilden, wird das System (2.25) zuerst um einen Integrator  $\dot{u} = v$  erweitert. Durch Beschränkung von  $v$  wird damit die Steigungsbeschränkung aus Abbildung 2.4 im Regler berücksichtigt. Die neue (virtuelle) Stellgröße ist durch die Änderungsrate  $v$

der Ventilposition gegeben. Die Optimierungsaufgabe für die MPC wird als

$$\min_{\bar{v}} J(\mathbf{x}_k, \bar{v}) = \varphi(\bar{\mathbf{x}}(T_{hor})) + \int_0^{T_{hor}} \ell(\bar{\mathbf{x}}(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \quad (4.1a)$$

$$\text{u.B.v. } \dot{\bar{\mathbf{x}}}(\tau) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}(\tau), \bar{v}(\tau)), \quad \bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k) \quad (4.1b)$$

$$-1 \leq \bar{u} \leq 1 \quad (4.1c)$$

$$-v_{max} \leq \bar{v} \leq v_{max} \quad (4.1d)$$

mit dem aktuellen Zeitschritt  $t_k = t_0 + kT_s$ , der Abtastzeit  $T_s$ , der Dauer des Prädiktionshorizontes  $T_{hor}$ , der lokalen Zeit während des Horizontes  $\tau \in [0, T_{hor}]$  und den gemessenen oder geschätzten Anfangszuständen  $\mathbf{x}_k$ , formuliert. Dabei beschreibt  $\varphi$  den Endkostenterm und  $\ell$  den integralen Kostenterm im Gütefunktional  $J(\mathbf{x}_k, \bar{v})$ . Mit  $(\bar{\cdot})$  werden dabei die Größen während des aktuellen Prädiktionshorizontes bezeichnet. Die Optimierungsaufgabe wird für jeden Abtastpunkt  $kT_s$  gelöst. Die Ungleichungen (4.1c) und (4.1d), mit  $v_{max} = 167 \text{ l/s}$ , berücksichtigt die Beschränkungen für die Ventilposition und Ventilgeschwindigkeit. In dieser Arbeit werden alle nötigen Zustände als messbar bzw. von einem geeigneten Beobachter geschätzt vorausgesetzt. Basierend auf den Gleichungen (4.1) wird die Gradienten-Projektionsmethode erläutert.

#### 4.1.1 Algorithmus

Zur Lösung der Optimierungsaufgabe wird die Hamilton Funktion

$$H(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{v}) = \ell(\bar{\mathbf{x}}, \bar{v}) + \bar{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{v}), \quad (4.2)$$

mit den zu  $\bar{\mathbf{x}}$  adjungierten Zuständen  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ , definiert. Nach dem Maximumsprinzip von Pontryagin [22] gilt für die optimale Stellgröße  $\bar{v}_k^*(\tau)$ , dass es eine optimale Trajektorie  $\bar{\mathbf{x}}_k^*(\tau)$  gibt, für die  $\bar{\mathbf{x}}_k^*(\tau)$  und  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_k^*(\tau)$  die Randwertaufgabe

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_k^*(\tau) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}_k^*(\tau), \bar{v}_k^*(\tau)), \quad \bar{\mathbf{x}}_k^*(0) = \mathbf{x}_k \quad (4.3a)$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\lambda}}}_k^*(\tau) = -\frac{\partial H}{\partial \bar{\mathbf{x}}}(\bar{\mathbf{x}}_k^*(\tau), \bar{\boldsymbol{\lambda}}_k^*(\tau), \bar{v}_k^*(\tau)), \quad \bar{\boldsymbol{\lambda}}_k^*(T_{hor}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\mathbf{x}}}(\bar{\mathbf{x}}_k^*(T_{hor})) \quad (4.3b)$$

erfüllen und  $\bar{v}_k^*(\tau)$  die Hamilton Funktion im Bereich  $\tau \in [0, T_{hor}]$  minimiert. Es gilt daher

$$H(\bar{\mathbf{x}}_k^*(\tau), \bar{\boldsymbol{\lambda}}_k^*(\tau), \bar{v}_k^*(\tau)) \leq H(\bar{\mathbf{x}}_k^*(\tau), \bar{\boldsymbol{\lambda}}_k^*(\tau), \bar{v}(\tau)), \quad -v_{max} \leq \bar{v}(\tau) \leq v_{max}, \quad \tau \in [0, T_{hor}]. \quad (4.4)$$

In (4.3) kann man erkennen, dass die Systemdynamik (4.3a) nur vom Anfangswert  $\mathbf{x}_k$  und der Stellgröße  $\bar{v}_k^*(\tau)$  abhängt und damit unabhängig von der Dynamik der adjungierten Zustände (4.3b) ist. Für die Berechnung von  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_k^*(\tau)$  ist die Kenntnis des Endzustandes  $\bar{\mathbf{x}}_k^*(T_{hor})$  nötig. Aus diesem Grund kann erst (4.3a) zeitlich nach vorne und anschließend (4.3b) rückwärts integriert werden.

Für die iterative Berechnung der Stellgröße  $\bar{v}_k(\tau)$  wird im ersten Iterationsschritt eine Anfangsstellgröße  $\bar{v}_0^0(\tau)$  für den ersten Prädiktionshorizont gewählt. Mit dieser Stellgröße erfolgt die Vorwärtsintegration von (4.3a) und die Berechnung des Kostenfunktionals gemäß (4.1a). Anschließend werden in jeder Iteration die adjungierten Zustände  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_k^j(\tau)$

gemäß (4.3b) berechnet. Zur iterativen Verbesserung der Stellgröße wird die Suchrichtung mittels negativen Gradienten

$$s_{v,k}^j(\tau) = -\frac{\partial H}{\partial v}(\bar{\mathbf{x}}_k^j(\tau), \bar{\boldsymbol{\lambda}}_k^j(\tau), \bar{v}_k^j(\tau)) \quad (4.5)$$

bestimmt. Die Schrittweite  $\alpha_k$  wird mittels adaptivem Liniensuchverfahren ermittelt. Damit ergibt sich die neue Stellgröße zu

$$\bar{v}_k^{j+1}(\tau) = \Psi\left(\bar{v}_k^j(\tau) + \alpha_k^j s_{v,k}^j(\tau)\right), \quad (4.6)$$

mit dem Projektionsoperator

$$\Psi(\bar{v}) = \begin{cases} -v_{max} & \text{für } \bar{v} < -v_{max} \\ \bar{v} & \text{für } -v_{max} \leq \bar{v} \leq v_{max} \\ v_{max} & \text{für } \bar{v} > v_{max}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Mit der neuen Stellgröße erfolgt die Vorwärtsintegration von (4.3a) und die Berechnung des Kostenfunktional gemäß (4.1a). Der Algorithmus endet falls sich das Gütefunktional nur wenig verbessert oder gar verschlechtert hat. Bei Verschlechterung wird die Stellgröße der vorigen Iteration verwendet. Außerdem wird der Algorithmus nach  $N_{iter}$  Iterationen abgebrochen. Für die Dauer eines Steuerungshorizontes  $T_s$  werden die berechnete Stellgröße, die prädizierten Zustände und das Gütefunktional ausgegeben. Für jeden Abtastpunkt  $kT_s$  wird eine neue Stellgröße ermittelt. Als Anfangsverlauf der Stellgröße wird der um  $T_s$  zeitlich verschobene Stellgrößenverlauf der letzten Iteration verwendet. Der Algorithmus für die iterative Lösung ist in Algorithmus 1 zusammengefasst.

### 4.1.2 Integrationsverfahren

Bei der Vorwärts- und Rückwärtsintegration muss die Frage des geeigneten Integrationsverfahrens geklärt werden. Aus diesem Grund werden im Folgenden einige mögliche Verfahren verglichen.

Es wird dazu das erweiterte System ohne Rohrleitungen

$$\dot{\mathbf{x}}_{vz} = \mathbf{f}_{vz}(\mathbf{x}_{vz}, v) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_T(\mathbf{x}_T) + \mathbf{g}_T(\mathbf{x}_T)u \\ v \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

mit  $\mathbf{f}_T(\mathbf{x}_T)$  und  $\mathbf{g}_T(\mathbf{x}_T)$  gemäß (3.4) betrachtet. Außerdem wird als Startwert der Integration ein stationärer Punkt  $\mathbf{x}_{vz,0}^T = [0 \quad p_s + p_t \quad s_{0,c} \quad 0 \quad 0]$  verwendet. Als Stellgröße  $v$  für das erweiterte System (4.8) dient die numerische Ableitung von  $u$  aus Abbildung 3.2, da diese eine typische Stellgröße darstellt. Es werden folgende Integrationsverfahren verglichen [20, 26]:

- explizites Eulerverfahren (EE)

$$\mathbf{x}_{vz,k+1} = \mathbf{x}_{vz,k} + T_{int} \mathbf{f}_{vz}(\mathbf{x}_{vz,k}, v_k) \quad (4.9)$$

**Algorithmus 1** Gradienten-Projektionsmethode

Initialisierung

- Anzahl der Iterationen  $N_{iter}$
- Prädiktionshorizont  $T_{hor}$
- Stützpunkte der Integration  $N_{int}$
- Anfangstrajektorie  $\bar{v}_k^0(\tau)$
- Vorwärtsintegration

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_k^0(\tau) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}_k^0(\tau), \bar{v}_k^0(\tau)), \quad \bar{\mathbf{x}}_k^0(0) = \mathbf{x}_k$$

- Gütefunktional

$$J(\mathbf{x}_k, \bar{v}_k^0(\tau)) = \varphi(\bar{\mathbf{x}}_k^0(T_{hor})) + \int_0^{T_{hor}} \ell(\bar{\mathbf{x}}_k^0(\tau), \bar{v}_k^0(\tau)) d\tau$$

Gradientenschritt: für  $j = 0 : N_{iter} - 1$ 

- Rückwärtsintegration

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\lambda}}}_k^j(\tau) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}_k^j(\tau), \bar{\boldsymbol{\lambda}}_k^j(\tau), \bar{v}_k^j(\tau)), \quad \bar{\boldsymbol{\lambda}}_k^j(T_{hor}) = \frac{d\varphi}{d\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}_k^j(T_{hor}))$$

- Suchrichtung

$$s_{v,k}^j(\tau) = -\frac{\partial H}{\partial v}(\bar{\mathbf{x}}_k^j(\tau), \bar{\boldsymbol{\lambda}}_k^j(\tau), \bar{v}_k^j(\tau))$$

- Schrittweite mittels adaptiver Liniensuche

$$\alpha_k^j = \arg \min_{\alpha > 0} J(\mathbf{x}_k^j(\tau), \Psi(\bar{v}_k^j(\tau) + \alpha s_{v,k}^j(\tau)))$$

- aktualisieren der Stellgröße

$$\bar{v}_k^{j+1}(\tau) = \Psi(\bar{v}_k^j(\tau) + \alpha_k^j s_{v,k}^j(\tau))$$

- Vorwärtsintegration

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_k^{j+1}(\tau) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}_k^{j+1}(\tau), \bar{v}_k^{j+1}(\tau)), \quad \bar{\mathbf{x}}_k^{j+1}(0) = \mathbf{x}_k$$

- Gütefunktional

$$J(\mathbf{x}_k, \bar{v}_k^{j+1}(\tau)) = \varphi(\bar{\mathbf{x}}_k^{j+1}(T_{hor})) + \int_0^{T_{hor}} \ell(\bar{\mathbf{x}}_k^{j+1}(\tau), \bar{v}_k^{j+1}(\tau)) d\tau$$

- Abbruch falls

$$J(\mathbf{x}_k, \bar{v}_k^{j+1}(\tau)) > J(\mathbf{x}_k, \bar{v}_k^j(\tau))$$

oder

$$|J(\mathbf{x}_k, \bar{v}_k^{j+1}(\tau)) - J(\mathbf{x}_k, \bar{v}_k^j(\tau))| < \epsilon_J$$

Ausgabe

- Stellgröße  $\bar{v}_k(\tau)$
- prädizierte Zustände  $\bar{\mathbf{x}}_k(\tau)$
- Gütefunktional  $J(\mathbf{x}_k, \bar{v}_k(\tau))$

- implizites Eulerverfahren (IE)

$$\mathbf{x}_{vz,k+1} = \mathbf{x}_{vz,k} + T_{int} \mathbf{f}_{vz}(\mathbf{x}_{vz,k+1}, v_{k+1}) \quad (4.10)$$

- explizites Trapezverfahren (ET)

$$\mathbf{x}_{vz,k+1} = \mathbf{x}_{vz,k} + \frac{T_{int}}{2} \left( \mathbf{f}_{vz}(\mathbf{x}_{vz,k}, v_k) + \mathbf{f}_{vz}(\mathbf{x}_{vz,k} + T_{int} \mathbf{f}_{vz}(\mathbf{x}_{vz,k}, v_k), v_k) \right) \quad (4.11)$$

- implizites Trapezverfahren (IT)

$$\mathbf{x}_{vz,k+1} = \mathbf{x}_{vz,k} + \frac{T_{int}}{2} \left( \mathbf{f}_{vz}(\mathbf{x}_{vz,k}, v_k) + \mathbf{f}_{vz}(\mathbf{x}_{vz,k+1}, v_{k+1}) \right) \quad (4.12)$$

- allgemeines Integrationsverfahren (AL)

$$\mathbf{x}_{vz,k+1} = \mathbf{x}_{vz,k} + T_{int} \left( \lambda_{al} \mathbf{f}_{vz}(\mathbf{x}_{vz,k}, v_k) + (1 - \lambda_{al}) \mathbf{f}_{vz}(\mathbf{x}_{vz,k+1}, v_{k+1}) \right), \quad \lambda_{al} \in [0, 1] \quad (4.13)$$

Hier bezeichnet  $T_{int}$  die Schrittweite der Integrationsverfahren. Bei den impliziten Verfahren muss ein Gleichungssystem zur Berechnung von  $\mathbf{x}_{vz,k+1}$  gelöst werden. In dieser Arbeit wird die Newton-Raphson-Methode zur Lösung des Gleichungssystems verwendet [18–20]. Interessant ist sowohl die Genauigkeit jedes dieser Integrationsverfahren als auch die Stabilität und Rechendauer. Um die Genauigkeit zu beurteilen, wird das Ergebnis des Integrationsalgorithmus ode15s von MATLAB mit der Ordnung 5 und einer relativen Toleranz von  $10^{-9}$  als Referenz herangezogen. Die Ergebnisse der verschiedenen Integrationsverfahren sowie der Fehler der Kraft bezüglich der Lösung von ode15s sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Bei diesen Berechnungen wird  $\lambda_{al} = 1/3$  gewählt. Tabelle 4.1 zeigt die Stützpunktanzahl während der dargestellten 5 s, die ungefähre Rechendauer für eine Vorwärtsintegration der Systemdynamik und eine Rückwärtsintegration der Dynamik der adjungierten Zustände sowie die zeitliche  $L^2$ -Norm der relativen Fehler in der Kraft

$$e_{rel,F_z} = \frac{\|e_{F_z}\|_2}{\|F_z^{ode15s}\|_2}. \quad (4.14)$$

Für die Integrationsschrittweite folgt  $T_{int} = \frac{5s}{N_{int}} = 1$  ms. Abbildung 4.1 zeigt, dass mit der

Verfahren	$N_{int}$	Dauer in ms	$e_{rel,F_z}$
explizites Eulerverfahren	5000	800	2.74 %
implizites Eulerverfahren	5000	2100	1.43 %
explizites Trapezverfahren	5000	1200	0.08 %
implizites Trapezverfahren	5000	2100	0.36 %
allgemeines Integrationsverfahren	5000	2100	0.66 %

Tabelle 4.1: Stützpunktanzahl und Rechendauer der Integrationsverfahren.

gewählten Punktezahl alle Integrationsverfahren stabile Lösungen mit guter Genauigkeit

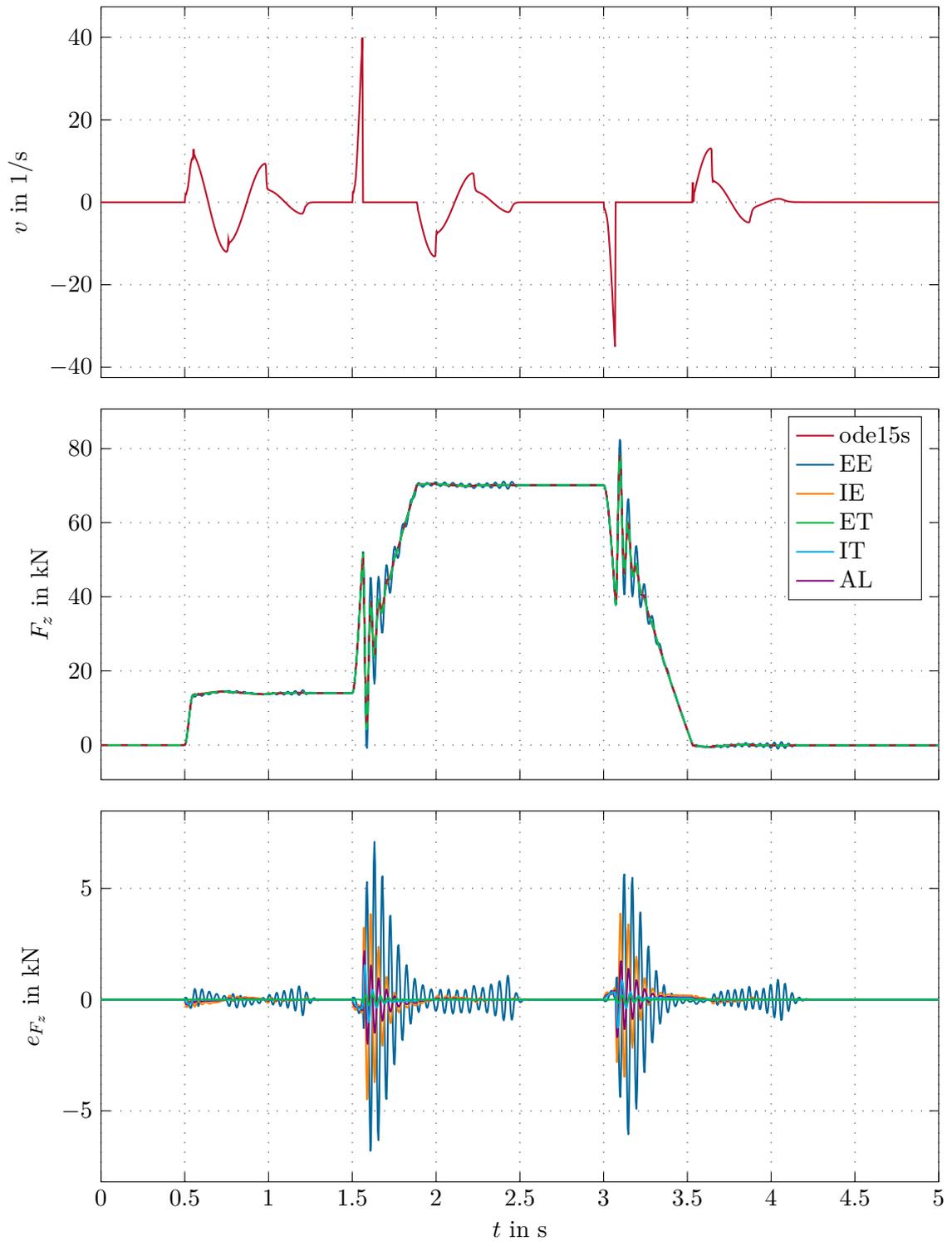


Abbildung 4.1: Vergleich der Integrationsverfahren.

liefern. Die Berechnung mittels explizitem Euler besitzt zwar die kürzeste Rechendauer, allerdings auch das ungenaueste Ergebnis. Eine Erhöhung der Integrationsschrittweite führt sogar zu einem instabilen Ergebnis. Da bei den impliziten Verfahren in jedem Zeitschritt ein Gleichungssystem zu lösen ist, kommt es bei diesen Verfahren zu längeren Rechenzeiten. Um die Auswahl weiter einzuschränken wird in Abbildung 4.2 der Fehler im Bereich  $t \in [1.5, 2.5]$  genauer dargestellt. Es zeigt sich, dass die auftretenden Schwingungen

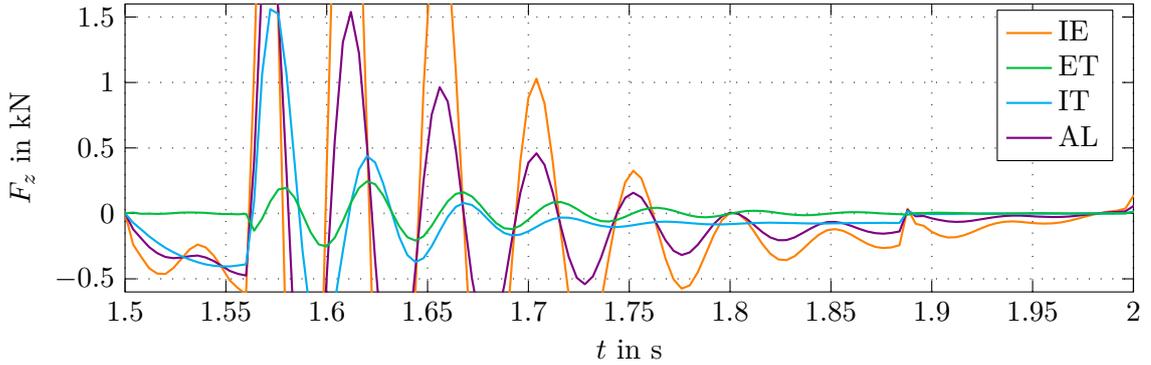


Abbildung 4.2: Detail zum Vergleich der Integrationsverfahren aus Abbildung 4.1.

in der Kraft von dem expliziten Trapezverfahren am besten abgebildet werden. Da das explizite Trapezverfahren außerdem wesentlich schneller als die impliziten Verfahren ist, wird dieses für die weiteren Berechnungen gewählt.

### 4.1.3 Gütefunktional

In diesem Abschnitt wird die Wahl des Gütefunktionals  $J(\mathbf{x}_k, \bar{v})$ , im Speziellen der Funktionen  $\varphi(\bar{\mathbf{x}}(T_{hor}))$  und  $\ell(\bar{\mathbf{x}}(\tau), \bar{v}(\tau))$ , beschrieben.

Da die Zielsetzung dieser Arbeit eine reine Kraftregelung ist, wird der Endkostenterm zu

$$\varphi(\bar{\mathbf{x}}(T_{hor})) = R(\bar{F}_z - \bar{F}_{z,d})^2, \quad (4.15)$$

mit der Gewichtung  $R \geq 0$  gewählt. Dabei ist der Sollwert  $\bar{F}_{z,d}$  für die Dauer eines Prädiktionshorizontes konstant. Beim Kostenterm  $\ell(\bar{\mathbf{x}}(\tau), \bar{v}(\tau))$  wird die Zustandsbeschränkung für  $u$  aus (4.1c) mittels der Straffunktion

$$B(u) = \begin{cases} \max\left(0, \frac{1}{c_L} \left(\frac{1}{u-a_L} + \frac{1}{b_L-u}\right) + d_L\right), & u < u_L \\ \max\left(0, \frac{1}{c_R} \left(\frac{1}{u-a_R} + \frac{1}{b_R-u}\right) + d_R\right), & u > u_R \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.16)$$

mit den Parametern  $a_L, b_L, c_L, d_L, u_L, a_R, b_R, c_R, d_R$  und  $u_R$ , berücksichtigt. Die Parameter werden so gewählt, dass die Funktion an den Stellen  $u_L$  und  $u_R$  einen Nulldurchgang mit der Steigung 0 hat. Zwischen  $u_L$  und  $u_R$  liefert die Straffunktion ebenfalls den Wert 0. Auf diese Weise kann eingestellt werden, ab welchem Wert die Ventilstellung das Kostenfunktional erhöht. Es wird außerdem gefordert, dass die Funktion für positive und negative Ventilstellungen symmetrisch ist. Daraus folgt  $a_L = -b_R, b_L = -a_R, c_L = c_R$  und

$d_L = d_R$ . Der Verlauf von  $B(u)$  mit den Werten gemäß Tabelle 4.2 ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Für diese Parameter wirken sich Ventilstellungen bis  $\pm 0.95$  nicht auf das

Parameter	Wert	Parameter	Wert
$u_L$	-0.95	$u_R$	0.95
$a_L$	-1.01	$a_R$	0.89
$b_L$	-0.89	$b_R$	1.01
$c_L$	25/33	$c_R$	25/33
$d_L$	-44	$d_R$	-44

Tabelle 4.2: Parameter für die Straffunktion  $B(u)$ .

Gütefunktional aus. Für eine Ventilstellung von  $\pm 1$  erreicht die Straffunktion einen Wert von 100.

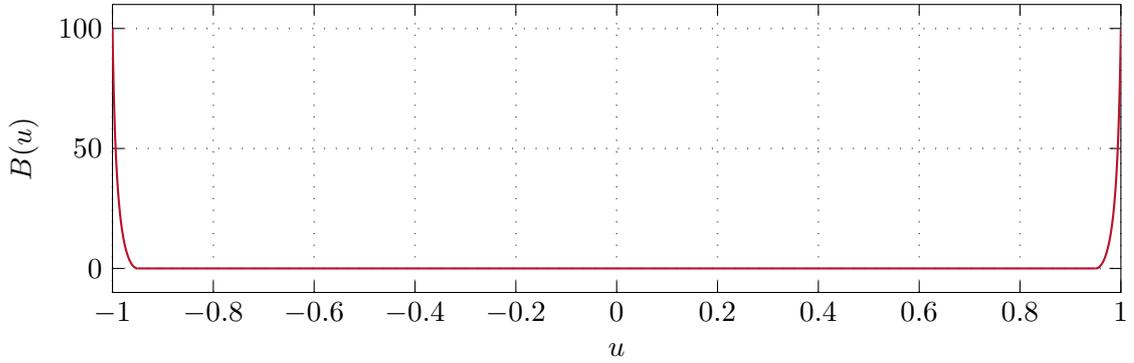


Abbildung 4.3: Straffunktion für die Ventilstellung  $u$ .

Der integrale Kostenterm folgt zu

$$\ell(\bar{\mathbf{x}}, \bar{v}) = Q_x (\bar{F}_z - \bar{F}_{z,d})^2 + B(\bar{u}) + Q_v \bar{v}^2, \quad (4.17)$$

mit den Gewichtungen  $Q_x \geq 0$  und  $Q_v \geq 0$ . Die Gewichtung der (virtuellen) Stellgröße  $\bar{v}$  ist zur Verbesserung der Stabilität der MPC sinnvoll, siehe z. B. [22].

#### 4.1.4 Adaptive Liniensuche

Die Schrittweite  $\alpha_k$  für die Aktualisierung der Stellgröße wird mittels adaptiver Liniensuche ermittelt. Dieser Algorithmus ist ebenfalls an jenen in [25] angelehnt. Dabei werden drei Schrittweiten  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$  gewählt und damit drei neue Stellgrößenverläufe

$$\bar{v}_{k,i}^j(\tau) = \Psi \left( \bar{v}_k^j(\tau) + \alpha_i s_{v,k}^j(\tau) \right), \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (4.18)$$

ermittelt. Mit diesen Stellgrößen erfolgt die Vorwärtsintegration des Systems

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_i(\tau) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}_i(\tau), \bar{v}_{k,i}^j(\tau)), \quad \bar{\mathbf{x}}_i(0) = \mathbf{x}_k \quad (4.19)$$

und anschließend die Berechnung des Gütefunktional

$$J_i = J(\mathbf{x}_k, \bar{v}_{k,i}^j(\tau)) = \varphi(\bar{\mathbf{x}}_i(T_{hor})) + \int_0^{T_{hor}} \ell(\bar{\mathbf{x}}_i(\tau), \bar{v}_{k,i}^j(\tau)) d\tau . \quad (4.20)$$

Der Verlauf des Gütefunktional in Abhängigkeit von  $\alpha$  wird anschließend durch ein Polynom zweiter Ordnung

$$J\left(\Psi\left(\bar{v}_k^j(\tau) + \alpha s_{v,k}^j(\tau)\right)\right) \approx J(\mathbf{x}_k, \bar{v}_i(\tau)) = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2, \quad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_3] \quad (4.21)$$

genähert. Jenes  $\alpha$ , das die quadratische Funktion minimiert, liegt bei

$$\hat{\alpha} = -\frac{c_1}{2c_2} . \quad (4.22)$$

Liegt  $\hat{\alpha}$  innerhalb des Intervalls  $[\alpha_1, \alpha_3]$ , wird dieses für die Aktualisierung der Stellgröße verwendet. Liegt  $\hat{\alpha}$  an den Grenzen des Intervalls, wird die jeweilige Grenze als Schrittweite verwendet.

Anschließend gilt es noch das Intervall für den nächsten Iterationsschritt anzupassen. Für den Fall, dass  $\hat{\alpha}$  nahe an den Intervallgrenzen liegt wird das Intervall in die jeweilige Richtung verschoben. Für die Stellgröße folgt

$$\bar{v}_k^{j+1}(\tau) = \Psi\left(\bar{v}_k^j(\tau) + \alpha_k^j s_{v,k}^j(\tau)\right) . \quad (4.23)$$

Der Algorithmus für die adaptive Liniensuche ist in Algorithmus 2 zusammengefasst.

#### 4.1.5 Diskrete Implementierung

In diesem Abschnitt wird der Algorithmus für die diskrete Implementierung, wie er in MATLAB/SIMULINK verwendet wird, angegeben. Dieser ist sowohl für das explizite Trapezverfahren als auch für das implizite Eulerverfahren vorbereitet. Der Algorithmus ist in Algorithmus 3 zusammengefasst.

## 4.2 MPC ohne Rohrleitungen

In diesem Abschnitt wird die MPC für das Modell des Systems ohne Rohrleitungen entworfen. In (4.1) wird daher das System aus (2.25) mit dem erweiterten Zustand  $\dot{u} = v$  verwendet. Als Vorgabe für die Kraft wird wie bei der Eingangs-Ausgangslinearisierung die Trajektorie aus Abbildung 3.1 verwendet. Die Parameter für die MPC sind in Tabelle 4.3 zusammengefasst.

### 4.2.1 Simulationsergebnisse

Zunächst wird das Regelungsverhalten am System ohne Rohrleitungen im Simulationsmodell untersucht. In der ersten Simulation wird die Ventilleckage vernachlässigt und der Algorithmus im MHTP-Betrieb verwendet. Dazu werden die prädizierten Zustände rückgekoppelt und die prädizierte Ventilstellung  $\bar{u}$  wird auf das System aufgeschaltet. Die

**Algorithmus 2** adaptive Liniensuche

Initialisierung

- Polynomtoleranzen  $\epsilon_c, \epsilon_g$
- Schrittweiten  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}$
- Intervalladaptionfaktoren  $\kappa^-, \kappa^+$
- Intervalltoleranzen  $\epsilon_\alpha^-, \epsilon_\alpha^+$
- Grenzen der Schrittweite  $\alpha_{min}, \alpha_{max}$

Liniensuche

- aktualisieren der Stellgröße

$$\bar{v}_{i,k}^j(\tau) = \Psi \left( \bar{v}_k^j(\tau) + \alpha_i s_{v,k}^j(\tau) \right), \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

- Vorwärtsintegration

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_i(\tau) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}_i(\tau), \bar{v}_{i,k}^j(\tau)), \quad \bar{\mathbf{x}}_i(0) = \mathbf{x}_k$$

- Gütefunktional

$$J_i = J(\mathbf{x}_k, \bar{v}_{i,k}^j(\tau)) = \varphi(\bar{\mathbf{x}}_i(T_{hor})) + \int_0^{T_{hor}} \ell(\bar{\mathbf{x}}_i(\tau), \bar{v}_{i,k}^j(\tau)) d\tau$$

- Näherung durch Polynom 2. Ordnung

$$J(\mathbf{x}_k, \bar{v}_i(\tau)) = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2$$

mit

$$c_0 = \frac{\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2 J_3 + \alpha_2\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)J_1 + \alpha_1\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_1)J_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)}$$

$$c_1 = \frac{(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)J_3 + (\alpha_1^2 - \alpha_3^2)J_2 + (\alpha_3^2 - \alpha_2^2)J_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)}$$

$$c_2 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)J_3 + (\alpha_2 - \alpha_3)J_1 + (\alpha_3 - \alpha_1)J_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)}$$

- Minimum des Polynoms zweiter Ordnung bei

$$\hat{\alpha} = -\frac{c_1}{2c_2}$$

- berechne  $\alpha_k^j$  mit

$$\text{falls } c_2 > \epsilon_c: \quad \alpha_k^j = \begin{cases} \alpha_1, & \text{falls } \hat{\alpha} < \alpha_1 \\ \alpha_3, & \text{falls } \hat{\alpha} > \alpha_3 \\ \hat{\alpha}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{sonst } (c_2 \leq \epsilon_c): \quad \alpha_k^j = \begin{cases} \alpha_1, & \text{falls } J_1 + \epsilon_g \leq \min\{J_2, J_3\} \\ \alpha_3, & \text{falls } J_3 + \epsilon_g \leq \min\{J_1, J_2\} \\ \alpha_2, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Intervall  $[\alpha_1, \alpha_3]$  anpassen

$$[\alpha_1, \alpha_3] = \begin{cases} \kappa^+[\alpha_1, \alpha_3], & \text{falls } \hat{\alpha} \geq \alpha_1 + \epsilon_\alpha^+(\alpha_3 - \alpha_1) \text{ und } \alpha_3 \leq \alpha_{max} \\ \kappa^-[\alpha_1, \alpha_3], & \text{falls } \hat{\alpha} \leq \alpha_1 + \epsilon_\alpha^-(\alpha_3 - \alpha_1) \text{ und } \alpha_1 \geq \alpha_{min} \\ [\alpha_1, \alpha_3], & \text{sonst} \end{cases}$$

**Algorithmus 3** diskrete Implementierung der Gradienten-Projektionsmethode

Einlesen

- gewünschte Kraft  $F_{z,d}$
- gemessene Zustände  $\mathbf{x}_k$

<span style="color: green;">—</span>	beständige Variable
<span style="color: red;">—</span>	explizites Trapezverfahren
<span style="color: blue;">—</span>	implizites Eulerverfahren

Initialisierung

- einmaliges Setzen der Anfangsstellgröße als Zeitvektor  $\bar{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{0}_{1 \times N_{int}+1}$
  - Setzen von  $N_{iter}, T_s, T_{hor}, N_{int}, \epsilon_J$
  - Zeitdifferenz  $T_{int} = \frac{T_{hor}}{N_{int}}$
  - setze Verlauf von  $\mathbf{x}_k$  als Matrix  $\bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{1}_{1 \times N_{int}+1}$
  - setze Verlauf von  $\lambda_k$  als Matrix  $\bar{\lambda}_k = \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{0}_{1 \times N_{int}+1}$
  - setze Suchrichtung als Vektor  $\mathbf{s}_v = \mathbf{0}_{1 \times N_{int}+1}$
  - Vorwärtsintegration mittels explizitem Trapez/implizitem Euler
  - Gütefunktional mittels Trapezregel
- $$J_0 = \varphi(\bar{\mathbf{x}}_k(1, N_{int} + 1)) + \frac{T_{int}}{2} \sum_{i=1}^{N_{int}} (\ell(\bar{\mathbf{x}}_k(:, i), \bar{\mathbf{v}}_0(i)) + \ell(\bar{\mathbf{x}}_k(:, i+1), \bar{\mathbf{v}}_0(i+1)))$$

Gradientenschritt: für  $j = 0 : N_{iter} - 1$ 

- adjungierter Endzustand
- $$\bar{\lambda}_k(:, N_{int} + 1) = \frac{d\varphi}{d\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}_k(:, N_{int} + 1))$$
- Rückwärtsintegration mittels explizitem Trapez/implizitem Euler
  - Suchrichtung
- $$\mathbf{s}_v(i) = -\frac{d\ell}{d\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}_k(:, i), \bar{\mathbf{v}}_0(i)) - \bar{\lambda}_k^T(:, i) \frac{d\ell}{d\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}_k(:, i), \bar{\mathbf{v}}_0(i)), \quad i \in [1, N_{int} + 1]$$
- Schrittweite mittels adaptiver Liniensuche
- $$\alpha_k = \arg \min_{\alpha > 0} J(\mathbf{x}_k, \Psi(\bar{\mathbf{v}}_0 + \alpha \mathbf{s}_v))$$
- Aktualisieren der Stellgröße
- $$\bar{\mathbf{v}}_0 = \Psi(\bar{\mathbf{v}}_0 + \alpha_k \mathbf{s}_v)$$
- Vorwärtsintegration mittels explizitem Trapez/implizitem Euler
  - Gütefunktional mittels Trapezregel
- $$J_1 = \varphi(\bar{\mathbf{x}}_k(1, N_{int} + 1)) + \frac{T_{int}}{2} \sum_{i=1}^{N_{int}} (\ell(\bar{\mathbf{x}}_k(:, i), \bar{\mathbf{v}}_0(i)) + \ell(\bar{\mathbf{x}}_k(:, i+1), \bar{\mathbf{v}}_0(i+1)))$$
- Abbruch falls  $J_1 > J_0$
- $$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_0 &= \Psi(\bar{\mathbf{v}}_0 - \alpha_k \mathbf{s}_v) \\ J_1 &= J_0 \end{aligned}$$
- Abbruch falls  $|J_1 - J_0| < \epsilon_J$
  - Aktualisieren des Gütefunktionals  $J_0 = J_1$

Ausgabe

- Ausgabe der Stellgröße  $\bar{\mathbf{v}}_0(1)$
  - wenn  $T_s = T_{int}$
- Ausgabe der prädizierten Zustände  $\bar{\mathbf{x}}_k(:, 2)$
- Verschieben der Stellgröße  $\bar{\mathbf{v}}_0(1 : N_{int}) = \bar{\mathbf{v}}_0(2 : N_{int} + 1)$
- sonst
- Ausgabe der prädizierten Zustände  $\bar{\mathbf{x}}_k(:, 1) + \frac{T_s}{T_{int}}(\bar{\mathbf{x}}_k(:, 2) - \bar{\mathbf{x}}_k(:, 1))$
- Verschieben der Stellgröße  $\bar{\mathbf{v}}_0(i) = \bar{\mathbf{v}}_0(i) + \frac{T_s}{T_{int}}(\bar{\mathbf{v}}_0(i+1) - \bar{\mathbf{v}}_0(i)) \quad i \in [1, N_{int}]$
- Ausgabe der Stellgröße  $\bar{\mathbf{v}}_0(1)$
  - Ausgabe des Gütefunktionals  $J_1$

Parameter	Wert
$N_{iter}$	5
$N_{int}$	50
$T_s$	1 ms
$T_{hor}$	100 ms
$R$	0
$Q_x$	1000
$Q_v$	0

Tabelle 4.3: Parameter für die MPC.

Ergebnisse der Simulation sind in Abbildung 4.4 dargestellt. Man erkennt, dass das System, abgesehen von einer Zeitverzögerung, dem ersten Arbeitspunktwechsel gut folgen kann. Diese Verzögerung ist auf die konstante Vorgabe  $F_{z,d}$  während eines Prädiktionshorizontes zurückzuführen. Während des ersten Arbeitspunktwechsels sind keine Beschränkungen wirksam. Beim zweiten und dritten Arbeitspunktwechsel beschränkt die Straffunktion aus Abbildung 4.3 die Stellgröße. Die Beschränkung von  $\pm 1$  wird dabei nicht erreicht, wodurch geringe Änderungen in der Stellgröße die Schwingungen reduzieren können.

Im nächsten Schritt werden die gemessenen Systemzustände an den Regler zurückgeführt, d. h. das System wird im MPC-Betrieb verwendet. Simuliert wird wiederum mit den nominellen Parametern aus Tabelle 4.3 und vernachlässigter Ventilleckage. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Man erkennt, dass die Regelung stabil und ohne bleibende Regelabweichung arbeitet. Vergleicht man das Ergebnis mit jenem der Eingangs-Ausgangslinearisierung aus Abbildung 3.2, erkennt man, dass die beiden Regelungskonzepte für den ersten Arbeitspunktwechsel in etwa gleich gut funktionieren. Beim zweiten und dritten Arbeitspunktwechsel liefert die MPC allerdings das bessere Ergebnis, da hier die Beschränkung in der Ventilstellung  $\bar{u}$  systematisch berücksichtigt wird. Wie schon bei der Eingangs-Ausgangslinearisierung erwähnt, kommt es aufgrund der Knicke in den Ventilkennlinien aus Abbildung 2.7 nach jedem Arbeitspunktwechsel zu geringen Schwingungen in der Kraft.

In der nächsten Simulation wird die Ventilleckage im Simulationsmodell mitberücksichtigt, während sie in der MPC weiterhin vernachlässigt wird. Das Simulationsergebnis ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Ähnlich dem Ergebnis der Eingangs-Ausgangslinearisierung aus Abbildung 3.3 erkennt man, dass es nach den Arbeitspunktwechseln zu Schwingungen in der Kraft kommt. Diese sind, wie schon in Abschnitt 3.1.1 erklärt, auf die Knicke in der Ventilkennlinie aus Abbildung 2.7 zurückzuführen. Zu den raschen Wechsel um den gewünschten Wert der Kraft kommt es dabei aufgrund des Reibmodells aus (2.10). Vergleicht man das Ergebnis aus Abbildung 4.6 mit jenem aus Abbildung 3.3, erkennt man, dass die Eingangs-Ausgangslinearisierung diese Schwingungen besser kompensiert. Es ist allerdings unklar warum dieses Verhalten bei der Regelung mittels MPC ausgeprägter auftritt.

Als nächstes wird untersucht, welchen Einfluss die Wahl der Parameter aus Tabelle 4.3 auf das Regelungsverhalten haben. In den folgenden Simulationen werden die nominellen

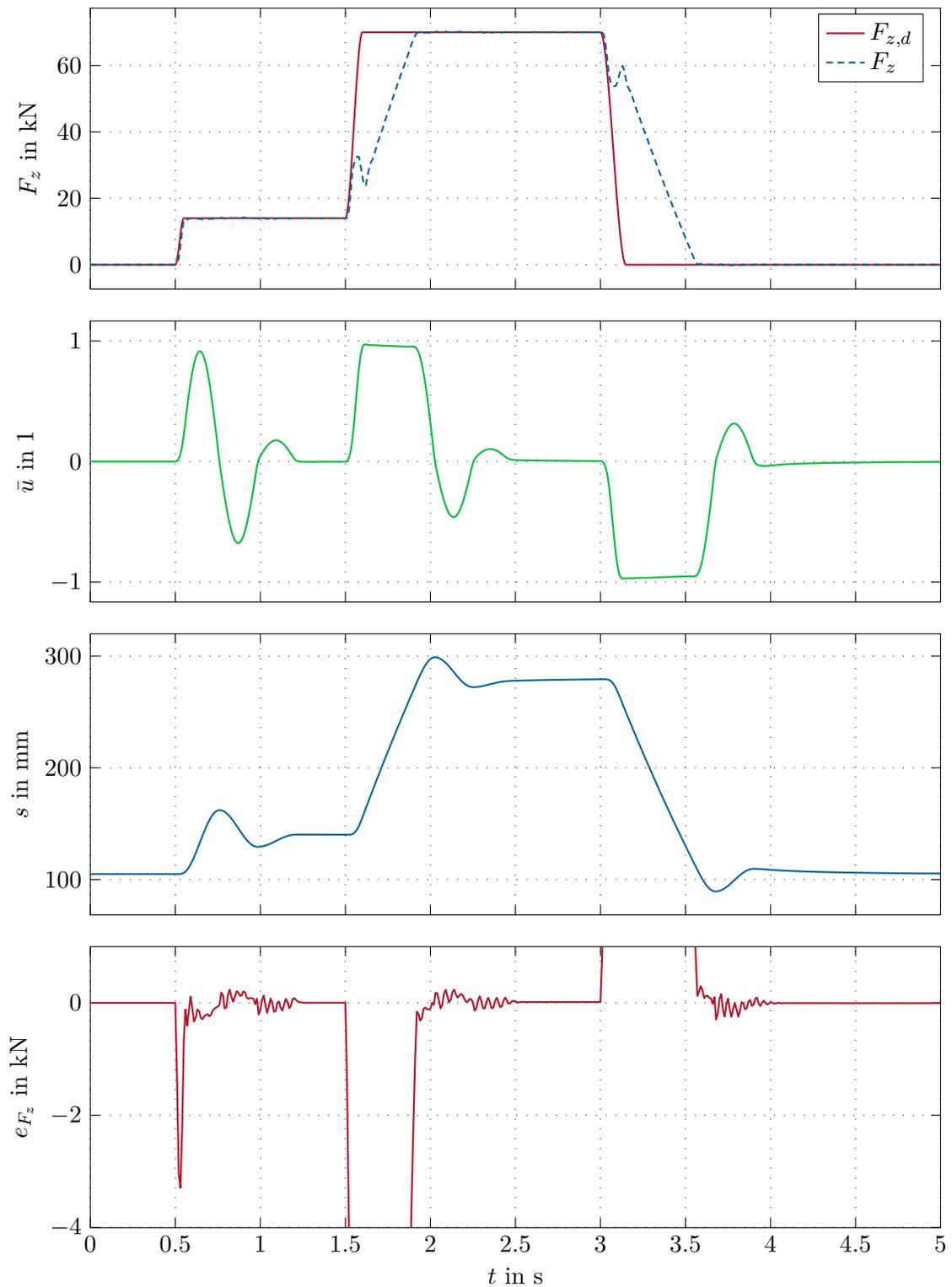


Abbildung 4.4: Dynamische Vorsteuerung (MHTP) des Systems ohne Rohrleitungen und mit nominellen Parametern.

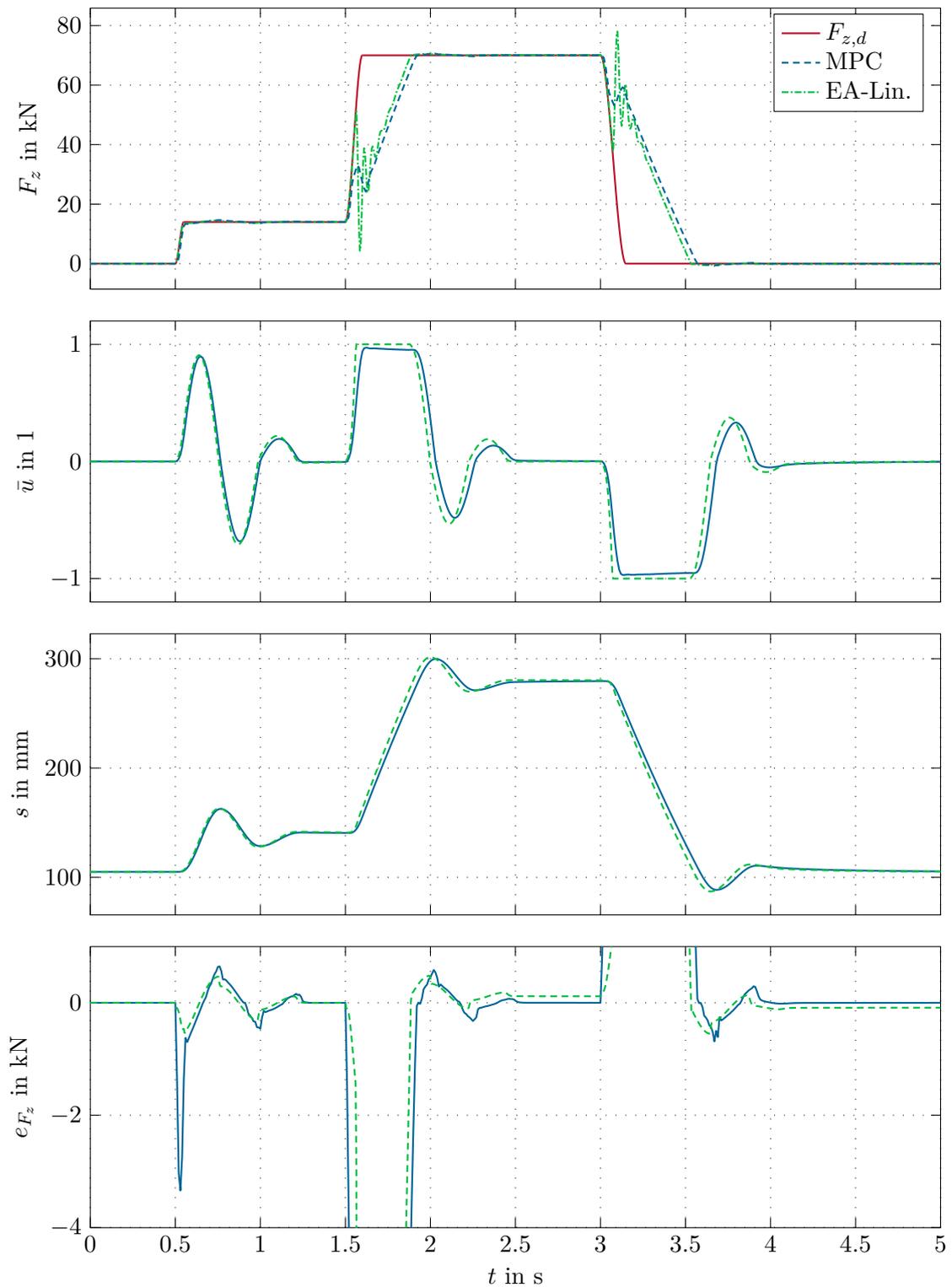


Abbildung 4.5: Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen und mit nominellen Parametern im Vergleich mit dem Ergebnis der exakten Eingangs-Ausgangslinearisation.

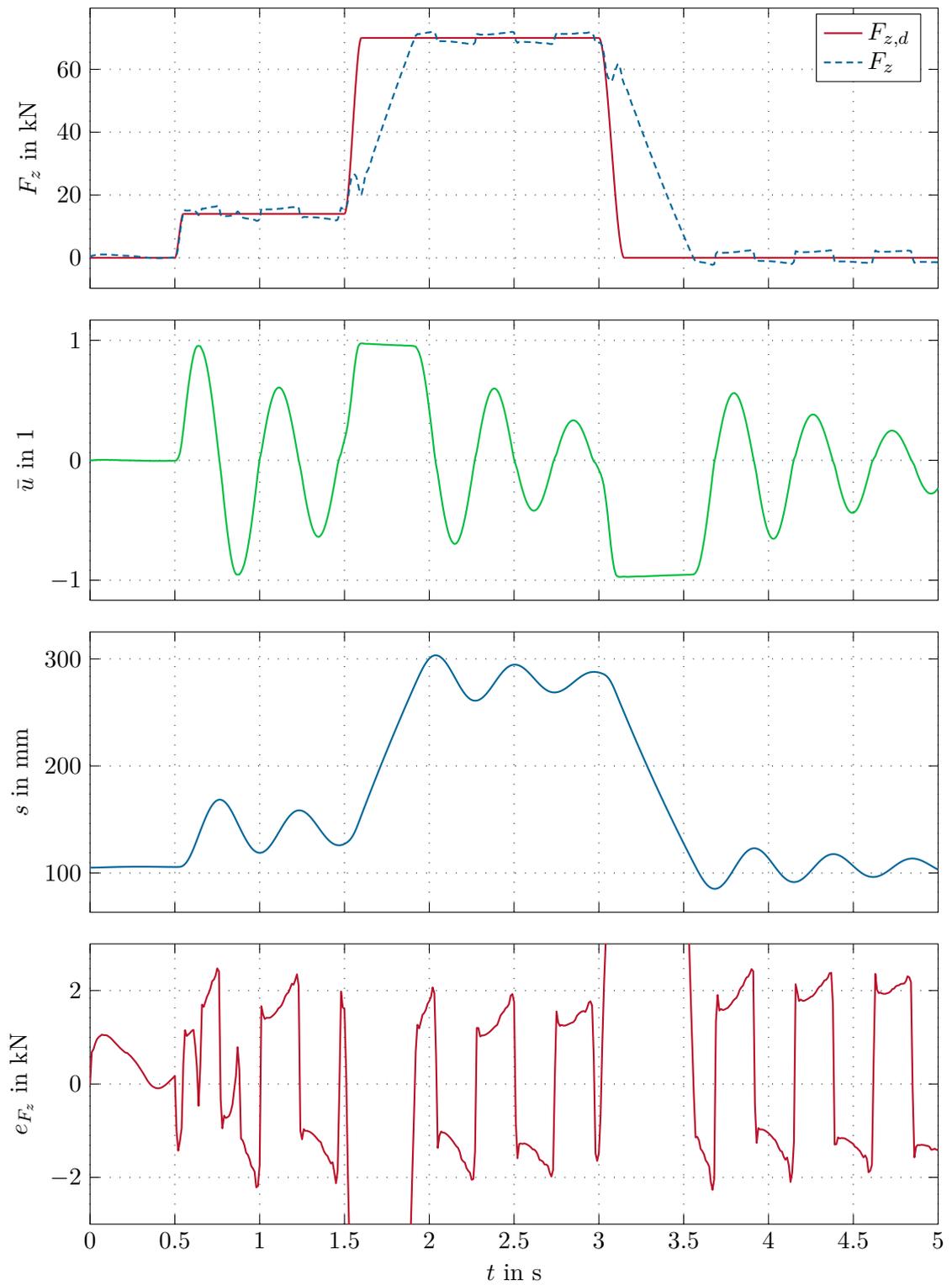


Abbildung 4.6: Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen, mit Ventilleckage und nominellen Parametern.

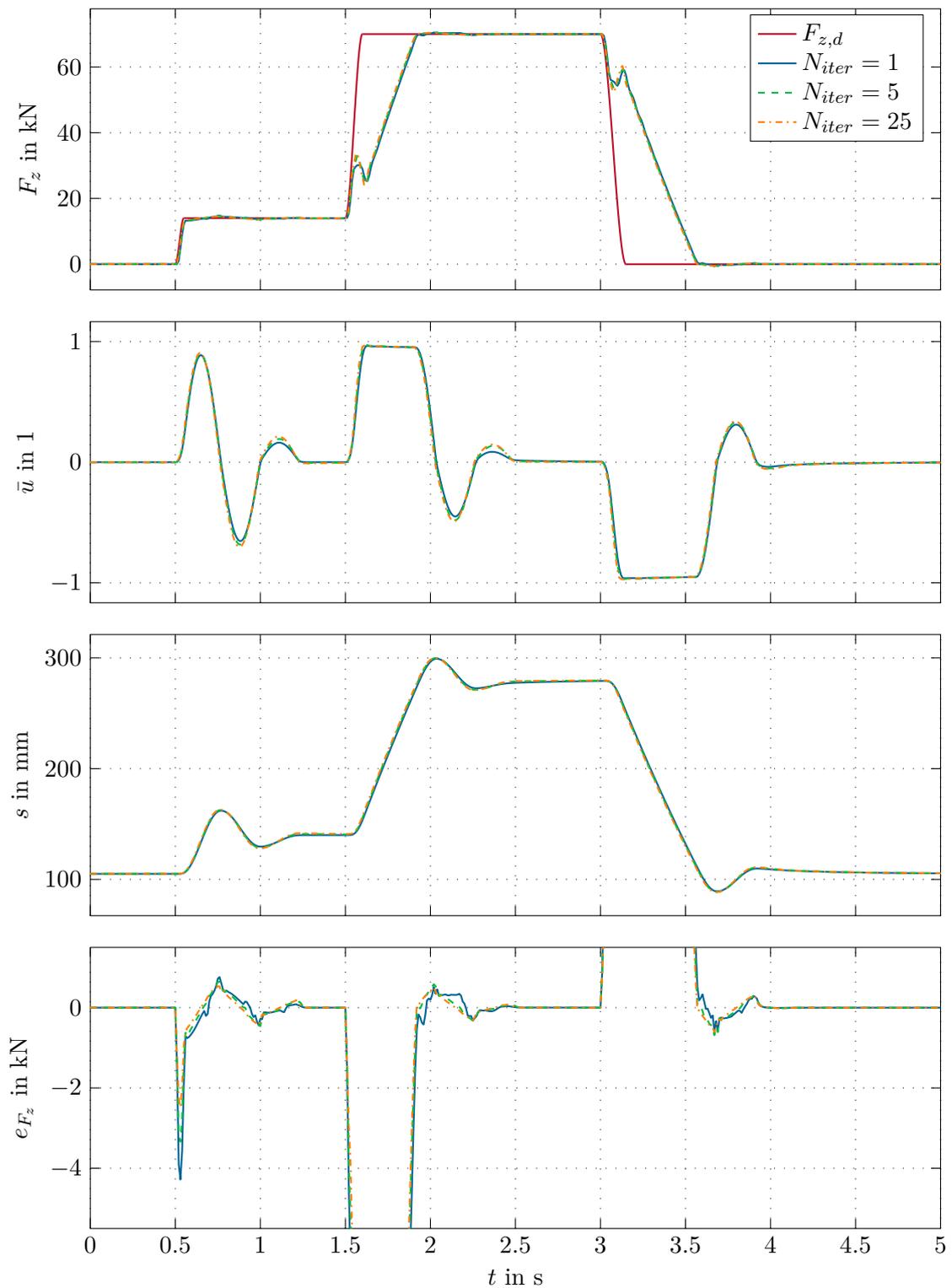
Werte aus Tabelle 4.3 verwendet, wobei jeweils einer der Parameter  $N_{iter}$ ,  $N_{int}$ ,  $T_s$  und  $T_{hor}$  variiert wird. Die Ventilleckage wird dabei vernachlässigt. Im ersten Versuch wird die Anzahl der Iterationen  $N_{iter}$  variiert. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.7 abgebildet. Um die Rechendauer der MPC zu minimieren wird untersucht wie sich ein  $N_{iter} = 1$  auf das Regelungsverhalten auswirkt. Man erkennt, dass diese Wahl zu einem geringfügig langsameren Regelverhalten und einem weniger glatten Ergebnis in der Kraft führt. Ein Erhöhen von  $N_{iter}$  auf 25 bringt allerdings kaum eine weitere Verbesserung im Vergleich zu  $N_{iter} = 5$ . Mit  $N_{iter} = 5$  ist daher eine geeignete Wahl für diesen Parameter gefunden.

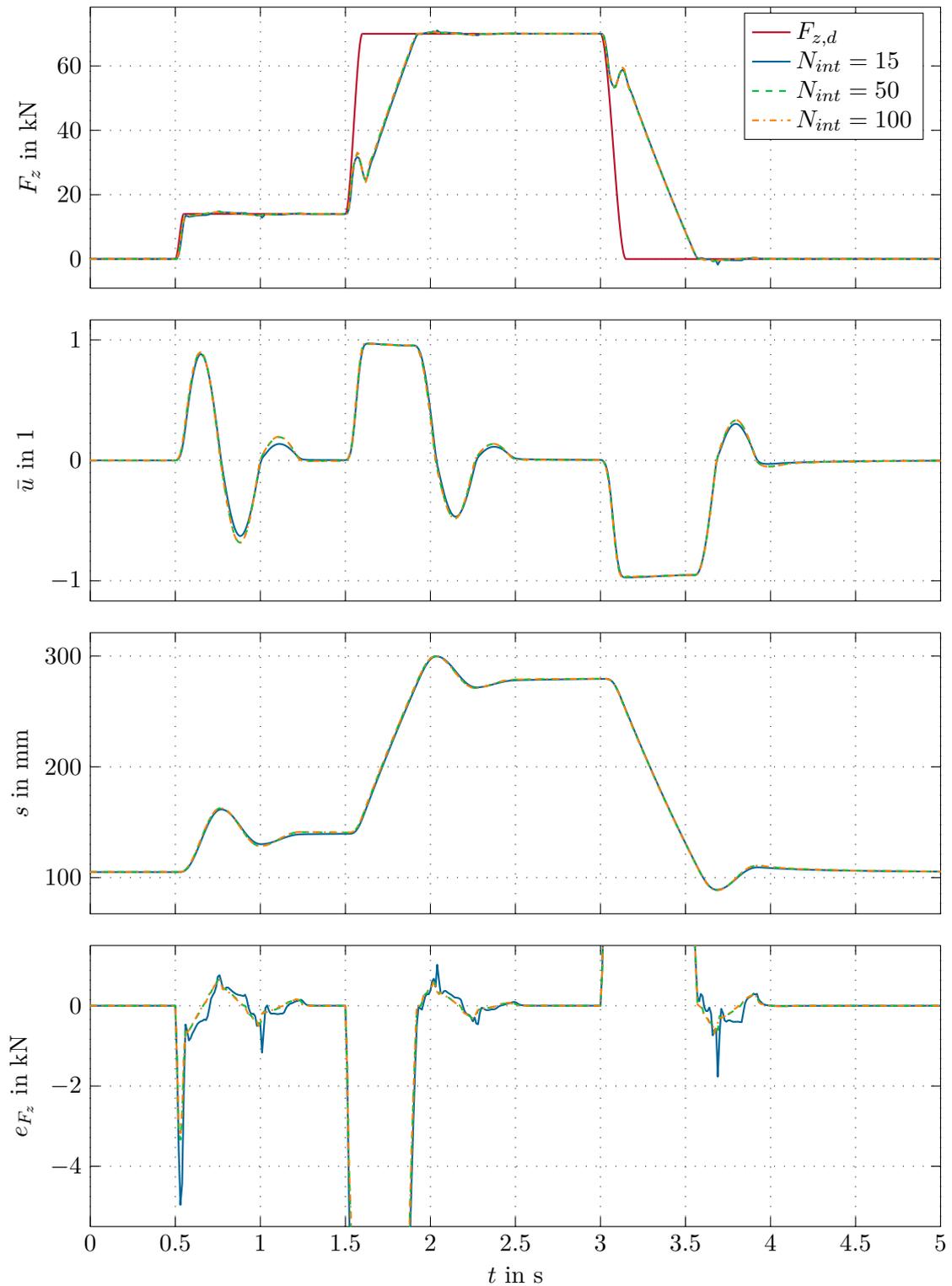
Wie sich eine Änderung der Stützpunktzahl auf das Ergebnis auswirkt ist in Abbildung 4.8 abzulesen. Eine Verringerung von  $N_{int}$  auf 15 führt zu einer Verschlechterung der Prädiktion. Dies führt zu einem weniger glatten Ergebnis in der Kraft. Eine Erhöhung von  $N_{int}$  auf 100 führt zu einer längeren Rechendauer, bringt jedoch keine maßgebliche Verbesserung der Regelgüte mit sich. Aus diesem Grund ist  $N_{int} = 50$  ein geeigneter Wert für diesen Parameter.

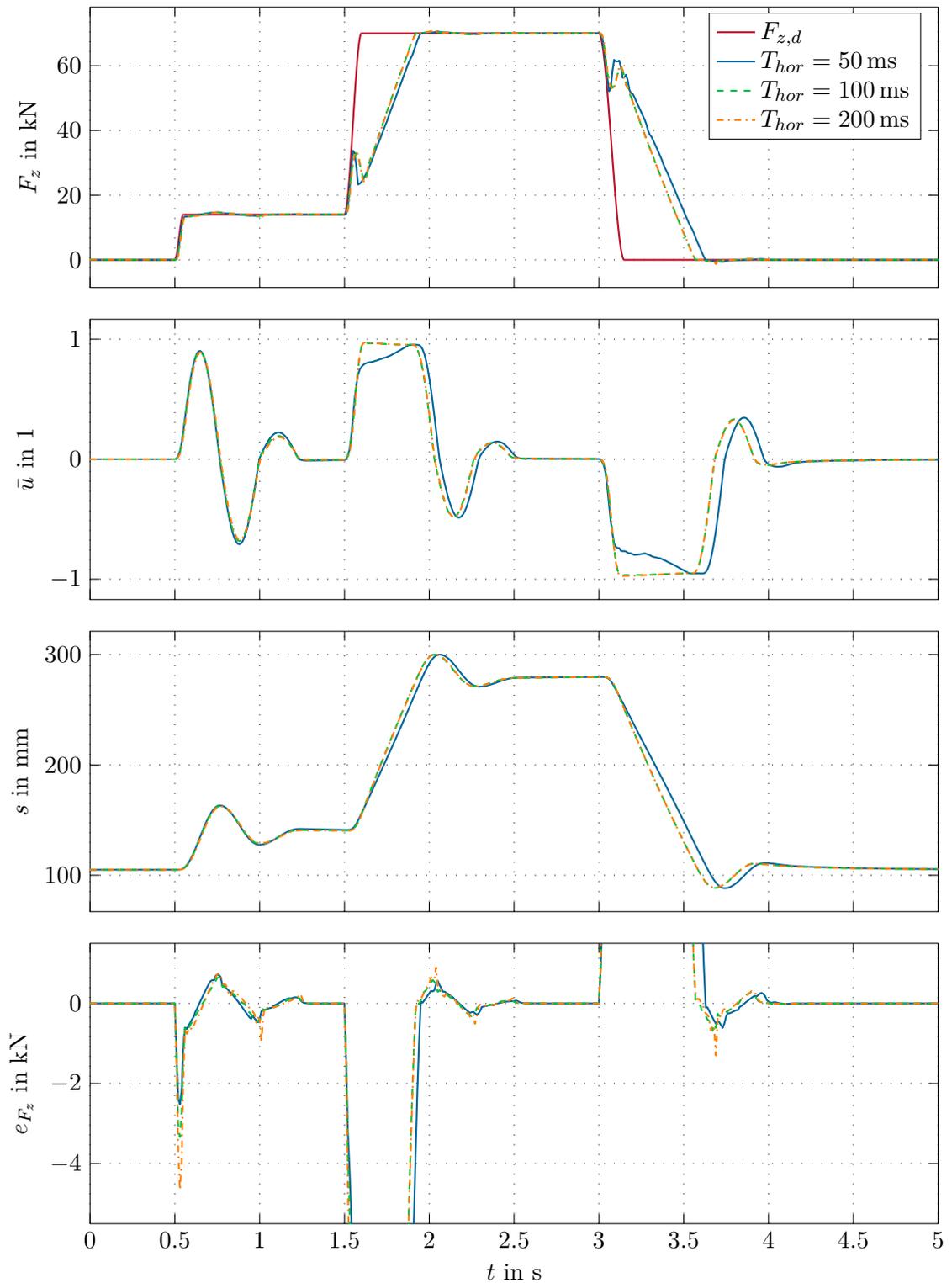
Als nächstes wird untersucht wie sich die Länge des Prädiktionshorizontes  $T_{hor}$  auf das Regelungsverhalten auswirkt. Aus Stabilitätsgründen ist ein langer Prädiktionshorizont von Vorteil. Allerdings wird die Prädiktion mittels explizitem Trapezverfahren schlechter wenn bei gleichbleibender Punkteanzahl der Horizont erhöht wird. Abbildung 4.9 zeigt, dass dies bei einem Prädiktionshorizont von  $T_{hor} = 200$  ms der Fall ist. Eine Horizontlänge von  $T_{hor} = 50$  ms liefert die schlechteste Regelgüte. Mit  $T_{hor} = 100$  ms ist ein möglichst langer Horizont gefunden ohne die Güte der Prädiktion mit  $N_{int} = 50$  Punkten zu verschlechtern.

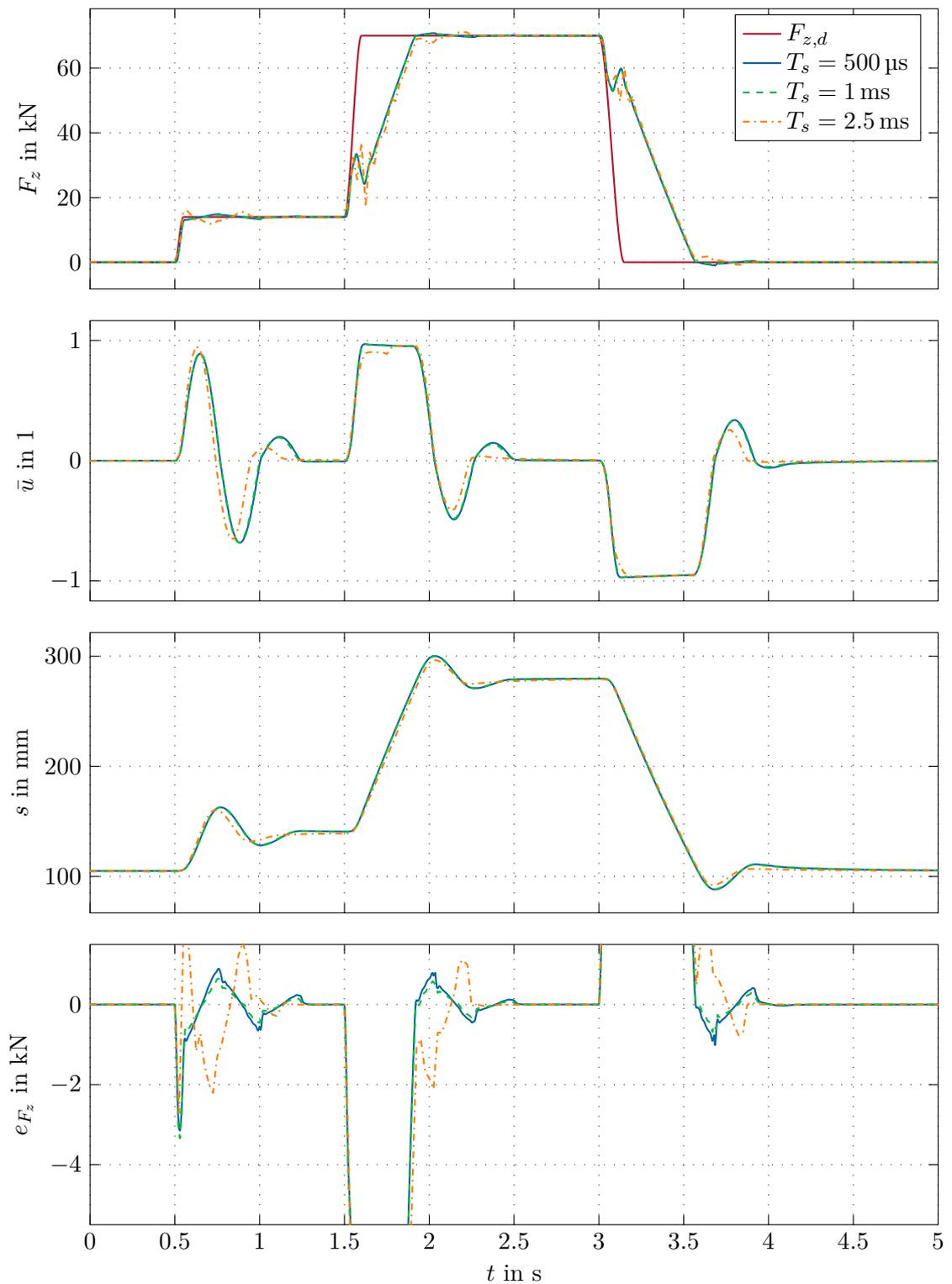
Als letzter Punkt wird untersucht wie sich eine Änderung der Abtastzeit  $T_s$  auf die Regelung auswirkt. Abbildung 4.10 zeigt die diesbezüglichen Ergebnisse. Eine Verringerung der Abtastzeit auf  $T_s = 500$   $\mu$ s bringt keine wesentlichen Verbesserungen mit sich. Zudem wirkt sich eine kleinere Abtastzeit nachteilig auf die Rechenzeit aus. Aus Effizienzgründen ist man daher daran interessiert die Abtastzeit zu erhöhen. Man erkennt, dass für  $T_s = 2.5$  ms eine stabile Regelung gegeben ist. Allerdings arbeitet der Regler mit dieser Abtastzeit nahe an der Stabilitätsgrenze und mit deutlich schlechterer Regelgüte. Aus diesem Grund wird eine Abtastzeit von  $T_s = 1$  ms verwendet.

Bei praktischer Anwendung im Walzwerk ist es möglich, dass es zu plötzlichen Änderungen im Bandzug kommt. Dies kann im Modell dadurch abgebildet werden, dass sich der Fußpunkt der Feder  $s_{0,c}$  ändert. Im Nachfolgenden soll daher gezeigt werden wie sich Regler und System verhalten, wenn dieser Fall eintritt. In der Simulation ändert sich zum Zeitpunkt  $t = 1$  s der Fußpunkt sprunghaft von  $s_{0,c} = 105$  mm auf  $s_{0,c} = 78.8$  mm. Die Simulationsergebnisse mit nominellen Parametern und vernachlässigter Ventilleckage sind in Abbildung 4.11 dargestellt. Man erkennt, dass die Regelung weiterhin stabil arbeitet. Es tritt jedoch eine bleibende Regelabweichung in der Kraft auf. Um diese stationäre Abweichung zu verhindern, wird ein Beobachter entworfen der den Parameter  $s_{0,c}$  schätzt. Zur Lösung dieser Aufgabe wird ein einfaches Störmodell der Form  $\hat{\delta}_{0,c} = 0$  angesetzt und

Abbildung 4.7: Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen mit Variation von  $N_{iter}$ .

Abbildung 4.8: Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen mit Variation von  $N_{int}$ .

Abbildung 4.9: Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen mit Variation von  $T_{hor}$ .

Abbildung 4.10: Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen mit Variation von  $T_s$ .

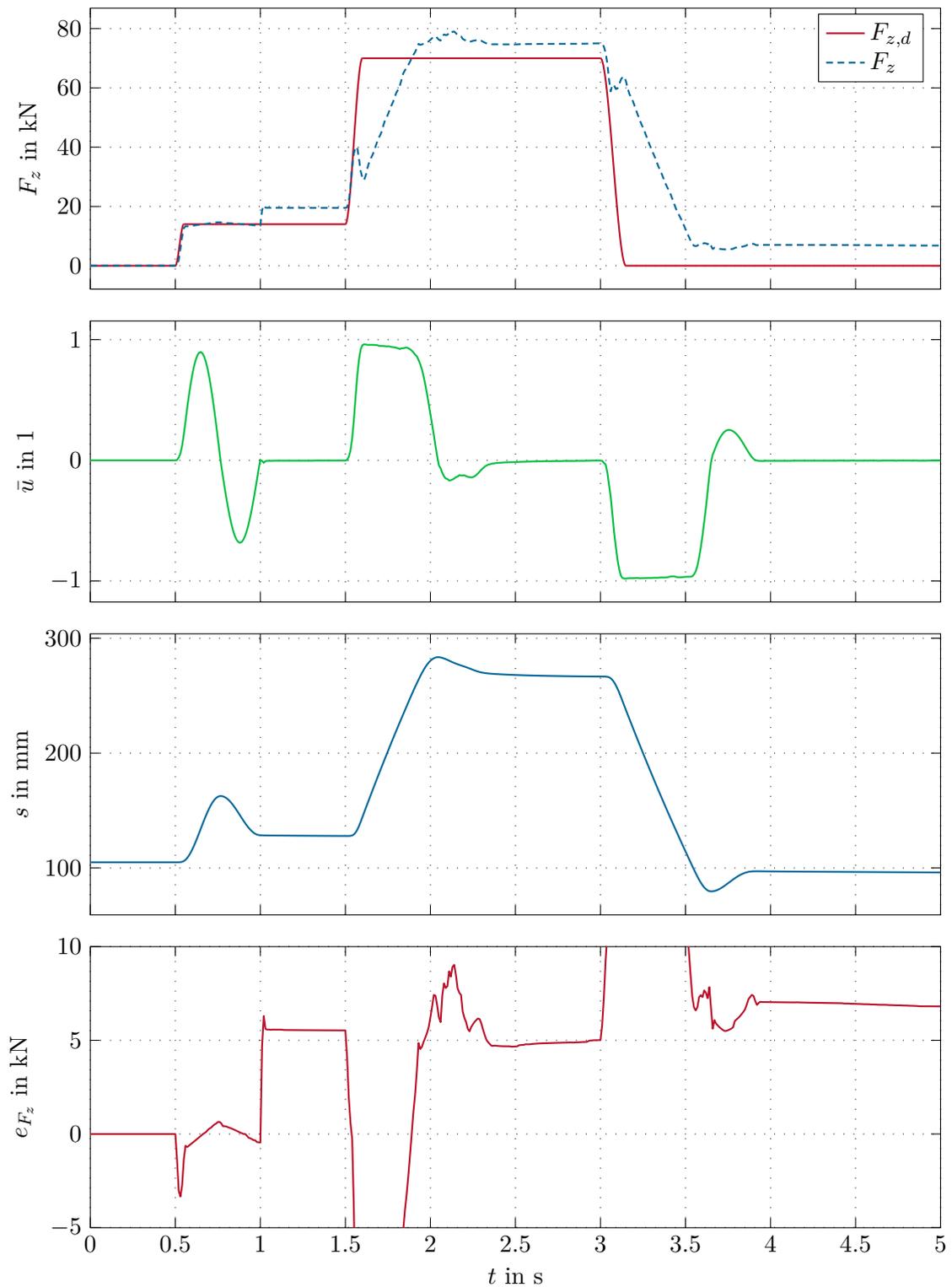


Abbildung 4.11: Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen mit sprungartiger Änderung des Fußpunktes der Feder  $s_{0,c}$ .

im reduzierten System

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{s}} \\ \dot{\hat{w}} \\ \dot{\hat{s}}_{0,c} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{c}{m} & 0 & \frac{c}{m} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \hat{s} \\ \hat{w} \\ \hat{s}_{0,c} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{b}}} (F_z - F_r(\hat{w})) \quad (4.24a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{s} \\ \hat{w} \\ \hat{s}_{0,c} \end{bmatrix} \quad (4.24b)$$

verwendet. Die Zylinderkraft  $F_z$  und  $s$  werden für den Beobachterentwurf als messbar vorausgesetzt. Die Reibkraft  $F_r$  wird aus der Schätzung von  $\hat{w}$  ermittelt. Durch Diskretisierung [27] mit der Abtastzeit  $T_s$  folgt

$$\hat{\mathbf{x}}_{obs,k+1} = \hat{\mathbf{\Phi}} \hat{\mathbf{x}}_{obs,k} + \hat{\mathbf{\Gamma}} (F_z - F_r(\hat{w})) \quad (4.25)$$

mit

$$\hat{\mathbf{\Phi}} = \exp(\hat{\mathbf{A}}T_s) \quad (4.26a)$$

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \int_0^{T_s} \exp(\hat{\mathbf{A}}\tau) d\tau \hat{\mathbf{b}}. \quad (4.26b)$$

Der Beobachter wird in der Form

$$\hat{\mathbf{x}}_{obs,k+1} = \hat{\mathbf{\Phi}} \hat{\mathbf{x}}_{obs,k} + \hat{\mathbf{\Gamma}} (F_{z,k} - F_r(\hat{w}_k)) + \hat{\mathbf{k}}(\hat{s}_k - s_k) \quad (4.27)$$

angeschrieben. Die Eigenwerte der Dynamik des Beobachtungsfehlers werden mittels Formel von Ackermann zu  $\lambda_i = 0.95$  mit  $i \in [1, 3]$  gewählt. Dies entspricht in etwa den zeitkontinuierlichen Eigenwerten bei  $s_i = -51$ . Die Verstärkung  $\hat{\mathbf{k}}$  für den Beobachter folgt damit zu  $\hat{\mathbf{k}} = [-0.1498 \quad -7.2291 \quad -0.6441]^T$ .

Das Ergebnis der MPC mit diesem Parameterschätzer ist in Abbildung 4.12 dargestellt. Den Messungen  $F_z$  und  $s$  wird hier ein weißes Messrauschen von  $\pm 1$  kN und  $\pm 1$  mm überlagert. Die Schätzung  $\hat{s}_{0,c}$  ist ebenfalls dargestellt. Dieser Parameter  $\hat{s}_{0,c}$  konvergiert asymptotisch gegen seinen realen Wert. Dies führt dazu, dass keine stationäre Regelabweichung in der Kraft  $F_z$  bleibt.

In einer weiteren Simulation wird untersucht wie sich die Regelung mit Ventilleckage im Simulationsmodell verändert, wenn der Parameterschätzer aktiv ist. Abbildung 4.13 zeigt, dass der Parameterschätzer auch trotz Ventilleckage funktioniert und den Parameter  $s_{0,c}$  gut schätzt. Allerdings kann das Regelungsverhalten verglichen zur Simulation ohne Parameterschätzer aus Abbildung 4.6 durch den Schätzer nicht verbessert werden.

Nachfolgend wird untersucht wie sich die Rohrleitungen im Simulationsmodell auf das Regelungsverhalten auswirken. In den folgenden Simulationen wird die Ventilleckage vernachlässigt und aus Stabilitätsgründen eine Rohrlänge von  $L_{nom}/2$  betrachtet. Das Systemverhalten im MHTP- und im MPC-Betrieb ist in Abbildung 4.14 dargestellt. Diese Simulation zeigt, dass es bei der Vorsteuerung zu Schwingungen in der Kraft kommt. Diese sind darauf zurückzuführen, dass die Rohrleitung im Algorithmus nicht berücksichtigt

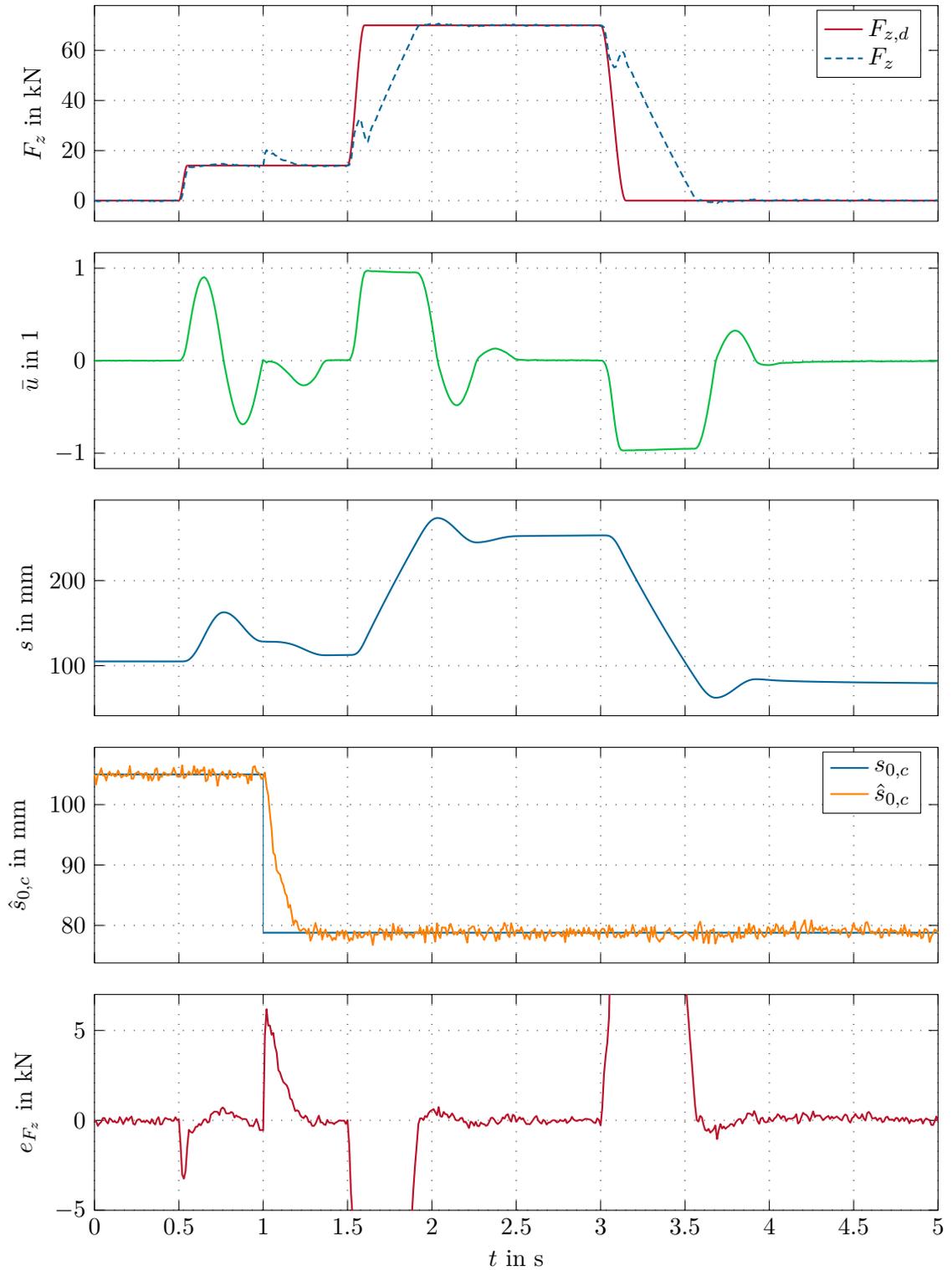


Abbildung 4.12: Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen mit sprungartiger Änderung des Fußpunktes der Feder  $s_{0,c}$  und Parameterschätzer.

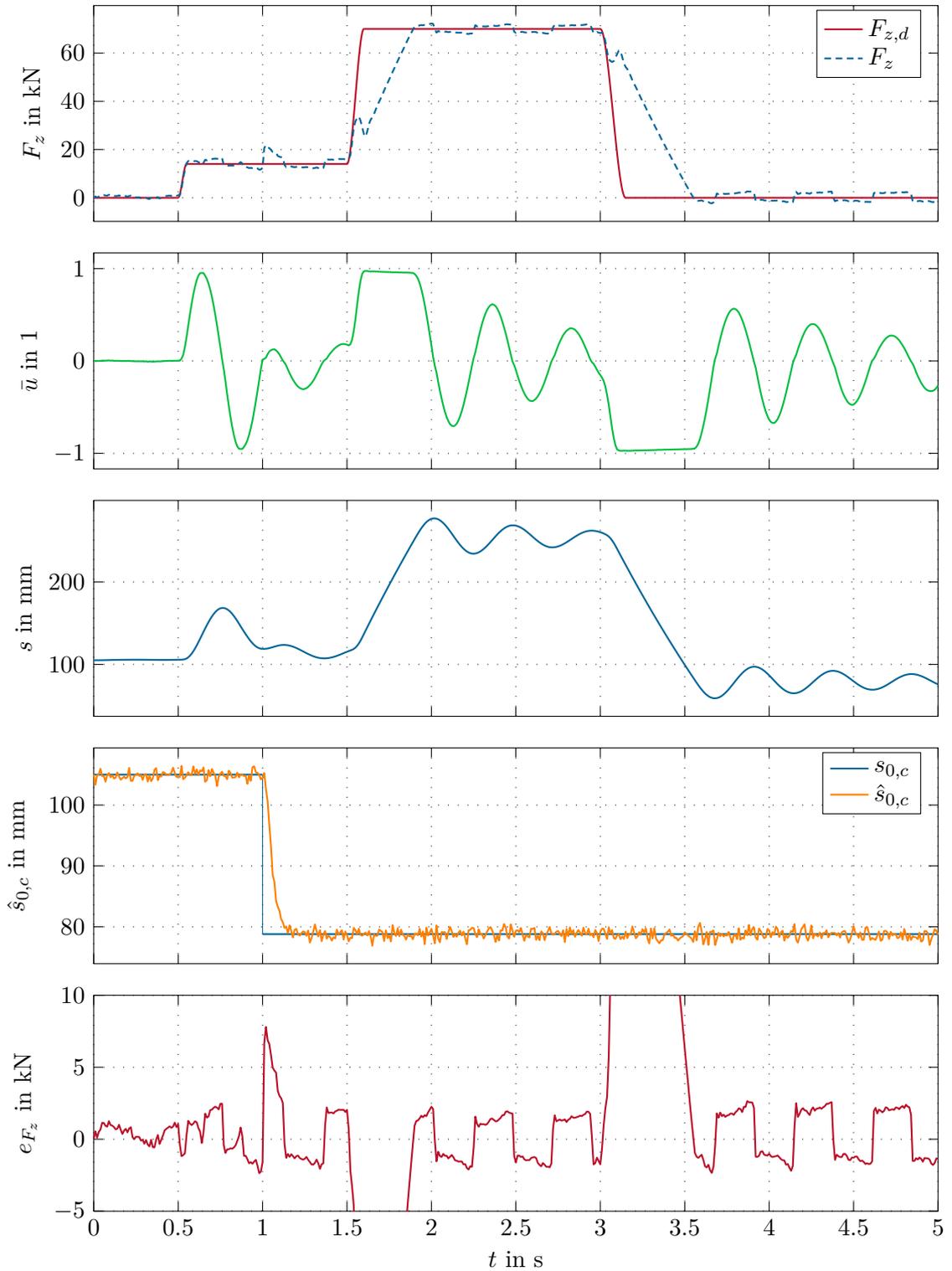


Abbildung 4.13: Regelung (MPC) des Systems ohne Rohrleitungen, mit Ventilleckage, sprungartiger Änderung des Fußpunktes der Feder  $s_{0,c}$  und Parameterschätzer.

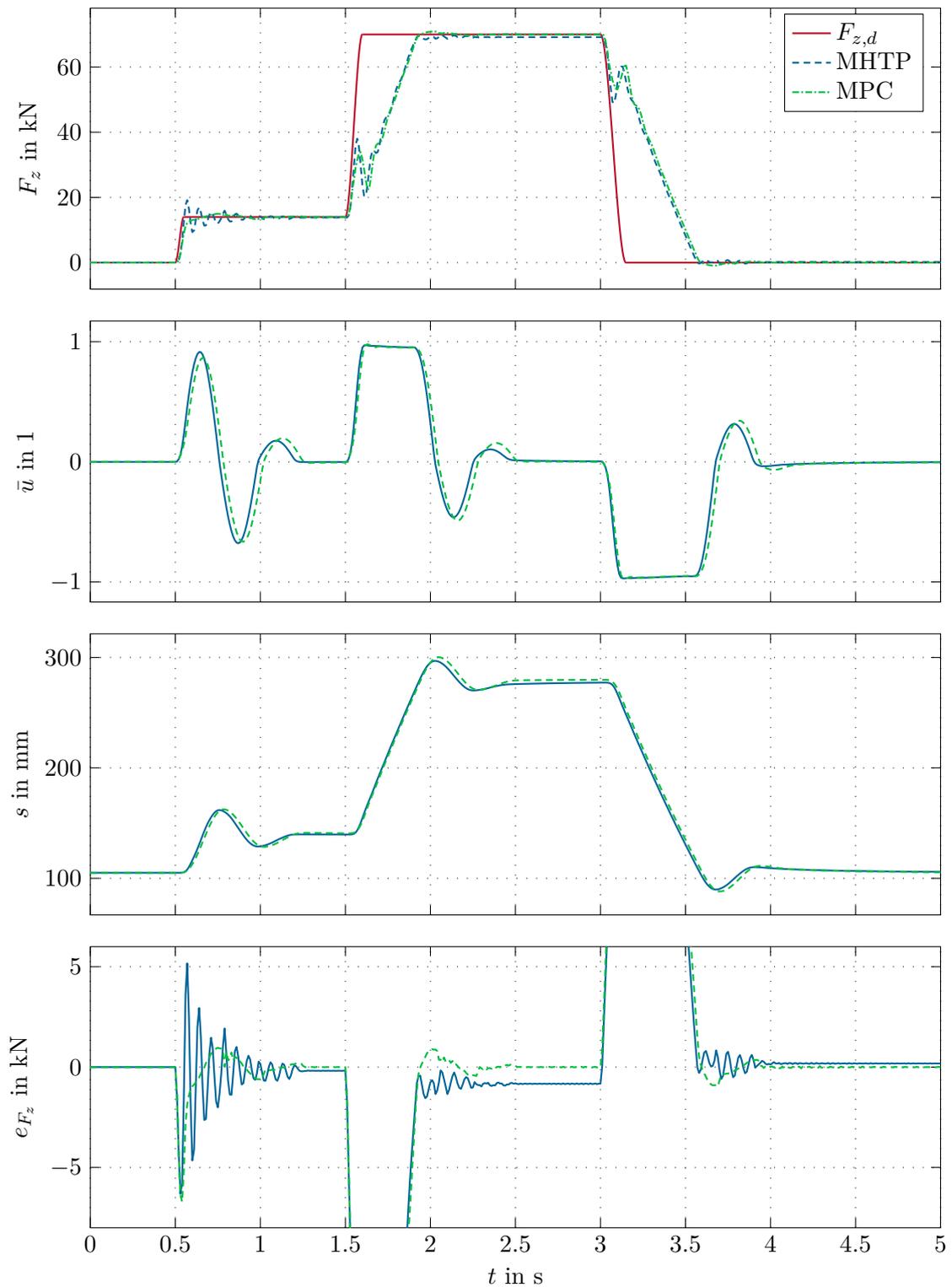


Abbildung 4.14: Vergleich der Simulationsergebnisse von MHTP und MPC, entworfen ohne Rohrleitungsmodell, anhand eines Simulationsmodells mit Rohrleitungen der Länge  $L_{nom}/2$ .

ist und dadurch Schwingungen aufgrund von Reflexionen nicht prädiziert werden. Im MPC-Betrieb wird diese Schwingung gut ausgeregelt.

Schließlich wird die Regelung um den Parameterschätzer erweitert und am System mit Rohrleitungen getestet. Wie in der Simulation ohne Rohrleitungen ändert sich der Parameter  $s_{0,c}$  zum Zeitpunkt  $t = 1$  s sprunghaft. Die Ergebnisse in Abbildung 4.15 zeigen, dass der Regler in Kombination mit dem Parameterschätzer stabil arbeitet und auch das Rauschen in den Messgrößen das Ergebnis kaum verschlechtert. Für eine Rohrleitungslänge von  $L_{nom}/2$  ist mit der MPC daher eine stabile Regelung möglich.

In der nachfolgenden Simulation wird die Funktion der MPC bei  $2L_{nom}/3$  gezeigt. Die Abbildung 4.16 zeigt, dass bei einer Rohrleitungslänge von  $2L_{nom}/3$  keine stabile Regelung mehr möglich ist.

Die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2 zeigen, dass mit der Eingangs-Ausgangslinearisierung eine stabile Regelung bis zu einer Rohrleitungslänge von  $L_{nom}/15$  möglich ist. Der MPC-Algorithmus hingegen ermöglicht eine Regelung bis zu einer Rohrleitungslänge von  $L_{nom}/2$ . Mit diesem Algorithmus ist daher bereits eine bessere Regelungsstrategie als mit der Eingangs-Ausgangslinearisierung gefunden. Eine weitere Verlängerung der Rohrleitung führt allerdings zu Instabilität. Aus diesem Grund wird die MPC im nächsten Schritt um die Gleichungen der Rohrleitungen erweitert.

### 4.3 MPC mit Rohrleitungen

Die Ergebnisse des vorigen Abschnittes zeigen, dass der MPC-Algorithmus selbst unter Vernachlässigung der Rohrleitungen bis zu einer Länge von  $L_{nom}/2$  ein robustes Konzept darstellt. Um auch die Regelung längerer Rohrleitungen zu ermöglichen wird der Algorithmus um die Gleichungen der Rohrleitungen erweitert. Dazu wird das System (2.57) mit dem erweiterten Zustand  $\dot{u} = v$  verwendet. Dieses System eignet sich zur Beschreibung der Schwingungen aufgrund der Rohrleitungen. Der restliche Algorithmus der MPC bleibt unverändert. Der Rechenaufwand erhöht sich nun maßgeblich, da sich die Systemordnung von 5 auf 45 erhöht, was besonders bei der Vorwärts- und Rückwärtsintegration mehr Rechenaufwand bedeutet. Um die Rechenzeit zu reduzieren wird im MPC-Systemmodell die Rohrreibung vernachlässigt. Wie in (2.57) zu erkennen ist, bringt dies eine Ersparnis von zwei Matrizenmultiplikationen mit sich. Außerdem werden durch diese Vereinfachung große Teile der Jacobimatrix konstant. Diese konstanten Teile, wie etwa die Multiplikationen  $(\mathbf{M}_p)^{-1} \mathbf{S}$  und  $(\mathbf{M}_q)^{-1} \mathbf{S}$ , können vorab berechnet werden.

In der folgenden Simulation werden die Ergebnisse der MHTP bei nomineller Rohrleitungslänge betrachtet. Es werden die MPC-Versionen mit und ohne Berücksichtigung der Rohrleitungen verglichen. Für die MPC ohne Rohrleitungen werden die nominellen Parameter gemäß Tabelle 4.3 verwendet. Da das Trapezverfahren mit Rohrleitungen nur bei sehr hoher Stützpunktzahl  $N_{int}$  ein stabiles Ergebnis liefert, erfolgt die Vorwärts- und Rückwärtsintegration bei der MPC mit Rohrleitungen mittels implizitem Eulerverfahren. Für den Prädiktionshorizont wird bei dieser Variante der MPC  $T_{hor} = 100$  ms und für die Integrationspunkte  $N_{int} = 50$  gewählt. Die Stellgröße wird mit  $Q_v = 0.01$  gewichtet um die Stabilität zu verbessern. Abbildung 4.17 zeigt, dass die Schwingungen aufgrund der Rohrleitungen deutlich geringer sind, wenn die Leitungen beim Entwurf

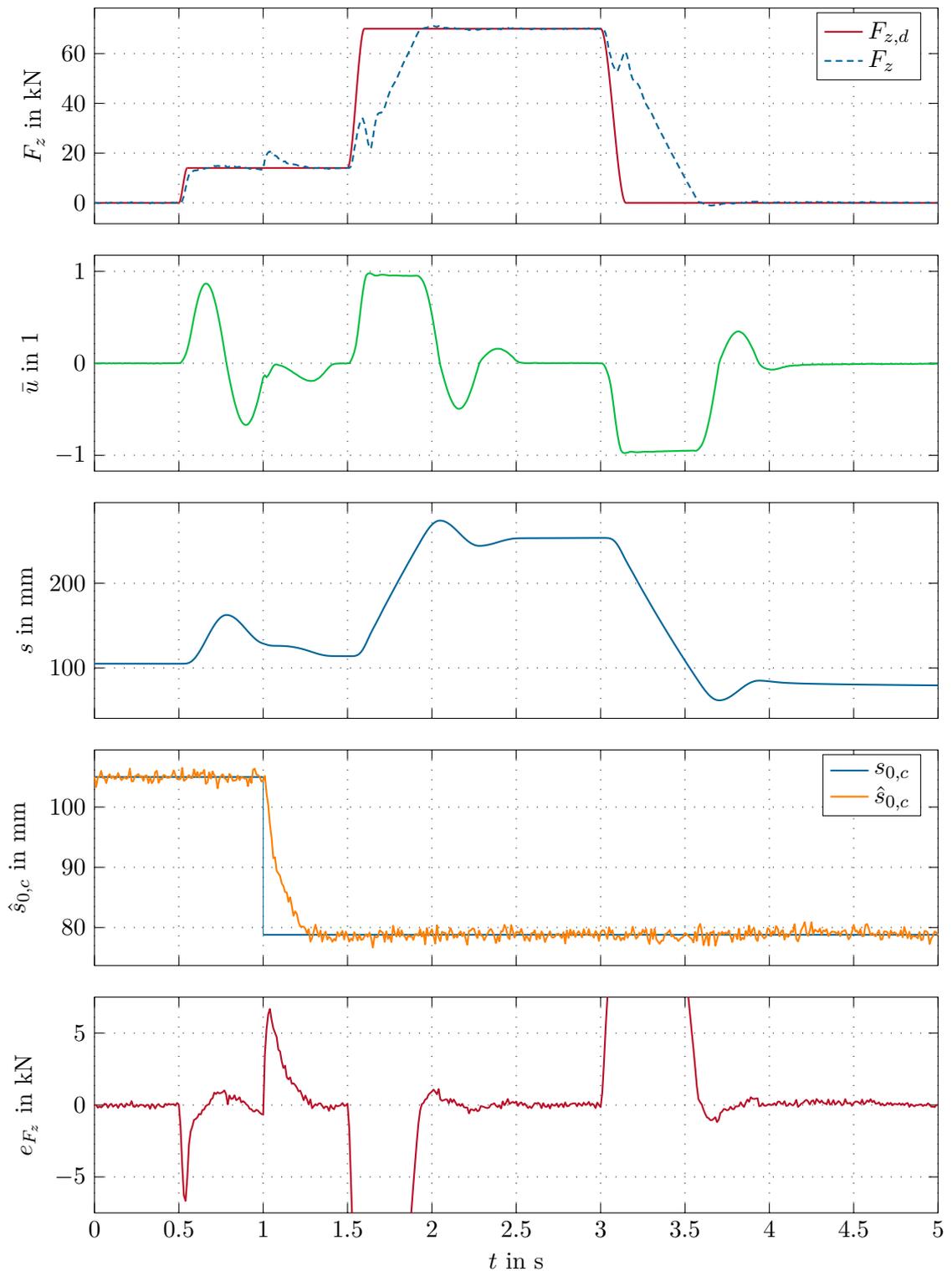


Abbildung 4.15: Regelung (MPC), entworfen ohne Rohrleitungsmodell, eines Simulationsmodells mit Rohrleitungen der Länge  $L_{nom}/2$  bei sprungartiger Änderung des Fußpunktes der Feder  $s_{0,c}$  und Parameterschätzer.

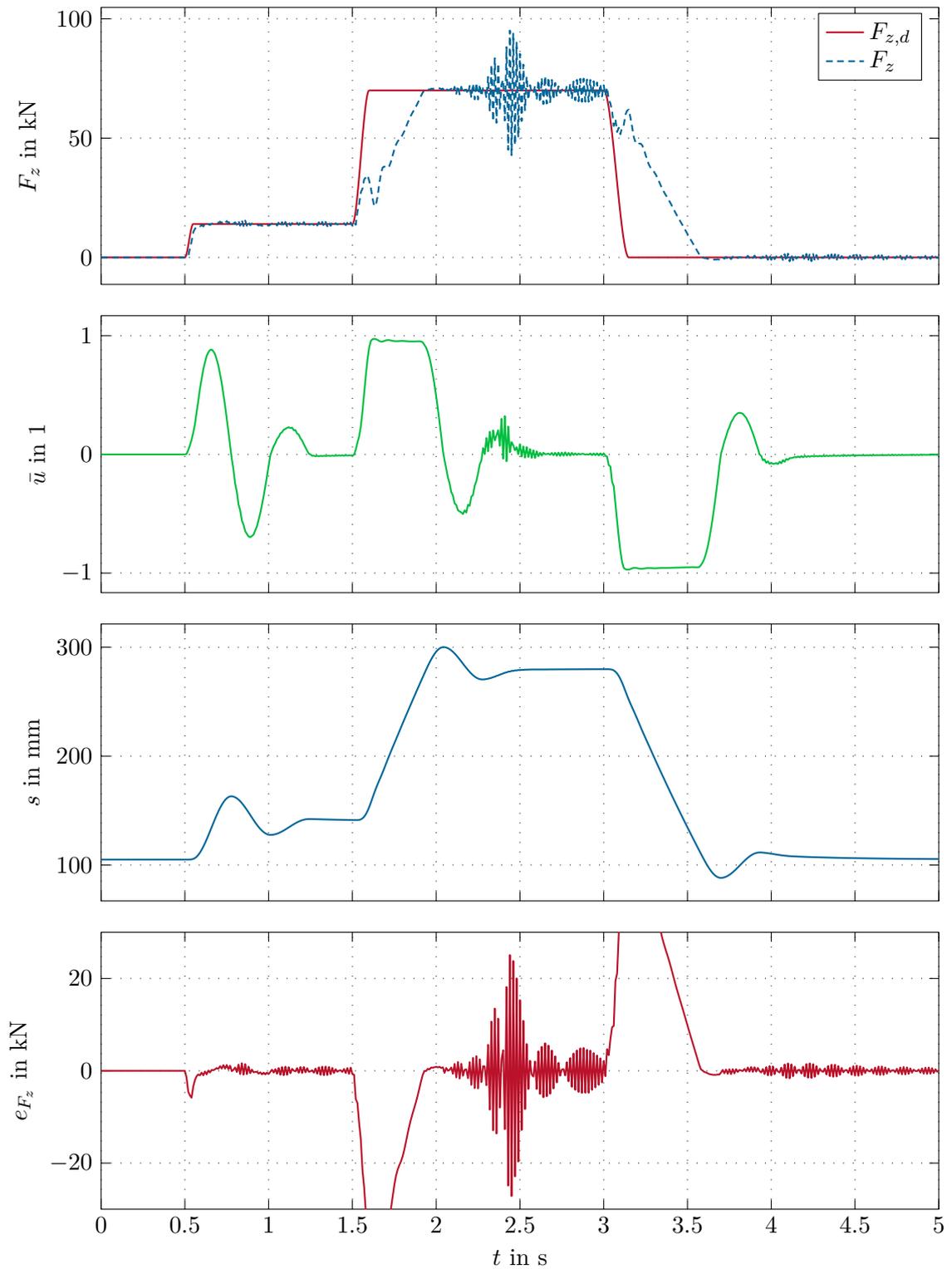


Abbildung 4.16: Regelung (MPC), entworfen ohne Rohrleitungsmodell, eines Simulationsmodells mit Rohrleitungen der Länge  $2L_{nom}/3$ .

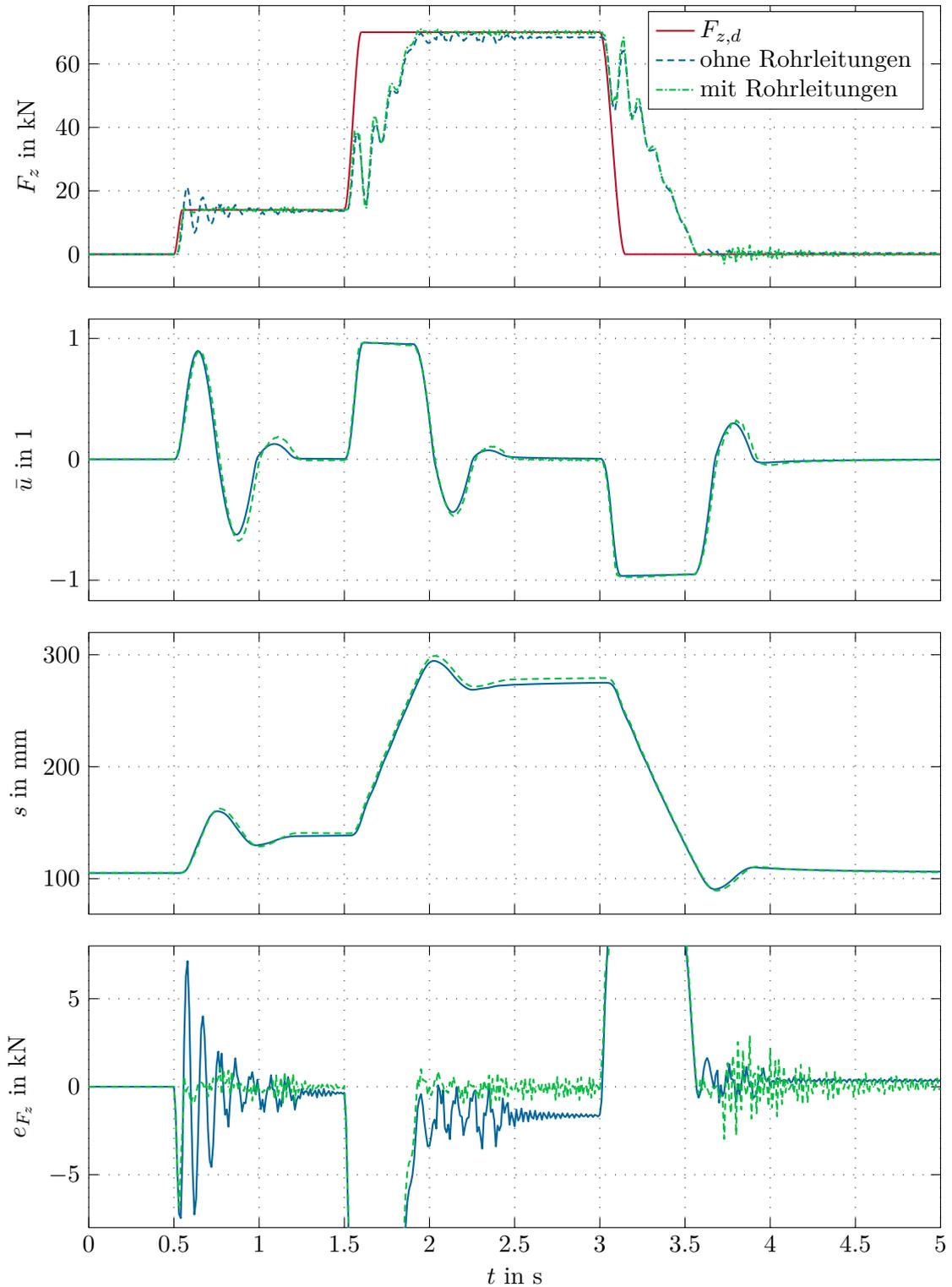


Abbildung 4.17: Vergleich der Simulationsergebnisse der MHTP, einmal entworfen ohne Rohrleitungsmodell und einmal entworfen mit Rohrleitungsmodell, anhand eines Simulationsmodells mit Rohrleitungen der Länge  $L_{nom}$ .

der MPC berücksichtigt werden. Außerdem wird für diesen Regler der Endwert schneller erreicht und die stationäre Abweichung verringert. Man erkennt allerdings, dass es bei beiden Vorsteuerungen zu hochfrequenten Schwingungen kommt. Diese sind auf numerische Ungenauigkeiten aufgrund der gewählte Diskretisierung und der Vorwärts- und Rückwärtsintegration zurückzuführen.

In der nachfolgenden Simulation wird das Regelungsverhalten der beiden MPC-Entwürfen bei einer Rohrleitungslänge von  $2L_{nom}/3$  verglichen. Die Abbildung 4.18 zeigt, dass sich das Regelungsverhalten durch Berücksichtigung der Rohrleitungen im Regler wesentlich verbessert hat. Mit dieser Implementierung ist daher ein stabiler geschlossener Regelkreis bis zu einer Rohrlänge von  $2L_{nom}/3$  möglich. Eine weitere Verlängerung der Rohrleitungen führt allerdings auch bei dieser Implementierung zu Instabilität. Dies ist in Abbildung 4.19 bei nominellen Rohrlängen gezeigt.

Das Regelungsverhalten mit Ventilleckage bei einer Rohrlänge von  $2L_{nom}/3$  wird in der nachfolgenden Simulation untersucht. Die Abbildung 4.20 zeigt, dass bei dieser Rohrleitungslänge und mit Ventilleckage nicht in jedem Arbeitspunkt eine stabile Regelung möglich ist.

Zuletzt wird untersucht ob mit dieser MPC-Implementierung eine stabile Regelung mit dem Parameterschätzer für den Parameter  $s_{0,c}$  möglich ist. Die Abbildung 4.21 zeigt, dass der geschlossene Regelkreis nicht in jedem Arbeitspunkt stabil ist. Da der Parameterschätzer den Wert des Parameters  $s_{0,c}$  bereits beim zweiten Arbeitspunktwechsel gut approximiert, ist die Instabilität am zweiten Arbeitspunkt auf das Messrauschen zurückzuführen.

Es zeigt sich, dass mit der MPC ein robusteres Regelungskonzept gefunden ist als mit der Eingangs-Ausgangslinearisierung. Werden die Rohrleitungen in der Implementierung vernachlässigt, ist eine Regelung bis zu einer Rohrlänge von  $L_{nom}/2$  möglich. Diese Regelung funktioniert auch mit Ventilleckage und einem Parameterschätzer für den Fußpunkt der Feder  $s_{0,c}$  stabil. Die Berücksichtigung der Rohrleitungen im Regler ermöglicht eine stabile Regelung bis zu einer Rohrlänge von  $2L_{nom}/3$ . Allerdings funktioniert diese Regelung nicht mehr stabil sobald die Ventilleckage im Simulationsmodell berücksichtigt wird oder Messrauschen vorhanden ist. Diese Stabilitätsprobleme sind auf die Diskretisierung der Rohrleitungen und die numerische Vorwärts- und Rückwärtsintegration zurückzuführen. Im MHTP-Betrieb ist es allerdings dennoch möglich eine dynamische Vorsteuerung bei nomineller Rohrlänge vorzunehmen.

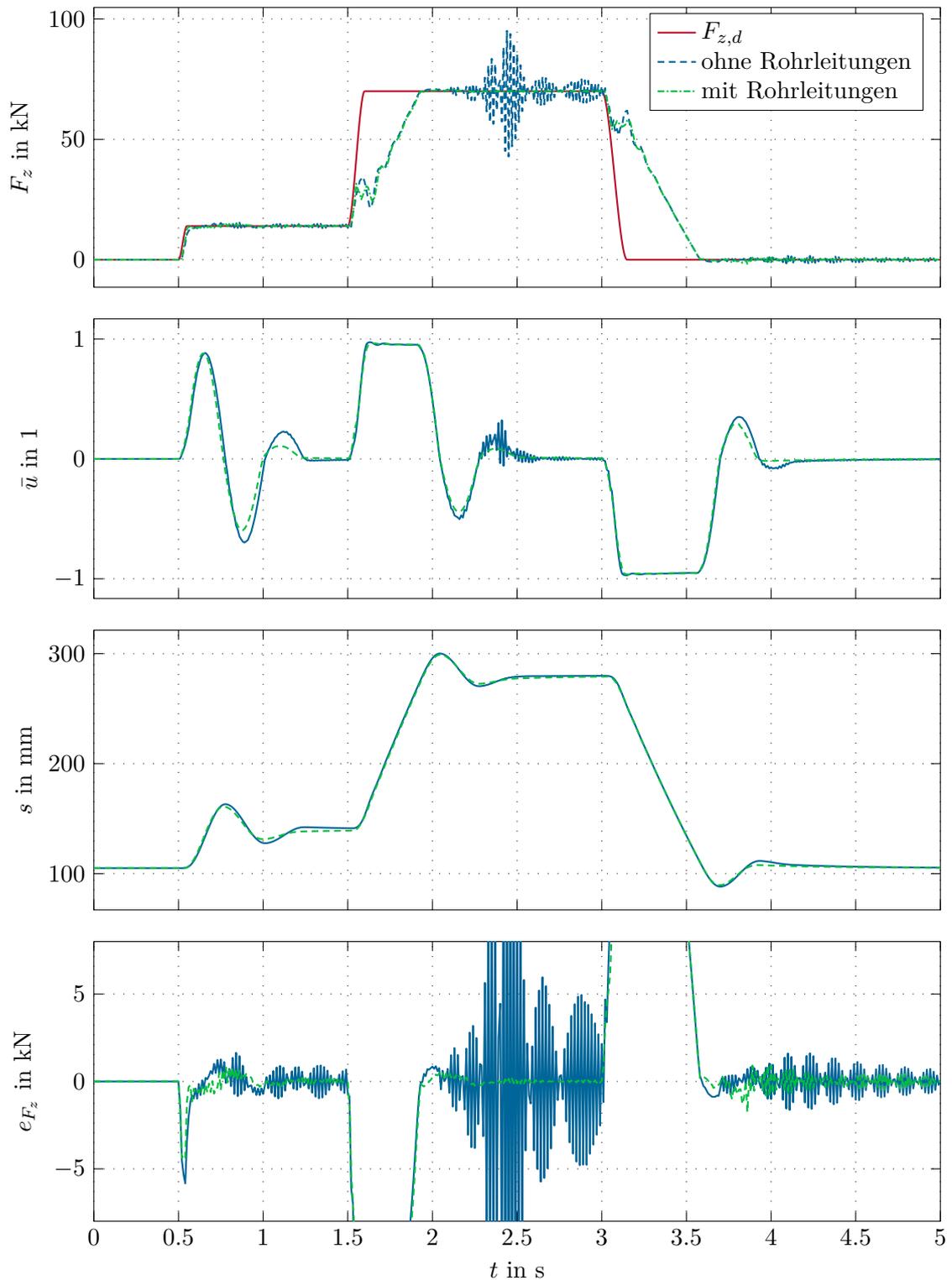


Abbildung 4.18: Vergleich der Simulationsergebnisse der MPC, einmal entworfen ohne Rohrleitungsmodell und einmal entworfen mit Rohrleitungsmodell, anhand eines Simulationsmodells mit Rohrleitungen der Länge  $2L_{nom}/3$ .

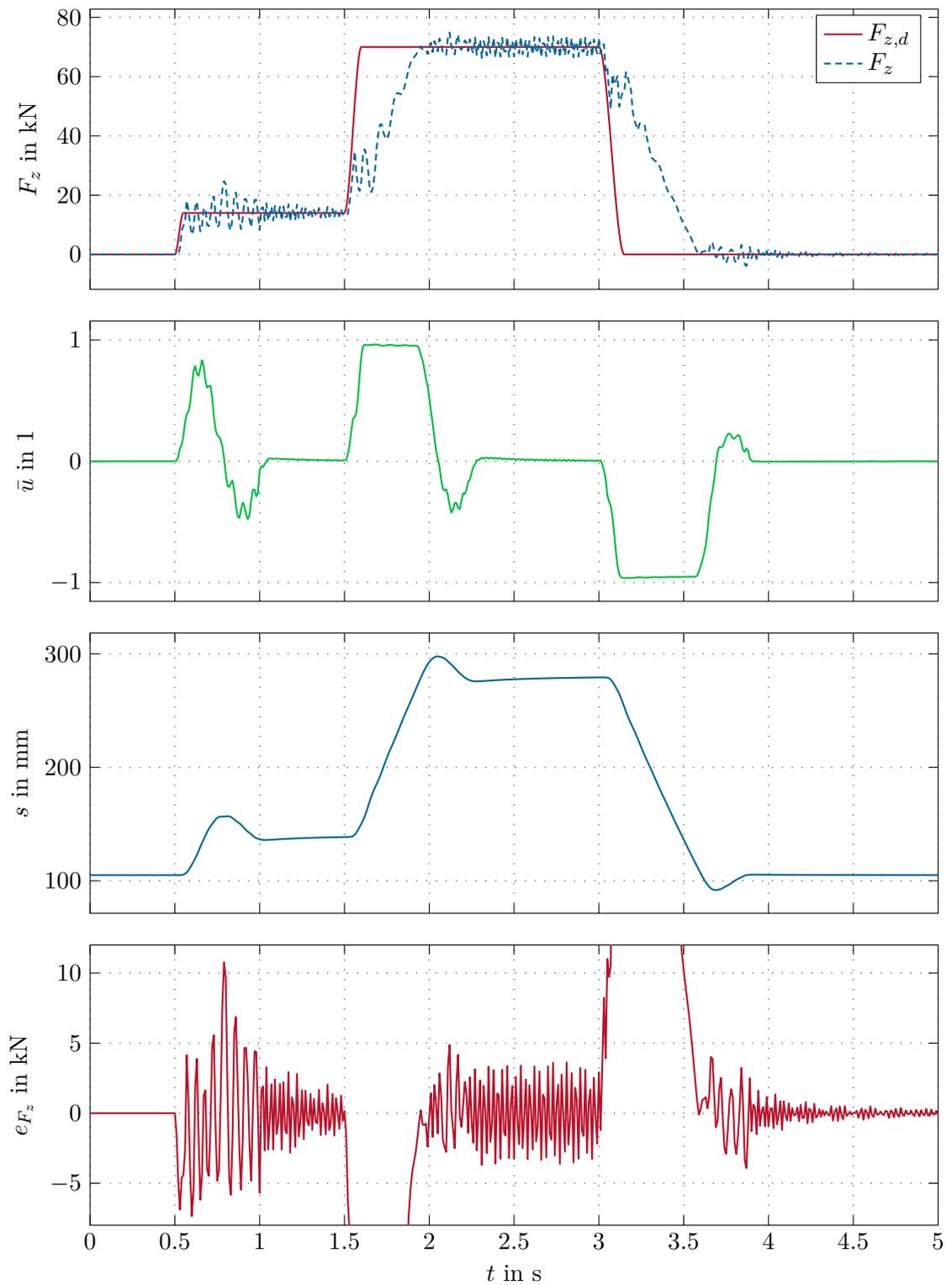


Abbildung 4.19: Regelung (MPC), entworfen mit Rohrleitungsmodell, eines Simulationsmodells mit Rohrleitungen der Länge  $L_{nom}$ .

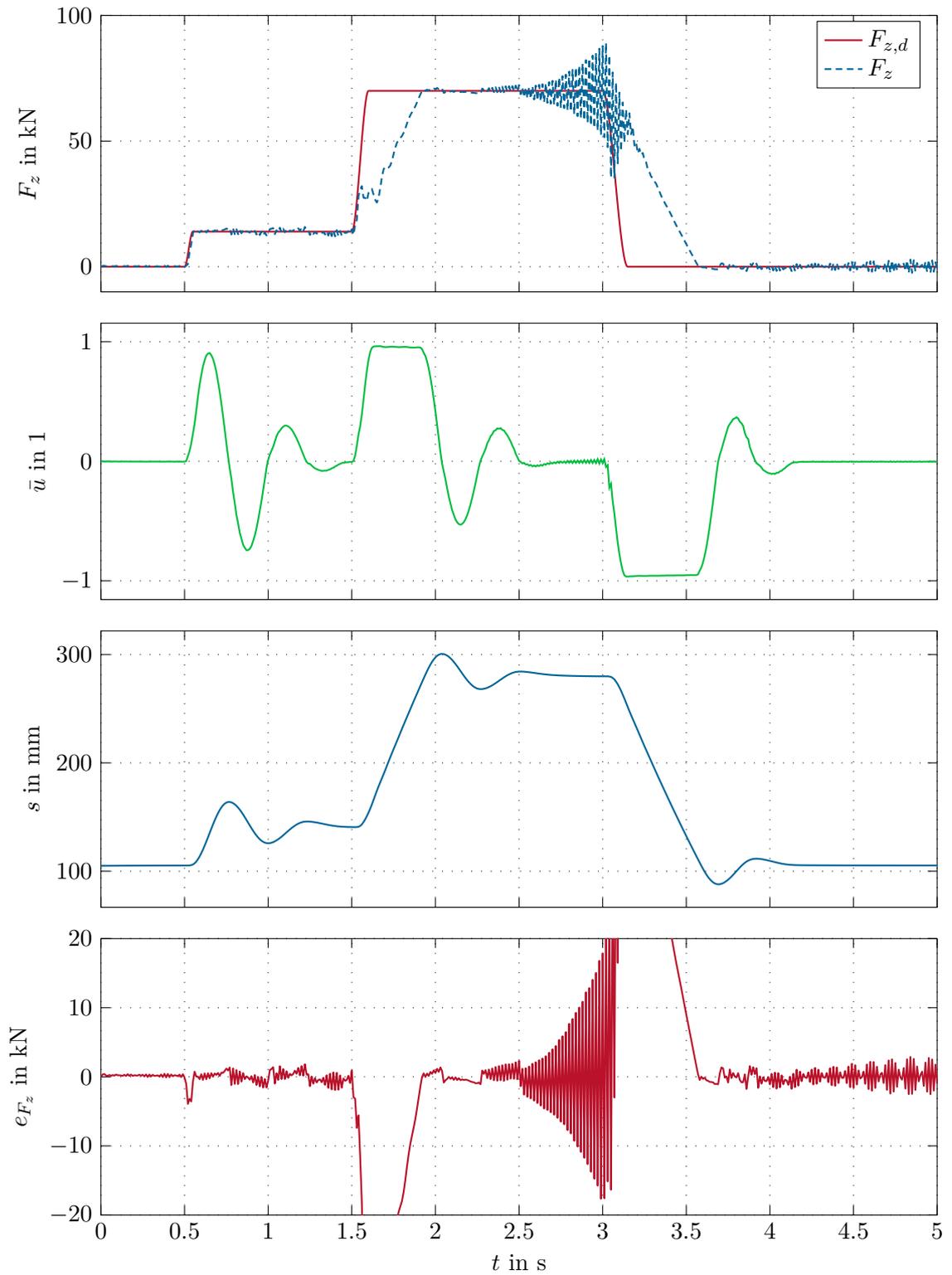


Abbildung 4.20: Regelung (MPC), entworfen mit Rohrleitungsmodell, eines Simulationsmodells mit Rohrleitungen der Länge  $2L_{nom}/3$  mit Ventilleckage.

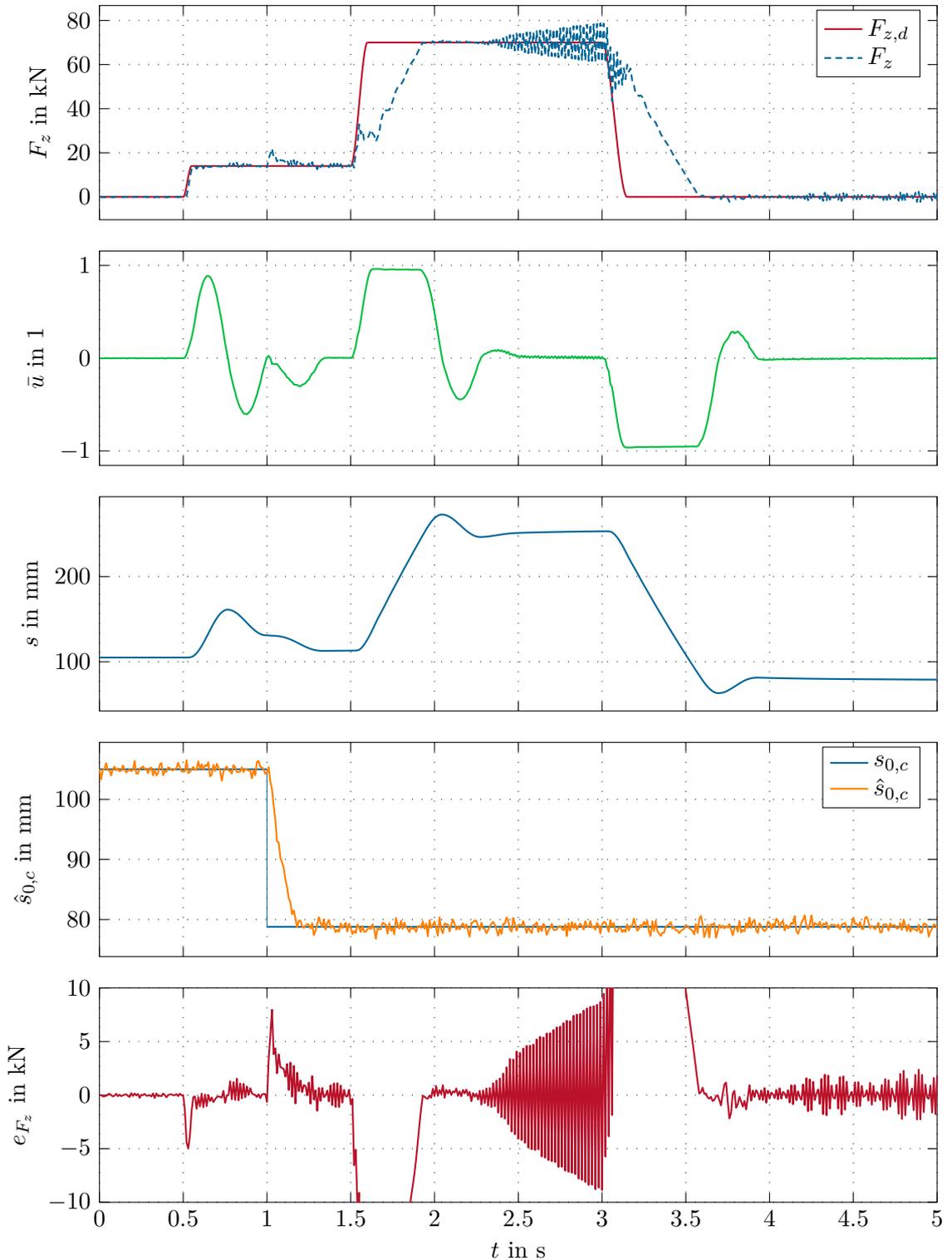


Abbildung 4.21: Regelung (MPC), entworfen mit Rohrleitungsmodell, eines Simulationsmodells mit Rohrleitungen der Länge  $2L_{nom}/3$  bei sprungartiger Änderung des Fußpunktes der Feder  $s_{0,c}$  und Parameterschätzer.

## 5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Regelung eines Hydraulikzylinders mittels Servoventil unter Verwendung langer Druckleitungen untersucht. Als Last wurde ein Feder-Masse-System angenommen.

In Kapitel 2 wurden die Systemgleichungen für Zylinder, Ventil und Druckleitungen hergeleitet. Es wurde außerdem diskutiert, welche Diskretisierungsverfahren in Frage kommen und warum die SEM ein effizientes Verfahren für die Diskretisierung der Rohrleitungen darstellt. Im Anschluss wurden die PDGln der Leitungen mittels SEM diskretisiert und die Implementierung der Randbedingungen besprochen. Abschließend wurde der vollständige Satz an Systemgleichungen zusammengefasst dargestellt. Mittels Simulationsstudien wurde untersucht welche SEM Diskretisierung für die Rohrleitungen sinnvoll ist. Es wurde außerdem untersucht wie sich das Systemverhalten bei unterschiedlicher Rohrlänge verändert.

Basierend auf diesen Gleichungen wurde in Kapitel 3 eine exakte Eingangs-Ausgangslinearisierung mit vernachlässigten Rohrleitungen entworfen und gezeigt, dass diese für kurze Leitungen bis etwa  $L_{nom}/15$  stabil arbeitet. Es wurde außerdem untersucht ob es möglich ist die Rohrleitungen in der Eingangs-Ausgangslinearisierung systematisch mitzuberechnen. Dabei wurde gezeigt, dass der relative Grad des Systems von der gewählten SEM Diskretisierung abhängt und es daher schwierig ist die Druckleitungen allgemein im Regler mitzuberechnen. Ein weiteres Problem bei der Berücksichtigung der Leitungen ist, dass aufgrund der Diskretisierung sehr große mathematische Ausdrücke entstehen, welche zu numerischen Schwierigkeiten führen. Für lange Rohrleitungen musste daher ein anderes Regelungskonzept entwickelt werden.

In Kapitel 4 wurde eine MPC als Regelungsstrategie untersucht. Der Algorithmus wurde basierend auf der Gradienten-Projektionsmethode entwickelt. Im ersten Schritt wurden die Rohrleitungen im Regler vernachlässigt. Um stationäre Abweichungen in der Kraft aufgrund von Parameterungenauigkeiten zu vermeiden, wurde das System um einen Parameterschätzer erweitert. Simulationsstudien haben gezeigt, dass selbst unter Vernachlässigung der Rohrleitungen in der MPC dieses Regelungskonzept robuster arbeitet als die Eingangs-Ausgangslinearisierung. Dieses Konzept ermöglicht eine Regelung bis zu einer Rohrleitungslänge von etwa  $L_{nom}/2$ .

Im Anschluss wurde der Regler um die Gleichungen der Druckleitungen erweitert. Aufgrund der maßgeblichen Erhöhung der Systemordnung und daher des Rechenaufwandes, wurde bei dieser Implementierung die Rohrreibung vernachlässigt. Diese Vereinfachung ermöglicht eine effizientere Berechnung der Jacobimatrix. Es wurde gezeigt, dass mit diesem Algorithmus eine Vorsteuerung mittels MHTP bei nomineller Rohrlänge möglich ist. Es wurde außerdem gezeigt, dass dieses Konzept eine Regelung bis zu einer Rohrleitungslänge von  $2L_{nom}/3$  ermöglicht. Es zeigte sich allerdings, dass unter Berücksichtigung der Ventilleckage im Simulationsmodell bzw. mit Messrauschen der geschlossene Kreis

nicht mehr stabil ist. Diese Instabilität ist auf die Diskretisierung der Rohrleitungen sowie die numerische Vorwärts- und Rückwärtsintegration zurückzuführen.

Die Simulationen in Kapitel 3 und Kapitel 4 zeigen, dass die Ventilleckage einen wesentlichen Einfluss auf das Regelungsverhalten hat. In zukünftigen Arbeiten könnte daher ein Schätzer für die Ventilleckage entwickelt werden. In Kapitel 2 wird gezeigt, dass sich die Ventilleckage dämpfend auf das Systemverhalten auswirkt. Außerdem zeigen die Ventilkennlinien in Kapitel 2, dass mit Ventilleckage keine Umschaltung bei kleinen Stellgrößen erfolgt. Wie sich die zusätzliche Dämpfung sowie die konstante Steigung in der Ventilkennlinie bei kleinen Ventilstellungen auf das Regelungsverhalten auswirken gilt es in zukünftigen Arbeiten zu klären.

Bezüglich Rechenzeit der MPC ist anzumerken, dass es sich bei der Implementierung um eine relativ effiziente und schnelle Möglichkeit handelt, die allerdings derzeit nicht echtzeitfähig implementiert werden kann. Eine Implementierung in C verspricht hier einen wesentlichen Performancegewinn.

Unter diesen Umständen kann man auch in Erwägung ziehen die Rohrreibung, welche in Abschnitt 4.3 vernachlässigt wurde, mitzuberücksichtigen. Wie sich dieser dämpfende Effekt auf die Stabilität des Gesamtsystems auswirkt gilt es ebenfalls zu klären.

In dieser Arbeit wurden sämtliche Regelungskonzepte durch Simulation getestet. Von Interesse ist daher auch ein Versuchsaufbau, anhand dessen die Funktion und Robustheit unter realen Bedingungen und unter Berücksichtigung der Schlingenhebervorrichtung aus [3] gezeigt werden kann.

# A Parameter

	Bezeichnung		Wert	Einheit
Allgemein	Kompressionsmodul des Hydrauliköls	$\beta$	$11 \cdot 10^3$	bar
	Versorgungsdruck	$p_s$	290	bar
	Tankdruck	$p_t$	0	bar
	Dichte des Hydrauliköls	$\rho$	631	kg/m <sup>3</sup>
	Viskosität des Hydrauliköls	$\nu$	$10 \cdot 10^{-3}$	m <sup>2</sup> /s
	Effektiv wirksame Masse	$m$	2061	kg
	Federsteifigkeit	$c$	$400 \cdot 10^3$	N/m
	Fußpunkt der Feder	$s_{0,c}$	$105 \cdot 10^{-3}$	m
Ventil	Ventilparameter (a)	$K_{v,a}$	$8.0178 \cdot 10^{-7}$	m <sup>3</sup> /s√Pa
	Ventilparameter (b)	$K_{v,b}$	$4.0891 \cdot 10^{-7}$	m <sup>3</sup> /s√Pa
	Ventiloffset	$u_{off}$	0.0163	
Zylinder	Zylinderfläche Kolbenseite	$A_{z,a}$	$7.9 \cdot 10^{-3}$	m <sup>2</sup>
	Zylinderfläche Stangenseite	$A_{z,b}$	$4 \cdot 10^{-3}$	m <sup>2</sup>
	coulombscher Reibungsparameter	$r_0$	2000	N
	viskoser Reibungsparameter	$r_1$	1000	kg/s
	charakteristische Geschwindigkeit	$w_0$	0.01	m/s
	maximaler Zylinderhub	$s_{max}$	420	mm
	effektives Totvolumen Kolbenseite	$s_{0,a}$	127.3	mm
	effektives Totvolumen Stangenseite	$s_{0,b}$	249.7	mm
Leitung (a)	Wellengeschwindigkeit	$a_{l,a}$	1320	m/s
	Querschnittsfläche	$A_{l,a}$	531	mm <sup>2</sup>
	Leitungsdurchmesser	$D_{l,a}$	26	mm
	Darcy Weisbach Reibungsparameter	$f_{D,a}$	$8.3 \cdot 10^{-3}$	
	Leitungslänge	$L_a$	14.4	m
Leitung (b)	Wellengeschwindigkeit	$a_{l,b}$	1320	m/s
	Querschnittsfläche	$A_{l,b}$	227	mm <sup>2</sup>
	Leitungsdurchmesser	$D_{l,b}$	17	mm
	Darcy Weisbach Reibungsparameter	$f_{D,b}$	$7.4 \cdot 10^{-3}$	
	Leitungslänge	$L_b$	13.5	m

Tabelle A.1: Systemparameter.

# Literatur

- [1] J. M. Hassan, Y. Xue, M. A. Olewi und A. F. Mahdi, „Pressure Control of Electro-Hydraulic Servo Valve and Transmission Line Effect“, *Al-Khwarizmi Engineering*, Jg. 9, S. 80–99, 2013.
- [2] G. van Schothorst, P. C. Teerhuis und A. J. J. van der Weiden, *Stability analysis of a hydraulic servo-system including transmission line effects*. Delft University Press, 1994, Bd. 7, S. 93–99.
- [3] G. M. Aichhorn, „Mathematische Modellierung und Impedanzregelung eines Schlingenhebers für Bandwalzstraßen“, Diplomarbeit, TU Wien, 2013.
- [4] R. Prabel und H. Aschemann, „Position control of a hydraulic servo cylinder using a backstepping-based sliding mode approach“, in *Proceedings of the IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, München, Deutschland, 2017, S. 297–302.
- [5] W. Li und G. Tao, „Modeling cylinder controlled by servo valve of hydraulic looper in hot strip mill“, in *Proceedings of the Chinese Automation Congress (CAC)*, Wuhan, China, 2015, S. 102–107.
- [6] C. Dong und Q. Meng, „Position control of a valve controlled asymmetric cylinder system with time delay“, in *Proceedings of the IEEE International Conference on Information and Automation*, Harbin, China, 2010, S. 2158–2161.
- [7] C. Dong, J. Lu und Q. Meng, „Position control of an electro-hydraulic servo system based on improved Smith predictor“, in *Proceedings of the International Conference on Electronic & Mechanical Engineering and Information Technology*, Bd. 6, Harbin, China, 2011, S. 2818–2821.
- [8] T. V. Pham, D. Georges und G. Besancon, „Predictive Control With Guaranteed Stability for Water Hammer Equations“, in *Proceedings of the IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 59, 2014, S. 465–470.
- [9] W. Kemmetmüller, *Skriptum zum Seminar Regelungstechnik*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik ACIN, TU Wien, 2010.
- [10] A. Kugi, *Skriptum zur VO Regelungssysteme 2*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik ACIN, TU Wien, 2017.
- [11] MOOG GmbH, *Servoventil mit Steuerbuchse und integrierter 24 Volt Elektronik Baureihe D661-G....A ISO 4401 Größe 05*, MOOG, Hanns-Klemm-Straße 28, D-71034, Böblingen.
- [12] E. B. Wylie und V. L. Streeter, *Fluid transients in Systems*. Prentice Hall Englewood Cliffs, USA, 1993.

- 
- [13] M. Chaudhry, *Applied Hydraulic Transients*. Springer New York, USA, 2016.
- [14] W. Wagner, *Strömung und Druckverlust: mit Beispielsammlung*. Vogel Würzburg, Deutschland, 2008.
- [15] J.-F. Mennemann, L. Marko, J. Schmidt, W. Kemmetmüller und A. Kugi, „The spectral element method as an efficient tool for transient simulations of hydraulic systems“, *Applied Mathematical Modelling*, Jg. 54, S. 627–647, 2018.
- [16] D. A. Kopriva, *Implementing Spectral Methods for Partial Differential Equations*. Springer Dordrecht, Netherlands, 2009.
- [17] L. Marko, „Observer design for the pressure and volume flow of long pressurized pipelines“, Diplomarbeit, TU Wien, 2016.
- [18] R. Freund und R. Hoppe, *Numerische Mathematik 1*. Springer Berlin, Heidelberg, Deutschland, 2007.
- [19] P. Dauffhard und A. Hohmann, *Numerische Mathematik 1, Eine algorithmisch orientierte Einführung*, 3. Aufl. De Gruyter Berlin, Deutschland, 2002.
- [20] R. Plato, *Numerische Mathematik kompakt: Grundlagenwissen für Studium und Praxis*, Ser. Vieweg Studium. Vieweg Teubner Berlin, Heidelberg, Deutschland, 2010.
- [21] L. Biagiotti und C. Melchiorri, *Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots*. Springer Berlin, Heidelberg, Deutschland, 2008.
- [22] A. Steinböck und A. Kugi, *Skriptum zur VU Optimierung*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik ACIN, TU Wien, 2017.
- [23] I. Griva, S. Nash und A. Sofer, *Linear and Nonlinear Optimization*, 2. Aufl. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, USA, 2008.
- [24] B. Kapernick, K. Graichen und T. Utz, *Dokumentation zu grampc*, Institute of Measurement, Control und Microtechnology, University of Ulm, Deutschland, 2014.
- [25] K. Graichen und B. Käpernick, „A Real-Time Gradient Method for Nonlinear Model Predictive Control“, in *Frontiers of Model Predictive Control*, InTech London, England, 2012, S. 9–28.
- [26] T. Arens, et al., *Mathematik*. Springer Berlin, Heidelberg, Deutschland, 2015.
- [27] A. Kugi, *Skriptum zur VU Automatisierung*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik ACIN, TU Wien, 2018.

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit gemäß dem Code of Conduct – Regeln zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis (in der aktuellen Fassung des jeweiligen Mitteilungsblattes der TU Wien), insbesondere ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel, angefertigt wurde. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder in ähnlicher Form in anderen Prüfungsverfahren vorgelegt.

Wien, im Juli 2018

---

Christopher Pietschnig