TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

DIPLOMARBEIT

Systematische partielle Integration

Grundlagen, Analysis und Anwendung auf Dünnfilmgleichungen

Ausgeführt am Institut für Analysis und Scientific Computing der
Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dr.rer.nat.
Ansgar Jüngel

durch
Nacim Seddiki, BSc.
Matrikelnummer: 1225604
Lainzer Straße 133/2
1130 Wien

Wien, am 19.10.2018

Ansgar Jüngel

Nacim Seddiki

Kurzfassung

Der Ausgangspunkt dieser Arbeit ist eine degenerierte parabolische partielle Differenzialgleichung in einer Raumdimension mit homogenen Neumann- oder periodischen Randbedingungen. Beispiele für Probleme, die durch solch eine Gleichung beschrieben werden können, sind dünne Flüssigkeitsfilme oder poröse Medien.

Unser Ziel ist es, einen Algorithmus zu der Bestimmung von Lyapunov-Funktionalen für Gleichungen dieser Art vorzustellen. Der Algorithmus besteht aus drei essentiellen Schritten und endet mit dem Lösen eines polynomiellen Entscheidungsproblems, welches wir mit Hilfe einer Quantorenelimination lösen können. Hierfür widmen wir uns der elementaren Algebra, stellen die wichtigsten Definitionen und Resultate vor und gehen auf Apsekte für eine konkrete Implementierung ein.

Im Anschluss betrachten wir eindimensionale Dünnfilmgleichungen vierter und sechster Ordnung und bestimmen mit Hilfe des vorgestellten Algorithmus Lyapunov-Funktionale. Abschließend gehen wir noch auf den mehrdimensionalen Fall ein und stellen als eine weitere Anwendung die Bestimmung von logarithmischen Sobolev-Ungleichungen vor.

Abstract

The starting point of this thesis is a degenerated parabolic partial differential equation in one space dimension with homogeneous Neumann or periodic boundary conditions. A thin liquid film or a porous medium can be described by such an equation.

Our aim is to present an algorithm, which helps us to establish Lyapunov functionals for this type of equation. The algorithm consists of three essential steps and ends with solving a polynomial decision problem. This can be achieved with quantifier elimination methods. For this we will give a short introduction in the basic concepts of elementary algebra and examine possible obstacles for an actual implementation.

Following this, we will establish Lyapunov functionals for a fourth order and a sixth order thin film equation with the help of our algorithm. Finally we will examine the multidimensional case and present logarithmic Sobolev inequalities as a further application.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 19.10.2018

Nacim Seddiki

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung und Grundlagen

Unser Ausgangspunkt ist eine degenerierte parabolische Differenzialgleichung (vgl. Definition 2.1.2) mit der Lösungsfunktion u. Möchten wir Lyapunov-Funktionale bestimmen, so führt dies zu einer Ungleichung der Form

$$\int_\Omega u^{\alpha+\beta} S_0\Big(\frac{u_x}{u}, \ldots, \frac{\partial_x^{k+1} u}{u}\Big)\, dx \geq 0, \tag{1.1}$$

wobei S_0 ein multivariates Polynom eines bestimmten Typs ist. Systematische partielle Integration wurde das erste mal 2006 in [15] vorgestellt und liefert uns einen Algorithmus, welchen wir verwenden können, um die obige Ungleichung zu verifizieren. Mit den erhaltenen Lyapunov-Funktionalen können wir z.B. Konvergenzraten gegen stationäre Zustände bestimmen. Der Algorithmus besteht aus drei essentiellen Schritten:

1. Schritt: Bestimmung eines Integranden. Dieser kann je nach Aufgabenstellung variieren, z.B. zu der Bestimmung von Lyapunov-Funktionalen (vgl. Satz 2.2.32) oder für logarithmische Sobolev-Ungleichungen (vgl. Satz 7.1.8).

2. Schritt: Bestimmung von Verschiebungspolynomen (vgl. Definition 2.2.22). Dies sind nichttriviale Polynome, welche zu S_0 addiert werden können ohne den Wert des Integrales in (1.1) zu verändern.

3. Schritt: Lösen eines polynomiellen Entscheidungsproblems (vgl. Kapitel 3). Wir addieren eine beliebige Linearkombination aus Verschiebungspolynomen zu dem Polynom S_0 in (1.1) und wollen feststellen, ob die Koeffizienten dieser Linearkombination so gewählt werden können, dass der modifizierte Integrand nichtnegativ ist. Hierbei bestimmen wir die Koeffizienten nicht explizit, sondern überprüfen die Existenz algorithmisch.

Im Folgenden findet sich ein kurzer Überblick über die einzelnen Kapitel und den Inhalt dieser Arbeit:

In *Kapitel 1* führen wir die benötigte Notation ein. Im Anschluss motivieren wir unser weiteres Vorgehen mit einer eindimensionalen Dünnfilmgleichung 4. Ordnung und geben die wichtigsten Definitionen an. Insbesondere führen wir die von uns benötigten Polynomräume ein.

In *Kapitel 2* untersuchen wir eindimensionale parabolische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung und entwickeln einen Algorithmus für die Bestimmung von Lyapunov-Funktionalen. Der Schwerpunkt liegt in diesem Kapitel auf *Schritt 1* und *Schritt 2* und die benötigte Analysis.

In *Kapitel 3* betrachten wir *Schritt 3* des Algorithmus. Wir führen die wesentlichsten Grundlagen von elementarer Algebra ein und definieren ein polynomielles Entscheidungsproblem. In weiterer Folge lernen wir Algorithmen kennen, welche uns helfen diese zu lösen.

In *Kapitel 4* wollen wir den Aufwand des Algorithmus untersuchen. Insbesondere bestimmen wir die Anzahl der Verschiebungspolynome in Abhängigkeit von k aus (1.1) exakt und asymptotisch.

In *Kapitel 5* betrachten wir eindimensionale Dünnfilmgleichungen. Wir gehen auf die Lösbarkeit der entsprechenden Gleichungen ein und stellen ein Existenzresultat für klassische Lösungen vor. Im Anschluss bestimmen wir Lyapunov-Funktionale für Dünnfilmgleichungen 4. und 6. Ordnung.

In *Kapitel 6* legen wir einen Schwerpunkt auf den mehrdimensionalen Fall und erweitern die Methoden aus Kapitel 2. Darüber hinaus skizzieren wir eine Variante, durch welche der Aufwand in mehreren Raumdimensionen verringert werden kann. Als Beispiel betrachten wir eine mehrdimensionale Dünnfilmgleichung 4. Ordnung.

In *Kapitel 7* betrachten wir logarithmische Sobolev-Ungleichungen. Diese können mit den Hilfsmitteln aus Kapitel 2 einfach bestimmt werden.

Als Vorlage für diese Diplomarbeit dient [15] und [14, Kapitel 3], jedoch werden wir Resultate aus der Literatur an einigen Stellen ausbauen und ein Augenmerk auf die Analysis legen. Insbesondere sind Abschnitt 2.3 und Abschnitt 7.1.1 um einige Rechnungen erweitert und der Algorithmus wurde erstmals angewendet, um Lyapunov-Funktionale für eine Dünnfilmgleichung 6. Ordnung zu bestimmen (vgl. Abschnitt 5.3).

1.1 Notation

1.1.1 Vektoren und Multiindizes

Zur notationellen Vereinfachung schreiben wir Größen, die aus mehreren Komponenten bestehen, immer fett gedruckt an. Insbesondere verwenden wir diese Notation für Vektoren und Multiindizes. Darüber hinaus vereinbaren wir, dass für $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k$ gilt:

$$\boldsymbol{\xi} := (\xi_1, \dots, \xi_k)^T \quad \text{und} \quad |\boldsymbol{\xi}|^2 := \sum_{i=1}^{k} \xi_i^2.$$

Des Weiteren definieren wir für $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k$:

$$\boldsymbol{\xi}_m := (\xi_1, \dots, \xi_m)^T \quad \text{für} \quad m = 1, \dots, k.$$

Speziell für Multiindizes werden wir eine Reihe von Schreibweisen und Konventionen einführen. Wir werden alle Elemente aus dem Raum $\mathbb{N}^k$ als einen Multiindex bezeichnen, wobei $\mathbb{N}$ die Zahl 0 enthält. Somit schreiben wir:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{und} \quad \mathbb{N}_\times := \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Folgende Konvention legen wir für $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^k$ fest:

$$\boldsymbol{k} := (k_1, \dots, k_k) \quad \text{und} \quad |\boldsymbol{k}| := \sum_{i=1}^{k} k_i.$$

Für $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k$ und $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^k$ definieren wir:

$$\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}} := \prod_{i=1}^{k} \xi_i^{k_i}.$$

1.1.2 Räume differenzierbarer Funktionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offenen Menge und X ein Banachraum. Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ bezeichnen wir mit $C^k(\Omega, X)$ die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $u : \Omega \to X$. Ist die Funktion u und all ihre Ableitungen stetig auf $\overline{\Omega}$, so schreiben wir auch $u \in C^k(\overline{\Omega}, X)$. Besitzt die Funktion u einen kompakten Träger, so drücken wir dies durch $u \in \mathcal{C}_0^k(\Omega, X)$ aus. Den Träger von u werden wir mit $\operatorname{supp} u$ anschreiben. Für den Fall $X = \mathbb{R}$ verwenden wir auch die Notation $C^k(\Omega)$. Ist die Funktion u Lipschitz-stetig, so schreiben wir $u \in C^{0,1}(\Omega)$.

Für $u : \operatorname{dom} u \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verwenden wir folgende Schreibweisen:

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} u := \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} u}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial {x_n}^{\alpha_n}} \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n \quad \text{und} \quad \partial_{x_i} u := \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Speziell für den Fall $k = 1$ vereinbaren wir, dass

$$u_{\underbrace{x \dots x}_{i\text{-mal}}} := \partial_x^i u := \frac{d^i u}{dx^i}.$$

gelten soll.

In Kapitel 5 werden wir schwach differenzierbare Funktionen benötigen. Aus diesem Grund definieren wir für $m \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 := \int_\Omega u^2 \, d\boldsymbol{x} \quad \text{und} \quad \|u\|_{H^m(\Omega)}^2 := \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq m} \|D^{\boldsymbol{\alpha}} u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Die Sobolev-Räume $H^m(\Omega)$ und $H_0^m(\Omega)$ sind dann durch

$$H^m(\Omega) := \overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}} \quad \text{und} \quad H_0^m(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}}$$

gegeben. Wir möchten auf [11, Kapitel 5] für weitere Informationen und Eigenschaften zu obigen Räumen verweisen.

1.1.3 Weitere Konventionen

Für die Mächtigkeit einer Menge Ω schreiben wir auch $|\Omega|$. Darüber hinaus drücken wir für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ das n-dimensionale Lebesgue-Maß von Ω durch $\text{meas}(\Omega)$ aus. Mit $\text{span}(\mathcal{B})$ bezeichnen wir die lineare Hülle der Menge $\mathcal{B}$.

1.2 Ein einführendes Beispiel

Das hier vorgestellte Beispiel findet sich auch in [14, Abschnitt 3.1 und 3.2]. Wir betrachten eine Dünnfilmgleichung 4. Ordnung (vgl. Kapitel 5) mit periodischen Randbedingungen und einer Nichtnegativitätsbedingung. Wir definieren:

$$\Omega := (a, b) \quad \text{und} \quad \Omega_T := (0, T) \times \Omega.$$

Das betrachtete Problem ist dann für ein $\beta > 0$ gegeben durch:

Gesucht ist eine Funktion $u : \overline{\Omega_T} \to \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{aligned} u_t &= -(u^\beta u_{xxx})_x && \text{in} \quad \Omega_T, \\ u(0) &= u_0 && \text{in} \quad \Omega, \\ u &> 0 && \text{in} \quad \Omega_T, \end{aligned} \tag{1.2}$$

und der Randbedingung:

$$\partial_x^i u(t, b) = \partial_x^i u(t, a), \quad i = 0, \ldots, 3 \quad \text{für} \quad t \in (0, T). \tag{1.3}$$

Im Folgenden werden wir annehmen, dass das Problem (1.2) eine hinreichend oft differenzierbare Lösung besitzt. Insbesondere ist $u_0 > 0$ so gewählt, sodass dies möglich ist. In Abhängigkeit von β möchten wir nun alle Funktionale der Form

$$H_\alpha[u] := \frac{1}{\alpha(\alpha - 1)} \int_\Omega u^\alpha \, dx \quad \text{mit} \quad \alpha > 0 \tag{1.4}$$

bestimmen, welche für Lösungen von (1.2) monoton fallend in der Zeit sind. Funktionale, welche diese Eigenschaft besitzen, werden auch Lyapunov-Funktionale genannt (vgl. Definition 1.4.15).

Wir differenzieren $H_\alpha[u]$ nach t und setzen (1.2) ein:

$$\frac{d}{dt}H_\alpha[u] = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}\int_\Omega \alpha u^{\alpha-1}u_t\ dx = -\frac{1}{(\alpha-1)}\int_\Omega u^{\alpha-1}(u^\beta u_{xxx})_x\ dx.$$

Durch zweimalige partielle Integration und unter Berücksichtigung der periodischen Randbedingungen folgt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H_\alpha[u] &= \underbrace{-\frac{1}{(\alpha-1)}u^{\alpha+\beta-1}u_{xxx}\Big|_{x=a}^{x=b}}_{=0} + \int_\Omega u^{\alpha+\beta-2}u_x u_{xxx}\ dx \qquad (1.5)\\ &= \underbrace{u^{\alpha+\beta-2}u_x u_{xx}\Big|_{x=a}^{x=b}}_{=0} - \int_\Omega \Big[(\alpha+\beta-2)u^{\alpha+\beta-3}u_x^2 + u^{\alpha+\beta-2}u_{xx}\Big]u_{xx}\ dx\\ &= -\int_\Omega (\alpha+\beta-2)u^{\alpha+\beta-3}u_x^2 u_{xx}\ dx - \int_\Omega \underbrace{u^{\alpha+\beta-2}u_{xx}^2}_{\geq 0}\ dx. \qquad (1.6)\end{aligned}$$

Wir können somit schließen, dass $\frac{d}{dt}H_\alpha[u] \leq 0$ erfüllt ist, wenn für das erste Integral in (1.6) gilt:

$$0 \leq \int_\Omega (\alpha+\beta-2)u^{\alpha+\beta-3}u_x^2 u_{xx}\ dx = \int_\Omega (\alpha+\beta-2)u^{\alpha+\beta-3}\ \frac{1}{3}(u_x^3)_x\ dx. \qquad (1.7)$$

Mittels partieller Integration folgern wir weiter:

$$0 \leq \frac{1}{3}(\alpha+\beta-2)\left(\underbrace{u^{\alpha+\beta-3}u_x^3\Big|_{x=a}^{x=b}}_{=0} -(\alpha+\beta-3)\int_\Omega \underbrace{u^{\alpha+\beta-4}u_x^4}_{\geq 0}\ dx\right).$$

Somit kann obige Ungleichung nur erfüllt sein, wenn gilt:

$$(\alpha+\beta-2)(\alpha+\beta-3) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq \alpha+\beta \leq 3. \qquad (1.8)$$

Wir haben bewiesen, dass für $\alpha+\beta \in [2,3]$ das Funktional H_α tatsächlich ein Lyapunov-Funktional für das Problem (1.2) ist.

Nun stellt sich uns die Frage nach der Optimalität des Parameterbereichs. Wir werden in Kapitel 5 sehen, dass dieser vergrößert werden kann. Insbesondere impliziert dies, dass (1.7) eine zu starke Forderung war.

Zur Verbesserung des Parameterbereiches starten wir mit den Gleichungen (1.6) und (1.5). Es folgt:

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}H_\alpha[u] &= -\int_\Omega u^{\alpha+\beta-2}u_x u_{xxx}\ dx\\ &= \int_\Omega (\alpha+\beta-2)u^{\alpha+\beta-3}u_x^2 u_{xx}\ dx + \int_\Omega u^{\alpha+\beta-2}u_{xx}^2\ dx.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$0 = \int_\Omega (\alpha+\beta-2)u^{\alpha+\beta-3}u_x^2 u_{xx}\ dx + \int_\Omega u^{\alpha+\beta-2}u_{xx}^2\ dx + \int_\Omega u^{\alpha+\beta-2}u_x u_{xxx}\ dx \tag{1.9}$$

$$= \int_\Omega u^{\alpha+\beta}\left((\alpha+\beta-2)\left(\frac{u_x}{u}\right)^2 \frac{u_{xx}}{u} + \left(\frac{u_{xx}}{u}\right)^2 + \frac{u_x}{u}\frac{u_{xxx}}{u}\right) dx \tag{1.10}$$

$$= \int_\Omega \left(u^{\alpha+\beta}\frac{u_x}{u}\frac{u_{xx}}{u}\right)_x dx =: \mathcal{I}. \tag{1.11}$$

Das letzte Gleichheitszeichen ist am besten durch differenzieren ersichtlich:

$$\begin{aligned}\left(u^{\alpha+\beta}\frac{u_x}{u}\frac{u_{xx}}{u}\right)_x &= \left(u^{\alpha+\beta-2}u_x u_{xx}\right)_x \\ &= (\alpha+\beta-2)u^{\alpha+\beta-3}u_x^2u_{xx} + u^{\alpha+\beta-2}u_{xx}^2 + u^{\alpha+\beta-2}u_x u_{xxx} \\ &= u^{\alpha+\beta}\left((\alpha+\beta-2)\left(\frac{u_x}{u}\right)^2\frac{u_{xx}}{u} + \left(\frac{u_{xx}}{u}\right)^2 + \frac{u_x}{u}\frac{u_{xxx}}{u}\right).\end{aligned}$$

Da $\mathcal{I} = 0$ gilt, können wir für jedes beliebige $c \in \mathbb{R}$ folgern:

$$-\frac{d}{dt}H_\alpha[u] = -\frac{d}{dt}H_\alpha[u] + c\mathcal{I}. \tag{1.12}$$

Obwohl obige Gleichung trivial ist, können wir diese als eine abstrakte Formulierung einer partiellen Integration auffassen.

Betrachten wir den Integranden in Gleichung (1.11) genauer, so besitzt dieser folgende allgemeine Darstellung:

$$\left(u^{\alpha+\beta}\left(\frac{u_x}{u}\right)^{k_1}\left(\frac{u_{xx}}{u}\right)^{k_2}\left(\frac{u_{xxx}}{u}\right)^{k_3}\right)_x \quad \text{mit} \quad 1\cdot k_1 + 2\cdot k_2 + 3\cdot k_3 = 3. \tag{1.13}$$

Alle möglichen Integranden sind somit durch alle Wahlmöglichkeiten von $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3$ gegeben, wobei wir die geforderte Nebenbedingung beachten müssen. Alle möglichen Integranden sind durch die Ortsableitungen der folgenden Funktionen gegeben:

$$\begin{aligned} P_1(u) &:= u^{\alpha+\beta}\left(\frac{u_x}{u}\right)^3 && \text{mit} \quad \boldsymbol{k} = (3,0,0), \\ P_2(u) &:= u^{\alpha+\beta}\frac{u_x}{u}\frac{u_{xx}}{u} && \text{mit} \quad \boldsymbol{k} = (1,1,0), \\ P_3(u) &:= u^{\alpha+\beta}\frac{u_{xxx}}{u} && \text{mit} \quad \boldsymbol{k} = (0,0,1). \end{aligned}$$

Wir definieren:

$$\mathcal{I}_i := \int_\Omega (P_i(u))_x\ dx = P_i(u)\Big|_{x=a}^{x=b} = 0 \quad \text{für} \quad i = 1,2,3.$$

Analog zu Gleichung (1.12) können wir eine partielle Integration abstrakt schreiben als:

$$-\frac{d}{dt}H_\alpha[u] = -\frac{d}{dt}H_\alpha[u] + c_1\mathcal{I}_1 + c_2\mathcal{I}_2 + c_3\mathcal{I}_3, \tag{1.14}$$

wobei c_1, c_2 und c_3 reelle Konstanten sind. Da $\mathcal{I}_i = 0$ gilt, ist die obige Gleichung trivial, jedoch ändert sich dies sobald wir nur die Integranden betrachteten. Es stellt sich die Frage, ob wir die Konstanten so wählen können, sodass die Summe der Integranden in Gleichung (1.14) nichtnegativ ist. Im nächsten Kapitel werden wir die hier vorgestellte Idee aufgreifen und in einem allgemeineren Kontext betrachten.

1.3 Polynomräume

In Abschnitt 1.2 haben wir festgestellt, dass die Integranden in Ungleichung (1.14) durch Polynome der Form

$$\left(\frac{u_x}{u}\right)^{k_1}\left(\frac{u_{xx}}{u}\right)^{k_2}\left(\frac{u_{xxx}}{u}\right)^{k_3} \quad \text{mit} \quad 1\cdot k_1 + 2\cdot k_2 + 3\cdot k_3 = 3.$$

beschrieben werden können. Wir wollen im Folgenden die entsprechenden Polynomräume und die zugehörige Notation einführen. Es wird sich herausstellen, dass sich Polynome dieser Bauart auch auf eine kanonische Art und Weise in die Definition unseres Grundproblems (vgl. Definition 2.1.2) einbetten lassen. Die Idee ist es die auftretenden Brüche als Variablen aufzufassen.

Definition 1.3.1 Für $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$$\mathcal{I}_{m,k} := \left\{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^m : \max_{i=1,\dots,m} k_i \leq k\right\}, \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_{m,k} := \left\{(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R} : \boldsymbol{\xi} \mapsto \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}) : \boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_{m,k}\right\}.$$

Der Vektorraum aller Polynome in den Variablen $\xi_1, \dots, \xi_m$ mit maximalem Grad k ist dann durch

$$\mathcal{P}_{m,k} := \operatorname{span}(\mathcal{B}_m)$$

gegeben.

Satz 1.3.2 Die Menge $\mathcal{B}_{m,k}$ ist eine Basis von $\mathcal{P}_{m,k}$.

Beweis: Per Definition ist $\mathcal{B}_{m,k}$ ein Erzeugendensystem. Wir müssen lediglich die lineare Unabhängigkeit nachweisen. Wir führen den Beweis mit Hilfe einer Induktion nach m.

Induktionsbehauptung: $\mathcal{B}_{m,k}$ ist für alle $m \in \mathbb{N}$ eine Menge von linear unabhängigen Polynomen.

Induktionsanfang: Für $m = 1$ betrachten wir eine Linearkombination der Nullfunktion:

$$P(\xi_1) := \sum_{i=0}^{k} c_i \xi_1^i = 0.$$

Leiten wir die obige Gleichung n-mal nach ξ_1 ab, so folgt:

$$\frac{d^n}{d\xi_1^n} P(\xi)\Big|_{\xi_1=0} = n! \cdot c_n = 0 \quad \forall n \leq k.$$

Dies impliziert $c_1 = \ldots = c_k = 0$. Somit ist die Nullfunktion nur trivial linearkombinierbar und wir schließen auf die lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{B}_{1,k}$.

Induktionsschritt: Gelte die Induktionsbehauptung für ein $m-1 \in \mathbb{N}$. Um die Induktionsvoraussetzung anwenden zu können, müssen wir $\mathcal{I}_{m,k}$ durch

$$\mathcal{I}_{m,k} = \bigcup_{i=0}^{k} \left\{ (\boldsymbol{l}, i) \in \mathbb{N}^m : \boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_{m-1,k} \right\}$$

ausdrücken. Betrachten wir eine Linearkombination der Nullfunktion und schreiben diese als ein Polynom in der Variable ξ_m an, so können wir schließen:

$$0 = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_{m.k}} c_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\xi}_m^{\boldsymbol{k}} = \sum_{i=0}^{k} \xi_m^i \cdot \Big(\sum_{\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_{m-1,k}} c_{(\boldsymbol{l},i)} \boldsymbol{\xi}_{m-1}^{\boldsymbol{l}} \Big) =: \sum_{i=0}^{k} \xi_m^i \underbrace{P_i(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1})}_{\in \mathcal{P}_{m-1,k}}.$$

Da $\{1, \xi_m, \ldots, \xi_m^k\}$ eine Menge linear unabhängiger Funktionen ist (dies folgt unmittelbar aus dem Induktionsanfang, wenn wir ξ_1 durch ξ_m ersetzen), gilt:

$$P_i(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}) = 0 \quad \text{für} \quad i = 0, \ldots, k,$$

daher bilden die Polynome P_i jeweils eine Linearkombination der Nullfunktion im Raum $\mathcal{P}_{m-1,k}$. Die lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{B}_{m-1,k}$ (laut Induktionsvoraussetzung) impliziert nun, dass alle Koeffizienten $c_{(\boldsymbol{l},i)}$ verschwinden müssen. Somit ist nur eine triviale Linearkombination der Nullfunktion möglich und wir schließen wiederum auf die lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{B}_{m.k}$. Dies komplettiert den Beweis. □

Definition 1.3.3 Sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann sei $\mathcal{I}_k \subseteq \mathcal{I}_{k,k}$ und der lineare Raum $\mathcal{P}_k \subseteq \mathcal{P}_{k,k}$ definiert durch:

$$\mathcal{I}_k := \Big\{ \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^k : \sum_{i=1}^{k} i \cdot k_i = k \Big\}, \quad \mathcal{B}_k := \{ (\mathbb{R}^k \to \mathbb{R} : \boldsymbol{\xi} \mapsto \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}) : \boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k \} \quad \text{und}$$
$$\mathcal{P}_k := \operatorname{span}(\mathcal{B}_k).$$

Korollar 1.3.4 Die Menge $\mathcal{B}_k$ ist eine Basis von $\mathcal{P}_k$.

Beweis: Per Definition ist $\mathcal{B}_k$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{P}_k$. Es genügt somit zu zeigen, dass $\mathcal{B}_k$ eine linear unabhängige Familie ist. Aus $\mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{B}_{k,k}$ und Satz 1.3.2 folgt bereits die lineare Unabhängigkeit. □

Beispiel 1.3.5 Für $k = 3$ haben wir in Abschnitt 1.2 bereits alle möglichen Multiindizes in $\mathcal{I}_3$ kennengelernt. In Tabelle 1.1 sind diese und die Basispolynome des Raumes $\mathcal{P}_3$ aufgelistet. ⬠

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}$
$(3,0,0)$	ξ_1^3
$(1,1,0)$	$\xi_1\xi_2$
$(0,0,1)$	$\xi_1\xi_2$

Tabelle 1.1: Auflistung aller zulässigen Multiindizes und die zugehörigen Basispolynome des Raumes $\mathcal{P}_k$ für $k=3$.

Beispiel 1.3.6 Für $k=5$ gibt es genau 7 zulässige Multiindizes in der Menge $\mathcal{I}_5$ (vgl. Kapitel 4). In Tabelle 1.2 sind diese und die Basispolynome des Raumes $\mathcal{P}_5$ aufgelistet. ⬠

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}$
$(5,0,0,0,0)$	ξ_1^5
$(3,1,0,0,0)$	$\xi_1^3\xi_2$
$(2,0,1,0,0)$	$\xi_1^2\xi_3$
$(1,2,0,0,0)$	$\xi_1\xi_2^2$
$(1,0,0,1,0)$	$\xi_1\xi_4$
$(0,1,1,0,0)$	$\xi_2\xi_3$
$(0,0,0,0,1)$	ξ_5

Tabelle 1.2: Auflistung aller zulässigen Multiindizes und die zugehörigen Basispolynome des Raumes $\mathcal{P}_k$ für $k=5$.

Beispiel 1.3.7 Für $k=7$ gibt es bereits 15 zulässige Multiindizes in der Menge $\mathcal{I}_7$ (vgl. Kapitel 4). In Tabelle 1.3 sind diese und die Basispolynome des Raumes $\mathcal{P}_5$ aufgelistet. ⬠

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}$
$(7,0,0,0,0,0,0)$	ξ_1^7	$(1,1,0,1,0,0,0)$	$\xi_1\xi_2\xi_4$
$(5,1,0,0,0,0,0)$	$\xi_1^5\xi_2$	$(1,0,2,0,0,0,0)$	$\xi_1\xi_3^2$
$(4,0,1,0,0,0,0)$	$\xi_1^4\xi_3$	$(1,0,0,0,0,1,0)$	$\xi_1\xi_6$
$(3,2,0,0,0,0,0)$	$\xi_1^3\xi_2^2$	$(0,2,1,0,0,0,0)$	$\xi_2^2\xi_3$
$(3,0,0,1,0,0,0)$	$\xi_1^3\xi_4$	$(0,1,0,0,1,0,0)$	$\xi_2\xi_5$
$(2,1,1,0,0,0,0)$	$\xi_1^2\xi_2\xi_3$	$(0,0,1,1,0,0,0)$	$\xi_3\xi_4$
$(2,0,0,0,1,0,0)$	$\xi_1^2\xi_5$	$(0,0,0,0,0,0,1)$	ξ_7
$(1,3,0,0,0,0,0)$	$\xi_1\xi_2^3$		

Tabelle 1.3: Auflistung aller zulässigen Multiindizes und die zugehörigen Basispolynome des Raumes $\mathcal{P}_k$ für $k=7$.

Anmerkung 1.3.8 Die Beispiele 1.3.5, 1.3.6 und 1.3.7 verdeutlichen bereits, dass die Mächtigkeit der Menge $\mathcal{I}_k$ nicht linear in k wächst. In Kapitel 4 werden wir diese bestimmen. Insbesondere ist dies für die Abschätzung des Aufwandes des in Abschnitt 2.2 vorgestellten Algorithmus von Bedeutung. ⬡

Oftmals ist es nötig die Variablen im Raum $\mathcal{P}_k$ einzuschränken:

Definition 1.3.9 Sei $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq k$. Der Raum $\mathcal{Q}_{k,m} \subseteq \mathcal{P}_k$ ist durch

$$\mathcal{Q}_{k,m} := \{P \in \mathcal{P}_k : P \text{ ist unabhängig von } \xi_{m+1}, \ldots, \xi_k\}$$

definiert.

Der Raum $\mathcal{Q}_{k,m}$ besitzt folgende Eigenschaften:

Korollar 1.3.10 Sei $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq k$. Dann ist die Menge $\mathcal{Q}_{k,m} \cap \mathcal{B}_k$ ein Basis von $\mathcal{Q}_{k,m}$.

Beweis: Die Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz aus der Tatsache, dass $\mathcal{B}_k$ eine Basis von $\mathcal{P}_k$ ist (vgl. Korollar 1.3.4). □

Lemma 1.3.11 Sei $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$G \cdot H \in \mathcal{Q}_{k+n,\max(k,n)} \quad \forall G \in \mathcal{P}_k,\ \forall H \in \mathcal{P}_n.$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $k \geq n$ gilt. Da $G \cdot H$ die Variablen $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_{k+n}$ nicht enthält, genügt es zu zeigen, dass $G \cdot H \in \mathcal{P}_{k+n}$ erfüllt ist.

i) Seien $\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$ und $\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_n$ zwei beliebige Multiindizes. Für das Produkt der entsprechenden Monome gilt:

$$\boldsymbol{\xi}_k^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\xi}_n^{\boldsymbol{l}} = \prod_{i=1}^{k} \xi_i^{k_i + l_i} \quad \text{mit } l_i := 0 \text{ für } i > n.$$

Die gewichtete Summe der Exponenten ergibt sich zu:

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot (k_i + l_i) = \sum_{i=1}^{k} i \cdot k_i + \sum_{i=1}^{n} i \cdot l_i = k + n.$$

Wir können somit schließen, dass

$$\boldsymbol{\xi}_k^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\xi}_n^{\boldsymbol{l}} \in \mathcal{P}_{k+n}$$

gilt.

ii) Seien $G \in \mathcal{P}_k$ und $H \in \mathcal{P}_n$ zwei beliebige Polynome. Bezüglich der entsprechende Basismonome erhalten wir:

$$G(\boldsymbol{\xi}_k) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\xi}_k^{\boldsymbol{k}} \quad \text{und} \quad H(\boldsymbol{\xi}_n) = \sum_{\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_n} \tilde{c}_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{\xi}_n^{\boldsymbol{l}}.$$

Mit Hilfe von i) folgt:

$$(G \cdot H)(\boldsymbol{\xi}_k) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} \sum_{\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_n} c_{\boldsymbol{k}} \tilde{c}_{\boldsymbol{l}} \underbrace{\boldsymbol{\xi}_k^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\xi}_n^{\boldsymbol{l}}}_{\in \mathcal{P}_{n+k}} \in \mathcal{P}_{k+n}.$$

Somit ist die gewünschte Aussage bewiesen. □

1.4 Lyapunov-Funktionale

Die hier vorgestellten Definitionen sind aus [14, Abschnitt 1.4] entnommen, jedoch finden sich diese auch in [22, Abschnitt 1.1]

Definition 1.4.12 (*Allgemeines Cauchy-Problem*) Sei X ein Banachraum über $\mathbb{R}$ und bezeichne X' seinen topologischen Dualraum. Darüber hinaus sei $A : \operatorname{dom} A \subseteq X \to X'$ ein stetiger (möglicherweise nichtlinearer) Operator, $u_0 \in X$ und $T > 0$. Ein Problem der Form:

Gesucht ist eine Funktion $u : [0,T] \to X$ *mit:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u + A(u) = 0 \quad \text{in} \quad X' \quad \text{für} \quad t \in (0,T), \\ u(0) = u_0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

wird als ein *allgemeines Cauchy-Problem* bezeichnet.

Anmerkung 1.4.13 Im Allgemeinen wird man für ein Cauchy-Problem nur einen schwachen Lösungsbegriff verwenden. Problem (1.15) ist hier so formuliert, dass u nicht differenzierbar in der Zeit t sein muss. Wir erhalten als minimale Regularitätsvoraussetzung, dass die Zeitableitung von u in einem geeigneten Sinn als eine Abbildung von $(0,T)$ nach X' aufzufassen ist. ○

Definition 1.4.14 (*Klassische Lösung eines allgemeinen Cauchy-Problems*) Eine Lösung eines allgemeinen Cauchy-Problems (Definition 1.4.12) wird eine *klassische Lösung* genannt, wenn gilt:

$$u \in C^1([0,T],X).$$

Definition 1.4.15 (*Lyapunov-Funktional*) Sei ein allgemeines Cauchy-Problem (Definition 1.4.12) gegeben. Ein Funktional $H : \operatorname{dom} A \to \mathbb{R}$ heißt ein *Lyapunov-Funktional*, wenn für alle klassischen Lösungen u des Cauchy-Problems gilt:

$$\frac{d}{dt}H[u(t)] \leq 0 \quad \text{für} \quad t \in (0,T),$$

(vgl. [14, Definition 1.1]).

Anmerkung 1.4.16 Im Zusammenhang mit Lyapunov-Funktionalen wird oft der Begriff *Entropiefunktional* oder auch nur *Entropie* verwendet. Meistens versteht man unter Entropie ein Lyapunov-Funktional, dessen zeitliche Änderung durch das Funktional selbst beschränkt ist. Das heißt, es soll gelten:

$$\frac{d}{dt}H[u(t)] \leq -\Phi(H[u(t)]).$$

Hierbei ist Φ eine streng monoton steigende Funktion auf $\mathbb{R}^+$ (vgl. [6, Abschnitt 1]). Die Definition einer Entropie kann je nach betrachteter Literatur variieren (z.B. [14, Definition 1.2]), oder als Synonym für ein Lyapunov-Funktional verwendet werden. Im Folgenden werden wir diese Begriff immer unterscheiden. $\diamond$

Kapitel 2

Systematische partielle Integration - Der eindimensionale Fall

In Abschnitt 1.2 haben wir mit Hilfe eines konkreten Beispieles gesehen wie eine partielle Integration systematisiert werden kann. Wir wollen in diesem Kapitel den nötigen Formalismus aufbauen. Dieses Kapitel beschränkt sich nur auf den eindimensionalen Fall, weil dem mehrdimensionalen Fall ein eigenes Kapitel gewidmet ist (vgl. Kapitel 6).

2.1 Das Grundproblem

Definition 2.1.1 (*Grundvoraussetzungen*) Im Folgenden werden wir immer ein offenes beschränktes Intervall $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ und eine Endzeit $T > 0$ betrachten. Wir definieren:

$$\Omega := (a,b) \quad \text{und} \quad \Omega_T := (0,T) \times \Omega.$$

Definition 2.1.2 (*Grundproblem*) Es gelten die Grundvoraussetzungen (Definition 2.1.1). Sei eine (ungerade) Zahl $k \in \mathbb{N}$ und ein $\beta > 0$ gegeben. Des Weiteren sei $P \in \mathcal{P}_k$ ein Polynom mit $P \not\equiv 0$. Das *Grundproblem* ist dann gegeben durch:

Gesucht ist eine Funktion $u : \overline{\Omega_T} \to \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{aligned} u_t = \Big(u^{\beta+1} P\big(\frac{u_x}{u}, \dots, \frac{\partial_x^k u}{u}\big)\Big)_x \quad &\text{in} \quad \Omega_T, \\ u(0) = u_0 \quad &\text{in} \quad \Omega, \\ u \geq 0 \quad &\text{in} \quad \Omega_T, \end{aligned} \tag{2.1}$$

und einer der folgenden beiden Randbedingungen:

$$\partial_x^i u(t,b) = \partial_x^i u(t,a), \quad i = 0, \dots, k \qquad \text{für} \quad t \in (0,T) \quad \text{oder} \tag{RB1}$$

$$\partial_x^{2i+1} u = 0, \qquad i = 0, \dots, \lfloor k/2 \rfloor \quad \text{auf} \quad (0,T) \times \partial\Omega. \tag{RB2}$$

Anmerkung 2.1.3 Die Forderung, dass k eine ungerade Zahl ist, kann in der obigen Definition auch weggelassen werden. Die Entscheidung ob auch gerade k zugelassen sind hängt einerseits von der gewünschten Randbedingung ab, andererseits von der Sinnhaftigkeit des in Abschnitt 2.2 vorgestellten Algorithmus. In Abschnitt 2.2.3 werden wir dies genauer betrachten. ○

Definition 2.1.4 (*Klassische Lösung*) Wir bezeichnen eine Funktion $u \in C(\overline{\Omega_T})$ als eine *klassische Lösung* unseres Grundproblems, wenn gilt:

$$\begin{aligned} u_t &\in C(\overline{\Omega_T}) \quad \text{und} \\ \partial_x^i u &\in C(\overline{\Omega_T}) \quad \text{für} \quad i = 0, \ldots, k+1, \end{aligned}$$

wobei die obigen Ableitungen im klassischen Sinn aufzufassen sind.

Anmerkung 2.1.5 In Definition 2.1.2 ist absichtlich nicht näher spezifiziert aus welchen Funktionenräumen die Funktionen u und u_0 stammen. Dies ist von der konkreten Form des Polynoms P und von β abhängig. Um dies einzusehen, wollen wir eine entsprechende schwache Formulierung von (2.1) betrachten. Wir multiplizieren (2.1) mit einer Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$ und integrieren über Ω_T. Es folgt mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_\Omega u_t \varphi \; dx \; dt - \int_0^T \int_\Omega \Big(u^{\beta+1} P\big(\frac{u_x}{u}, \ldots, \frac{\partial_x^k u}{u}\big)\Big)_x \varphi \; dx \; dt \\ &= - \int_0^T \int_\Omega u \varphi_t \; dx \; dt + \int_0^T \int_\Omega u^{\beta+1} P\big(\frac{u_x}{u}, \ldots, \frac{\partial_x^k u}{u}\big) \varphi_x \; dx \; dt, \end{aligned}$$

wobei die Randterme wegen des kompakten Trägers von φ verschwinden. Der entsprechende Funktionenraum, aus dem u stammen soll, muss nun so gewählt werden, dass die Integierbarkeit von $u^{\beta+1} P\big(\frac{u_x}{u}, \ldots, \frac{\partial_x^k u}{u}\big)\varphi_x$ gewährleistet ist. Insbesondere kann der Integrand auch Singularitäten beinhalten, weil nur $u \geq 0$ vorausgesetzt wird. Betrachten wir als Beispiel

$$P_1(\boldsymbol{\xi}) := \xi_k \quad \text{und} \quad P_2(\boldsymbol{\xi}) := \xi_k + (\xi_1)^k,$$

so besitzt der entsprechende Integrand für P_1 unabhängig von β keine Polstellen. Für P_2 und $\beta < k - 1$ kann dies der Fall sein.

Im Allgemeinen können wir nicht von der Existenz eines Maximum- bzw. Minimumprinzips ausgehen. Dies bedeutet, dass die Nebenbedingung $u \geq 0$ gesondert betrachtet werden muss. Wir werden später in Kapitel 5 sehen, dass die stärkere Forderung $u > 0$ entscheidend für die Existenz von klassischen Lösungen ist, weil in diesem Fall die Diffusion $u^{\beta+1}$ in Gleichung (2.1) nicht verschwindend ist. Unter diesem Aspekt ist die Annahme $u > 0$ sinnvoll, wenn wir von klassischen Lösungen sprechen wollen. ○

Definition 2.1.6 (*Grundhypothese*) Wir werden im Folgenden immer voraussetzen, dass unser Grundproblem (Definition 2.1.2) für alle Anfangswerte $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $u_0 > 0$ in

$\overline{\Omega}$ immer mindestens eine klassische Lösung besitzt, sofern u_0 die gewünschte Randbedingung erfüllt.

In Kapitel 5 werden wir ein Existenzresultat für eindimensionale Dünnfilmgleichungen vorstellen. Dies soll verdeutlichen, dass zumindest in Spezialfällen unsere Grundhypothese tatsächlich erfüllt ist.

Definition 2.1.7 (α-*Funktional*) Es gelten die Grundvoraussetzungen (Definition 2.1.1). Sei $\alpha > 0$ und $s \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap C(\mathbb{R})$ mit:

$$s''(u) = u^{\alpha-2} \quad \text{für} \quad u \neq 0$$

gegeben. Ein Funktional $H_\alpha : C(\overline{\Omega_T}) \to C([0,T])$ wird als α-*Funktional* bezeichnet, wenn es die Form

$$H_\alpha[u](t) = \int_\Omega s(u(t,x))\ dx$$

besitzt (vgl. [15, Definition 2]).

Lemma 2.1.8 Das α-Funktional H_α bildet in den angegebenen Raum ab. Insbesondere ist H_α wohldefiniert.

Beweis: Sei ein beliebiges $u \in C(\overline{\Omega_T})$ gegeben.

i) Wir müssen zeigen, dass $|H_\alpha[u](t)| < \infty$ für alle $t \in [0,T]$ gilt. Weil die Funktion u nach Voraussetzung stetig auf der kompakten Menge $\overline{\Omega_T}$ ist und $s(u(t,x))$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen wieder stetig ist, können wir schließen:

$$\sup_{(t,x)\in\overline{\Omega_T}} |s(u(t,x))| =: C < \infty.$$

Dies impliziert bereits die Beschränktheit von $|H_\alpha[u](t)|$, weil

$$|H_\alpha[u](t)| \leq \int_\Omega |s(u(t,x))|\ dx \leq \int_\Omega C\ dx = (b-a)\cdot C < \infty$$

gilt.

ii) Mittels majorisierter Konvergenz mit Majorante C kann das Integral mit dem Grenzwert vertauscht werden (vgl. [13, Satz 128.1]). Wir können daher schließen:

$$\lim_{t\to t_0} H_\alpha[u](t) = \lim_{t\to t_0} \int_\Omega s(u(t,x))\ dx = \int_\Omega \lim_{t\to t_0} s(u(t,x))\ dx = \int_\Omega s(u(t_0,x))\ dx = H_\alpha[u](t_0),$$

wobei für den Fall $t_0 \in \{0,T\}$ der entsprechende einseitige Grenzwert in obiger Gleichung betrachtet wird. □

Anmerkung 2.1.9 Die Funktion s in Definition 2.1.7 kann explizit durch zweimalige Integration bestimmt werden. Wir unterscheiden die Fälle $\alpha = 1$ und $\alpha \neq 1$.

Für $\alpha \neq 1$ folgt:

$$s'(u) = \int u^{\alpha-2}\,du = \frac{u^{\alpha-1}}{\alpha-1} + A \quad \text{und}$$
$$s(u) = \int \frac{u^{\alpha-1}}{\alpha-1} + A\,du = \frac{u^{\alpha}}{\alpha(\alpha-1)} + Au + B,$$

wobei A und B reelle Konstanten sind.

Im Fall $\alpha = 1$ schließen wir:

$$s'(u) = \int u^{-1}\,du = \ln u + \tilde{A} \quad \text{und}$$
$$s(u) = \int \ln u + \tilde{A}\,du = u\ln u - u + \tilde{A}u + B = u(\ln u + A) + B,$$

wobei $A, \tilde{A}$ und B reelle Konstanten sind.

Meistens können wir die Konstanten so wählen, dass $s(u) > 0$ für alle Funktionen u mit $u > 0$ erfüllt ist. Speziell für den Fall $\alpha = 1$ sei hier hervorzuheben, dass $u \mapsto \ln u$ unbeschränkt ist, jedoch ist die Funktion $u \mapsto u\ln u$ nach unten beschränkt. Somit existieren auch für $\alpha = 1$ entsprechende Konstanten A und B. ⬡

Beispiel 2.1.10 Sei $\alpha \neq 1$. Dann ist durch

$$u(t,x) \mapsto \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \int_\Omega u^\alpha\,dx$$

ein α-Funktional gegeben. ⬠

Beispiel 2.1.11 Für $\alpha = 1$ ist durch

$$u(t,x) \mapsto \int_\Omega u(\ln u - 1)\,dx$$

ein α-Funktional gegeben. ⬠

Definition 2.1.12 (*α-Produktion*) Es gelten die Grundvoraussetzungen (Definition 2.1.1). Sei H_α ein α-Funktional. Wir definieren:

$$\operatorname{dom} P_\alpha := \begin{cases} C^1(\overline{\Omega_T}) & \text{für } \alpha > 1 \\ \{u \in C^1(\overline{\Omega_T}) : u \neq 0 \text{ in } \overline{\Omega_T}\} & \text{für } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Das Funktional $P_\alpha : \operatorname{dom} P_\alpha \to C([0,T])$ bezeichnen wir als *α-Produktion* von H_α, wenn gilt:

$$P_\alpha[u](t) := -\frac{d}{dt} H_\alpha[u(t,x)],$$

(vgl. [15, Definition 2]).

Anmerkung 2.1.13 Der Definitionsbereich eines α-Funktionals ist nicht optimal, weil nur die Integrierbarkeit der Funktion $s(u)$ gefordert werden muss, jedoch ist dann nicht mehr die Stetigkeit von H_α in der Zeit t gewährleistet. Die Menge dom P_α ist so gewählt, dass sich P_α durch vertauschen des Integrals mit der Zeitableitung berechnen lässt. Für die Definition der α-Produktion genügt es, wenn wir Differenzierbarkeit nur in der Zeit t fordern. Da wir immer nur klassische Lösungen von unserem Grundproblem betrachten werden, ist dies keine Einschränkung. ○

Lemma 2.1.14 Die α-Produktion H_α bildet in den angegebenen Raum ab. Insbesondere ist P_α wohldefiniert. Darüber hinaus gilt für alle $t \in [0, T]$:

$$P_\alpha[u](t) = -\int_\Omega s'(u(t,x))u_t(t,x)\ dx \quad \forall u \in \text{dom } P_\alpha.$$

Beweis: Sei ein beliebiges $u \in \text{dom } P_\alpha$ gegeben.

i) Wir müssen zeigen, dass die Funktion $t \mapsto -H_\alpha[u](t)$ stetig differenzierbar ist. Es gilt:

$$\frac{d}{dt}\big(s(u(t,x))\big) = s'(u(t,x))u_t(t,x). \tag{2.2}$$

Da u und u_t nach Voraussetzung stetig auf der kompakten Menge $\overline{\Omega_T}$ sind, wird

$$\sup_{(t,x)\in\overline{\Omega_T}} |s'(u(t,x))u_t(t,x)| =: C < \infty$$

impliziert. Die Menge dom P_α ist so gewählt, dass das obige Supremum tatsächlich endlich ist. Für $\alpha \in (0,1]$ ist die Funktion s' nur stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. In diesem Fall verwenden wir zusätzlich die Voraussetzung $u \neq 0$ in $\overline{\Omega_T}$.

Da C eine integrierbare Majorante von $s(u)_t$ ist, kann mittels majorisierter Konvergenz (vgl. [13, Satz 128.2]) Integral und Differentialoperator vertauscht werden und wir erhalten:

$$-\frac{d}{dt}H_\alpha[u](t) = -\frac{d}{dt}\int_\Omega s(u(t,x))\ dx = -\int_\Omega \frac{d}{dt}s(u(t,x))\ dx = -\int_\Omega s'(u(t,x))u_t(t,x)\ dx.$$

Insbesondere impliziert dies die stetige Differenzierbarkeit von $t \mapsto -H_\alpha[u](t)$ auf $(0,T)$.

ii) Es verbleibt zu zeigen, dass $t \mapsto -H_\alpha[u](t)$ stetig bis zu dem Rand von $[0,T]$ ist. Im ersten Beweisschritt wurde die Stetigkeit im offenen Intervall $(0,T)$ gezeigt. Es genügt somit nur die Grenzwerte

$$\lim_{t\to 0^+} -\frac{d}{dt}H_\alpha[u](t) \quad \text{und} \quad \lim_{t\to T^-} -\frac{d}{dt}H_\alpha[u](t)$$

zu betrachten. Mittels majorisierter Konvergenz mit Majorante C kann das Integral mit dem Grenzwert vertauscht werden (vgl. [13, Satz 128.1]) und es folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} -\frac{d}{dt}H_\alpha[u](t) &= \lim_{t\to 0^+} -\int_\Omega s'(u(t,x))u_t(t,x)\ dx = -\int_\Omega \lim_{t\to 0^+} s'(u(t,x))u_t(t,x)\ dx \\
&= -\int_\Omega s'(u(0,x))u_t(0,x)\ dx = P_\alpha[u](0), \\
\lim_{t\to T^-} -\frac{d}{dt}H_\alpha[u](t) &= \lim_{t\to T^-} -\int_\Omega s'(u(t,x))u_t(t,x)\ dx = -\int_\Omega \lim_{t\to T^-} s'(u(t,x))u_t(t,x)\ dx \\
&= -\int_\Omega s'(u(T,x))u_t(T,x)\ dx = P_\alpha[u](T).
\end{aligned}$$

Wir haben somit gezeigt, dass die entsprechenden Grenzwerte existieren und damit schließen wir:

$$t \mapsto P_\alpha[u](t) \in C([0,T]).$$

Da $u \in \operatorname{dom} P_\alpha$ beliebig war und das Integral mit dem Differentialoperator vertauscht werden darf, ist P_α wohldefiniert und besitzt die gewünschte Darstellung. $\square$

Lemma 2.1.15 Sei $u \in C^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl und $\gamma > 0$. Darüber hinaus erfüllt u entweder (RB1) oder (RB2) (unabhängig von der Zeit t). Dann gilt für alle $G \in \mathcal{P}_k$:

$$u^\gamma G\big(\frac{u_x}{u}, \dots, \frac{\partial_x^k u}{u}\big)\Big|_{x=a}^{x=b} = 0, \tag{2.3}$$

sofern der obige Ausdruck für u definiert ist.

Beweis:

i) Wir betrachten den Fall, dass die Funktion u die Randbedingung (RB1) erfüllt. Dann gilt:

$$u(b)^\gamma = u(a)^\gamma \quad \text{und} \quad \frac{\partial_x^i u}{u}(b) = \frac{\partial_x^i u}{u}(a) \quad \text{für} \quad i = 1\dots,k.$$

Insbesondere impliziert dies:

$$u^\gamma(b)G\big(\frac{u_x}{u}(b), \dots, \frac{\partial_x^k u}{u}(b)\big) = u^\gamma(a)G\big(\frac{u_x}{u}(a), \dots, \frac{\partial_x^k u}{u}(a)\big).$$

Dies ist bereits äquivalent zu Gleichung (2.3).

ii) Die Funktion u soll nun (RB2) erfüllen. Da k ungerade ist, muss für alle $\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$ gelten:

$$\exists j(\boldsymbol{k}) \in \{1,\dots,k\} : j(\boldsymbol{k}) \bmod 2 = 1 \quad \text{und} \quad k_{j(\boldsymbol{k})} \neq 0.$$

Wäre dies nicht der Fall, dann würde gelten:

$$k = \sum_{i=1}^{k} i \cdot k_i = \sum_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2i \cdot k_{2i}.$$

Somit wäre k eine Summe aus geraden Zahlen und daher selber eine gerade Zahl. Dies ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass k ungerade ist.

Wir schreiben das Polynom G explizit an und verwenden, dass alle ungerade Ableitungen auf $\partial\Omega$ verschwinden. Es folgt:

$$G\Big(\frac{u_x}{u}, \dots, \frac{\partial_x^k u}{u}\Big) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} \underbrace{\Big(\frac{\partial_x^{j(\boldsymbol{k})} u}{u}\Big)^{k_{j(\boldsymbol{k})}}}_{=0 \text{ für } x \in \{a,b\}} \prod_{\substack{i=1,\\ i \neq j(\boldsymbol{k})}}^{k} \Big(\frac{\partial_x^i u}{u}\Big)^{k_i} = 0 \quad \text{für} \quad x \in \{a, b\}.$$

Dies impliziert bereits (2.3), weil beide Summanden verschwinden. □

Anmerkung 2.1.16 (zu Lemma 2.1.15) Das Lemma bleibt gültig, wenn wir für periodische Randbedingungen die Forderung, dass k ungerade ist fallen lassen. Der Ausdruck

$$u^\gamma G\Big(\frac{u_x}{u}, \dots, \frac{\partial_x^k u}{u}\Big)$$

ist immer definiert, wenn $\gamma \geq k$ oder $u > 0$ in $\overline{\Omega}$ gilt. ⬡

Aus Lemma 2.1.15 können wir bereits eine wichtige Eigenschaft von klassischen Lösungen unseres Grundproblems folgern:

Korollar 2.1.17 Sei u eine klassische Lösung unseres Grundproblems (Definition 2.1.2). Dann ist der Mittelwert

$$\overline{u}(t) := \frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \int_\Omega u(t, x) \; dx$$

zeitlich konstant. Insbesondere gilt:

$$\overline{u}(t) = \frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \int_\Omega u_0(x) \; dx =: u_\infty \quad \forall t \in [0, T].$$

Beweis: Da u eine klassische Lösung ist, gilt:

$$\sup_{(t,x) \in \overline{\Omega_T}} |u_t(t, x)| =: C < \infty.$$

Mittels majorisierter Konvergenz mit Majorante C (vgl. [13, Satz 128.2]) folgt:

$$\frac{d}{dt}\overline{u}(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \int_\Omega u(t, x) \; dx = \frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \int_\Omega u_t(t, x) \; dx.$$

Wir setzen für die Zeitableitung ein und wenden Lemma 2.1.15 an. Es folgt:

$$\frac{d}{dt}\overline{u}(t) = \int_\Omega \Big(u^{\beta+1} P\Big(\frac{u_x}{u}, \dots, \frac{\partial_x^k u}{u}\Big)\Big)_x \; dx = u^{\beta+1} P\Big(\frac{u_x}{u}, \dots, \frac{\partial_x^k u}{u}\Big)\Big|_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Dies impliziert bereits:

$$\overline{u}(t) = \overline{u}(0) = u_\infty \quad \forall t \in [0, T].$$

Somit ist die gewünschte Aussage bewiesen. □

2.2 Der Algorithmus

Wir betrachten unser Grundproblem und wollen bestimmen für welche Werte α ein α-Funktional ein Lyapunov-Funktional ist. Der Algorithmus besteht aus vier Schritten, welche hier vorgestellt werden sollen. Hierbei ist der vierte Schritt optional. Im Folgenden sei u immer eine klassische Lösung von (2.1), welche entweder (RB1) oder (RB2) erfüllt.

2.2.1 Bestimmung der α-Produktion

In einem ersten Schritt wollen wir die α-Produktion bestimmen. Wir betrachten eine klassische Lösung u mit $u > 0$ in $\overline{\Omega_T}$ unseres Grundproblems, verwenden Lemma 2.1.14 und setzen Gleichung (2.1) für die Zeitableitung ein. Wir erhalten:

$$P_\alpha[u](t) = -\int_\Omega s'(u)u_t \, dx = -\int_\Omega s'(u)\Big(u^{\beta+1}P\big(\frac{u_x}{u}, \dots, \frac{\partial_x^k u}{u}\big)\Big)_x \, dx.$$

Nun integrieren wir einmal partiell, wobei zu beachten ist, dass wegen Lemma 2.1.15 der Randterm trivial ist und setzen für s'' ein. Es folgt:

$$\begin{aligned} P_\alpha[u](t) &= -s'(u)u^{\beta+1}P\big(\frac{u_x}{u}, \dots, \frac{\partial_x^k u}{u}\big)\Big|_{x=a}^{x=b} + \int_\Omega s''(u)u_x u^{\beta+1}P\big(\frac{u_x}{u}, \dots, \frac{\partial_x^k u}{u}\big) \, dx \\ &= \int_\Omega u^{\alpha+\beta}\frac{u_x}{u}P\big(\frac{u_x}{u}, \dots, \frac{\partial_x^k u}{u}\big) \, dx. \end{aligned}$$

Wir definieren:

$$\xi_i(u) := \frac{\partial_x^i u}{u} \quad \text{für} \quad i \in \mathbb{N}_\times, \quad \boldsymbol{\xi}(u) := (\xi_1(u), \dots, \xi_k(u)) \quad \text{und}$$
$$\boldsymbol{\xi}_m(u) = (\xi_1(u), \dots, \xi_m(u))^T \quad \text{für} \quad m \in \mathbb{N}_\times.$$

Somit ergibt sich:

$$P_\alpha[u](t) = \int_\Omega u^{\alpha+\beta}\xi_1(u)P(\boldsymbol{\xi}(u)) \, dx.$$

Da $u > 0$ vorausgesetzt wird, hängt das Vorzeichen des Integrals nur von dem Vorzeichen von $\xi_1(u)P(\boldsymbol{\xi}(u))$ ab.

Definition 2.2.18 Sei ein Polynom $P \in \mathcal{P}_k$ gegeben. Dann ist das Polynom S_0 durch

$$S_0 := \begin{cases} \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{\xi} \mapsto \xi_1 P(\boldsymbol{\xi}) \end{cases}$$

definiert.

Lemma 2.2.19 Sei u eine klassische Lösung unseres Grundproblems (Definition 2.1.2) mit $u > 0$ in $\overline{\Omega_T}$. Darüber hinaus sei H_α ein α-Funktional mit α-Produktion P_α. Dann gilt:

$$P_\alpha[u](t) = \int_\Omega u^{\alpha+\beta} S_0(\boldsymbol{\xi}(u))\ dx.$$

Beweis: Das Lemma ist eine unmittelbare Konsequenz der Rechnung am Anfang dieses Abschnittes. □

Anmerkung 2.2.20 Lemma 2.2.19 bleibt für $u \geq 0$ gültig, wenn α und β hinreichend groß gewählt werden, sodass der entsprechende Integrand auf $\overline{\Omega_T}$ definiert ist. ⬡

Anmerkung 2.2.21 Wir können das Polynom S_0 als ein Element des Raumes $\mathcal{P}_{k+1}$ auffassen. Es sei hier vereinbart, dass wir für Polynome aus dem Raum $\mathcal{P}_{k+1}$ die letzte Variable extra anschreiben. Wir schreiben also

$$\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k \quad \text{und} \quad (\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$$

statt

$$\boldsymbol{\xi}_k \in \mathbb{R}^k \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\xi}_{k+1} \in \mathbb{R}^{k+1}.$$

⬡

2.2.2 Die Verschiebungspolynome

In einem zweiten Schritt müssen wir eine abstraktere Formulierung für eine partielle Integration finden. Für einen Multiindex $\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$ definieren wir:

$$I_{\boldsymbol{k}} := \int_\Omega \Big(u^{\alpha+\beta} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)\Big)_x\ dx.$$

Mit Lemma 2.1.15 folgt:

$$I_{\boldsymbol{k}} = u^{\alpha+\beta} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)\Big|_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Dies ermöglicht es uns eine partielle Integration in folgender Form zu abstrahieren:

$$P_\alpha[u] = P_\alpha[u] + \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} \cdot I_k, \tag{2.4}$$

wobei $c_{\boldsymbol{k}}$ für $\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$ reelle Konstante sind. Es ist hier hervorzuheben, dass das Integral $I_{\boldsymbol{k}}$ trivial ist, jedoch ist dies nicht der Fall für die Integranden. Diese möchten wir nun explizit bestimmen. Wir differenzieren $u^{\alpha+\beta}\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)$ nach x:

$$\begin{aligned}\Big(u^{\alpha+\beta}\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)\Big)_x &= (\alpha+\beta)u^{\alpha+\beta-1}u_x\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u) + u^{\alpha+\beta}\big(\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)\big)_x \\ &= u^{\alpha+\beta}\Big((\alpha+\beta)\frac{u_x}{u}\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u) + \big(\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)\big)_x\Big) \\ &= u^{\alpha+\beta}\Big((\alpha+\beta)\xi_1(u)\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u) + \big(\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)\big)_x\Big).\end{aligned}$$

Wir müssen die Ableitung des Polynoms $\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)$ nach x bestimmen. Mit Hilfe der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)\big)_x &= \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}}{\partial\xi_i}(u)\frac{\partial\xi_i(u)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}}{\partial\xi_i}(u)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial_x^i u}{u} \\ &= \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}}{\partial\xi_i}(u)\frac{\partial_x^{i+1}u\cdot u - \partial_x^i u\cdot u_x}{u^2} = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}}{\partial\xi_i}(u)\big(\xi_{i+1}(u) - \xi_1(u)\xi_i(u)\big).\end{aligned}$$

Des Weiteren gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\xi_1(u)\xi_i(u)\frac{\partial\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}}{\partial\xi_i}(u) &= \xi_1(u)\sum_{i=1}^{k}\xi_i(u)k_i\xi_i^{k_i-1}(u)\prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{l}\xi_j^{k_j}(u) \\ &= \xi_1(u)\sum_{i=1}^{k}k_i\prod_{j=1}^{l}\xi_j^{k_j}(u) = \xi_1(u)\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)\sum_{i=1}^{k}k_i = |\boldsymbol{k}|\xi_1(u)\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u).\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Big(u^{\alpha+\beta}\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)\Big)_x &= u^{\alpha+\beta}\Big((\alpha+\beta)\xi_1(u)\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u) - |\boldsymbol{k}|\xi_1(u)\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}} + \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}}{\partial\xi_i}(u)\xi_{i+1}(u)\Big) \\ &= u^{\alpha+\beta}\Big((\alpha+\beta-|\boldsymbol{k}|)\xi_1(u)\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u) + \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}}{\partial\xi_i}(u)\xi_{i+1}(u)\Big).\end{aligned}$$

Betrachten wir die obige Gleichung ohne den Faktor $u^{\alpha+\beta}$, so erhalten wir Polynome in den Variablen $\xi_1,\dots,\xi_{k+1}$. Dies motiviert folgende Definition:

Definition 2.2.22 (*Verschiebungspolynom*) Für eine Zahl $\gamma > 0$ und einen Multiindex $\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$ ist das *Verschiebungspolynom*[1] $T_{\boldsymbol{k}}$ durch

$$T_{\boldsymbol{k}} := \begin{cases} \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) \mapsto (\gamma - |\boldsymbol{k}|)\xi_1\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}} + \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}}{\partial\xi_i}\xi_{i+1}\end{cases}$$

definiert. Darüber hinaus sei

$$\delta_\gamma\mathcal{B}_k := \{T_{\boldsymbol{k}} : \boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k\} \quad \text{und} \quad \delta_\gamma\mathcal{P}_k := \operatorname{span}\delta_\gamma\mathcal{B}_k.$$

[1] engl. „shift polynomial“

Der Name Verschiebungspolynom ist damit zu begründen, dass uns die Polynome $T_{\boldsymbol{k}},\ \boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$ ermöglichen den Ableitungsgrad mit Hilfe einer partiellen Integration zu verschieben.

Anmerkung 2.2.23 Zur Bestimmung von Lyapunov-Funktionalen für unser Grundproblem setzen wir $\gamma = \alpha + \beta$. Es sei hier angemerkt, dass S_0 von α und β unabhängig ist, die Verschiebungspolynome jedoch nicht. ○

Anmerkung 2.2.24 Alternativ können wir ein Verschiebungspolynom auch darstellen als:

$$T_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}\Big((\gamma - |\boldsymbol{k}|)\xi_1 + \sum_{i=1}^{k} k_i \frac{\xi_{i+1}}{\xi_i}\Big).$$

Diese Darstellung folgt direkt durch Bildung der jeweiligen Ableitung von $\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}$ und Herausheben des entsprechenden Monoms. Aus der ursprünglichen Darstellung in Definition 2.2.22 folgt insbesondere, dass auch die neu gefundene Darstellung keine Singularitäten aufweist und somit für alle $(\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ definiert ist. ○

Lemma 2.2.25 Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\gamma > 0$. Dann besteht die Menge $\delta_\gamma \mathcal{B}_k$ aus zueinander linear unabhängigen Polynomen. Insbesondere ist $\delta_\gamma \mathcal{B}_k$ eine Basis von $\delta_\gamma \mathcal{P}_k$.

Beweis: Wir betrachten eine Linearkombination der Nullfunktion:

$$0 = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} \Big((\gamma - |\boldsymbol{k}|)\xi_1 \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}}{\partial \xi_i} \xi_{i+1}\Big),$$

wobei $c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{R}$ für alle $\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$ gilt. Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass dies nur trivial möglich ist. Wir führen folgende Mengen und Konventionen ein :

$$\begin{aligned} I_{k,m,j} &:= \{\boldsymbol{l} \in \mathbb{N}^{m-1} : (\boldsymbol{l}, j, 0, \dots, 0) \in \mathcal{I}_k\} \quad \text{mit} \quad \mathbb{N}^0 := \emptyset \quad \text{und} \\ I_{k,m} &:= \bigcup_{j=1}^{k} \{(\boldsymbol{l}, j, 0, \dots, 0) : \boldsymbol{l} \in I_{k,m,j}\}. \end{aligned}$$

Insbesondere können wir die Menge $\mathcal{I}_k$ nun durch

$$\mathcal{I}_k = \bigcup_{m=1}^{k} I_{k,m}$$

ausdrücken. Der Beweis wird induktiv nach dem Index der letzten nichtverschwindenden Komponente von $\boldsymbol{k}$ geführt. In Beispiel 2.2.28 ist dies explizit für den Fall $k = 5$ vorgerechnet, da dies die Vorgehensweise dieses Beweises motiviert.

Induktionsbehauptung: Für $m \in \{1, \dots, k\}$ gilt:

$$c_{\boldsymbol{k}} = 0 \quad \forall \boldsymbol{k} \in I_{k,m}.$$

Induktionsanfang: Sei $m = k$. In der Menge $I_{k,m} = I_{k,k}$ sind alle Multiindizes $\boldsymbol{k}$ enthalten, für die $k_k \neq 0$ gilt. Der Multiindex $\boldsymbol{e} := (0, \dots, 0, 1)$ ist die einzige Lösung der Gleichung $\sum_{i=1}^{k} i \cdot k_i = k$ mit $k_k \neq 0$. Wir können somit schließen, dass

$$I_{k,k} = \{\boldsymbol{e}\}$$

gilt. Des Weiteren ist $\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{e}}$ das einzige Monom aus der Menge $\mathcal{B}_k$ mit:

$$0 \not\equiv \xi_{k+1} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}}{\partial \xi_k} = \xi_{k+1}.$$

Wir können die Linearkombination der Nullfunktion umschreiben:

$$0 = c_{\boldsymbol{e}} \xi_{k+1} + G(\boldsymbol{\xi}),$$

wobei $G \in \mathcal{Q}_{k+1,k}$ ein Polynom ist. Da $G(\boldsymbol{\xi})$ die Variable ξ_{k+1} nicht enthält, muss bereits

$$c_{\boldsymbol{e}} = 0$$

gelten.

Induktionsschritt: Gelte die Induktionsbehauptung für alle $n \in \{m, ..., k\}$. Im Fall $m = 1$ sind wir fertig. Sei also $m \geq 2$. Die Induktionsvoraussetzung impliziert insbesondere, dass

$$c_{\boldsymbol{k}} = 0 \quad \forall \boldsymbol{k} \in \bigcup_{n=m}^{k} I_{k,n} \tag{2.5}$$

gilt. Wir wollen nun

$$c_{\boldsymbol{k}} = 0 \quad \forall \boldsymbol{k} \in I_{k,m-1}$$

folgern. Wir schreiben unsere Linearkombination der Nullfunktion an und verwenden, dass die Mengen $I_{k,m}$ für $m \in \{1, \dots, k\}$ paarweise disjunkt sind. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt:

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} = \sum_{n=1}^{k} \sum_{\boldsymbol{k} \in I_{k,n}} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} \overset{(2.5)}{=} \sum_{n=1}^{m-1} \sum_{\boldsymbol{k} \in I_{k,n}} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{k} \in I_{k,m-1}} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} + \sum_{n=1}^{m-2} \sum_{\boldsymbol{k} \in I_{k,n}} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}}.$$

Nun lösen wir die Mengen $I_{k,m}$ explizit auf und setzten in die alternative Darstellung der Verschiebungspolynome ein. Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, schreiben wir $c_{\boldsymbol{l},j}$ statt $c_{(\boldsymbol{l},j,0,\dots,0)}$ für die auftretenden Konstanten. Dies impliziert:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{\lfloor k/(m-1) \rfloor} \sum_{\boldsymbol{l} \in I_{k,m,j}} c_{\boldsymbol{l},j} \boldsymbol{\xi}_{m-2}^{\boldsymbol{l}} \xi_{m-1}^{j} \Big((\gamma - j - |\boldsymbol{l}|) \xi_1 + \sum_{i=1}^{m-2} l_i \frac{\xi_{i+1}}{\xi_i} + j \frac{\xi_m}{\xi_{m-1}} \Big) + \sum_{n=1}^{m-2} \sum_{\boldsymbol{k} \in I_{k,n}} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} \\
&= \sum_{j=1}^{\lfloor k/(m-1) \rfloor} \sum_{\boldsymbol{l} \in I_{k,m,j}} c_{\boldsymbol{l},j} \boldsymbol{\xi}_{m-2}^{\boldsymbol{l}} \xi_{m-1}^{j} \Big((\gamma - j - |\boldsymbol{l}|) \xi_1 + \sum_{i=1}^{m-2} l_i \frac{\xi_{i+1}}{\xi_i} \Big) + c_{\boldsymbol{l},j} \; j \; \boldsymbol{\xi}_{m-2}^{\boldsymbol{l}} \xi_{m-1}^{j-1} \xi_m \\
&\quad + \sum_{n=1}^{m-2} \sum_{\boldsymbol{k} \in I_{k,n}} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}}.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir:

$$0 = \sum_{j=1}^{\lfloor k/(m-1) \rfloor} \sum_{\boldsymbol{l} \in I_{k,m,j}} c_{\boldsymbol{l},j} \boldsymbol{\xi}_{m-2}^{\boldsymbol{l}} \xi_{m-1}^{j} \left((\gamma - j - |\boldsymbol{l}|)\xi_1 + \sum_{i=1}^{m-2} l_i \frac{\xi_{i+1}}{\xi_i} \right) + \sum_{n=1}^{m-2} \sum_{\boldsymbol{k} \in I_{k,n}} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} \tag{2.6}$$

$$+ \xi_m \sum_{j=1}^{\lfloor k/(m-1) \rfloor} \sum_{\boldsymbol{l} \in I_{k,m,j}} c_{\boldsymbol{l},j} \; j \; \boldsymbol{\xi}_{m-2}^{\boldsymbol{l}} \xi_{m-1}^{j-1}. \tag{2.7}$$

Wir fassen die obige Summe als Polynom ersten Grades in ξ_m auf, wobei die Koeffizienten von ξ_m unabhängig sind. Insbesondere enthält die Summe (2.6) die Variable ξ_m nicht. Somit können wir schließen, dass der Koeffizient bzgl. ξ_m trivial sein muss. Es folgt:

$$0 = \sum_{j=1}^{\lfloor k/(m-1) \rfloor} \sum_{\boldsymbol{l} \in I_{k,m,j}} c_{\boldsymbol{l},j} \; j \; \boldsymbol{\xi}_{m-2}^{\boldsymbol{l}} \xi_{m-1}^{j-1} = \sum_{j=1}^{\lfloor k/(m-1) \rfloor} \xi_{m-1}^{j-1} \sum_{\boldsymbol{l} \in I_{k,m,j}} c_{\boldsymbol{l},j} \; j \; \boldsymbol{\xi}_{m-2}^{\boldsymbol{l}}.$$

Wir erhalten ein Polynom in der Variablen ξ_{m-1} mit Koeffizienten, die von ξ_{m-1} unabhängig sind. Die lineare Unabhängigkeit von $\{\xi_{m-1}^n : n = 0, \ldots, \lfloor k/(m-1) \rfloor - 1\}$ impliziert:

$$0 = \sum_{\boldsymbol{l} \in I_{k,m,j}} c_{\boldsymbol{l},j} \; j \; \boldsymbol{\xi}_{m-2}^{\boldsymbol{l}} \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, \lfloor k/(m-1) \rfloor.$$

Wir können nun verwenden, dass die Menge $\mathcal{B}_{k,m-2}$ aus linear unabhängigen Polynomen besteht (vgl. Satz 1.3.2) und erhalten:

$$c_{\boldsymbol{l},j} = 0, \quad \forall \boldsymbol{l} \in I_{k,m,j}, \; j = 1, \ldots, \lfloor k/(m-1) \rfloor.$$

Dies ist nun äquivalent zu:

$$c_{\boldsymbol{k}} = 0 \quad \forall \boldsymbol{k} \in I_{k,m-1},$$

womit der Induktionsschritt abgeschlossen ist.

Die gewünschte Behauptung folgt, weil $\mathcal{I}_k$ die Vereinigung der Mengen $I_{k,m}$ ist. Per Definition ist $\delta_\gamma \mathcal{B}_k$ ein Erzeugendensystem und somit eine Basis von $\delta_\gamma \mathcal{P}_k$. □

Anmerkung 2.2.26 (zum Beweis von Lemma 2.2.25) Ein erster Blick legt die Vermutung nahe, dass $\sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} = 0$ bereits

$$0 = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} (\gamma - |\boldsymbol{k}|) \xi_1 \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}} = \xi_1 \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} (\gamma - |\boldsymbol{k}|) \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}$$

impliziert. Aus der linearen Unabhängigkeit von $\mathcal{B}_k$ könnten wir dann zumindest für $|\boldsymbol{k}| \neq \gamma$ schließen, dass $c_{\boldsymbol{k}} = 0$ gelten muss. Dies ist jedoch eine falsche Schlussfolgerung. In Beispiel 2.2.28 sind die Verschiebungspolynome für $k = 5$ explizit angegeben. Betrachten wir zum Beispiel die Verschiebungspolynome

$$(\gamma - 5)\xi_1^6 + 5\xi_1^4 \xi_2 \quad \text{und}$$
$$(\gamma - 4)\xi_1^4 \xi_2 + 3\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_1^3 \xi_3,$$

so teilen sich beide das Monom $\xi_1^4\xi_2$. Insbesondere müssen wir beachten, dass der jeweilige Koeffizient bezüglich $\xi_1^4\xi_2$ einmal von γ abhängig und einmal unabhängig ist. Somit ist es für unsere Zwecke nicht zielführend, wenn wir die Summen

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}}(\gamma-|\boldsymbol{k}|)\xi_1\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}} \quad \text{und} \quad \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}}{\partial\xi_i}\xi_{i+1}$$

getrennt betrachten. Auch die alternative Darstellung ist hier nicht zweckmäßiger. Unsere Linearkombination der Nullfunktion lässt sich als

$$0 = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}\Big((\gamma-|\boldsymbol{k}|)\xi_1 + \sum_{i=1}^{k} k_i\frac{\xi_{i+1}}{\xi_i}\Big)$$

anschreiben. Auch hier können wir nicht direkt aus der linearen Unabhängigkeit von $\mathcal{B}_k$ auf die lineare Unabhängigkeit von $\delta_\gamma\mathcal{B}_k$ schließen. Dies liegt daran, dass die obige Gleichung bezüglich $\mathcal{B}_k$ keine Linearkombination darstellt, weil die Koeffizienten von $(\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1})$ abhängen. ⬠

Beispiel 2.2.27 Wir schließen an Beispiel 1.3.5 an und bestimmen alle Verschiebungspolynome für $k = 3$. Diese sind in Tabelle 2.1 angegeben. ⬠

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}$	$\lvert\boldsymbol{k}\rvert$	$T_{\boldsymbol{k}}$
$(3,0,0)$	ξ_1^3	3	$(\gamma-3)\xi_1^4 + 3\xi_1^2\xi_2$
$(1,1,0)$	$\xi_1\xi_2$	2	$(\gamma-2)\xi_1^2\xi_2 + \xi_2^2 + \xi_1\xi_3$
$(0,0,1)$	ξ_3	1	$(\gamma-1)\xi_1\xi_3 + \xi_4$

Tabelle 2.1: Auflistung aller Verschiebungspolynome für $k = 3$.

Beispiel 2.2.28 Wir schließen an Beispiel 1.3.6 an und bestimmen alle Verschiebungspolynome für $k = 5$. Diese sind in Tabelle 2.2 angegeben.

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}$	$\lvert\boldsymbol{k}\rvert$	$T_{\boldsymbol{k}}$
$(5,0,0,0,0)$	ξ_1^5	5	$(\gamma-5)\xi_1^6 + 5\xi_1^4\xi_2$
$(3,1,0,0,0)$	$\xi_1^3\xi_2$	4	$(\gamma-4)\xi_1^4\xi_2 + 3\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^3\xi_3$
$(2,0,1,0,0)$	$\xi_1^2\xi_3$	3	$(\gamma-3)\xi_1^3\xi_3 + 2\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_1^2\xi_4$
$(1,2,0,0,0)$	$\xi_1\xi_2^2$	3	$(\gamma-3)\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^3 + 2\xi_1\xi_2\xi_3$
$(1,0,0,1,0)$	$\xi_1\xi_4$	2	$(\gamma-2)\xi_1^2\xi_4 + \xi_2\xi_4 + \xi_1\xi_5$
$(0,1,1,0,0)$	$\xi_2\xi_3$	2	$(\gamma-2)\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_3^2 + \xi_2\xi_4$
$(0,0,0,0,1)$	ξ_5	1	$(\gamma-1)\xi_1\xi_5 + \xi_6$

Tabelle 2.2: Auflistung aller Verschiebungspolynome für $k = 5$.

Wir wollen hier explizit nachrechnen, ob die Verschiebungspolynome linear unabhängig sind. Hierfür schreiben wir eine Linearkombination der Nullfunktion an. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit nummerieren wir die Multiindizes $\boldsymbol{k}$. Es folgt:

$$\begin{aligned}0 = c_1\big((\gamma-5)\xi_1^6 + 5\xi_1^4\xi_2\big) + c_2\big((\gamma-4)\xi_1^4\xi_2 + 3\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^3\xi_3\big)\\ + c_3\big((\gamma-3)\xi_1^3\xi_3 + 2\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_1^2\xi_4\big) + c_4\big((\gamma-3)\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^3 + 2\xi_1\xi_2\xi_3\big)\\ + c_5\big((\gamma-2)\xi_1^2\xi_4 + \xi_2\xi_4 + \xi_1\xi_5\big) + c_6\big((\gamma-2)\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_3^2 + \xi_2\xi_4\big)\\ + c_7\big((\gamma-1)\xi_1\xi_5 + \xi_6\big).\end{aligned}$$

1. Schritt: Sei $m = 5$. Wir schreiben die Linearkombination als Polynom in ξ_{5+1} an. Da der Koeffizient vor ξ_6 verschwinden muss, folgt bereits $c_7 = 0$.

2. Schritt: Sei $m = 4$. Wir fassen die Linearkombination als Polynom in ξ_{4+1} auf. Da alle Koeffizienten bzgl. den einzelnen Potenzen von ξ_5 verschwinden müssen, folgt:

$$c_5\xi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_5 = 0.$$

3. Schritt: Sei $m = 3$. Der Koeffizient vor ξ_{3+1} muss trivial sein. Wir können folgern:

$$c_3\xi_1^2 + c_6\xi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 0 \wedge c_6 = 0.$$

Obige Implikation gilt, weil die Monome ξ_2 und ξ_1^2 linear unabhängig sind.

4. Schritt: Sei $m = 2$. Wir sortierten das verbleibende Polynom bzgl. ξ_{2+1}. Da der Koeffizient trivial sein muss, folgt:

$$c_2\xi_1^3 + c_4 2\xi_1\xi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0 \wedge c_4 = 0.$$

Obige Implikation gilt, auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Monome ξ_1^3 und $\xi_1\xi_2$.

5. Schritt: Sei $m = 1$. Wir sortieren das verbleibende Polynom bezüglich ξ_{1+1}. Analog zu den vorherigen Schritten muss der entsprechende Koeffizient trivial sein. Es folgt:

$$c_1 5\xi_1^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0.$$

Zusammenfassend können wir $c_1 = \ldots = c_7 = 0$ schließen. Damit ist für den Fall $k = 5$ nachgewiesen, dass die Verschiebungspolynome linear unabhängig sind. ⬠

Definition 2.2.29 Sei $\gamma > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist der Operator δ_γ durch

$$\delta_\gamma := \begin{cases} \mathcal{P}_k \to \delta_\gamma \mathcal{P}_k \\ G(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}} \mapsto \delta_\gamma G(\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) := \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} \end{cases}$$

definiert.

Lemma 2.2.30 Sei $\gamma > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

i) Der Operator δ_γ ist bijektiv und linear.
ii) Es gilt die Inklusion $\delta_\gamma P_k \subseteq P_{k+1}$.

iii) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Menge, $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ mit $u > 0$ auf $\overline{\Omega}$ und $G \in \mathcal{P}_k$ ein Polynom. Dann gilt:

$$\big(u^\gamma G(\boldsymbol{\xi}(u))\big)_x = u^\gamma \delta_\gamma G(\boldsymbol{\xi}(u)).$$

iv) Für $m \in \mathbb{N}$ mit $k \geq m$ folgt:

$$P \in \mathcal{Q}_{k,m} \Rightarrow \delta_\gamma P \in \mathcal{Q}_{k+1,m+1}.$$

Beweis:

i) Seien G und H Polynome aus dem Raum $\mathcal{P}_k$ und sei λ eine beliebige reelle Zahl. Wir stellen G und H als Linearkombination bzgl. Elementen aus $\mathcal{B}_k$ dar:

$$G(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}} \quad \text{und} \quad H(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} \tilde{c}_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}.$$

Unmittelbar aus der Definition von δ_γ folgt:

$$\delta_\gamma G + \lambda \delta_\gamma H = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} + \lambda \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} \tilde{c}_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} (c_{\boldsymbol{k}} + \lambda \tilde{c}_{\boldsymbol{k}}) T_{\boldsymbol{k}} = \delta_\gamma (G + \lambda H).$$

Wir können daher auf die Linearität von δ_γ schließen. Aus Lemma 2.2.25 folgt, dass die Verschiebungspolynome eine Basis von $\delta_\gamma \mathcal{P}_k$ bilden. Dies impliziert, dass δ_γ ein injektiver Operator ist. Aus $\dim \mathcal{P}_k = \dim \delta_\gamma \mathcal{P}_k$ und der Injektivität folgt die Surjektivität und somit können wir auf die Bijektivität schließen.

ii) Da nach i) der Operator δ_γ linear ist, genügt es zu zeigen, dass

$$T_{\boldsymbol{k}} \in \mathcal{P}_{k+1} \quad \forall \boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$$

gilt. Das Verschiebungspolynom $T_{\boldsymbol{k}}$ ist eine Summe aus Monomen. Wir betrachten die (gewichtete) Summe der Exponenten:

$$\begin{aligned} \xi_1 \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}} \quad &: \quad 1 \cdot 1 + \sum_{j=1}^{k} j \cdot k_j = 1 + k, \\ \frac{\xi_{i+1}}{\xi_i} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}} \, &: \quad (i+1) \cdot 1 - i \cdot 1 + \sum_{j=1}^{k} j \cdot k_j = i + 1 - i + k = 1 + k. \end{aligned}$$

Somit ist $T_{\boldsymbol{k}}$ eine Summe aus Monomen aus dem Raum $\mathcal{P}_{k+1}$ und damit selbst ein Element aus $\mathcal{P}_{k+1}$.

iii) Die Verschiebungspolynome wurden so konstruiert, sodass

$$\big(u^\gamma \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)\big)_x = u^\gamma T_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\xi}(u), \xi_{k+1}(u)) = u^\gamma [\delta_\gamma \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}](\boldsymbol{\xi}(u), \xi_{k+1}(u)) \quad \forall \boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$$

gilt. Nun nützen wir die Linearität von δ_γ aus und erhalten:

$$\begin{aligned} \big(u^\gamma G(\boldsymbol{\xi}(u))\big)_x &= \big(u^\gamma \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)\big)_x = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} \big(u^\gamma c_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)\big)_x = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} u^\gamma [\delta_\gamma \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}](\boldsymbol{\xi}(u), \xi_{k+1}(u)) \\ &= u^\gamma \left[\delta_\gamma \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}\right] \big(\boldsymbol{\xi}(u), \xi_{k+1}(u)\big) = u^\gamma \delta_\gamma G(\boldsymbol{\xi}(u), \xi_{k+1}(u)). \end{aligned}$$

Somit ist iii) bewiesen.

iv) Das Polynom P enthält nur Monome $\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}$, welche die Variablen $\xi_{m+1}, \ldots, \xi_k$ nicht enthalten. Dies bedeutet:

$$k_i = 0 \quad \text{für} \quad i = m+1, \ldots, k.$$

Aus der Definition von $T_{\boldsymbol{k}}$ folgt, dass die entsprechenden Verschiebungspolynome nicht von $\xi_{m+2}, \ldots, \xi_{k+1}$ abhängen. Da der Operator δ_γ als Linearkombination der Verschiebungspolynome definiert ist, folgt die gewünschte Aussage. □

Anmerkung 2.2.31 Lemma 2.2.30 bleibt gültig, wenn wir nur $u \in C^{n+1}(\overline{\Omega})$ mit $n < k$ voraussetzen, jedoch müssen wir dann fordern, dass $G \in \mathcal{Q}_{k,n}$ gilt. ◯

Der nächste Satz entspricht dem, was wir als eine *systematische partielle Integration* bezeichnen würden.

Satz 2.2.32 (*Systematische partielle Integration für α-Funktionale*) Sei u eine klassische Lösung unseres Grundproblems (Definition 2.1.2) mit $u > 0$ in $\overline{\Omega_T}$. Darüber hinaus sei H_α ein α-Funktional mit α-Produktion P_α. Dann gilt:

$$P_\alpha[u](t) = \int_\Omega u^{\alpha+\beta} S_0(\boldsymbol{\xi}(u))\ dx = \int_\Omega u^{\alpha+\beta}\Big(S_0(\boldsymbol{\xi}(u)) + \delta_{\alpha+\beta} G(\boldsymbol{\xi}(u), \xi_{k+1}(u))\Big)\ dx \quad \forall G \in \mathcal{P}_k.$$

Beweis: Das erste Gleichheitszeichen folgt aus Lemma 2.2.19. Somit genügt es zu zeigen, dass

$$\int_\Omega u^{\alpha+\beta} \delta_{\alpha+\beta} G(\boldsymbol{\xi}(u), \xi_{k+1}(u))\ dx = 0 \quad \forall G \in \mathcal{P}_k$$

gilt. Sei $G \in \mathcal{P}_k$ beliebig und fest. Mit Lemma 2.1.15 und Lemma 2.2.30 folgt:

$$0 = u^{\alpha+\beta} G(\boldsymbol{\xi}(u))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_\Omega \left(u^{\alpha+\beta} G(\boldsymbol{\xi}(u))\right)_x\ dx = \int_\Omega u^{\alpha+\beta} \delta_{\alpha+\beta} G(\boldsymbol{\xi}(u), \xi_{k+1}(u))\ dx.$$

Da G beliebig war, ist die gewünschte Behauptung bewiesen. □

Anmerkung 2.2.33 Satz 2.2.32 bleibt gültig, wenn wir nur $u \geq 0$ fordern, jedoch müssen wir dann voraussetzen, dass die entsprechenden Integranden auf $\overline{\Omega_T}$ definiert sind. Dies ist der Fall, wenn α und β hinreichend groß gewählt werden. ◯

2.2.3 Ein Entscheidungsproblem

In diesem Abschnitt möchten wir nun eine Variante präsentieren wie entschieden werden kann, ob für eine vorgegebenes $\alpha > 0$ das entsprechende α-Funktional sogar ein Lyapunov-Funktional ist. Die Grundlage aller weiteren Überlegungen bildet Satz 2.2.32. Uns stellt sich die Frage, ob ein Polynom $G \in \mathcal{P}_k$ existiert mit:

$$S_0(\boldsymbol{\xi}) + \delta_{\alpha+\beta} G(\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) \geq 0 \quad \forall (\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}. \tag{2.8}$$

Insbesondere würde dies

$$P_\alpha[u](t) = \int_\Omega \underbrace{u^{\alpha+\beta}}_{\geq 0} \Big(\underbrace{S_0(\boldsymbol{\xi}(u)) + \delta_{\alpha+\beta} G(\boldsymbol{\xi}(u), \xi_{k+1}(u))}_{\geq 0} \Big) \, dx \geq 0$$

implizieren. Somit wäre $H_\alpha[u]$ monoton fallend in der Zeit t und wir könnten schließen, dass wir ein Lyapunov-Funktional gefunden hätten. Wir formulieren Ungleichung (2.8) um, indem wir das Polynom G als Linearkombination von Elementen aus $\mathcal{B}_k$ darstellen. Wir erhalten die zu (2.8) äquivalente Aussage:

$$\exists (c_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} \subseteq \mathbb{R} : \forall (\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \Rightarrow S_0 + \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} \geq 0. \tag{2.9}$$

Probleme der Form (2.9) werden auch *polynomielle Entscheidungsprobleme* genannt. Es ist hier hervorzuheben, dass die Konstanten $c_{\boldsymbol{k}}$, mit $\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$ nicht von Interesse sind. Unser Ziel ist es, Bedingungen für α und β zu finden, sodass die entsprechenden Konstanten existieren. In Kapitel 3 werden wir Techniken kennenlernen wie solche Probleme algorithmisch gelöst werden können.

Im Hinblick auf die Lösbarkeit von (2.9) ist es sinnvoll den Fall, dass k eine gerade natürliche Zahl ist, genauer zu betrachten. Prinzipiell haben wir nur für die Randbedingung (RB2) benötigt, dass k ungerade ist. Diese Einschränkung war nötig damit die Randterme bei allen partiellen Integrationen verschwinden (vgl. Lemma 2.1.15 und Anmerkung 2.1.16). Problematisch ist jedoch die Tatsache, dass $\delta_\gamma \mathcal{P}_k \subseteq \mathcal{P}_{k+1}$ gilt. Für ein gerades $k \in \mathbb{N}$ würde dies bedeuten, dass $k+1$ ungerade ist. Wir können somit schließen, dass für alle $\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_{k+1}$ gilt:

$$\exists j(\boldsymbol{l}) \in \{1, \ldots, k+1\} : j(\boldsymbol{l}) \bmod 2 = 1 \quad \text{und} \quad l_{j(\boldsymbol{l})} \neq 0,$$

(vgl. Beweis von Lemma 2.1.15). Dies bedeutet, dass alle Polynome aus dem Raum $\mathcal{P}_{k+1}$ nur aus Monomen besteht, welche immer mindestens einen ungeraden Exponenten enthalten. Insbesondere gilt dies für das Polynom

$$S_0 + \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} \in \mathcal{P}_{k+1}.$$

Dies macht es schwierig, jedoch nicht unmöglich, die Konstanten so zu wählen, sodass (2.9) erfüllt ist. Die Schwierigkeit besteht für ein gerades k in der Tatsache, dass viele Monome „kompensiert“ werden müssen. Dies bedeutet, dass wir viele Zwangsbedingungen zu erfüllen haben damit wir das Vorzeichen von $S_0 + \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} T_k$ eindeutig bestimmen können. In Beispiel 2.2.38 ist dies illustriert. Selbst für den Fall, dass k eine ungerade Zahl ist, ist das Problem (2.9) nicht immer lösbar. Dies führt zu folgender Definition:

Definition 2.2.34 (*Normalform*) Sei $k \in \mathbb{N}$. Ein Polynom $G \in \mathcal{P}_k$ besitzt *Normalform*, wenn für jede Variable ξ_i, $i = 1, \ldots, k$ der höchste Exponent in G gerade ist (vgl. [15, Definition 8]).

Lemma 2.2.35 Sei $k \in \mathbb{N}$. Für jedes $G \in \mathcal{P}_k$ in Normalform gilt:

$$G \in \mathcal{Q}_{k,\lfloor k/2 \rfloor}.$$

Beweis: Wir betrachten ein $j \geq \lfloor k/2 \rfloor + 1$. Dann gilt:

$$j \cdot 2 \geq (\lfloor k/2 \rfloor + 1) \cdot 2 \geq k - 1 + 2 = k + 1.$$

Somit können wir schließen, dass für jeden Multiindex $\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$

$$k_j \leq 1 \quad \forall j \geq \lfloor k/2 \rfloor + 1$$

gelten muss. Wir schließen, dass für $\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$ die Variablen $\xi_{\lfloor k/2 \rfloor + 1}, \ldots, \xi_k$ höchstens mit Exponent 1 in $\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}$ enthalten sein können. Da G sich als Linearkombination der $\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}$ darstellen lässt folgt, dass G von $\xi_{\lfloor k/2 \rfloor + 1}, \ldots, \xi_k$ unabhängig sein muss. □

Lemma 2.2.36 Sei $k \in \mathbb{N}$. Besitzt das Polynom $G \in P_k$ keine Normalform, so kann

$$G(\boldsymbol{\xi}) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k$$

nie erfüllt sein.

Beweis: Da G keine Normalform besitzt folgt, dass ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ existiert, sodass die höchste nichtverschwindende Potenz von ξ_j ungerade ist. Wir fassen G als ein Polynom in der Variable ξ_j auf:

$$G(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=0}^{m} \xi_j^i G_i(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_k),$$

wobei die $G_i,\ i = 0, \ldots, k$ Polynome unabhängig von ξ_j sind und m der höchste nichtverschwindende Exponent bezüglich ξ_j ist. Wir definieren:

$$g_i := G_i(\eta_1, \ldots, \eta_{j-1}, \eta_{j+1}, \ldots, \eta_k),$$

wobei $(\eta_1, \ldots, \eta_{j-1}, \eta_{j+1}, \ldots, \eta_k) \in \mathbb{R}^{k-1}$ so gewählt wurde, sodass $g_m \neq 0$ gilt. Dies ist möglich, weil m der höchste nicht verschwindende Exponent von ξ_j ist. Es folgt:

$$\lim_{\xi_j \to \infty} G(\eta_1, \ldots, \eta_{j-1}, \xi_j, \eta_{j+1}, \ldots, \eta_k) = \lim_{\xi_j \to \infty} \sum_{i=0}^{m} g_i \xi_j^i = \operatorname{sgn}(g_m) \cdot \infty,$$

$$\lim_{\xi_j \to -\infty} G(\eta_1, \ldots, \eta_{j-1}, \xi_j, \eta_{j+1}, \ldots, \eta_k) = \lim_{\xi_j \to -\infty} \sum_{i=0}^{m} g_i \xi_j^i = -\operatorname{sgn}(g_m) \cdot \infty.$$

Wählen wir nun ξ_j hinreichend groß bzw. hinreichend klein, so nimmt die Funktion

$$\xi_j \mapsto G(\eta_1, \ldots, \eta_{j-1}, \xi_j, \eta_{j+1}, \ldots, \eta_k)$$

unterschiedliche Vorzeichen an. Dies impliziert bereits, dass $G(\boldsymbol{\xi}) \geq 0$ nicht erfüllt sein kann. $\square$

Anmerkung 2.2.37 Lemma 2.2.36 liefert eine notwendige Bedingung, welche wir nützen können, um Problem (2.9) zu lösen. Des Weiteren können wir Lemma 2.2.35 nützen, um die Anzahl der Variablen zu reduzieren. Wir müssen die Konstanten so wählen, dass das Polynom

$$S_0 + \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}}$$

unabhängig von den Variablen $\xi_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor + 1}, \ldots, \xi_{k+1}$ ist. Stellen wir obiges Polynom bezüglich der Basis $\mathcal{B}_{k+1}$ dar, so können wir sofort schließen, dass all jene Koeffizienten, die zu von $\xi_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor + 1}, \ldots, \xi_{k+1}$ abhängigen Monomen gehören, trivial sein müssen. $\circ$

Beispiel 2.2.38 Wir betrachten den Fall $k = 4$. In Tabelle 2.3 sind alle zulässigen Multiindizes und die entsprechenden Verschiebungspolynome aufgelistet.

i	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}$	$\lvert\boldsymbol{k}\rvert$	$T_{\boldsymbol{k}}$
1	$(4,0,0,0)$	ξ_1^5	4	$(\gamma-4)\xi_1^5 + 4\xi_1^3\xi_2$
2	$(2,1,0,0)$	$\xi_1^2\xi_2$	3	$(\gamma-3)\xi_1^3\xi_2 + 2\xi_1\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3$
3	$(1,0,1,0)$	$\xi_1\xi_3$	2	$(\gamma-2)\xi_1^2\xi_3 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_4$
4	$(0,2,0,0)$	ξ_2^2	2	$(\gamma-2)\xi_1\xi_2^2 + 2\xi_2\xi_3$
5	$(0,0,0,1)$	ξ_4	1	$(\gamma-1)\xi_1\xi_4 + \xi_5$

Tabelle 2.3: Auflistung aller Verschiebungspolynome für $k = 4$. Diese werden mit dem Index i nummeriert.

Wir werden für $c \neq 0$ die Fälle

$$P_1(\boldsymbol{\xi}) := c\xi_4 \quad \text{und} \quad P_2(\boldsymbol{\xi}) := c\xi_4 + \xi_1^4$$

betrachten. Zur Erhöhung der Übersicht nummerieren wir alle Verschiebungspolynome und die entsprechenden Konstanten und setzten $\gamma := \alpha + \beta$.

i) Für P_1 erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 \leq S_0 + c_1 T_1 + \ldots + c_5 T_5 = c\xi_1\xi_4 & \\ + c_1\big((\gamma-4)\xi_1^5 + 4\xi_1^3\xi_2\big) & \\ + c_2\big((\gamma-3)\xi_1^3\xi_2 + 2\xi_1\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3\big) & \\ + c_3\big((\gamma-2)\xi_1^2\xi_3 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_4\big) & \\ + c_4\big((\gamma-2)\xi_1\xi_2^2 + 2\xi_2\xi_3\big) & \\ + c_5\big((\gamma-1)\xi_1\xi_4 + \xi_5\big). & \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}0 \le\ &(\gamma-4)c_1\xi_1^5 + (4c_1 + (\gamma-3)c_2)\xi_1^3\xi_2 + (c_2 + (\gamma-2)c_3)\xi_1^2\xi_3 + (2c_2 + (\gamma-2)c_4)\xi_1\xi_2^2 \\ &+ (c + c_3 + (\gamma-1)c_5)\xi_1\xi_4 + (c_3 + 2c_4)\xi_2\xi_3 + c_5\xi_5.\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 2.2.36 und Lemma 2.2.35 folgt, dass die Koeffizienten bzgl. $\xi_1^2\xi_3$, $\xi_1\xi_4$, $\xi_2\xi_3$ und ξ_5 trivial sein müssen (vgl. Anmerkung 2.2.37). Wir erhalten folgendes Gleichungssystem:

$$c_2 + (\gamma-2)c_3 = 0, \quad c + c_3 + (\gamma-1)c_5 = 0, \quad c_3 + 2c_4 = 0 \quad \text{und} \quad c_5 = 0.$$

Dies impliziert:

$$c_2 = (\gamma-2)c, \quad c_3 = -c, \quad c_4 = \frac{c}{2} \quad \text{und} \quad c_5 = 0.$$

Die Variable ξ_1 ist im verbleibenden Polynom nur mit ungeraden Exponenten vertreten. Somit müssen auch die restlichen Koeffizienten trivial sein und wir erhalten die Gleichungen

$$(\gamma-4)c_1 = 0, \quad 2(\gamma-2)c + (\gamma-2)\frac{c}{2} = 0 \quad \text{und} \quad 4c_1 + (\gamma-3)(\gamma-2)c = 0.$$

Die einzige widerspruchsfrei Lösung ist durch

$$c_1 = 0 \quad \text{und} \quad \gamma = 2$$

gegeben. Wir sehen, dass alleine durch notwendige Bedingungen alle Konstanten und γ eindeutig bestimmt sind. Wählen wir $c_1, \ldots, c_5$ wie oben angegeben so folgt:

$$S_0 + c_1T_1 + \ldots + c_5T_5 \equiv 0, \quad \text{für} \quad \alpha + \beta = 2.$$

ii) Für P_2 erhalten wir:

$$\begin{aligned}0 \le S_0 + c_1T_1 + \ldots + c_5T_5 = c\xi_1\xi_4 + \xi_1^5 &\\ + c_1\big((\gamma-4)\xi_1^5 + 4\xi_1^3\xi_2\big)&\\ + c_2\big((\gamma-3)\xi_1^3\xi_2 + 2\xi_1\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3\big)&\\ + c_3\big((\gamma-2)\xi_1^2\xi_3 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_4\big)&\\ + c_4\big((\gamma-2)\xi_1\xi_2^2 + 2\xi_2\xi_3\big)&\\ + c_5\big((\gamma-1)\xi_1\xi_4 + \xi_5\big).&\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}0 \le\ &((\gamma-4)c_1 + 1)\xi_1^5 + (4c_1 + (\gamma-3)c_2)\xi_1^3\xi_2 + (c_2 + (\gamma-2)c_3)\xi_1^2\xi_3 + (2c_2 + (\gamma-2)c_4)\xi_1\xi_2^2 \\ &+ (c + c_3 + (\gamma-1)c_5)\xi_1\xi_4 + (c_3 + 2c_4)\xi_2\xi_3 + c_5\xi_5.\end{aligned}$$

Analog zu i) können wir in einem ersten Schritt

$$c_2 = (\gamma-2)c, \quad c_3 = -c, \qquad c_4 = \frac{c}{2} \quad \text{und} \quad c_5 = 0$$

schließen. Im verbleibenden Polynom

$$((\gamma-4)c_1+1)\xi_1^5+(4c_1+(\gamma-3)c_2)\xi_1^3\xi_2+(2c_2+(\gamma-2)c_4)\xi_1\xi_2^2.$$

ist ξ_1 nur mit ungeraden Exponenten vertreten. Wir können somit analog zu i) schließen, dass alle Koeffizienten trivial sein müssen. Dies würde jedoch wieder $\gamma = 2$ und $c_1 = 0$ implizieren. Wir erhalten einen Widerspruch zu:

$$(\gamma-4)c_1+1=0.$$

Somit können wir schließen, dass für P_2 keine Konstanten mit

$$S_0+c_1T_1+\ldots c_5T_5\geq 0 \quad \forall(\boldsymbol{\xi},\xi_5)\in\mathbb{R}^5$$

existieren. ⬠

Aus Beispiel 2.2.38 erhalten wir:

Korollar 2.2.39 Sei u eine beliebige klassische Lösung unseres Grundproblems für $k = 4, c \neq 0$ und $P(\boldsymbol{\xi}) = c\xi_4 \in \mathcal{P}_4$ mit $u > 0$ in $\overline{\Omega_T}$. Dann gilt für $\beta \in (0,2)$ und $\alpha := 2-\beta$:

$$P_\alpha[u](t)=P_{2-\beta}[u](t)=0 \quad \forall t\in[0,T].$$

Dies bedeutet, dass $H_{2-\beta}$ ein Lyapunov-Funktional ist.

Beweis: Aus Beispiel 2.2.38 folgt, dass ein Polynom $\delta_2 G \in \delta_2\mathcal{P}_5$ existiert mit:

$$S_0(\boldsymbol{\xi})+\delta_2G(\boldsymbol{\xi},\xi_5)=0 \quad \forall(\boldsymbol{\xi},\xi_5)\in\mathbb{R}^5.$$

Wir wenden nun Satz 2.2.32 an und erhalten

$$P_\alpha[u](t)=\int_\Omega u^{\alpha+\beta}S_0(\boldsymbol{\xi}(u))\,dx=\int_\Omega u^{\alpha+\beta}\underbrace{S_0(\boldsymbol{\xi}(u))+\delta_2G(\boldsymbol{\xi}(u),\boldsymbol{\xi}_5(u))}_{=0}\,dx=0$$

für jede klassische Lösung u. Somit ist das entsprechende α-Funktional tatsächlich ein Lyapunov-Funktional. □

2.2.4 Konvexe Sobolev-Ungleichungen

Oftmals möchten wir eine stärker Abschätzung nach unten für die α-Produktion erhalten, z.B. zur Berechnung von Konvergenzraten (vgl. Abschnitt 5.2.2). Wir wollen eine Abschätzung der Gestalt:

$$P_\alpha[u](t)\geq\kappa Q[u](t), \quad \kappa>0, \tag{2.10}$$

wobei Q ein Funktional der Form

$$Q[u](t):=\int_\Omega u^{\alpha+\beta}F(\boldsymbol{\xi}(u))\,dx, \tag{2.11}$$

ist und $F \in \mathcal{P}_{k+1}$ gelten soll. Das Polynom F ist so gewählt, sodass

$$F(\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) \geq 0 \quad \forall (\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$$

erfüllt ist. Somit muss das Polynom F zwingend Normalform besitzen und daher von den Variablen $\xi_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor + 1}, \ldots, \xi_{k+1}$ unabhängig sein. Insbesondere impliziert diese Forderung, dass der in Q enthaltene Ableitungsgrad kleiner als k ist. Aus diesem Grund werden auch Abschätzungen der Form (2.10) als *konvexe Sobolev-Ungleichung* bezeichnet (vgl. [14, Definition 1.3]).

Folgendes Korollar liefert eine Variante wie F gewählt werden kann:

Korollar 2.2.40 Sei $k \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{P}_{(k+1)/2}$:

$$f^2 \in \mathcal{Q}_{k+1,(k+1)/2}.$$

Beweis: Die Aussage ist ein Spezialfall von Lemma 1.3.11. □

Beispiel 2.2.41 Sei $k = 3$. Eine mögliche Wahl von Q wäre durch

$$Q[u](t) := \int_\Omega \left((u^{(\alpha+\beta)/2})_{xx} \right)^2 \, dx.$$

gegeben (vgl. [14, Abschnitt 3.2]). Tatsächlich besitzt der Integrand die Form $u^{\alpha+\beta} f(\boldsymbol{\xi}(u))^2$, wobei $f \in \mathcal{P}_2$ gilt. Wir leiten ab und erhalten:

$$(u^{(\alpha+\beta)/2})_x = \frac{\alpha+\beta}{2} u^{(\alpha+\beta-2)/2} u_x.$$

Die zweite Ableitung ergibt sich somit zu:

$$\begin{aligned}
(u^{(\alpha+\beta)/2})_{xx} &= \frac{\alpha+\beta}{2} \frac{\alpha+\beta-2}{2} u^{(\alpha+\beta-4)/2} u_x^2 + \frac{\alpha+\beta}{2} u^{(\alpha+\beta-2)/2} u_{xx} \\
&= u^{(\alpha+\beta)/2} \frac{\alpha+\beta}{2} \left(\frac{\alpha+\beta-2}{2} \left(\frac{u_x}{u} \right)^2 + \frac{u_{xx}}{u} \right).
\end{aligned}$$

Quadrieren wir obige Gleichung, so erhalten wir:

$$(u^{(\alpha+\beta)/2})_{xx}^2 = u^{\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} \left(\frac{(\alpha+\beta-2)^2}{4} \left(\frac{u_x}{u} \right)^4 + (\alpha+\beta-2) \left(\frac{u_x}{u} \right)^2 \frac{u_{xx}}{u} + \left(\frac{u_{xx}}{u} \right)^2 \right).$$

Somit können wir

$$\begin{aligned}
f(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\alpha+\beta}{2} \left(\frac{\alpha+\beta-2}{2} \xi_1^2 + \xi_2 \right) \quad \text{und} \\
F(\xi_1, \xi_2) &= \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} \left(\frac{(\alpha+\beta-2)^2}{4} \xi_1^4 + (\alpha+\beta-2) \xi_1^2 \xi_2 + \xi_2^2 \right)
\end{aligned}$$

schließen. ⬠

Mit Hilfe von Satz 2.2.32 erhalten wir für alle $G \in \mathcal{P}_k$:

$$(2.10) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \int_\Omega u^{\alpha+\beta}\Big(S_0(\boldsymbol{\xi}(u)) - \kappa F(\boldsymbol{\xi}(u)) + \delta_{\alpha+\beta} G(\boldsymbol{\xi}(u), \xi_{k+1}(u))\Big)\, dx.$$

Analog zu Abschnitt 2.2.3 erhalten wir folgendes modifiziertes polynomielles Entscheidungsproblem:

$$\exists (c_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{I}_k} \subseteq \mathbb{R}, \exists \kappa \in \mathbb{R}^+ : \forall (\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \Rightarrow S_0 - \kappa F + \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} \geq 0. \tag{2.12}$$

Die Lösbarkeit von Problem (2.9) impliziert im Allgemeinen nicht die Lösbarkeit von (2.12). Dies ist in Beispiel 2.2.42 illustriert.

Beispiel 2.2.42 Das hier vorgestellte Beispiel findet sich auch in [14, Abschnitt 3.2]. Wir betrachten $k = 1$ und setzen $\xi := \xi_1$. Sei $F(\xi) = \xi^2$.

Wir betrachten das Polynom $S_0(\xi) := (\xi - 1)^2$ und suchen ein $\kappa > 0$ mit:

$$0 \leq S_0(\xi) - \kappa F(\xi) = (\xi - 1)^2 - \kappa\xi^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Dies muss insbesondere für $\xi = 1$ gelten. Wir folgern:

$$0 \leq 0 - \kappa \quad \Leftrightarrow \quad 0 > \kappa.$$

Wir erhalten somit einen Widerspruch zu $\kappa > 0$. Interpretieren wir κF als eine beliebig kleine Störung von S_0, so ist die Nichtnegativität für jedes $\kappa > 0$ verletzt. ⬠

2.2.5 Zusammenfassung

Wir wollen nun zusammenfassen wie mit den in diesem Kapitel vorgestellten Methoden bestimmt werden kann, ob ein α-Funktional ein Lyapunov-Funktional für unser Grundproblem (Definition 2.1.2) ist. Der Algorithmus besteht aus vier Schritten, wobei der letzte Schritt optional ist:

1. Schritt: Bestimmung der α-Produktion. Die α-Produktion ergibt sich zu:

$$P_\alpha[u](t) := \int_\Omega u^{\alpha+\beta} S_0(\boldsymbol{\xi}(u))\, dx,$$

wobei $S_0(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 P(\boldsymbol{\xi})$ gilt.

2. Schritt: Bestimmung der Verschiebungspolynome $T_{\boldsymbol{k}},\ \boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$. Die Verschiebungspolynome ergeben sich zu:

$$T_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) = (\alpha + \beta - |\boldsymbol{k}|)\xi_1 \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}}{\partial \xi_i} \xi_{i+1}.$$

3. Schritt: Lösen des polynomiellen Entscheidungsproblems. Mit Hilfe von Satz 2.2.32 können wir nun die α-Produktion anschreiben als:

$$P_\alpha[u](t) = \int_\Omega u^{\alpha+\beta}\Big(S_0(\boldsymbol{\xi}(u)) + \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\xi}(u), \xi_{k+1}(u))\Big)\, dx.$$

Wir wollen die Konstanten $c_{\boldsymbol{k}},\ \boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$ so wählen, dass das Vorzeichen vom Integranden eindeutig bestimmt ist und das Integral nichtnegativ ist. Dies führt zu folgendem polynomiellen Entscheidungsproblem:

$$\exists (c_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{I}_k} \subseteq \mathbb{R} : \forall(\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \Rightarrow S_0 + \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} \geq 0.$$

Dieses Problem kann algorithmisch gelöst werden (vgl. Kapitel 3). Mit Hilfe von Lemma 2.2.36 und Lemma 2.2.35 kann das polynomielle Entscheidungsproblem vorher vereinfacht werden (vgl. Anmerkung 2.2.37).

4. Schritt: Lösen des modifizierten polynomiellen Entscheidungsproblems. Sei ein Funktional der Form

$$Q[u](t) := \int_\Omega u^{\alpha+\beta} F(\boldsymbol{\xi}(u), \xi_{k+1}(u))\, dx, \tag{2.13}$$

gegeben, wobei $F \in \mathcal{P}_{k+1}$ ein nichtnegatives Polynom ist. Wir suche eine Abschätzung der Form:

$$P_\alpha[u](t) - \kappa Q[u](t) \geq 0.$$

Dies führt zu dem modifizierten Entscheidungsproblem:

$$\exists (c_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{I}_k} \subseteq \mathbb{R}, \exists \kappa \in \mathbb{R}^+ : \forall(\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \Rightarrow S_0 - \kappa F + \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} \geq 0,$$

welches mit den gleichen Methoden wie im *3. Schritt* gelöst werden kann.

Anmerkung 2.2.43 Es stellt sich die Frage, ob der obige Algorithmus alle $\alpha > 0$ liefert, für die die entsprechenden α-Funktionale gleichzeitig Lyapunov-Funktionale sind. Der Algorithmus ist so konstruiert, dass der Integrand $u^{\alpha+\beta}\big(S_0+\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{I}_k} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}}\big)$ nichtnegativ ist. Dies ist nur eine hinreichende, jedoch keine notwendige Bedingung. Theoretisch wäre es somit möglich, dass die α-Produktion nichtnegativ ist, auch wenn der Integrand negative Werte annimmt. Für den Spezialfall einer Dünnflimgleichung 4. Ordnung lässt sich einfach zeigen, dass mittels der hier vorgestellten Methode alle α bestimmt werden können (vgl. Kapitel 5). ○

Anmerkung 2.2.44 Es wurde schon erwähnt, dass sich die entsprechenden Entscheidungsprobleme algorithmisch lösen lassen. In Kapitel 4 werden wir näher darauf eingehen wie für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathcal{I}_k$ algorithmisch konstruiert werden kann. Dies liefert auch eine Antwort auf die Frage wie groß die Anzahl der Multiindizes in der Menge I_k ist. ○

2.3 α-Funktionale höherer Ordnung

Die in Abschnitt 2.2 vorgestellte Methode kann direkt auf Funktionale erweitert werden, welche auch Ableitungen der Funktion u enthalten. Wir gehen wie in [15, Abschnitt 5.1.] vor.

Definition 2.3.45 (*α-Funktional der Ordnung m*) Es gelten die Grundvoraussetzungen (Definition 2.1.1). Sei $m \in \mathbb{N}_\times, \alpha > 0$ und $s \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap C(\mathbb{R})$ mit:

$$s'(u) = u^{\alpha/2-1} \quad \text{für} \quad u \neq 0.$$

Wir definieren:

$$\text{dom } H_\alpha^m := \{u \in C(\overline{\Omega_T}) : u \neq 0 \text{ in } \overline{\Omega_T}\}.$$

Ein Funktional $H_\alpha^m : \text{dom } H_\alpha^m \to C([0,T])$ wird als *α-Funktional der Ordnung m* bezeichnet, wenn es die Form

$$H_\alpha^m[u](t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\partial_x^m s(u(t,x))\right)^2 \, dx$$

besitzt (vgl. [15, Abschnitt 5.1]).

Anmerkung 2.3.46 Es ist oftmals üblich ein α-Funktional der Ordnung m als ein *Energiefunktional* zu bezeichnen (vgl. [22, Abschnitt 1.1]). ⬠

Beispiel 2.3.47 Eine mögliche Wahl von $s(u)$ wäre durch

$$s(u) := \frac{2}{\alpha} u^{\alpha/2}$$

gegeben. Speziell für $\alpha = 1$ und $m = 1$ erhalten wir:

$$H_1^1[u](t) = \int_\Omega (\partial_x \sqrt{u})^2 \, dx.$$

Das Funktional H_1^1 wird auch *Fischer-Information* genannt. Das hier angegebene Beispiel findet sich mit weiterführenden Referenzen in [14, Beispiel 1.1]. ⬠

Definition 2.3.48 (*α-Produktion der Ordnung m*) Es gelten die Grundvoraussetzungen (Definition 2.1.1). Sei H_α ein α-Funktional. Wir definieren:

$$\text{dom } P_\alpha^m := \{u \in C^1(\overline{\Omega_T}) : u \neq 0 \text{ in } \overline{\Omega_T}\}.$$

Das Funktional $P_\alpha^m : \text{dom } P_\alpha^m \to C([0,T])$ bezeichnen wir als *α-Produktion* von H_α^m, wenn gilt:

$$P_\alpha^m[u](t) := -\frac{d}{dt} H_\alpha^m[u(t,x)].$$

Lemma 2.3.49 Das α-Funktional der Ordnung m und die α-Produktion der Ordnung m bilden tatsächlich in die angegebenen Räume ab. Darüber hinaus gilt für alle $t \in [0,T]$:

$$P_\alpha^m[u](t) = -\int_\Omega \partial_x^m s(u(t,x))\partial_x^m \big(s'(u(t,x))u_t(t,x)\big)\ dx \quad \forall u \in \operatorname{dom} P_\alpha^m.$$

Beweis: Der Beweis wird analog zu den Beweisen von Lemma 2.1.8 und Lemma 2.1.14, mittels majorisierter Konvergenz geführt. Insbesondere sind die Definitionsbereiche so angegeben, dass die Suprema über die entsprechenden Integranden endlich sind. Für die gewünschte Darstellung von P_α^m ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big(\partial_x^m s(u(t,x))\big)^2 &= \partial_x^m s(u(t,x))\big(\partial_x^m s(u(t,x))\big)' \\ &= \partial_x^m s(u(t,x))\partial_x^m\big(s'(u(t,x))u_t(t,x)\big)\end{aligned}$$

zu beachten. □

2.3.1 α-Produktionen höherer Ordnung

Wir wollen nun algorithmisch bestimmen, ob ein α-Funktional der Ordnung m ein Lyapunov-Funktional ist. Im Wesentlichen gehen wir analog zu Abschnitt 2.2 vor. Wir werden uns in diesem Abschnitt auf periodische Randbedingungen (RB1) beschränken.

Sei $u > 0$ eine klassische Lösung unseres Grundproblems mit periodischen Randbedingungen und $2m \leq k$. Wir wenden Lemma 2.3.49 an und integrieren $m+1$-mal partiell:

$$\begin{aligned}P_\alpha^m[u](t) &= -\int_\Omega \partial_x^m s(u)\partial_x^m\big(s'(u)u_t\big)\ dx = (-1)^2\int_\Omega \partial_x^{m+1}s(u)\partial_x^{m-1}\big(s'(u)u_t\big)\ dx \\ &= (-1)^{m+1}\int_\Omega \partial_x^{2m}s(u)s'(u)u_t\ dx = (-1)^{m+1}\int_\Omega \partial_x^{2m}s(u)s'(u)\big(u^{\beta+1}P(\boldsymbol{\xi}(u))\big)_x\ dx \\ &= (-1)^{m+2}\int_\Omega \big(\partial_x^{2m}s(u)s'(u)\big)_x u^{\beta+1}P(\boldsymbol{\xi}(u))\ dx. \qquad (2.14)\end{aligned}$$

Alle Randterme verschwinden auf Grund der periodischen Randbedingungen. Um den Integranden zu bestimmen, müssen wir den Ausdruck

$$\big(\partial_x^{2m}s(u)s'(u)\big)_x$$

auswerten. Die technische Schwierigkeit besteht in der Tatsache die Ableitung $\partial_x^{2m}s(u)$ zu bilden, weil wir hier $2m$-mal die Kettenregel anwenden müssen. Folgendes Lemma liefert uns das nötige Hilfsmittel:

Lemma 2.3.50 (*Formel von Faà di Bruno*) Es gilt:

$$\partial_x^n s(u) = \sum_{\boldsymbol{l}\in\mathcal{I}_n}\binom{n}{\boldsymbol{l}}\ \partial_u^{|\boldsymbol{l}|}s(u)\ \prod_{j=1}^n\Big(\frac{\partial_x^j u}{j!}\Big)^{l_j} \quad \text{mit} \quad \binom{n}{\boldsymbol{l}} := \frac{n!}{l_1!\cdot\ldots\cdot l_n},$$

wobei die Funktionen s und u hinreichend oft differenzierbar sind und der Ausdruck $s(u)$ definiert ist (vgl. [25, Abschnitt 3]).

Für $n \in \mathbb{N}_\times$ können wir induktiv folgern:

$$\partial_u^n s(u) = \partial_u^{n-1} s'(u) = u^{\alpha/2-n} \prod_{j=0}^{n-2} (\frac{\alpha}{2} - 1 - j),$$

wobei zu beachten ist, dass das Produkt über eine leere Indexmenge als 1 definiert ist. Wir erhalten:

$$\partial_x^{2m} s(u) = \sum_{\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_{2m}} \binom{2m}{\boldsymbol{l}} \; u^{\alpha/2-|\boldsymbol{l}|} \prod_{j=0}^{|\boldsymbol{l}|-2} (\frac{\alpha}{2} - 1 - j) \; \prod_{j=1}^{2m} \Big(\frac{\partial_x^j u}{j!}\Big)^{l_j}.$$

Mit Hilfe von

$$u^{-|\boldsymbol{l}|} \prod_{j=1}^{2m} \Big(\frac{\partial_x^j u}{j!}\Big)^{l_j} = \prod_{j=1}^{2m} u^{-l_j} \; \prod_{j=1}^{2m} \Big(\frac{\partial_x^j u}{j!}\Big)^{l_j} = \prod_{j=1}^{2m} \Big(\frac{\partial_x^j u}{u}\Big)^{l_j} (\frac{1}{j!})^{l_j} = \boldsymbol{\xi}_{2m}^{\boldsymbol{l}}(u) \; \prod_{j=1}^{2m} (\frac{1}{j!})^{l_j}$$

können wir $\partial_x^{2m} s(u)$ auch ausdrücken als:

$$\partial_x^{2m} s(u) = \sum_{\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_{2m}} u^{\alpha/2} \; \boldsymbol{\xi}_{2m}^{\boldsymbol{l}}(u) \; \underbrace{\binom{2m}{\boldsymbol{l}} \prod_{j=0}^{|\boldsymbol{l}|-2} (\frac{\alpha}{2} - 1 - j) \; \prod_{j=1}^{2m} (\frac{1}{j!})^{l_j}}_{:=a(\alpha,m,\boldsymbol{l})}.$$

Es folgt:

$$\partial_x^{2m} s(u) s'(u) = \sum_{\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_{2m}} a(\alpha, m, \boldsymbol{l}) \; u^{\alpha-1} \; \boldsymbol{\xi}_{2m}^{\boldsymbol{l}}(u).$$

Bilden wir nun die Ableitung nach x und verwenden die Produktregel, so können wir schließen:

$$\big(\partial_x^{2m} s(u) s'(u)\big)_x = \sum_{\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_{2m}} a(\alpha, m, \boldsymbol{l}) \; \Big((\alpha-1) \underbrace{u^{\alpha-2} u_x}_{=u^{\alpha-1}\xi_1} \; \boldsymbol{\xi}_{2m}^{\boldsymbol{l}}(u) + u^{\alpha-1} \big(\boldsymbol{\xi}_{2m}^{\boldsymbol{l}}(u)\big)_x\Big).$$

Bereits in Abschnitt 2.2.2 haben wir den Ausdruck $\big(\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)\big)_x$ berechnet. Analog folgt:

$$\big(\boldsymbol{\xi}_{2m}^{\boldsymbol{l}}(u)\big)_x = \sum_{i=1}^{2m} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{2m}^{\boldsymbol{l}}}{\partial \xi_i}(u) \big(\xi_{i+1}(u) - \xi_1(u)\xi_i(u)\big) = -|\boldsymbol{l}| \xi_1(u) \boldsymbol{\xi}_{2m}^{\boldsymbol{l}}(u) + \sum_{i=1}^{2m} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{2m}^{\boldsymbol{l}}}{\partial \xi_i}(u) \xi_{i+1}(u).$$

Setzen wir dies wieder ein, so erhalten wir:

$$\big(\partial_x^{2m} s(u) s'(u)\big)_x = \sum_{\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_{2m}} u^{\alpha-1} \; a(\alpha, m, \boldsymbol{l}) \; \Big((\alpha - 1 - |\boldsymbol{l}|)\xi_1 \; \boldsymbol{\xi}_{2m}^{\boldsymbol{l}}(u) + \sum_{i=1}^{2m} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{2m}^{\boldsymbol{l}}}{\partial \xi_i}(u) \xi_{i+1}(u)\Big).$$

Dies motiviert nun folgende Definition:

Definition 2.3.51 Sei $m \in \mathbb{N}_\times$ und $\alpha > 0$. Für $\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_{2m}$ definieren wir:

$$a(\alpha, m, \boldsymbol{l}) := \frac{(2m)!}{l_1! \cdot \ldots \cdot l_{2m}!} \prod_{j=0}^{|\boldsymbol{l}|-2} (\frac{\alpha}{2} - 1 - j) \prod_{j=1}^{2m} (\frac{1}{j!})^{l_j}.$$

Das Polynom $K^m : \mathbb{R}^{2m+1} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$\boldsymbol{\xi}_{2m+1} \mapsto \sum_{\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_{2m}} a(\alpha, m, \boldsymbol{l}) \Big((\alpha - 1 - |\boldsymbol{l}|)\xi_1 \ \boldsymbol{\xi}_{2m}^{\boldsymbol{l}} + \sum_{i=1}^{2m} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{2m}^{\boldsymbol{l}}}{\partial \xi_i} \xi_{i+1} \Big)$$

definiert.

Beispiel 2.3.52 Wir wollen K^m für $m = 1$ berechnen. Die Indexmenge $\mathcal{I}_2$ ergibt sich zu:

$$\mathcal{I}_2 = \{(2, 0), (0, 1)\}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} a(\alpha, 1, (2, 0)) &= \Big(\frac{\alpha}{2} - 1\Big) \cdot \Big(\frac{1}{1!}\Big)^2 \cdot \Big(\frac{1}{2!}\Big)^0 \cdot \frac{2!}{2!0!} = \frac{1}{2}(\alpha - 2) \quad \text{und} \\ a(\alpha, 1, (0, 1)) &= \qquad 1 \cdot \Big(\frac{1}{1!}\Big)^0 \cdot \Big(\frac{1}{2!}\Big)^1 \cdot \frac{2!}{0!1!} = 1. \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} K^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= a(\alpha, 1, (2, 0)) \cdot \big[(\alpha - 3)\xi_1^3 + 2\xi_1\xi_2\big] + a(\alpha, 1, (0, 1)) \cdot \big[(\alpha - 2)\xi_1\xi_2 + \xi_3\big] \\ &= \frac{1}{2}(\alpha - 2)(\alpha - 3)\xi_1^3 + 2(\alpha - 2)\xi_1\xi_2 + \xi_3. \end{aligned}$$

⬠

Der gewünschte Integrand ergibt sich somit zu:

$$(-1)^{m+2} u^{\beta+1} P(\boldsymbol{\xi}(u)) \left(\partial_x^{2m} s(u) s'(u)\right)_x = u^{\alpha+\beta} \ (-1)^{m+2} \ P(\boldsymbol{\xi}(u)) \ K^m(\boldsymbol{\xi}_{2m+1}(u)). \quad (2.15)$$

Definition 2.3.53 Sei Polynom $P \in \mathcal{P}_k$ gegeben, $m \in \mathbb{N}_\times$ mit $2m \le k$ und $\alpha > 0$. Dann ist das Polynom S_0^m durch

$$S_0^m := \begin{cases} \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) \mapsto (-1)^m P(\boldsymbol{\xi}) \ K^m(\boldsymbol{\xi}_{2m+1}) \end{cases}$$

definiert.

Lemma 2.3.54 Sei u eine klassische Lösung unseres Grundproblems (Definition 2.1.2) mit $u > 0$ in $\overline{\Omega_T}$, welche (RB1) erfüllt. Darüber hinaus sei $m \in \mathbb{N}_\times$ mit $2m \le k$ und H_α^m ein α-Funktional mit α-Produktion P_α^m. Dann gilt:

$$P_\alpha^m[u](t) = \int_\Omega u^{\alpha+\beta} S_0^m(\boldsymbol{\xi}(u), \xi_{k+1}(u)) \ dx.$$

Beweis: Das Lemma ist eine unmittelbare Konsequenz aus Gleichung (2.14) und Gleichung (2.15). □

Lemma 2.3.55 Es gilt:

i) Das Polynom K^m erfüllt:

$$K^m \in \mathcal{P}_{2m+1}.$$

ii) Das Polynom S_0^m erfüllt:

$$S_0^m \in \mathcal{Q}_{k+2m+1,k+1}.$$

Beweis:

i) Die Aussage ist eine direkte Konsequenz aus dem Beweis von Lemma 2.2.30 ii), wenn wir k durch $2m$ ersetzen und beachten, dass für $\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_{2m}$ gilt:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{2m}^{\boldsymbol{l}}}{\partial \xi_i}\ \xi_{i+1} = l_i\ \boldsymbol{\xi}_{2m}^{\boldsymbol{l}} \frac{\xi_{i+1}}{\xi_i}.$$

ii) Die gewünschte Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz von i) und Lemma 1.3.11. □

2.3.2 Die Verschiebungspolynome

Wir wollen nun Satz 2.2.32 auf α-Funktionale höherer Ordnung erweitern. Lemma 2.3.55 hilft uns bei der Auswahl der entsprechenden Verschiebungspolynome. Insbesondere dürfen wir die Ausdrücke $\xi_{k+2}(u), \ldots, \xi_{k+2m+1}(u)$ nicht verwenden, weil eine klassische Lösung u unseres Grundproblems im Allgemeinen nicht genug Regularität besitzt.

Satz 2.3.56 (*Systematische partielle Integration für α-Funktionale höherer Ordnung*) Sei u eine klassische Lösung unseres Grundproblems (Definition 2.1.2) mit $u > 0$ in $\overline{\Omega_T}$, welche (RB1) erfüllt. Darüber hinaus sei $m \in \mathbb{N}_\times$ mit $2m \leq k$ und H_α^m ein α-Funktional der Ordnung m mit α-Produktion P_α^m. Dann gilt für alle $G \in \mathcal{Q}_{k+2m,k}$:

$$P_\alpha[u](t) = \int_\Omega u^{\alpha+\beta} S_0^m(\boldsymbol{\xi}(u))\ dx = \int_\Omega u^{\alpha+\beta}\Big(S_0(\boldsymbol{\xi}(u)) + \delta_{\alpha+\beta} G(\boldsymbol{\xi}(u), \xi_{k+1}(u))\Big)\ dx.$$

Beweis: Das erste Gleichheitszeichen folgt aus Lemma 2.3.54. Somit genügt es zu zeigen, dass

$$\int_\Omega u^{\alpha+\beta} \delta_{\alpha+\beta} G(\boldsymbol{\xi}(u), \xi_{k+1}(u))\ dx = 0 \quad \forall G \in \mathcal{Q}_{k+2m,k}$$

gilt. Sei $G \in \mathcal{Q}_{k+2m,k}$ beliebig und fest. Wir wenden Lemma 2.2.30 an, wobei Anmerkung 2.2.31 zu beachten ist. Es folgt:

$$0 = u^{\alpha+\beta} G(\boldsymbol{\xi}(u))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_\Omega \left(u^{\alpha+\beta} G(\boldsymbol{\xi}(u))\right)_x \, dx = \int_\Omega u^{\alpha+\beta} \delta_{\alpha+\beta} G(\boldsymbol{\xi}(u), \xi_{k+1}(u)) \, dx.$$

Der Randterm ist trivial, weil u die Randbedingung (RB1) erfüllt (vgl. Lemma 2.1.15). Da G beliebig war, ist die gewünschte Behauptung bewiesen. □

Anmerkung 2.3.57 (Gültigkeit für $u \geq 0$) Alle Aussagen und Definitionen für α-Funktionale der Ordnung m bleiben gültig, wenn die Funktion u auch den Wert 0 annimmt. Es muss jedoch gewährleistet werden, dass die Ausdrücke

$$\partial_x^m s(u), \quad \partial_x^m s'(u) \quad \text{und} \quad \partial_x^{2m} s(u)$$

auf ganz $\overline{\Omega_T}$ definiert sind. Dies bedeutet, dass wir

$$\frac{\alpha}{2} - n \geq 0$$

fordern müssen, wenn der Ausdruck $\partial_x^n s(u)$ für eine Zahl $n \in \mathbb{N}_\times$ auftritt. Speziell für Satz 2.3.56 müssen wir zusätzlich sicherstellen, dass der Ausdruck $u^{\alpha+\beta}\delta_{\alpha+\beta} G$ auf $\overline{\Omega_T}$ definiert ist. Wir erhalten die hinreichenden Bedingungen:

$$\frac{\alpha}{2} - 2m \geq 0 \quad \text{und} \quad \alpha + \beta \geq \deg G,$$

wobei deg den Maximalgrad des Polynoms G bezeichnet. ⬡

2.3.3 Ein weiteres Entscheidungsproblem

Wir wenden Satz 2.3.56 an und wollen ein Polynom $G \in \mathcal{Q}_{k+2m,k}$ bestimmen, welches

$$(S_0^m + \delta_\gamma G)(\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) \geq 0 \quad \forall (\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \tag{2.16}$$

erfüllt, womit $P_\alpha^m[u] \geq 0$ gewährleistet ist. Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, definieren wir:

$$\mathcal{J}_{k+2m,k} := \{\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_{k+2m} : \boldsymbol{\xi}_{k+2m}^{\boldsymbol{k}} \in \mathcal{Q}_{k+2m,k}\}.$$

Mit Korollar 1.3.10 folgt, dass G die Darstellung

$$G = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{J}_{k+2m,k}} c_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\xi}_{k+2m}^{\boldsymbol{k}}.$$

besitzt. Aus der Definition von δ_γ und Lemma 2.2.30 erhalten wir:

$$\delta_\gamma G = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{J}_{k+2m,k}} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} \in \mathcal{Q}_{k+2m+1,k+1}.$$

Für (2.16) erhalten wir nun folgendes Entscheidungsproblem:

$$\exists (c_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{J}_{k+2m,k}} \subseteq \mathbb{R} : \forall (\boldsymbol{\xi}, \xi_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \Rightarrow S_0^m + \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{J}_{k+2m,k}} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} \geq 0. \tag{2.17}$$

Mit (2.17) haben wir ein Entscheidungsproblem gefunden, welches uns hilft festzustellen, ob H_α^m ein Lyapunov-Funktional ist.

2.3.4 Zusammenfassung

Im Wesentlichen können wir *Schritt 1 - Schritt 3* aus Abschnitt 2.2.5 übernehmen wir müssen jedoch beachten, dass wir S_0 durch S_0^m und $\mathcal{I}_k$ durch $\mathcal{J}_{k+2m,k}$ ersetzen. Wir wollen nun die Unterschiede zwischen den Entscheidungsproblemen (2.9) und (2.17) zusammenfassen:

i) Die Polynome S_0 und S_0^m unterscheiden sich im Grad. Dies bedeutet, dass für die entsprechenden Entscheidungsprobleme unterschiedliche Verschiebungspolynome betrachtet werden müssen.

ii) Das Polynom S_0 ist von α unabhängig, jedoch enthält das Polynom S_0^m höhere Potenzen von α. Diese ergeben sich durch die Faktoren $a(\alpha, m, \boldsymbol{l}),\ \boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_{2m}$.

iii) Zur Reduktion der Variablen in (2.17) ist die Substitution $\gamma = \alpha + \beta$ nicht zielführend. Dies ist mit ii) zu begründen.

iv) Die Entscheidungsprobleme (2.9) und (2.17) können mit den selben Methoden gelöst werden.

Kapitel 3

Polynomielle Entscheidungsprobleme

In diesem Kapitel wollen wir uns näher mit polynomiellen Entscheidungsproblemen beschäftigen. In einem ersten Schritt werden wir den nötigen abstrakten Rahmen aufbauen und ein entscheidendes Resultat vorstellen. Als nächstes werden wir einen Algorithmus und die entsprechende Software vorstellen, welche uns hilft unsere Entscheidungsprobleme zu lösen. Abschließend werden wir noch auf den Aspekt eingehen wie einfache Probleme ohne computergestützte Hilfe gelöst werden können.

3.1 Elementare Algebra

Dieser Abschnitt ist dem Gebiet der *elementaren Algebra* gewidmet. Elementare Algebra beschäftigt sich mit theoretischen Aspekten der reellen Zahlen. Die Besonderheit ist, dass wir in elementarer Algebra ausschließlich Variablen (vgl. Definition 3.1.1) verwenden um einzelne reelle Zahlen zu repräsentieren (vgl. [26, Introduction]). Alle folgenden Definitionen sind im Rahmen der reellen Zahlen zu verstehen. Im Wesentlichen fassen wir [26, Abschnitt 1] zusammen.

Definition 3.1.1 (*Variable*) Die Symbole

$$x,\ x_i \quad y,\ y_i \quad \xi, \xi_i, \quad \text{und} \quad c,\ c_i$$

werden für $i \in \mathbb{N}$ als *Variablen*[1] bezeichnet und stellen Platzhalter für jeweils eine beliebige reelle Zahl dar.

Definition 3.1.2 (*Algebraische Konstanten*) Die reellen Zahlen

$$1, \quad 0 \quad \text{und} \quad -1$$

werden als *algebraische Konstanten* bezeichnet.

[1] Prinzipiell könnte i aus einer beliebigen Indexmenge stammen. Für unsere Zwecke genügt es, dass i eine natürliche Zahl ist.

Definition 3.1.3 (*Algebraische Operation*) Die Operationen

$$+ \quad \text{und} \quad \cdot$$

werden als *algebraische Operationen* bezeichnet.

Definition 3.1.4 (*Term*) Wir definieren einen *Term* rekursiv. Eine Variable oder eine beliebige reelle Konstante wird als ein *Term der Ordnung* 1 bezeichnet. Sei $k \in \mathbb{N}$, a ein Term mit Ordnung $m_a \leq k$ und b ein Term mit Ordnung $m_b \leq k$. Darüber hinaus sei $\max(m_a, m_b) = k$. Dann werden die Ausdrücke

$$a + b \quad \text{und} \quad a \cdot b$$

als *Terme der Ordnung* $k + 1$ bezeichnet.

Definition 3.1.5 (*Tarski-Term*) Ein Term, in dem alle vorkommenden Konstanten algebraische Konstanten sind, wird auch *Tarski-Term* genannt.

Beispiel 3.1.6 Ein Beispiel für einen (Tarski-)Term der Ordnung 5 wäre durch den Ausdruck

$$\Big(\big(x + (-1 \cdot y)\big) \cdot \xi\Big) + \Big(-1 \cdot c\Big)$$

gegeben. Der rekursive Aufbau des obigen Terms ist in Abbildung 3.1 mit Hilfe eines Baumes dargestellt.

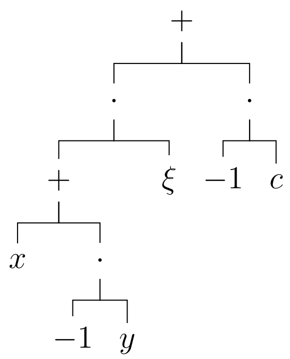


Abbildung 3.1: Darstellung eines Terms mittels eines Baumes.

Der Ausdruck

$$\sqrt{2} + x$$

ist ein Beispiel für einen Term, welcher kein Tarski-Term ist, weil $\sqrt{2}$ keine algebraische Konstante ist. ⬠

Anschaulich betrachtet bezeichnen wir alle Ausdrücke als Term, welche sich in sinnvoller Art und Weise aus Variablen, Konstanten und algebraischen Operationen zusammensetzen lassen.

Definition 3.1.7 (*Algebraische Relation*) Die Relationen

$$= \quad \text{und} \quad >$$

werden als *algebraische Relationen* bezeichnet.

Definition 3.1.8 (*Atomare Formel*) Seien a und b zwei Terme. Ausdrücke der Form

$$(a = b) \quad \text{und} \quad (a > b)$$

werden als *atomare Formeln* bezeichnet.

Unser Ziel ist es, eine Formel zu definieren. Diese ist im Wesentlichen eine Zusammensetzung von atomaren Formeln mittels den *logischen Verknüpfungen*

$$\neg, \quad \wedge \quad \text{und} \quad \vee\,.$$

Darüber hinaus werden wir noch den Existenzquantor $\exists$ und den Allquantor $\forall$ verwenden. Es sei hier vereinbart, dass wir $(\exists x)$ und $(\forall x)$ statt $(\exists x \in \mathbb{R})$ und $(\forall x \in \mathbb{R})$ schreiben.

Definition 3.1.9 (*Formel*) Wir definieren eine *Formel* rekursiv. Eine atomare Formel wird als eine *Formel der Ordnung* 1 bezeichnet. Sei $k \in \mathbb{N}$, Φ eine Formel der Ordnung $m_\Phi \leq k$ und Θ eine Formel der Ordnung $m_\Theta \leq k$. Darüber hinaus sei $\max(m_\Phi, m_\Theta) = k$. Dann werden die Ausdrücke

$$\Phi \wedge \Theta \quad \text{und} \quad \Phi \vee \Theta$$

als *Formeln der Ordnung* $k + 1$ bezeichnet. Wenn Φ eine Formel der Ordnung k und ξ eine beliebige Variable ist , dann bezeichnen wir ebenfalls die Ausdrücke

$$\neg\Phi, \quad (\exists\xi)\Phi \quad \text{und} \quad (\forall\xi)\Phi$$

als *Formeln der Ordnung* $k + 1$.

Definition 3.1.10 (*Tarski-Formel*) Eine (atomare) Formel, in der alle vorkommenden Konstanten algebraische Konstanten sind, wird auch *(atomare) Tarski-Formel* genannt.

Anmerkung 3.1.11 Tarski-Terme und Tarski-Formeln sind der elementaren Algebra zuzuordnen, weil hier jede reelle Zahl durch eine Variable repräsentiert wird. Für einen allgemeinen Term oder eine allgemeine Formel ist dies nicht der Fall. Wir unterscheiden in diesem Abschnitt explizit zwischen diesen beiden Konzepten, weil wir auf die Originalarbeit von A. Tarski [26] verweisen möchten. Im Hinblick auf unser Ziel, Lyapunov-Funktionale zu bestimmen, ist diese Unterscheidung jedoch nicht weiter nötig. ○

Beispiel 3.1.12 Ein Beispiel für eine (Tarski-)Formel der Ordnung 3 wäre durch den Ausdruck

$$\big(x + y > c\big) \wedge \big(\neg(\xi \cdot -1 > 0)\big)$$

gegeben. Der rekursive Aufbau obiger Formel ist in Abbildung 3.2 mit Hilfe eines Baumes dargestellt.

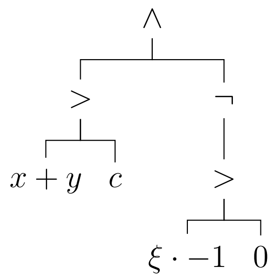


Abbildung 3.2: Darstellung einer Formel mittels eines Baumes.

Weitere Beispiele für (Tarski-)Formeln wären durch

$$0 = 1, \quad (\exists x)(x > \xi) \quad \text{und} \quad -1 + x = y$$

gegeben. Ein Beispiel, für eine Formel, die keine Tarski-Formel ist, wäre durch

$$x > \sqrt{2}$$

gegeben. ⬠

Anmerkung 3.1.13 Es ist möglich, den Allquantor nicht gesondert zu betrachten, sondern $(\forall x)\ \Phi$ als Kurzschreibweise für die Formel

$$\neg(\exists x)\ (\neg\Phi)$$

zu interpretieren. ⬡

Anmerkung 3.1.14 Tarski-Terme und Tarski-Formeln enthalten nur Variablen und algebraische Konstanten und keine reellen Zahlen. Wir können jedoch eine natürliche Zahl n mit dem Tarski-Term

$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ mal}}$$

identifizieren. Insbesondere können wir eine negative ganze Zahl $-n$ als eine Kurzschreibweise für den Ausdruck $-1 \cdot n = -1 \cdot (1 + \ldots + 1)$ interpretieren. Somit ist es prinzipiell möglich, dass Tarski-Terme und Tarski-Formlen auch ganze Zahlen enthalten. ⬡

Anmerkung 3.1.15 Mit Hilfe unserer algebraischen Relationen und logischen Verknüpfungen können wir Kurzschreibweisen für die wichtigsten Relationen einführen. Seien a und b zwei beliebige Terme. Die Relation $(a \geq b)$ kann durch

$$(a > b) \vee (a = b)$$

definiert werden. Eine Implikation $a \Rightarrow b$ kann auch als

$$\neg a \vee b$$

geschrieben werden. Dies ermöglicht es uns auch eine Äquivalenz $a \Leftrightarrow b$ über

$$(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$$

zu bilden. Somit ist die Menge aller Formeln sehr reichhaltig. ⬠

Definition 3.1.16 (*Freie Variable*) Wir definieren eine *freien Variable* rekursiv. Die Variable ξ wird frei in der atomaren Formel Φ genannt, wenn die Variable ξ in Φ enthalten ist. Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei Φ ein Term der Ordnung k. Man nennt ξ frei in $(\exists x)\ \Phi$ (bzw. frei in $(\forall x)\ \Phi$) dann und nur dann, wenn ξ frei in Φ ist und ξ nicht die selbe Variable wie x ist. Darüber hinaus nennen wir ξ frei in $\neg\Phi$ dann und nur dann, wenn ξ frei in Φ ist. Seien Φ und Θ zwei Formel, sodass die Formeln

$$\Phi \wedge \Theta \quad \text{und} \quad \Phi \vee \Theta$$

von der Ordnung $k+1$ sind. Wir nennen ξ frei in $\Phi \wedge \Theta$ (bzw. frei in $\Phi \vee \Theta$) dann, und nur dann, wenn ξ frei in Φ oder ξ frei in Θ ist.

Beispiel 3.1.17 Die Variable ξ ist frei in den Formeln

$$\xi = -1, \quad \big((\exists \xi)(\xi + x = 0)\big) \wedge \big(\xi = 0\big), \quad \text{und} \quad (\exists y)(\xi + y = c),$$

jedoch ist ξ nicht frei in den Formeln

$$x = -1, \quad (\exists \xi)(\xi + x = 0), \quad \text{und} \quad (\forall \xi)(\exists y)(\xi + y = c).$$

⬠

Definition 3.1.18 (*Logische Aussage*) Eine Formel Φ wird *logische Aussage* genannt, wenn Φ keine freien Variablen enthält.

Da logische Aussagen nur wahr oder falsch sein können, ist der Ausdruck (vgl. Anmerkung 3.1.15)

$$\Phi \Leftrightarrow \Theta$$

sinnvoll. Wenn Φ oder Θ freie Variablen enthält, muss festgelegt werden, welche Bedingungen für alle freien Variablen gelten sollen damit eine Äquivalenz wohldefiniert ist. Dies führt zu folgender Definition:

Definition 3.1.19 (*Formeläquivalenz*) Seien Φ und Θ Formeln und sei $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ die Menge aller Variablen, welche in Φ oder Θ frei sind. Dann nennt man Φ und Θ äquivalent, wenn die logische Aussage[2]

$$(\forall \xi_1) \ldots (\forall \xi_n)(\Phi \Leftrightarrow \Theta)$$

[2] Das Symbol $\Leftrightarrow$ ist im folgenden Ausdruck im Sinne von Anmerkung 3.1.15 zu interpretieren.

eine wahre Aussage ist. Sind Φ und Θ äquivalent, so schreiben wir auch $\Phi \Leftrightarrow \Theta$.

Für eine beliebige Formel Θ werden wir die Suche nach einer äquivalenten Formel ohne Quantoren als ein *polynomielles Entscheidungsproblem* bezeichnen. Der Begriff „polynomiell“ ist damit zu begründen, dass eine Formel per Definition nur Produkte und Summen von Variablen enthalten kann. Genau genommen ist die Bezeichnung „Entscheidungsproblem“ nicht korrekt. Als Entscheidungsproblem würden wir im klassischen Sinne die Frage, ob eine logische Aussage wahr oder falsch ist bezeichnen. Wir wollen hier dennoch diesen Begriff verwenden, weil wir in Abhängigkeit der freien Variablen entscheiden möchten, ob eine Formel wahr oder falsch ist.

Definition 3.1.20 (*Pränexform*) Wir sagen, dass eine Formel der Form

$$(Q_1 x_1) \dots (Q_k x_k)\ \Phi$$

Pränexform (oder auch *Normalform*) besitzt, wenn Φ eine quantorenfreie Formel ist, welche die Variablen $x_1, \dots, x_k$ enthält und $Q_i,\ i = 1, \dots, k$ entweder eine Existenz- oder ein Allquantor ist.

Uns stellt sich nun die Frage, ob jede Formel die nicht Pränexform besitzt zumindest zu einer Formel in Pränexform äquivalent ist. Dies ist tatsächlich der Fall und im folgenden Satz formuliert:

Satz 3.1.21 Für jede Formel Φ existiert eine äquivalente Formel Θ in Pränexform (vgl. [18, Theorem 27, Kapitel II].

3.2 Quantorenelimination

Die Grundlage aller weiteren Überlegungen ist folgender Satz, welcher 1930 von A. Tarski bewiesen (1948 - publiziert) wurde:

Satz 3.2.22 (*Tarski*) Sei Φ eine beliebige Tarski-Formel. Dann existiert eine Tarski-Formel $U(\Phi)$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) Die Tarski-Formel $U(\Phi)$ enthält keine Quantoren und nur Variablen, welche bereits in Φ frei sind.
ii) Die Tarski-Formeln Φ und $U(\Phi)$ sind äquivalent.

Ist Φ darüber hinaus eine logische Aussage, in der alle vorkommenden Terme Tarski-Terme sind. Dann ist Φ äquivalent zu einer der folgenden Aussagen:

$$0 = 0 \quad \text{oder} \quad 0 = 1,$$

(vgl. [26, Theorem 31 und Theorem 36]).

Für einen Beweis sei auf [26, Abschnitt 2] verwiesen, jedoch ist dieser in Anmerkung 3.2.23 skizziert.

Anmerkung 3.2.23 Wir waren sehr restriktiv mit den betrachteten Relationen. Dies liegt einerseits daran, dass sich die wichtigsten Relationen wie $\geq, \leq, <, \Rightarrow, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, oder $\neq$ durch unsere algebraischen Relationen und logischen Verknüpfung darstellen lassen (vgl. Anmerkung 3.1.15). Andererseits hat dies auch technische Gründe und liegt an der Struktur vom Beweis von Satz 3.2.22. Im Folgenden soll nun die Beweisidee vorgestellt werden.

Wir betrachten eine Tarski-Formel der Form $(\exists x)\ \Phi$, wobei die Tarski-Formel Φ keine Quantoren enthält. Die Idee ist es eine Tarski-Formel $\tilde{\Phi}$ zu konstruieren, welche zu $(\exists x)\ \Phi$ äquivalent ist und keine Quantoren enthält. Mit Hilfe von Anmerkung 3.1.13 kann dies dann auch auf Tarski-Formeln der Form $(\forall x)\ \Phi$ angewendet werden. Per Induktion nach der Anzahl der Quantoren folgt das gewünschte Resultat auch für eine allgemeine Tarski-Formeln mit endlich vielen Quantoren. Die Schwierigkeit im Beweis von Satz 3.2.22 besteht in der Tatsache, dass es bereits nichttrivial ist einen einzigen Quantor zu eliminieren.

Dass der Beweis induktiv geführt werden kann, sehen wir am besten ein, wenn wir Formeln in Pränexform betrachten. Insofern ist es hier von Bedeutung, dass jede Formel tatsächlich in Normalform umgeschrieben werden kann. ○

Obiger Satz besitzt einige interessante Eigenschaften. Es ist hier insbesondere hervorzuheben, dass der Beweis von Satz 3.2.22 konstruktiv und algorithmisch ist. Dies bedeutet, dass die Formel $U(\Phi)$ explizit in endlich vielen Schritten konstruiert werden kann.

Der Übergang von einer Formel zu einer quantorenfreien Formel wird auch *Quantorenelimination*[3] genannt. Den von A. Tarski gefundenen Algorithmus werden wir im Folgenden *Tarski-Algorithmus zur Quantorenelimination* oder auch nur *Tarski-Algorithmus* nennen. Zusätzlich liefert der Tarski-Algorithmus eine Lösung für Entscheidungsprobleme. Eine genau Beschreibung des Algorithmus ergibt sich aus dem Beweis von Satz 3.2.22 und findet sich in [26, Abschnitt 2].

Wir möchten gerne Probleme der Form (2.9) oder (2.12) im Kontext von elementarer Algebra betrachten. Dies ist jedoch nicht direkt möglich, weil die entsprechenden Polynome in den Problemen (2.9) und (2.12) reelle Koeffizienten besitzen können. Einerseits hängt dies von den Polynomen $P \in \mathcal{P}_k$ und $F \in \mathcal{P}_{k+1}$ ab, andererseits können sowohl β als auch α konkret vorgegebene reelle Zahlen sein.

Elementarer Algebra bietet uns im eigentlichen Sinne keine Möglichkeit diese Koeffizienten darzustellen. Um dieses Problem zu umgehen, ersetzten wir die entsprechenden Koeffizienten durch freie Variablen und merken uns, dass die entsprechenden freien Variablen für einen konkreten Zahlenwert stehen. Dies macht es uns möglich den Tarski-Algorithmus anzuwenden und wir erhalten eine quantorenfreie Tarski-Formel. Substituieren wir nun die zusätzlich eingeführten freien Variablen durch die entsprechenden Zahlenwerte, so er-

[3]engl. „quantifier elimination “

halten wir eine quantorenfreie äquivalente Formel. Auch die Bedingungen $\alpha > 0, \beta > 0$ und $\kappa > 0$ müssen gesondert betrachtet werden.

Nummerieren wir die Verschiebungspolynome mit den Zahlen $1, \dots, n$ so würde die Pränexform von (2.9) und (2.12) folgendermaßen aussehen:

$$(\exists c_1)\dots(\exists c_n)(\forall \xi_1)\dots(\forall \xi_{k+1})\Big(S_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i T_i \geq 0 \wedge \alpha > 0 \wedge \beta > 0\Big), \tag{3.1}$$

$$(\exists \kappa)(\exists c_1)\dots(\exists c_n)(\forall \xi_1)\dots(\forall \xi_{k+1})\Big(S_0 - \kappa F + \sum_{i=1}^{n} c_i T_i \geq 0 \wedge \alpha > 0 \wedge \beta > 0 \wedge \kappa > 0\Big). \tag{3.2}$$

Zusammenfassend können wir nun auf die Existenz von Algorithmen schließen, welche in endlich vielen Schritten die Quantoren in Problem (2.9) und Problem (2.12) eliminieren. Wir erhalten Formeln, welche nur von α, β und κ abhängen. Der Tarski-Algorithmus hat jedoch den Nachteil, dass dieser sehr rechenaufwendig ist (vgl. [9, Abschnitt 1]). Wir können somit nur triviale Probleme mit einem annehmbaren Rechenaufwand lösen. Eine Abhilfe schafft das von G. E. Collins 1973 entwickelte Verfahren zur *Quantorenelimination mittels einer zylindrischen algebraischen Zerlegung* [4] (vgl. [9]).

3.2.1 Quantorenelimination mittels einer zylindrischen algebraischen Zerlegung

Wir wollen das Verfahren zur Quantorenelimination mittels einer zylindrischen algebraischen Zerlegung in diesem Abschnitt vorstellen. In einem ersten Schritt werden wir definieren was wir unter einer zylindrischen algebraischen Zerlegung verstehen. Anschließend werden wir das Verfahren kurz skizzieren. Eine ausführliche Beschreibung des Algorithmus würde den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen, daher sei für Details auf die Originalarbeit von G. E. Collins [9] verwiesen.

Definition 3.2.24 (*Algebra - mengentheoretisch*) Sei Ω eine Menge und bezeichne $\mathfrak{P}(\Omega)$ deren Potenzmenge. Eine Menge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt *Algebra (im mengentheoretischen Sinn)*, wenn gilt:

i) $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{A}$,
ii) $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{A}$,
iii) $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^{\mathsf{c}} = \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$,

(vgl. [19, Definition 2.22. und Lemma 2.23.]).

Definition 3.2.25 (*Semialgebraische Menge*) Für $k \in \mathbb{N}_\times$ bezeichnen wir mit $\mathbb{R}[\xi_1, \dots, \xi_k]$ den Polynomring in den Variablen $\xi_1, \dots, \xi_k$ über den reellen Zahlen. Wir betrachten nun

[4] engl. „quantifier elimination by cylindric algebraic decomposition“

folgende Menge:

$$\mathfrak{B} := \Big\{ \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k : P(\boldsymbol{\xi}) > 0\} : P \in \mathbb{R}[\xi_1, \dots, \xi_k] \Big\} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^k).$$

Darüber hinaus definieren wir $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$ als die kleinste Algebra im mengentheoretischen Sinn, welche $\mathfrak{B}$ enthält, das heißt:

$$\mathfrak{A} := \bigcap_{\substack{\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^k),\ \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}, \\ \mathfrak{C} \text{ ist eine Algebra}}} \mathfrak{C}.$$

Eine Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt *semialgebraisch*, wenn $\Omega \in \mathfrak{A}$ gilt (vgl. [5, Abschnitt 2]).

Definition 3.2.26 (*Projektion π_l*) Sei $k \in \mathbb{N}_\times$ und $l = 1, \dots, k$. Dann ist der Projektionsoperator π_l durch

$$\pi_l := \begin{cases} \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l \\ \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_k) \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_l) \end{cases}$$

definiert (vgl. [5, Abschnitt 2]).

Mit Hilfe der Projektion π_l können wir nun eine zylindrische Zerlegung definieren:

Definition 3.2.27 Sei $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^k)$ eine Zerlegung von $\mathbb{R}^k$ in endlich viele zusammenhängende paarweise disjunkte Mengen. Die Zerlegung heißt *zylindrisch*, wenn für alle $l = 1, \dots, k$ und alle $A \in \mathfrak{D}$ und $B \in \mathfrak{D}$ gilt:

$$\pi_l(A) = \pi_l(B) \quad \text{oder} \quad \pi_l(A) \cap \pi_l(b) = \emptyset.$$

Eine zylindrische Zerlegung heißt *algebraisch*, wenn sie nur aus semialgebraischen Mengen besteht. Die Elemente einer zylindrischen algebraischen Zerlegung werden auch *Zellen* genannt (vgl. [5, Abschnitt 2]).

Beispiel 3.2.28 Sei $k = 1$. Wir definieren:

$$\begin{aligned} D_1 &:= (2, \infty), \\ D_2 &:= [1, 2], \\ D_2 &:= (-\infty, 1). \end{aligned}$$

Unser Ziel ist es, zu beweisen, dass $\mathfrak{D} := \{D_1, D_2, D_3\}$ eine zylindrische algebraische Zerlegung von $\mathbb{R}$ ist.

1. Schritt: Wir müssen zeigen, dass $\mathfrak{D}$ eine zylindrische Zerlegung ist. Die Menge $\mathfrak{D}$ besteht aus disjunkten Intervallen und bildet somit eine Zerlegung von $\mathbb{R}$ aus paarweise disjunkten zusammenhängenden Mengen. Aus $\pi_1(D_i) = D_i,\ i = 1, 2, 3$ folgt:

$$\pi_1(D_i) \cap \pi_1(D_j) = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

Somit ist $\mathfrak{D}$ tatsächlich eine zylindrische Zerlegung von $\mathbb{R}$.

2. Schritt: Wir müssen zeigen, dass $\mathfrak{D}$ nur aus semialgebraischen Mengen besteht. Hierfür definieren wir:

$$\begin{aligned}P_1(\xi) &:= \xi - 2,\\ P_2(\xi) &:= (\xi - 1)(\xi - 2),\\ P_3(\xi) &:= -\xi + 1.\end{aligned}$$

Aus den Darstellungen

$$D_i = \{\xi \in \mathbb{R} : P_i(\xi) > 0\}, \quad i = 1, 3 \quad \text{und}$$
$$D_2 = \{\xi \in \mathbb{R} : P_2(\xi) > 0\}^{\mathsf{c}}$$

folgt die gewünschte Behauptung.

Betrachten wir das Polynom $P := P_2$, so können wir sagen, dass die zylindrische algebraische Zerlegung $\mathfrak{D}$ von P induziert worden ist. Die Mengen D_1 und D_3 sind die Zusammenhangskomponenten der Menge

$$\{\xi \in \mathbb{R} : P(\xi) > 0\}$$

und D_2 ist die einzige Zusammenhangskomponente der Menge

$$\{\xi \in \mathbb{R} : P(\xi) \leq 0\}.$$

⬠

Wir möchten nun die Idee des von G. E. Collins entwickelten Algorithmus vorstellen. Wir betrachten eine Formel

$$(Q_r\xi_r) \dots (Q_k\xi_k)\ \Phi$$

in Pränexform. Hierbei ist Φ eine quantorenfreie Formel in den Variablen $\xi_1, \dots, \xi_k$ und $r \leq k$. Darüber hinaus sei $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}[\xi_1, \dots, \xi_k]$ die Menge aller Polynome, welche in der Formel Φ enthalten sind. Die Menge $\mathcal{A}$ induziert eine zylindrische algebraische Zerlegung $\mathfrak{D}$ von $\mathbb{R}^k$. Die Zerlegung $\mathfrak{D}$ besitzt die besondere Eigenschaft, dass das Vorzeichen jedes Polynoms aus $\mathcal{A}$ in jeder Zelle eindeutig bestimmt ist. In Beispiel 3.2.28 ist eine zylindrische algebraische Zerlegung mit ähnlichen Eigenschaften für ein konkretes Polynom angegeben. Jeder Zylinder

$$\pi_l^{-1}(D) \quad l = 1, \dots, k,\ D \in \mathfrak{D}$$

ist die Vereinigung von endlich vielen Zellen. In jedem Zylinder können nun Allquantoren und Existenzquantoren wie Konjunktionen $\vee$ und Disjunktionen $\wedge$ gehandhabt werden (vgl. [9, Abschnitt 1]). Dies macht es nun möglich eine quantorenfreie äquivalente Formel zu finden.

Wollen wir Quantorenelimination mittels einer zylindrischen algebraischen Zerlegung anwenden, so können wir auf folgende konkrete Implementierungen zurückgreifen:

- `QEPCAD`,
- `QEPCAD B`,
- `Wolfram Mathematica`.

Hervorzuheben ist, dass G. E. Collins an der Entwicklung von `QEPCAD` beteiligt war. `QEPCAD B` ist eine verbesserte und erweiterte Version von `QEPCAD`, welche kostenlos unter `https://www.usna.edu/CS/qepcadweb/B/QEPCAD.html` erhältlich ist. In Abbildung 3.3 ist eine typische Ein- und Ausgabe in `QEPCAD B` angegeben. Weitere Informationen und weiterführende Referenzen zu den jeweiligen Implementierungen finden sich in [5, Abschnitt 4].

Auch die Anwendung des Algorithmus von G. E. Collins ist problematisch. Der Aufwand ist geringer als beim Tarski-Algorithmus, jedoch ist dieser immer noch enorm. Die Anzahl der benötigten Rechenschritte kann nach oben abgeschätzt werden.

Definition 3.2.29 Sei $k \in \mathbb{N}$ und $S \subseteq \mathbb{R}^k$. Darüber hinaus seien f und g Funktionen von S nach $\mathbb{R}$. Wir sagen, dass f die Funktion g auf S *dominiert*, wenn eine Konstante $C > 0$ existiert mit:

$$g(\boldsymbol{\xi}) \leq C \cdot f(\boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in S,$$

(vgl. [8, Abschnitt 3]).

Satz 3.2.30 Die Anzahl der Rechenschritte, um eine Formel Φ in Pränexform durch Quantorenelimination mittels einer zylindrischen algebraischen Zerlegung in eine quantorenfrei äquivalente Formel zu überführen, wird von der Funktion

$$\begin{cases} \mathbb{N}^5 \to \mathbb{R} \\ (r, m, n, d, a) \mapsto (2n)^{2^{2r+8}} (m)^{2^{r+6}} d^3 a \end{cases}$$

dominiert (vgl. [9, Theorem 17, Abschnitt 4]). Die Bedeutung der einzelnen Parameter ist in Tabelle 3.1 zusammengefasst.

r	...	Anzahl der Variablen in Φ
m	...	Anzahl der in Φ enthalten Polynome
n	...	Maximalgrad der in Φ enthalten Polynome
d	...	maximale Länge aller ganzzahligen Polynomkoeffizienten
a	...	Anzahl aller in Φ enthaltenen atomaren Formeln[5]

Tabelle 3.1: Bedeutung aller Parameter aus Satz 3.2.30

Wir sehen, dass der Aufwand doppelt exponentiell mit der Anzahl der Variablen wächst. Für unser ursprüngliches Problem zur Bestimmung von Lyapunov-Funktionalen bedeutet

[5] G. E. Collins fasst den Begriff einer atomaren Formel weiter als A. Tarski. Hier sind atomare Formel, alle Formeln der Form $P\ \sigma\ 0$, wobei P ein Polynom ist und $\sigma \in \{=, >, \geq, <, \leq, \neq\}$ gilt.

```
=======================================================
                 Quantifier Elimination
                           in
             Elementary Algebra and Geometry
                           by
       Partial Cylindrical Algebraic Decomposition
               Version B 1.69, 16 Mar 2012
                           by
                        Hoon Hong
                  (hhong@math.ncsu.edu)

With contributions by: Christopher W. Brown, George E.
Collins, Mark J. Encarnacion, Jeremy R. Johnson
Werner Krandick, Richard Liska, Scott McCallum,
Nicolas Robidoux, and Stanly Steinberg
=======================================================
Enter an informal description  between '[' and ']':
[QE for a 4th order thin film equation]
Enter a variable list:
(a,b,c1,c2,c3,x1,x2,x3,x4)
Enter the number of free variables:
2
Enter a prenex formula:
(E c1)(E c2)(E c3)(A x1)(A x2)(A x3)(A x4)[ - x1 x3
+ c1 ((a + b - 3) x1^4 + 3 x1^2 x2)
+ c2 ((a + b - 2) x1^2 x2 + x2^2 + x1 x3)
+ c3 ((a + b - 1) x1 x3 + x3) >= 0 ].
=======================================================
Before Normalization >
finish
WARNING! Projection factor b^2 c2^2 + 2 a b c2^2
- 4 b c2^2 + a^2 c2^2 - 4 a c2^2 + 4 c2^2
+ 2 b c1 c2 + 2 a c1 c2 + 9 c1^2
is everywhere zero in the cylinder over the cell (1,8,4)
of postive dimension.  The McCallum projection may not
be valid.
An equivalent quantifier-free formula:
b + a - 3 <= 0 /\ 2 b + 2 a - 3 >= 0
=====================  The End  =======================
```

Abbildung 3.3: Darstellung einer typischen Ein- und Ausgabe in `QEPCAD B`. Die mit blau hervorgehobene Formel dient zur Bestimmung von Lyapunov-Funktionalen für eine Dünnfilmgleichung 4. Ordnung (vgl. Kapitel 5). Es ist zu beachten, dass `E` bzw. `A` für eine Existenz- bzw. einen Allquantor steht.

dies, dass der Aufwand doppelt exponentiell mit der Anzahl der Verschiebungspolynome wachsen wird, weil jedes Verschiebungspolynom $T_{\boldsymbol{k}}$ eine Variable $c_{\boldsymbol{k}}$ induziert (vgl. Kapitel 4).

Satz 3.2.30 liefert uns zusätzlich eine Menge an Parametern, welche wir optimieren können, bevor wir unsere polynomiellen Entscheidungsprobleme lösen. Lemma 2.2.35 und Lemma 2.2.36 liefern uns Zwangsbedingungen, um die Anzahl der Variablen zu minimieren. Darüber hinaus können wir die Variablen α und β zu einer einzigen Variable $\gamma := \alpha + \beta$ zusammenfassen. Um die Anzahl der atomaren Formeln zu reduzieren, können wir versuchen die Bedingungen $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ in (3.1) und (3.2) wegzulassen. Nach der Quantorenelimination müssen wir jedoch das Ergebnis auf eventuelle Widersprüche (zu diesen beiden Bedingungen) überprüfen. Die Hilfsresultate aus Abschnitt 3.2.2 können auch verwendet werden, um weitere Variablen zu reduzieren.

3.2.2 Hilfsresultate

Im Hinblick auf den benötigten Aufwand ist es oftmals nützlich die Quantorenelimination selber durchzuführen. Wir wollen hier drei Resultate vorstellen, welche sich hierfür als nützlich erweisen werden und aus [15, Abschnitt 3] entnommen wurden.

Lemma 3.2.31 Sei $P(\xi) = a_1\xi^2 + a_2\xi + a_3 \in \mathbb{R}[\xi]$. Die Formel

$$\big(a_1 = 0 \land a_2 = 0 \land a_3 \geq 0\big) \lor \big(a_1 > 0 \land 4a_1a_3 - a_2^2 \geq 0\big) \tag{3.3}$$

ist eine zu

$$(\forall \xi)\ P(\xi) \geq 0 \tag{3.4}$$

äquivalente quantorenfreie Formel.

Beweis:

i) Wir wollen (3.3) $\Rightarrow$ (3.4) zeigen. Gelte $\big(a_1 = 0 \land a_2 = 0 \land a_3 \geq 0\big)$, dann folgt $P(\xi) = a_3 \geq 0$. Dies impliziert bereits (3.4).

Sei nun $\big(a_1 > 0 \land 4a_1a_3 - a_2^2 \geq 0\big)$ erfüllt. Die (komplexen) Nullstellen von P sind gegeben durch:

$$\eta_{1,2} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}}{2a_1}. \tag{3.5}$$

Für $4a_1a_3 - a_2^2 = 0$ besitzt P genau eine doppelte Nullstelle η. Es folgt:

$$P(\xi) = \underbrace{a_1}_{>0}\underbrace{(\xi - \eta)^2}_{\geq 0} \geq 0.$$

Ist $4a_1a_3 - a_2^2 > 0$ erfüllt, so besitzt P keine reelle Nullstelle. Aus $a_1 > 0$ folgt, dass der Graph von P komplett oberhalb der ξ-Achse verläuft und somit (3.4) impliziert wird. Insgesamt erhalten wir die gewünschte Implikation.

ii) Wir wollen (3.3) $\Leftarrow$ (3.4) zeigen. Wir unterscheiden die Fälle $a_1 = 0$ und $a_1 \neq 0$.

Gelte $a_1 = 0$ dann wird $P(\xi) = a_2\xi + a_3$ impliziert. Aus (3.4) folgt bereits

$$a_2 = 0 \wedge a_3 \geq 0,$$

weil ξ nur noch mit einem ungeraden Exponenten in der Formel enthalten ist (vgl. Lemma 2.2.36).

Betrachten wir nun den Fall $a_1 \neq 0$. In einem ersten Schritt wollen wir beweisen, dass (3.4) impliziert, dass P höchstens eine doppelte Nullstelle besitzen kann. Nehmen wir an, dass P zwei verschiedene Nullstellen η_1 und η_2 besitzt. Diese Nullstellen sind so indiziert, dass $\eta_1 < \eta_2$ gilt. Das Polynom P lässt sich dann durch

$$P(\xi) = a_1(\xi - \eta_1)(\xi - \eta_2)$$

darstellen. Wir wählen $\underline{\xi} \in (\eta_1, \eta_2)$ und $\overline{\xi} \in (\eta_2, \infty)$. Es folgt:

$$P(\underline{\xi}) = a_1 \underbrace{(\underline{\xi} - \eta_1)}_{>0} \underbrace{(\underline{\xi} - \eta_2)}_{<0},$$
$$P(\overline{\xi}) = a_1 \underbrace{(\overline{\xi} - \eta_1)}_{>0} \underbrace{\overline{\xi} - \eta_2)}_{>0}.$$

Dies impliziert:

$$\operatorname{sgn}(P(\underline{\xi})) = -\operatorname{sgn}(a_1) \quad \text{und} \quad \operatorname{sgn}(P(\overline{\xi})) = \operatorname{sgn}(a_1).$$

Da $\operatorname{sgn}(a_1) \neq 0$ gilt, folgt, dass P zwei verschiedene Vorzeichen annimmt. Dies ist ein Widerspruch zu (3.4). Somit besitzt P unter den gegebenen Voraussetzungen höchstens eine doppelte Nullstelle. Für die Diskriminante (vgl. Gleichung (3.5)) folgt:

$$a_2^2 - 4a_1a_3 \leq 0 \Leftrightarrow 4a_1a_3 - a_2^2 \geq 0.$$

Zusätzlich können wir aus (3.4) folgern, dass $a_1 > 0$ gelten muss und wir erhalten die gewünschte Implikation.

Fassen wir i) und ii) zusammen dann erhalten wir die gewünschte Äquivalenz von Formel (3.3) und Formel (3.4). $\square$

Lemma 3.2.32 Sei $P(\xi_1, \xi_2) = a_1\xi_1^4 + a_2\xi_1^2\xi_2 + a_3\xi_2^2 \in \mathbb{R}[\xi_1, \xi_2]$. Die Formel

$$\big(a_3 > 0 \wedge 4a_1a_3 - a_2^2 \geq 0\big) \vee \big(a_2 = 0 \wedge a_3 = 0 \wedge a_1 \geq 0\big) \tag{3.6}$$

ist eine zu

$$(\forall \xi_1)(\forall \xi_2)\ P(\xi_1, \xi_2) \geq 0 \tag{3.7}$$

äquivalente quantorenfreie Formel.

Beweis: Für $\xi_1 = 0$ gilt:

$$(\forall \xi_2) P(0, \xi_2) = a_3 \xi_2^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_3 \geq 0.$$

Somit können wir uns auf den Fall $\xi_1 \neq 0$ beschränken. Wir erhalten das äquivalente Problem:

$$(\forall \xi_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall \xi_2)\ P(\xi_1, \xi_2) \geq 0 \wedge a_3 \geq 0.$$

Dividieren wir durch ξ_1^4 und definieren die neue Variable

$$x := \frac{\xi_2}{\xi_1^2},$$

so erhalten wir die äquivalente Formel:

$$(\forall x)\ a_3 x^2 + a_2 x + a_1 \geq 0.$$

Insbesondere ist $a_3 \geq 0$ eine notwendige Bedingung damit die obige Formel gültig ist und kann daher weggelassen werden. Wenden wir nun Lemma 3.2.31 an, so erhalten wir direkt die gewünschte Aussage. □

Lemma 3.2.33 Sei $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = a_1 \xi_1^6 + a_2 \xi_1^4 \xi_2 + a_3 \xi_1^3 \xi_3 + a_4 \xi_1^2 \xi_2^2 + a_5 \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \xi_3^2 \in \mathbb{R}[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$. Die Formel

$$\begin{aligned} &\big(4a_4 - a_5^2 > 0 \wedge 4a_1 a_4 - a_1 a_5^2 - a_2^2 - a_3^2 a_4 + a_2 a_3 a_5 \geq 0\big) && (3.8) \\ \vee \quad &\big(4a_4 - a_5^2 = 0 \wedge 2a_2 - a_3 a_5 = 0 \wedge 4a_1 - a_3^2 \geq 0\big) && (3.9) \end{aligned}$$

ist eine zu

$$(\forall \xi_1)(\forall \xi_2)(\forall \xi_3)\ P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \geq 0 \tag{3.10}$$

äquivalente quantorenfreie Formel.

Beweis: Für $\xi_1 = 0$ gilt:

$$(\forall \xi_2)(\forall \xi_3) P(0, \xi_2, \xi_3) = \xi_3^2 \geq 0.$$

Somit können wir uns auf den Fall $\xi_1 \neq 0$ beschränken. Wir wollen die ursprüngliche Formel in eine Gestalt bringen, sodass wir Lemma 3.2.31 anwenden können. Sei also $\xi_1 \neq 0$ dann ist die ursprüngliche Formel äquivalent zu:

$$(\forall \xi_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall \xi_2)(\forall \xi_3)\ P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \geq 0.$$

Wir dividieren durch ξ_1^6 und definieren die neuen Variablen

$$y := \frac{\xi_2}{\xi_1^2} \quad \text{und} \quad z := \frac{\xi_3}{\xi_1^3}.$$

Somit erhalten wir die äquivalente Formel:

$$(\forall y)(\forall z)\ \underbrace{(a_1 + a_2y + a_3z + a_4y^2 - a_5yz + z^2)}_{=:G(y,z)} \geq 0.$$

Wir fassen G als ein quadratisches Polynom in z auf:

$$G(y,z) = z^2 + (a_3 + a_5y)z + (a_1 + a_2y + a_4y^2).$$

Wenden wir Lemma 3.2.31 auf $(\forall z)\ G(y,z)$ an, so erhalten wir die zu (3.10) äquivalente Formel:

$$(\forall y)\ \underbrace{4 \cdot 1 \cdot (a_1 + a_2y + a_4y^2) - (a_3 + a_5y)^2}_{=:H(y)} \geq 0.$$

Wir können das quadratische Polynom H darstellen, als:

$$H(y) = \tilde{a}_1y^2 + \tilde{a}_2y + \tilde{a}_3,$$

wobei wir

$$\tilde{a}_1 := 4a_4 - a_5^2, \quad \tilde{a}_2 := 4a_2 - 2a_3a_5 \quad \text{und} \quad \tilde{a}_3 := 4a_1 - a_3^2$$

definiert haben. Wenden wir wieder Lemma 3.2.31 auf $(\forall y)\ H(y)$ an, so erhalten wir:

$$(3.10) \Leftrightarrow \big(\tilde{a}_1 > 0 \wedge 4\tilde{a}_1\tilde{a}_3 - \tilde{a}_2^2\big) \vee \big(\tilde{a}_1 = 0 \wedge \tilde{a}_2 = 0 \wedge \tilde{a}_3 \geq 0\big).$$

Nun müssen wir für $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ und $\tilde{a}_3$ einsetzen und erhalten direkt das gewünschte Resultat. Insbesondere ist zu beachten, dass

$$4\tilde{a}_1\tilde{a}_3 - \tilde{a}_2^2 = 16(4a_1a_4 - a_1a_5^2 - a_2^2 - a_3^2a_4 + a_2a_3a_5)$$

gilt. □

Anmerkung 3.2.34 Die Polynome in Lemma 3.2.32 und Lemma 3.2.33 sind Beispiele für Polynome aus dem Raum $\mathcal{P}_3$ bzw. $\mathcal{P}_6$ in Normalform. Wir werden die entsprechenden Lemmata verwenden, um Lyapunov-Funktionale zu bestimmen indem wir die Quantorenelimination ohne computergestützte Hilfe durchführen. ○

Kapitel 4

Computergestützte Aspekte

Ziel dieses Kapitels ist es, die Anzahl der zulässigen Multiindizes in der Menge $\mathcal{I}_k$ zu bestimmen. Dies liefert uns eine Antwort auf die Frage wie viele Verschiebungspolynome existieren und können wir nützen, um den benötigten Aufwand für unsere polynomiellen Entscheidungsprobleme nach oben abschätzen zu können. Insbesondere ist das asymptotische Wachstum der Anzahl an Variablen von Interessen.

Prinzipielle kann unser Verfahren zur Bestimmung von Lyapunov-Funktionalen vollständig von einem Computer durchgeführt werden. In Kapitel 3 haben wir bereits Programme zur Lösung von polynomiellen Entscheidungsproblemen kennen gelernt. Um die entsprechenden Entscheidungsprobleme aufzustellen, müssen wir alle Verschiebungspolynome berechnen. Hierfür benötigen wir alle zulässigen Multiindizes $\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$. Diese können für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ algorithmisch berechnet werden.

4.1 Diophantische Gleichungen

Wir haben alle zulässigen Multiindizes $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^k$ als Lösung der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot k_i = k \tag{4.1}$$

charakterisiert. Dies ist ein Spezialfall folgenden Typs an Gleichungen:

Definition 4.1.1 (*Lineare diophantische Gleichung*) Sei $r \in \mathbb{N}_\times$, $n \in \mathbb{N}$ und $(a_i)_{i=1,\dots,r} \subseteq \mathbb{Z}$. Wir bezeichnen eine Gleichung der Form

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \cdot k_i = n \tag{4.2}$$

als eine *lineare diophantische Gleichung* und $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^n$ als dessen Lösung (vgl. [7, Abschnitt 1]).

Unsere ursprüngliche Gleichung ist somit eine lineare diophantische Gleichung mit $a_i = i, r = k$ und $n = k$. Die Anzahl der nichtnegativen Lösungen kann bequem per Formel angegeben werden:

Satz 4.1.2 Die Anzahl der nichtnegativen Lösungen $J(n)$ von (4.2) ist gegeben durch:

$$J(n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n\varphi}{dx^n}(0) \quad \text{mit} \quad \varphi(x) := \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1-x^{a_i}},$$

(vgl. [21, Abschnitt 1]).

Beweis: Wir entwickeln $(1-x^{a_i})^{-1}$ in eine geometrische Reihe. Es folgt:

$$\frac{1}{1-x^{a_i}} = \sum_{j=1}^{\infty}(x^{a_i})^j = \sum_{j=1}^{\infty} x^{a_i j} \quad \text{für} \quad x \in (-1,1).$$

Induktiv können nun alle höheren Ableitungen bestimmt werden:

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{1-x^{a_i}} = \frac{d^m}{dx^m}\sum_{j=1}^{\infty} x^{a_i j} = \sum_{j=m}^{\infty}(a_i j \cdot \ldots \cdot a_i j - m + 1)x^{a_i j - m}.$$

Der einzige nichtverschwindende Summand an der Stelle $x = 0$ muss die Bedingung $a_i j - m = 0$ erfüllen. Dies impliziert:

$$\left.\frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{1-x^{a_i}}\right|_{x=0} = \sum_{j=m}^{\infty}(a_i j \cdot \ldots \cdot a_i j - m + 1)\ \delta_{a_i j, m} = \sum_{j=m}^{\infty} m!\ \delta_{a_i j, m}.$$

Wir erhalten:

$$\left.\frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{1-x^{a_i}}\right|_{x=0} = \begin{cases} m! & \text{für } \exists j \in \mathbb{N}:\ a_i j = m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch Anwendung der Produktregel auf $\varphi(x)$ folgt:

$$J(n) = \frac{1}{n!}\sum_{\substack{\boldsymbol{l}\in\mathbb{N}^r,\\ |\boldsymbol{l}|=n}} \frac{n!}{l_1! \cdot \ldots \cdot l_n!}\prod_{i=1}^{r}\left.\frac{d^{l_i}}{dx^{l_i}}\frac{1}{1-x^{a_i}}\right|_{x=0} = \sum_{\boldsymbol{l}\in\mathcal{L}}\frac{1}{l_1! \cdot \ldots \cdot l_n!}\prod_{i=1}^{r} l_i! = \sum_{\boldsymbol{l}\in\mathcal{L}} 1,$$

wobei die Indexmenge $\mathcal{L}$ definiert ist als:

$$\mathcal{L} := \{\boldsymbol{l} \in \mathbb{N}^r : |\boldsymbol{l}| = n,\ \forall i = 1,\ldots,r\ \exists j_i \in \mathbb{N}:\ a_i j_i = l_j\}.$$

Die Bedingung $|\boldsymbol{l}| = n$ impliziert, dass $\boldsymbol{j} = (j_1,\ldots,,j_r)$ für alle $\boldsymbol{l} \in \mathcal{L}$ eine nichtnegative Lösung von (4.2) ist. Andererseits impliziert jede nichtnegative Lösung $\boldsymbol{k}$ von (4.2) einen Multiindex $\boldsymbol{l} \in \mathcal{L}$ über:

$$l_i := a_i k_i, \quad i = 1,\ldots,r.$$

Zusammenfassend können wir schreiben:

$$J(n) = \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^r\\ a_1k_1+\ldots+a_rk_r=n}} 1. \tag{4.3}$$

Dies schließt den Beweis ab. $\square$

Anmerkung 4.1.3 Satz 4.1.2 liefert das gewünschte Resultat, jedoch ist die Berechnung der Ableitung problematisch, weil sich diese nicht in einfacher geschlossener Form darstellen lässt. Um dieses Problem zu umgehen, haben wir im Beweis die entsprechenden Brüche in Potenzreihen entwickelt, weil sich so die gewünschten höheren Ableitungen einfach berechnen lassen. In der Praxis bedeutet dies jedoch, dass eine Potenzreihenentwicklung nicht zielführend ist, wenn wir mittels Satz 4.1.2 die Anzahl an nichtnegativen Lösungen bestimmen wollen, weil wir bereits die gesuchte Anzahl kennen müssten, wenn wir Gleichung (4.3) auswerten wollen. $\circ$

Möchten wir Satz 4.1.2 anwenden, so können wir die gesuchte Ableitung mittels eines Computeralgebrasystems (z.B. `Maple` oder `Wolfram Mathematica`) berechnen. In [21] ist eine weitere Variante vorgestellt wie die gesuchte Anzahl an Lösungen von (4.2) berechnet werden kann.

Die Theorie über lineare diophantische Gleichungen liefert überdies auch noch Lösungsalgorithmen (vgl. [7]). Hier gilt jedoch zu beachten, dass Gleichung (4.2) im Allgemeinen abzählbar viele Lösungen besitzt. Dies führt zu folgender Definition:

Definition 4.1.4 (*Minimale Lösung*) Auf der Menge $\mathbb{N}^r$ ist über

$$\boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{k} \Leftrightarrow l_i \leq k_i \ \forall i = 1, \ldots, r$$

eine Teilordnung definiert. Wir nennen eine Lösung $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$ von (4.2) *minimal*, wenn sie minimal bezüglich der obigen Teilordnung ist (vgl. [7, Abschnitt 1]).

Anmerkung 4.1.5 Seien $\boldsymbol{l}$ und $\boldsymbol{k}$ zwei verschiedene nichtnegative Lösungen von (4.1). Dann gilt:

$$\exists i \in \{1, \ldots, k\} : l_i < k_i \Rightarrow \exists j \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i\} : l_i > k_i.$$

Somit sind $\boldsymbol{l}$ und $\boldsymbol{k}$ nicht bzgl. der Teilordnung auf $\mathbb{Z}^k$ vergleichbar. Dies impliziert, dass alle nichtnegativen Lösungen von (4.1) minimal sind. Da minimale Lösungen per Definition nichtnegativ sind, folgt, dass alle nichnegativen Lösungen unserer Bestimmungsgleichung (4.1) durch die Menge $\mathcal{I}_k$ beschrieben werden. $\circ$

Entscheidend ist, dass die Menge aller minimalen Lösungen von (4.2) immer endlich ist (vgl. [7, Lemma 1]). Entsprechende Lösungsalgorithmen können daher in sinnvoller Art und Weise alle minimalen Lösungen berechnen. Mit Anmerkung 4.1.5 folgt, dass wir die Menge $\mathcal{I}_k$ algorithmisch bestimmen können. Diese Vorgehensweise besitzt jedoch den Nachteil, dass die Überprüfung, ob eine gefundene Lösung tatsächlich minimal ist den meisten Aufwand in entsprechenden Algorithmen für lineare diophantische Gleichungen beansprucht (vgl. [7, Abschnitt 2]).

4.2 Ein Partitionierungsproblem

Lineare diophantische Gleichungen bilden einen allgemeinen Rahmen in dem unsere Bestimmungsgleichung (4.1) gelöst werden kann. Die Resultate aus dem vorherigen Abschnitt sind jedoch für unsere Zwecke nur bedingt brauchbar. Dies ist damit zu begründen, dass wir die konkrete Darstellung von (4.1) nicht berücksichtigt haben, sondern die allgemeinere Gleichung (4.2) betrachtet haben.

Definition 4.2.6 (*Partition*) Sei $k \in \mathbb{N}_\times$. Wir nennen $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_r)$ eine *Partition* von n, wenn gilt:

$$|\boldsymbol{b}| = \sum_{i=1}^{r} b_i = k \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} \in (\mathbb{N}_\times)^r,$$

wobei wir zusätzlich noch fordern, dass

$$b_1 \geq b_2 \ldots \geq b_r$$

erfüllt ist (vgl. [23, Kapitel 15]).

Definition 4.2.7 (*Partitionsfunktion*) Sei $k \in \mathbb{N}_\times$. Die Anzahl an möglichen Partitionen bezeichnen wir mit $p(k)$ und die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{N}_\times \to \mathbb{N}_\times \\ k \mapsto p(k) \end{cases}$$

bezeichnen wir als *Partitionsfunktion* (vgl. [23, Kapitel 15]).

Ein Partitionierungsproblem und Gleichung (4.1) können wir im Wesentlichen als unterschiedliche Beschreibung des gleichen Problems bezeichnen. Jede Partition $\boldsymbol{b}$ der Zahl k induziert durch

$$k_i = \Big|\big\{j \in \{1, \ldots, r\} : b_j = i\big\}\Big|, \quad i = 1, \ldots, k$$

einen zulässigen Multiindex $\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$. Andererseits erzeugt jeder zulässige Multiindex $\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$ ein Partition der Zahl k über:

$$\underbrace{k + \ldots + k}_{k_k \text{ mal}} + \ldots + \underbrace{2 + \ldots + 2}_{k_2 \text{ mal}} + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{k_1 \text{ mal}} = \sum_{i=1}^{k} i \cdot k_i = k.$$

Wir erhalten:

Lemma 4.2.8 Sei $k \in \mathbb{N}_\times, r = k$ und $a_i = i, \ \forall i = 1, \ldots, k$. Dann gilt:

$$J(k) = p(k).$$

Für unsere Zecke ist wichtig, dass die Anzahl an möglichen Partitionen rekursiv und asymptotisch angegeben werden kann:

Satz 4.2.9 Sei $k \in \mathbb{N}_\times$. Dann gilt:

i) Die Partitionsfunktion erfüllt die Rekursion

$$k \cdot p(k) = \sum_{\substack{n,v=1,\\ n \cdot v \leq k}}^{k} vp(k - v \cdot n).$$

ii) Die Funktion

$$p_{app} : \mathbb{N}_\times \to \mathbb{N}_\times : k \mapsto \frac{e^{\pi\sqrt{(2/3)k}}}{4\sqrt{3}k}$$

ist asymptotisch gleich zu p, das heißt es gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{p(k)}{p_{app}(k)} \right| = 1.$$

Wir schreiben auch $p_{app} \sim p$.

Es sei hier auf [23, Kapitel 15] für Beweise und weiterführende Referenzen zu Satz 4.2.9 verwiesen. Der Ausdruck $p_{app} \sim p$ wird auch Hardy-Ramanujan Formel genannt.

Satz 4.2.9 und Satz 4.2.9 beantworten die Frage nach der Anzahl der zulässigen Multiindizes $\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$ vollständig. Wir haben zur Berechnung sowohl eine Formel, als auch eine Rekursion und eine asymptotische Formel zu Verfügung. In Tabelle 4.1 wurde p und p_{app} für einige Werte von k berechnet.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p(k)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56
$p_{app}(k)$	2	3	4	6	9	13	18	26	35	48	65

Tabelle 4.1: Auflistung von $p(k)$ und $p_{app}(k)$ für verschiedene Werte von k. Um die Übersicht zu erhöhen, wurden die Werte von $p_{app}(k)$ auf die nächste ganze Zahl gerundet.

Die asymptotische Formel p_{app} ist für uns von Interesse, weil wir schließen können, dass die Anzahl der Verschiebungspolynome schneller als jedes Polynom wächst. Im Hinblick auf Satz 3.2.30 ist dies ungünstig.

Unter diesem Aspekte ist es sinnvoll einen anderen Algorithmus zu suchen, um die Quantorenelimination durchzuführen. In [2, Kapitel 14] ist solch ein Algorithmus angegeben. Auch hier ist der Aufwand exponentiell in der Anzahl der Variablen, jedoch nicht doppelt exponentiell. Der Nachteil an dem in [2] vorgeschlagenen Algorithmus ist, dass wir auf keine konkrete Implementierung zugreifen können.

Für Partitionierungsprobleme existieren geeignete Lösungsalgorithmen (vgl. [27]), welche wir verwenden können, um alle zulässigen Multiindizes $\boldsymbol{k} \in \mathcal{I}_k$ zu berechnen. Es ist insbesondere hervorzuheben, dass Algorithmen existieren, die dies in $\mathcal{O}(k \cdot p(k))$ Rechenschritten bewerkstelligen (vgl [27, Abschnitt 7]). Im Anschluss müssen wir nur die erhaltenen Partitionen in zulässige Multiindizes umschreiben. Pro Partition brauchen wir hierfür maximal k-Rechenschritte, daher ist hier nicht mit einem wesentlichen Mehraufwand zu rechnen. Ein entsprechender Algorithmus ist aus Gründen der Vollständigkeit in Algorithmus 1 angegeben.

Algorithm 1: Umschreiben einer Partition in einen zulässigen Multiindex.

Input : Eine Partition $\boldsymbol{b}$ der Zahl k
Output: Ein zulässiger Multiindex $\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{k} := (0, \ldots, 0)$; `// ein Vektor der Länge` k
foreach $b \in \boldsymbol{b}$ **do**
| $k[b] = k[b] + 1$;
end
return $\boldsymbol{k}$;

4.3 Zusammenfassung

Eine vollständige Implementierung des in Kapitel 2 vorgestellten Algorithmus zur Bestimmung von Lyapunov-Funktionalen ist möglich. Folgende Probleme treten jedoch auf:

i) Die Mächtigkeit der Menge $\mathcal{I}_k$ wächst schneller als jedes Polynom in k.
ii) Algorithmen zur Quantorenelimination sind sehr rechenaufwendig.

Von einer konkreten Implementierung können wir daher nur für kleine $k \in \mathbb{N}$ eine annehmbare Rechenzeit erwarten. Für eine Dünnfilmgleichung 6. Ordnung ($k = 5$, vgl. Kapitel 5) ist bereits das Rechenlimit auf einem handelsüblichen Computer erreicht (zwei Prozessorkerne je 2,5 GHz und 4 GB Arbeitsspeicher). In einem Vorverarbeitungsschritt sollte immer die Anzahl der Variablen in (3.1) und (3.2) reduziert werden (vgl. Abschnitt 3.2.1), um den Rechenaufwand zu minimieren.

Anmerkung 4.3.10 Die in diesem Abschnitt betrachteten Aspekte sollten von uns auch beachtet werden, wenn wir den Algorithmus ohne computergestützte Hilfe durchführen. Einzelne Teile, wie z.B. die Berechnung der zulässigen Multiindizes oder die Bildung der Verschiebungspolynome, können auch für große $k \in \mathbb{N}$ effizient an einen Computer ausgelagert werden. ○

Kapitel 5

Dünnfilmgleichungen

Unser Ziel für dieses Kapitel ist es, Lyapunov-Funktionale für Dünnfilmgleichungen 4. und 6. Ordnung zu bestimmen.

5.1 Ein Existenzresultat

Satz 5.1.1 (*Existenzsatz*) Sei $m \in \mathbb{N}_\times, T > 0, \beta > 1$ und $(-a_0, a_0) \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Wir definieren:

$$\Omega := (-a_0, a_0) \quad \text{und} \quad \Omega_T := (0, T) \times \Omega.$$

Wir betrachten das Problem:

Gesucht ist eine Funktion $u : \overline{\Omega_T} \to \mathbb{R}$ *mit:*

$$\begin{aligned} u_t = (-1)^m \Big(|u|^\beta \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}} \Big)_x \qquad & \text{in} \quad \Omega_T, \\ u(0) = u_0 \qquad & \text{in} \quad \Omega, \end{aligned} \tag{5.1}$$

und der Randbedingung:

$$\partial_x^{2i+1} u = 0, \quad i = 0, \ldots, m \quad \text{auf} \quad (0, T) \times \partial\Omega. \tag{5.2}$$

Dann existiert für jede Anfangsbedingung $u_0 \in H^m$ eine Funktion $u \in C(\overline{\Omega_T})$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Die Funktion u ist eine klassische Lösung von (5.1) auf der Menge:

$$\omega_T := \overline{\Omega_T} \setminus (\{u = 0\} \cup \{t = 0\}).$$

Dies bedeutet, dass gilt:

$$u_t \in C(\omega_T),$$
$$\partial_x^i u \in C(\omega_T) \quad \text{für} \quad i = 0, \dots, 2m+2,$$

wobei die obigen Ableitungen im klassischen Sinn aufzufassen sind.

ii) Die Randbedingung (5.2) ist auf $(0,T) \times \partial\Omega \setminus \{u = 0\}$ punktweise erfüllt.

iii) Es gilt:

$$|u|^\beta \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}} \in L^2(\omega_T).$$

iv) Für alle $\varphi \in C^{0,1}(\overline{\Omega_T})$ mit

$$\text{supp } \varphi(.,x) \subsetneq (0,T) \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

gilt:

$$\iint\limits_{\Omega_T} u\varphi_t \; dx \; dt + \iint\limits_{\omega_T} |u|^\beta \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}} \varphi_x \; dx \; dt = 0.$$

(vgl. [4, Theorem 3.1 und Theorem 7.1]).

Anmerkung 5.1.2 Fordern wir zusätzlich die Bedingung $u \geq 0$, so besitzt (5.1) die Form unseres Grundproblems (Definition 2.1.2) mit:

$$P(\boldsymbol{\xi}) = (-1)^m \xi_{2m+1} \in \mathcal{P}_{2m+1}.$$

Gleichungen dieser Form können wir auch als *Dünnfilmgleichung der Ordnung* $2m+2$ bezeichnen. Für $m = 1$ erhalten wir die Dünnfilmgleichung 4. Ordnung, welche wir bereits in Kapitel 1 kennen gelernt haben. Für $m = 2$ erhalten wir die Dünnfilmgleichung 6. Ordnung, welche in diesem Kapitel genauer betrachtet wird. ⬡

Anmerkung 5.1.3 Satz 5.1.1 impliziert einen Regularitätsgewinn auf der Menge ω_T, weil die Anfangsbedingung nur $u_0 \in H^m(\Omega)$ erfüllen muss. Mit dem Einbettungssatz von Sobolev (vgl. [1, Abschnitt 8.13]) folgt insbesondere, dass die Anfangsbedingung nur aus dem Raum $C^{m-1}(\Omega)$ ist, jedoch ist u eine klassische Lösung auf der Menge ω_T. ⬡

Eine heuristische Betrachtung von Gleichung (5.1) legt die Vermutung nahe, dass wir mit einem Regularitätsverlust an jenen Punkten rechnen müssen an denen die Diffusion $|u|^\beta$ verschwindet. Satz 5.1.1 untermauert diese Vermutung. Da wir klassische Lösungen auf $\overline{\Omega_T}$ betrachten wollen, müssen wir gewährleisten, dass $\{u = 0\} = \emptyset$ gilt. Im nächsten Satz ist ein entsprechendes Resultat vorgestellt:

Satz 5.1.4 (*Nichtnegativität*) Es gelten die Voraussetzungen von Satz 5.1.1 und zusätzlich soll $u_0 > 0$ erfüllt sein. Wir definieren:

$$\beta^* := \begin{cases} 4 & \text{für } m = 1 \\ \frac{8}{3} & \text{für } m = 2 \\ \frac{5}{2} & \text{für } m \geq 3. \end{cases}$$

Dann gilt für die Lösung u aus Satz 5.1.1:

i) Für $1 < \beta < 2$ gilt:

$$u \geq 0 \quad \text{in} \quad \Omega_T.$$

ii) Für $2 \leq \beta < \beta^*$ gilt:

$$u \geq 0 \quad \text{in} \quad \Omega_T \quad \text{und} \quad \text{meas}(\{u = 0\}) = 0.$$

iii) Für $\beta^* \leq \beta$ gilt:

$$u > 0 \quad \text{in} \quad \overline{\Omega_T}.$$

iv) Für $\beta \geq 4$ ist die Lösung u eindeutig.

(vgl. [4, Theorem 4.1 und Theorem 7.2]).

Kombinieren wir Satz 5.1.1 und Satz 5.1.4, so können wir für hinreichend große β auf die Existenz von klassischen Lösungen für Gleichung (5.1) schließen sofern wir eine positive glatte Anfangsbedingung voraussetzen, welche die entsprechende Randbedingung erfüllt.

Anmerkung 5.1.5 Wollen wir nicht nur ein symmetrisches Intervall, sondern ein beschränktes nichtleeres Intervall der Form (a, b) betrachten, so können wir dies mit einer linearen Transformation in x und t bewerkstelligen. Für ein beliebiges $a_0 > 0$ definieren wir:

$$c := \frac{2a_0}{b-a} \quad \text{und} \quad d := -\frac{2a_0(a+b)}{b-a}.$$

Wir können somit die neuen Variablen

$$\tilde{x} := cx + d \quad \text{und} \quad \tilde{t} := c^{2m+2}t$$

betrachten. Die Gleichung

$$u_t = (-1)^m \Big(|u|^\beta \frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m+1}}\Big)_x \quad \text{in} \quad (0,T) \times (a,b)$$

geht durch die entsprechende Koordinatentransformation über in

$$c^{2m+2}\ u_{\tilde{t}} = c^{2m+2}\ (-1)^m \Big(|u|^\beta \frac{\partial^{2m+1}u}{\partial \tilde{x}^{2m+1}}\Big)_{\tilde{x}} \quad \text{in} \quad (0, c^{2m+2}T) \times (-a_0, a_0).$$

Kürzen wir den entsprechenden Faktor auf beiden Seiten, so können wir nun problemlos Satz 5.1.1 und Satz 5.1.4 anwenden. ○

5.2 Eine Dünnfilmgleichung 4. Ordnung

Wir betrachten eine Dünnfilmgleichung 4. Ordnung:

$$u_t = -(u^\beta u_{xxx})_x,$$

mit $\beta > 0$ (vgl. Abschnitt 1.2). Im Kontext unseres Grundproblems (Definition 2.1.2) ergibt sich das Polynom P zu:

$$P(\boldsymbol{\xi}) = -\xi_3.$$

Die Funktion $u(t,x)$ können wir als Höhe eines (newtonschen) Flüssigkeitsfilms interpretieren. Für Aspekte der Modellierung sei auf [10, Abschnitt 7.11] verwiesen. Als mögliche Anwendung ergeben sich z.B. Hele-Shaw-Flüsse (vgl. [24, Abschnitt VI.D]).

Die Bedingung $u(t,x) = 0$ entspricht einem Riss im Flüssigkeitsfilm zu dem Zeitpunkt t an der Stelle x. Betrachten wir dies im Zusammenhang mit Satz 5.1.1 und Satz 5.1.4, so können wir davon ausgehen, dass Risse im Flüssigkeitsfilm im Allgemeinen Unstetigkeiten in den Ableitungen von u hervorrufen werden.

Satz 5.1.4 lässt sich für unsere Dünnfilmgleichung 4. Ordnung in folgender Weise verbessern:

Satz 5.2.6 Es gelten die Voraussetzungen von Satz 5.1.1. Darüber hinaus sei $m = 1$. Dann gilt:

i) Für $\beta \geq 3/2$ ist der Träger der Funktion u monoton wachsend in der Zeit. Dies bedeutet:

$$\text{supp } u(t_1,.) \subseteq \text{supp } u(t_2,.) \quad \forall t_2 \geq t_1.$$

ii) Für $\beta \geq 7/2$ und $x_0 \in \overline{\Omega}$ gilt:

$$u(t_0,x_0) > 0 \Rightarrow u(t_1,x_0) > 0 \quad \forall t_1 \geq t_0.$$

(vgl. [3, Abschnitt 0]).

Anmerkung 5.2.7 Satz 5.1.1 und Satz 5.2.6 ii) implizieren, dass unsere Grundhypothese (Definition 2.1.6) für den Fall $\beta \geq 7/2$ und der Randbedingung (RB2) erfüllt ist. Da der Träger einer Funktion per Definition immer abgeschlossen ist folgt, dass Satz 5.2.6 i) nicht hinreichend ist. ○

Anmerkung 5.2.8 Wir haben in den vorgestellten Existenzresultaten $\beta > 1$ vorausgesetzt. Für den Fall $\beta \in (0, 1/2)$ ist es möglich für spezielle Anfangsbedingungen zu zeigen, dass der Flüssigkeitsfilm in endlicher Zeit reißt selbst wenn $u_0 > 0$ in $\overline{\Omega}$ erfüllt ist (vgl. [3, Abschnitt 0]). ○

5.2.1 Lyapunov-Funktionale für die Dünnfilmgleichung 4. Ordnung

Unser Ziel ist es, mit den Methoden aus Kapitel 2, Lyapunov-Funktionale zu bestimmen. Wir gehen analog zu [14, Abschnitt 3.2] vor.

Satz 5.2.9 (*Lyapunov-Funktionale für die Dünnfilmgleichung 4. Ordnung*) Sei u eine beliebige klassische Lösung der Dünnfilmgleichung 4. Ordnung[1] mit $u > 0$ in $\overline{\Omega_T}$. Dann gilt:

i) Für $\alpha + \beta \in [3/2, 3]$ gilt:

$$P_\alpha[u](t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Dies bedeutet, dass H_α ein Lyapunov-Funktional ist.

ii) Für $\alpha + \beta \in (3/2, 3)$ existiert ein $\kappa > 0$ mit:

$$P_\alpha[u](t) \geq \kappa \int_\Omega \left((u^{(\alpha+\beta)/2})_{xx}\right)^2 \, dx \quad \forall t \in [0, T]. \tag{5.3}$$

Beweis: Wir verwenden Satz 2.2.32 und benutzen den Algorithmus aus Abschnitt 2.2. Zusätzlich definieren wir $\gamma := \alpha + \beta$ und nummerieren die Verschiebungspolynome.

i) Um $P_\alpha[u] \geq 0$ schließen zu können, genügt es, wenn wir das Entscheidungsproblem (2.9) lösen. Das Polynom S_0 ergibt sich zu:

$$S_0(\boldsymbol{\xi}) = -\xi_1\xi_3.$$

Für (2.9) erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 \leq S_0 + c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3 = -\xi_1\xi_3 &+ c_1\big((\gamma-3)\xi_1^4 + 3\xi_1^2\xi_2\big) + c_2\big((\gamma-2)\xi_1^2\xi_2 + \xi_2^2 + \xi_1\xi_3\big) \\ &+ c_3\big((\gamma-1)\xi_1\xi_3 + \xi_4\big). \end{aligned}$$

Es folgt:

$$0 \leq (\gamma-3)c_1\xi_1^4 + \big(3c_1 + (\gamma-2)c_2\big)\xi_1^2\xi_2 + \big(-1 + c_2 + (\gamma-1)c_3\big)\xi_1\xi_3 + c_2\xi_2^2 + c_3\xi_4.$$

Aus Lemma 2.2.36 folgt, dass obiges Polynom Normalform besitzen muss. Mit Lemma 2.2.35 können wir schließen, dass die Koeffizienten vor $\xi_1\xi_3$ und ξ_4 trivial sein müssen (vgl. Anmerkung 2.2.37). Wir erhalten die Bedingungen:

$$-1 + c_2 + (\gamma-1)c_3 = 0 \quad \text{und} \quad c_3 = 0.$$

Dies impliziert $c_2 = 1$ und $c_3 = 0$. Wir definieren:

$$a_1 := (\gamma-3)c_1, \quad a_2 := 3c_1 + (\gamma-2) \quad \text{und} \quad a_3 := 1.$$

Damit genügt es das Entscheidungsproblem

$$(\exists c_1)(\forall \xi_1)(\forall \xi_2) \ (a_1\xi_1^4 + a_2\xi_1^2 + a_3\xi_2^2 \geq 0)$$

zu lösen. Mit Lemma 3.2.32 erhalten wir, dass ein c_1 mit

$$0 \leq 4a_1a_3 - a_2^2 = 4(\gamma-3)c_1 - \big(3c_1 + (\gamma-2)\big)^2 = -9c_1^2 - 2\gamma c_1 - (\gamma-2)^2 =: g(c_1)$$

[1] Vgl. Definition 2.1.2 mit $k = 3$ und $P(\boldsymbol{\xi}) = -\xi_3$.

existieren muss. Das Polynom $g(c_1)$ ist quadratisch in c_1. Die Existenz eines $c_1 \in \mathbb{R}$ ist dann und nur dann gewährleistet, wenn g mindestens eine reelle Nullstelle besitzt. Die (möglicherweise komplexen) Nullstellen von g sind durch

$$-\frac{\gamma}{9} \pm \frac{2}{9}\sqrt{-(2\gamma-3)(\gamma-3)} \tag{5.4}$$

gegeben. Wir erhalten für die Diskriminante:

$$-(2\gamma-3)(\gamma-3) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha+\beta=\gamma \in [3/2, 3].$$

Dies entspricht der gewünschten Behauptung.

ii) Wir müssen das modifizierte Entscheidungsproblem (2.12) lösen. Aus Beispiel 2.2.41 folgt:

$$F(\xi_1, \xi_2) = \frac{(\gamma)^2}{4}\left(\frac{(\gamma-2)^2}{4}\xi_1^4 + (\gamma-2)\xi_1^2\xi_2 + \xi_2^2\right).$$

Den Vorfaktor $\gamma^2/4 > 0$ können wir weglassen, weil andernfalls

$$\tilde{\kappa} := \kappa \cdot \frac{(\gamma)^2}{4} > 0$$

betrachtet werden kann. Für (2.12) erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 \leq &\left((\gamma-3)c_1 - \frac{\kappa}{4}(\gamma-2)^2\right)\xi_1^4 + \left(3c_1 + (\gamma-2)c_2 - \kappa(\gamma-2)\right)\xi_1^2\xi_2 \\ &+ \left(-1 + c_2 + (\gamma-1)c_3\right)\xi_1\xi_3 + (c_2-\kappa)\xi_2^2 + c_3\xi_4. \end{aligned}$$

Da obiges Polynom Normalform besitzen muss, folgt analog zu i), dass $c_2 = 1$ und $c_3 = 0$ gelten muss. Wir definieren:

$$\begin{aligned} b_1 &:= (\gamma-3)c_1 - \frac{\kappa}{4}(\gamma-2)^2 = a_1 - \frac{\kappa}{4}(\gamma-2)^2, \\ b_2 &:= 3c_1 + (\gamma-2) - \kappa(\gamma-2) = a_2 - \kappa(\gamma-2) \quad \text{und} \\ b_3 &:= 1-\kappa = a_3 - \kappa. \end{aligned}$$

Damit genügt es das Entscheidungsproblem

$$(\exists\kappa)(\exists c_1)(\forall\xi_1)(\forall\xi_2)\ (b_1\xi_1^4 + b_2\xi_1^2 + b3\xi_2^2 \geq 0)$$

zu lösen. Wir wählen $\kappa \in (0,1)$ und wenden Lemma 3.2.32 an, wobei wir $b_3 = 1-\kappa > 0$ berücksichtigen müssen. Es verbleibt zu zeigen, dass ein $\kappa \in (0,1)$ und ein $c_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$0 \leq 4b_1b_3 - b_2^2$$

existiert. Setzen wir für b_1, b_2 und b_3 ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \underbrace{4a_1a_3 - a_2^2}_{=g(c_1)\ \text{lt. i)}} + \kappa^2\underbrace{\left((\gamma-2)^2 - (\gamma-2)^2\right)}_{=0} + \kappa\underbrace{\left(-4a_1 - (\gamma-2)^2 + 2a_2(\gamma-2)\right)}_{=:h(c_1)} \\ &= g(c_1) + \kappa h(c_1). \end{aligned}$$

Wir können κh als Störung der Funktion g interpretieren. In einem ersten Schritt wählen wir ein $c_0 \in \mathbb{R}$ mit $g(c_0) > 0$. Dies ist für $\gamma \in (3/2, 3)$ möglich, weil die Funktion g zwei verschiedene reelle Nullstellen besitzt (vgl. Gleichung (5.4)). Wir wählen nun κ_0 hinreichend klein, sodass $|\kappa h(c_0)| \leq g(c_0)$ gilt. Es folgt:

$$0 \leq g(c_0) + \kappa_0 h(c_0).$$

Damit haben wir mit $c_1 := c_0$ und $\kappa := \kappa_0$ die gewünschten Zahlen gefunden. $\square$

Wir haben somit den Parameterbereich aus Abschnitt 1.2 verbessert. Darüber hinaus sind die angegebenen Intervalle aus Satz 5.2.9 optimal. Den Beweis werden wir analog zu [22, Abschnitt 5.1] führen. Eine Beweisskizze findet sich auch in [14, Lemma 3.3]. Folgender Satz liefert die Existenz einer speziellen Anfangsbedingung:

Satz 5.2.10 Es sei $\Omega := (0, \pi)$. Dann existiert eine Funktion $v_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Die Funktion v_0 nimmt nur positive Werte im Intervall $[0, \pi]$ an und erfüllt sowohl die Randbedingung (RB1) als auch die Randbedingung (RB2) für alle $k \in \mathbb{N}$ (unabhängig von t).
ii) Für $\gamma \in [3/2, 3]^\mathsf{c}$ gilt:

$$-\int_\Omega v_0^\gamma \, \frac{(v_0)_x}{v_0} \, \frac{(v_0)_{xxx}}{v_0} \; dx < 0.$$

Folgende technische Hilfsresultate werden von uns benötigt:

Lemma 5.2.11 Es gilt:

i) Für alle $\epsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt die Abschätzung:

$$\Big|\frac{\sin^2(x)\cos^2(x)}{\sin^2(x) + \epsilon}\Big| \leq 1.$$

ii) Für $\delta \in (0, 1)$ ist die Funktion $x \mapsto \sin(x)^{\delta - 1}$ auf $(0, \pi)$ integrierbar.
iii) Es gilt:

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_0^\pi \sin(x)^{\delta-1} \cos^4(x) \; dx = \infty.$$

Beweis:

i) Die gewünschte Abschätzung folgt direkt durch:

$$\Big|\frac{\sin^2(x)\cos^2(x)}{\sin^2(x) + \epsilon}\Big| \leq \Big|\frac{\sin^2(x)\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\Big| = \cos^2(x) \leq 1.$$

ii) Wir definieren die Funktion $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ durch:

$$g(x) := \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{für } x \in [0, \pi/2) \\ -\frac{2}{\pi}x + 2 & \text{für } x \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

Da $\sin(x)$ konkav auf dem Intervall $[0,\pi]$ ist, erhalten wir die Ungleichung:

$$\sin(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [0,\pi].$$

Für $\delta \in (0,1)$ folgt:

$$\sin(x)^{\delta-1} \leq g(x)^{\delta-1} \quad \forall x \in [0,\pi].$$

Die obigen Funktionen sind in Abbildung 5.1 dargestellt. Es folgt:

$$0 \leq \int_0^\pi \sin(x)^{\delta-1}\, dx \leq \int_0^\pi g(x)^{\delta-1}\, dx = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{\pi}x\right)^{\delta-1} dx = \frac{2}{\delta}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\delta-2} < \infty,$$

wobei wir verwendet haben, dass die Funktion g symmetrisch um $x = \pi/2$ ist. Dies beweist die Integrierbarkeit der Funktion $\sin(x)^{\delta-1}$.

iii) Sei $\delta \in (0,1)$. Wir schätzen ab:

$$\int_0^\pi \sin(x)^{\delta-1} \cos^4(x)\, dx \geq \int_0^{\pi/4} \sin(x)^{\delta-1} \cos(\pi/4)^4\, dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} \sin(x)^{\delta-1}\, dx.$$

Mit $\sin(x) \leq x$ für $x \geq 0$ folgt:

$$\int_0^\pi \sin(x)^{\delta-1} \cos^4(x)\, dx \geq \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} x^{\delta-1}\, dx = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right)^\delta \delta^{-1} \to \infty \quad \text{für} \quad \delta \to 0^+.$$

Wir haben somit die gewünschte Aussage bewiesen. $\square$

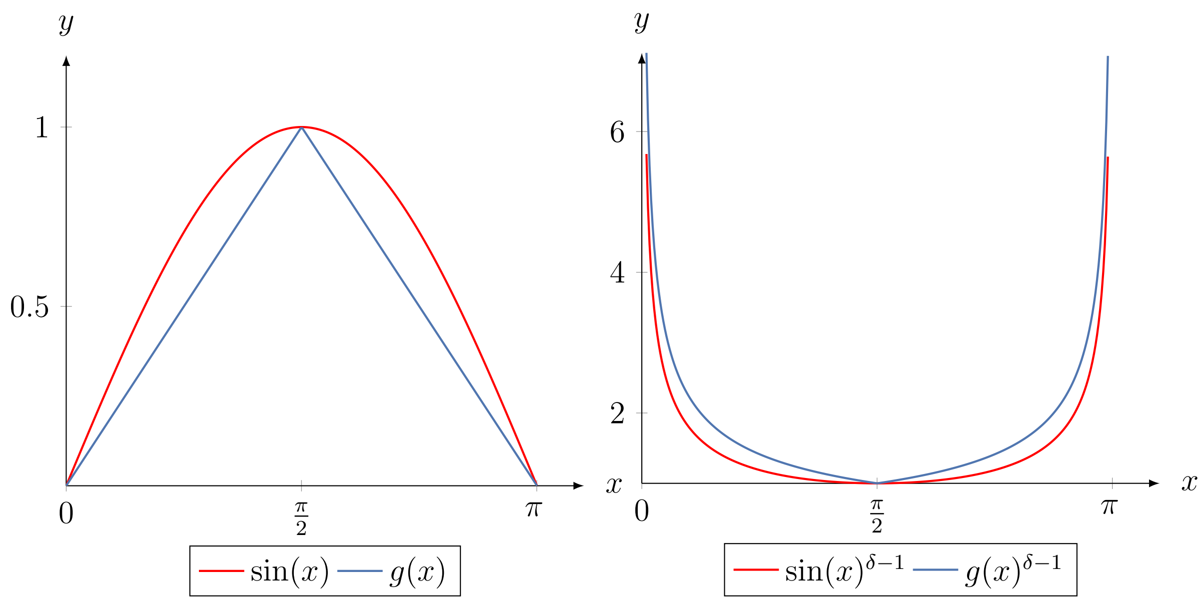


Abbildung 5.1: Darstellung der Funktionen aus dem Beweis von Lemma 5.2.11. Zur graphischen Darstellung wurde $\delta = 1/2$ gewählt.

Beweis (*von Satz 5.2.10*): Seien $\epsilon > 0$ und $\delta \in (0,1)$ zwei beliebige reelle Zahlen. Wir definieren:

$$\tau := \frac{3+\delta}{\gamma} > 0.$$

Die Funktion v sei durch

$$v := v(\epsilon, \delta) := \begin{cases} \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \big(\epsilon + \sin^2(x)\big)^{\tau/2} \end{cases}$$

gegeben. Wir wollen zeigen, dass v für hinreichend kleine Werte von ϵ und δ die gewünschten Eigenschaften besitzt.

i) Da $\epsilon > 0$ gilt, nimmt die Funktion $x \mapsto \epsilon + \sin(x)^2$ nur positive Werte an und wir können schließen, dass v die gewünschte Regularität besitzt. Trivialerweise erfüllt v die periodische Randbedingung (RB1), weil $\sin^2(x)$ eine periodische Funktion ist. Um (RB2) zu verifizieren, können wir die Formel von Faà di Bruno (Lemma 2.3.50) mit:

$$s(u) := (\epsilon + u)^{\tau/2} \quad \text{und} \quad u(x) := \sin^2(x)$$

verwenden. Per Induktion können wir zeigen, dass gilt:

$$\partial_x^{2m+1} \sin^2(x) = (-1)^m \; 2^{2m+1} \sin(x)\cos(x) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Somit ist jede ungerade Ableitung von $x \mapsto \sin^2(x)$ für $x \in \{0, \pi\}$ trivial. Analog zu dem Beweis von Lemma 2.1.15 können wir zeigen, dass für jeden Multiindex $\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_{2m+1}$ gilt:

$$\exists j(\boldsymbol{l}) \in \{1, \ldots, 2m+1\} : j(\boldsymbol{l}) \bmod 2 = 1 \quad \text{und} \quad l_{j(\boldsymbol{l})} \neq 0.$$

Dies bedeutet aber, dass für $\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_{2m+1}$ das Produkt

$$\prod_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial_x^j \sin^2(x)}{j!}\Big)^{l_j}$$

immer mindestens eine ungerade Ableitung enthält und somit für $x \in \{0, \pi\}$ trivial ist. Zusammenfassend erhalten wir für $m \in \mathbb{N}$:

$$\partial_x^{2m+1} v = \partial_x^{2m+1} s(u) = \sum_{\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_n} \binom{n}{\boldsymbol{l}} \; \partial_u^{|\boldsymbol{l}|} s(u) \; \underbrace{\prod_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial_x^j u}{j!}\Big)^{l_j}}_{=0} = 0, \quad \text{für} \quad x \in \{0, \pi\}.$$

Dies beweist, dass v die gewünschte Randbedingung erfüllt.

ii) Wir wollen das angegebene Integral für $v_0 = v$ auswerten. Hierfür integrieren wir einmal partiell. Analog zu Abschnitt 1.2 folgt:

$$-\int_\Omega v^\gamma \; \frac{v_x}{v} \; \frac{v_{xxx}}{v} \; dx = \int_\Omega v^\gamma \; \frac{v_{xx}}{v} \Big(\frac{v_{xx}}{v} + (\gamma - 2)\Big(\frac{v_x}{v}\Big)^2\Big) \; dx =: D_\gamma[v], \tag{5.5}$$

wobei der Randterm wegen den erfüllten Randbedingungen verschwindet. Wir berechnen die Ableitungen von v:

$$\begin{aligned} v_x &= \tau \ \big(\epsilon + \sin^2(x)\big)^{\tau/2-1} \sin(x)\cos(x), \\ v_{xx} &= \tau \ \big(\epsilon + \sin^2(x)\big)^{\tau/2-1} \Big[2\big(\frac{\tau}{2} - 1\big)(\sin^2(x)\cos^2(x))(\epsilon + \sin^2(x))^{-1} + (\cos^2(x) - \sin^2(x))\Big]. \end{aligned}$$

Da wir nur an einem hinreichend kleinen ϵ interessiert sind, möchten wir für das Integral den Limes für $\epsilon \to 0$ betrachten. Um majorisierte Konvergenz anwenden zu können, müssen wir die Ausdrücke $|v_x/v|$ und $|v_{xx}/v|$ abschätzen. Unter Berücksichtigung von Lemma 5.2.11 i) ergeben sich die folgenden Abschätzungen:

$$\Big|\frac{v_x}{v}\Big|^2 = \big(\epsilon + \sin^2(x)\big)^{-1}\tau^2 \underbrace{\Big|\frac{\sin^2(x)\cos^2(x)}{\epsilon + \sin^2(x)}\Big|}_{\leq 1} \leq \tau^2(\epsilon + \sin^2(x)\big)^{-1}$$

und

$$\begin{aligned} \Big|\frac{v_{xx}}{v}\Big| &\leq \big(\epsilon + \sin^2(x)\big)^{-1}\tau\Big[|\tau - 2|\underbrace{\Big|\frac{\sin^2(x)\cos^2(x)}{\epsilon + \sin^2(x)}\Big|}_{\leq 1} + \underbrace{\big|\cos^2(x) - \sin^2(x)\big|}_{\leq 1}\Big] \\ &\leq \big(\epsilon + \sin^2(x)\big)^{-1} \underbrace{\tau\Big[|\tau - 2| + 1\Big]}_{=:C_1}. \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \Big|v^\gamma \ \frac{v_{xx}}{v}\Big(\frac{v_{xx}}{v} + (\gamma - 2)\big(\frac{v_x}{v}\big)^2\Big)\Big| &\leq \big(\epsilon + \sin^2(x)\big)^{(\tau\gamma)/2-2} \ \underbrace{C_1\big(C_1 + |\gamma - 2|\tau^2\big)}_{=:C} \\ &\leq C \cdot \sin(x)^{\tau\gamma-4} = C \cdot \sin(x)^{\delta-1}. \end{aligned}$$

Lemma 5.2.11 ii) gewährleistet, dass die gefunden Majorante $x \mapsto C\cdot\sin(x)^{\delta-1}$ tatsächlich integrierbar ist. Aus

$$\lim_{\epsilon\to 0} v(\epsilon, \delta) = \sin(x)^\tau =: h(x)$$

folgt mittels majorisierter Konvergenz:

$$\lim_{\epsilon\to 0} D_\gamma[v] = D_\gamma[\sin(x)^\tau] = D_\gamma[h].$$

Es genügt das Integral $D_\gamma[h]$ zu berechnen. Für die entsprechenden Ableitungen erhalten wir:

$$\frac{h_x}{h} = \tau \ \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad \text{und} \quad \frac{h_{xx}}{h} = \tau(\tau - 1) \ \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} - \tau.$$

Der Integrand ergibt sich zu

$$\sin(x)^{\delta+3}\Big(\tau(\tau-1)\,\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}-\tau\Big)\cdot\Big(\tau(\tau-1)\,\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}-\tau+(\gamma-2)\tau^2\,\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\Big).$$

Wir erhalten die Koeffizienten:

$$\begin{array}{ccll}
\dfrac{\cos^4(x)}{\sin^4(x)} & : & \tau^2(\tau-1)^2+\tau^3(\tau-1)(\gamma-2) & =: a_1(\delta),\\
\dfrac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} & : & -\tau^2(\tau-1)-\tau^2(\tau-1)-\tau^3(\gamma-2) & =: a_2(\delta),\\
1 & : & \tau^2 & =: a_3(\delta).
\end{array}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
D_\gamma[h] = a_1(\delta)\int_0^\pi \sin(x)^{\delta-1}\cos(x)^4\,dx + a_2(\delta)\int_0^\pi \sin(x)^{\delta+1}\cos(x)^2\,dx\\
+ a_3(\delta)\int_0^\pi \sin(x)^{\delta+3}\cos(x)^4\,dx.
\end{aligned}$$

Das zweite und dritte Integral bleiben auch für den Grenzwert $\delta = 0$ beschränkt, weil der Exponent bezüglich $\sin(x)$ immer positiv ist. Auch die Koeffizienten a_1, a_2 und a_3 bleiben beschränkt, weil diese Polynome bezüglich δ sind. Aus Lemma 5.2.11 iii) folgt, dass das erste Integral im Grenzwert divergiert. Wir können schließen:

$$\lim_{\delta\to 0^+} D_\gamma[h] = \operatorname{sgn}(a_1(0))\cdot\infty.$$

Des Weiteren gilt:

$$a_1(0) = \frac{18}{\gamma^4}(3-\gamma)(\gamma-3/2) < 0 \quad \text{für} \quad \gamma\in[3/2,3]^{\mathsf{c}}.$$

Dies bedeutet, dass wir ein $\delta_0 \in (0,1)$ wählen können mit:

$$D_\gamma[\sin(x)^{\tau_0}] \le -1 \quad \text{und} \quad \tau_0 := \frac{3+\delta_0}{\gamma}.$$

Aus

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} D_\gamma[v(\epsilon,\delta_0)] = D_\gamma[\sin(x)^{\tau_0}] \le -1$$

folgt, dass wir ein $\epsilon_0 > 0$ wählen können mit:

$$D_\gamma\big[\big(\epsilon_0+\sin(x)^2\big)^{\tau_0/2}\big] \le -\frac{1}{2} < 0.$$

Die gesuchte Funktion v_0 ist somit durch $v(\epsilon_0,\delta_0)$ gegeben. □

Korollar 5.2.12 Der Parameterbereich aus Satz 5.2.9 ist optimal. Dies bedeutet, dass unter der Annahme der Grundhypothese (Definition 2.1.6) für $\alpha+\beta\in[3/2,3]^{\mathsf{c}}$ eine klassische Lösung u und ein $t_0\in[0,T]$ existiert mit:

$$P_\alpha[u](t_0) < 0.$$

Insbesondere kann (5.3) nicht erfüllt sein.

Beweis: Wir betrachten $\Omega = (a, b)$. Dann ist durch:

$$\tilde{x} = cx + d \quad \text{mit} \quad c := \frac{\pi}{b-a} \quad \text{und} \quad d := -\frac{a\pi}{b-a}$$

eine lineare Transformation von Ω auf $[0, \pi]$ gegeben. Sei $v_0(\tilde{x})$ jene Anfangsbedingung aus Satz 5.2.10. Wir definieren:

$$u_0(x) := \begin{cases} \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto v_0(cx + d) = v_0(\tilde{x}). \end{cases}$$

Aus unserer Grundhypothese folgt, dass zu u_0 eine klassische Lösung der Dünnfilmgleichung 4. Ordnung existiert. Wir setzen $t_0 = 0$ und müssen zeigen, dass $P_\alpha[u](0) < 0$ gilt. Mit $P_\alpha[u] \in C([0, T])$ (vgl. Lemma 2.1.14) und Satz 2.2.19 folgt:

$$P_\alpha[u](0) = -\int_\Omega u_0^{\alpha+\beta} \frac{(u_0)_x}{u_0} \frac{(u_0)_{xxx}}{u_0} \, dx.$$

Durch Transformation auf $[0, \pi]$ und Ersetzen der Ableitungen folgt:

$$P_\alpha[u](0) = -c^4 \int_\Omega \Big(u_0^{\alpha+\beta} \frac{(u_0)_{\tilde{x}}}{u_0} \frac{(u_0)_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}}{u_0} \Big)(x) \, dx = -c^5 \int_0^\pi v_0^{\alpha+\beta} \frac{(v_0)_{\tilde{x}}}{v_0} \frac{(v_0)_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}}{v_0} \, d\tilde{x} < 0.$$

Die Ungleichung ist wegen Satz 5.2.10 ii) und $c > 0$ gültig. Dies beweist die gewünschte Behauptung. □

Abschließend möchten wir noch α-Funktionale 1. Ordnung berechnen.

Satz 5.2.13 Wir definieren:

$$\beta_1 := \frac{7}{4} - \frac{1}{20}\sqrt{265} \quad \text{und} \quad \beta_2 := \frac{7}{4} + \frac{1}{20}\sqrt{265}.$$

Darüber hinaus sind die Zahlen $\alpha_1(\beta)$ und $\alpha_2(\beta)$ durch

$$\begin{aligned} \alpha_1(\beta) &:= \frac{1}{53}\Big(12\beta + 85 - 4\sqrt{-150\beta^2 + 525\beta - 360}\Big) \quad \text{und} \\ \alpha_2(\beta) &:= \frac{1}{53}\Big(12\beta + 85 + 4\sqrt{-150\beta^2 + 525\beta - 360}\Big) \end{aligned}$$

gegeben. Sei u eine beliebige klassische Lösung der Dünnfilmgleichung 4. Ordnung[2] mit $u > 0$ in $\overline{\Omega_T}$. Für

$$\alpha = 2 \quad \text{oder} \quad \alpha \in (\alpha_1(\beta), \alpha_2(\beta)) \quad \text{mit} \quad \beta \in (\beta_1, \beta_2)$$

gilt:

$$P_\alpha^1[u](t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

[2] Vgl. Definition 2.1.2 mit $k = 3$ und $P(\boldsymbol{\xi}) = -\xi_3$.

Dies bedeutet, dass H_α^1 ein Lyapunov-Funktional ist.

Beweis: Um den gewünschten Parameterbereich zu bestimmen, verwenden wir die Methoden aus Abschnitt 2.3. Es genügt das Entscheidungsproblem (2.17) zu lösen. Mit Hilfe von Beispiel 2.3.52 ergibt sich das Polynom S_0^1 zu:

$$S_0^1 = (-1)^{1+2} P \cdot K^1 = (-1)^4 \; \xi_3 \; \Big(\frac{1}{2}(\alpha-2)(\alpha-3)\xi_1^3 + 2(\alpha-2)\xi_1\xi_2 + \xi_3\Big).$$

Wir verwenden Beispiel 2.2.28 und erhalten alle Verschiebungspolynome, welche auch im Raum $\mathcal{Q}_{6,4}$ enthalten sind. Wir nummerieren die entsprechenden Verschiebungspolynome und erhalten für (2.17):

$$\begin{aligned}0 \le S_0^1 + c_1T_1 + \ldots + c_5T_5 = {} & \frac{1}{2}(\alpha-2)(\alpha-3)\xi_1^3\xi_3 + 2(\alpha-2)\xi_1\xi_2\xi_2 + \xi_3^2 \\ & + c_1\big((\alpha+\beta-5)\xi_1^6 + 5\xi_1^4\xi_2\big) \\ & + c_2\big((\alpha+\beta-4)\xi_1^4\xi_2 + 3\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^3\xi_3\big) \\ & + c_3\big((\alpha+\beta-3)\xi_1^3\xi_3 + 2\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_1^2\xi_4\big) \\ & + c_4\big((\alpha+\beta-3)\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^3 + 2\xi_1\xi_2\xi_3\big) \\ & + c_5\big((\alpha+\beta-2)\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_3^2 + \xi_2\xi_4\big).\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}0 \le {} & c_1(\alpha+\beta-5)\xi_1^6 + \big(5c_1 + c_2(\alpha+\beta-4)\big)\xi_1^4\xi_2 + \big(\frac{1}{2}(\alpha-2)(\alpha-3) + c_2 + c_3(\alpha+\beta-3)\big)\xi_1^3\xi_3 \\ & + \big(3c_2 + c_4(\alpha+\beta-3)\big)\xi_1^2\xi_2^2 + c_3\xi_1^2\xi_4 + \big(2(\alpha-2) + 2c_3 + 2c_4 + c_5(\alpha+\beta-2)\big)\xi_1\xi_2\xi_3 \\ & + c_4\xi_2^3 + (1+c_5)\xi_3^2 + c_5\xi_2\xi_4.\end{aligned}$$

Wir wenden Lemma 2.2.36 und Lemma 2.2.35 an und erhalten, dass die Koeffizienten vor den Monomen $\xi_1^2\xi_4,\ \xi_2\xi_4$ und ξ_2^3 trivial sein müssen. Dies impliziert:

$$c_3 = 0, \quad c_4 = 0 \quad \text{und} \quad c_5 = 0.$$

Zusammenfassend erhalten wir das Entscheidungsproblem:

$$(\exists c_1)(\exists c_2)(\forall \xi_1)(\forall \xi_2)(\forall \xi_3)(a_1\xi_1^6 + a_2\xi_1^4\xi_2 + a_3\xi_1^3\xi_3 + a_4\xi_1^2\xi_2^2 + a_5\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_3^2 \ge 0) \qquad (5.6)$$

mit:

$$\begin{gathered}a_1 := c_1(\alpha+\beta-5), \quad a_2 := 5c_1 + c_2(\alpha+\beta-4), \quad a_3 := \frac{1}{2}(\alpha-2)(\alpha-3) + c_2, \\ a_4 := 3c_2 \quad \text{und} \quad a_5 := 2(\alpha-2).\end{gathered}$$

Mit Lemma 3.2.33 können wir die Allquantoren eliminieren. Wir beschränken uns auf den Fall (3.9). Aus $4a_4 - a_5^2 = 0$ folgt:

$$12c_2 - 4(\alpha-2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = \frac{(\alpha-2)^2}{3}.$$

Setzen wir dies in die Gleichung $2a_2 - a_3a_5 = 0$ ein, so erhalten wir:

$$2\Big(5c_1 + \frac{(\alpha-2)^2}{3}(\alpha+\beta-4)\Big) - 2(\alpha-2)\Big(\frac{1}{2}(\alpha-2)(\alpha-3) + \frac{(\alpha-2)^2}{3}\Big) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad c_1 = \frac{1}{30}(\alpha-2)^2(3\alpha-2\beta-5).$$

Die berechneten Werte können wir nun in die Gleichung $4a_1 - a_3^2 \geq 0$ einsetzen. Dies impliziert:

$$\frac{4}{30}(\alpha-2)^2(3\alpha-2\beta-5)(\alpha+\beta-5) - \Big(\frac{1}{2}(\alpha-2)(\alpha-3) + \frac{(\alpha-2)^2}{3}\Big)^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{180}(\alpha-2)^2 \underbrace{(53\alpha^2 - 24\alpha\beta + 48\beta^2 - 170\alpha - 120\beta + 245)}_{=:g(\alpha,\beta)} \geq 0. \tag{5.7}$$

Ungleichung (5.7) ist für $\alpha = 2$ immer erfüllt. Betrachten wir daher die Ungleichung $g(\alpha,\beta) \leq 0$. Die Lösungsmenge ist das von einer Ellipse beschränkte Gebiet (vgl. Abbildung 5.2). Wir können g als ein quadratisches Polynom bzgl. α auffassen. Dies impliziert, dass α zwischen den Nullstellen der Funktion $\alpha \mapsto g(\alpha,\beta)$ liegen muss. Die Nullstellen sind in Abhängigkeit von β gegeben durch:

$$\frac{1}{53}\Big(12\beta + 85 \mp 4\sqrt{-150\beta^2 + 525\beta - 360}\Big) = \alpha_{1,2}(\beta).$$

Dies ist nur möglich, wenn die Diskriminante nichtnegativ ist. Die Nullstellen des Polynoms $-150\beta^2 + 525\beta - 360$ sind durch

$$\frac{7}{4} \mp \frac{1}{20}\sqrt{265} = \beta_{1,2}$$

gegeben. Fassen wir die gefundenen Resultate zusammen, so erhalten wir:

$$\alpha = 2 \quad \text{oder} \quad \alpha \in (\alpha_1(\beta), \alpha_2(\beta)) \quad \text{für} \quad \beta \in (\beta_1, \beta_2).$$

Dies beweist die gewünschte Behauptung. $\square$

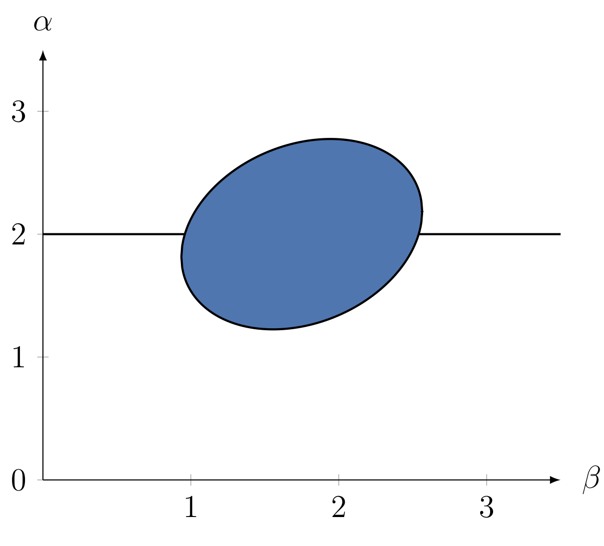


Abbildung 5.2: Darstellung des Parameterbereiches aus Satz 5.2.13.

Anmerkung 5.2.14 Der Parameterbereich in Satz 5.2.13 ist nicht vollständig bestimmt, da wir den Fall (3.8) nicht berücksichtigt haben. Eine Skizze des vollständigen Parameterbereiches findet sich in [15, Abbildung 1]. Weitere Informationen zu α-Funktionalen erster Ordnung für eine Dünnfilmgleichung 4. Ordnung finden sich auch in [20]. ○

Anmerkung 5.2.15 Es gilt $\beta_1 \sim 0.9361$ und $\beta_2 \sim 2.5639$. ○

5.2.2 Anwendung

Aus Korollar 2.1.17 wissen wir bereits, dass für den Mittelwert der Lösungsfunktion u gilt:

$$\frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \int_\Omega u(t,x)\; dx = \frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \int_\Omega u_0(x)\; dx = u_\infty.$$

Die Lyapunov-Funktionale aus dem letzten Abschnitt können dazu verwendet werden, um Konvergenzraten gegen den Mittelwert zu berechnen. Wir wollen dies hier heuristisch motivieren. Hierfür sei u eine klassische Lösung der Dünnfilmgleichung 4. Ordnung, welche (RB2) erfüllt, $\beta \in (0,2)$ und $\alpha := 2-\beta$. Mittels einer Poncaré-Ungleichung[3] angewendet auf u_x folgt:

$$\int_\Omega \left((u^{(\alpha+\beta)/2})_{xx}\right)^2\; dx = \int_\Omega u_{xx}^2\; dx \geq C_1 \int_\Omega u_x\; dx.$$

Wenden wir auf das rechte Integral eine weitere Poncaré-Ungleichung[4] an, so erhalten wir:

$$\int_\Omega \left((u^{(\alpha+\beta)/2})_{xx}\right)^2\; dx \geq C_1 C_2 \int_\Omega (u-u_\infty)^2\; dx.$$

Mit der konvexen Sobolev-Ungleichung aus Satz 5.2.9ii) erhalten wir eine obere Abschätzung für die Differenz $u - u_\infty$ in der L^2-Norm:

$$P_{2-\beta}[u](t) \geq \kappa C_1 C_2 \int_\Omega (u(t)-u_\infty)^2.$$

Für ausführliche Informationen möchten wir hier auf die Literatur verweisen, z.B. [22, Kapitel 6] oder [6].

5.3 Eine Dünnfilmgleichung 6. Ordnung

Wir betrachten eine Dünnfilmgleichung 6. Ordnung:

$$u_t = (u^\beta u_{xxxxx})_x,$$

[3] Es gilt: $C\|u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2},\ \forall u \in H_0^1(\Omega)$, (vgl. [11, Theorem 3, Abschnitt 5.6]).
[4] Es gilt: $\tilde{C}\|u-\overline{u}\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2},\ \forall u \in H^1(\Omega)$, (vgl. [11, Theorem 1, Abschnitt 5.8]).

mit $\beta > 0$. Im Kontext unseres Grundproblems (Definition 2.1.2) ergibt sich das Polynom P zu:

$$P(\boldsymbol{\xi}) = \xi_5.$$

Analog zu einer Dünnfilmgleichung 4. Ordnung kann auch hier Satz 5.1.1 und Satz 5.1.4 (für $m = 2$) angewendet werden und wir erhalten entsprechende Existenzresultate. Auch hier beschreibt die Funktion u wieder die Höhe eines Flüssigkeitsfilmes (z.B. eines SiGi-Films). Für weiterführende Informationen sei auf [12] und [17] verwiesen.

5.3.1 Lyapunov-Funktionale für die Dünnfilmgleichung 6. Ordnung

Wir werden analog zu einer Dünnfilmgleichung 4. Ordnung vorgehen und mit dem Algorithmus aus Abschnitt 2.2 Lyapunov-Funktionale bestimmen.

Satz 5.3.16 Sei u eine beliebige klassische Lösung der Dünnfilmgleichung 6.Ordnung[5] mit $u > 0$ in $\overline{\Omega_T}$. Dann gilt für $\beta \in (0, 2)$ und $\alpha := 2 - \beta$:

$$P_\alpha[u](t) = P_{2-\beta}[u](t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Dies bedeutet, dass $H_{2-\beta}$ ein Lyapunov-Funktional ist. Insbesondere ist $\alpha + \beta = 2$ die einzige Lösung, welche wir mit dem Verfahren aus Abschnitt 2.2 erhalten.

Beweis: Wir wenden den Algorithmus aus Abschnitt 2.2 an. Es genügt das Entscheidungsproblem (2.9) zu lösen. Wir definieren $\gamma := \alpha + \beta$ und nummerieren die Verschiebungspolynome[6]. Das Polynome S_0 ergibt sich zu:

$$S_0 = \xi_1\xi_5.$$

Für (2.9) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
0 \leq S_0 + c_1T_1 + \ldots + c_7T_7 = \xi_1\xi_5 &+ c_1\big((\gamma-5)\xi_1^6 + 5\xi_1^4\xi_2\big)\\
&+ c_2\big((\gamma-4)\xi_1^4\xi_2 + 3\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^3\xi_3\big)\\
&+ c_3\big((\gamma-3)\xi_1^3\xi_3 + 2\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_1^2\xi_4\big)\\
&+ c_4\big((\gamma-3)\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^3 + 2\xi_1\xi_2\xi_3\big)\\
&+ c_5\big((\gamma-2)\xi_1^2\xi_4 + \xi_2\xi_4 + \xi_1\xi_5\big)\\
&+ c_6\big((\gamma-2)\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_3^2 + \xi_2\xi_4\big)\\
&+ c_7\big((\gamma-1)\xi_1\xi_5 + \xi_6\big).
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
0 \leq{}& c_1(\gamma-5)\xi_1^6 + \big(5c_1 + c_2(\gamma-4)\big)\xi_1^4\xi_2 + \big(c_2 + c_3(\gamma-3)\big)\xi_1^3\xi_3 + \big(3c_2 + c_4(\gamma-3)\big)\xi_1^2\xi_2^2\\
&+ \big(c_3 + c_5(\gamma-2)\big)\xi_1^2\xi_4 + \big(2c_3 + 2c_4 + c_6(\gamma-2)\big)\xi_1\xi_2\xi_3 + \big(1 + c_5 + c_7(\gamma-1)\big)\xi_1\xi_5\\
&+ c_4\xi_2^3 + (c_5 + c_6)\xi_2\xi_4 + c_6\xi_3^2 + c_7\xi_6.
\end{aligned}$$

[5] Vgl. Definition 2.1.2 mit $k = 5$ und $P(\boldsymbol{\xi}) = \xi_5$.

[6] Hier sind die Verschiebungspolynome anders nummeriert als im Beweis von Satz 5.2.13.

Da das obige Polynom Normalform besitzen muss, folgt mit Lemma 2.2.35, dass die Koeffizienten vor den Monomen $\xi_1^2\xi_4, \xi_1\xi_5, \xi_2^3, \xi_2\xi_4$ und ξ_6 trivial sein müssen (vgl. Anmerkung 2.2.37). Wir erhalten folgendes Gleichungssystem:

$$c_3 + c_5(\gamma - 2) = 0, \quad 1 + c_5 + c_7(\gamma - 1) = 0, \quad c_4 = 0,$$
$$c_5 + c_6 = 0 \quad \text{und} \quad c_7 = 0.$$

Dies impliziert:

$$c_3 = \gamma - 2, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = -1, \quad c_6 = 1 \quad \text{und} \quad c_7 = 0.$$

Zusammenfassend erhalten wir das Entscheidungsproblem:

$$(\exists c_1)(\exists c_2)(\forall \xi_1)(\forall \xi_2)(\forall \xi_3)(a_1\xi_1^6 + a_2\xi_1^4\xi_2 + a_3\xi_1^3\xi_3 + a_4\xi_1^2\xi_2^2 + a_5\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_3^2 \geq 0) \tag{5.8}$$

mit:

$$a_1 := c_1(\gamma - 5), \quad a_2 := 5c_1 + c_2(\gamma - 4), \quad a_3 := c_2 + (\gamma - 2)(\gamma - 3),$$
$$a_4 := 3c_2 \quad \text{und} \quad a_5 := 3(\gamma - 2).$$

Wir lösen das Entscheidungsproblem mit Lemma 3.2.33.

i) Wir betrachten den Fall (3.9). Aus $4a_4 - a_5^2 = 0$ folgt:

$$12c_2 - 9(\gamma - 2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = \frac{3}{4}(\gamma - 2)^2.$$

Setzen wir dies in die Gleichung $2a_2 - a_3a_5 = 0$ ein, so erhalten wir:

$$10c_1 + \frac{3}{2}(\gamma - 2)^2(\gamma - 4) - 3(\gamma - 2)\Big(\frac{3}{4}(\gamma - 2)^2 + (\gamma - 2)(\gamma - 3)\Big) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad c_1 = \frac{3}{8}(\gamma - 2)^3.$$

Die berechneten Werte können wir nun in die Gleichung $4a_1 - a_3^2 \geq 0$ einsetzen. Es folgt:

$$\frac{3}{2}(\gamma - 2)^3(\gamma - 5) - \Big(\frac{3}{4}(\gamma - 2)^2 + (\gamma - 2)(\gamma - 3)\Big)^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{16}(25\gamma^2 - 84\gamma + 84)(\gamma - 2)^2 \geq 0. \tag{5.9}$$

Für die Diskriminante des Polynoms $25\gamma^2 - 84\gamma + 84$ folgt:

$$84^2 - 4 \cdot 25 \cdot 84 = -1344$$

Somit nimmt das Polynom nur positive Werte an. Damit kann (5.9) nur für $\gamma = 2$ erfüllt sein.

ii) Wir betrachten den Fall (3.8) und wollen zeigen, dass dieser nicht lösbar ist. Aus der Ungleichung $4a_4 - a_5^2 > 0$ erhalten wir:

$$12c_2 - 9(\gamma - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow c_2 > \frac{3}{4}(\gamma - 2)^2. \tag{5.10}$$

Wir berechnen den Term $4a_1a_4 - a_1a_5^2 - a_2^2 - a_3^2a_4 + a_2a_3a_5$ und sortieren ihn bzgl. der einzelnen Potenzen von c_1. Für die entsprechende Ungleichung erhalten wir:

$$0 \leq 4a_1a_4 - a_1a_5^2 - a_2^2 - a_3^2a_4 + a_2a_3a_5 = \tilde{b}_1c_1^2 + \tilde{b}_2c_1 + \tilde{b}_3$$

mit:

$$-b_1 := \tilde{b}_1 := -25, \quad -b_2 := \tilde{b}_2 := (17\gamma - 50)c_2 + 6\gamma(\gamma-2)^2 \quad \text{und}$$
$$-b_3 := \tilde{b}_3 := -3c_2^3 + (-4\gamma^2 + 20\gamma - 28)c_2^2 - 3(\gamma-2)^2(\gamma-3)c_2.$$

Es genügt die Ungleichung $b_1c_1^2 + b_2c_1 + b_3 \leq 0$ zu lösen. Da $b_1 > 0$ gilt, muss das quadratische Polynom in c_1 mindestens eine reelle Nullstelle besitzen. Dies bedeutet, dass für die Diskriminante folgende Ungleichung gelten muss:

$$0 \leq b_2^2 - 4b_1b_3 = -3p_1p_2 \quad \Leftrightarrow p_1p_2 \leq 0,$$

mit:

$$p_1 := -3(\gamma-2)^2 + 4c_2 \quad \text{und} \quad p_2 := 25c_2^2 + (28\gamma^2 - 100\gamma + 100)c_2 + 4\gamma^2(\gamma-2)^2.$$

Ungleichung (5.10) impliziert, dass $p_1 > 0$ gelten muss. Es verbleibt das Ungleichungssystem

$$p_1 > 0 \quad \text{und} \quad p_2 \leq 0,$$

für c_2 zu lösen. Vernachlässigen wir einstweilen die erste Ungleichungen und betrachten nur die zweite Ungleichung. Wir definieren:

$$d_1 := 25, \quad d_2 := 28\gamma^2 - 100\gamma + 100 \quad \text{und} \quad d_3 := 4\gamma^2(\gamma-2)^2.$$

Es folgt:

$$p_2 = d_1c_2^2 + d_2c_2 + d_3 \leq 0.$$

Aus $d_1 > 0$ folgt, dass obige Ungleichung für ein c_2 nur erfüllt sein kann, wenn p_2 mindestens eine Nullstelle besitzt. Für die Diskriminante muss gelten:

$$0 \leq d_2^2 - 4d_1d_3 = 16(4\gamma-5)(\gamma-5)(2\gamma-5)(3\gamma-5).$$

Mit der Bedingung $\gamma > 0$ erhalten wir den Parameterbereich:

$$\gamma \in (0, 5/4] \cup [5/3, 5/2] \cup [5, \infty) =: A.$$

Wir definieren:

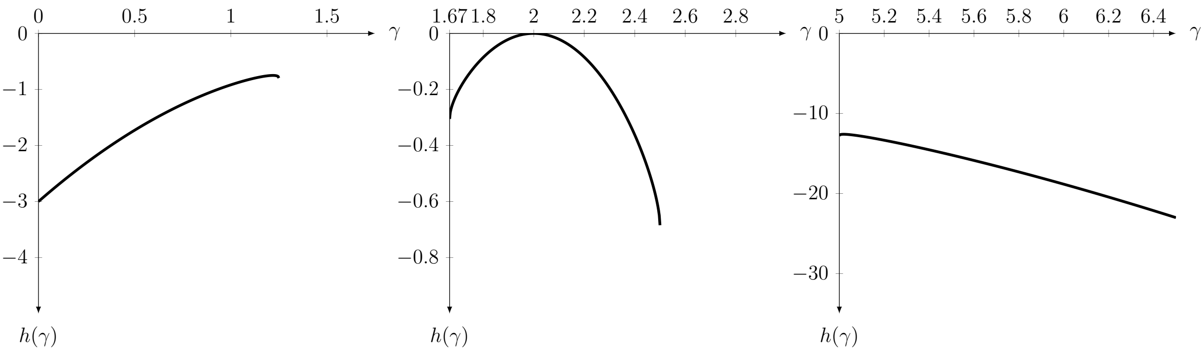
$$l := \frac{-d_2 - \sqrt{d_2^2 - 4d_1d_3}}{2d_1} \quad \text{und} \quad r := \frac{-d_2 + \sqrt{d_2^2 - 4d_1d_3}}{2d_1}.$$

Somit können wir für $\gamma \in A$ die Konstante c_2 aus dem Intervall $[l, r]$ wählen. Damit $p_1 > 0$ erfüllt ist, muss die obere Intervallgrenze r die Ungleichung $r > (3/4)(\gamma-2)^2$ erfüllen. Dies führt zu:

$$0 < r - \frac{3}{4}(\gamma-2)^2 = -\frac{131}{100}\gamma^2 + 5(\gamma-1) + \frac{2}{25}\sqrt{(4\gamma-5)(\gamma-5)(2\gamma-5)(3\gamma-5)} =: h(\gamma).$$

Die obere Ungleichung ist jedoch nie erfüllt und können wir z.B. aus Abbildung 5.3 entnehmen. Wir sehen auch, dass für $\gamma \neq 2$ sogar $h(\gamma) < 0$ gilt. Damit ist hier (3.8) nicht erfüllt.

Fassen wir i) und ii) zusammen, so erhalten wir die gewünschte Aussage. Insbesondere haben wir gezeigt, dass das betrachtete polynomielle Entscheidungsproblem äquivalent zu der Formel $\gamma = 2$ ist. $\square$



(a) $\gamma \in [0, 5/4]$ (b) $\gamma \in [5/3, 5/2]$ (c) $\gamma \in [5, 6.5]$

Abbildung 5.3: Darstellung der Funktionen $h(\gamma)$ aus dem Beweis von Satz 5.3.16.

Der Beweis von Satz 5.3.16 lässt Rückschlüsse auf einige interessante Aspekte zu. Wir möchten hier auf die Unterschiede zwischen den Entscheidungsproblemen (5.6) und (5.8) eingehen. Beide Probleme haben wir mit Lemma 3.2.33 gelöst. Die Koeffizienten bzgl. des Monoms $\xi_1\xi_2\xi_3$ waren gegeben durch:

$$\begin{aligned} (5.6) &\ :\ 2(\alpha - 2), \\ (5.8) &\ :\ 3(\gamma - 2). \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die gesuchten Parameterbereiche jene Mengen enthalten für die der entsprechende Koeffizient verschwindet. Dies ist auch plausibel, weil $\xi_1\xi_2\xi_3$ das einzige Monom ist, welches alle drei Variablen enthält, jedoch ist dies ein Trugschluss und deutet auf keine allgemeine Gesetzmäßigkeit hin. In [22, Abschnitt 4.4] findet sich ein Gegenbeispiel.

Darüber hinaus sehen wir, dass der Fall (3.8) nicht automatisch einen besseren Parameterbereich liefert als (3.9). Für uns ist dies insofern interessant, weil der Fall (3.9) meistens einfacher zu behandeln ist.

Satz 5.3.16 liefert uns auch keine nichttriviale Darstellung von $P_{2-\beta}$. Für $\alpha + \beta = 2$ sind die einzigen nicht verschwindenden Koeffizienten bzgl. der Verschiebungspolynome gegeben durch $c_5 = -1$ und $c_6 = 1$. Es folgt:

$$S_0 + c_1 T_1 + \ldots + c_7 T_7 = \xi_3^2.$$

Dies führt mit Satz 2.2.32 zu folgender Identität:

$$P_\alpha[u] = \int_\Omega u^2 \frac{u_x}{u} \frac{u_{xxxxx}}{u}\, dx = \int_\Omega u_x u_{xxxxx}\, dx = \int_\Omega u^2 \Big(\frac{u_{xxx}}{u}\Big)^2\, dx = \int_\Omega u_{xxx}^2\, dx.$$

Die obige Gleichung folgt sofort durch zweimalige partielle Integration. Der Beweis mit Hilfe von systematischer partieller Integration ist hier umständlicher. Wir sehen auch, dass eine Abschätzung der Form $P_\alpha[u] \geq \kappa Q_\alpha[u]$ mit:

$$Q_\alpha[u] = \int_\Omega \left(u^{(\alpha+\beta)/2}\right)^2_{xxx} \, dx = \int_\Omega u^2_{xxx}$$

trivialerweise erfüllt ist. Auch hier erhalten wir keine zusätzlichen Informationen oder nichttriviale Ungleichungen.

Kapitel 6

Systematische partielle Integration- Der mehrdimensionale Fall

In diesem Kapitel möchten wir die Methoden aus Kapitel 2 auf den mehrdimensionalen Fall erweitern. Prinzipiell können wir ein analoges Vorgehen wählen. Wir ersetzten für einen Multiindex $\boldsymbol{\alpha}$ den Bruch

$$\frac{D^{\boldsymbol{\alpha}}u}{u}$$

durch eine Variable $\xi_{\boldsymbol{\alpha}}(u)$. Im Folgenden werden wir das Vorgehen nur skizzieren und auf die Rigorosität aus Kapitel 2 verzichten.

6.1 Das Grundproblem

Definition 6.1.1 Sei $n \in \mathbb{N}_\times$ und $k \in \mathbb{N}_\times$. Wir definieren:

$$\mathcal{M}_{n,k} := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n : \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0} \wedge |\boldsymbol{\alpha}| \leq k\} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\xi} := (\xi_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{M}_{n,k}} \in \mathbb{N}^{|\mathcal{M}_{n,k}|}.$$

Mit Hilfe von obiger Definition ist es uns möglich die entsprechenden Polynomräume für den mehrdimensionalen Fall zu definieren:

Definition 6.1.2 Sei $n \in \mathbb{N}_\times$ und $k \in \mathbb{N}_\times$. Wir definieren:

$$\mathcal{J}_{n,k} := \Big\{\boldsymbol{k} = (k_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{n,k}}} \in \mathbb{N}^{|\mathcal{M}_{n,k}|} : \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{M}_{n,k}} |\boldsymbol{\alpha}| \cdot \boldsymbol{k}_\alpha = k\Big\},$$

$$\mathcal{C}_{n,k} := \{(\mathbb{R}^{|\mathcal{M}_{n,k}|} \to \mathbb{R} : \boldsymbol{\xi} \mapsto \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}) : \boldsymbol{k} \in \mathcal{J}_{n,k}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{R}_{n,k} := \operatorname{span}(\mathcal{C}_{n,k}).$$

Nummerieren wir die Variablen $\xi_{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{M}_{n,k}$ mit den Zahlen $1, \ldots, |\mathcal{M}_{n,k}|$, so können wir analog zu Korollar 1.3.4 aus Satz 1.3.2 schließen, dass $\mathcal{C}_k$ Basis von $\mathcal{R}_{n,k}$ ist. Eine Normalform für Polynome lässt sich analog zu dem eindimensionalen Fall (Definition 2.2.34) definieren. Lemma 2.2.35 und Lemma 2.2.36 lassen sich ohne größere Veränderungen auf den neuen Polynomraum übertragen. Es gilt zu beachten, dass ein Polynom aus dem Raum $\mathcal{R}_{n,k}$ in Normalform unabhängig von $\xi_{\boldsymbol{\alpha}}$ sein muss, wenn $|\boldsymbol{\alpha}| \geq \lfloor k/2 \rfloor + 1$ gilt.

Anmerkung 6.1.3 Die Methoden aus Abschnitt 4.1 können problemlos verwendet werden, um alle zulässigen Multiindizes aus der Menge $\mathcal{J}_{n,k}$ zu berechnen. Mit Satz 4.1.2 kann auch $|\mathcal{J}_{n,k}|$ berechnet werden. ○

Definition 6.1.4 (*Grundvoraussetzungen - mehrdimensional*) Im Folgenden werden wir immer einen beschränkten Quader $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Endzeit $T > 0$ betrachten. Wir definieren:

$$\Omega := \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \quad \text{und} \quad \Omega_T := (0, T) \times \Omega.$$

Definition 6.1.5 (*Grundproblem- mehrdimensional*) Es gelten die Grundvoraussetzungen (Definition 6.1.4). Darüber hinaus sei $k \in \mathbb{N}$ eine (ungerade) Zahl und $\beta > 0$. Des Weiteren sei $\boldsymbol{P} = (P_1, \ldots, P_n)^T \in (\mathcal{R}_{n,k})^n$ ein Polynom mit $\boldsymbol{P} \not\equiv 0$. Das *Grundproblem* ist dann gegeben durch:

Gesucht ist eine Funktion $u : \overline{\Omega_T} \to \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{aligned} u_t = \operatorname{div}\left(u^{\beta+1} \boldsymbol{P}\Big(\big(\frac{D^{\boldsymbol{\alpha}} u}{u}\big)_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{M}_{n,k}} \Big)\right) \quad & \text{in} \quad \Omega_T, \\ u(0) = u_0 \quad & \text{in} \quad \Omega, \\ u \geq 0 \quad & \text{in} \quad \Omega_T, \end{aligned} \tag{6.1}$$

und periodischen Randbedingungen.

Eine *klassische Lösung* können wir analog zu dem eindimensionalen Fall (Definition 2.1.4) definieren. Wir müssen jedoch fordern, dass alle partiellen Ableitungen bis zu dem Grad k im Ort $\boldsymbol{x}$ stetig auf $\overline{\Omega_T}$ sind. Analog definieren wir das *α-Funktional* (Definition 2.1.7) und die *α-Produktion* (Definition 2.1.12) und erhalten die gleichen Eigenschaften (Lemma 2.1.8 und Lemma 2.1.14). Es genügt in den entsprechenden Definitionen den Integrationsbereich anzupassen, weil wir in dem Beweis nur die Stetigkeit der Funktion u bzw. die Differenzierbarkeit in t verwendet habe.

Analog zu dem eindimensionalen Fall werden wir für klassische Lösungen u unseres Grundproblems die Schreibweise

$$\xi_{\boldsymbol{\alpha}}(u) := \frac{D^{\boldsymbol{\alpha}} u}{u} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\xi}(u) := (\xi_{\boldsymbol{\alpha}}(u))_{\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{n,k}}}$$

verwenden.

Anmerkung 6.1.6 Auf Grund der periodischen Randbedingungen und der einfachen Geometrie folgt für alle $\boldsymbol{G} \in (\mathcal{R}_{n,k})^n$ und $\gamma > 0$:

$$\int_{\partial\Omega} u^\gamma \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}(u)) \cdot \boldsymbol{n}\; dS = 0,$$

wobei $\boldsymbol{n}$ den nach außen gerichteten normierten Normalvektor auf $\partial\Omega$ bezeichnet. Dies können wir einerseits ausnützen, um partiell zu integrieren, andererseits werden wir dies verwenden, um Verschiebungspolynome auch für den mehrdimensionalen Fall zu definieren. Wir müssen jedoch beachten, dass der Integrand im Randintegral definiert sein muss. Dies ist der Fall, wenn $u > 0$ gilt oder γ hinreichend groß ist. ◯

6.2 Der Algorithmus

Wir möchten auch für den mehrdimensionalen Fall Lyapunov-Funktionale bestimmen. Im Wesentlichen müssen wir nur die Schritte aus Abschnitt 2.2 geeignet modifizieren. Wir werden jedoch sehen, dass dies theoretisch möglich, jedoch unpraktikabel ist.

6.2.1 Bestimmung der α-Produktion

Sei u eine klassische Lösung unseres mehrdimensionalen Grundproblems mit $u > 0$ in $\overline{\Omega_T}$ und $\alpha > 0$. Analog zu dem eindimensionalen Fall erhalten wir mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß und Anmerkung 6.1.6:

$$\begin{aligned} P_\alpha[u](t) &= -\int_\Omega s'(u) u_t \; d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega s'(u) \mathrm{div}\, \Big(u^{\beta+1} \boldsymbol{P}\big(\boldsymbol{\xi}(u)\big)\Big)\; d\boldsymbol{x} \\ &= \int_\Omega s''(u) u^{\beta+1}\; \nabla u \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}(u))\; d\boldsymbol{x} = \int_\Omega u^{\alpha+\beta}\; \frac{\nabla u}{u} \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}(u))\; d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Bezeichne $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{N}^n$ jenen Multiindex, dessen i-te Komponente den Wert 1 besitzt und die restlichen Komponenten trivial sind. Im mehrdimensionalen Fall ergibt sich das Polynom S_0 somit zu:

$$S_0(\boldsymbol{\xi}) := \sum_{i=1}^{n} \xi_{\boldsymbol{\alpha}_i} P_i(\boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{R}_{n,k+1}.$$

Das Polynom ist genau so definiert, sodass

$$S_0(\boldsymbol{\xi}(u)) = \frac{\nabla u}{u} \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\xi}(u))$$

gilt. Insbesondere erhalten wir folgende Identität:

$$P_\alpha[u](t) = \int_\Omega u^{\alpha+\beta}\; S_0(\boldsymbol{\xi}(u))\; d\boldsymbol{x}. \tag{6.2}$$

6.2.2 Die Verschiebungspolynome

Analog zu dem eindimensionalen Fall wollen wir den Integranden in (6.2) modifizieren. Mit Anmerkung 6.1.6 erhalten wir für alle $\boldsymbol{G} \in (\mathcal{R}_{n,k})^n$:

$$\int_\Omega \operatorname{div}\left(u^{\alpha+\beta}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}(u))\right)\, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} u^{\alpha+\beta}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}(u)) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0.$$

Somit können wir obiges Integral mit (6.2) addieren. Unser Ziel ist es, das Polynom $\boldsymbol{G}$ so zu wählen, sodass der modifizierte Integrand

$$u^{\alpha+\beta}S_0(\boldsymbol{\xi}(u)) + \operatorname{div}\left(u^{\alpha+\beta}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}(u))\right)$$

nichtnegativ ist. Um das Polynom $\boldsymbol{G}$ zu bestimmen, betrachten wir eine Basis von $(\mathcal{R}_{n,k})^n$:

$$\{\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}} : i = 1, \dots, n,\ \boldsymbol{k} \in \mathcal{J}_{n,k}\},$$

wobei $\boldsymbol{e}_i$ den i-ten kanonischen Basisvektor von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Wir können nun das Verschiebungspolynom $T_{i,\boldsymbol{k}} \in \mathcal{R}_{n,k+1}$ über die Gleichung

$$u^{\alpha+\beta}T_{i,\boldsymbol{k}} \stackrel{!}{=} \operatorname{div}\left(u^{\alpha+\beta}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^{\alpha+\beta}\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{k}}(u)\right)$$

definieren. Stellen wir $\boldsymbol{G}$ als Linearkombination bzgl. der angegebenen Basis dar und berücksichtigen wir, dass $u > 0$ gilt, so erreichen wir unser Ziel durch Lösen des folgenden Entscheidungsproblems:

$$\exists (c_{i,\boldsymbol{k}})_{i=1,\dots,n,\boldsymbol{k}\in\mathcal{J}_{n,k}} \subset \mathbb{R} : \forall (\xi_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{M}_{n,k+1}} \Rightarrow S_0 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{J}_{n,k}} c_{i,\boldsymbol{k}}T_{i,\boldsymbol{k}} \geq 0.$$

Hier sehen wir schon das größte Problem an dieser Vorgehensweise. Die Anzahl der Verschiebungspolynome ist selbst für einfache Fälle sehr groß (vgl. Beispiel 6.2.7). Dies bedeutet, dass obiges Entscheidungsproblem theoretisch, jedoch nicht praktisch lösbar ist. Im nächsten Abschnitt werden wir daher eine andere Vorgehensweise kennenlernen.

Beispiel 6.2.7 Sei $k = n = 3$. Dies entspricht dem Fall einer Dünnfilmgleichung 4. Ordnung in drei Raumdimensionen (vgl. Abschnitt 6.3). In einem ersten Schritt müssen wir alle Variablen $\xi_{\boldsymbol{\alpha}}$ bestimmen. Die entsprechenden Multiindizes $\boldsymbol{\alpha}$ sind in Tabelle 6.1 angegeben.

	$\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert = 1$	$\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert = 2$	$\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert = 3$
$\boldsymbol{\alpha}$	$(1,0,0)$	$(2,0,0)$	$(3,0,0)$
	$(0,1,0)$	$(0,2,0)$	$(0,3,0)$
	$(0,0,1)$	$(0,0,2)$	$(0,0,3)$
		$(1,1,0)$	$(2,1,0)$
		$(1,0,1)$	$(2,0,1)$
		$(0,1,1)$	$(1,2,0)$
			$(1,0,2)$
			$(0,2,1)$
			$(0,1,2)$
			$(1,1,1)$

Tabelle 6.1: Auflistung aller Multiindizes aus der Menge $\mathcal{M}_{3,3}$.

Wir erhalten insgesamt 19 Variablen. Mit Hilfe von Satz 4.1.2 können wir die Dimension des Raumes $\mathcal{R}_{3,3}$ bestimmen. Es folgt:

$$\dim \mathcal{R}_{3,3} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dx^3}\varphi(0) = 38 \quad \text{mit} \quad \varphi(x) = \prod_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{M}_{3,3}} \frac{1}{1-x^{|\boldsymbol{\alpha}|}} = \frac{1}{(1-x)^3(1-x^2)^6(1-x^3)^{10}}.$$

Dies impliziert, dass wir $\dim(\mathcal{R}_{3,3})^3 = 114$ Verschiebungspolynome betrachten müssen. ⬠

6.2.3 Reduktion der Variablen

Wir wollen hier die in [15, Abschnitt 5.4] und [14, Abschnitt 3.3] vorgestellte Variante präsentieren wie die Anzahl der Variablen deutlich verringert werden kann. Die Idee besteht darin nicht alle partiellen Ableitungen als Variable aufzufassen, sondern nur jene die sich in kanonischer Weise aus der konkreten Form von $\boldsymbol{P}$ ergeben. Zusätzlich können wir auch Summen von verschiedenen $\xi_{\boldsymbol{\alpha}}$ als eigenständige Variablen auffassen. Darüber hinaus ist es auch möglich tensorwertige Ausdrücke zu betrachten, jedoch müssen hier Abhängigkeiten untereinander berücksichtigt werden (vgl. z.B. Gleichung (6.3)). Eine Liste mit geeigneten Wahlmöglichkeiten ist in Tabelle 6.2 angegeben. Weitere Beispiele finden sich z.B. in [15, Abschnitt 5.4].

Ordnung	1	2	3	4
Variable	$\frac{\nabla u}{u}$	$\frac{\Delta u}{u}$	$\frac{\nabla\Delta u}{u}$	$\frac{\Delta\Delta u}{u}$
		$\left(\frac{\nabla\nabla u}{u}\right)$[1]		

Tabelle 6.2: Auflistung von geeigneten Variablen für eine mehrdimensionale partielle Integration.

Den Ausdruck $\nabla u/u$ haben wir bereits für die Definition des Polynoms S_0 verwendet und entspricht der kanonischen Erweiterung von u_x/u aus dem eindimensionalen Fall. Allgemein können wir immer Ausdrücke der Form:

$$\frac{Du}{u}$$

betrachten, wobei D ein möglicherweise tensorwertiger Differentialoperator mit Ordnung kleiner oder gleich k ist. Insbesondere soll das Polynom $\boldsymbol{P}$ und S_0 durch die gewählten Ausdrücke darstellbar sein, z.B. durch Summen, Skalar-, Matrix-Vektor-, und Tensorprodukte. Die Schwierigkeit besteht darin, eine geeignete Auswahl an neuen (tensorwertigen) Variablen zu finden, weil wir nicht nur $\boldsymbol{P}$ darstellen wollen, sondern auch all jene Polynome $\boldsymbol{G} \in (\mathcal{R}_{n,k})^n$ für die

$$\operatorname{div}\left(u^{\alpha+\beta}\boldsymbol{G}\right)$$

[1] $\nabla\nabla u := \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}$.

Ausdrücke der Form Du/u enthält, welche in S_0 enthalten sind. Der Nachteil bei dieser Art der Reduktion der Variablen ist, dass das Ergebnis nicht vollständig sein muss. Dies bedeutet, dass wir im Allgemeinen einen besseren Parameterbereich erwarten können wenn wir alle partiellen Ableitungen betrachten.

Ohne hier auf Details einzugehen, wollen wir im nächsten Abschnitt diese Vorgehensweise anhand der mehrdimensionale Dünnfilmgleichung 4. Ordnung illustrieren.

6.3 Die mehrdimensionale Dünnfilmgleichung 4. Ordnung

Die mehrdimensionale Dünnfilmgleichung 4. Ordnung ist für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_\times$ durch:

$$u_t = -\mathrm{div}\left(u^{\beta+1}\frac{\nabla\Delta u}{u}\right)$$

gegeben (vgl. [10, Abschnitt 7.11]). Im Kontext unseres Grundproblems erhalten wir:

$$P_i(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{n} \xi_{\boldsymbol{\alpha}_i+2\boldsymbol{\alpha}_j},$$

wobei die Notation aus Abschnitt 6.2.1 zu beachten ist. Zur Bestimmung von Lyapunov-Funktionalen für die Dünnfilmgleichung werden wir wie in [15, Abschnitt 5.4] vorgehen. Für die α-Produktion erhalten wir für eine klassische Lösung mit $u > 0$ in $\overline{\Omega_T}$:

$$P_\alpha[u](t) = -\int_\Omega u^{\alpha+\beta}\frac{\nabla u}{u}\cdot\frac{\nabla\Delta u}{u}\,dx.$$

Nach obiger Gleichung ist es sinnvoll die neuen Variablen

$$\boldsymbol{\eta}_G := \frac{\nabla u}{u} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\eta}_T := \frac{\nabla\Delta u}{u}$$

zu betrachten. Wir erhalten $S_0 = -\boldsymbol{\eta}_G \cdot \boldsymbol{\eta}_T$. Zusätzlich wollen wir noch die Variablen

$$\eta_L := \frac{\Delta u}{u}, \quad \boldsymbol{\eta}_H := \frac{\nabla\nabla u}{u} \quad \text{und} \quad \eta_D := \frac{\Delta\Delta u}{u}$$

definieren. Folgendes Lemma liefert eine geeignete Wahl für Verschiebungspolynome und motiviert die zusätzlich eingeführten Ausdrücke $\eta_L, \boldsymbol{\eta}_H$ und η_D.

Lemma 6.3.8 Sei $u : \mathrm{dom}\, u \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \boldsymbol{x} \mapsto u(\boldsymbol{x})$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion. Dann gelten für $\gamma > 0$ folgende Identitäten:

i) $\mathrm{div}\left(u^\gamma \boldsymbol{\eta}_T\right) = u^\gamma\Big((\gamma-1)\boldsymbol{\eta}_G\cdot\boldsymbol{\eta}_T + \eta_D\Big) =: u^\gamma T_1,$

ii) $\mathrm{div}\left(u^\gamma \eta_L \boldsymbol{\eta}_G\right) = u^\gamma\Big((\gamma-2)|\boldsymbol{\eta}_G|^2\eta_L + \boldsymbol{\eta}_G\cdot\boldsymbol{\eta}_T + \eta_L^2\Big) =: u^\gamma T_2,$

iii) div $\left(u^\gamma \boldsymbol{\eta}_G^T \cdot \boldsymbol{\eta}_H\right) = u^\gamma\Big((\gamma-2)\boldsymbol{\eta}_G^T \cdot \boldsymbol{\eta}_H \cdot \boldsymbol{\eta}_G + \text{tr }(\boldsymbol{\eta}_H^2) + \boldsymbol{\eta}_G \cdot \boldsymbol{\eta}_T\Big) =: u^\gamma T_3,$

iv) div $\left(u^\gamma |\boldsymbol{\eta}_G|^2 \boldsymbol{\eta}_G\right) = u^\gamma\Big((\gamma-3)|\boldsymbol{\eta}_G|^4 + 2\boldsymbol{\eta}_G^T \cdot \boldsymbol{\eta}_H \cdot \boldsymbol{\eta}_G + |\boldsymbol{\eta}_G|^2 \eta_L\Big) =: u^\gamma T_4.$

Beweis: Die gewünschten Identitäten folgen direkt, wenn wir für die entsprechenden Variablen einsetzen und die Divergenzen berechnen. Wir möchten daher stellvertretend nur iii) beweisen. Es folgt:

$$\begin{aligned}\text{div }\left(u^\gamma \boldsymbol{\eta}_G^T \cdot \boldsymbol{\eta}_H\right) &= \text{div }\left(u^{\gamma-2}(\nabla u)^T \cdot \nabla\nabla u\right)\\ &= (\gamma-2)u^{\gamma-3}(\nabla u)^T \cdot \nabla\nabla u \cdot \nabla u + u^{\gamma-2}\text{div }\Big((\nabla u)^T \cdot \nabla\nabla u\Big).\end{aligned}$$

Darüber hinaus gilt:

$$\begin{aligned}\text{div }\Big((\nabla u)^T \cdot \nabla\nabla u\Big) &= \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}\Big((\partial_{x_i}\partial_{x_j}u)\partial_{x_j}u\Big) = \sum_{i,j=1}^n \Big(\partial_{x_i}\partial_{x_j}u\Big)^2 + \sum_{i,j=1}^n (\partial_{x_i}^2\partial_{x_j}u)\partial_{x_j}u\\ &= \text{tr }\left((\nabla\nabla u)^2\right) + \nabla u \cdot \nabla\Delta u.\end{aligned}$$

Fassen wir beide Gleichungen zusammen und heben u^γ heraus, so folgt iii). □

Das Polynom S_0 ergibt sich zu:

$$S_0(\boldsymbol{\xi}) = -\boldsymbol{\eta}_G \cdot \boldsymbol{\eta}_T.$$

Wir sehen, dass die Polynome T_1, T_2 und T_3 den Ausdruck $\boldsymbol{\eta}_G \cdot \boldsymbol{\eta}_T$ enthalten. Da auch S_0 diesen Ausdruck enthält, ist es sinnvoll diese als Verschiebungspolynome zu verwenden. Die Hinzunahme von T_4 ist nötig, weil T_3 sonst das einzige Polynom ist, welches den Ausdruck $\boldsymbol{\eta}_G^T \cdot \boldsymbol{\eta}_H \cdot \boldsymbol{\eta}_G$ enthält. Dies würde sonst zu Problemen beim Lösen des folgenden Entscheidungsproblems führen. Zusammenfassend erhalten wir für $\gamma := \alpha + \beta$

$$\mathcal{P}_\alpha[u](t) = \int_\Omega u^\gamma S_0 \; d\boldsymbol{x} = \int_\Omega u^\gamma \big(S_0 + c_1 T_1 + \ldots + c_4 T_4\big) \; d\boldsymbol{x}.$$

Das zweite Gleichheitszeichen ist mit den Divergenzdarstellungen aus Lemma 6.3.8 zu begründen (vgl. Abschnitt 6.2.2). Um $P_\alpha[u](t) \geq 0$ zu schließen, genügt es somit das folgende Entscheidungsproblem zu lösen:

$$\exists \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^4 : \; \forall \boldsymbol{\eta}_G, \boldsymbol{\eta}_T \in \mathbb{R}^n, \; \forall \eta_L, \eta_D \in \mathbb{R}, \; \forall \boldsymbol{\eta}_H \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow S_0 + c_1 T_1 + \ldots + c_4 T_4 \geq 0,$$

wobei $\boldsymbol{c} := (c_1, \ldots, c_4)$ gilt. Für $0 \leq S_0 + c_1 T_1 + \ldots + c_4 T_4$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}0 \leq\; & c_4(\gamma-3)|\boldsymbol{\eta}_G|^4 + \big(c_2(\gamma-2) + c_4\big)|\boldsymbol{\eta}_G|^2\eta_L + \big(-1 + (\gamma-1)c_1 + c_2 + c_3\big)\boldsymbol{\eta}_G \cdot \boldsymbol{\eta}_T\\ & + c_2\eta_L^2 + \big(c_3(\gamma-2) + 2c_4\big)\boldsymbol{\eta}_G^T\boldsymbol{\eta}_H\boldsymbol{\eta}_G + c_3\text{tr }(\boldsymbol{\eta}_H^2) + c_1\eta_D.\end{aligned}$$

Da η_D und jede Komponente von $\boldsymbol{\eta}_T$ nur mit dem Exponenten 1 in obiger Ungleichung erhalten ist, folgt, dass die entsprechenden Koeffizienten trivial sein müssen. Dies impliziert:

$$c_1 = 0 \quad \text{und} \quad -1 + (\gamma-1)c_1 + c_2 + c_3 = 0.$$

Wir können somit $c_1 = 0$ und $c_3 = 1 - c_2$ schließen. Es folgt die Ungleichung:

$$0 \leq a_1|\boldsymbol{\eta}_G|^4 + a_2|\boldsymbol{\eta}_G|^2\eta_L + a_3\eta_L^2 + a_4\boldsymbol{\eta}_G^T\boldsymbol{\eta}_H\boldsymbol{\eta}_G + a_5\text{tr }(\boldsymbol{\eta}_H^2) =: S(\boldsymbol{\eta}_G, \eta_L, \boldsymbol{\eta}_H)$$

mit:

$$a_1 := c_4(\gamma - 3), \quad a_2 := c_2(\gamma - 2) + c_4, \quad , a_3 = c_2,$$
$$a_4 := (1 - c_2)(\gamma - 2) + 2c_4 \quad \text{und} \quad a_5 := 1 - c_2.$$

Unser Ziel ist es, die Anzahl der Variablen weiter zu verringern und auf die skalaren Größen

$$\xi_G := |\boldsymbol{\eta}_G|, \quad \xi_L := \eta_L \quad \text{und} \quad \xi_H := \sqrt{\text{tr }(\boldsymbol{\eta}_H^2)}$$

zu reduzieren. Aus

$$\text{tr }(\boldsymbol{\eta}_H^2) = \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_{x_i}\partial_{x_j}u)^2$$

folgt, dass ξ_H wohldefiniert ist. Wir benötigen folgendes Lemma:

Lemma 6.3.9 Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann gilt:

$$|\boldsymbol{v}^T \cdot A \cdot \boldsymbol{w}| \leq \sqrt{\text{tr }(A^2)}\ |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}|, \quad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis: Es gilt:

$$(\boldsymbol{v}^T A\boldsymbol{w})^2 = (\boldsymbol{v}^T A\boldsymbol{w})(\boldsymbol{v}^T A\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w}^T \underbrace{A^T}_{=A} \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}^T A\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}^T A^2\boldsymbol{w}|\boldsymbol{v}|^2.$$

Bezeichne $\lambda^* \leq \text{tr }(A^2)$ den größten Eigenwert von A^2, so erhalten wir:

$$(\boldsymbol{v}^T A\boldsymbol{w})^2 = \boldsymbol{w}^T A^2\boldsymbol{w}|\boldsymbol{v}|^2 \leq \lambda^*|\boldsymbol{w}|^2|\boldsymbol{v}|^2 \leq \text{tr }(A^2)\ |\boldsymbol{w}|^2|\boldsymbol{v}|^2.$$

Ziehen wir nun die Wurzel auf beiden Seiten, so erhalten wir die gewünschte Aussage. □

Das obige Lemma impliziert unmittelbar:

$$|\boldsymbol{\eta}_G^T\boldsymbol{\eta}_H\boldsymbol{\eta}_G| \leq \sqrt{\text{tr }(\boldsymbol{\eta}_H^2)}\ |\boldsymbol{\eta}_G|^2 = \xi_H\xi_G^2. \tag{6.3}$$

Dies können wir verwenden, um $0 \leq S(\boldsymbol{\eta}_G, \eta_L, \boldsymbol{\eta}_H)$ auf ein Problem in den skalaren Größen ξ_G, ξ_L und ξ_H zurückzuführen. Wir definieren:

$$s(\xi_G, \xi_l, \xi_H) := a_1\xi_G^4 + a_2\xi_G^2\xi_L + a_3\xi_L^2 + a_4\xi_G^2\xi_H + a_5\xi_H^2.$$

Auf Grund von (6.3) können wir schließen:

$$S(\boldsymbol{\eta}_G, \eta_L, \boldsymbol{\eta}_H) \geq \min\big(s(\xi_G, \xi_L, -\xi_H), s(\xi_G, \xi_L, \xi_H)\big).$$

Damit ist $s \geq 0$ eine hinreichende Bedingung und es genügt das entsprechende Entscheidungsproblem

$$(\exists c_2)(\exists c_4)(\forall \xi_G)(\forall \xi_L)(\forall \xi_H)\big(s(\xi_G, \xi_L, \xi_H) \geq 0\big)$$

zu lösen. Wir wollen nun die Quantorenelimination explizit durchführen. Betrachten wir den Fall $\xi_G = 0$, so folgt aus $s \geq 0$ die Bedingung:

$$(a_3 \geq 0 \wedge a_5 \geq 0) \Leftrightarrow c_2 \in [0, 1].$$

Wir dividieren durch ξ_G^4 und definieren:

$$\xi_1 := \frac{\xi_L}{\xi_G^2} \quad \text{und} \quad \xi_2 := \frac{\xi_H}{\xi_G^2}.$$

Dies führt zu der folgenden äquivalenten Formel:

$$(\exists c_2)(\exists c_4)(\forall \xi_1)(\forall \xi_2)\big(\underbrace{a_1 + a_2\xi_1 + a_3\xi_1^2}_{=:b_3} + \underbrace{a_4}_{=:b_2}\xi_2 + \underbrace{a_5}_{=:b_1}\xi_2^2 \geq 0 \wedge a_3 \geq 0 \wedge a_5 \geq 0\big).$$

Mit Lemma 3.2.31 können wir den Allquantor bzgl. $\boldsymbol{\xi}_2$ eliminieren.

i) Es soll $b_1 = b_2 = 0$ und $b_3 \geq 0$ gelten. Die Gleichungen $b_1 = 0$ und $b_2 = 0$ implizieren, dass $c_2 = 1$ und $c_4 = 0$ gelten muss. Dies ist nur für $\gamma = 2$ kein Widerspruch zu

$$0 \leq b_3 = \xi_1(\xi_1 + \gamma - 2) \quad \forall \xi_1.$$

Insbesondere ist für $\gamma = 2$ die Ungleichung $a_4 \geq 0$ erfüllt.

ii) Es soll $b_1 > 0$ und $4b_1b_3 - b_2^2 \geq 0$ gelten. Für $4b_1b_3 - b_2^2 \geq 0$ folgt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq 4(1-c_2)\Big(c_2\xi_1^2 + \big(c_4 + c_2(\gamma-2)\big)\xi_1 + c_4(\gamma-3)\Big) - \big(2c_4 + (1-c_2)(\gamma-2)\big)^2 \\ &= d_1\xi_1^2 + d_2\xi_1 + d_3 \end{aligned}$$

mit:

$$\begin{gathered} d_1 := 4(1-c_2)c_2, \quad d_2 := 4(1-c_2)\big(c_4 + c_2(\gamma-2)\big) \quad \text{und} \\ d_3 := 4(1-c_2)c_4(\gamma-3) - \big(2c_4 + (1-c_2)(\gamma-2)\big)^2. \end{gathered}$$

Somit müssen wir das Entscheidungsproblem

$$(\exists c_2)(\exists c_2)(\forall \xi_1)(d_1\xi_1^2 + d_2\xi_1 + d_3 \geq 0 \wedge b_1 > 0 \wedge a_3 \geq 0)$$

lösen. Setzen wir für a_3 und b_1 ein, so folgt:

$$(b_1 > 0 \wedge a_3 \geq 0) \Leftrightarrow c_2 \in [0, 1).$$

Den Allquantor können wir mit Lemma 3.2.31 eliminieren und wir erhalten wieder zwei Fälle.

Wir betrachten den Fall $d_1 = d_2 = 0$ und $d_3 \geq 0$. Aus den Gleichungen $d_1 = 0$ und $d_2 = 0$ folgt, dass $c_2 = c_4 = 0$ gelten muss. Setzen wir dies in d_3 ein, so erhalten wir:

$$0 \leq d_3 = -(\gamma - 2)^2.$$

Nur für $\gamma = 2$ erhalten wir keinen Widerspruch.

Betrachten wir nun den Fall $d_1 > 0$ und $4d_1d_3 - d_2^2 \geq 0$. Wir wählen für $\gamma \in [3/2, 3]$:

$$c_2 = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad c_4 = -\frac{1}{9}\big(2\sqrt{-(2\gamma-3)(\gamma-3)} + \gamma\big).$$

Trivialerweise ist $c_2 \in [0, 1)$ erfüllt. Darüber hinaus gilt:

$$d_1 = \frac{8}{9} \quad \text{und} \quad 4d_1d_3 - d_2^2 = 0.$$

Somit haben wir zumindest für $\gamma \in [3/2, 3]$ eine Lösung für unser Ungleichungssystem gefunden und wir können schließen, dass wir für $\alpha + \beta \in [3/2, 3]$ Lyapunov-Funktionale erhalten. Wir haben somit folgenden Satz bewiesen:

Satz 6.3.10 (*Lyapunov-Funktionale für die mehrdimensionale Dünnfilmgleichung 4. Ordnung*) Sei u eine beliebige klassische Lösung der mehrdimensionalen Dünnfilmgleichung 4. Ordnung[2] mit $u > 0$ in $\overline{\Omega_T}$. Für $\alpha + \beta \in [3/2, 3]$ gilt:

$$P_\alpha[u](t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Dies bedeutet, dass H_α ein Lyapunov-Funktional ist. Insbesondere ist der Parameterbereich optimal. Das heißt, dass unter der Annahme der Grundhypothese (Definition 2.1.6) für $\gamma \in [3/2, 3]^{\mathsf{c}}$ eine klassische Lösung u und ein $t_0 \in [0, T]$ existiert mit:

$$P_\alpha[u](t_0) < 0.$$

Beweis: Die Rechnung aus diesem Abschnitt impliziert, dass wir für den angegebenen Parameterbereich Lyapunov-Funktionale erhalten. Es verbleibt die Optimalität zu zeigen. Wir wählen für $\alpha + \beta \in [3/2, 3]^{\mathsf{c}}$ die gleiche Anfangsbedingung u_0 wie im Beweis von Korollar 5.2.12, jedoch mit x_1 als Argument auf dem Intervall (a_1, b_1). Insbesondere ist damit u_0 von $x_2, \ldots, x_n$ unabhängig. Es folgt:

$$\nabla u_0 = ((u_0)_{x_1}, 0, \ldots, 0)^T \quad \text{und} \quad \nabla\Delta u_0 = ((u_0)_{x_1x_1x_1}, 0, \ldots, 0)^T.$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} P_\alpha[u](0) &= -\int_\Omega u_0^{\alpha+\beta} \frac{\nabla u_0}{u_0} \cdot \frac{\nabla\Delta u_0}{u_0}\, d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega u_0^{\alpha+\beta} \frac{(u_0)_{x_1}}{u_0} \frac{(u_0)_{x_1x_1x_1}}{u_0}\, d\boldsymbol{x} \\ &= \underbrace{-\int_{a_1}^{b_1} u_0^{\alpha+\beta} \frac{(u_0)_{x_1}}{u_0} \frac{(u_0)_{x_1x_1x_1}}{u_0}\, dx_1}_{<0} \prod_{i=2}^n \underbrace{(b_i - a_i)}_{>0} < 0. \end{aligned}$$

[2]Vgl. Definition 6.1.5 mit $k = 3$ und $P_i(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^n \xi_{\boldsymbol{\alpha}_i + 2\boldsymbol{\alpha}_j}$, $i = 1, \ldots, n$. Es gilt die Notation aus Abschnitt 6.2.1 zu beachten.

Das Vorzeichen des Integrals folgt direkt aus der Konstruktion von u_0 im Beweis von Korollar 5.2.12. Bezeichne u die klassische Lösung der Dünnfilmgleichung mit Anfangsbedingung u_0. Da $t \mapsto P_\alpha[u](t)$ stetig in der Zeit ist, folgt $P_\alpha[u](0) < 0$. Wir schließen, dass für $\alpha + \beta \in [3/2, 3]^c$ das Funktional H_α kein Lyapunov-Funktional sein kann. Wir haben somit die gewünschte Aussage bewiesen. $\square$

Anmerkung 6.3.11 Wir haben für den mehrdimensionalen Fall den gleichen optimalen Parameterbereich wie im eindimensionalen Fall gefunden. Dies ist nicht selbstverständlich, weil wir durch die Reduktion der Variablen und Betrachtung der hinreichenden Bedingung $s \geq 0$ einen kleineren Parameterbereich erwarten hätten können. $\circ$

Zusammenfassend möchten wir noch zwei wesentliche Schritte für den mehrdimensionalen Fall herausgreifen:

i) In einem ersten Schritt müssen wir Ausdrücken der Form

$$\frac{Du}{u}$$

identifizieren und als neue Variablen betrachten.

ii) In einem zweiten Schritt ist es zielführend die neuen Variablen auf skalare Größen zurückzuführen und somit nochmals die Anzahl der Variablen zu reduzieren.

In [16, Lemma 4] findet sich ein weiteres Beispiel für eine mehrdimensionale systematische partielle Integration.

Kapitel 7

Logarithmische Sobolev-Ungleichungen

In diesem Kapitel wollen wir die Methoden aus Kapitel 2 verwenden, um sogenannte *logarithmische Sobolev-Ungleichungen* herzuleiten. Wir benötigen folgende Definition:

Definition 7.0.1 (*Logarithmische Sobolev-Ungleichungen - eindimensional*) Sei $\Omega := (a, b)$ ein beschränktes Intervall, $\gamma > 0$ und $C > 0$. Darüber hinaus sei $\boldsymbol{q} \in \mathbb{N}^2_\times$ und $\boldsymbol{p} \in \mathbb{N}^2_\times$ mit:

$$q_1 p_1 = q_2 p_2 \quad \text{und} \quad q_1 < q_2.$$

Eine Ungleichung der Form

$$\int_\Omega u^\gamma \big(\partial_x^{q_1} \ln(u)\big)^{p_1} \, dx \leq C \int_\Omega u^\gamma \big(\partial_x^{q_2} \ln(u)\big)^{p_2} \, dx \tag{7.1}$$

werden wir als eine *logarithmische Sobolev-Ungleichung* bezeichnen, wobei $u \in C^{q_2}(\overline{\Omega})$ mit $u > 0$ in $\overline{\Omega}$ gilt.

Um die entsprechenden Resultate aus Kapitel 2 anwenden zu können, werden wir im Folgenden fordern, dass u entweder (RB2) oder (RB1) (unabhängig von der Zeit t) erfüllt.

7.1 Der Algorithmus

Wir formulieren Ungleichung (7.1) um und erhalten:

$$\int_\Omega u^\gamma \Big(C\big(\partial_x^{q_2} \ln(u)\big)^{p_2} - \big(\partial_x^{q_1} \ln(u)\big)^{p_1}\Big) \, dx \geq 0.$$

Unser Ziel ist es, bei vorgegebenen $\boldsymbol{q}$ und $\boldsymbol{p}$ eine Konstante C in Abhängigkeit von γ zu bestimmen.

7.1.1 Bestimmung des Integranden

Für den entsprechenden Algorithmus müssen wir den Integranden auswerten. Hierfür verwenden wir das folgende Lemma:

Lemma 7.1.2 Sei $n \in \mathbb{N}$ und u eine hinreichend oft differenzierbare Funktion, welche den Wert 0 nicht annimmt. Dann gilt auf den Definitionsbereich von u:

$$\partial_x^n \ln(u) = \sum_{\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_n} \binom{n}{\boldsymbol{l}} (-1)^{|\boldsymbol{l}|-1} (|\boldsymbol{l}|-1)! \prod_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial_x^j u}{u}\Big)^{l_j} \prod_{j=1}^{n} \Big(\frac{1}{j!}\Big)^{l_j}$$

Beweis: Wir verwenden die Formel von Faà di Bruno mit $s(u) = \ln(u)$. Es folgt:

$$\partial_x^n \ln(u) = \sum_{\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_n} \binom{n}{\boldsymbol{l}} \partial_u^{|\boldsymbol{l}|} \ln(u) \prod_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial_x^j u}{j!}\Big)^{l_j}.$$

Induktiv erhalten wir:

$$\partial_u^{|\boldsymbol{l}|} \ln(u) = (-1)^{|\boldsymbol{l}|-1} (|\boldsymbol{l}|-1)! \frac{1}{u^{|\boldsymbol{l}|}} = (-1)^{|\boldsymbol{l}|-1} (|\boldsymbol{l}|-1)! \prod_{i=j}^{n} \frac{1}{u^{l_j}}.$$

Setzen wir die höheren Ableitungen von $\ln(u)$ ein, so erhalten wir die gewünschte Aussage. $\square$

Definition 7.1.3 Sei $n \in \mathbb{N}$. Das Polynom $H_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei durch

$$\boldsymbol{\xi}_n \mapsto \sum_{\boldsymbol{l} \in \mathcal{I}_n} \binom{n}{\boldsymbol{l}} (-1)^{|\boldsymbol{l}|-1} (|\boldsymbol{l}|-1)! \ \boldsymbol{\xi}_n^{\boldsymbol{l}} \prod_{j=1}^{n} \Big(\frac{1}{j!}\Big)^{l_j}$$

definiert.

Unmittelbar aus der Definition des Polynoms H_n folgt:

Lemma 7.1.4 Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $H_n \in \mathcal{P}_n$.

Beweis: Die gewünschte Aussagte ist eine direkte Konsequenz aus der Tatsache, dass H_n als Linearkombination der Basismonome aus $\mathcal{P}_n$ gegeben ist. $\square$

Mit Lemma 7.1.2 und der Notation aus Kapitel 2 erhalten wir:

$$\partial_x^n \ln(u) = H_n(\boldsymbol{\xi}_n(u)).$$

Zusammenfassend können wir schließen:

$$(7.1) \quad \Leftrightarrow \quad \int_\Omega u^\gamma \Big(C\big(H_{q_2}(\boldsymbol{\xi}(u))\big)^{p_2} - \big(H_{q_1}(\boldsymbol{\xi}(u))\big)^{p_1} \Big) \, dx \geq 0. \tag{7.2}$$

Anmerkung 7.1.5 Induktiv folgt mit Lemma 1.3.11, dass das Polynom $C(H_{q_2})^{p_2} - (H_{q_1})^{p_1}$ aus dem Raum $\mathcal{Q}_{q_2 p_2, q_2}$ ist. ⬠

Beispiel 7.1.6 Wir wollen $H_1(\boldsymbol{\xi})$ bestimmen. Aus $\mathcal{I}_1 = \{1\}$ folgt:

$$H_1(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{1!}\ (-1)^{1-1}\ (1-1)!\ \xi_1^1\ \frac{1}{1!} = \xi_1.$$

⬠

Beispiel 7.1.7 Wir wollen $H_2(\boldsymbol{\xi})$ bestimmen. Aus $\mathcal{I}_2 = \{(2,0),(0,1)\}$ folgt:

$$H_1(\boldsymbol{\xi}) = \frac{2}{2!}\ (-1)^{2+1}\ (2-1)!\ \xi_1^2\ \left(\frac{1}{1!}\right)^2 + \frac{2}{1!}\ (-1)^{1-1}\ (1-1)!\ \xi_2\ \frac{1}{2!} = \xi_2 - \xi_1^2.$$

⬠

7.1.2 Die Verschiebungspolynome

Mit Hilfe der Verschiebungspolynome aus Kapitel 2 können wir den Integranden in (7.2) manipulieren ohne den Wert des Integrals zu verändern. Wir erhalten den folgenden Satz:

Satz 7.1.8 (*Systematische partielle Integration für logarithmische Sobolev-Ungleichungen*) Es gelten die Voraussetzungen von Definition 7.0.1. Darüber hinaus sei $u \in C^{q_2}(\overline{\Omega})$ mit $u > 0$ in $\overline{\Omega}$, welche (RB1) oder (RB2) (unabhängig von der Zeit t) erfüllt. Dann gilt für alle $G \in \mathcal{Q}_{q_2 p_2 - 1, q_2 - 1}$:

$$(7.1) \quad \Leftrightarrow \quad \int_\Omega u^\gamma \Big(C\big(H_{q_2}(\boldsymbol{\xi}(u))\big)^{p_2} - \big(H_{q_1}(\boldsymbol{\xi}(u))\big)^{p_1} + \delta_\gamma G(\boldsymbol{\xi}(u)) \Big)\ dx \geq 0.$$

Beweis: Wegen (7.2) genügt es zu zeigen, dass gilt:

$$\int_\Omega u^\gamma \delta_\gamma G(\boldsymbol{\xi}(u))\ dx = 0, \quad \forall G \in \mathcal{Q}_{q_2 p_2 - 1, q_2 - 1}.$$

Dies können wir analog zu dem Beweis von Satz 2.3.56 mit Lemma 2.1.15 und Lemma 2.2.30 folgern. Zusammenfassend erhalten wir die gewünschte Aussage. □

Anmerkung 7.1.9 Das Polynom G in Satz 7.1.8 ist so gewählt, dass der Intergand aus dem Raum $\mathcal{Q}_{q_2 p_2, q_2}$ ist (vgl. Anmerkung 7.1.5). ⬠

7.1.3 Ein Entscheidungsproblem

Analog zu Kapitel 2 erhalten wir als eine hinreichende Bedingung für (7.1), dass ein Polynom $G \in \mathcal{Q}_{q_2 p_2 - 1, q_2 - 1}$ existieren muss mit:

$$C\big(H_{q_2}\big)^{p_2} - \big(H_{q_1}\big)^{p_1} + \delta_\gamma G \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{q_2}.$$

Wir stellen das Polynom G durch unsere Monombasis (Korollar 1.3.10) dar und verwenden die Notation aus Abschnitt 2.3.3. Wir erhalten:

$$G = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{J}_{q_2 p_2 - 1, q_2 - 1}} c_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\xi}_{q_2-1}^{\boldsymbol{k}} \quad \text{und} \quad \delta_\gamma G = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{J}_{q_2 p_2 - 1, q_2 - 1}} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}}.$$

Zusammenfassend erhalten wir folgendes polynomielles Entscheidungsproblem:

$$\exists C, \exists (c_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{J}_{q_2 p_2 - 1, q_2 - 1}} \subseteq \mathbb{R} : \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{q_2} \Rightarrow C\big(H_{q_2}\big)^{p_2} - \big(H_{q_1}\big)^{p_1} + \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{J}_{q_2 p_2 - 1, q_2 - 1}} c_{\boldsymbol{k}} T_{\boldsymbol{k}} \geq 0. \tag{7.3}$$

Obiges Entscheidungproblem können wir wieder mit den in Kapitel 3 vorgestellten Methoden algorithmisch lösen. Insbesondere haben wir einen Algorithmus gefunden, welcher uns hilft logarithmische Sobolev-Ungleichungen zu bestimmen.

7.1.4 Zusammenfassung und Anmerkungen

Wir können *Schritt 1 - Schritt 3* aus Abschnitt 2.2.5 übernehmen, jedoch müssen wir beachten, dass wir S_0 durch $CH_{q_2}^{p_2} - H_{q_1}^{p_1}$ und $\mathcal{I}_k$ durch $\mathcal{J}_{q_2 p_2 - 1, q_2 - 1}$ ersetzen müssen.

Anmerkung 7.1.10 Fordern wir, dass $u \in C^{q_2 p_2}(\overline{\Omega})$ gilt, so kann das Polynom G aus dem Raum $\mathcal{P}_{q_2 p_2}$ gewählt werden, sofern die geforderten Randbedingungen für $k = q_2 p_2$ erfüllt sind. Dies erhöht die Anzahl der Verschiebungspolynome für das Entscheidungsproblem (7.3). ○

Anmerkung 7.1.11 (Gültigkeit für $u \geq 0$) Wählen wir $\gamma \geq p_2 q_2$, so ist der Integrand in Satz 7.1.8 auch definiert, wenn u den Wert 0 annimmt. Wir können daher Satz 7.1.8 für $u \geq 0$ erweitern, sofern wir γ hinreichend groß wählen. Ist γ zusätzlich eine gerade Zahl, so können wir jede Forderung an das Vorzeichen von u weglassen. ○

Anmerkung 7.1.12 Die Bedingung $q_1 p_1 = q_2 p_2$ haben wir verwendet, um

$$\big(H_{q_1}\big)^{p_1} \in \mathcal{P}_{q_2 p_2} \quad \text{und} \quad \big(H_{q_2}\big)^{p_2} \in \mathcal{P}_{q_2 p_2}$$

schließen zu können. Wenn wir diese weglassen möchten, dann ist es sinnvoll den Integranden in Satz 7.1.8 additiv mit der Funktion

$$u^\gamma \delta_\gamma H(\boldsymbol{\xi}(u)), \quad H \in \mathcal{Q}_{q_1 p_1 - 1, q_2 - 1}$$

zu erweitern. ○

Anmerkung 7.1.13 (Mehrdimensionale Erweiterung) Wir können die hier vorgestellte Methode direkt auf Funktionen u in mehreren Variablen erweitern. Folgendes gilt es zu beachten:

i) Wir wählen Ω als einen n-dimensionalen Quader (vgl. Definition 6.1.4).

ii) Die Funktion u soll periodische Randbedingungen erfüllen.

iii) In Definition 7.0.1 müssen wir den mehrdimensionalen Definitionsbereich berücksichtigen und für $i \in \{1,2\}$ den Ausdruck $\partial_x^{q_i} \ln(u)$ durch eine partielle Ableitung

$$D^{\boldsymbol{\alpha}_i} \ln(u) \quad \text{mit} \quad |\boldsymbol{\alpha}_i| = q_i$$

ersetzen.

iv) Die Verschiebungspolynome und Methoden zu der Reduktion von Variablen können wir aus Kapitel 6 entnehmen.

⬡

Anmerkung 7.1.14 In [15, Abschnitt 5.2.] finden sich weiterführende Referenzen zu logarithmischen Sobolev-Ungleichungen (z.B. Optimalität der Konstante C). ⬡

7.2 Ein Beispiel

Wir wollen hier ein Beispiel für eine logarithmische Sobolev-Ungleichung vorstellen. Diese ist aus [15, Abschnitt 5.2.] entnommen.

Satz 7.2.15 Es sei $\Omega := (a,b)$ ein beschränktes Gebiet und $\gamma > 0$. Darüber hinaus sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $u > 0$ ($u \geq 0$ für $\gamma \geq 4$), welche (RB1) oder (RB2) für $k = 2$ erfüllt (unabhängig von t). Dann gilt:

$$\int_\Omega u^\gamma \big(\ln(u)\big)_x^4 \, dx \leq \left(\frac{3}{\gamma}\right)^2 \int_\Omega u^\gamma \big(\ln(u)\big)_{xx}^2 \, dx.$$

Beweis: Nach dem vorherigen Abschnitt ist es hinreichend, das Entscheidungsproblem (7.3) zu lösen. Mit Beispiel 7.1.6 und Beispiel 7.1.7 folgt:

$$CH_2^2 - H_1^4 = C(\xi_2 - \xi_1^2)^2 - \xi_1^4 = (C-1)\xi_1^4 - 2C\xi_1^2\xi_2 + C\xi_2^2.$$

Mit Hilfe von Beispiel 2.2.27 folgt, dass das einzige zulässige Verschiebungspolynom durch

$$T(\boldsymbol{\xi}) := (\gamma - 3)\xi_1^4 + 3\xi_1^2\xi_2$$

gegeben ist. Für (7.3) erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 \leq CH_2^2 - H_1^4 + cT &= (C-1)\xi_1^4 - 2C\xi_1^2\xi_2 + C\xi_2^2 + c\big((\gamma-3)\xi_1^4 + 3\xi_1^2\xi_2\big) \\ &= a_1\xi_1^4 + a_2\xi_1^2\xi_2 + a_3\xi_2^2 \end{aligned}$$

mit:

$$a_1 := C - 1 + c(\gamma - 3), \quad a_2 := -2C + 3c \quad \text{und} \quad a_3 := C.$$

Die Allquantoren in (7.3) können wir mit Lemma 3.2.32 eliminieren. Berücksichtigen wir, dass $C > 0$ gelten soll, so erhalten wir folgendes äquivalentes Entscheidungsproblem:

$$(\exists C)(\exists c)(4a_1a_3 - a_2^2 \geq 0 \land C > 0).$$

Es gilt:

$$0 \leq 4a_1a_3 - a_2^2 = 4C\big(C - 1 + c(\gamma - 3)\big) - (-2C + 3c)^2 = -9c^2 + 4\gamma Cc - 4C.$$

Damit ein c existiert, muss obiges quadratische Polynom mindestens eine reelle Nullstelle besitzen. Dies impliziert, dass die entsprechende Diskriminante nichtnegativ sein muss. Wir erhalten für die Diskriminante:

$$0 \leq (4\gamma C)^2 - 4(-9)(-4C) = 16C^2\gamma^2 - 144C.$$

Obige Ungleichung können wir durch $C > 0$ dividieren und nach C auflösen. Es folgt:

$$C \geq \left(\frac{3}{\gamma}\right)^2.$$

Insbesondere ist damit die gesuchte logarithmische Sobolev-Ungleichung für

$$C := \left(\frac{3}{\gamma}\right)^2$$

erfüllt und wir erhalten die gewünschte Aussage. Die Gültigkeit für $u \geq 0$ und $\gamma \geq 4$ folgt direkt aus Anmerkung 7.1.11. $\square$

Anmerkung 7.2.16 Fordern wir $u \in C^4(\overline{\Omega})$ mit entsprechenden Randbedingungen, so können wir noch zwei weitere Verschiebungspolynome betrachten (vgl. Anmerkung 7.1.10). Wir berichten hier, dass dies nicht zu einer Verbesserung der Konstante C in Satz 7.2.15 führt. Dies resultiert aus der Tatsache, dass die Vorfaktoren für die zusätzlichen Verschiebungspolynome auf Grund von Lemma 2.2.36 und Lemma 2.2.35 trivial sein müssen. $\circ$

Nachwort

Abschließend möchten wir einige Aspekte erwähnen auf welche wir im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingegangen sind. Systematische partielle Integration wurde verwendet, um Lyapunov-Funktionale für folgende Gleichungen zu bestimmen:

i) Poröse-Medium-Gleichung (vgl. [15, Abschnitt 4.1]),

ii) Derrida-Lebowitz-Speer-Spohn-Gleichung (vgl. [15, Abschnitt 4.3] für den eindimensionalen Fall und vgl. [16, Lemma 4] für den mehrdimensionalen Fall) und

iii) Fokker-Planck-Gleichung (vgl. [14, Abschnitt 3.4]).

Darüber hinaus können die in dieser Arbeit vorgestellten Methoden erweitert werden auf:

i) Gleichungen, welche die gemischte Form

$$u_t = \Big(u^{\beta+1} P\big(\frac{u_x}{u}, \ldots, \frac{\partial_x^k u}{u}\big) + u^{\gamma+1} Q\big(\frac{u_x}{u}, \ldots, \frac{\partial_x^p u}{u}\big) + \Big)_x$$

besitzen (vgl. [15, Abscnitt 5.3]),

ii) Mehrdimensionale radialsymmetrische Funktionen (vgl. [14, Abschnitt 3.3]) und

iii) Mehrdimensionale Neumann-Randbedingungen (vgl. [14, Abschnitt 3.3]).

Nicht beantwortet haben wir die Frage wie wir unser Verfahren auf Funktionen erweitern können, welche nicht im klassischen Sinne differenzierbar sind. Um Lyapunov-Funktionale zu bestimmen, haben wir explizit das Vorzeichen der Zeitableitung von H_α betrachtet. Dies ist hinreichend, aber nicht notwendig, um auf Monotonie schließen zu können. Je nach gewähltem Lösungsbegriff für unser Grundproblem (Definition 2.1.2) ist dies auch nicht möglich. Eine Erweiterung von logarithmischen Sobolev-Ungleichungen auf Sobolev-Räume wäre in diesem Zusammenhang auch von Interesse.

Literaturverzeichnis

[1] Alt, H. W.: *Lineare Funktionalanalysis.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 6. Auflage, 2012. Eine anwendungsorientierte Einführung.

[2] Basu, S., R. Pollack und M. Roy: *Algorithms in real algebraic geometry*, Band 10 der Reihe *Algorithms and Computation in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 2006.

[3] Beretta, E., M. Bertsch und R. Dal Passo: *Nonnegative solutions of a fourth-order nonlinear degenerate parabolic equation.* Arch. Rational Mech. Anal., 129(2):175–200, 1995.

[4] Bernis, F. und A. Friedman: *Higher order nonlinear degenerate parabolic equations.* J. Differential Equations, 83(1):179–206, 1990.

[5] Brown, C. W.: *Companion to the Tutorial Cylindrical Algebraic Decomposition.* `https://www.usna.edu/Users/cs/wcbrown/research/ISSAC04/handout.pdf`, 2004. Presented at ISSAC 2004.

[6] Carlen, E. A. und S. Ulusoy: *An entropy dissipation-entropy estimate for a thin film type equation.* Commun. Math. Sci., 3(2):171–178, 2005.

[7] Clausen, M. und A. Fortenbacher: *Efficient solution of linear Diophantine equations.* J. Symbolic Comput., 8(1-2):201–216, 1989.

[8] Collins, G. E.: *The calculation of multivariate polynomial resultants.* J. Assoc. Comput. Mach., 18:515–532, 1971.

[9] Collins, G. E.: *Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition.* Seiten 134–183. Lecture Notes in Comput. Sci., Vol. 33, 1975.

[10] Eck, C., H. Garcke und P. Knabner: *Mathematische Modellierung.* Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[11] Evans, L. C.: *Partial differential equations*, Band 19 der Reihe *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2. Auflage, 2010.

[12] Flitton, J. C. und J. R. King: *Moving-boundary and fixed-domain problems for a sixth-order thin-film equation.* European J. Appl. Math., 15(6):713–754, 2004.

[13] HEUSER, H.: *Lehrbuch der Analysis. Teil 2.* Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 13. Auflage, 2004.

[14] JÜNGEL, A.: *Entropy methods for diffusive partial differential equations.* SpringerBriefs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2016.

[15] JÜNGEL, A. und D. MATTHES: *An algorithmic construction of entropies in higher-order nonlinear PDEs.* Nonlinearity, 19(3):633–659, 2006.

[16] JÜNGEL, A. und D. MATTHES: *The Derrida-Lebowitz-Speer-Spohn equation: existence, nonuniqueness, and decay rates of the solutions.* SIAM J. Math. Anal., 39(6):1996–2015, 2008.

[17] KING, J. R.: *The isolation oxidation of silicon: the reaction-controlled case.* SIAM J. Appl. Math., 49(4):1064–1080, 1989.

[18] KLEENE, S. C.: *Mathematical logic.* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2002. Reprint of the 1967 original.

[19] KUSOLITSCH, N.: *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer Spektrum, 2014. Eine Einführung.

[20] LAUGESEN, R. S.: *New dissipated energies for the thin fluid film equation.* Commun. Pure Appl. Anal., 4(3):613–634, 2005.

[21] MAHMOUDVAND, R., H. HASSANI, A. FARZANEH und G. HOWELL: *The exact number of nonnegative integer solutions for a linear Diophantine inequality.* IAENG Int. J. Appl. Math., 40(1):1–5, 2010.

[22] MATTES, D.: *Entropy Methods and Related Functional Inequalities.* `http://www-m8.ma.tum.de/personen/matthes/papers/lecpavia.pdf`, 2007.

[23] NATHANSON, M. B.: *Elementary methods in number theory*, Band 195. Springer-Verlag, New York, 2000.

[24] ORON, A, S. H. DAVIS und S. G. BANKOFF: *Long-scale evolution of thin liquid films; Rev. Mod. Phys.*

[25] ROMAN, S.: *The formula of Faà di Bruno.* Amer. Math. Monthly, 87(10):805–809, 1980.

[26] TARSKI, A.: *A decision method for elementary algebra and geometry.* University of California Press, Berkeley and Los Angeles, Calif., 2. Auflage, 1951.

[27] ZOGHBI, A. und I. STOJMENOVIĆ: *Fast algorithms for generating integer partitions.* Int. J. Comput. Math., 70(2):319–332, 1998.