

## DIPLOMARBEIT

# CFD-Berechnung einer turbulenten Kanalströmung mit freier Oberfläche über einem Boden mit einem Gebiet erhöhter Rauigkeit

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades  
eines Diplom-Ingenieurs

eingereicht an der TU Wien, Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

**Mario STOJANOVIC**

Matrikelnummer: 01125142

Rosa Jochmann Ring 42

1110 Wien

unter der Leitung von

Em.O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dr.h.c. Wilhelm Schneider

Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung

Wien, im September 2018

SCIENTISTS STUDY THE WORLD AS IT IS,  
ENGINEERS CREATE THE WORLD THAT NEVER HAS BEEN.

Theodore von Kármán

# Eidesstattliche Erklärung

Ich, Mario Stojanovic, erkläre an Eides statt, dass die vorliegende Arbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen von mir selbstständig erstellt wurde.

Alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, sind in dieser Arbeit genannt und aufgelistet. Die aus den Quellen wörtlich entnommenen Stellen sind als solche kenntlich gemacht.

Das Thema der Arbeit wurde von mir bisher weder im In- noch im Ausland einer Beurteilerin/einem Beurteiler zur Begutachtung in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt. Diese Arbeit stimmt mit der von den Begutachterinnen/Begutachtern beurteilten Arbeit überein.

Wien, am 28. September 2018

---

Mario Stojanovic

# Danksagung

Die Fertigstellung dieser Arbeit wäre ohne die Mithilfe zahlreicher Personen nicht möglich gewesen, wofür ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen möchte.

In wissenschaftlicher Hinsicht gebührt mein größter Dank zweifelsfrei meinem Betreuer Univ.Prof. Wilhelm Schneider, der sich während meiner gesamten Arbeit stets für mich Zeit genommen hat, um mir bei meinen Fragen bis ins kleinste Detail behilflich zu sein. Auch in anderen Bereichen der Strömungsmechanik, die nicht zwangsweise meine Diplomarbeit betrafen, nahm er sich die Zeit meine Wissenslücken zu füllen.

Des Weiteren möchte ich mich bei meinem Mitbetreuer Dipl.-Ing. Dominik Murschenhofer bedanken, der immer ein offenes Ohr für mich hatte und stets bemüht war mir bei der Lösung der anfallenden Probleme zu helfen.

Ein großer Dank geht auch an Dr.techn. Markus Müllner für die Formulierung der Problemstellung dieser Diplomarbeit. Darüber hinaus hat er mir sowohl durch persönliche Gespräche als auch durch die Bereitstellung seiner Unterlagen den Einstieg in die Arbeit maßgeblich erleichtert.

Für die Unterstützung hinsichtlich numerischer Methoden möchte ich mich bei der AIC-Forschungsförderung bedanken, durch welche mir die Teilnahme am CISM-Kurs „High-performance Computing of Big Data for Turbulence and Combustion“ ermöglicht wurde. Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei den Herren Dr.techn. Francesco Romanò und MSc Pierre-Emmanuel Des Bosc für die Hilfestellung in Bezug auf Programmierung.

Einen besonderen Dank möchte ich meiner Mutter Danira, meinem Vater Zdravko und meinem Bruder Ivo für die bedingungslose Unterstützung aussprechen, welche ich nicht nur während des Studiums sondern immer schon erhalten habe.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>1 Einleitung und Ziel</b>	<b>1</b>
<b>2 Problemstellung</b>	<b>3</b>
<b>3 Grundgleichungen und Randbedingungen</b>	<b>5</b>
3.1 Dimensionsbehaftete Form . . . . .	5
3.2 Dimensionslose Form . . . . .	9
<b>4 Asymptotische Entwicklung</b>	<b>12</b>
4.1 Ohne Druckstörungsterm . . . . .	12
4.2 Mit Druckstörungsterm . . . . .	20
<b>5 Iterationsverfahren</b>	<b>22</b>
<b>6 Numerische Lösung der erweiterten KdV-Gleichung</b>	<b>25</b>
<b>7 Numerische Lösung der Reynolds-Gleichungen</b>	<b>34</b>
7.1 Voll ausgebildete Strömung . . . . .	35
7.2 Boden mit Gebiet erhöhter Rauigkeit . . . . .	39
<b>8 Ergebnisse</b>	<b>41</b>
8.1 Rechnung mit Rauigkeit entsprechend Experiment . . . . .	43
8.1.1 Lösung erster Art . . . . .	43
8.1.2 Lösung zweiter Art . . . . .	47

8.2	Rechnung mit Neigungswinkel entsprechend Experiment . . . . .	49
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Schlussfolgerungen</b>	<b>53</b>
	Symbolverzeichnis	56
	Literaturverzeichnis	60

# Kurzfassung

Der Vergleich zwischen asymptotischer Analyse und numerischen Berechnungen ist speziell dann von großem Interesse, wenn auch experimentelle Daten für ein und dasselbe Problem vorliegen, da man eine Idee über den Einfluss der dabei getroffenen Annahmen oder verwendeten Modelle bekommt.

In der vorliegenden Arbeit wird eine turbulente, nahkritische Kanalströmung mit freier Oberfläche betrachtet, deren Wellenform von zentralem Interesse ist. Die asymptotische Analyse, welche für große Reynolds-Zahlen und Froude-Zahlen nahe dem kritischen Wert 1 durchgeführt wurde, liefert eine erweiterte Form der sogenannten Korteweg-de Vries (KdV) Gleichung für die Oberflächenerhöhung erster Ordnung [12].

Neben der asymptotischen Lösung dieser Oberflächenerhöhung werden für die numerische Herangehensweise der Aufgabenstellung die vollständigen Bewegungsgleichungen mithilfe eines CFD-Programms unter Verwendung eines geeigneten Turbulenzmodells gelöst. Zur Bestimmung der Oberfläche wird ein Iterationsverfahren verwendet, welches bereits in [13] erfolgreich eingesetzt wurde und auf einer zusätzlichen asymptotischen Entwicklung basiert. Neben der bereits längere Zeit bekannten stehenden Solitärwelle werden auch Einzelwellen zweiter Art numerisch untersucht.

Die Experimente aus [15], welche auf der Nihon Universität Tokio durchgeführt wurden, bieten schließlich die Möglichkeit eines zusätzlichen Vergleichs sowie einer ausführlicheren Analyse der Ergebnisse.

# Abstract

The comparison between asymptotic analysis and numerical computations is of great interest, especially if experimental data is provided. Thus, one can get an idea about the influence of the assumptions that were made during the computations.

In the present thesis a steady turbulent near-critical free-surface flow is considered, whose stationary waveform is of key interest. The asymptotic analysis was performed for large Reynolds numbers and Froude numbers close to the critical value 1, leading to an extended form of the so-called Korteweg-de Vries (KdV) equation [12]. The solution of this ODE yields the first-order perturbation of the surface elevation.

For the numerical approach the full equations of motion are solved with the help of a CFD-program using an appropriate turbulence model. In order to obtain the shape of the free surface an iteration procedure is used, which was successfully applied to a related problem [13]. This iteration procedure is based on a further asymptotic expansion, which is performed in the present work. Besides the solitary wave, the so-called single wave of the second kind is studied numerically as well.

The corresponding experiments were executed at the Nihon University Tokio [15]. The measured surface elevations are compared to the numerical and theoretical predictions.

# Kapitel 1

## Einleitung und Ziel

Freie Oberflächenströmungen stellen speziell im Bereich der numerischen Strömungsmechanik eine besondere Herausforderung dar. Zum einen treten dabei in den Randbedingungen zusätzliche Nichtlinearitäten auf, zum anderen erschwert vor allem die Unkenntnis über die Form und Position der freien Oberfläche maßgeblich das Auffinden der gesuchten Lösung.

Gegenwärtige Methoden der finiten Elemente, sowie jene der finiten Volumen stellen Modelle für die Berechnung von freien turbulenten Scherströmungen zur Verfügung, welche allerdings aufgrund der hochgradigen Nichtlinearität des vorliegenden Problems sehr schnell zu unphysikalischen Lösungen führen können. Hinzu kommt die Tatsache, dass in der vorliegenden Arbeit eine leicht überkritische Zuströmung (Froude-Zahl knapp über 1) kombiniert mit einer großen Reynolds-Zahl betrachtet wird. Durch diese Gegebenheiten nimmt die Komplexität des zugrunde liegenden Problems deutlich zu, da besonders nahkritische Strömungen sehr sensibel auf Störungen reagieren.

Aus diesen Gründen soll für die Ermittlung der freien Oberflächenform ein iteratives Verfahren herangezogen werden, welches bereits in [13] erfolgreich auf die numerische Untersuchung des welligen Wassersprunges angewandt wurde.

Der wellige Wassersprung wurde in den vergangenen Jahren nicht nur mittels asymptotischer Methoden [4],[5] sondern auch auf numerischen Wege [2] analysiert. Die Berechnung von welligen Wasseroberflächen kann durchaus auch unter Verwendung finiter Volumen erfolgen [10], worauf im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht näher eingegangen werden soll.

In [12] wurde gezeigt, dass im Gegensatz zum welligen Wassersprung die Existenz einer stehenden Solitärwelle bei ebenem, geneigtem Boden eine in Strömungsrichtung veränderliche Bodenrauigkeit voraussetzt. Ist die Forderung eines ebenen Kanalbodens nicht erfüllt, so lässt sich eine stehende Wasserwelle auch bei konstanter Bodenrauigkeit sowohl rechnerisch als auch experimentell finden [14]. Eine der erstaunlichen Erkenntnisse von [14], in welcher Strömungen über ein Rampe sowie eine Bodenwelle untersucht wurden, war, dass die Differentialgleichung zur Beschreibung der dabei entstandenen Solitärwelle rein formal mit jener des vorliegenden Problems übereinstimmt. Den einfachsten Fall stellt eine Strömung über eine geneigte Ebene mit abschnittsweise konstanter Bodenrauigkeit dar, wobei sich die Rauigkeit in einer bestimmten Region um eine Konstante von jenen Rauigkeiten stromauf- sowie stromabwärts im Bereich der voll ausgebildeten Strömung unterscheidet. Eine stehende Wasserwelle wird in einem solchen Szenario induziert, indem die Bodenrauigkeit in dieser Region einen höheren Wert im Vergleich zu jenen stromauf sowie stromab annimmt [8]. In einer weiterführenden Arbeit [6] wurden die analytischen Berechnungen der dabei entstehenden freien Oberflächenformen weiter ausgebaut, sodass eine sogenannte Lösung zweiter Art gefunden werden konnte.

Ziel dieser Arbeit ist es den Verlauf der Wasseroberfläche unter Verwendung eines CFD-Programms (FLUENT<sup>®</sup>) iterativ zu bestimmen. Dabei soll ein Turbulenzmodell verwendet werden, welches in jedem Iterationsschritt für eine vorgegebene Wasseroberfläche die ensemble-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen löst, um in weiterer Folge eine neue, verbesserte Oberfläche zu gewinnen. Diese Ergebnisse sollen des Weiteren mit den bereits bestehenden analytischen, sowie experimentellen Daten verglichen und analysiert werden.

# Kapitel 2

## Problemstellung

Betrachtet wird eine zwei-dimensionale, turbulente Strömung mit freier Oberfläche über eine geneigte Ebene mit einem Gebiet erhöhter Rauigkeit. Darüber hinaus sei die Strömung stationär und inkompressibel. Die Neigung des Kanalbodens  $\alpha$  sei als klein und konstant angenommen. Die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung des in Abb. 2.1 dargestellten kartesischen Koordinatensystems werden entsprechend mit  $\bar{u}(x,y)$  und  $\bar{v}(x,y)$  bezeichnet.

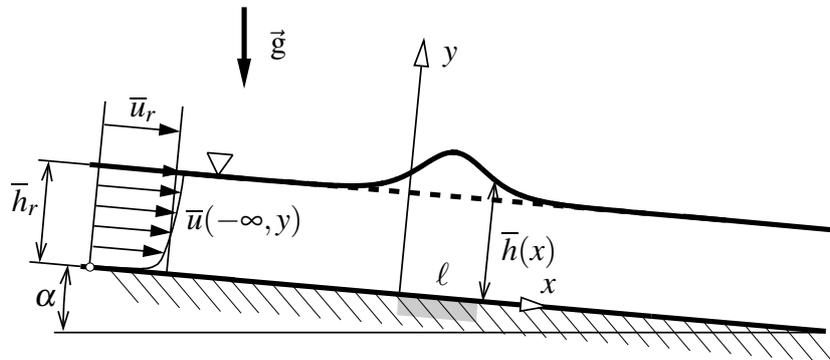


Abbildung 2.1: Stationäre Solitärwelle in offener, turbulenter Kanalströmung mit veränderlicher Bodenrauigkeit [15]

Querstriche ( $\bar{\cdot}$ ) über den einzelnen Feldgrößen kennzeichnen ensemble-gemittelte Werte. Der Index  $r$  beschreibt den Referenzzustand der voll ausgebildeten Zuströmung weit stromauf. Auch weit stromab soll wieder eine voll ausgebildete Abströmung erreicht

werden. Bei gegebener Referenzhöhe  $\bar{h}_r$  und Volumenstrom  $\dot{V}$  pro Tiefeneinheit des Kanals lässt sich die Referenzgeschwindigkeit der Zuströmung mittels

$$\bar{u}_r = \frac{\dot{V}}{\bar{h}_r} \quad (2.1)$$

ermitteln. Die graue Box aus Abb. 2.1 im Bereich  $0 < x < \ell$  des Kanalbodens symbolisiert die Region mit erhöhter Bodenrauhigkeit. Entlang der freien Oberfläche sollen Oberflächenspannungen vernachlässigt werden.

Eine der größten Schwierigkeiten bei der numerischen Findung der Höhe  $\bar{h}(x)$  stellt die Einhaltung der dynamischen Randbedingungen entlang der freien Oberfläche dar, welche sich, wie in Kapitel 7 beschrieben wird, nicht auf einfachem Wege in FLUENT implementieren lassen.

# Kapitel 3

## Grundgleichungen und Randbedingungen

Im folgenden Kapitel wird auf die Basisgleichungen, welche die Grundlage der analytischen Berechnungen in [12] sowie in [6] sind, näher eingegangen, da diese im verwendeten Iterationsverfahren aus Kapitel 5 eine zentrale Rolle spielen.

### 3.1 Dimensionsbehaftete Form

Für eine inkompressible, zwei-dimensionale Strömung lautet die ensemble-gemittelte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

und gilt entlang des gesamten Kanals [17, S. 225]. Beim Grenzübergang hoher Reynoldszahlen setzt sich die Strömung aus zwei Schichten zusammen, der viskosen Unterschicht und der voll turbulenten Defektschicht [11, S. 12]. Nachdem für die viskose Unterschicht eine universelle Lösung der Strömung bereits vorliegt [11, S. 559], genügt es für eine analytische Untersuchung lediglich die Defektschicht zu betrachten [12]. In den zwei-dimensionalen, ensemble-gemittelten Bewegungsgleichungen in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung für

stationäre Strömungen

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + g \cdot \sin \alpha + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) - \frac{\overline{\partial u'^2}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial u'v'}}{\partial y} \quad (3.2a)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - g \cdot \cos \alpha + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) - \frac{\overline{\partial u'v'}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial v'^2}}{\partial y}, \quad (3.2b)$$

bezeichnen die gestrichenen Größen  $u'$  und  $v'$  die Fluktuationen der Geschwindigkeitskomponenten  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  [11, S. 502]. Die Gravitationsbeschleunigung  $g$ , die konstante Dichte  $\rho$  sowie die konstante kinematische Viskosität  $\nu$  des Fluids sind gegebene Größen, während der ensemble-gemittelte Druck  $\bar{p}(x,y)$  zunächst noch als unbekanntes Skalarfeld in den Glgn. (3.2a) und (3.2b) auftritt.

In der voll turbulenten Defektschicht, in welcher die Einflüsse der Wand eine untergeordnete Rolle spielen, überwiegen die sogenannten Reynolds-Spannungen gegenüber den viskosen Spannungen [11, S. 503]. Aus diesem Grund reduzieren sich die ensemble-gemittelten Navier-Stokes Glgn. (3.2), welche auch als Reynolds-Gleichungen bezeichnet werden, zu

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + g \cdot \sin \alpha - \frac{\overline{\partial u'^2}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial u'v'}}{\partial y} \quad (3.3a)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - g \cdot \cos \alpha - \frac{\overline{\partial u'v'}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial v'^2}}{\partial y}. \quad (3.3b)$$

Die Annahme der vernachlässigbaren viskosen Spannungen setzt eine große Reynolds-Zahl voraus, welche in [12] mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit der Zuströmung

$$u_{\tau r} := \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.4)$$

gebildet wird, wobei  $\tau_w$  die auftretende Wandschubspannung bezeichnet. Wie in Kapitel 2 erwähnt wurde sei die Zuströmung voll ausgebildet, weshalb sich die Bewegungsgleichung aufgrund fehlender Beschleunigungsterme zu einem Kräftegleichgewicht zwischen der Wandschubspannung  $\tau_w$  und der Gewichtskraft des darüber liegenden Fluidfilms reduziert. Auf diese Weise lässt sich zunächst die Wandschubspannungsgeschwindigkeit der Zuströmung

$$u_{\tau r} = \sqrt{g\alpha\bar{h}_r} \quad (3.5)$$

und in weiterer Folge die Reynolds-Zahl

$$\text{Re}_\tau = \frac{u_{\tau r} \bar{h}_r}{\nu} = \frac{\sqrt{g\alpha \bar{h}_r^3}}{\nu} \quad (3.6)$$

bestimmen.

Das betrachtete Strömungsgebiet erfordert an den Grenzen vorgegebene Randbedingungen. Die Defektschicht muss die Randbedingung

$$\bar{v}(x,0) = 0 \quad (3.7)$$

am Boden erfüllen. Aufgrund fehlender viskoser Spannungen können die Glgn. (3.3) die Haftbedingung jedoch nicht erfüllen. Die Anpassung der Geschwindigkeit der Defektschicht an die Geschwindigkeit der Wandschicht erfolgt in der Überlappungsschicht durch das logarithmische Widerstandsgesetz [11, S. 535]. Für die Geschwindigkeitskomponente  $\bar{u}$  an der Oberfläche kann dadurch die Beziehung

$$\bar{u}(x,\bar{h}) = u_\tau \left[ \frac{1}{\kappa} \cdot \ln \left( \frac{u_\tau \bar{h}}{\nu} \right) + C^+(x) + \bar{C}(x) \right] \quad (3.8)$$

mit

$$\bar{C}(x) = \int_0^{\bar{h}} \left( \frac{1}{u_\tau} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{1}{\kappa y} \right) dy \quad (3.9)$$

erhalten werden [12]. Dabei wird die Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $u_\tau$  analog zur Gl. (3.6) gebildet, mit dem Unterschied, dass  $u_\tau$  an jeder beliebigen Stelle  $x$  mit der entsprechenden Höhe  $\bar{h}(x)$  zu bestimmen ist. Sowohl die von Kármán Konstante  $\kappa$ , als auch  $C^+$  sind empirisch ermittelte Werte. Während sich  $\kappa = 0,41$  in der gebräuchlichen Literatur durchgesetzt hat, hängt  $C^+$  u.a. von der Wandrauigkeit ab, wobei für eine hydraulisch glatte Wand der Wert  $C^+ = 5$  experimentell gefunden wurde [11, S. 524]. Wie aus Abb. 2.1 ersichtlich, variiert die Bodenrauigkeit im vorliegenden Fall, weshalb  $C^+ = C^+(x)$  eine von der Längsrichtung des Kanals abhängige Variable darstellt.

In den Bereichen der voll ausgebildeten Strömung vereinfacht sich die ensemble-gemittelte Kontinuitätsgleichung (3.1) zu

$$\frac{\partial \bar{v}(x,y)}{\partial y} = 0 \quad \text{für} \quad |x| \gg \ell. \quad (3.10)$$

Aufgrund der Randbedingung (3.7) folgt aus Gl. (3.10), dass weit stromauf sowie weit stromab die Geschwindigkeitskomponente normal zum Kanalboden

$$\bar{v}(x,y) \equiv 0 \quad \text{für} \quad |x| \gg \ell \quad (3.11)$$

sein muss. Dadurch wird impliziert, dass die gemittelte Wasserhöhe mit der Referenzhöhe gemäß

$$\bar{h}(x) = \bar{h}_r \quad \text{für} \quad |x| \gg \ell \quad (3.12)$$

übereinstimmt.

Entlang der gemittelten Stromlinie an der freien Oberfläche sind sowohl kinematische als auch dynamische Randbedingungen zu erfüllen. Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{u} = (\bar{u}(x,\bar{h}), \bar{v}(x,\bar{h}))^T$  soll sich tangential an die mittlere freie Oberfläche anschmiegen, was durch

$$\frac{\bar{v}(x,\bar{h})}{\bar{u}(x,\bar{h})} = \frac{d\bar{h}(x)}{dx} \quad (3.13)$$

beschrieben wird. Mit dieser kinematischen Randbedingung wird sichergestellt, dass die gemittelte freie Oberfläche eine Stromlinie darstellt. Gleichung (3.13) kann aber auch als Definitionsgleichung für die gemittelte freie Oberfläche dienen.

Ohne Verlust der Allgemeinheit wird der konstante Umgebungsdruck in [12] zu null gesetzt. Nach [3, S. 22] beschreibt

$$\begin{pmatrix} -\bar{p} - \rho\bar{u}'^2 & -\rho\bar{u}'\bar{v}' \\ -\rho\bar{u}'\bar{v}' & -\bar{p} - \rho\bar{v}'^2 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = \vec{0} \quad \text{mit} \quad \vec{n} = |\vec{n}| \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

das Spannungsgleichgewicht an der freien Oberfläche, wobei  $\vec{n}$  stets orthogonal zur Oberfläche ist. Der Winkel  $\varphi$  bezeichnet jenen Winkel, welcher vom Normalvektor  $\vec{n}$  und der  $y$ -Achse eingeschlossen wird. Es sei nochmal betont, dass in Gl. (3.14) sowohl Effekte der Oberflächenspannung als auch viskose Spannungen vernachlässigt werden.

## 3.2 Dimensionslose Form

Es ist bekannt, dass Solitärwellen eine im Bezug auf die Amplitude große Wellenlänge besitzen. Speziell für den reibungsfreien Fall haben Solitärwellen der Amplitude  $\varepsilon$ , mit  $0 < \varepsilon \ll 1$ , Wellenlängen der Größenordnung  $\mathcal{O}(1/\sqrt{\varepsilon})$ . Aus diesem Grund wurde in [12] eine Hilfsgröße

$$\delta = 3\sqrt{\varepsilon} \quad (3.15)$$

definiert, wobei der Faktor 3 eingeführt wurde, um die bei der asymptotischen Analyse entwickelten Endgleichungen in einer möglichst einfachen Form darstellen zu können. Es stellte sich in [13] heraus, dass es für die numerische Untersuchung von Vorteil ist die für die asymptotische Analyse unumgängliche Koordinatenstreckung der Form

$$X = \delta \frac{x}{h_r} \quad (3.16)$$

zu übernehmen. Im weiteren Verlauf sollen Großbuchstaben stets dimensionslose Größen symbolisieren. Entsprechend der Kontinuitätsgleichung (3.1) wird die Geschwindigkeitskomponente normal zum Kanalboden

$$\bar{V} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\bar{v}}{\bar{u}_r} \quad (3.17)$$

ebenfalls gestreckt. Weitere dimensionslose Variablen wurden in [12] gemäß

$$Y = \frac{y}{h_r}, \quad \bar{H} = \frac{\bar{h}}{h_r}, \quad \bar{U} = \frac{\bar{u}}{\bar{u}_r} \quad (3.18a)$$

$$\bar{P} = \frac{\bar{p}}{g\rho\bar{h}_r}, \quad \overline{U'^2} = \frac{\overline{u'^2}}{u_{\tau r}^2}, \quad \overline{U'V'} = \frac{\overline{u'v'}}{u_{\tau r}^2}, \quad \overline{V'^2} = \frac{\overline{v'^2}}{u_{\tau r}^2}, \quad U_\tau = \frac{u_\tau}{u_{\tau r}} \quad (3.18b)$$

eingeführt. Während  $\bar{H} = \bar{H}(X)$  und  $U_\tau = U_\tau(X)$  unbekannte Funktionen von  $X$  sind, hängen die restlichen Strömungsgrößen zusätzlich von  $Y$  ab.

Die mit den dimensionslosen Variablen (3.16) - (3.18) entdimensionierte Kontinuitätsgleichung lautet dann

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial Y} = 0. \quad (3.19)$$

Auf analoge Weise werden die Bewegungsgleichungen (3.3a) und (3.3b) zu

$$\text{Fr}^2 \left( \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial X} + \frac{\alpha}{\delta} - \frac{\alpha}{\delta} \left( \delta \frac{\partial \bar{U}'^2}{\partial X} + \frac{\partial \bar{U}' \bar{V}'}{\partial Y} \right) \quad (3.20a)$$

$$\delta^2 \text{Fr}^2 \left( \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} - 1 - \alpha \left( \delta \frac{\partial \bar{U}' \bar{V}'}{\partial X} + \frac{\partial \bar{V}'^2}{\partial Y} \right) \quad (3.20b)$$

entdimensioniert, wobei die Froude-Zahl durch

$$\text{Fr} = \frac{\bar{u}_r}{\sqrt{g h_r}} \quad (3.21)$$

definiert ist. Um das System der Basisgleichungen (3.19), (3.20a) und (3.20b) zu schließen, müssen die Randbedingungen aus Abschnitt 3.1 ebenfalls entdimensioniert werden. Für die Geschwindigkeitskomponente in  $X$ -Richtung entlang der gemittelten freien Oberfläche kann die dimensionslose Beziehung

$$\bar{U}(X, \bar{H}) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\text{Fr}} U_\tau \left[ \frac{1}{\kappa} \cdot \ln(\text{Re}_\tau U_\tau \bar{H}) + C^+(X) + \bar{C}(X) \right] \quad (3.22)$$

mit

$$\bar{C}(X) = \int_0^{\bar{H}} \left( \frac{\text{Fr}}{\sqrt{\alpha} U_\tau} \frac{\partial \bar{U}}{\partial Y} - \frac{1}{\kappa Y} \right) dY \quad (3.23)$$

gewonnen werden [12]. Aus Gl. (3.12) lässt sich die asymptotische Randbedingung

$$\bar{H}(X) \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad X \rightarrow \pm\infty \quad (3.24)$$

anschreiben.

Entlang der Oberfläche muss sowohl die dimensionslose kinematische Randbedingung

$$\frac{\bar{V}(X, \bar{H})}{\bar{U}(X, \bar{H})} = \frac{d\bar{H}(X)}{dX}, \quad (3.25)$$

als auch die entdimensionierten dynamischen Randbedingungen

$$\left[ \bar{P}(X, \bar{H}) + \alpha \bar{U}'^2(X, \bar{H}) \right] \sin \varphi - \alpha \bar{U}' \bar{V}'(X, \bar{H}) \cos \varphi = 0 \quad (3.26a)$$

$$\left[ \bar{P}(X, \bar{H}) + \alpha \overline{V'^2}(X, \bar{H}) \right] \cos \varphi - \alpha \overline{U'V'}(X, \bar{H}) \sin \varphi = 0 \quad (3.26b)$$

erfüllt werden, welche sich aus Gl. (3.14) mittels Matrizenmultiplikation in zwei skalare Gleichungen umschreiben lässt.

Mithilfe der Beziehung

$$\tan \varphi = \frac{d\bar{h}}{dx} = \delta \frac{d\bar{H}}{dX} \quad (3.27)$$

lassen sich die Gln. (3.26a) und (3.26b) für  $\delta \ll 1$  in der Form

$$\left[ \bar{P}(X, \bar{H}) + \alpha \overline{U'^2}(X, \bar{H}) \right] \delta \frac{d\bar{H}}{dX} - \alpha \overline{U'V'}(X, \bar{H}) = 0 \quad (3.28a)$$

$$\left[ \bar{P}(X, \bar{H}) + \alpha \overline{V'^2}(X, \bar{H}) \right] - \alpha \overline{U'V'}(X, \bar{H}) \delta \frac{d\bar{H}}{dX} = 0 \quad (3.28b)$$

anschreiben.

# Kapitel 4

## Asymptotische Entwicklung

Die in Abschnitt 3.2 gewonnenen dimensionslosen Gleichungen sollen im folgenden Kapitel näher untersucht werden. Dabei soll die in [16, S. 59-75] beschriebene Methode der asymptotischen Entwicklung verwendet werden. Eine solche Entwicklung ist nur dann gerechtfertigt, wenn einer der dimensionslosen Parameter sehr klein oder sehr groß wird. Wie in Kapitel 1 bereits erwähnt, liegt eine leicht überkritische Zuströmung vor, welche durch

$$\text{Fr} = 1 + \frac{3}{2}\varepsilon \quad \text{mit} \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (4.1)$$

beschrieben werden kann [12]. Der Faktor  $3/2$  dient, so wie in Gl. (3.15), der Vereinfachung der Endgleichungen. Der Störparameter  $\varepsilon$  bietet sich hier als Entwicklungsparameter für eine asymptotische Entwicklung an. Darüber hinaus soll für die Reynolds-Zahl  $\text{Re}_\tau \gg 1$  gelten.

In Abschnitt 4.1 werden kurz die in [12] durchgeführten Entwicklungen zusammengefasst, um diese dann in Abschnitt 4.2 zu erweitern.

### 4.1 Ohne Druckstörungsterm

Bis jetzt wurden die drei kleinen, dimensionslosen Parameter  $\alpha$ ,  $\delta$  sowie  $\varepsilon$  eingeführt, wobei die Beziehung zwischen  $\delta$  und  $\varepsilon$  bereits mit Gl. (3.15) festgelegt wurde. Um den Zusammenhang zwischen der Kanalneigung  $\alpha$  und dem Entwicklungsparameter

$\varepsilon$  zu finden, wurden in [12] zwei Aspekte in Betracht gezogen. Auf der einen Seite soll die Wirkung der Turbulenz eine wichtige Rolle spielen, um einen reibungsfreien Grenzfall ausschließen zu können, da es sonst zu keiner Ausbildung einer stehenden Solitärwelle kommt. Auf der anderen Seite wurde es bemerkenswerterweise geschafft, analytische Ergebnisse ohne der Zuhilfenahme von Turbulenzmodellierung zu erzielen. Das bedeutet, dass die entwickelten Gleichungen aus [12] frei von sämtlichen empirischen Werten, welche u.a. in den Gln. (3.22) und (3.23) enthalten sind, bleiben. Diese beiden Forderungen werden genau dann erfüllt, wenn  $\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  ist. Aus diesem Grund wird ein Kopplungsparameter  $A$  mit

$$A = \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \quad (4.2)$$

definiert, wobei  $A = \mathcal{O}(1)$  ist.

Die funktionale Abhängigkeit der Strömungsgrößen vom Störparameter  $\varepsilon$  kann durch die Potenzreihen

$$\bar{H}(X) = H_0 + \varepsilon H_1(X) + \varepsilon^2 H_2(X) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (4.3a)$$

$$\bar{U}(X, Y) = U_0(Y) + \varepsilon U_1(X, Y) + \varepsilon^2 U_2(X, Y) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (4.3b)$$

$$\bar{V}(X, Y) = V_0(Y) + \varepsilon V_1(X, Y) + \varepsilon^2 V_2(X, Y) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (4.3c)$$

$$\overline{U'V'}(X, Y) = (\overline{U'V'})_0(Y) + \varepsilon (\overline{U'V'})_1(X, Y) + \varepsilon^2 (\overline{U'V'})_2(X, Y) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (4.3d)$$

$$\overline{U'^2}(X, Y) = (\overline{U'^2})_0(Y) + \varepsilon (\overline{U'^2})_1(X, Y) + \varepsilon^2 (\overline{U'^2})_2(X, Y) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (4.3e)$$

$$\overline{V'^2}(X, Y) = (\overline{V'^2})_0(Y) + \varepsilon (\overline{V'^2})_1(X, Y) + \varepsilon^2 (\overline{V'^2})_2(X, Y) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (4.3f)$$

$$\bar{P}(X, Y) = P_0(Y) + \varepsilon P_1(X, Y) + \varepsilon^2 P_2(X, Y) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (4.3g)$$

beschrieben werden, wobei Terme der Ordnung  $\varepsilon^3$  hier vernachlässigt werden [12]. Die Größen der Grundströmung, welche mit dem Index 0 versehen sind, können aus der Tatsache ermittelt werden, dass die voll ausgebildete Zuströmung mit der Grundströmung übereinstimmen muss. Auf diese Weise ergibt sich für die Höhe des Grundzustandes

$$H_0 = 1 \quad (4.4)$$

und für die Geschwindigkeitskomponente parallel zum Kanalboden

$$U_0(Y) = 1. \quad (4.5)$$

Substituiert man nun in den Reynolds-Gleichungen (3.20a) bzw. (3.20b), in der gemittelten Kontinuitätsgleichung (3.19) sowie in den Randbedingungen die Strömungsgrößen mit den Potenzreihen (4.3), so lassen sich die Feldgrößen gemäß [12] in führender Ordnung bestimmen. Eine Untersuchung der Terme von  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  ergibt, dass sich die unbekannten Feldgrößen als Funktion von  $H_1$  bestimmen lassen. Um das Gleichungssystem zu schließen, müssen demnach die Gleichungen zweiter Ordnung herangezogen werden, aus welchen sich die sogenannte erweiterte Korteweg-de Vries (KdV) Gleichung

$$\boxed{\frac{d^3 H_1}{dX^3} + (H_1 - 1) \frac{dH_1}{dX} = \beta(H_1 - \Gamma)} \quad (4.6)$$

mit den Randbedingungen

$$H_1 \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad X \rightarrow \pm\infty \quad (4.7)$$

herleiten lässt [12]. Der Parameter

$$\beta = \frac{\alpha}{3\varepsilon^{3/2}} \quad (4.8)$$

charakterisiert den Einfluss der turbulenten Dissipation, während die Funktion

$$\Gamma(X) = \begin{cases} \Gamma_L & \text{für } 0 < X < L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.9)$$

mit

$$\Gamma_L = \frac{1}{3\varepsilon} \frac{c_f - c_{fr}}{c_{fr}} \quad (4.10)$$

die Bodenreibung in dem Gebiet erhöhter Rauigkeit, welches sich über die dimensionslose Länge  $L$  erstreckt, charakterisiert [15]. In Gl. (4.10) beschreiben  $c_f$  und  $c_{fr}$  die Bodenreibungskoeffizienten im Gebiet erhöhter Rauigkeit, sowie im Referenzzustand. Die erweiterte KdV-Gleichung (4.6) ist eine gewöhnliche, inhomogene Differentialgleichung dritter Ordnung und wurde in [6] für schwache Dissipation  $\beta \ll 1$ , gemäß

$$H_1(X, \beta) = H_1^{(0)} + \beta H_1^{(1)} + \mathcal{O}(\beta^2) \quad (4.11)$$

entwickelt, woraus eine analytische Lösung für  $H_1$  resultiert. Weiters wird in [6] gezeigt, dass die nichtlineare Differentialgleichung (4.6) prinzipiell zwei verschiedene Lösungen bei gleichen Parametern aufweisen kann. Neben der Solitärwelle, welche in [14] als Lösung erster Art betitelt wurde, existiert eine weitere Lösung, die sogenannte Lösung zweiter Art.

Aus [12] geht hervor, dass sich im turbulenten Fall ( $\beta \neq 0$ ) die Position des Wellenbergs  $X_m^{(0)}$  der Solitärwelle in führender Ordnung bestimmen lässt. Diesbezüglich wurden wiederum zwei Lösungen

$$X_m^{(0)\pm} = \frac{L}{2} \pm \operatorname{arccosh} \left( \frac{6}{L} \sinh \frac{L}{2} - \cosh \frac{L}{2} \right) \quad (4.12)$$

gefunden, wobei sich lediglich die Position  $X_m^{(0)-}$ , welche sich weiter stromaufwärts befindet, als stabil erwiesen hat [15]. Um reelle Werte für  $X_m^{(0)}$  zu erhalten, muss laut [15] stets  $L \leq L_{\max}$  mit  $L_{\max} \approx 5.151$  gelten.

Demnach existieren strenggenommen bei gleichen Parametern drei Lösungen der erweiterten KdV-Gleichung. Aufgrund der Instabilität einer der drei Lösungen wird diese in der folgenden Arbeit außer Acht gelassen.

Seit [6] ist bekannt, dass die Solitärwelle sowohl ein schwaches als auch ein starkes Abklingen stromabwärts aufweisen kann. Dies hängt davon ab, ob der Reibungsparameter  $\Gamma_L$  mit dem Eigenwert  $\lambda$  übereinstimmt oder nicht. In [6] wurde der Eigenwert

$$\lambda = \lambda^{(0)} + \beta \lambda^{(1)} + \mathcal{O}(\beta^2) \quad (4.13)$$

mit

$$\lambda^{(0)} = \frac{12}{L} \quad \text{und} \quad \lambda^{(1)} = \frac{6}{L} \sqrt{36 + L^2 - 12L \coth \frac{L}{2}} \quad (4.14)$$

bis zur ersten Ordnung bestimmt. Für  $\Gamma_L = \lambda$  besitzt die Solitärwelle ein starkes Abklingen stromabwärts. Setzt man alle nötigen Beziehungen aus Kapitel 5 von [6] in jene aus Kapitel 3 und 4 desselben Artikels ein und wertet diese für die experimentellen Daten von [15] numerisch aus, so erhält man die dimensionslose Oberflächenerhöhung  $H_1$  aus Abb. 4.1.

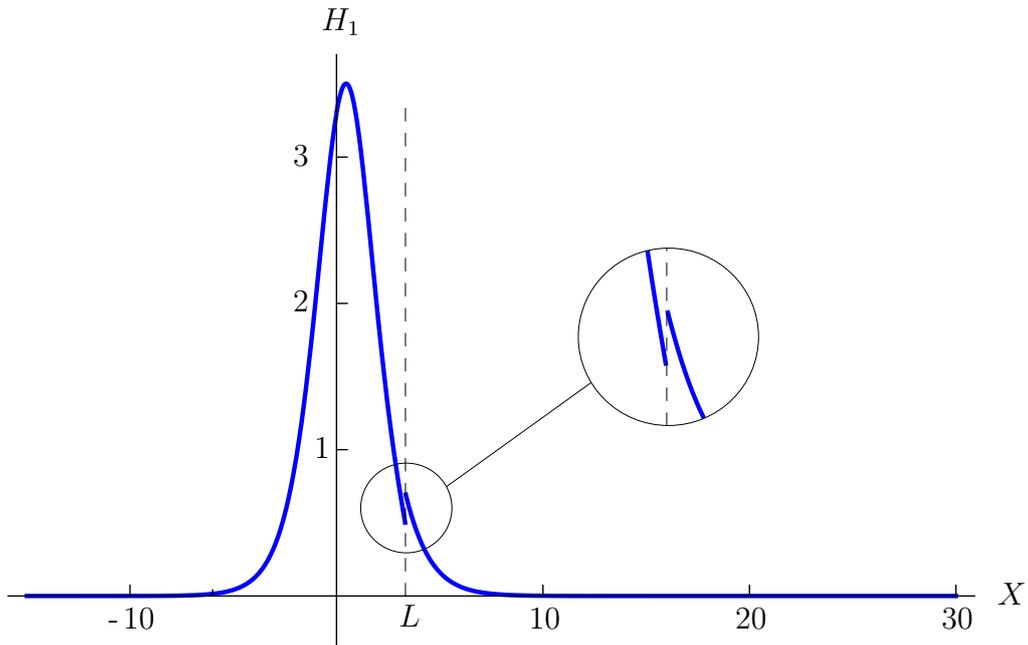


Abbildung 4.1: Gleichmäßig gültige analytische Lösung der dimensionslosen Oberflächenerhöhung  $H_1$  erster Art nach [6] für  $\Gamma_L = \lambda^{(0)} + \beta\lambda^{(1)}$  ausgewertet für die experimentellen Daten aus [15]:  $\text{Fr} = 1,065$ ;  $\alpha = 1/291$ ;  $L = 3,34$

Der Wert  $\beta = 0,127$  lässt sich mithilfe der Gl. (4.8) bei gegebener Bodenneigung  $\alpha = 1/291$  bestimmen, wobei man  $\varepsilon = 0,0433$  durch die bekannte Froude-Zahl  $\text{Fr} = 1,065$  aus Gl. (4.1) erhält. Die numerische Auswertung der Gln. (4.13) sowie (4.14) ergibt dann für  $L = 3,34$  den Eigenwert  $\lambda \approx 4,06$ .

Eine Unstetigkeitsstelle an der Stelle  $X = L$  ist in Abb. 4.1 klar ersichtlich, welche sich auf physikalischem Wege nicht erklären lässt. In [6] ist jedoch kein Hinweis auf die hier festgestellte Unstetigkeit und eine mögliche Erklärung zu finden.

Falls der Rauigkeitsparameter  $\Gamma_L$  vom Eigenwert  $\lambda$  um den Betrag  $\mathcal{O}(1)$  abweicht, so weist die Solitärwelle ein schwaches Abklingen stromabwärts auf. Die graphische Auswertung der allgemeinen Gleichungen aus den Kapiteln 3 und 4 von [6], zusammen mit den Formeln aus Kapitel 6 des gleichen Artikels, ist in Abb. 4.2 zu sehen. Die Parameter stimmen mit jenen aus Abb. 4.1 überein mit dem Unterschied, dass sich  $\Gamma_L$  vom Eigenwert  $\lambda$  signifikant unterscheidet.

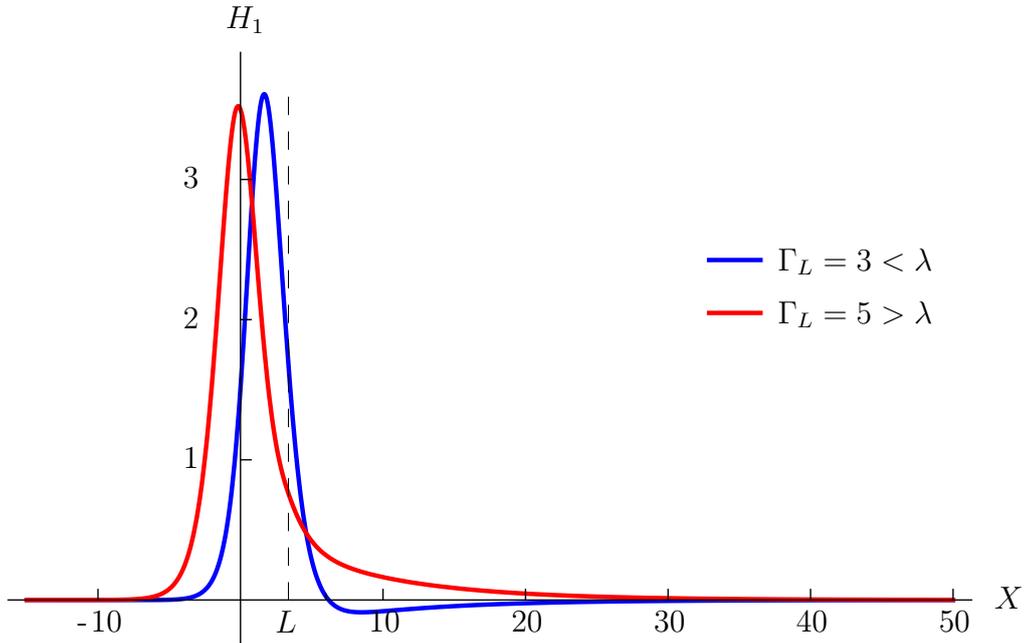


Abbildung 4.2: Gleichmäßig gültige analytische Lösung der dimensionslosen Oberflächenerhöhung  $H_1$  erster Art nach [6] für verschiedene Werte von  $\Gamma_L$  ausgewertet für die experimentellen Daten aus [15]:  $\text{Fr} = 1,065$ ;  $\alpha = 1/291$ ;  $L = 3,34$

In Abb. 4.2 ist zu sehen, dass sich die dimensionslose Oberflächenerhöhung  $H_1$  der positiven  $X$ -Achse für  $\Gamma_L < \lambda$  von unterhalb annähert, während für  $\Gamma_L > \lambda$  stets  $H_1 > 0$  bleibt. In beiden Fällen klingt die Funktion  $H_1$  im Vergleich zu jener aus Abb. 4.1 deutlich schwächer ab. Für die Existenz einer Solitärwelle muss darauf geachtet werden, dass die Bedingung

$$\Gamma_L \geq \Gamma_{L,\min} \quad \text{mit} \quad \Gamma_{L,\min} = 2 \coth(L/4) \quad (4.15)$$

stets erfüllt ist [6]. Im vorliegenden Fall ist  $\Gamma_{L,\min} \approx 2,93$  bei einer dimensionslosen Länge  $L$  des erhöhten Rauigkeitsbereichs von  $L = 3,34$ .

Wie bereits erwähnt, existiert neben der Lösung erster Art der erweiterten KdV-Gleichung auch jene zweiter Art, welche den Namen „stationäre Einzelwelle zweiter Art“ trägt [14]. Um deren wesentliche Unterschiede aufzuzeigen werden in Abb. 4.3 die beiden Lösungen für gleiche Parameter gegenübergestellt.

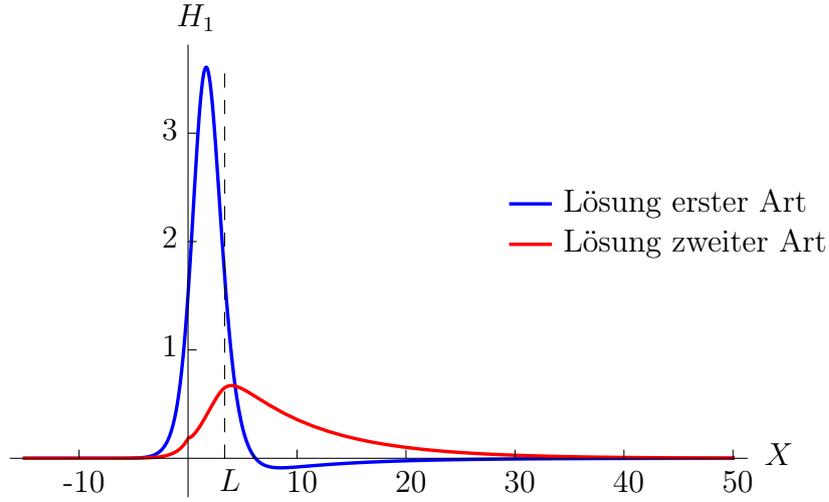


Abbildung 4.3: Vergleich der analytischen Lösungen erster und zweiter Art der Gl. (4.6) nach [6] und [7] für:  $Fr = 1,065$ ;  $\alpha = 1/291$ ;  $L = 3,34$ ;  $\Gamma_L = 3$

Für die analytische Lösung der Welle zweiter Art wurden die Gln. (4) und (5) aus [7] für die entsprechenden Parameter aus Abb. 4.3 ausgewertet. Dabei darf nicht außer Acht gelassen werden, dass die gleichmäßige gültige analytische Lösung aus [7] lediglich für  $|\beta\Gamma_L| \ll 1$  gilt.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den Wellen erster und zweiter Art ist deren Amplitude. Da die Welle zweiter Art für die gegebenen Parameter eine Amplitude von  $\text{Max}\{H_1(X)\} < 1$  aufweist, bleibt diese Welle im Gegensatz zur Solitärwelle über den gesamten Bereich überkritisch ( $Fr > 1$ ). Die Position des Wellenbergs sowie das Abklingverhalten stromabwärts sind weitere Unterschiede.

Bei genauerem Betrachten der Gln. (4) und (5) aus [7] lässt sich feststellen, dass die gleichmäßig gültige analytische Lösung am Beginn des Rauigkeitsbereichs nicht stetig differenzierbar ist, was mit wachsendem Term  $L\beta^2\Gamma_L$  entsprechend der Beziehung

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{dH_1(X)}{dX} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{dH_1(X)}{dX} + L\beta^2\Gamma_L \quad (4.16)$$

immer sichtbarer wird. Abb. 4.4 zeigt deutlich, dass trotz erfüllter Bedingung  $|\beta\Gamma_L| \ll 1$  der Knick an der Stelle  $X = 0$  mit steigendem  $\beta$  unzulässig groß wird. Selbst bei kleinem Parameter  $\beta = 0,1$  und  $|\beta\Gamma_L| \ll 1$  ist in Abb. 4.5 bei einer dimensionslosen Länge  $L = 5$  des Bereichs mit erhöhter Rauigkeit eine fehlende Tangentenstetigkeit zu erkennen. Es handelt sich dabei offenbar um eine - vermutlich unvermeidliche - Schwäche

der in [8] angegebenen gleichmäßig gültigen Lösung.

Der Vergleich der beiden Abbildungen 4.4 und 4.5 bestätigt, dass der Term aus Gl. (4.16), welcher den Knick verursacht, quadratisch von  $\beta$  abhängt, da kleinere relative Änderungen von  $\beta$  die Diskrepanz der Steigungen von  $H_1$  an der Stelle  $X = 0$  vergleichsweise stärker beeinflussen.

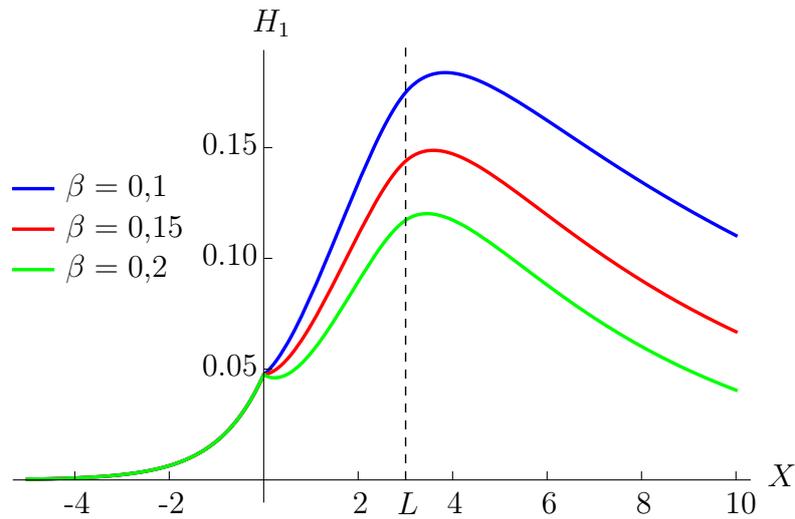


Abbildung 4.4: Gleichmäßig gültige analytische Lösung der dimensionslosen Oberflächenerhöhung  $H_1$  zweiter Art gemäß [7] für:  $\beta\Gamma_L = 0,1$ ;  $L = 3$

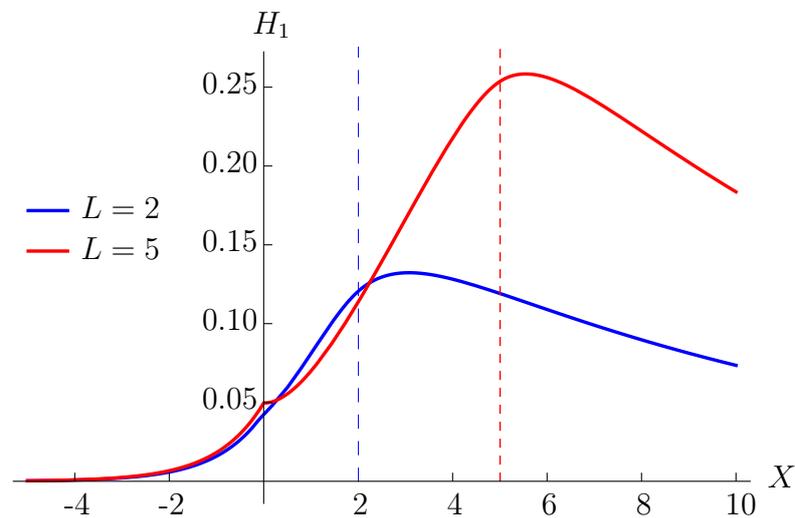


Abbildung 4.5: Gleichmäßig gültige analytische Lösung der dimensionslosen Oberflächenerhöhung  $H_1$  zweiter Art gemäß [7] für:  $\beta\Gamma_L = 0,1$ ;  $\beta = 0,1$

## 4.2 Mit Druckstörungsterm

Es darf nicht außer Acht gelassen werden, dass die erweiterte KdV-Gleichung aus Abschnitt 4.1 lediglich eine Höhe  $H_1$  in erster Ordnung liefert. Des Weiteren wurden bei der Herleitung selbiger Gleichung in [12] einige Annahmen getroffen, sodass die asymptotische Theorie zur Gänze ohne empirische Werte auskommt.

Aus diesen Gründen entsteht bei der Lösung der vollen Bewegungsgleichungen mittels FLUENT für eine Kanalströmung mit vorgeschriebener Höhe

$$\bar{h} = \bar{h}_r (1 + \varepsilon H_1) \quad (4.17)$$

ein Druckverlauf  $p_S(x) \neq 0$  entlang dieser Oberfläche. Eine detaillierte Beschreibung der Vorgehensweise zur Lösung der Reynolds-Gleichungen mittels Fluent kann aus Kapitel 7 entnommen werden.

Für eine vorgeschriebene Wasserhöhe ist demnach der gemittelte Druck  $\bar{p}(x)$  entlang der Oberfläche nicht mehr im Gleichgewicht mit den negativen Normalkomponenten der Reynolds-Spannungen (siehe Abschnitt 3.2).

Für eine äußere dimensionslose Druckstörung

$$P_S(X) = \frac{p_S(x)}{g\rho\bar{h}_r} \quad (4.18)$$

müssen die dynamischen Randbedingungen (3.28a) und (3.28b) gemäß

$$\left[ \bar{P}(X, \bar{H}) + \alpha \overline{U'^2}(X, \bar{H}) \right] \delta \frac{d\bar{H}}{dX} - \alpha \overline{U'V'}(X, \bar{H}) = P_S(X) \delta \frac{d\bar{H}}{dX} \quad (4.19a)$$

$$\left[ \bar{P}(X, \bar{H}) + \alpha \overline{V'^2}(X, \bar{H}) \right] - \alpha \overline{U'V'}(X, \bar{H}) \delta \frac{d\bar{H}}{dX} = P_S(X) \quad (4.19b)$$

erweitert werden [13].

Es lässt sich vermuten, dass die Lösung der erweiterten KdV-Gleichung aus Abschnitt 4.1 nahe jener Oberflächenform liegt, für welche man in FLUENT  $p_S(x) \approx 0$  erhält. Auf dieser Überlegung basiert die Annahme, dass die entdimensionierte Druckstörung  $P_S(X)$  entlang der Oberfläche von der Ordnung  $\varepsilon^2$  ist. Folgt man der Herleitung aus [12] unter Berücksichtigung der neuen Randbedingungen (4.19a) sowie (4.19b) und der

Annahme, dass

$$P_S(X) = \varepsilon^2 P_{S_2}(X) \quad \text{mit} \quad P_{S_2} = \mathcal{O}(1), \quad (4.20)$$

so erhält man anstelle der Gl. (3.17) aus [12]

$$P_2(X, Y) - H_2(X) = \frac{9}{2} \frac{d^2 H_1(X)}{dX^2} (1 - Y^2) - A \cdot (\overline{V'^2})_0(Y) + P_{S_2}(X). \quad (4.21)$$

Orientiert man sich anschließend an der Abfolge der weiteren Rechenschritte aus [12], so verändert sich Gl. (3.20) aus selbigem Artikel zu

$$\begin{aligned} V_2(X, 1) - \frac{dH_2(X)}{dX} &= 3 \frac{d^3 H_1(X)}{dX^3} - \left[ 3 - H_1(X) - \sqrt{A} \Delta U(1) \right] \frac{dH_1(X)}{dX} \\ &\quad - \beta [3H_1(X) - 3\Gamma(X)] + \frac{dP_{S_2}(X)}{dX}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

wobei  $\Delta U$  den dimensionslosen Geschwindigkeitsdefekt der voll ausgebildeten Zuströmung beschreibt. Die stationäre Version der Gl. (3.21) aus [12]

$$V_2(X, 1) - \frac{dH_2(X)}{dX} = - \left[ 2H_1(X) - \sqrt{A} \Delta U(1) \right] \frac{dH_1(X)}{dX} \quad (4.23)$$

bleibt trotz geänderter Randbedingungen unverändert. Die letzten beiden Gln. (4.22) und (4.23) sind kompatibel, wenn

$$\boxed{\frac{d^3 H_1}{dX^3} + (H_1 - 1) \frac{dH_1}{dX} = \beta(H_1 - \Gamma) - \frac{1}{3} \frac{dP_{S_2}}{dX}} \quad (4.24)$$

erfüllt ist. Dies entspricht der erweiterten KdV-Gleichung (4.6) mit einem zusätzlichen Term, dem Druckstörungsterm. Die Randbedingungen aus (4.7) bleiben dabei unverändert.

Gleichung (4.24) erinnert stark an jene aus [13], da der zusätzliche Druckstörungsterm rein formal mit jenem aus selbigem Artikel übereinstimmt. Dennoch war eine erneute Herleitung nicht zu vermeiden, weil es sich hierbei um zwei grundsätzlich unterschiedliche Phänomene handelt.

# Kapitel 5

## Iterationsverfahren

Um den dynamischen Randbedingungen des vorliegenden Problems zur Gänze zu genügen, i.e.  $P_S \approx 0$ , wird für die Ermittlung der dimensionsbehafteten Wasserhöhe bis zur ersten Ordnung gemäß Gl. (4.17) die Iterationsroutine aus [13] verwendet, welche bei der Lösung eines verwandten Problems erfolgreich zum Ziel führte. Dabei muss Gl. (4.24) in jedem Iterationsschritt numerisch gelöst werden (siehe Kapitel 6).

Um hierbei eine numerische Differentiation des aus FLUENT entnommenen Oberflächendrucks  $P_{S2}(X)$  zu vermeiden, wird Gl. (4.24) im Intervall  $]-\infty; X]$  integriert. Daraus resultiert das Gleichungssystem der gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 H_1}{dX^2} + \frac{1}{2} H_1^2 - H_1 = G_1 - \frac{1}{3} P_{S2} \quad (5.1a)$$

$$\frac{dG_1}{dX} = \beta(H_1 - \Gamma) \quad (5.1b)$$

mit den Randbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} H_1 \\ G_1 \end{array} \right\} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad X \rightarrow \begin{cases} \pm\infty \\ -\infty. \end{cases} \quad (5.2)$$

Die Randbedingungen (5.2) implizieren, dass auch alle Ableitungen von  $H_1$  für  $X \rightarrow \pm\infty$  und alle Ableitungen von  $G_1$  für  $X \rightarrow -\infty$  ident 0 sein müssen. Da zudem eine voll ausgebildete Zuströmung vorausgesetzt wird, gilt an der Oberfläche der Parallelströmung  $P_{S2}(X \rightarrow -\infty) = 0$ .

Aus Gründen der Übersichtlichkeit soll die Lösung der Glgn. (5.1) sowie (5.2) für die Oberflächenerhöhung  $H_1$  im weiteren Verlauf mit  $\tilde{H}_1$  bezeichnet werden, solange  $P_{S_2}(X)$  die Fehlerschranke nicht unterschreitet.

Als Ausgangslösung für die Iterationsschleife  $i = 1$  werden die Glgn. (5.1a), (5.1b) sowie (5.2) jedoch für  $P_{S_2}(X) \equiv 0$  numerisch gelöst. Die dabei erhaltene erste Schätzung der Oberflächenerhöhung  $H_1^{(1)}$  wird mittels Gl. (4.17) in eine dimensionsbehaftete Wasserhöhe umgerechnet und in FLUENT vorgeschrieben. Nach Lösen der Reynolds-Gleichungen in FLUENT (siehe Kapitel 7) wird daraus der Oberflächendruck  $P_{S_2}^{(1)}(X)$  gewonnen.

Um eine neue Näherung der Oberflächenerhöhung zu generieren, wird die vorausgehende Höhe um den Betrag

$$\Delta^{(1)}(X) = H_1^{(1)}(X) - \tilde{H}_1^{(1)}(X) \quad (5.3)$$

korrigiert, wobei  $\tilde{H}_1^{(1)}(X)$  die Lösung der Gl. (4.24) mit der nun bekannten Druckstörung  $P_{S_2}^{(1)}(X)$  darstellt. Daraus resultiert die neue Approximation

$$H_1^{(2)}(X) = H_1^{(1)}(X) + \Delta^{(1)}(X). \quad (5.4)$$

Dieser Prozess wird solange wiederholt, bis sich zwei aufeinanderfolgende Oberflächenerhöhungen nicht mehr signifikant ändern, also wenn  $\text{Max}\{|\Delta^{(i)}|\} < \xi_\Delta \ll 1$  erreicht wird (siehe Abb. 5.1). Dann ist auch gewährleistet, dass der Oberflächendruck  $\text{Max}\{|P_{S_2}^{(i)}|\} < \xi_P \ll 1$  ist, was zu bedeuten hat, dass für die gegebene Oberflächenerhöhung  $H_1^{(i)}(X)$  die dynamischen Randbedingungen entlang der Oberfläche erfüllt sind. Die Schranken  $\xi_\Delta$  und  $\xi_P$  für das Abbruchkriterium werden in Kapitel 8 diskutiert.

Um die numerische Stabilität des iterativen Verfahrens zu erhöhen und somit das Konvergenzverhalten zu verbessern wird ein Relaxationsfaktor gemäß

$$\hat{P}_{S_2}(X) = rP_{S_2}(X) \quad \text{mit} \quad 0 < r < 1 \quad (5.5)$$

eingeführt, wobei in Gl. (4.24) die Funktion  $P_{S_2}(X)$  in jedem Iterationsschritt  $i$  durch die unterrelaxierte Funktion  $\hat{P}_{S_2}(X)$  zu ersetzen ist.

Für einen allgemeinen Iterationsschritt  $i$  innerhalb der Schleife gilt

$$H_1^{(i+1)}(X) = H_1^{(i)}(X) + \Delta^{(i)}(X) \quad (i = 1, 2, 3, 4, \dots) \quad (5.6)$$

mit

$$\Delta^{(i)}(X) = H_1^{(1)}(X) - \tilde{H}_1^{(i)}(X). \quad (5.7)$$

Es sei an dieser Stelle betont, dass sich die Korrekturfunktionen  $\Delta^{(i)}(X)$  stets auf die Ausgangslösung  $H_1^{(1)}(X)$  beziehen, welche identisch zur Lösung der erweiterten KdV-Gleichung *ohne* Druckstörungsterm ist.

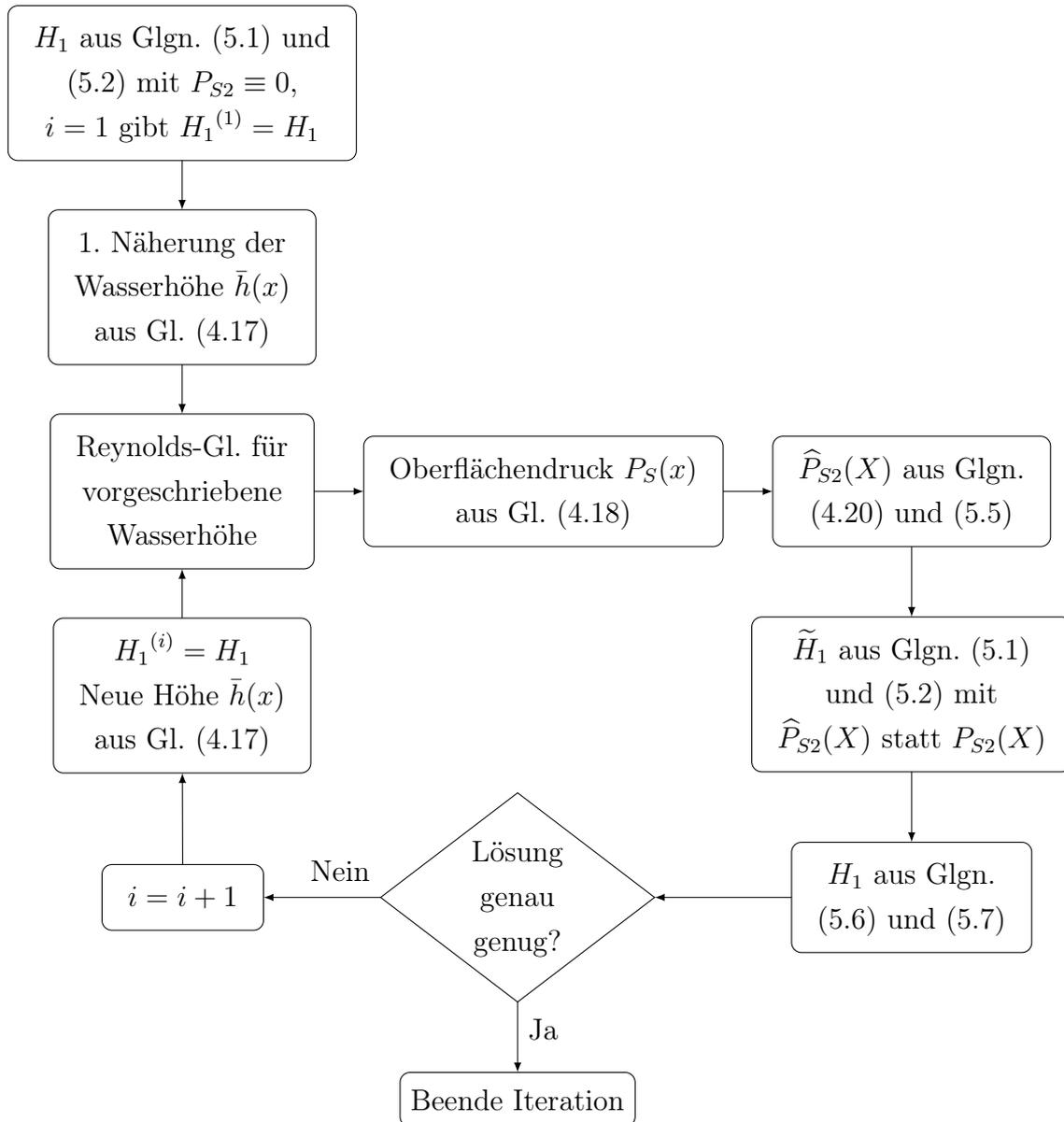


Abbildung 5.1: Flussdiagramm der Iterationsroutine

# Kapitel 6

## Numerische Lösung der erweiterten KdV-Gleichung

Eine Schwierigkeit bei der numerischen Lösung des Gleichungssystems (5.1) stellt das Implementieren der asymptotischen Randbedingungen (5.2) auf ein endliches Rechengebiet mit den Grenzen  $X_{-\infty}$  weit stromauf und  $X_{+\infty}$  weit stromab dar. Die Notation  $X_{-\infty}$  sowie  $X_{+\infty}$  für die Grenzen des Rechengebiets symbolisiert, dass es sich um betragsmäßig große, aber dennoch endliche Werte gegenüber der Länge  $L$  des Gebietes mit erhöhter Rauigkeit handelt.

Eine Idee ist es, die asymptotischen Randbedingungen (5.2) aufgrund der Beschränktheit des Rechengebiets zu umgehen, indem man sich das asymptotische Abklingen der Form

$$H_1 = Ce^{\hat{k}X} \quad \text{für } X \rightarrow \pm\infty \quad (6.1)$$

zu Nutzen macht, wobei der Parameter  $\hat{k}$  aus der algebraischen Gleichung

$$\hat{k}(\hat{k}^2 - 1) = \beta \quad (6.2)$$

zu bestimmen ist [12]. Für  $\beta < 2/3\sqrt{3} \approx 0,385$  existieren für die kubische Gleichung (6.2) zwei negative  $\hat{k}_1 < \hat{k}_2 < 0$  und eine positive Lösung  $\hat{k}_3 > 0$  [15].

Da der Koeffizient  $C$  von der gesuchten Funktion  $H_1$  abhängt und somit a priori unbekannt ist, kann an den Rändern des Rechenintervalls  $[X_{-\infty}; X_{+\infty}]$  weder eine Dirichlet- noch eine Neumann-Randbedingung vorgeschrieben werden. Abhilfe soll hier die so ge-

nannte Robin-Randbedingung schaffen, bei der das Abklingverhalten in der Form

$$\frac{dH_1}{dX} = \hat{k}H_1 \quad (6.3)$$

mit

$$\hat{k} = \begin{cases} \hat{k}_2 & \text{für } X = X_{+\infty} \gg 1 \\ \hat{k}_3 & \text{für } X = X_{-\infty} < 0, \quad |X_{-\infty}| \gg 1 \end{cases} \quad (6.4)$$

implementiert wird. Aus der Definition von  $G_1$  ergibt sich an der linken Berandung des Rechengebiets

$$G_1(X_{-\infty}) = \beta \int_{-\infty}^{X_{-\infty}} [H_1(X) - \underbrace{\Gamma(X)}_{\equiv 0 \text{ für } |X| \gg 1}] dX \quad (6.5)$$

unter Verwendung von Gl. (6.1) mit  $\hat{k} = \hat{k}_3$  die dritte Randbedingung

$$G_1(X_{-\infty}) = \frac{\beta}{\hat{k}_3} H_1(X_{-\infty}) \quad (6.6)$$

des Differentialgleichungssystems (5.1).

Der entscheidende Nachteil bei der Wahl dieser drei Randbedingungen ist die numerische Instabilität, welche sich im Laufe des Iterationsprozesses bemerkbar machte. Da der Funktionswert  $H_1(X_{-\infty})$  durch keine der drei Randbedingungen vorgeschrieben bzw. fixiert wird, führen bereits kleine numerische Fehler bei der Berechnung von  $P_{S2}$  an der Stelle  $X = X_{-\infty}$  zu einem Aufschaukeln von  $H_1$  an selbiger Stelle und in weiterer Folge zum Absturz der Iterationsroutine.

Da in FLUENT numerische Singularitäten bei der Ermittlung des Oberflächendrucks speziell am Anfang des Rechengitters nicht auszuschließen sind, mussten daher alternative Randbedingungen gefunden werden.

Eine erneute Integration der erweiterten KdV-Gleichung (4.24) mit Druckstörungsterm analog zu Kapitel 5, jedoch im Intervall  $[X_{-\infty}; X]$ , liefert unter Berücksichtigung der neuen Definition der Hilfsfunktion

$$G_1(X) := \beta \int_{X_{-\infty}}^X [H_1(\tilde{X}) - \Gamma(\tilde{X})] d\tilde{X} \quad \text{mit } X \in [X_{-\infty}; X_{+\infty}] \quad (6.7)$$

folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_1(X)}{dX^2} - \frac{d^2 H_1(X)}{dX^2} \Big|_{X_{-\infty}} + \frac{1}{2} [H_1^2(X) - H_1^2(X_{-\infty})] - H_1(X) \\ + H_1(X_{-\infty}) = G_1(X) - G_1(X_{-\infty}) - \frac{1}{3} [P_{S2}(X) - P_{S2}(X_{-\infty})] \end{aligned} \quad (6.8a)$$

$$\frac{dG_1(X)}{dX} = \beta [H_1(X) - \Gamma(X)]. \quad (6.8b)$$

Aus der Subtraktion von Gl. (6.8a) mit Gl. (5.1a) folgt unter der Annahme vernachlässigbarer Oberflächendruckstörung weit stromauf, d.h.

$$P_{S2}(X_{-\infty}) \ll 1, \quad (6.9)$$

die Gleichung

$$\frac{d^2 H_1(X)}{dX^2} \Big|_{X_{-\infty}} + \frac{1}{2} H_1^2(X_{-\infty}) - H_1(X_{-\infty}) = G_1(X_{-\infty}). \quad (6.10)$$

Bei entsprechender Wahl von  $|X_{-\infty}| \gg 1$  ist die Randbedingung

$$H_1(X_{-\infty}) = 0 \quad (6.11)$$

mit guter Näherung gerechtfertigt. Die zweite Randbedingung folgt per Definition aus Gl. (6.7)

$$G_1(X_{-\infty}) \stackrel{!}{=} 0, \quad (6.12)$$

was laut Gl. (6.10) gleichbedeutend mit verschwindender Krümmung von  $H_1$  an der Stelle  $X = X_{-\infty}$  ist. Für die Vervollständigung des Randwertproblems wird noch die dritte Randbedingung

$$H_1(X_{+\infty}) = 0 \quad (6.13)$$

stromab gesetzt. Mit der Wahl der drei Dirichlet-Randbedingungen (6.11) - (6.13) reduziert sich zum einen das Gleichungssystem (6.8) wieder zu (5.1) und zum anderen wird dadurch das zuvor erwähnte Problem der numerischen Instabilität gelöst. Um der Annahme (6.9) sowie den Randbedingungen (6.11) und (6.13) gerecht zu werden, muss das Rechengebiet ausreichend lang gegenüber der im Experiment [15] verwendeten Länge  $L = 3,34$  sein. Die entsprechende dimensionsbehaftete Länge  $\ell$  lässt sich unter

Verwendung der Glgn. (3.15) und (3.16) gemäß

$$\ell = \frac{L}{3\sqrt{\varepsilon}} \bar{h}_r = 0,49 \text{ m} \quad (6.14)$$

berechnen, wobei die Referenzhöhe  $\bar{h}_r = 9,15 \text{ cm}$  aus den gemessenen Daten von [15] hervorgeht. Nach zahlreichen Versuchen erschienen die Ränder des Intervalls mit  $x_{-\infty} = -10 \text{ m}$  und  $x_{+\infty} = 17 \text{ m}$  als zweckmäßig, was eine Gesamtlänge von  $\ell_D = x_{+\infty} - x_{-\infty} = 27 \text{ m}$  ausmacht. Die Asymmetrie des Rechengebiets lässt sich durch die Asymmetrie des Abklingverhaltens  $\hat{k}_3 > |\hat{k}_2|$  von  $H_1$  erklären.

Eine erneute Umrechnung in dimensionslose Größen liefert für die Grenzen

$$X_{-\infty} = 3\sqrt{\varepsilon} \frac{x_{-\infty}}{\bar{h}_r} = -68,25 \quad \text{und} \quad X_{+\infty} = 3\sqrt{\varepsilon} \frac{x_{+\infty}}{\bar{h}_r} = 116,03. \quad (6.15)$$

Eine weitere Schwierigkeit bei der numerischen Lösung des Differentialgleichungssystems (5.1) stellt die Singularität der Störfunktion  $\Gamma(X)$  an den Stellen  $X = 0$  sowie  $X = L$  dar. Da bei der numerischen Lösung von (5.1) ohne Weiteres keine Gitterkonvergenz erreicht werden konnte, wurde eine neue stetige Funktion  $\hat{\Gamma}(X)$  mit

$$\hat{\Gamma}(X) = \begin{cases} 0 & \text{für } X < -\Delta X \\ \frac{\Gamma_L}{2} \left( \frac{X}{\Delta X} + 1 \right) & \text{für } -\Delta X \leq X < \Delta X \\ \Gamma_L & \text{für } \Delta X \leq X < L - \Delta X \\ \frac{\Gamma_L}{2} \left( \frac{L - X}{\Delta X} + 1 \right) & \text{für } L - \Delta X \leq X < L + \Delta X \\ 0 & \text{für } X \geq L + \Delta X \end{cases} \quad (6.16)$$

eingeführt. Dabei bezeichnet  $\Delta X = L_D/n_x$  in Gl. (6.16) die Schrittweite und  $n_x = 10\,000$  die Anzahl der äquidistanten finiten Differenzen über der Gesamtlänge  $L_d = X_{+\infty} - X_{-\infty} = 184,28$ .

Es ist leicht nachzuvollziehen, dass für steigende Werte von  $n_x$  die Schrittweite  $\Delta X$  abnimmt und sich im Grenzübergang

$$\lim_{n_x \rightarrow \infty} \hat{\Gamma}(X) = \Gamma(X) \quad (6.17)$$

ergibt. Aus der Abb. 6.1 geht ebenfalls hervor, dass für beliebige Werte von  $n_x$  die Flächenerhaltung

$$\int_{X_{-\infty}}^{X_{+\infty}} \hat{\Gamma}(X) dX = \int_{X_{-\infty}}^{X_{+\infty}} \Gamma(X) dX \quad (6.18)$$

stets erfüllt ist.

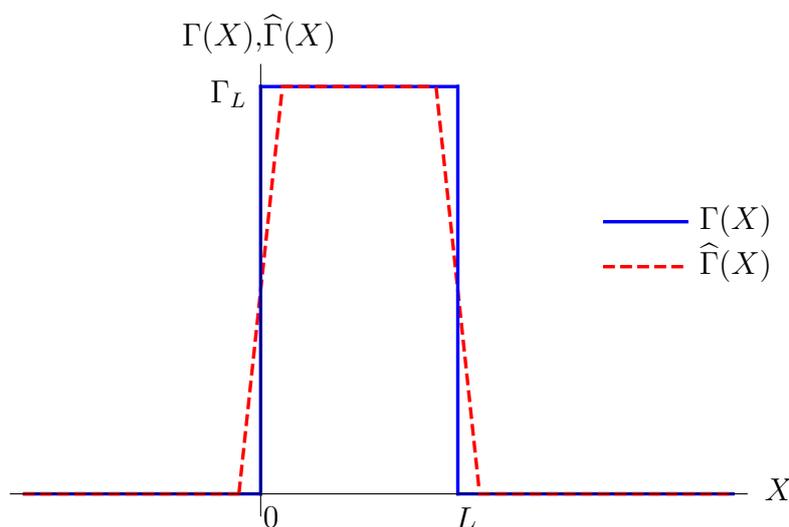


Abbildung 6.1: Qualitativer Vergleich zwischen der Funktion  $\Gamma(X)$ , welche in [6] und [7] für die analytische Berechnung von  $H_1$  verwendet wurde, und der Funktion  $\hat{\Gamma}(X)$ , welche für die numerische Berechnung herangezogen wird

Nach Diskretisierung der Gln. (5.1a) und (5.1b) mittels äquidistanter zentraler Differenzen der Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta X^2)$  wurden diese zusammen mit den Randbedingungen (6.11) - (6.13) mithilfe des Newton-Raphson-Verfahrens in MATHEMATICA iterativ gelöst. Aufgrund der Nichtlinearität des vorliegenden Problems ist die Wahl der Ausgangslösung für die Iterationsroutine des Newton-Raphson-Verfahrens entscheidend.

Sind die Wellen erster Art von Interesse, welche in Abb. 6.2 zu sehen sind, so lassen sich die analytischen Lösungen aus Kapitel 6 von [6] als gute Schätzung für die Ausgangslösung verwenden. Die Initialisierung der Hilfsfunktion  $G_1$  erfolgt durch den von MATHEMATICA bereit gestellten Befehl *Integrate*, wobei die bekannten analytischen Funktionen  $H_1(X)$  und  $\Gamma(X)$  gemäß der Definition (6.7) integriert werden.

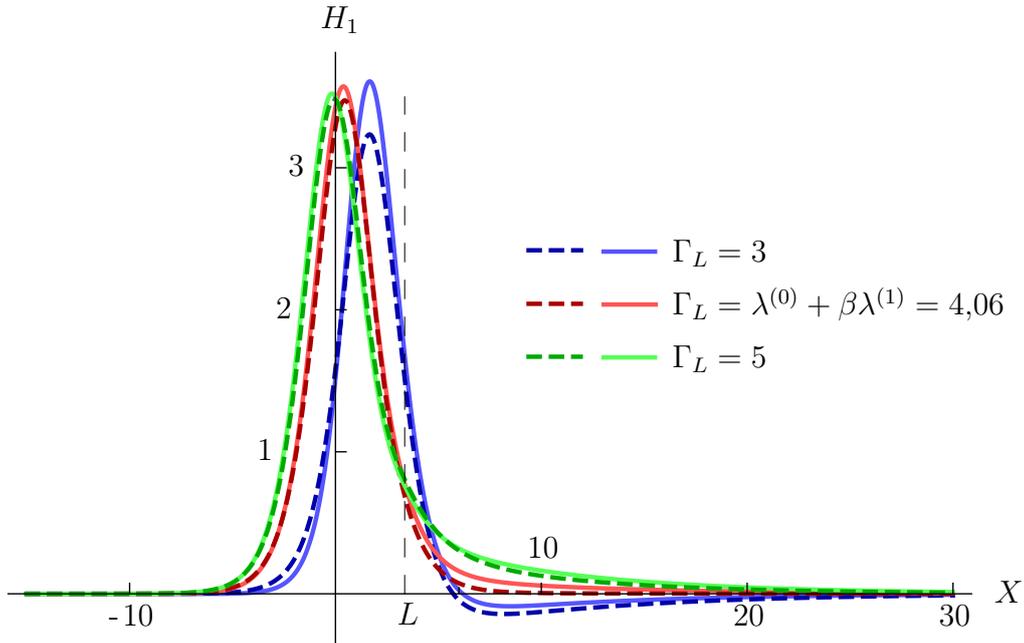


Abbildung 6.2: Lösungen erster Art von (4.6) für die Parameter:  $\beta = 0,127$ ;  $L = 3,34$ . Strichlierte, dunklere Linien: numerische Lösungen des zu (4.6) äquivalenten Gleichungssystems (5.1) mit (6.11) - (6.13) für  $P_{S_2}(X) \equiv 0$ . Volle, hellere Linien: analytische Lösungen nach [6].

Wegen der Tatsache, dass die gleichmäßig gültige analytische Lösung der Solitärwelle für  $\Gamma_L = \lambda^{(0)} + \beta\lambda^{(1)}$  in Abb. 4.1 eine Unstetigkeitsstelle aufweist, wurden in Abb. 6.2 für alle drei Werte von  $\Gamma_L$  die Formeln aus Kapitel 6 zusammen mit den allgemeinen Gleichungen aus Kapitel 3 und 4 von [6] herangezogen. Diese sind streng genommen nur dann gültig, wenn  $\Gamma_L$  vom Eigenwert  $\lambda$  um den Betrag  $\mathcal{O}(1)$  abweicht (blaue und grüne Linien). Besser als erwartet zeigt Abb. 6.2 auch für das Eigenwertproblem  $\Gamma_L = \lambda^{(0)} + \beta\lambda^{(1)}$  eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den numerischen Ergebnissen. Aus [12] geht hervor, dass sich die Impulsbilanz über die gesamte Kanalströmung zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (H_1 - \Gamma) dX = 0 \quad (6.19)$$

reduziert. Unerwarteterweise wird diese Erhaltungsgleichung laut Abb. 6.3 lediglich für

die numerischen Lösungen

$$\int_{X_{-\infty}}^{X_{+\infty}} (H_1 - \Gamma) dX = G_1(X_{+\infty}) = 0 \quad (6.20)$$

erfüllt, während die analytischen Lösungen von  $H_1$  die globale Impulsbilanz verletzen, i.e.  $G_1(+\infty) \neq 0$ . Abgesehen vom Eigenwertproblem nimmt der Fehler für steigende Werte von  $\Gamma_L$  ab. Durch Probieren kann sogar für die gegebenen Parameter ein Rauheitswert  $\Gamma_L = 5,495$  gefunden werden, für welchen die Bilanz (6.19) erfüllt ist. Bei weiterem Steigern des Betrages von  $\Gamma_L$  wechselt allerdings die Hilfsfunktion für  $X \rightarrow +\infty$  das Vorzeichen, i.e.  $G_1(+\infty) < 0$ . Es handelt sich dabei um einen Fehler der Größenordnung  $\mathcal{O}(\beta)$  der zusammengesetzten, gleichmäßig gültigen Lösung <sup>1</sup>.

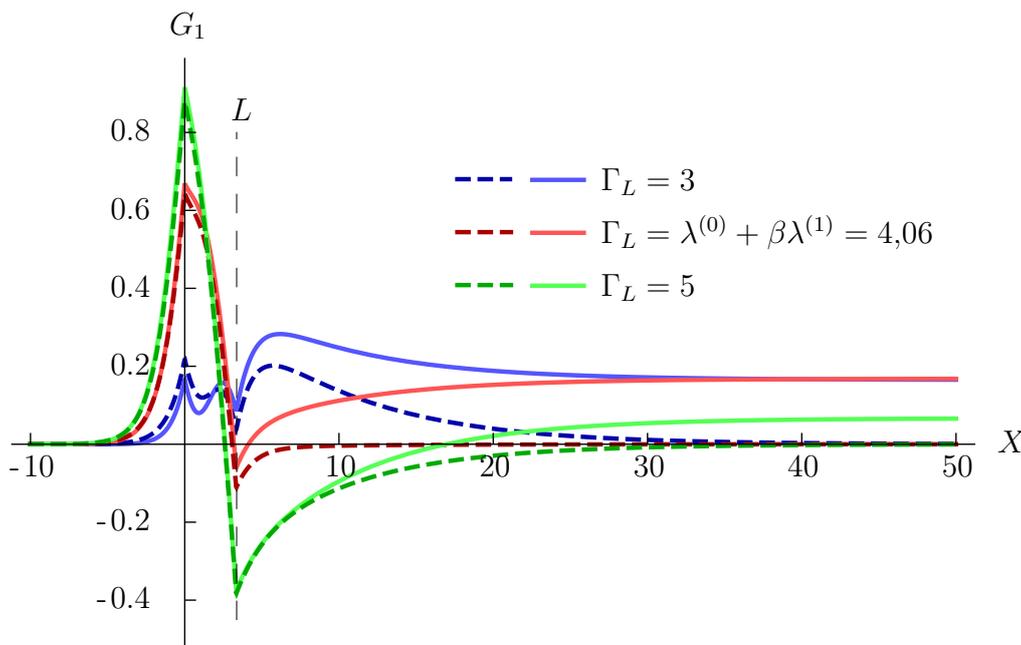


Abbildung 6.3: Gegenüberstellung der Hilfsfunktionen  $G_1$  für die Lösungen erster Art mit den Parametern:  $\beta = 0,127$ ;  $L = 3,34$ . Strichlierte, dunklere Linien: numerische Lösungen des Gleichungssystems (5.1) mit (6.11) - (6.13) für  $P_{S2}(X) \equiv 0$ . Volle, hellere Linien: numerische Integration der analytischen Funktionen  $H_1(X)$  und  $\Gamma(X)$  mittels MATHEMATICA gemäß der Definition (6.7).

<sup>1</sup>Persönliche Mitteilung von Dr.techn. Markus Müllner (2018)

Um die Lösung zweiter Art der erweiterten KdV-Gleichung auf numerischen Wege zu finden, kann hier  $H_1(X) \equiv 0$  und  $G_1(X) \equiv 0$  als erste Schätzung für das iterative Newton-Raphson-Verfahren verwendet werden. Aufgrund der im Vergleich zur Lösung erster Art geringeren Amplitude konvergiert diese Schätzung stets gegen die Einzelwelle zweiter Art, welche in Abb. 6.4 zu sehen ist.

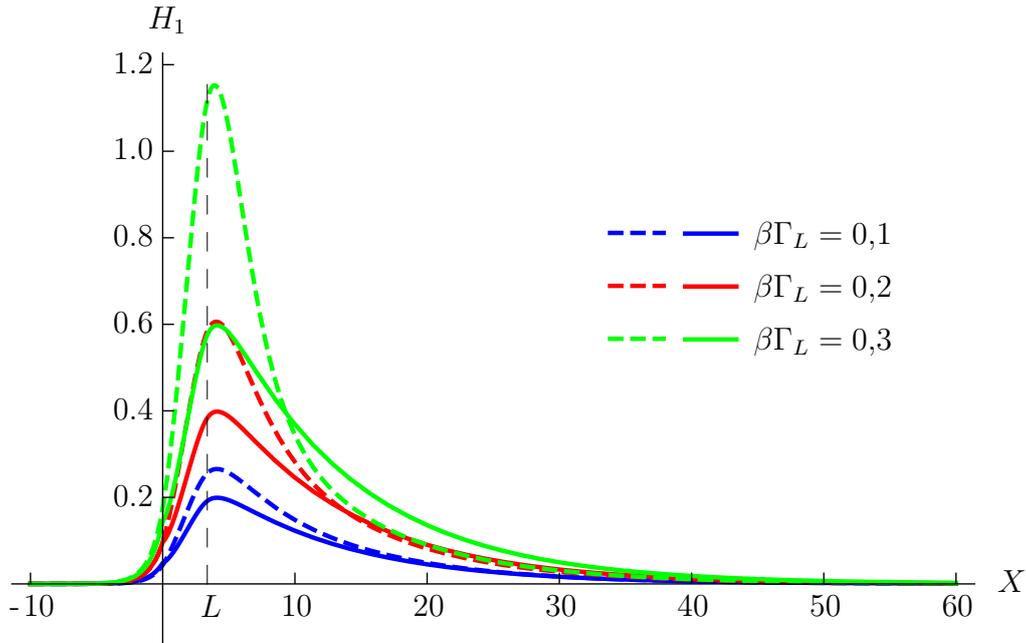


Abbildung 6.4: Lösungen zweiter Art von (4.6) für die Parameter:  $\beta = 0,1$ ;  $L = 3,34$ . Strichlierte Linien: numerische Lösungen des zu (4.6) äquivalenten Gleichungssystems (5.1) mit (6.11) - (6.13) für  $P_{S_2}(X) \equiv 0$ . Volle Linien: analytische Lösungen nach [7].

Wie zu erwarten war, steigt die Diskrepanz zwischen analytischer und numerischer Lösung mit steigendem  $\beta\Gamma_L$ , da die analytische Lösung streng genommen nur unter der Voraussetzung  $|\beta\Gamma_L| \ll 1$  gilt. Auffällig ist, dass für  $\beta\Gamma_L = 0,3$  laut numerischer Lösung ein Umschlag von über- zu unterkritischer Strömung und umgekehrt stattfindet, während laut gleichmäßig gültiger analytischer Lösung die Welle stets überkritisch bleibt, i.e.  $H_1(X) < 1, \forall X$ .

Während alle numerischen Lösungen in Abb.6.5 die Integralbedingung (6.20) erfüllen, wächst der Fehler der analytischen Lösung mit steigendem  $\beta\Gamma_L$ . Nach genauerem Betrachten der dimensionslosen Oberflächenerhöhungen zweiter Art aus Abb. 6.4 wird klar, wie der - von null verschiedene - Endwert von  $G_1$  zustande kommt. Für alle drei

Fälle von  $\beta\Gamma_L$  erzeugt nämlich die analytische Lösung  $H_1$  eine geringere Fläche als die numerisch ermittelte Oberflächenerhöhung. Erfüllt die auf numerischem Wege gefundene Funktion  $H_1$  die Integralbedingung, so bedeutet das im Umkehrschluss, dass für die analytischen Lösungen zwangsweise  $G_1(+\infty) < 0$  gelten muss.

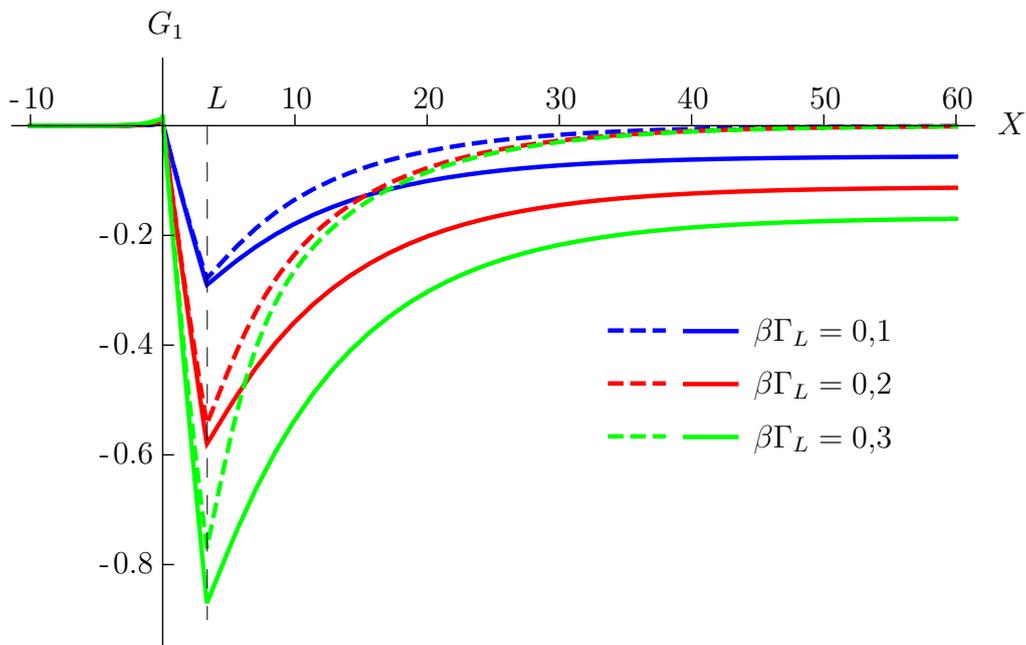


Abbildung 6.5: Hilfsfunktionen  $G_1$  für die Lösungen zweiter Art mit den Parametern:  $\beta = 0,1$ ;  $L = 3,34$ . Strichlierte Linien: numerische Lösungen des Gleichungssystems (5.1) mit (6.11) - (6.13) für  $P_{S_2}(X) \equiv 0$ . Volle Linien: numerische Integration der analytischen Funktionen  $H_1(X)$  und  $\Gamma(X)$  gemäß der Definition (6.7) mittels MATHEMATICA.

# Kapitel 7

## Numerische Lösung der Reynolds-Gleichungen

Neben der KdV-Gleichung ist das Lösen der vollständigen Bewegungsgleichungen ein wichtiger Bestandteil der Iterationsroutine aus Abb. 5.1. Dazu wird das CFD Programm ANSYS® FLUENT 16.2 verwendet, welches ausschließlich mit dimensionsbehafteten Größen rechnet. In der Schnittstelle zwischen MATHEMATICA und FLUENT ist daher in jedem Iterationsschritt  $i$  eine Umrechnung zwischen dimensionslosen und dimensionsbehafteten Größen - und umgekehrt - erforderlich.

Die Lösung der Reynolds-Gleichungen in FLUENT erfolgt mithilfe des sogenannten „2D double precision pressure-based Solvers“, wobei die Gleichungen mittels Upwind-Verfahren erster Ordnung diskretisiert werden. Als Turbulenzmodell sei hier das Standard  $k$ - $\epsilon$ -Turbulenzmodell gewählt. Frühere Untersuchungen [13] haben nämlich am Beispiel des welligen Wassersprunges gezeigt, dass die Wahl des Turbulenzmodells nur wenig Einfluss auf das Ergebnis hat.

Entlang des Kanalbodens kommt die in FLUENT implementierte Standard Wandfunktion zum Einsatz. In Anlehnung an [13] werden die kinematischen Randbedingungen (3.13) sowie die dynamischen Randbedingungen (3.14) für die Tangentialkomponenten des Spannungstensors durch Anwendung der lokalen Symmetrie-Randbedingung an der Oberfläche  $\bar{h}(x)$  erfüllt. Diese Randbedingung erfordert laut [1] nicht zwangsweise eine Symmetrielinie der vorliegenden Geometrie, sondern kann auch für feste Wände mit verschwindenden Scherspannungen verwendet werden. Auf diese Weise wird die freie

Wasseroberfläche für die Berechnung in FLUENT als eine solche fixierte Wand behandelt und nach jedem Iterationsschritt gemäß (5.6) und (4.17) korrigiert. Um diese lokale Symmetriebedingung rechtfertigen zu können, muss der hydrostatische Druckanteil  $p_h$  vom Druck  $p$  zufolge

$$\tilde{p} = p - p_h \quad \text{mit} \quad p_h = \rho g(\bar{h}_r - y) \quad (7.1)$$

abgespalten werden [13]. In FLUENT werden die Bewegungsgleichungen mit  $\tilde{p}$  als unbekanntes Skalarfeld gelöst, wobei die Komponente des Gravitationsvektors normal zum Boden zu null gesetzt wird. Zur Ermittlung des in (5.1) benötigten Druckstörungsterms wird nach jeder FLUENT Rechnung der hydrostatische Druckanteil  $p_h$  zu  $\tilde{p}$  wieder hinzugefügt, bevor dieser mithilfe von (4.18) und (4.20) zu  $P_{S2}$  umgeformt wird.

Entlang der stromabwärtsseitigen Berandung des Rechengebietes kommt die Abströmbedingung zum Einsatz. Um sicherzustellen, dass weit stromauf tatsächlich mechanisches Gleichgewicht herrscht, wird am Einströmrand des Rechengebiets ein voll ausgebildetes Geschwindigkeitsprofil als Randbedingung vorgeschrieben. Die Ermittlung dieses Profils wird im Abschnitt 7.1 näher erläutert.

Die Randbedingungen für die Normalspannungen aus (3.14) sollen schließlich nach Beendigung des Iterationsprozesses aus Kapitel 5 erfüllt sein.

## 7.1 Voll ausgebildete Strömung

Um den Voraussetzungen der voll ausgebildeten Zuströmung aus Kapitel 2 zu genügen, muss zunächst ein Geschwindigkeitsprofil am Einlass des Kanals ermittelt werden, welches sich in Strömungsrichtung nicht mehr ändert. Dazu werden die Bewegungsgleichungen in FLUENT sowohl mit konstanter Wasserhöhe  $\bar{h}(x) \equiv \bar{h}_r$ , als auch konstanter Bodenrauigkeit gelöst. Bei der Erstellung des Rechengitters für die zwei-dimensionale Kanalströmung kann bei der Wahl der Knotenanzahl  $n_y$  parallel zur  $y$ -Achse die gestreckte Wandkoordinate [11, S. 520]

$$Y_p^+ = \frac{y_p u_{\tau r}}{\nu} \quad (7.2)$$

als Orientierung dienen. Für eine korrekte Implementierung der Wandfunktion sollte diese Wandkoordinate, welche den dimensionslosen Abstand zwischen Boden und Mit-

telpunkt  $p$  der wandnahen Zellen beschreibt, möglichst im Bereich

$$30 < Y_p^+ < 300 \quad (7.3)$$

liegen, wobei Werte bis hin zu  $Y_p^+ = 11,2$  akzeptabel sind [1]. Mit  $n_y = 1 + \bar{h}_r/h_z$  und der dimensionsbehafteten Zellhöhe  $h_z = 2y_p$  der wandnahen Zellen lässt sich die Bedingung (7.3) unter Zuhilfenahme der Glgn. (3.5) und (7.2) auf

$$\frac{\sqrt{g\alpha\bar{h}_r^3}}{600\nu} + 1 < n_y < \frac{\sqrt{g\alpha\bar{h}_r^3}}{60\nu} + 1 \quad (7.4)$$

umformen. Eine numerische Auswertung von (7.4) ergibt für die experimentellen Daten von [15] sowie für eine bei Zimmertemperatur näherungsweise geltende kinematische Viskosität  $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  das Intervall  $10 < n_y < 85$ . Um ein möglichst feines Netz zu generieren und somit den numerischen Fehler gering zu halten, ist es von Vorteil sich für möglichst große Werte von  $n_y$  zu entscheiden. Dabei darf nicht außer Acht gelassen werden, dass sich die Intervallsgrenzen bei jeglichen Parametervariationen ändern können. Hinzu kommt, dass die Wasserhöhe  $\bar{h}(x)$  im Allgemeinen ebenfalls variiert. Um also sicher zu gehen, dass die Bedingung (7.3) weitestgehend erfüllt ist, wird präventiv  $n_y = 60$  gewählt. Die Anzahl der Zellen  $n_x$  parallel zur  $x$ -Achse wurde wie schon bei der Lösung der erweiterten KdV-Gleichung mit  $n_x = 10\,000$  festgelegt, was zu annähernd quadratischen Zellen führt.

Die Ermittlung des voll ausgebildeten Einlaufprofils erfolgt ebenfalls mithilfe eines iterativen Verfahrens (siehe Abb. 7.1). Nach dem Lösen der Reynolds-Gleichungen wird das Auslaufprofil  $\bar{u}(x_{+\infty}, y)$  am Ende des Kanals extrahiert und für eine erneute Berechnung an der Stelle  $x = x_{-\infty}$  als Einlaufprofil vorgeschrieben. Die Geschwindigkeitskomponente in  $y$ -Richtung wird in jedem Iterationsschritt  $j$  zu  $\bar{v}(x_{-\infty}, y) \equiv 0$  gesetzt. Dieser Prozess wird solange durchgeführt, bis sich die Geschwindigkeitsprofile am Kanalbeginn sowie -ende nicht mehr signifikant voneinander unterscheiden.

Leider liefert eine solche Berechnung unter Verwendung der experimentellen Daten von [15] mit einer Dichte  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  einen in Strömungsrichtung nicht verschwindenden Druckgradienten  $dp/dx$ , was für eine voll ausgebildete freie Oberflächenströmung nicht korrekt ist. Ein möglicher Grund dafür könnten die zusätzlichen Verluste sein, die beim Experiment an den Seitenwänden des Kanals entstehen, welche bei einer zwei-dimensionalen Rechnung nicht berücksichtigt werden. Auch Sekundärströmungen

könnten eine Rolle spielen [9]. Dieses Problem kann gelöst werden, indem z.B. der Neigungswinkel  $\alpha$  oder die Oberflächenrauigkeit  $k_r$  als freie Parameter betrachtet werden, welche so zu bestimmen sind, dass die Diskrepanz behoben wird.

Als Abbruchkriterium für den Druckgradienten  $dp/dx$  soll dieser mit jenem Druckabfall pro Längeneinheit  $l$  des Kanals

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{\rho \bar{u}_r^2}{2} \cdot \frac{1}{d_h} \cdot \lambda_R \quad (7.5)$$

verglichen werden, welcher bei einer geschlossenen Rohrströmung mit gleichen Parametern entstehen würde [17, S. 291]. Während die Gl. (3.21) die Referenzgeschwindigkeit  $\bar{u}_r = 1,01 \text{ m/s}$  liefert, kann die Rohrreibungszahl  $\lambda_R$  entweder mittels

$$\lambda_R = 4c_f \quad \text{mit} \quad c_f = \frac{2\tau_w}{\rho \bar{u}_r^2} \quad (7.6)$$

nach [11, S. 543] oder mithilfe der Abb. 17.17 aus selbigem Buch ermittelt werden. Der hydraulische Durchmesser  $d_h$  lässt sich nach [17, S. 193] für den vorliegenden Fall gemäß

$$d_h = \frac{4A_q}{s} = \lim_{b/\bar{h}_r \rightarrow \infty} \frac{4b\bar{h}_r}{b + 2\bar{h}_r} = 4\bar{h}_r = 36,6 \text{ cm} \quad (7.7)$$

bestimmen, wobei  $A_q$  die Querschnittsfläche und  $s$  die benetzte Umfangslänge des Querschnittes beschreiben. Das Verhältnis aus Breite  $b$  des Kanals und Wasserhöhe  $\bar{h}_r$  wächst für die zwei-dimensionale Betrachtungsweise über alle Grenzen.

Auf diese Weise lässt sich das Abbruchkriterium

$$10^{-5} < \frac{dp/dx}{\Delta p/l} < 10^{-4} \quad (7.8)$$

für den Druckgradienten  $dp/dx$  anschreiben. Wichtig dabei ist, dass die untere Grenze von (8.2) nicht unterschritten wird, da der mit FLUENT berechnete Druckgradient ansonsten zwar klein gegen 1 aber nicht mehr konstant ist. Dieses Ergebnis ist rein numerisch bedingt und lässt sich in FLUENT lediglich durch höhere Druckgradienten entsprechend der unteren Grenze in (7.8) beheben.

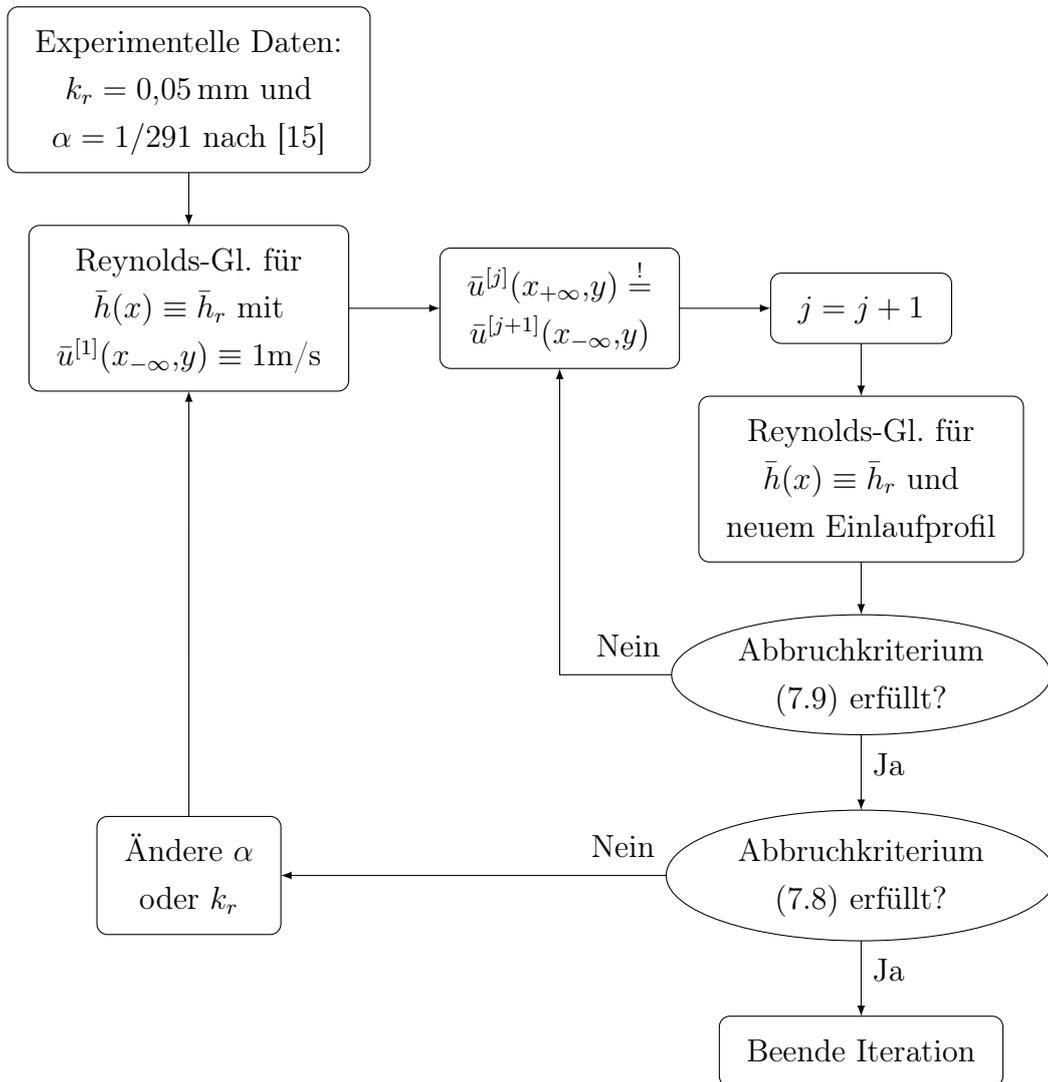


Abbildung 7.1: Flussdiagramm zur Ermittlung eines voll ausgebildeten Geschwindigkeitsprofils mit verschwindendem Druckgradienten in Strömungsrichtung

Aus den von Prof. Yasuda zur Verfügung gestellten Messdaten<sup>2</sup> geht hervor, dass die Experimente bei einer Umgebungstemperatur von  $\vartheta = 7^\circ\text{C}$  durchgeführt wurden, womit in [18, D2: S. 176] eine kinematische Viskosität  $\nu = 1,427 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  abgelesen werden kann. Fixiert man nun den Parameter  $k_{r,I} = 0,05 \text{ mm}$  entsprechend dem Experiment aus [15], so erhält man nach  $j = 10$  Iterationsschritten unter der Berücksichtigung von

<sup>2</sup>Persönliche Mitteilung von Univ.Prof Youichi Yasuda (2018)

(7.8) und des Abbruchkriteriums

$$\frac{|\bar{u}^{[j]}(x_{+\infty}, y) - \bar{u}^{[j]}(x_{-\infty}, y)|}{\bar{u}_r} < 10^{-5} \quad (7.9)$$

für das voll ausgebildete Profil den neuen Neigungswinkel  $\alpha_I = 1/468$  des Kanalbodens. Folgt man erneut der Iterationsroutine aus Abb. 7.1 mit dem Unterschied, dass diesmal der Neigungswinkel  $\alpha_{II} = 1/291$  festgehalten wird, so erhält man die dazu gehörige Bodenrauigkeit  $k_{r,II} = 0,676$  mm. Der Index I bzw. II symbolisiert, dass es sich um zwei unterschiedliche Problemstellungen handelt, die im Folgenden getrennt voneinander betrachtet werden.

## 7.2 Boden mit Gebiet erhöhter Rauigkeit

Das voll ausgebildete Geschwindigkeitsprofil, welches entsprechend dem Algorithmus aus Abb. 7.1 ermittelt wurde, wird im nächsten Schritt dazu verwendet, um das Strömungsfeld über einem Boden mit einem Gebiet erhöhter Rauigkeit zu berechnen (siehe Abb. 2.1). Dabei wird das Rechengitter mittels ANSYS® GAMBIT für eine fixierte Höhe  $\bar{h}(x)$  erstellt und nach jedem Iterationsschritt  $i$  gemäß den Glgn. (5.6) und (4.17) geändert. Die Knotenanzahlen  $n_x$  und  $n_y$  aus Abschnitt 7.1 bleiben dabei unverändert. Für die Rechnung mit der Rauigkeit entsprechend dem Experiment wird im Bereich  $0 < x < \ell$  die erhöhte Rauigkeit  $k_{e,I} = 0,5$  mm aus [15] vorgeschrieben. Im Experiment wurde gezielt versucht den Rauigkeitsparameter  $\Gamma_L$  mit dem Eigenwert  $\lambda$  übereinzustimmen, welcher sich aus den Glgn. (4.13) und (4.14) gemäß  $\Gamma_{L,I} = \lambda^{(0)} + \beta\lambda^{(1)} = 4,36$  bestimmen lässt. Die Diskrepanz zwischen diesem Rauigkeitswert und jenem aus [15] rührt aus den unterschiedlichen Neigungswinkeln her, welche den Dämpfungsparameter  $\beta$  gemäß Gl. (4.8) beeinflussen.

Um bei der Rechnung mit dem Neigungswinkel entsprechend dem Experiment ebenfalls eine Übereinstimmung zwischen  $\Gamma_L$  und  $\lambda$  zu erzielen, muss erneut das iterative Verfahren aus Abb. 7.1 zum Einsatz gebracht werden. Dazu wird zunächst eine fiktive Hilfsneigung  $\alpha_{\mathcal{F}}$  bestimmt, die in weiterer Folge die erhöhte Bodenrauigkeit  $k_{e,II}$  liefern soll. Für die Ermittlung von  $\alpha_{\mathcal{F}}$  werden zunächst die Glgn. (3.4) und (3.5) gleichgesetzt,

bevor diese mithilfe von Gl. (7.6) zu

$$c_f = \frac{2\alpha g \bar{h}_r}{\bar{u}_r^2} \quad (7.10)$$

umgeformt werden. Das Einsetzen dieser Beziehung in Gl. (4.10) liefert schließlich den fiktiven Neigungswinkel des Bodens

$$\alpha_{\mathcal{F}} = \frac{c_{fr} \bar{u}_r^2 (1 + 3\varepsilon \Gamma_L)}{2g \bar{h}_r}. \quad (7.11)$$

Die Referenzbodenrauigkeit  $c_{fr} = c_{fr,II} = 0,006$  ergibt sich aus Gl. (7.6), wobei  $\tau_w$  numerisch mittels FLUENT bestimmt wird. Für den tatsächlichen Neigungswinkel  $\alpha_{II} = 1/291$  folgt nach Gl. (4.14) ein zum Experiment unveränderter Rauigkeitsparameter  $\Gamma_{L,II} = \lambda^{(0)} + \beta \lambda^{(1)} = 4,06$  und damit der fiktive Neigungswinkel  $\alpha_{\mathcal{F}} = 1/191$  aus Gl. (7.11). Eine erneute Anwendung der Iterationsroutine aus Abb. 7.1 mit fixiertem  $\alpha_{\mathcal{F}}$  liefert jene erhöhte Bodenrauigkeit  $k_{e,II} = 2,003$  mm für den Bereich  $0 < x < \ell$ , welche mit der Referenzbodenrauigkeit  $k_{r,II}$  so abgestimmt ist, dass wiederum ein Eigenwertproblem vorliegt.

# Kapitel 8

## Ergebnisse

Wie bereits erwähnt, muss die Problemstellung I, bei welcher die Rauigkeiten des Kanalbodens mit jenen aus [15] übereinstimmen, von der Problemstellung II unterschieden werden, in welcher mit dem Neigungswinkel des Kanalbodens entsprechend dem Experiment gerechnet wird.

Neben den bei der Umgebungstemperatur  $\vartheta = 7^\circ\text{C}$  herrschenden Stoffeigenschaften des Wassers wurde die Problematik I auch für die Stoffwerte  $\nu^{(b)} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  sowie  $\rho^{(b)} = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$  untersucht, welche in guter Näherung bei Zimmertemperatur vorliegen. Das hochgestellte (b) deutet darauf hin, dass an dieser Stelle eine weitere Fallunterscheidung gemacht werden muss. Für den Fall a wurde der Winkel  $\alpha_I = \alpha_I^{(a)}$  bereits in Abschnitt 7.1 ermittelt, während  $\alpha_I^{(b)}$  erst durch erneutes Anwenden der Iterationsschleife aus Abb. 7.1 gefunden werden muss. Einen Überblick über alle relevanten Parameter ist in Tab. 8.1 zu finden.

In Kapitel 6 wurde bereits angesprochen, dass FLUENT am Anfang des Rechengbietes numerische Schwierigkeiten bei der Berechnung des Oberflächendrucks aufweist. Beim Lösen des Differentialgleichungssystems (5.1) mit den Randbedingungen (6.11) - (6.13) führt eine solche numerisch bedingte Störung des Oberflächendrucks bei  $X = X_{-\infty}$  zu

$$\left. \frac{dH_1(X)}{dX} \right|_{X_{-\infty}} \neq 0, \quad (8.1)$$

was einer voll ausgebildeten Zuströmung widersprechen würde. In weiterer Folge liefert eine FLUENT-Rechnung mit einer Höhe  $\bar{h}(x)$ , welche *keine* verschwindende Tangenten-

steigung weit stromauf besitzt, einen noch größeren numerischen Fehler von  $p_s(x_{-\infty})$ . Um ein dadurch bedingtes Aufschaukeln des Fehlers zu unterbinden, was mit fortschreitendem Iterationsschritt  $i$  ein Abstürzen des Algorithmus zur Folge hätte, wird die Oberflächenstörung weit stromauf geglättet. Dies geschieht in jedem Iterationsschritt  $i$ , *bevor* die erweiterte KdV-Gleichung gelöst wird. Während des Glättungsverfahrens werden die ersten  $n_G = 40$  Punkte der diskreten Funktion  $P_S$  gelöscht und durch eine lineare Extrapolation des 41. und 42. Punktes ersetzt. Die Anzahl der gelöschten Punkte  $n_G$  sollte dabei nicht zu knapp ausfallen, da ansonsten Gefahr besteht den numerischen Fehler zu extrapolieren, was das Gegenteil des erwünschten Effekts bewirken würde.

	$k_r$ [mm]	$k_e$ [mm]	$\alpha$ [-]	$\beta$ [-]	$\Gamma_L = \lambda$ [-]
Problem I	$k_{r,I} = 0,05$	$k_{e,I} = 0,5$	$\alpha_I^{(a)} = 1/468$	$\beta_I^{(a)} = 0,079$	$\Gamma_{L,I}^{(a)} = 3,88$
			$\alpha_I^{(b)} = 1/502$	$\beta_I^{(b)} = 0,074$	$\Gamma_{L,I}^{(b)} = 3,86$
Problem II	$k_{r,II} = 0,676$	$k_{e,II} = 2,003$	$\alpha_{II} = 1/291$	$\beta_{II} = 0,127$	$\Gamma_{L,II} = 4,06$

Tabelle 8.1: Verwendete Parameter in Iterationsroutine aus Abb. 5.1. Problem I: Rechnung mit Rauigkeit entsprechend Experiment. Problem II: Rechnung mit Neigungswinkel entsprechend Experiment. Farblich hervorgehobene Parameter stimmen mit experimentellen Werten aus [15] überein.

Die Ausgangslösung  $H_1^{(1)}$  für jegliche Berechnungen ist immer die numerische Lösung der erweiterten KdV-Gleichung *ohne* Druckstörungsterm. Als Abbruchkriterium sei zum einen

$$\text{Max}\{|P_S^{(i)}|\} < 10^{-3} = \xi_P \quad (8.2)$$

und zum anderen

$$\text{Max}\{|\Delta^{(i)}|\} < 10^{-4} = \xi_\Delta \quad (8.3)$$

festgelegt.

## 8.1 Rechnung mit Rauigkeit entsprechend Experiment

### 8.1.1 Lösung erster Art

#### Fall a

Abb. 8.1 zeigt die Entwicklung der dimensionslosen Oberflächenerhöhungen über die Iterationsschritte  $i$ . Verschiedene Relaxationsfaktoren  $0 < r < 1$  wurden getestet.

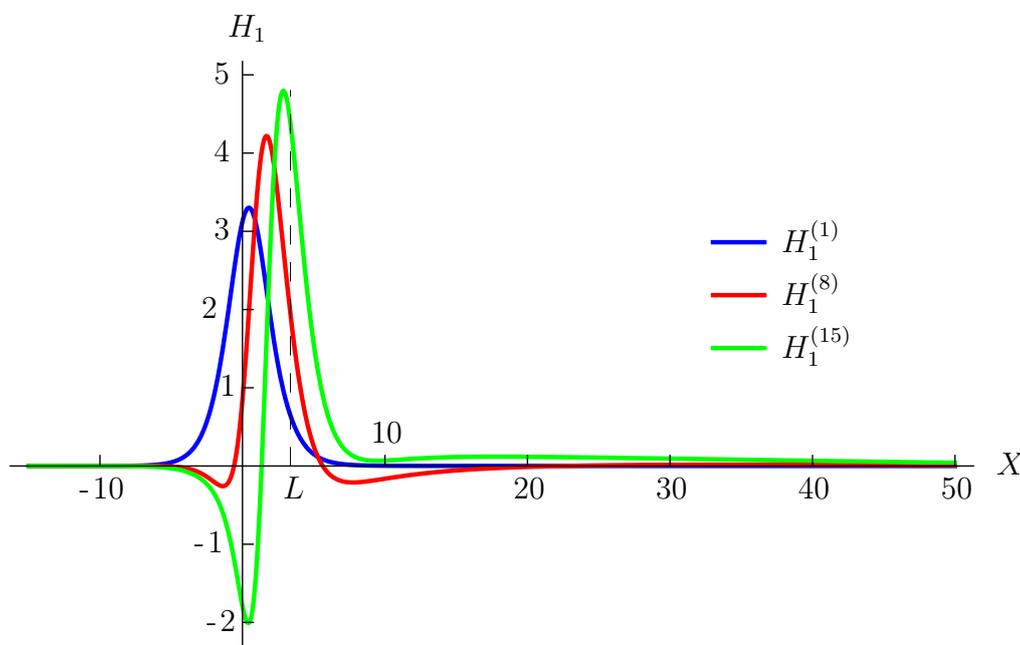


Abbildung 8.1: Dimensionslose Oberflächenerhöhungen  $H_1^{(i)}$  ausgehend von der Lösung erster Art nach Anwendung der Iterationsroutine aus Abb. 5.1 für die Werte aus Tab. 8.1 (Problem I - Fall a) sowie:  $r = 0,2$ ;  $L = 3,34$ ;  $Fr = 1,065$

Selbst für einen relativ geringen Relaxationsfaktor  $r = 0,2$  entstehen bereits nach wenigen Iterationen starke Amplitudenerhöhungen, i.e.  $\text{Max}\{H_1^{(i)}\} > 4$ . Diese müssen aus mathematischer Sicht durch die stets erfüllte Flächenerhaltung (6.20) ausgeglichen werden, weshalb sich zunehmend tiefere Wellentäler vor der Solitärwelle bilden. Nach 15

Iterationen konnte keine weitere Lösung von (5.1) gefunden werden, was dadurch zu erklären ist, dass der Einfluss von  $\widehat{P}_{S_2}^{(15)}(X)$  trotz Relaxation im Verhältnis zu  $G_1^{(15)}(X)$  zu dominant ist.

In Abb. 8.2 sind die Extremwerte der beiden für das Abbruchkriterium herangezogenen Funktionen über die Iterationsschritte  $i$  aufgetragen, welche eine stark wachsende Tendenz aufweisen.

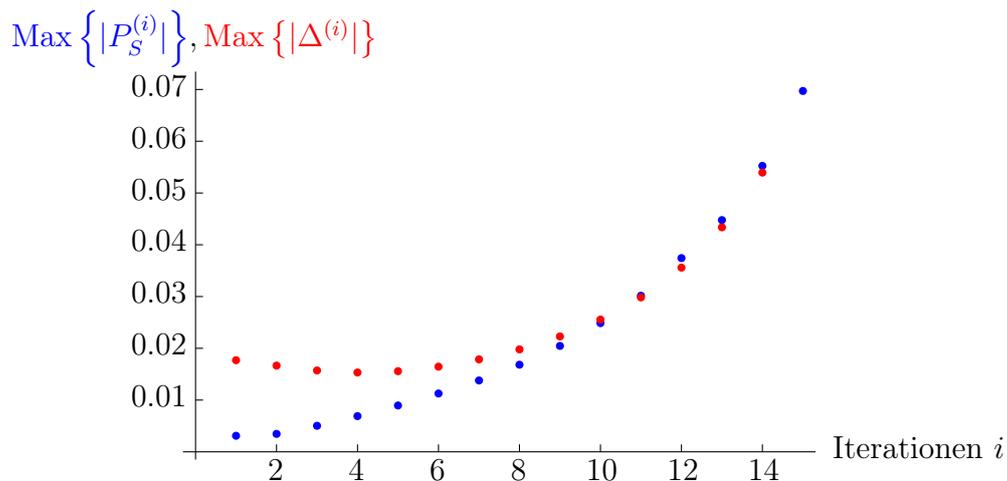


Abbildung 8.2: Extremwerte der Beträge von  $P_S^{(i)}$  und  $\Delta^{(i)}$  für die Berechnung der Welle erster Art (Problem I - Fall a)

### Fall b

Erstaunlicherweise führt Fall b, bei welchem, im Vergleich zu Fall a, lediglich die Temperatur und die damit verbundenen Stoffwerte des Wassers geändert wurden, bei gleichbleibendem Relaxationsfaktor zu einer konvergenten Lösung. In Abb. 8.3 wird die nach 28 Iterationen erzielte numerische Lösung den experimentellen Daten von Prof. Yasuda<sup>3</sup> gegenübergestellt.

Sowohl die numerisch ermittelte Oberflächenerhöhung  $H_1^{(28)}$ , als auch die Messungen weisen ein Wellental auf, was laut asymptotischer Analyse in [6] nur dann auftritt, wenn der Rauigkeitsparameter  $\Gamma_L$  kleiner als der Eigenwert  $\lambda$  ist (siehe Abb. 4.2). Weiters fällt auf, dass die Amplitude  $\text{Max}\{H_1^{(28)}\} < 3$  ist. In der asymptotischen Analyse [6]

<sup>3</sup>Persönliche Mitteilung von Univ.Prof Youichi Yasuda (2018)

wird jedoch  $\text{Max}\{H_1\} = 3 + \mathcal{O}(\beta^2) > 3$  vorhergesagt, was durch die experimentellen Daten nur bedingt bestätigt wird, da die Höhe des Wellenberges in Abb. 8.3 nahe bei 4 liegt.

Abbildung 8.4 zeigt die dimensionslosen Druckstörungen  $P_S$  zu Beginn des Iterationsprozesses, sowie nach Erreichen der Abbruchkriterien (8.2) und (8.3). Die darin enthaltenen Fluktuationen sind rein numerisch bedingt und verdeutlichen daher, dass eine numerische Differentiation dieser Funktionen zu einer signifikanten Verfälschung der Ergebnisse führen würde, weshalb die Verwendung der integralen Version (5.1) der erweiterten KdV-Gleichung *mit* Druckstörungsterm unabdingbar ist.

Ein genauere Blick auf die Druckstörung  $P_S^{(28)}$ , welche in Abb. 8.4 über dem gesamten Rechengebiet  $[X_{-\infty}; X_{+\infty}]$  dargestellt ist, lässt den bereits angesprochenen numerischen Fehler an der Stelle  $X = X_{-\infty}$  erkennen, welcher die Anwendung des Glättungsverfahrens rechtfertigt.

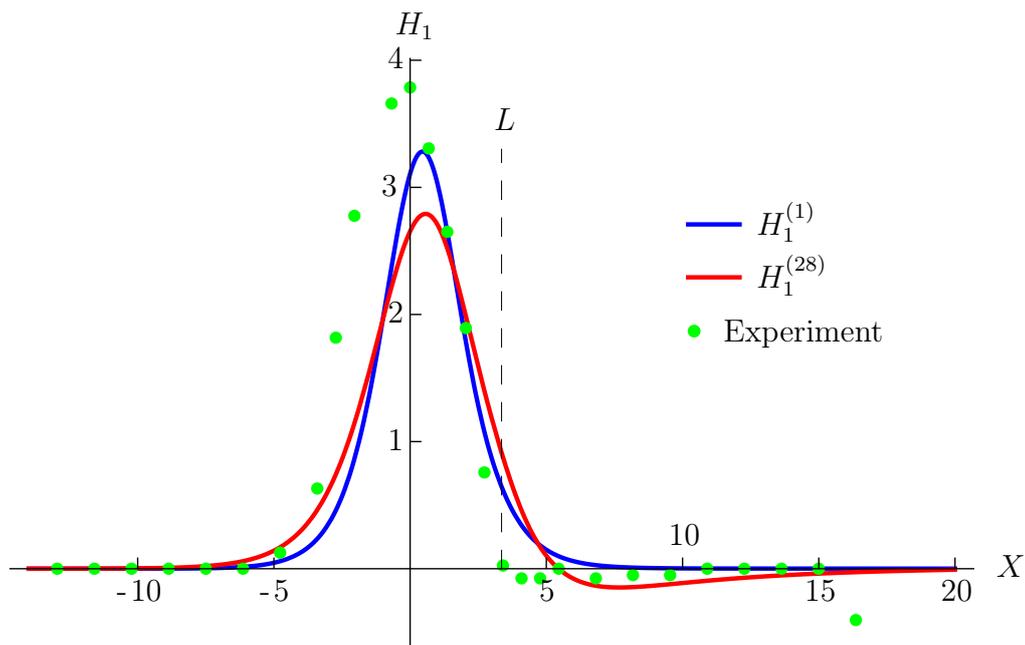


Abbildung 8.3: Dimensionslose Oberflächenerhöhungen erster Art für die Werte aus Tab. 8.1 (Problem I - Fall b) sowie:  $L = 3,34$ ;  $\text{Fr} = 1,065$ . Blaue Linie: numerische Lösung von (5.1) für  $P_{S2} \equiv 0$ . Rote Linie: konvergente Lösung nach Anwendung der Iterationsroutine aus Abb. 5.1 mit  $r = 0,2$ . Grüne Punkte: Messungen von Prof. Yasuda<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Persönliche Mitteilung von Univ.Prof Youichi Yasuda (2018)

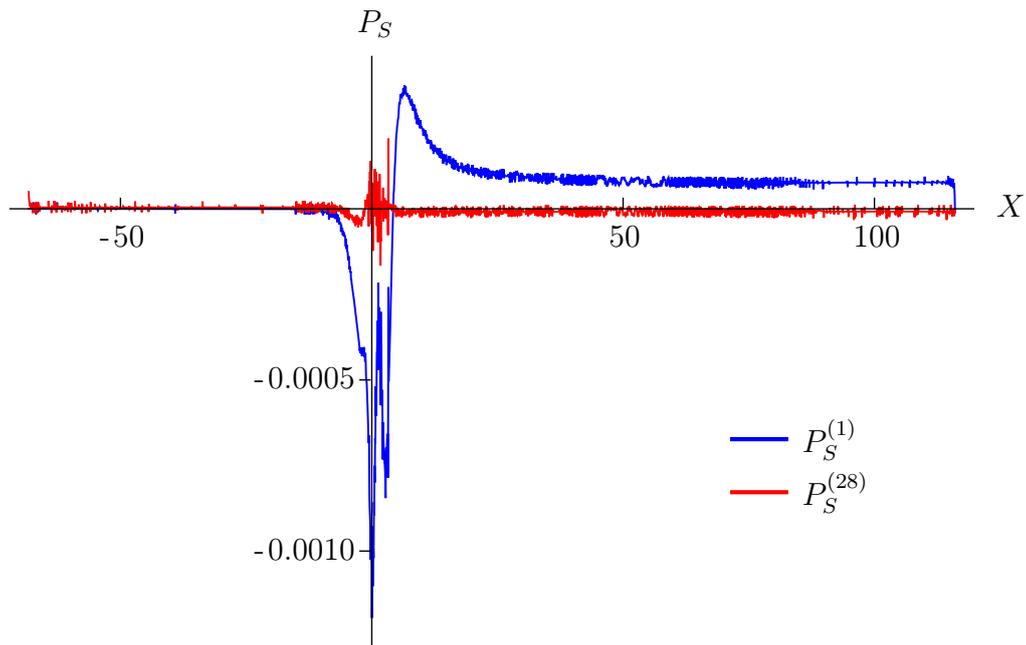


Abbildung 8.4: Entdimensionierte, mittels FLUENT berechnete, Druckstörungen für gleichen Satz von Parametern aus Abb. 8.3

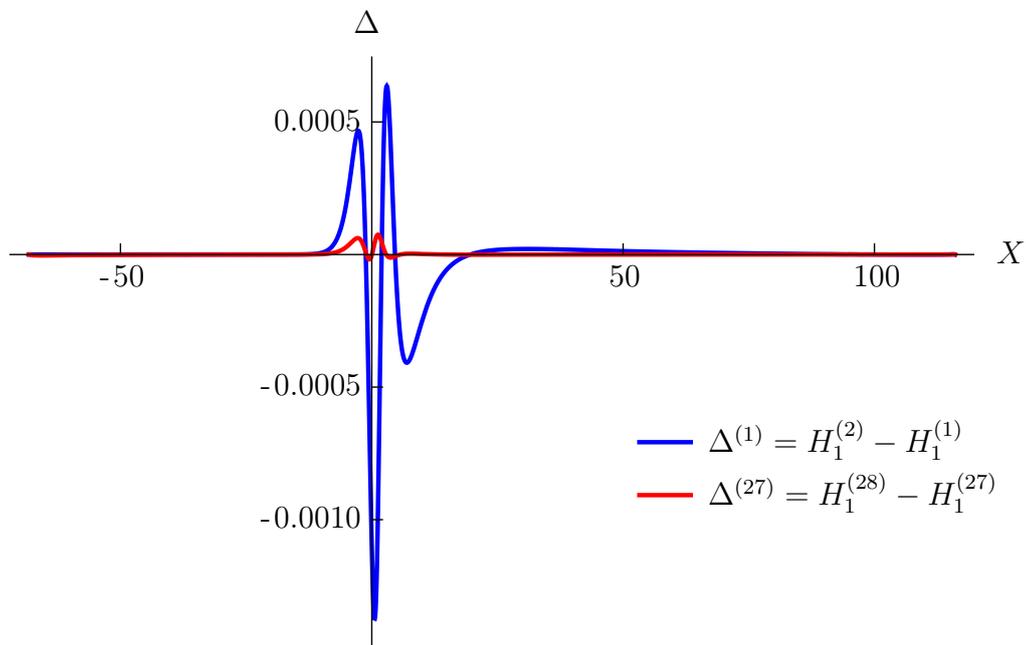


Abbildung 8.5: Dimensionslose Oberflächenkorrekturen für gleichen Satz von Parametern aus Abb. 8.3

Die dimensionslosen Oberflächenkorrekturen  $\Delta$  sind in Abb. 8.5 zu sehen. Nach 28 Iterationen und einer CPU-Rechenzeit von etwa 21 h konnte eine konvergente Lösung nach Erreichen von  $\text{Max}\{|P_S^{(i)}|\} = 3,3 \cdot 10^{-4} < 10^{-3}$  und  $\text{Max}\{|\Delta^{(i)}|\} = 7,5 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$  gefunden werden.

### 8.1.2 Lösung zweiter Art

Die Lösung zweiter Art lässt sich nur mit den Parametern aus Fall b untersuchen, da das Gleichungssystem (5.1) bereits für  $P_{S2} \equiv 0$  keine numerische Lösung zweiter Art liefert. Offensichtlich scheint es zwischen  $\beta_I^{(b)} \Gamma_{L,I}^{(b)} = 0,286$  und  $\beta_I^{(a)} \Gamma_{L,I}^{(a)} = 0,307$  eine Grenze zu geben, oberhalb welcher keine numerische Lösung existiert. Durch schrittweises Verkleinern des Rauigkeitsparameters konnte bei festgehaltenem  $\beta_I^{(a)}$  eine Grenze  $\Gamma_{L,I}^{(a)} = 3,83$  gefunden werden.

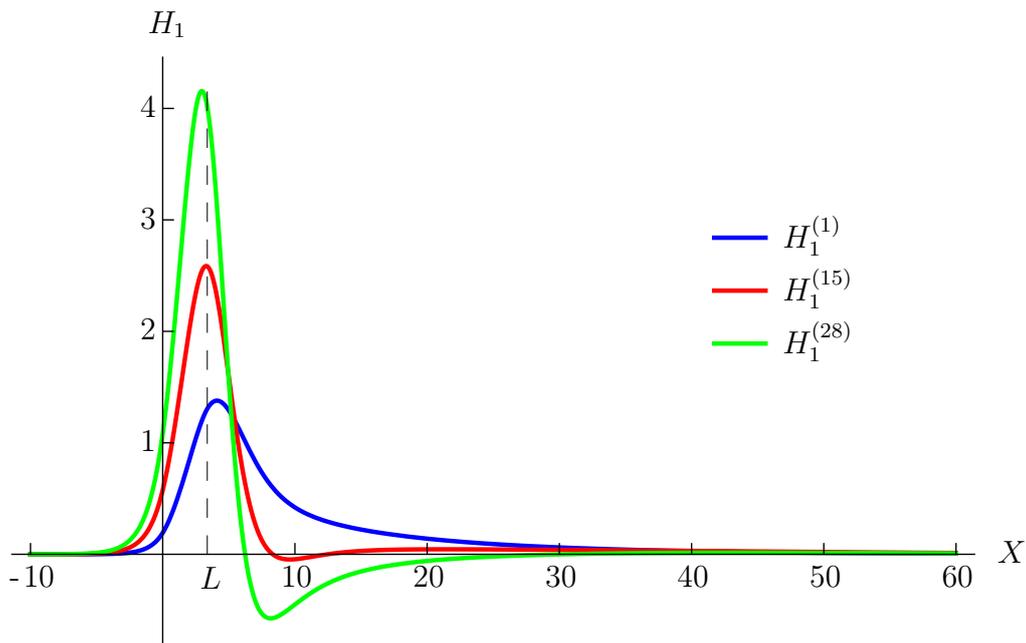


Abbildung 8.6: Dimensionslose Oberflächenerhöhungen  $H_1^{(i)}$  ausgehend von der Lösung zweiter Art nach Anwendung der Iterationsroutine aus Abb. 5.1 für die Werte aus Tab. 8.1 (Problem I - Fall b) sowie:  $r = 0,05$ ;  $L = 3,34$ ;  $\text{Fr} = 1,065$

Der Versuch eine konvergente Lösung zweiter Art zu finden, ist in Abb. 8.6 dargestellt. Sogar für den kleinsten getesteten Relaxationsfaktor  $r = 0,05$  wächst die Einzelwelle  $H_1^{(1)}$  zweiter Art bereits nach wenigen Iterationsschritten rasant an und nähert sich auf diese Weise der Gestalt der Solitärwelle.

Der Grund, warum das Auffinden einer konvergenten Lösung erster Art hier verhindert wird, liegt womöglich in der Position der Wellenberge  $X_{\max}^{(i)}$ , welche sich weiter stromabwärts befinden als jene in Abb. 8.3. Wie bereits in Abschnitt 4.1 erwähnt, ist seit [15] bekannt, dass eine stabile Solitärwelle ihr Maximum in der Nähe von  $X_m^{(0)-}$  erreicht. Diese Bedingung ist hier nicht erfüllt, da sich mit  $X_{\max}^{(28)} = 2.971$  der Wellenberg von  $H_1^{(28)}$  nahe bei  $X_m^{(0)+} = 2.897$  befindet.

In Abb. 8.7 sind wachsende Werte von  $\text{Max}\{|P_S^{(i)}|\}$  ab  $i \approx 5$  zu erkennen, wobei die Intensität des Wachstums mit fortschreitendem Iterationsschritt zunimmt. Die Oberflächenkorrekturen  $\Delta^{(i)}$  reagieren mit Verzögerung auf die immer stärker wachsenden Druckstörungen, was sich auf den kleinen Relaxationsfaktor  $r = 0,05$  zurückführen lässt. Nach der 28. Iteration liefert MATHEMATICA wie bereits im Fall a der Welle erster Art keine Lösung der Differentialgleichung, weshalb die Iteration abgebrochen wurde.

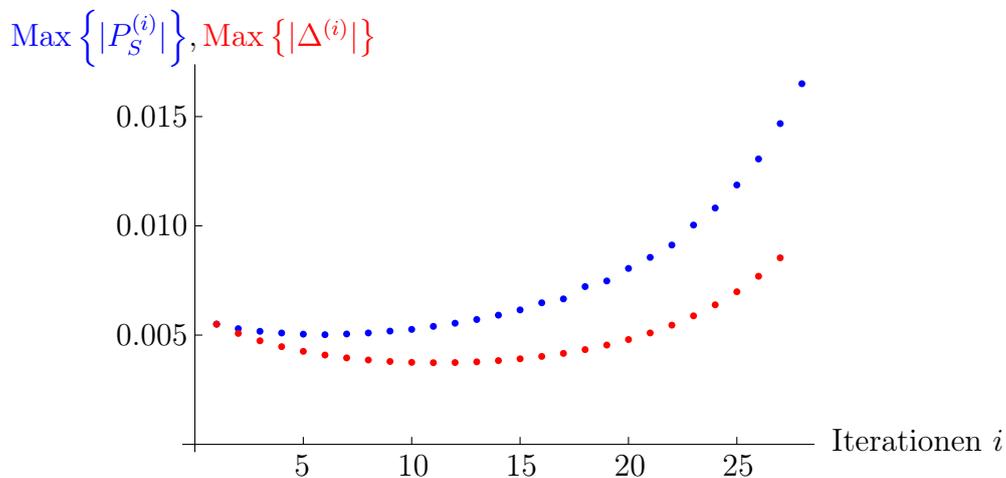


Abbildung 8.7: Extremwerte der Beträge von  $P_S^{(i)}$  und  $\Delta^{(i)}$  für die Berechnung der Welle zweiter Art (Problem I - Fall b)

## 8.2 Rechnung mit Neigungswinkel entsprechend Experiment

Der vom Standpunkt der analytischen Lösung [7] große Wert von  $\beta_{II}\Gamma_{L,II} = 0,516$  verhindert für die Rechnung mit Neigungswinkel entsprechend Experiment die numerische Existenz einer Lösung zweiter Art. Da also für die vorliegenden Parametern das Gleichungssystem (5.1) bereits für  $P_{S2} \equiv 0$  keine Einzelwelle zweiter Art liefert, wird hier lediglich die Solitärwelle näher untersucht.

Abbildung 8.8 zeigt den Versuch eine konvergente Lösung erster Art zu finden. Nach 250 Iterationen wurde das Verfahren aufgrund fehlender Aussichten auf Erfolg nach einer CPU-Rechenzeit von mehr als einer Woche abgebrochen. Die Auswahl der dargestellten Zwischenergebnisse der Oberflächenerhöhungen  $H_1^{(i)}$  kann mit mithilfe der Abbildungen 8.9 und 8.10 verständlich gemacht werden. Während die Wellenberge der Oberflächenerhöhungen  $H_1^{(145)}$  und  $H_1^{(240)}$  laut Abb. 8.10 näherungsweise ein Minimum erreicht haben, geht aus Abb. 8.9 hervor, dass die maximale Druckstörung  $\text{Max}\{|P_S^{(240)}|\}$  im Vergleich zu  $\text{Max}\{|P_S^{(145)}|\}$  wesentlich höher ist. Diese Tatsache spiegelt sich auch in Abb. 8.8 wider, zumal  $H_1^{(240)}$  zwei Wellenberge besitzt. Die Sprünge von  $X_{\text{max}}^{(i)}$  in den Iterationen  $i = 154$  sowie  $i = 239$  entstehen durch die Bildung zweier solcher Wellenberge annähernd gleichgroßer Amplitude, wobei jener weiter stromaufwärts wächst und der andere in weiterer Folge wieder verschwindet.

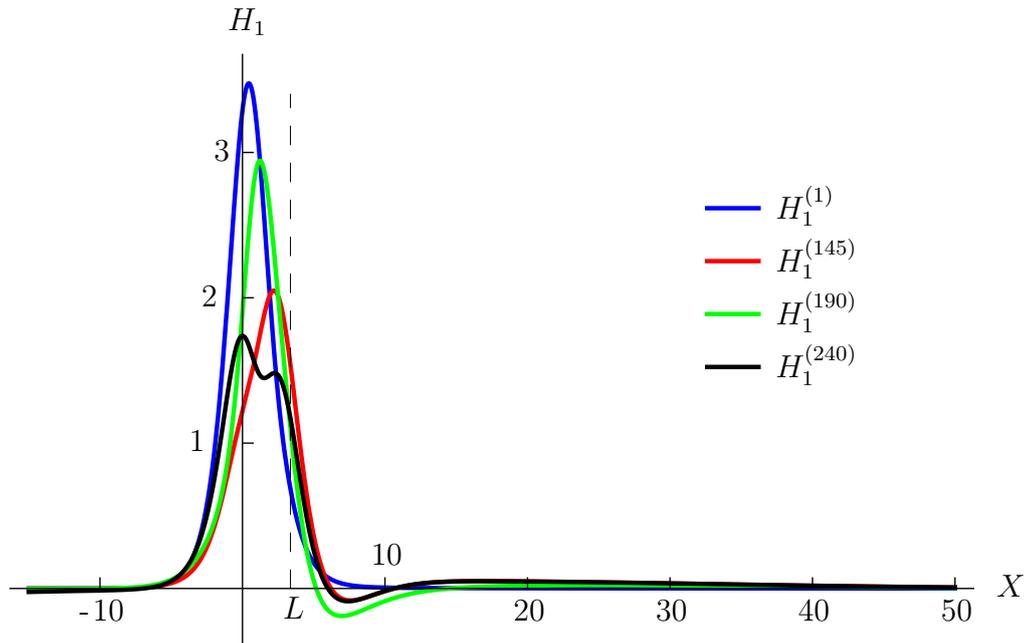


Abbildung 8.8: Dimensionslose Oberflächenerhöhungen  $H_1^{(i)}$  ausgehend von der Lösung erster Art nach Anwendung der Iterationsroutine aus Abb. 5.1 für die Werte aus Tab. 8.1 (Problem II) sowie:  $r = 0,05$ ;  $L = 3,34$ ;  $Fr = 1,065$

Die Oberflächenerhöhung  $H_1^{(190)}$  liegt mit einer Amplitude von  $\text{Max}\{H_1^{(190)}\} \approx 3$  über dem arithmetischen Mittel aller Wellenberge  $\text{Max}\{H_1^{(i)}\} = 2,67$  bei vergleichsweise moderater Druckstörung  $P_S^{(190)}$ .

Eine Erklärung für die fehlende Konvergenz kann in Abb. 8.10 gefunden werden. Solange sich die Position der Wellenberge  $X_{\text{max}}^{(i)}$  ständig ändert, können auch die Amplituden  $\text{Max}\{H_1^{(i)}\}$  nicht konstant bleiben, was ein zyklisches Auf- und Absteigen von  $\text{Max}\{|P_S^{(i)}|\}$  zur Folge hat.

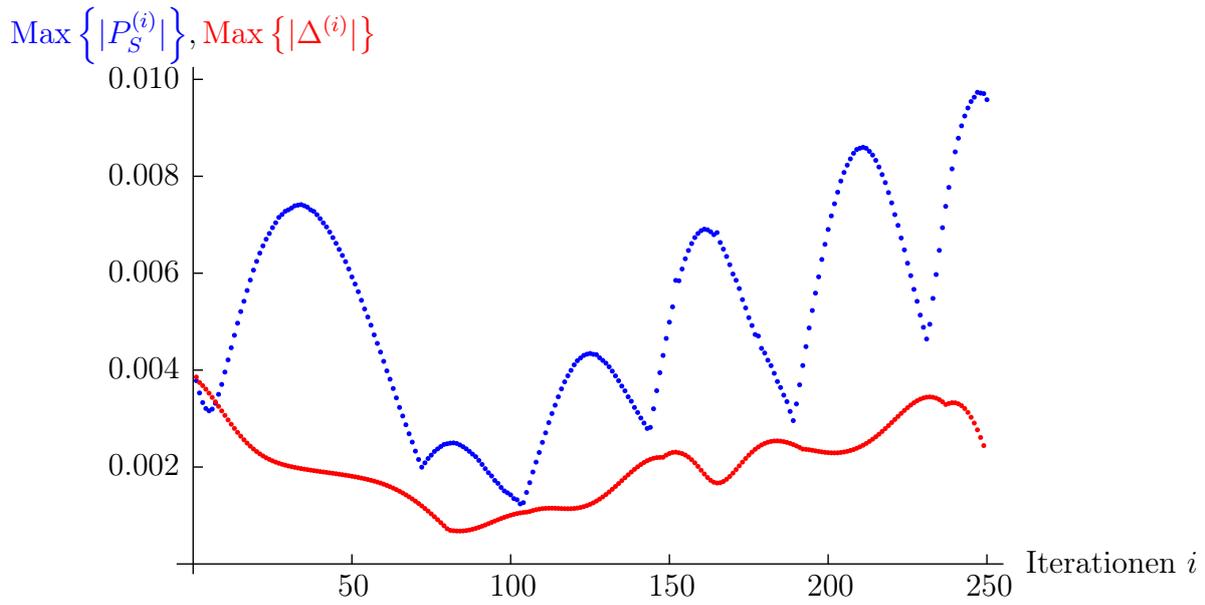


Abbildung 8.9: Extremwerte der Beträge von  $P_S^{(i)}$  und  $\Delta^{(i)}$  für die Berechnung der Welle erster Art (Problem II)

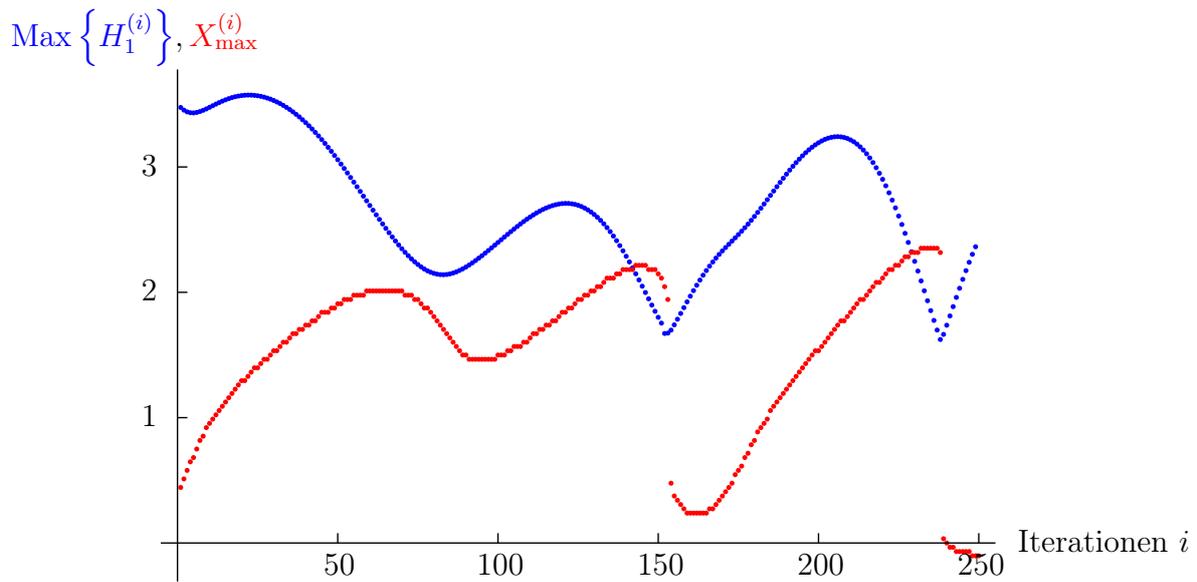


Abbildung 8.10: X- sowie Y-Koordinate der Wellenberge von  $H_1^{(i)}$  für die Berechnung der Welle erster Art (Problem II)

Um zu verdeutlichen welche Auswirkungen eine Änderung von  $X_{\max}^{(i)}$  hat, wird in Abb. 8.11 das Verfahren der Oberflächenkorrektur während eines Iterationsschrittes gezeigt. Ein

kleiner Relaxationsfaktor  $r \ll 1$  bewirkt, dass auch die Druckstörung  $\hat{P}_{S2} = rP_{S2} \ll 1$  ist. In einem allgemeinen Iterationsschritt  $i$  unterscheidet sich daher die Lösung  $\tilde{H}_1^{(i)}$  des Gleichungssystems (5.1) kaum von der Höhe  $H_1^{(1)}$ , welche für  $P_{S2} \equiv 0$  ermittelt wird (blaue und rote Linie). Ändert sich allerdings die Position des Wellenberges  $X_{\max}^{(i)}$ , wird dadurch eine unverhältnismäßig große Oberflächenkorrektur  $\Delta^{(i)}$  erzeugt, wodurch sich die Amplitude der Oberflächenerhöhung  $H_1^{(i)}$  im neuen Iterationsschritt signifikant verändert, siehe  $H_1^{(i+1)}$ .

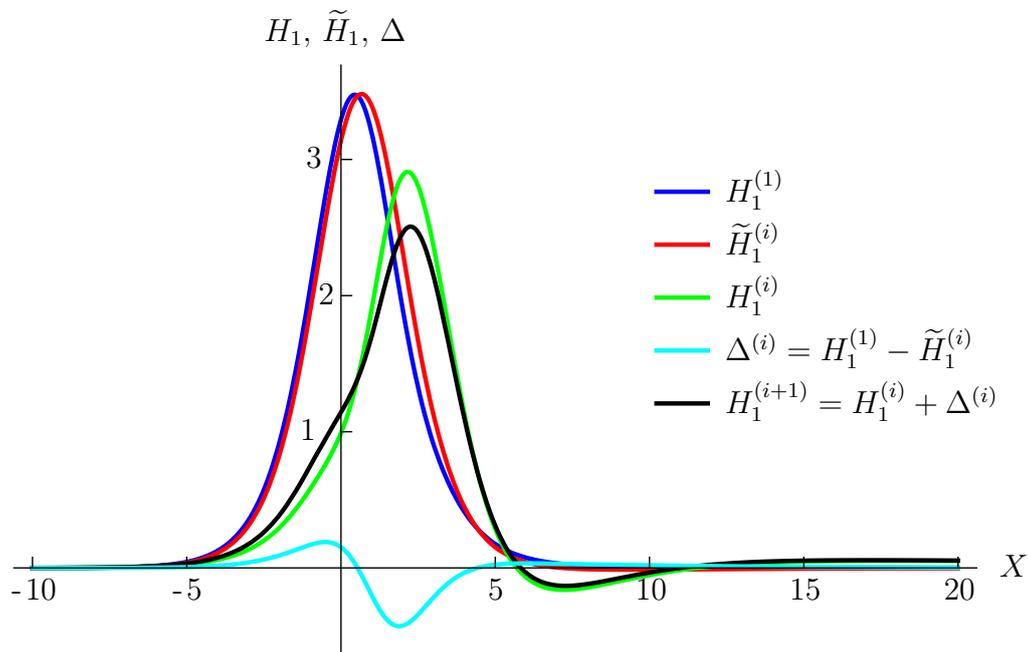


Abbildung 8.11: Prozess der Oberflächenkorrektur in einem allgemeinen Iterationsschritt  $i$  für gleichen Satz von Parametern aus Abb. 8.8

Fixiert man die Position  $X_{\max}$  des Wellenberges von  $H_1^{(1)}$  durch eine adaptierte Iterationsroutine, lässt sich womöglich eine konvergente Lösung finden. Durch diese Fixierung wird der Welle allerdings ein Freiheitsgrad genommen, weshalb die dabei generierte Lösung verfälscht wird.

# Kapitel 9

## Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

Im vorliegenden Fall einer turbulenten offenen Kanalströmung mit freier Oberfläche wurden die numerischen Ergebnisse mit den bereits vorhandenen analytischen Vorhersagen [12], [6] sowie mit den experimentellen Messdaten aus [15] verglichen.

Für die Berechnung der freien Oberfläche wurde das Iterationsverfahren aus Abb. 5.1 verwendet, welches bereits für ein verwandtes Problem erfolgreich zum Ziel führte [13]. Dabei wurde dieser Iterationsprozess voll automatisiert, was aufgrund der langen CPU-Rechenzeiten unumgänglich war. Um eine Kommunikation zwischen den verwendeten Programmen MATHEMATICA, FLUENT und GAMBIT zu ermöglichen, wurde ein Code programmiert, der auf einer textgesteuerten Benutzung (TUI) der kommerziellen Programme basiert.

Die numerische Simulation des Experimentes ergibt in FLUENT einen nicht verschwindenden Druckgradienten in Strömungsrichtung. Einer der Gründe dafür könnte das Auftreten von Sekundärströmungen [9] im Experiment sein, was durch die Simulation der zwei-dimensionalen Strömung nicht erfasst werden kann. Auch die zusätzlichen Verluste an den Seitenwänden des Kanals werden bei der Simulation nicht berücksichtigt. Aus diesem Grund mussten für die numerischen Berechnungen gewisse Änderungen vorgenommen werden, sodass dieses Problem behoben werden kann. Da die Oberflächenrauigkeiten des Kanalbodens im Experiment lediglich geschätzt wurden, war es naheliegend diese Parameter mithilfe des iterativen Verfahrens aus Abb. 7.1 so anzu-

passen, dass der Druckgradient in Strömungsrichtung verschwindet. Dabei stellte sich heraus, dass die geänderte Referenzbodenrauigkeit mehr als 13 mal so groß war, wie die geschätzte, i.e.  $k_{r,II} > 13k_{r,I}$  (siehe Tab. 8.1). Nicht zuletzt wegen der neuen erhöhten Bodenrauigkeit  $k_{e,II} \approx 2\text{ mm}$  war es wenig überraschend, dass in Abschnitt 8.2 keine Konvergenz erzielt werden konnte.

Eine andere Möglichkeit war es den Neigungswinkel des Kanalbodens anstelle der Oberflächenrauigkeiten anzupassen (siehe Abschnitt 8.1), um eine Vergleichbarkeit zwischen Experiment und numerischen bzw. analytischen Ergebnissen bei gleichbleibender Froude-Zahl herzustellen. Obwohl sich die beiden unter diesen Umständen betrachteten Fälle a und b nur um die Temperatur des Wassers unterscheiden, liefert ausschließlich Fall b eine konvergente Lösung. Die in Fall b höher angenommene Temperatur hat eine niedrigere kinematische Viskosität  $\nu^{(b)} < \nu^{(a)}$  zur Folge, wodurch sich wiederum mit Gl. (3.6) eine höhere Schubspannungsreynolds-Zahl bildet, i.e.  $\text{Re}_{\tau,I}^{(b)} \approx 3900 > \text{Re}_{\tau,I}^{(a)} \approx 2800$ . Die erweiterte KdV-Gleichung (4.6), welche die Grundlage für das Iterationsverfahren darstellt, wurde in [12] allerdings für die beiden Grenzübergänge  $\text{Fr} \rightarrow 1$  sowie  $\text{Re}_\tau \rightarrow \infty$  entwickelt. Im Fall a scheint die Schubspannungsreynolds-Zahl  $\text{Re}_\tau^{(a)}$  nicht ausreichend groß zu sein, was ein Grund für die fehlende Konvergenz sein kann.

Zum Zeitpunkt des Experiments war die Lösung zweiter Art noch nicht bekannt, weshalb dafür keine Messdaten vorliegen. Der Versuch, eine Lösung zweiter Art bei den gegebenen Parametern aus Tab. 8.1 (Problem I - Fall b) zu finden, ist trotz der vergleichsweise höheren Reynolds-Zahl  $\text{Re}^{(b)}$  gescheitert. Möglicherweise sind hier die Chancen auf Erfolg höher, wenn kleinere Werte für  $\beta\Gamma_L$  gewählt werden, da man sich mit  $\beta_I^{(b)}\Gamma_{L,I}^{(b)} = 0,286$  nahe der oberen Grenze für die Existenz einer numerischen Lösung befindet.

Aus diesen Gründen bleibt für eine Analyse lediglich der Vergleich aus Abb. 8.3 übrig, wobei diese mit Bedacht durchzuführen ist, da der Neigungswinkel  $\alpha$  und somit auch  $\beta$  und  $\Gamma_L$  im Experiment deutlich größer waren, als jene in den Berechnungen (siehe Tab. 8.1). Im Vergleich zur konvergenten Lösung  $H_1^{(28)}$  scheint die numerische Lösung der erweiterten KdV-Gleichung *ohne* Druckstörungsterm, welche aus der asymptotischen Entwicklung stammt, die experimentellen Werte besser anzunähern.

Um den Einfluss einzelner Parameter besser abschätzen zu können, müsste eine Parametervariation durchgeführt werden. Von besonders großem Interesse dabei wäre, wie stark sich die Wasserhöhe bei verschiedenen Werten von  $\Gamma_L$  verhält. Laut asymptotischer Analyse sollte nämlich das Wellental von  $H_1^{(28)}$  bei größer werdenden Rauigkeit-

sparametern abnehmen.

Strenggenommen sollten für die Ermittlung der von außen aufgeprägten Druckstörungen  $p_S^{(i)}$  laut (4.19) die Reynoldsschen Normalspannungen

$$\overline{U'^2} = -2\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{2}{3}k_t \quad (9.1a)$$

$$\overline{V'^2} = -2\nu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{2}{3}k_t \quad (9.1b)$$

ebenfalls berücksichtigt werden. Dabei bezeichnet  $\nu_t$  die sogenannte turbulente Scheinviskosität, wessen Definition vom verwendeten Turbulenzmodell abhängt, während die turbulente kinetische Energie die allgemein gültige Definition

$$k_t = \frac{1}{2} \left( \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) \quad (9.2)$$

besitzt [9, S. 10]. Weil aber die Reynoldsschen Normalspannungen im vorliegenden Fall eine untergeordnete Rolle spielen, wird in jedem Iterationsschritt  $i$  der Druck, der von außen auf die Oberfläche wirkt, jenem auf der Seite der turbulenten Strömung gleichgesetzt. Möglicherweise können die Abbruchfehler im Fall b aus Abschnitt 8.1.1 unter Berücksichtigung von (9.1) weiter verringert werden, wodurch sich die Oberflächenform  $H_1^{(28)}$  aus Abb. 8.3 nur geringfügig ändern würde. Das Konvergenzverhalten der anderen Berechnungsfälle kann dadurch nicht beeinflusst werden, weil die in FLUENT berechneten Normalspannungen (9.1) von der Größenordnung  $\mathcal{O}(10^{-4})$  sind und damit keinen bedeutenden Einfluss auf den Oberflächendruck  $p = \mathcal{O}(10)$  haben.

Um die Größenordnung des Einflusses des gewählten Turbulenzmodells einschätzen zu können, wäre der Vergleich mit einem weiteren Turbulenzmodell von Vorteil. Dazu würde sich z.B. das Reynolds-Spannungs Modell als Modell zweiter Ordnung anbieten, worauf im Rahmen dieser Arbeit aufgrund der größeren CPU-Rechenzeiten verzichtet wurde.

# Symbolverzeichnis

## Lateinische Buchstaben

$A$	Kopplungsparameter, Gl. (4.2) [-]
$A_q$	Querschnittsfläche des Kanals weit stromauf [m <sup>2</sup> ]
$b$	Breite des Kanalbodens [m]
$C$	Koeffizient der Exponentialfunktion aus Gl. (6.1) [-]
$C^+, \bar{C}$	universelle Größen der turbulenten Wandschicht, Gl. (3.9) [-]
$c_f$	Reibungskoeffizient [-]
$d_h$	hydraulischer Durchmesser, Gl. (7.7) [m]
$Fr$	Froude-Zahl, Gl. (3.21) [-]
$G_1$	Hilfsfunktion, Gl. (5.1b) [-]
$g$	Gravitationsbeschleunigung [m/s <sup>2</sup> ]
$H$	dimensionslose Oberflächenerhöhung, Gl. (3.18a) [-]
$\tilde{H}_1$	Lösung der Glgn. (5.1), (5.2) für $P_{S2} \neq 0$ [-]
$h$	Oberflächenerhöhung über dem Kanalboden [m]
$h_z$	Zellhöhe der wandnahen Zellen [m]
$i$	Nummer des Iterationsschrittes der Iterationsschleife aus Abb. 5.1 [-]
$j$	Nummer des Iterationsschrittes der Iterationsschleife aus Abb. 7.1 [-]
$k$	Bodenrauigkeit [m]
$k_e$	erhöhte Bodenrauigkeit [m]
$\hat{k}$	Wachstums- bzw. Abklingparameter [-]
$\hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_3$	Lösungen der Gl. (6.2) [-]

$k_t$	turbulente kinetische Energie, Gl. (9.2) [ $\text{m}^2/\text{s}^2$ ]
$L$	dimensionslose Länge des Bereichs mit erhöhter Bodenrauigkeit [-]
$L_D$	dimensionslose Gesamtlänge des Rechengebietes [-]
$\ell$	Länge des Bereichs mit erhöhter Bodenrauigkeit [m]
$l$	Länge des Kanalbodens [m]
$\vec{n}$	Normalvektor zwischen Oberflächenerhöhung und $y$ -Achse, Gl.(3.14) [-]
$n_G$	Anzahl der gelöschten Knotenpunkte [-]
$n_x, n_y$	Anzahl der Knoten in $X$ - bzw. $Y$ -Richtung [-]
$P$	dimensionsloser Druck [-]
$\hat{P}$	dimensionsloser unterrelaxierter Druck, Gl. (5.5) [-]
$p$	Druck [Pa]
$p_h$	hydrostatischer Druck, Gl. (7.1) [Pa]
$\tilde{p}$	um $p_h$ verringerter Druck, Gl. (7.1) [Pa]
$r$	Relaxationsfaktor [-]
$\text{Re}_\tau$	Schubspannungsreynolds-Zahl, Gl. (3.6) [-]
$s$	Umfang des benetzten Querschnittes [m]
$U_\tau$	dimensionslose Wandschubspannungsgeschwindigkeit, Gl. (3.18b) [-]
$\Delta U$	dimensionsloser Geschwindigkeitsdefekt [-]
$u_\tau$	Wandschubspannungsgeschwindigkeit, Gl. (3.4) [m/s]
$U, V$	dimensionslose Geschwindigkeitskomponenten in $X$ - und $Y$ -Richtung, Glgn. (3.18a), (3.17) [-]
$u, v$	Geschwindigkeitskomponenten in $x$ - und $y$ -Richtung [m/s]
$\dot{V}$	Volumenstrom pro Tiefeneinheit des Kanals [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]
$X, Y$	dimensionslose $X$ - und $Y$ -Koordinate, Glgn. (3.16), (3.18a) [-]
$X_m$	analytische Position des Wellenberges der Solitärwelle, Gl. (4.12) [-]
$X_{\max}$	numerische Position des Wellenberges [-]
$X_{-\infty}, X_{+\infty}$	dimensionslose Grenzen des Rechengebietes, Gl. (6.15) [-]

$\tilde{X}$	Integrationsvariable, Gl. (6.7) [-]
$\Delta X$	dimensionslose Schrittweite [-]
$x, y$	Längs- und Querkoordinaten entsprechend Abb. 2.1 [m]
$x_{-\infty}, x_{+\infty}$	Grenzen des Rechengebietes [m]
$Y_P^+$	dimensionslose Wandkoordinate, Gl. (7.2) [-]
$y_P^+$	Normalabstand zwischen Wand und Mittelpunkt der wandnahen Zellen [m]

### Griechische Buchstaben

$\alpha$	Neigungswinkel des Kanals [-]
$\alpha_{\mathcal{F}}$	fiktiver Neigungswinkel des Bodens, Gl. (7.11) [-]
$\beta$	Dämpfungsparameter, Gl. (4.8) [-]
$\Gamma$	funktionale Abhängigkeit der dimensionslosen Rauigkeitserhöhung von $X$ , Gl. (4.9) [-]
$\hat{\Gamma}$	modifizierte Version von $\Gamma$ , Gl. (6.16) [-]
$\Gamma_L$	dimensionsloser Rauigkeitsparameter, Gl. (4.10) [-]
$\Delta$	Oberflächenkorrektur, Gl. (5.7) [-]
$\delta$	Streckungsparameter, Gl. (3.15) [-]
$\varepsilon$	Störparameter, Gl. (4.1) [-]
$\vartheta$	Umgebungstemperatur [°C]
$\kappa$	von Kármán Konstante [-]
$\lambda$	Eigenwert, Gl. (4.13) [-]
$\lambda_R$	Rohrreibungszahl, Gl. 7.6 [-]
$\nu$	kinematische Viskosität [m <sup>2</sup> /s]
$\nu_t$	turbulente kinematische Viskosität [m <sup>2</sup> /s]
$\xi_P, \xi_{\Delta}$	Schranken für das Abbruchkriterium, Glgn. (8.2), (8.3) [-]
$\rho$	Dichte des Fluids [kg/m <sup>3</sup> ]
$\tau_w$	Wandschubspannung [Pa]

$\varphi$  Winkel zwischen  $\vec{n}$  und  $y$ -Achse [-]

### Indizes

max maximal

min minimal

r Referenzzustand

S Oberfläche (surface)

1, 2, ... Ordnung in asymptotischer Entwicklung

I, II Nummer der Problemstellung

### Hochgestellte Symbole

T transponiert

(1), (2), ..., (i), (i + 1) Nummer des Iterationsschrittes der Iterationsschleife aus Abb. 5.1

[1], [2], ..., [j], [j + 1] Nummer des Iterationsschrittes der Iterationsschleife aus Abb. 7.1

(a), (b) Fallunterscheidung für unterschiedliche  $\vartheta$

$\pm$ ,  $-$ ,  $+$  zwei Lösungen, erste Lösung, zweite Lösung

$\bar{\phantom{x}}$  ensemble-gemittelte Größe

$\prime$  turbulente Fluktuation

### Abkürzungen

CFD Computational Fluid Dynamics

CPU Central Processing Unit

KdV Korteweg-de Vries

ODE Ordinary Differential Equation

TUI Text User Interface

# Literaturverzeichnis

- [1] ANSYS FLUENT 16.2 User's Guide. : ANSYS FLUENT 16.2 User's Guide, 2015
- [2] DASGUPTA, R. ; TOMAR, G. ; GOVINDARAJAN, R.: Numerical study of laminar, standing hydraulic jumps in a planar geometry. *Eur. Phys. J. E* 38: 45 (2015), <https://doi.org/10.1140/epje/i2015-15045-0>
- [3] GRILLHOFER, W.: *Der wellige Wassersprung in einer turbulenten Kanalströmung mit freier Oberfläche*, TU Wien, Diss., 2002
- [4] GRILLHOFER, W. ; SCHNEIDER, W.: The undular hydraulic jump in turbulent open channel flow at large Reynolds numbers. *Phys. Fluids* 15 (2003), 730–735
- [5] JURISITS, R.: *Wellige Wassersprünge bei nicht voll ausgebildeter turbulenter Zuströmung*, TU Wien, Diss., 2012
- [6] MÜLLNER, M.: Solutions of an extended KdV equation describing single stationary waves with strong or weak downstream decay in turbulent open-channel flow. *Z. Angew. Math. Mech.* 98 (2017), 7–30
- [7] MÜLLNER, M.: Stationary single waves in turbulent open-channel flow. *Proc. Appl. Math. Mech.* 17 (2018), 683–684
- [8] MÜLLNER, M. ; SCHNEIDER, W.: Asymptotic solutions of an extended Korteweg-de Vries equation describing Solitary waves with weak or strong downstream decay in turbulent open-channel flow. *Proc. Appl. Math. Mech.* 15 (2015), 491–492

- [9] RODI, Wolfgang (Hrsg.): *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics*. 3. Aufl. IAHR-AIRH, 2000
- [10] ROSTAMI, F. ; YAZDI, S.R.S. ; SAID, M.A.M. ; SHAHROKHI, M.: Numerical simulation of undular jumps on graveled bed using volume of fluid method. *Water Science & Technology* 66 (2012), 909–917
- [11] SCHLICHTING, H. ; GERSTEN, K.: *Grenzschicht-Theorie*. 10. Aufl. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006
- [12] SCHNEIDER, W.: Solitary waves in turbulent open-channel flow. *J. Fluid Mech.* 726 (2013), 137–159
- [13] SCHNEIDER, W. ; JURISITS, R. ; BAE, Y. S.: An asymptotic iteration method for the numerical analysis of near-critical free-surface flows. *Int. J. Heat and Fluid Flow* 31 (2010), 1119–1124
- [14] SCHNEIDER, W. ; MÜLLNER, M. ; YASUDA, Y.: Near-critical turbulent open-channel flows over bumps and ramps. *Acta Mechanica* (2018), <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2230-3>
- [15] SCHNEIDER, W. ; YASUDA, Y.: Stationary solitary waves in turbulent open-channel flow: Analysis and experimental verification. *J. Hydr. Eng.* 142, 04015,035 (2015)
- [16] SCHNEIDER, Wilhelm: *Mathematische Methoden der Strömungsmechanik*. Vieweg, Braunschweig, 1978
- [17] SPURK, J. H. ; AKSEL, N.: *Strömungslehre*. 8. Aufl. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010
- [18] VDI-GESELLSCHAFT VERFAHRENSTECHNIK UND CHEMIEINGENIEURWESEN (GVC) (Hrsg.): *VDI Wärmeatlas*. 11. Aufl. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013