



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

DIPLOMARBEIT

Performance-Abschätzung für Kleinanleger anhand der Verordnung (EU) Nr. 1286/2014

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Diplom-Ingenieur

im Rahmen des Studiums Finanz- und Versicherungsmathematik
an der Technischen Universität Wien

Ausgeführt am Institut für
Stochastik und Wirtschaftsmathematik

unter der Anleitung von
Univ.-Prof. Dipl-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer

durch

Christian Gutmann, BSc

Rottstraße 3
1140 Wien

Datum

Unterschrift

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Datum

Unterschrift

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mich während meines Studiums begleitet und unterstützt haben.

Zuerst möchte ich mich bei Prof. Dr. Thorsten Rheinländer für die gute Betreuung und die fachliche Hilfestellung bedanken.

Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Prokurist Paul Huss, zum einen für den Themenvorschlag dieser Diplomarbeit und zum anderen für das Vertrauen, sich trotz eines sehr zeitintensiven Berufs als Betreuer anzubieten.

Bedanken möchte ich mich auch bei allen Studienkollegen, die mir während des Studiums geholfen haben.

Der größte Dank gebührt meinen Eltern, ohne sie wäre dies nicht möglich gewesen. Sie haben mir das Studium nicht nur finanziell ermöglicht, sondern haben mich auch moralisch jederzeit dabei unterstützt. Ich möchte auch meinen Großeltern und meiner Schwester Lisa danken, die mir in meinem Leben immer geholfen haben.

Abschließend möchte ich meiner Freundin Katharina danken, die mich während der Schlussphase des Studiums sehr motiviert hat und mir viel Freude bereitet.

Abstract

With Regulation No 1286/2014, the European Union aims to help retail investors buy packaged retail and insurance-based investment products (PRIIP) and calls for risk classification and future performance estimation in standardized information sheets.

In this thesis, the mathematical methods provided by the Regulation are analyzed and the industry standard of the AVÖ for the traditional life insurance with profit participation is presented. Some disagreements in the Regulation are shown.

Furthermore, simulations are used to investigate how the methods used to behave in the past. It shows that the performance scenarios using a price history of five years, as permitted by the Regulation, have little significance if a holding period of one year or more is considered. In addition, there may be strong fluctuations in the scenarios.

Zusammenfassung

Mit der Verordnung Nr. 1286/2014 verfolgt die Europäische Union das Ziel, Kleinanlegern beim Kauf von verpackten Anlageprodukten und Versicherungsanlageprodukten, kurz „PRIIP“, zu unterstützen, und fordert in standardisierten Informationsblättern eine Risikoklassifizierung sowie eine zukünftige Performance-Abschätzung.

In dieser Arbeit werden die mathematischen Methoden, die von der Verordnung dafür bereitgestellt werden, analysiert und der Branchenstandard der AVÖ für die klassische Lebensversicherung mit Gewinnbeteiligung vorgestellt. Dabei werden einige Unstimmigkeiten in der Verordnung aufgezeigt.

Weiter wird mittels Simulationen untersucht, wie sich die Methoden in der Vergangenheit verhalten hätten. Dabei zeigt sich, dass die Performance-Szenarien unter Verwendung einer Kurshistorie von fünf Jahren, wie es die Verordnung zulässt, wenig Aussagekraft besitzen, wenn eine Haltedauer von einem Jahr oder mehr betrachtet wird. Außerdem kann es zu starken Schwankungen bei den Szenarien kommen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die Methoden der Verordnung	3
2.1	Grundlagen	5
2.2	VaR-äquivalente Volatilität	9
2.3	PRIIP Kategorie 2: Cornish-Fisher-Erweiterung	10
2.3.1	Cornish-Fisher-Erweiterung für mehrere Zeitschritte	13
2.3.2	Schätzung der Momente	15
2.4	PRIIP Kategorie 3: Bootstrapping	18
2.4.1	Allgemeine Vorgehensweise	18
2.4.2	Bootstrapping zur Näherung der Faltung	19
2.5	Stressvolatilität	21
3	PRIIP Kategorie 4: AVÖ-Branchenstandard mit Kapitalmarktmodell	23
3.1	Svensson-Parametrisierung der initialen Zinsstrukturkurve	23
3.2	Affine Short-rate Modelle und Vasicek-Modell	25
3.3	Das Zwei-Faktor-Vasicek-Modell	27
3.4	Simulation der Deckungsstockrendite	29
3.5	Parameterwahl	31
4	Backtest-Verfahren	33
4.1	Berechnung der Quantile	35
4.1.1	Quantilsberechnung mittels Cornish-Fisher-Erweiterung	36
4.1.2	Quantilsberechnung mittels Bootstrapping	36
4.1.3	Quantilsberechnung im Branchenstandard mittels Monte-Carlo-Simulation	36
4.2	Statistische Tests	39
4.3	Backtest-Verfahren	42
5	Auswertungen und Ergebnisse	45
5.1	Kurze Haltedauer	46
5.1.1	DAX seit 1972	46
5.1.2	Dow Jones seit 1896	49
5.2	Lange Haltedauer	54
5.2.1	DAX seit 1972	54
5.2.2	Dow Jones seit 1896	58
6	Schlussbetrachtung	71
	Literatur	73

Abbildungsverzeichnis

2.1	Renditeminderung in den Cornish-Fisher-Performance-Szenarien	17
5.1	Performance-Szenarien DAX, Haltedauer 1 Jahr und 1 Monat	48
5.2	Performance-Szenarien DAX, Haltedauer 1 Jahr, Berechnungen aus den letzten 5 Jahren	51
5.3	Performance-Szenarien DAX, Haltedauer 1 Jahr, Berechnungen aus den letzten 20 Jahren	52
5.4	Performance-Szenarien Dow Jones, Haltedauer 1 Monat	53
5.5	Performance-Szenarien DAX, Haltedauer 15 Jahre, Berechnungen aus den letzten 5 Jahren	56
5.6	Performance-Szenarien DAX, Haltedauer 5 Jahre, Berechnungen aus den letzten 15 Jahren	57
5.7	Performance-Szenarien Dow Jones, Haltedauer 20 Jahre, Berechnungen aus den letzten 5 Jahren	60
5.8	Performance-Szenarien Dow Jones, Haltedauer 20 Jahre, Berechnungen aus den letzten 15 Jahren	61
5.9	Performance-Szenarien Dow Jones, Haltedauer 20 Jahre, Berechnungen aus den letzten 40 Jahren	62

Tabellenverzeichnis

2.1	Gesamtrisikoindikator	3
2.2	Marktrisiko-Klassen	4
2.3	Längenintervall w zur Berechnung der Stressvolatilität je nach Haltedauer	21
3.1	Parameter des stochastischen Kapitalmarktmodells	31
5.1	Historie DAX, Pessimistisches und Mittleres Szenario, Haltedauer 1 Jahr .	63
5.2	Historie DAX, Stress-Szenario, MRM-Klasse, Haltedauer 1 Jahr	64
5.3	Test, DAX, Haltedauer 1 Jahr	65
5.4	Test, DAX, Haltedauer 1 Monat	65
5.5	Test, Dow Jones, Haltedauer 1 Jahr	66
5.6	Test, Dow Jones, Haltedauer 1 Jahr, Berechnungen aus den letzten 20 Jahren	66
5.7	Test, Dow Jones, Haltedauer 1 Monat	67
5.8	Test, DAX, Haltedauer 15 Jahre, Berechnungen aus den letzten 5 Jahren	67
5.9	Test, DAX, Haltedauer 5 Jahre, Berechnungen aus den letzten 15 Jahren	68
5.10	Test, Dow Jones, Haltedauer 20 Jahre, Berechnungen aus den letzten 5 Jahren	68
5.11	Historie Dow Jones, Pessimistisches und Mittleres Szenario, Haltedauer 20 Jahre, Berechnungen aus den letzten 5 Jahren	69
5.12	Test, Dow Jones, Haltedauer 20 Jahre, Berechnungen aus den letzten 15 Jahren	70
5.13	Test, Dow Jones, Haltedauer 20 Jahre, Berechnungen aus den letzten 40 Jahren	70

1 Einleitung

Finanzanlageprodukte stellen für viele Privatanleger sehr komplizierte und manchmal schwer zu verstehende Dinge dar. Im Sinne des Konsumentenschutzes hat die Europäische Union beschlossen, dass es für Kleinanleger standardisierte Informationsblätter zu geben hat, die bei der Entscheidung für den Kauf eines Finanzproduktes helfen sollen.

Mit dem 01.01.2018 gibt es innerhalb der Europäischen Union für jedes verpackte Anlageprodukt und jedes Versicherungsanlageprodukt für Kleinanleger ein solches standardisiertes Informationsblatt. Dazu hat die Europäische Union bereits am 26.11.2014 die Verordnung Nr. 1286/2014 erlassen. Sie ist als die „PRIIP-Verordnung“ bekannt, da es um „packaged retail and insurance-based investment products“, kurz „PRIIP“, geht.

Betroffen davon sind Kleinanlegerprodukte, bei denen „unabhängig von der Rechtsform der Anlage der dem Kleinanleger rückzuzahlende Betrag Schwankungen aufgrund der Abhängigkeit von Referenzwerten oder von der Entwicklung eines oder mehrerer Vermögenswerte, die nicht direkt vom Kleinanleger erworben werden, unterliegt“.

Als Versicherungsanlageprodukt wird ein Versicherungsprodukt bezeichnet, „das einen Fälligkeitswert oder einen Rückkaufwert bietet, der vollständig oder teilweise direkt oder indirekt Marktschwankungen ausgesetzt ist“ (vgl. EU, 2014, Kapitel 1, Artikel 4). Damit fallen sowohl die fondsgebundene wie auch klassische Lebensversicherung mit Gewinnbeteiligung hinein.

Die Europäische Union möchte durch die Verordnung die Transparenz solcher Anlageprodukte für Kleinanleger erhöhen und ihnen helfen, verschiedene Finanzprodukte besser vergleichen zu können. So soll nach der Verordnung verpflichtend auf jedem Basisinformationsblatt stehen:

„Dieses Informationsblatt stellt Ihnen wesentliche Informationen über dieses Anlageprodukt zur Verfügung. Es handelt sich nicht um Werbematerial. Diese Informationen sind gesetzlich vorgeschrieben, um Ihnen dabei zu helfen, die Art, das Risiko, die Kosten sowie die möglichen Gewinne und Verluste dieses Produkts zu verstehen, und Ihnen dabei zu helfen, es mit anderen Produkten zu vergleichen.“ (vgl. EU, 2014, Kapitel 2, Artikel 8)

Auf maximal drei Seiten im A4-Format sollen Kunden also alle wichtigen Informationen über das PRIIP in einer gewohnten Form erfahren können. Dazu gehören nach der Verordnung:

- Kontaktdaten des PRIIP-Herstellers
- Warnhinweis, falls das Produkt „schwer“ zu verstehen ist.
- Art des Produkts
- Ziele des Produkts

1 Einleitung

- Zielgruppe des Produkts
- Einzelheiten zu den Versicherungsleistungen
- Laufzeit
- Risikoindikator und -klassifizierung
- höchstmöglicher Verlust
- Performance-Szenarien zur Einschätzung des Renditeverlaufs
- Informationen über den Fall, dass der PRIIP-Hersteller nicht auszahlen kann
- Direkte und indirekte Kosten für den Kleinanleger sowie die aggregierten Gesamtkosten in absoluten Zahlen und Prozentangaben
- Informationen über empfohlene und gegebenenfalls vorgeschriebene Mindesthaltungsdauer und vorzeitige Desinvestition
- Beschwerdemöglichkeiten

Ein ähnliches Informationsblatt kennt man bereits bei Fonds, wie beispielsweise die UCITS KIIDs (die Key Investor Information Documents für Undertakings for Collective Investments in Transferable Securities). Auch dort werden wichtige Merkmale wie Anlagepolitik, Kosten und Risikoprofil angegeben. Beispielsweise findet man dort auch eine Risikoklassifizierung eines Produkts in einer numerischen Skala von 1 bis 7. Die PRIIP Basisinformationsblätter stellen allerdings weitaus größere Anforderungen. Einerseits werden mehr Informationen verlangt und andererseits gibt es auch neue Formen der Darstellung wie beispielsweise bei den Kosten. Die Kosten müssen in den PRIIP-Basisinformationsblättern wesentlich detaillierter ausgeführt werden und auch über einen absoluten Gesamtkostenbetrag dargestellt werden.

Der größte Unterschied zu den bisherigen Informationsblättern ist jedoch die Performance-Abschätzung für die Zukunft. Während UCITS KIIDs lediglich Wertentwicklungen der Vergangenheit anzugeben brauchen, müssen PRIIP eine Prognose für die Zukunft machen. Die Verordnung sieht vier Performance-Szenarien vor um die zukünftige Renditeentwicklung abschätzen zu können:

- Optimistisches Szenario
- Mittleres Szenario
- Pessimistisches Szenario
- Stressszenario

Die Beschreibung dieser Performance-Szenarien und der Risikoeinstufung über den Gesamtrisikoindikator erfolgte erst in einer Ergänzung der Verordnung vom 8. März 2017, der delegierten Verordnung (EU) 2017/653. Dort werden die Methoden zur Berechnung des Gesamtrisikoindikatoren und der Performance-Szenarien angeführt.

Diesen Teil der PRIIP-Verordnung möchte diese Arbeit kritisch untersuchen. Sie stellen im Basisinformationsblatt die größte Unsicherheit für den Kunden dar.

2 Die Methoden der Verordnung

In Anhang II und Anhang IV der delegierten Verordnung (EU) 2017/653 zur Ergänzung der Verordnung (EU) Nr. 1286/2014 werden mathematische Methoden bereitgestellt, die zur Berechnung des Gesamtrisikoindikators und der Performance-Szenarien verwendet werden sollen.

Das Gesamtrisiko eines PRIIP wird nach der Verordnung in eine numerische Skala von 1 bis 7 eingeteilt. Dabei setzt sich die Klassifizierung des Gesamtrisikoindikators aus den Klassifizierungen des Markt- und Kreditrisikos zusammen. Tabelle 2.1 zeigt, wie der Gesamtrisikoindikator aus den entsprechenden Kombinationen aus Kreditrisiko-Klasse „CR“ und Marktrisiko-Klasse „MR“ zugewiesen wird (vgl. EU, 2017b, Anhang II, Teil 3). Das Kreditrisiko eines PRIIP ergibt sich aus Bonitätsratings und wird in Klassen von 1 bis 6 eingeteilt. Der Kreditrisikowert wird in dieser Arbeit nicht weiter untersucht, da er sich hauptsächlich aus Beurteilungen von fremden Ratingagenturen ergibt und keine weiteren mathematischen Methoden angeführt werden.

Diese Arbeit interessiert sich mehr für das Marktrisiko, welches wie der Gesamtrisikoindikator in sieben Klassen eingeteilt wird.

Die Bestimmung des Marktrisikos erfolgt anhand der annualisierten Volatilität entsprechend dem „Value-at-Risk“ (VaR) bei einem Konfidenzniveau von 97,5% über die empfohlene Haltedauer. Dazu wird eine sogenannte „Value-at-Risk-äquivalente Volatilität“ berechnet. Die Marktrisikoklassifizierung wird dann nach Tabelle 2.2 bestimmt.

Die Berechnung des Marktrisikos und damit des Value at Risks erfolgt je nach Art des PRIIP unterschiedlich. Dazu teilt die delegierte Verordnung 2017/653 die PRIIP in vier Kategorien ein.

- **Kategorie 1:**

- PRIIP, bei denen mehr als der Anlagebetrag verloren werden könnte

Risikoklassen	MR1	MR2	MR3	MR4	MR5	MR6	MR7
CR1	1	2	3	4	5	6	7
CR2	1	2	3	4	5	6	7
CR3	3	3	3	4	5	6	7
CR4	5	5	5	5	5	6	7
CR5	5	5	5	5	5	6	7
CR6	6	6	6	6	6	6	7

Tabelle 2.1: Gesamtrisikoindikator

2 Die Methoden der Verordnung

Marktrisiko-Klasse	VaR-äquivalente Volatilität (VEV)
1	< 0,5 %
2	0,5 % - 5,0 %
3	5,0 % - 12 %
4	12 % - 20 %
5	20 % - 30 %
6	30 % - 80 %
7	> 80 %

Tabelle 2.2: Marktrisiko-Klassen

- PRIIP aus den Kategorien der Richtlinie 2014/65/EU des Europäischen Parlaments und des Rates in Anhang I Abschnitt C Nummern 4 bis 10. Das sind vor allem Finanzinstrumente wie Optionen, Futures, Swaps oder Forwards.
- PRIIP ohne geeignete Benchmark oder nicht mindestens monatlich festgesetzten Preisen
- **Kategorie 2:**
 - PRIIP, die entweder direkt oder auf synthetischer Basis ein nicht gehebeltes Engagement in Bezug auf die Preise der zugrunde liegenden Anlagen bieten
 - PRIIP, die ein gehebeltes Engagement in den zugrunde liegenden Anlagen mit Zahlung eines konstanten Vielfachen der Preise dieser zugrunde liegenden Anlagen bieten
- **Kategorie 3:**

PRIIP, deren Werte zwar die Preise der zugrunde liegenden Anlagen, aber nicht als konstantes Vielfaches der Preise dieser zugrunde liegenden Anlagen widerspiegeln
- **Kategorie 4:**

PRIIP, deren Werte teilweise von nicht am Markt beobachteten Faktoren abhängen, einschließlich PRIIP auf Versicherungsbasis, bei denen ein Teil der Gewinne des PRIIP-Herstellers an Kleinanleger ausgeschüttet wird

Die PRIIP der Kategorie 1 stellen somit sehr riskante Anlageformen dar. Die Marktrisiko-Klasse von PRIIP der Kategorie 1 a) und b) wird mit 7 und die der Kategorie 1 c) mit 6 erklärt.

Zu den PRIIP der Kategorie 2 gehören beispielsweise die meisten Fonds. Für diese PRIIP wird der VaR im Rendite-Raum durch die Cornish-Fisher-Erweiterung berechnet.

Für PRIIP der Kategorie 3 wird der VaR im Preis-Raum anhand der Verteilung der PRIIP-Werte am Ende der empfohlenen Haltedauer ermittelt. Die Verteilung wird durch Simulation des Preises über ein Bootstrapping-Verfahren ermittelt. Zu den PRIIP der Kategorie 3 gehören meist komplexere Finanzprodukte wie strukturierte Fonds.

Für PRIIP der Kategorie 4 werden keine weiteren Methoden angeführt. Komponenten des PRIIP, die teilweise von Faktoren abhängen, die am Markt beobachtet werden können, sollen über Methoden der Kategorien 2 und 3 behandelt werden. Für Komponenten eines PRIIP, die von Faktoren abhängen, die nicht am Markt beobachtet werden können, sollen anerkannte Branchenstandards angewandt werden.

Zu den PRIIP der Kategorie 4 gehört beispielsweise die klassische Lebensversicherung mit Gewinnbeteiligung. Dort hängt die Höhe der Gewinnbeteiligung nicht unmittelbar von den Marktbewegungen ab, sondern unterliegt einem gewissen Ermessensspielraum um die Erträge im zeitlichen Verlauf zu glätten. Außerdem ist die Basis für die Gewinnbeteiligung der Rohüberschuss im Sinne der Lebensversicherung-Gewinnbeteiligungsverordnung und dieser ist nicht auf Marktwertbasis, sondern auf Buchwertbasis. Somit folgt selbst der aus dem Kapitalertrag resultierende Teil der Gewinnbeteiligung nicht direkt den Marktbewegungen.

Für die klassische Lebensversicherung mit Gewinnbeteiligung wurde durch die österreichische Aktuarvereinigung (AVÖ) ein Branchenstandard eingeführt (vgl. AVÖ, 2017). Dabei kommt ein stochastisches Kapitalmarktmodell zum Einsatz.

Die Werte der Performance-Szenarien werden auf ähnliche Weise berechnet wie der Marktrisiko-Wert. Es werden wieder die Methoden der einzelnen Kategorien verwendet und Endwerte des PRIIP am Ende der empfohlenen Haltedauer ermittelt. Dabei entspricht

- das pessimistische Szenario dem Wert des PRIIP am 10. Perzentil,
- das mittlere Szenario dem Wert des PRIIP am 50. Perzentil,
- das optimistische Szenario dem Wert des PRIIP am 90. Perzentil.
- Im Stressszenario wird zuerst eine neue Stressvolatilität berechnet und danach der Wert des PRIIP am 5. Perzentil (bzw. am 1. Perzentil für eine Haltedauer von 1 Jahr) berechnet

In den nächsten Abschnitten werden die mathematischen Methoden der einzelnen Kategorien genauer vorgestellt. Dazu benötigen wir zuerst einige Grundlagen.

2.1 Grundlagen

Die logarithmische Rendite $r(s, t)$ über einen Zeitraum s bis t mit den Marktschlusspreisen P_s und P_t ist definiert als

$$r(s, t) = \ln \left(\frac{P_t}{P_s} \right) \quad (1.1)$$

Nun wird das Risikomaß „Value at Risk“ eingeführt, das in der Verordnung eine zentrale Rolle einnimmt (vgl. Marcus Kriele, 2016).

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer σ -Algebra \mathcal{F} und Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} . Mit $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ bezeichnen wir den Raum der Zufallsvariablen

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto X(\omega)$$

Definition 2.1.1 (Risikomaß) *Ein Risikomaß ist eine Abbildung*

$$\rho : \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad X \mapsto \rho(X)$$

Um die Eigenschaften eines Risikomaßes besser zu beschreiben, führen wir einen weiteren wichtigen Begriff ein (vgl. Marcus Kriele, 2016).

2 Die Methoden der Verordnung

Definition 2.1.2 (Kohärentes Risikomaß) Ein Risikomaß ρ heißt kohärent, falls es die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- *Translationsinvarianz:* $\rho(X + a) = \rho(X) + a$ für alle $X \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ und alle Konstanten a .
- *Positive Homogenität:* $\rho(aX) = a\rho(X)$ für alle $X \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ und alle positiven Konstanten a .
- *Monotonie:* $X_1 \geq X_2$ fast überall $\Rightarrow \rho(X_1) \geq \rho(X_2)$ für alle $X_1, X_2 \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$.
- *Subadditivität:* $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$ für alle $X_1, X_2 \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$.

Definition 2.1.3 (Value-At-Risk) Der Value at Risk zum Level $\alpha \in (0, 1)$ ist gegeben durch:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\} \quad (1.2)$$

Wobei $F_X(x)$ die Verteilungsfunktion von X , d.h. $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ bezeichnet.

Der VaR beschreibt das α -Quantil der Verteilung. Wenn wir also die Verteilung der logarithmischen Renditen betrachten, gibt uns der VaR die Rendite, die nur mit Wahrscheinlichkeit α unterschritten wird. Oft betrachtet man aber auch gleich die Verteilung der Assetpreise nach einer bestimmten Haltezeit. Dann gibt uns der VaR zum Level α den Preis an, der mit Wahrscheinlichkeit α unterschritten wird bzw. mit der meistens sehr groß gewählten Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ nicht unterschritten wird.

Lemma 2.1.1 Das Risikomaß VaR_α ist translationsinvariant, positiv homogen und monoton.

Beweis: Zum Beweis siehe Marcus Kriele, 2016, Lemma 2.8. □

Der Value at Risk ist kein kohärentes Risikomaß, da er die Eigenschaft der Subadditivität nicht erfüllt. Das bedeutet, dass es bei der Kombination von risikobehafteten Wertgegenständen zu einem höheren VaR kommen kann als die summierten VaR der beiden einzelnen Risiken. Somit werden beim Value at Risk keine Diversifikationseffekte berücksichtigt.

Da der Value at Risk weder Diversifikation belohnt, noch eine Aussage über die Schadenhöhe im Verlustfall macht, führen wir noch ein weiteres Risikomaß ein.

Definition 2.1.4 (Expected Shortfall) Der Expected Shortfall einer Zufallsvariable X zum Konfidenzniveau $\alpha \in (0, 1)$ ist gegeben durch:

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_u(X) du \quad (1.3)$$

Wobei $F_X(x)$ die Verteilungsfunktion von X , d.h. $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ bezeichnet.

Lemma 2.1.2 Der Expected Shortfall ist ein kohärentes Risikomaß.

Beweis: Zum Beweis siehe Marcus Kriele, 2016, Theorem 2.3. \square

Nun kommen wir zu einigen Grundlagen aus der stochastischen Analysis und der Finanzmathematik, welche wir im Folgeabschnitt und in Kapitel 3 benötigen werden.

Definition 2.1.5 (\mathcal{F} -messbare Funktion) Sei \mathcal{F} eine σ -Algebra auf einer nicht-leeren Menge Ω . Die Funktion $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt \mathcal{F} -messbar, wenn

$$\{S \in B\} \in \mathcal{F}$$

für alle Borelmengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, dann nennt man S eine Zufallsvariable.

Definition 2.1.6 (Filtration) Eine Familie \mathcal{F}_t von σ -Algebren auf Ω , $t \in T \subset \mathbb{R}$, heißt Filtration, wenn für $s, t \in T$ mit $s \leq t$ gilt:

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$$

Definition 2.1.7 (Stochastischer Prozess) Ein stochastischer Prozess ist eine Familie von Zufallsvariablen $S(t)$, $t \in T \subset \mathbb{R}$. Für jedes $\omega \in \Omega$ heißt die Funktion

$$T \ni t \mapsto S(t, \omega)$$

der Pfad von $S(t)$.

Definition 2.1.8 (adaptiert) Ein stochastischer Prozess $(S(t))_{t \in T}$ heißt adaptiert bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, wenn $S(t)$ stets \mathcal{F}_t -messbar für alle t ist.

Definition 2.1.9 (progressiv messbar) Ein stochastischer Prozess $S(t)$, $t \geq 0$ heißt progressiv messbar, wenn für jede $t \geq 0$ gilt:

$$(s, \omega) \mapsto S(s, \omega)$$

ist eine messbare Funktion aus $[0, t] \times \Omega$ mit der σ -Algebra $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}$ nach \mathbb{R} . Dabei bezeichnet $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}$ die Produkt- σ -Algebra auf $[0, t] \times \Omega$. Sie ist die kleinste σ -Algebra, die alle Mengen der Form $A \times B$ enthält, wobei $A \subset [0, t]$ eine Borelmenge ist und $B \in \mathcal{F}$.

Definition 2.1.10 (Martingal) Ein stochastischer Prozess $(M(t))_{t \in T}$ heißt Martingal bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, wenn

1. $M(t)$ ist integrierbar für alle $t \in T$
2. $M(t)$ ist adaptiert bzgl. \mathcal{F}_t für alle $t \in T$
3. $\mathbb{E}[M(t)|\mathcal{F}_s] = M(s)$ f.s. für alle $s \leq t$

Als Grundbaustein für eine große Vielzahl an finanzmathematischen Modellen führen wir den folgenden stochastischen Prozess ein, der auch „Wiener Prozess“ genannt wird.

2 Die Methoden der Verordnung

Definition 2.1.11 (Brownsche Bewegung) Ein stochastischer Prozess $W(t), t \geq 0$ heißt Brownsche Bewegung, wenn

1. $W(0) = 0$ f.s.
2. Die Pfade $t \mapsto W(t)$ sind f.s. stetig
3. $W(t)$ hat unabhängige stationäre Inkremente
4. $W(t) - W(s)$ ist normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $t - s$ für jedes $0 \leq s \leq t$

Eine bekannte Anwendung findet die Brownsche Bewegung in der Modellierung von Aktienkursen. Sei dazu $W(t), t \geq 0$ eine Brownsche Bewegung und folgende stochastische Differentialgleichung mit Startwert S_0 gegeben:

$$dS_t = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad t \geq 0 \quad (1.4)$$

Bei konstantem $\mu \in \mathbb{R}$ und konstanter Volatilität $\sigma > 0$ ist die Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung gegeben durch (vgl. Rheinländer und Sexton, 2011, S.31):

$$S_t = S_0 \cdot \exp(\mu t + \sigma W_t) \quad (1.5)$$

Dieser stochastische Prozess heißt *geometrische Brownsche Bewegung*. Der Drift der geometrischen Brownschen Bewegung ist hier gegeben durch

$$\mu + \frac{\sigma^2}{2}$$

Aufgrund der Verteilung der Brownschen Bewegung $W_t \sim N(0, t)$ lassen sich Eigenschaften von S_t bestimmen.

- Die Zuwächse S_t/S_0 sind logarithmisch normalverteilt:

$$\ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$$

- Der Erwartungswert für alle $t \geq 0$: $\mathbb{E}(S_t) = S_0 \cdot e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})t}$
Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_t) &= \mathbb{E}(S_0 \cdot e^{\mu t + \sigma W_t}) \\ &= S_0 \cdot e^{\mu t} \cdot \mathbb{E}(e^{\sigma W_t}) \\ &= S_0 \cdot e^{\mu t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x} e^{-\frac{(x-0)^2}{2t}} dx \\ &= S_0 \cdot e^{\mu t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x^2 - 2x\sigma t + \sigma^2 t^2)}{2t}} dx \\ &= S_0 \cdot e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\sigma t)^2}{2t}} dx \\ &= S_0 \cdot e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})t} \end{aligned}$$

□

Nun führen wir aus der Stochastik noch ein wichtiges Resultat sowohl in theoretischer Hinsicht als auch im Hinblick auf praktische Anwendungen an. Den Beweis werden wir hier nicht zeigen.

Satz 2.1.1 (Zentraler Grenzwertsatz) Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen, deren Erwartungswert μ und Standardabweichung σ existieren und endlich sind. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < z \right) = \Phi(z) \quad (1.6)$$

wobei $\Phi(z)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

2.2 VaR-äquivalente Volatilität

Die Risikoklassifizierung in der PRIIP-Verordnung wird mittels einer speziell definierten Volatilität bestimmt. Die Verordnung nennt sie die sogenannte „VaR-äquivalente Volatilität“. Deren Formel lautet nach [EU, 2017a]:

$$VEV = \left(\sqrt{3,842 - 2 \cdot VaR_{Rendite}} - 1,96 \right) / \sqrt{T} \quad (2.7)$$

Die VaR-äquivalente Volatilität (VEV) stellt ein intransparentes Element in der Verordnung dar. Es ist nämlich nicht genau klar, wie die Formel zustande gekommen ist. Auch der Name ist nicht aus der Mathematik bekannt.

Die folgende Herleitung der Formel für die VaR-äquivalente Volatilität beruht damit auf den Vermutungen des Autors, wie die EU-Verordnung die VEV überhaupt definiert hat. Zu einer ähnlichen Herleitung kommt auch [Graf, 2018].

Zur Bestimmung der VaR-äquivalenten Volatilität nehmen wir an, dass der Preisprozess des PRIIP einer geometrischen Brownschen Bewegung ohne Drift folgt. Es soll also $\mu + \frac{\sigma^2}{2} = 0$ sein. Damit gilt für den Zuwachs bis zu einer Haltedauer T :

$$\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) \sim N \left(-\frac{\sigma^2}{2} T, \sigma^2 T \right)$$

Die Haltedauer T soll in Jahren angegeben werden. Damit kann die VEV als eine annualisierte Jahresvolatilität bestimmt werden. Die Zahl N ist die Anzahl an Handelsperioden für eine gewünschte Haltedauer T des PRIIP. Für Tagesrenditen wäre beispielsweise $N = T \cdot 250$, wenn ein Jahr mit 250 Handelstagen angenommen wird.

Die VEV-Formel ergibt sich nun aus der Frage:

„Welche Volatilität σ muss für die Normalverteilung $N(-\frac{\sigma^2}{2} T, \sigma^2 T)$ gewählt werden, damit ihr α -Quantil dem errechneten VaR der Renditen zum Level α ohne Drift entspricht?“

Der $VaR_{Rendite, \alpha}$ wird durch das α -Quantil der Verteilung vergangener Renditen berechnet. Darin ist ein Drift enthalten. Der geschätzte Drift ist

$$\bar{\mu} N + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} N$$

2 Die Methoden der Verordnung

wobei $\bar{\mu}$ das arithmetische Mittel und $\bar{\sigma}$ die Stichprobenstandardabweichung der vergangenen log-Renditen sind.

Da von keinem Drift ausgegangen wird, muss dem berechneten $VaR_{Rendite,\alpha}$ der geschätzte Drift abgezogen werden und wir erhalten die Gleichung:

$$VaR_{Rendite,\alpha} - \bar{\mu}N - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}N = -\frac{\sigma^2}{2}T + \Phi^{-1}(\alpha)\sigma\sqrt{T} \quad (2.8)$$

Dies ist eine quadratische Gleichung mit den Lösungen:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{-\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{T} \pm \sqrt{\Phi^{-1}(\alpha)^2T - 4\frac{T}{2}(VaR_\alpha - \bar{\mu}N - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}N)}}{-2\frac{T}{2}} \\ &= \frac{\Phi^{-1}(\alpha) \mp \sqrt{\Phi^{-1}(\alpha)^2 - 2(VaR_\alpha - \bar{\mu}N - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}N)}}{\sqrt{T}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Für $\alpha < \frac{1}{2}$ ist hier nur die positive Lösung interessant, die nun mit 2.10 übereinstimmt.

$$VEV = \frac{1}{\sqrt{T}} \left(\sqrt{\Phi^{-1}(\alpha)^2 - 2(VaR_\alpha - \bar{\mu}N - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2N)} + \Phi^{-1}(\alpha) \right) \quad (2.10)$$

Das Abziehen des geschätzten Drifts vom VaR ist in der Verordnung sowohl beim Anwenden der Cornish-Fisher-Erweiterung als auch beim Bootstrapping indirekt zu sehen. Sowohl in der Cornish-Fisher-Formel in [EU, 2017b], Anhang II Nummer 12 als auch in [EU, 2017b], Anhang II Nummer 22 wird der geschätzte Drift subtrahiert.

In der Verordnung sind die Quantile der Standardnormalverteilung für $\alpha = 0.025$ bereits ausgerechnet und die VEV-Formel ist (2.7).

Für die Berechnung der Performance-Szenarien und die Risikoklassifizierung mittels VaR-äquivalente Volatilität werden die Quantile der Renditeverteilung benötigt. Diese Verteilung zu beschreiben wird uns in den weiteren Abschnitten beschäftigen. Je nach der Kategorie des PRIIP werden dabei unterschiedliche Ansätze verfolgt.

2.3 PRIIP Kategorie 2: Cornish-Fisher-Erweiterung

Für Produkte aus der von der Verordnung definierten Kategorie 2 sollen die Quantile der Renditeverteilung und damit der Value-at-Risk durch die Cornish-Fisher-Erweiterung berechnet werden.

Mit der Cornish-Fisher-Erweiterung kann das Quantil einer Verteilungsfunktion anhand der ersten Kumulanten abgeschätzt werden. Basis dahinter ist die Standardnormalverteilung. Über die Erweiterung können auch dann Quantile abgeschätzt werden, falls die Normalverteilungshypothese verletzt ist. Das kann insbesondere bei der Verteilung von Renditen hilfreich sein.

2.3 PRIIP Kategorie 2: Cornish-Fisher-Erweiterung

Definition 2.3.1 (Kumulantenerzeugende Funktion) Für eine Zufallsvariable X ist die kumulantenerzeugende Funktion definiert durch:

$$K_X(t) = \ln \mathbb{E} [e^{tX}] \quad (3.11)$$

Dabei ist $M_X(t) = \mathbb{E} [e^{tX}]$ die momenterzeugende Funktion von X .

Definition 2.3.2 (Kumulante) Die n -te Kumulante ist definiert durch:

$$\kappa_n = \frac{\partial^n}{\partial t^n} K_X(t) |_{t=0} \quad (3.12)$$

Alternativ lassen sich die Kumulanten κ_n auch durch

$$\exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n t^n}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^n) t^n}{n!} \quad (3.13)$$

definieren (vgl. Sergio Focardi, 2013, S.124).

Die Kumulanten einer Zufallsvariablen X können durch ihren Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}(X)$ und ihre zentralen Momente $\mu_n = \mathbb{E}[(X - \mu)^n]$ angegeben werden. Die ersten fünf Kumulanten sind:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \mu \\ \kappa_2 &= \mu_2 \\ \kappa_3 &= \mu_3 \\ \kappa_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2 \\ \kappa_5 &= \mu_5 - 10\mu_3\mu_2 \end{aligned}$$

Die erste Kumulante ist somit der Erwartungswert μ und die zweite Kumulante ist die Varianz $Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$. Mit σ bezeichnen wir die Wurzel der Varianz, die Standardabweichung.

Definition 2.3.3 (Schiefe) Für eine Zufallsvariable X ist die Schiefe S definiert durch:

$$S := \frac{\mathbb{E} [(X - \mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} \quad (3.14)$$

Definition 2.3.4 (Kurtosis, Exzess) Für eine Zufallsvariable X ist die Kurtosis K definiert durch:

$$K := \frac{\mathbb{E} [(X - \mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} + 3 \quad (3.15)$$

Der Exzess E gibt die Überkurtosis zur Normalverteilung an:

$$E := K - 3 = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} \quad (3.16)$$

2 Die Methoden der Verordnung

Sei nun \tilde{X} eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1. Dann lässt sich das α -Quantil der Verteilung von \tilde{X} durch die Cornish-Fisher-Erweiterung mithilfe der Kumulanten abschätzen. Unter Verwendung der ersten fünf Kumulanten ist die Cornish-Fisher-Erweiterung:

$$\begin{aligned}
 F_{\tilde{X}}^{-1}(\alpha) \approx & \Phi^{-1}(\alpha) + \frac{\Phi^{-1}(\alpha)^2 - 1}{6} \kappa_3 & (3.17) \\
 & + \frac{\Phi^{-1}(\alpha)^3 - 3\Phi^{-1}(\alpha)}{24} \kappa_4 \\
 & - \frac{2\Phi^{-1}(\alpha)^3 - 5\Phi^{-1}(\alpha)}{36} \kappa_3^2 \\
 & + \frac{\Phi^{-1}(\alpha)^4 - 6\Phi^{-1}(\alpha)^2 + 3}{120} \kappa_5 \\
 & - \frac{\Phi^{-1}(\alpha)^4 - 5\Phi^{-1}(\alpha)^2 + 2}{24} \kappa_3 \kappa_4 \\
 & + \frac{12\Phi^{-1}(\alpha)^4 - 53\Phi^{-1}(\alpha)^2 + 17}{324} \kappa_3^3
 \end{aligned}$$

wobei $\Phi^{-1}(\alpha)$ das α -Quantil der Standardnormalverteilung ist.

Für eine allgemeinere Zufallsvariable X mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ lässt sich die Cornish-Fisher-Erweiterung trotzdem anwenden, wenn man folgende Transformation macht:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Die Zufallsvariable Z besitzt nun den gewünschten Erwartungswert von 0 und eine Standardabweichung von 1. Die zentralen Momente $\tilde{\mu}_n$ von Z lassen sich aus den zentralen Momenten μ_n von X berechnen:

$$\tilde{\mu}_n = \mathbb{E} \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} - 0 \right)^n \right] = \frac{\mu_n}{\sigma^n}$$

Die Cornish-Fisher-Erweiterung mithilfe der ersten vier Kumulanten (wie in der Verordnung) angewendet auf Z sieht nun wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 F_Z^{-1}(\alpha) \approx & w := \Phi^{-1}(\alpha) & (3.18) \\
 & + \frac{\Phi^{-1}(\alpha)^2 - 1}{6} S \\
 & + \frac{\Phi^{-1}(\alpha)^3 - 3\Phi^{-1}(\alpha)}{24} E \\
 & - \frac{2\Phi^{-1}(\alpha)^3 - 5\Phi^{-1}(\alpha)}{36} S^2
 \end{aligned}$$

wobei die Schiefe von X durch

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \tilde{\mu}_3 = \tilde{\kappa}_3$$

gegeben ist und der Exzess von X durch

$$E = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \left(\frac{\mu_2}{\sigma^2} \right)^2 = \tilde{\mu}_4 - 3\tilde{\mu}_2^2 = \tilde{\kappa}_4$$

2.3 PRIIP Kategorie 2: Cornish-Fisher-Erweiterung

Die für die Cornish-Fisher-Erweiterung benötigten Kumulanten von Z lassen sich also durch Schiefe und Exzess von X darstellen.

Die Approximation des α -Quantil von X ist dann

$$F_X^{-1}(\alpha) \approx \mu + \sigma w \quad (3.19)$$

mit w aus (3.18).

So lässt sich das Quantil einer beliebigen Verteilung über die Cornish-Fisher-Erweiterung anhand der ersten vier Momente (Erwartungswert, Standardabweichung, Schiefe und Kurtosis) annähern. Diese Darstellung mithilfe der ersten vier Kumulanten wird in der EU-Verordnung verwendet und findet man auch in [Charles-Olivier Amedee-Manesme, 2014].

Zur Anmerkung: Für eine normalverteilte Zufallsvariable $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ reduziert sich die Cornish-Fisher-Erweiterung auf $F_Y^{-1}(\alpha) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)$.

2.3.1 Cornish-Fisher-Erweiterung für mehrere Zeitschritte

Über die Cornish-Fisher-Erweiterung sollen die Quantile der log-Renditen der PRIIP Kategorie 2 berechnet werden. Die log-Renditen werden somit als Zufallsvariable X mit näherungsweise Quantilfunktion (3.19) modelliert.

Da die Quantile bzw. der Value-at-Risk für eine bestimmte Haltedauer berechnet werden sollen, muss die Cornish-Fisher-Erweiterung für eine bestimmte Anzahl N an Zeitschritten erweitert werden. In der PRIIP-Verordnung soll N ein Vielfaches einer Anzahl T an Jahren sein. Werden beispielsweise Tagesrenditen gemessen und ein Jahr mit 250 Handelstagen angenommen, so ist die Anzahl $N = 250 \cdot T$. Die Gesamtrendite am Ende einer bestimmten Haltedauer wird als Summe von N unabhängigen log-Renditen X modelliert.

$$R_N := \sum_{i=1}^N X_i, \quad X_i \stackrel{iid}{\sim} X$$

Es wird damit vorausgesetzt, dass die log-Renditen auch in Zukunft weiterhin unabhängig und identisch verteilt wie X sind.

Wir möchten nun die Cornish-Fisher-Erweiterung auf R_N anwenden. Dafür benötigen wir Erwartungswert, Standardabweichung, Schiefe und Exzess von R_N . Diese wollen wir durch den Erwartungswert μ , die Standardabweichung σ , die Schiefe S und den Exzess E der X_i darstellen (vgl. Graf, 2018, S. 23).

Sowohl Erwartungswert als auch Varianz lassen sich durch die Unabhängigkeit der X_i in die Summe hineinziehen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_N] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N X_i \right] = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[X_i] = N \cdot \mu \\ \sigma_{R_N} &= \sqrt{\text{Var} \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \text{Var}(X_i)} = \sqrt{N} \cdot \sigma \end{aligned}$$

2 Die Methoden der Verordnung

Auch die Schiefe von R_N lässt sich durch die Unabhängigkeit der X_i als Vielfaches des dritten zentralen Moments μ_3 von X_i darstellen.

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^N X_i - \mu\right)^3\right]}{\sigma_{R_N}^3} &= \frac{1}{\sigma_{R_N}^3} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbb{E}[(X_i - \mu) \cdot (X_j - \mu) \cdot (X_k - \mu)] \\ &\stackrel{ua}{=} \frac{1}{\sigma_{R_N}^3} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[(X_i - \mu)^3] \\ &= \frac{N \cdot \mu_3}{(\sqrt{N} \cdot \sigma)^3} \\ &= \frac{S}{\sqrt{N}} \end{aligned}$$

Ebenso lässt sich der Exzess von R_N als Vielfaches des vierten zentralen Moments μ_4 von X_i bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^N X_i - \mu\right)^4\right]}{\sigma_{R_N}^4} &= \frac{1}{\sigma_{R_N}^4} \sum_{i,j,k,l=1}^N \mathbb{E}[(X_i - \mu) \cdot (X_j - \mu) \cdot (X_k - \mu) \cdot (X_l - \mu)] \\ &\stackrel{ua}{=} \frac{1}{\sigma_{R_N}^4} \left(\sum_{i=1}^N \mathbb{E}[(X_i - \mu)^4] + 6 \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[(X_i - \mu)^2 \cdot (X_j - \mu)^2] \right) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{N} \cdot \sigma)^4} \left(N \cdot \mu_4 + 6 \sum_{i \neq j} \sigma^4 \right) \\ &= \frac{1}{N^2 \cdot \sigma^4} \left(N \cdot \mu_4 + 6 \frac{N(N-1)}{2} \sigma^4 \right) \\ &= \frac{\mu_4}{N \cdot \sigma^4} + \frac{6(N-1)}{2N} \\ &= \frac{\mu_4}{N \cdot \sigma^4} + 3 + \frac{3}{N} \\ &= \frac{E}{N} + 3 \end{aligned}$$

Nun können wir die Quantilfunktion von R_N über die Cornish-Fisher-Erweiterung darstellen:

$$F_{R_N}^{-1}(\alpha) \approx \mu N + \sigma \sqrt{N} \cdot w \quad (3.20)$$

mit

$$\begin{aligned} w := \Phi^{-1}(\alpha) &+ \frac{\Phi^{-1}(\alpha)^2 - 1}{6} \frac{S}{\sqrt{N}} \\ &+ \frac{\Phi^{-1}(\alpha)^3 - 3\Phi^{-1}(\alpha)}{24} \frac{E}{N} \\ &- \frac{2\Phi^{-1}(\alpha)^3 - 5\Phi^{-1}(\alpha)}{36} \frac{S^2}{N} \end{aligned} \quad (3.21)$$

2.3.2 Schätzung der Momente

In der EU-Verordnung wird der Value-at-Risk im Renditeraum anhand vergangener Daten geschätzt. Die vier Momente (Erwartungswert, Standardabweichung, Schiefe und Exzess) werden also empirisch geschätzt.

- Anzahl beobachteter Renditen: n
- Arithmetisches Mittel der logarithmischen Renditen r_i : $\bar{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i$
- Stichprobenstandardabweichung: $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{\mu})^2}$
- Empirische Schiefe: $\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}}\right)^3$
- Empirischer Exzess: $\bar{E} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i - \bar{\mu}}{\bar{\sigma}}\right)^4 - 3$

Bemerkung 2.3.1 (Erwartungstreuer Schätzer) In der EU-Verordnung wird die Standardabweichung nicht mit dem erwartungstreuen Schätzer für die Varianz berechnet. Die Formel in [EU, 2017b], Anhang II Nummer 12 lautet:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i - M_1)^2}{M_0}}$$

wobei M_0 die Anzahl und M_1 der Mittelwert der r_i ist.

Das geschätzte Quantil für die Zukunft und damit der Value-at-Risk am Ende einer bestimmten Haltedauer mit N Schritten ist damit:

$$VaR_{Rendite,\alpha} \approx \bar{\mu}N + \bar{\sigma}\sqrt{N} \cdot w \quad (3.22)$$

mit

$$\begin{aligned} w := \Phi^{-1}(\alpha) &+ \frac{\Phi^{-1}(\alpha)^2 - 1}{6} \frac{\bar{S}}{\sqrt{N}} \\ &+ \frac{\Phi^{-1}(\alpha)^3 - 3\Phi^{-1}(\alpha)}{24} \frac{\bar{E}}{N} \\ &- \frac{2\Phi^{-1}(\alpha)^3 - 5\Phi^{-1}(\alpha)}{36} \frac{\bar{S}^2}{N} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Diese Formel über die Cornish-Fisher-Erweiterung wird in der EU-Verordnung letztendlich angewendet (vgl. EU, 2017b, Anhang II, Nummer 12).

Die Quantile werden für die Risikoklassifizierung und die ersten drei Performance-Szenarien mit unterschiedlichen Konfidenzniveaus α berechnet.

- Risikoklassifizierung: $\alpha = 0.025$
- pessimistische Szenario: $\alpha = 0.1$
- Mittleres Szenario: $\alpha = 0.5$
- Optimistisches Szenario: $\alpha = 0.9$

2 Die Methoden der Verordnung

Bemerkung 2.3.2 (Möglicher Fehler in der EU-Verordnung) Die Formel der Cornish-Fisher-Erweiterung wird in der PRIIP-Verordnung mit

$$\begin{aligned} \bar{\mu}N + \bar{\sigma}\sqrt{N} \cdot \left(\Phi^{-1}(\alpha) + \frac{\Phi^{-1}(\alpha)^2 - 1}{6} \frac{\bar{S}}{\sqrt{N}} + \frac{\Phi^{-1}(\alpha)^3 - 3\Phi^{-1}(\alpha)\bar{E}}{24} \frac{\bar{E}}{N} \right. \\ \left. - \frac{2\Phi^{-1}(\alpha)^3 - 5\Phi^{-1}(\alpha)\bar{S}^2}{36} \frac{\bar{S}^2}{N} \right) \\ - 0,5\bar{\sigma}^2N \end{aligned}$$

angegeben, wobei mehrmals die Quantile der Standardnormalverteilung bereits ausgerechnet wurden. Außerdem wird beim VaR (vgl. EU, 2017b, Anhang II Nummer 12) sowie im Stressszenario der Mittelwert $\bar{\mu}N$ weggelassen.

Im Vergleich zur Cornish-Fisher-Erweiterung in (3.22) gibt es einen Unterschied. Der Autor behauptet, dass der Term $-0,5\bar{\sigma}^2N$ fehlerhaft ist und nicht zur Berechnung der Quantile der Renditeverteilung gehört. Dieser Term gehört nicht zu Cornish-Fisher-Erweiterung, welche wir in den vorherigen Abschnitten einführt haben. Zu dieser Behauptung kommt auch [Graf, 2018].

In der Formel für den VaR in [EU, 2017b] Anhang II Nummer 12 mag der Term für die Verordnung noch stimmen, da er zur Berechnung der VEV benötigt wird (siehe 2.10). Bei der Berechnung der Performance-Szenarien in Anhang IV ist der Term allerdings fehl am Platz.

Der zusätzliche Term $-0,5\bar{\sigma}^2N$ führt in den Performance-Szenarien je nach $\bar{\sigma}$ zu einer deutlichen Renditesenkung. Abbildung 2.1.a zeigt dabei, wie die Rendite per anno je nach Volatilität durch den zusätzlichen Term gesenkt wird. Für eine Volatilität von 20% käme es schon zu einer Renditeminderung von 2% pro Jahr.

Für eine längere Laufzeit kommt es damit zu einer deutlichen Minderung der Schlusspreise eines PRIIP am Ende der empfohlenen Haltedauer. In den drei weiteren Grafiken von Abbildung 2.1 werden die Auswirkungen anhand dreier Beispiele gezeigt. Die Volatilitäten und Performance-Szenarien mittels Cornish-Fisher-Erweiterung der drei Assets wurden anhand der Tagesrenditen der letzten 6 Jahre berechnet. Ohne den zusätzlichen Term wäre der Schlusspreis des DAX nach 14 Jahren beispielsweise um 25% höher als der unter Verwendung der EU-Formel.

2.3 PRIIP Kategorie 2: Cornish-Fisher-Erweiterung

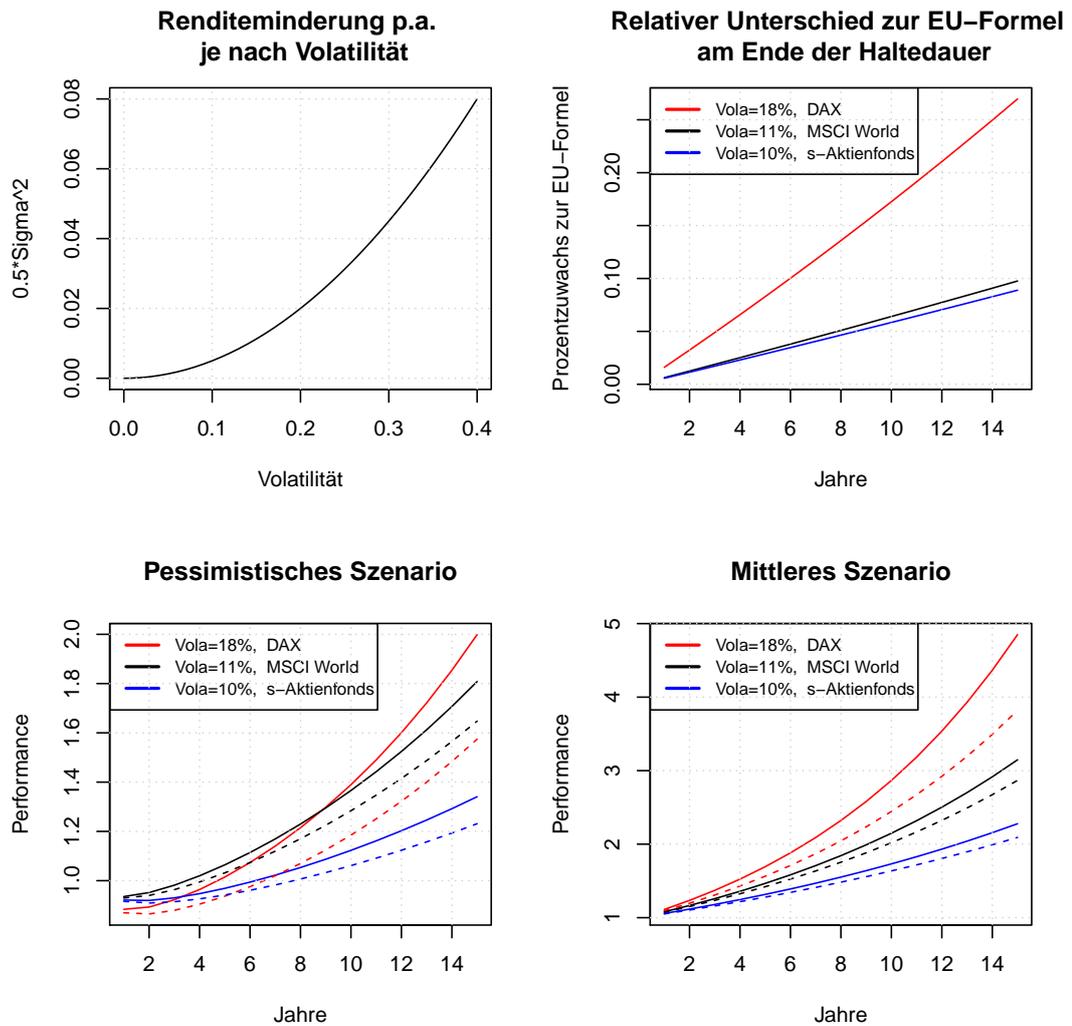


Abbildung 2.1: Auswirkungen des zusätzlichen Terms $-0,5\sigma^2N$ auf die Rendite in den Performance-Szenarien mittels Cornish-Fisher-Erweiterung. Bei den strichlierten Performance-Szenarien wurde der Term wie in der Verordnung abgezogen.

2.4 PRIIP Kategorie 3: Bootstrapping

Für PRIIP der Kategorie 3 soll der Value-at-Risk mithilfe des Bootstrapping-Verfahrens berechnet werden. Dabei werden Renditen und Preise bis ans Ende der empfohlenen Haltedauer simuliert. Die Verordnung fordert, dass das Quantil für den VaR im Preisraum berechnet wird und nicht direkt anhand der Renditen. Da der Preis allerdings lediglich der Exponentialwert der log-Rendite ist, lässt sich die Reihenfolge natürlich vertauschen.

Beim Bootstrapping-Verfahren werden Statistiken und Schätzfunktionen wie beispielsweise der Durchschnitt und deren Verteilung analysiert. Dabei wird die Verteilung der Statistik anhand von Elementen der „Bootstrap-Verteilung“ simuliert. Die Bootstrap-Verteilung ist die Verteilung aller möglichen Stichproben vom Umfang n , die aus einer ursprünglichen „Originalstichprobe“ der Größe n durch zufälliges Ziehen mit Zurücklegen gebildet werden können. Die Anzahl aller möglicher unterschiedlicher Stichproben ist (vgl. Lothar Sachs, 2016, S.63):

$$\binom{2n-1}{n}$$

Das Bootstrap-Verfahren setzt Austauschbarkeit der Daten voraus, also dass die Verteilung aufeinanderfolgender Beobachtungen nicht durch die Reihenfolge verändert wird (vgl. Lothar Sachs, 2016, S.378). Austauschbarkeit der Daten ist eine schwächere Forderung als unabhängige, identisch verteilte Beobachtungen.

Die wesentlichen Vorteile des Bootstrapping bei der Analyse von Schätzfunktion sind:

- Intuitives Verständnis theoretischer Konzepte
- Kein spezielles Verteilungsmodell für die Zufallsvariablen erforderlich (für Folgerungen aus dem zentralen Grenzwertsatz sollte $n > 20$ eingehalten sein)
- Verfahren für eine Vielzahl von Statistiken anwendbar, ohne neue Verteilungsmodelle herleiten zu müssen
- einfache Anwendung mittels Computer

2.4.1 Allgemeine Vorgehensweise

Gegeben sei eine Stichprobe X_1, \dots, X_n vom Umfang n mit einer Realisierung x_1, \dots, x_n . Falls diese Stichprobe repräsentativ für die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, können durch Bootstrapping Aussagen über spezielle Schätzfunktionen $\hat{v}_n = f(x_1, \dots, x_n)$ anhand der Werte x_1, \dots, x_n gemacht werden.

1. Erzeugen neuer Stichproben (über 500) durch Ziehen mit Zurücklegen aus den vorliegenden Daten, jeweils mit gleichem Stichprobenumfang n :

$$x_1^{*k}, \dots, x_n^{*k}, k = 1, \dots, K$$

2. Berechnung der Statistik für die neuen Stichproben führt auf wiederholte Bootstrap-Schätzungen

$$\hat{v}_n^{*k} = f(x_1^{*k}, \dots, x_n^{*k})$$

3. Die $\hat{\vartheta}_n^{*k}$ dienen als Bootstrap-Stichprobe für die Beurteilung der Verteilung des zu schätzenden Parameters. Insbesondere können Quantile dieser Verteilung bestimmt und als Konfidenzintervalle interpretiert werden.

Der Bootstrap-Standardfehler der Schätzung kann aus der Standardabweichung der Bootstrap-Stichprobe berechnet werden:

$$SE_{boot, \hat{\vartheta}} = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K \left(\hat{\vartheta}_n^{*k} - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{\vartheta}_n^{*k} \right)^2}$$

Konfidenzintervalle für die Schätzfunktion können nach der *Bootstrap t-Methode* definiert werden:

$$\hat{\vartheta} \pm t^* \cdot SE_{boot, \hat{\vartheta}}$$

Dabei kann t^* das entsprechende Quantil der t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden sein oder es wird eine t^* -Verteilung aus Bootstrap-Stichproben erzeugt: $t^{*k} = (\hat{\vartheta}_n^{*k} - \hat{\vartheta}) / SE_{boot, \hat{\vartheta}}$.

2.4.2 Bootstrapping zur Näherung der Faltung

Im Unterschied zur allgemeinen Bootstrapping-Vorgehensweise sind die Resamples in der EU-Verordnung nicht von der gleichen Länge wie die Original-Stichprobe. In der PRIIP-Verordnung werden Resamples je nach der Länge der gewünschten Haltedauer T in Jahren gemacht. Bei einer Original-Stichprobe von Tagesrenditen sind das beispielsweise Resamples der Länge $250 \cdot T$, wenn ein Jahr mit 250 Handelstagen angenommen wird. Die Vorgehensweise in der EU-Verordnung ist:

1. Erzeugen neuer Stichproben einer vorgegebenen Länge N durch Ziehen mit Zurücklegen aus der Stichprobe der historischen logarithmischen Renditen
2. Addition aller Renditen einer Stichprobe zur Simulation der Gesamrendite nach N Perioden

Die Verordnung setzt eine Mindestanzahl von 10.000 Simulationen fest.

Diese Simulationen approximieren die Verteilung der Summe von N aufeinander folgenden Renditen. Dies stellt eine Näherung für die Faltung von N unabhängigen Zufallsvariablen $r_i, i \in \{1, \dots, N\}$ dar.

Denn es gilt: Sind X und Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungen F_X und F_Y , so ist die Verteilung der Summe der Zufallsvariablen die Faltung der Verteilungen der Zufallsvariablen, also

$$F_{X+Y} = F_X * F_Y$$

Falls X und Y Dichtefunktionen besitzen, gilt für die Dichtefunktion der Summe von X und Y

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y) \cdot f_Y(x-y) dy$$

2 Die Methoden der Verordnung

Die Stichprobe aus den 10.000 Gesamtrenditen soll dann für die Berechnung von Quantilen genutzt werden. Dabei kommt die empirische Quantilsfunktion zum Einsatz. Dabei sei angemerkt, dass es dazu verschiedene Methoden gibt. Die Statistiksoftware „R“ kennt beispielsweise neun verschiedene Methoden:

<http://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/stats/html/quantile.html>

Dazu wird in der EU-Verordnung nichts weiter erwähnt.

Aufgrund des Zentralen Grenzwertsatzes wird die Stichprobe der 10.000 Simulationen je nach Länge N immer näher normalverteilt sein.

Werden anstatt von Preisen (also Spotpreisen) ganze Kurven analysiert, soll weiter eine Hauptkomponentenanalyse durchgeführt werden, um sicherzustellen, dass die Simulation der Bewegungen jedes Punktes auf der Kurve über die Haltedauer zu einer konsistenten Kurve führt. Darauf werden wir nicht näher eingehen.

Für PRIIP der Kategorie 3 werden auch Wechselkurseffekte berücksichtigt, falls die Ausübungswährung von der Anlagewährung abweicht. Dies ist für PRIIP der Kategorie 2 nicht der Fall.

Bemerkung 2.4.1 (Möglicher Fehler in der EU-Verordnung) *Wie bei den Quantilen durch die Cornish-Fisher-Erweiterung für PRIIP der Kategorie 2 wird auch im Stress-Szenario für PRIIP der Kategorie 3 der Term $-0,5\bar{\sigma}_S^2 N$ abgezogen. Dazu gibt es auch beim Bootstrap-Verfahren mit historischen log-Renditen keinen Grund. Ob die anderen drei Szenarien vom Abziehen des Terms ausgeschlossen sind, ist nicht ganz klar ersichtlich. In [EU, 2017b] Anhang IV Nummer 12 heißt es:*

„Bei PRIIP der Kategorie 3 wird die Berechnung der optimistischen, mittleren und pessimistischen Performance-Szenarien wie folgt angepasst: a) die erwartete Rendite für jeden Vermögenswert entspricht der beobachteten Rendite während der gemäß Anhang II Nummer 6 bestimmten Periode; b) die erwartete Performance wird am Ende der empfohlenen Haltedauer ohne Abzinsung der erwarteten Performance unter Verwendung des erwarteten risikolosen Abzinsungsfaktors berechnet.“

In [Committee, 2018] wird der Term $-0,5\bar{\sigma}^2 N$ ebenfalls abgezogen.

Bemerkung 2.4.2 (Risikoloser Abzinsungsfaktor) *Für PRIIP der Kategorie 3 soll das Quantil für den VaR mit einem risikolosen Abzinsungsfaktor auf den heutigen Gegenwartszeitpunkt abgezinst werden (vgl. EU, 2017b, Anhang II Nummer 16). Auch das Stressszenario ist davon nicht spezifisch ausgenommen (vgl. EU, 2017b, Anhang IV Nummer 13). Näher spezifiziert ist dieser Faktor dabei nicht. Ein solches Abzinsen wird bei der VaR-Berechnung für PRIIP der Kategorie 2 nicht verlangt. Dies stellt eine Benachteiligung gegenüber den PRIIP der Kategorie 2 dar, da die VEV höher wird. Für einen Abzinsungsfaktor $0 < d < 1$ eines PRIIP-Preises am Ende der Haltedauer zeigen wir*

$$\frac{VaR_{Preis} \cdot d < VaR_{Preis}}{\sqrt{T}} > \frac{\sqrt{3,842 - 2 \cdot \ln(VaR_{Preis} \cdot d)} - 1,96}{\sqrt{T}} > \frac{\sqrt{3,842 - 2 \cdot \ln(VaR_{Preis})} - 1,96}{\sqrt{T}}$$

Generell ist die Formel zur Berechnung der Gesamtrendite einer einzelnen Simulation für die VEV in [EU, 2017b], Anhang II Nummer 22 sehr unklar dargestellt.

	1 Jahr	> 1 Jahr
Tägliche Preise	21	63
Wöchentliche Preise	8	16
Monatliche Preise	6	12

Tabelle 2.3: Längenintervall w zur Berechnung der Stressvolatilität je nach Haltedauer

2.5 Stressvolatilität

Das Stessszenario soll eine besonders schlechte Entwicklung des PRIIP darstellen. Dafür werden im Vergleich zu den anderen Performance-Szenarien drei Dinge neu gehandhabt. Zum einen wird die geschätzte mittlere Rendite aus den historischen log-Renditen nicht verwendet. Zum Zweiten werden die Quantile der Renditeverteilung mit einem noch niedrigeren Level α berechnet. Dieses beträgt 1% für 1 Jahr und 5% für jede andere Haltedauer.

Und zum Dritten wird zuvor eine neue Stressvolatilität bestimmt. Dazu wird ein Längenintervall w je nach Art der historischen log-Renditen und der Haltedauer definiert (siehe Tabelle 2.3).

Die Stressvolatilität ist nach [EU, 2017b], Anhang IV Nummer 10 definiert als 90%-Quantil (99% für eine Haltedauer bis zu einem Jahr) einer Stichprobe von Volatilitäten σ_i^w . Für eine chronologische Reihe an historischen Renditen $r_i, i \in \{1, \dots, n\}$ mit r_1 als älteste Rendite ist σ_i^w definiert mit

$$\sigma_i^w = \sqrt{\frac{\sum_{j=i}^{i+w} (r_j - M_i)^2}{M_w}} \quad (5.24)$$

wobei

$$M_i = \frac{\sum_{j=i}^{i+w} r_j}{M_w}$$

und M_w die Anzahl der Beobachtung im Teilintervall i bis $i + w$ ist. Damit ist $M_w = w + 1$ und müsste von der Verordnung nicht extra eingeführt werden. Die Formel der Stressvolatilität ist in der Verordnung nicht so klar definiert, wie es in dieser Arbeit versucht wird.

Bemerkung 2.5.1 (Erwartungstreuer Schätzer) Auch bei der Stressvolatilität wird die Standardabweichung nicht mit dem erwartungstreuen Schätzer für die Varianz berechnet. Sonst müsste die Formel lauten

$$\sigma_i^w = \sqrt{\frac{\sum_{j=i}^{i+w} (r_j - M_i)^2}{M_w - 1}}$$

Die Stressvolatilität ist dann

$$\sigma_S^w = \begin{cases} F_{\sigma_i^w}^{-1}(0, 99) & \text{für eine Haltedauer} \leq 1 \\ F_{\sigma_i^w}^{-1}(0, 90) & \text{für eine Haltedauer} > 1 \end{cases} \quad (5.25)$$

2 Die Methoden der Verordnung

wobei $F_{\sigma_i^w}^{-1}(\alpha)$ die empirische Quantilsfunktion für die Stichprobe der σ_i^w ist.

In der Cornish-Fisher-Erweiterung wird für das Stressszenario die ursprüngliche Volatilität $\bar{\sigma}$ durch die Stressvolatilität ersetzt. Außerdem wird die mittlere Rendite $\bar{\mu} \cdot N$ weggelassen. Für das Bootstrapping-Verfahren werden die historischen Renditen adjustiert:

$$r_i^{adj} = r_i \cdot \frac{\sigma_S^w}{\bar{\sigma}}$$

So haben sie genau die Volatilität σ_S^w . Schiefe und Exzess bleiben gleich. Um die mittlere Rendite zu entfernen, wird jeder Simulation der Mittelwert der $r_i^{adj} \cdot N$ abgezogen.

3 PRIIP Kategorie 4: AVÖ-Branchenstandard mit Kapitalmarktmodell

Zu den PRIIP der Kategorie 4 gehören jene Produkte, deren Werte von nicht am Markt beobachteten Faktoren abhängen. Dabei werden keine weiteren mathematischen Methoden erläutert, sondern die Verwendung anerkannter Branchenstandards gefordert.

Für die Lebensversicherung wurde vom Arbeitskreis Versicherungen der Aktuarvereinigung Österreichs (AVÖ) in Zusammenarbeit mit der Gesellschaft für Finanz- und Aktuarwissenschaften mbH (ifa Ulm) ein neuer Branchenstandard dafür eingeführt (vgl. AVÖ, 2017). Dieser wurde nach öffentlicher Konsultation am 16.11.2017 vom Vorstand der AVÖ beschlossen. Darin wird ein Verfahren beschrieben, welches auf Produkte der klassischen Lebensversicherung als Ganzes angewendet wird. Eine Trennung wie in Nummer 27 Anhang II der EU-Verordnung in Komponenten, bei denen die Methoden der PRIIP-Kategorien 3 verwendet werden, ist nicht vorgesehen. Die mathematischen Methoden des Standards orientieren sich stark am „Basismodell der Kapitalmarktsimulation“ der deutschen Produktinformationsstelle Altersvorsorge (PIA).

Im Österreichischen Branchenstandard für PRIIPs der Kategorie 4 kommt ein stochastisches Kapitalmarktmodell zum Einsatz. Dabei werden zwei Assetklassen modelliert: der risikofreie Teil als Anlage in Anleihen und der risikobehaftete Teil als Anlage in Aktien. Auf Basis dieser beiden Assetklassen ergibt sich die Deckungsstockrendite und die daraus abgeleitete Gesamtverzinsung für die klassische Lebensversicherung mit Gewinnbeteiligung.

3.1 Svensson-Parametrisierung der initialen Zinsstrukturkurve

Ausgangspunkt des österreichischen Branchenstandards ist ein Zinsmodell. Dieses besteht zum einen aus einem stochastischen Short-rate Modell und zum anderen aus der Zinsstrukturkurve am Markt beobachteter Anleihen. Durch die Zinssätze von ähnlichen am Markt befindlichen Anleihen mit unterschiedlicher Laufzeit kann eine Zinsstrukturkurve geschätzt werden.

Dazu brauchen wir den Begriff der *Nullkuponanleihe*. Eine Nullkuponanleihe ist ein Wertpapier, das zu einem festgelegten Zahltag T eine Auszahlung von einer Währungseinheit garantiert. Wir bezeichnen mit $P(t, T)$ den Preis einer Nullkuponanleihe mit Zahltag T zum Zeitpunkt t , $t \leq T$. Weiter definieren wir einige Zinssätze.

3 PRIIP Kategorie 4: AVÖ-Branchenstandard mit Kapitalmarktmodell

Definition 3.1.1 (Stetiger Zinssatz) Der stetige Zinssatz (continuously compounded spot rate) ist

$$R(t, T) := -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t} \quad (1.1)$$

Also ist $P(t, T) \cdot e^{(T-t) \cdot R(t, T)} = 1$.

Definition 3.1.2 (Short-rate) Der kurzfristige Zinssatz (Short-rate) ist, vorausgesetzt der Limes existiert,

$$r(t) := \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) \quad (1.2)$$

Definition 3.1.3 (Stetiger Terminzinssatz) Der stetige Terminzinssatz (continuously compounded forward rate) ist

$$R(t, S, T) := -\frac{\ln(P(t, T)) - \ln(P(t, S))}{T - S} \quad (1.3)$$

Definition 3.1.4 (forward rate) Der augenblickliche Terminzinssatz (forward rate) ist

$$f(t, T) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} R(t, T, T + \epsilon) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} \quad (1.4)$$

Die initiale Zinsstrukturkurve wird im österreichischen Branchenstandard durch eine *Svensson-Parametrisierung* modelliert. Der Zins für eine Laufzeit t wird durch Svensson (vgl. AVÖ, 2017 und Svensson, o.D.) wie folgt geschätzt:

$$z(0, t) = \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \frac{\tau_1}{t} \\ \quad + \beta_2 \left(\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \frac{\tau_1}{t} - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \\ \quad + \beta_3 \left(\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right) \frac{\tau_2}{t} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) & \text{für } t \leq \hat{t} \\ \hat{z} & \text{für } t > \hat{t} \end{cases} \quad (1.5)$$

Dabei wird im Branchenstandard ab einer bestimmten Laufzeit \hat{t} eine konstante Spot rate \hat{z} angenommen.

Mithilfe von geschätzten Parametern der Deutschen Bundesbank werden hier diskrete Zinssätze erzeugt. Der Preis für eine Nullkuponanleihe unter Verwendung der Svensson-Kurve ist

$$P^M(0, t) = (1 + z(0, t))^{-t} \quad (1.6)$$

Die aktuell am Markt beobachteten Forward-rates bezeichnen wir mit

$$f^M(0, T) = -\frac{\partial \ln P^M(0, T)}{\partial T} \quad (1.7)$$

3.2 Affine Short-rate Modelle und Vasicek-Modell

Zur Simulation risikofreier Zinsen und der Kursentwicklung zugehöriger festverzinslicher Anleihen wird ein Zinsmodell benötigt. Der österreichische Branchenstandard greift dabei auf ein Zwei-Faktor-Vasicek-Modell zurück, das in [Brigo und Mercurio, 2006] als „G2++“ bezeichnet wird. Dabei wird das Modell um Risikoprämien für den Zinsprozess erweitert.

Führen wir zuerst das gewöhnliche Vasicek-Modell ein. Dazu benötigen wir die Definition des Short-rate Modells. Sei $(\Omega, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 3.2.1 (Risikoneutrales Short-rate Modell) *Ein risikoneutrales Short-rate Modell ist ein Tripel (r_0, b, σ) , sodass $r_0 \in \mathbb{R}$, b, σ adaptierte stochastische Prozesse (also b_t, σ_t sind \mathcal{F}_t -messbar und $b, \sigma : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ sind messbar) mit*

$$\int_0^t |b(s)| ds < \infty \quad \mathbb{P} - f.s.$$

$$\int_0^t |\sigma^2(s)| ds < \infty \quad \mathbb{P} - f.s.$$

sind. In einem Short-rate Modell (r_0, b, σ) definieren wir die Short-rate

$$r_t := r_0 + \int_0^t b(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s, \quad t \geq 0 \quad (2.8)$$

und das Geldmarktkonto

$$C_t := \exp\left(\int_0^t r_u du\right), \quad t \geq 0 \quad (2.9)$$

Der Preis einer Nullkuponanleihe ist definiert durch

$$P(t, T) := \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \middle| \mathcal{F}_t\right], \quad \forall 0 \leq t \leq T < \infty \quad (2.10)$$

Dabei ist $(\frac{P(t, T)}{C_t})_{t \in [0, T]}$ ein Martingal und $P(T, T) = 1$.

Definition 3.2.2 (Affines Short-rate Modell) *Ein Short-rate Modell heißt affin, wenn es $\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\forall t \geq 0$*

$$b(t) = \beta_0 + \beta_1 r_t$$

$$\sigma^2(t) = \alpha_0 + \alpha_1 r_t$$

Ein Short-rate Modell hat eine affine Terminzinskurve (affine term-structure), wenn es C^1 -Funktionen $A, C : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$P(t, T) = \exp(-A(T-t) - C(T-t)r_t), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.11)$$

3 PRIIP Kategorie 4: AVÖ-Branchenstandard mit Kapitalmarktmodell

Das *Vasicek-Modell* ist ein affines Short-rate Modell x_t mit

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_0 > 1$$

$$x_t = x_0 + \int_0^t \beta_0 + \beta_1 x_s ds + \int_0^t \sqrt{\alpha_0} dW_s$$

Die Short-rate im Vasicek-Modell folgt einem Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit konstanten Koeffizienten. Dieser Prozess ist meist über die nachfolgende stochastische Differentialgleichung gegeben. Die Parameterbezeichnungen lehnen sich nun an den Branchenstandard an (vgl. AVÖ, 2017, S. 7).

$$dx(t) = a(d_x - x(t))dt + \sigma dW_t, \quad x(0) = 0 \quad (2.12)$$

Dabei bezeichnet $d_x \in \mathbb{R}$ das gleichgewichtige Zinsniveau, zu dem der Prozess je nach der Höhe des *mean reversion speed* $a > 0$ unterschiedlich schnell zurückgezogen wird. Der Einfluss der Brownschen Bewegung W_t wird über $\sigma > 0$ bestimmt und steuert damit die Stärke des Zufalls im Zinsmodell.

Durch die Integration von (2.12) erhalten wir für $s \leq t$ (vgl. Brigo und Mercurio, 2006, S. 58)

$$x(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + d_x \left(1 - e^{-a(t-s)}\right) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u \quad (2.13)$$

Die Short-rate im Vasicek-Modell ist damit normalverteilt mit den Parametern

$$\mathbb{E}[x(t)|\mathcal{F}_s] = x(s)e^{-a(t-s)} + d_x \left(1 - e^{-a(t-s)}\right)$$

$$\text{Var}[x(t)|\mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2}{2a} \left(1 - e^{-2a(t-s)}\right)$$

Da das Vasicek-Modell affin ist, lässt sich der Preis einer Nullkuponanleihe durch eine affine Termizinskurve darstellen. Die beiden C^1 -Funktionen sind gegeben durch (vgl. Brigo und Mercurio, 2006, S. 59):

$$A(t) = - \left(d_x - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) (C(t) - t) + \frac{\sigma^2}{4a} C(t)^2$$

$$C(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

Das Vasicek-Modell lässt sich weiter ausbauen um aktuelle am Markt beobachtete Termizinskurven zu berücksichtigen. Dazu wird die Forward-rate $f^M(0, T)$ aus (1.7) in das mittlere Zinsniveau d_x eingebaut.

Die Preise von Nullkuponanleihen mit Fälligkeit T der am Markt beobachteten Zinsstrukturkurve bezeichnen wir wieder mit $P^M(0, T)$. Die initiale Zinsstrukturkurve wird, wie bereits erläutert, über eine Svensson-Parametrisierung modelliert. Das Vasicek-Modell wird nun dahingehend ausgebaut, dass das mittlere Zinsniveau d_x der am Markt beobachteten initialen Zinsstrukturkurve entspricht.

Die Short-rate $x(t)$ aus (2.13) ändert sich nun zu

$$x(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + \psi(t) - \psi(s)e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u, \quad s \leq t \quad (2.14)$$

mit

$$\psi(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2$$

3.3 Das Zwei-Faktor-Vasicek-Modell

Im Bestreben, der Realität noch etwas näher zu gelangen, können Zwei-Faktor-Modelle verwendet werden. Diese erklären unter dem realen Maß einen höheren Teil der Schwankungen historischer Zinskurven. Außerdem haben Ein-Faktor-Modelle einen Nachteil, wenn es um die Korrelation zwischen Nullkuponanleihen oder Zinssätzen mit unterschiedlicher Fälligkeit geht. In einem affinen Short-rate Modell gilt für die Korrelation von stetigen Zinssätzen (continuously compounded spot rate) mit unterschiedlichen Fälligkeiten:

$$\begin{aligned} \text{Corr}(R(t, T_1), R(t, T_2)) &= \text{Corr} \left(-\frac{\ln(P(t, T_1))}{T_1 - t}, -\frac{\ln(P(t, T_2))}{T_2 - t} \right) \\ &= \text{Corr} \left(\frac{A(T_1 - t) + C(T_1 - t)r_t}{T_1 - t}, \frac{A(T_2 - t) + C(T_2 - t)r_t}{T_2 - t} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ein 30-Jahreszins ist also aufgrund der gleichen zugrundeliegenden Short-rate r_t perfekt korreliert mit einem 3-Monatszins. Es ist nicht unbedingt plausibel, dass sich ein Schock bei kurzfristigen Zinssätzen exakt genauso auch bei längeren Laufzeiten auswirken würde.

Kommen wir nun zum *Zwei-Faktor-Modell mit initialer Zinsstrukturkurve* des Branchenstandards. Dazu werden zwei Ornstein-Uhlenbeck Prozesse unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} definiert:

$$\begin{aligned} dx(t) &= -ax(t)dt + \sigma dW_t^x, & x(0) &= 0 \\ dy(t) &= -by(t)dt + \eta dW_t^y, & y(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dabei ist die Korrelation der beiden Brownschen Bewegungen W^x und W^y durch

$$dW_t^x dW_t^y = \rho dt$$

gegeben. Zu Simulationszwecken lassen sich W^x und W^y durch zwei unabhängige Brownsche Bewegungen \tilde{W}^x und \tilde{W}^y wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} dW^x(t) &= d\tilde{W}^x(t) \\ dW^y(t) &= \rho d\tilde{W}^x(t) + \sqrt{1 - \rho^2} d\tilde{W}^y(t) \end{aligned}$$

Die Short-rate setzt sich aus den beiden Faktoren und einer deterministischen Funktion $\psi(t)$ für die Berücksichtigung der initialen Zinsstrukturkurve zusammen. Dieses Modell wird in [Brigo und Mercurio, 2006] als „G2++“ bezeichnet.

$$r(t) = x(t) + y(t) + \psi(t) \quad (3.16)$$

3 PRIIP Kategorie 4: AVÖ-Branchenstandard mit Kapitalmarktmodell

Da dieser Prozess normalverteilt ist, lässt sich der Preis einer Nullkuponanleihe durch den Erwartungswert und die Varianz des Integrals $\int_t^T r(u)du$ berechnen (vgl. Brigo und Mercurio, 2006, S. 145). Dabei ist der Erwartungswert unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} zu verwenden.

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbb{E} \left[\exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \exp \left(-\mathbb{E} \left[\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t \right] + \frac{1}{2} \text{Var} \left[\int_t^T r_u du \middle| \mathcal{F}_t \right] \right) \\ &= \exp \left(-M(t, T) + \frac{1}{2} V(t, T) \right) \end{aligned}$$

wobei

$$M(t, T) := \int_t^T \psi(u) du + \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) + \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t)$$

und

$$\begin{aligned} V(t, T) &:= \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right) \\ &\quad + \frac{\eta^2}{b^2} \left(T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right) \\ &\quad + 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left(T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die deterministische Funktion $\psi(t)$ lässt sich durch die am Markt beobachteten Preise von Nullkuponanleihen bestimmen. Es muss gelten:

$$P^M(0, T) = \exp(-M(0, T) + \frac{1}{2} V(0, T))$$

Mit Korollar 4.2.1 aus [Brigo und Mercurio, 2006] folgt damit

$$\psi(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{-bt})^2 + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} (1 - e^{-at})(1 - e^{-bt}) \quad (3.18)$$

Die Preise der Nullkuponanleihen ergeben sich nach Korollar 4.2.1 durch

$$P(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \cdot e^{A(t, T)} \quad (3.19)$$

wobei

$$A(t, T) = \frac{1}{2} [V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)] - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t)$$

Nach der PRIIP-Verordnung sollen Simulationen von Kapitalmarktszenarien gemacht werden. Diese erfolgen nun aber nach dem realen Maß (also das originäre Maß, das die Bewegung der Kapitalmärkte beschreibt). Daher werden im Branchenstandard die Zinsprozesse um zeitabhängige Risikoprämien erweitert.

$$\begin{aligned}x_P(t) &:= x(t) + d_x(1 - e^{-at}) \\y_P(t) &:= y(t) + d_y(1 - e^{-bt})\end{aligned}\tag{3.20}$$

Die Risikoprämien fließen damit in die Simulation der Short-rate

$$r(t) := x(t) + y(t) + \psi(t) + d_x(1 - e^{-at}) + d_y(1 - e^{-bt})\tag{3.21}$$

sowie in die Simulation der Preise $P(t, T)$ der Nullkuponanleihen ein.

$$A(t, T) := \frac{1}{2}[V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)] - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}x_P(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b}y_P(t)$$

mit $V(t, T)$ aus (3.17).

3.4 Simulation der Deckungsstockrendite

Nun haben wir mit der Short-rate r_t und den Preisen der Nullkuponanleihen $P(t, T)$ ein Zinsmodell zur Verfügung, mit dem die beiden Assetklassen (festverzinsliche Wertpapiere und Aktien) des Branchenstandards modelliert werden können.

Der Basis-Aktienkurs wird durch eine verallgemeinerte geometrische Brownsche Bewegung dargestellt.

$$dS(t) = (r(t) + \lambda)S(t)dt + \sigma_s S(t)dW_t^S\tag{4.22}$$

Dabei bezeichnet $r(t)$ die Short-rate aus (3.21) und λ die Risikoprämie des Aktienprozesses (als Überrendite gegenüber der Short-rate). Die Volatilität des Basis-Aktienkurses wird mit σ_s bezeichnet. Mit W_t^S wird eine weitere Brownsche Bewegung eingeführt, die unkorreliert zu den beiden Brownschen Bewegungen W_t^x und W_t^y des Zinsmodells aus (3.15) ist.

Der Aktienkurs zum Zeitpunkt t mit Startwert S_0 ist gegeben durch

$$S(t) = S_0 \exp\left(\int_0^t r(s)ds + (\lambda - 0,5\sigma_s^2)t + \sigma_s W_t^S\right)\tag{4.23}$$

Das *Aktieninvestment* eines Deckungsstocks wird durch eine weitere verallgemeinerte geometrische Brownsche Bewegung F_t dargestellt. Das hat einzig und allein den Grund, dass sich Versicherungsunternehmen die Volatilität σ_F ihres individuellen Aktieninvestments einstellen können. Der Parameter σ_F ist einer von mehreren unternehmensindividuellen Parametern des österreichischen Branchenstandards. Damit verändert sich auch die Überrendite des Aktieninvestments. Die Brownsche Bewegung bleibt die gleiche wie beim Basisaktienmodell.

$$F(t) = F_0 \cdot \exp\left(\int_0^t r(s)ds + \left(\lambda \frac{\sigma_F}{\sigma_s} - 0,5\sigma_F^2\right)t + \sigma_F W_t^F\right)\tag{4.24}$$

3 PRIIP Kategorie 4: AVÖ-Branchenstandard mit Kapitalmarktmodell

Das Festzinsportfolio wird anhand eines durchschnittlichen Kupons $R_{B,d}(t)$ modelliert. Dieser durchschnittliche Kupon wird aus Kuponsätzen $K(t)$ mit folgender Eigenschaft berechnet:

$$K(t) = \frac{1 - P(t, t + 2d)}{\sum_{j=1}^{2d} P(t, t + j)} \quad (4.25)$$

Mit d wird die *Duration* eines aktuellen Festzinsportfolios einer Versicherung bezeichnet. Das ist der mit Barwerten der Zahlungen gewichtete Durchschnitt der Laufzeiten in einem Anleihenportfolio. Die Duration stellt einen weiteren unternehmensindividuellen Parameter dar, der von einer Versicherung bereitgestellt werden muss.

Ein Kuponsatz $K(t)$ ist also der jährliche Kupon einer Anleihe mit einer Laufzeit von $2d$, dessen Kaufpreis seiner Nominale entspricht (welche gleich 1 ist). Das bedeutet, dass die diskontierten Kuponzahlungen sowie das diskontierte Nominale, also der aktuelle Preis der Anleihe, gleich dem Nominale sind.

$$K(t)P(t, t + 1) + K(t)P(t, t + 2) + \dots + K(t)P(t, t + 2d) + 1 \cdot P(t, t + 2d) = 1$$

So ein Kuponsatz wird *2d-jährige Par yield* genannt und stellt eine Glättung des Zinses für einen bestimmten Zeitraum dar. Dies wird auch zur Konstruktion von Zinsswaps verwendet. Der mittlere Kupon des Festzinsportfolios wird anhand der letzten $2d$ Kuponsätze $K(t)$ definiert:

$$R_{B,d}(t) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^{2d} K(t - i) \quad (4.26)$$

Für negative Zeitindizes $(t - i)$ werden historische Werte der $K(t)$ des Festzinsportfolios eines Versicherungsunternehmens verwendet. Dabei können auch historische Svensson-Kurven verwendet werden.

Nun kommen wir letztendlich zur *Deckungsstockrendite* $R(t)$. Diese setzt sich einerseits aus dem durchschnittlichen Kupon aus (4.26) zusammen und zu einem unternehmensindividuellen Aktienanteil Λ aus den Renditen gemäß Aktieninvestment (4.24). Dabei werden zur Näherung für die Verweildauer in der Gewinnrückstellung die letzten drei Jahre geometrisch gemittelt.

$$R(t) = \sqrt[3]{\prod_{i=1}^3 \left(\Lambda \cdot \frac{F(t - i)}{F(t - i - 1)} + (1 - \Lambda) \cdot (1 + R_{B,d}(t - i)) \right)} - 1 \quad (4.27)$$

Die *Gesamtverzinsung* der klassischen Lebensversicherung mit Gewinnbeteiligung ergibt sich aus der Deckungsstockrendite unter Berücksichtigung von Garantierechnungszins RZ , Kosten K und der Beteiligungsquote BQ gemäß Lebensversicherungs-Gewinnbeteiligungsverordnung.

$$GVZ(t) = RZ + BQ \cdot \max(0, R(t) - K - RZ) \quad (4.28)$$

Im ersten Jahr ist die aktuell deklarierte Gesamtverzinsung als Inputparameter zu verwenden (und damit auch eine dazu konsistente Deckungsstockrendite R_0).

Parameter	Wert
σ_s	0,2
λ	0,04
a	0,389
b	0,097
σ	0,0182
η	0,019
ρ	-0,924
d_x	0,016
d_y	-0,00295

Tabelle 3.1: Parameter des stochastischen Kapitalmarktmodells

3.5 Parameterwahl

Um mit dem Kapitalmarktmodell des österreichischen Branchenstandards Berechnungen durchzuführen zu können werden eine ganze Reihe an Parametern benötigt.

Die meisten Parameter sind unternehmensunabhängig und fest vorgegeben. Diese werden dabei großteils vom PIA-Basismodell übernommen. Dort wurden mittels Kalibrierung die Parameter für das Jahr 2017 festgelegt (siehe Tabelle 3.1).

Die Parameter der Svensson-Zinskurve beruhen auf Schätzungen der börsennotierten Bundeswertpapiere in Deutschland. Diese werden von der deutschen Bundesbank zur Verfügung gestellt (vgl. Bundesbank, 2018). Die Kuponerträge für österreichische Bundesanleihen werden ebenfalls mit dieser Parametrisierung zuzüglich eines Aufschlags berechnet, der aus den historischen Renditen ermittelt wurde. Dabei wird für β_0 ein Aufschlag für Österreich von 0,25%-Punkten hinzuaddiert (also $\beta_0 + 0,25\%$).

Neben den fest vorgegebenen Parametern gibt es auch unternehmensabhängige Parameter. Diese müssen von den Versicherungsunternehmen selbst bestimmt und bereitgestellt werden. Zu den unternehmensindividuellen Parametern zählen

- Duration d des eigenen Festzinsportfolios
- Aktienanteil Λ im Deckungsstock
- Volatilität σ_F des Aktienanteils
- Kosten K
- Rechnungszins RZ
- Deckungsstockrendite des ersten Jahres R_0
- Gesamtverzinsung des ersten Jahres GVZ_0
- Beteiligungsquote BQ
(85% gemäß Lebensversicherungs-Gewinnbeteiligungsverordnung)
- Historische Aktienrenditen der letzten beiden Jahre
- Historische Kupons der letzten $2d$ Jahre: $K(0), K(-1), \dots, K(1 - 2d)$ mit $K(t)$ aus (4.25)

4 Backtest-Verfahren

In den folgenden zwei Kapiteln werden wir die Methoden der PRIIP-Verordnung (Verordnung Nr. 1286/2014 und ihrer Ergänzung 2017/653) zur Schätzung der Renditeverteilung anhand historischer Kurse auswerten und testen.

Wir werden die verschiedenen Methoden anhand zweier Indizes betrachten: dem DAX und dem Dow Jones. Diese Wertgegenstände sind zwar PRIIP der Kategorie 2 (Fonds, die einen Index abbilden, bieten ein nicht gehebeltes Engagement in Bezug auf die Preise der zugrunde liegenden Anlagen), jedoch lassen sich alle in der Verordnung erwähnten Methoden darauf anwenden. So können wir am besten Vergleiche anstellen. Außerdem ist es schwer, vergleichbar lange Zeitreihen für andere Wertgegenstände zu finden, wie im Falle des DAX oder des Dow Jones.

Die Berechnung erfolgen in der freien Statistiksoftware „R“, dessen aktuelle Version unter [The R Project for Statistical Computing 2018] heruntergeladen werden kann.

Das Ziel ist, die Quantile der Renditeverteilung mit allen drei Methoden anhand einer historischen Zeitreihe zu schätzen und gegen die tatsächlich eingetretene Rendite zu testen. Dabei testen wir die drei Quantile für die Performance-Szenarien, also

- das 10%-Quantil,
- das 50%-Quantil,
- und das 90%-Quantil.

Außerdem werden wir das Stress-Szenario analysieren.

Zusätzlich zu den drei Methoden „Cornish-Fisher“, „Bootstrapping“ und „Branchenstandard“ werden wir die Quantile noch anhand einer einfachen *Normalverteilung* berechnen.

Als Datenreihen verwenden wir ausschließlich historische Tagesschlusskurse.

Getestet wird die Anzahl an Unterschreitungen des geschätzten Quantils. Es wird also ein statistischer Test auf Bernoulliverteilung benötigt. Dabei orientieren wir uns an [Christoffersen, 2003] und machen zusätzlich einen Binomialtest. Außerdem wird getestet, ob die Unterschreitungen unabhängig voneinander eintreffen.

Für den Backtest wurde mit der Statistiksoftware R ein Simulationsprogramm geschrieben. Dieses Programm läuft den historischen Kurs chronologisch durch und berechnet dabei in jeder Periode die Performance-Szenarien. Dann werden sie mit den tatsächlich eingetretenen Renditen verglichen. Die Perioden können dabei je nach Haltedauer eine frei wählbare Länge haben. Die Haltedauer T kann einen Monat, ein Jahr oder im Fall von Lebensversicherungen auch eine viel längere Zeitspanne betragen.

Das bedeutet, wir berechnen die Quantile nicht nur einmalig und testen sie gegen eine Reihe danach eingetretener Renditen, sondern wir berechnen die Quantile nach jeder Periode

4 Backtest-Verfahren

erneut und bestimmen, ob die nachfolgend eingetretene Rendite unterschritten wurde. Dieses Vorgehen kommt näher an die realen Begebenheiten, da die Informationsblätter und damit die Performance-Szenarien, um aktuell zu bleiben, nach jeder Periode neu erstellt werden. Beim Kauf eines PRIIPs muss jede Kundin und jeder Kunde ein aktuelles Informationsblatt vor sich liegen haben.

Das Vorgehen für eine Datenreihe von historischen Tageskursen ist damit wie folgt

1. Start-Zeitpunkt t_0 (5 Jahre nach Beginn der Zeitreihe): Berechnung der Quantile für den Zeitpunkt $t_0 + T$ mit Haltedauer T
 - a) Berechnung der vier Performance-Szenarien für den Zeitpunkt $t_0 + T$ jeweils mit den Methoden „Normalverteilung“, „Cornish-Fisher“, „Bootstrapping“ und „Branchenstandard“
 - b) Die für die Berechnungen benötigte historische Zeitreihe nehmen wir standardmäßig aus den letzten 5 Jahren (in Anlehnung zur Verordnung)
 - c) Berechnung der tatsächlich eingetretenen Rendite zwischen t_0 und $t_0 + T$
2. Zeitpunkt t_1 nach Periodenlänge $l_P = t_1 - t_0$: Berechnung der Quantile für den Zeitpunkt $t_1 + T$
 - a) Berechnung der Performance-Szenarien für den Zeitpunkt $t_1 + T$ mittels aller Methoden
 - b) Berechnungen mittels neuer Historie aus den letzten 5 Jahren
 - c) Berechnung der tatsächlich eingetretenen Rendite zwischen t_1 und $t_1 + T$
3. analoges Vorgehen bis zum Ende der Datenreihe
4. Abzählen der Unterschreitungen für jedes geschätzte Quantil und jede Methode
5. Ausführen statistischer Tests

Für einen gültigen statistischen Test sollte die Periodenlänge l_P genauso lang sein wie die Haltedauer T . Für eine Haltedauer von 1 Monat oder 1 Jahr sollte die Periodenlänge also ebenfalls einen Monat oder ein Jahr betragen. Nur dann ist es möglich eine Stichprobe unabhängiger Beobachtungen zu erhalten.

Aus der Sicht einer Lebensversicherung möchten wir allerdings auch eine besonders lange Haltedauer betrachten. Für eine Haltedauer von 15 oder 20 Jahren werden wir kaum eine aussagekräftige Stichprobe an Beobachtungen bekommen. Selbst mit einem über 100 Jahre alten Index wie dem Dow Jones bekommen wir bei einer Haltedauer von 20 Jahren nur 5 Beobachtungen.

Im realen Geschäftsverlauf ist es so, dass jedes Jahr neue Informationsblätter mit neu berechneten Performance-Szenarien erstellt werden müssen und diese werden bei Lebensversicherungen über eine lange Haltedauer sein. Dies möchten wir auch anhand eines besonders langen historischen Kurses nachsimulieren. Für diese Simulation wird die Periodenlänge l_P ein Jahr sein und die Haltedauer 15 oder 20 Jahre. Bei diesen Simulationen sei angemerkt, dass die statistischen Tests nur mehr wenig bis keine Gültigkeit haben, da die tatsächlich eingetretenen Renditen voneinander abhängen. Wir werden dies auch an den P-Werten des Unabhängigkeitstests sehen.

Kommen wir nun zur Berechnung der Quantile.

4.1 Berechnung der Quantile

Zur Berechnung der Quantile wurden R-Funktionen für die einzelnen Methoden geschrieben. Jede Methode benötigt eine Reihe von Parametern, welche anhand historischer Renditen geschätzt werden. Werden die Berechnungen mit log-Tagesrenditen durchgeführt, so sind nach der Verordnung mindestens die letzten zwei Jahre an Tagesrenditen zu verwenden. Sind nur Monatsrenditen zur Verfügung, muss eine Historie von mindestens 5 Jahren verwendet werden.

Als Vergleich zu den drei Methoden der PRIIP-Verordnung berechnen wir die Quantile außerdem mit einer einfachen Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$. Die Schätzer für μ und σ sollen das arithmetische Mittel bzw. die Stichprobenstandardabweichung der historischen Tagesrenditen sein.

Die Quantile mittels Normalverteilung sind schnell mit den eingebauten R-Funktion zu berechnen:

```

1 TDauer   = 1           # Haltedauer T in Jahren: zB 1/12, 1, 5 Jahre
2 hp       = 252         # Handelsperiode Historische Tagesrenditen 252=12*21
3 n        = TDauer * hp # Schritte bis zum Ende der Haltedauer
4 HistDauer = 2         # Historienlaenge in Jahren: min 2 bei Tagesrenditen
5
6 Start    = HistDauer*hp
7
8 pPes     = 0.1
9 pMit     = 0.5
10 pOpt    = 0.9
11
12 KursDaten = read.csv2("Fondskurse.csv", header=TRUE)
13 TRUE
14 k        = KursDaten[, "Schluss"]
15 r        = log( k[2:(length(k))] / k[1:(length(k)-1)] ) # log-Tagesrenditen
16 rhist    = r[(length(r)-Start+1):length(r)]           # r der letzten 2 Jahre
17
18 qnorm(pPes, mean(rhist)*n, sd(rhist)*sqrt(n) )
19 qnorm(pMit, mean(rhist)*n, sd(rhist)*sqrt(n) )
20 qnorm(pOpt, mean(rhist)*n, sd(rhist)*sqrt(n) )

```

Dabei berechnet hier die eingebaute R-Funktion „qnorm“ ein Quantil der geschätzten Renditeverteilung für ein Jahr.

Die Stressvolatilität wird für historische Tagesrenditen mit der folgende Funktion berechnet:

```

1 fStressVola = function(r, TDauer){
2 if(TDauer<=1) pstress = 0.99 else pstress = 0.90
3 if(TDauer<=1) w = 21 else w = 63 # Laengenteilintervall
4
5 sigmawti = rep(NA, (length(r)-w) )
6 for(i in 1:(length(r)-w) ){
7 sigmawti[i] = sqrt( sum( (r[i:(i+w)] - mean(r[i:(i+w)]))^2 ) / (length(r[i:(i+w)])) ) )
8 }
9 sigmastress = quantile( sigmawti, pstress )
10 sigmastress
11 }

```

4 Backtest-Verfahren

4.1.1 Quantilsberechnung mittels Cornish-Fisher-Erweiterung

Für die Berechnungen mit der Cornish-Fisher-Erweiterung wurde eine neue R-Funktion definiert. Sie benötigt als Input einen Vektor r an historischen log-Tagesrenditen, die Anzahl n an Schritten bis zum Ende der Haltedauer T und eine Wahrscheinlichkeit a .

```
1 fcornish = function(r, n, a){
2 m0 = length(r)
3 m1 = mean(r)
4 m2 = sum( (r - m1)^2 ) / (m0-1) # in Verordnung nur /m0
5 m3 = sum( (r - m1)^3 ) / m0
6 m4 = sum( (r - m1)^4 ) / m0
7 sigma = m2^(1/2)
8 Schiefe = m3/(sigma^3)
9 Exzess = m4/(sigma^4)-3
10 QuantilCornish = m1*n + sigma*sqrt(n)*( qnorm(a) +
11 + (qnorm(a)^2-1)/6*Schiefe/sqrt(n) +
12 + (qnorm(a)^3-3*qnorm(a))/24*Exzess/n +
13 - (2*qnorm(a)^3-5*qnorm(a))/36*Schiefe^2/n )
14 QuantilCornish
15 }
```

Bemerkung 4.1.1 Im Vergleich zur EU-Verordnung wird im R-Code in Zeile 4 der erwartungstreue Schätzer der Standardabweichung verwendet. So berechnet auch die eingebaute R-Funktion „sd“ die Standardabweichung einer Stichprobe. In der EU-Verordnung wird lediglich durch die Anzahl der Daten „M0“ geteilt.

4.1.2 Quantilsberechnung mittels Bootstrapping

Auch für die simulierte Faltung mittels Bootstrapping wurde eine neue R-Funktion definiert. Sie benötigt als Input einen Vektor r an historischen log-Tagesrenditen, die Anzahl n an Schritten bis zum Ende der Haltedauer T und die gewünschte Anzahl an Simulationen.

```
1 fBootstrap = function(r, n, AnzSim){
2 Simulation = rep(NA, AnzSim)
3 for ( i in 1:AnzSim ) {
4 # Stichprobe der Laenge n mit Zuruecklegen
5 sample = sample(r, n, replace=TRUE)
6 Simulation[i] = sum(sample)
7 }
8 Simulation
9 }
```

4.1.3 Quantilsberechnung im Branchenstandard mittels Monte-Carlo-Simulation

Im Branchenstandard haben wir es mit einem stochastischen Kapitalmarktmodell zu tun. Um den Preis eines PRIIP am Ende der Haltedauer zu berechnen, wenden wir Monte-Carlo-Simulationen an. Dabei werden eine Vielzahl an Preisen am Ende der Haltedauer

4.1 Berechnung der Quantile

simuliert. Der Preis von einem Zeitschritt auf den anderen ergibt sich durch normalverteilte Zufallszahlen.

Dazu wurde die nachfolgende R-Funktion geschrieben. Sie benötigt als Input die Länge der Projektion (= Haltedauer in Jahren), den Monat zur richtigen Auswahl der Svensson-Parameter, die Anzahl der Simulationen, die Volatilität σ_F des Fonds und die sonstigen Parameter des Zwei-Faktor-Vasicek Modells. Als Output liefert die Funktion die simulierten Preise eines Fonds am Ende der Haltedauer.

```

1 fPRIIP4 = function(Projektion, Monat, AnzSim, sigmaF, Para=ParaVasi){
2
3 # Allgemeine Modellparameter
4 lambdaS = Para["lambdaS",1] # 0.04      Risikopraemie Basis-Aktie
5 sigmaS  = Para["sigmaS",1] # 0.2       Volatilitaet Basis-Aktie
6 dx      = Para["dx",1]     # 0.016  Risikopraemie Short-Rate x(t)
7 dy      = Para["dy",1]     # -0.00295 Risikopraemie Short-Rate y(t)
8 A       = Para["A",1]      # 0.389  Mean Reversion Speed x(t)
9 B       = Para["B",1]      # 0.097  Mean Reversion Speed y(t)
10 sigmaX  = Para["sigmaX",1] # 0.0182 Volatilitaet Short-Rate x(t)
11 etaY    = Para["etaY",1]  # 0.019  Volatilitaet Short-Rate y(t)
12 rho     = Para["rho",1]   # -0.924 Korrelation zwischen x(t) und y(t)
13
14 ParaSvensson=fSvenPara(Monat)
15
16 if(Projektion>=1){ dt = 1/12      }
17 if(Projektion< 1){ dt = 1/(12*21) }
18
19 steps    = Projektion / dt                # i=1 -> Startwert
20 sigmaX2  = sqrt( sigmaX^2/(2*A)*(1-exp(-2*A*dt)) )
21 etaY2    = sqrt( etaY ^2/(2*B)*(1-exp(-2*B*dt)) )
22
23 for(j in 1:AnzSim){
24
25 z1 = rnorm(steps)      # standardnormalverteilte Zufallszahlen
26 z2 = rnorm(steps)
27 z3 = rnorm(steps)
28 w1 = sigmaX2 * z1
29 w2 = etaY2 * (rho*z1 + sqrt(1-rho^2)*z2 ) # Korrelierte Brownsche Bewegung
30
31 x=y =xP =yP =psi =Forward =rshort =Cash =Stock =Fonds =rep(NA, steps+1)
32 x[1] = y[1] = 0
33 Cash[1] = Stock[1] = Fonds[1] = 1
34
35 for(i in 1:steps){
36 x[i+1] = x[i]*exp(-A*dt) + w1[i]
37 y[i+1] = y[i]*exp(-B*dt) + w2[i]
38 xP[i]  = x[i] + dx*(1-exp(-A*(i-1)*dt))
39 yP[i]  = y[i] + dy*(1-exp(-B*(i-1)*dt))
40 Forward[i] = fForward((i-1)*dt, ParaSvensson)
41 psi[i]    = Forward[i] + sigmaX^2/(2*A^2)*(1-exp(-A*(i-1)*dt))^2 +
42            + etaY^2/(2*B^2)*(1-exp(-B*(i-1)*dt))^2 +
43            + rho*sigmaX*etaY/(A*B)*(1-exp(-A*(i-1)*dt))*(1-exp(-B*(i-1)*dt))
44 rshort[i] = x[i] + y[i] + psi[i] +
45            + dx*(1-exp(-A*(i-1)*dt)) +
46            + dy*(1-exp(-B*(i-1)*dt))
47 Cash[i+1] = exp(dt*rshort[i])*Cash[i]
48 Stock[i+1] = Stock[i]*Cash[i+1]/Cash[i] *exp((lambdaS-0.5*sigmaS^2)*dt + sigmaS
49            *sqrt(dt)*z3[i])
49 lambdaF  = lambdaS*sigmaF/sigmaS
50 Fonds[i+1] = Fonds[i]*Cash[i+1]/Cash[i] *exp((lambdaF-0.5*sigmaF^2)*dt + sigmaF
51            *sqrt(dt)*z3[i])
52 }
53 if(j==1) FONDS = Fonds
54 if(j>1 ) FONDS = cbind(FONDS ,Fonds)

```

4 Backtest-Verfahren

```
54 |
55 | }
56 | FONDS[(steps+1),]
57 | }
```

Die Zeitschritte dt der Monte-Carlo-Simulation sind dabei je nach Projektionsdauer unterschiedlich (siehe Zeile 16). Ist die Haltedauer größer oder gleich einem Jahr werden zur schnelleren Berechnung nur monatliche Schritte anstatt täglicher Schritte durchgeführt.

Die Funktion ist fähig, zu einem gegebenen Datum die richtigen Svensson-Parameter der Deutschen Bundesbank zu wählen (siehe Zeile 14). Dazu wird die folgende Funktion benötigt:

```
1 # Svensson-Parameter aus www.bundesbank.de
2 ParaSvens = read.csv2("SvenssonParameter.csv", header=FALSE)
3 tdach      = 20          # Beginn der Extrapolation (t^ ) in Jahren
4 zdach      = 0.01064     # Spot Rate ab Beginn der Extrapolation (z^ )
5 Monat      = "2016-11"
6
7 fSvenPara = function(Monat=Monat, Para=ParaSvens, tHut=tdach, zHut=zdach){
8 beta0 = subset(Para$beta0, Para$Datum==Monat)/100      # 0.806      /100
9 beta1 = subset(Para$beta1, Para$Datum==Monat)/100      # -1.37525   /100
10 beta2 = subset(Para$beta2, Para$Datum==Monat)/100      # 26.25197   /100
11 beta3 = subset(Para$beta3, Para$Datum==Monat)/100      # -25.3854   /100
12 tau1  = subset(Para$tau1 , Para$Datum==Monat)          # 5.62709
13 tau2  = subset(Para$tau2 , Para$Datum==Monat)          # 5.03144
14 rbind(beta0, beta1, beta2, beta3, tau1, tau2, tHut, zHut)
15 }
```

Die Svensson-Parameter werden für die Forward-rate $f^M(0, T)$ aus (1.7) benötigt. Dazu wurde eine R-Funktion geschrieben, welche die Ableitung der logarithmischen Preise der Nullkuponanleihen $P^M(0, T)$ aus (1.6) bestimmt.

```
1 fForward = function(t, Para=fSvenPara(Monat, ParaSvens, tdach, zdach) ){
2 beta0 = Para[1]      # 0.806      /100
3 beta1 = Para[2]      # -1.37525   /100
4 beta2 = Para[3]      # 26.25197   /100
5 beta3 = Para[4]      # -25.3854   /100
6 tau1  = Para[5]      # 5.62709
7 tau2  = Para[6]      # 5.03144
8 tdach = Para[7]      # 20
9 zdach = Para[8]      # 0.01064
10 if ( t > tdach ){           # Konstante zdach nach tdach Jahren
11 forward = deriv(~ -log((1 + zdach)^(-t)), "t")
12 forward = eval(forward)
13 attr(.value, "gradient")
14 }
15 else if( t <= tdach ){
16 if(t==0){ t = 0.000000000000000001 }
17 forward = deriv(~ -log((1 +beta0 +beta1*(1-exp(-t/tau1))*tau1/t +
18 + beta2*( (1-exp(-t/tau1))*tau1/t -exp(-t/tau1) ) +
19 + beta3*( (1-exp(-t/tau2))*tau2/t -exp(-t/tau2) ) )^(-t) )
20 , "t")
21 forward = eval(forward)
22 attr(.value, "gradient")
23 }
```

Die Volatilität σ_F des Fonds wird wie bei den anderen Methoden anhand der historischen Renditen berechnet.

Für den Backtest bedeutet das, dass die Monte-Carlo-Simulation zu jedem Zeitpunkt mit der aktuell geschätzten Fondsvolatilität σ_F und den aktuellen Svensson-Parametern der Deutschen Bundesbank ausgeführt wird. Die restlichen Parameter des Vasicek-Modells sowie der Basisaktie bleiben unverändert.

Dies ist natürlich eine Schwäche dieses Backtests, da die Parameter nicht genau an die derzeitige Situation kalibriert werden. Außerdem macht es den Vergleich zu den anderen beiden Methoden „Cornish-Fisher“ und „Bootstrapping“ ein wenig zu einem Apfel-und-Birnen-Vergleich, da andere Dinge vorausgesetzt werden. Dennoch möchten wir ein Bild davon bekommen, wie sich der Branchenstandard unter den gegebenen Parametern in der Vergangenheit entwickelt hätte. Generell ist die Kalibrierung von Modell-Parametern ein sehr schwieriges Unterfangen, welches für die Zukunft niemals die genau richtigen Parameter finden kann. Möglicherweise haben wir im Branchenstandard schon jetzt Parameter, die zu brauchbaren Ergebnissen führen.

4.2 Statistische Tests

Haben wir nun anhand eines historischen Kurses Beobachtungen darüber, wie oft die geschätzten Quantile über- oder unterschritten wurden, so können wir statistische Tests durchführen.

Die Beobachtung, ob ein in der vorherigen Periode $t - 1$ geschätztes α -Quantil für den Zeitpunkt t von der tatsächlich eingetretenen Rendite R_t unterschritten wurde, ergibt sich aus dem folgenden Indikator:

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{falls } R_t \leq F_{R,t-1}^{-1}(\alpha) \\ 0, & \text{falls } R_t > F_{R,t-1}^{-1}(\alpha) \end{cases} \quad (2.1)$$

Getestet soll nun werden, ob die Indikatoren I_t tatsächlich so verteilt sind, wie das berechnete Quantil $F_{R,t-1}^{-1}(\alpha)$ es behauptet. Wenn wir tatsächlich ein Quantil zum Niveau α berechnet haben, müsste die Wahrscheinlichkeit, dass das Quantil unterschritten wird, genau α sein. Des Weiteren haben wir unabhängige Renditen angenommen. Die Beobachtungen sollten damit auch unabhängig von einander sein.

Die Nullhypothese lautet damit:

$$H_0 : I_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Bernoulli}(\alpha) \quad (2.2)$$

Dazu wird in [Christoffersen, 2003] ein Likelihood Ratio Test angeführt.

Die Likelihood einer Bernoulli(α)-verteilten Zufallsvariable ist

$$L(\alpha) = (1 - \alpha)^{T_0} \cdot \alpha^{T_1}$$

4 Backtest-Verfahren

wobei T_0 die Anzahl der Nicht-Unterschreitungen und T_1 die Anzahl der Unterschreitungen des geschätzten Quantils ist.

Der Test auf Bernoulliverteilung behauptet, dass $v := \frac{T_1}{T} = \alpha$ ist, wobei T die Gesamtanzahl an Beobachtungen ist. Die Likelihood davon ist

$$L(v) = \left(1 - \frac{T_1}{T}\right)^{T_0} \cdot \left(\frac{T_1}{T}\right)^{T_1}$$

Die Teststatistik des Likelihood Ratio Tests ist

$$LR_{Ber} = -2 \cdot \ln \left(\frac{L(\alpha)}{L(v)} \right) \sim \chi_1^2 \quad (2.3)$$

Es handelt sich dabei also um einen Chi-Quadrat-Test, genauer um einen G-Test.

Der Test auf Unabhängigkeit verwendet wieder den Likelihood-Ansatz und betrachtet eine Übergangsmatrix

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 - p_{01} & p_{01} \\ 1 - p_{11} & p_{11} \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnet $p_{01} = P(I_{t+1} = 1 | I_t = 0)$ und $p_{11} = P(I_{t+1} = 1 | I_t = 1)$. Die Likelihood Funktion für T Beobachtungen ist

$$L(\Pi) = (1 - p_{01})^{T_{00}} \cdot p_{01}^{T_{01}} \cdot (1 - p_{11})^{T_{10}} \cdot p_{11}^{T_{11}}$$

wobei T_{11} die Anzahl der Beobachtungen ist, bei dem das Quantil nach einer vorherigen Unterschreitung wieder unterschritten wird. Die restlichen T_{ij} definieren sich analog.

Die Schätzungen der Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$\begin{aligned} p_{00} &= \frac{T_{00}}{T_{00} + T_{01}} \\ p_{01} &= \frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}} \\ p_{10} &= \frac{T_{10}}{T_{10} + T_{11}} \\ p_{11} &= \frac{T_{11}}{T_{10} + T_{11}} \end{aligned}$$

Der Test auf Unabhängigkeit behauptet, dass $p_{01} = p_{11}$ ist. Es soll also nicht von der Vergangenheit abhängen, ob eine Nicht-Unterschreitung stattfindet. Die Teststatistik des Likelihood Unabhängigkeitstests ist

$$\begin{aligned} LR_{Ind} &= -2 \cdot \ln \left(\frac{L(v)}{L(\Pi)} \right) \quad (2.4) \\ &= -2 \cdot \ln \left(\frac{\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)^{T_0} \cdot \left(\frac{T_1}{T}\right)^{T_1}}{(1 - p_{01})^{T_{00}} \cdot p_{01}^{T_{01}} \cdot (1 - p_{11})^{T_{10}} \cdot p_{11}^{T_{11}}} \right) \sim \chi_1^2 \end{aligned}$$

Zusätzlich zu den beiden Likelihood Ratio Tests werden zwei weitere Tests für kleine Datensätze verwendet: der Binomialtest und der Exakte Fisher-Unabhängigkeits-Test.

Diese stellen diskrete Gegenstücke zu den beiden Likelihood Ratio Tests dar. Insbesondere für sehr kleine Stichproben können sie nützlich sein. Dabei wird auf bereits vorhandene R-Funktionen zurückgegriffen.

Der Exakte Unabhängigkeitstest nach Fisher betrachtet eine 2×2 -Kontingenztafel mit den Häufigkeiten T_{ij} . Statt der Chi-Quadrat-Verteilung wird die Hypergeometrische Verteilung verwendet.

Da im Stressszenario durch die Stressvolatilität eigentlich mit einer anderen Renditereihe gerechnet wird, machen die Tests auf Bernoulliverteilung nicht viel Sinn. Wir machen jedoch für die Stressszenarien einen Binomialtest mit $H_0: P < 1\%$ für 1 Jahr bzw. $P < 5\%$ für eine längere Haltedauer. Dabei handelt es sich also um einen einseitigen Test.

Für die Auswertungen der statistischen Tests wurde eine R-Funktion implementiert. Diese liefert für jeden Test den P-Wert.

```

1 library(DescTools)
2
3 fTestBerInd = function( beo, a ){
4   T       = length( beo )      # Anzahl der Daten
5   T1      = sum( beo )         # Anzahl der Unterschreitungen
6   T0      = T - T1            # Anzahl der Nicht-Unterschreitungen
7   La      = (1-a)^T0 * a^T1
8   LTest   = (1-T1/T)^T0 * (T1/T)^T1
9   LRatioB = -2*log( La / LTest )      # ~ Chi x_1^2
10  pBerG    = 1 - pchisq( LRatioB , 1)   # pWert < Signifikanz -> H0 verwerfen
11
12  pBerGCheck = GTest(x=c(T1,T0), p=c(a,1-a), correct="none")$p.value
13  pBerBinom  = binom.test(T1, T, a, alternative="two.sided")$p.value
14
15  T00 = T01 = T10 = T11 = 0
16  for(i in 2:length( beo ) ){
17    if( beo[i-1] + beo[i] == 0 ) T00 = T00 + 1
18    if( beo[i-1] + beo[i] == 2 ) T11 = T11 + 1
19    if( beo[i-1] < beo[i] ) T01 = T01 + 1
20    if( beo[i-1] > beo[i] ) T10 = T10 + 1
21  }
22
23  p00 = T00 / (T00 + T01)      # = 1 - p01
24  p01 = T01 / (T00 + T01)
25  p10 = T10 / (T10 + T11)      # = 1 - p11
26  p11 = T11 / (T10 + T11)
27  pp  = ( T01 + T11 ) / ( T00 + T01 + T10 + T11 )
28  LP  = p00^T00 * p01^T01 * p10^T10 * p11^T11
29  Lpp = (1-pp)^(T00+T10) * pp^(T01+T11)
30  LRatioI = -2*log( Lpp / LP )
31  pIndG    = 1 - pchisq( LRatioI , 1)
32
33  Tafel     = matrix( c(T00, T01, T10, T11) , nrow = 2)
34  pIndGCheck = GTest( Tafel , correct = "none")$p.value
35  pIndFish   = fisher.test( Tafel , alternative="two.sided")$p.value
36
37  rbind(T, T1, pBerG, pBerBinom, p00, p01, p10, p11, pIndG, pIndFish )
38 }

```

Im Stress-Szenario berechnen wir statt Zeile 13 den einseitigen Binomialtest

```

1 pBerBinom = binom.test(T1, T, a, alternative="greater")$p.value

```

4 Backtest-Verfahren

4.3 Backtest-Verfahren

Kommen wir nun zum Simulationsprogramm. Darin lassen sich Haltedauer, die Historienlänge und die Zeitpunkte der Berechnungen einstellen. Zu einem Zeitpunkt werden alle vier Performance-Szenarien von den Methoden „Normalverteilung“, „Cornish-Fisher“, „Bootstrapping“ und „Branchenstandard“ für eine bestimmte Haltedauer T berechnet. Die Historie für die Berechnungen ist standardmäßig aus den letzten 5 Jahren vor dem jeweiligen Zeitpunkt. Nach Ablauf der Haltedauer werden die Performance-Szenarien mit der tatsächlich eingetretenen Rendite verglichen.

```
1 TDauer      = 1           # Haltedauer T in Jahren: zB 1/12, 1, 20 Jahre
2 hp          = 252        # Historische Tagesrenditen pro Jahr 252=12*21
3 n           = TDauer * hp # Schritte bis zum Ende der Haltedauer
4 AnzSim      = 5000       # Anzahl Simulationen
5 HistDauer   = 5          # Historienlaenge in Jahren
6
7 start       = HistDauer*hp
8
9 pPes        = 0.1
10 pMit       = 0.5
11 pOpt       = 0.9
12 # Stressszenario je nach Haltedauer
13 if(TDauer<=1) pstress = 0.01 else pstress = 0.05
14
15 KursDaten  <- read.csv2("Fondskurse.csv", header=TRUE)
16
17 k          = KursDaten[, "Schluss"]
18 Rendite    = log( k[2:(length(k))] / k[1:(length(k)-1)] )
19 Daten      = cbind(KursDaten[2:nrow(KursDaten),], Rendite )
20
21 r = Daten [, "Rendite"]
22
23 ### Zeitpunkte der Berechnung u Kontrolle
24 if(TDauer>=15) Schritt = 1*hp else Schritt = TDauer*hp
25 ii = seq( from=start, to= length(r), by= Schritt )
26
27 ## Backtest letzte Jahre NA weg
28 iB = n/Schritt # ist TDauer oder 1
```

Die Zeitpunkte der Berechnungen sind im allgemeinen genauso weit entfernt, wie die Haltedauer T lang ist. So können wir unabhängige Beobachtungen erhalten. Nur für eine Haltedauer ab 15 Jahren werden wir jährliche Berechnungen machen (siehe Zeile 24).

Es kommt nun zur Schleife der Berechnungen durch den gesamten Kursverlauf.

```
1 j = 0
2
3 for(i in ii){
4   j = j+1
5
6   rhist      = r[(i-start+1):i]
7   sigmastress = fStressVola(rhist, TDauer)
8   radj       = rhist * sigmastress / sd(rhist)
9   radjMean[j] = mean(radj)
10
11 Nummer[j] = i+n
12 Datum [j] = as.Date(Daten[i+n, "Datum"], "%d.%m.%Y")
13 Kurs [j] = Daten[i+n, "Schluss"]
14
```

```

15| rn_eingetreten[j] = sum(r[(i+1):(i+n)])
16|
17| Norm_Pes[j] = qnorm(pPes, mean=mean(rhist)*n, sd=sd(rhist)*sqrt(n) )
18| Norm_Mit[j] = qnorm(pMit, mean=mean(rhist)*n, sd=sd(rhist)*sqrt(n) )
19| Norm_Opt[j] = qnorm(pOpt, mean=mean(rhist)*n, sd=sd(rhist)*sqrt(n) )
20| Norm_Stress[j] = qnorm(pstress, mean=mean(radj)*n, sd=sd(radj)*sqrt(n) ) -
      radjMean[j]*n
21|
22| Cornish_Pes[j] = fcornish(rhist, n, pPes)
23| Cornish_Mit[j] = fcornish(rhist, n, pMit)
24| Cornish_Opt[j] = fcornish(rhist, n, pOpt)
25| Cornish_Stress[j] = fcornish(radj, n, pstress)-radjMean[j]*n
26|
27| Simulation = fBootstrap(rhist, n, AnzSim)
28| Boot_Pes[j] = quantile(Simulation ,pPes, type=1)
29| Boot_Mit[j] = quantile(Simulation ,pMit, type=1)
30| Boot_Opt[j] = quantile(Simulation ,pOpt, type=1)
31| SimulStress = fBootstrap(radj, n, AnzSim)
32| Boot_Stress[j] = quantile (SimulStress ,pstress, type=1)-radjMean[j]*n
33|
34| svmon = substr(Daten[i,"Datum"], 4, 5)
35| svyea = substr(Daten[i,"Datum"], 7,10)
36| Monat = paste(sep="-", svyea, svmon)
37| FondsSim = fPRIIP4(TDauer, Monat, AnzSim, sigmaF=sd(rhist)*sqrt(hp), ParaVasi)
38|
39| Branche_Pes[j] = quantile(FondsSim,pPes, type=1)
40| Branche_Mit[j] = quantile(FondsSim,pMit, type=1)
41| Branche_Opt[j] = quantile(FondsSim,pOpt, type=1)
42|
43| FondsSim = fPRIIP4(Projektion=TDauer,Monat,AnzSim,sigmaF=sigmastress*sqrt(hp),
      ParaVasi)
44| Branche_Stress[j] = quantile(FondsSim,pstress, type=1)
45| }

```

Danach können die statistischen Tests durchgeführt werden, wie beispielsweise

```

1| T_Cornish_Pes = rn_eingetreten <= Cornish_Pes
2| T_Cornish_Pes = fTestBerInd(T_Cornish_Pes, pPes)
3|
4| T_Boot_Mit = rn_eingetreten <= Boot_Mit
5| T_Boot_Mit = fTestBerInd(T_Boot_Mit, pMit)
6|
7| T_Branche_Opt = exp(rn_eingetreten)<=Branche_Opt
8| T_Branche_Opt = fTestBerInd(T_Branche_Opt, pOpt)

```


5 Auswertungen und Ergebnisse

In diesem Kapitel werden wir das beschriebene Backtesting-Verfahren anhand historischer Zeitreihen auswerten. Dabei verwenden wir Tagesrenditen von

- DAX Index seit 1972 aus [DAX 2018]
- Dow Jones Index seit 1896 aus [Bloomberg, 2018]

Die über 100 Jahre andauernde Zeitreihe des Dow Jones wurde dabei von der s-Versicherung mittels Reuters und Bloomberg zur Verfügung gestellt.

Die Auswertungen werden wir in zwei Gruppen unterteilen: in kurze und sehr lange Haltedauern. Mit für Kleinanlegern relativ kurzen Laufzeiten werden wir die Haltedauer von einem Monat und einem Jahr betrachten. Aus der Sicht einer Lebensversicherung möchten wir allerdings wesentlich längere Laufzeiten betrachten.

Die Monte-Carlo-Simulation des Branchenstandards werden wir zweimal ausführen. In der ersten werden wir die Parameter so belassen, wie sie nach Tabelle 3.1 vorgegeben sind. In der zweiten Simulation werden wir eine kleine Änderung an den Parametern vornehmen. Die Parameter für den DAX sind

- Branchenstandard-Simulation DAX 1:
 - Svensson-Parameter jeweils vom richtigen Monat
 - vorgegebene Parameter nach Tabelle 3.1
- Branchenstandard-Simulation DAX 2:
 - Svensson-Parameter jeweils vom richtigen Monat
 - $dx = 0.025$ statt $dx = 0.016$, $\lambda = 0.05$ statt $\lambda = 0.04$

Für die lange Zeitreihe des Dow Jones haben wir keine Svensson-Parameter. Daher verwenden wir für die beiden Monte-Carlo-Simulationen unterschiedliche Svensson-Kurven:

- Branchenstandard-Simulation Dow Jones 1:
 - Svensson-Parameter der Deutschen Bundesbank des Monats „2016-11“ (wie im Branchenstandard)
 $\beta_0 = 0.00556, \beta_1 = -0.0137525, \beta_2 = 0.2625197, \beta_3 = -0.253854,$
 $\tau_1 = 5.62709, \tau_2 = 5.03144$
 - vorgegebene Parameter nach Tabelle 3.1
- Branchenstandard-Simulation Dow Jones 2:
 - Svensson-Parameter aus [Quandl, o.D.] vom Tag „2017-12-31“
 $\beta_0 = 0.0483, \beta_1 = -0.032, \beta_2 = -0.0166, \beta_3 = -0.0552, \tau_1 = 2.29, \tau_2 = 12.44$
 - vorgegebene Parameter nach Tabelle 3.1

5 Auswertungen und Ergebnisse

Ein Durchlauf der historischen Simulation liefert für jeden Zeitschritt die berechneten Performance-Szenarien für die gegebene Haltedauer und die tatsächlich eingetretene Rendite.

5.1 Kurze Haltedauer

In diesem Abschnitt betrachten wir die Haltedauer von 1 Monat und 1 Jahr. Die Historie zur Ermittlung der Performance-Szenarien werden wir jeweils aus den letzten 5 Jahren bis zum Zeitpunkt der Berechnungen nehmen.

5.1.1 DAX seit 1972

In der ersten Simulation betrachten wir den DAX seit 1972. Die Zeitschritte betragen wie die Haltedauer 1 Jahr.

Als Output erhalten wir die Tabelle 5.1 für die pessimistischen und mittleren Performance-Szenarien. Auffallend sind hier die beinahe exakt gleichen Performance-Szenarien, die uns die Methoden der EU-Verordnung „Cornish-Fisher“ und „Bootstrapping“ sowie die Methode „Normalverteilung“ liefern.

Es ist eine Folge des zentralen Grenzwertsatzes, dass die Verteilung der Summe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, wie es Tagesrenditen sein könnten, gegen eine Normalverteilung konvergiert. Hier am Beispiel des DAX sehen wir für eine Haltedauer von einem Jahr schon ein sehr ähnliches Verhalten zwischen den ersten drei Methoden. Das zusätzliche Einfließen von Schiefe und Exzess mittels Cornish-Fisher-Erweiterung kommt kaum mehr ins Gewicht. Der Branchenstandard liefert auf Grund von anderen Voraussetzungen unterschiedliche Werte.

Betrachten wir die Summe der quadratischen Abweichungen anhand des *mittleren Szenarios*:

Rendite - Normalverteilung:	2,748068
Rendite - Cornish-Fisher:	2,749389
Rendite - Bootstrapping:	2,745296
Rendite - Branchenstandard:	2,087984
Rendite - Branchenstandard 2:	2,029521
Normalverteilung - Cornish-Fisher:	0,000055
Normalverteilung - Bootstrapping:	0,000465
Normalverteilung - Branchenstandard:	0,352630

Wir sehen, dass die beiden Methoden der EU-Verordnung für die Haltedauer von einem Jahr nicht besser abschneiden als die Normalverteilung. Der Unterschied zur Normalverteilung ist dabei sehr klein. Um das beinahe 1000-fache unterschiedlich zur Normalverteilung verhält sich der Branchenstandard. Das ist nicht verwunderlich, da dort andere Voraussetzungen

gemacht wurden. Die quadratischen Abweichungen zur eingetretenen Rendite sind hier besser.

Die Stressszenarien und MRM-Klassen sind in Tabelle 5.2 angeführt. Dabei ist interessant zu sehen, wie sich die MRM-Klasse über die Zeit ändern kann.

Für die statistischen Tests werden die Unterschreitungen der Quantile gezählt. Die Ergebnisse der Tests sind in Tabelle 5.3 zu sehen. Hier schneidet der Branchenstandard bei Anzahl der Treffer schlechter ab als die Methoden der EU-Verordnung. Für ein Signifikanzniveau von 5% müsste man hier die Nullhypothese verwerfen. Generell neigen hier die mittleren Szenarien zum Unterschätzen und die pessimistischen Szenarien zum Überschätzen, allerdings ist die Signifikanz nicht hoch. Die optimistischen Szenarien werden nahezu perfekt getroffen. Das Stressszenario wird nie unterschritten. Die Behauptungen der Unabhängigkeit sind für Signifikanzniveaus bis zu 10% nicht zu verwerfen.

In der zweiten Simulation betrachten wir eine Haltedauer von *1 Monat*. Auch die Zeitschritte werden einen Monat lang sein.

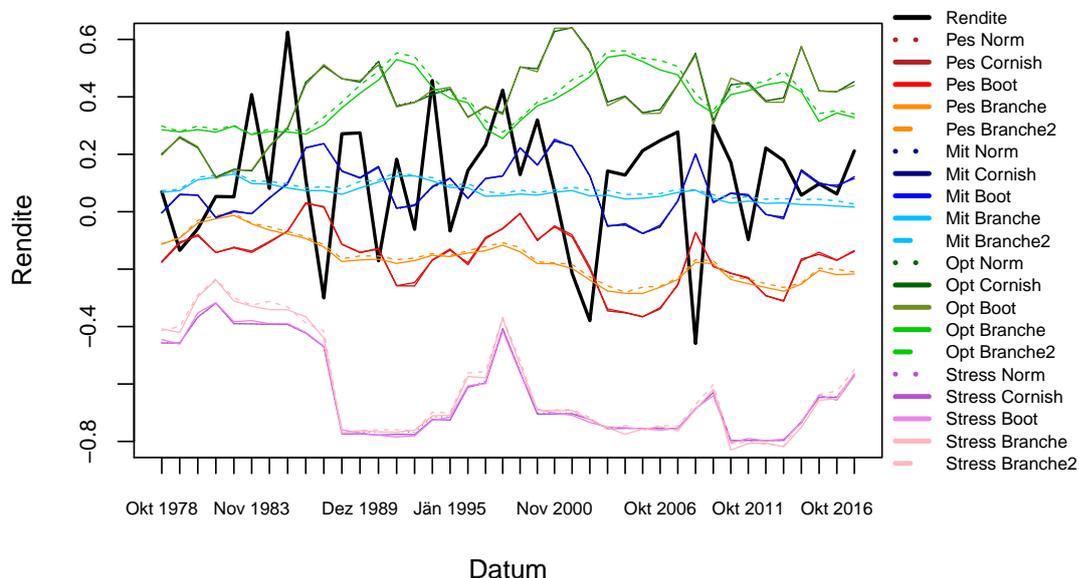
Abbildung 5.1 liefert einen Vergleich der zeitlichen Entwicklung der Performance-Szenarien zwischen den beiden Haltedauern. Wir sehen, dass die Performance-Szenarien bei einer Haltedauer von 1 Jahr stark schwanken können. Der Branchenstandard ist dabei glatter als die beiden Methoden „Cornish-Fisher“ und „Bootstrap“. Für die kurze Haltedauer von 1 Monat nähern sich die Methoden an.

Die Ergebnisse der statistischen Tests für die Haltedauer von 1 Monat sind in Tabelle 5.4 zu sehen. Am besten wird hier das pessimistische Szenario getroffen. Das mittlere Szenario wird wieder unterschätzt und diesmal auf Grund der größeren Anzahl an Daten signifikant. Das optimistische Szenario wird recht gut getroffen, jedoch scheint die Unabhängigkeit der Beobachtungen nicht gegeben zu sein. Im Vergleich schneidet der Branchenstandard 2 minimal am besten ab. Das Stressszenario wird nur zweimal unterschritten. Damit wird die Hypothese, dass das Stressszenario unter dem 1%-Quantil liegt, weiter angenommen.

Bei der monatlichen Betrachtung sind die quadratischen Abweichungen anhand des *mittleren Szenarios*:

Rendite - Normalverteilung:	1,72804
Rendite - Cornish-Fisher:	1,72994
Rendite - Bootstrapping:	1,73061
Rendite - Branchenstandard:	1,68753
Rendite - Branchenstandard 2:	1,68635
Normalverteilung - Cornish-Fisher:	0,00056
Normalverteilung - Bootstrapping:	0,00084
Normalverteilung - Branchenstandard:	0,02926

Performance-Szenarien DAX – Haltedauer 1 Jahr



Performance-Szenarien DAX – Haltedauer 1 Monat

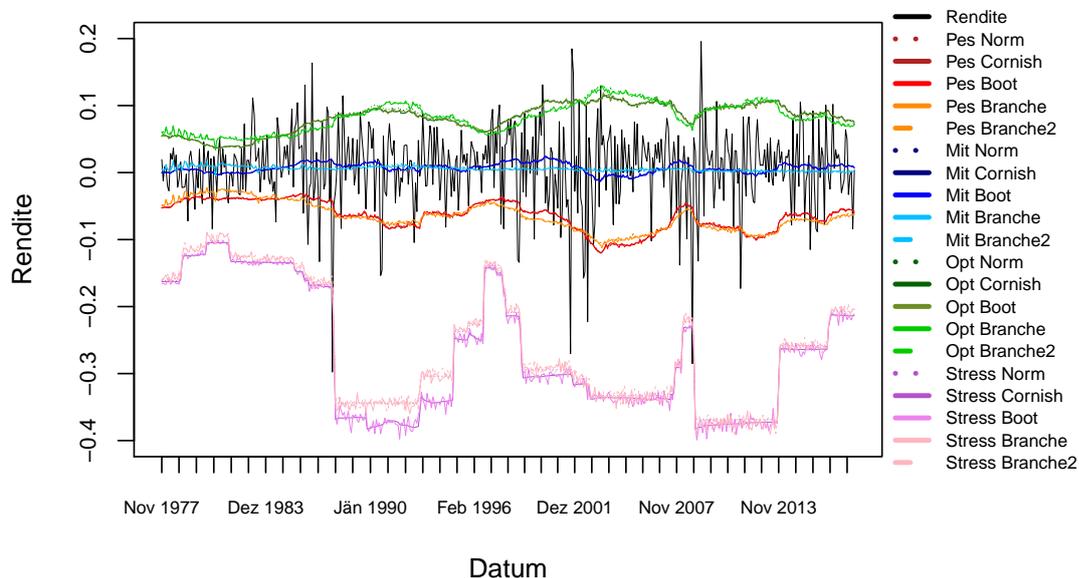


Abbildung 5.1: Historische Performance-Szenarien des DAX im Vergleich zur tatsächlich eingetretenen Rendite. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 5 Jahren. Die Haltedauer und Zeitschritte betragen 1 Jahr bzw. 1 Monat.

5.1.2 Dow Jones seit 1896

Nun betrachten wir die Simulation mit Haltedauer 1 Jahr anhand des Dow Jones Index. Aufgrund seiner Länge werden wir deutlich mehr Beobachtungen erhalten.

Abbildung 5.2 zeigt uns den zeitlichen Verlauf der Performance-Szenarien im Vergleich zur tatsächlich eingetretenen Rendite. Die Methoden „Normalverteilung“, „Cornish-Fisher“ und „Bootstrap“ sind wieder nahezu identisch. Der Branchenstandard erzeugt deutlich glattere Ergebnisse, vor allem im mittleren Szenario. Branchenstandard 2 liefert durch den höheren Zins nur eine Verschiebung der Werte nach oben.

Für Haltedauer 1 Jahr sind die Summen der quadratischen Abweichungen anhand des *mittleren Szenarios*:

Rendite - Normalverteilung:	7,694046
Rendite - Cornish-Fisher:	7,697766
Rendite - Bootstrapping:	7,704896
Rendite - Branchenstandard:	6,074898
Rendite - Branchenstandard 2:	5,765902
Normalverteilung - Cornish-Fisher:	0,001889
Normalverteilung - Bootstrapping:	0,003118
Normalverteilung - Branchenstandard:	1,003439

Die Ergebnisse sind ähnlich wie beim DAX. Der Branchenstandard hat neben der glatteren Kurve auch eine geringere quadratische Abweichung im mittleren Szenario.

Die Ergebnisse der statistischen Tests sind in Tabelle 5.5 ersichtlich. Beim Branchenstandard wird hier das mittlere und optimistische Szenario unterschätzt. Die leicht veränderten Parameter im Branchenstandard 2 führen zu besseren Ergebnissen. Die ersten drei Methoden überschätzen das pessimistische Szenario (nicht signifikant) und verhalten sich ansonsten gleich. Das Stressszenario wird nur einmal unterschritten.

Betrachten wir die Haltedauer *1 Monat*, so erhalten wir Abbildung 5.4 über die zeitliche Entwicklung der Performance-Szenarien. Auffallend sind hier die Stressszenarien, die bei den Methoden der EU-Verordnung stärker ausfallen.

Die Ergebnisse der statistischen Tests für Haltedauer 1 Monat sind in Tabelle 5.7 angeführt. Hier haben wir 1477 Beobachtungen zur Verfügung. Die ersten drei Methoden zeigen gute Ergebnisse, wobei die „Cornish-Fisher-Erweiterung“ geringfügig am besten abschneidet. Die Nullhypothesen können nicht verworfen werden. Beim Branchenstandard wird das mittlere Szenario unterschätzt und die Nullhypothese verworfen.

Für Haltedauer 1 Monat sind die Summen der quadratischen Abweichungen anhand des

5 Auswertungen und Ergebnisse

mittleren Szenarios:

Rendite - Normalverteilung:	4,083
Rendite - Cornish-Fisher:	4,094
Rendite - Bootstrapping:	4,093
Rendite - Branchenstandard:	4,009
Rendite - Branchenstandard 2:	3,993
Normalverteilung - Cornish-Fisher:	0,021
Normalverteilung - Bootstrapping:	0,004
Normalverteilung - Branchenstandard:	0,079

Hier fallen die Unterschiede zwischen den Methoden gering aus. Dies liegt auch an der verhältnismäßig längeren Historie.

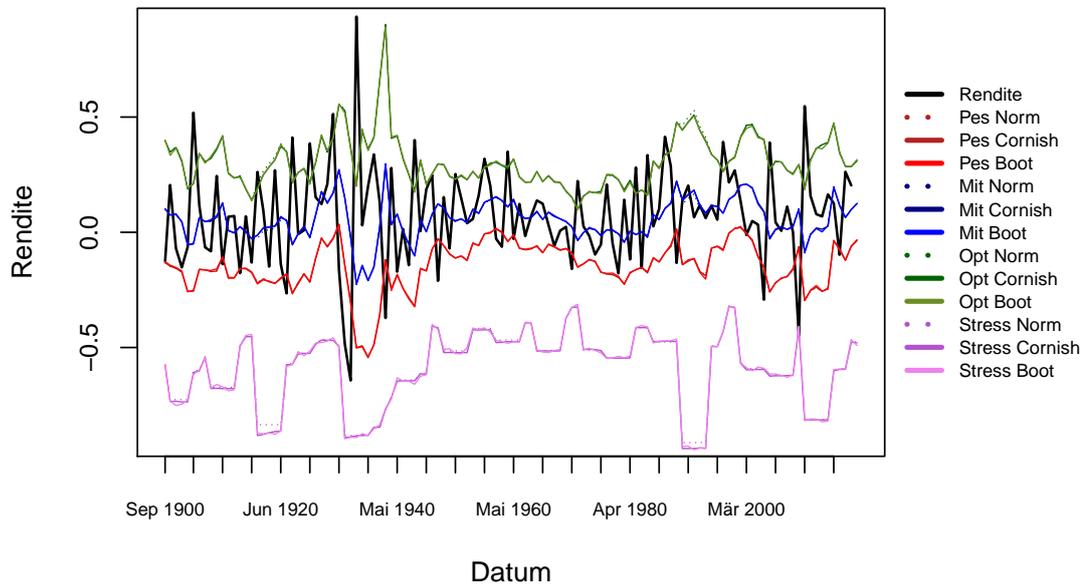
Für die Verordnung ist eine Historie von 5 Jahren für die Berechnungen ausreichend. Betrachten wir nun jedoch jeweils eine Historie von 20 Jahren für eine Simulation mit Haltedauer 1 Jahr.

Die Ergebnisse sehen wir in Abbildung 5.3. Wir erhalten eine deutlich glattere Kurve, die sich von extremen Ereignissen nicht so stark verändern lässt. Dafür halten die Nachwirkungen von Extremereignissen länger an. In Tabelle 5.6 sehen wir, dass nun auch das pessimistische Szenario gut getroffen wird. Die P-Werte der Unabhängigkeitstests der ersten drei Methoden sind im mittleren und optimistischen Szenario höher als bei der Verwendung von 5 Jahren Historie. Das Stressszenario wird nicht mehr unterschritten.

Die quadratischen Abweichung liegen nun näher beieinander.

Rendite - Normalverteilung:	5,579
Rendite - Cornish-Fisher:	5,572
Rendite - Bootstrapping:	5,588
Rendite - Branchenstandard:	5,528
Rendite - Branchenstandard 2:	5,239

Performance-Szenarien – Normal/Cornish/Bootstrap
Historie aus 5 Jahren – Haltedauer 1 Jahr
Dow Jones



Performance-Szenarien – Branchenstandard
Historie aus 5 Jahren – Haltedauer 1 Jahr
Dow Jones

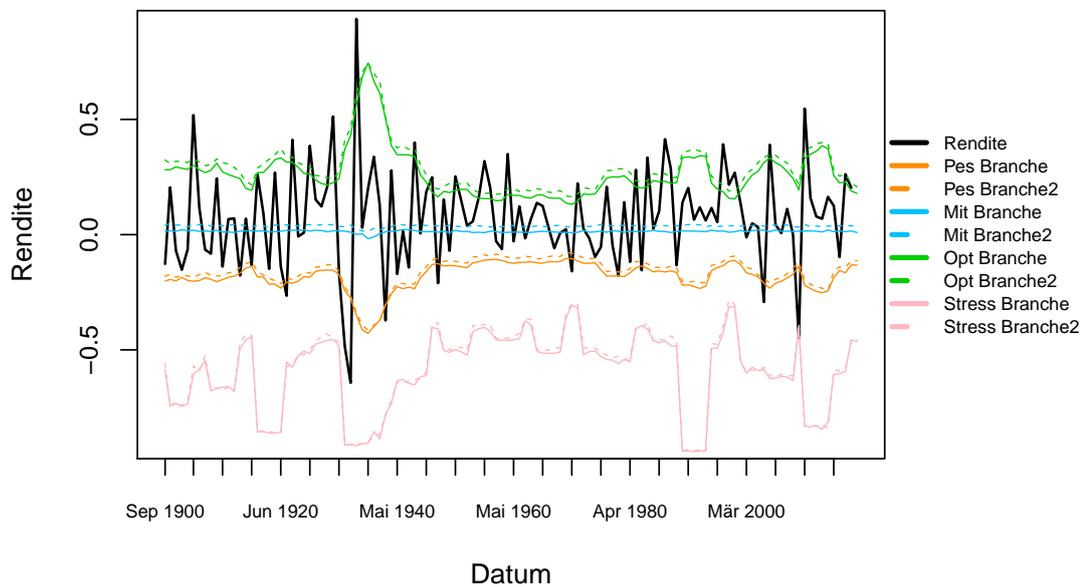
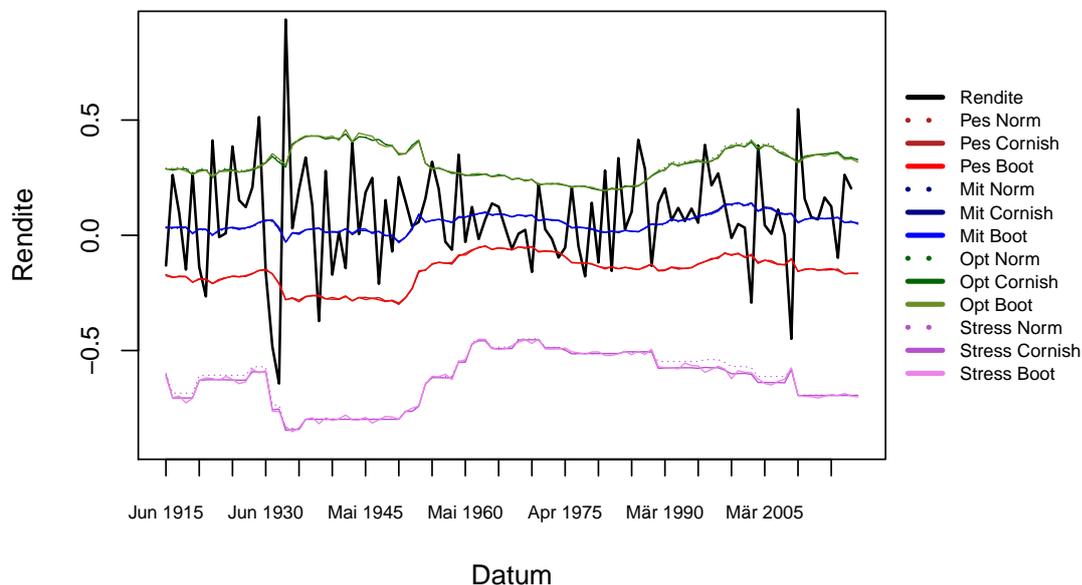


Abbildung 5.2: Historische Performance-Szenarien des Dow Jones im Vergleich zur tatsächlich eingetretenen Rendite. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 5 Jahren. Die Haltedauer beträgt 1 Jahr, die Länge der Zeitschritte ist 1 Jahr.

**Performance-Szenarien – Normal/Cornish/Bootstrap
 Historie aus 20 Jahren – Haltedauer 1 Jahr
 Dow Jones**



**Performance-Szenarien – Branchenstandard
 Historie aus 20 Jahren – Haltedauer 1 Jahr
 Dow Jones**

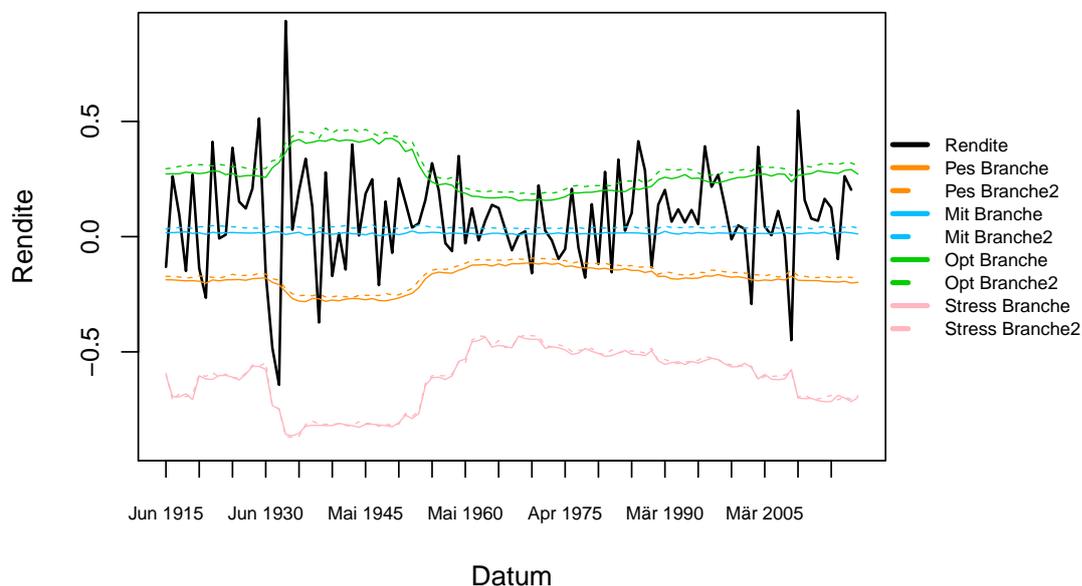


Abbildung 5.3: Historische Performance-Szenarien des Dow Jones im Vergleich zur tatsächlich eingetretenen Rendite. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 20 Jahren. Die Haltedauer beträgt 1 Jahr, die Länge der Zeitschritte ist 1 Jahr.

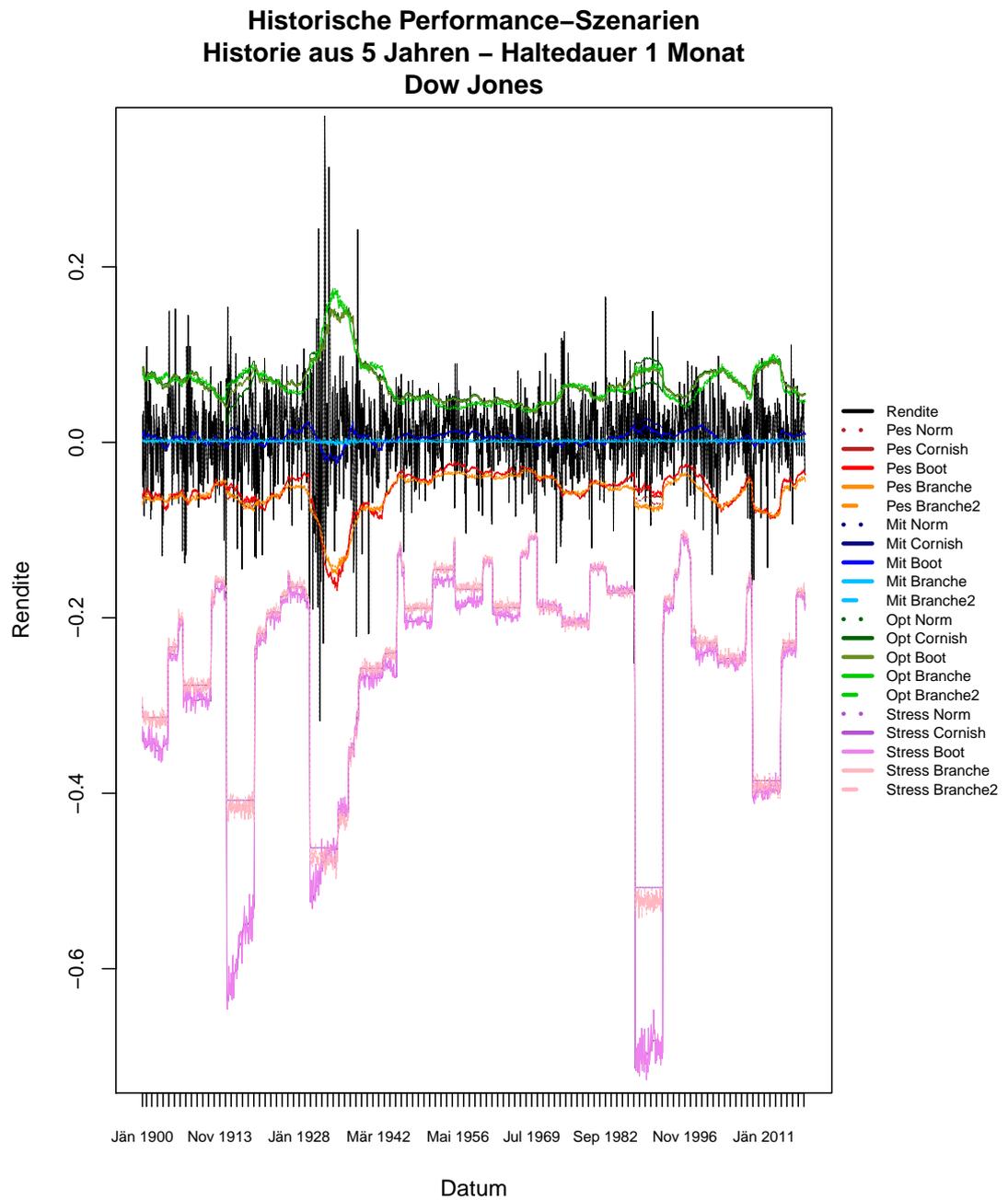


Abbildung 5.4: Historische Performance-Szenarien des Dow Jones im Vergleich zur tatsächlich eingetretenen Rendite. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 5 Jahren. Die Haltedauer beträgt 1 Monat, die Länge der Zeitschritte ist 1 Monat.

5.2 Lange Haltedauer

Aus der Sicht von Lebensversicherungen interessieren uns sehr lange Laufzeiten. Wir werden nun eine Haltedauer von bis zu 20 Jahren betrachten. Bei den Simulationen in diesem Abschnitt werden wir jährliche Schritte machen. So simulieren wir, wie sich der Geschäftsverlauf in der Vergangenheit ereignet hätte.

Die statistischen Tests haben durch die jährlichen Zeitschritte allerdings keine wirkliche Aussagekraft mehr, da die beobachteten 20-Jahres-Renditen voneinander abhängig sind. Wir werden das auch anhand der P-Werte der Unabhängigkeitstests sehen. Dennoch wollen wir uns ein Bild davon machen, wie sich die Performance-Szenarien für besonderes lange Haltedauern in der Vergangenheit entwickelt hätten.

5.2.1 DAX seit 1972

Als Erstes machen wir eine Simulation mit einer Haltedauer von 15 Jahren anhand des DAX. Die Kurshistorie für die Berechnung der Performance-Szenarien ist wieder jeweils aus den letzten 5 Jahren.

In Abbildung 5.5 sehen wir den zeitlichen Verlauf. Zu einem gegebenen Jahr sehen wir die Szenarien und die tatsächlich eingetretene Rendite per anno. Die Berechnung der Performance-Szenarien erfolgte 15 Jahre zuvor. Wir haben hier erstmals den Fall, dass die Historie zur Berechnung der Szenarien kürzer ist als die Haltedauer. Auch wenn dies nicht sehr sinnvoll klingt, so ist dieses Vorgehen trotzdem nach der Verordnung zulässig. Wir sehen starke Schwankungen der prognostizierten Quantile durch die Methoden der Verordnung. Der Unterschied zwischen einem optimistischen Szenario zu einem nachfolgenden kann größer sein als der Unterschied zwischen optimistischen und pessimistischen Szenario zu einem bestimmten Zeitpunkt. Auch sehen wir optimistische Szenarien, die sich unterhalb der eingetretenen 15-Jahres-Rendite in 2014 nach zwei Finanzkrisen befinden.

Das Stressszenario liegt sehr weit unter der tatsächlich eingetretenen Rendite. Obwohl wir beispielsweise zum Zeitpunkt 2013 zwei Finanzkrisen in den letzten 15 Jahren hatten, ist das Stressszenario noch viel weiter unten angesetzt. Für diese lange Haltedauer erhalten wir meist ein Gesamtergebnis von um die -80% bis -90% . Grund dafür ist die fehlende mittlere Rendite in der Berechnung des Stressszenarios.

Glattere Ergebnisse sehen wir im Branchenstandard. Grund dafür ist, dass sich die Voraussetzungen im Verlauf der Zeit nicht viel ändern. Das Sinken des mittleren Szenarios erklärt sich durch die Veränderung der initialen Zinsstrukturkurve. Durch die sinkenden Zinsen der letzten Jahre sinkt auch das mittlere Szenario.

Betrachten wir die Summen der quadratischen Abweichungen anhand des *mittleren Szena-*

rios:

Rendite - Normalverteilung:	2381,784
Rendite - Cornish-Fisher:	2384,830
Rendite - Bootstrapping:	2480,725
Rendite - Branchenstandard:	88,935
Rendite - Branchenstandard 2:	227,548
Normalverteilung - Cornish-Fisher:	0,002
Normalverteilung - Bootstrapping:	1,819
Normalverteilung - Branchenstandard:	1995,109

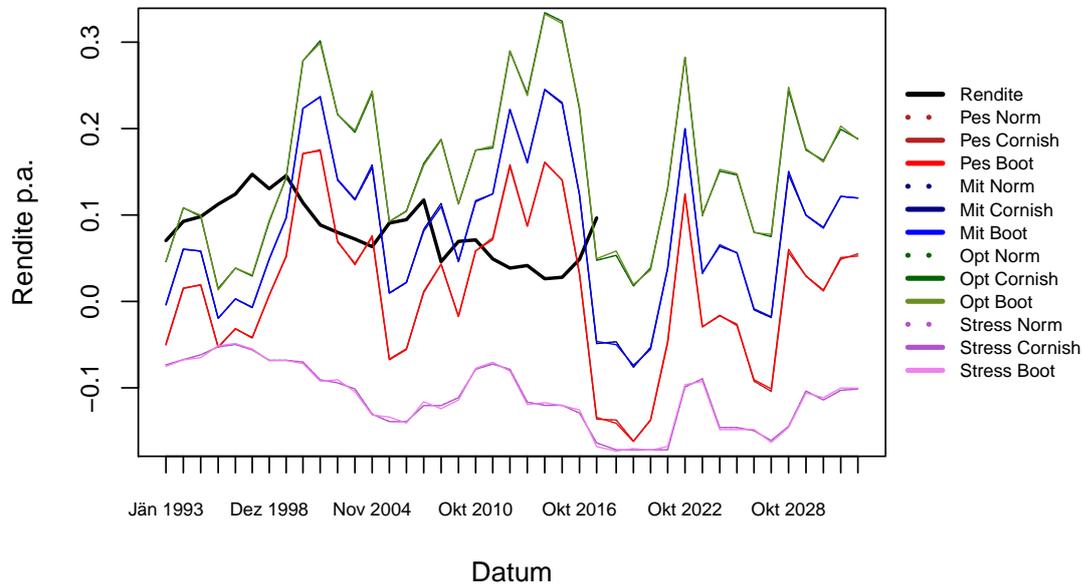
Auf Grund der starken Schwankungen der ersten drei Methoden sind auch deren quadratische Abweichungen zur tatsächlichen Rendite sehr groß. Die Abweichungen der Methoden der Verordnung zur Normalverteilung sind minimal und im Chart 5.5 kaum mehr zu sehen.

Wir sehen, dass die Länge der Historie großen Einfluss auf die Schwankungen der Performance-Szenarien hat. Betrachten wir eine Simulation mit 5 Jahren Haltedauer und Berechnungen aus einer Historie von jeweils 15 Jahren, so erhalten wir Abbildung 5.6. Nun haben wir deutlich glattere Ergebnisse für die Szenarien. Die quadratischen Abweichungen zur tatsächlichen Rendite sind kleiner und zwischen den Methoden ähnlicher:

Rendite - Cornish-Fisher:	14,35412
Rendite - Bootstrapping:	14,28006
Rendite - Branchenstandard:	10,37598
Rendite - Branchenstandard 2:	10,01523

Die Tabellen 5.8 und 5.9 liefern Auskunft über die Unterschreitungen der beiden Simulationen. Für eine Haltedauer von 15 Jahren wird kaum ein Quantil getroffen, bis auf das mittlere. Besonders dort haben wir allerdings kleine P-Werte beim Test auf Unabhängigkeit. Bei der 5-jährigen Haltedauer schneidet der Branchenstandard am besten ab. Die Stressszenarien werden in beiden Fällen nicht unterschritten.

**Performance-Szenarien – Normal/Cornish/Bootstrap
Historie aus 5 Jahren – Haltedauer 15 Jahre
DAX**



**Performance-Szenarien – Branchenstandard
Historie aus 5 Jahren – Haltedauer 15 Jahre
DAX**

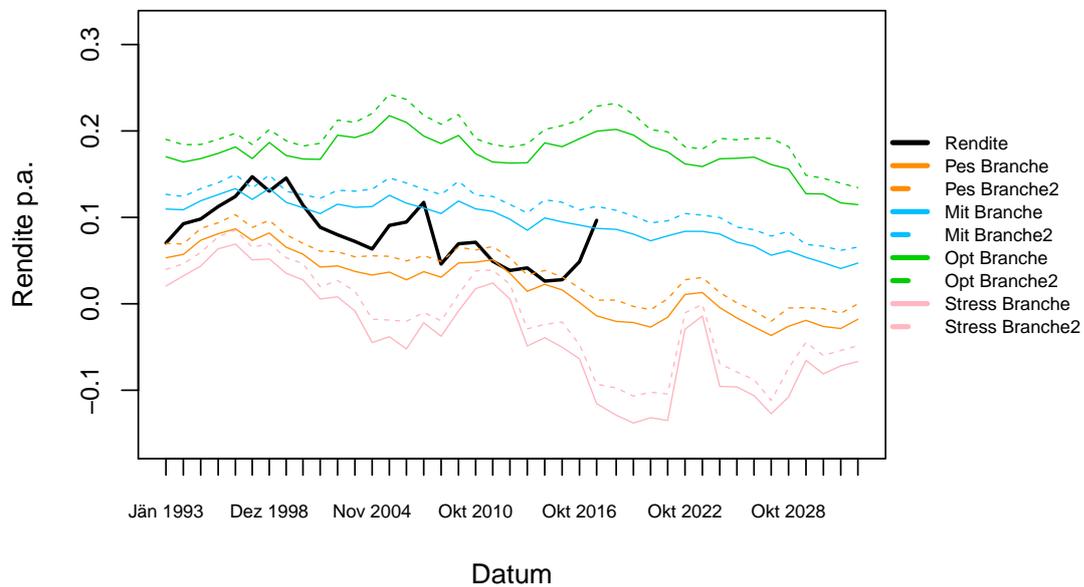
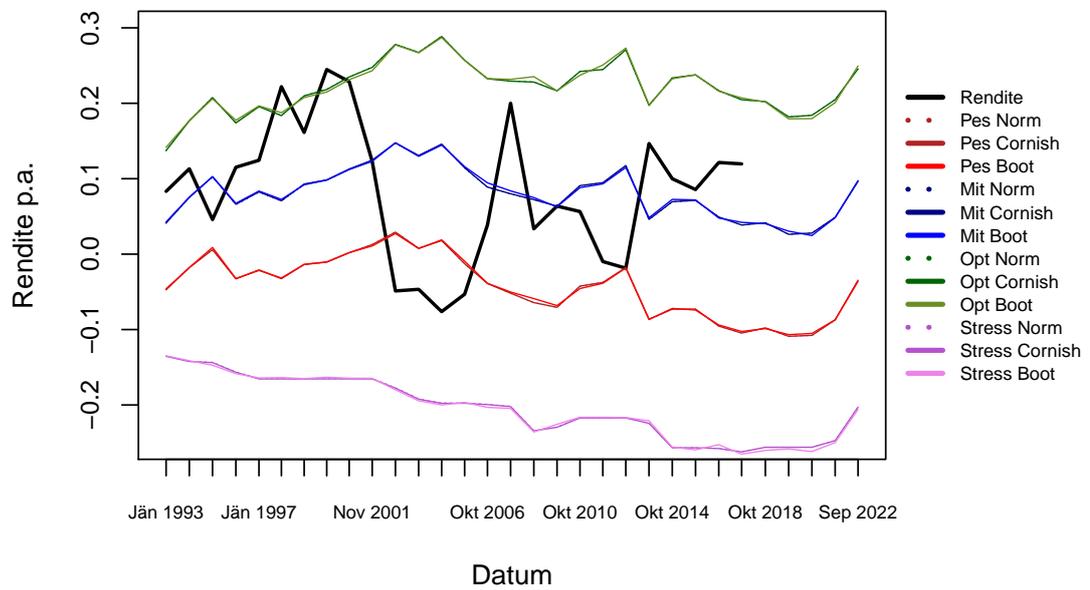


Abbildung 5.5: Historische Performance-Szenarien des DAX im Vergleich zur tatsächlich eingetretenen Rendite. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 5 Jahren. Die Haltedauer beträgt 15 Jahre, die Länge der Zeitschritte ist 1 Jahr.

**Performance-Szenarien – Normal/Cornish/Bootstrap
Historie aus 15 Jahren – Haltedauer 5 Jahre
DAX**



**Performance-Szenarien – Branchenstandard
Historie aus 15 Jahren – Haltedauer 5 Jahre
DAX**

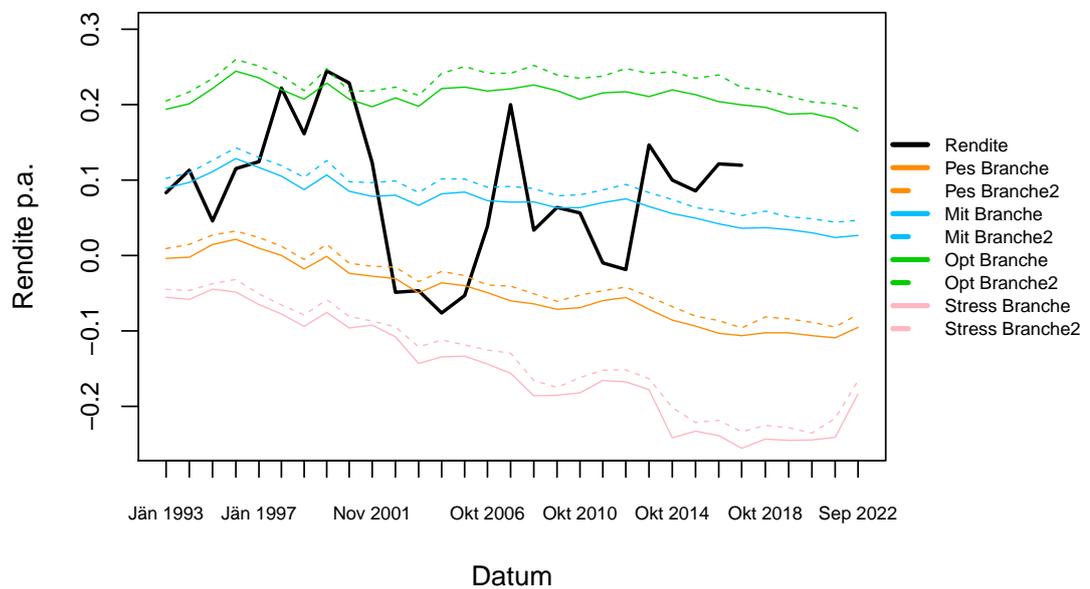


Abbildung 5.6: Historische Performance-Szenarien des DAX im Vergleich zur tatsächlich eingetretenen Rendite. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 15 Jahren. Die Haltedauer beträgt 5 Jahre, die Länge der Zeitschritte ist 1 Jahr.

5.2.2 Dow Jones seit 1896

Die lange Zeitreihe des Dow Jones verwenden wir für eine Simulation mit einer Haltedauer von 20 Jahren. Die Kurshistorie für die Berechnungen ist zunächst jeweils aus den letzten 5 Jahren.

Abbildung 5.7 zeigt den zeitlichen Verlauf der Performance-Szenarien. Wieder sehen wir starke Schwankungen bei den Szenarien. Die Spanne zwischen pessimistischem und optimistischem Szenario ist oft kleiner als die Szenarien über die Zeit schwanken können. So haben die Quantile keine Aussagekraft. Vereinzelt landen selbst die optimistischen Szenarien im negativen Bereich. Die MRM-Klasse schwankt dabei zwischen 3 und 6.

In Tabelle 5.11 sind die Ergebnisse der Simulation für das pessimistische und mittlere Szenario aufgelistet. Dabei sieht man, welche extremen Werte die Szenarien annehmen können. Einmal kommt es sogar im pessimistischen Szenario zum 34-fachen des eingesetzten Kapitals. Nach besonders schlechten 5 Jahren wird auch im mittleren Szenario ein hoher Verlust prognostiziert.

Betrachten wir die Summen der quadratischen Abweichungen anhand des *mittleren Szenarios*:

Rendite - Normalverteilung:	28.554,05
Rendite - Cornish-Fisher:	28.580,49
Rendite - Bootstrapping:	28.685,28
Rendite - Branchenstandard:	746,59
Rendite - Branchenstandard 2:	627,95
Normalverteilung - Cornish-Fisher:	0,21
Normalverteilung - Bootstrapping:	4,18
Normalverteilung - Branchenstandard:	28.180,07

Die quadratischen Abweichungen der ersten drei Methoden sind in etwa 38 mal so groß wie der quadratische Fehler des Branchenstandards.

Im Branchenstandard halten sich die Szenarien ungefähr auf einem Level. Dies ist dadurch zu erklären, dass der Drift im Branchenstandard für alle Jahre vorgegeben und gleich ist. Wir haben als Inputparameter eine mittlere Rendite über dem Zins von 4% für die Basisaktie und nur eine initiale Zinsstrukturkurve gegeben. Falls die Volatilität des Dow Jones steigt, gehen das pessimistische und das optimistische Szenario auseinander. Der Branchenstandard liefert im Grunde ein besseres Bild, jedoch ist es die große Schwierigkeit, die richtige mittlere Rendite festzulegen.

Tabelle 5.10 führt die Tests über die Anzahl der Unterschreitungen an. Die besten Ergebnisse erzielt Branchenstandard 2 mit der höheren initialen Zinsstrukturkurve. Die Methoden der Verordnung liegen im pessimistischen und im optimistischen Szenario deutlich daneben. Die statistischen Tests auf Bernoulliverteilung haben allerdings keine Aussagekraft, da die Nullhypothesen der Unabhängigkeit klar verworfen werden müssen.

Zum Vergleich betrachten wir nun eine Simulation, die für die Berechnung der Performance-Szenarien eine Kurshistorie aus den *letzten 15 Jahren* nimmt. Für viele Fonds kann das

in der Praxis schon schwierig sein. In Abbildung 5.8 sehen wir allerdings immer noch deutliche Schwankung bei den Szenarien, wenn auch nicht mehr so extreme wie vorher. Die Szenarien geben zeitlich verschoben die eingetretene Rendite wieder.

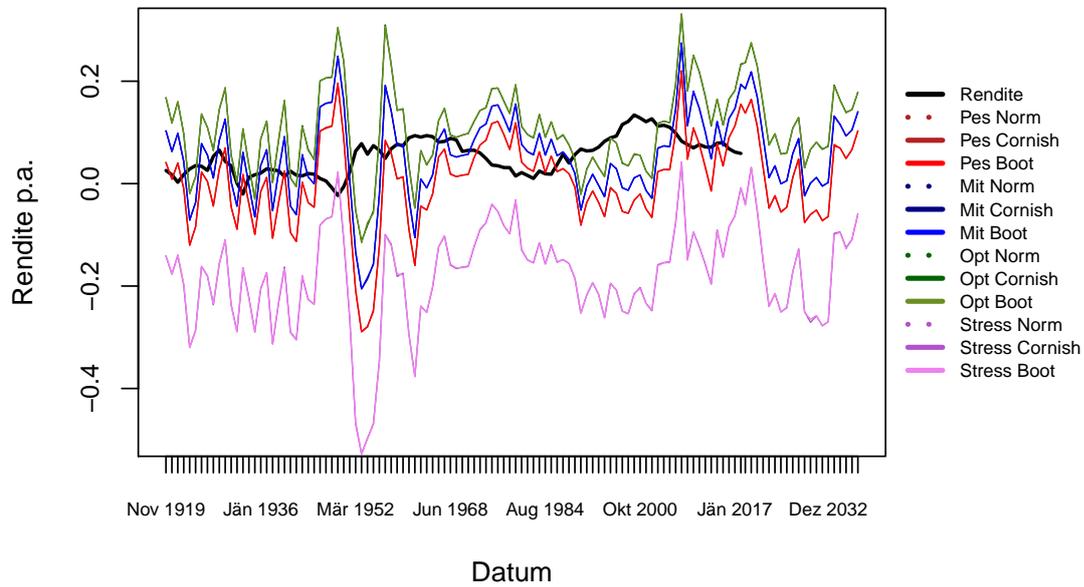
Im Grunde wollen wir für die Berechnungen eine Kurshistorie, die deutlich länger ist als die Haltedauer. Bei einer Haltedauer von 20 Jahren ist das für viele Vermögenswerte nicht einfach. Betrachten wir eine Simulation, deren Berechnungen der Performance-Szenarien eine Kurshistorie aus den jeweils *letzten 40 Jahren* verwenden (Abbildung 5.9).

Die Summen der quadratischen Abweichungen anhand des *mittleren Szenarios* sind:

	15 Jahre	40 Jahre
Rendite - Normalverteilung:	1799,884	724,775
Rendite - Cornish-Fisher:	1810,158	724,340
Rendite - Bootstrapping:	1797,189	721,460
Rendite - Branchenstandard:	740,350	700,828
Rendite - Branchenstandard 2:	605,018	513,383
Normalverteilung - Cornish-Fisher:	0,048	0,002
Normalverteilung - Bootstrapping:	0,745	0,125
Normalverteilung - Branchenstandard:	892,796	40,808

In den Tabellen 5.12 und 5.13 sind die Tests über die Anzahl der Unterschreitungen der Szenarien angeführt. Bei einer Historie von 15 Jahren schneidet der Branchenstandard 2 am besten ab, jedoch hat diese Aussage auf Grund der Abhängigkeit der Beobachtungen keine Aussagekraft. Bei einer Historie von jeweils 40 Jahren sind die Ergebnisse zwar glatter, jedoch werden die Szenarien zu niedrig geschätzt. Die Quantile werden kaum getroffen. Hier ist gut zu sehen, wie wichtig die richtige Wahl der mittleren Rendite ist.

**Performance-Szenarien – Normal/Cornish/Bootstrap
 Historie aus 5 Jahren – Haltedauer 20 Jahre
 Dow Jones**



**Performance-Szenarien – Branchenstandard
 Historie aus 5 Jahren – Haltedauer 20 Jahre
 Dow Jones**

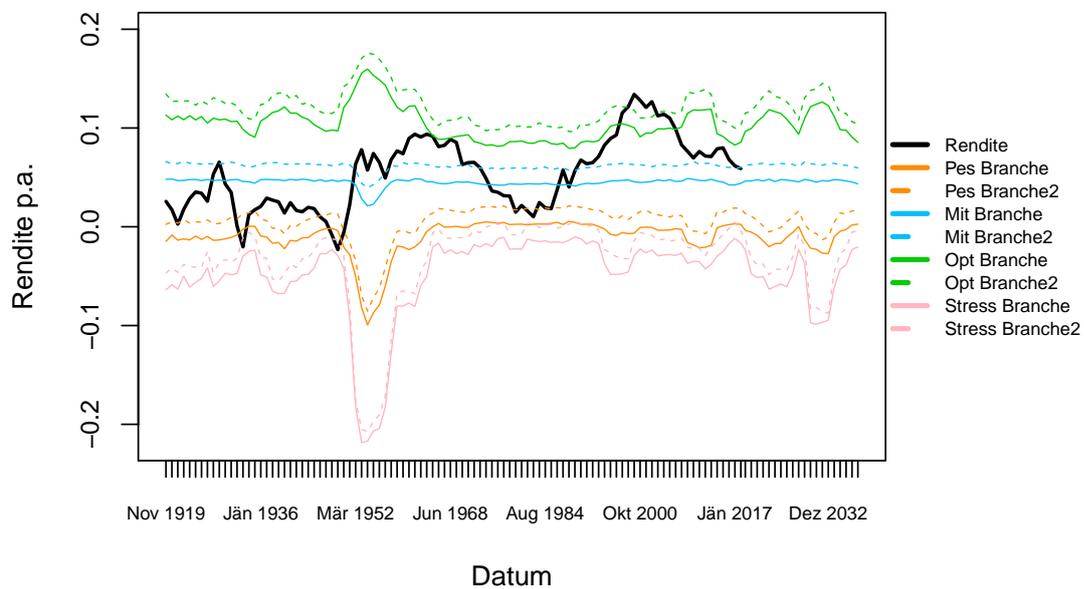
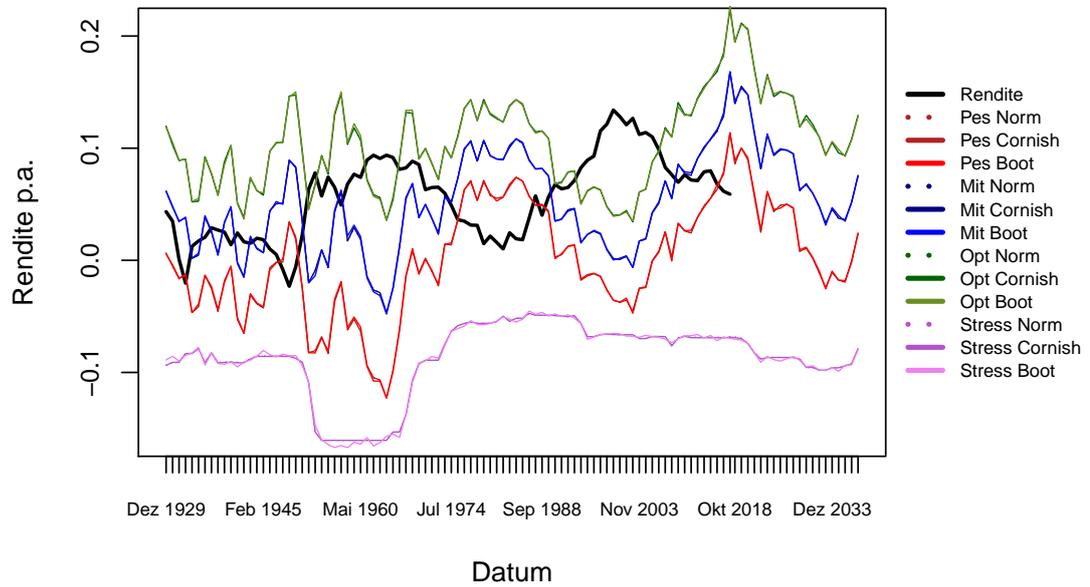


Abbildung 5.7: Historische Performance-Szenarien des Dow Jones im Vergleich zur tatsächlich eingetretenen Rendite. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 5 Jahren. Die Haltedauer beträgt 20 Jahre, die Länge der Zeitschritte ist 1 Jahr (264 Tage).

**Performance-Szenarien – Normal/Cornish/Bootstrap
Historie aus 15 Jahren – Haltedauer 20 Jahre
Dow Jones**



**Performance-Szenarien – Branchenstandard
Historie aus 15 Jahren – Haltedauer 20 Jahre
Dow Jones**

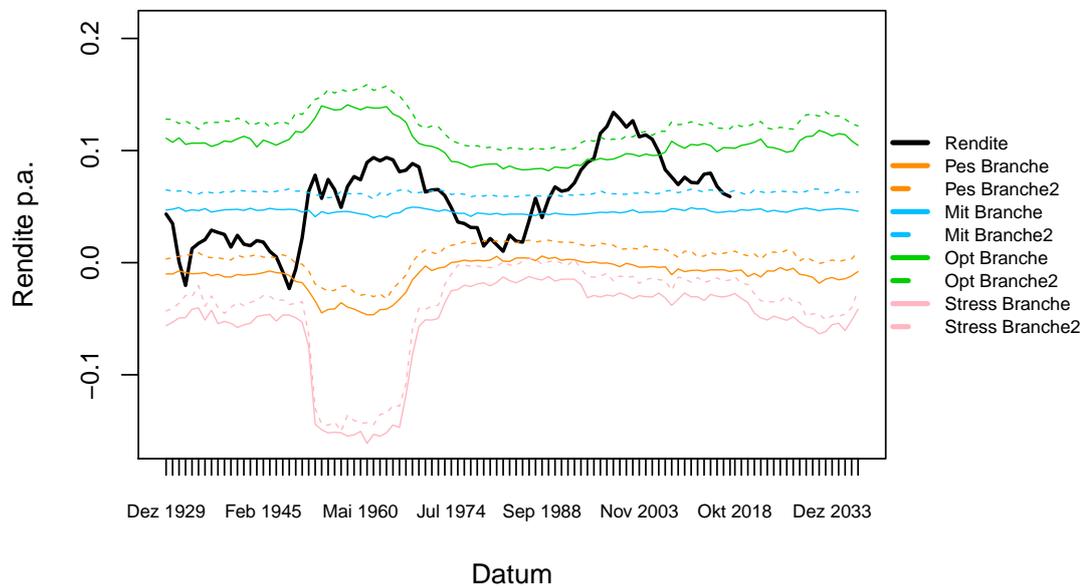


Abbildung 5.8: Historische Performance-Szenarien des Dow Jones im Vergleich zur tatsächlich eingetretenen Rendite. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 15 Jahren. Die Haltedauer beträgt 20 Jahre, die Länge der Zeitschritte ist 1 Jahr (264 Tage).

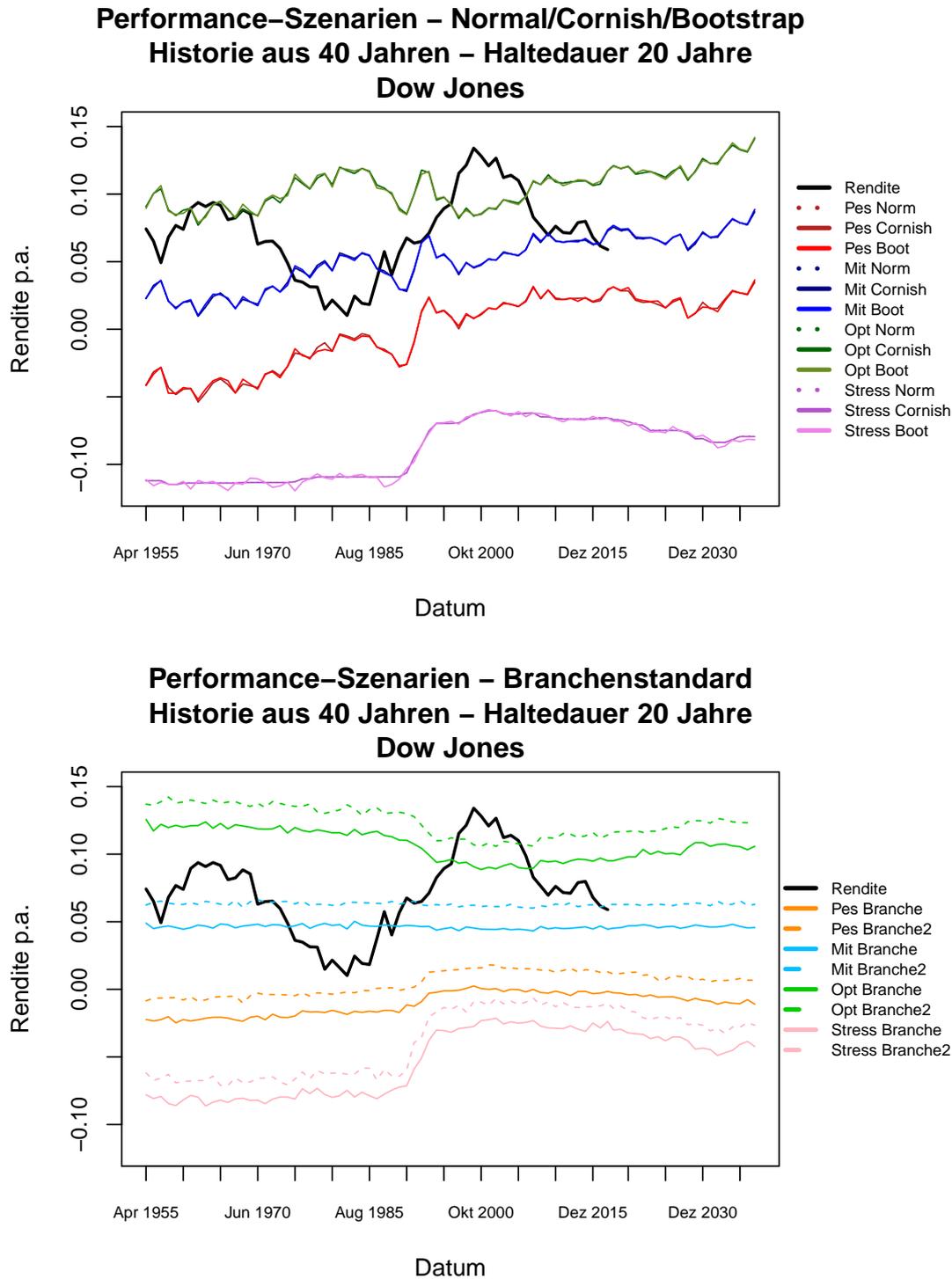


Abbildung 5.9: Historische Performance-Szenarien des Dow Jones im Vergleich zur tatsächlich eingetretenen Rendite. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 40 Jahren. Die Haltedauer beträgt 20 Jahre, die Länge der Zeitschritte ist 1 Jahr (264 Tage).

5.2 Lange Haltedauer

<i>DAX seit 1972</i>						<i>in Prozent</i>			
Datum	Rendite	Pessimistisch				Mittel			
		Norm	Cornish	Boot	Branche	Norm	Cornish	Boot	Branche
1978-10-30	7.0	-17.3	-17.3	-17.4	-11.5	-0.3	-0.3	0.1	6.3
1979-11-02	-13.4	-10.6	-10.6	-10.6	-9.8	6.1	6.1	5.8	6.8
1980-11-07	-6.0	-8.4	-8.4	-8.2	-3.9	5.8	5.8	5.9	10.7
1981-11-13	5.3	-14.2	-14.2	-14.3	-2.4	-2.0	-2.0	-2.0	11.3
1982-11-18	5.2	-12.4	-12.4	-12.4	-1.6	0.3	0.3	0.4	12.8
1983-11-18	40.8	-13.7	-13.7	-13.8	-5.0	-0.7	-0.7	-0.7	9.7
1984-11-16	8.1	-10.4	-10.4	-10.5	-6.7	4.9	4.9	5.0	9.0
1985-11-25	62.5	-6.8	-6.8	-6.5	-8.0	9.6	9.6	9.8	8.0
1986-12-02	11.4	3.1	3.1	3.2	-9.9	22.3	22.3	22.4	7.0
1987-12-08	-30.0	1.5	1.5	1.4	-11.9	23.7	23.7	23.5	7.3
1988-12-12	27.1	-11.3	-11.3	-11.2	-17.3	14.0	14.2	14.3	6.5
1989-12-19	27.4	-14.1	-14.1	-14.6	-17.2	11.7	11.9	12.2	8.3
1991-01-02	-17.1	-12.7	-12.8	-13.5	-16.3	15.5	15.8	16.2	10.5
1992-01-10	18.3	-25.7	-25.8	-26.1	-18.0	0.9	1.2	1.3	12.4
1993-01-13	-6.1	-24.6	-24.7	-25.2	-17.8	2.2	2.4	2.4	11.5
1994-01-12	45.7	-16.9	-16.9	-17.1	-15.5	8.3	8.6	8.2	9.9
1995-01-11	-6.7	-13.4	-13.4	-13.8	-16.2	11.3	11.6	11.3	7.9
1996-01-12	14.3	-17.8	-17.8	-17.8	-15.0	4.6	4.6	4.7	8.1
1997-01-08	23.2	-8.9	-9.0	-9.0	-13.8	11.5	11.6	11.3	5.3
1997-12-26	42.3	-6.0	-6.0	-6.0	-12.0	12.4	12.5	12.7	5.4
1998-12-18	12.9	-0.7	-0.7	-0.7	-14.0	22.2	22.3	22.5	5.7
1999-12-07	32.0	-10.0	-10.1	-10.1	-18.7	16.1	16.3	16.4	5.2
2000-11-23	7.2	-4.9	-4.9	-4.9	-18.5	24.5	24.6	24.7	6.1
2001-11-19	-21.4	-8.0	-8.1	-7.5	-19.8	22.9	23.0	23.1	7.2
2002-11-18	-37.9	-19.2	-19.2	-19.2	-24.4	12.3	12.4	12.0	5.6
2003-11-17	14.2	-34.5	-34.5	-34.0	-28.2	-4.9	-4.8	-4.7	4.8
2004-11-12	12.8	-35.2	-35.2	-35.3	-29.3	-4.7	-4.7	-4.9	4.6
2005-11-07	21.3	-36.6	-36.6	-36.8	-28.8	-7.6	-7.6	-7.9	4.3
2006-10-31	24.8	-33.9	-33.9	-34.1	-26.6	-5.3	-5.3	-4.7	4.5
2007-10-29	27.8	-25.3	-25.2	-25.3	-23.6	3.9	3.9	4.2	6.0
2008-10-27	-45.9	-7.2	-7.2	-7.8	-18.2	20.0	20.0	20.0	6.4
2009-10-26	30.2	-19.0	-19.0	-19.3	-17.8	3.4	3.4	3.3	4.6
2010-10-21	17.2	-21.5	-21.5	-21.8	-24.1	6.4	6.3	5.6	2.8
2011-10-14	-9.7	-23.0	-22.9	-22.9	-24.3	5.6	5.6	5.7	3.1
2012-10-08	22.2	-29.3	-29.2	-29.1	-26.7	-1.0	-1.0	-1.3	2.6
2013-10-07	17.8	-31.0	-31.0	-30.6	-28.3	-1.9	-1.9	-1.4	1.9
2014-10-07	5.8	-16.5	-16.5	-16.5	-25.3	14.7	14.6	14.4	2.2
2015-10-07	9.7	-14.9	-14.9	-14.9	-20.6	10.0	10.1	10.0	2.6
2016-10-05	6.2	-16.9	-16.9	-16.5	-22.1	8.6	8.6	8.2	2.4
2017-09-29	21.2	-13.5	-13.5	-13.7	-21.8	12.1	12.2	12.3	1.7
<NA>		-11.1	-11.1	-11.1	-19.4	12.0	12.0	12.2	1.6

Tabelle 5.1: Pessimistische und Mittlere Szenarien anhand des DAX. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 5 Jahren. Haltedauer und Länge der Zeitschritte betragen 1 Jahr (252 Tage).

5 Auswertungen und Ergebnisse

<i>DAX seit 1972</i>						<i>in Prozent</i>			
Datum	Rendite	Stress				MRM-Klasse			
		Norm	Cornish	Boot	Branche	Norm	Cornish	Boot	Branche
1978-10-30	7.0	-45.7	-45.7	-46.1	-41.6	4	4	4	3
1979-11-02	-13.4	-45.7	-45.7	-46.8	-40.7	4	4	4	4
1980-11-07	-6.0	-36.8	-36.7	-35.8	-29.6	3	3	3	3
1981-11-13	5.3	-31.8	-31.8	-32.3	-22.8	3	3	3	2
1982-11-18	5.2	-39.0	-39.0	-37.5	-30.6	3	3	3	2
1983-11-18	40.8	-39.0	-39.1	-40.7	-32.5	3	3	3	3
1984-11-16	8.1	-39.3	-39.2	-40.5	-32.4	4	4	4	3
1985-11-25	62.5	-39.3	-39.3	-38.6	-34.4	4	4	4	4
1986-12-02	11.4	-42.2	-42.3	-43.6	-39.3	4	4	4	4
1987-12-08	-30.0	-47.0	-47.0	-46.6	-42.3	4	4	4	5
1988-12-12	27.1	-76.8	-77.4	-78.1	-77.6	4	4	4	5
1989-12-19	27.4	-76.8	-77.3	-77.1	-78.1	5	5	5	5
1991-01-02	-17.1	-76.8	-77.8	-76.5	-76.9	5	5	5	5
1992-01-10	18.3	-76.8	-77.5	-77.8	-76.6	5	5	5	4
1993-01-13	-6.1	-76.8	-77.6	-78.9	-76.2	5	5	5	4
1994-01-12	45.7	-71.5	-72.4	-71.0	-70.2	5	5	5	4
1995-01-11	-6.7	-71.5	-72.5	-71.5	-71.5	4	4	4	5
1996-01-12	14.3	-60.8	-61.2	-61.2	-58.2	4	4	4	4
1997-01-08	23.2	-59.0	-59.6	-61.4	-58.1	4	4	4	4
1997-12-26	42.3	-40.5	-40.7	-40.2	-36.7	4	4	4	4
1998-12-18	12.9	-55.5	-55.8	-56.9	-54.3	4	4	4	5
1999-12-07	32.0	-70.1	-70.5	-70.5	-70.0	4	5	5	5
2000-11-23	7.2	-70.1	-70.4	-70.7	-70.0	5	5	5	5
2001-11-19	-21.4	-70.1	-70.4	-71.1	-69.5	5	5	5	5
2002-11-18	-37.9	-72.1	-72.4	-71.8	-72.5	5	5	5	5
2003-11-17	14.2	-75.4	-75.5	-76.7	-75.0	5	5	5	5
2004-11-12	12.8	-75.4	-75.4	-74.7	-75.2	6	6	6	5
2005-11-07	21.3	-75.4	-75.5	-74.7	-74.6	5	5	5	5
2006-10-31	24.8	-75.4	-75.5	-74.8	-76.5	5	5	5	5
2007-10-29	27.8	-75.4	-75.4	-76.6	-76.2	5	5	5	5
2008-10-27	-45.9	-68.7	-68.8	-68.6	-69.1	5	5	4	5
2009-10-26	30.2	-62.5	-63.0	-62.6	-61.3	4	4	4	4
2010-10-21	17.2	-79.7	-79.7	-80.1	-81.6	5	5	5	5
2011-10-14	-9.7	-79.7	-79.7	-78.8	-82.3	5	5	5	5
2012-10-08	22.2	-79.7	-79.7	-79.8	-82.9	5	5	5	5
2013-10-07	17.8	-79.7	-79.7	-79.3	-79.9	5	5	5	5
2014-10-07	5.8	-73.3	-73.2	-72.3	-73.2	5	5	5	5
2015-10-07	9.7	-64.5	-64.7	-64.5	-63.8	4	5	5	5
2016-10-05	6.2	-64.5	-64.7	-64.6	-65.5	5	5	5	5
2017-09-29	21.2	-56.6	-56.8	-57.2	-56.1	5	5	5	5
<NA>		-55.2	-55.5	-54.0	-54.3	4	4	4	5

Tabelle 5.2: Stressszenarien und MRM-Klassen anhand des DAX. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 5 Jahren. Haltedauer und Länge der Zeitschritte betragen 1 Jahr (252 Tage).

5.2 Lange Haltedauer

DAX seit 1972

		Test auf Bernoulliverteilung					Test auf Unabhängigkeit			
		T	T1	T1/T	P_G	P_{Binom}	p_{00}	p_{10}	P_G	P_{Fisher}
Pessimist	Norm	40	6	15.0	32.2	28.7	84.8	83.3	92.5	100.0
	Cornish	40	6	15.0	32.2	28.7	84.8	83.3	92.5	100.0
	Boot	40	6	15.0	32.2	28.7	84.8	83.3	92.5	100.0
	Branche	40	7	17.5	14.8	11.4	84.4	71.4	44.1	58.8
	Branche2	40	7	17.5	14.8	11.4	84.4	71.4	44.1	58.8
Mittel	Norm	40	16	40.0	20.4	26.8	56.5	62.5	70.8	75.2
	Cornish	40	16	40.0	20.4	26.8	56.5	62.5	70.8	75.2
	Boot	40	15	37.5	11.2	15.4	54.2	73.3	22.6	31.7
	Branche	40	13	32.5	2.5	3.8	65.4	69.2	81.0	100.0
	Branche2	40	15	37.5	11.2	15.4	66.7	60.0	67.4	74.0
Optimist	Norm	40	36	90.0	100.0	100.0	0.0	11.4	33.8	100.0
	Cornish	40	36	90.0	100.0	100.0	0.0	11.4	33.8	100.0
	Boot	40	36	90.0	100.0	100.0	0.0	11.4	33.8	100.0
	Branche	40	36	90.0	100.0	100.0	0.0	11.4	33.8	100.0
	Branche2	40	37	92.5	58.3	79.4	0.0	8.3	47.9	100.0
Stress	Norm	40	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Cornish	40	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Boot	40	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Branche	40	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Branche2	40	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0

Tabelle 5.3: Test auf Bernoulli-Verteilung und Unabhängigkeit der Unterschreitungen der historischen 1-Jahres-Quantile des DAX. Haltedauer und Zeitschritte betragen 1 Jahr. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 5 Jahren. Dezimalzahlen in Prozent-Angaben.

DAX seit 1972

		Test auf Bernoulliverteilung					Test auf Unabhängigkeit			
		T	T1	T1/T	P_G	P_{Binom}	p_{00}	p_{10}	P_G	P_{Fisher}
Pessimist	Norm	486	47	9.7	80.8	88.0	90.6	87.2	47.0	43.7
	Cornish	486	49	10.1	95.2	94.0	90.1	87.8	60.9	61.6
	Boot	486	48	9.9	92.8	100.0	90.4	87.5	53.8	45.5
	Branche	486	45	9.3	58.2	65.0	91.4	84.4	15.7	17.0
	Branche2	486	48	9.9	92.8	100.0	90.8	83.3	12.4	12.2
Mittel	Norm	486	207	42.6	0.1	0.1	59.1	54.9	34.6	35.5
	Cornish	486	208	42.8	0.1	0.2	59.4	54.1	24.8	26.6
	Boot	486	208	42.8	0.1	0.2	59.4	54.1	24.8	26.6
	Branche	486	208	42.8	0.1	0.2	58.1	55.8	60.4	64.3
	Branche2	486	212	43.6	0.5	0.6	57.9	54.2	42.4	46.1
Optimist	Norm	486	450	92.6	4.7	5.8	25.0	6.0	0.1	0.1
	Cornish	486	448	92.2	9.7	11.3	23.7	6.5	0.1	0.1
	Boot	486	449	92.4	6.8	8.2	24.3	6.2	0.1	0.1
	Branche	486	443	91.2	38.9	44.9	20.9	7.7	1.0	0.8
	Branche2	486	446	91.8	18.1	22.6	22.5	7.0	0.3	0.3
Stress	Norm	486	2	0.4		95.5	99.6	100.0	89.8	100.0
	Cornish	486	2	0.4		95.5	99.6	100.0	89.8	100.0
	Boot	486	2	0.4		95.5	99.6	100.0	89.8	100.0
	Branche	486	2	0.4		95.5	99.6	100.0	89.8	100.0
	Branche2	486	2	0.4		95.5	99.6	100.0	89.8	100.0

Tabelle 5.4: Test auf Bernoulli-Verteilung und Unabhängigkeit der Unterschreitungen der historischen 1-Monat-Quantile des DAX. Haltedauer und Zeitschritte betragen 1 Monat. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 5 Jahren. Dezimalzahlen in Prozent-Angaben.

5 Auswertungen und Ergebnisse

Dow Jones seit 1896

		Test auf Bernoulliverteilung					Test auf Unabhängigkeit			
		T	T1	T1/T	P_G	P_{Binom}	p_{00}	p_{10}	P_G	P_{Fisher}
Pessimist	Norm	119	18	15.1	8.1	6.7	85.0	83.3	85.8	100.0
	Cornish	119	18	15.1	8.1	6.7	85.0	83.3	85.8	100.0
	Boot	119	18	15.1	8.1	6.7	85.0	83.3	85.8	100.0
	Branche	119	10	8.4	55.2	64.9	91.7	90.0	86.0	100.0
	Branche2	119	13	10.9	74.0	75.9	89.5	84.6	61.0	63.5
Mittel	Norm	119	58	48.7	78.3	85.5	45.0	58.6	13.8	14.6
	Cornish	119	58	48.7	78.3	85.5	45.0	58.6	13.8	14.6
	Boot	119	59	49.6	92.7	100.0	44.1	57.6	14.0	19.7
	Branche	119	45	37.8	0.8	1.0	60.3	66.7	48.4	55.9
	Branche2	119	50	42.0	8.1	9.9	57.4	60.0	77.3	85.1
Optimist	Norm	119	102	85.7	14.0	12.5	0.0	16.8	1.6	12.7
	Cornish	119	102	85.7	14.0	12.5	0.0	16.8	1.6	12.7
	Boot	119	102	85.7	14.0	12.5	0.0	16.8	1.6	12.7
	Branche	119	95	79.8	0.1	0.1	26.1	18.9	45.6	56.3
	Branche2	119	98	82.4	1.1	0.9	19.0	17.5	87.0	100.0
Stress	Norm	119	1	0.8		69.8	99.1	100.0	89.6	100.0
	Cornish	119	1	0.8		69.8	99.1	100.0	89.6	100.0
	Boot	119	1	0.8		69.8	99.1	100.0	89.6	100.0
	Branche	119	1	0.8		69.8	99.1	100.0	89.6	100.0
	Branche2	119	1	0.8		69.8	99.1	100.0	89.6	100.0

Tabelle 5.5: Test auf Bernoulli-Verteilung und Unabhängigkeit der Unterschreitungen der historischen 1-Jahres-Quantile des Dow Jones. Haltedauer und Zeitschritte betragen 1 Jahr. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 5 Jahren. Dezimalzahlen in Prozent-Angaben.

Dow Jones seit 1896

		Test auf Bernoulliverteilung					Test auf Unabhängigkeit			
		T	T1	T1/T	P_G	P_{Binom}	p_{00}	p_{10}	P_G	P_{Fisher}
Pessimist	Norm	104	12	11.5	60.9	62.2	89.0	83.3	58.2	62.9
	Cornish	104	12	11.5	60.9	62.2	89.0	83.3	58.2	62.9
	Boot	104	12	11.5	60.9	62.2	89.0	83.3	58.2	62.9
	Branche	104	9	8.7	64.0	74.6	91.5	88.9	79.9	57.6
	Branche2	104	11	10.6	84.6	87.0	89.1	90.9	85.4	100.0
Mittel	Norm	104	48	46.2	43.3	49.3	49.1	60.4	24.9	32.2
	Cornish	104	49	47.1	55.6	62.4	48.1	59.2	26.2	32.4
	Boot	104	49	47.1	55.6	62.4	50.0	57.1	46.8	55.4
	Branche	104	36	34.6	0.2	0.2	62.7	72.2	32.6	38.7
	Branche2	104	44	42.3	11.6	14.1	55.9	61.4	58.0	68.7
Optimist	Norm	104	89	85.6	15.6	14.0	6.7	15.9	30.8	69.1
	Cornish	104	89	85.6	15.6	14.0	6.7	15.9	30.8	69.1
	Boot	104	88	84.6	8.7	7.2	6.2	17.2	22.1	45.6
	Branche	104	88	84.6	8.7	7.2	6.2	17.2	22.1	45.6
	Branche2	104	89	85.6	15.6	14.0	6.7	15.9	30.8	69.1
Stress	Norm	104	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Cornish	104	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Boot	104	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Branche	104	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Branche2	104	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0

Tabelle 5.6: Test auf Bernoulli-Verteilung und Unabhängigkeit der Unterschreitungen der historischen 1-Jahres-Quantile des Dow Jones. Haltedauer und Zeitschritte betragen 1 Jahr. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 20 Jahren. Dezimalzahlen in Prozent-Angaben.

5.2 Lange Haltedauer

Dow Jones seit 1896

		Test auf Bernoulliverteilung					Test auf Unabhängigkeit			
		T	T1	T1/T	P_G	P_{Binom}	p_{00}	p_{10}	P_G	P_{Fisher}
Pessimist	Norm	1477	152	10.3	71.0	69.6	90.3	84.2	2.7	2.4
	Cornish	1477	156	10.6	47.5	46.1	90.1	84.0	2.7	2.7
	Boot	1477	155	10.5	53.0	51.5	90.1	84.5	4.2	3.8
	Branche	1477	134	9.1	22.8	25.9	91.3	87.3	14.6	15.3
	Branche2	1477	137	9.3	34.8	38.6	91.2	86.1	6.6	6.2
Mittel	Norm	1477	703	47.6	6.5	6.9	52.7	52.1	82.5	83.5
	Cornish	1477	723	49.0	42.0	43.5	51.6	50.6	69.0	71.5
	Boot	1477	717	48.5	26.3	27.4	51.3	51.7	89.0	91.7
	Branche	1477	641	43.4	0.0	0.0	58.1	54.5	16.7	16.9
	Branche2	1477	670	45.4	0.0	0.0	56.5	52.3	10.8	11.5
Optimist	Norm	1477	1341	90.8	30.4	34.0	10.3	9.1	65.3	64.0
	Cornish	1477	1329	90.0	97.9	96.5	12.2	9.8	37.4	38.6
	Boot	1477	1333	90.3	74.7	79.5	11.1	9.6	57.1	55.4
	Branche	1477	1321	89.4	47.5	46.1	11.5	10.5	68.1	67.9
	Branche2	1477	1326	89.8	77.5	76.1	9.9	10.3	89.9	100.0
Stress	Norm	1477	6	0.4		99.7	99.6	100.0	82.5	100.0
	Cornish	1477	4	0.3		100.0	99.7	100.0	88.3	100.0
	Boot	1477	4	0.3		100.0	99.7	100.0	88.3	100.0
	Branche	1477	5	0.3		99.9	99.7	100.0	85.4	100.0
	Branche2	1477	6	0.4		99.7	99.6	100.0	82.5	100.0

Tabelle 5.7: Test auf Bernoulli-Verteilung und Unabhängigkeit der Unterschreitungen der historischen 1-Monat-Quantile des Dow Jones. Haltedauer und Zeitschritte betragen 1 Monat. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 5 Jahren. Dezimalzahlen in Prozent-Angaben.

DAX seit 1972

		Test auf Bernoulliverteilung					Test auf Unabhängigkeit			
		T	T1	T1/T	P_G	P_{Binom}	p_{00}	p_{10}	P_G	P_{Fisher}
Pessimist	Norm	26	8	30.8	0.3	0.3	82.4	37.5	2.7	6.1
	Cornish	26	8	30.8	0.3	0.3	82.4	37.5	2.7	6.1
	Boot	26	8	30.8	0.3	0.3	82.4	37.5	2.7	6.1
	Branche	26	2	7.7	68.4	100.0	95.7	50.0	8.6	15.7
	Branche2	26	5	19.2	15.8	17.6	85.0	60.0	24.0	25.2
Mittel	Norm	26	13	50.0	100.0	100.0	75.0	23.1	0.8	1.7
	Cornish	26	13	50.0	100.0	100.0	75.0	23.1	0.8	1.7
	Boot	26	13	50.0	100.0	100.0	75.0	23.1	0.8	1.7
	Branche	26	21	80.8	0.1	0.2	25.0	19.0	79.0	100.0
	Branche2	26	24	92.3	0.0	0.0	0.0	8.7	55.5	100.0
Optimist	Norm	26	19	73.1	1.5	1.2	66.7	10.5	0.8	1.5
	Cornish	26	19	73.1	1.5	1.2	66.7	10.5	0.8	1.5
	Boot	26	18	69.2	0.3	0.3	57.1	16.7	4.9	6.6
	Branche	26	26	100.0	1.9	10.4		0.0	100.0	100.0
	Branche2	26	26	100.0	1.9	10.4		0.0	100.0	100.0
Stress	Norm	26	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Cornish	26	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Boot	26	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Branche	26	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Branche2	26	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0

Tabelle 5.8: Test auf Bernoulli-Verteilung und Unabhängigkeit der Unterschreitungen der historischen 15-Jahre-Quantile des DAX. Die Haltedauer beträgt 15 Jahre, die Länge der Zeitschritte ist 1 Jahr (252 Tage). Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 5 Jahren. Dezimalzahlen in Prozent-Angaben.

5 Auswertungen und Ergebnisse

DAX seit 1972

		Test auf Bernoulliverteilung					Test auf Unabhängigkeit			
		T	T1	T1/T	P_G	P_{Binom}	p_{00}	p_{10}	P_G	P_{Fisher}
Pessimist	Norm	26	5	19.2	15.8	17.6	90.0	40.0	2.1	3.8
	Cornish	26	5	19.2	15.8	17.6	90.0	40.0	2.1	3.8
	Boot	26	5	19.2	15.8	17.6	90.0	40.0	2.1	3.8
	Branche	26	3	11.5	79.8	74.1	90.9	66.7	28.9	33.0
	Branche2	26	4	15.4	39.2	32.4	95.2	25.0	0.2	0.7
Mittel	Norm	26	11	42.3	43.2	55.7	71.4	36.4	7.7	11.6
	Cornish	26	11	42.3	43.2	55.7	71.4	36.4	7.7	11.6
	Boot	26	11	42.3	43.2	55.7	71.4	36.4	7.7	11.6
	Branche	26	12	46.2	69.5	84.5	69.2	41.7	16.3	23.8
	Branche2	26	14	53.8	69.5	84.5	72.7	28.6	2.6	4.7
Optimist	Norm	26	24	92.3	68.4	100.0	0.0	8.7	55.5	100.0
	Cornish	26	24	92.3	68.4	100.0	0.0	8.7	55.5	100.0
	Boot	26	24	92.3	68.4	100.0	0.0	8.7	55.5	100.0
	Branche	26	24	92.3	68.4	100.0	50.0	4.3	8.6	15.7
	Branche2	26	25	96.2	23.7	51.0	0.0	4.2	77.3	100.0
Stress	Norm	26	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Cornish	26	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Boot	26	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Branche	26	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Branche2	26	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0

Tabelle 5.9: Test auf Bernoulli-Verteilung und Unabhängigkeit der Unterschreitungen der historischen 5-Jahre-Quantile des DAX. Die Haltedauer beträgt 5 Jahre, die Länge der Zeitschritte ist 1 Jahr (252 Tage). Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 15 Jahren. Dezimalzahlen in Prozent-Angaben.

Dow Jones seit 1896

		Test auf Bernoulliverteilung					Test auf Unabhängigkeit			
		T	T1	T1/T	P_G	P_{Binom}	p_{00}	p_{10}	P_G	P_{Fisher}
Pessimist	Norm	98	31	31.6	0.0	0.0	85.1	33.3	0.0	0.0
	Cornish	98	31	31.6	0.0	0.0	85.1	33.3	0.0	0.0
	Boot	98	30	30.6	0.0	0.0	85.3	34.5	0.0	0.0
	Branche	98	3	3.1	0.8	1.7	97.9	66.7	5.8	9.1
	Branche2	98	12	12.2	47.3	40.3	94.1	41.7	0.0	0.0
Mittel	Norm	98	50	51.0	84.0	92.0	70.8	28.6	0.0	0.0
	Cornish	98	50	51.0	84.0	92.0	70.8	28.6	0.0	0.0
	Boot	98	50	51.0	84.0	92.0	70.8	28.6	0.0	0.0
	Branche	98	43	43.9	22.5	26.6	94.4	9.3	0.0	0.0
	Branche2	98	49	50.0	100.0	100.0	91.8	8.3	0.0	0.0
Optimist	Norm	98	69	70.4	0.0	0.0	75.9	10.3	0.0	0.0
	Cornish	98	69	70.4	0.0	0.0	75.9	10.3	0.0	0.0
	Boot	98	69	70.4	0.0	0.0	75.9	10.3	0.0	0.0
	Branche	98	88	89.8	94.6	86.7	90.0	1.1	0.0	0.0
	Branche2	98	93	94.9	7.7	12.8	80.0	1.1	0.0	0.0
Stress	Norm	98	1	1.0		99.3	99.0	100.0	88.5	100.0
	Cornish	98	1	1.0		99.3	99.0	100.0	88.5	100.0
	Boot	98	1	1.0		99.3	99.0	100.0	88.5	100.0
	Branche	98	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Branche2	98	2	2.1		96.0	97.9	100.0	77.2	100.0

Tabelle 5.10: Test auf Bernoulli-Verteilung und Unabhängigkeit der Unterschreitungen der historischen 20-Jahre-Quantile des Dow Jones. Haltedauer beträgt 20 Jahre, die Länge der Zeitschritte ist 1 Jahr (264 Tage). Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 5 Jahren. Dezimalzahlen in Prozent-Angaben.

5.2 Lange Haltedauer

<i>Dow Jones seit 1896</i>						<i>in Prozent</i>			
Datum	Rendite	Pessimistisch				Mittel			
		Norm	Cornish	Boot	Branche	Norm	Cornish	Boot	Branche
1941-02-10	62.1	-86.7	-86.7	-86.5	-24.2	-59.2	-59.2	-59.4	155.5
1942-02-13	38.7	-90.9	-90.9	-90.9	-25.5	-71.5	-71.5	-71.7	151.7
1943-02-18	35.1	6.1	6.1	5.5	-20.1	201.3	201.5	196.3	156.4
1944-02-23	47.7	-52.6	-52.6	-53.6	-19.8	29.5	29.6	29.8	153.7
1945-02-27	43.9	-60.7	-60.7	-61.5	-12.3	-0.1	-0.1	-1.4	146.6
1946-03-04	22.2	594.6	594.4	614.6	-7.1	1540.0	1540.9	1522.2	153.4
1947-03-07	10.9	703.4	702.9	677.2	-3.8	1752.0	1753.7	1728.7	145.7
1948-03-11	-15.2	744.7	744.2	732.0	-3.3	1826.1	1828.0	1795.8	152.0
1949-03-16	-37.4	3486.4	3484.2	3508.8	-7.4	8389.0	8397.3	8453.4	145.5
1950-03-21	-11.1	451.3	450.1	438.3	-34.1	1898.2	1905.8	1896.0	151.4
1951-03-26	55.5	-72.5	-72.5	-72.5	-43.6	16.3	16.7	18.0	148.4
1952-03-28	242.7	-99.1	-99.1	-99.1	-64.4	-94.3	-94.3	-94.2	129.6
1953-04-02	349.8	-99.9	-99.9	-99.9	-81.7	-99.0	-99.0	-99.0	75.2
1954-04-07	205.0	-99.9	-99.9	-99.9	-87.7	-98.4	-98.4	-98.2	51.8
1955-04-12	318.9	-99.7	-99.7	-99.7	-83.8	-96.6	-96.6	-96.8	57.2
1956-04-16	253.4	-92.7	-92.7	-92.8	-80.8	-34.5	-34.7	-36.8	83.2
1957-04-19	161.6	387.4	387.8	410.1	-71.2	3187.3	3183.8	3266.1	116.0
1958-04-24	273.0	220.9	221.0	214.8	-51.4	1354.6	1353.6	1292.7	142.5
1959-04-29	339.4	18.8	18.7	21.4	-32.6	315.3	315.8	325.0	153.7
1960-05-03	316.4	30.5	30.5	30.3	-33.8	344.7	345.0	339.5	150.4
1961-05-08	454.8	-84.5	-84.5	-85.1	-37.4	-44.8	-44.7	-44.2	147.9
1962-05-11	500.2	-96.9	-96.9	-96.9	-33.7	-89.3	-89.3	-89.2	158.1
1963-05-16	468.9	-59.4	-59.4	-59.2	-26.0	19.3	19.4	20.0	156.4
1964-05-20	500.8	-65.1	-65.1	-65.5	-9.2	-15.6	-15.6	-15.7	144.1
1965-05-25	478.2	-32.9	-32.9	-33.9	-0.2	42.0	42.3	38.4	143.4
1966-05-30	376.0	176.8	176.7	175.0	7.0	430.3	430.6	422.5	136.4
1967-06-02	387.6	268.5	268.2	271.4	-0.8	657.2	658.1	664.3	134.5
1968-06-06	444.3	46.8	46.7	43.0	-0.4	199.9	200.3	197.0	137.1
1969-06-11	415.4	31.7	31.6	30.6	1.0	173.4	173.7	176.1	143.5
1970-06-16	239.2	39.0	38.9	38.6	-1.2	191.8	192.2	193.2	141.5
1971-06-21	251.9	43.5	43.4	41.8	-1.1	205.3	205.8	204.4	142.9
1972-06-23	253.9	170.1	169.9	169.4	5.9	416.8	417.4	415.6	138.0
1973-06-28	219.5	327.6	327.3	329.4	8.0	686.5	687.4	694.6	133.5
1974-07-03	160.6	410.3	410.0	408.9	10.4	802.6	803.5	807.0	130.5
1975-07-08	103.8	825.7	825.1	818.4	9.0	1570.8	1572.4	1566.6	130.4
1976-07-12	98.6	890.0	889.1	891.2	7.3	1644.7	1647.4	1647.5	128.6
1977-07-15	85.6	525.7	525.2	533.4	9.0	1016.9	1018.5	1043.0	128.1
1978-07-20	85.0	262.9	262.7	262.1	4.4	587.4	588.1	590.7	134.2
1979-07-25	34.1	838.9	838.3	852.7	5.2	1690.5	1692.4	1712.2	132.7
1980-07-29	53.3	127.8	127.6	127.8	5.4	334.5	334.9	341.5	131.9
1981-08-03	37.3	80.4	80.4	82.4	4.0	235.5	235.5	236.9	134.6
1982-08-06	22.4	60.5	60.5	60.6	5.4	196.9	197.0	201.3	133.8
1983-08-11	62.5	234.3	234.2	234.3	5.7	545.9	546.2	551.3	133.3
1984-08-15	46.2	53.4	53.4	52.8	5.5	194.8	194.9	194.3	136.3
1985-08-20	43.7	185.2	185.2	184.1	7.0	427.5	427.6	430.8	132.6
1986-08-25	108.7	57.5	57.5	60.8	9.5	187.2	187.3	190.0	129.1
1987-08-28	205.7	76.9	76.9	79.2	4.7	229.8	229.8	235.1	129.4
1988-09-01	120.0	47.1	47.1	46.5	11.4	151.3	151.3	150.4	130.6
1989-09-06	200.7	-13.0	-13.0	-12.7	9.4	48.0	48.0	49.1	124.3
1990-09-11	269.9	-81.7	-81.7	-81.6	5.0	-65.4	-65.4	-65.5	131.7
1991-09-16	244.0	-52.6	-52.6	-52.8	5.4	-8.8	-8.9	-10.4	136.5

Tabelle 5.11: Pessimistische und Mittlere Szenarien anhand des Dow Jones. Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 5 Jahren. Die Haltedauer beträgt 20 Jahre, die Länge der Zeitschritte ist 1 Jahr (264 Tage).

5 Auswertungen und Ergebnisse

Dow Jones seit 1896

		Test auf Bernoulliverteilung					Test auf Unabhängigkeit			
		T	T1	T1/T	P_G	P_{Binom}	p_{00}	p_{10}	P_G	P_{Fisher}
Pessimist	Norm	88	19	21.6	0.1	0.1	92.8	22.2	0.0	0.0
	Cornish	88	19	21.6	0.1	0.1	92.8	22.2	0.0	0.0
	Boot	88	18	20.5	0.4	0.4	92.9	23.5	0.0	0.0
	Branche	88	2	2.3	0.4	1.1	97.6	100.0	75.9	100.0
	Branche2	88	9	10.2	94.4	86.0	93.6	55.6	0.4	0.6
Mittel	Norm	88	40	45.5	39.3	45.6	85.4	17.9	0.0	0.0
	Cornish	88	40	45.5	39.3	45.6	85.4	17.9	0.0	0.0
	Boot	88	40	45.5	39.3	45.6	85.4	17.9	0.0	0.0
	Branche	88	35	39.8	5.4	6.9	96.2	8.6	0.0	0.0
	Branche2	88	44	50.0	100.0	100.0	88.6	11.6	0.0	0.0
Optimist	Norm	88	68	77.3	0.1	0.0	85.0	4.5	0.0	0.0
	Cornish	88	68	77.3	0.1	0.0	85.0	4.5	0.0	0.0
	Boot	88	68	77.3	0.1	0.0	85.0	4.5	0.0	0.0
	Branche	88	77	87.5	45.0	47.4	90.9	1.3	0.0	0.0
	Branche2	88	82	93.2	29.4	37.8	83.3	1.2	0.0	0.0
Stress	Norm	88	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Cornish	88	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Boot	88	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Branche	88	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Branche2	88	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0

Tabelle 5.12: Test auf Bernoulli-Verteilung und Unabhängigkeit der Unterschreitungen der historischen 20-Jahre-Quantile des Dow Jones. Die Haltedauer beträgt 20 Jahre, die Länge der Zeitschritte ist 1 Jahr (264 Tage). Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 15 Jahren. Dezimalzahlen in Prozent-Angaben.

Dow Jones seit 1896

		Test auf Bernoulliverteilung					Test auf Unabhängigkeit			
		T	T1	T1/T	P_G	P_{Binom}	p_{00}	p_{10}	P_G	P_{Fisher}
Pessimist	Norm	63	0	0.0	0.0	0.2	100.0		100.0	100.0
	Cornish	63	0	0.0	0.0	0.2	100.0		100.0	100.0
	Boot	63	0	0.0	0.0	0.2	100.0		100.0	100.0
	Branche	63	0	0.0	0.0	0.2	100.0		100.0	100.0
	Branche2	63	0	0.0	0.0	0.2	100.0		100.0	100.0
Mittel	Norm	63	15	23.8	0.0	0.0	93.8	14.3	0.0	0.0
	Cornish	63	15	23.8	0.0	0.0	93.8	14.3	0.0	0.0
	Boot	63	15	23.8	0.0	0.0	93.8	14.3	0.0	0.0
	Branche	63	13	20.6	0.0	0.0	95.9	15.4	0.0	0.0
	Branche2	63	21	33.3	0.8	1.1	88.1	20.0	0.0	0.0
Optimist	Norm	63	48	76.2	0.2	0.1	80.0	6.4	0.0	0.0
	Cornish	63	47	74.6	0.0	0.0	81.2	6.5	0.0	0.0
	Boot	63	49	77.8	0.5	0.5	85.7	4.2	0.0	0.0
	Branche	63	53	84.1	14.9	13.7	90.0	1.9	0.0	0.0
	Branche2	63	54	85.7	28.3	28.8	88.9	1.9	0.0	0.0
Stress	Norm	63	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Cornish	63	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Boot	63	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Branche	63	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0
	Branche2	63	0	0.0		100.0	100.0		100.0	100.0

Tabelle 5.13: Test auf Bernoulli-Verteilung und Unabhängigkeit der Unterschreitungen der historischen 20-Jahre-Quantile des Dow Jones. Die Haltedauer beträgt 20 Jahre, die Länge der Zeitschritte ist 1 Jahr (264 Tage). Die Daten für die Berechnungen sind jeweils aus den letzten 40 Jahren. Dezimalzahlen in Prozent-Angaben.

6 Schlussbetrachtung

In einer komplexen und schwer zu durchschauenden Finanzwelt ist es sicher eine gutgemeinte Idee für Kleinanleger eine Abschätzung zu geben, wie sich ein Produkt in der Zukunft entwickeln könnte. Die Umsetzung dieser Idee könnte allerdings nicht schwieriger sein.

In der delegierten Verordnung 2017/653 der Europäischen Kommission wurden dazu mathematische Methoden vorgegeben, die in dieser Arbeit analysiert wurden. Dabei sind viele Formeln nicht ausreichend klar beschrieben. Die Value-at-Risk-äquivalente Volatilität musste beispielsweise durch eine Vermutung hergeleitet werden. Außerdem zeigt der Autor bei der Berechnung der Performance-Szenarien Unterschiede zwischen der korrekten Anwendung der Methoden und den Formeln in der Verordnung auf. Möglicherweise handelt es sich um einen Fehler in der Verordnung, der die Werte der Performance-Szenarien zu niedrig ansetzt.

Für die klassische Lebensversicherung mit Gewinnbeteiligung wurde ein Branchenstandard entwickelt, der in dieser Arbeit erläutert wurde. Dabei stellt die richtige Wahl der Parameter die größte Schwierigkeit dar.

Mittels historischer Simulationen wurde versucht zu zeigen, was man von den Performance-Szenarien erwarten kann. Dabei zeigt sich, dass es weniger auf die mathematische Methode als auf deren richtige Anwendung ankommt. Für die Verordnung ist eine Historie von nur 5 Jahren für die Berechnungen der Performance-Szenarien zulässig. Bei Laufzeiten ab einem Jahr zeigen die Szenarien dabei starke Schwankungen, sodass sie ihre Aussagekraft verlieren. Für Kleinanleger sind dies jedoch die interessantesten Laufzeiten. Besonders aus der Sicht einer Lebensversicherung betrachten wir Laufzeiten von Jahrzehnten.

Der Branchenstandard liefert in den Simulationen glattere Ergebnisse, da die meisten Parameter über die Zeit fest vorgegeben und gleich sind. Wir haben damit anhand des DAX und des Dow Jones teilweise brauchbare Ergebnisse erhalten, obwohl der Branchenstandard dafür nicht entwickelt wurde und wir keine neue Kalibrierung vorgenommen haben. Der Erfolg des Branchenstandards hängt von den gewählten Risikoprämien der Zinsprozesse und des Aktienprozesses ab.

Alles dreht sich um die Frage: Wie bestimmt man die zukünftige mittlere Rendite? Im Grunde ist diese Frage unmöglich zu beantworten. Für eine Haltedauer von 1 Monat erhalten wir am ehesten eine brauchbare Abschätzung der Zukunft. Es sei angemerkt, dass wir hier die verhältnismäßig längste Historie für die Berechnungen haben. Für Kleinanleger ist diese Haltedauer allerdings wenig interessant. Für längere Laufzeiten führt eine längere Historie zu glatteren Ergebnissen. Dies bringt uns möglicherweise zu einer besseren Abschätzung der mittleren Rendite. Dies führt uns wiederum zu dem Problem, dass es von vielen Vermögensgegenständen keine langen Historien an Kursdaten gibt.

6 Schlussbetrachtung

Die Unterschiede zwischen den beiden Methoden der Verordnung und der Annahme einer Normalverteilung sind sehr gering. Dies ist als Folge des zentralen Grenzwertsatzes zu interpretieren.

Über eine Klassifizierung soll Kleinanlegern vermittelt werden, wie viel Risiko ein Finanzprodukt in sich trägt. Dabei sei zu erwähnen, dass sich die MRM-Klasse im Laufe der Zeit ändern kann, obwohl es das gleiche Asset bleibt. Dies trifft besonders bei der Verwendung von kurzen Historien zu.

Das Stressszenario scheint sehr pessimistisch angesetzt zu sein. Es wird für lange Laufzeiten auch nach Finanzkrisen fast nie unterschritten. Außerdem liegen die Stressszenarien sehr weit unter der eingetretenen Rendite und gehen oft von einem knappen Gesamtverlust aus. Damit stellt sich die Frage, ob das Stressszenario für lange Laufzeiten nicht zu pessimistisch angenommen wird.

Zum Schluss möchte der Autor noch auf ein generelles Problem bei Prognosen von Kursverläufen aufmerksam machen: Wir ziehen immer eine Stichprobe aus etwas, das vielleicht nichts mit der Zukunft zu tun hat. Wir haben keine repräsentative Stichprobe, so wie es sie in anderen naturwissenschaftlichen Disziplinen gibt.

Literatur

- AVÖ (2017). *Leitfaden AVÖ – Branchenstandard PRIIP Kategorie 4*. URL: https://avoe.at/wp-content/uploads/2015/09/Leitfaden-AV%C3%96-Branchenstandard-PRIIP-Kategorie-4-12_2017-final.pdf (besucht am 26.03.2018) (siehe S. 5, 23, 24, 26).
- Bloomberg, Reuters und (2018). *Dow Jones Index seit 1896*. (Besucht am) (siehe S. 45).
- Brigo, Damiano und Fabio Mercurio (2006). *Interest rate models: theory and practice; with smile, inflation and credit*. 2. Aufl. Springer. ISBN: 3540221492 (siehe S. 25–28).
- Bundesbank, Deutsche (2018). *Parameter Zinsstrukturkurve*. URL: https://www.bundesbank.de/Navigation/DE/Statistiken/Zeitreihen_Datenbanken/Geld_und_Kapitalmaerkte/geld_und_kapitalmaerkte_list_node.html?listId=www_skms_it03c (besucht am 12.04.2018) (siehe S. 31).
- Charles-Olivier Amedee-Manesme Fabrice Barthelemy, Donald Keenan (2014). »Cornish-Fisher Expansion for Commercial Real Estate Value at Risk«. In: URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11146-014-9476-x> (besucht am 29.10.2017). published (siehe S. 13).
- Christoffersen, Peter (2003). *Elements of financial risk management*. Oxford Academic. ISBN: 9786610968299 (siehe S. 33, 39).
- Committee, ESA Joint (2018). *PRIIP Flow Diagram*. URL: https://esas-joint-committee.europa.eu/Publications/Technical%20Standards/JC%202017%2049%20%28PRIIPs_flow_diagram_risk_reward%29.pdf (besucht am 24.04.2018) (siehe S. 20).
- DAX (2018). URL: <https://www.wallstreet-online.de/indizes/dax/historische-kurse> (besucht am 16.04.2018) (siehe S. 45).
- EU (2014). *VERORDNUNG (EU) Nr. 1286/2014 DES EUROPÄISCHEN PARLAMENTS UND DES RATES*. URL: <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/DE/TXT/?uri=celex%3A32014R1286> (besucht am 20.10.2017) (siehe S. 1).
- EU (2017a). *Berichtigung der Delegierten Verordnung (EU) 2017/653*. URL: [http://eur-lex.europa.eu/legal-content/DE/TXT/HTML/?uri=CELEX:32017R0653R\(01\)&from=EN](http://eur-lex.europa.eu/legal-content/DE/TXT/HTML/?uri=CELEX:32017R0653R(01)&from=EN) (besucht am 26.01.2018) (siehe S. 9).
- EU (2017b). *DELEGIERTE VERORDNUNG (EU) 2017/653 DER KOMMISSION*. URL: <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/DE/TXT/?uri=CELEX%3A32017R0653> (besucht am 20.10.2017) (siehe S. 3, 10, 15, 16, 20, 21).
- Graf, Stefan (2018). »PRIIP-KID: Providing Retail Investors with Inappropriate Product Information?«. In: URL: https://www.ifa-ulm.de/fileadmin/user_upload/download/forschung/2018_Graf_PRIIP-KID-Providing-Retail-Investors-with-Inappropriate-Product-Information.pdf (besucht am 30.03.2018). published (siehe S. 9, 13, 16).

Literatur

- Lothar Sachs, Jürgen Hedderich (2016). *Angewandte Statistik : Methodensammlung mit R*. 15. Aufl. Springer. ISBN: 9783662456910. URL: <http://katalog.ub.tuwien.ac.at/AC11782078> (besucht am 12. 01. 2018) (siehe S. 18).
- Marcus Kriele, Jochen Wolf (2016). *Wertorientiertes Risikomanagement von Versicherungsunternehmen*. 2. Auflage. Springer Spektrum. ISBN: 978-3-662-50256-3 (siehe S. 5–7).
- Quandl (o.D.). *Svensson US Treasury*. URL: <https://www.quandl.com/data/FED/PARAMS-US-Treasury-BETA-and-TAU-Parameters> (besucht am) (siehe S. 45).
- Rheinländer, Thorsten und Jenny Sexton (2011). *Hedging derivatives*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. ISBN: 9789814338790 (siehe S. 8).
- Sergio Focardi Frank Fabozzi, Turan Bali (2013). *Mathematical Methods for Finance : Tools for Asset and Risk Management*. Wiley. ISBN: 9781118312636 (siehe S. 11).
- Svensson, Lars (o.D.). »Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994«. In: (Siehe S. 24).
- The R Project for Statistical Computing* (2018). URL: <https://www.r-project.org/> (besucht am 14. 04. 2018) (siehe S. 33).