



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Vergleich von Zinsmodellen in der Lebensversicherung

Ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dr. Thorsten Rheinländer
und
Dr. Simon Hochgerner

als mitwirkender Vertreter der Österreichischen Finanzmarktaufsicht

durch
Clemens Burger

Kumpfgasse 9/13
1010 Wien

9. April 2014

Unterschrift (Student)

Vorwort

Vor allem möchte ich Herrn Univ.Prof. Dr. Thorsten Rheinländer und Herrn Dr. Simon Hochgerner für ihre freundliche und überaus wertvolle Unterstützung sehr herzlich danken.

Mit der vorliegenden Arbeit habe ich mir eine eingehende Untersuchung von Zinsstrukturmodellen in der Lebensversicherung, insbesondere die marktkonsistente Bewertung der Zinsgarantie unter Solvency II, zum Ziel gesetzt.

Der inhaltliche Bogen reicht dabei von der mathematischen Modellierung der Lebensversicherung über die konkrete Umsetzung eines Zinsstrukturmodells bis hin zu einer marktkonsistenten Bewertung. Darüber hinaus ist eine Analyse diverser Handlungsoptionen und daraus resultierender Auswirkungen erfolgt.

Die wichtigsten Erkenntnisse meiner Arbeit sind Folgende:

- Caplet-Swaption Parität im Abschnitt 1.6
- Kalibrierung unter Zuhilfenahme eines Optimierungsalgorithmus im Abschnitt 3.2
- Untersuchung der Veränderungen der Gewichte w_m in den Abschnitten 4.2.2 und 4.3.2
- Implizite Schlussfolgerung aus Rebonatos Formel im Abschnitt 3.3.1
- Numerische Umsetzung der Kalibrierung mit Rebonatos Formel im Abschnitt 3.3.2
- Stabilität der Kalibrierung mit Rebonatos Formel in Anmerkung 3.3.2.4
- Auswirkungen verschiedener Kalibrierungsmethoden in den Anmerkungen 4.3.2.1 und 4.4.0.2
- Letzter Absatz zur marktkonsistenten Bewertung im Abschnitt 5

Inhaltsverzeichnis

1	Finanzinstrumente	7
1.1	Nullkupon Anleihe	7
1.2	Forward Rate	7
1.2.1	LIBOR	7
1.3	Cap & Floor	7
1.3.1	Caplet	7
1.3.2	Cap	8
1.3.3	Floorlet	8
1.3.4	Floor	8
1.4	Interest Rate Swap	8
1.5	Interest Rate Swaptions	9
1.5.1	Blacks Gleichung	9
1.6	Caplet-Swaption Parität	10
2	Lebensversicherung	11
2.1	Zinsgarantie	11
2.2	Modellierung	11
2.3	Replikation	12
2.4	Bewertung	12
3	LIBOR Market Model (LMM)	15
3.1	Monte Carlo Simulation	17
3.2	Kalibrierung der Volatilität an Cap Preisen	18
3.3	Kalibrierung der Korrelationsstruktur an Swaption Preisen	22
3.3.1	Rebonatos Formel	22
3.3.2	Numerische Umsetzung	24
3.4	Kalibrierung der Volatilitäten aus historischen Korrelationen	25
3.5	Zeitabhängige Volatilitäten	27
4	Beispiel zum 31.12.2012	31
4.1	Fünfjähriger Zeitraum	31
4.2	30-jähriger Zeitraum	33
4.2.1	Floor Bewertung	35
4.2.2	Veränderung der $w_m(t)$	35
4.3	30-jähriger Zeitraum mit interpolierten berechneten Volatilitäten	38
4.3.1	Floor Bewertung	38
4.3.2	Veränderung der $w_m(t)$	38
4.4	30-jähriger Zeitraum mit glatter monoton ansteigender Zinskurve	42
5	Marktkonsistente Bewertung in der klassischen Lebensversicherung	47

6	R-Code	49
6.1	Beispiel 3.1.0.1	49
	6.1.1 Funktion	49
	6.1.2 Abbildung 3.1	50
6.2	Beispiel 3.1.0.2	50
	6.2.1 Funktion	50
	6.2.2 Abbildung 3.2	50
6.3	Abschnitt 3.2	51
	6.3.1 Sigma Approximation	51
	6.3.2 Numerische Berechnung	51
6.4	Beispiel 3.3.2.1	51
	6.4.1 Tabelle 3.4	51
	6.4.2 Tabelle 3.5	52
	6.4.3 Tabelle 3.6	52
	6.4.4 Funktion	52
	6.4.5 Tabelle 3.7	53
	6.4.6 Tabelle 3.8	54
6.5	Beispiel 3.4.0.2	54
	6.5.1 Funktion	54
	6.5.2 Tabelle 3.10	55
6.6	Beispiel 3.5.0.3	55
	6.6.1 Regression	55
	6.6.2 Abbildung 3.3	55
6.7	Kapitel 4	56
	6.7.1 Tabelle 4.1	56
	6.7.2 Tabelle 4.2	56
	6.7.3 Tabelle 4.3	56
	6.7.4 Tabelle 4.4	56
	6.7.5 Tabelle 4.5	57
	6.7.6 Abbildung 4.1	58
	6.7.7 Tabelle 4.6	58
	6.7.8 Abbildung 4.2	58
	6.7.9 Abbildung 4.3	59
	6.7.10 Abbildung 4.4	59
	6.7.11 Abbildung 4.8	59
	6.7.12 Abbildung 4.5	61
	6.7.13 Abbildung 4.6	61

Kapitel 1

Finanzinstrumente

Einleitend sollen die wichtigsten in dieser Arbeit verwendeten Finanzinstrumente behandelt werden, vor allem um eine eindeutige Notation sicherzustellen.

1.1 Nullkupon Anleihe

Eine Nullkupon Anleihe $P(t, T)$ mit $0 \leq t \leq T$ dient der Darstellung von Opportunitätskosten. Es erfolgen keine Kuponzahlungen während der Laufzeit, $P(T, T) = 1$ und daher $P(t, T) \leq 1$.

1.2 Forward Rate

Der Zins für einen in der Zukunft liegenden Zeitraum $[T, S]$, bewertet zum Zeitpunkt t , wird als Forward Rate $F(t; T, S)$ bezeichnet. Vgl. [3, Abschnitt 2.2],

$$\begin{aligned}F(t; T, S) &= \frac{1}{S - T} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right) \\F(T; T, S) &= F(T, S) \\P(t, T) &= P(t, S) (1 + (S - T)F(t; T, S))\end{aligned}$$

1.2.1 LIBOR

Ein Beispiel ist die LIBOR (London Interbank Offered Rate), $L(t, T)$. Sie wird für Zeiträume δ zwischen einem Tag (Overnight) und 12 Monaten festgelegt,

$$L(t, T) = F(t; T, T + \delta)$$

1.3 Cap & Floor

1.3.1 Caplet

Ein Caplet mit Reset Date T (Tag des Zinsfixings), Settlement Date $T + \delta$ (Fälligkeit) und Strike Rate κ hat zum Zeitpunkt $T + \delta$ den Zahlungsstrom,

$$\delta (F(T, T + \delta) - \kappa)^+$$

Sei $T_0 < T_1 < \dots < T_n$ mit $T_i - T_{i-1} = \delta$, dann bezeichnet $Cpl(t; T_{i-1}, T_i)$ den Preis eines solchen Zahlungsstroms zum Zeitpunkt t .

Blacks Formel

Aus [3, Abschnitt 2.6.4] wissen wir, dass der Wert für das i -te Caplet gegeben ist durch,

$$\begin{aligned} Cpl(t; T_{i-1}, T_i) &= \delta P(t, T_i) [F(t, T_{i-1}, T_i)\Phi(d_1(i; t)) - \kappa\Phi(d_2(i; t))] \\ d_{1,2}(i; t) &= \frac{\log\left(\frac{F(t, T_{i-1}, T_i)}{\kappa}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma(t)^2(T_{i-1} - t)}{\sigma(t)\sqrt{T_{i-1} - t}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

1.3.2 Cap

Ein Cap ist die Summe von Caplets in der Form,

$$Cp(t) = \sum_{i=1}^n Cpl(t; T_{i-1}, T_i)$$

1.3.3 Floorlet

Ähnlich zum Caplet ist hier der Zahlungsstrom zum Zeitpunkt T_i ,

$$\delta(\kappa - F(T, T + \delta))^+ \quad (1.2)$$

Bewertet zum Zeitpunkt t wird er als Floorlet $Fll(t; T_{i-1}, T_i)$ bezeichnet.

Blacks Formel

Der Wert für das i -te Floorlet ist gegeben durch,

$$\begin{aligned} Fll(t; T_{i-1}, T_i) &= \delta P(t, T_i) [\kappa\Phi(-d_2(i; t)) - F(t, T_{i-1}, T_i)\Phi(-d_1(i; t))] \\ d_{1,2}(i; t) &= \frac{\log\left(\frac{F(t, T_{i-1}, T_i)}{\kappa}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma(t)^2(T_{i-1} - t)}{\sigma(t)\sqrt{T_{i-1} - t}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.3.4 Floor

Ein Floor ist die Summe von Floorlets in der Form,

$$Fl(t) = \sum_{i=1}^n Fll(t; T_{i-1}, T_i)$$

1.4 Interest Rate Swap

Bei einem Interest Rate Swap wird ein fixer gegen einen variablen Zahlungsstrom getauscht. Ein Payer Interest Rate Swap kann laut [3, Abschnitt 2.4.3] durch folgende Eigenschaften charakterisiert werden:

- Fälligkeitszeitpunkt (Maturity) T_n
- Coupon Dates T_1, \dots, T_n mit $T_i - T_{i-1} = \delta$
- Fixed Rate K
- Nominalwert N
- Käufer zahlt fixen Betrag $K\delta N$
- Käufer empfängt variablen Betrag $F(T_{i-1}, T_i)\delta N$

Der netto Zahlungsstrom zum Zeitpunkt T_i für den Käufer ergibt daher,

$$(F(T_{i-1}, T_i) - K)\delta N$$

Der Wert zum Zeitpunkt $t \leq T_0$ dieses Zahlungsstroms ist,

$$N (P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i) - K\delta P(t, T_i))$$

Der Gesamtwert eines Payer Interest Rate Swaps $\Pi_p(t)$ ergibt,

$$\Pi_p(t) = N \left(P(t, T_0) - P(t, T_n) - K\delta \sum_{i=1}^n P(t, T_i) \right)$$

Einen Receiver Interest Rate Swap erhält man durch Invertierung der Vorzeichen der Zahlungsströme,

$$\Pi_r(t) = -\Pi_p(t)$$

Ein Swap ist wertlos ($\Pi_p(t) = \Pi_r(t) = 0$), wenn die Fixed Rate K gleich der Swap Rate $R_{swap}(t)$ ist,

$$R_{swap}(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\delta \sum_{i=1}^n P(t, T_i)}$$

$R_{swap}(t)$ kann alternativ auch als gewichtete Summe,

$$R_{swap}(t) = \sum_{i=1}^n w_i(t) F(t; T_{i-1}, T_i)$$

$$w_i(t) = \frac{P(t, T_i)}{\sum_{j=1}^n P(t, T_j)}$$

abgebildet werden.

1.5 Interest Rate Swaptions

Das folgende Kapitel stammt aus [3, Abschnitt 2.7].

Eine Europäische Payer (Receiver) Swaption mit Strike Rate K ist eine Option, die ihrem Besitzer das Recht gibt, in einen Payer (Receiver) Swap mit Fixed Rate K einzutreten.

In der Regel ist die Fälligkeit (Maturity) der Swaption ident mit dem ersten Reset Date des zugrunde liegenden Swaps. $T_n - T_0$ wird als Tenor der Swaption bezeichnet.

Eine Swaption mit Fälligkeit in x Jahren, deren zugrundeliegender Swap y Jahre lang läuft, wird als $x \times y$ Swaption bezeichnet.

1.5.1 Blacks Gleichung

Der Preis zum Zeitpunkt $t \leq T_0$ einer Payer ($Swpt_p(t)$) und Receiver ($Swpt_r(t)$) Swaption ist,

$$Swpt_p(t) = N\delta [R_{swap}(t)\Phi(d_1(t)) - K\Phi(d_2(t))] \sum_{i=1}^n P(t, T_i),$$

$$Swpt_r(t) = N\delta [K\Phi(-d_2(t)) - R_{swap}(t)\Phi(-d_1(t))] \sum_{i=1}^n P(t, T_i)$$
(1.4)

$$d_{1,2}(t) = \frac{\log\left(\frac{R_{swap}(t)}{K}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma(t)^2(T_0 - t)}{\sigma(t)\sqrt{T_0 - t}}$$

1.6 Caplet-Swaption Parität

Eine einjährige Payer (Receiver) Swaption entspricht einem Caplet (Floorlet).

Zuerst setzen wir in Blacks Gleichung (1.4) einer Swaption die Fälligkeit $n = 1$ sowie den Nominalwert $N = 1$ und erhalten,

$$\begin{aligned} Swp_p(t) &= \delta P(t, T_1) [R_{swap}(t)\Phi(d_1(t)) - K\Phi(d_2(t))] \\ &= \delta P(t, T_1) [w_1(t)F(t, T_0, T_1)\Phi(d_1(t)) - K\Phi(d_2(t))] \\ &= \delta P(t, T_1) [F(t, T_0, T_1)\Phi(d_1(t)) - K\Phi(d_2(t))] \end{aligned}$$

$$d_{1,2}(t) = \frac{\log\left(\frac{F(t, T_0, T_1)}{K}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma(t)^2(T_0 - t)}{\sigma(t)\sqrt{T_0 - t}}$$

Anschließend betrachten wir Blacks Gleichung (1.1) eines Caplets mit $i = 1$, wobei dies einem Reset Date T_0 und Settlement Date T_1 entspricht und erhalten,

$$\begin{aligned} Cpl(t; T_0, T_1) &= \delta P(t, T_1) [F(t, T_0, T_1)\Phi(d_1(1; t)) - \kappa\Phi(d_2(1; t))] \\ d_{1,2}(1; t) &= \frac{\log\left(\frac{F(t, T_0, T_1)}{\kappa}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma(t)^2(T_0 - t)}{\sigma(t)\sqrt{T_0 - t}} \end{aligned}$$

Beide Gleichungen stimmen überein.

Diese Eigenschaft wird in Rebonatos Formel, Abschnitt 3.3.1 implizit verwendet.

Kapitel 2

Lebensversicherung

Die Verzinsung einer klassischen Lebensversicherung setzt sich aus einem fixen Garantiezins und einer variablen Gewinnbeteiligung zusammen.

2.1 Zinsgarantie

Österreichische Versicherungsunternehmen gewähren traditionell hohe Zinsgarantien. Diese Garantien geben den Kunden Planungssicherheit, stellen für die Unternehmen jedoch erhebliche Risiken dar.

Fällt die Sekundärmarktrendite kurzfristig unter den Garantiezins, kann es für Versicherungsunternehmen schwierig werden, die versprochenen Renditen zu erwirtschaften (vgl. Abb. 2.1).

Der Garantiezins, den Versicherungen ihren Kunden in Österreich gewähren dürfen, ist mit 60% (vgl. Höchstzinssatzverordnung) der Rendite der entsprechenden 10-jährigen Staatsanleihen beschränkt.

2.2 Modellierung

Es stellt sich die Frage, wie dieses Risiko zu modellieren und zu bewerten ist.

Betrachten wir eine Erlebensversicherung mit Laufzeit (T_n), jährlicher Prämienzahlung (Π) zu den Zeitpunkten T_i $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, Versicherungssumme (VS) ausbezahlt bei Erleben zum Zeitpunkt T_n , t -jähriger Überlebenswahrscheinlichkeit eines x Jährigen (${}_t p_x$) und Garantiezins (g).

Nach dem Äquivalenzprinzip gilt,

$$VS {}_n p_x \left(\frac{1}{1+g} \right)^n = \Pi \sum_{i=0}^{n-1} {}_i p_x \left(\frac{1}{1+g} \right)^i$$

Daher errechnet sich die Prämie Π durch,

$$\Pi = \frac{VS {}_n p_x \left(\frac{1}{1+g} \right)^n}{\sum_{i=0}^{n-1} {}_i p_x \left(\frac{1}{1+g} \right)^i}$$

Gehen wir nun davon aus, dass die Versicherung über dem Garantiezins liegende Erträge am Ende jedes Jahres an den Versicherungsnehmer ausbezahlt und im Falle eines Fehlbetrages diesen jedes Jahr ausgleicht.

Das Risiko bewertet zum Zeitpunkt t ($R(t)$) resultiert daher aus der Summe der Ausgleichszahlungen A zu den Zeitpunkten T_1, \dots, T_n bewertet zum Zeitpunkt $t \leq T_n$ als,

$$R(t) = \sum_{i=1}^n A(t, T_i)$$

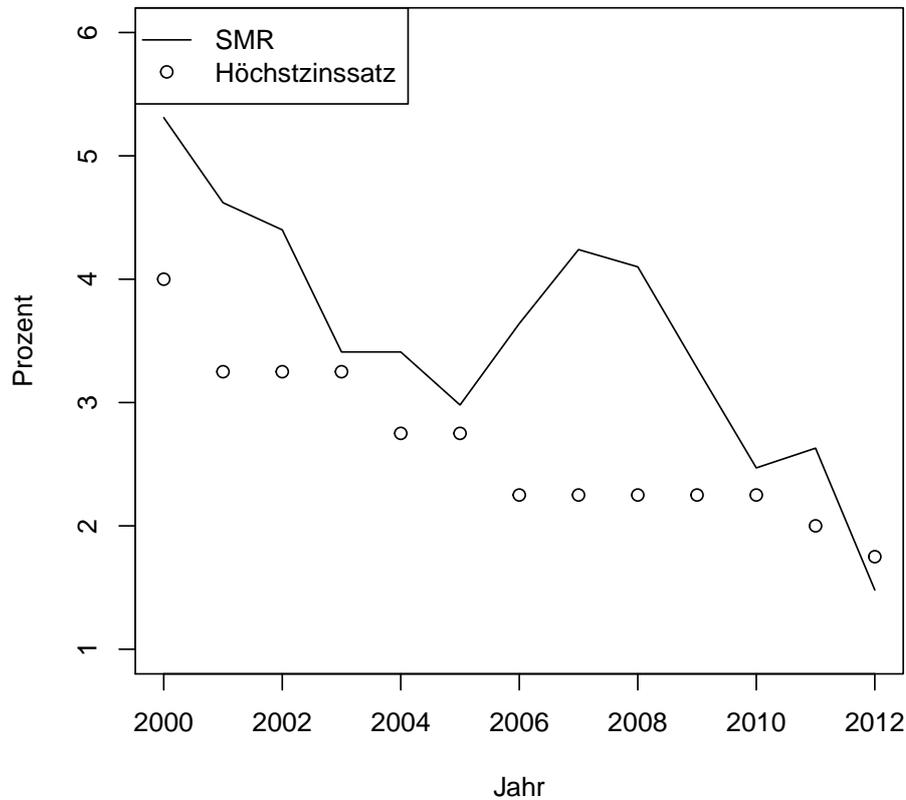


Abbildung 2.1: Entwicklung von Sekundärmarkttrendite (SMR) und Höchstzinssatz in Österreich [5]

Nehmen wir an, dass $F(T_{i-1}, T_i)$ dem Marktzinssatz der Periode T_{i-1} bis T_i entspricht. Die Ausgleichszahlungen zum Zeitpunkt T_i betragen daher,

$$A(T_i) = (g - F(T_{i-1}, T_i))^+$$

2.3 Replikation

Erinnern wir uns an den Payoff eines Floorlets aus Abschnitt 1.3.3, Gleichung (1.2) mit Strike Rate $\kappa = g$ und $\delta = 1$, so erkennen wir, dass die Ausgleichszahlung $A(T_i)$ mit diesem Payoff übereinstimmt.

Darüber hinaus wissen wir aus Abschnitt 1.3.4, dass ein Floor der Summe von Floorlets entspricht und daher unser Risiko $R(t)$ durch einen Floor repliziert werden kann.

2.4 Bewertung

Ein Floor kann entweder analytisch unter Anwendung von Blacks Formel (1.3) oder der Monte Carlo Methode in Verbindung mit einem Zinsstrukturmodell, beispielsweise dem LIBOR Market Model, bewertet werden.

Im Wesentlichen verwendet die Monte Carlo Methode das Gesetz der großen Zahl, um den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ einer Zufallsvariablen X zu bestimmen.

Das Gesetz der großen Zahl besagt, dass eine Folge von unabhängig identisch verteilten Zufallszahlen X_1, \dots, X_n gegen den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ konvergiert,

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X]$$

Der dabei auftretende Fehler,

$$\overline{X}_n - \mathbb{E}[X]$$

wird als Monte Carlo Error (*MCE*) bezeichnet. Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt,

$$MCE \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}\left(0; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Der Fehler konvergiert daher mit dem Faktor $n^{\frac{1}{2}}$.

Die für die Monte Carlo Bewertung benötigten Szenarien werden im Anschluss durch das LIBOR Market Model geliefert.

Kapitel 3

LIBOR Market Model (LMM)

Das Ziel des LMM ist die Simulation der Zinsstruktur.

Dies kann als die Simulation einer Menge von Vektoren interpretiert werden, wobei der erste Vektor die aktuellen am Markt beobachtbaren Forward Rates zur Zeit $t = 0$ enthält.

Der zweite Vektor enthält ein mögliches Szenario der Forward Rates im kommenden Zeitschritt $t = 1$, der dritte Vektor ein Szenario in zwei Zeitschritten zum Zeitpunkt $t = 2$ und so fort.

Wenn die Simulation einen Zeitschritt in die Zukunft macht, verringert sich die Dimension des Vektors um eins. Im Zeitpunkt $t = 1$ existiert keine Forward Rate von $t = 0$ bis $t = 1$, sie ist Vergangenheit. Dies wird veranschaulicht in,

$$\begin{pmatrix} L(0, T_{n-1}) \\ \vdots \\ L(0, T_2) \\ L(0, T_1) \\ L(0, T_0) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} L(1, T_{n-1}) \\ \vdots \\ L(1, T_2) \\ L(1, T_1) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} L(2, T_{n-1}) \\ \vdots \\ L(2, T_2) \end{pmatrix}$$

Das LMM wird häufig in der Praxis eingesetzt:

1. Es kann an aktiv gehandelten Produkten kalibriert werden.
2. Die Parameter sind direkt interpretierbar.

Nun stützen wir uns auf [3, Abschnitt 11.1] und das Framework von Heath-Jarrow-Morton (HJM).

Für das $(T + \delta)$ - Forward Maß $\mathbb{Q}^{T+\delta}$ ist,

$$\frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)}$$

ein Martingal. Unter Anwendung von [3, Lemma 7.1] erhalten wir,

$$d \left(\frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)} \right) = \frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)} \sigma_{T, T+\delta}(t) dW^{T+\delta}(t)$$

wobei,

$$\sigma_{T, T+\delta}(t) = \int_T^{T+\delta} \sigma(t, u) du$$

Daraus schließen wir (vgl. Abschnitt 1.2.1),

$$\begin{aligned} dL(t, T) &= \frac{1}{\delta} d \left(\frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)} \right) = \frac{1}{\delta} \frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)} \sigma_{T, T+\delta}(t) dW^{T+\delta}(t) = \\ &= \frac{1}{\delta} (\delta L(t, T) + 1) \sigma_{T, T+\delta}(t) dW^{T+\delta}(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nehmen wir an, dass eine \mathbb{R}^d -wertige deterministische Funktion $\lambda(t, T)$ existiert,

$$\sigma_{T, T+\delta}(t) = \frac{\delta L(t, T)}{\delta L(t, T) + 1} \lambda(t, T) \quad (3.2)$$

Setzen wir dies in Formel (3.1) ein, erhalten wir,

$$dL(t, T) = L(t, T) \lambda(t, T) dW^{T+\delta}(t)$$

wobei dies äquivalent ist zu,

$$L(t, T) = L(s, T) \exp \left(\int_s^t \lambda(u, T) dW^{T+\delta}(u) - \frac{1}{2} \int_s^t \|\lambda(u, T)\|^2 du \right) \quad (3.3)$$

für $s \leq t \leq T$.

Die $\mathbb{Q}^{T+\delta}$ -Verteilung von $\log L(T, T)$ bedingt auf \mathcal{F}_t ist normal verteilt mit Mittelwert,

$$\log L(t, T) - \frac{1}{2} \int_t^T \|\lambda(s, T)\|^2 ds$$

und Varianz,

$$\int_t^T \|\lambda(s, T)\|^2 ds$$

Der Preis eines Caplets zur Zeit t mit Reset Date T , Settlement Date $T + \delta$ und Strike Rate κ ist daher,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T+\delta} r(s) ds} \delta(L(T, T) - \kappa)^+ | \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T + \delta) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{T+\delta}} \left[\delta(L(T, T) - \kappa)^+ | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \delta P(t, T + \delta) (L(t, T) \Phi(d_1(t, T)) - \kappa \Phi(d_2(t, T))) \end{aligned}$$

$$d_{1,2}(t, T) = \frac{\log \left(\frac{L(t, T)}{\kappa} \right) \pm \frac{1}{2} \int_t^T \|\lambda(s, T)\|^2 ds}{\left(\int_t^T \|\lambda(s, T)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Ersetzen wir,

$$\frac{1}{T-t} \int_t^T \|\lambda(s, T)\|^2 ds$$

durch $\sigma(t)^2$, erhalten wir Blacks Formel (1.1) für Caplet Preise.

Damit haben wir gezeigt, dass jedes (3.2) erfüllende HJM Modell zu Blacks Formel für Caplet Preise führt.

Für den Existenzbeweis eines solchen HJM Modells sei auf [2, Abschnitt 5.6] verwiesen. Implementieren wir,

$$\begin{aligned} \lambda(t, T_m) &= \sigma_m(t) \ell_m(t), \quad \sigma_m(t) = \|\lambda(t, T_m)\|, \quad \ell_m(t) = \frac{\lambda(t, T_m)}{\|\lambda(t, T_m)\|} \\ \rho_{mn}(t) &= \frac{\lambda(t, T_m)^\top \lambda(t, T_n)}{\|\lambda(t, T_m)\| \|\lambda(t, T_n)\|} \quad \rho_{mn}(t) = \ell_m(t) \ell_n(t)^\top \end{aligned}$$

3.1 Monte Carlo Simulation

Im folgenden Abschnitt verwenden wir das risikolose Spotmaß \mathbb{Q}^* und beziehen uns auf [3, Abschnitt 11.6].

Um positive Zinsen sicherzustellen, transformieren wir Gleichung (3.3) in $H_m(t) = \log L(t, T_m)$. Unter Anwendung von Itô's Formel erhalten wir,

$$dH_m(t) = \alpha_m(t)dt + \lambda(t, T_m)dW^*(t), \quad t \leq T_m \quad (3.4)$$

mit dem dem Drift Term,

$$\alpha_m(t) = \sum_{k=\eta(t)}^m \frac{\delta e^{H_k(t)}}{1 + \delta e^{H_k(t)}} \lambda(t, T_k)^\top \lambda(t, T_m) - \frac{1}{2} \|\lambda(t, T_m)\|^2$$

wobei $\eta(t)$ eine integer wertige Funktion ist mit,

$$T_{\eta(t)-1} \leq t < T_{\eta(t)}, \quad t \geq 0$$

Angenommen, wir wollen einen Zahlungsstrom zum Zeitpunkt T_n mit der Auszahlungsfunktion,

$$f(H_n(T_n), \dots, H_{M-1}(T_n))$$

bewerten, so wissen wir aus [2, Lemma 11.5], dass der Zahlungsstrom bewertet zum Zeitpunkt $t = 0$ den folgenden Preis hat,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*} \left[\frac{f(H_n(T_n), \dots, H_{M-1}(T_n))}{B^*(T_n)} \right] \quad (3.5)$$

Wobei B^* das implizite Bankkonto in der Form,

$$\begin{aligned} B^*(0) &= 1 \\ B^*(T_m) &= (1 + \delta L(T_m, T_m)) B^*(T_{m-1}), \quad m = 1, \dots, M \end{aligned}$$

ist.

Diskretisieren wir $t_i = i * \Delta t$, $i = 0, \dots, N$, $\Delta t = T_n/N$ und N groß genug, dann ist die entsprechende Euler Approximation von (3.4),

$$H_m(t_i) = H_m(t_{i-1})\Delta t + \lambda(t_{i-1}, T_m)Z(i)\sqrt{\Delta t} \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.6)$$

wobei $Z(1), \dots, Z(N)$ eine Folge unabhängiger standardnormal verteilter Zufallsvektoren in \mathbb{R}^d darstellt.

Die Gleichung (3.6) liefert uns die benötigten Szenarien, um die im Abschnitt 2.4 und Gleichung (3.5) beschriebene Monte Carlo Bewertung durchzuführen.

Aus Gleichung (3.3) und (3.6) können wir auch die instantane Korrelation zwischen $L(t, T_m)$ und $L(t, T_n)$ ableiten,

$$\rho_{mn}(t) = \frac{\lambda(t, T_m)^\top \lambda(t, T_n)}{\|\lambda(t, T_m)\| \|\lambda(t, T_n)\|}$$

Wir können folgenden Zusammenhang zwischen Volatilität und Korrelation herstellen,

$$\lambda(t, T_m) = \sigma_m(t)\ell_m(t)$$

wobei $\sigma_m(t) = \|\lambda(t, T_m)\|$ die Volatilität von $L(t, T_m)$ und der Zeilenvektor $\ell_m(t) = \frac{\lambda(t, T_m)}{\|\lambda(t, T_m)\|}$ die Korrelationen zwischen den verschiedenen Zinssätzen widerspiegelt: $\rho_{mn}(t) = \ell_m(t)\ell_n(t)^\top$.

Unter Vernachlässigung zeitlicher Veränderungen der Volatilitäten können wir nach [2, Abschnitt 11.7.2] annehmen, dass $\sigma_m(t) = \sigma_m$ und

$$\sigma_n = \sigma_{Cpl(T_n, T_{n+1})}, \quad 1 \leq n \leq M - 1$$

Für lange Laufzeiten ist diese Annahme jedoch problematisch.

Um das Verständnis zu vertiefen, folgen zwei Beispiele aus [4]:

1. Perfekt korrelierte LIBOR Rates im Beispiel 3.1.0.1
2. Unkorrelierte LIBOR Rates im Beispiel 3.1.0.2

In beiden Fällen simulieren wir e^{H_m} ,

$$\begin{aligned} L(t_{i+1}, m) &= L(t_{i-1}, m) \exp\left(\alpha_m(t_{i-1})\Delta t + \lambda(t_{i-1}, T_m)Z(i)\sqrt{\Delta t}\right) \\ \lambda(t, T_m) &= \lambda(T_m - t) \end{aligned}$$

Beispiel 3.1.0.1 (perfekt korrelierte LIBOR Forward Rates) Die LIBOR Forward Rates werden unter dem Spotmaß bis T_k mit $K = 2$, $\Delta t = 1$ (Jahr) simuliert und die Forward Rates,

$$L(t_0, T_0) = 0.01, \quad L(t_0, T_1) = 0.02, \quad L(t_0, T_2) = 0.03$$

aktuell am Markt beobachtet. Darüber hinaus ist,

$$\lambda(0) = 0.2 \text{ und } \lambda(1) = 0.3$$

Es sollen $S = 8$ Simulationen durchgeführt und die Ergebnisse in Abbildung 3.1 dargestellt werden.

Beispiel 3.1.0.2 (unkorrelierte LIBOR Forward Rates) Die LIBOR Forward Rates werden unter dem Spot Maß bis T_k mit $K = 2$, $\Delta t = 1$ (Jahr) simuliert und die Forward Rates,

$$L(t_0, T_0) = 0.01, \quad L(t_0, T_1) = 0.02, \quad L(t_0, T_2) = 0.03$$

aktuell am Markt beobachtet. Darüber hinaus ist,

$$\lambda(0) = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \lambda(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Es sollen $S = 8$ Simulationen durchgeführt und die Ergebnisse in Abbildung 3.2 dargestellt werden.

3.2 Kalibrierung der Volatilität an Cap Preisen

Im Wesentlichen muss man für die Kalibrierung des LMM zwei Faktoren bestimmen:

1. Volatilität der einzelnen Forward Rates
2. Korrelation der Forward Rates

Die Volatilitäten der Forward Rates im LMM können aus Cap bzw. Floor Preisen generiert werden. Die Korrelationen werden im Abschnitt 3.3 behandelt.

Nun folgt Beispiel 3.2.0.3 aus [3, Abschnitt 11.7.2], in dem demonstriert wird, wie eine Kalibrierung zu Cap Preisen umgesetzt werden kann.

Beispiel 3.2.0.3 (Volatilität/Cap) Kalibrierung des LMM zu Marktpreisen unter Berücksichtigung der Cap Preise in Tabelle 3.1 und LIBOR Forward Rates in Tabelle 3.2.

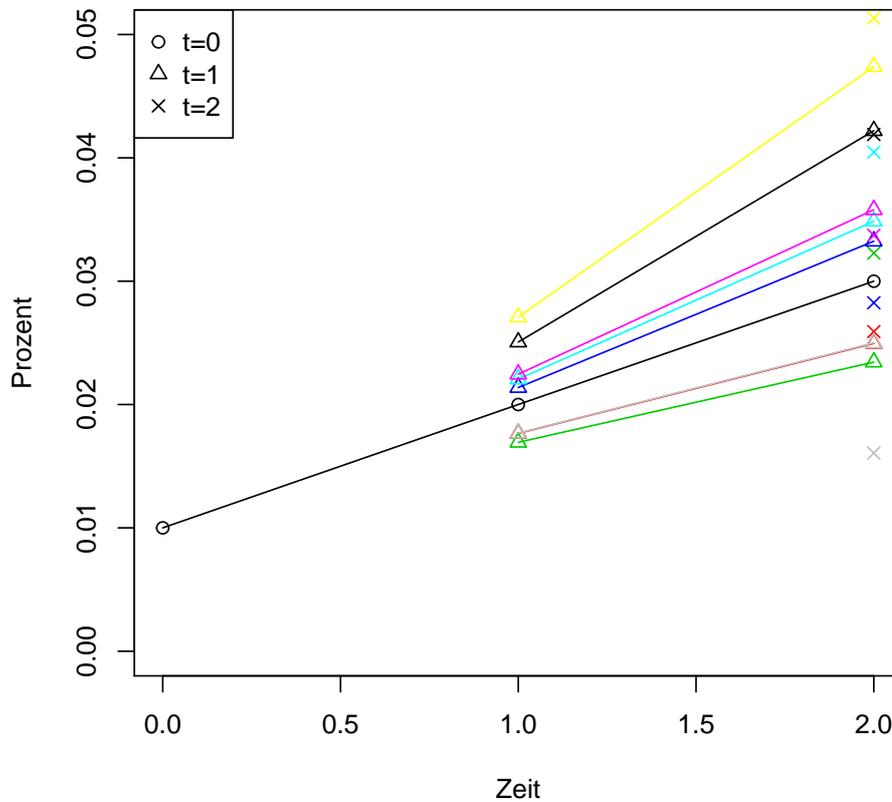


Abbildung 3.1: LMM mit perfekt korrelierten LIBOR Forward Rates

T	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k = 3.5\%$	25	77	148.5	230.5	325.5	431.5	545.5	664	786

Tabelle 3.1: Euro Cap Preise in Basis Punkten (bp)

Unser Ziel ist, die implizite Volatilität aus den Cap Preisen zu generieren. Zu diesem Zweck betrachten wir die Black-Scholes Gleichung für ein Caplet,

$$Cpl(t; T_{i-1}, T_i) = \delta P(t, T_i) [F(t, T_{i-1}, T_i) \Phi(d_1(i; t)) - k \Phi(d_2(i; t))]$$

$$d_{1,2}(i; t) = \frac{\log\left(\frac{F(t; T_{i-1}, T_i)}{k}\right) \pm \frac{1}{2} \sigma(t)^2 (T_{i-1} - t)}{\sigma(t) \sqrt{T_{i-1} - t}}$$

Die implizite Volatilität eines Caplets erhalten wir durch Invertierung dieser Gleichung unter Anwendung folgender Approximation,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + \dots \right) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{\pi}} + o(x^2)$$

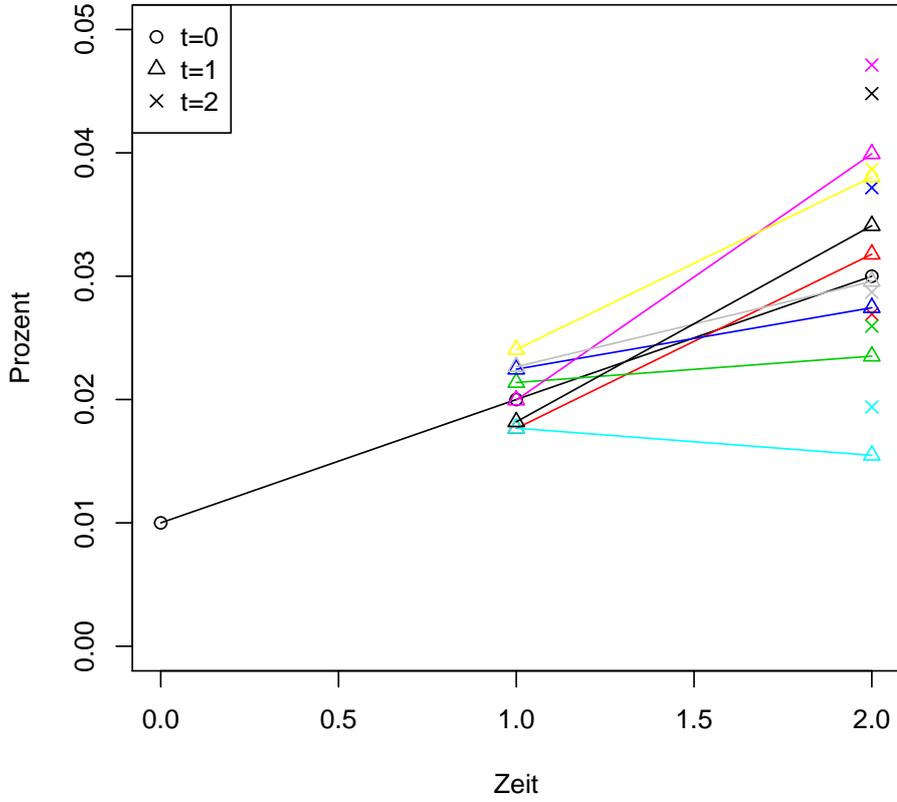


Abbildung 3.2: LMM mit unkorrelierten LIBOR Forward Rates

Daher gilt,

$$\begin{aligned}
 Cpl &= \delta P \left[F \left(\frac{1}{2} + \frac{d_1(i; t)}{2\sqrt{\pi}} \right) - k \left(\frac{1}{2} + \frac{d_2(i; t)}{2\sqrt{\pi}} \right) \right] \\
 Cpl &= \delta P \left[F \left(\frac{1}{2} + \frac{\log\left(\frac{F}{k}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T_{i-1} - t)}{2\sigma\sqrt{\pi}(T_{i-1} - t)} \right) - k \left(\frac{1}{2} + \frac{\log\left(\frac{F}{k}\right) - \frac{\sigma^2}{2}(T_{i-1} - t)}{2\sigma\sqrt{\pi}(T_{i-1} - t)} \right) \right] \\
 0 &= \underbrace{\sigma^2 (T_{i-1} - t) \frac{F + k}{2}}_A + \underbrace{\sigma (-2)\sqrt{\pi}(T_{i-1} - t) \left(\frac{Cpl}{\delta P} - \frac{F - k}{2} \right)}_B + \underbrace{(F - k) \log\left(\frac{F}{k}\right)}_C
 \end{aligned}$$

Unter Anwendung der Lösungsformel für die allgemeine quadratische Gleichung erhalten wir,

$$\sigma_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Wir haben jedoch keine Caplet, sondern Cap Preise angegeben. Aus Abschnitt 1.3.2 wissen wir, dass jeder Cap als Summe von Caplets dargestellt werden kann.

T_i	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
$L(0, T_i)$	4.228	2.791	3.067	3.067	3.728	3.728	4.051	4.051	4.199	4.199
T_i	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5
$L(0, T_i)$	4.450	4.450	4.626	4.626	4.816	4.816	4.960	4.960	5.088	5.088

Tabelle 3.2: Forward LIBOR Kurve in %

Betrachten wir den Cap mit Fälligkeit in $T_4 = 2$ Jahren. Dieser kann wie folgt durch Caplets mit Strike $k = 3.5\%$ ausgedrückt werden,

$$\begin{aligned}
Cp(T_4) &= Cpl(T_1, T_2) + Cpl(T_2, T_3) + Cpl(T_3, T_4) \\
&= \sum_{i=2}^4 \delta P(t, T_i) [F(t, T_{i-1}, T_i) \Phi(d_1(i; t)) - k \Phi(d_2(i; t))] \\
&= \sum_{i=2}^4 \delta P_i \left[F_{i-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{d_1(i; t)}{2\sqrt{\pi}} \right) - k \left(\frac{1}{2} + \frac{d_2(i; t)}{2\sqrt{\pi}} \right) \right] \\
&= \sum_{i=2}^4 \delta P_i \left[F_{i-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{\log\left(\frac{F_{i-1}}{k}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T_{i-1} - t)}{2\sigma\sqrt{\pi}(T_{i-1} - t)} \right) - k \left(\frac{1}{2} + \frac{\log\left(\frac{F_{i-1}}{k}\right) - \frac{\sigma^2}{2}(T_{i-1} - t)}{2\sigma\sqrt{\pi}(T_{i-1} - t)} \right) \right] \\
\sigma Cp &= \sum_{i=2}^4 \delta P_i \left[F_{i-1} \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\log\left(\frac{F_{i-1}}{k}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T_{i-1} - t)}{2\sqrt{\pi}(T_{i-1} - t)} \right) - k \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\log\left(\frac{F_{i-1}}{k}\right) - \frac{\sigma^2}{2}(T_{i-1} - t)}{2\sqrt{\pi}(T_{i-1} - t)} \right) \right]
\end{aligned}$$

Dies führt zu,

$$\begin{aligned}
0 &= \sigma^2 \underbrace{\delta \sum_{i=2}^4 P_i (F_{i-1} + k) \frac{\sqrt{(T_{i-1} - t)}}{4\sqrt{\pi}}}_A + \sigma \underbrace{\left[\delta \sum_{i=2}^4 \left(P_i \frac{(F_{i-1} - k)}{2} \right) - Cp(T_4) \right]}_B \\
&\quad + \underbrace{\delta \sum_{i=2}^4 P_i \frac{(F_{i-1} - k) \log\left(\frac{F_{i-1}}{k}\right)}{2\sqrt{\pi}(T_{i-1} - t)}}_C
\end{aligned}$$

Wir erhalten daher für $\sigma_{Cpl(T_{0.5}, T_1)} = \sigma_{Cpl(T_1, T_{1.5})} = \sigma_{Cpl(T_{1.5}, T_2)}$,

[1] 0.4037021

Da es sich um eine unbefriedigende Approximation handelt, verbessern wir dieses Ergebnis numerisch.

Die implizite Volatilität ist auch eine Lösung von,

$$0 = Cpl(T_1, T_2, \sigma) + Cpl(T_2, T_3, \sigma) + Cpl(T_3, T_4, \sigma) - Cp(T_4)$$

Diese Gleichung kann in R numerisch, beispielsweise mit der Funktion `uniroot()` approximiert werden.

Den zuvor erhaltenen Wert können wir als Startpunkt sowie zur Einschränkung des Intervalls benutzen, in dem das Programm nach Nullstellen sucht und erhalten,

[1] 0.2925102

Wiederholen wir diesen Vorgang für,

$$Cp(T_6) - Cp(T_4) = Cpl(T_4, T_5) + Cpl(T_5, T_6)$$

und alle weiteren Zeitpunkte, erhalten wir die in Tabelle 3.3 angeführten Ergebnisse.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma_{Cpl(T_{i-1}, T_i)}$	n/a	29.3	29.3	29.3	20.8	20.8	18.3	18.31	17.8	17.8
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\sigma_{Cpl(T_{i-1}, T_i)}$	16.3	16.3	16.7	16.7	16.1	16.1	15.7	15.7	15.7	15.7

Tabelle 3.3: Implizite Volatilitäten in % für $Cpl(T_{i-1}, T_i)$ mit $k = 3.5\%$

3.3 Kalibrierung der Korrelationsstruktur an Swaption Preisen

3.3.1 Rebonatos Formel

Wie aus Abschnitt 1.4 und Abschnitt 3.1 bekannt, kann die Forward Swap Rate als gewichtete Summe von LIBOR Rates dargestellt werden,

$$R_{swap}(t) = \sum_{m=\mu+1}^{\nu} w_m(t) L(t, T_{m-1})$$

mit den Gewichten,

$$w_m(t) = \frac{P(t, T_m)}{\sum_{k=\mu+1}^{\nu} \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_{\mu})} P(t, T_{\mu})} = \frac{\frac{1}{1+\delta L(t, T_{\mu})} \cdots \frac{1}{1+\delta L(t, T_{m-1})}}{\sum_{k=\mu+1}^{\nu} \frac{1}{1+\delta L(t, T_{\mu})} \cdots \frac{1}{1+\delta L(t, T_{k-1})}}$$

Nun folgen wir [3, Abschnitt 11.5.2]. Empirischen Studien zufolge ist die Veränderung von w_m im Vergleich zu den LIBOR Rates gering. Auch im Zuge dieser Arbeit konnte diese These in den Abschnitten 4.2.2 und 4.3.2 erhärtet werden.

Aus diesem Grund approximieren wir $w_m(t)$ mit dem deterministischen Anfangswert $w_m(0)$. Daher ist,

$$R_{swap}(t) \approx \sum_{m=\mu+1}^{\nu} w_m(0) L(t, T_{m-1})$$

und unter dem T_{μ} Forward Maß $\mathbb{Q}^{T_{\mu}}$,

$$dR_{swap}(t) \approx (\cdots) dt + \sum_{m=\mu+1}^{\nu} w_m(0) L(t, T_{m-1}) \lambda(t, T_{m-1}) dW^{T_{\mu}}, \quad t \in [0, T_{\mu}]$$

für einen passenden Drift Term.

[3, Lemma 11.7] besagt,

$$dR_{swap}(t) = R_{swap}(t) \rho^{swap}(t) dW^{swap}(t), \quad t \in [0, T_{\mu}]$$

Wir erkennen, dass die Forward Swap Volatilität $\rho^{swap}(t)$,

$$\begin{aligned} \|\rho^{swap}(t)\|^2 &= \frac{d\langle \log R_{swap}, \log R_{swap} \rangle_t}{dt} \\ &\approx \sum_{k, l=\mu+1}^{\nu} \frac{w_k(0) w_l(0) L(t, T_{k-1}) L(t, T_{l-1}) \lambda(t, T_{k-1})^{\top} \lambda(t, T_{l-1})}{R_{swap}^2(t)} \end{aligned}$$

erfüllt.

In einem weiteren Schritt ersetzen wir alle Zufallsvariablen mit ihren Werten zum Zeitpunkt 0, sodass die quadratische Variation von $\log R_{swap}(t)$ approximativ deterministisch in der Form,

$$\|\rho^{swap}(t)\|^2 \approx \sum_{k, l=\mu+1}^{\nu} \frac{w_k(0) w_l(0) L(0, T_{k-1}) L(0, T_{l-1}) \lambda(0, T_{k-1})^{\top} \lambda(0, T_{l-1})}{R_{swap}^2(0)}$$

wird.

Bezeichnen wir die Wurzel der rechten Seite als $\tilde{\rho}^{swap}(t)$. Mit dem Lévy's Characterization Theorem ist folgender Ausdruck eine \mathbb{Q}^{swap} - Brownsche Bewegung,

$$\mathcal{W}(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^d \frac{\rho_j^{swap}(s)}{\|\rho^{swap}(s)\|} dW_j^{swap}(s), \quad t \in [0, T_\mu]$$

Daraus folgt,

$$\begin{aligned} dR_{swap}(t) &= R_{swap}(t) \|\rho^{swap}(t)\| d\mathcal{W}(t) \\ &\approx R_{swap}(t) \tilde{\rho}^{swap}(t) d\mathcal{W}(t) \end{aligned}$$

Aus diesem Grund können wir den Swaption Preis approximativ mit Hilfe von Blacks Formel (1.4) bestimmen, wobei σ^2 ersetzt wird durch,

$$\frac{1}{T_\mu} \int_0^{T_\mu} \sum_{k,l=\mu+1}^{\nu} \frac{w_k(0)w_l(0)L(0, T_{k-1})L(0, T_{l-1})\lambda(t, T_{k-1})^\top \lambda(t, T_{l-1})}{R_{swap}^2(0)} dt$$

Dies ist Rebonatos Formel.

Durch Implementierung der Zusammenhänge aus 3.1 erhalten wir,

$$\sigma_{swap}^2 \approx \frac{1}{T_\mu} \sum_{k,l=\mu+1}^{\nu} \frac{w_k(0)w_l(0)L(0, T_{k-1})L(0, T_{l-1}) \int_0^{T_\mu} [\sigma_{k-1}(t)\ell_{k-1}(t)][\sigma_{l-1}(t)\ell_{l-1}(t)]^\top dt}{R_{swap}^2(0)}$$

Unter der Annahme von $\ell_m(t) = \ell_m$ folgt,

$$\sigma_{swap}^2 \approx \frac{1}{T_\mu} \sum_{k,l=\mu+1}^{\nu} \frac{w_k(0)w_l(0)L(0, T_{k-1})L(0, T_{l-1}) \int_0^{T_\mu} \sigma_{k-1}(t)^\top \sigma_{l-1}(t) \rho_{k-1,l-1} dt}{R_{swap}^2(0)}$$

Abschließend führen wir einen Indexshift bei k und l durch,

$$\sigma_{swap}^2 T_\mu \approx \sum_{k,l=\mu}^{\nu-1} \underbrace{\frac{w_{k+1}(0)w_{l+1}(0)L(0, T_k)L(0, T_l) \int_0^{T_\mu} \sigma_k(t)\sigma_l(t) dt}{R_{swap}^2(0)}}_{b_{(k,l),(\mu,\nu)}} \rho_{k,l} \quad (3.7)$$

$$w_m(t) = \frac{\frac{1}{1+\delta L(t, T_\mu)} \cdots \frac{1}{1+\delta L(t, T_{m-1})}}{\sum_{k=\mu+1}^{\nu} \frac{1}{1+\delta L(t, T_\mu)} \cdots \frac{1}{1+\delta L(t, T_{k-1})}} \quad R_{swap}(t) = \sum_{m=\mu+1}^{\nu} w_m(t)L(t, T_{m-1})$$

Darüber hinaus nehmen wir an, dass $\sigma_m(t) \equiv \sigma_m$ unabhängig von t für alle m sein soll,

$$\sigma_{swap}^2 T_\mu \approx \sum_{k,l=\mu}^{\nu-1} \frac{w_{k+1}(0)w_{l+1}(0)L(0, T_k)L(0, T_l) T_\mu \sigma_k \sigma_l}{R_{swap}^2(0)} \rho_{k,l}$$

Schlussfolgerung

Die Einträge der Hauptdiagonale der Korrelationsmatrix müssen 1 sein. Falls $\mu = i$, $\nu = i + 1$ ergibt,

$$\begin{aligned} w_{i+1}(0) &= \frac{\frac{1}{1+\delta L(0, T_i)}}{\frac{1}{1+\delta L(0, T_i)}} = 1 \\ R_{swap}(0) &= w_2(0)L(0, T_1) \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (3.4) folgt,

$$\begin{aligned} \sigma_{swap}^2 T_i &\approx \frac{L(0, T_i)^2 T_1 \sigma_1^2}{L(0, T_i)^2} = \sigma_i^2 T_1 \\ \sigma_{swap} &= \sigma_i = \sigma_{Cpl(T_i, T_{i+1})} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dies wurde bereits im Abschnitt 1.6 thematisiert.

3.3.2 Numerische Umsetzung

Zielsetzung ist die Bestimmung der reellen, symmetrischen und positiv definiten Korrelationsmatrix,

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \cdots & \rho_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n,1} & \cdots & \rho_{n,n} \end{pmatrix}$$

durch Invertierung der Gleichung (3.4).

Weil $\rho_{m,n} = \frac{\lambda(T_m)^\top \lambda(T_n)}{\|\lambda(T_m)\| \|\lambda(T_n)\|}$ folgt, dass $\rho_{i,i} = 1$. Dadurch ist die Hauptdiagonale eindeutig bestimmt.

Da die Matrix symmetrisch ist, folgt $\rho_{i,j} = \rho_{j,i}$. Aus diesem Grund betrachten wir nun o.B.d.A die untere Dreiecksmatrix ($i \leq j$).

Die erste Nebendiagonale ($|i - j| = 1$) kann wie folgt gebildet werden:

Wir benötigen σ_{swp} einer Swaption mit $\mu = i$ und $\nu = (j + 1)$. T_μ ist das erste Reset Date und T_ν die Maturity des zugrundeliegenden Swaps. Zur besseren Lesbarkeit wird $b_{(j,i)} = b_{(j,i),(i,(j+1))}$ gesetzt. Daraus resultiert,

$$\begin{aligned} \sigma_{swp_{i,(j+1)}}^2 T_i &= b_{(i,i)} + 2b_{(j,i)} \rho_{j,i} + b_{(j,j)} \\ \rho_{j,i} &= \frac{\sigma_{swp_{i,(j+1)}}^2 T_i - b_{(i,i)} - b_{(j,j)}}{2b_{(j,i)}} \end{aligned}$$

Für die Bestimmung der zweiten Nebendiagonale ($|i-j|=2$) benötigen wir die Werte der ersten und σ_{swp} einer Swaption mit $\mu = T_i$ und $\nu = T_{(j+1)}$,

$$\begin{aligned} \sigma_{swp_{i,(j+1)}}^2 T_i &= b_{(i,i)} + b_{(i+1)} + b_{(j,j)} + 2b_{((i+1),i)} \rho_{(i+1),i} + 2b_{(j,(i+1))} \rho_{j,(i+1)} + 2b_{(j,i)} \rho_{j,i} \\ \rho_{j,i} &= \frac{\sigma_{swp_{i,(j+1)}}^2 T_i - (b_{(i,i)} + b_{(i+1),(i+1)} + b_{(j,j)} + 2b_{((i+1),i)} \rho_{(i+1),i} + 2b_{(j,(i+1))} \rho_{j,(i+1)})}{2b_{(j,i)}} \end{aligned}$$

Das Prinzip kann iterativ für die verbleibenden Nebendiagonalen fortgesetzt werden.

Beispiel 3.3.2.1 (Korrelationen aus Rebonatos Formel) Wir haben folgende Daten aus [1, Abschnitt 7.6] angeführt:

1. Libor Rates: Tabelle 3.4
2. Swaption Volatilitäten: Tabelle 3.5
3. Caplet Volatilitäten: Tabelle 3.6

Damit erhalten wir, unter Anwendung von Rebonatos Formel und der zuvor beschriebenen Invertierung, die in Tabelle 3.7 angeführte Korrelationssmatrix der LIBOR Forward Rates.

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
L	4.63	5.02	5.22	5.46	5.62	5.70	5.77	5.69	5.77	5.84

Tabelle 3.4: LIBOR Rates in Prozent aus [1, Abschnitt 7.6], 1. Februar 2002

Anmerkung 3.3.2.1 (Berechnete Korrelationen) Zu erwarten wäre ein kontinuierlicher Abfall der Korrelationswerte über die Nebendiagonalen. Dies ist jedoch in unserem Beispiel in Abbildung 3.7 nur in schwacher Ausprägung zu beobachten.

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
1	17.90	16.50	15.30	14.40	13.70	13.20	12.80	12.50	12.30	12.00
2	15.40	14.20	13.60	13.00	12.60	12.20	12.00	11.70	11.50	
3	14.30	13.30	12.70	12.20	11.90	11.70	11.50	11.30		
4	13.60	12.70	12.10	11.70	11.40	11.30	11.10			
5	12.90	12.10	11.70	11.30	11.10	10.90				
6	12.50	11.80	11.40	10.95	10.75					
7	12.10	11.50	11.10	10.60						
8	11.80	11.20	10.83							
9	11.50	10.90								
10	11.20									

Tabelle 3.5: ATM Swaption Volatilitäten, Spalten: Erstes Reset Date, Zeilen: Laufzeit in Jahren, des Swaps [1, Abschnitt 7.6], 1. Februar 2002

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Vol	17.80	18.50	16.30	15.50	15.20	14.50	13.80	13.40	12.90	12.50

Tabelle 3.6: Caplet Volatilitäten in Prozent [1, Abschnitt 7.9], 1. Februar 2002

Anmerkung 3.3.2.2 (Caplet-Swaption Parität) *Im Abschnitt 1.6 und der Gleichung (3.8) haben wir realisiert, dass die Volatilität einer einjährigen Swaption mit jener des entsprechenden Caplets übereinstimmen müsste.*

Vergleichen wir jedoch die erste Spalte in Tabelle 3.5 mit Tabelle 3.6 aus unserem Beispiel, ist erkennbar, dass dies hier nicht der Fall ist. Auch in realen Marktdaten ist oftmals ein erheblicher Unterschied zwischen einjährigen Caplet und Swaption Volatilitäten erkennbar.

Ein Grund für diese Diskrepanz kann die unterschiedliche Struktur von Caplet und Swaption Märkten sein. Caplets werden oft halb-, Swaptions hingegen ganzjährig abgeschlossen.

Darüber hinaus können die angegebenen Volatilitäten nicht zeitgleich ermittelt worden sein, da beide Märkte beispielsweise unterschiedlich liquide sein könnten.

Anmerkung 3.3.2.3 (Korrelationen) *Explizit erwähnt sei auch, dass Rebonatos Formel in Verbindung mit unbefriedigenden Daten negative bzw. Korrelationen über 100% nicht ausschließt, da es sich nur um eine approximative Formel handelt.*

Anmerkung 3.3.2.4 (Stabilität) *Darüber hinaus scheint Rebonatos Formel sehr sensibel auf Fehler in den Daten zu reagieren. Ändern wir zum Beispiel den Wert in Zeile 6 und Spalte 4 der Swaption Volatilitätsmatrix 3.5 von 10.95 auf 11.95, erhalten wir die in Tabelle 3.8 angeführten Korrelationen.*

Bereits eine Abweichung von unter 10% eines einzigen Parameters führt zu Korrelationen von über 100%, sowie negativen Korrelationswerten.

In der praktischen Anwendung führt dies zu erhebliche Herausforderungen. Marktdaten sind häufig gestört. Insbesondere werden sie meist nicht zeitgleich upgedated.

3.4 Kalibrierung der Volatilitäten aus historischen Korrelationen

Falls die Korrelationsstruktur sowie die Swaption Volatilitäten als gegeben und darüber hinaus die gesuchten Volatilitäten als unabhängig von t anzusehen sind, folgt daraus, dass sich $\sigma_{i,i} = \sigma_{swp(\mu=i, \nu=(i+1))}$

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}
L_1	100.00	43.83	74.49	60.60	38.28	74.70	36.21	52.58	49.38	45.22
L_2	43.83	100.00	32.79	54.16	48.85	33.86	52.33	39.78	35.68	21.55
L_3	74.49	32.79	100.00	46.24	55.53	47.38	49.78	56.41	52.42	64.22
L_4	60.60	54.16	46.24	100.00	43.39	57.50	48.70	45.98	28.86	25.59
L_5	38.28	48.85	55.53	43.39	100.00	43.73	60.20	40.39	47.79	38.51
L_6	74.70	33.86	47.38	57.50	43.73	100.00	48.40	64.38	51.94	39.19
L_7	36.21	52.33	49.78	48.70	60.20	48.40	100.00	55.44	68.57	51.48
L_8	52.58	39.78	56.41	45.98	40.39	64.38	55.44	100.00	58.13	71.11
L_9	49.38	35.68	52.42	28.86	47.79	51.94	68.57	58.13	100.00	63.82
L_{10}	45.22	21.55	64.22	25.59	38.51	39.19	51.48	71.11	63.82	100.00

Tabelle 3.7: Berechnete Korrelationen ρ in Prozent

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}
L_1	100.00	43.83	74.49	60.60	38.28	74.70	36.21	52.58	49.38	45.22
L_2	43.83	100.00	32.79	54.16	48.85	33.86	52.33	39.78	35.68	21.55
L_3	74.49	32.79	100.00	46.24	55.53	47.38	49.78	56.41	-147.11	279.72
L_4	60.60	54.16	46.24	100.00	43.39	57.50	48.70	45.98	240.51	-203.01
L_5	38.28	48.85	55.53	43.39	100.00	43.73	60.20	40.39	47.79	38.51
L_6	74.70	33.86	47.38	57.50	43.73	100.00	48.40	64.38	51.94	39.19
L_7	36.21	52.33	49.78	48.70	60.20	48.40	100.00	55.44	68.57	51.48
L_8	52.58	39.78	56.41	45.98	40.39	64.38	55.44	100.00	58.13	71.11
L_9	49.38	35.68	-147.11	240.51	47.79	51.94	68.57	58.13	100.00	63.82
L_{10}	45.22	21.55	279.72	-203.01	38.51	39.19	51.48	71.11	63.82	100.00

Tabelle 3.8: Berechnete Korrelationen ρ mit gestörten Daten (siehe Anmerkung 3.3.2.4)

ergibt, wie in Gleichung (3.8) gezeigt.

In der Folge werden Volatilitäten aus historischen instantanen Korrelationen (ρ) und Swaption Volatilitäten (σ_{swp}) bestimmt. Im Unterschied dazu haben wir im Abschnitt 3.3.2 die Volatilitäten aus Cap und Swaption Daten gewonnen. Wir betrachten erneut Rebonatos Formel in der Form,

$$\sigma_{swp}^2 T_\mu \approx \sum_{k,l=\mu}^{\nu-1} \underbrace{\frac{w_{k+1}(0)w_{l+1}(0)L(0,T_k)L(0,T_l)\rho_{k,l}}{R_{swap}^2(0)}}_{b_{(k,l),(\mu,\nu)}} T_\mu \sigma_{k,l}^2(0)$$

$$w_m(t) = \frac{\frac{1}{1+\delta L(t,T_\mu)} \cdots \frac{1}{1+\delta L(t,T_{m-1})}}{\sum_{k=\mu+1}^{\nu} \frac{1}{1+\delta L(t,T_\mu)} \cdots \frac{1}{1+\delta L(t,T_{k-1})}} \quad R_{swap}(t) = \sum_{m=\mu+1}^{\nu} w_m(t)L(t,T_{m-1})$$

Die Invertierung ergibt sich ähnlich wie im Abschnitt 3.3.2, weil die erste Nebendiagonale ($|i-j|=1$) wie folgt errechnet werden kann,

$$\sigma_{swp_{i,(j+1)}}^2 = b_{(i,i)}\sigma_{i,i}^2 + 2b_{(j,i)}\sigma_j i^2, \rho_{j,i} + b_{(j,j)}\sigma_{j,j}$$

$$\sigma_{j,i} = \sqrt{\frac{\sigma_{swp_{i,(j+1)}}^2 - b_{(i,i)}\sigma_{i,i}^2 - b_{(j,j)}\sigma_{j,j}^2}{2b_{(j,i)}}}$$

Beispiel 3.4.0.2 (Volatilitäten aus Rebonatos Formel) *Folgende Daten aus [1, Abschnitt 7.6] sind vorgegeben:*

1. *Libor Rates:* Tabelle 3.4
2. *Swaption Volatilitäten:* Tabelle 3.5

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}
L_1	100.00	82.00	69.00	65.00	58.00	47.00	29.00	23.00	43.00	47.00
L_2	82.00	100.00	80.00	73.00	68.00	55.00	45.00	40.00	53.00	57.00
L_3	69.00	80.00	100.00	76.00	72.00	63.00	47.00	56.00	67.00	61.00
L_4	65.00	73.00	76.00	100.00	78.00	67.00	58.00	56.00	68.00	70.00
L_5	58.00	68.00	72.00	78.00	100.00	84.00	66.00	67.00	71.00	73.00
L_6	47.00	55.00	63.00	67.00	84.00	100.00	77.00	68.00	73.00	69.00
L_7	29.00	45.00	47.00	58.00	66.00	77.00	100.00	72.00	71.00	65.00
L_8	23.00	40.00	56.00	56.00	67.00	68.00	72.00	100.00	73.00	66.00
L_9	43.00	53.00	67.00	68.00	71.00	73.00	71.00	73.00	100.00	75.00
L_{10}	47.00	57.00	61.00	70.00	73.00	69.00	65.00	66.00	75.00	100.00

Tabelle 3.9: Historische Korrelationen ρ , [1, Abschnitt 6.19.1], 1. Februar 2002

3. Historische Korrelationen: Tabelle 3.9

Tabelle 3.10 zeigt die ermittelten Volatilitäten

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	$t = 8$	$t = 9$	$t = 10$
$L(t, T_1)$	17.90									
$L(t, T_2)$	14.76	16.50								
$L(t, T_3)$	16.13	13.69	15.30							
$L(t, T_4)$	16.04	13.83	14.01	14.40						
$L(t, T_5)$	13.36	14.21	12.96	13.41	13.70					
$L(t, T_6)$	20.25	12.85	13.33	12.65	12.74	13.20				
$L(t, T_7)$	17.51	17.23	15.43	13.40	12.81	12.91	12.80			
$L(t, T_8)$	23.35	15.70	14.83	13.06	11.08	12.80	13.32	12.50		
$L(t, T_9)$	16.24	12.68	12.83	9.21	11.49	11.54	12.49	12.82	12.30	
$L(t, T_{10})$	14.63	9.35	14.65	8.42	10.01	10.15	11.69	13.00	12.47	12.00

Tabelle 3.10: Berechnete Volatilitäten in Prozent

Anmerkung 3.4.0.5 Ein Vorteil dieser Methode ist, dass wir ausschließlich auf Daten von Swaptions, nicht jedoch von Caplets angewiesen sind. Dadurch können die in Anmerkung 3.3.2.4 beschriebenen Risiken vermieden werden, die durch Unterschiede in der Struktur von Caplet und Swaption Märkten entstehen.

3.5 Zeitabhängige Volatilitäten

Betrachten wir $\sigma_i(t)$ von $L(t, T_i)$ abhängig von t in der Form,

$$\sigma_i(t) = v_i \exp(-\beta(T_i - t))$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten v_i und β transformieren wir diese Gleichung in eine lineare Form,

$$\ln(\sigma_i(t)) = \ln(v_i) + \beta(t - T_m)$$

und benutzen die Funktion `lm()`, um eine lineare Regression durchzuführen.

Beispiel 3.5.0.3 (zeitabhängige Volatilität mit exponentiellem Abfall) Wir haben die Volatilitätsmatrix 3.10 dargestellt und wollen die Parameter für $L(t, T_{10})$ bestimmen.

Die Ergebnisse der linearen Regression sowie die Gegenüberstellung der gefitteten zu den tatsächlichen Werten werden in Abbildung 3.3 dargestellt.

Die Regression führt zu folgendem Ergebnis:

Call:

```
lm(formula = log(vol[10, 1:10]) ~ 1 + b)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.60540	-0.26109	0.04334	0.21077	0.52388

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-4.375571	0.270695	-16.164	2.16e-07 ***
b	0.007697	0.043626	0.176	0.864

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.3963 on 8 degrees of freedom

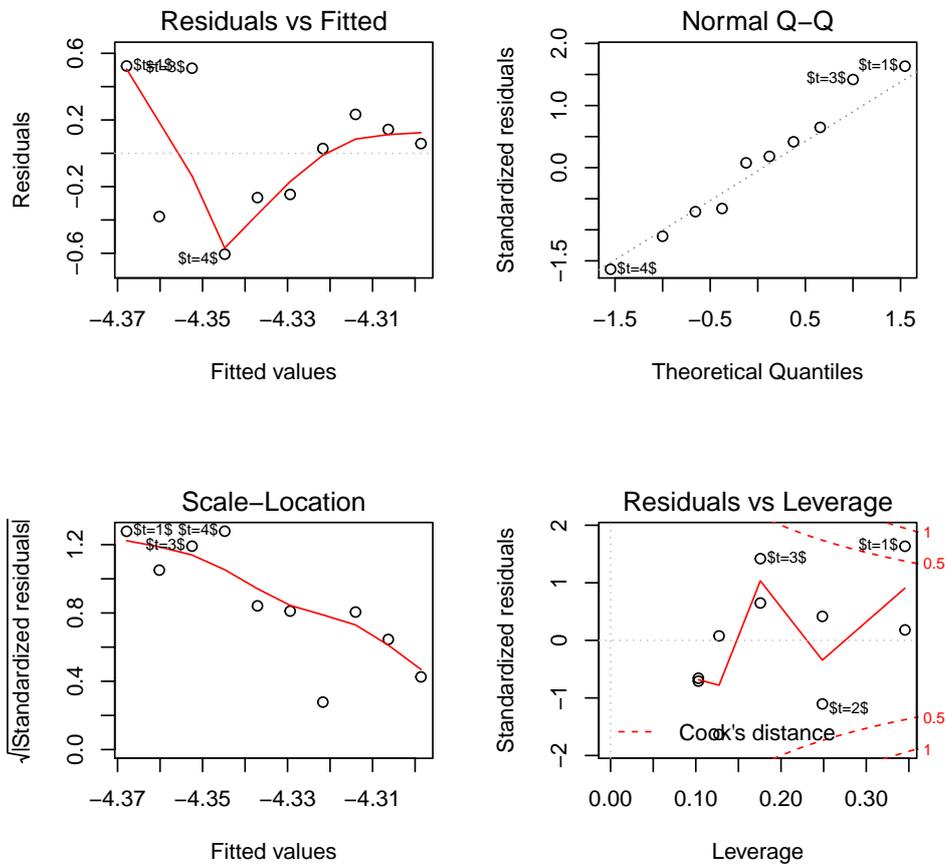
Multiple R-squared: 0.003876, Adjusted R-squared: -0.1206

F-statistic: 0.03113 on 1 and 8 DF, p-value: 0.8643

Die Koeffizienten sind $v = \exp(\text{Intercept}) = 0.0125809599915291$ und $\beta = 0.00769679716176624$.

Anmerkung 3.5.0.6 (Koeffizient β) *Wegen der geringen Anzahl an verfügbaren Daten ist der Wert von β , im Gegensatz zu v , in unserem Beispiel nicht statistisch signifikant.*

In den ersten vier Darstellungen von Abbildung 3.3 sehen wir verschiedene Qualitätsmerkmale der Regression der linearisierten Gleichung. Die unterste Darstellung zeigt die rücktransformierte fertige Regressionsfunktion im Zusammenhang mit den tatsächlichen Datenpunkten.



Gefittete vs. tatsächliche Werte

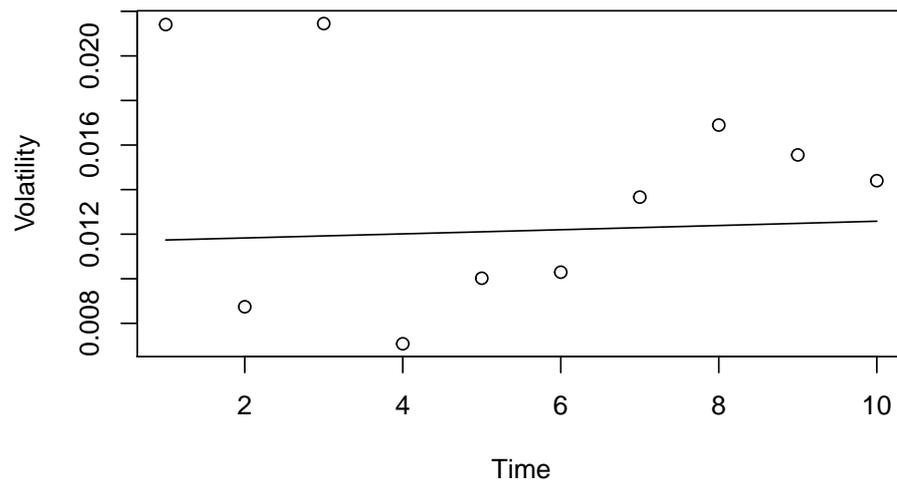


Abbildung 3.3: Lineare Regression

Kapitel 4

Beispiel zum 31.12.2012

Die in diesem Abschnitt verwendeten Daten wurden durch [5] zur Verfügung gestellt.

4.1 Fünfjähriger Zeitraum

L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}
0.66	0.76	0.99	1.35	1.77	2.23	2.58	2.86	3.05	3.22	3.36	3.44
L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{16}	L_{17}	L_{18}	L_{19}	L_{20}	L_{21}	L_{22}	L_{23}	L_{24}
3.35	3.59	3.23	3.42	3.05	3.09	2.99	3.10	3.40	3.65	3.82	3.93
L_{25}	L_{26}	L_{27}	L_{28}	L_{29}	L_{30}	L_{31}	L_{32}	L_{33}	L_{34}	L_{35}	
4.02	4.07	4.11	4.14	4.16	4.17	4.18	4.19	4.19	4.19	4.20	

Tabelle 4.1: LIBOR Rates in Prozent [5], 31.12.2012

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
$L(t, T_1)$	98.00				
$L(t, T_2)$	36.88	98.00			
$L(t, T_3)$	92.13	32.58	80.00		
$L(t, T_4)$	88.76	70.80	40.69	53.00	
$L(t, T_5)$	84.25	50.70	53.49	40.91	39.00

Tabelle 4.2: Berechnete Volatilitäten in Prozent 31.12.2012

Zuerst berechnen wir aus den Forward Rates (Tabelle 4.1), historischen Korrelationen [5] und aktuellen Swaption Volatilitäten [5] die Volatilitäten $\sigma_m(t)$ der LIBOR Forward Rates in Tabelle 4.2.

Folgend werden die $\ell_m(0)$ $m = 1, \dots, 5$ aus $\rho_{mn} = \ell_m(0)\ell_n(0)$, mit $\ell = \sqrt{\rho}$ in Tabelle 4.3 bestimmt.

	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5
1	1.00	0.89	0.76	0.64	0.54
2	0.00	0.45	0.65	0.77	0.84

Tabelle 4.3: Matrix der $\ell_m(0)$ $m = 1, \dots, 5$

Im nächsten Schritt berechnen wir $\lambda(t, T_m) = \sigma_m(t)\ell_m(t)$ in Tabelle 4.4.

Nun erfolgt die Simulation der Szenarien. In Tabelle 4.5 sind die Mittelwerte der Szenarien angegeben. Abbildung 4.1 enthält drei beispielhafte Szenarien.

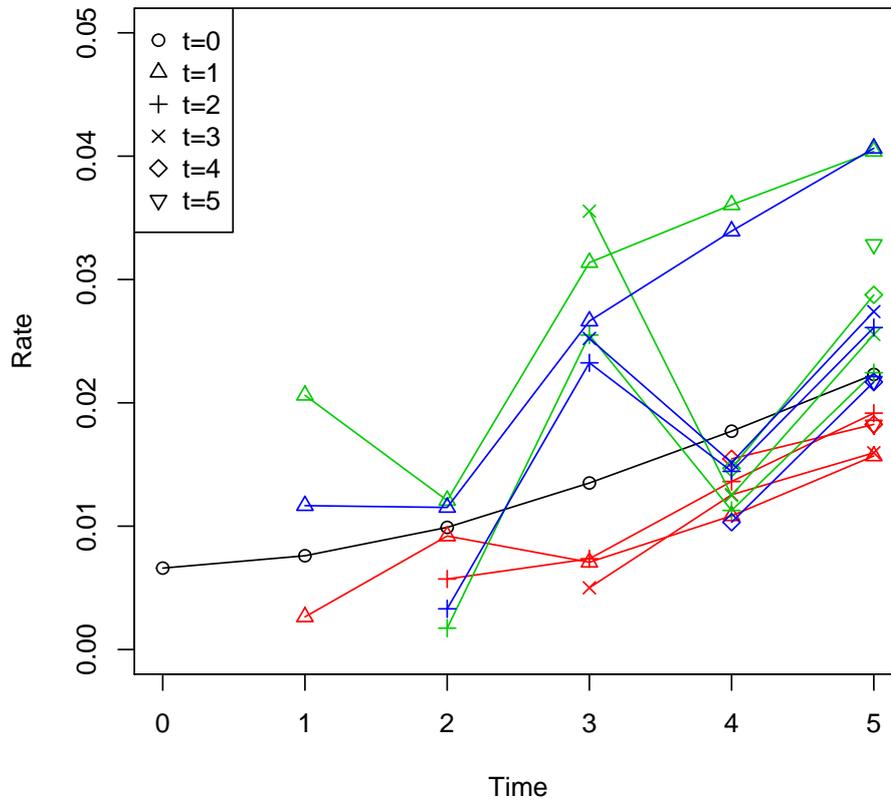


Abbildung 4.1: Drei Szenarien für die ersten fünf Jahre

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
1	0.96	0.12	0.64	0.50	0.38
2	0.00	0.06	0.55	0.61	0.60

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
1		0.86	0.08	0.32	0.14
2		0.43	0.07	0.39	0.22

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
1			0.48	0.11	0.16
2			0.42	0.13	0.24

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
1				0.18	0.09
2				0.22	0.14

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
1					0.08
2					0.13

Tabelle 4.4: $\lambda(t, T_m)$ zu den Zeitpunkten $t = 1, \dots, 5$

	$L_0(T)$	$L_1(T)$	$L_2(T)$	$L_3(T)$	$L_4(T)$	$L_5(T)$
T_0	0.66	0.76	0.99	1.35	1.77	2.23
T_1		0.76	0.99	1.38	1.83	2.32
T_2			1.01	1.38	1.84	2.34
T_3				1.40	1.85	2.36
T_4					1.85	2.37
T_5						2.37

Tabelle 4.5: Mittelwerte der Szenarien für die ersten fünf Jahre

4.2 30-jähriger Zeitraum

Es fehlt in [5] für eine über das fünfte Jahr hinaus gehende Simulation eine erhebliche Anzahl an Werten.

Um trotzdem eine Simulation für 30 Jahre durchführen zu können, werden die fehlenden Werte linear interpoliert.

Anschließend wird die Volatilitätsmatrix 4.6 berechnet. Wie bereits in Anmerkung 3.3.2.4 thematisiert, können bereits kleine Unschärfen erhebliche Auswirkungen haben. Leider sehen wir auch hier unerklärlich hohe bzw. negative Werte. Dieses Problems werden wir uns im Abschnitt 4.4 annehmen.

Nun folgt die Berechnung der $\ell_m(0)$ $m = 1, \dots, 30$. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.7 angegeben.

Nach der Bestimmung von $\lambda(t, T_m)$ erfolgt die Simulation der Szenarien und deren Darstellung in Abbildung 4.2, Abbildung 4.3 und Abbildung 4.4.

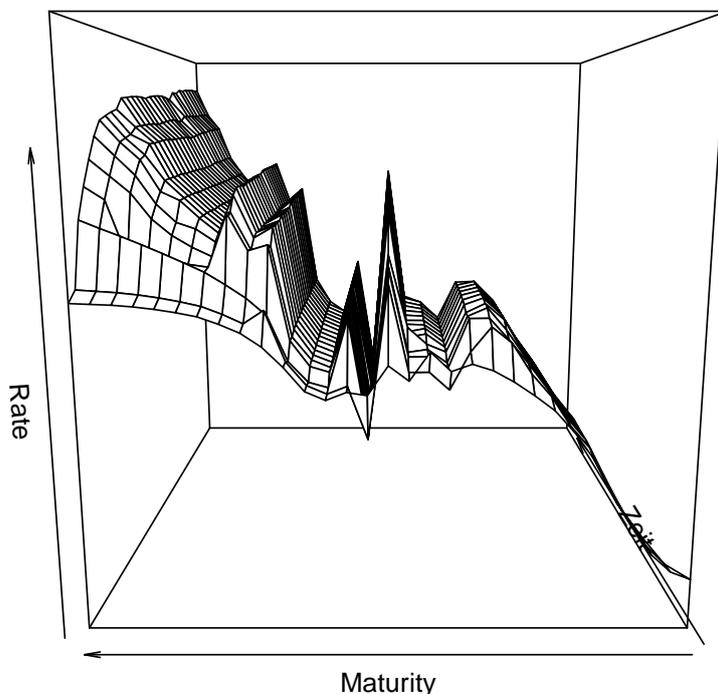


Abbildung 4.2: Dreidimensionale Darstellung der Veränderung der Szenarienmittelwerte über die Zeit

Anmerkung 4.2.0.7 (Non-Smoothness) Ein Problem stellt die aus regulatorischen Gründen verwendete EIOPA Zinskurve aus Tabelle 4.1 dar. Einerseits ist diese Kurve nicht glatt und weicht andererseits für den 31.12.2012 deutlich von am Markt beobachteten Werten ab. Aus diesem Grund ist davon auszugehen, dass dieser Umstand zu den Zacken Phänomenen in Abbildung 4.2 bzw. den gestauchten Boxplots in Abbildung 4.3 entscheidend beiträgt. Eine genauere Betrachtung findet sich im Abschnitt 4.4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$L(t, T_1)$	96.04														
$L(t, T_2)$	13.60	96.04													
$L(t, T_3)$	84.87	10.62	64.00												
$L(t, T_4)$	78.79	50.12	16.56	28.09											
$L(t, T_5)$	70.97	25.71	28.61	16.74	15.21										
$L(t, T_6)$	-6.79	30.91	25.89	13.32	11.38	11.56									
$L(t, T_7)$	64.15	12.62	23.03	17.26	11.04	10.00	8.41								
$L(t, T_8)$	80.63	28.27	13.41	10.33	13.36	9.48	7.86	7.29							
$L(t, T_9)$	108.48	-10.30	33.43	28.32	4.43	10.17	6.99	7.12	6.25						
$L(t, T_{10})$	93.86	18.87	26.79	1.83	9.15	10.05	5.56	6.76	6.41	5.29					
$L(t, T_{11})$	17.17	96.28	-10.55	-4.22	18.70	8.00	10.25	5.89	6.56	5.29	5.29				
$L(t, T_{12})$	-80.33	61.27	-24.03	44.89	1.70	5.01	9.17	8.79	6.17	5.29	5.29	5.29			
$L(t, T_{13})$	-128.91	27.18	40.39	-17.03	23.85	15.84	-3.31	8.48	7.41	5.30	5.29	5.29	5.29		
$L(t, T_{14})$	-214.95	15.55	6.05	41.58	-20.28	13.46	15.59	-0.10	7.84	4.53	6.07	5.29	5.29	5.29	
$L(t, T_{15})$	-263.94	8.98	1.91	8.14	19.62	-1.17	2.98	16.68	4.20	4.92	4.27	6.79	5.29	5.29	5.29
$L(t, T_{16})$	291.32	-6.19	-6.85	2.76	6.20	7.88	7.65	-2.35	19.23	4.84	5.01	3.74	7.56	5.29	5.29
$L(t, T_{17})$	3.92	130.76	-12.73	-1.05	4.85	7.01	7.78	7.40	-6.03	20.85	4.95	5.10	3.71	8.36	5.13
$L(t, T_{18})$	2.55	1.55	77.82	-6.14	3.00	5.77	7.91	7.52	7.18	-7.56	20.79	5.03	5.23	3.14	8.36
$L(t, T_{19})$	1.54	-7.00	57.69	13.66	1.55	4.74	8.03	7.64	7.29	5.09	-6.35	20.42	5.16	5.28	3.98
$L(t, T_{20})$	0.78	-12.97	63.22	-8.00	17.87	3.93	8.16	7.76	7.41	5.02	5.20	-5.42	18.43	5.20	5.40
$L(t, T_{21})$	169.10	-21.00	69.98	-11.63	19.56	2.89	8.29	7.89	7.54	5.97	4.09	5.26	-3.81	19.05	5.32
$L(t, T_{22})$	19.84	42.75	78.11	-16.23	21.60	15.40	-4.43	8.02	7.66	6.25	5.62	3.11	5.40	-4.84	18.51
$L(t, T_{23})$	19.83	44.27	87.40	-21.67	23.93	17.02	5.19	-3.95	7.79	6.59	5.86	5.30	2.38	5.40	-1.64
$L(t, T_{24})$	19.83	45.78	2.36	41.92	26.48	18.79	5.02	5.01	-3.62	6.99	6.14	5.49	4.99	0.94	6.25
$L(t, T_{25})$	19.83	47.26	-5.95	49.32	29.29	20.73	4.82	4.82	4.84	-3.61	6.49	5.74	5.12	4.63	0.88
$L(t, T_{26})$	19.84	48.70	-15.27	57.41	18.22	35.18	4.61	4.61	4.63	4.99	-4.08	6.05	5.30	4.74	6.23
$L(t, T_{27})$	19.85	50.10	-25.62	66.23	18.68	15.79	26.63	4.39	4.42	5.23	4.40	-5.02	5.52	4.91	6.74
$L(t, T_{28})$	19.86	51.45	-37.05	75.79	19.13	16.16	8.58	25.49	4.20	5.51	4.59	3.87	-5.12	5.13	7.33
$L(t, T_{29})$	19.87	52.76	34.03	24.93	19.56	16.53	8.69	8.26	24.58	5.83	4.80	4.02	3.26	-6.89	8.00
$L(t, T_{30})$	19.88	54.01	34.81	25.47	19.98	16.88	8.80	8.36	7.99	26.05	5.05	4.21	3.34	2.77	-3.21
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$L(t, T_{16})$	5.29														
$L(t, T_{17})$	5.47	5.29													
$L(t, T_{18})$	5.58	5.66	5.29												
$L(t, T_{19})$	7.67	6.04	5.85	5.29											
$L(t, T_{20})$	4.35	6.88	6.52	6.04	5.29										
$L(t, T_{21})$	5.44	4.84	6.13	7.03	6.23	5.29									
$L(t, T_{22})$	5.34	5.52	5.24	5.29	7.54	6.42	5.29								
$L(t, T_{23})$	17.26	5.42	5.57	5.77	5.43	7.15	6.62	5.29							
$L(t, T_{24})$	-0.77	14.69	5.47	5.66	6.25	5.64	6.76	6.81	5.29						
$L(t, T_{25})$	6.25	1.31	12.21	5.56	6.25	6.25	5.85	6.37	7.01	5.29					
$L(t, T_{26})$	-2.35	6.25	3.49	9.00	8.17	4.40	6.25	6.05	5.97	7.30	5.11				
$L(t, T_{27})$	5.57	-5.18	6.25	6.25	6.90	9.30	2.60	6.25	6.25	6.89	4.93				
$L(t, T_{28})$	6.07	4.73	-8.85	6.25	10.44	3.44	10.40	0.82	6.25	6.95	6.00	6.49	4.75		
$L(t, T_{29})$	6.65	5.12	3.92	-11.91	3.50	16.83	0.16	11.51	-0.92	7.21	6.63	5.75	6.10	4.58	
$L(t, T_{30})$	7.31	5.59	4.26	3.05	-7.41	-5.15	22.88	-3.00	12.58	-0.26	5.67	6.32	5.51	5.72	4.41

Tabelle 4.6: Berechnete Volatilitäten in Prozent

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1.00	0.89	0.76	0.64	0.54	0.46	0.40	0.35	0.31	0.35	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41
2	0.00	0.45	0.65	0.77	0.84	0.89	0.92	0.94	0.95	0.94	0.93	0.93	0.92	0.92	0.91
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0.41	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42
2	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91

Tabelle 4.7: Matrix der $\ell_m(0)$ $m = 1, \dots, 30$

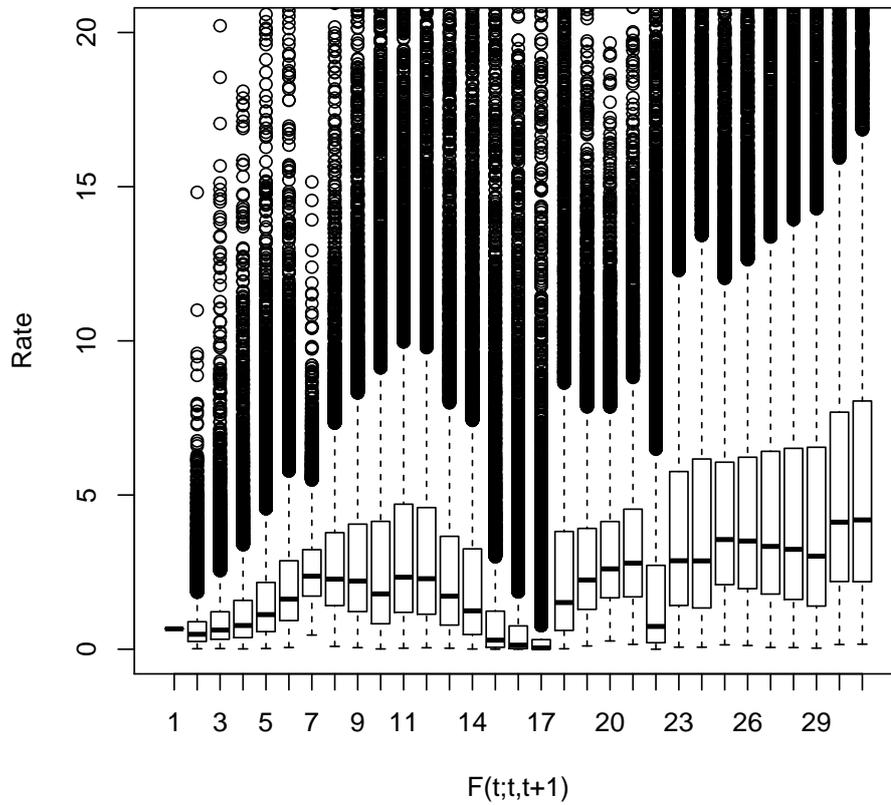


Abbildung 4.3: Boxplot der Szenarien über die Zeit

4.2.1 Floor Bewertung

Das Ziel dieser Arbeit ist, den Zusammenhang zwischen Zinstrukturmodell und Lebensversicherung herzustellen. Wie im Abschnitt 2.4 sollen nun Floors mit verschiedenen Strikes in Tabelle 4.8 bewertet werden.

Zusätzlich sind die Entwicklung der Floorletpreise, der kumulierten Floorletpreise sowie die Monte Carlo Fehler der Floorlets in Abbildung 4.5 enthalten. Erwartungsgemäß steigen die Werte mit steigenden Strikes an.

4.2.2 Veränderung der $w_m(t)$

In Abbildung 4.6 sehen wir, dass im vorliegenden Fall die Veränderung der $w_m(t)$ minimal ist, wie im Abschnitt 3.3.1 dargestellt.

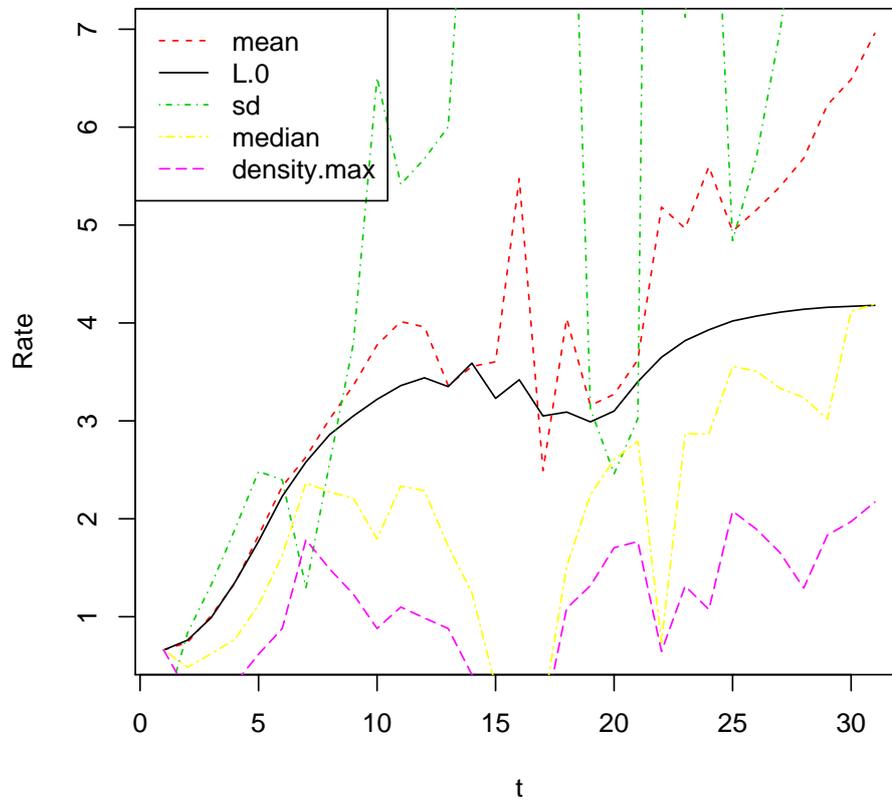


Abbildung 4.4: Ursprüngliche Zinskurve L_0 vs. Szenarienkennzahlen

	1-31	1-16	1-4	1-6	6-11	11-16	16-21	21-26	26-31
k=1%	416.12	290.81	113.10	143.19	29.52	118.09	77.43	36.21	11.67
k=1.5%	859.21	600.85	224.68	298.94	84.15	217.76	144.02	79.45	34.89
k=2%	1422.75	985.91	349.52	482.03	170.35	333.53	228.57	137.23	71.04
k=2.5%	2083.37	1427.74	481.80	682.02	284.44	461.29	328.60	207.98	119.04
k=3%	2818.99	1911.44	618.40	892.79	420.60	598.05	441.11	289.52	176.91
k=3.5%	3613.26	2426.36	757.72	1111.00	573.64	741.72	563.76	380.06	243.07
k=4%	4452.99	2964.50	898.82	1334.27	739.31	890.92	694.41	477.87	316.21

Tabelle 4.8: Floorpreise in BP für verschiedene Strikes (k) und Laufzeiten in Jahren

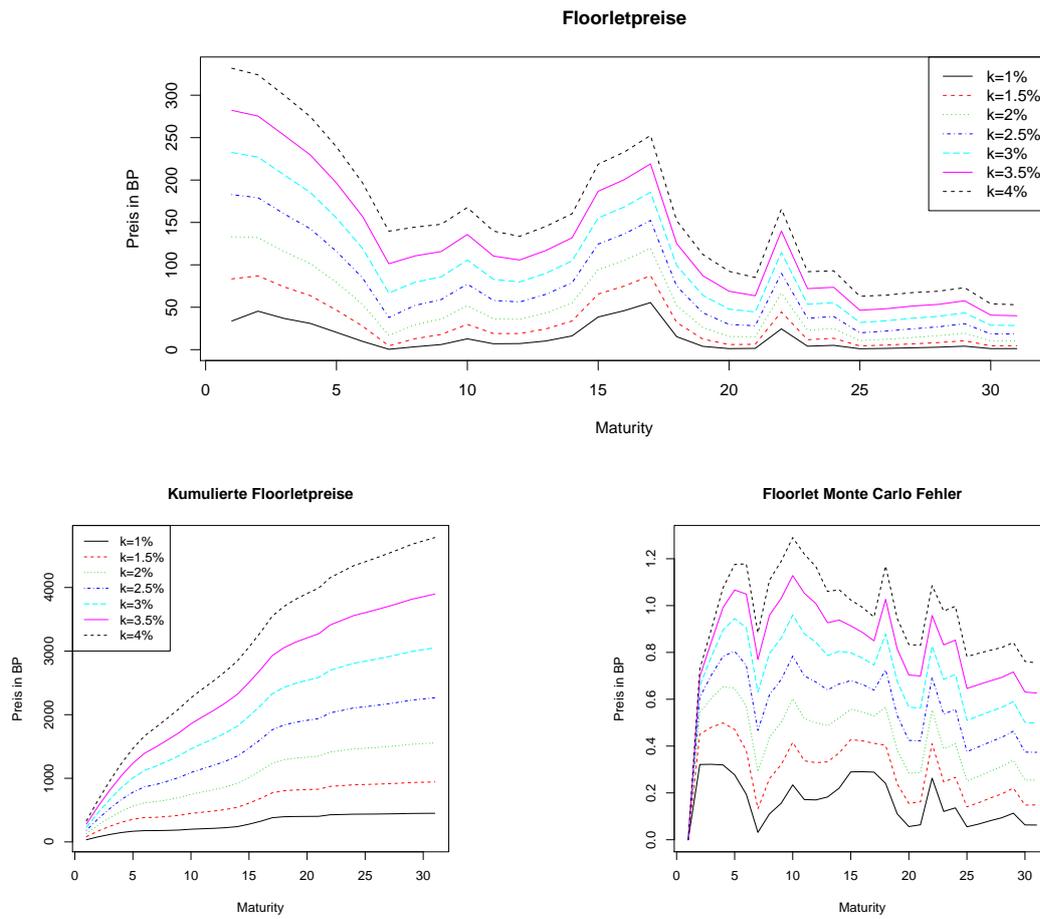


Abbildung 4.5: Floorlet Preise

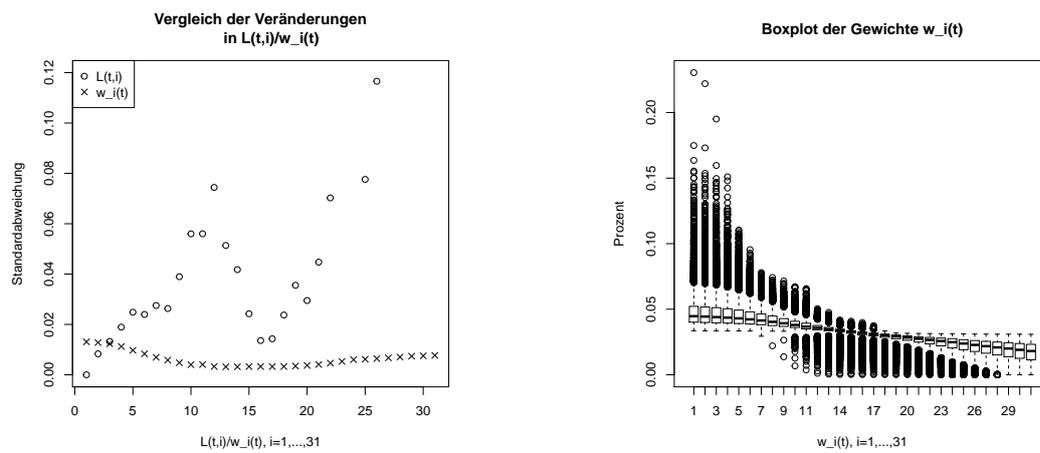


Abbildung 4.6: Vergleich von $L(t,i)$ und $w_i(t)$

4.3 30-jähriger Zeitraum mit interpolierten berechneten Volatilitäten

Die in Tabelle 4.6 angeführten Volatilitäten sind teilweise negativ bzw. zu hoch. Aus diesem Grund interpolieren wir alle negativen sowie 100% überschreitenden Werte spaltenweise linear.

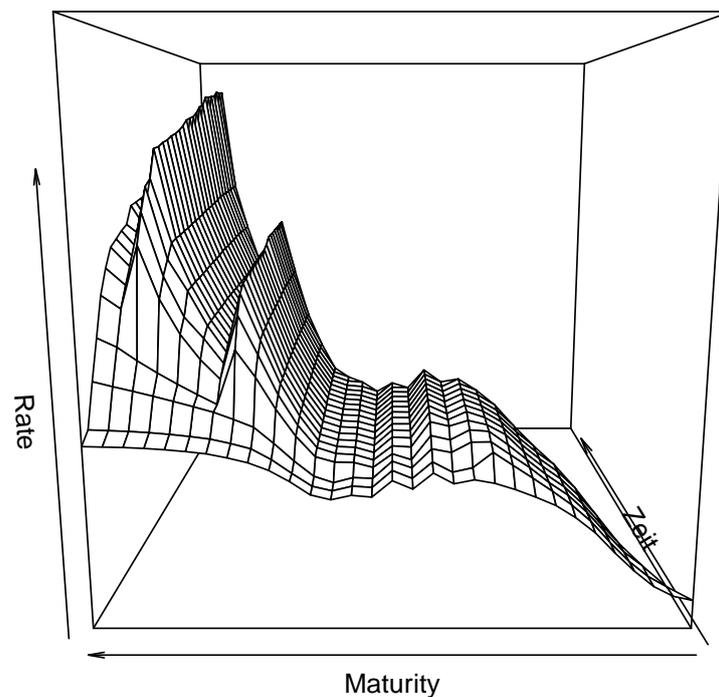


Abbildung 4.7: Dreidimensionale Darstellung der Veränderung der Szenarienmittelwerte, mit interpolierten berechneten Volatilitäten, über die Zeit

4.3.1 Floor Bewertung

Die Floors mit verschiedenen Strikes sind in Tabelle 4.9 enthalten.

Zusätzlich finden sich die Entwicklung der Floorletpreise, der kumulierten Floorletpreise und die Monte Carlo Fehler der Floorlets in Abbildung 4.10

4.3.2 Veränderung der $w_m(t)$

In Abbildung 4.11 sehen wir, dass im vorliegenden Fall die Veränderung der $w_m(t)$ minimal ist, wie im Abschnitt 3.3.1 dargestellt.

Anmerkung 4.3.2.1 (Interpolierte berechnete Volatilitäten) *Durch die Interpolation der berechneten Volatilitäten können wir die im Abschnitt 4.2 auftretenden sowie in der Anmerkung 4.2.0.7 beschriebenen Probleme reduzieren.*

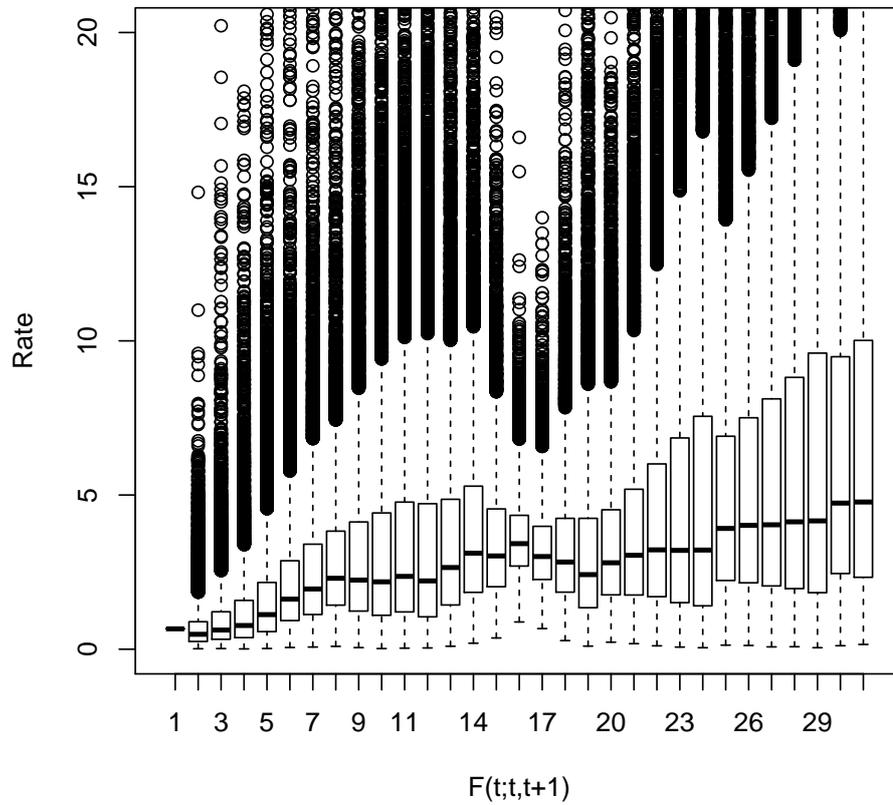


Abbildung 4.8: Boxplot der Szenarien, mit interpolierten berechneten Volatilitäten, über die Zeit

Allerdings führt diese Methode zu hohen Werten bei langen Maturities und wäre methodisch zu hinterfragen.

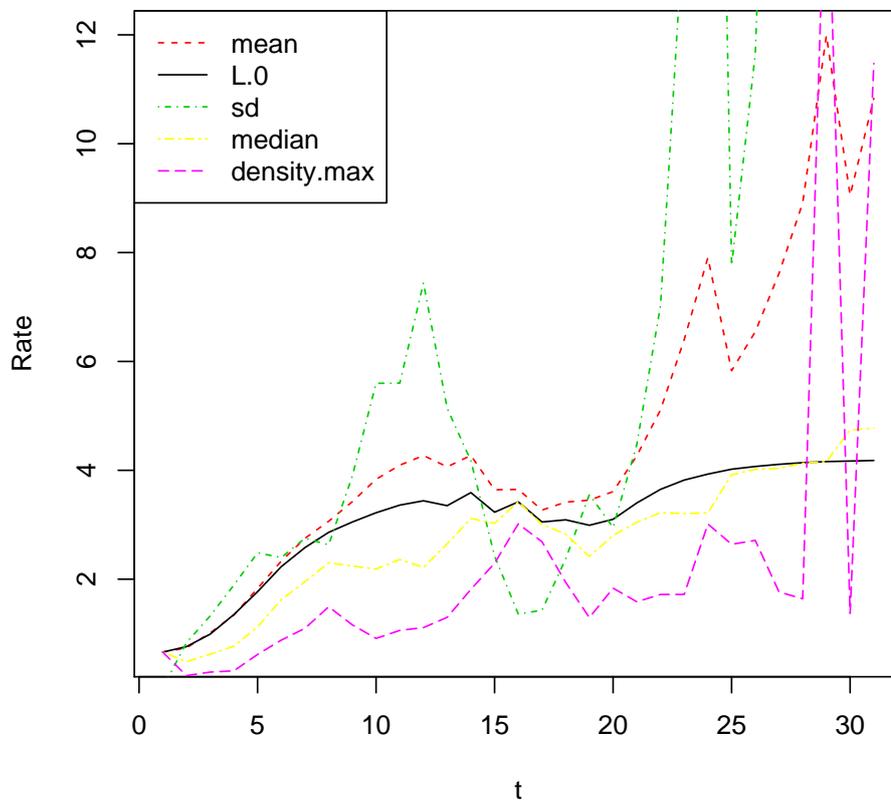


Abbildung 4.9: Ursprüngliche Zinskurve L_0 vs. Szenarienkennzahlen mit interpolierten berechneten Volatilitäten

	1-31	1-16	1-4	1-6	6-11	11-16	16-21	21-26	26-31
k=1%	222.49	189.09	113.10	143.19	30.82	15.07	7.82	15.12	10.46
k=1.5%	543.49	436.28	224.68	298.94	91.63	45.72	30.95	44.26	32.00
k=2%	991.31	762.28	349.52	482.03	183.59	96.66	74.85	88.43	65.75
k=2.5%	1547.98	1151.52	481.80	682.02	301.09	168.42	140.26	145.86	110.35
k=3%	2195.41	1591.26	618.40	892.79	437.83	260.65	225.27	214.77	164.10
k=3.5%	2917.29	2071.69	757.72	1111.00	589.33	371.36	326.97	293.13	225.50
k=4%	3697.73	2584.08	898.82	1334.27	752.54	497.26	441.34	379.27	293.04

Tabelle 4.9: Floorpreise in BP für verschiedene Strikes (k) und Laufzeiten in Jahren mit interpolierten berechneten Volatilitäten

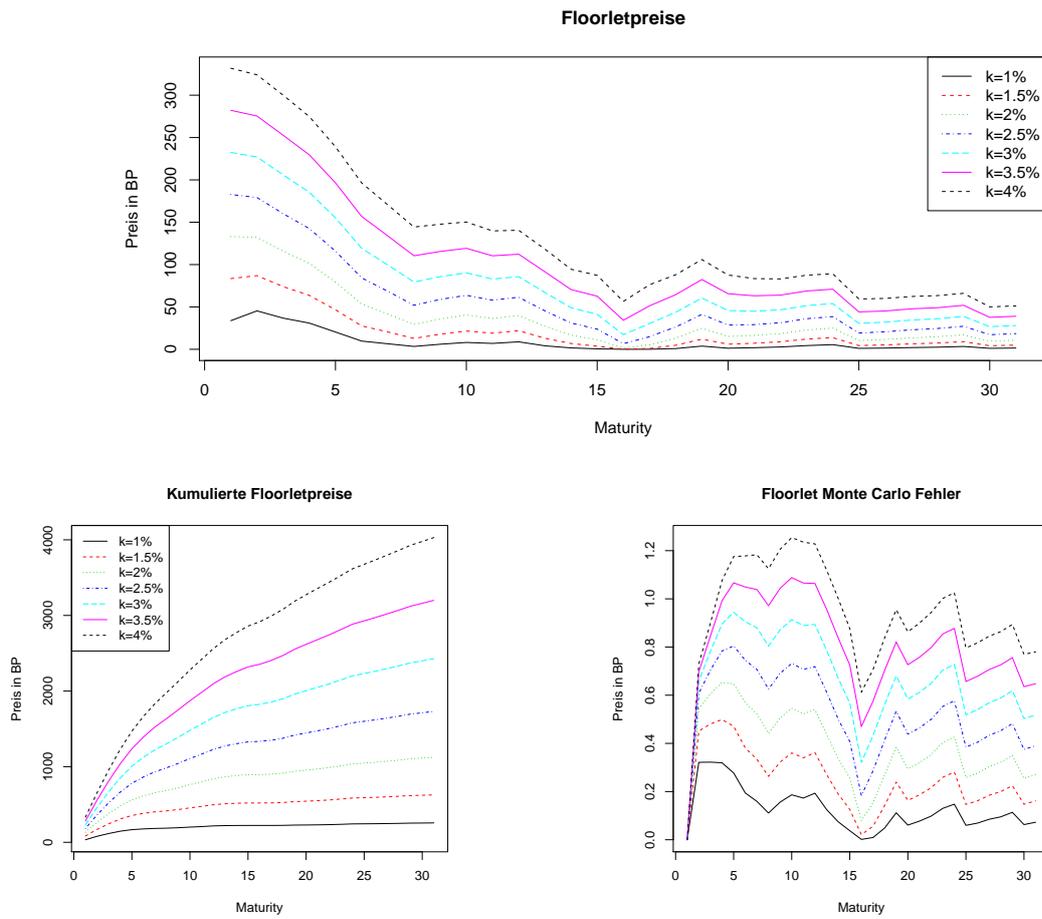


Abbildung 4.10: Floorlet Preise mit interpolierten berechneten Volatilitäten

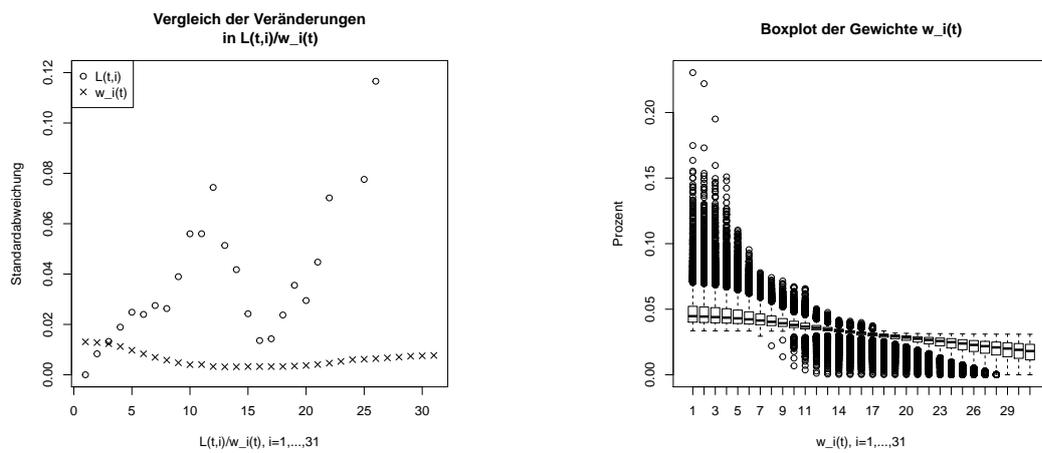


Abbildung 4.11: Vergleich von $L(t, i)$ und $w_i(t)$ mit interpolierten berechneten Volatilitäten

4.4 30-jähriger Zeitraum mit glatter monoton ansteigender Zinskurve

In diesem Abschnitt wollen wir die Zinskurve 4.1 glätten und monoton ansteigen lassen. Im Übrigen gelten die selben Voraussetzungen wie im Abschnitt 4.2.

Dabei erhalten wir die in Tabelle 4.10 angeführten Werte.

Anmerkung 4.4.0.2 (Glatte monoton ansteigende Zinskurve) *Wir können in Abbildung 4.12, 4.13 und 4.14 erkennen, dass die Glättung der Zinskurve nur geringe Auswirkung auf die Szenarien hat. Das erscheint zunächst überraschend, da auf den ersten Blick die nicht glatten Stellen mit jenen Regionen übereinstimmen, in denen auch die Szenarien Auffälligkeiten zeigen.*

Das Problem liegt darin, dass die von [5] zur Verfügung gestellten Korrelationen bereits nach fünf Zeitschritten Korrelationen von 100% aufweisen. Das passt jedoch nicht mit der EIOPA Zinskurve zusammen, die nach einem starken Anstieg in den ersten zehn Zeitschritten plötzlich abflacht.

L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}
0.66	0.76	0.99	1.35	1.77	2.23	2.58	2.86	3.05	3.22	3.36	3.44
L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{16}	L_{17}	L_{18}	L_{19}	L_{20}	L_{21}	L_{22}	L_{23}	L_{24}
3.52	3.59	3.63	3.67	3.71	3.75	3.79	3.82	3.86	3.90	3.94	3.98
L_{25}	L_{26}	L_{27}	L_{28}	L_{29}	L_{30}	L_{31}	L_{32}	L_{33}	L_{34}	L_{35}	
4.02	4.07	4.11	4.14	4.16	4.17	4.18	4.19	4.19	4.19	4.20	

Tabelle 4.10: Interpolierte LIBOR Rates in Prozent, 31.12.2012

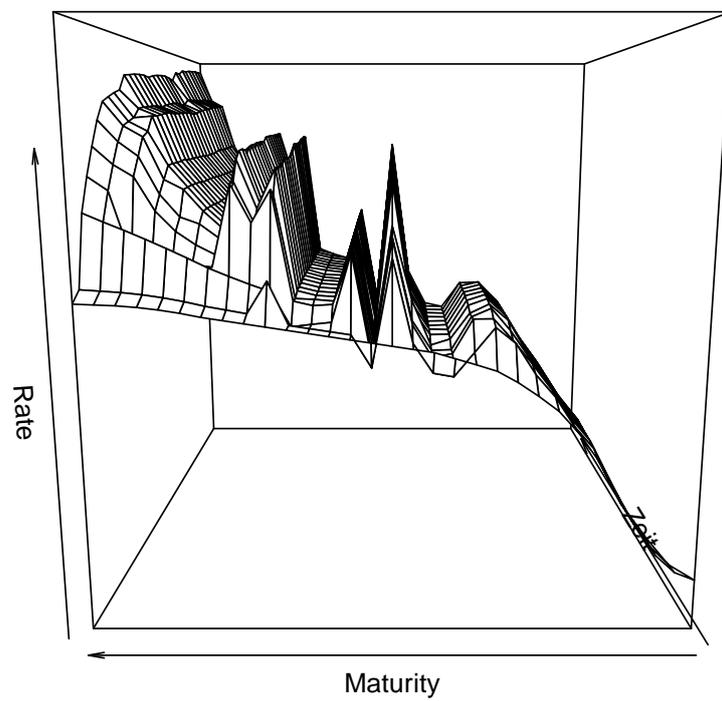


Abbildung 4.12: Dreidimensionale Darstellung der Veränderung der Szenarienmittelwerte, mit interpolierten berechneten Volatilitäten, über die Zeit

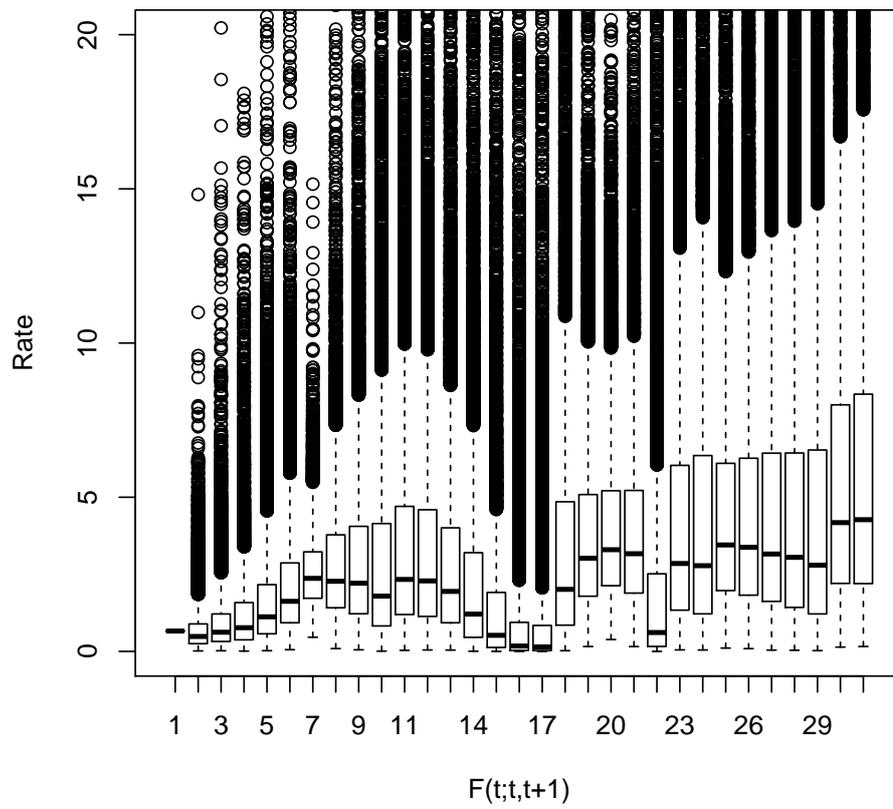


Abbildung 4.13: Boxplot der Szenarien, mit glatter monoton ansteigender Zinskurve, über die Zeit

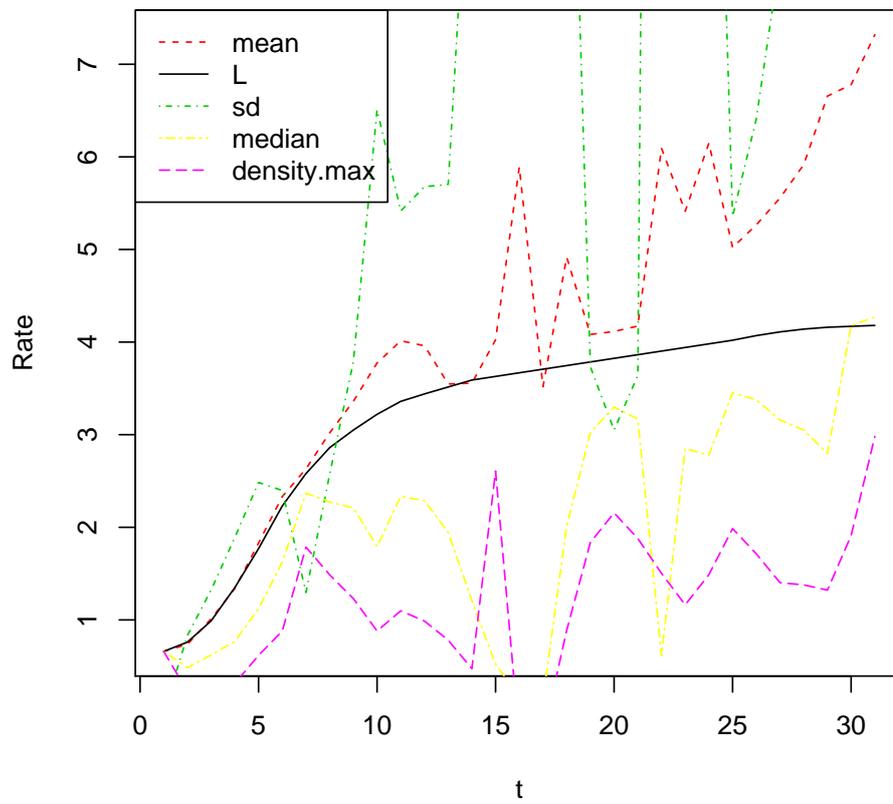


Abbildung 4.14: Glatte monoton ansteigender Zinskurve L vs. Szenarienkennzahlen

Kapitel 5

Marktkonsistente Bewertung in der klassischen Lebensversicherung

Im Abschnitt 2.2 wird das Modell einer klassischen Erlebensversicherung vorgestellt, bei dem die Versicherung am Ende jedes Jahres Überschüsse über der Mindestverzinsung ausschüttet und Fehlbeträge ausgleicht.

Im Anschluss ist im Abschnitt 2.3 dokumentiert, dass das resultierende Risiko des Versicherungsunternehmens als Floor repliziert werden kann.

Folgend wurde im Abschnitt 2.4 eine Bewertungsmöglichkeit dieses Floors mit Hilfe eines LIBOR Market Modells gezeigt.

Umsetzung und Kalibrierung des LIBOR Market Modells sind in den folgenden Kapiteln dokumentiert, wobei damit zusammenhängende Problemstellungen identifiziert werden.

In den Tabellen 4.8 und 4.9 sind Floorpreise für verschiedene Strikes und Zeitspannen angeführt. Die Strikes k entsprechen den diversen möglichen Garantiezinsen der untersuchten Erlebensversicherung sowie die zeitlichen Perioden den möglichen Versicherungslaufzeiten.

Bei Betrachtung der Perioden 11-16 bzw. 16-21 ist erkennbar, dass die Werte in Tabelle 4.8 teilweise ein Vielfaches jener aus Tabelle 4.9 darstellen. In dem Zusammenhang erscheint signifikant, dass 4.9 durch Interpolation der berechneten Volatilitäten exakt für diese Zeiträume die plausibleren Szenarien liefert. Es erscheint in dem Zusammenhang jedoch denkbar, dass diese signifikanten Szenarien gemäß Tabelle 4.9 unter dem Aspekt von Solvency II den Versicherungssektor zu geringeren Risikovorsorgen motivieren könnten.

Kapitel 6

R-Code

6.1 Beispiel 3.1.0.1

6.1.1 Funktion

```
> #LMM mit perfekt korrelierten Libor Forward Rates
> # L(t,T_m) ... Forward Libor Rate festgelegt zur Zeit
> #t für das Intervall [T_m, T_m+delta]
> # m in 0...M (Index, keine Jahreszahl)
> # delta in Jahren
> # K ... Simulation bis T_K
> # S ... Anzahl der Simulationen
>
> lmm.pc<-function(L.0,lambda,K,M,S,delta){
+   set.seed(1)
+   L <- array(dim=c(K+1, M+1, S))
+   rownames(L) <- paste("T", 0:K, sep="")
+   colnames(L) <- paste(paste("L", 0:M, sep=""), "(T)", sep="")
+   L[1,,]<-L.0
+   for(s in 1:S){
+     for(k in 1:K){
+       W<-rnorm(1,0,1)
+       for(m in k:M){
+         alpha<-sum(delta*L[k-1+1,(k+1):(m+1),s]*lambda[k:m-k+1]
+           *lambda[m-k+1]/(1+delta*L[k+1-1,(k+1):(m+1),s]))
+         -lambda[m-k+1]^2/2
+         L[k+1,m+1,s]<-L[k+1-1,m+1,s]*exp(alpha*delta
+           +sqrt(delta)*lambda[m-k+1]*W)
+       }
+     }
+   }
+   return(L)
+ }
> L.0 <- c(0.01, 0.02, 0.03)
> lambda <- c(0.2, 0.3)
> K <- 2
> M <- 2
> S <- 8
> delta <- 1
> lmm.pc<-lmm.pc(L.0, lambda, K, M, S, delta)
```

6.1.2 Abbildung 3.1

```
> plot(c(0,1,2), lmm.pc[1,,1], type="l", xlim=c(0,2),
+      ylim=c(0,0.05),xlab="Zeit", ylab="Prozent")
> points(c(0,1,2), lmm.pc[1,,1], pch=1, col=1)
> for(s in 1:S) {
+   lines(c(1,2), lmm.pc[2,2:3,s], type="l", col=s+1)
+   points(c(1,2), lmm.pc[2,2:3,s], pch=2, col=s+1)
+   points(2, lmm.pc[3,3,s], col=s+1, pch=4)
+ }
> legend("topleft",c("t=0","t=1","t=2"),pch=c(1,2,4))
```

6.2 Beispiel 3.1.0.2

6.2.1 Funktion

```
> lmm.uc<-function(L.0,lambda,K,M,S,delta){
+   set.seed(1)
+   L <- array(dim=c(K+1, M+1, S))
+   rownames(L) <- paste("T", 0:K, sep="")
+   colnames(L) <- paste(paste("L", 0:M, sep=""),
+                        "(T)", sep="")
+   L[1,,]<-L.0
+   p <- dim(lambda)[2]
+   for(s in 1:S){
+     for(k in 1:K){
+       W<-rnorm(p,0,1)
+       for(m in k:M){
+         alpha<-sum(delta*L[k-1+1,(k+1):(m+1),s]*
+                   c(lambda[k:m-k+1,1:p]%%lambda[m-k+1,1:p])/
+                   (1+delta*L[k+1-1,(k+1):(m+1),s]))
+         -sum(lambda[m-k+1,1:p]^2/2)
+         L[k+1,m+1,s]<-L[k+1-1,m+1,s]*
+           exp(alpha*delta+sqrt(delta)*
+             sum(lambda[m-k+1,1:p]*W))
+       }
+     }
+   }
+   return(L)
+ }
> L.0 <- c(0.01, 0.02, 0.03)
> lambda <- matrix(c(0.2, 0, 0, 0.3), nrow=2)
> K <- 2
> M <- 2
> S <- 8
> delta <- 1
> lmm.uc<-lmm.uc(L.0, lambda, K, M, S, delta)
```

6.2.2 Abbildung 3.2

```
> plot(c(0,1,2), lmm.uc[1,,1], type="l", xlim=c(0,2),
+      ylim=c(0,0.05),
+      xlab="Zeit", ylab="Prozent")
> points(c(0,1,2), lmm.uc[1,,1], pch=1, col=1)
> for(s in 1:S) {
```

```

+ lines(c(1,2), lmm.uc[2,2:3,s], type="l", col=s+1)
+ points(c(1,2), lmm.uc[2,2:3,s], pch=2, col=s+1)
+ points(2, lmm.uc[3,3,s], col=s+1, pch=4)
+ }
> legend("topleft",c("t=0","t=1","t=2"),pch=c(1,2,4))

```

6.3 Abschnitt 3.2

6.3.1 Sigma Approximation

```

> cap.value<-0.0025
> k<-0.035
> L<-c()
> L[1]<-0.02791
> L[2]<-0.03067
> L[3]<-0.03067
> P<-c()
> P[4]<-(1/(1+0.5*0.04228))*(1/(1+0.5*0.02791))*(1/(1+0.5*0.03067))*(1/(1+0.5*0.0306))
> P[3]<-(1/(1+0.5*0.04228))*(1/(1+0.5*0.02791))*(1/(1+0.5*0.03067))
> P[2]<-(1/(1+0.5*0.04228))*(1/(1+0.5*0.02791))
> t<-0
> delta<-0.5
> T<-seq(from = 0.5, to = 2, by = 0.5)
> A<-0; for(i in (2:4)) A<-A+delta*P[i]*(L[i-1]+k)*(sqrt(T[i-1]-t)/(4*sqrt(pi)))
> B<-0; for(i in (2:4)) B<-B+delta*P[i]*(L[i-1]-k)/2; B<-B-cap.value
> C<-0; for(i in (2:4)) C<-C+delta*P[i]*(L[i-1]-k)*log(L[i-1]/k)/(2*sqrt(pi*(T[i-1]-t)))
> sigma.approx<-(-B+sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A)
> sigma.approx

```

6.3.2 Numerische Berechnung

```

> Cap.eval<-function(sigma){
+   Cap.val<-0
+   for(i in (2:4)){
+     d1<-(log(L[i-1]/k)+0.5*sigma^2*(T[i-1]-t))/(sigma*sqrt(T[i-1]-t))
+     d2<-(log(L[i-1]/k)-0.5*sigma^2*(T[i-1]-t))/(sigma*sqrt(T[i-1]-t))
+     Cap.val<-Cap.val+delta*P[i]*(L[i-1]*pnorm(d1) - k*pnorm(d2))
+   }
+   return(Cap.val-cap.value)
+ }
> uniroot(Cap.eval,c(sigma.approx-0.5*abs(sigma.approx),
+                   sigma.approx+0.5*abs(sigma.approx)))$root

```

6.4 Beispiel 3.3.2.1

6.4.1 Tabelle 3.4

```

> require("xtable")
> L.brigo<-t(matrix(c(0.04632,0.050171,0.05222,0.054595,0.056231, 0.057006,
+                   0.057699, 0.05691, 0.057746,0.058399),ncol=1,nrow=10))
> rownames(L.brigo) <- c("$L$")
> colnames(L.brigo) <- c("$T_1$", "$T_2$", "$T_3$", "$T_4$", "$T_5$", "$T_6$",
+                       "$T_7$", "$T_8$", "$T_9$", "$T_{10}$")
> print.L.brigo<-xtable(L.brigo*100,caption="LIBOR Rates in Prozent aus
+                       \\cite[Abschnitt 7.6]{brigo}, 1. Februar 2002\\label{tab:1}")
> print(print.L.brigo,sanitize.text.function = function(x){x})

```

6.4.2 Tabelle 3.5

```
> sigma.swp.brigo<-t(0.01*matrix(
+ c(17.9,16.5,15.3,14.4, 13.7, 13.2, 12.8, 12.5, 12.3, 12,
+ 15.4,14.2,13.6,13.0, 12.6, 12.2, 12.0, 11.7, 11.5, NA,
+ 14.3,13.3,12.7,12.2, 11.9, 11.7, 11.5, 11.3, NA, NA,
+ 13.6,12.7,12.1,11.7, 11.4, 11.3, 11.1, NA, NA, NA,
+ 12.9,12.1,11.7,11.3, 11.1, 10.9, NA, NA, NA, NA,
+ 12.5,11.8,11.4,10.95,10.75, NA, NA, NA, NA, NA,
+ 12.1,11.5,11.1,10.6, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
+ 11.8,11.2,10.83,NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
+ 11.5,10.9, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
+ 11.2,NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA)
+ ,ncol=10,nrow=10))
> rownames(sigma.swp.brigo) <-
+ c("$1$", "$2$", "$3$", "$4$", "$5$", "$6$", "$7$", "$8$", "$9$", "$10$")
> colnames(sigma.swp.brigo) <-
+ c("$T_1$", "$T_2$", "$T_3$", "$T_4$", "$T_5$", "$T_6$", "$T_7$", "$T_8$",
+ "$T_9$", "$T_{10}$")
> print.sigma.swp.brigo<-
+ xtable(sigma.swp.brigo*100,
+ caption="ATM Swaption Volatilitäten, Spalten: Erstes Reset Date,
+ Zeilen: Laufzeit in Jahren, des Swaps \cite[Abschnitt 7.6]{brigo},
+ 1. Februar 2002 \label{tab:swp}")
> print(print.sigma.swp.brigo,sanitize.text.function = function(x){x})
```

6.4.3 Tabelle 3.6

```
> sigma.cpl.brigo<-as.matrix(t(c(0.178,0.185,0.163,0.155,0.152, 0.145,
+ 0.138, 0.134, 0.129, 0.125)))
> rownames(sigma.cpl.brigo) <- "Vol"
> colnames(sigma.cpl.brigo) <- c("$1$", "$2$", "$3$", "$4$", "$5$", "$6$", "$7$",
+ "$8$", "$9$", "$10$")
> print.sigma.cpl.brigo<-
+ xtable(sigma.cpl.brigo*100,caption="Caplet Volatilitäten in Prozent
+ \cite[Abschnitt 7.9]{brigo}, 1. Februar 2002 \label{tab:cpl}")
> print(print.sigma.cpl.brigo,sanitize.text.function = function(x){x})
> delta<-1
```

6.4.4 Funktion

```
> sigma.swp<-sigma.swp.brigo
> sigma.cpl<-sigma.cpl.brigo
> L<-L.brigo
> Cor.cal<-function(sigma.swp, sigma.cpl, L, delta){
+ l.L<-length(L)
+ c.swp<-dim(sigma.swp)[2]
+ p<-l.L-c.swp
+ L.inv<-1/(1+(delta*L[1]))
+ if(l.L>1){
+ for (i in (2:l.L)){
+ L.inv[i]<-(1/(1+delta*L[i]))
+ }
+ }
+ size<-c.swp
+ rho<-diag(1,nrow=size)
+ #Wählt die diagonale aus. d=2 ist die erste nebendiagonale
```

```

+ for (d in (2:(size))) {
+   #Wählt das Element der Diagonale aus, beginnend mit 0
+   for (e in (1:(size-d+1))) {
+     #Berechnung der Gewichte für spezifisches nu und mu
+     w<-c()
+     mu<-(p+e)
+     nu<-(p+d+e)
+     for (m in ((mu+1):(nu))) {
+       nenner<-0
+       for (z in ((mu+1):(nu))) {
+         nenner<-nenner+prod(L.inv[mu:(z-1)])
+       }
+
+       w[m]<-prod(L.inv[mu:(m-1)])/nenner
+     }
+     R.swap<-sum(w[(mu+1):(nu)]*L[(mu):(nu-1)])
+     b <- matrix(0,ncol=(nu-1-p),nrow=(nu-1-p))
+     for (k in (mu:(nu-1))) {
+       for (l in (mu:(nu-1))) {
+         b[k-p,l-p]<-(w[k+1]*w[l+1]*L[k]*L[l]
+           *sigma.cpl[k-p]*sigma.cpl[l-p]*delta*mu)/R.swap^2
+       }
+     }
+     #Beginn der Invertierung der Formel
+     part.sum<-0
+     for (dd in (1:(d-1))) {
+       for (ee in (e:(e+d-dd))) {
+         if (dd==1) {
+           part.sum<-part.sum+rho[dd+ee-1,ee]*b[dd+ee-1,ee]
+         }
+         else {
+           part.sum<-part.sum+2*rho[dd+ee-1,ee]*b[dd+ee-1,ee]
+         }
+       }
+     }
+     rho[d+e-1,e]<-(sigma.swp[nu-mu-p,mu-p]^2*mu-part.sum)/(2*b[d+e-1,e])
+   }
+ }
+ rho<-rho+t(rho)-diag(1,nrow=min(dim(rho)))
+
+ return(rho)
+ }

```

6.4.5 Tabelle 3.7

```

> rho<-Cor.cal(sigma.swp.brigo, sigma.cpl.brigo, L.brigo, delta)
> rownames(rho) <- paste(paste("$L_", 1:10, sep=""), "}$", sep="")
> colnames(rho) <- paste(paste("$L_", 1:10, sep=""), "}$", sep="")
> print.rho<-xtable(rho*100,caption="Berechnete Korrelationen $\rho$
+   in Prozent \\label{tab:rho}")
> print(print.rho,sanitize.text.function = function(x){x})

```

6.4.6 Tabelle 3.8

```
> require("xtable")
> sigma.swp.brigo.false<-
+ t(0.01*matrix(c(17.9,16.5,15.3,14.4, 13.7, 13.2, 12.8, 12.5, 12.3, 12,
+ 15.4,14.2,13.6,13.0, 12.6, 12.2, 12.0, 11.7, 11.5, NA,
+ 14.3,13.3,12.7,12.2, 11.9, 11.7, 11.5, 11.3, NA, NA,
+ 13.6,12.7,12.1,11.7, 11.4, 11.3, 11.1, NA, NA, NA,
+ 12.9,12.1,11.7,11.3, 11.1, 10.9, NA, NA, NA, NA,
+ 12.5,11.8,11.4,11.95,10.75, NA, NA, NA, NA, NA,
+ 12.1,11.5,11.1,10.6, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
+ 11.8,11.2,10.83,NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
+ 11.5,10.9, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
+ 11.2,NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA)
+ ,ncol=10,nrow=10))
> rho.f<-Cor.cal(sigma.swp.brigo.false, sigma.cpl.brigo, L.brigo, delta)
> rownames(rho.f) <- paste(paste("$L_{", 1:10, sep=""), "}$", sep="")
> colnames(rho.f) <- paste(paste("$L_{", 1:10, sep=""), "}$", sep="")
> print.rho.f<-xtable(rho.f*100,caption="Berechnete Korrelationen $\rho$
+ mit gestörten Daten (siehe Anmerkung \ref{anmf})
+ \label{tab:rho.f}")
> print(print.rho.f,sanitize.text.function = function(x){x})
```

6.5 Beispiel 3.4.0.2

6.5.1 Funktion

```
> sigma.swp<-sigma.swp.brigo
> L<-L.brigo
> rho<-rho.brigo
> delta<-1
> Vol.cal<-function(sigma.swp, rho, L, delta){
+ l.L<-length(L)
+ c.swp<-dim(sigma.swp)[2]
+ p<-l.L-c.swp
+ L.inv<-1/(1+(delta*L[1]))
+ if(l.L>1){
+ for (i in (2:l.L)){
+ L.inv[i]<-(1/(1+delta*L[i]))
+ }
+ }
+ size<-c.swp
+ vol<-(diag(c(sigma.swp[1,]),nrow=size)^2)
+ #Wählt die diagonale aus. d=2 ist die erste nebendiagonale
+ for (d in (2:(size))){
+ #Wählt das Element der Diagonale aus, beginnend mit 0
+ for(e in (1:(size-d+1))){
+ #Berechnung der Gewichte für spezifisches nu und mu
+ w<-c()
+ mu<-(p+e)
+ nu<-(p+d+e)
+ for (m in ((mu+1):(nu))){
+ nenner<-0
+ for (z in ((mu+1):(nu))){
+ nenner<-nenner+prod(L.inv[mu:(z-1)])
+ }
+ }
```

```

+
+     w[m]<-prod(L.inv[mu:(m-1)])/nenner
+   }
+   R.swap<-sum(w[(mu+1):(nu)]*L[(mu):(nu-1)])
+   b <- matrix(0,ncol=(nu-1-p),nrow=(nu-1-p))
+   for(k in (mu:(nu-1))){
+     for(l in (mu:(nu-1))){
+       b[k-p,l-p]<-(w[k+1]*w[l+1]*L[k]*L[l]
+         *rho[k-p,l-p]*delta)/R.swap^2
+     }
+   }
+   #Beginn der Invertierung der Formel
+   part.sum<-0
+   for (dd in (1:(d-1))){
+     for (ee in (e:(e+d-dd))){
+       if(dd==1){
+         part.sum<-part.sum+vol[dd+ee-1,ee]*b[dd+ee-1,ee]
+       }
+       else{
+         part.sum<-part.sum+2*vol[dd+ee-1,ee]*b[dd+ee-1,ee]
+       }
+     }
+   }
+   vol[d+e-1,e]<-(sigma.swp[nu-mu-p,mu-p]^2-part.sum)/(2*b[d+e-1,e])
+ }
+ }
+ vol[upper.tri(vol)]<-NA#t(vol)-diag(diag(vol),nrow=min(dim(vol)))
+
+
+ return(vol)
+ }

```

6.5.2 Tabelle 3.10

```

> vol<-Vol.cal(sigma.swp.brigo, rho.brigo, L.brigo, delta)
> rownames(vol) <- paste(paste("$L(t,T_{", 1:10, sep=""), "}")$, sep="")
> colnames(vol) <- paste(paste("$t=", 1:10, sep=""), "$", sep="")
> print.vol<-xtable(sqrt(vol)*100,caption="Berechnete Volatilitäten in
+   Prozent \\label{tab:vol}")
> print(print.vol,sanitize.text.function = function(x){x})

```

6.6 Beispiel 3.5.0.3

6.6.1 Regression

```

> b<-(1:10)
> formula=lm(log(vol[10,1:10])~1+b)
> summary(formula)
> v<-exp(coef(formula)[1])
> beta<-coef(formula)[2]

```

fig:linreg

6.6.2 Abbildung 3.3

```

> par(mfrow=c(2,2))
> plot(formula)

```

```

> plot(1:10,vol[10,],xlab="Time",ylab="Volatility",main="Gefittete
+      vs. tatsächliche Werte")
> timevalues <- seq(1, 10, 0.1)
> lines(timevalues,exp(coef(formula)[1])*exp(-coef(formula)[2]*(10-timevalues)))

```

6.7 Kapitel 4

6.7.1 Tabelle 4.1

```

> L.fma<-t(matrix(
+   c(0.0066, 0.0076, 0.0099, 0.0135, 0.0177, 0.0223, 0.0258, 0.0286, 0.0305,
+     0.0322, 0.0336, 0.0344, 0.0335, 0.0359, 0.0323, 0.0342, 0.0305, 0.0309,
+     0.0299, 0.0310, 0.0340, 0.0365, 0.0382, 0.0393, 0.0402, 0.0407, 0.0411,
+     0.0414, 0.0416, 0.0417, 0.0418, 0.0419, 0.0419, 0.0419, 0.0420),ncol=1,nrow=35))
> rownames(L.fma) <- c("$L$")
> colnames(L.fma) <- paste(paste("$L_{", 1:35, sep=""), "}$", sep="")
> print.L.fma<-xtable(as.matrix(t(L.fma[,1:12]*100)))
> print(print.L.fma,sanitize.text.function = function(x){x},
+       floating=FALSE,include.rownames=FALSE)
> print.L.fma<-xtable(as.matrix(t(L.fma[,13:24]*100)))
> print(print.L.fma,sanitize.text.function = function(x){x},
+       floating=FALSE,include.rownames=FALSE)
> print.L.fma<-xtable(as.matrix(t(L.fma[,25:35]*100)))
> print(print.L.fma,sanitize.text.function = function(x){x},
+       floating=FALSE,include.rownames=FALSE)

```

6.7.2 Tabelle 4.2

```

> delta<-1
> vol.fma<-Vol.cal(sigma.swp.fma[1:5,1:5], rho.fma[1:5,1:5], L.fma[2:6], delta)
> rownames(vol.fma) <- paste(paste("$L(t,T_{", 1:5, sep=""), "})$", sep="")
> colnames(vol.fma) <- paste(paste("$t=", 1:5, sep=""), "$", sep="")
> print.vol<-xtable(sqrt(vol.fma)*100,caption="Berechnete Volatilitäten
+      in Prozent 31.12.2012 \\label{tab:vol.fma}")
> print(print.vol,sanitize.text.function = function(x){x})

```

6.7.3 Tabelle 4.3

```

> require("mgcv")
> ell<-t(mroot(rho.fma)[1:5,])
> colnames(ell)<-paste(paste("$\\ell_{", 1:5, sep=""), "}$", sep="")
> print.ell<-
+   xtable(ell,
+   caption="Matrix der $\\ell_m(0) \\quad m=1, \\dotsc, 5$ \\label{tab:ell}")
> print(print.ell,sanitize.text.function = function(x){x})

```

6.7.4 Tabelle 4.4

```

> dim<-5
> lambda.fma <- array(dim=c(dim(ell)[1], dim, dim ))
> colnames(lambda.fma)<-paste(paste("$\\lambda_{", 1:5, sep=""), "}$", sep="")
> for (i in 1:dim){
+   lambda.fma[,i]<-t(replicate(2, vol.fma[,i]))*ell
+ }
> print.lambda.fma<-xtable(lambda.fma[,1],
+   caption="$\\lambda(t,T_m)$ zu den Zeitpunkten $t=1$

```

```

+            $\lambda$  (tab:lambda.fma1}$")
> print(print.lambda.fma,sanitize.text.function = function(x){x},
+       floating=FALSE)

> print.lambda.fma<-xtable(lambda.fma[,2],
+       caption=" $\lambda(t, T_m)$  zu den Zeitpunkten
+       $t=2$  $\lambda$  (tab:lambda.fma2}$")
> print(print.lambda.fma,sanitize.text.function = function(x){x},
+       floating=FALSE)

> print.lambda.fma<-xtable(lambda.fma[,3],
+       caption=" $\lambda(t, T_m)$  zu den Zeitpunkten
+       $t=3$  $\lambda$  (tab:lambda.fma3}$")
> print(print.lambda.fma,sanitize.text.function = function(x){x},
+       floating=FALSE)

> print.lambda.fma<-xtable(lambda.fma[,4],
+       caption=" $\lambda(t, T_m)$  zu den Zeitpunkten
+       $t=4$  $\lambda$  (tab:lambda.fma4}$")
> print(print.lambda.fma,sanitize.text.function = function(x){x},
+       floating=FALSE)

> print.lambda.fma<-xtable(lambda.fma[,5],
+       caption=" $\lambda(t, T_m)$  zu den Zeitpunkten
+       $t=5$  $\lambda$  (tab:lambda.fma5}$")
> print(print.lambda.fma,sanitize.text.function = function(x){x},
+       floating=FALSE)

```

6.7.5 Tabelle 4.5

```

> lmm.sim<-function(L.0,lambda,K,M,N,delta){
+   set.seed(1)
+   L <- array(dim=c(K+1, M+1, N))
+   mu<- array(dim=c(K+1, M+1, N))
+   p <- dim(lambda)[1]
+   W<- array(dim=c(K, N, p))
+   rownames(L) <- paste(paste("$T_{", 0:K, sep=""), "}$", sep="")
+   colnames(L) <- paste(paste("$L_{", 0:M, sep=""), "(T)$", sep="")
+   L[1,,]<-L.0
+   for(n in 1:N){
+     for(k in 1:K){
+       W[k,n,]<-rnorm(p,0,1)
+       for(m in k:M){
+         mu[k+1,m+1,n]<-sum(delta*L[k,(k+1):(m+1),n]*c(t(lambda[1:p,k:m,k])%*%
+           lambda[1:p,m,k])/(1+delta*L[k,(k+1):(m+1),n]))-
+           sum(lambda[1:p,m,k]^2/2)
+
+         L[k+1,m+1,n]<-L[k,m+1,n]*exp(mu[k+1,m+1,n]*delta
+           +sqrt(delta)*sum(lambda[1:p,m,k]*W[k,n,]))
+       }
+     }
+   }
+   return(list("lambda"=lambda,"mu"=mu,"W"=W, "L"=L))
+ }
> L.0 <- L.fma[1:6]
> lambda <-lambda.fma

```

```

> K<-5
> M<-5
> N <-10000
> delta <- 1
> lmm.uc<-lmm.sim(L.0, lambda, K, M, N, delta)
> #lmm.uc$mu[, ,1]
> #lmm.uc$W[, 1,]
> #lmm.uc$L[, ,1]
>
>
> term.struct<-apply(lmm.uc$L,c(1,2),mean)
> print.term<-
+   xtable(term.struct*100,
+   caption="Mittelwerte der Szenarien für die ersten fünf Jahre
+   $\\label{tab:mwfs}$")
> print(print.term,sanitize.text.function = function(x){x})

```

6.7.6 Abbildung 4.1

```

> plot(c(0,1,2,3,4,5), lmm.uc$L[1,,1], type="l", xlim=c(0,5),
+   ylim=c(0,0.05),xlab="Time", ylab="Rate")
> points(c(0:5), lmm.uc$L[1,,1], pch=1, col=1)
> for(n in 1:3) {
+   lines(c(1,2,3,4,5), lmm.uc$L[2,2:6,n], type="l", col=n+1)
+   points(c(1,2,3,4,5), lmm.uc$L[2,2:6,n], pch=2, col=n+1)
+   lines(c(2,3,4,5), lmm.uc$L[3,3:6,n], type="l", col=n+1)
+   points(c(2,3,4,5), lmm.uc$L[3,3:6,n], pch=3, col=n+1)
+   lines(c(3,4,5), lmm.uc$L[4,4:6,n], type="l", col=n+1)
+   points(c(3,4,5), lmm.uc$L[4,4:6,n], pch=4, col=n+1)
+   lines(c(4,5), lmm.uc$L[5,5:6,n], type="l", col=n+1)
+   points(c(4,5), lmm.uc$L[5,5:6,n], pch=5, col=n+1)
+   points(5, lmm.uc$L[6,6,n], col=n+1, pch=6)
+ }
> legend("topleft",c("t=0","t=1","t=2","t=3","t=4","t=5"),pch=c(1:6))

```

6.7.7 Tabelle 4.6

```

> require("mgcv")
> vol.fma.full<-Vol.cal(sigma.swp.ii, rho.fma, L.fma[2:31], delta)
> rownames(vol.fma.full) <- paste(paste("$L(t,T_{", 1:30, sep=""), "}")$, sep="")
> colnames(vol.fma.full)<-as.character(1:30)

> print.vol.full<-xtable(vol.fma.full[,1:15]*100)
> print(print.vol.full,sanitize.text.function = function(x){x},floating=FALSE)

> print.vol.full<-xtable(vol.fma.full[16:30,16:30]*100)
> print(print.vol.full,sanitize.text.function = function(x){x},floating=FALSE)

```

6.7.8 Abbildung 4.2

```

> dim<-30
> lambda.fma.full <- array(dim=c(dim(ell.full)[1], dim, dim ))
> for (i in 1:dim){
+   lambda.fma.full[, ,i]<-t(replicate(2, vol.fma.full[, ,i]))*ell.full
+ }
> L.0 <- L.fma[1:31]
> lambda <-lambda.fma.full

```

```

> K <- 30
> M <- 30
> N <-10000
> delta <- 1
> lmm.t<-lmm.sim(L.0, lambda, K, M, N, delta)
> term.structure<-apply(lmm.t$L,c(1,2),mean)
> fma<-matrix(NA,nrow=dim(lmm.t$L)[3],ncol=dim(lmm.t$L)[2])
> for(i in 1:dim(lmm.t$L)[3]){
+   fma[i,]<-diag(lmm.t$L[,i])
+ }
> bfma<-fma
> colnames(fma) <- paste(paste("$L_{", 0:M, sep=""), "} (T)$", sep="")
> require("XLConnect",quietly = TRUE)
> wbFilename<-"LMM.xlsx"
> dataName<-"rates"
> sheet = "LMMrates"
> if(file.exists(wbFilename))
+   file.remove(wbFilename)
> writeNamedRegionToFile(wbFilename, data = fma, name = dataName,
+                          formula = paste(sheet, "$A$1", sep = "!"),
+                          header = TRUE)

> persp(term.structure,xlab="Zeit",zlim=c(0,0.075),phi=10,theta=-90,ylab="Maturity",
+        zlab="Rate")

```

6.7.9 Abbildung 4.3

```

> boxplot(bfma*100,ylim=c(0,20),xlab="F(t;t,t+1)",ylab="Rate")

```

6.7.10 Abbildung 4.4

```

> mean<-apply(bfma,2,mean)
> median<-apply(bfma,2,median)
> sd<-apply(bfma,2,sd)
> density.max<-unlist(lapply(apply(bfma,2,density),function(d) d$x[which.max(d$y)]))
> plot(mean*100,type="l",col=2,lty=2,ylab="Rate",xlab="t")
> lines(L.0*100,col=1,lty=1)
> lines(sd*100,col=3,lty=4)
> lines(median*100,col=7,lty=6)
> lines(density.max*100,col=6,lty=5)
> legend("topleft", c("mean","L.0","sd","median","density.max"),
+        lty=c(2,1,4,6,5),col=c(2,1,3,7,6))

```

6.7.11 Abbildung 4.8

```

> a<-function(fma){
+   A<-matrix(rep(NA,dim(fma)[1]*dim(fma)[2]),,dim(fma)[2])
+   for (i in 1:dim(fma)[1]) {
+     A[i,]<-cumprod(1/(fma[i,]+1))
+   }
+   A
+ }
> wm<-function(bfma){
+   #rcumsum<-t(apply(t(apply(t(apply(a(bfma),1,rev)),1,cumsum)),1,rev))
+   #reverse cumsum of cumprod fma
+   rsum<-apply(a(bfma),1,sum)
+   abfma<-a(bfma)

```

```

+   d<-dim(bfma)[2]
+   wm<-matrix(NA,ncol=d,nrow<-dim(bfma)[1])
+   for(i in 1:d){
+     wm[,i]<-abfma[,i]/rsum
+   }
+   return(wm)
+ }
> floor<-function(kappa,begin,end,fma){
+   mean(rowSums((a(fma)*pmax(kappa-fma,0))[(begin+1):end]))
+ }
> floorlet<-function(kappa,fma){
+   test<-apply((a(fma)*pmax(kappa-fma,0)),2,mean)
+ }
> floorlet.error<-function(kappa,fma){
+   apply((a(fma)*pmax(kappa-fma,0)),2,sd)/sqrt(dim(fma)[1])
+ }
>

> floor.value<-matrix(NA,ncol=9,nrow=7)
> floor.rates<-c(0.01,0.015,0.02,0.025,0.03,0.035,0.04)
> floor.starts<-c(1,6,11,16,21,26)
> colnames(floor.value)<-c("1-31","1-16","1-4","1-6","6-11","11-16","16-21","21-26","26-31")
> rownames(floor.value)<-c("k=1%","k=1.5%","k=2%","k=2.5%","k=3%","k=3.5%","k=4%")
> for(i in 1:7){
+   for(j in 1:6){
+     floor.value[i,j+3]<-floor(floor.rates[i],floor.starts[j],(floor.starts[j]+5),fma)
+   }
+   floor.value[i,1]<-floor(floor.rates[i],1,31,fma)
+   floor.value[i,2]<-floor(floor.rates[i],1,16,fma)
+   floor.value[i,3]<-floor(floor.rates[i],1,4,fma)
+ }
> print.floor.value<-
+   xtable(floor.value*10000,
+   caption="Floorpreise in BP für verschiedene Strikes ($k$)
+   und Laufzeiten in Jahren $\label{tab:fs}$")
> print(print.floor.value)

> floorlet.value<-matrix(NA,ncol=31,nrow=7)
> floorlet.errors<-matrix(NA,ncol=31,nrow=7)
> floorlet.rates<-c(0.01,0.015,0.02,0.025,0.03,0.035,0.04)
> rownames(floorlet.value)<-c("k=1%","k=1.5%","k=2%","k=2.5%",
+   "k=3%","k=3.5%","k=4%")
> rownames(floorlet.errors)<-c("k=1%","k=1.5%","k=2%","k=2.5%",
+   "k=3%","k=3.5%","k=4%")
> for(i in 1:7){
+   floorlet.value[i,]<-floorlet(floorlet.rates[i],fma)
+   floorlet.errors[i,]<-floorlet.error(floorlet.rates[i],fma)
+ }
> matplot(t(floorlet.value)*10000,type="l",xlab="Maturity",
+   ylab="Preis in BP",main="Floorletpreise")
> legend("topright", rownames(floorlet.value),lty=c(1:5,1,2),
+   col=c(1:6,1), cex=1)

> matplot((apply(floorlet.value,1,cumsum))*10000,type="l",
+   xlab="Maturity",ylab="Preis in BP",
+   main="Kumulierte Floorletpreise")
> legend("topleft", rownames(floorlet.value),lty=c(1:5,1,2),
+   col=c(1:6,1), cex=1)

```

6.7.12 Abbildung 4.5

```
> matplot(t(floorlet.errors)*10000,type="l",xlab="Maturity",
+         ylab="Preis in BP",main="Floorlet Monte Carlo Fehler")
> #legend("topleft", rownames(floorlet.errors),lty=c(1:5,1,2),
> #col=c(1:6,1), cex=1)
```

6.7.13 Abbildung 4.6

```
> plot(apply(bfma.f,2,sd),ylim=c(0,0.12),xlab="L(t,i)/w_i(t), i=1,...,31",
+       ylab="Standardabweichung",main="Vergleich der Veränderungen
+       in L(t,i)/w_i(t)")
> points(apply(wm(bfma.f),2,sd),pch=4)
> legend("topleft", c("L(t,i)", "w_i(t)"),pch=c(1,4))

> boxplot(wm(bfma.f),xlab="w_i(t), i=1,...,31",ylab="Prozent",
+         main="Boxplot der Gewichte w_i(t)")
```


Literatur

- [1] Damiano Brigo und Fabio Mercurio. *Interest Rate Models Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit (Springer Finance)*. 2nd. Springer, Aug. 2006. ISBN: 9783540221494.
- [2] Damir Filipovic. *Consistency Problems for Heath-Jarrow-Morton Interest Rate Models (Lecture Notes in Mathematics)*. 2001. Aufl. Springer, März 2001. ISBN: 9783540414933.
- [3] Damir Filipovic. *Term-Structure Models: A Graduate Course (Springer Finance / Springer Finance Textbooks)*. 2009. Aufl. Springer, Aug. 2009. ISBN: 9783540097266.
- [4] Niels Friewald. *Financial Engineering*. Techn. Ber. Welthandelsplatz 1, 1020 Wien: WU (Wirtschaftsuniversität Wien), 2014.
- [5] Simon Hochgerner. *FMA*. Techn. Ber. Otto-Wagner-Platz 5, 1090 Wien: Österreichische Finanzmarktaufsicht, 2014.
- [6] Riccardo Rebonato. *Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives: The LIBOR Market Model and Beyond*. Princeton University Press, Nov. 2002. ISBN: 9780691089737.
- [7] Riccardo Rebonato, Kenneth McKay und Richard White. *The SABR/LIBOR Market Model: Pricing, Calibration and Hedging for Complex Interest-Rate Derivatives*. 1. Aufl. Wiley, Feb. 2011.