Die approbierte Originalversion dieser Diplom/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

DIPLOMARBEIT

Kombinatorik der Mustervermeidung in Permutationen

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

im Rahmen des Studiums

Technische Mathematik

eingereicht von

Gerold Dürnle BSc
Matrikelnummer 01025999

ausgeführt am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
der Fakultät für Mathematik und Geoinformation der Technischen Universität Wien

Betreuung
Betreuer: Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Bernhard Gittenberger

Wien, 11.05.2018

(Unterschrift Verfasser) (Unterschrift Betreuer)

Zusammenfassung

Diese Arbeit soll einen Überblick über die Kombinatorik der Mustervermeidung bei Permutationen liefern. Eine Permutation $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ der Länge n enthält die Permutation $\tau = (\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(k))$ der Länge k, wenn τ ordungserhaltend auf eine Teilfolge der Länge k von π abgebildet werden kann. Ist dies nicht der Fall, so *meidet* π das Muster τ. Von wesentlichem Interesse ist die Anzahl der Permutationen der Länge n, die gewisse Muster τ meiden (diese Menge wird mit $S_n(\tau)$ bezeichnet), sowie die Suche nach *Wilf-äquivalenten* Permutationen. Dafür betrachten wir unter anderem *erzeugende Bäume, Young-Diagramme, Wachstumsdiagramme,* sowie die *strenge Wilf-Äquivalenz*. Eine exponentielle obere Schranke von $|S_n(\tau)|$ liefert die in 2003 von *Adam Marcus* und *Gábor Tardos* bewiesene *Stanley-Wilf-Vermutung*.

Abstract

This thesis should provide an overview of the combinatorics of pattern avoidance in permutations. A permutation $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ of length n contains the permutation $\tau = (\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(k))$ of length k, if there exists an order preserving function, which maps τ on a subsequence of π of the length k. If this is not the case, π avoids the pattern τ. Of particular interest is the number of permutations of length n that avoid certain patterns τ (denoted as $S_n(\tau)$), as well as the search for *Wilf-equivalent* permutations. For this we take a look at many objects and methods of combinatorics including *generating trees, Young-diagrams, growth-diagrams* and *shape-wilf-equivalent* permutations. An exponential upper bound of $|S_n(\tau)|$ provides the *Stanley-Wilf-conjecture*, proven by *Adam Marcus* and *Gábor Tardos* in 2003.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Grundlagen **3**

2.1 Permutationen und Permutationsmatrizen 3

2.2 Muster und Wilf-Äquivalenzklassen 5

2.3 Muster der Länge 3 7

3 Die strenge Wilf-Äquivalenz **11**

3.1 Partitionen, Young-Diagramme und Transversalen 11

3.2 Verallgemeinerung des Satzes von Dilworth 15

3.3 Definition und Eigenschaften der strengen Wilf-Äquivalenz 17

3.4 Strenge Wilf-Äquivalenz von I_k und J_k 19

3.5 Die strenge Wilf-Äquivalenz von P_{231} und P_{312} 25

3.6 Die erzeugende Funktion von $S_n(3124)$ 36

4 Erzeugende Bäume in der Mustervermeidung **43**

4.1 Erzeugende Bäume 43

4.1.1 Catalan-Bäume 46

4.2 Permutationsbäume 49

4.3 $T(\{123\})$ und $T(\{132\})$ 51

4.4 Zwei Muster der Länge 3 52

5 Die Wilf-Äquivalenzklassen von S_4 und S_5 **61**

5.1 Wilf-Äquivalenzklassen von S_4 61

5.2 Wilf-Äquivalenzklassen von S_5 62

6 Die Stanley-Wilf-Vermutung **65**

6.1 Die Vermutung 65

6.2 Die Füredi-Hajnal-Vermutung 67
6.3 Beweis der Füredi-Hajnal-Vermutung 68
6.4 Die Stanley-Wilf-Vermutung als Folgerung der Füredi-Hajnal-Vermutung 71

7 Weitere Themen der Mustervermeidung 73
7.1 Mustervermeidung und Chebyshev-Polynome 73
7.2 Abgeschlossene Mengen von Permutationen 79
7.3 $S_n(p)$ als P-rekursive Folge 80
7.4 $S_n(1324)$ 83
7.5 Die Möbiusfunktion der Halbordnung $(S, \leq_S)$ 85

1 Einleitung

Permutationen sind eine der meist untersuchten Objekte in der Kombinatorik. Die ersten Resultate in der Mustervermeidung gehen mehr als hundert Jahre zurück. *P. A. MacMahon* bewies in [42], dass die Anzahl der Permutation der Länge n, welche aus zwei aufsteigende Teilfolgen bestehen (dies sind die 321-meidenden Permutationen), gegeben ist durch die n-te Catalan-Zahl $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
D. E. Knuth zeigte 1968, dass durch einen *Stack* sortierbare Permutationen mit den 231-meidenden Permutationen übereinstimmen und diese ebenfalls von C_n gezählt werden (siehe etwa [38]). Schnell wuchs das Interesse an der Mustervermeidung von Permutationen in der Informatik, so lieferten kurz darauf *R. Tarjan* in [59] und *V. R. Pratt* in [49] weitere Verbindungen zwischen Sortieralgorithmen und mustervermeidenden Permutationen. Basierend auf der Arbeit [52] von *R. Simion* und *F. Schmidt* begann schließlich die systematische Studie von mustervermeidenden Permutationen im Jahr 1985.

Grundsätzlich stellt sich die Frage nach der Anzahl bzw. dem asymptotischen Verhalten der Mengen $S_n(\pi)$. $S_n(\pi)$ bezeichnet die Menge aller Permutationen der Länge n, welche das Muster π meiden. Die *Stanley-Wilf*-Vermutung besagt, dass eine Konstante c existiert, sodass für ein beliebiges Muster π $|S_n(\pi)| \leq c^n$ gilt und somit die exakte Anzahl der π-meidenden Permutationen der Länge n wesentlich kleiner als die Anzahl aller Permutationen der Länge n ist. Diese lange offene Vermutung wurde von *A. Marcus* und *G. Tardos* in [45] bewiesen. Kapitel 5 widmet sich der Stanley-Wilf-Vermutung.
Zwei Muster p und q sind *Wilf-äquivalent*, wenn $|S_n(\pi)| = |S_n(\tau)|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Simion und Schmidt zeigten $|S_n(123)| = |S_n(213)|$, woraus die Wilf-Äquivalenz aller Muster der Längen 3 folgte. Für Muster der Länge 4 ist dies nicht mehr der Fall und die Einteilung in Wilf-Äquivalenzklassen gestaltet sich erheblich schwieriger ([54],[53]).

J. West lieferte eine Vielzahl von bedeutenden Ergebnissen indem er begann *erzeugende Bäume*, die zur Untersuchung von *Baxter-Permutationen* entwickelt wurden ([21]), für die Mustervermeidung zu verwenden ([64],[65]). Erzeugende Bäume tauchen seitdem immer wieder in der Verbindung mit der Mustervermeidung auf und werden in Kapitel 4 in dieser Arbeit behandelt.
In Kapitel 3 richten wir unseren Augenschein auf eine Verschärfung der klassischen Wilf-Äquivalenz, die *strenge Wilf-Äquivalenz*. Mit dieser bewiesen *J. Backelin, J. West* und *G. Xin* $S_n(12\dots tp_{t+1}\dots p_n) = S_n(t\dots 21p_{t+1}\dots p_n)$ in [7]. Der Spezialfall $t = 2$ und $n = 3$ stimmt mit dem Resultat von Simion und Schmidt überein.

Im letzten Kapitel wird noch eine Auswahl weiterer Themen der Mustervermeidung vorgestellt, u.a. das Vorkommen von *Chebyshev-Polynome* und die Auffassung von mustervermeidenden Permutationen als *Ordnungsideale*. Dies führt uns zu einer Vermutung, die 25 Jahre allen Anschein nach als wahr galt und zwar, dass für ein beliebiges Muster p die Folge $(|S_n(p)|)_{n\in\mathbb{N}}$ ein P-rekursives Verhalten aufweist. Diese Vermutung wurde jedoch erst vor Kurzem von *S. Garrabrant* und *I. Pak* widerlegt ([31]). Das Ende dieses Kapitels beschäftigt sich mit der Suche nach der *Stanley-Wilf-Schranke* des Musters 1324 und der Ermittlung der *Möbiusfunktion* der Halbordnung $(S, \leq_S)$, bestehend aus der Menge aller Permutationen S und einer im Sinne der Mustervermeidung definierten Ordnungsrelation $\leq_S$.

2 Grundlagen

Die folgenden grundlegenden Definitionen wurden im Wesentlichen von [15] übernommen und bilden die Fundierung dieser Arbeit. Zusätzlich behandeln wir als Einführung die Permutationen, welche ein Muster der Länge 3 meiden.

2.1 Permutationen und Permutationsmatrizen

Wir werden Permutationen auf die Menge $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ ($[0]$ beschreibt die leere Menge $\emptyset$) betrachten und diese etwas spezifischer definieren.

Definition 2.1.1. *Eine* Permutation der Länge n *oder eine* n*-Permutation ist eine bijektive Abbildung von* $[n]$ *auf* $[n]$*.* S_n *bezeichne die Menge aller Permutationen der Länge* n*.*

Offensichtlich gilt $|S_n| = n!$.

Bemerkung 2.1.2. Eine Permutation $p \in S_n$ schreiben wir als Tupel oder als Folge an. D.h. $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ oder $p = p_1 p_2 \ldots p_n$, wobei $p_i := p(i)$ für $i \in [n]$. Wir schreiben 0 für die einzige Permutation der Länge 0.

Das Betrachten von Permutationen als bijektive Abbildungen bringt einige Vorteile mit sich. So können wir etwa zwei Permutationen hintereinander ausführen und erhalten wieder eine Permutation, es gilt also $p \circ p' \in S_n$ für $p, p' \in S_n$. Da Permutationen Bijektionen sind, existiert für eine beliebige Permutation p auch eine Inverse p^{-1}. Die Menge aller Permutationen S_n mit der Hintereinanderausführung von Funktionen bildet also eine Gruppe mit neutralem Element id, die sogenannte *Symmetrische Gruppe*. Es kann also $\cdot^{-1}$ als einstellige Operation auf S_n angesehen werden. Wir definieren weitere einstellige Operationen.

Definition 2.1.3. *Sei* $p = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n$.
$p^r := p_n p_{n-1} \dots p_1 \in S_n$ *ist die* Umkehrung *der Permutation* p.
$p^c \in S_n$ *bezeichnet das* Komplement *von* p *mit den Einträgen* $p_i^c = n + 1 - p_i$.

Definition 2.1.4. *Eine* $n \times n$*-Permutationsmatrix ist eine Matrix aus* $\{0,1\}^{n \times n}$ *mit genau einem* 1*-Eintrag in jeder Zeile und jeder Spalte. Wir definieren die Menge aller* $n \times n$*-Permutationsmatrizen als* $\mathcal{P}_n$ *und* $\mathcal{P} := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{P}_n$.

Es kann nun jede Permutation $p \in S_n$ eindeutig mit einer Permutationsmatrix $P \in \mathcal{P}_n$ identifiziert werden, indem man $P_{i,j} := \delta_{i,p(j)}$ setzt. Wobei

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 \text{ falls } i = j, \\ 0 \text{ sonst}, \end{cases}$$

das *Kronecker-Delta* beschreibt. Wir sprechen auch von der *Permutationsmatrix* P *der Permutation* p.

Beispiel 2.1.5. Für $p = 25134 \in S_5$ ist die zugehörige Permutationsmatrix P_{25134} gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $i, j \in [n]$ und zwei Permutationen $p, q \in S_n$ mit zugehörigen Permutationsmatrizen $P, Q \in \mathcal{P}_n$ gilt, dass $(P \cdot Q)_{i,j} = 1$ genau dann zutrifft, wenn exakt ein $k \in [n]$ existiert mit $P_{i,k} = Q_{k,j} = 1$. Dies ist gleichbedeutend mit $p_k = i$ und $q_j = k$, d.h. $p(q(j)) = i$. Die zugehörige Permutationsmatrix von $p \circ q$ stimmt also mit $P \cdot Q$ überein. Sei nun f die eindeutige bijektive Abbildung von S_n nach $\mathcal{P}_n$, die jeder Permutation ihre zugehörige Permutationsmatrix zuordnet, dann ist f ein Isomorphismus von der symmetrischen Gruppe $(S_n, \circ)$ auf die Gruppe $(\mathcal{P}_n, \cdot)$.

Bemerkung 2.1.6. Die Transponierte einer Permutationsmatrix ist offensichtlich auch ihre Inverse, somit ist für eine Permutation $p \in S_n$ mit zugehöriger Permutationsmatrix $P \in \mathcal{P}_n$ die Permutationsmatrix von p^{-1} genau P^T.

Die Permutationsmatrix von p^r (bzw. p^c) erhält man durch die Spiegelung von P um eine vertikale (bzw. horizontale) Achse. Wir können somit die Operationen $\cdot^r$ und $\cdot^c$ auch auf $\mathcal{P}_n$ definieren, sodass P^r (bzw. P^c) die Permutationsmatrix von p^r (bzw. p^c) beschreibt.

Definition 2.1.7. *Für $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{P}_n$ ist*

$$M^r := \begin{pmatrix} m_{1,n} & m_{1,n-1} & \cdots & m_{1,1} \\ m_{2,n} & m_{2,n-1} & \cdots & m_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,n} & m_{n,n-1} & \cdots & m_{n,1} \end{pmatrix}, \text{ und } M^c := \begin{pmatrix} m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & m_{n-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \end{pmatrix}.$$

Definition 2.1.8. *Für ein $n, k, l \in \mathbb{N}$ mit $k, l \leq n$ sei M eine $n \times n$-Matrix und N eine $k \times l$-Matrix. Die Matrix N ist eine* Untermatrix *von M genau dann, wenn zwei Mengen $\{c_1, \ldots, c_k\}, \{r_1, \ldots, r_l\} \subseteq [n]$ existieren mit $c_1 \leq \cdots \leq c_k$ und $r_1 \leq \cdots \leq r_l$, sodass*

$$\begin{pmatrix} M_{c_1,r_1} & M_{c_1,r_2} & \cdots & M_{c_1,r_l} \\ M_{c_1,r_2} & M_{c_2,r_2} & \cdots & M_{c_2,r_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{c_k,r_1} & M_{c_k,r_2} & \cdots & M_{c_k,r_l} \end{pmatrix} = N$$

gilt.

Die Matrix N ist also eine Untermatrix von M, falls N durch das Streichen von Spalten und Zeilen aus M hervorgeht.

Definition 2.1.9. *Für $k \in \mathbb{N}$ ist I_k definiert als die $k \times k$-Einheitsmatrix. J_k bezeichnet die Matrix $(I_k)^c$.*

I_k ist also die Permutationsmatrix von $123 \ldots k$ und J_k die Permutationsmatrix von $k(k-1) \ldots 1$.

2.2 Muster und Wilf-Äquivalenzklassen

Muster können als Verallgemeinerung von *Fehlständen* (bzw *Inversionen*) betrachtet werden. Ein Fehlstand einer Permutation $p = p_1 p_2 \ldots p_n$ ist ein Paar (i, j), sodass $i \leq j$ und $p_j \leq p_i$ gilt.

Definition 2.2.1. *Sei $q = q_1 q_2 \dots q_k \in S_k$ eine Permutation und sei $k \leq n$. Eine Permutation $p = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n$* enthält *$q$ als ein* Muster (der Länge k)*, falls k Einträge $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$ in p existieren mit $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ und es gilt $p_{i_a} < p_{i_b}$ genau dann, wenn $q_a < q_b$ zutrifft. Wir sprechen dann davon, dass die Einträge $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$* das Muster $q = q_1 q_2 \dots q_k$ bilden*. Ist dies nicht der Fall, so* meidet *die Permutation p das Muster (bzw. die Permutation) q oder p ist eine q-*meidende *Permutation.*

Ein Fehlstand einer Permutation entspricht somit einem 21-Muster.

Bemerkung 2.2.2. Eine Permutation $p \in S_n$ enthält also genau dann eine Permutation $q \in S_k$, wenn q ordnungserhaltend auf eine Teilfolge der Länge k von p abgebildet werden kann.

Definition 2.2.3. *Sei $k, n \in \mathbb{N}$ und $q \in S_k$. $S_n(q)$ bezeichnet die Menge aller q-meidenden Permutationen der Länge n.*

Sei $P \in \mathcal{P}_n$ die zugehörige Permutationsmatrix zu einer Permutation $p \in S_n$. So enthält p das Muster $q \in S_m$ für ein $m \leq n$ genau dann, wenn die zu q gehörige Permutationsmatrix $Q \in \mathcal{P}_m$ eine Untermatrix von P bildet. Wir definieren somit analog zu Definition 2.2.3 die Menge aller $n \times n$-Permutationsmatrizen, die Q nicht als Untermatrix besitzen, als $S_n(Q)$.
Wir werden auch Permutationen betrachten, die mehrerer Muster meiden.

Definition 2.2.4. *Für eine Menge von Permutationen Π und eine Menge von Permutationsmatrizen M sei*

- $S_n(\Pi) := \bigcap_{q \in \Pi} S_n(q)$*, und*
- $S_n(M) := \bigcap_{Q \in M} S_n(Q)$.

Eine Permutation $p \in S_n(\Pi)$ nennen wir eine Π-meidende Permutation *und analog bezeichnen wir eine Permutationsmatrix $P \in S_n(M)$ als* M-meidende Permutationsmatrix.

Bemerkung 2.2.5. Sei $\{p_1, \dots, p_k\}$ eine endliche Menge von Permutationen. Statt $S_k(\{p_1, \dots, p_k\})$ schreiben wir auch einfach $S_k(p_1, \dots, p_k)$.

Unser Hauptaugenmerk richtet sich nicht nur auf die Mächtigkeit von $S_n(q)$, sonder auch auf Bedingungen, die an die Permutationen p und q gestellt werden müssen um $|S_n(q)| = |S_n(p)|$ zu garantieren.

Definition 2.2.6. *Seien* Π *und* Σ *zwei Mengen von Permutationen. Wir nennen* Π *und* Σ Wilf-äquivalent *genau dann, wenn* $|S_n(\Pi)| = |S_n(\Sigma)|$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Analog ist die Wilf-Äquivalenz zweier Mengen von Permutationsmatrizen definiert.*

Man versichert sich leicht, dass die Wilf-Äquivalenz eine Äquivalenzrelation zwischen zwei Mengen von Permutationen definiert. Die zugehörigen Äquivalenzklassen nennen wir *Wilf-Äquivalenzklassen.*
Betrachten wir die beiden Permutationsmatrizen $P \in \mathcal{P}_n$ und $Q \in \mathcal{P}_k$. Ist Q eine Untermatrix von P, dann ist Q^T (bzw. Q^{-1}) auch trivialerweise Untermatrix von P^T (bzw. P^{-1}) und Q^c von P^c sowie Q^r von P^r. Es folgt unmittelbar:

Satz 2.2.7 ([7])**.** *Für Permutationen* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *und Permutationsmatrizen* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *gilt*

$$\begin{aligned} |S_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)| &= |S_n(f(p_1), f(p_2), \ldots, f(p_n))|, \text{ und} \\ |S_n(P_1, P_2, \ldots, P_n)| &= |S_n(f(P_1), f(P_2), \ldots, f(P_n))|, \end{aligned}$$

mit $f \in \{\cdot^{-1}, \cdot^c, \cdot^r\}$.

Die durch Satz 2.2.7 hervorgehenden Äquivalenzklassen werden als *trivialen Wilf-Äquivalenzklassen* bezeichnet.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
Triviale Wilf-Äquiv.	1	1	2	7	23	115	694
Wilf-Äquiv.	1	1	1	3	16	91	595

Tabelle 2.1: Anzahl der triviale Wilf-Äquivalenzklassen und Wilf-Äquivalenzklassen bis S_7 ([55])

2.3 Muster der Länge 3

In diesem Abschnitt wird $|S_n(q)|$ für alle Muster $q \in S_3$ bestimmt. Aus Satz 2.2.7 folgt sofort $|S_n(123)| = |S_n(321)|$ und $|S_n(132)| = |S_n(231)| = |S_n(312)| = |S_n(213)|$.

Können wir jetzt noch die Gleichheit von $|S_n(123)|$ und $|S_n(132)|$ zeigen, erhalten wir das bemerkenswerte Ergebnis, dass alle Muster der Länge 3 von der gleichen Anzahl an Permutationen der Länge n vermieden werden.

Definition 2.3.1. *Sei $p = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n$.*

- *p_i ist ein* Links-Rechts-Minimum *genau dann, wenn $p_j \geq p_i$ für jedes j mit $1 \leq j \leq i$.*
- *p_i ist ein* Links-Rechts-Maximum *genau dann, wenn $p_j \leq p_i$ für jedes j mit $1 \leq j \leq i$.*

Satz 2.3.2 ([15])**.** *Für alle $n > 0$ gilt $|S_n(123)| = |S_n(132)|$.*

Beweis. Wir werden eine Bijektion f konstruieren, welche die 132-meidenden Permutationen auf 123-meidende Permutationen abbildet. Die Bijektion f wird definiert mithilfe der oben definierten Links-Rechts-Minima.
Sei $p \in S_n(132)$. f lässt nun alle Links-Rechts-Minima fixiert und ordnet die restlichen Elemente von p absteigend an.
Zum Beispiel wird die Permutation 67341258 mit den Links-Rechts-Minima 6, 3 und 1 unter f auf 68371542 abgebildet.
Die Permutation $f(p)$ vermeidet nun mit Sicherheit das Muster 123, da sie zusammengesetzt wurde aus zwei absteigenden Folgen, nämlich den Links-Rechts-Minima und den übrigen absteigend sortierten Elementen.
Wir heben noch hervor, dass die Links-Rechts-Minima sowie deren Positionierung in p und $f(p)$ übereinstimmen. Dies wird deutlich durch die Vorstellung von f als einen Algorithmus, der die m-vielen nicht fixierten Elemente absteigend anordnet, indem er sie paarweise vertauscht. f braucht höchstens $\binom{m}{2}$ Schritte und bei jedem Schritt bewegt sich ein größeres Element nach links, sowie ein kleineres nach rechts. D.h. es entstehen keine neuen Links-Rechts-Minima.
Nehmen wir an, es existiert ein $q \in S_n(123)$ mit denselben Links-Rechts-Minima wie jene in p und derselben Positionierung dieser. Zusätzlich nehmen wir an es existieren zwei Einträge x und y, die ein 12-Muster in q bilden und keine Links-Rechts-Minima sind, dann würde das erste Links-Rechts-Minimum links von x und y mit x und y ein 123-Muster bilden. D.h. $q \notin S_n(123)$. $f(p)$ ist somit die einzige Permutation in $S_n(123)$

mit gleichen Links-Rechts-Minima an denselben Stellen wie p.
Wir konstruieren nun eine Inverse g von f um zu zeigen, dass f eine Bijektion ist. Für eine 123-meidende Permutation p fixiert g wiederum die Links-Rechts-Minima und sortiert die übrigen m Elemente von links nach rechts in m Schritten wie folgt: In jedem Schritt setzen wir das kleinste Element, welches größer ist als das nächste sich links befindende Links-Rechts-Minimum und noch nicht eingeordnet wurde, auf den noch freien Platz.
Betrachten wir die Permutation 68371542 unter g, dann werden die Links-Rechts-Minima 6,3 und 1 fixiert. Im ersten Schritt wird 7 an die zweite Position gesetzt, danach die 4 an die vierte Position u.s.w. bis wir die Permutation 67341258 erhalten.
Für eine Permutation $p \in S(123)$ meidet $g(p)$ nun auf alle Fälle das Muster 132, da in $g(p)$ jedes 132-Muster bei einem Links-Rechts-Minimum beginnt, jedoch alle Elemente, die größer als dieses Links-Rechts-Minimum sind, aufsteigend angeordnet sind.
$g(p)$ ist auch wieder die einzige 132-meidende Permutation, welche dieselben Links-Rechts-Minima mit gleicher Positionierung wie p besitzt. Würden zwei Elemente u und v mit $u < v$ existieren, die keine Links-Rechts-Minima sind, so erzeugt eine nicht ansteigende Anordnung dieser ein 132-Muster.
Somit gilt für $p \in S_n(132)$ und $q \in S_n(123)$, $g(f(p)) = p$ und $f(g(q)) = q$. □

Da nun verdeutlicht wurde, dass die Anzahl aller Permutationen, welche ein Muster der Länge 3 meiden, gleich ist, stellt sich die Frage, wie viele solche Permutationen existieren.

Satz 2.3.3 ([15])**.** *Für alle $n > 0$ stimmt $S_n(132)$ mit den Catalan-Zahlen überein. D.h.*

$$|S_n(132)| = C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}.$$

Beweis. Sei $c_n := |S_n(132)|$. Betrachten wir eine 132-meidende Permutation der Länge n mit dem Element n an der i-ten Stelle, so müssen alle Elemente links von n größer als die Elemente rechts von n sein, da sonst ein 132-Muster entstehen würde.
Links von n befinden sich also die Elemente $\{n-i+1, n-i+2, \ldots, n-1\}$ und rechts von n die Elemente aus $[n-i]$. Nun existieren c_{i-1} Möglichkeiten, wie die Elemente zur Linken von n angeordnet werden können und c_{n-i} Optionen die Elemente rechts

von n anzuordnen. Summieren wir nun über die i, so ergibt sich die Rekursion

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} c_{i-1} c_{n-i}. \tag{2.1}$$

Für die erzeugende Funktion $C(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{n\geq 0} c_n x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \sum_{i=1}^{n} c_{i-1} c_{n-i} x^n \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-1-i} x^n \\ &= 1 + x \sum_{n\geq 0} \sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i} x^n \\ &= 1 + xC^2(x). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Dies ist genau die erzeugende Funktion der Catalan-Zahlen. □

Nun haben wir mit den Identitäten $|S_n(132)| = |S_n(231)| = |S_n(312)| = |S_n(213)|$ und $|S_n(123)| = |S_n(321)|$ Folgendes bewiesen.

Korollar 2.3.4. *Für $q \in S_3$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$|S_n(q)| = C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}.$$

3 Die strenge Wilf-Äquivalenz

Die strenge Wilf-Äquivalenz ermöglicht uns eine Vielzahl von weiteren Wilf-Äquivalenzklassen zu ermitteln. Wie der Name schon vermuten lässt, ist sie eine spezifischere Form der uns bereits bekannten Wilf-Äquivalenz.

3.1 Partitionen, Young-Diagramme und Transversalen

Zunächst benötigen wir wiederum einige Grundlagen. Die folgenden Definitionen von Partitionen und Young-Diagrammen werden den meisten Lesern bereits ein Begriff sein. Für eine ausführlichere Behandlung dieser verweisen wir auf [57].

Definition 3.1.1. *Wir definieren eine* Partition *als endliche, monoton fallende Folge mit Elementen aus* $\mathbb{N}^+$. *Die Partition* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ ist von der Größe $m \in \mathbb{N}$ *genau dann, wenn* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = m$. *Die Größe einer Partition* λ *notieren wir mit* $|\lambda|$.
Die leere Folge () *bildet die* leere Partition. *Für diese schreiben wir auch einfach* $\emptyset$.

Bemerkung 3.1.2. Aus Bequemlichkeitsgründen identifizieren wir in dieser Arbeit eine Partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ auch immer mit der Folge $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, 0, 0, \ldots)$ und vice versa.

Definition 3.1.3. *Ein* Young-Diagramm *ist eine endliche Ansammlung von* $\square$*, die in linksbündigen Zeilen angeordnet sind, sodass die Anzahl der* $\square$ *in einer Zeile größer ist als die in der Zeile darunter.*

Die $\square$ in einem Young-Diagramm werden *Zellen* genannt und die Zelle in der i-ten Spalte und j-ten Zeile eines Young-Diagramms bezeichnen wir kurz als *Zelle* (i, j) (Zeilen werden von oben und Spalten beginnend von links gezählt). In diesem Sinne wollen wir folgende Bezeichnungen vereinbaren:

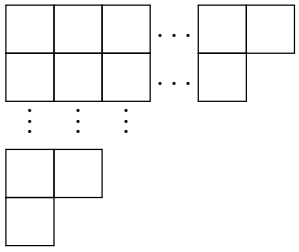


Abbildung 3.1: Ein Young-Diagramm.

Die Zelle (i, j)befindet sich *links* (bzw. *rechts*) *der Zelle* (i', j'), wenn $j < j'$ (bzw. $j > j'$) und *oberhalb* (bzw. *unterhalb*) *der Zelle* (i', j'), falls $i < i'$ (bzw. $i > i'$).

Für ein Young-Diagramm Y bildet die Folge $(y_1, y_2, \dots)$, wobei y_i die Anzahl der Zellen in der i-ten Zeile von Y bezeichnet, offensichtlich eine Partition. Wir nennen diese *die Partition von* Y. Trivialerweise können Partitionen somit eindeutig mit Young-Diagrammen identifiziert werden. Wir schreiben oft $Y(y_1, y_2, \dots)$ für das Young-Diagramm Y mit Partition $(y_1, y_2, \dots)$.

Für zwei Partitionen $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ und $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ definieren wir $\lambda \cup \mu$ als die Partition $(\max\{\lambda_1, \mu_1\}, \max\{\lambda_2, \mu_2\}, \dots)$, sowie $\lambda \cap \mu$ als die Partition $(\min\{\lambda_1, \mu_1\}, \min\{\lambda_2, \mu_2\}, \dots)$. Dementsprechend setzen wir $Y(\lambda) \cup Y(\mu) := Y(\lambda \cup \mu)$ und $Y(\lambda_1) \cap Y(\mu) := Y(\lambda \cap \mu)$.
In diesem Sinne ordnen wir auch Partitionen und Young-Diagramme, d.h.:

$$\lambda \subseteq \mu :\Leftrightarrow \lambda = \lambda \cap \mu, \quad \text{und} \quad Y(\lambda) \subseteq Y(\mu) :\Leftrightarrow Y(\lambda) = Y(\lambda) \cap Y(\mu).$$

Ebenfalls ist $\lambda' := (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots)$, wobei λ'_i die Anzahl der Zellen in der i-ten Spalte in $Y(\lambda)$ bezeichnet, als die *konjugierte Partition* von λ definiert. Für ein Young-Diagramm Y mit Partition μ bezeichnet Y' das Young-Diagramm mit Partition μ'. Y' wird das *konjugierte Young-Diagramm von* Y genannt.

Beispiel 3.1.4. Das Young-Diagramm $Y(n, n-1, \dots, 1)$ wird als *Stiege der Länge* n bezeichnet, i.Z. St_n.

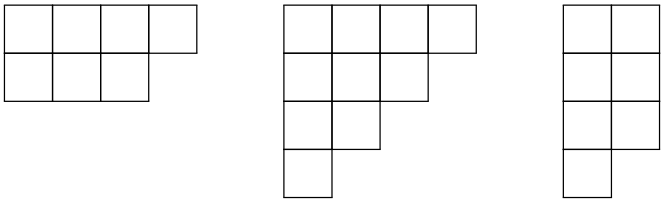


Abbildung 3.2: $Y(4,3)$, St_4 und $Y(2,2,2,1) = Y((4,2)')$.

Definition 3.1.5 ([7]). *Sei $Y(a)$ ein Young-Diagramm mit der Partition $a \in (\mathbb{N}^+)^n$. Wir erhalten eine* Transversale von $Y(a)$ *durch das Eintragen einer* 1 *oder einer* 0 *in jede Zelle von $Y(a)$, sodass in jeder Zeile und Spalte genau eine* 1 *steht. Steht höchstens eine* 1 *in jeder Spalte und Zeile, so sprechen wir von einer* partiellen Transversale. *$T(i,j)$ bezeichne den Eintrag in der Zelle (i,j).*

Beispiel 3.1.6. Sei $Y := Y(5,4,4,2,2)$. Mit

$$T_y(i,j) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i,j) \in \{(1,5),(2,3),(3,4),(4,1),(5,2)\}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

erhalten wir eine Transversale T_Y von Y. Siehe Abbildung 3.3.

0	0	0	0	1
0	0	1	0	
0	0	0	1	
1	0			
0	1			

Abbildung 3.3: Transversale auf $Y(5,4,4,2,2)$.

Definition 3.1.7. *Für eine partielle Transversale T_Y von einem Young-Diagramm Y und einem Young-Diagramm $Y^* \subseteq Y$ bezeichne $T_Y|_{Y^*}$ die durch*

$$T_Y|_{Y^*}(a,b) = 1 :\Leftrightarrow T_Y(a,b) = 1 \text{ für alle Zellen } (a,b) \text{ aus } Y^*,$$

definierte partielle Transversale auf Y^*.

Eine Transversale von einem Young-Diagramm $Y(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ existiert nur, wenn $a_1 = n$ und $St_n \subseteq Y(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ gilt. Erfüllt ein Young-Diagramm dies, so sprechen wir von einem *Young-Diagramm der Größe n*. Die Menge der Young-Diagramme der Größe n bezeichnen wir mit $\mathcal{Y}_n$.

Nun veranschaulichen wir die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mithilfe eines Gitters, sodass der Knoten $(0, 0)$ sich in der links oberen Ecke befindet und der Knoten (i, j) links von $(i, j + 1)$ liegt für $i \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{N}$. Analog liegt der Knoten $(i + 1, j)$ direkt unterhalb von (i, j). Siehe dazu Abbildung 3.4. Wir definieren einen *Gitterpfad von* $(n, 0)$ *nach* $(n - k_1, k_2)$ als eine Folge $(a_0, a_1, \ldots, a_{k_1+k_2})$ von Knoten in diesem Gitter, sodass $a_0 = (n, 0)$, $a_{k_1+k_2} = (n - k_1, k_2)$ und für alle $i \in \{0, 1, \ldots, k_1 + k_2 - 1\}$, a_{i+1} direkt rechts oder direkt oberhalb von a_i liegt. Wir können einen solchen Gitterpfad mit einer *r-u-Sequenz der Länge* $k_1 + k_2$ $w = w_1 w_2 \ldots w_{2n} \in \{r, u\}^{k_1+k_2}$ identifizieren. Der Knoten a_{i+1} befindet sich genau dann rechts von a_i, wenn $w_{i+1} = r$ gilt. Für $n_1, n_2 \in N$ definiert ein Gitterpfad von $(n_1, 0)$ nach $(0, n_2)$ offensichtlich ein Young-Diagramm und umgekehrt. (siehe dazu Abbildung 3.4). Young-Diagramme können somit durch Gitterpfade bzw. r-u-Sequenzen gegeben werden.

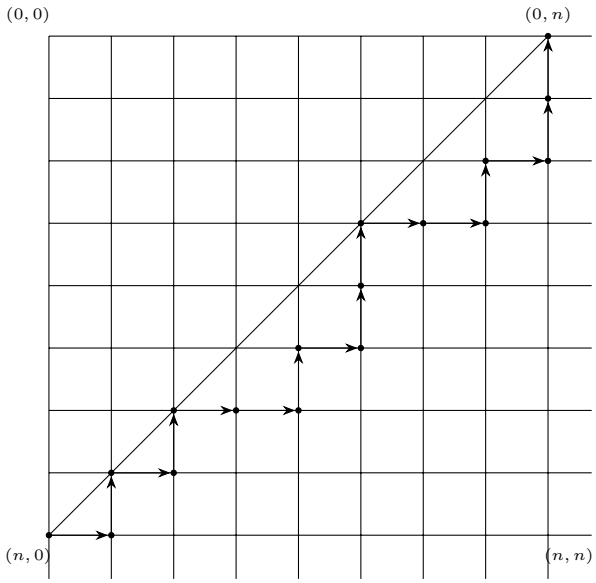


Abbildung 3.4: $Y(8, 8, 7, 5, 5, 4, 2, 1)$ gegeben durch w=rururruruurruruu.

Definition 3.1.8.

1. *Für ein Young-Diagramm Y bezeichne wir den zugehörigen Gitterpfad als* die Randsequenz von Y.

2. *Für ein Young-Diagramm Y mit Randsequenz $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ (wobei $a_i = (a_i^1, a_i^2)$) definieren wir ein $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als* Eckpunkt von Y *genau dann ,wenn ein $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ existiert, sodass $0 \leq x \leq a_i^1$ und $0 \leq y \leq a_i^2$ gilt. Die Menge der Eckpunkte von Y wird mit $E(Y)$ bezeichnet.*

Bemerkung 3.1.9. Ein Young-Diagramm Y mit Randsequenz $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ beinhaltet offensichtlich die Zellen a_i für $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$.

Verläuft ein Gitterpfad $(a_0, a_1, \ldots, a_{2n})$ von $(0, n)$ nach $(n, 0)$ mit $a_i = (a_{i,1}, a_{i,2})$ unterhalb der Diagonale von $(n, 0)$ nach $(0, n)$, d.h. Punkte (i, j) mit $i + j < n$ sind nicht in $(a_0, a_1, \ldots, a_{2n})$ vertreten, so definiert $(a_0, a_1, \ldots, a_{2n})$ (bzw. die dazugehörige r-u-Sequenz) ein Young-Diagramm der Größe n (siehe Abbildung 3.4).

3.2 Verallgemeinerung des Satzes von Dilworth

In diesem Abschnitt werden für uns noch nützliche ordnungstheoretische Aussagen zusammengeführt. Für die Beweise der Sätze verweisen wir auf die jeweiligen angeführten Literaturverweise.

Sei $(P, \leq)$ eine endliche partiell geordnete Menge, so besagt der *Satz von Dilworth* [24], dass die maximale Größe einer Antikette in P der minimalen Anzahl von disjunkten Mengen, die eine Partitionierung von P bilden, entspricht.
C. Greene liefert uns in [34] eine Verallgemeinerung.

Bemerkung 3.2.1. Sei $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Um Ausdrücke nicht unnötig in die Länge zu ziehen, bezeichnen wir für eine Teilmenge Q von P die partielle geordnete Menge $(Q, \leq \cap (Q \times Q))$ im Folgenden immer einfach mit $(Q, \leq)$.

Definition 3.2.2. *Sei $(P, \leq)$ eine endliche partiell geordnete Menge.*

$$\lambda(P, \leq) := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \text{ mit } \lambda_k = c_k - c_{k-1} \text{ für } k \in \mathbb{N}^+,$$
$$\tilde{\lambda}(P, \leq) := (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots) \text{ mit } \tilde{\lambda}_k = d_k - d_{k-1} \text{ für } k \in \mathbb{N}^+,$$

wobei c_k (bzw. d_k) die maximale Mächtigkeit einer Vereinigung von k Ketten (bzw. Antiketten) aus P bezeichnet.

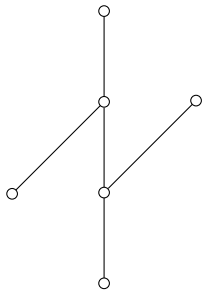
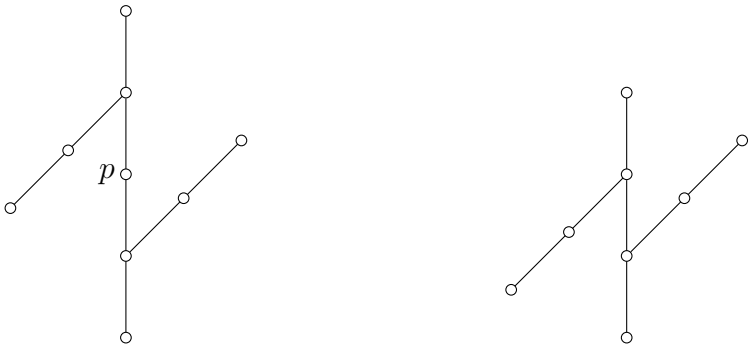


Abbildung 3.5: Hasse-Diagramm

Satz 3.2.3. [34] *Für eine partiell geordnete Menge $(P, \leq)$ bilden die Folgen $\lambda(P, \leq)$ und $\tilde{\lambda}(P, \leq)$ zwei zueinander konjugierte Partitionen der Größe $|P|$ (siehe dazu Bemerkung 3.1.2).*

Beispiel 3.2.4. Für eine partiell geordnete Menge $(P, \leq)$ mit Hasse-Diagramm nach Abbildung 3.5 gilt $\lambda(P, \leq) = (4, 2)$.

Satz 3.2.5 (Monotoniesatz)**.** [29] *Sei $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und $p \in P$ ein maximales oder minimales Element in $(P, \leq)$, dann gilt $\lambda(P \setminus \{p\}, \leq) \subset \lambda(P\setminus, \leq)$.*



(a) $(P, \leq)$ (b) $(P \setminus \{p\}, \leq)$

Abbildung 3.6: Monotoniesatz

Bemerkung 3.2.6. Sei $(P, \leq)$ die partiell geordnete Menge in Abbildung 3.6. Es gilt $\lambda(P, \leq) = (5, 3, 1)$ und $\lambda(P\setminus\{p\}, \leq) = (4, 4)$. D.h. in Satz 3.2.5 kann die Voraussetzung,

dass p ein maximales bzw. minimales Element in $(P, \leq)$ bildet, nicht vernachlässigt werden.

3.3 Definition und Eigenschaften der strengen Wilf-Äquivalenz

Die strenge Wilf-Äquivalenz wird mithilfe von Young-Diagrammen und deren Transversalen formuliert. In diesem Abschnitt folgen wir im Wesentlichen [55].

Definition 3.3.1. *Sei $k, n \in \mathbb{N}^+$ mit $k \leq n$, $P \in \mathcal{P}_k$ und T_Y eine partielle Transversale von einem Young-Diagramm $Y := Y(a_1, a_2 \ldots, a_n)$.*
T_Y enthält *P genau dann, wenn zwei Mengen $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}, \{r_1, r_2, \ldots, r_k\} \subseteq [n]$ mit $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_k$ und $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_k$ existieren, sodass für alle $i, j \in [k]$ die Zelle (c_i, r_j) in Y vorhanden ist und*

$$\begin{pmatrix} T_y(c_1, r_1) & T_y(c_1, r_2) & \ldots & T_y(c_1, r_n) \\ T_y(c_2, r_1) & T_y(c_2, r_2) & \ldots & T_y(c_2, r_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_y(c_k, r_1) & T_y(c_k, r_2) & \ldots & T_y(c_k, r_n) \end{pmatrix} = P,$$

gilt.
Wir sprechen davon, dass die Zellen $(c_1, r_1), (c_1, r_2), \ldots, (c_2, r_1), (c_2, r_2), \ldots, (c_k, r_k)$ die Matrix *P* in *T_y* bilden. *Anderenfalls* meidet *T_y die Matrix P (bzw. T_Y ist P-*meidend*).*

Bemerkung 3.3.2. Meidet eine Transversale, die zu einer Permutation p assoziierten Permutationsmatrix, so nennen wir die Transversale auch *p-meidend*.

Definition 3.3.3. *Für ein Young-Diagramm Y ist die Menge aller P-meidenden Transversalen von Y als $S_Y(P)$ definiert.*

Definition 3.3.4. *Zwei Permutationsmatrizen P_1 und P_2 sind* streng Wilf-äquivalent *genau dann, wenn $|S_Y(P_1)| = |S_Y(P_2)|$ für jedes Young-Diagramm Y gilt. Wir schreiben dann $P_1 \overset{s.W.}{\sim} P_2$.*

Sind nun zwei Permuationsmatrizen P_1 und P_2 streng Wilf-äquivalent, so gilt

$$|S_n(P_1)| = |S_{Y(a_1,a_2,\ldots,a_n)}(P_1)| = |S_{Y(a_1,a_2,\ldots,a_n)}(P_2)| = |S_n(P_2)|,$$

für $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = n$. Aus der strengen Wilf-Äquivalenz zweier Permutationsmatrizen folgt also deren Wilf-Äquivalenz.

Satz 3.3.5 ([55]). *Sei $M_1, M_2 \in \mathcal{P}_n$ mit $M_1 \overset{s.W.}{\sim} M_2$, dann gilt*

$$P_1 := \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \overset{s.W.}{\sim} \begin{bmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} =: P_2,$$

für eine beliebige Matrix $A \in \mathcal{P}_k$ mit $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Laut Voraussetzung existiert eine Bijektion von $S_{\tilde{Y}}(M_1)$ nach $S_{\tilde{Y}}(M_1)$, welche wir mit $\Pi_{\tilde{Y}}$ bezeichnen, für ein beliebiges Young-Diagramm $\tilde{Y}$.
Wir konstruieren für ein Young-Diagramm Y eine Bijektion $\alpha : S_Y(P_1) \to S_Y(P_2)$. Dies geschieht in drei Schritten. Sei $T_Y \in S_Y(P_1)$.

Schritt 1: Befinden sich Zellen unterhalb und rechts von der Zelle (i, j), die die Matrix A in T_y bilden, so lassen wir die Zelle (i, j) unmarkiert. Anderenfalls wird sie markiert.

Schritt 2: Für jede markierte Zelle (i, j) mit $T_Y(i, j) = 1$ markieren wir die Zellen in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von Y.

Man beachte, dass nach Schritt 1 für eine unmarkierte Zelle (i, j) auch alle Zellen links und oberhalb von der Zelle (i, j) unmarkiert sind. Die unmarkierten Zellen bilden also ein Young-Diagramm Y_1 und mit den zugehörigen Einträgen eine partielle Transversale T_{Y_1}. T_{Y_1} muss nun jedoch keine Transversale von Y_1 bilden, da eventuell in Zeilen und/oder Spalten keine Zelle in T_{Y_1} mit Eintrag 1 existiert. Diese Zeilen bzw. Spalten werden nun in Schritt 2 markiert. Die unmarkierten Zellen bilden nun ein Young-Diagramm Y_2 und mit ihren Einträgen erhalten wir eine Transversale T_{Y_2} von diesem.

Schritt 3: Wir ersetzen nun die Einträge der unmarkierten Zellen mit jenen von $\Pi(T_{Y_2})$ und bezeichnen das Ergebnis mit $\alpha(T_Y)$.

Offensichtlich gilt $\alpha(T_y) \in S_Y(P_2)$.
Nun sei für ein Young-Diagramm $\bar{Y}$, $\bar{\alpha} \ : \ S_{\bar{Y}}(P_2) \to S_{\bar{Y}}(P_1)$ definiert wie folgt. Sei $T_{\bar{Y}} \in S_{\bar{Y}}(P_2)$.

Schritt 1: Befinden sich Zellen unterhalb und rechts von der Zelle (i, j), die die Matrix A in $T_{\bar{Y}}$ bilden, so lassen wir die Zelle unmarkiert. Anderenfalls wird die Zelle markiert.

Schritt 2: Für jede markierte Zelle (i, j) mit $T_{\bar{Y}}(i, j) = 1$ markieren wir die Zellen in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von $\bar{Y}$.

Das von den unmarkierten Zellen gebildete Young-Diagramm bezeichnen wir mit $\bar{Y_2}$ und die zugehörige Transversale mit $T_{\bar{Y_2}}$.

Schritt 3: Wir ersetzen nun die Einträge der unmarkierten Zellen mit jenen von $\Pi^{-1}(T_{\bar{Y_2}})$ und bezeichnen das Ergebnis mit $\alpha(T_{Y_2})$.

Bis auf die Verwendung der Inversen von $\Pi_{\bar{Y_2}}$ in Schritt 3, gehen wir bei der Definition von $\bar{\alpha}$ analog zur Definition von α vor.
Da für $T_Y \in S_Y(P_1)$ die unmarkierten Zellen bei der Bildung von $\alpha(T_Y)$ mit jenen von $\alpha(T_Y)$ bei der Bildung von $\bar{\alpha}(\alpha(T_Y))$ übereinstimmen und Π_Y eine Bijektion ist, gilt offensichtlich $\bar{\alpha}(\alpha(T_Y)) = T_Y$ und analog $\alpha(\bar{\alpha}(T_{\bar{Y}})) = T_{\bar{Y}}$ für $T_{\bar{Y}} \in S_Y(P_2)$. □

Bemerkung 3.3.6 ([7])**.** Man beachte, dass Satz 3.3.5 nicht auf die klassische Wilf-Äquivalenz anwendbar ist. Als Gegenbeispiel können die Wilf-äquivalenten Permutationen 1234 und 2143 angeführt werden. Für diese gilt

$$|S_9(123456)| = 344.837 < 344.838 = |S_9(214356)|.$$

3.4 Strenge Wilf-Äquivalenz von I_k und J_k

Die Wilf-Äquivalenz von I_k und J_k folgt aus einem simplen Symmetrieargument. Es zeigt sich, dass auch die strenge Wilf-Äquivalenz beider Matrizen zutrifft, doch die Argumentation gestaltet sich erheblich schwieriger. *J. Backelin, J. West* und *G. Xin* gelang es in [7] die Richtigkeit von $I_k \overset{s.W.}{\sim} J_k$ zu zeigen. Wir folgen hier einem Zugang nach *C. Krattenthaler* [40].

Definition 3.4.1 ([40]). *Sei T_Y eine partielle Transversale von einem Young-Diagramm Y und W eine Abbildung von $E(Y)$ auf die Menge aller Partitionen.*
Gilt für alle $(i,j) \in E(Y)$

1. *falls $(i,j-1) \in E(Y)$, dann $W(i,j) \supseteq W(i,j-1)$ und $|W(i,j)| \leq |W(i,j-1)|+1$,*
2. *falls $(i-1,j) \in E(Y)$, dann $W(i,j) \supseteq W(i-1,j)$ und $|W(i,j)| \leq |W(i-1,j)|+1$,*
3. *$W(i,j) = W(i,j-1)$ genau dann, wenn $T_Y(k,j) = 0$ für alle $k \in [j]$ und $W(i-1,j) = W(i-1,j-1)$ gilt,*
4. *$W(i,j) = W(i-1,j)$ genau dann, wenn $T_Y(i,l) = 0$ für alle $l \in [j]$ und $W(i,j-1) = W(i-1,j-1)$ gilt,*

so nennen wir W ein Wachstumsdiagramm von T_Y.

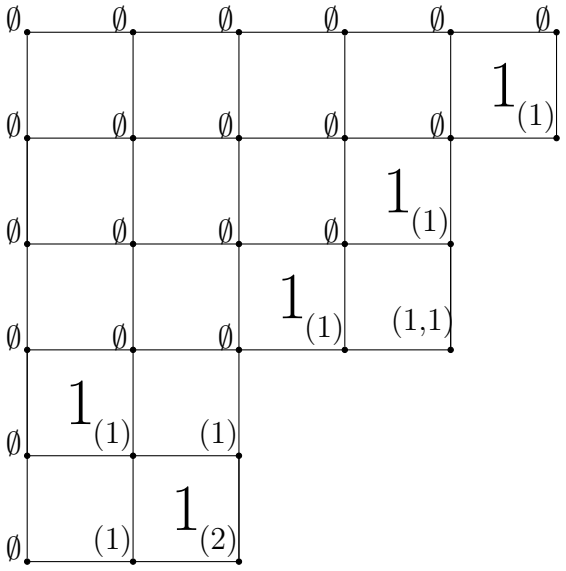


Abbildung 3.7: Wachstumsdiagramm zu Transversale aus Beispiel 3.1.6.

Sei Y ein Young-Diagramm und T_Y eine partielle Transversale auf Y. Wir interessieren uns für Wachstumsdiagramme W von T_Y, die folgende konstruktiven Regeln für alle $(i,j) \in E(Y)$ mit $i,j \geq 1$ erfüllen [40]:

(F1) Ist $W(i,j-1) = W(i-1,j) = W(i-1,j-1)$ und $T_Y(i,j) = 0$, so gilt $W(i,j) = W(i,j-1)$.

(F2) Aus $W(i-1,j-1) = W(i-1,j) \neq W(i,j-1)$ folgt $W(i,j) = W(i,j-1)$.

(F3) Aus $W(i-1,j-1) = W(i,j-1) \neq W(i-1,j)$ folgt $W(i,j) = W(i-1,j)$.

(F4) Sind $W(i-1,j-1), W(i,j-1)$ und $W(i-1,j)$ paarweise verschieden, so folgt $W(i,j) = W(i-1,j) \cup W(i,j-1)$.

(F5) Sei $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) = W(i,j-1) = W(i-1,j) \neq W(i-1,j-1) = (\bar{\lambda_1}, \bar{\lambda_2}, \bar{\lambda_3}, \dots)$ und k die kleinste natürliche Zahl, sodass $\lambda_k - \bar{\lambda}_k = 1$, dann folgt $W(i,j) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1} + 1, \lambda_{k+2}, \dots)$.

(F6) Ist $W(i,j-1) = W(i-1,j) = W(i-1,j-1) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$ und $T_Y(i,j) = 1$, dann folgt $W(i,j) = (\lambda_1 + 1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$.

Die Regeln (F1)-(F4) gelten somit für ein beliebiges Wachstumsdiagramm, genau so wie die Tatsache, dass sich die Größe der Partition $W(i,j)$ in (F5) und (F6) von $W(i-1,j)$ und $W(i,j-1)$ um genau 1 unterscheidet. Die Wachstumsdiagramme, die für uns von Interesse sind, unterscheiden sich also von anderen Wachstumsdiagrammen durch den Zusammenhang von $W(i,j)$ und den Partitionen $W(i-1,j), W(i,j-1)$ sowie $W(i-1,j-1)$ in (F5) als auch (F6).

Ist eine partielle Transversale T_Y von einem Young-Diagramm $Y(a_1, \dots, a_n)$ und eine Funktion F von $(0 \times \{0, \dots, a_1\}) \cup (\{0, \dots, n\} \times \{0\})$ auf die Menge aller Partitionen, welche 1. und 2. aus Definition 3.4.1 erfüllen, gegeben, so kann F durch algorithmische Anwendung von $(F1) - (F6)$ eindeutig zu einem Wachstumsdiagramm W von T_y erweitert werden, sodass $W_{|(0\times\{0,\dots,a_1\})\cup(\{0,\dots,n\}\times\{0\})} = F$ gilt und W $(F1) - (F6)$ erfüllt. Aufgrund der Punkte 3. und 4. aus Definition 3.4.1 gilt in $(F2)$ sowie $(F3)$ $T_y(i,j) = 0$. Fordern wir an F noch zusätzlich, dass $F(i-1,0) \subset F(i,0)$ genau dann gilt, wenn in der i-ten Zeile von T_Y keine 1 steht und analog $F(0,j-1) \subset F(0,j)$ genau dann gilt, wenn sich in der j-ten Spalte von T_y keine 1 befindet, so kann auf $T_Y(i,j) = 0$ in $(F4)$ und $(F5)$ geschlossen werden. Dies folgt aus der Tatsache, dass $W(i,j-1) \neq W(i-1,j-1)$ (bzw. $W(i-1,j) \neq W(i-1,j-1)$) nur noch dann in einer Zeile (bzw. Spalte) mit 1 auftreten kann, wenn $(F6)$ bereits angewandt wurde.
Nun lassen sich „Umkehrregeln“ zu $(F1) - (F6)$ formulieren. D.h. erfüllt ein Wachstumsdiagramm auf einer partiellen Transversale T_Y $(F1) - (F6)$ und gilt zusätzlich

$W(i-1,0) \subset W(i,0)$ genau dann, wenn T_Y in der i-ten Zeile keine 1 besitzt und $W(0,j-1) \subset W(0,j)$ genau dann, wenn T_Y in der j-ten Spalte keine 1 besitzt, so erfüllt W auch die folgenden *Umkehrregeln* [40]:

(B1) Aus $W(i,j-1) = W(i-1,j) = W(i,j)$ folgt $W(i-1,j-1) = W(i,j-1)$ und $T_Y(i,j) = 0$.

(B2) Aus $W(i,j) = W(i-1,j) \neq W(i,j-1)$ folgt $W(i-1,j-1) = W(i,j-1)$ und $T_Y(i,j) = 0$.

(B3) Aus $W(i,j) = W(i,j-1) \neq W(i-1,j)$ folgt $W(i-1,j-1) = W(i-1,j)$ und $T_Y(i,j) = 0$.

(B4) Sind $W(i,j), W(i,j-1)$ und $W(i-1,j)$ paarweise verschieden, so folgt $W(i-1,j-1) = W(i-1,j) \cap W(i,j-1)$ und $T_Y(i,j) = 0$.

(B5) Falls $W(i-1,j) = W(i,j-1) = (\lambda_1, \lambda_2 \dots)$ und $W(i-1,j)$ sich für $k \geq 2$ im k-ten Element zu $W(i,j)$ unterscheidet, dann ist $W(i-1,j-1) = (\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_{k-1} - 1, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots)$ und $T_Y(i,j) = 0$.

(B6) Falls $W(i-1,j) = W(i,j-1)$ und $W(i-1,j)$ sich im ersten Element zu $W(i,j)$ unterscheidet, dann ist $W(i-1,j-1) = \Lambda_{T_Y}(i-1,j)$ und $T_Y(i,j) = 1$.

Definition 3.4.2. *Wir definieren mit* $T_Y^{-1}(\{1\})$ *die Menge* $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid T_Y(i,j) = 1\}$ *für eine partielle Transversale* T_Y *von einem Young-Diagramm* Y*.*

Bemerkung 3.4.3. Betrachten wir eine partielle Transversale T_Y auf das Young-Diagramm Y und definieren eine Relation $\preceq$ auf Y durch

$$(i_1, j_1) \preceq (i_2, j_2) :\Leftrightarrow i_1 \leq i_2 \text{ und } j_1 \leq j_2,$$

so bildet $(T_Y^{-1}(\{1\}), \preceq)$ offensichtlich eine partiell geordnete Menge.
Sei $k \in \mathbb{N}^+$. In $T_Y^{-1}(\{1\})$ existieren k-viele paarweise verschiedene Elemente $p_1, p_2, ..., p_k$ mit $p_1 \preceq p_2 \preceq \cdots \preceq p_k$ genau dann, wenn T_Y die Matrix I_k enthält. D.h. T_Y meidet I_k genau dann, wenn die längste Kette in $(T_Y^{-1}(\{1\}), \preceq)$ höchstens von der Länge $k-1$ ist. Analog meidet T_Y genau dann J_k, falls die längst Antikette in $(T_Y^{-1}(\{1\}), \preceq)$ aus höchstens $k-1$ Elementen besteht.

Mit Notation nach Definition 3.2.2 zeigt sich:

Satz 3.4.4 ([18])**.** *Sei T_Y eine partielle Transversale auf ein Young-Diagramm Y, so ist durch*

$$\Lambda_{T_Y}(i,j) := \lambda(T_Y^{-1}(\{1\}) \cap ([i] \times [j]), \preceq),$$

ein Wachstumsdiagramm von T_y gegeben.

Beweis. Da für $(i,j) \in E(Y)$ mit $(T_Y^{-1}(\{1\}) \cap ([i] \times [j]), \preceq)$ eine partiell geordnete Menge gegeben ist, bildet $\Lambda_{T_Y}(i,j)$ laut Satz 3.2.3 eine Partition.
Ist $T_Y(k,j) = 0$ für alle $k \in [i]$, folgt $T_Y^{-1}(\{1\}) \cap ([i] \times [j]) = T_Y^{-1}(\{1\}) \cap ([i-1] \times [j])$. Existiert nun (genau) ein $k \in [i]$ mit $T_y(k,j) = 1$, so bildet (k,j) ein maximales Element in $T_Y^{-1}(\{1\}) \cap ([i] \times [j])$ und wir erhalten das Ergebnis aus den Sätzen 3.2.3 und 3.2.5. □

Satz 3.4.5. [18] *Sei Y ein Young-Diagramm und T_Y eine partielle Transversale auf Y. Λ_{T_Y} aus Satz 3.4.4 erfüllt die konstruktiven Regeln (F1)-(F6).*

Beweis. Wie schon erwähnt gilt (F1)-(F4) für jedes Wachstumsdiagramm zu einer partiellen Transversalen. Für die Fälle (F5) und (F6) verweisen wir auf [18]. □

Definition 3.4.6. [50] *Sei $w = w_1 w_2 \dots w_k$ eine r-u-Sequenz. Eine Folge von Partitionen $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ in der sich für $i \in [k]$ die Größe von λ_{i-1} und λ_i um höchstens 1 unterscheiden und zusätzlich $\lambda_{i-1} \subseteq \lambda_i$ gilt, wenn $w_i = r$ ist, sowie $\lambda_{i-1} \supseteq \lambda_i$ für $w_i = u$ gilt, nennen wir* oszillierendes Tableau vom Typ w und Form λ_0/λ_k.

Satz 3.4.7. [40] *Sei ein Young-Diagramm Y gegeben durch die r-u-Sequenz $w = w_1 w_2 \dots w_k$ und mit Randsequenz $r = (r^0, r^2, \dots, r^k)$. Für eine partielle Transversale T_Y von Y ist $f(T_Y) := (\Lambda_{T_Y}(r^0), \Lambda_{T_Y}(r^1), \dots, \Lambda_{T_Y}(r^k))$ eine Bijektion zwischen den partiellen Transversalen von Y und den oszillierenden Tableaus vom Typ w und Form $\emptyset/\emptyset$.*

Beweis. Sei $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ die Partition von Y. Dass $f(T_Y)$ ein oszillierendes Tableau vom Typ w und Form $\emptyset/\emptyset$ beschreibt, folgt aus der Tatsache, dass Λ_{T_Y} ein Wachstumsdiagramm zu T_Y bildet (Satz 3.4.4) und $\Lambda_{T_Y}(r^0) = \Lambda_{T_Y}(n,0) = \emptyset = \Lambda_{T_Y}(0,a_1) = \Lambda_{T_Y}(r^k)$. Durch Satz 3.4.5 folgt die Gültigkeit von $(F1)-(F6)$ für Λ_{T_Y} und

da zusätzliche $\Lambda_{T_Y}(i,j) = \emptyset$ für $(i,j) \in (\{0,1,\ldots,n\} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{0,1,\ldots,a_1\})$ gilt, folgt die Eindeutigkeit von $f(T_Y)$. Es können ebenfalls die Umkehrregeln $(B1) - (B6)$ angewandt werden, was die Injektivität von f gewährleistet.
Es bleibt zu zeigen, dass für ein beliebiges oszillierendes Tableau $(\lambda_0, \ldots, \lambda_k)$ vom Typ w und Form $\emptyset/\emptyset$ eine partielle Transversale $\overline{T_Y}$ von Y existiert, sodass $f(\overline{T_Y}) = (\lambda_0, \ldots, \lambda_k)$ gilt. Dies zeigt sich durch Induktion nach der Anzahl der Zellen von Y. □

Satz 3.4.8. [40] *Für ein Young-Diagramm Y und $n, s, t, \in \mathbb{N}$ sei $N(Y, n, s, t)$ die Menge aller partiellen Transversalen von Y, die exakt n Zellen von Y auf 1 abbilden, und die Matrizen I_s, J_t enthalten, jedoch I_{s+1} und J_{t+1} meiden. Dann gilt*

$$|N(Y, n, s, t)| = |N(Y, n, t, s)|.$$

Beweis. Sei $T_Y \in N(Y, n, s, t)$ und $r = (r^0 = (r_1^0, r_2^0), r^1 = (r_1^1, r_2^1), \ldots, r^k = (r_1^k, r_2^k))$ die Randsequenz von Y. Wir wenden die Bijektion f aus Satz 3.4.7 auf T_Y an und erhalten das oszillierende Tableau $f(T_Y) = (\Lambda_{T_Y}(r^0), \Lambda_{T_Y}(r^1), \ldots, \Lambda_{T_Y}(r^k))$ vom Typ w und Form $\emptyset/\emptyset$. Für $i \in \{0,1,\ldots,k\}$ ist die längste Kette in $(T_Y^{-1}(1) \cap ([r_1^i] \times [r_2^i], \preceq)$ gegeben durch $\Lambda_{T_Y}(r^i)_1$ und die längste Antikette durch $\Lambda_{T_Y}(r^i)_1'$ (zur Wiederholung, $\Lambda_{T_Y}(r^i)'$ beschreibt die konjugierte Partition von $\Lambda_{T_Y}(r^i)$). Wegen Bemerkung 3.4.3 gilt für alle $l, m \in \{0,1,\ldots,k\}$ $\Lambda_{T_Y}(r^l)_1 \leq s$ und $\Lambda_{T_Y}(r^m)_1' \leq t$, sowie für mindestens ein l und ein m die Gleichheit.
Die Abbildung $T_Y \mapsto f^{-1}(\Lambda_{T_Y}(r^0)', \Lambda_{T_Y}(r^1)', \ldots, \Lambda_{T_Y}(r^k)')$ ist offensichtlich eine Bijektion und liefert uns das gewünschte Ergebnis. □

Satz 3.4.9 ([40])**.** *Für $k \in N^+$ gilt*

$$I_k \overset{s.W.}{\sim} J_k.$$

Beweis. Existiert eine Transversale mit n Einsen von einem Young-Diagramm Y, so muss dieses von der Größe n sein. Sei Y ein beliebiges Young-Diagramm der Größe n. Durch Satz 3.4.8 schließen wir auf

$$|S_Y(I_k)| = \sum_{s<k, t\geq 1} |N(Y, n, s, t)| = \sum_{s<k, t\geq 1} |N(Y, n, t, s)| = |S_Y(I_k)|.$$

□

Korollar 3.4.10. *Für $k, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{P}_n$ gilt*

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \overset{s.W.}{\sim} \begin{bmatrix} J_k & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 3.3.5 und Satz 3.4.9. □

Korollar 3.4.11. *Sei $k, n \in \mathbb{N}^+$ mit $k \leq n$ und $p \in S_{n-k}$. Die Permutationen $(n, n-1, \ldots, n-k+1, p)$ und $(n-k+1, n-k+2, \ldots, n, p)$ sind Wilf-äquivalent.*

Beweis. Laut Korollar 3.4.10 sind die Permutationsmatrizen von $(n, n-1, \ldots, n-k+1, p)^c$ und $(n-k+1, n-k+2, \ldots, n, p)^c$ streng Wilf-äquivalent und somit auch Wilf-äquivalent. Mit Satz 2.2.7 folgt die Wilf-Äquivalenz von $(n, n-1, \ldots, n-k+1, p)$ und $(n-k+1, n-k+2, \ldots, n, p)$. □

3.5 Die strenge Wilf-Äquivalenz von P_{231} und P_{312}

Aus dem vorherigen Abschnitt geht die strenge Wilf-Äquivalenz der Permutationsmatrizen I_3 und J_3 deutlich hervor, ebenso $I_2 \overset{s.W.}{\sim} J_2$. Mit Satz 3.3.5 lässt sich somit auf

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{s.W.}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{s.W.}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

schließen.

Z. Stankova und J. West zeigten 2001 in [55] die strenge Wilf-Äquivalenz der Permutationsmatrizen von 231 und 312. Die Einteilung der Permutationen bis zur Länge $n \leq 7$ in Wilf-Äquivalenzklassen wurde damit vervollständigt. Jedoch liefert der Beweis in [55] keine eindeutige Bijektion und stellt sich als etwas kompliziert heraus. 2012 lieferten J. Bloom und D. Sarazino in [11] eine simple Bijektion zwischen 231-meidenden und 312-meidenden Transversalen. Definitionen und die zugrunde liegenden Ideen der folgenden Beweise wurden aus [11] übernommen. Es wurden teils selbsterklärende Lemmata hinzugefügt und die Beweise teils abgeändert, da wir bereits Informationen über die Halbordnung $(T_Y^{-1}(\{1\}), \preceq)$ gesammelt haben.

Bemerkung 3.5.1. Wir bezeichnen die Permutationsmatrix von 231 mit P_{231} und die von 312 mit P_{312}.

Lemma 3.5.2 ([11])**.** *Sei Y ein Young-Diagramm, $T_Y \in S_Y(P_{231})$ und (i,j) eine Zelle von Y. Wir nehmen an es existiert eine Zelle (i,k) von Y mit $k < i$ und $T_Y(i,k) = 1$. Existiert zusätzlich noch eine Zelle $(i_1, j_1) \in [i] \times [j]$ rechts von (i,k) (also $j_1 > k$) mit $T_Y(i_1, j_1) = 1$, so ist $\Lambda_{T_Y}(i-1,j)_1 = \Lambda_{T_Y}(i,j)_1$ (Λ_{T_Y} wie in Satz 3.4.4).*

Beweis. Wir bezeichnen die partielle Ordnung $(T_Y^{-1}(\{1\}) \cap ([i] \times [j]), \preceq)$ in diesem Beweis als $(P, \preceq)$.
$\Lambda_{T_Y}(i,j)_1$ ist die maximale Länge einer Kette in $(P, \preceq)$. Da (i,k) als maximales Element in $(P, \preceq)$ fungiert, existiert eine Kette in $(P, \preceq)$, die (i,k) als größtes Element bezüglich $\preceq$ besitzt. Sei K eine längste Kette in $(P, \preceq)$ mit größtem Element (i,k) bezüglich $\preceq$. Wir erhalten $\Lambda_{T_Y}(i,j)_1 = \Lambda_{T_Y}(i,j-1)_1$, indem wir zeigen, dass eine mindestens genauso lange Kette wie K in $(P, \preceq)$ existiert, jedoch (i,k) nicht als größtes Element bezüglich $\preceq$ besitzt.
Sei (a,b) eine Zelle in Y mit $T_Y(a,b) = 1$ und $(a,b) \prec (i,k)$, dann gilt $a < i$ und $b < k$. Nun muss $b < j_1$ sein, da T_Y sonst P_{231} enthalten würde. Laut Voraussetzung gilt $b < k < j_1$. Weiters folgt $a < i_1$, da T_Y sonst P_{231} enthalten würde. So erhalten wir $(a,b) \prec (i_1, j_1)$. D.h. die durch den Austausch von (i,k) mit (i_1, j_1) als größtes Element in K hervorgehende Kette liefert das gewünschte Ergebnis. □

Definition 3.5.3. *Angelehnt an Satz 3.4.7 definieren wir für eine Transversale T_Y von einem Young-Diagramm Y der Größe $n \in \mathbb{N}$ mit Randsequenz $(r^0, r^1, \ldots, r^{2n})$*

$$f_1(T_Y) := (\Lambda_{T_Y}(r^0)_1, \Lambda_{T_Y}(r^1)_1, \ldots, \Lambda_{T_Y}(r^{2n})_1).$$

f_1 bildet also ein Abbildung von der Menge der Transversalen von Y auf $\mathbb{N}^{2n+1}$.

Bemerkung 3.5.4. Für ein Young-Diagramm Y der Größe n mit Randsequenz $r = (r^0, r^1, \ldots, r^{2n})$ und eine Transversale T_Y von Y können wir aus dem vorhergehenden Abschnitt bereits auf

1. $\Lambda_{T_Y}(r^0)_1 = \Lambda_{T_Y}(r^{2n})_1 = 0$,
2. $\Lambda_{T_Y}(r^{i-1})_1 \leq \Lambda_{T_Y}(r^i)_1 \leq \Lambda_{T_Y}(r^{i-1})_1 + 1$, falls r^{i-1} sich links von r^i befindet,

3. $\Lambda_{T_Y}(r^i)_1 \leq \Lambda_{T_Y}(r^{i-1})_1 \leq \Lambda_{T_Y}(r^i)_1 + 1$, falls r^{i-1} sich unterhalb von r^i befindet,

schließen.

Satz 3.5.5 ([11])**.** *Sei Y ein Young-Diagramm der Größe $n \in \mathbb{N}^+$ und $T_Y \in S_Y(P_{231})$ (bzw. $T_Y \in S_Y(P_{312})$). Es lässt sich T_Y eindeutig aus $f_1(T_Y)$ rekonstruieren. D.h. $f_1|_{S_Y(P_{231})}$ (bzw. $f_1|_{S_Y(P_{312})}$) ist injektiv.*

Beweis. Sei $r = (r_0, r_1 \ldots, r_{2n})$ die Randsequenz von Y und $(k, n) \in r$, sodass $(k+1, n) \notin r$. Die Elemente $(k, n-1), (k, n), (k-1, n), \ldots, (0, n) \in E(Y)$ bilden also die letzten $k+2$ Glieder von r. Wir wählen j als größtes $j \in [k]$, sodass $\Lambda_{T_Y}(j-1, n)_1 < \Lambda_{T_Y}(j, n)_1$ ist (aus Bemerkung 3.5.4 folgt die Existenz eines solchen j (siehe dazu Abbildung 3.8)). Die Zellen $(j+1, n), \ldots (k, n)$ von Y haben also keine 1 in T_Y eingetragen. Für $i \in [n]$ bezeichne z_i die Zelle in der i-ten Zeile von Y, für die $T_Y(z_i) = 1$ gilt. Die Zelle z_j muss nun (j, n) sein, da sonst laut Lemma 3.5.2 $\Lambda_{T_Y}(j-1, n)_1 = \Lambda_{T_Y}(j, n)_1$ gelten würde. Daraus folgt $\Lambda_{T_Y}(j, n-1)_1 = \Lambda_{T_Y}(j-1, n)_1$ und $\Lambda_{T_Y}(i, n-1)_1 = \Lambda_{T_Y}(i, n)_1$ für $i \in \{0, \ldots, j-1\}$. Die Zellen $z_{j+1}, \ldots, z_k$ bilden eine Antikette in $(T_Y^{-1}(\{1\}) \cap ([k] \times [n]), \preceq)$, anderenfalls würde T_Y die Matrix P_{231} enthalten. Durch wiederholte Anwendung von Lemma 3.5.2 ergibt sich $\Lambda_{T_Y}(k, n-1)_1 = \Lambda_{T_Y}(k-1, n-1)_1 = \cdots = \Lambda_{T_Y}(j+1, n-1)_1$.
Sei Y^* das durch die Elimination der j-ten Zeile und n-ten Spalte von Y hervorgehende Young-Diagramm und analog T_{Y^*} die durch Elimination der j-ten Zeile und n-ten Spalte von T_Y hervorgehende Transversale von Y^*, so ist offensichtlich $T_{Y^*} \in S_{Y^*}(P_{231})$ und (siehe dazu Abbildung 3.8)

$$f_1(T_{Y^*}) = (\Lambda_{T_Y}(r^0)_1, \Lambda_{T_Y}(r^1)_1, ..., \Lambda_{T_Y}(k, n\text{-}1)_1, ..., \Lambda_{T_Y}(j, n\text{-}1)_1, \Lambda_{T_Y}(j\text{-}2, n\text{-}1)_1, ..., \Lambda_{T_Y}(0, n\text{-}1)_1).$$

Wir können durch wiederholte Anwendung dieser Prozedur alle Elemente aus $T_Y^{-1}(\{1\})$ von „rechts nach links“ ausfindig machen.
Betrachten wir eine Transversale $T_Y \in S_Y(P_{312})$, so erhalten wir eine Transversale $T_{Y'}$ von Y' (das konjugierte Young-Diagramm von Y) durch

$$T_{Y'}(a, b) = 1 :\Leftrightarrow T_Y(b, a) = 1.$$

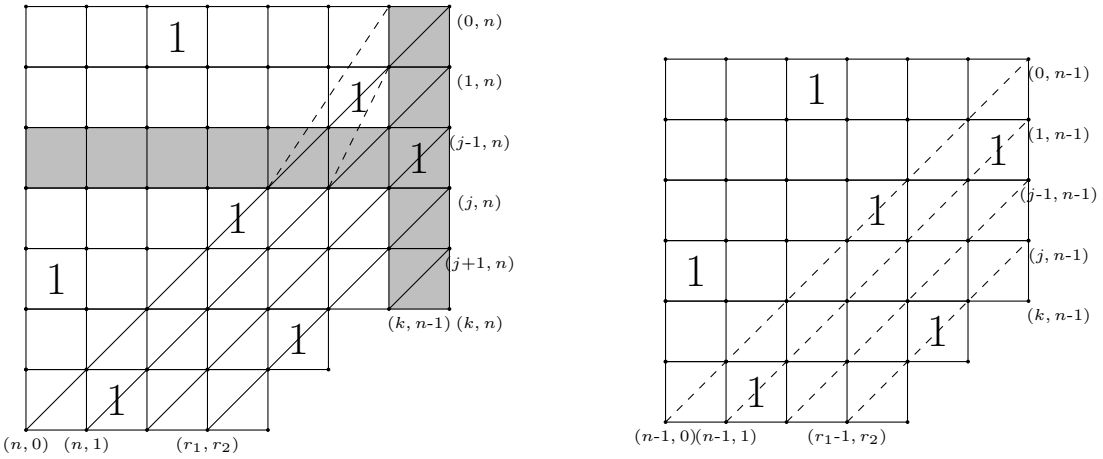
Offensichtlich gilt $T_{Y'} \in S_{Y'}(231)$. D.h. die Aussage folgt für Transversalen aus $S_Y(312)$. □

Definition 3.5.6. *Sei Y ein Young-Diagramm der Größe n mit Randsequenz $r = (r^0, r^1, \ldots, r^{2n})$. Gilt für $r^i = (r_1^i, r_2^i), r^j = (r_1^j, r_2^j) \in r$ mit $i \leq j$, $r_1^i - r_1^j = r_2^j - r_2^i$ und für jedes sich in der Randsequenz zwischen r^i und r^j befindende $r^k = (r_1^k, r_2^k)$ die Ungleichung $r_1^i - r_1^k \leq r_2^k - r_2^i$, dann bezeichnen wir r^i und r^j Y-*diagonal zueinander.

Bemerkung 3.5.7. Graphisch gesehen sind also r^i und r^j genau dann Y-diagonal zueinander, wenn die Verbindungsgerade von r^i und r^j zur Gänze in Y liegt (siehe dazu etwa Abbildung 3.8).

Lemma 3.5.8. *Sei Y ein Young-Diagramm der Größe n und sei k das größte $k \in [n]$, sodass (k, n) sich in der Randsequenz von Y befindet. Außerdem sei $j \in [k]$ beliebig und Y^* das aus Y durch Entfernung der n-ten Spalte und j-ten Zeile entstehende Young-Diagramm. Für ein $i \in [k-1]$ und ein Element (r_1, r_2) aus der Randsequenz von Y sind (r_1, r_2) und (i, n) genau dann Y-diagonal zueinander, wenn $(r_1 - 1, r_2)$ und $(i, n-1)$ Y^*-diagonal zueinander sind.*

Beweis. Klar (siehe Abbildung 3.8). □



(a) T_Y (b) T_{Y^*}

Abbildung 3.8: T_Y und T_{Y^*}.

Definition 3.5.9 (231-Bedingungen und 312-Bedingungen, [11])**.** *Sei Y ein Young-Diagramm der Größe n mit r-u-Sequenz $w = w_1 w_2 \dots w_{2n}$ und Randsequenz $r = (r^0, r^1, \dots, r^{2n})$, $F = (F_0, \dots, F_{2n})$ eine Folge von natürlichen Zahlen der Länge $2n+1$. Das Paar (Y, F) erfüllt die* 231-Bedingungen*, wenn folgende Punkte erfüllt sind:*

- (Monotonie) *Für alle $i \in [2n]$ folgt aus $w_i = r$, $F_{i-1} \leq F_i \leq F_{i-1} + 1$ und aus $w_i = u$, $F_i \leq F_{i-1} \leq F_i + 1$.*
- (0-Bedingung) *$F_0 = F_{2n} = 0$ und es existieren keine zwei aufeinanderfolgende 0en in F.*
- (Diagonal-Bedingung) *Sind r^i und r^j Y-diagonal zueinander mit $i \leq j$, so folgt $F_i \leq F_j$.*

Das Paar (Y, F) erfüllt die 312-Bedingungen*, wenn sie ebenfalls die oberen Bedingungen erfüllt, bis auf den Unterschied, dass in der Diagonal-Bedingung $F_i \geq F_j$ gefordert wird.*

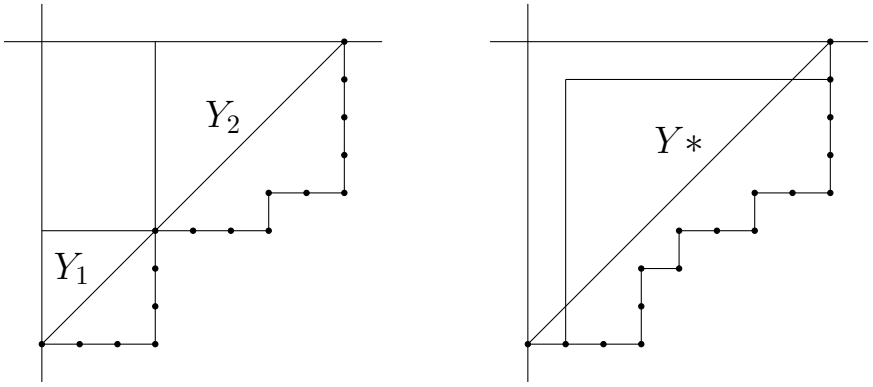
Die Paare (Y, F) mit $Y \in \mathcal{Y}_n$ und $F \in \mathbb{N}^{2n+1}$ entsprechen einer Markierung der Randpunkte von Y.

Lemma 3.5.10. *Sei Y ein Young-Diagramm der Größe n und F eine Folge von natürlichen Zahlen der Länge $2n+1$, sodass (Y, F) die 231-Bedingungen bis auf die 0-Bedingung erfüllt, dann gilt für alle $i \in [2n]$, $F_0 \leq F_i$.*

Beweis. Der Beweis folgt über Induktion nach Anzahl der Zellen von Y. Sei Y ein Young-Diagramm der Größe 1, so folgt $F_0 \leq F_1$ aus der Monotonie und $F_0 \leq F_2$ aus der Diagonal-Bedingung. Sei nun Y ein Young-Diagramm der Größe $n > 1$ mit Randsequenz $r = r^0 r^1 \dots r^{2n}$. Wir nehmen an, es existiert ein $i \in [2n-1]$, sodass r^0 und $r^i = (r_1^i, r_2^i)$ Y-diagonal zueinander sind. Sei Y_1 das durch Entfernen aller Zellen (z_1, z_2) mit $z_1 \leq r_1^i$ von Y hervorgehende Young-Diagramm, und sei Y_2 das durch Entfernen aller Zellen (z_1, z_2) mit $z_2 \leq r_2^i$ von Y hervorgehende Young-Diagramm (siehe Abbildung 3.9(a)). $(Y_1, F_0, \dots F_i)$ und $(Y_2, F_i \dots F_{2n})$ erfüllen nun die 231-Bedingung bis auf die 0-Bedingung. Laut Induktionsvoraussetzung ist $F_0 \leq F_j$ für $j \in [i]$ und $F_i \leq F_k$ für $k \in i, \dots, 2n$. Wegen der Diagonal-Bedingung von Y folgt $F_0 \leq F_i$ und

somit $F_0 \leq F_l$ für alle $l \in [2n]$.
Existiert kein $i \in [2n-1]$, sodass r^i Y-diagonal zu r^0 ist, so betrachten wir das Young-Diagramm Y^*, welches durch Entfernen der ersten Zeile und ersten Spalte von Y entsteht (siehe Abbildung 3.9(b)). Nun erfüllt $(Y^*, F_1 \dots F_{2n-1})$ die 231-Bedingungen bis auf die 0-Bedingung. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $F_0 \leq F_1 \leq F_j$ für $j \in [2n-1]$ und somit $F_0 \leq F_j$ für alle $j \in [2n]$.

□



(a) (b)

Abbildung 3.9: Aufteilung von Y.

Lemma 3.5.11. *Sei $r = (r^0, \dots, r^{2n})$ die Randsequenz eines Young-Diagramms Y der Größe n und $F = (F_0, \dots, F_{2n})$ eine Folge von natürlichen Zahlen der Länge $2n+1$, sodass (Y, F) die 231-Bedingungen erfüllt. Sind r^i und r^j Y-diagonal zueinander mit $i \leq j$ so gilt für alle $k \in \{i \dots j\}$, $F_i \leq F_k$.*

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 3.5.10. □

Definition 3.5.12. *Sei T_Y eine Transversale auf ein Young-Diagramm Y der Größe n mit Randsequenz $r = (r^0, \dots, r^{2n})$. Für eine Folge $a = (a_0, a_1, \dots, a_{2n})$ mit $a_i \leq |\Lambda_{T_Y}(r^i)|$ für $i \in \{0, \dots, 2n\}$ definieren wir a^+ als die Folge mit*

$$a_i^+ := \begin{cases} 0 & \text{wenn } a_i = 0, \\ |\Lambda_{T_Y}(r^i)| + 1 - a_i & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $i \in \{0, \dots, 2n\}$.

Satz 3.5.13. *Für eine Folge $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{2n})$ mit $a_i \in \mathbb{N}$ für $i \in \{0, \ldots, 2n\}$ und $a_i \leq |\Lambda_{T_Y}(r^i)|$ gilt $(a^+)^+ = a$.*

Beweis. Klar. □

Bemerkung 3.5.14. Zur Wiederholung: Für eine Partition λ ist mit $|\lambda|$ die Größe von λ notiert. D.h. $|\Lambda_{T_Y}(i,j)|$ bezeichnet die Anzahl der Elemente in $T_Y^{-1}(\{1\}) \cap ([i] \times [j])$. Somit berechnet sich das i-te Glied in $f_1(T_Y)^+$ durch die Subtraktion der Mächtigkeit der längsten Kette in $(T_Y^{-1}(\{1\}) \cap ([r_1^i] \times [r_2^i]), \preceq)$ von der Mächtigkeit der Menge $T_Y^{-1}(\{1\}) \cap ([r_1^i] \times [r_2^i])$.

Lemma 3.5.15 ([11])**.** *Sei Y ein Young-Diagramm der Größe n und T_Y eine Transversale auf Y. Erfüllt $(Y, f_1(T_Y))$ die 231-Bedingungen (bzw. 312-Bedingungen), dann erfüllt $(Y, f_1(T_Y)^+)$ die 312-Bedingungen (bzw. 231-Bedingungen).*

Beweis. Erfülle $(Y, f_1(T_Y))$ die 231-Bedingungen und sei $r = r^0 \ldots r^{2n}$ die Randsequenz von Y und sei zuerst r^i links neben r^{i+1}. Ist $f_1(T_Y)_i = 0$, so folgt $|\Lambda_{T_Y}(r^i)| = 0$. Da r^{i+1} direkt rechts von r^i liegt, erhalten wir $|\Lambda_{T_Y}(r^{i+1})| = 1$ und somit auch $\Lambda_{T_Y}(r^{i+1})_1 = f_1(T_Y)_{i+1} = 1$. Es folgt $f_1(T_Y)_i^+ = 0$ und $f_1(T_Y)_{i+1}^+ = 1$.
Ist nun $f_1(T_Y)_i \neq 0$, gilt $f_1(T_Y)_i \leq f_1(T_Y)_{i+1} \leq f_1(T_Y)_i + 1$ und aus der Gleichung $|\Lambda_{T_Y}(r^i)| + 1 = |\Lambda_{T_Y}(r^{i+1})|$ (Λ_{T_Y} ist ein Wachstumsdiagramm von T_Y) ergibt sich

$$|\Lambda_{T_Y}(r^i)| + 1 - f_1(T_Y)_i \leq |\Lambda_{T_Y}(r^{i+1})| + 1 - f_1(T_Y)_{i+1} \leq |\Lambda_{T_Y}(r^i)| + 2 - f_1(T_Y)_i.$$

Es kann analog vorgegangen werden, falls sich r^i unter r^{i+1} befindet. Somit ist die Monotonie von $(Y, f_1(T_Y)^+)$ gezeigt.
Die 0-Bedingung ist trivial.
Zur Diagonal-Bedingung: Sei $r^i = (r_1^i, r_2^i)$ und $r^j = (r_1^j, r_2^j)$ mit $i \leq j$, sodass $r_1^i - r_1^j = r_1^j - r_2^i$. Erhalten wir r^{k+1} aus einem Rechtsschritt von r^k, so ist $|\Lambda_{T_Y}(r^k)| + 1 = |\Lambda_{T_Y}(r^{k+1})|$. Bei einem Aufwärtsschritt gilt $|\Lambda_{T_Y}(r^k)| - 1 = |\Lambda_{T_Y}(r^{k+1})|$. Da genau so viele Aufwärtsschritte wie Rechtsschritte nötig sind um von r^i zu r^j zu gelangen, ist $|\Lambda_{T_Y}(r^i)| = |\Lambda_{T_Y}(r^j)|$. Sei $f_1(T_Y)_i = 0$, so ist auch $\Lambda_{T_Y}(r^i) = 0$, d.h. $\Lambda_{T_Y}(r^j) = 0$ und somit gilt $f_1(T_Y)_j = 0$. Ist $f_1(T_Y)_i \neq 0$, folgt aus $f_1(T_Y)_i \leq f_1(T_Y)_j$

$$|\Lambda_{T_Y}(r^i)| - f_1(T_Y)_i \geq |\Lambda_{T_Y}(r^j)| - f_1(T_Y)_j.$$

Somit ist auch die Diagonal-Bedingung erfüllt.
Fast analog zeigt man, dass wenn $(Y, f_1(T_Y))$ den 312-Bedingungen genügt, $(Y, f_1(T_Y)^+)$ die 231-Bedingungen erfüllen muss. □

Satz 3.5.16 ([11]). *Sei Y ein Young-Diagramm der Größe n und $T_Y \in S_Y(P_{231})$ (bzw. $T_Y \in S_Y(P_{312})$), dann erfüllt $(Y, f_1(T_Y))$ die 231-Bedingungen (bzw. 312-Bedingungen).*

Beweis. Zeigen wir die Aussage für $T_Y \in S_Y(P_{231})$, so folgt die analoge Aussage für Transversalen aus $S_Y(P_{312})$ durch die Tatsache, dass die Transversale $T_{Y'}$, definiert durch $T_{Y'}(a,b) = 1 :\Leftrightarrow T_Y(b,a) = 1$, eine Transversale von Y' mit $T_{Y'} \in S_{Y'}(P_{312})$ bildet.
Die Randsequenz von Y bezeichnen wir wieder mit $r = (r^0, \ldots, r^{2n})$.
Sei T_Y aus $S_Y(P_{231})$. Gilt $f_1(T_Y)_i = 0$, so folgt $\Lambda_{T_Y}(r^i) = \emptyset$ und da Λ_{T_Y} ein Wachstumsdiagramm von T_Y bildet ist $\Lambda_{T_Y}(r^{i+1}) = (1)$. Daraus folgt $f_1(T_Y)_{i+1} = 1$. Dadurch und aus den bereits in Bemerkung 3.5.4 aufgelisteten Eigenschaften von $f_1(T_Y)$ folgt die Monotonie und 0-Bedingung von $(Y, f_1(T_Y))$.
Wir zeigen die Diagonal-Bedingung von $(Y, f_1(T_Y))$ durch Induktion nach der Größe von Y. Dafür schließen wir an die Bezeichnungen des Beweises von Satz 3.5.5 an. Es gilt also $T_Y(j,n) = 1$, $\Lambda_{T_Y}(j,n-1)_1 = \Lambda_{T_Y}(j-1,n)_1$, $\Lambda_{T_Y}(i,n-1)_1 = \Lambda_{T_Y}(i,n)_1$ für $i \in \{0,\ldots,j-1\}$ und $\Lambda_{T_Y}(k,n-1)_1 = \Lambda_{T_Y}(k-1,n-1)_1 = \cdots = \Lambda_{T_Y}(j+1,n-1)_1$ sowie $\Lambda_{T_Y}(k,n)_1 = \Lambda_{T_Y}(k-1,n)_1 = \cdots = \Lambda_{T_Y}(j,n)_1$.
Bezeichne wieder Y^* (bzw. T_{Y^*}) das Young-Diagramm (bzw. die Transversale von Y^*), welches durch die Elimination der j-ten Zeile und n-ten Spalte aus Y (bzw. T_Y) hervorgeht. Offensichtlich gilt für $i_1 \in \{0,\ldots,j-1\}$ $\Lambda_{T_Y}(i_1,n-1) = \Lambda_{T_{Y^*}}(i_1,n-1)$ und für $i_2 \in \{j+1,\ldots,k\}$ und $a \in \{0,\ldots,n-1\}$ $\Lambda_{T_Y}(i_2,a) = \Lambda_{T_{Y^*}}(i_2-1,a)$ (da $(T_Y^{-1}(\{1\}) \cap [i_2] \times [a], \preceq)$ isomorph zu $(T_{Y^*}^{-1}(\{1\}) \cap [i_2-1] \times [a], \preceq)$ ist). Sei $l \in \{0,\ldots,k-1\}$ und (r_1,r_2) Y-diagonal zu (l,n), dann ist (r_1-1,r_2) Y^*-diagonal zu $(l,n-1)$ (Lemma 3.5.8). Ist nun $l \in \{0,\ldots,j-1\}$, so folgt aus der Induktionsvoraussetzung sowie der Y^*-Diagonalität von (r_1-1,r_2) und $(l,n-1)$)
$\Lambda_{T_{Y^*}}(r_1-1,r_2)_1 \leq \Lambda_{T_{Y^*}}(l,n-1)_1$ und somit

$$\Lambda_{T_Y}(r_1,r_2)_1 = \Lambda_{T_{Y^*}}(r_1-1,r_2)_1 \leq \Lambda_{T_{Y^*}}(l,n-1)_1 = \Lambda_{T_Y}(l,n)_1.$$

Für $l \in \{j,\ldots,k-1\}$ ergibt sich wiederum $\Lambda_{T_{Y^*}}(r_1-1,r_2)_1 \leq \Lambda_{T_{Y^*}}(l,n-1)_1$ und

somit

$$\Lambda_{T_Y}(r_1, r_2)_1 = \Lambda_{T_{Y^*}}(r_1\text{-}1, r_2)_1 \leq \Lambda_{T_{Y^*}}(l, n\text{-}1)_1 = \Lambda_{T_Y}(l\text{+}1, n\text{-}1)_1 \leq \Lambda_{T_Y}(l+1, n)_1 = \Lambda_{T_Y}(l, n)_1$$

(die zweite Ungleichung folgt da Λ_{T_Y} ein Wachstumsdiagramm von T_Y ist). Sind (a_1, b_1) und (a_2, b_2) Y-diagonale Elemente aus der Randsequenz von Y, wobei $b_1 \neq n \neq b_2$ und $a_1 \geq a_2$ sowie $b_1 \leq b_2$ gilt, so folgt $\Lambda_{T_Y}(a_1, b_1)_1 \leq \Lambda_{T_Y}(a_2, b_2)$ direkt aus $\Lambda_{T_{Y^*}}(a_1 - 1, b_1)_1 \leq \Lambda_{T_{Y^*}}(a_2 - 1, b_2)_1$.

□

Satz 3.5.17 ([11])**.** *Sei Y ein Young-Diagramm der Größe n und $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{2n})$ eine Folge von natürlichen Zahlen, sodass (Y, b) die 231-Bedingungen (bzw. die 312-Bedingungen) erfüllt, dann existiert ein $T_Y \in S_Y(P_{231})$ (bzw. $T_Y \in S_Y(P_{312})$) mit $f_1(T_Y) = b$.*

Beweis. Erfüllt (Y, b) die 312-Bedingungen und existiert ein $T_Y \in S_Y(P_{312})$ mit $f_1(T_Y) = b$, so erfüllt $(Y', b^r = b_{2n}b_{2n-1}\ldots b_0)$ die 231-Bedingungen und $f_1(T_{Y'}) = b^r$. Es reicht daher die Aussage für (Y, b), die die 231-Bedingungen erfüllen zu zeigen.
Sei Y ein Young-Diagramm der Größe n mit r-u-Sequenz $w = w_1w_2\ldots w_{2n}$ und Randsequenz $r = (r^0, r^1, \ldots, r^{2n})$. Sei b eine Folge von natürlichen Zahlen, sodass (Y, b) die 231-Bedingungen erfüllt. Zusätzlich sei k das größte $k \in [n]$ mit $w_{2n-k+1}w_{2n-k+2}\ldots w_{2n} = uu\ldots u$. Es gilt somit

$$(r^1, r^2, ..., r^{2n\text{-}k\text{-}1}, r^{2n\text{-}k}, r^{2n\text{-}k+1}, ..., r^{2n}) = ((n, 0), (n, 1), ..., (k, \text{-}1), (k, n), (k\text{-}1, n), ..., (0, n)).$$

Nun sei j das größte $j \in [k]$, sodass $b_{2n-j} > b_{2n-j+1}$. Durch die 0-Bedingung und Monotonie von (Y, b) existiert solch ein j.
Wir definieren die Folge $a = a_0a_1\ldots a_{2(n-1)}$ durch

$$a_i := \begin{cases} b_i & \text{für } i \in \{0, \ldots, 2n-k-1\}, \\ b_{i+2} & \text{für } i \in \{2n-j-1, \ldots, 2(n-1)\}, \\ b_{2n-k-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Siehe dazu Abbildung 3.10. Da für den Fall $j = k$ aus den 231-Bedingungen $b_{2n-k-1} = b_{2n-k+1}$ folgt, ist a_i wohldefiniert. Sei Y^* das Young-Diagramm, das durch

die Elimination der j-ten Zeile und n-ten Spalte von Y hervorgeht. Wir zeigen (Y^*, a) erfüllt die 231-Bedingungen.
Sei zuerst $k > j$. Die Ungleichungen $b_{2n-k-1} \leq b_{2n-k} \leq b_{2n-k-1} + 1$ folgen aus der Monotonie von (Y, b). Wegen der Wahl von j erhalten wir $b_{2n-k} = b_{2n-j} = b_{2n-j+1} + 1$. Aus $a_{2n-j-2} = b_{2n-k-1}$ und $a_{2n-j-1} = b_{2n-j+1}$ folgt $a_{2n-j-2} \leq a_{2n-j-1} + 1 \leq a_{2n-j-2} + 1$. Es gilt also $a_{2n-j-1} \leq a_{2n-j-2} \leq a_{2n-j-1} + 1$. Die Monotonie von (Y^*, a) für andere aufeinanderfolgende Punkte aus a folgt direkt durch die Definition von a und der Monotonie von (Y, b).
Da wir den Fall $k > j$ betrachten, folgt aus 0-Bedingung von (Y, b) und der Definition von a, $a_0 = a_{2(n-1)} = b_{2n} = 0$ und $a_{2(n-1)-1} = b_{2n-1} = 1$. Aus der bereits gezeigten Monotonie von (Y^*, a) ergibt sich nun $a_{2n-k-1} \geq \cdots \geq a_{2(n-1)-1}$. Wären zwei aufeinanderfolgende Glieder in $(a_0, \ldots, a_{2n-k-1})$ beide 0, so würden auch in b zwei Nullen aufeinander folgen. Somit ist die 0-Bedingung gezeigt.
Sei $\tilde{r} = \tilde{r}^0 \ldots \tilde{r}^{2n}$ die Randsequenz von Y^*. Für $i \in \{0, \ldots, 2n-k-1\}$ ist
$(\tilde{r}_1^i, \tilde{r}_2^i) = (r_1^i - 1, r_2^i)$ und für $i \in \{2n-k-1, \ldots, 2(n-1)\}$ ist $(\tilde{r}_1^i, \tilde{r}_2^i) = (r_1^{i+2}, r_2^{i+2} - 1)$.
Seien $\tilde{r}^s$ und $\tilde{r}^t$ Y^*-diagonal zueinander mit $s \leq t$. Ist $t \in \{2n-k-1, 2(n-1)\}$ so folgt aus Lemma 3.5.8, dass r^s und r^{t+2} Y-diagonal zueinander sind. Grenzen wir t noch genauer ein auf $t \in \{2n-k-1, \ldots, 2n-j-2\}$, dann folgt wegen der Diagonal-Bedingung von (Y, b), dass $b_s \leq b_{t+2}$ gilt. Aus Lemma 3.5.11 folgt nun $b_s \leq b_{2n-k-1}$ und somit erhalten wir $a_s \leq a_{2n-k-1} = a_t$. Für $t \in \{2n-j-1, \ldots, 2(n-1)\}$ gilt $a_s = b_s \leq b_{t+2} = a_t$. Ist $t \in \{s, \ldots, 2n-k-1\}$, so folgt $a_s \leq a_t$ aus $b_s \leq b_t$.
Sei nun $k = j$. Da $a = (b_0, \ldots, b_{2n-k-1} = b_{2n-k+1}, b_{2n-k+2}, \ldots, b_{2n})$ folgt die Monotonie von (Y^*, a) direkt aus der von (Y, b). Die 0-Bedingung folgt für $k > 1$ analog zu oben. Für $k = 1$ ist $a = (b_0, \ldots, b_{2n-k-1} = b_{2n})$ und die 0-Bedingung von (Y^*, a) folgt direkt aus der 0-Bedingung von (Y, b). Die Diagonal-Bedingung von (Y^*, a) mit $k = j$ ergibt sich fast analog zu dem Fall $k > j$.
(Y^*, a) erfüllt somit die 231-Bedingungen und laut Induktionsvoraussetzung existiert ein $T_{Y^*} \in S_{Y^*}(P_{231})$ mit $f_1(T_{Y^*}) = a$.

Wir setzen

$$T_Y(z_1,z_2) := \begin{cases} T_{Y^*}(z_1,z_2) & \text{für } z_1 \leq j-1 \text{ und } z_2 \leq n-1, \\ T_{Y^*}(z_1-1,z_2) & \text{für } z_1 > j \text{ und } z_2 \leq n-1, \\ 1 & \text{für } (z_1,z_2) = (j,n), \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

T_Y ist somit offensichtlich eine Transversale auf Y. Nehmen wir an T_Y beinhaltet P_{231}. Seien $c^1 = (c_1^1, c_2^1),\ c^2 = (c_1^2, c_2^2),\ c^3 = (c_1^3, c_2^3)$ Zellen von Y, sodass

$$\begin{bmatrix} T_y(c_1^3,c_2^1) & T_y(c_1^3,c_2^2) & T_y(c_1^3,c_2^3) \\ T_y(c_1^1,c_2^1) & T_y(c_1^1,c_2^2) & T_y(c_1^1,c_2^3) \\ T_y(c_1^2,c_2^1) & T_y(c_1^2,c_2^2) & T_y(c_1^2,c_2^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

gilt. $c^3 = (j,n)$, da sonst T_{Y^*} die Matrix P_{231} beinhalten würde, daraus folgt auch $k \geq j+2$. Die Elemente $(c_1^1 - 1, c_2^1)$ und $(c_1^2 - 1, c_2^2)$ bilden also eine Kette in $(T_{Y^*}^{-1}(\{1\}) \cap ([k-1] \times [n-1]), \preceq)$ mit $c_1^2 - 1 > c_1^1 - 1 > j - 1$. Da

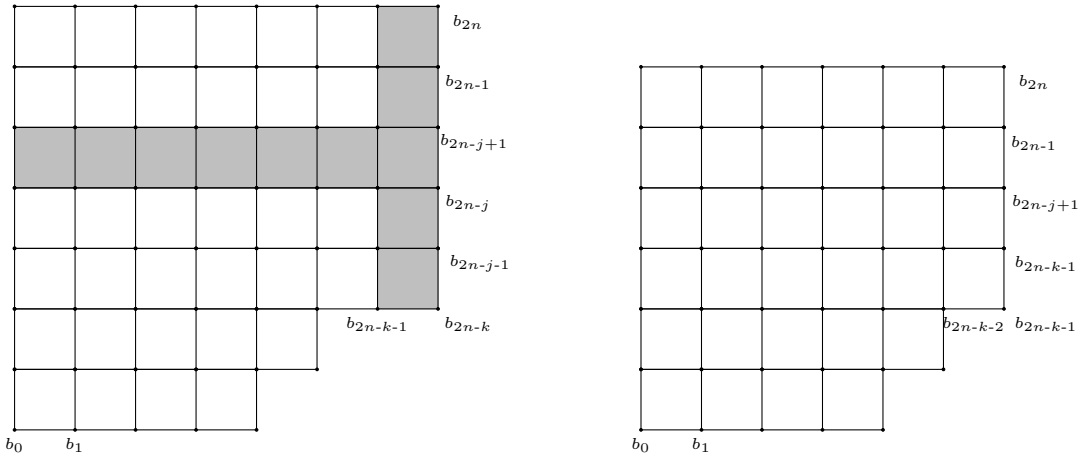
$$\Lambda_{T_{Y^*}}(k\text{-}1, n\text{-}1)_1 = a_{2n\text{-}k\text{-}1} = \Lambda_{T_{Y^*}}(k\text{-}2, n\text{-}1)_1 = a_{2n\text{-}k} = \ldots = \Lambda_{T_{Y^*}}(j, n\text{-}1)_1 = a_{2n\text{-}j\text{-}2}$$

gilt, existiert eine maximale Kette in $(T_{Y^*}^{-1}(\{1\}) \cap ([j] \times [n-1]), \preceq)$ mit Länge a_{2n-k-1}. Sei $d = (d_1, d_2)$ das größte Element dieser Kette bezüglich $\preceq$. Es gilt $d \not\preceq c^1$ und $d \not\preceq c^2$, da sonst nicht $a_{2n-k-1} = a_{2n-k} = \cdots = a_{2n-j-2}$ gelten würde. D.h. jedoch

$$\begin{bmatrix} T_{Y^*}(d_1,c_2^1) & T_{Y^*}(d_1,c_2^2) & T_{Y^*}(d_1,d_2) \\ T_{Y^*}(c_1^1,c_2^1) & T_{Y^*}(c_1^1,c_2^2) & T_{Y^*}(c_1^1,d_2) \\ T_{Y^*}(c_1^2,c_2^1) & T_{Y^*}(c_1^2,c_2^2) & T_{Y^*}(c_1^2,d_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

und T_{Y^*} enthält P_{231}. Dies ist ein Widerspruch.
Es bleibt zu zeigen $f_1(T_Y) = b$. Dies folgt aus den Wachstumsdiagrammeigenschaften von Λ_{T_Y} und wiederholter Anwendung von Lemma 3.5.2. □

Definition 3.5.18 ([11]). *Sei $T_Y \in S_Y(P_{231})$. $\alpha(T_Y)$ bezeichne die durch die Sätze 3.5.5, 3.5.16 und 3.5.17 eindeutige Transversale aus $S_Y(P_{312})$ für die $f_1(\alpha(T_Y)) = f_1^+(T_Y)$ gilt. Für $T_Y \in S_Y(P_{312})$ ist $\beta(T_Y) \in S_Y(P_{231})$ analog definiert.*



(a) (Y, b) (b) (Y^*, a)

Abbildung 3.10: (Y, b) und (Y^*, a).

Satz 3.5.19 ([11]). *$\alpha : S_Y(P_{231}) \to S_Y(P_{312})$ und $\beta : S_Y(P_{312}) \to S_Y(P_{231})$ sind zueinander invers und somit bijektiv.*

Beweis. Aus Satz 3.5.13 folgt $f_1(\alpha(T_Y))^+ = f_1(T_Y)$ (bzw. $f_1(\beta(T_Y))^+ = f_1(T_Y)$) für T_Y aus $S_Y(P_{231})$ (bzw. $S_Y(P_{231})$). □

Fassen wir Permutationsmatrizen als Transversalen auf, erhalten wir aus Satz 3.3.5 das folgende Korollar.

Korollar 3.5.20. *Sei $p = p_1, p_2, \ldots p_{n-3} \in S_{n-3}$ mit $n \geq 3$. Es gilt*

$$S_n((n, n-2, n-1, p_1, p_2, \ldots, p_{n-3})) = S_n((n-1, n, n-2, p_1, p_2, \ldots, p_{n-3})).$$

3.6 Die erzeugende Funktion von $S_n(3124)$

Satz 3.6.1. ([12])

$$\sum_{n \geq 0} |S_n(1342)| z^n = \frac{32z}{1 + 20z - 8z^2 - (1-8)^{3/2}}.$$

Die Ermittlung der oberen erzeugenden Funktion gelang *M. Bóna* durch *unzerlegbare* 1342-*meidende Permutationen* und speziellen markierten Bäumen, den sogenannten

$\beta(0,1)$-Bäumen. Die erzeugende Funktion von $\beta(0,1)$-Bäumen war bereits bekannt dank *W.T. Tutte* in [61]. *J. Bloom* und *S. Elizalde* verifizieren in [10] Bónas Ergebnis durch die im vorhergehendem Abschnitt gezeigte Bijektion zwischen $S_Y(P_{312})$ und Paaren (Y, F), welche die 312-Bedingungen erfüllen. Wir folgen in diesem Abschnitt [10] und zeigen Satz 3.6.1 durch die Ermittlung der erzeugenden Funktion von $S_n(3142)$. Diese stimmt mit der erzeugenden Funktion von $S_n(1342)$ überein, da $(1342^c)^r = 3124$ gilt.

Definition 3.6.2. *Sei $P \in \mathcal{P}$.*

$$S_{\mathcal{Y}_n} := \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}_n} S_Y,$$
$$S_{\mathcal{Y}_n}(P) := \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}_n} S_Y(P).$$

Definition 3.6.3. *Für ein $Y \in \mathcal{Y}_n$ definieren wir die Menge aller Paare (Y, F), welche die 312-Bedingungen erfüllen, als $\mathcal{L}_Y$ und*

$$\mathcal{L}_n(P) := \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}_n} \mathcal{L}_Y.$$

Definition 3.6.4. *Wir definieren $\Pi : S_{\mathcal{Y}_n}(P_{312}) \to \mathcal{L}_n$ durch $\Pi(T_Y) := (Y, f_1(T_Y))$ für eine Transversale T_Y von $Y \in \mathcal{Y}_n$.*

Π ist wegen Satz 3.5.5 und Satz 3.5.17 offensichtlich eine Bijektion.

Definition 3.6.5. *Sei $Y \in \mathcal{Y}_n$ mit Randsequenz $r = (r^0, r^1, \ldots, r^{2n})$. Wir bezeichnen eine Zelle z von Y mit $z = r^i$ als eine* Spitze von Y *genau dann, wenn r_{i-1} sich links und r_{i+1} oberhalb von r_i befindet.*

Definition 3.6.6. *Sei T_Y eine Transversale von $Y \in \mathcal{Y}_n$. Wir bezeichnen T_Y als* minimal *genau dann, wenn jede Spitze von Y eine 1 in T_Y eingetragen hat.*

Eine Transversale T_Y von einem Young-Diagramm $Y \in \mathcal{Y}$ ist also genau dann minimal, wenn kein $Y^* \in \mathcal{Y}_n$ existiert mit $Y^* \subset Y$, sodass $T_Y|_{Y^*}$ eine Transversale auf Y^* bildet.

Definition 3.6.7. *Wir definieren mit $S^{\times}_{\mathcal{Y}_n}$ die Menge aller minimalen Transversalen aus $S_{\mathcal{Y}_n}$. Analog bezeichne für eine Permutationsmatrix P, $S^{\times}_{\mathcal{Y}_n}(P)$ die Menge aller minimalen Transversalen aus $S_{\mathcal{Y}_n}(P)$.*

Definition 3.6.8. *Für eine Permutation $p = p_1p_2 \dots p_n \in S_n$ bezeichne $\chi(p)$ die minimale Transversale, sodass $\chi(p)(p_i, i) = 1$ für alle $i \in [n]$ gilt. χ bildet offenbar eine Bijektion von der Menge aller Permutationen der Länge n auf $S^{\times}_{\mathcal{Y}_n}$.*

Lemma 3.6.9 ([10])**.** *Sei $p = p_1p_2 \dots p_k \in S_k$ mit $p_k = k$ und $p_{k-1} \neq k-1$. $\chi|_{S_k(p)}$ ist eine Bijektion von $S_k(p)$ nach $S^{\times}_{\mathcal{Y}_n}(P_{p_1p_2\dots p_{k-1}})$.*

Beweis. Da $p_k = k$ ist, gilt $\chi(S_k(p)) = S^{\times}_{\mathcal{Y}_n}(P_{p_1p_2\dots p_k})$. Es bleibt nur noch die Gleichung $S^{\times}_{\mathcal{Y}_n}(P_{p_1p_2\dots p_k}) = S^{\times}_{\mathcal{Y}_n}(P_{p_1p_2\dots p_{k-1}})$ zu zeigen. Die Inklusion $S^{\times}_{\mathcal{Y}_n}(P_{p_1p_2\dots p_k}) \subseteq S^{\times}_{\mathcal{Y}_n}(P_{p_1p_2\dots p_{k-1}})$ ist trivial. Sei $Y \in \mathcal{Y}_n$ und $T_Y \in S^{\times}_Y$, sodass $T_Y \notin S^{\times}_{\mathcal{Y}_n}(P_{p_1p_2\dots p_{k-1}})$. D.h. T_Y enthält $P_{p_1p_2\dots p_{k-1}}$. Es existiert also eine Spitze $z = (z_1, z_2)$ in Y, sodass $T_Y|_{[z_1]\times[z_2]}$ die Permutationsmatrix $P_{p_1p_2\dots p_{k-1}}$ enthält. Da jedoch $p_{k-1} \neq k-1$ gilt, enthält sogar $T_Y|_{[z_1-1]\times[z_2-1]}$ die Matrix $P_{p_1p_2\dots p_{k-1}}$ und da T_Y minimal ist gilt $T_Y(z) = 1$. D.h. T_Y enthält die Matrix $P_{p_1p_2\dots p_k}$, also $T_Y \notin S^{\times}_{\mathcal{Y}_n}(P_{p_1p_2\dots p_k})$ und somit folgt $S^{\times}_{\mathcal{Y}_n}(P_{p_1p_2\dots p_k}) \supseteq S^{\times}_{\mathcal{Y}_n}(P_{p_1p_2\dots p_{k-1}})$. □

Als nächstes bestimmen wir das Bild von Π eingeschränkt auf $S^{\times}_{\mathcal{Y}_n}(P_{312})$.

Definition 3.6.10. *Sei $Y \in \mathcal{Y}_n$ mit Randsequenz $r = (r_0, r_1, \dots, r_{2n})$, $F = (F_0, F_1, \dots, F_{2n})$ eine Folge der Länge $2n+1$ mit $F_i \in \mathbb{N}$ und (Y, F) erfülle die* 312*-Bedingungen. (Y, F) besitzt die* Spitzen-Eigenschaft *genau dann, wenn gilt:*

> *Ist für ein $i \in \{1, \dots, 2n\}$ die Zelle r_i von Y eine Spitze, so folgt*
> $F_{i-1} + 1 = F_i = F_{i+1} + 1$.

Die Menge aller Paare mit Spitzen-Eigenschaft aus $\mathcal{L}_n$ wird mit $\mathcal{L}^{\times}_n$ bezeichnet.

Lemma 3.6.11 ([10])**.** *Das Bild von $\Pi|_{S^{\times}_{\mathcal{Y}_n}(P_{312})}$ ist $\mathcal{L}^{\times}_n$. Somit sind die beiden Mengen bijektiv.*

Beweis. Sei $Y \in \mathcal{Y}_n$ mit Randsequenz $r = (r^0, r^1, \dots, r^{2n})$, $r^i = (r^i_1, r^i_2)$ mit $i \in \{0, \dots, 2n\}$ und $T_Y \in S_Y(P_{312})$. Π bildet T_Y auf $(Y, f_1(T_Y))$ ab. $(Y, f_1(T_Y))$ erfüllt laut Satz 3.5.16 die 231-Bedingungen. Es gilt $f_1(T_Y) = \Lambda_{T_Y}(r^i)_1$ und laut Satz 3.4.5 erfüllt Λ_{T_Y} (F1)-(F6) aus Abschnitt 3.4. (F6) liefert die Spitzen-Eigenschaft von $(Y, f_1(T_Y))$. □

Durch die letzten beiden Lemmata folgt unmittelbar der folgende Satz.

Satz 3.6.12. *Die Mengen $S_n(3124)$ und $\mathcal{L}_n^{\times}$ sind bijektiv zueinander.*

Wir suchen also eine erzeugende Funktion für $\mathcal{L}_n^{\times}$. Dazu betrachten wir zuerst Paare mit einer etwas abgeschwächten Form der 312-Bedingungen.

Definition 3.6.13. *Für ein $Y \in \mathcal{Y}_n$ und eine Folge von natürlichen Zahlen $F = (F_0, F_1, \ldots, F_{2n})$ bezeichnen wir die Menge aller Paare (Y, F), die bis auf die 0-Bedingung die 312-Bedingungen erfüllen, die Spitzen-Eigenschaft besitzen und für die $F_{2n} = 0$ gilt, mit $\mathcal{K}_Y$.*

$$\mathcal{K}_n := \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}_n} \mathcal{K}_Y, \text{ und}$$
$$\mathcal{K} := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{K}_n.$$

Im Folgenden werden Young-Diagramme $Y \in \mathcal{Y}_n$ in den Paaren (Y, F) durch ihre r-u-Sequenz identifiziert. D.h. für das $Y \in \mathcal{Y}_n$ mit r-u-Sequenz w bezeichne (w, F) das Paar (Y, F).

Definition 3.6.14. *Seien w, v die r-u-Sequenzen von Young-Diagramme, $F = (F_0, F_1, \ldots, F_{2n}) \in \mathbb{N}^{2n+1}$ und $G = (G_0, G_1, \ldots, G_{2k}) \in \mathbb{N}^{2k+1}$, sodass $(w, F) \in \mathcal{K}_n$ und $(v, G) \in \mathcal{K}_k$ gilt.*

$$(w, F) \oplus (v, G) := (wv, (F_0 + G_0, F_1 + G_0, \ldots, F_{2n} + G_0, G_1, G_2, \ldots, G_{2k})) \in \mathcal{K}_{n+k}.$$

Sei

$$K(u, z) := \sum_{n \geq 0} \sum_{(w, F_0 F_1 \ldots F_{2n}) \in \mathcal{K}_n} u^{F_0} z^n := \sum_{n \geq 0} \sum_{i \geq 0} k_{i,n} u^i z^n.$$

Somit ist $[u^i z^n] K(u, z) = k_{i,n}$ die Anzahl der Elemente (w, F) aus $\mathcal{K}_n$ mit $F_0 = i$.
Nun kann jedes Element $(w, F) \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0$ eindeutig zerlegt werden in $(rw_1u, G) \oplus (w_2, H)$ mit $(rw_1u, G), (w_2, H) \in \mathcal{K}$, wobei w_1 wiederum die r-u-Sequenz eines Young-Diagramms beschreibt. Sei $(rw_1u, G) \in \mathcal{K}_n$ mit $G = (G_0, \ldots, G_{2n})$, dann kann G eine der folgenden vier Gestalten besitzen.

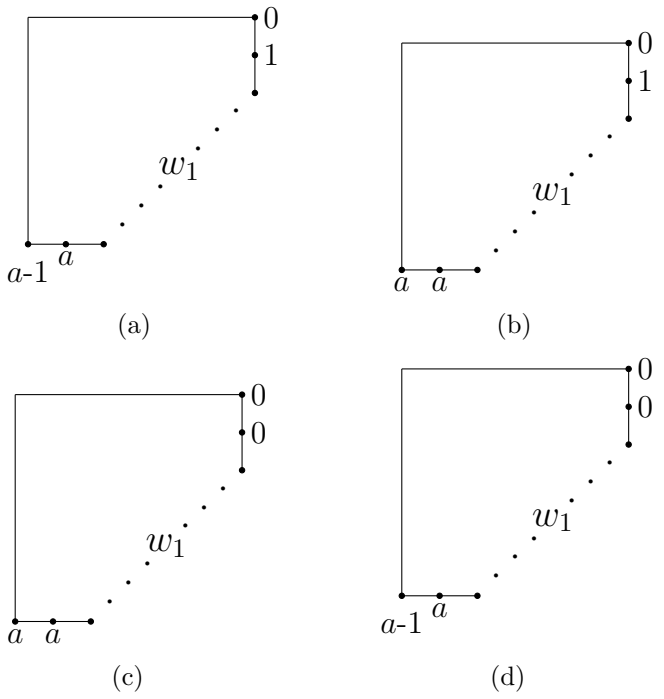


Abbildung 3.11: Aufteilung von Y.

Typ (a) $0 = G_{2n} \neq G_{2n-1} = 1$ und $G_0 = G_1 + 1$,

Typ (b) $0 = G_{2n} \neq G_{2n-1} = 1$ und $G_0 = G_1$,

Typ (c) $0 = G_{2n} = G_{2n-1}$ und $G_0 = G_1$,

Typ (d) $0 = G_{2n} = G_{2n-1}$ und $G_0 = G_1 + 1$.

Bemerkung 3.6.15. Betrachten wir (rw_1u, G) als Markierung der Randpunkt eines Young-Diagramms (gegeben durch die r-u-Sequenz rw_1u) so lassen sich (a)-(d) nach Abbildung 3.11 darstellen.

Bezeichne $k^a_{i,n}$ die Anzahl der Elemente (rw_1u, G) von der Gestalt (a) aus $\mathcal{K}_n$ mit $G_0 = i$, wobei w_1 die r-u-Sequenz eines Young-Diagramms beschreibe und sei

$$K^a(u, z) := \sum_{n\geq 0} \sum_{i\geq 0} k^a_{i,n} u^i z^n,$$

die erzeugende Funktion solcher Elemente. Analog definieren wir $k^b_{i,n},\ k^c_{i,n},\ k^d_{i,n}$ sowie $K^b(u,z),\ K^c(u,z),\ K(u,z)$. Durch die obige Zerlegung von nichtleeren Elementen aus $\mathcal{K}$ erhalten wir

$$K(u,z) = 1 + K(u,z)\left(K^a(u,z) + K^b(u,z) + K^c(u,z) + K^d(u,z)\right).$$

Für $(rw_1u, G) \in K_n$ von Gestalt (a) oder (b), gilt $(w_1, (G_1\text{-}1, G_2\text{-}1, ..., G_{2n\text{-}1}\text{-}1)) \in \mathcal{K}_{n\text{-}1}$. Bei (a) erhalten wir $G_1 - 1 = G_0$ und bei (b) $G_1 - 1 = G_0 - 1$. Ist (rw_1u, G) von Gestalt (c), so gilt $(w_1, (G_1, G_2 \ldots, G_{2n-1})) \in \mathcal{K}_{n-1}$ und $G_1 = G_0$. Für (rw_1u, G) von Gestalt (d) erhalten wir $(w_1, (G_1, G_2, \ldots, G_{2n-1})) \in \mathcal{K}_{n-1}$ mit $G_1 \geq 1$. Man beachte, dass $(rw_1u, G) \in K_1$ nicht von Gestalt (b) oder (c) sein kann, da sonst die Spitzen-Eigenschaft nicht zutreffen würde. Somit erhalten wir

$$K(u,z) = 1 + zK(u,z)\left(K(u,z) + u(K(u,z) - 1) + (K(u,z) - 1) + \frac{K(u,z) - K(0,z)}{u}\right).$$

Um diese Gleichung zu lösen, verwenden wir die *Quadratische Methode* nach Tutte (siehe etwa [60]), beschrieben in [28, S.514 ff.]. Dafür vervollständigen wir das Quadrat und erhalten

$$4z^2(u+1)^4\left(K(u,z) - \frac{zu^2 + zu + u + zK(0,z)}{2z(u+1)}\right)^2 = g(u,z,K(0,z)). \tag{3.1}$$

mit

$$g(u,z,K(0,z)) = -4z(u+1)^2u + (zu^2 + zu + u + zK(0,z))^2.$$

Nun Subsituieren wir u in Gleichung (3.1) mit einer Funktion $u(z)$ (diese ist uns noch nicht bekannt), sodass die linke Seite in der Gleichung (3.1) verschwindet. Die linke und rechte Seite der Gleichung (3.1) besitzen nun eine doppelte Nullstelle in u. D.h.

$$g(u(z),z,K(0,z)) = 0 \text{ und } \frac{\partial}{\partial u}g(u(z),z,K(0,z)) = 0.$$

Das Lösen dieses System aus zwei Gleichungen mit Unbekannten $u(z)$ und $K(0,z)$

liefert uns

$$K(0,z) = \frac{8z^2 + 12z - 1 + \sqrt{(1-8z)^3}}{32z^2}.$$

Sei nun $(w,F) \in \mathcal{L}^\times$. (w,F) kann nun eindeutig zerlegt werden in $(w_1,(0,F_1,0)) \oplus (w_2,(0,F_2,0)) \oplus \cdots \oplus (w_n,(0,F_n,0))$ mit $n \in \mathbb{N}$, sodass alle w^i wieder r-u-Sequenzen von Young-Diagramme bilden. Bezeichne $\overline{F}^i = (\overline{F}^i_0, \overline{F}^i_1, \dots)$ die Folge, die durch Verringerung jedes Eintrages von F_i um 1 hervorgeht für $i \in \{1,2,\dots,n\}$, so gilt $(w_i, \overline{F}^i) \in \mathcal{K}$ und $\overline{F}^i_0 = 0$. Dadurch erhalten wir schließlich

$$\sum_{n\geq 0} |S_n(3124)| z^n = \sum_{n \leq 0} |\mathcal{L}^\times_n| z^n = \frac{1}{1 - zK(0,z)} = \frac{32z}{1 + 20z - 8z^2 - \sqrt{(1-8z)^3}}.$$

4 Erzeugende Bäume in der Mustervermeidung

Die *erzeugenden Bäume* wurden bei der Untersuchung von *Baxter-Permutationen* vorgestellt. Für Genaueres siehe dazu [21]. *J. West* führte die erzeugenden Bäume zur Zählung von mustervermeidenden Permutationen ein ([64],[65]). Dies ermöglichte eine Vielzahl von weiteren Ergebnissen in der Theorie der Mustervermeidung, u.a. die Wilf-Äquivalenz der Permutationen 4132 und 3142 durch *Z. E. Stankova* ([53]).

4.1 Erzeugende Bäume

Die folgenden Definitionen basieren auf [64] und [65] und werden von uns etwas erweitert.

Definition 4.1.1. *Wir definieren* Bäume *als kreisfreie gerichtete Graphen $B = (V, E)$, wobei V die* Knotenmenge *bezeichne und $E \subseteq V \times V$ die* Kantenmenge. *Gilt für zwei Knoten $a, b \in V$ $(a, b) \in E$, so bezeichnen wir b als ein* Kind *(bzw.* Kinderknoten*) von a oder nennen a einen* Elternknoten *von b.*
Besitzt ein Baum $B = (V, E)$ genau einen Knoten, der keinen Elternknoten besitzt, so nennen wir diesen die Wurzel von (V, E) *und sprechen von einem* Wurzelbaum.

Wir wollen einen Baum so markieren, sodass jede Markierung eines Knoten eindeutig aus der Markierung seines Elternknoten ermittelbar ist. Dafür benötigen wir

1. die Markierung der Wurzel, und

2. eine Menge von Regeln, wodurch die Anzahl und Markierungen der Kindern eines Knotens x eindeutig aus der Markierung von x hervorgeht.

Offensichtlich entspricht 2. einem Induktionsschritt und 1. einem Induktionsanfang.

Bemerkung 4.1.2. Die Menge aller Markierungen definieren wir als $\mathcal{M}$. Für die meisten Vorhaben von uns begnügen wir uns mit $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{N}$, jedoch können beliebige Objekte als Markierungen gewählt werden, z.B. Strings, n-Tupel usw.

Definition 4.1.3. *Sei $B = (V, E)$ ein Baum. Wir nennen eine surjektive Abbildung von V auf eine Menge von Markierungen $\mathcal{M}$ eine* Markierungsfunktion von B bezüglich $\mathcal{M}$.

Definition 4.1.4. *Ein* Regelsystem auf $\mathcal{M}$ *ist eine Abbildung $R_\mathcal{M}$ von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}^*$, wobei $\mathcal{M}^* := \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{M}^n$ die Menge aller Folgen mit Elementen aus $\mathcal{M}$ bezeichnet. $\epsilon \in \mathcal{M}^*$ ist als die leere Folge definiert.*

Bemerkung 4.1.5. Für eine Menge von Markierungen $\mathcal{M}$ schreiben wir ein Regelsystem $R_\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}$ meist wie folgt an:

$$\bigcup_{m\in\mathcal{M}} \{m \mapsto R_\mathcal{M}(m)\}.$$

Von wesentlichem Interesse ist die Anzahl der Knoten in der n-ten *Ebene* eines Baumes. Für $n \in \mathbb{N}$ ist ein *Pfad* der Länge n von a nach b definiert als eine Folge von Knoten $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n)$, wobei a_{i+1} ein Kind von a_i für alle $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ist und $a_0 = a$ sowie $a_n = b$ gilt. Ein Knoten x befindet sich in der Ebene n genau dann, wenn ein Pfad der Länge n von der Wurzel nach x existiert. Die Wurzel eines Baumes befindet sich auf der 0-ten Ebene.

Definition 4.1.6. *Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Markierungen, $w \in \mathcal{M}$ und $R_\mathcal{M}$ ein Regelsystem auf $\mathcal{M}$. Wir sagen* der Baum $B = (V, E)$ wird von $[\mathcal{M}, w, R_\mathcal{M}]$ erzeugt *genau dann, wenn eine Markierungsfunktion f von B bezüglich $\mathcal{M}$ existiert, sodass die Wurzel von B unter f auf w abgebildet wird und $\forall \kappa \in V$ gilt, dass eine Anordnung $(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_m)$ der Kinder von κ vorhanden ist mit*

$$R_\mathcal{M}(f(\kappa)) = (f(\kappa_1), f(\kappa_2), \ldots, f(\kappa_m)).$$

Wir nennen f dann eine Markierungsfunktion von B bezüglich $[\mathcal{M}, w, R_\mathcal{M}]$.

Bemerkung 4.1.7. Ist für zwei Bäume $B_1 = (V_1, E_1)$ und $B_2 = (V_2, E_2)$ eine bijektive Abbildung g von V_1 nach V_2 gegeben, sodass für je zwei Knoten $\lambda_1, \lambda_2 \in V_1$ $(\lambda_1, \lambda_2) \in E_1$ genau dann gilt, wenn $(g(\lambda_1), g(\lambda_2)) \in E_2$, so nennen wir g einen *Baum-Isomorphismus von B_1 nach B_2* und die beiden Bäume B_1 und B_2 *isomorph.*
Seien also die beiden Bäume B_1 und B_2 isomorph. Wird nun B_1 von $[\mathcal{M}, w, R_\mathcal{M}]$ erzeugt, so gilt dies offensichtlich auch für den Baum B_2. Umgekehrt lässt sich nun auch für zwei Bäume, welche beide von $[\mathcal{M}, w, R_\mathcal{M}]$ erzeugt werden, ein Isomorphismus finden (durch Induktion nach der Anzahl der Ebenen und Verwendung des Regelsystems).

Satz 4.1.8. *Sei $\mathcal{M}$ ein Menge von Markierungen, $R_\mathcal{M}$ ein Regelsystem auf $\mathcal{M}$. Die von $[\mathcal{M}, w, R_\mathcal{M}]$ erzeugten Bäume bilden eine Äquivalenzklasse auf die Menge aller Wurzelbäume.*

Beweis. Folgt direkt aus Bemerkung 4.1.7 und der Tatsache, dass Isomorphieklassen Äquivalenzklassen bilden. □

Wird nun ein Baum B von $[\mathcal{M}, w, R_\mathcal{M}]$ erzeugt, so schreiben wir $B \in [\mathcal{M}, w, R_\mathcal{M}]$. Die Bezeichnung ist auf Grund der Tatsache, dass ein Regelsystem $R_\mathcal{M}$ als Bildraum $\mathcal{M}^*$ besitzt, nicht eindeutig. Doch dies soll uns keine Unannehmlichkeiten bereiten.

Definition 4.1.9. *Für einen Baum B bezeichne B_n die Anzahl der Knoten von B auf der n-ten Ebene.*

Lemma 4.1.10. *Sei $B = (V, E) \in [\mathcal{M}, w, R_\mathcal{M}]$ und $n \in \mathbb{N}$. Für $m \in \mathcal{M}$ und zwei Markierungsfunktionen f, g von B bezüglich $[\mathcal{M}, w, R_\mathcal{M}]$ bezeichne $B_{m,n,f}$ bzw. $B_{m,n,f}$ die Anzahl aller Knoten von B auf der n-ten Ebene, die unter f bzw. g auf m abgebildet werden. dann gilt*

$$B_{m,n,f} = B_{m,n,g}.$$

Beweis. Folgt durch Induktion nach n. □

Definition 4.1.11. *Sei $B \in [\mathcal{M}, w, R_\mathcal{M}]$, $m \in \mathcal{M}$ und $n \in \mathbb{N}$. $B_{m,n}$ ist die Anzahl aller Knoten von B auf der n-ten Ebene, die unter einer beliebigen Markierungsfunktion von B bezüglich $[\mathcal{M}, w, R_\mathcal{M}]$ auf m abgebildet wird.*

Lemma 4.1.10 gewährleistet die Eindeutigkeit in Definition 4.1.11.

Jedem Knoten auf der n-ten Ebene eines Baumes $B \in [\mathcal{M}, w, R_{\mathcal{M}}]$ wird durch eine Markierungsfunktion f von B eine Markierung zugeordnet, d.h. es gilt

$$B_n = \sum_{m \in \mathcal{M}} B_{m,n}.$$

Beispiel 4.1.12. *Fibonacci-Baum:*
Ein Fibonacci-Baum wird von $\mathcal{F} = [\{1,2\}, 1, \{1 \mapsto 2, 2 \mapsto (1,2)\}]$ erzeugt (siehe Abbildung 4.1).

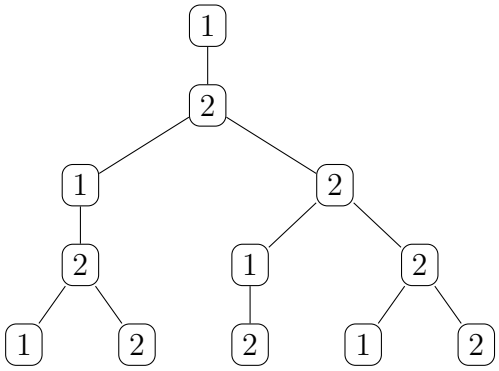


Abbildung 4.1: Ein von $\mathcal{F}$ erzeugter Baum mit markierten Knoten bis zur Ebene 4.

Sei F ein von $\mathcal{F}$ erzeugter Baum. Dann gilt

$$\begin{aligned} F_{1,n} &= F_{2,n-1}, \\ F_{2,n} &= F_{1,n-1} + F_{2,n-1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $F_n = F_{1,n} + F_{2,n} = F_{n-1} + F_{2,n-1} = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$. F_n stimmt also mit der bei 1 beginnenden Fibonacci-Folge überein.

4.1.1 Catalan-Bäume

Wir schließen hier noch einmal an die Gitterpfade aus Abschnitt 3.1 an. Betrachten wir für $k, l \in \{0, 1, \ldots, n\}$ Gitterpfade von $(n, 0)$ nach $(n - k, l)$. Sei $C_{k,l}$ die Anzahl

dieser Gitterpfade, welche unterhalb der Diagonale von $(n, 0)$ nach $(0, n)$ verlaufen. Siehe Abbildung 4.2. Offensichtlich erfüllt $C_{k,l}$ die Rekursion

$$C_{k,l} = C_{k-1,l} + C_{k,l-1},$$

und es ist wohlbekannt, dass $C_{k,l} = \binom{k+l}{l} - \binom{k+l}{l-1}$. $C_{k,l}$ kann als Verallgemeinerung der Catalan-Zahlen aufgefasst werden, da $C_{n,n}$ mit $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ übereinstimmt.

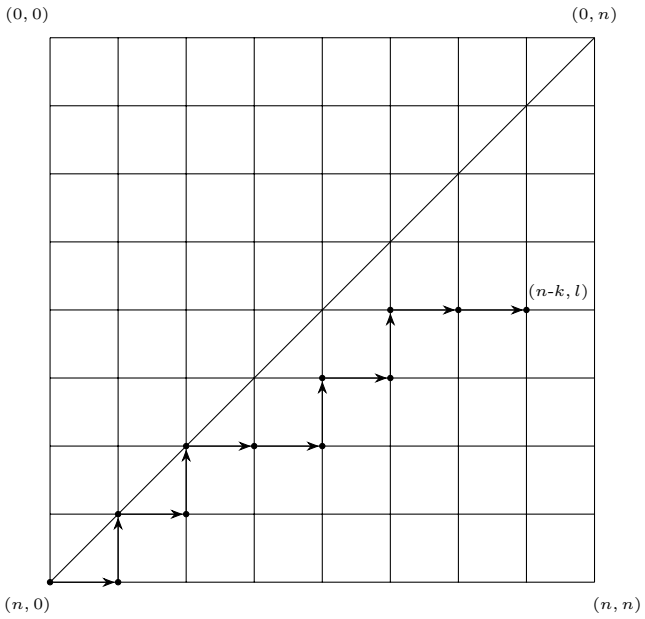


Abbildung 4.2: Gitterpfad von $(n, 0)$ nach $(n - k, l)$.

Definition 4.1.13. Catalan-Bäume *werden erzeugt von*

$$\mathcal{C} := [\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, 2, \bigcup_{k \geq 2} \{k \mapsto (2, 3, \ldots, k + 1)\}].$$

Wie der Name schon vermuten lässt, stehen Catalan-Bäume in enger Beziehung mit den Catalan-Zahlen.
Für jedes $(n + 1)$-Tupel $m = (m_0, m_1, \ldots, m_n)$ mit $m_0 = 2$ und $2 \leq m_i \leq m_{i-1} + 1$, existiert in $\mathcal{C}$ genau ein Pfad $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ der Länge n beginnend bei der Wurzel x_0. m_i ist die Markierung des Knotens x_i für alle $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Durch $a_i := m_i +$

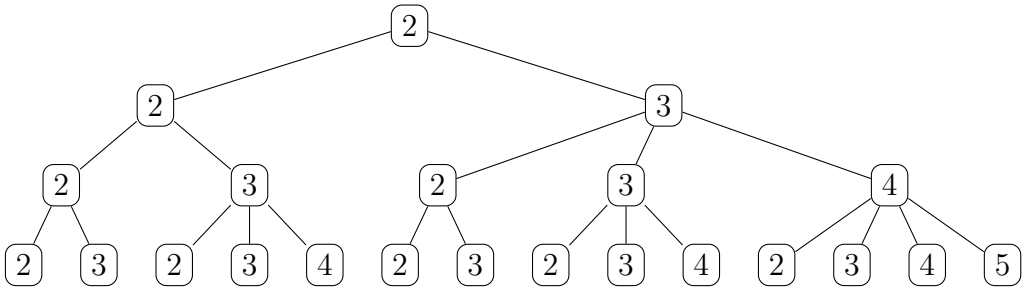


Abbildung 4.3: Ein von $\mathcal{C}$ erzeugter Baum bis zur Ebene 3 mit bereits markierten Knoten.

$i-2$ können wir m nun eindeutig mit einer monoton steigenden natürlichen Folgen $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ der Länge $n+1$ mit $0 \leq a_i \leq i$ identifizieren und umgekehrt. Jede solche Folge beschreibt genau einen Gitterpfad von $(n+1, 0)$ nach $(0, n+1)$, welcher unterhalb der Diagonale von $(n+1, 0)$ nach $(0, n+1)$ verläuft. Dies wird deutlich, wenn ein solcher Gitterpfad durch seine r-u-Sequenz $w = w_1 w_2 \ldots, w_{2(n+1)}$ gegeben ist. a_i beschreibt nun einfach die Anzahl der u in w, welche sich vor dem $(i+1)$-ten r von w befinden. Somit erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 4.1.14 ([64])**.** *Für $n \in \mathbb{N}^+$ und $T \in \mathcal{C}$ gilt*

$$T_{n-1} = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Alternativ kann man die Richtigkeit von Satz 4.1.14 auch folgendermaßen zeigen. Für $T \in \mathcal{C}$ gilt die Rekursion

$$\begin{aligned} T_{k,n} &= \sum_{i=k-1}^{n+1} T_{i,n-1}, \text{ für } n \geq 1, k \geq 2, \text{ mit} \\ T_{2,0} &= 1, \end{aligned}$$

da wir $T_{1,n} = 0$ setzen können für alle $n \geq 0$. Insbesondere gilt für $n \geq 1$

$$T_{2,n} = \sum_{i=1}^{n+1} T_{i,n-1} = T_{n-1}.$$

Betrachten wir nun $b_{k,l} := T_{k+2-l,k}$, so ist $b_{0,0} = 1$, $b_{n,n+1} = 0$ für alle $n \geq 0$ und für

$k \geq 1, l \geq 0$ gilt

$$b_{k,l} \quad = \quad \sum_{i=0}^{l} b_{k-1,i} = b_{k-1,l} + \sum_{i=0}^{l-1} b_{k-1,i} = b_{k-1,l} + b_{k,l-1}.$$

$b_{k,l}$ stimmt also mit $C_{k,l}$ überein. Daraus schließen wir

$$T_{n-1} = T_{2,n} = b_{n,n} = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

4.2 Permutationsbäume

Für eine Permutation q ist es möglich die q-meidenden Permutationen mithilfe eines erzeugenden Baumes zu generieren. Dazu werden die q-meidenden Permutationen der Länge n mit den Knoten eines erzeugten Baumes in der $(n-1)$-ten Ebene assoziiert. Wiederum liegen die folgenden Definitionen [64] zugrunde.

Definition 4.2.1. *Wir definieren für eine Permutation $p = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n$ die* Zwischenraumfunktion $\mathfrak{f}_p : [n+1] \to S_{n+1}$ *als*

$$\mathfrak{f}_p(i) = \begin{cases} (n+1)p_1 p_2 \dots p_n \text{ für } i = 1, \\ p_1 p_2 \dots p_n (n+1) \text{ für } i = n+1, \\ p_1 p_2 \dots p_{i-1}(n+1)p_i \dots p_n \text{ sonst.} \end{cases}$$

Definition 4.2.2. *Sei Q eine Menge von Permutationen. $i \in [n+1]$ wird* Q-meidender Zwischenraum *einer Permutation $p \in S_n(Q)$ genannt genau dann, wenn $\mathfrak{f}_p(i) \in S_{n+1}(Q)$.*

Beispiel 4.2.3. Die Menge der $\{213\}$-meidenden Zwischenräume der Permutation $24531 \in S_n(213)$ ist $\{1, 2, 3, 4\}$.

Definition 4.2.4. *Sei Q eine Menge von Permutation. Der* Permutationsbaum $T(Q)$ *ist der Wurzelbaum, mit Knotenmenge $\bigcup_{k\geq 1} S_k(Q)$, Wurzel $1 \in S_1$ und der Knoten $\lambda \in S_{n+1}$ ist genau dann ein Kind des Knotens $\kappa \in S_n$, wenn ein Q-meidender Zwischenraum $i \in [n+1]$ existiert mit $\mathfrak{f}_\kappa(i) = \lambda$.*

Nun befinden sich auf der n-ten Ebene eines Permutationsbaumes $T(Q)$ nur Permutationen der Länge $n+1$ (Vollständige Induktion nach der Länge der Permutationen). Sei

p ein Q-meidende Permutation der Länge $n+1$, dann ist die Permutation, welche aus p durch das Streichen von $n+1$ hervorgeht, ebenfalls eine Q-meidende Permutation. Anderenfalls würde p ein Muster aus Q enthalten. Dies setzen wir fort bis wir bei der Permutation 1 angelangt sind. D.h. jede Q-meidende Permutation ist auch wirklich in $T(Q)$ vorhanden und die Anzahl der Knoten in der n-ten Ebene stimmen mit $|S_{n+1}(Q)|$ überein.

Beispiel 4.2.5. $T(\{12\})$:
Sei p eine 12-meidende Permutation der Länge n. p besitzt nun nur den $\{12\}$-meidenden Zwischenraum 1, da das Einfügen von $n+1$ an jeder anderen Stelle ein Muster 12 erzeugen würde. Jeder Knoten in $T(\{12\})$ besitzt also genau ein Kind.

Lemma 4.2.6 ([64])**.** *Sei Q eine Menge von Permutationen. Für $p = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n$ und $i \in [n+1]$ gilt:*

1. *$\mathfrak{f}_p(i) \in S_{n+1}(Q)$, so ist auch $p \in S_n(Q)$.*
2. *Bildet eine Teilfolge von $\mathfrak{f}_p(i)$ ein Muster $q \in Q$ und gilt $p \in S_n(Q)$, dann ist $n+1$ das größte Element dieser Teilfolge.*
3. *Ist $p \in S_n(Q)$ mit Q-meidenden Zwischenräume $a_1, a_2, \dots, a_k$, dann ist die Menge der Q-meidenden Zwischenräume von $\mathfrak{f}_p(a_j)$ mit $j \in [k]$ eine Teilmenge von $\{a_1, \dots, a_j, a_j+1, a_{j+1}+1, \dots, a_k+1\}$.*
4. *Sei $p \in S_n(Q)$ mit Q-meidenden Zwischenräume $a_1, a_2, \dots, a_k$ und $j \in [k]$. Existiert für ein $b \in \{a_1, \dots, a_j, a_j+1, a_{j+1}+1, \dots, a_k+1\}$ eine Teilfolge in $\mathfrak{f}_{\mathfrak{f}_p(a_j)}(b)$, welche ein Muster $q \in Q$ bildet, so sind $n+1$ und $n+2$ Elemente dieser Teilfolge.*

Beweis. zu *1.*: Trivial.
zu *2.*: Würde eine Teilfolge in $\mathfrak{f}_p(i)$ existieren, welche das Muster q bildet und $n+1$ nicht als Element beinhaltet, so würde diese Folge auch das Muster q in p bilden.
zu *3.*: Sei $a \in [n+1] \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. In $\mathfrak{f}_p(a)$ existiert nun laut 2. eine Teilfolge welche ein Muster $q \in Q$ bildet und $n+1$ als größtes Element beinhaltet. Ersetzen wir in dieser Folge $n+1$ mit $n+2$, so erhalten wir für alle $l \in [k]$ eine q-bildende Teilfolge in $\mathfrak{f}_{\mathfrak{f}_p(a_l)}(a)$ für $a < a_l$ (bzw. in $\mathfrak{f}_{\mathfrak{f}_p(a_l)}(a+1)$ für $a > a_l$). Also ist a für $a < a_l$ bzw. $a+1$ für $a > a_l$ kein Q-meidender Zwischenraum von $\mathfrak{f}_p(a_l)$.

zu *4.*: Aus Punkt *2.* folgt, dass $n+2$ ein Element der Teilfolge ist. Wäre nun $n+1$ nicht in dieser Teilfolge enthalten, so würde diese Teilfolge durch den Austausch von $n+2$ mit $n+1$ bereits das Muster q in $\mathfrak{f}_p(b)$ für $b \in \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ bzw. in $\mathfrak{f}_p(b-1)$ für $b \in \{a_j+1, a_{j+1}+1, \ldots, a_k+1\}$ bilden. □

Wollen wir für ein $p \in S_n(Q)$ mit Q-meidenden Zwischenräumen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nun die Q-meidenden Zwischenräume von $\mathfrak{f}_p(a_j) \in S_{n+1}(Q)$ ermitteln, so müssen wir laut Punkt *3.* aus Lemma 4.2.6 nur die Zwischenräume $a_1, \ldots, a_j, a_j+1, a_{j+1}+1, \ldots, a_k+1$ in Betracht ziehen und laut Punkt *4.* aus Lemma 4.2.6 kommen nur Teilfolgen, welche die Elemente $n+1$ und $n+2$ besitzen als mögliche Muster in $\mathfrak{f}_{\mathfrak{f}_p(a_j)}(b)$ mit
$b \in \{a_1, \ldots, a_j, a_j+1, a_{j+1}+1, \ldots, a_k+1\}$ in Frage.

4.3 $T(\{123\})$ und $T(\{132\})$

Wir wollen nun Korollar 2.3.4 mithilfe von Permutationsbäumen verifizieren. Dazu zeigen wir, dass $T(\{123\}), T(\{132\}) \in \mathcal{C}$ gilt.

Satz 4.3.1 ([64])**.** $T(\{123\}) \in \mathcal{C}$.

Beweis. Sei $T(\{123\}) = (\bigcup_{n\geq 0} S_n(123), E)$. Wir werden zeigen, dass die Abbildung f von $\bigcup_{n\geq 0} S_n(123)$ auf $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ definiert durch $f(\pi) := |\{\bar{\pi} \ : \ (\pi, \bar{\pi}) \in E)\}|$ eine Markierungsfunktion von $T(\{123\})$ bezüglich $\mathcal{C}$ ist.
f bildet offensichtlich einen Knoten auf die Anzahl seiner Kinder ab, genauer gesagt: f bildet einen Knoten von $T(\{123\})$ auf die Anzahl seiner $\{123\}$-meidenden Zwischenräume ab.
Zuerst zur Surjektivität von f. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ beliebig, dann gilt
$f((n-1, n-2, \ldots, 1)) = n$, da $\mathfrak{f}_{(n-1,n-2,\ldots,1)}(i) \in S_n(123)$ für alle $i \in [n]$.
Betrachten wir nun eine 123-meidende Permutation $p = p_1 p_2 \ldots p_k \ldots p_n$ und sei p_k der erste Eintrag, der kein Links-Rechts-Minimum von p ist. D.h. $p_1 \ldots p_{k-1}$ bildet eine fallende Folge. Für $i \in \{k+1, \ldots, n+1\}$ ist $\mathfrak{f}_p(i) \notin S_n(123)$, da $p_{k-1}p_k(n+1)$ das Muster 123 bilden würde. p besitzt also genau die $\{123\}$-meidenden Zwischenräume $1, 2, \ldots k$ und somit gilt $f(p) = k$. Für $i \in \{2, \ldots k\}$ bildet $n+1$ den ersten Eintrag, der kein Links-Rechts-Minimum von $\mathfrak{f}_p(i)$ ist und befindet sich auf Position i, d.h. $f(\mathfrak{f}_p(i)) = i$ für $i \in \{2, \ldots k\}$. $\mathfrak{f}_p(1) = (n+1)p_1 \ldots p_n$ besitzt immer noch als ersten Eintrag, der

kein Links-Rechts-Minimum bildet, p_k. Nun ist es jedoch eine Position nach rechts gerutscht. Es gilt also $f(\mathfrak{f}_p(1)) = k + 1$.
Es gilt nun $f(p) = k$ und k wird durch das Regelsystem von $\mathcal{C}$ auf $(2, 3, \ldots, k, k+1) = (f(\mathfrak{f}_p(2)), f(\mathfrak{f}_p(3)), \ldots, f(\mathfrak{f}_p(k)), f(\mathfrak{f}_p(1)))$ abgebildet. f ist also eine Markierungsfunktion von $T(\{123\})$ bezüglich $\mathcal{C}$. □

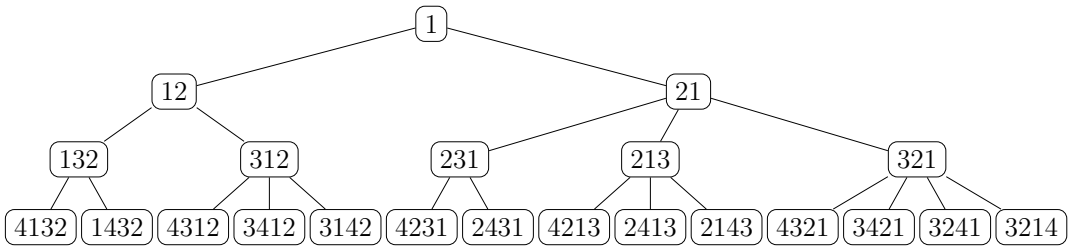


Abbildung 4.4: $T(\{123\})$ bis zur Ebene 3.

Satz 4.3.2 ([20])**.** $T(\{213\}) \in \mathcal{C}$.

Beweis. Sei $T(\{213\}) = (\bigcup_{n\geq 0} S_n(213), E)$. Wir gehen analog zu dem Beweis von Satz 4.3.1 vor und zeigen, dass $f(\pi) := |\{\bar{\pi} \ : \ (\pi, \bar{\pi}) \in E)\}|$ eine Markierungsfunktion von $T(\{213\})$ bezüglich $\mathcal{C}$ ist.
Sei $p = p_1 p_2 \ldots p_k, \ldots p_n \in S_n(213)$, sodass p_k das Folgenglied ist, welches kein Links-Rechts-Maximum bildet. D.h. $p_1 p_2 \ldots p_{k-1}$ bilden eine steigende Folge. Nun kann analog zu Satz 4.3.1 vorgegangen werden. □

Satz 4.3.3 ([64])**.** $|S_n(123)| = |T(\{123\})_{n+1}| = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = |T(\{213\})_{n+1}| = |S_n(213)|$.

Beweis. Folgt sofort aus Satz 4.1.14, Satz 4.3.1 und Satz 4.3.2. □

Durch Symmetrieargumente (Satz 2.2.7) folgt somit wiederum Korollar 2.3.4.

4.4 Zwei Muster der Länge 3

Es existieren mehrere Arbeiten, die sich mit $|S_n(\{q_1, q_2\})|$ für $q_1, q_2 \in S_3$ beschäftigen, wie etwa [65], [41] und besonders empfehlenswert ist die Arbeit [62]. Wir wählen im Folgenden oft einen eigenen Zugang. Diese sind bei weitem nicht so elegant wie etwa in

[62], jedoch können wir guten Gebrauch von unseren bisherigen Ergebnissen machen und heben deutlich eine nicht unwesentliche Tatsache hervor, nämlich das für zwei endliche Wilf-äquivalente Mengen von Permutationen Q_1 und Q_2, $T(Q_1)$ und $T(Q_2)$ nicht isomorph zueinander sein müssen.
Es existieren offensichtlich fünf triviale Wilf-Äquivalenzklassen in $\{\{q_1, q_2\} : q_1, q_2 \in S_3, q_1 \neq q_2\}$, mit Repräsentanten $\{123, 132\}, \{123, 231\}, \{123, 321\}, \{132, 213\}$ und $\{132, 231\}$.

Satz 4.4.1 ([65])**.** $T(\{132, 231\}) \in [\{2\}, 2, 2 \mapsto (2, 2)]$.

Beweis. Sei $T(\{132, 231\}) = (\bigcup_{n\geq 0} S_n(\{132, 231\}), E)$. Wir suchen eine Markierungsfunktion f von $T(\{132, 231\})$ bezüglich $[\{2\}, 2, 2 \mapsto (2, 2)]$. Offensichtlich wählen wir $f(p) := 2$ für alle $p \in S_n(\{132, 231\})$. Sei $p = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n(\{132, 231\})$ beliebig. Die einzigen $\{132, 231\}$-meidenden Zwischenräume bilden 1 und $n+1$, da $(p_i, n+1, p_j)$ für alle $j, i \in [n]$ das Muster 132 oder das Muster 231 bilden würde. p besitzt also genau zwei Kinder in $T(\{132, 231\})$ und es gilt $f(p) = 2 \mapsto (2, 2) = (\mathfrak{f}_p(1), \mathfrak{f}_p(n+1))$. □

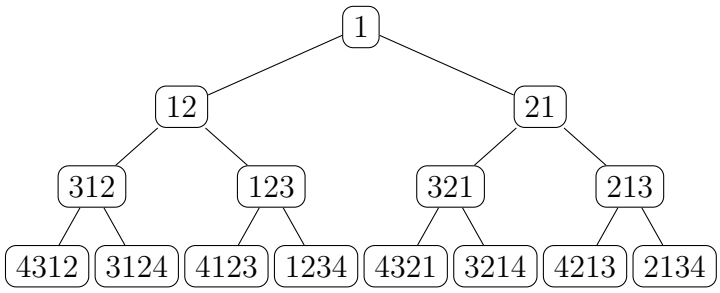


Abbildung 4.5: $T(\{132, 231\})$ bis zur Ebene 3.

Ein von $[\{2\}, 2, 2 \mapsto (2, 2)]$ erzeugter Baum T erfüllt nun $T_{2,n} = 2 \cdot T_{2,n-1}$ mit $T_{2,0} = 1$, daraus folgt:

Satz 4.4.2. $|S_n(\{132, 231\})| = T(\{132, 231\})_{n-1} = 2^{n-1}$.

Satz 4.4.3 ([41])**.** $(|S_n(\{123, 321\})|)_{n\geq 1} = (1, 2, 4, 4, 0, 0, 0, \dots)$.

Beweis. Wir zeigen nur, dass für $n \geq 5$ $|S_n(\{123, 321\}| = 0$ gilt.
Sei $p = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n$. Wir markieren jedes p_i mit einer Markierung (a_i, b_i), wobei a_i (bzw. b_i) die Anzahl der Elemente der längsten monoton steigenden (bzw. fallenden)

Teilfolge von p ist, die mit p_i endet. Ist $k < l$ und $p_k < p_l$, so gilt offensichtlich $a_k < a_l$ und falls $p_k > p_l$, so folgt $b_k < b_l$. Es sind also alle n Markierungen von p unterschiedlich. Nach dem Schubfachprinzip existiert für $n \geq 5$ zumindest eine aufsteigende oder fallende Teilfolge der Länge 3. □

Bemerkung 4.4.4. Satz 4.4.3 ist ein Spezialfall des *Satz von Erdős-Szekeres*. Siehe dazu [26].

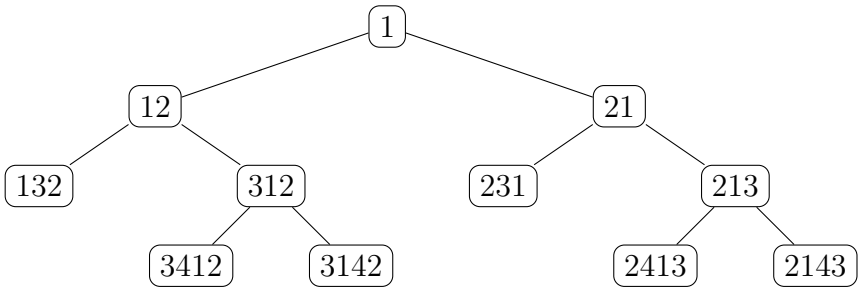


Abbildung 4.6: Der komplette Baum $T(\{123, 321\})$.

Der Baum $T(\{123, 321\})$ ist endlich und wird etwa von
$[\{a, b, c, d\}, a, \{a \mapsto (b, b), b \mapsto (d, c), c \mapsto (d, d), d \mapsto \epsilon\}]$ erzeugt.

Satz 4.4.5. $T(\{132, 213\}) \in [\{2\}, 2, 2 \mapsto (2, 2)]$.

Beweis. Sei $p = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n(\{132, 213\})$. Wir müssen zeigen, dass p genau 2 $\{132, 213\}$-meidende Zwischenräume besitztn denn dann ist durch $f(p) := 2$ für alle $p \in S_n(\{132, 213\})$ eine Markierungsfunktion von $T(\{132, 213\})$ bezüglich $[\{2\}, 2, 2 \mapsto (2, 2)]$ gefunden.
Sei $p_i = n$ mit $1 \leq i_1 < i < i_2 \leq n$, dann erzeugt $(p_{i_1}, n+1, p_{i_2})$, weder das Muster 132 noch 213, da sonst (p_{i_1}, n, p_{i_2}) eines der beiden Muster erzeugen würde. $(n, n+1, p_{i_2})$ kann auch kein 132- oder 213-Muster bilden, somit ist $i+1$ ein $\{132, 213\}$-meidender Zwischenraum. Da $(n, p_{i_2}, n+1)$ ein 213-Muster ist, existieren keine
$\{132, 213\}$-meidenden Zwischenräume größer als $i+1$. $(p_{i_1}, n+1, n)$ bildet das Muster 132, also existieren auch keine $\{132, 213\}$-meidenden Zwischenräume zwischen 1 und $i+1$.
Da eine Teilfolge der Länge 3 mit größtem Element an der ersten Stelle nie ein Muster 132 oder 213 erzeugen kann, ist 1 ebenfalls ein $\{132, 213\}$-meidender Zwischenraum. Die Fälle $p_n = n$ und $p_1 = n$ führen zu denselben Ergebnissen. □

Somit ergibt sich:

Satz 4.4.6. $|S_n(\{132, 213\})| = T(\{132, 213\})_{n-1} = 2^{n-1}$.

Satz 4.4.7. $T(\{123, 231\}) \in [\{a, b, c\}, a, \{a \mapsto (a, b), b \mapsto (b, c), c \mapsto (c)\}]$.

Beweis. Sei $T(\{123, 231\}) = (V, E)$, V sind also alle $\{123, 231\}$-vermeidenden Permutationen. Wir zeigen $f : V \to \{a, b, c\}$, definiert durch

$$f(p_1 p_2 \dots p_n) := \begin{cases} c & \text{wenn } p_1 \geq p_n \text{ und } \exists i \in [n] : p_i < p_n, \\ a & \text{wenn } p_1 \geq p_n \text{ und } \nexists i \in [n] : p_i < p_n, \\ b & \text{sonst,} \end{cases}$$

bildet eine Markierungsfunktion von $T(\{123, 231\})$ bezüglich
$[\{a, b, c\}, a, \{a \mapsto (a, b), b \mapsto (c, b), c \mapsto (c)\}]$. Die Surjektivität von f ist trivial.
Die Wurzel von $T(\{123, 231\})$ wird auf a abgebildet, da $f(1) = a$.
Sei $p = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n(\{123, 231\})$. Eine Tripel, beginnend mit dem größten Element, bildet offensichtlich nicht das Muster 123 oder 231, somit ist 1 immer ein $\{123, 231\}$-meidender Zwischenraum.
Fall 1: $f(p) = a$. Es gilt $p_1 > p_n$, d.h. $2, \dots, n$ kommen nicht als $\{123, 231\}$-meidende Zwischenräume in Frage. Sei $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Da $p_i > p_n$ folgt, dass $(p_i, p_n, n+1)$ nicht das Muster 123 und schon gar nicht 231 bilden kann. Somit sind die $\{123, 231\}$-meidenden Zwischenräume von p genau 1 und $n+1$. $\mathfrak{f}_p(1)$ ist eine fallende Folge, also $f(\mathfrak{f}_p(1)) = a$. Aus $p_1 < n+1$ folgt $f(\mathfrak{f}_p(n+1)) = b$. Insgesamt gilt $f(p) = a \mapsto (a, b) = (f(\mathfrak{f}_p(1)), f(\mathfrak{f}_p(n+1)))$.
Fall 2: $f(p) = c$. Es kommen wiederum $2, \dots, n$ nicht als $\{123, 231\}$-meidende Zwischenräume in Frage. Laut Voraussetzung existiert ein p_i ($i \in \{2, \dots, n-1\}$) mit $p_i < p_n$. $n+1$ ist also auch kein $\{123, 231\}$-meidender Zwischenraum. Offensichtlich gilt $f(\mathfrak{f}_p(1)) = c$.
Fall 3: $f(p) = b$. Es gilt $p_1 < p_n$. 1 ist offensichtlich ein $\{123, 231\}$-meidender Zwischenraum von p. Wir betrachten jenes i aus $\{2, \dots, n\}$ mit $p_i = n$. $(p_1, p_i, n+1)$ bildet das Muster (123), somit existiert kein $\{123, 231\}$-meidender Zwischenraum größer i.
Wenn $(p_{j_1}, n+1, p_{j_2})$ für $j_1 \in [i-1]$ und $j_2 \geq i+1$ das Muster 231 bilden würde (das Muster 123 ist offensichtlich nicht möglich), so würde (p_{j_1}, n, p_{j_2}) das Muster 231 in p

bilden und da $(p_{j_1}, n+1, n)$ auch kein 123- oder 231-Muster bildet, ist i ein $\{123, 231\}$-meidender Zwischenraum.
Ist $i > 2$, so gilt $p_{i-1} < p_1$ (da p 123-meidend ist). Daraus folgt $(p_1, n+1, p_{i-1})$ ist ein 231-Muster. Wir können schlussfolgern, dass 1 und i die einzigen $\{123, 231\}$-meidenden Zwischenräume sind.
Aus $p_1 < p_n$ folgt $f(\mathfrak{f}_p(1)) = c$ und $f(\mathfrak{f}_p(i)) = b$. □

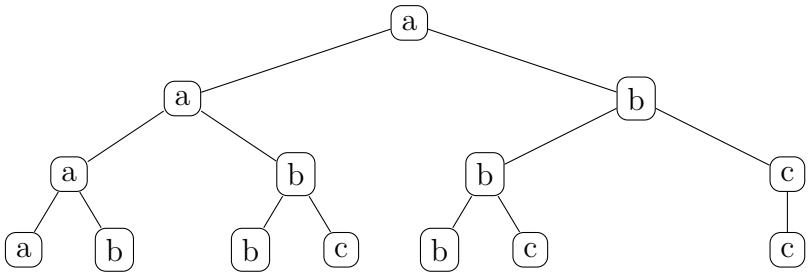


Abbildung 4.7: Markierter Baum aus $[\{a, b, c\}, a, \{a \mapsto (a, b), b \mapsto (c, b), c \mapsto (c)\}]$ bis zur dritten Ebene.

Satz 4.4.8. $|S_n(\{123, 231\}| = T(\{123, 231\})_{n-1} = \binom{n}{2} + 1$.

Beweis. Sei $T := T(\{123, 231\}) \in [\{a, b, c\}, a, \{a \mapsto (a, b), b \mapsto (b, c), c \mapsto (c)\}]$. Es gilt

$$\begin{aligned} T_{a,n} &= T_{a,n-1}, \\ T_{b,n} &= T_{a,n-1} + T_{b,n-1}, \\ T_{c,n} &= T_{b,n-1} + T_{c,n-1}, \end{aligned}$$

mit $T_{a,0} = 1, T_{b,0} = T_{b,0} = 0$.
Somit erhalten wir $T_n = T_{a,n} + T_{b,n} + T_{c_n} = 1 + n + \frac{(n-1)\cdot n}{2} = 1 + \binom{n+1}{2}$. □

Bemerkung 4.4.9. Sei

$$K_{k_1,k_2,k_3} := (\underbrace{a, a, \ldots, a}_{k_1 \text{ mal}}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{k_2 \text{ mal}}, \underbrace{c, c, \ldots, c}_{k_3 \text{ mal}}).$$

Die Bestimmung von T_n für $T \in [\{a, b, c\}, a, \{a \mapsto (a, b), b \mapsto (c, b), c \mapsto (c)\}]$ entspricht der Ermittlung der Anzahl der möglichen Folgen K_{k_1,k_2,k_3} mit $k_1 + k_2 + k_3 = n + 1$,

$k_1 \geq 1$ und falls $k_3 \geq 1$, dann gilt $k_2 \geq 1$.
Es gilt

$$\begin{aligned}
|\{K_{k_1,k_2,k_3} &: k_1+k_2+k_3 = n+1, k_1 \geq 1, k_3 \geq 1 \Rightarrow k_2 \geq 1,\}| \\
&= |\{K_{k_1,k_2,k_3} : k_1 = n+1\}| \\
&+ |\{K_{k_1,k_2,k_3} : k_1+k_2 = n+1, k_1 \geq 1, k_2 \geq 1\}| \\
&+ |\{K_{k_1,k_2,k_3} : k_1+k_2+k_3 = n+1, k_1 \geq 1, k_2 \geq 1, k_3 \geq 1\}| \\
&= 1 + n + \frac{(n-1)\cdot n}{2} = 1 + \binom{n+1}{2}.
\end{aligned}$$

Satz 4.4.10. $T(\{123,132\}) \in [\mathbb{N}^+, 2, \bigcup_{k\geq 1}\{k \mapsto (k+1, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{k-1\ mal})\}]$.

Beweis. Sei $T(\{123,132\}) = (V,E)$. Wir zeigen $f(p) := |\{\bar{p} \in V : (p,\bar{p} \in E\}|$ ist eine Markierungsfunktion von $T(\{123,132\})$ bezüglich $[\mathbb{N}^+, 2, \{k \mapsto (k+1, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{k-1\ mal})\}_{k\geq 1})$.
Die Surjektivität von f ist trivial.
Wir betrachten $p = p_1p_2\ldots p_n \in S_n(\{123,132\})$ mit den $\{123,132\}$-meidenden Zwischenräumen $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, also $f(p) = k$. Offensichtlich ist 1 immer ein $\{123,132\}$-meidender Zwischenraum (also $a_1 = 1$).
Wir suchen die Menge der $\{123,132\}$-meidenden Zwischenräume von $\mathfrak{f}_p(1)$. Laut Punkt 3. von Lemma 4.2.6 ist diese eine Teilmenge von $\{1, a_1+1, a_2+1, \ldots, a_k+1\}$ und wegen Punkt 4. von Lemma 4.2.6 muss eine 123- oder 132-bildende Teilfolge von $\mathfrak{f}_{\mathfrak{f}_p(1)}(b)$ mit $b \in \{1, a_1+1, a_2+1, \ldots, a_k+1\}$ die Elemente $n+1$ und $n+2$ enthalten, jedoch kann keine mit $n+1$ oder $n+2$ beginnende Teilfolge das Muster 123 oder 132 bilden. $\mathfrak{f}_p(1)$ besitzt also die $\{123,132\}$-meidenden Zwischenräume $1, a_1+1, a_2+1, \ldots, a_k+1$, d.h. $f(\mathfrak{f}_p(1)) = k+1$.
Nun suchen wir die $\{123,132\}$-meidenden Zwischenräume von $\mathfrak{f}_p(a_i)$ mit $i > 1$, d.h. auch $a_i > 1$. $(p_1, n+1, n+2)$ bildet ein 123 und $(p_1, n+2, n+1)$ ein 132 Muster, somit ist der einzige $\{123,132\}$-meidende Zwischenraum von $\mathfrak{f}_p(a_i)$ nur 1. Daraus folgt $f(\mathfrak{f}_p(a_i)) = 1$.
Insgesamt ergibt sich $f(p) = k \mapsto (k+1, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{k-1\ mal}) = (f(\mathfrak{f}_p(1)), f(\mathfrak{f}_p(a_2)), \ldots, \mathfrak{f}_p(a_n))$.

□

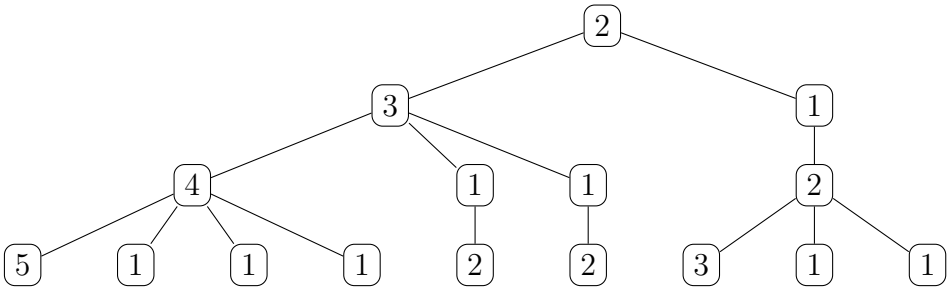


Abbildung 4.8: Die ersten vier Ebenen eines Baumes aus
$[\mathbb{N}^+, 2, \bigcup_{k\geq 1}\{k \mapsto (k+1, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{k-1\ mal})\}]$.

Satz 4.4.11 ([65])**.** *Sei* $T \in [\mathbb{N}, 2, \bigcup_{k\geq 1}\{k \mapsto (k+1, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{k-1\ mal})\}]$*, dann gilt* $T_n = 2^n$*.*

Beweis. Sei f eine Markierungsfunktion von $T = (V, E)$ bezüglich $[\mathbb{N}^+, 2, \bigcup_{k\geq 1}\{k \mapsto (k+1, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{k-1\ mal})\}]$, so besitzt ein Knoten $\kappa \in V$ mit $f(\kappa) = k$, k Kinder. Es gilt für ein festes κ

$$\sum_{(\kappa,\lambda)\in E} f(\lambda) = (k+1) + (k-1)\cdot 1 = 2\cdot k = 2\cdot f(\kappa),$$

und $\sum_{v\in V_n} f(v) = |V_{n+1}|$, wobei V_n die Menge aller Knoten auf der n-ten Ebene bezeichnet. D.h.

$$2|V_n| = \sum_{v\in V_{n-1}} 2f(v) = \sum_{v\in V_{n-1}} \sum_{(v,\lambda)\in E} f(\lambda) = \sum_{\lambda\in V_n} f(\lambda) = |V_{n+1}|.$$

Die Anzahl der Knoten verdoppelt sich also von Ebene zu Ebene. □

Satz 4.4.12. $|S_n(\{123, 132\})| = 2^{n-1}$.

Beweis. Folgt aus Satz 4.4.10 und Satz 4.4.11. □

Q	$T(Q)$ wird erzeugt von	$\lvert S_n(Q)\rvert$
$\{123, 321\}$	$[\{a, b, c, d\}, a,$ $\{a \mapsto (b, b),$ $b \mapsto (d, c),$ $c \mapsto (d, d),$ $d \mapsto \epsilon\}]$	0 für $n \geq 5$
$\{132, 231\}$	$[\{2\}, 2, 2 \mapsto (2, 2)]$	2^{n-1}
$\{132, 213\}$	$[\{2\}, 2, 2 \mapsto (2, 2)]$	2^{n-1}
$\{123, 132\}$	$[\mathbb{N}^+, 2, \bigcup_{k\geq 1}\{k \mapsto (k+1, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k-1\ mal})\}]$	2^{n-1}
$\{123, 231\}$	$[\{a, b, c\}, a,$ $\{a \mapsto (a, b),$ $b \mapsto (b, c),$ $c \mapsto (c)\}]$	$\binom{n}{2} + 1$

Tabelle 4.1: Zusammenfassung für zwei Muster der Länge 3.

5 Die Wilf-Äquivalenzklassen von S_4 und S_5

Satz 2.3.2 zeigt, dass die beiden trivialen Wilf-Äquivalenzklassen mit Repräsentanten 123 und 231, eine Wilf-Äquivalenzklasse bildet und zwar ganz S_3. Die Klassifizierung von S_4 und S_5 erwies sich um einiges komplizierter. Es stellt sich heraus, dass wir durch die Ergebnisse der vorherigen Kapitel bereits die Einteilung in Wilf-Äquivalenzklassen der Mengen S_4, S_5 und sogar S_5 sowie S_7 durchführen können. Weiters gilt, dass jede bisher bekannte Wilf-Äquivalenz aus einem stärkeren Zusammenhang folgt und zwar aus Symmetrieargumenten, Baumisomorphismen, strenge Wilf-Äquivalenzen oder einer Zusammensetzung dieser.

5.1 Wilf-Äquivalenzklassen von S_4

S_4 besitzt sieben triviale Wilf-Äquivalenzklassen (siehe Tabelle 5.1). *Z. Stankova* lieferte in [53] folgendes bemerkenswertes Ergebnis:

Satz 5.1.1 ([53])**.** $T(4132)$ *und* $T(3142)$ *sind isomorph.*

Dies lieferte die Wilf-Äquivalenz von 4132 und 3142. In [64] zeigt *J. West* die Isomorphie von $T(1234), T(1243)$ und $T(2143)$. Die Vervollständigung der Klassifizierung von S_4 lieferte Stankova in [54], indem sie die Wilf-Äquivalenz der Permutationen 1234 und 4132 zeigte. Wir können die Wilf-Äquivalenz von $1234, 1243, 2134$ und 4123 aus Korollar 3.4.11 und Symmetrieargumenten (Satz 2.2.7) folgern. Somit besitzt S_4 drei Wilf-Äquivalenzklassen (siehe Tabelle 5.1).
Für ein Muster q der Länge 4 gestaltet sich die Ermittlung eines expliziten Ausdrucks für $|S_n(q)|$ erheblich schwieriger als für Muster der Länge 3. Die erzeugende Funktion

q				$\lvert S_5(q)\rvert$	$\lvert S_6(q)\rvert$	$\lvert S_7(q)\rvert$	$\lvert S_8(q)\rvert$	$\lvert S_9(q)\rvert$	$\lvert S_{10}(q)\rvert$
1324 4231				103	513	2762	15793	94776	591950
1423 3241 4132 1342 2431 4213 3124 2314		2413 3142		103	512	2740	15485	91245	555662
1234 4321	1243 3421 4312 2134	3214 4123 2341 1432	2143 3412	103	513	2761	15767	94359	586590

Tabelle 5.1: [55] Muster der Länge 4. Triviale Wilf-Äquivalenzklassen sind eingerahmt.

der Folge $(|S_n(3124)|)_{n\in\mathbb{N}}$ wurde in Abschnitt 3.6 vorgestellt. Eine exakte Formel für $|S_n(1234)|$ liefert I. Gessel (siehe dazu [15] und [33]). Es gilt

$$S_n(1234) = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{n+1}{k+1} \binom{n+2}{k+1}.$$

Die Ermittlung von $|S_n(1324)|$ für $n \in \mathbb{N}$ bereitet erhebliche Schwierigkeiten und ist bis heute nicht bekannt. Wir werden in Kapitel 7 noch genauer auf das Muster 1324 eingehen. Muster der Länge 4 werden ausführlich in [15, Chapter 4] behandelt.

5.2 Wilf-Äquivalenzklassen von S_5

In [6] zeigten E. Babson und J. West die Wilf-Äquivalenz von Permutationen der Form $(n, n-1, \pi)$ und $(n-1, n, \pi)$ für beliebige $\pi \in S_{n-2}$ sowie die Wilf-Äquivalenz von $(n, n-1, n-2, \pi)$ und $(n-2, n-1, n, \pi)$ für $\pi \in S_{n-3}$. Dies sind Spezialfälle von Korollar 3.4.11. Wir listen in Tabelle 5.2 die Vertreter der 23 trivialen Wilf-Äquivalenzklassen von S_5 und umrahmen die Permutationen, welche durch Satz 2.2.7 und Korollar 3.4.11 in eine Wilf-Äquivalenzklasse fallen. Es ergeben sich somit 16 Wilf-Äquivalenzklassen

für S_5 (siehe Tabelle 5.2).

q	$\lvert S_7(q)\rvert$	$\lvert S_8(q)\rvert$	$\lvert S_9(q)\rvert$	$\lvert S_{10(q)}\rvert$	$\lvert S_{11}(q)\rvert$	$\lvert S_{12}(q)\rvert$	$\lvert S_{13}(q)\rvert$
25314	4578	33184	258757	2136978	18478134	165857600	1535336290
24153	4579	33216	259401	2147525	18632517	167969934	1563027614
23514	4579	33218	259483	2149558	18672277	168648090	1573625606
24513	4580	33249	260092	2159381	18815124	170605392	1599499163
13542	4580	33252	260202	2161837	18858720	171285237	1609282391
14352	4580	33252	260204	2161930	18861307	171341565	1610345257
13524	4580	33254	260285	2163930	18900534	172016256	1621031261
13425	4580	33256	260370	2166120	18945144	172810050	1633997788*
13452	4581	33283	260805	2171393	18994464	173094540	1632480259*
14523	4581	33284	260847	2172454	19015582	173461305	1638327423
14532	4581	33285	260886	2173374	19032746	173741467	1642533692
12453 21453	4581	33286	260927	2174398	19053058	174094868	1648198050
15342	4581	33287	260967	2175379	19072271	174426353	1653484169
12345 21345 32145 43215 21354 21543	4582	33324	261808	2190688	19318688	178108704	1705985883
12435 21435	4582	33325	261853	2191902	19344408	178582940	1713999264
14325	4582	33325	261863	2192390	19358590	178904675	1720317763

Tabelle 5.2: [55] Wilf-Äquivalenzklassen in S_5.

Tabelle 5.2 liefert ein Gegenbeispiel zur folgenden Frage, die erstmals in [63] gestellt wurde.

Frage 5.2.1. Wenn für Permutationen π und τ ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|S_k(\tau)| < |S_k(\pi)|$, folgt dann $|S_n(\tau)| < |S_n(\pi)|$ für alle $n \geq k$?

Es gilt $|S_k(13425)| < |S_k(13452)|$ für $k \leq 12$ und $|S_{13}(13425)| > |S_{13}(13452)|$.
Korollar 3.5.20 (erstmals von *Z. Stankova* und *J. West* in [55] bewiesen) und Korollar 3.4.11 ermöglichen sogar die vollständig Klassifizierung von S_6 und S_7 (siehe dazu [55]).

6 Die Stanley-Wilf-Vermutung

Diese Vermutung wurde unabhängig von *Richard P. Stanley* und *Herbert Wilf* in den 1980er Jahren aufgestellt und erst im November 2003 von *Adam Marcus* und *Gábor Tardos* in [45] bewiesen.
Sie liefert eine obere Schranke c_q^n für alle n-Permutationen, die das Muster q meiden. Man beachte, dass c_q^n sehr viel geringer ist als $n!$, die Gesamtanzahl der Permutationen der Länge n.

6.1 Die Vermutung

Satz (Die Stanley-Wilf-Vermutung)**.** *Sei q ein beliebige Permutation, dann existiert eine Konstante c_q, sodass für alle $n \in \mathbb{N}^+$*

$$|S_n(q)| \leq c_q^n \tag{6.1}$$

gilt.

Es zeigt sich, dass die Stanley-Wilf-Vermutung die folgende äquivalente Form besitzt. Diese gewährleistet uns die Existenz der *Stanley-Wilf-Schranke* für jede beliebige Permutation. Wir gehen genauer auf die *Stanley-Wilf-Schranke* in Kapitel 7 ein.

Satz 6.1.1 (Alternative Form der Stanley-Wilf-Vermutung)**.** *Sei q ein beliebige Permutation, dann existiert der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|S_n(q)|}. \tag{6.2}$$

Satz 6.1.2 ([4])**.** *Sei q ein beliebige Permutation und $m, n \in \mathbb{N}^+$, dann gilt*

1. $|S_n(q)| \cdot |S_m(q)| \leq |S_{n+m}(q)|$, *und*

2. die Stanley-Wilf-Vermutung und Satz 6.1.1 sind äquivalent.

Beweis. Sei $p' \in S_n(q)$ und $p'' \in S_m(q)$ und q eine Permutation der Länge k. O.B.d.A. kann gefordert werden, dass k in der Permutation q vor 1 steht, denn ansonsten betrachten wir einfach q^r, da $|S_n(q)| = |S_n(q^r)|$ gilt. Wir definieren die Permutation $p''' \in S_{n+m}$ folgendermaßen.

$$p'''_i := \begin{cases} p'_i & \text{für } i \in \{1, \dots, n\}, \\ p''_i + n & \text{für } i \in \{n+1, \dots, m+1\}. \end{cases}$$

p''' ist also eine Verkettung von p' und p'', wobei jedes Element von p'' mit n addiert wurde. Nun meidet p''' mit Sicherheit das Muster q und Aussage *1.* folgt.
Dass Satz 6.1.1 die Stanley-Wilf-Vermutung impliziert ist klar. Es bleibt also nur die Gegenrichtung zu zeigen.
Dafür ziehen wir das *Lemma von Fekete* zu Hilfe (siehe [27]). Dieses besagt, dass für eine Folge $(a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ und $n, m \in \mathbb{N}^+$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{\frac{a_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\} \in [-\infty, \infty)$. Angewandt auf die Folge $a_n := -\log S_n(q)$, erhalten wir mit der Stanley-Wilf-Vermutung und der Aussage *1* das gewünschte Ergebnis. □

Wir werden zunächst die Stanley-Wilf-Vermutung für einen einfacheren Fall beweisen.

Satz 6.1.3 ([15])**.** *Sei $n, k \in \mathbb{N}^+$ und $k \geq 2$, dann gilt*

$$S_n(12\dots k) \leq (k-1)^{2n}.$$

Beweis. Sei p eine $12\dots k$-meidende Permutation der Länge n. Wir definieren den Rang eines Eintrages x von p als die Länge der längsten aufsteigenden Teilfolge, die x als letztes Glied besitzt. p darf also nur Einträge besitzen mit Rang kleiner oder gleich $k-1$. Die Elemente mit gleichen Rang bilden eine absteigende Folge. D.h. die Permutation p ist aus maximal $k-1$ Teilfolgen zusammengestellt. Es gibt $(k-1)^n$ Möglichkeiten die Elemente aus $[n]$ in höchstens $k-1$ Mengen zu teilen. Diese Elemente müssen noch einer Position zugeordnet werden. Wiederum gibt es $(k-1)^n$ Möglichkeiten n Positionen auf höchstens $k-1$ Mengen aufzuteilen. Somit erhalten wir $S_n(12\dots k) \leq (k-1)^{2n}$. □

Satz 6.1.3 angewandt auf die Permutation 123 liefert $S_n(123) \leq 2^{2n} = 4^n$. Dies stimmt mit unserem Ergebnis $|S_n(123)| = C_n$ aus Korollar 2.3.4 überein.

6.2 Die Füredi-Hajnal-Vermutung

Wir folgen dem Beweis von Marcus und Tardos aus [45]. Sie zeigten nicht direkt die Stanley-Wilf-Vermutung, sondern bewiesen die *Füredi-Hajnal-Vermutung*, aus welcher die Stanley-Wilf-Vermutung folgt. Um diese zu formulieren, benötigen wir noch einige Begriffe.

Definition 6.2.1. *Sei $A \in \{0,1\}^{m\times n}$ und $B \in \{0,1\}^{k\times l}$ mit $m,n,k,l \in \mathbb{N}^+$. Existiert eine $k \times l$-Untermatrix C von A mit $C_{ij} = 1$, falls $B_{ij} = 1$, so sagen wir A* enthält *B. Anderenfalls sprechen wir davon, dass A die Matrix B* meidet*.*
Enthält nun A die Matrix B so können wir einen 1-Eintrag C_{ij} für den auch $B_{ij} = 1$ gilt, mit den dazugehörigen Eintrag von A identifizieren. Diese Einträge von A repräsentieren *B oder diese Einträge repräsentieren B in A.*

D.h. eine Matrix A enthält die Matrix B genau dann, wenn wir durch Wegstreichen von Spalten und Zeilen von A, eine Matrix C erhalten, die zumindest an den gleichen Positionen wie B eine 1 stehen hat.

Beispiel 6.2.2. Betrachten wir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A enthält nun B. Dies verdeutlicht sich durch die Elimination von der dritten und vierten Zeile, sowie der ersten und dritten Spalte. Die Elemente A_{14} und A_{22} repräsentieren B. Die Matrix A meidet die Matrix C.

Definition 6.2.3. *Sei $m,n \in \mathbb{N}^+$. Für eine Matrix $P \in \{0,1\}^{k\times k}$ definieren wir $f(n,P)$ als die maximale Anzahl an 1-Einträgen, die eine Matrix aus $\{0,1\}^{n\times n}$ besitzen kann, sodass sie P meidet.*

Satz 6.2.4 (Füredi-Hajnal-Vermutung)**.** *Sei P eine Permutationsmatrix, dann existiert eine Konstante c_p, sodass für alle $n \in \mathbb{N}^+$*

$$f(n, P) \leq c_p n$$

gilt.

Diese Vermutung wurde erstmals 1992 von *Péter Hajnal* und *Zoltán Füredi* in [30] aufgestellt.

6.3 Beweis der Füredi-Hajnal-Vermutung

Für den Beweis der Füredi-Hajnal-Vermutung suchten Marcus und Tardos eine lineare Rekursion für $f(n, P)$. Dies gelang ihnen durch die Aufteilung von $n \times n$-Matrizen in mehrere Teilmatrizen.
Sei $P \in \{0,1\}^{k \times k}$ eine Permutationsmatrix und $A \in \{0,1\}^{n \times n}$ mit $n, k \in N^+$, sodass A die Matrix P meidet und n von k^2 geteilt wird. Nun teilen wir A in $k^2 \times k^2$ Teilmatrizen S_{ij} auf. D.h.

$$A = \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & \cdots & S_{1,n/k^2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & \cdots & S_{2,n/k^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n/k^2,1} & S_{n/k^2,2} & \cdots & S_{n/k^2,n/k^2} \end{pmatrix}$$

mit

$$S_{i,j} = \begin{pmatrix} A_{k^2(i-1)+1,k^2(j-1)+1} & A_{k^2(i-1)+1,k^2(j-1)+2} & \cdots & A_{k^2(i-1)+1,k^2 j} \\ A_{k^2(i-1)+2,k^2(j-1)+1} & A_{k^2(i-1)+2,k^2(j-1)+2} & \cdots & A_{k^2(i-1)+2,k^2 j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k^2 i,k^2(j-1)+1} & A_{k^2 i,k^2(j-1)+2} & \cdots & A_{k^2 i,k^2 j} \end{pmatrix}$$

für $i, j \in \{1, 2, \ldots n/k^2\}$.

Wir definieren die Matrix $B \in \{0,1\}^{n/k^2 \times n/k^2}$ folgendermaßen:
Für $i, j \in \{1, 2, \ldots n/k^2\}$ ist $B_{i,j}$ genau dann 0, wenn $S_{i,j}$ nur aus 0-Einträgen besteht.

Lemma 6.3.1. *Die Matrix B meidet P.*

Beweis. Nehmen wir an B enthält P und $B_{l,m}$ sei ein Eintrag der P repräsentiert für passende $l, m \in \{1, 2, \dots n/k^2\}$. Dann existiert mindestens ein 1-Eintrag in $S_{l,m}$. Dieser repräsentiert P in A. Also enthält die Matrix A die Matrix P, was jedoch zu einem Widerspruch führt. □

Lemma 6.3.1 liefert eine obere Schranke für die Anzahl an Teilmatrizen $S_{i,j}$, die mindestens einen 1-Eintrag besitzen. Genauer gesagt beseht die Matrix A aus höchstens $f(n/k^2, P)$ nichtleere $k^2 \times k^2$-Teilmatrizen.

Definition 6.3.2. *Für $i, j \in \{1, 2, \dots, n/k^2\}$ nennen wir eine Teilmatrix S_{ij}* breit *(b.z.w.* hoch*), falls er in mindestens k verschiedenen Spalten (b.z.w. Zeilen) einen* 1*-Eintrag besitzt.*

Lemma 6.3.3. *$D_j := \{S_{ij} \mid i \in \{1, 2, \dots n/k^2\}\}$ besitzt höchstens $k\binom{k^2}{k}$-viele breite Elemente.*

Beweis. Nehmen wir an D_j besitze mehr als $k\binom{k^2}{k}$-viele breite Elemente. Es gibt $\binom{k^2}{k}$-viele Möglichkeiten k Einsen auf k^2-viele Spalten aufzuteilen. Nach dem Schubfachprinzip existieren nun mindestens k Matrizen $S_{a_1,j}, S_{a_2,j} \dots S_{a_k,j}$ mit $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n/k^2$, die mindestens eine 1 in denselben k Spalten $b_1, b_2, \dots, b_k$ mit $1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq k^2$ besitzen. Ein 1-Eintrag $P_{l,m}$ von P wird nun in A durch einen 1-Eintrag von $S_{a_l,j}$ in der b_m-ten Spalte repräsentiert. D.h. A enthält P. Dies ist ein Widerspruch. □

Lemma 6.3.4. *$E_i := \{S_{ij} \mid j \in \{1, 2, \dots n/k^2\}$ besitzt höchstens $k\binom{k^2}{k}$-viele hohe Elemente.*

Beweis. Analog zu Lemma 6.3.3. □

Mithilfe der obigen Lemmata kann eine lineare Rekursion für $f(n, P)$ aufgestellt werden.

Lemma 6.3.5. *Für $k \in \mathbb{N}^+$ sei P eine $k \times k$-Permutationsmatrix und n sei ein Vielfaches von k^2. Dann gilt*

$$f(n, P) \leq 2k^3 \binom{k^2}{k} n + (k-1)^2 f(\frac{n}{k^2}, P).$$

Beweis. Sei A eine P meidende $n \times n$-Matrix, die wieder wie bisher in $k^2 \times k^2$-Teilmatrizen $S_{i,j}$ aufgeteilt wird mit $i, j \in \{1, 2, \ldots n/k^2\}$.

Sei $B(A)$ die Menge aller breiten Teilmatrizen $S_{i,j}$ von A, dann gilt wegen Lemma 6.3.3

$$|B(A)| \leq \frac{n}{k^2}\binom{k^2}{k}k.$$

Definieren wir die Menge aller hohen Teilmatrizen $S_{i,j}$ von A als $H(A)$, so ergibt sich durch Lemma 6.3.4

$$|H(A)| \leq \frac{n}{k^2}\binom{k^2}{k}k.$$

Sei nun $N(A)$ die Menge aller Teilmatrizen $S_{i,j}$ von A, die weder hoch noch breit sind. Lemma 6.3.1 liefert uns

$$|N(A)| \leq f(\frac{n}{k^2}, P).$$

Eine weder hohe noch breite Teilmatrix besitzt höchstens $(k-1)^2$-viele 1-Einträge. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} f(n,P) &\leq (k^2)^2|B(A)| + (k^2)^2|H(A)| + (k-1)^2|N(A)| \\ &\leq 2k^3\binom{k^2}{k}n + (k-1)^2 f(\frac{n}{k^2}, P). \end{aligned}$$

□

Satz 6.3.6. *Für $n, k \in \mathbb{N}^+$ und einer Permutationsmatrix $P \in \{0,1\}^{k\times k}$ gilt*

$$f(n,P) \leq 2k^4\binom{k^2}{k}n.$$

Beweis. Wir führen eine vollständige Induktion über n durch.
Für $n \leq k^2$ ist offensichtlich $f(n,P) \leq k^2$.
Es gelte nun $f(n_1,P) \leq 2k^4\binom{k^2}{k}n_1$ für alle $n_1 \leq n$ und $m \in \mathbb{N}^+$ sei das zu n nächstkleinere Vielfache von k^2. So erhalten wir

$$f(n,P) \leq f(m,P) + 2k^2 n.$$

Und Lemma 6.3.5 liefert uns

$$f(n,P) \leq 2k^3\binom{k^2}{k}m + (k-1)^2 f(\frac{m}{k^2},P) + 2k^2 n.$$

Wenden wir nun die Induktionshypothese auf $f(\frac{m}{k^2},P)$ an, erhalten wir

$$\begin{aligned} f(n,P) &\leq 2k^3\binom{k^2}{k}m + (k-1)^2 2k^4\binom{k^2}{k}\frac{m}{k^2} + 2k^2 n \\ &\leq 2k^2\binom{k^2}{k}n(k+(k-1)^2+1) \\ &\leq 2k^4\binom{k^2}{k}n. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung erhalten wir, da $(k+(k-1)^2+1) \leq k^2$ für $k \geq 2$. Der Fall $k=1$ ist trivial. □

Somit ist die Füredi-Hajnal-Vermutung bewiesen.

6.4 Die Stanley-Wilf-Vermutung als Folgerung der Füredi-Hajnal-Vermutung

Sei $q \in S_k$. Eine Permutationsmatrix P enthält offensichtlich genau dann eine andere Permutationsmatix Q, wenn Q eine Untermatrix von P ist und somit meidet die Permutation $p \in S_n$ genau dann q, wenn die Permutationsmatrix von p die Permutationsmatrix von q meidet.

Definition 6.4.1. *Sei $P \in \{0,1\}^{k\times k}$ eine Permutationsmatrix. $T_n(P)$ bezeichnet die Menge aller Matrizen aus $\{0,1\}^{n\times n}$, die P meiden.*

Für die Permutationsmatrix P der Permutation $p \in S_n$ gilt offensichtlich $|T_n(P)| \geq |S_n(P)| = |S_n(p)|$.

Satz 6.4.2 ([37])**.** *Sei P eine $k\times k$-Permutationsmatrix. Dann existiert eine Konstante c, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$|T_n(P)| \leq c^n,$$

gilt.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und meide $A = (A_{ij}) \in \{0,1\}^{2n \times 2n}$ die Permutationsmatrix P. Wir definieren die Matrix $B = (B_{ij}) \in \{0,1\}^{n \times n}$ folgendermaßen.

$$B_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } A_{2(i-1)+k,2(j-1)+l} = 0 \text{ für alle } k,l \in \{1,2\}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gehen wir analog zu Lemma 6.3.1 vor, so zeigt sich, dass auch B die Matrix P meidet. Es gibt 15 Matrizen aus $\{0,1\}^{2\times 2}$ die zumindest einen 1-Eintrag besitzen, d.h. 15^w-viele Matrizen aus $\{0,1\}^{2n\times 2n}$ erzeugen dieselbe Matrix B, wobei w die Anzahl an Einsen in B bezeichne. Somit erhalten wir die Rekursion

$$|F_{2n}(P)| \leq |F_n(P)|15^{f(n,P)}.$$

Das Lösen dieser Rekursion und Satz 6.3.6 liefern das gewünschte Ergebnis. □

Satz 6.4.2 zeigt, dass die Stanley-Wilf-Vermutung eine direkte Folgerung der Füredi-Hajnal-Vermutung ist. Zusammen mit Satz 6.3.6 folgt die Korrektheit der Stanley-Wilf-Vermutung.

7 Weitere Themen der Mustervermeidung

Dieses Kapitel soll einen kleinen Überblick über die Vielfalt der Methoden in verschiedenen Teilgebieten der Mustervermeidung liefern. U.a. werden aktuelle Ergebnisse und noch offene Probleme vorgestellt (siehe dazu auch [36] und [58]).

7.1 Mustervermeidung und Chebyshev-Polynome

Definition 7.1.1. *Die* Chebyshev-Polynome zweiter Art *werden rekursiv durch*

$$\begin{aligned} U_0 &= 1, \\ U_1 &= 2x, \\ U_{n+2} &= 2xU_{n+1}(x) - U_n \text{ für } n \geq 2, \end{aligned}$$

definiert.

Sei $\mathcal{M}$ eine endliche Menge von Markierungen, $m \in \mathcal{M}$ und $R_{\mathcal{M}}$ ein Regelsystem auf $\mathcal{M}$. Für $B \in [\mathcal{M}, w, R_{\mathcal{M}}]$ bestimmt das Regelsystem $R_{\mathcal{M}}$ eine Rekursion für $(B_{m_1,n}, B_{m_2,n}, \ldots, B_{m_k,n})^T$:

$$\begin{pmatrix} B_{m_1,n} \\ B_{m_2,n} \\ \vdots \\ B_{m_k,n} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} B_{m_1,n-1} \\ B_{m_2,n-1} \\ \vdots \\ B_{m_k,n-1} \end{pmatrix},$$

wobei $A_{i,j}$ die Anzahl der m_i in $f(m_j)$ bezeichnet für eine Markierungsfunktion f von

B bezüglich $[\mathcal{M}, w, R_{\mathcal{M}}]$. Mit $m_1 = w$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} B_{m_1,n} \\ B_{m_2,n} \\ \vdots \\ B_{m_k,n} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen die Matrix A als *Übergangsmatrix von* $[\mathcal{M}, w, R_{\mathcal{M}}]$.

Beispiel 7.1.2. Für $F \in \mathcal{F}$ (siehe Beispiel 4.1.12) gilt

$$\begin{pmatrix} F_{1,n} \\ F_{2,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Satz 7.1.3 ([20])**.** *Sei* $\mathcal{C}_r := [\{2, 3, \ldots, r\}, 2, R_{\mathcal{C}_r}]$ *für* $r \geq 2$ *mit*

$$R_{\mathcal{C}_r}(m) = \begin{cases} (2, 3, \ldots, k, k+1) & \text{für } k < r, \\ (2, 3, \ldots, r, r) & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $m \in \{2, 3, \ldots, r\}$*. Dann gilt* $T(\{123, (r, r-1, \ldots, 1, r+1)\}) \in \mathcal{C}_r$*.*

Beweis. Sei $T(\{123, (r, r-1, \ldots, 1, r+1)\}) = (\bigcup_{n\geq 1} S_n(123, (r, r-1, \ldots, 1, r+1)), E)$. Wir zeigen die Abbildung f von $\bigcup_{n\geq 1} S_n(123, (r, r-1, \ldots, 1, r+1))$ nach $\{2, 3, \ldots, r\}$, definiert durch $f(\pi) = |\{\bar{\pi} \ : \ (\pi, \bar{\pi}) \in E\}|$, ist eine Markierungsfunktion von $T(\{123, (r, r-1, \ldots, 1, r+1)\})$ bezüglich $\mathcal{C}_r$.
Sei $p = p_1 \ldots p_k \ldots p_n \in S_n(123, (r, \ldots, 1, r+1))$ und sei p_k das erste Element in p, das kein Links-Rechts-Minimum ist.
$(p_{k-1}, p_k, n+1)$ bildet das Muster 123, somit kommen nur Elemente aus $\{1, \ldots, k\}$ als mögliche $\{123, (r, \ldots, 1, r+1)\}$-meidende Zwischenräume in Frage. Ist $k > r$ so bildet $(p_1, p_2, \ldots, p_r, n+1)$ das Muster $(r, \ldots, 1, r+1)$. Da $n+1$ das größte Element eines 123- oder $(r, \ldots, 1, r+1)$-Musters in $\mathfrak{f}_p(i)$ für $i \in [n+1]$ bilden muss, sind die $\{123, (r, \ldots, 1, r+1)\}$-meidende Zwischenräume von p also $\{1, \ldots, k\}$ für $k \leq r$ und $\{1, \ldots, r\}$ für $k > r$. Weil nun für $i \in \{2, \ldots, k\}$ bzw. $i \in \{2, \ldots, r\}$, $\mathfrak{f}_p(i)$ den ersten Eintrag, der kein Links-Rechts-Minimum ist, an der Stelle i besitzt, gilt $f(\mathfrak{f}_p(i)) = i$. Das erste Element von $\mathfrak{f}_p(1)$, das kein Links-Rechts-Minimum bildet, befindet sich an

der Stelle $k+1$, d.h. $f(\mathfrak{f}_p(1)) = k+1$ für $k < r$ und $f(\mathfrak{f}_p(1)) = r$ sonst.
Somit gilt für $k < r$

$$R_{\mathcal{C}_r}(f(p)) = (2, 3, \ldots, k, k+1) = (f(\mathfrak{f}_p(2)), f(\mathfrak{f}_p(3)), \ldots, f(\mathfrak{f}_p(k)), f(\mathfrak{f}_p(1)),$$

und

$$R_{\mathcal{C}_r}(f(p)) = (2, 3, \ldots, r, r) = (f(\mathfrak{f}_p(2)), f(\mathfrak{f}_p(3)), \ldots, f(\mathfrak{f}_p(r)), f(\mathfrak{f}_p(1)),$$

sonst. □

Bezeichne A_r die Übergangsmatrix von $\mathcal{C}_r$, sodass für $B \in \mathcal{C}_r$

$$\begin{pmatrix} B_{2,n} \\ B_{3,n} \\ \vdots \\ B_{r,n} \end{pmatrix} = A_r \cdot \begin{pmatrix} B_{2,n-1} \\ B_{3,n-1} \\ \vdots \\ B_{r,n-1} \end{pmatrix},$$

gilt, dann erhalten wir

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Satz 7.1.4. ([57, Theorem 4.7.2]) *Für die erzeugende Funktion*

$$F_{i,j}(A, x) := \sum_{n \geq 0} (A^n)_{i,j} x^n,$$

gilt

$$F_{i,j}(A,x) = \frac{(1-)^{i+j}\det(I - xA; j, i)}{\det(I - xA)},$$

wobei $(B; j, i)$ *die Matrix bezeichnet, welche durch die Entfernung der* j*-ten Spate und* i*-ten Zeile der Matrix* B *hervorgeht.*

Beweis. $F_{i,j}(A,x)$ ist der (i,j)-Eintrag der Matrix $\sum_{n\geq 0} x^n A^n = (I - xA)^{-1}$. Sei B eine invertierbare Matrix, so ist aus der Linearen Algebra wohlbekannt, dass $(B^{-1})_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(B; j, i)/\det(B)$ gilt. Somit folgt die Aussage. □

Wir folgen nun im Wesentlichen [20]. Sei $B \in \mathcal{C}_r$ und f eine Markierungsfunktion von B bezüglich $\mathcal{C}_r$. Da jeder Knoten aus B ein Kind besitzt, das durch f auf 2 abgebildet wird, stimmt $B_{2,n+1}$ mit B_n überein. D.h. wir interessieren uns für die Einträge $(A_r^n)_{1,1}$. Mit Satz 7.1.4 folgt

$$F_{1,1}(A_r,x) = \frac{\det(I_{r-1} - xA_r; 1, 1)}{\det(I_{r-1} - xA_r)} = \frac{\det(I_{r-2} - xA_{r-1})}{\det(I_{r-1} - xA_r)}.$$

I_k bezeichne hier und im Folgendem die $k \times k$-Einheitsmatrix.
Sei $g_m(\lambda) := \det(A_{m+1} - \lambda I_m)$ so gilt

$$F_{1,1}(A_r,x) = \frac{(-x)^{r-2} g_{r-2}(\frac{1}{x})}{(-x)^{r-1} g_{r-1}(\frac{1}{x})}.$$

Wenden wir den *Entwicklungssatz von Laplace* (siehe etwa [35, S. 199]) auf $g_m(\lambda)$ an und entwickeln nach der ersten Spalte, dann ergibt sich

$$g_m(\lambda) = (1 - \lambda) g_{m-1}(\lambda) - h_{m-1}(\lambda),$$

wobei $h_m(\lambda)$ die $m \times m$-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

bezeichnet. Durch eine weitere Entwicklung nach der ersten Spalte erhalten wir $h_m(\lambda) = g_{m-1}(\lambda) - h_{m-1}(\lambda)$. Daraus folgt $g_m(\lambda) + \lambda g_{m-1}(\lambda) + \lambda g_{m-2}(\lambda) = 0$.
Durch Induktion zeigt sich leicht

$$g_m(\lambda) = (-1)^m \lambda^{(m-2)/2} U_{m+2}(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}).$$

Satz 7.1.5 ([20])**.**

$$\sum_{n\geq 0} |S_n(123, (r, r-1, \ldots, 1, r+1))| x^n = -\frac{g_{r-2}(\frac{1}{x})}{x g_{r-1}(\frac{1}{x})},$$

mit

$$g_r(\lambda) = (-1)^r \lambda^{(r-2)/2} U_{r+2}(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}).$$

Beweis. Folgt aus obigen Überlegungen und

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} |S_n(123, (r, \ldots, 1, r+1))| x^n &= 1 + \sum_{n\geq 1} B_{n-1} x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} B_{2,n} x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} (A_r^n) 1, 1 x^n = F_{1,1}(A_r, x). \end{aligned}$$

□

Für weitere Vorkommnisse von Chebyshev-Polynomen in der Mustervermeidung siehe [44], [39] und [25].
T. Chow und *J. West* zeigten in [20] zusätzlich, dass $T(\{213, (1, 2, \ldots, r, r+1)\})$,

$T(\{213, (r+1, 1, 2, \ldots, r)\}) \in \mathcal{C}_r$. Es gilt also:

Satz 7.1.6 ([20])**.**

$$|S_n(123, (r, \ldots, 1, r+1))| = |S_n(213, (1, 2, \ldots, r, r+1))| = |S_n(213, (r+1, 1, 2, \ldots, r))|.$$

Setzten wir $r = 3$, so erhalten wir

$$\sum_{n \geq 0} |S_n(123, 3214)| x^n = \frac{1 - 2x}{1 - 3x + x^2} = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 13x^3 + \ldots.$$

D.h. $|S_n(123, 3214))| = |S_n(213, 1234)| = |S_n(213, 4123)| = F_{2n}$ für $n \geq 1$, wobei F_n die Fibonacci-Zahlen mit $F_1 = F_2 = 1$ bezeichnet. Für eine vollständige Bestimmung der Permutationen, die ein Muster der Länge 3 und ein Muster der Länge 4 meiden, siehe [5] und [65]. Wir geben hier nur einen tabellarischen Überblick (Tabelle 7.1).

	p_1, p_2	$\lvert S_n(p_1, p_2)\rvert$
1	123,4321	0 für $n \geq 7$
2	321,2134	$n + \binom{n}{3} + \binom{n+1}{4}$
3	321,1324	$1 + \binom{n}{2} + \binom{n+1}{5}$
4	132,4321	$1 + \binom{n+1}{3} + 2\binom{n}{4}$
5	123,4213	$3 \cdot 2^{n-1} - \binom{n+1}{2} - 1$
6	123,3412	$2^{n+1} - 2n - 1 - \binom{n+1}{3}$
7	132,4312	$(n-1)2n - 2 + 1$
8	132,4231	$(n-1)2n - 2 + 1$
9	132,3214	$[x^n]\frac{(1-x)^3}{1-4x+5x^2-3x^3}$
10	123,3214	F_{2n}
11	132,1234	F_{2n}
12	132,4213	F_{2n}
13	132,4123	F_{2n}
14	132,3124	F_{2n}
15	123,2143	F_{2n}
16	123,3142	F_{2n}
17	132,2134	F_{2n}
18	132,3412	F_{2n}

Tabelle 7.1: Vertreter der 18 trivialen Wilf-Äquivalenzklassen von zwei Mustern $p_1 \in S_3$ und $p_2 \in S_4$ sowie $|S_n(p_1, p_2)|$.

7.2 Abgeschlossene Mengen von Permutationen

Sei $S = \bigcup_{n\geq 0} S_n$ die Menge aller Permutationen. Wir können eine Ordnungsrelation $\leq_S$ im Sinne der Mustervermeidung auf S definieren:

Für $p, q \in S$ gilt $p \leq_S q$ genau dann, wenn p in q enthalten ist.

Der Leser vergewissert sich leicht, dass $(S, \leq_S)$ eine Halbordnung bildet.

Definition 7.2.1. *Eine Menge von Permutationen $P \subseteq S$ ist* abgeschlossen *genau, dann wenn für $q \in P$ und $p \in S$ aus $p \leq_S q$, $p \in P$ folgt.*

Eine abgeschossene Menge von Permutationen kann somit als ein Ordnungsideal in $(S, \leq_S)$ aufgefasst werden.

Definition 7.2.2. *Sei $P \subseteq S$ abgeschlossen. P^* ist definiert als die minimalen Elemente der Halbordnung $(S \setminus P, \leq)$. Wir bezeichnen P^* als die* Basis von P.

Ein abgeschlossenes $P \subseteq S$ wird eindeutig durch P^* bestimmt, da
$P = \{p \in S \ : \ q \not\leq_S q \text{ für alle } q \in P^*\}$. Ist P^* also nichtleer so gilt $S(P^*) = \bigcup_{n\geq 0} S_n(P^*) = P$.
Abgeschlossene Mengen von Permutationen tauchen immer wieder im Kontext mit *Sortiermaschinen* auf ([1]), wie etwa bei Netzwerken von *Stacks*, *Queues* und *Deques*. Hier entsprechen Basiselemente den kleinsten Permutationen, denen keine Sortierung mittels der Sortiermaschine möglich ist. Etwa stimmen die $\{231\}$-meidenden Permutationen mit den durch einem Stack sortierbaren Permutationen überein (siehe [38, S. 242-243]). Ebenso existieren abgeschlossene Mengen von Permutationen mit unendlicher Basis. Beispiele findet man etwa in [49] und [59].

Definition 7.2.3. *Sei $p_1, p_2, \ldots, p_r \in S$ und $m_1, m_2, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$. Wir definieren $\mathbf{M}_{m_1,\ldots,m_r}(p_1, \ldots, p_r)$ als die Menge aller Permutationen, die für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$ p_i höchstens m_i-mal als Muster enthalten.*

$p \in \mathbf{M}_{m_1,\ldots,m_r}(p_1, \ldots, p_r)$ besitzt also höchstens m_i-viele Teilfolgen, die das Muster p_i bilden und offensichtlich ist $\mathbf{M}_{m_1,\ldots,m_r}(p_1, \ldots, p_r)$ abgeschlossen. Es gilt sogar:

Satz 7.2.4 ([5])**.** *Für $p_1, p_2, \ldots, p_r \in S$ und $m_1, m_2, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ besitzt $\mathbf{M}_{m_1,\ldots,m_r}(p_1, \ldots, p_r)$ eine endliche Basis.*

Beweis. Sei p ein Basiselement von $\mathbf{M}_{m_1,\ldots,m_r}(p_1,\ldots,p_r)$. Also $p \notin \mathbf{M}_{m_1,\ldots,m_r}(p_1,\ldots,p_r)$ und es existiert ein $i \in \{1,\ldots,r\}$, sodass p (m_i+1)-viele Teilfolgen besitzt, die das Muster p_i enthalten. Wir streichen nun alle Einträge in p, welche nicht in diesen m_i+1-vielen Teilfolgen vorkommen und bilden die übrigen Einträge ordnungserhaltend auf eine Permutation $U \in S$ ab. So ist $U \leq_S p$. Da p ein minimales Element ist gilt $p = U$. Somit ist p von endlicher Länge, d.h. auch die Anzahl an möglichen p ist beschränkt. □

7.3 $S_n(p)$ als P-rekursive Folge

Wir liefern hier einen kleinen Überblick über *P-rekursive* Folgen, sowie deren Zusammenhang mit *algebraischen* und *D-finiten* formalen Potenzreihen. Für eine detaillierte Zusammenfassung verweisen wir auf [56, Kapitel 6].

Definition 7.3.1. *Eine Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ist* P-rekursiv*, wenn Polynome $P_0, P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{Q}[n]$ existieren mit $P_k \neq 0$, sodass*

$$P_k(n+k)f(n+k) + P_{k-1}(n+k-1)f(n+k-1) + \cdots + P_0(n)f(n) = 0,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel 7.3.2.

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}\frac{n}{\binom{2n-2}{n-1}} = \frac{4n-2}{n+1}.$$

Es gilt also $(n+1)C_n - (4n-2)C_{n-1} = 0$. Die Catalan-Zahlen sind somit P-rekursiv.

Definition 7.3.3. *Sei $u(x) \in \mathbb{C}[[x]]$. Existiert ein $d \in \mathbb{N}^+$ und Polynome $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_d(x) \in \mathbb{C}[x]$ mit $p_d \neq 0$, sodass*

$$p_d(x)u^{(d)} + p_{d-1}(x)u^{(d-1)}(x) + \cdots + p_1(x)u' + p_0(x)u(x) = 0$$

*(wobei $u^{(i)} = \frac{d^i u}{dx^i}$), dann nennen wir $u(x)$ D-*finit *(oder auch* holonom*).*

Definition 7.3.4. *Sei $u(x) \in \mathbb{C}[[x]]$. Existieren Polynome*

$p_0(x), p_1(x), \ldots, p_d(x) \in \mathbb{C}[x]$ *mit* $p_d \neq 0$ *und ist*

$$p_0(x) + p_1(x)u(x) + \cdots + p_d(x)u^d(x) = 0$$

erfüllt, dann wird $u(x)$ *als* algebraisch *bezeichnet.*

Beispiel 7.3.5. Für die erzeugende Funktion der Catalan-Zahlen $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ gilt

$$x^2 f^2(x) - xf(x) + x = \frac{1}{4}(1 - 2\sqrt{1-4x} + 1 - 4x) - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x}) + x = 0.$$

$f(x)$ ist somit algebraisch.

Satz 7.3.6. *Ist* $u \in \mathbb{C}[[x]]$ *algebraisch, so ist* u *D-finit.*

Satz 7.3.7. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *ist P-rekursiv genau dann, wenn die erzeugende Funktion*

$$u(x) = \sum_{n \geq 0} f(n)x^n,$$

D-finit ist.

Für die Beweise von Satz 7.3.6 und Satz 7.3.7 verweisen wir auf [56, Kapitel 6].

Satz 7.3.8. ([15, S.182]) $(|S_n(1342)|)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist P-rekursiv.*

Beweis. Sei $H(x) = \sum_{n \geq 0} |S_n(1342)|x^n$ und $Z(x) = \frac{1}{H(x)}$. Wir zeigen $H(x)$ ist algebraisch. Aus Satz 3.6.1 wissen wir

$$H(x) = \frac{32x}{1 + 20x - 8x^2 - (1-8)^{3/2}}. \tag{7.1}$$

Dies impliziert

$$(32xZ(x) + 8x^2 - 20x - 1)^2 = (1 - 8x)^3.$$

Die Multiplikation mit $H^2(x)$ auf beiden Seiten liefert uns das Gewünschte. □

Jede bis jetzt in dieser Arbeit explizit angegebene erzeugende Funktion ist D-finit bzw. sogar algebraisch. Auch alle bis jetzt angegebenen Ausdrücke für $(|S_n(Q)|)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei Q

eine endliche Menge von Permutationen ist, sind P-rekursiv. Somit stellt sich folgende Vermutung.

Vermutung 7.3.9 ([33]). *Für beliebige Permutationen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ist die Folge $(|S_n(p_1, p_2, \ldots, p_k)|)_{n\in\mathbb{N}}$ P-rekursiv.*

Definition 7.3.10. *Für $p_1, p_2, \ldots, p_r \in S$ und $m_1, m_2, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ definieren wir $S_{m_1,\ldots,m_r}(p_1, \ldots, p_r)$ als die Menge aller Permutationen $p \in S$, die für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ p_i exakt m_i-mal als Muster enthalten.*

Bemerkung 7.3.11. Es existieren zahlreiche Arbeiten über verschiedenste Varianten der Menge $S_{m_1,\ldots,m_r}(p_1, \ldots, p_r)$. Siehe dazu etwa [13], [14], [39], [44], [47] und [48].

Die Vermutung 7.3.9 wurde später von *J. Noonan* und *D. Zeilberger* erweitert.

Vermutung 7.3.12 ([48]). *Für beliebige Permutationen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ und $m_1, m_2, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche die Anzahl der Permutationen der Länge n in $S_{m_1,m_2,\ldots,m_k}(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ zählt, P-rekursiv.*

Offensichtlich folgt aus Vermutung 7.3.12 die Vermutung 7.3.9, doch auch die Umkehrung ist zutreffend. Dies Folgt dadurch, dass wir in Vermutung 7.3.12 $S_{m_1,m_2,\ldots,m_k}(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ mit $\mathbf{M}_{m_1,m_2,\ldots,m_k}(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ ersetzen können (Prinzip von Inklusion und Exklusion). Laut Satz 7.2.4 besitzt $\mathbf{M}_{m_1,m_2,\ldots,m_k}(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ eine endliche Basis $\{q_1, q_2, \ldots, q_r\}$. Somit entspricht $\mathbf{M}_{m_1,m_2,\ldots,m_k}(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ der Menge $S(q_1, q_2, \ldots, q_r)$ und Vermutung 7.3.9 folgt aus Vermutung 7.3.12. Allerdings bewahrheiten sich die beiden Vermutungen nicht.

Satz 7.3.13 ([31]). *Es existiert eine Menge von Permutationen $F \subset S_{80}$, sodass $(|S_n(F)|)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht P-rekursiv ist.*

Die Menge $F \subset S_{80}$, die *S. Garrabrant* und *I. Pak* in [31] lieferten, beinhaltet ca. 30000 Permutationen, jedoch reicht womöglich sogar schon eine Permutation p, sodass $(|S_n(p)|)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht P-rekursiv ist und zwar $p = 1324$. Diese Vermutung stellt sich durch die Schwierigkeiten, welche die Folge $(|S_n(1324)|)_{n\in\mathbb{N}}$ bereitet. Gegen die P-Rekursivität von $(|S_n(1324)|)_{n\in\mathbb{N}}$ spricht auch die numerische Analyse der Werte $|S_n(1324)|$ mit $n \leq 50$ in [23]. Diese schließt auf

$$|S_n(1324)| \sim B \cdot \mu^n \cdot \mu_1^{\sqrt{n}} \cdot n^g, \tag{7.2}$$

mit $\mu \approx 11.6$, $\mu_1 \approx 0.04$, $g \approx -7/6$ und $B \approx 9$. Bewahrheitet sich (7.2), so ist $(|S_n(p)|)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht P-rekursiv, da [32, Theorem 7] das Vorkommen von $\mu^{\sqrt{n}}$-Terme verbietet.

7.4 $S_n(1324)$

Wie bereits erwähnt gestaltet sich die Ermittlung von $|S_n(1324)|$ als große Herausforderung. Zurzeit ist weder die exakte Anzahl noch das asymptotische Verhalten von $|S_n(1324)|$ bekannt. Eine Vielzahl von Arbeiten widmen sich der Ermittlung der *Stanley-Wilf-Schranke* von 1324.

Definition 7.4.1. *Für eine Permutation $p \in S_k$ ist die* Stanley-Wilf-Schranke *definiert als*

$$SW(p) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|S_n(p)|}.$$

Satz 6.1.1 gewährleistet die Existenz der Stanley-Wilf-Schranke für jede beliebige Permutation. Sei etwa p eine Permutation der Länge 3, so gilt $SW(p) = 4$, da $|S_n(p)|$ für jede Permutation der Länge 3 mit den Catalan-Zahlen übereinstimmt. Obwohl $SW(1324)$ noch unbekannt ist, konnte die Größe des Intervalls, in dem sich $SW(1324)$ befindet, immer weiter verkleinert werden.

Definition 7.4.2. *Sei $p \in S_n$ und $q \in S_k$. Die Permutation $t = t_1 t_2 \dots t_{n+k} \in S_{n+k}$ ist eine* Zusammensetzung der Permutationen p und q *genau dann, wenn zwei disjunkte Mengen $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_n\}, J = \{j_1 < j_2 < \dots < j_k\} \subset [n]$ existieren mit $I \cup J = [n]$, sodass $t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_n}$ ein p-Muster und $t_{j_1} t_{j_2} \dots t_{j_k}$ ein q-Muster bildet.*

Satz 7.4.3 ([16])**.** *Sei $p \in S_n(1324)$, dann ist p eine Zusammensetzung einer* 132*-meidenden und einer* 213*-meidenden Permutation.*

Beweis. Sei $p = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n(1324)$. Wir färben die Einträge von p von links nach rechts entweder rot oder blau und zwar nach folgenden Regeln:

1. Würde durch das Rotfärben von p_i ein 132-Muster mit zwei bereits roten Einträgen entstehen, so färben wir p_i blau,

2. existiert bereits ein blauer Eintrag kleiner als p_i so färben wir p_i auch blau,

3. anderenfalls wird p_i rot gefärbt.

Man bemerke, dass der erste Eintrag immer rot gefärbt wird. Nun bleibt zu zeigen, dass die roten Einträge kein 132-Muster und die blauen kein 213-Muster enthalten. Durch Regel 1 wird ein 132-Muster aus roten Einträgen verhindert. Nehmen wir an es existieren drei blaue Einträge $p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}$ mit $j_1 < j_2 < j_3$, sodass $p_{j_1}p_{j_2}p_{j_3}$ ein 213 Muster bildet. Sei p_s der kleinste blaue Eintrag mit $s \leq j_2$ und $p_s \leq p_{j_2}$. Es müssen also rote Einträge p_{s_1} und p_{s_2} mit $s_1 < s_2 < s$ existieren, sodass $p_{s_1}p_{s_2}p_s$ ein 132 Muster bildet. Jetzt bestehen zwei mögliche Fälle:

$j_1 > s_2$: Da $p_{s_1} < p_s < p_{j_2}$ bildet $p_{s_1}p_{j_1}p_{j_2}p_{j_3}$ ein 1324-Muster.

$j_1 < s_2$: Es muss $p_{s_2} < p_{j_1}$ gelten, da sonst p_{s_2} blau gefärbt wäre. D.h. $p_{s_2} < p_{j_3}$ und $p_{s_1}p_{s_2}p_sp_{j_3}$ bildet ein 1324-Muster.

Somit wurde die Kontraposition gezeigt. □

Satz 7.4.3 ist ein Spezialfall von *A. Claesson, V. Jelínek* und *E. Steingrímsson* bewiesenen [22, Lemma 3]. Sie konnten dadurch 16 als eine obere Schranke von $SW(1324)$ festlegen.

Satz 7.4.4. $SW(1324) < 16$

Beweis. Wir betrachten Einfärbungen von Permutationen aus $S_n(1324)$ analog zu jenen aus Satz 7.4.3. Es existieren höchstens 2^n Möglichkeiten die Menge der roten Einträge aus $[n]$ zu wählen (die anderen Einträge sind blau) und ebenso existieren höchstens 2^n Möglichkeiten Positionen für die roten Einträge zu wählen (in die anderen Positionen werden wiederum blaue Einträge gesetzt). Besitzt eine Permutation aus $S_n(1324)$ nun k rote Einträge, so bilden diese laut Satz 7.4.3 ein Muster $p \in S_k(132)$. Die blauen Einträge bilden ein Muster $q \in S_{n-k}(213)$. Wegen Korollar 2.3.4 existieren $C_k < 4^k$ Möglichkeiten ein Muster aus $S_k(132)$ und $C_{n-k} < 4^{n-k}$ Möglichkeiten ein Muster aus $S_{n-k}(213)$ zu wählen. Insgesamt erhalten wir $S_n(1324) < 16^n$. □

Durch eine Verfeinerung der in [22] gewählten Einfärbung gelang *M. Bóna* in [16] die obere Schranke von $SW(1324)$ auf $7 + 4\sqrt{3} \approx 13.93$ zu senken und kurze Zeit später

konnte Bóna in [17] sogar $SW(1324) < 13.76$ zeigen.

9.47 konnte von *Albert, Elder, Rechnitzer, Westcott* und *Zabrocki* in [2] als untere Schranke von $SW(1324)$ ermittelt werden. Dafür verwendeten sie eine interessante Technik, das *insertion encoding* von Permutationen (siehe dazu [3]), und konstruierten eine Folge von endlichen Automaten, welche in der Lage sind Unterklassen von $4231(= 1324^r)$-meidende Permutationen zu akzeptieren. Die Analyse der Übergangsmatrizen lieferte das Ergebnis.
D. Bevon hob die untere Schranke von $SW(1324)$ in [8] auf 9.81 an.

Auch numerische Schätzungen für $SW(1324)$ wurden getätigt, wie die bereits im vorherigen Abschnitt erwähnte Analyse der Werte von $|S_n(1324)|$ für $n \leq 50$ von *Conway, Guttman* und *Zinn-Justin* in [23]. Diese lässt $SW(1324) = 11.600 \pm 0.003$ vermuten.
Madras und *Liu* zeigten in [43] mithilfe von *MCMC*-Verfahren (*Markov-Chain-Monte-Carlo*-Verfahren), dass $SW(1324)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit im Intervall $[10.71, 11.83]$ liegt.

In ([9]) bewiesen 2017 *Bevan, Brignall, Price* und *Pantone* $10.271 \leq SW(1324) \leq 13.5$.

7.5 Die Möbiusfunktion der Halbordnung $(S, \leq_S)$

Betrachten wir eine Halbordnung $(H, \leq)$, so ist für $x, y \in H$ das Intervall $[x, y]$ definiert als die Menge aller $z \in H$ mit $x \leq z \leq y$. $[x, y]$ bildet mit $\leq \cap([x, y] \times [x, y])$, der Einschränkung von $\leq$ auf $[x, y]$, offensichtlich ebenfalls eine Halbordnung mit größtem Element x und kleinstem Element y. Gilt $x \not\leq y$, so ist das Intervall $[x, y]$ leer.
Die *Möbiusfunktion* für ein Intervall $[x, y]$ einer Halbordnung $(H, \leq)$ ist rekursiv durch

$$\mu(x, y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z),$$

mit $\mu(x, x) = 1$, definiert.

Für Intervalle der bereits im Abschnitt 7.2 vorgestellten Halbordnung $(S, \leq_S)$ erweist

sich die Berechnung der Möbiusfunktion im allgemeinen Fall als äußerst schwierig. Wir veranschaulichen dies durch das folgende Beispiel.

Beispiel 7.5.1. Für $\mu(321, 316254)$ ergibt sich -1. Siehe Abbildung 7.1.

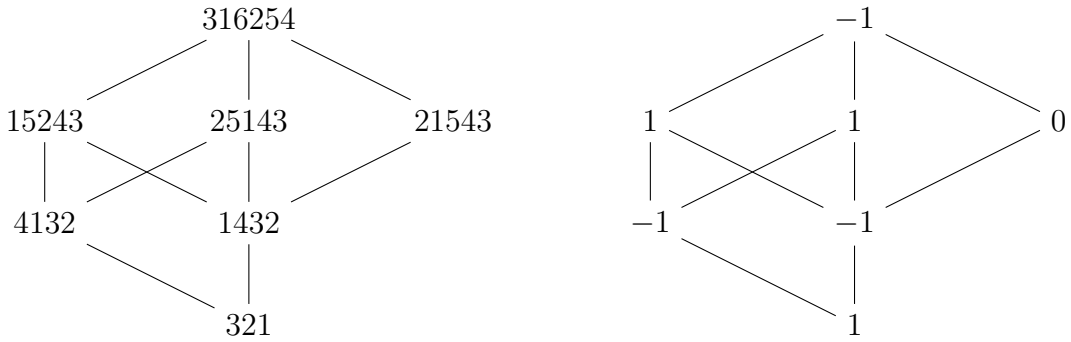


Abbildung 7.1: Das Hasse-Diagramm von $[321, 314254]$ und die zugehörigen Einträge $\mu(321, x)$.

Definition 7.5.2. *Wir definieren die* direkte Summe *zweier Permutationen* $p = p_1 p_2 \dots p_n \in S_n$ *und* $q = q_1 q_2 \dots q_m \in S_m$ *als die Permutation*

$$p \oplus q := p_1 p_2 \dots p_n (q_1 + n)(q_2 + n) \dots (q_m + n) \in S_{n+m}.$$

Die schiefe Summe *von* p *und* q *ist definiert durch*

$$p \ominus q := (p_1 + m)(p_2 + m) \dots (p_n + m) q_1 q_2 \dots q_m \in S_{n+m}.$$

Bemerkung 7.5.3. Für zwei Permutationen p und q mit Permutationsmatrizen P_p und P_q besitzt die Permutationsmatrix von $P_{p \oplus q}$ die Form

$$\begin{pmatrix} P_p & 0 \\ 0 & P_q \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\oplus$ offensichtlich assoziativ. Analog folgt die Assoziativität von $\ominus$.

Die Permutation 0 (die eindeutige Permutation der Länge 0) bildet offensichtlich ein neutrales Element bezüglich der direkten und schiefen Summe. Eine der ersten Ergebnisse über die Möbiusfunktion von Intervallen aus $(S, \leq_S)$ findet sich in der Arbeit

[51] von *B. E. Sagan* und *V. Vatter*. Sie konnten eine Formel der Möbiusfunktion für Intervalle von *geschichteten* (engl. *layered*) Permutationen ermitteln. Das sind Permutationen, welche aus einer direkten Summe von absteigenden Permutationen hervorgehen (oder äquivalent 231- und 312-meidende Permutationen), z.B. $13265478 = 1 \oplus 21 \oplus 321 \oplus 1 \oplus 1$.

Definition 7.5.4. *Wir definieren die Menge der* separablen Permutationen *induktiv wie folgt:*

1. *Die Permutation* 1 *ist separabel, und*
2. *die direkte und schiefe Summe zweier separablen Permutationen ist separabel.*

Es stellt sich heraus, dass die separablen Permutationen genau mit den $\{3142, 2413\}$-meidenden Permutationen übereinstimmen. Für das Intervall aus zwei separablen Permutationen konnte in [19] eine bezüglich Rechenaufwand effiziente Formel der Möbiusfunktion durch *Burstein, Jelínek, Jelínková* und *Steingrímsson* gefunden werden. Dies gelang durch eine Repräsentation der separablen Permutationen als Wurzelbäume und das Zählen der möglichen Einbettungen des Wurzelbaumes des kleinsten Elementes in den Wurzelbaum des größten Elements.
Zusätzlich wurde in [19] eine rekursive Formel für *zerlegbare Permutationen* ermittelt. Zerlegbare Permutationen können nicht-trivial als direkte oder schiefe Summe von Permutationen zusammengesetzt werden, anderenfalls bezeichnet man die Permutation als *unzerlegbar*. Die Permutation 241365 ist zerlegbar, da $241365 = 2413 \oplus (1 \ominus 1)$, 2413 im Gegensatz ist unzerlegbar.
In [46] konnten *McNamara* und *Steingrímsson* die in [19] ermittelte rekursive Formel für zerlegbare Permutationen noch etwas vereinfachen.

Satz 7.5.5 ([46])**.** *Seien p und q zwei Permutationen und $q = q_1 \oplus q_2 \oplus \cdots \oplus q_t$ sei die feinste nichttriviale Zerlegung von q. So gilt*

$$\mu(p,q) = \sum_{p=p_1\oplus\cdots\oplus p_t} \prod_{1\le m\le t} \begin{cases} \mu(p_m,q_m)+1 & \text{falls } p_m = 0 \text{ und } q_{m-1} = q_m, \\ \mu(p_m,q_m) & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei die Summe über alle direkten Summen $p = p_1 \oplus \cdots \oplus p_t$ mit $0 \le p_m \le q_m$ für alle $1 \le m \le t$ läuft und die Bedingung $q_{m-1} = q_m$ für $m = 1$ als nicht erfüllt gilt.

Beispiel 7.5.6 ([46])**.** Wir berechnen mit Satz 7.5.5 $\mu(12, 24136857) = \mu(12, 2413 \oplus 2413)$. Mit geringen Aufwand lässt sich $\mu(12, 2413) = 3$ und $\mu(1, 2413) = -3$ ermitteln, zusätzlich wissen wir $\mu(0, q) = 0$ für alle Permutationen ungleich 0 und ungleich 1. Wenden wir nun Satz 7.5.5 an, erhalten wir eine Summe aus drei Termen:

1. Aus der direkten Summe $12 = 1 \oplus 1$ erhalten wir $\mu(1, 2413)\mu(1, 2413) = 9$,
2. durch $12 = 0 \oplus 12$ erhalten wir $\mu(0, 2413)\mu(12, 2413) = 0$, und
3. $12 = 12 \oplus 0$ liefert den Term $\mu(12, 2413)(\mu(0, 2413) + 1) = 3$.

Dies ergibt insgesamt $\mu(12, 24136857) = 12$. Man beachte, das Intervall $[12, 24136857]$ besitzt 62 Elemente und 223 Kanten, was eine Berechnung per Hand von $\mu(12, 24136857)$ zu einer sehr mühsamen Aufgabe macht.

Eine allgemeine Berechnungsformel für unzerlegbare Permutation ist durch die Komplexität von $(S, \leq_S)$ noch nicht bekannt.

Literaturverzeichnis

[1] M. Albert, M. Atkinson, and S. Linton, *Permutations generated by stacks and deques.*, Ann. Comb., 14 (2010), pp. 3–16.

[2] M. Albert, M. Elder, A. Rechnitzer, P. Westcott, and M. Zabrocki, *On the Stanley–Wilf limit of 4231-avoiding permutations and a conjecture of Arratia.*, Adv. Appl. Math., 36 (2006), pp. 96–105.

[3] M. H. Albert, S. Linton, and N. Ruskuc, *The insertion encoding of permutations.*, Electron. J. Comb., 12 (2005), pp. research paper 47, 31.

[4] R. Arratia, *On the Stanley-Wilf conjecture for the number of permutations avoiding a given pattern.*, Electron. J. Comb., 6 (1999), pp. notes no. 1, 4.

[5] M. Atkinson, *Restricted permutations.*, Discrete Math., 195 (1999), pp. 27–38.

[6] E. Babson and J. West, *The permutations* $123p_4 \dots p_m$ *and* $321p_4 \dots p_m$ *are Wilf-equivalent.*, Graphs Comb., 16 (2000), pp. 373–380.

[7] J. Backelin, J. West, and G. Xin, *Wilf-equivalence for singleton classes.*, Adv. Appl. Math., 38 (2007), pp. 133–148.

[8] D. Bevan, *Permutations avoiding 1324 and patterns in Łukasiewicz paths.*, J. Lond. Math. Soc., II. Ser., 92 (2015), pp. 105–122.

[9] D. Bevan, R. Brignall, A. Elvey Price, and J. Pantone, *A structural characterisation of Av(1324) and new bounds on its growth rate*, ArXiv e-prints, (2017), 1711.10325.

[10] J. Bloom and S. Elizalde, *Pattern avoidance in matchings and partitions.*, Electron. J. Comb., 20 (2013), pp. research paper p5, 38.

[11] J. Bloom and D. Saracino, *A simple bijection between 231-avoiding and 312-avoiding placements.*, J. Comb. Math. Comb. Comput., 89 (2014), pp. 23–32.

[12] M. Bóna, *Exact enumeration of 1342-avoiding permutations: A close link with labeled trees and planar maps.*, J. Comb. Theory, Ser. A, 80 (1997), pp. 257–272.

[13] ——, *The number of permutations with exactly r 132-subsequences is P-recursive in the size!*, Adv. Appl. Math., 18 (1997), pp. 510–522.

[14] ——, *Permutations with one or two 132-subsequences.*, Discrete Math., 181 (1998), pp. 267–274.

[15] ——, *Combinatorics of permutations.*, Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2004.

[16] ——, *A new upper bound for 1324-avoiding permutations.*, Comb. Probab. Comput., 23 (2014), pp. 717–724.

[17] ——, *A new record for* 1324*-avoiding permutations.*, Eur. J. Math., 1 (2015), pp. 198–206.

[18] T. Britz and S. Fomin, *Finite posets and Ferrers shapes.*, Adv. Math., 158 (2001), pp. 86–127.

[19] A. Burstein, V. Jelínek, E. Jelínková, and E. Steingrímsson, *The Möbius function of separable and decomposable permutations.*, J. Comb. Theory, Ser. A, 118 (2011), pp. 2346–2364.

[20] T. Chow and J. West, *Forbidden subsequences and Chebyshev polynomials.*, Discrete Math., 204 (1999), pp. 119–128.

[21] F. Chung, R. Graham, V. Hoggatt, and M. Kleiman, *The number of Baxter permutations.*, J. Comb. Theory, Ser. A, 24 (1978), pp. 382–394.

[22] A. Claesson, V. Jelínek, and E. Steingrímsson, *Upper bounds for the Stanley-Wilf limit of 1324 and other layered patterns.*, J. Comb. Theory, Ser. A, 119 (2012), pp. 1680–1691.

[23] A. R. Conway, A. J. Guttmann, and P. Zinn-Justin, *1324-avoiding permutations revisited*, ArXiv e-prints, (2017), 1709.01248.

[24] R. Dilworth, *A decomposition theorem for partially ordered sets.*, Ann. Math. (2), 51 (1950), pp. 161–166.

[25] E. S. Egge and T. Mansour, *Permutations which avoid 1243 and 2143, continued fractions, and Chebyshev polynomials.*, Electron. J. Comb., 9 (2003), pp. research paper r7, 35.

[26] P. Erdős and G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry.*, Compos. Math., 2 (1935), pp. 463–470.

[27] M. Fekete, *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten.*, Math. Z., 17 (1923), pp. 228–249.

[28] P. Flajolet and R. Sedgewick, *Analytic combinatorics.*, Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[29] S. Fomin, *Finite partially ordered sets and Young tableaux.*, Sov. Math., Dokl., 19 (1978), pp. 1510–1514.

[30] Z. Füredi and P. Hajnal, *Davenport-Schinzel theory of matrices.*, Discrete Math., 103 (1992), pp. 233–251.

[31] S. Garrabrant and I. Pak, *Pattern avoidance is not P-recursive*, ArXiv e-prints, (2015), 1505.06508.

[32] ——, *Words in Linear Groups, Random Walks, Automata and P-Recursiveness*, ArXiv e-prints, (2015), 1502.06565.

[33] I. M. Gessel, *Symmetric functions and P-recursiveness.*, J. Comb. Theory, Ser. A, 53 (1990), pp. 257–285.

[34] C. Greene, *Some partitions associated with a partially ordered set.*, J. Comb. Theory, Ser. A, 20 (1976), pp. 69–79.

[35] H. Havlicek, *Lineare Algebra für Technische Mathematiker. 2.Auflage*, Lemgo: Heldermann Verlag, 2008.

[36] S. Kitaev, *Patterns in permutations and words.*, Berlin: Springer, 2011.

[37] M. Klazar, *The Füredi-Hajnal conjecture implies the Stanley-Wilf conjecture.*, in Formal power series and algebraic combinatorics. Proceedings of the 12th international conference, FPSAC'00, Moscow, Russia, June 26–30, 2000, Berlin: Springer, 2000, pp. 250–255.

[38] D. E. Knuth, *The art of computer programming. Vol. 1: Fundamental algorithms. 3rd ed.*, Reading, MA: Addison-Wesley, 3rd ed. ed., 1997.

[39] C. Krattenthaler, *Permutations with restricted patterns and Dyck paths.*, Adv. Appl. Math., 27 (2001), pp. 510–530.

[40] ——, *Growth diagrams, and increasing and decreasing chains in fillings of Ferrers shapes.*, Adv. Appl. Math., 37 (2006), pp. 404–431.

[41] M. Kuba and A. Panholzer, *Enumeration formulæ for pattern restricted Stirling permutations.*, Discrete Math., 312 (2012), pp. 3179–3194.

[42] P. A. MacMahon, *Combinatory analysis. Vol. 1.* Cambridge: University Press, v-xx, 300 pp. (1915)., 1915.

[43] N. Madras and H. Liu, *Random pattern-avoiding permutations.*, in Algorithmic probability and combinatorics. Papers from the AMS special sessions, Chicago, IL, USA, October 5–6, 2007 and Vancouver, BC, Canada, October 4–5, 2008, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2010, pp. 173–194.

[44] T. Mansour and A. Vainshtein, *Restricted permutations, continued fractions, and Chebyshev polynomials.*, Electron. J. Comb., 7 (2000), pp. research paper r17, 9.

[45] A. Marcus and G. Tardos, *Excluded permutation matrices and the Stanley-Wilf conjecture.*, J. Comb. Theory, Ser. A, 107 (2004), pp. 153–160.

[46] P. R. McNamara and E. Steingrímsson, *On the topology of the permutation pattern poset.*, J. Comb. Theory, Ser. A, 134 (2015), pp. 1–35.

[47] J. Noonan, *The number of permutations containing exactly one increasing subsequence of length three.*, Discrete Math., 152 (1996), pp. 307–313.

[48] J. Noonan and D. Zeilberger, *The enumeration of permutations with a prescribed number of "forbidden" patterns.*, Adv. Appl. Math., 17 (1996), pp. 381–407.

[49] V. R. Pratt, *Computing permutations with double-ended queues, parallel stacks and parallel queues*, in Proceedings of the Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, New York, NY, 1973, pp. 268–277.

[50] T. Roby, *Applications and extensions of Fomin's generalization of the Robinson–Schensted correspondence to differential posets.*, PhD thesis, MIT, Cambridge, MA, 1991.

[51] B. E. Sagan and V. Vatter, *The Möbius function of a composition poset.*, J. Algebr. Comb., 24 (2006), pp. 117–136.

[52] R. Simion and F. W. Schmidt, *Restricted permutations.*, Eur. J. Comb., 6 (1985), pp. 383–406.

[53] Z. Stankova, *Forbidden subsequences.*, Discrete Math., 132 (1994), pp. 291–316.

[54] ——, *Classification of forbidden subsequences of length 4.*, Eur. J. Comb., 17 (1996), pp. 501–517.

[55] Z. Stankova and J. West, *A new class of Wilf-equivalent permutations.*, J. Algebr. Comb., 15 (2002), pp. 271–290.

[56] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Volume 2. Paperback ed.*, Cambridge: Cambridge University Press, paperback ed. ed., 2001.

[57] ——, *Enumerative combinatorics. Vol. 1. 2nd ed.*, Cambridge: Cambridge University Press, 2nd ed. ed., 2012.

[58] E. Steingrímsson, *Some open problems on permutation patterns.*, in Surveys in combinatorics 2013. Papers based on the 24th British combinatorial conference, London, UK, June 30 – July 5, 2013, Cambridge: Cambridge University Press, 2013, pp. 239–263.

[59] R. Tarjan, *Sorting using networks of queues and stacks.*, J. Assoc. Comput. Mach., 19 (1972), pp. 341–346.

[60] W. Tutte, *A census of planar triangulations.*, Can. J. Math., 14 (1962), pp. 21–38.

[61] ——, *A census of planar maps.*, Can. J. Math., 15 (1963), pp. 249–271.

[62] V. R. Vatter, *Permutations avoiding two patterns of length three.*, Electron. J. Comb., 9 (2003), pp. research paper r6, 19.

[63] J. West, *Permutations with forbidden subsequences and stack-sortable permutations.*, PhD thesis, MIT, Cambridge, MA, 1990.

[64] ——, *Generating trees and the Catalan and Schröder numbers.*, Discrete Math., 146 (1995), pp. 247–262.

[65] ——, *Generating trees and forbidden subsequences.*, Discrete Math., 157 (1996), pp. 363–374.