



DIPLOMARBEIT

Über semistatisches Hedging von Derivaten

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

im Rahmen des Studiums

Masterstudium Finanz- und Versicherungsmathematik

eingereicht von

Hannes Hirber

Matrikelnummer 01226611

ausgeführt am Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der Fakultät für Mathematik und Geoinformation der Technischen Universität Wien

Betreuer

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek

Wien, 14.05.2018

Unterschrift Verfasser

Unterschrift Betreuer

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	2
2. Varianzoptimales Hedging	3
2.1. Das dynamisches Hedgingproblem	3
2.2. Das semistatische Hedgingproblem	7
2.3. Das statische Hedgingproblem	10
3. Integraldarstellung von Claims	12
3.1. Europäischer Call	12
4. Das Irrfahrtsmodell	15
5. Beispiele für verschiedene Verteilungen	20
5.1. Die Normal invers Gauss'sche Verteilung	21
5.1.1. Setting	22
5.1.2. Beispiel	24
5.2. Die Varianz-Gamma Verteilung	30
5.2.1. Setting	31
5.2.2. Beispiel	32
6. Varianzoptimales Hedging für Nicht-Martingale	35
6.1. Normal invers Gauss'sche Verteilung	38
6.2. Varianz-Gamma Verteilung	40
7. Fazit	43
A. Anhang	44
Literatur	59

1. Einleitung

Beim klassischen varianzoptimalen Hedgingproblem wird für einen zu hedgenden Claim das optimale Startkapital sowie die optimale Strategie im Underlying gesucht, um die Varianz des Hedgefehlers zu minimieren. Beim semistatischen Ansatz werden zusätzlich zum Underlying auch Positionen in anderen, auf dem Markt verfügbaren Claims mit derselben Maturität wie jener des zu hedgenden Claims gehalten. Die Position in den Claims soll dabei statisch sein, das heißt man investiert zu Beginn der Laufzeit und erhält am Ende die Auszahlung, verändert die Position aber zu keinem anderen Zeitpunkt.

In dieser Arbeit wird das semistatische varianzoptimale Hedgingproblem in diskreter Zeit gelöst und anhand von europäischen Call Optionen im Irrfahrtsmodell für verschiedene Verteilungen des Underlyings analysiert.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: In Kapitel 2 lösen wir zuerst das klassische varianzoptimale Hedgingproblem in diskreter Zeit unter der Annahme, dass es sich beim Underlying um ein Martingal handelt. Dieses Problem erweitern wir dann auf das semistatische Hedgingproblem, wobei wir ähnlich vorgehen wie [DHK17, Kapitel 2] für das Problem in stetiger Zeit. Außerdem lösen wir zum Vergleich auch das rein statische varianzoptimale Hedgingproblem. Um das Ganze berechnen zu können, brauchen wir noch eine Möglichkeit, die Quantitäten aus unserer Lösung zu berechnen. In Kapitel 3 untersuchen wir die Möglichkeit, europäische Optionen mithilfe der Laplace-Transformation als Integral darzustellen. In Kapitel 4 verwenden wir diese Ergebnisse dann, um für das Irrfahrtsmodell konkrete Formeln für unsere Lösung zu erhalten und so den varianzoptimalen Hedgefehler auch tatsächlich berechnen zu können. Wir führen die Berechnungen dann in Kapitel 5 für zwei Verteilungen durch und vergleichen die Ergebnisse. Anschließend betrachten wir in Kapitel 6 noch den Fall, dass das Underlying kein Martingal ist, wobei wir die Ergebnisse für das klassische varianzoptimale Hedging aus [HKK06, Kapitel 2, Seite 857/858] verwenden und diese auf das semistatische Problem erweitern. Wir vergleichen die Ergebnisse anhand der Beispiele mit den vorherigen Ergebnissen aus Kapitel 4.

2. Varianzoptimales Hedging

In diesem Kapitel werden verschiedene Ansätze des varianzoptimalen Hedgings diskutiert. Gehedged werden soll ein Claim H^0 , wobei wir uns in einem unvollständigen Markt befinden. Wir beginnen mit dem gewöhnlichen Ansatz der varianzoptimalen Strategie, befinden uns allerdings in diskreter Zeit, das heißt wir können unser Portfolio nur zu endlich vielen Zeitpunkten verändern.

Diesen Gedanken führen wir im zweiten Unterkapitel fort, wobei wir nun nicht mehr nur im Underlying handeln, sondern auch statisch in zusätzliche Claims $H = (H^1, \dots, H^d)$ investieren. Wir wollen herausfinden inwieweit dieser statische Teil des Portfolios die Varianz des Hedgefehlers verändert und wie dieses Portfolio optimiert werden kann.

Zum Vergleich dazu werden wir im darauffolgenden Unterkapitel auch das rein statische Hedging untersuchen.

2.1. Das dynamische Hedgingproblem

Zunächst formulieren wir das allgemeine varianzoptimale Hedgingproblem, wobei wir ein ähnliches Setting wie [DHK17, Kapitel 2] verwenden:

Ausgangssituation: Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ der mit einer Filtration \mathbb{F} ausgestattet ist, welche die üblichen Bedingungen erfüllt. Wir betrachten Zeitpunkte $n \in \{0, 1, \dots, N\}$, wobei N unsere Maturität ist. \mathcal{F}_0 sei die triviale Sigmaalgebra und $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$. Zudem sei ein risikoneutrales Maß \mathbb{Q} mit Dichte $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$ gegeben. Alle Erwartungswerte $\mathbb{E}[\cdot]$ bezeichnen Erwartungswerte unter \mathbb{Q} . Sei $S = (S_t)_{t \geq 0}$ der Preisprozess einer gehandelten Aktie, die Zinsrate soll einfachheitshalber gleich Null sein und S ein quadratisch integrierbares Martingal unter \mathbb{Q} . Mit $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2(\mathbb{F})$ bezeichnen wir die Menge der reellwertigen, \mathbb{F} -adaptierten, quadratisch integrierbaren \mathbb{Q} -Martingale. Wir sagen $X, Y \in \mathcal{H}^2(\mathbb{F})$ sind äquivalent genau dann, wenn $\forall k \in \{0, \dots, N\}$ $X_k = Y_k$ fast sicher gilt. Ausgestattet mit der Norm $\|X\|_{\mathcal{H}^2}^2 := \mathbb{E}[X_N^2]$ bildet dies einen Hilbertraum. Außerdem setzen wir $\mathcal{H}_0^2 := \{X \in \mathcal{H}^2 : X_0 = 0\}$.

Wir gehen nun von einem Claim H^0 aus dem Raum $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ aus und wollen diesen für den Zeitpunkt N hedgen. Wir identifizieren den Claim H^0 mit dem Martingal

$$H_n^0 = \mathbb{E}[H^0 | \mathcal{F}_n], \quad n \in \{0, 1, \dots, N\},$$

womit wir ein Element aus \mathcal{H}^2 erhalten. Die Menge aller zulässigen Strategien wird definiert durch:

$$L^2(S) := \left\{ \vartheta \text{ vorhersehbar und } \mathbb{R}\text{-wertig: } \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^N \vartheta_k \Delta S_k \right)^2 \right] < \infty \right\},$$

wobei $\Delta S_k := S_k - S_{k-1}$.

Varianzoptimale Hedgingstrategie ϑ^* und optimales Startkapital c^* sind gegeben als Lösung

von

$$\varepsilon^2 = \min_{\vartheta \in L^2(S), c \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\left(c + \sum_{k=1}^N \vartheta_k \Delta S_k - H_N^0 \right)^2 \right], \quad (1)$$

wodurch ε die Standardabweichung des Hedgefehlers bei varianzoptimalem Hedging darstellt.

Das Minimierungsproblem kann mithilfe der Orthogonalprojektion von H^0 auf den von deterministischen Konstanten c und dem Raum $\mathcal{L}^2(S) := \{\sum_{k=0}^N \vartheta_k \Delta S_k, \vartheta \in L^2(S)\} \subset \mathcal{H}^2$ aufgespannten, abgeschlossenen Unterraum gelöst werden. Die daraus resultierende orthogonale Zerlegung

$$H_n^0 = c^* + \sum_{k=1}^n \vartheta_k^* \Delta S_k + L_n$$

wird Galtchouk-Kunita-Watanabe (GKW) Zerlegung von H^0 bezüglich S genannt. Sie zerlegt H^0 in Startkapital, hedgebares Risiko und nicht-hedgebares Risiko L , wobei L orthogonal auf S steht.

Um die optimale Strategie ϑ^* zu bestimmen, benötigen wir die folgenden zwei Ergebnisse.

Satz 2.1. *Seien X, Y quadratisch integrierbare Martingale. Die vorhersehbare Kovariation ist gegeben durch:*

$$\langle X, Y \rangle_n = \sum_{k=1}^n \text{Cov}(\Delta X_k, \Delta Y_k | \mathcal{F}_{k-1}). \quad (2)$$

Die vorhersehbare quadratische Variation ist gegeben durch

$$\langle X, X \rangle_n = \sum_{k=1}^n \text{Var}(\Delta X_k | \mathcal{F}_{k-1}). \quad (3)$$

Beweis. Damit die Aussage erfüllt ist, muss $X_n Y_n - \sum_{k=1}^n \text{Cov}(\Delta X_k, \Delta Y_k | \mathcal{F}_{k-1}) =: \Phi_n$ ein Martingal sein. Es reicht also zu zeigen, dass $\mathbb{E}[\Delta \Phi_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0$ ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta \Phi_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= \\ &= \mathbb{E} \left[X_n Y_n - \sum_{k=1}^n \text{Cov}(\Delta X_k, \Delta Y_k | \mathcal{F}_{k-1}) - X_{n-1} Y_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \text{Cov}(\Delta X_k, \Delta Y_k | \mathcal{F}_{k-1}) \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= \mathbb{E}[X_n Y_n - X_{n-1} Y_{n-1} - \text{Cov}(\Delta X_n, \Delta Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[X_n Y_n - X_{n-1} Y_{n-1} - \mathbb{E}(\Delta X_n \Delta Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(\Delta Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) \mathbb{E}(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[X_n Y_n - X_{n-1} Y_{n-1} - \mathbb{E}(X_n Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) + X_{n-1} Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

und daher die erste Aussage.

Die zweite Aussage folgt direkt aus der Ersten für $Y = X$. □

Als nächstes beweisen wir ein Lemma, das wir beim Beweis von Satz 2.3 brauchen werden.

Lemma 2.2. *Analog zur Kovariation für stochastische Integrale gilt für $\vartheta \in L^2(S), \xi \in L^2(H)$:*

$$\left\langle \sum_{k=1}^N \vartheta_k \Delta S_k, \sum_{k=1}^N \xi_k \Delta H_k \right\rangle_N = \sum_{k=1}^N \vartheta_k \xi_k \Delta \langle S, H \rangle_k. \quad (4)$$

Beweis. Es gilt :

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k=1}^N \vartheta_k \Delta S_k, \sum_{k=1}^N \xi_k \Delta H_k \right\rangle_N &= \sum_{n=1}^N \text{Cov} \left(\Delta \left(\sum_{k=1}^n \vartheta_k \Delta S_k \right), \Delta \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \Delta H_k \right) \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \text{Cov}(\vartheta_n \Delta S_n, \xi_n \Delta H_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \sum_{n=1}^N (\mathbb{E}[\vartheta_n \xi_n \Delta S_n \Delta H_n | \mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[\vartheta_n \Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1}] \mathbb{E}[\xi_n \Delta H_n | \mathcal{F}_{n-1}]). \end{aligned}$$

Da ϑ und ξ vorhersehbar sind, können wir sie aus den Erwartungswerten herausziehen. Da S und H Martingale sind, fällt der zweite Term der rechten Seite jeweils weg. Wir erhalten

$$\sum_{n=1}^N \vartheta_n \xi_n \text{Cov}(\Delta S_n, \Delta H_n | \mathcal{F}_{n-1})$$

und damit laut (2) die Aussage. □

Damit eine Strategie optimal ist, muss der Fehlerterm L aus der GKW-Zerlegung orthogonal auf den Raum $\mathcal{L}^2(S)$ stehen, da es sonst eine Strategie gibt, die H genauer approximiert. Es muss also für alle $V_n := c + \sum_{k=1}^n \vartheta_k \Delta S_k$ mit $\vartheta \in L^2(S)$

$$\mathbb{E}[L_n V_n] = 0 \quad (5)$$

gelten. Daraus kann die optimale Strategie ϑ^* berechnet werden.

Satz 2.3. *Unter den bisherigen Voraussetzungen gilt:*

$$(L_n) \perp (V_n) \Rightarrow \vartheta_n^* = \frac{\Delta \langle H, S \rangle_n}{\Delta \langle S, S \rangle_n} = \frac{\text{Cov}(\Delta H_n, \Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1})}{\text{Var}(\Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1})} \quad (6)$$

Beweis. $(L_n) \perp (V_n)$ ist äquivalent zu $\mathbb{E}[L_n V_n] = \mathbb{E}[\langle L, V \rangle_n] = 0$, da sowohl V_n als auch L_n Martingale sind. Es folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\langle L, V \rangle_n] &= \mathbb{E}\left[\left\langle H - H_0 - \sum_{k=1}^n \vartheta_k^* \Delta S_k, c + \sum_{k=1}^n \vartheta_k \Delta S_k \right\rangle_n\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left\langle \sum_{k=1}^n \Delta H_k, \sum_{k=1}^n \vartheta_k \Delta S_k \right\rangle_n\right] - \mathbb{E}\left[\left\langle \sum_{k=1}^n \vartheta_k^* \Delta S_k, \sum_{k=1}^n \vartheta_k \Delta S_k \right\rangle_n\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \vartheta_k \Delta \langle H, S \rangle_k\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \vartheta_k \vartheta_k^* \Delta \langle S, S \rangle_k\right]. \end{aligned}$$

Aufgrund der Orthogonalität folgt also

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \vartheta_k \Delta \langle H, S \rangle_k\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \vartheta_k \vartheta_k^* \Delta \langle S, S \rangle_k\right]$$

und daher

$$\vartheta_k^* = \frac{\Delta \langle H, S \rangle_k}{\Delta \langle S, S \rangle_k} = \frac{\text{Cov}(\Delta H_k, \Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1})}{\text{Var}(\Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1})}.$$

□

Bemerkung: Es muss natürlich noch gezeigt werden, dass diese Strategie überhaupt zulässig ist. Da sowohl H als auch S quadratisch integrierbar sind, bleibt die Kovarianz endlich und bereitet keinerlei Probleme. Die bedingte Varianz gegeben \mathcal{F}_{k-1} ist null, falls ΔS_k messbar bezüglich \mathcal{F}_{k-1} ist. Da wir außerdem wissen, dass S ein Martingal ist, wäre das nur möglich wenn $S_k = S_{k-1}$ f.s. Gilt das für alle k und ist F_0 trivial, wäre S f.s. konstant, was kein interessantes Modell ist.

Bemerkung: Die varianzoptimale Strategie im diskreten Fall ist ziemlich ähnlich zu jener im stetigen Fall, bei dem sie durch $\xi^* = d\langle H, S \rangle / d\langle S, S \rangle$ gegeben ist (vergleiche [DHK17, Seite 3]).

Bemerkung: Um ϑ^* einfacher berechnen zu können, stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned} &\frac{\text{Cov}(\Delta H_k, \Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1})}{\text{Var}(\Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1})} \\ &= \frac{(\mathbb{E}[H_k \Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1}] - H_{k-1} \mathbb{E}[\Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1}]) - \mathbb{E}[\Delta H_n | \mathcal{F}_{k-1}] \mathbb{E}[\Delta S_n | \mathcal{F}_{k-1}]}{\mathbb{E}[\Delta S_n^2 | \mathcal{F}_{k-1}] - \mathbb{E}[\Delta S_n | \mathcal{F}_{k-1}]^2} \\ &= \frac{\mathbb{E}[H_k \Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1}]}{\mathbb{E}[\Delta S_n^2 | \mathcal{F}_{k-1}]}. \end{aligned}$$

2.2. Das semistatische Hedgingproblem

Wir widmen uns nun dem semistatischen Hedgingproblem. Zusätzlich zu unserem Claim H^0 , der gehedged werden soll, sei ein Vektor $H = (H^1, \dots, H^d)^\top$ mit weiteren Claims gegeben, welche wiederum alle in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ liegen. Mit jedem Claim verbinden wir das Martingal

$$H_k^i := \mathbb{E}[H^i | \mathcal{F}_k], \quad k \in \{0, \dots, N\}, \quad i = 0, \dots, d.$$

Die semistatische Hedgingstrategie setzt sich nun aus einer statischen Position in H und einem dynamischen Teil im Underlying zusammen. Der statische Teil kann mithilfe eines Vektors $\nu \in \mathbb{R}^d$ dargestellt werden, wobei ν^i die Anzahl darstellt, die von H^i zum Zeitpunkt $k = 0$ gekauft und bis zu $k = N$ gehalten wird. Der dynamische Teil wird wieder von $\vartheta \in L^2(S)$ dargestellt.

Analog zu [DHK17, Definition 2.1] definieren wir nun das semistatische Hedgingproblem wie folgt:

Definition 2.4. *Der varianzoptimale semistatische Hedge $(\vartheta, \nu) \in L^2(S) \times \mathbb{R}^d$ und das optimale Startkapital $c \in \mathbb{R}$ sind als Lösung des Minimierungsproblems*

$$\varepsilon^2 = \min_{(\vartheta, \nu) \in L^2(S) \times \mathbb{R}^d, c \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\left(c - \nu^\top \mathbb{E}[H_N] + \sum_{k=1}^N \vartheta_k \Delta S_k - (H_N^0 - \nu^\top H_N) \right)^2 \right] \quad (7)$$

gegeben.

Bemerkung: $\nu^\top \mathbb{E}[H_N]$ sind die Kosten für den statischen Anteil, $\nu^\top H_N$ ist der Endwert davon. Der dynamische Teil ist selbstfinanzierend, Gewinne und Verluste aus der Strategie werden in $\sum_{k=1}^N \vartheta_k \Delta S_k$ aufsummiert. Die Summe stellt also den Endwert des dynamischen Teils dar. Wir addieren noch das Startkapital c und subtrahieren den Endwert des zu hedgenden Claims H_N^0 . Dadurch ergibt sich der obige Ausdruck.

Um das Optimierungsproblem zu lösen, teilen wir es in ein inneres und äußeres Problem auf:

$$\begin{cases} \varepsilon^2(\nu) = \min_{\vartheta \in L^2(S), c \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\left(c - \nu^\top \mathbb{E}[H_N] + \sum_{k=1}^N \vartheta_k \Delta S_k - (H_N^0 - \nu^\top H_N) \right)^2 \right], \\ \varepsilon^2 = \min_{\nu \in \mathbb{R}^d} \varepsilon^2(\nu). \end{cases} \quad (8)$$

Das innere Problem ist von derselben Form wie das varianzoptimale Hedgingproblem (1), das äußere ist ein endlichdimensionales Optimierungsproblem.

Um die Lösung zu finden, benötigen wir die GKW-Zerlegungen der Claims bezüglich S . Diese sind durch

$$H_k^i = H_0^i + \sum_{k=1}^N \vartheta_k^i \Delta S_k + L_k^i, \quad i = 0, \dots, d$$

gegeben. Wir bezeichnen mit $\vartheta := (\vartheta^1, \dots, \vartheta^d)^\top$ den Vektor der Strategien, wobei

$$\vartheta_k^i = \frac{\text{Cov}(\Delta H_k, \Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1})}{\text{Var}(\Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1})}$$

und mit $L := (L^1, \dots, L^d)^\top$ den Vektor der Residuen.

Bemerkung: Falls die Residuen linear unabhängig sind, also falls es kein $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit $x^\top L_N = 0$ gibt, so kann man die Anzahl der zusätzlichen Claims nicht reduzieren, ohne die Varianz des Hedgefehlers zu verändern.

Wir kommen nun zum wichtigsten Resultat dieses Kapitels, mit dem wir die minimale Varianz des Hedgefehlers konkret berechnen können. Das Resultat bleibt, auch wenn wir nun nur endlich viele Handelszeitpunkte haben, genauso wie in [DHK17, Theorem 2.3].

Satz 2.5. *Betrachte das varianzoptimale semistatische Hedgingproblem und definiere*

$$A := \text{Var}(L_N^0), \quad B := \text{Cov}(L_N, L_N^0) \quad C := \text{Cov}(L_N, L_N). \quad (9)$$

Unter der Bedingung, dass die Residuen linear unabhängig sind, ist C invertierbar und die eindeutige Lösung des semistatischen Hedgingproblems ist gegeben durch

$$c = \mathbb{E}[H_0^\top], \quad \nu = C^{-1}B, \quad \vartheta^\nu = \vartheta^0 - \nu^\top \vartheta. \quad (10)$$

Die Varianz des Hedgefehlers ist gegeben durch

$$\varepsilon^2 = A - B^\top C^{-1}B. \quad (11)$$

Außerdem können die Elemente von A, B und C dargestellt werden als

$$\mathbb{E}[L_N^i L_N^j] = \mathbb{E}[\langle L^i, L^j \rangle_N] = \mathbb{E} \left[\langle H^i, H^j \rangle_N - \sum_{k=1}^N \vartheta_k^i \vartheta_k^j \Delta \langle S, S \rangle_k \right], \quad i, j = 0, \dots, d. \quad (12)$$

Beweis. Wir betrachten zuerst das innere Optimierungsproblem. Dieses ist äquivalent zum bereits bekannten klassischen varianzoptimalen Hedgingproblem für den Claim $H^0 - \nu^\top H$. Lösen können wir es mit der GKW-Zerlegung:

$$H_l^0 - \nu^\top H_l = H_0^0 - \nu^\top H_0 + \sum_{k=1}^l \vartheta_k^\nu \Delta S_k + L_l^\nu \quad l \in 1, \dots, N.$$

Wir erhalten also

$$\vartheta_l^\nu = \frac{\text{Cov}(\Delta(H_l^0 - \nu^\top H_l), \Delta S_l | \mathcal{F}_{k-1})}{\text{Var}(\Delta S_l^2 | \mathcal{F}_{k-1})} = \vartheta_l^0 - \nu^\top \vartheta_l,$$

wobei die zweite Gleichheit wegen der Bilinearität der Kovarianz folgt.

Da die GWK-Zerlegung eindeutig ist, gilt $L_l^\nu = L_l^0 - \nu^\top L_l$ und die Varianz des Hedgefehlers ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\varepsilon(\nu)^2 &= \mathbb{E}[(L^\nu)^2] = \mathbb{E}[(L_N^0 - \nu^\top L_N)^2] = \nu^\top \mathbb{E}[L_N L_N^\top] \nu - 2\nu^\top \mathbb{E}[L_N L_N^0] + \mathbb{E}[(L_N^0)^2] \\ &= \nu^\top C \nu - 2\nu^\top B + A.\end{aligned}$$

Das äußere Optimierungsproblem lautet also:

$$\varepsilon^2 = \min_{\nu \in \mathbb{R}^d} (\nu^\top C \nu - 2\nu^\top B + A).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\varepsilon(\nu)^2 &= \begin{pmatrix} \nu_1 & \cdots & \nu_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{d1} & \cdots & c_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_d \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \nu_1 & \cdots & \nu_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} + a \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \nu_j \nu_i c_{ij} - 2 \sum_{i=1}^d \nu_i b_i + a.\end{aligned}$$

Mittels partieller Differenzierung bestimmen wir nun das optimale ν . Für jedes ν_i gilt aufgrund der Symmetrie von C :

$$\frac{\partial \varepsilon^2(\nu)}{\partial \nu_i} = 2 \sum_{j=1}^d \nu_j c_{ji} - 2b_i, \quad \forall i \in 1, \dots, d.$$

Nullsetzen und umformen liefert $\sum_{j=1}^d \nu_j c_{ji} = b_i$, $\forall i$ und somit $\nu^\top C = B$.

C ist als Kovarianzmatrix positiv semidefinit und da wir vorausgesetzt haben, dass die Residuen linear unabhängig sind, gilt $\text{Var}(x^\top L_N) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, womit C positiv definit und daher invertierbar ist. Damit gilt $\nu = C^{-1}B$ und $\varepsilon^2 = A - B^\top C^{-1}B$.

Um die letzte Aussage des Satzes zu zeigen, stellen wir zuerst fest, dass

$$L_l^i = H_l^i - H_0^i - \sum_{k=1}^l \vartheta_k^i \Delta S_k \quad \forall i \in 0, \dots, d.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle L^0, L^i \rangle_N] &= \mathbb{E} \left[\left\langle H^0 - H_0^0 - \sum_{j=1}^i \vartheta_j^0 \Delta S_j, H^i - H_0^i - \sum_{k=1}^i \vartheta_k^i \Delta S_k \right\rangle_N \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\langle H^0, H^i \rangle_N - \left\langle \sum_{j=1}^i \vartheta_j^0 \Delta S_j, H^i \right\rangle_N - \left\langle H^0, \sum_{k=1}^i \vartheta_k^i \Delta S_k \right\rangle_N + \left\langle \sum_{j=1}^i \vartheta_j^0 \Delta S_j, \sum_{k=1}^i \vartheta_k^i \Delta S_k \right\rangle_N \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\langle H^0, H^i \rangle_N - \sum_{k=1}^i \frac{\Delta \langle H^0, S \rangle_k}{\Delta \langle S, S \rangle_k} \frac{\Delta \langle H^i, S \rangle_k}{\Delta \langle S, S \rangle_k} \Delta \langle S, S \rangle_k \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\langle H^0, H^i \rangle_N - \sum_{k=1}^i \vartheta_k^0 \vartheta_k^i \Delta \langle S, S \rangle_k \right].\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit folgt aus (4) und Erweitern mit $\Delta\langle S, S \rangle_k$. \square

2.3. Das statische Hedgingproblem

Unter den bisherigen Voraussetzungen untersuchen wir nun das rein statische Hedgingproblem, das heißt wir handeln nur zu Beginn und halten unsere Position dann bis zum Ende. Dazu sei zusätzlich zu unserem Claim H^0 , der gehedged werden soll, ein Vektor $H = (H^1, \dots, H^d)^\top$ mit zusätzlichen Claims gegeben, welche wiederum alle in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ liegen. Dabei sollen die Claims linear unabhängig voneinander sein. Unser Hedgingproblem liest sich dann folgendermaßen:

$$\varepsilon^2 = \min_{\nu \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}[(\mathbb{E}[H_N^0] - \nu^\top \mathbb{E}[H_N] - H_N^0 + \nu^\top H_N)^2]. \quad (13)$$

Berechnen können wir die optimale Strategie sowie die Varianz des Hedgefehlers mithilfe des folgenden Satzes.

Satz 2.6. *Es seien*

$$\hat{A} := \text{Var}(H_N^0), \quad \hat{B} := \text{Cov}(H_N^0, H_N), \quad \hat{C} := \text{Cov}(H_N, H_N). \quad (14)$$

Unter den gegebenen Voraussetzungen wird (13) durch $\nu = C^{-1}B$ gelöst. Die Varianz des Hedgefehlers ist gegeben durch

$$\varepsilon^2 = \hat{A} - \hat{B}^\top \hat{C}^{-1} \hat{B}.$$

Beweis. Es ergibt sich durch ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \min_{\nu \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}[(\mathbb{E}[H_N^0] - \nu^\top \mathbb{E}[H_N] - H_N^0 + \nu^\top H_N)^2] \\ &= \min_{\nu \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[H_N^0]^2 - 2\mathbb{E}[H_N^0] \nu^\top \mathbb{E}[H_N] - 2\mathbb{E}[H_N^0] H_N^0 + 2\mathbb{E}[H_N^0] \nu^\top H_N + (\nu^\top \mathbb{E}[H_N])^2 \right. \\ &\quad \left. + 2H_N^0 \nu^\top \mathbb{E}[H_N] - 2\nu^\top \mathbb{E}[H_N] \nu^\top H_N + (H_N^0)^2 - 2H_N^0 \nu^\top H_N + (\nu^\top H_N)^2 \right] \\ &= \min_{\nu \in \mathbb{R}^d} \left(\mathbb{E} \left[\mathbb{E}[H_N^0]^2 - 2\mathbb{E}[H_N^0] H_N^0 + (H_N^0)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{i=1}^d \nu_i \left(\mathbb{E}[\mathbb{E}[H_N^0] \mathbb{E}[H_N^i]] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[H_N^0] H_N^i] + \mathbb{E}[H_N^0 \mathbb{E}[H_N^i]] - \mathbb{E}[H_N^0 H_N^i] \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \nu_i \nu_j \left(\mathbb{E}[\mathbb{E}[H_N^i] \mathbb{E}[H_N^j]] + \mathbb{E}[H_N^i H_N^j] - \mathbb{E}[2\mathbb{E}[H_N^i] H_N^j] \right) \right) \\ &= \text{Var}(H_N^0) - 2\nu^\top \text{Cov}(H_N^0, H_N) + \nu^\top \text{Cov}(H_N, H_N) \nu. \end{aligned}$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass die Kovarianzmatrix invertierbar ist, folgt das Ergebnis nun analog zum Beweis des äußeren Problems des semistatischen Hedgings. \square

Bemerkung: Während sich die Varianz des Hedgefehlers im semistatischen Fall aus den Kovarianzen der GKW-Residuen zusammensetzt, benötigen wir im statischen Fall nur die Kovarianzen der Claims H^i , $i = 0, \dots, d$.

3. Integraldarstellung von Claims

Um das jeweils optimale statische Portfolio ν und dynamische Portfolio ϑ , das optimale Startkapital c , sowie die minimale Standardabweichung ε des Hegdefehlers nun konkret numerisch berechnen zu können, brauchen wir eine Möglichkeit, die Kovarianzen der Residuen zu berechnen. Dazu betrachten wir nun Claims von einer bestimmten Form, nämlich jene, die eine Integraldarstellung besitzen.

Wir gehen davon aus, dass der Payoff der Option H gegeben ist durch $H = f(S_N)$, wobei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die Gleichung

$$f(s) = \int s^z \Pi(dz) \quad (15)$$

für ein endliches komplexes Maß Π auf einem Streifen $\{z \in \mathbb{C} : R' \leq \operatorname{Re}(z) \leq R\}$ erfüllt.

3.1. Europäischer Call

Mittels Laplace-Transformation wollen wir dieses Maß nun für einen europäischen Call $H = (S_N - K)^+$ berechnen. Wir verwenden dabei die folgenden Resultate aus dem Appendix von [HKK06, Seite 882-883].

Definition 3.1. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine messbare Funktion. Dann ist die zweiseitige Laplace-Transformation \tilde{f} gegeben durch

$$\tilde{f}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-zx} dx, \quad (16)$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$ für welches das Integral existiert.

In der Literatur wird die Laplace-Transformation \tilde{f} auch mit $\mathcal{L}[f(x); z]$ bezeichnet. Wir sagen die Laplace-Transformation $\tilde{f}(z)$ existiert, wenn das Laplace-Integral (16) absolut konvergiert, also wenn es als echtes Lebesgue-Integral existiert. Folgendes Lemma zeigt, dass der Definitionsbereich einer Laplace-Transformation immer ein vertikaler Streifen in der komplexen Ebene ist. Er kann leer sein, reduziert auf eine einzige vertikale Linie, eine abgeschlossene oder offene linke oder rechte Halbebene oder ganz \mathbb{C} .

Lemma 3.2. Wir nehmen an, dass $\tilde{f}(a)$ und $\tilde{f}(b)$ für reelle Zahlen $a \leq b$ existieren. Dann existiert $\tilde{f}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $a \leq \operatorname{Re}(z) \leq b$.

Beweis. Es gilt offensichtlich $|f(x)e^{-zx}| = |f(x)|e^{-\operatorname{Re}(z)x} \leq |f(x)e^{-ax}| + |f(x)e^{-bx}|$. \square

Wegen

$$\tilde{f}(u + iv) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-(u+iv)x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} f(-x) e^{ixv} dx, \quad (17)$$

sehen wir, dass $\mathcal{L}[f(x); u + iv] = \mathcal{F}[e^{ux} f(-x); v]$ gilt, wobei der letzte Ausdruck die Fourier-Transformation der Funktion $x \mapsto e^{ux} f(-x)$ bezeichnet. Daher können alle Eigenschaften der bilateralen Laplace-Transformation auch bezüglich der Fourier-Transformation dargestellt werden und umgekehrt.

In der Literatur gibt es viele verschiedene Inversionsformeln für die Laplace-Transformation. Wir verwenden das sogenannte Bromwich Inversionsintegral, welches durch folgenden Satz begründet wird.

Satz 3.3. *Angenommen die Laplace-Transformation $\tilde{f}(R)$ existiert für $R \in \mathbb{R}$.*

1. *Falls $\nu \mapsto \tilde{f}(R + i\nu)$ integrierbar ist, dann ist $x \mapsto f(x)$ stetig und es gilt*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{R-i\infty}^{R+i\infty} \tilde{f}(z) e^{zx} dz, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

2. *Falls f auf jedem kompakten Intervall von beschränkter Variation ist, dann gilt*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} (f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon)) = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{R-ic}^{R+ic} \tilde{f}(z) e^{zx} dz, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt durch [Rud87, Theorem 9.11] und (17). Für die zweite Aussage siehe [Doe71, Satz 4.4.1]. \square

Als Resultat folgt nun der folgende Satz.

Satz 3.4. *Ein europäischer Call $H = (S_N - K)^+$ hat für $c > 1$ die Integraldarstellung*

$$(S_N - K)^+ = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} S_N^z \Pi(dz), \quad (18)$$

wobei das Maß Π durch

$$\Pi(dz) = \frac{1}{2\pi i} \frac{K^{1-z}}{z(z-1)} dz \quad (19)$$

gegeben ist.

Beweis. Zuerst betrachten wir die Funktion $g(x) = (S_0 e^x - K)^+$ und berechnen die zweiseitige Laplace-Transformation davon:

$$\begin{aligned} \hat{g}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} (S_0 e^x - K)^+ dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} \mathbb{1}_{\{S_0 e^x - K > 0\}} (S_0 e^x - K) dx \\ &= \int_{\ln(\frac{K}{S_0})}^{\infty} e^{-xt} (S_0 e^x - K) dx. \end{aligned}$$

Für $\operatorname{Re}(t) > 1$ folgt nun

$$\begin{aligned} \frac{e^{x(1-t)}}{1-t} S_0 + \frac{e^{-tx} K}{t} \Big|_{x=\ln(\frac{K}{S_0})}^{\infty} &= \frac{S_0^t K^{1-t}}{t-1} - \frac{S_0^t K^{1-t}}{t} \\ &= \frac{S_0^t K^{1-t}}{t(t-1)}. \end{aligned}$$

Das Integral ist also auf der Halbebene $\operatorname{Re}(z) > 1$ definiert.

Nun berechnen wir das Bromwich Inversionsintegral für $c > 1$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{g}(z) e^{zx} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zx} S_0^z \frac{K^{1-z}}{z(z-1)} dz \end{aligned}$$

Es gilt also wegen $H = f(S_N) = (S_N - K)^+ = (S_0 e^{X_N} - K)^+ = g(X_N)$:

$$g(X_N) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} S_0^z e^{zX_N} \frac{K^{1-z}}{z(z-1)} dz = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} S_N^z \Pi(dz).$$

Damit gilt die Aussage. □

4. Das Irrfahrtsmodell

Wir verwenden dasselbe Setting wie in [HKK06, Kapitel 2], das heißt es sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}, \mathbb{P})$ und ein reellwertiger Prozess $X = (X_n)_{n=0, \dots, N}$ mit stationären, unabhängigen Inkrementen gegeben. Für X gelte also:

1. X ist adaptiert bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$;
2. $X_0 = 0$;
3. ΔX_n hat dieselbe Verteilung für $n = 1, \dots, N$;
4. ΔX_n ist unabhängig von \mathcal{F}_{n-1} für $n = 1, \dots, N$.

Wir betrachten eine dividendenlose Aktie mit diskontiertem Preisprozess S der Form

$$S_n = S_0 \exp(X_n), \quad (20)$$

wobei $S_0 > 0$ sein soll. Wir nehmen an, dass $\mathbb{E}[S_1^2] = S_0^2 \mathbb{E}[e^{2X_1}] < \infty$ gilt, womit die momentenerzeugende Funktion $m : z \mapsto \mathbb{E}[e^{zX_1}]$ mindestens für $z \in \mathbb{C}$ mit $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2$ definiert ist. Zudem nehmen wir an, dass S ein Martingal ist, also dass

$$\mathbb{E}[e^{X_1}] = 1$$

gilt. Damit sind auch die Voraussetzungen aus Kapitel 2 erfüllt.

Zuerst betrachten wir einen Claim H , der die Integraldarstellung (15) erfüllt und definieren das Martingal $H_k := \mathbb{E}[H | \mathcal{F}_k]$.

Satz 4.1. *Für $H_k, k = 1, \dots, N$ gilt:*

$$H_k = \int S_k^z m(z)^{N-k} \Pi(dz). \quad (21)$$

Beweis. Aus (15) kennen wir die Integraldarstellung von H . Diese setzen wir nun ein und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H | \mathcal{F}_k] &= \mathbb{E} \left[\int S_N^z \Pi(dz) | \mathcal{F}_k \right] \\ &= \int \mathbb{E}[S_k^z \exp(z \sum_{i=k+1}^N \Delta X_i) | \mathcal{F}_k] \Pi(dz) \\ &= \int S_k^z \mathbb{E} \left[\prod_{i=k+1}^N e^{z \Delta X_i} \right] \Pi(dz) \\ &= \int S_k^z m(z)^{N-k} \Pi(dz). \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Mithilfe von (21) werden wir nun Formeln für die bedingten Kovarianzen der H^i untereinander, sowie jener zwischen H^i und S , und der bedingten Varianz von S herleiten. Diese verwenden wir dann zur Berechnung der vorhersehbaren Kovariationen beziehungsweise der vorhersehbaren quadratischen Variationen. Alle H^i müssen die Integraldarstellung (15) besitzen.

Satz 4.2. *Es seien für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*

$$\begin{aligned}\alpha(z_1, z_2) &:= m(z_1 + z_2) - m(z_1)m(z_2), \\ \beta(z) &:= m(z + 1) - m(z), \\ \gamma &:= m(2) - 2m(1) + 1.\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\mathbb{E}[(\Delta S_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}] = S_{k-1}^2 \gamma, \quad (22)$$

$$\text{Cov}(\Delta H_k^i, \Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \int S_{k-1}^{z+1} m(z)^{N-k} \beta(z) \Pi^i(dz), \quad (23)$$

$$\text{Cov}(\Delta H_k^i, \Delta H_k^j | \mathcal{F}_{k-1}) = \int \int S_{k-1}^{z_1+z_2} (m(z_1)m(z_2))^{N-k} \alpha(z_1, z_2) \Pi^i(dz_1) \Pi^j(dz_2). \quad (24)$$

Beweis. Wir zeigen jede Gleichung für sich:

Um (22) zu zeigen, stellen wir zunächst fest, dass $\Delta S_k = S_{k-1}(\exp(\Delta X_k) - 1)$ gilt und ΔX_k unabhängig von \mathcal{F}_{k-1} ist. Damit folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\Delta S_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}] &= S_{k-1}^2 \mathbb{E}[(\exp(\Delta X_k) - 1)^2] \\ &= S_{k-1}^2 \mathbb{E}[\exp(2\Delta X_k) - 2\exp(\Delta X_k) + 1] \\ &= S_{k-1}^2 \gamma.\end{aligned}$$

Für (23) folgt wegen der Integraldarstellung (21) von H^i

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\Delta H_k^i, \Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbb{E}[\Delta H_k^i \Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1}] - \mathbb{E}[\Delta H_k^i | \mathcal{F}_{k-1}] \mathbb{E}[\Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \mathbb{E}[H_k^i S_k | \mathcal{F}_{k-1}] - H_{k-1}^i \Delta S_{k-1}.\end{aligned}$$

Wir ziehen den Erwartungswert in das Integral hinein und fügen die beiden Integrale zusammen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}&= \int \mathbb{E}[S_k^z m(z)^{N-k} S_k | \mathcal{F}_{k-1}] - S_{k-1}^z m(z)^{N-k+1} S_{k-1} \Pi^i(dz) \\ &= \int S_{k-1}^{z+1} m(z)^{N-k} (\mathbb{E}[\exp((z+1)\Delta X_k) | \mathcal{F}_{k-1}] - m(z)) \Pi^i(dz) \\ &= \int S_{k-1}^{z+1} m(z)^{N-k} (m(z+1) - m(z)) \Pi^i(dz).\end{aligned}$$

Für (24) stellen wir fest, dass H^i, H^j Martingale sind und kommen wieder mit der Integraldarstellung auf

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \Delta H_k^i \Delta H_k^j | \mathcal{F}_{k-1} | = \\
& \mathbb{E} \left[\int (S_k^z m(z)^{N-k} - S_{k-1}^z m(z)^{N-k+1}) \Pi^i(dz) \right. \\
& \quad \left. \times \int (S_k^z m(z)^{N-k} - S_{k-1}^z m(z)^{N-k+1}) \Pi^j(dz) | \mathcal{F}_{k-1} \right] \\
& = \mathbb{E} \left[\int \int (S_{k-1}^{z_1+z_2} (m(z_1)m(z_2))^{N-k} \right. \\
& \quad \left. \times (e^{z_1 \Delta X_k} - m(z_1))(e^{z_2 \Delta X_k} - m(z_2)) \Pi^i(dz_1) \Pi^j(dz_2) | \mathcal{F}_{k-1} \right] \\
& = \int \int S_{k-1}^{z_1+z_2} (m(z_1)m(z_2))^{N-k} \alpha(z_1, z_2) \Pi^i(dz_1) \Pi^j(dz_2).
\end{aligned}$$

Damit sind alle Gleichungen gezeigt. \square

Außerdem stellen wir fest, dass

$$\mathbb{E}[S_{k-1}^{z_1+z_2}] = S_0^{z_1+z_2} \mathbb{E} \left[\exp \left((z_1 + z_2) \sum_{i=1}^{k-1} \Delta X_i \right) \right] = S_0^{z_1+z_2} m(z_1 + z_2)^{k-1}. \quad (25)$$

Als nächstes berechnen wir uns die einzelnen Terme, die wir für die Formel (12) aus Satz 2.5 benötigen.

Lemma 4.3. *Für die vorhersehbaren Kovariation zwischen H^i und H^j gilt:*

$$\begin{aligned}
\langle H^i, H^j \rangle_N &= \sum_{k=1}^N \text{Cov}(\Delta H_k^i, \Delta H_k^j | \mathcal{F}_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^N \int \int S_{k-1}^{z_1+z_2} (m(z_1)m(z_2))^{N-k} \alpha(z_1, z_2) \Pi^i(dz_1) \Pi^j(dz_2). \quad (26)
\end{aligned}$$

Für die optimalen Strategien $\vartheta^i, i = 0, \dots, d$ gilt:

$$\vartheta^i = \frac{\text{Cov}(\Delta H_k^i, \Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1})}{\text{Var}(\Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1})} = \frac{\int S_{k-1}^{z+1} m(z)^{N-k} \beta(z) \Pi(dz)}{S_{k-1}^2 \gamma}. \quad (27)$$

Außerdem gilt:

$$\Delta \langle S, S \rangle_N = S_{k-1}^2 \gamma. \quad (28)$$

Beweis. Folgt direkt aus (2), (3) und Satz 4.2, sowie der Konvention, laut der wir für $\text{Var}(\Delta S_k | \mathcal{F}_{k-1}) = 0$ den Quotienten immer null setzen. \square

Es folgt nun insgesamt:

Satz 4.4. Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und

$$g(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{(m(z_1+z_2))^N - m(z_1)m(z_2)^N}{\alpha(z_1, z_2)} \left(\alpha(z_1, z_2) - \frac{\beta(z_1)\beta(z_2)}{\gamma} \right), & m(z_1 + z_2) \neq m(z_1)m(z_2) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die einzelnen Kovarianzen der Residuen L_N^i , $i = 0, \dots, d$ können im Irrfahrts-Modell durch

$$\text{Cov}(L_N^i, L_N^j) = \int \int S_0^{z_1+z_2} g(z_1, z_2) \Pi^i(dz_1) \Pi^j(dz_2) \quad (29)$$

berechnet werden.

Beweis. Wir setzen die Ergebnisse aus Lemma 4.3 (für $m(z_1 + z_2) \neq m(z_1)m(z_2)$) in unsere Formel ein:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\langle H^i, H^j \rangle_N - \sum_{k=1}^N \vartheta_k^i \vartheta_k^j \Delta \langle S, S \rangle_k \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N \left(\int \int S_{k-1}^{z_1+z_2} (m(z_1)m(z_2))^{N-k} \left(\alpha(z_1, z_2) - \frac{\beta(z_1)\beta(z_2)}{\gamma} \right) \Pi^i(dz_1) \Pi^j(dz_2) \right) \right] \end{aligned}$$

Nun ziehen wir den Erwartungswert in den Integranden und mit (25) erhalten wir

$$\begin{aligned} &= \int \int \sum_{k=1}^N S_0^{z_1+z_2} m(z_1 + z_2)^{k-1} (m(z_1)m(z_2))^{N-k} \\ & \quad \times \left(\alpha(z_1, z_2) - \frac{\beta(z_1)\beta(z_2)}{\gamma} \right) \Pi^i(dz_1) \Pi^j(dz_2). \end{aligned}$$

Nur zwei Terme hängen von k ab, die Summe lässt sich also umschreiben in

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N (m(z_1)m(z_2))^{N-(k-1)-1} m(z_1 + z_2)^{k-1} \\ &= (m(z_1)m(z_2))^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{m(z_1 + z_2)^k}{(m(z_1)m(z_2))^k} \\ &= (m(z_1)m(z_2))^{N-1} \frac{m(z_1 + z_2)^N - (m(z_1)m(z_2))^N}{(m(z_1)m(z_2))^N} \frac{m(z_1)(m(z_2))}{m(z_1 + z_2) - m(z_1)(m(z_2))} \\ &= \frac{m(z_1 + z_2)^N - (m(z_1)m(z_2))^N}{\alpha(z_1, z_2)} \end{aligned}$$

und damit folgt der erste Teil der Behauptung.

Für $m(z_1 + z_2) = m(z_1)m(z_2)$ wird die geometrische Summe zu $N(m(z_1)m(z_2))^{N-1}$ und es folgt $\alpha(z_1, z_2) = 0$ sowie $(\beta(z_1)\beta(z_2))/(\gamma) = 0$. Damit erhalten wir insgesamt null für diesen Fall und somit ist die Aussage gezeigt. \square

Wenn ein konkretes Modell mit Parametern gegeben ist, kann die Varianz des Hedgefehlers nun mithilfe von Satz 2.5 und Satz 4.4 berechnet werden.

Für die Berechnung der statischen Hedgingstrategie benötigen wir noch die Kovarianzen zwischen den einzelnen Claims.

Satz 4.5. *Die Kovarianz zwischen zwei Claims H^i und H^j ist gegeben durch*

$$\text{Cov}(H^i, H^j) = \int \int S_0^{y+z} (m(y+z)^N - (m(y)m(z))^N) \Pi^i(dy) \Pi^j(dz) \quad (30)$$

Beweis. Für die Kovarianz gilt $\text{Cov}(H^i, H^j) = \mathbb{E}[H^i H^j] - \mathbb{E}[H^i] \mathbb{E}[H^j]$. Aus (21) kennen wir die Integraldarstellung von $H_0^i = \mathbb{E}[H^i]$, womit

$$\mathbb{E}[H^i] \mathbb{E}[H^j] = \int \int S_0^{y+z} (m(y)m(z))^N \Pi^i(dy) \Pi^j(dz)$$

gilt. Für $\mathbb{E}[H^i H^j]$ gilt wegen (15)

$$\mathbb{E}[H^i H^j] = \int S_N^y \Pi^i(dy) \int S_N^z \Pi^j(dz) = \int \int S_N^{y+z} \Pi^i(dy) \Pi^j(dz).$$

Nun ziehen wir den Erwartungswert ins Integral und erhalten wie im Beweis von Satz 4.1

$$\mathbb{E}[S_N^{y+z}] = S_0^{y+z} m(y+z)^N.$$

Nun setzen wir die beiden Teile zusammen und erhalten so die Aussage. \square

5. Beispiele für verschiedene Verteilungen

Wir werden in diesem Kapitel zwei konkrete Verteilungen für X und somit auch für $S = S_0 \exp(X)$ betrachten und die Entwicklung des optimalen Portfolios sowie der Varianz des Hedgefehlers analysieren. Dazu werden wir einige Resultate aus [KP16, Kapitel 1, Seite 6-10] verwenden.

Zunächst betrachten wir folgende Definition ([KP16, Definition 1, Seite 6]).

Definition 5.1. *Eine reellwertige Zufallsvariable X hat normal mean-variance Mischverteilung, wenn*

$$X \stackrel{d}{=} \mu + \beta Y + \sqrt{Y} Z \quad (31)$$

gilt, wobei $\mu, \beta \in \mathbb{R}$, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und $Y \sim G$ eine reellwertige, von Z unabhängige Zufallsvariable mit stetiger Wahrscheinlichkeitsdichte auf der positiven reellen Halbachse sei.

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß F auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ist eine normal mean-variance Mischung, wenn

$$F(dx) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{N}(\mu + \beta y, y)(dx) G(dy), \quad (32)$$

gilt, wobei die Mischdichte G ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_+)$ sei. Wir verwenden die Notation $F = \mathcal{N}(\mu + \beta y, y) \circ G$.

Bei den Verteilungen, die wir betrachten werden, handelt es sich um einen Spezialfall und einen Grenzfall der fünfparametrischen Familie der verallgemeinerten hyperbolischen Verteilungen, die auf englisch *generalized hyperbolic (GH) distributions* genannt werden. Diese sind als normal mean-variance Mischverteilungen mit verallgemeinerter invers Gauss'scher (engl: *generalized inverse gaussian, (GIG)*) Mischdichte gegeben.

Definition 5.2. *Die Menge der GIG-Verteilungen ist eine dreiparametrische Familie, ihre Dichten sind für $a, b > 0$, $p \in \mathbb{R}$ durch*

$$f(x; p, a, b) = \frac{(a/b)^p}{2K_p(ab)} x^{(p-1)} e^{-(a^2 x + b^2/x)/2}, \quad x > 0, \quad (33)$$

gegeben, wobei K_p eine modifizierte Besselfunktion dritter Art darstellt.

Insgesamt ist die GH-Verteilung definiert als

$$GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) := \mathcal{N}(\mu + \beta y, y) \circ GIG(\lambda, \delta, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}). \quad (34)$$

Für den Spezialfall, dass bei einer GIG-Verteilung $p = -1/2$ gilt, erhält man eine invers Gauss'sche (IG) Verteilung (mit anderen Parametern), das heißt für eine GH-Verteilung mit $\lambda = -1/2$ erhalten wir eine IG-Mischdichte. Diese Unterklasse der GH-Verteilungen wird Familie der normal inverse Gauss'schen (NIG) Verteilungen genannt ([KP16, Seite 9]). Da λ fix vorgegeben ist, hängt sie nur von vier Parametern ab.

Für den Grenzfall $\delta \rightarrow 0$ mit $\lambda > 0$ erhalten wir laut [KP16, Seite 9, (14)] die sogenannten Varianz-Gamma (VG) Verteilungen, die Mischdichte ist durch eine Gammaverteilung gegeben. Auch die VG-Verteilungen hängen also nur von vier Parametern ab.

Genau diese zwei Spezialfälle betrachten wir im restlichen Verlauf des Kapitels.

5.1. Die Normal invers Gauss'sche Verteilung

Die NIG-Verteilung ist, wie wir gesehen haben, eine normal mean-variance Mischverteilung (31), wobei die Mischdichte durch eine IG-Dichte gegeben ist.

Für $\alpha, \delta > 0$; $\mu, \beta \in \mathbb{R}$; $|\beta| < \alpha$ gilt:

$$NIG(\mu, \delta, \alpha, \beta) = \mathcal{N}(\mu + \beta y, y) \circ IG\left(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}, \delta^2\right). \quad (35)$$

Lemma 5.3. Die Dichtefunktion einer NIG-Verteilung ist gegeben durch

$$f(x; \mu, \delta, \alpha, \beta) = \frac{\alpha \delta K_1(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2})}{\pi \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} e^{\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)}, \quad (36)$$

wobei K_1 eine modifizierte Besselfunktion dritter Art bezeichnet.

Zunächst betrachten wir die Eigenschaften der einzelnen Parameter, um uns mit der Verteilung vertraut zu machen.

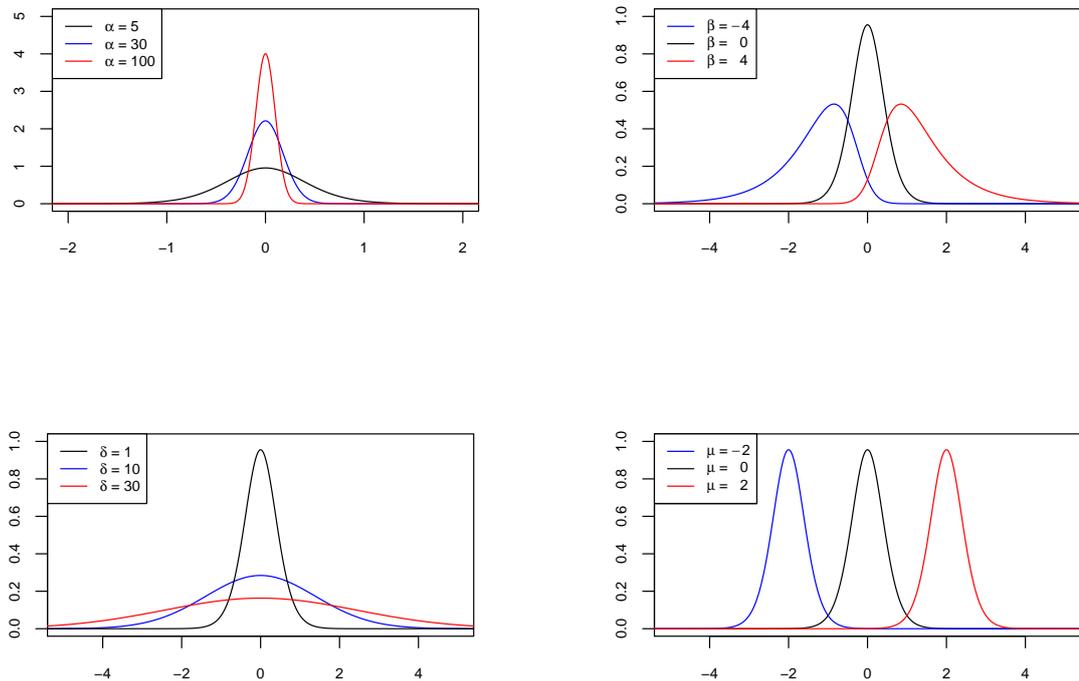


Abbildung 1: Einfluss der jeweiligen Parameter der NIG-Verteilung, wenn nicht anders angegeben gilt: $\alpha = 5$, $\beta = 0$, $\delta = 1$ und $\mu = 0$ (jeweils schwarz).

Man erkennt, dass μ die Lage, α das Gewicht der Enden und β die Asymmetrie festlegen, während δ ein Skalierungsparameter ist.

Als nächstes betrachten wir die für uns sehr wichtige momentenerzeugende Funktion, die in der Berechnung der Varianz des Hedgefehlers eine herausragende Rolle spielt. Dazu untersuchen wir zunächst, in welchem Bereich die sie überhaupt definiert ist.

Lemma 5.4. *Für $X \sim \text{NIG}(\mu, \delta, \alpha, \beta)$ existiert $m(z)$ in*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) \in (-\alpha - \beta, \alpha - \beta)\} =: \mathcal{D}. \quad (37)$$

Beweis. Laut [KP16, Seite 11, (22)] verhält sich die Dichte der NIG-Verteilung folgendermaßen:

$$f(x; \mu, \delta, \alpha, \beta) \sim c|x|^{-1/2}e^{-\alpha|x|+\beta x}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (38)$$

wobei c eine normierende Konstante darstellt. Nun verwenden wir [Doe71, §4. Satz 1], der für die einseitige Laplace-Transformation für positive Integranden mit endlicher Konvergenzabszisse liefert, dass der reelle Punkt der Konvergenzgeraden eine singuläre Stelle des Integranden ist. Wir setzen beide Seiten der Laplace-Transformation zusammen und erhalten so unseren Definitionsbereich der momentenerzeugenden Funktion. \square

Nun betrachten wir die konkrete Form der momentenerzeugenden Funktion, sowie die wichtigsten zentrierten Momente der Verteilung.

Lemma 5.5. *Die momentenerzeugende Funktion $m : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ der NIG-Verteilung ist gegeben durch*

$$m(z) = \exp(\mu z + \delta(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + z)^2})). \quad (39)$$

Für Erwartungswert, Varianz, Schiefe und Wölbung einer NIG-Verteilung gilt

$$\mathbb{E}(X) = \mu + \frac{\delta\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\delta\alpha^2}{(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^3}, \quad (40)$$

$$\text{Skew}(X) = \frac{3\beta}{\alpha\sqrt{\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}}, \quad \text{Kurt}(X) = 3 + \frac{3 + 12\beta^2/\alpha^2}{\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}. \quad (41)$$

5.1.1. Setting

Unser Modell setzt voraus, dass $S_k = S_0 \exp(X_k)$ ein Martingal ist, also dass

$$\mathbb{E}[\exp(X_k)] = 1 \quad (42)$$

gilt. Dies ist äquivalent zu $m(1) = 1$ bzw. $k(1) = 0$, wobei k die kumulantenerzeugende Funktion von X darstellt, welche gegeben ist durch

$$k(z) = \mu z + \delta(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + z)^2}). \quad (43)$$

Bemerkung: Damit der Prozess S ein Martingal ist und die Bedingung $m(2) < \infty$ erfüllt ist, müssen die Parameter richtig gewählt sein. Man sieht wegen

$$k(1) = \mu + \delta(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2})$$

und

$$k(2) = 2\mu + \delta(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 2)^2}),$$

dass $\alpha^2 - (\beta + 1)^2 \geq 0$, $\alpha^2 - (\beta + 2)^2 \geq 0$ und $\alpha^2 - \beta^2 \geq 0$ gelten muss. Man erhält für α und β die Bedingungen

$$-\alpha \leq \beta \leq \alpha - 2, \quad \alpha \geq 1. \quad (44)$$

Die Bedingung für α folgt, damit das Intervall für β nicht leer ist. Unter diesen Voraussetzungen definieren wir uns die Funktion

$$\phi(\beta) := \mu + \delta(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2}). \quad (45)$$

Wir setzen die Grenzen des Definitionsbereiches von β ein und erhalten

$$\phi(-\alpha) = \mu - \delta\sqrt{2\alpha - 1}, \quad \phi(\alpha - 1) = \mu + \delta\sqrt{2\alpha - 1}.$$

Die Funktion ϕ ist monoton wachsend in unserem Intervall, da für die stetige Ableitung $\phi'(\beta)$ sowohl $\lim_{\beta \rightarrow -\alpha} \phi'(\beta) \rightarrow \infty$ als auch $\lim_{\beta \rightarrow \alpha - 1} \phi'(\beta) \rightarrow \infty$ gilt und es mit $\beta = -1/2$ nur eine Nullstelle von $\phi'(\beta)$ gibt, womit $\phi'(\beta) \geq 0$ folgt. Da $k(1) = \phi(\beta)$ gilt und somit $\phi(\beta) = 0$ gelten soll, muss

$$\mu - \delta\sqrt{2\alpha - 1} \leq 0 \leq \mu + \delta\sqrt{2\alpha - 1}$$

erfüllt sein, damit das Intervall $[\phi(-\alpha), \phi(\alpha - 1)]$ nicht leer ist und die Null enthält. Für μ gilt also die Bedingung

$$|\mu| \leq \delta\sqrt{2\alpha - 1}. \quad (46)$$

Nun leiten wir konkret her, wie β in Abhängigkeit der anderen Parametern aussehen muss.

Satz 5.6. *Der Prozess $S_k = S_0 \exp(X_k)$, $k = 1, \dots, N$ mit $X_k \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ ist genau dann ein Martingal, wenn die Bedingungen (44) und (46) erfüllt sind und*

$$\beta = -\frac{1}{2} - \operatorname{sgn}(\mu) \sqrt{\frac{\alpha^2 \mu^2}{\mu^2 + \delta^2} - \frac{\mu^2}{4\delta^2}} \quad (47)$$

gilt.

Beweis. Es gilt

$$\phi(\beta) = \mu + \delta(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2}) \stackrel{!}{=} 0. \quad (48)$$

Diese Gleichung kann mithilfe von mehreren Umformungsschritten inklusive Quadrieren auf die Form

$$\beta^2 + \beta + \frac{\mu^2}{4\delta^2} - \frac{\alpha^2 \mu^2}{\mu^2 + \delta^2} + \frac{1}{4} = 0 \quad (49)$$

gebracht werden. Sie wird von

$$\beta_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 \mu^2}{\mu^2 + \delta^2} - \frac{\mu^2}{4\delta^2}} \quad (50)$$

gelöst. Da wir aber quadriert haben, wurde eine Lösung dieser Gleichung gefunden, die die ursprüngliche Gleichung (48) nicht löst. Welche der beiden Lösungen die richtige ist, kann durch Einsetzen in (48) herausgefunden werden. Es zeigt sich, dass die richtige Lösung vom Vorzeichen von μ abhängig ist. \square

Bemerkung: Das Ergebnis für die Wahl von β kann so interpretiert werden, dass für nicht zu große μ die Lage durch den Asymmetrieparameter β ausgeglichen werden kann. Als nächstes führen wir nun ein konkretes Zahlenbeispiel mit unseren Ergebnissen durch.

5.1.2. Beispiel

Wir wählen die Parameter α , δ und μ wie in [HKK06, Kapitel 5.4] und berechnen uns mit (47) daraus β . Unsere Parameter lauten dann

$$\alpha = 75.49, \quad \delta = 3.024, \quad \mu = -0.04, \quad \beta = 0.4984357. \quad (51)$$

Die Dichte unserer Verteilung ist in Abbildung 2 dargestellt.

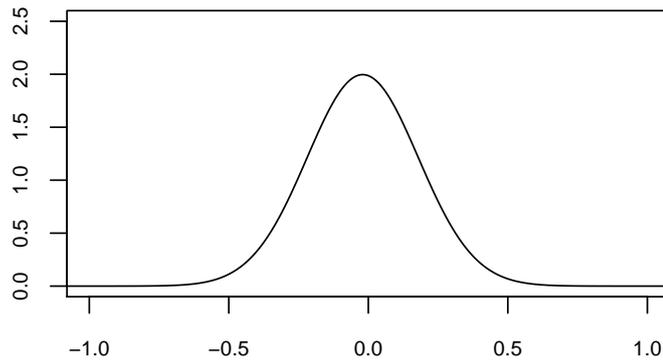


Abbildung 2: NIG-Dichte mit unseren Modellparametern

Gegeben sei ein zu hedgender europäischer Call $H^0 = (S_N - K)^+$. Dazu seien auf dem Markt zwei zusätzliche Call-Optionen $H^1 = (S_N - K_1)^+$ und $H^2 = (S_N - K_2)^+$ verfügbar, mit $K_1 < K < K_2$. Die Laufzeit soll für alle Claims gleich sein und wird mit T bezeichnet, während der momentane Kurs des Underlyings durch S_0 und die Anzahl der Handelsmöglichkeiten durch N gegeben sei. Für die momentenerzeugende Funktion von X ergibt sich

$$m(z) = \exp\left(\left(\mu z + \delta(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + z)^2})\right)\frac{T}{N}\right). \quad (52)$$

Ziel ist es nun, Satz 2.5 anzuwenden und so das optimale Startkapital c , die optimale Strategie für das innere Problem ϑ^ν und das äußere Problem ν , sowie die Standardabweichung ε

des Hedgefehles zu berechnen. Dabei werden wir auch besprechen, wie wir bei der jeweiligen Implementierung in R vorgegangen sind. Die Codes dazu befinden sich im Anhang.

Wir setzen den Zeithorizont drei Monate, den aktuellen Kurs des Underlyings auf 100, sowie den Strike des zu hedgenden Calls auf 99, also:

$$T = 0.25, \quad S_0 = 100, \quad K_0 = 99.$$

Die Strikes der zusätzlichen Optionen seien gegeben durch

$$K_1 = 95, \quad K_2 = 105.$$

Um die folgenden Berechnungen durchführen zu können, erinnern wir uns zunächst an das Maß (19) aus Satz 3.4 für europäische Call-Optionen. Für $i = 0, 1, 2$ unterscheiden sich die Maße Π^i nun nur im Strike K_i sowie der Konstanten c_i . Da unsere Integranden auf der Halbebene $\operatorname{Re}(z) > 1$ holomorph sind, wählen wir für die Berechnung in R ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c_0 = 1.5$, $c_1 = 1.2$ und $c_2 = 1.5$.

Das optimale Startkapital ist nun laut (10) gegeben durch $c = \mathbb{E}[H^0]$. Laut (21) können wir es durch $\int_{1.5-i\infty}^{1.5+i\infty} S_0^z m(z)^N \Pi^0(dz)$ berechnen. Wir setzen das Maß ein und erhalten

$$\int_{1.5-i\infty}^{1.5+i\infty} S_0^z m(z)^N \frac{K_0^{1-z}}{2\pi iz(z-1)} dz.$$

Da es sich bei $H = (S_N - K)^+$ um eine reelle Zufallsvariable handelt, muss es sich bei diesem Integral um einen reellen Wert handeln, der Imaginärteil verschwindet also. Wir wollen die Funktion `integrate` verwenden und schreiben das Integral deshalb zunächst folgendermaßen:

$$\int_{1.5-i\infty}^{1.5+i\infty} \operatorname{Re} \left(S_0^z m(z)^N \frac{K_0^{1-z}}{2\pi iz(z-1)} \right) dz.$$

Durch Substitution mit $v = (z - 1.5)/i$ erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left(S_0^{1.5+iv} m(1.5+iv)^N \frac{K_0^{-0.5-iv}}{2\pi(1.5+iv)(0.5+iv)} \right) dv.$$

Die Berechnung mithilfe von R liefert für das optimale Startkapital

$$c = 4.482417. \tag{53}$$

Das Startkapital ist aufgrund der Struktur von $m(z)$ unabhängig von der Anzahl der Handelszeitpunkte N . Als nächstes berechnen wir die einzelnen ϑ^i für $k = 1$. Dazu verwenden wir (27) aus Satz 4.3, also

$$\vartheta_1^i = \int_{c_i-i\infty}^{c_i+i\infty} S_0^{z-1} m(z)^{N-1} \frac{\beta(z)}{\gamma} \frac{K_i^{1-z}}{2\pi iz(z-1)} dz,$$

führen wieder die Substitution durch und erhalten somit Tabelle 1.

Anzahl Handelstage	einmalig	monatlich	wöchentlich	täglich
Strategie	$N = 1$	$N = 3$	$N = 13$	$N = 63$
ϑ_1^0	0.5803118	0.5673698	0.5623707	0.5611790
ϑ_1^1	0.7302714	0.7193041	0.7150157	0.7139891
ϑ_1^2	0.3508166	0.3385657	0.3339159	0.3328141

Tabelle 1: Entwicklung der ϑ_1^i der GKW-Zerlegungen in Abhängigkeit von N im NIG-Modell

Bemerkung zu Tabelle 1: Wir sehen, dass ϑ_1^i bei allen Claims H^i für eine wachsende Anzahl von Handelsmöglichkeiten N kleiner wird.

Um jetzt konkret ν und ϑ^ν berechnen zu können, müssen wir zunächst die Matrizen A, B und C aus (9) berechnen. Dazu verwenden wir die Formel (29) aus Satz 4.4. Für die Kovarianzen der Residuen L^i von den GKW-Zerlegungen der Call-Optionen H^i ergibt sich das Doppelintegral

$$\text{Cov}(L_N^i, L_N^j) = \int_{c_i - i\infty}^{c_i + i\infty} \int_{c_j - i\infty}^{c_j + i\infty} \text{Re} \left(S_0^{y+z} g(y, z) \frac{K_i^{1-y}}{2\pi y(y-1)} \frac{K_j^{1-z}}{2\pi z(z-1)} \right) dy dz.$$

Erneut substituieren wir mit $u = (y - c_i)/i$, $v = (z - c_j)/i$ und erhalten

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} \left(S_0^{c_i + c_j + i(u+v)} g(c_i + iu, c_j + iv) \times \frac{K_i^{1-c_i - iu}}{2\pi(c_i + iu)(c_i - 1 + iu)} \frac{K_j^{1-c_j - iv}}{2\pi(c_j + iv)(c_j - 1 + iv)} \right) dudv.$$

Wir berechnen das Ganze in \mathbb{R} nun mithilfe von Polarkoordinaten, also $u = r \cos(w)$, $v = r \sin(w)$, die Funktionaldeterminante ist dann gleich r . Das Integral für r läuft von 0 bis ∞ , während jenes für w von 0 bis 2π läuft.

Nachdem die Parameter in \mathbb{R} festgelegt wurden und das Integral implementiert wurde, kann ν nun für verschiedene Anzahlen von Handelszeitpunkten N mithilfe von Satz 2.5 berechnet werden. Laut (10) gilt $\nu = C^{-1}B$. Auch $\vartheta_1^\nu = \vartheta_1^0 - \nu^\top \vartheta_1$ kann damit und mit Tabelle 1 berechnet werden, es ergibt sich Tabelle 2.

Anzahl Handelstage	einmalig	monatlich	wöchentlich	täglich
Position in	$N = 1$	$N = 3$	$N = 13$	$N = 63$
H^1 (ν^1)	0.70651584	0.70877944	0.68735504	0.67006669
H^2 (ν^2)	0.43707945	0.43433268	0.41499502	0.40841074
Underlying S (ϑ_1^ν)	-0.08897124	-0.08950833	-0.06767237	-0.05316616

Tabelle 2: Entwicklung der statischen Position der jeweiligen Claims, sowie jener im Underlying zum Startzeitpunkt, unter Einfluss von N im NIG-Modell

Erklärung zu Tabelle 2: Dargestellt wird die Entwicklung der statischen Positionen des semistatischen Hedgings bei Veränderung der Anzahl der Handelszeitpunkte. Man sieht,

dass der Anteil in H^1 höher ist als jener in H^2 , was daran liegt, dass K_1 näher an K_0 liegt als K_2 . Außerdem sieht man auch, wie die Position im dynamischen Teil zum Startzeitpunkt aussieht. Je nach Entwicklung von S wird diese dann anhand von (27) angepasst. Die Entwicklung der Position in H^1 in Abhängigkeit von N wird in Abbildung 3 dargestellt.

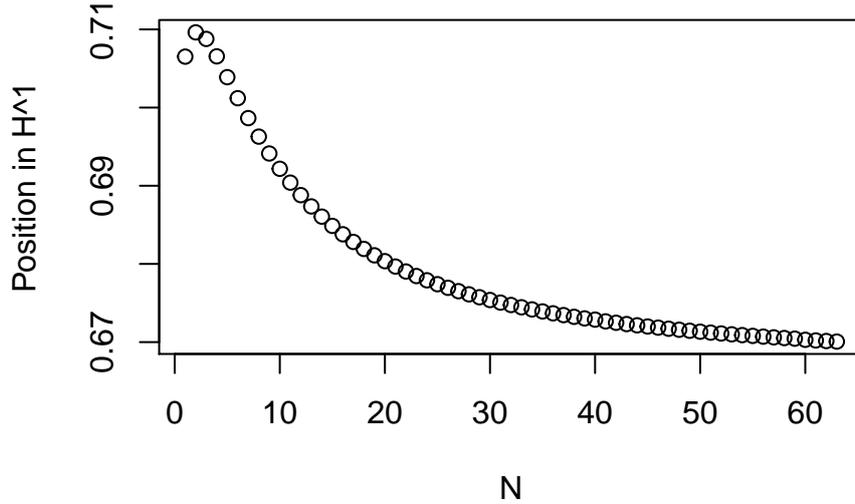


Abbildung 3: Position in H^1 in Abhängigkeit von N

Um die statische Strategie zu finden, verwenden wir Satz 13, wobei wir die Werte für \hat{A} , \hat{B} und \hat{C} mithilfe von Satz 4.5 berechnen können. Wir erhalten

$$\nu^1 = 0.5688754, \quad \nu^2 = 0.4941404. \quad (54)$$

Unser eigentliches Ziel war es, die Varianz des Hedgefehles mithilfe der Formel (11) aus Satz 2.5 zu minimieren. A , B und C können wir nun wieder für verschiedene N berechnen, die wichtigsten Resultate werden in Tabelle 3 dargestellt. Für $N = 1, \dots, 63$ ergibt sich Abbildung 4.

Anzahl Handelstage	einmalig	monatlich	wöchentlich	täglich
Art des Hedgings	$N = 1$	$N = 3$	$N = 13$	$N = 63$
nur statisch	0.694361	0.694361	0.694361	0.694361
nur dynamisch	2.9864755	1.8741933	1.0471216	0.6786078
semistatisch mit K_1, K_2	0.6374573	0.6065625	0.4708068	0.3360832
semistatisch mit K_1	1.0578755	0.8717635	0.5917874	0.4086458
semistatisch mit K_2	1.3909590	1.1181144	0.7227090	0.4869193

Tabelle 3: Entwicklung von ε unter Einfluss von N im NIG-Modell

Bemerkung zu Tabelle 3: Rein statisches Hedging liefert in unserem Beispiel bereits eine ziemlich gute Annäherung. Allerdings ist semistatisches Hedging, wenn beide zusätzlichen Claims verwendet werden, selbst bei nur einem Handelszeitpunkt $N = 1$ schon besser, da im Gegensatz zu rein statischem Hedging auch eine Position im Underlying gehalten wird. Je mehr Handelszeitpunkte es gibt, umso schlechter wird das statische Ergebnis verglichen mit den anderen Ergebnissen. Dabei sollte allerdings zur Kenntnis genommen werden, dass mehr Handelszeitpunkte auch einen wesentlich höheren Aufwand bedeuten.

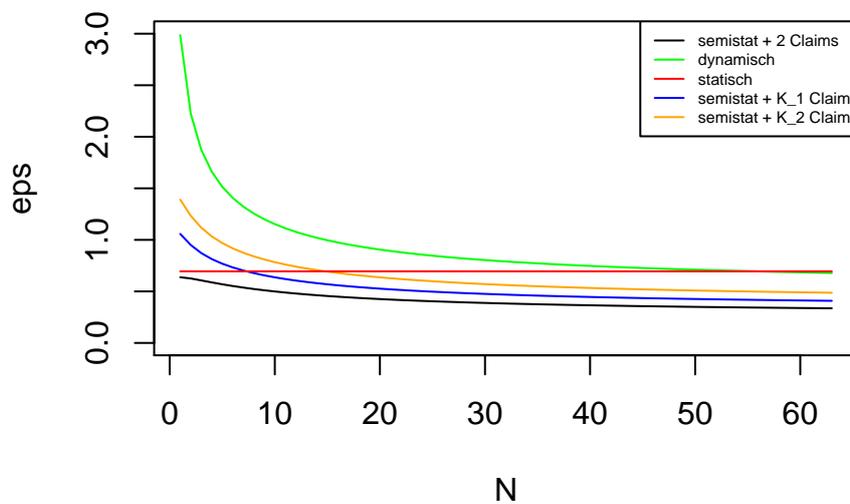


Abbildung 4: Entwicklung von ε in Abhängigkeit von N im NIG-Modell

Erklärung zu Abbildung 4: Konkret zu sehen ist, dass in diesem Beispiel rein dynamisches Hedging nur bei einer hohen Anzahl von Handelszeitpunkten so gut funktioniert wie rein statisches Hedging. Die beste Option ist semistatisches Hedging mit beiden zusätzlichen Claims, während semistatisches Hedging mit nur einem der beiden Claims schon mit einigen wenigen Handelszeitpunkten zu besseren Ergebnissen führt als rein statisches.

Erweiterung: Wir seien wieder im selben Setting wie vorher, mit dem Unterschied, dass wir nun vier zusätzliche Call-Optionen H^1, H^2, H^3, H^4 zur Verfügung haben, mit Strikes

$$K_1 = 90, \quad K_2 = 95, \quad K_3 = 105, \quad K_4 = 110. \quad (55)$$

Für die Standardabweichung des Hedgefehlers ergibt sich nun Abbildung 5.

Bemerkung zu Abbildung 5 : Man sieht, dass statisches Hedging nun besser ist als dynamisches, selbst für tägliches Handeln. Außerdem ist der Unterschied zwischen semistatischem Hedging mit den zwei näheren Claims fast genauso gut wie jenes mit vier zusätzlichen

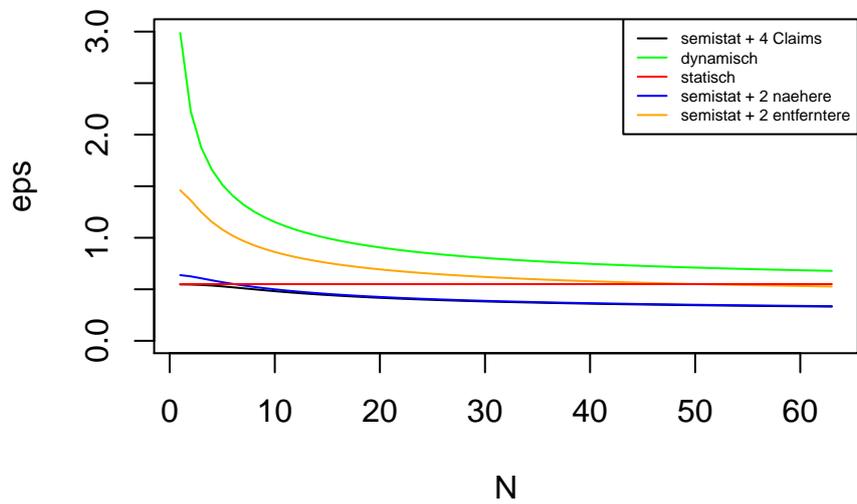


Abbildung 5: Entwicklung von ϵ in Abhängigkeit von N im NIG-Modell für vier zusätzliche Claims

Claims, während jenes mit den vom Underlying entfernten Claims sich langsam dem statischen Hedging annähert. Es kommt also vor allem auf die Wahl der zusätzlichen Claims an und nicht zwangsläufig darauf, wie viele man davon verwendet.

5.2. Die Varianz-Gamma Verteilung

Die VG-Verteilung ist als Grenzfall der GH-Verteilung gegeben. Da wir mit derselben Parametrisierung wie [HKK06, Seite 879, 5.3.3] arbeiten wollen, wählen wir folgende Darstellung. Für $\mu, \beta \in \mathbb{R}$; $\delta, \alpha > 0$ und $|\beta| < \alpha$ gelte

$$VG(\mu, \delta, \alpha, \beta) = \mathcal{N}(\mu + \beta y, y) \circ \Gamma(\delta, \alpha). \quad (56)$$

Lemma 5.7. *Die Dichtefunktion der VG-Verteilung ist gegeben durch*

$$f(x; \mu, \delta, \alpha, \beta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^\delta}{\sqrt{\pi}(2\alpha)^{\delta - \frac{1}{2}}\Gamma(\delta)} |x - \mu|^{\delta - \frac{1}{2}} K_{\delta - \frac{1}{2}}(\alpha|x - \mu|) e^{\beta(x - \mu)}, \quad (57)$$

wobei K wieder eine modifizierte Besselfunktion dritter Art darstelle.

Die Auswirkungen der Parameter auf die Verteilung sind analog zur NIG-Verteilung, auch die momentenerzeugende Funktion existiert nur auf einem eingeschränkten Bereich.

Lemma 5.8. *Für $X \sim VG(\mu, \delta, \alpha, \beta)$ existiert $m(z)$ auf der Menge*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \in (-\sqrt{2\alpha + \beta^2} - \beta, \sqrt{2\alpha + \beta^2} - \beta)\} =: \mathcal{D}. \quad (58)$$

Beweis. Laut [KP16, Seite 11, (23)] verhält sich die Dichte der VG-Verteilung in den Grenzfällen folgendermaßen

$$f(x; \mu, \delta, \tilde{\alpha}, \beta) \sim \tilde{c}|x|^{\delta-1} e^{-\tilde{\alpha}|x| + \beta x}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (59)$$

wobei \tilde{c} wieder eine normierende Konstante ist. Allerdings wurde der Parameter $\tilde{\alpha}$ anders gewählt als unser α . Die Umrechnung erfolgt durch $\alpha = \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}^2 - \beta^2)$, woraus sich $\tilde{\alpha} = \sqrt{2\alpha + \beta^2}$ ergibt. Nun gehen wir analog wie im Beweis von Lemma 5.4 vor und erhalten die Aussage. \square

Als nächstes betrachten wir die konkrete Form der momentenerzeugenden Funktion, sowie die wichtigsten zentrierten Momente der Verteilung.

Lemma 5.9. *Die momentenerzeugende Funktion $m : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ der VG-Verteilung ist gegeben durch*

$$m(z) = e^{\mu z} \left(\frac{\alpha}{\alpha - \beta z - \frac{z^2}{2}} \right)^\delta. \quad (60)$$

Für Erwartungswert und Varianz gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \mu + \frac{\beta\delta}{\alpha}, \quad \operatorname{Var}(X) = \frac{\delta}{\alpha} \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha} \right). \quad (61)$$

Beweis. Weil X auf Y bedingt normalverteilt ist, gilt für die momentenerzeugende Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(zX)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\exp(z(\mu + \beta Y + \sqrt{Y}Z)) | Y]] \\ &= e^{\mu z} \mathbb{E}[\exp(Y(\beta z + z^2/2))] \\ &= e^{\mu z} m_Y(\beta z + z^2/2). \end{aligned}$$

Da $Y \sim \Gamma(\delta, \alpha)$ gilt, folgt das erste Resultat. Für die Aussagen über den Erwartungswert und die Varianz berechnen wir uns die ersten beiden Momente, indem wir die momentenerzeugende Funktion nach z ableiten und $z = 0$ setzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mu + \frac{\beta\delta}{\alpha}, \\ \mathbb{E}[X^2] &= \mu^2 + \frac{2\mu\delta\beta + \delta}{\alpha} + \frac{\delta(\delta + 1)\beta^2}{\alpha^2}\end{aligned}$$

und damit auch das Ergebnis für die Varianz. \square

5.2.1. Setting

Aus [MCC98, Tabelle II] erhalten wir Schätzwerte für die Parameter σ, ν und θ unter dem statistischen Maß P . Die wöchentlichen Schätzwerte lauten $\sigma = 0.1213$, $\nu = 0.1686$ und $\theta = -0.1436$. Um daraus die Parameter für die tägliche Verteilung zu bekommen, wobei wir von fünf Handelstagen pro Woche ausgehen, müssen folgende Transformationen durchgeführt werden: $\sigma \mapsto \sigma/\sqrt{5}$, $\nu \mapsto 5\nu$ und $\theta \mapsto \theta/5$.

Es handelt sich hier wieder um eine andere Parametrisierung der Verteilung, die Umrechnung der Parameter erfolgt mittels

$$\delta = \frac{1}{\nu}, \quad \alpha = \frac{1}{\nu\sigma^2}, \quad \beta = \frac{\theta}{\sigma^2}. \quad (62)$$

Es gilt also $\delta = 1.1862$, $\alpha = 403.1075$ und $\beta = -9.7596$, zusätzlich wählen wir den Lageparameter $\mu = 0$.

Da wir uns in einem unvollständigen Markt befinden, gibt es unendlich viele risikoneutrale Maße. Wählen wir das Esscher-Maß ergibt sich folgendes Lemma.

Lemma 5.10. *Für die Parameter unter dem Esscher-Maß Q gilt*

$$\mu^Q = \mu, \quad \delta^Q = \delta, \quad \alpha^Q = \alpha - \beta\Theta - \Theta^2/2, \quad \beta^Q = \beta + \Theta, \quad (63)$$

wobei Θ der Esscher-Parameter ist.

Beweis. Zunächst betrachten wir die kumulantenerzeugende Funktion $k(z)$, die gegeben ist durch

$$k(z) = \mu z + \delta(\log(\alpha) - \log(\alpha - \beta z - z^2/2)). \quad (64)$$

Für den Dichteprozess des Maßwechsels gilt

$$\left. \frac{dQ}{dP} \right|_{\mathcal{F}_N} = e^{\Theta X_N - k(\Theta)N}. \quad (65)$$

Es gilt nun

$$\mathbb{E}_Q[e^{zX_N}] = \mathbb{E}_P[e^{zX_N} e^{\Theta X_N - k(\Theta)N}] = e^{(k(\Theta+z) - k(\Theta))N}$$

und damit ist die kumulantenerzeugende Funktion unter dem Maß Q gegeben durch

$$k_Q(z) = k(\Theta + z) - k(\Theta).$$

Dies ist weiters gleich

$$\begin{aligned} & \mu(z + \Theta) + \delta(\log(\alpha) - \log(\alpha - \beta(z + \Theta) - (z + \Theta)^2/2)) \\ & - \mu\Theta - \delta(\log(\alpha) + \log(\alpha - \beta\Theta - \Theta^2/2)) \\ & = \mu z + \delta \log\left(\frac{\alpha - \beta\Theta - \Theta^2/2}{\alpha - \beta\Theta - \Theta^2/2 - (\beta + \Theta)z - z^2/2}\right). \end{aligned}$$

Daher folgt die Aussage. \square

Da Q risikoneutral ist, muss $k_Q(1) = 0$ gelten. Da wir $\mu = 0$ gewählt haben, ist diese Bedingung äquivalent zu $\beta^Q = -1/2$. Damit kann nun Θ und folglich auch α^Q berechnet werden.

Insgesamt ergibt sich für unsere Parameter

$$\mu^Q = 0, \quad \delta^Q = 1.18624, \quad \alpha^Q = 364.867, \quad \beta^Q = -0.5. \quad (66)$$

Die Dichte unserer Verteilung auf Basis täglicher Parameter wird in Abbildung 6 dargestellt.

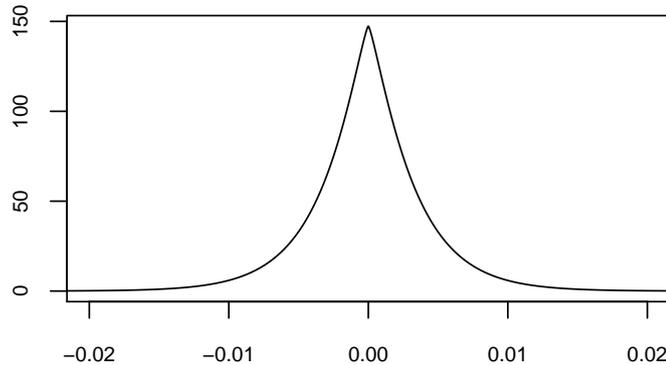


Abbildung 6: VG-Dichte mit unseren Modellparametern

5.2.2. Beispiel

Wie beim vorigen Beispiel für das NIG-Modell gehen wir wieder von einer zu hedgenden europäischen Call-Option $H^0 = (S_N - K)^+$, sowie von zwei auf dem Markt verfügbaren Call-Optionen $H^1 = (S_N - K_1)^+$ und $H^2 = (S_N - K_2)^+$ mit $K_1 < K < K_2$ aus. Auch Laufzeit und Kurs des Underlyings, sowie Höhe der Strikes nehmen wir wieder gleich an.

Da die Verteilung allerdings auf Basis der täglichen Parameter gegeben ist, müssen wir auch die Laufzeit auf täglicher Basis darstellen. Wir setzen also

$$T = 63, \quad S_0 = 100, \quad K_0 = 99, \quad K_1 = 95, \quad K_2 = 105. \quad (67)$$

Die momentenerzeugende Funktion sieht jetzt folgendermaßen aus

$$m(z) = \left(e^{\mu z} \left(\frac{\alpha}{\alpha - \beta z - \frac{z^2}{2}} \right)^\delta \right)^{\frac{T}{N}}. \quad (68)$$

Für die Maße Π^i wählen wir für die Berechnung in R wieder die Konstanten $c_0 = 1.5$, $c_1 = 1.2$ und $c_2 = 1.5$.

Auch die Vorgehensweise zur Berechnung der gesuchten Werte ist analog zu Beispiel 1 für das NIG-Modell, weshalb sie hier nicht mehr angeführt, sondern nur die Ergebnisse dargelegt werden.

Für das optimale Startkapital ergibt sich

$$c = 18.28623. \quad (69)$$

Für die Strategien aus den GWK-Zerlegungen erhalten wir Tabelle 4.

Anzahl Handelstage	einmalig	monatlich	wöchentlich	täglich
Strategie	$N = 1$	$N = 3$	$N = 13$	$N = 63$
ϑ_1^0	0.6847158	0.6285714	0.6063869	0.6010838
ϑ_1^1	0.7160354	0.6623719	0.6409087	0.6357561
ϑ_1^2	0.6376912	0.5786490	0.5557228	0.5502754

Tabelle 4: Entwicklung der ϑ_1^i der GWK-Zerlegungen in Abhängigkeit von N im VG-Modell

Für die Positionen im statischen Teil des Portfolios ν , sowie für die Startposition im Underlying ϑ^ν ergibt sich in Abhängigkeit von N Tabelle 5.

Anzahl Handelstage	einmalig	monatlich	wöchentlich	täglich
Position in	$N = 1$	$N = 3$	$N = 13$	$N = 63$
$H^1 (\nu^1)$	0.617010422	0.618083132	0.62315851	0.62757581
$H^2 (\nu^2)$	0.393216357	0.395647683	0.39587966	0.39383774
Underlying $S (\vartheta_0^\nu)$	-0.007836075	-0.009770643	-0.01300011	-0.01462063

Tabelle 5: Entwicklung der statischen Position der jeweiligen Claims, sowie jener im Underlying zum Startzeitpunkt, unter Einfluss von N im VG-Modell

Erklärung zu Tabelle 5: Auch hier ist die Position in H^1 wieder deutlich höher als jene in H^2 , allerdings fällt auf, dass für wachsendes N die Position in H^1 wächst, während jene in H^2 zunächst wächst und dann wieder fällt.

Für rein statisches Hedging erhalten wir die Strategie

$$\nu^1 = 0.5872094, \quad \nu^2 = 0.4153452. \quad (70)$$

Die Entwicklung der Standardabweichung des Hedgefehlers wird in Tabelle 6 wiedergegeben, Abbildung 7 gibt einen schönen Überblick über den Einfluss von N , aufgrund der großen Zahlenunterschiede aber ohne den Graphen des dynamischen Hedgings.

Anzahl Handelstage	einmalig	monatlich	wöchentlich	täglich
Art des Hedgings	$N = 1$	$N = 3$	$N = 13$	$N = 63$
nur statisch	0.3895236	0.3895236	0.3895236	0.3895236
nur dynamisch	13.242243	8.322921	4.562067	2.830194
semistatisch mit K_1, K_2	0.3747861	0.3705401	0.3538437	0.3202442
semistatisch mit K_1	1.1754583	1.0222314	0.7706398	0.5800519
semistatisch mit K_2	1.6439462	1.4305776	1.0652148	0.7872567

Tabelle 6: Entwicklung von ε unter Einfluss von N im VG-Modell

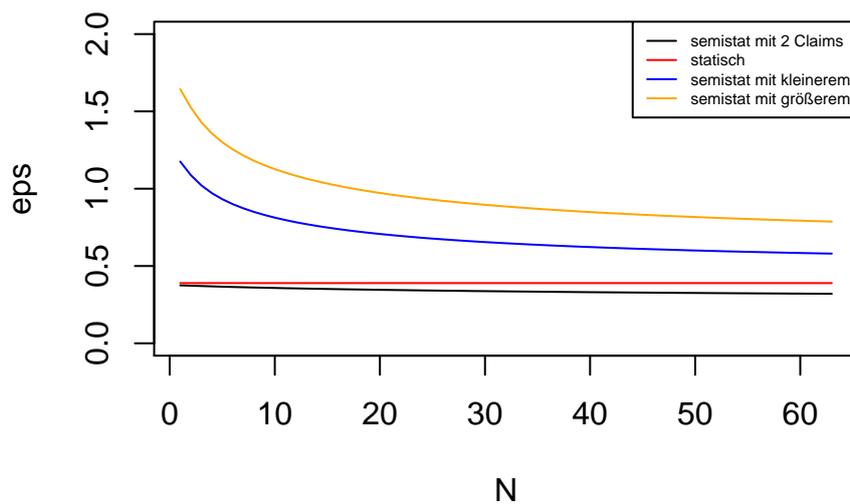


Abbildung 7: Entwicklung von ε in Abhängigkeit von N im VG-Modell

6. Varianzoptimales Hedging für Nicht-Martingale

Wir befinden uns nun wieder im Irrfahrtsmodell, einziger Unterschied sei, dass die Bedingung

$$\mathbb{E}[e^{X_1}] = 1$$

nicht erfüllt sein muss, also dass es sich bei S nicht zwangsläufig um ein Martingal handelt. In [HKK06, Kapitel 2.] wird das varianzoptimale Hedgingproblem für einen diskontierten europäischen Claim mit Darstellung $H = f(S_N)$, wobei f die Integraldarstellung (15) erfüllt, gelöst. Die wichtigsten Resultate, die wir verwenden werden, sind die folgenden beiden Sätze.

Satz 6.1. *Das optimale Startkapital c und die optimale Strategie ϕ sind gegeben durch*

$$c = H_0 \tag{71}$$

und den rekursiven Ausdruck

$$\phi_n = \vartheta_n + \frac{\lambda}{S_{n-1}} (H_{n-1} - H_0 - \sum_{k=1}^{n-1} \phi_k \Delta S_k), \tag{72}$$

wobei die Prozesse H_n und ϑ_n sowie die Konstante λ definiert sind durch

$$\begin{aligned} g(z) &:= \frac{m(z+1) - m(1)m(z)}{m(2) - m(1)^2}, \\ h(z) &:= m(z) - (m(1) - 1)g(z), \\ \lambda &:= \frac{m(1) - 1}{m(2) - 2m(1) + 1}, \\ H_n &:= \int S_n^z h(z)^{N-n} \Pi(dz), \\ \vartheta_n &:= \int S_{n-1}^{z-1} g(z) h(z)^{N-n} \Pi(dz). \end{aligned}$$

Durch m wird wieder die momentenerzeugende Funktion bezeichnet. Zudem sind c und ϕ bis auf eine Nullmenge eindeutig.

Bemerkung: Für den Fall, dass es sich bei S um ein Martingal handelt, bleibt bei der Formel für die optimale Strategie ϕ nur ϑ übrig, das sich in diesem Fall dann auch genau nach (27) aus Lemma 4.3 berechnen lässt.

Satz 6.2. *Die Varianz des Hedgefehlers ergibt sich durch das Doppelintegral*

$$\varepsilon^2 = \int \int e(y, z) \Pi(dy) \Pi(dz), \tag{73}$$

wobei

$$\begin{aligned}
a(y, z) &:= h(y)h(z) \frac{m(2) - m(1)^2}{m(2) - 2m(1) + 1}, \\
b(y, z) &:= m(y+z) \\
&\quad - (m(2)m(y)m(z) - m(1)m(y+1)m(z) \\
&\quad - m(1)m(y)m(z+1) + m(y+1)m(z+1))(m(2) - m(1)^2)^{-1}, \\
e(y, z) &:= \begin{cases} S_0^{y+z} b(y, z) \frac{a(y, z)^N - m(y+z)^N}{a(y, z) - m(y+z)}, & \text{falls } a(y, z) \neq m(y+z), \\ S_0^{y+z} b(y, z) N m(y+z)^{N-1}, & \text{falls } a(y, z) = m(y+z). \end{cases}
\end{aligned}$$

Diese Ergebnisse verallgemeinern wir nun auf das semistatische varianzoptimale Hedgingproblem. Gegeben sei ein zu hedgender Claim H^0 sowie zusätzliche auf dem Markt verfügbare Claims $\widehat{H} = (H^1, \dots, H^d)^\top$, wobei alle Claims über (15) darstellbar seien und für die somit Satz 6.1 und Satz 6.2 gelten. Mit Π^i bezeichnen wir jeweils das Maß für den Claim H^i und setzen $\widehat{\Pi} = (\Pi^1, \dots, \Pi^d)^\top$.

Satz 6.3. *Es seien für e aus Satz 6.2*

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} &:= \int \int e(y, z) \Pi^0(dy) \Pi^0(dz), \\
\widetilde{B} &:= \left(\int \int e(y, z) \Pi^0(dy) \Pi^1(dz), \dots, \int \int e(y, z) \Pi^0(dy) \Pi^d(dz) \right)^\top, \\
\widetilde{C} &:= \begin{pmatrix} \int \int e(y, z) \Pi^1(dy) \Pi^1(dz) & \cdots & \int \int e(y, z) \Pi^1(dy) \Pi^d(dz) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int \int e(y, z) \Pi^d(dy) \Pi^1(dz) & \cdots & \int \int e(y, z) \Pi^d(dy) \Pi^d(dz) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Unter der Bedingung, dass \widetilde{C} invertierbar ist, ist die eindeutige Lösung des semistatischen Hedgingproblems gegeben durch

$$c = \mathbb{E}[H^0], \quad \nu = \widetilde{C}^{-1} \widetilde{B}, \quad \phi^\nu = \phi^0 - \nu^\top \widehat{\phi}, \quad (74)$$

wobei $\widehat{\phi} = (\phi^1, \dots, \phi^d)^\top$ sei. Die minimale Varianz des Hedgingfehlers ist gegeben durch

$$\varepsilon^2 = \widetilde{A} - \widetilde{B}^\top \widetilde{C}^{-1} \widetilde{B}. \quad (75)$$

Beweis. Wir rufen uns die Unterteilung aus (8) in inneres und äußeres Problem nochmal in Erinnerung. Das innere Problem ist äquivalent zum varianzoptimalen Hedgingproblem für den Claim $\widetilde{H} = H^0 - \nu^\top H$. Es gilt

$$\widetilde{H} = f(S_N) = \int S_N^z \widetilde{\Pi}(dz), \quad (76)$$

wobei $\widetilde{\Pi} = \Pi^0 - \nu^\top \widehat{\Pi}$ sei. Dadurch hat \widetilde{H} ebenfalls die Integraldarstellung (15), womit Satz 6.1 und Satz 6.2 für diesen Claim anwendbar sind. Die optimale Strategie kann also durch

$$\widetilde{\phi}_n = \widetilde{\vartheta}_n + \frac{\lambda}{S_{n-1}} (\widetilde{H}_{n-1} - \widetilde{H}_0 - \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{\phi}_k \Delta S_k)$$

berechnet werden. Aus der Definition von ϑ und H_n aus Satz 6.1 sieht man sofort, dass

$$\begin{aligned}\tilde{H}_n &= H_n^0 - \nu^\top \hat{H}_n, \\ \tilde{\vartheta}_n &= \vartheta^0 - \nu^\top \hat{\vartheta},\end{aligned}$$

mit $\hat{\vartheta} = (\vartheta^1, \dots, \vartheta^d)^\top$ und somit auch

$$\phi_n^\nu = \phi_n^0 - \nu^\top \hat{\phi}_n \quad (77)$$

gilt.

Für das innere Problem aus (8) ergibt sich

$$\varepsilon^2(\nu) = \int \int e(y, z) \tilde{\Pi}(dy) \tilde{\Pi}(dz). \quad (78)$$

Wir zerlegen das Ganze wieder und erhalten so

$$\begin{aligned}\int \int e(y, z) \Pi^0(dy) \Pi^0(dz) &- 2 \sum_{k=1}^d \int \int e(y, z) \Pi^0(dy) \Pi^k(dz) \\ &+ \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^d \int \int e(y, z) \Pi^k(dy) \Pi^j(dz).\end{aligned}$$

Das äußere Problem ergibt sich somit als

$$\varepsilon^2 = \min_{\nu \in \mathbb{R}^d} (\nu^\top \tilde{C} \nu - 2\nu^\top \tilde{B} + \tilde{A}). \quad (79)$$

Dies ist wieder ein lineares endlichdimensionales Optimierungsproblem das, wenn \tilde{C} invertierbar ist, durch $\nu = \tilde{C}^{-1} \tilde{B}$ gelöst wird, womit auch $\varepsilon^2 = \tilde{A} - \tilde{B}^\top \tilde{C}^{-1} \tilde{B}$ gilt. \square

Für die Berechnung der statischen Strategie sowie der Varianz des Hedgefehlers gehen wir wie in Satz 13 vor, allerdings sehen die Kovarianzen zwischen den einzelnen Claims nun anders aus.

Satz 6.4. *Es gilt*

$$\text{Cov}(H^i, H^j) = \int \int S_0^{y+z} (h(y+z)^N - (h(y)h(z))^N) \Pi^i(dy) \Pi^j(dz). \quad (80)$$

Beweis. Wir verwenden wieder die Tatsache, dass beide Claims über die Integraldarstellung (15) verfügen, es gilt also

$$H^i H^j = \int \int S_N^{y+z} \Pi^i(dy) \Pi^j(dz) = \int S_N^u \hat{\Pi}(du) = \hat{H}$$

und damit wegen der Definition von H_k aus Satz 6.1

$$\mathbb{E}[H^i H^j] \mathbb{E}[\hat{H}] = \int S_0^u \hat{\Pi}(du) = \int \int S_0^{y+z} h(y+z)^N \Pi^i(dy) \Pi^j(dz). \quad (81)$$

Dieses Ergebnis setzen wir nun in die Zerlegung der Kovarianz ein und erhalten so die Aussage. \square

Mithilfe dieser Resultate können wir nun unsere Rechnungen auch für den Nicht-Martingalfall durchführen. Wir betrachten wieder die beiden Verteilungen, die wir schon im vorigen Kapitel analysiert haben, mit dem Unterschied, dass S nun nicht als Martingal gewählt werden muss, sondern wir aus realen Daten geschätzte Werte für unsere Parameter wählen können.

6.1. Normal invers Gauss'sche Verteilung

In Kapitel 5.1.2 haben wir den Parameter β noch so gewählt, dass wir für S ein Martingal erhalten. Jetzt hingegen nehmen wir die tatsächlichen geschätzten Werte aus [HKK06, 5.4] an, also

$$\alpha = 75.49, \quad \beta = -4.089, \quad \delta = 3.024, \quad \mu = -0.04. \quad (82)$$

Die neue Dichte wird in Abbildung 8 dargestellt. Man sieht, dass der Ausgleichseffekt von β gegen μ nicht mehr stattfindet, also dass sich die Verteilung nicht mehr hauptsächlich um den Ursprung orientiert.

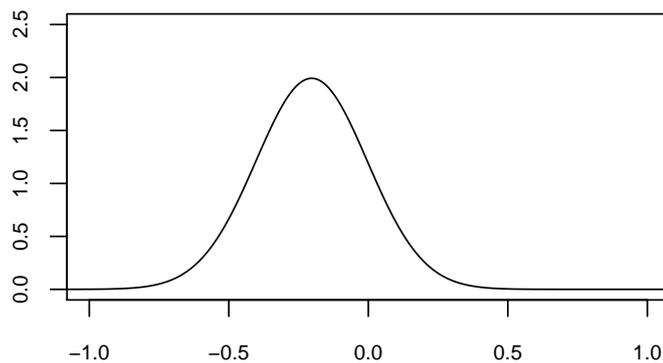


Abbildung 8: NIG-Dichte mit unseren Modellparametern (allgemeines Modell)

Wir führen nun dasselbe Beispiel wie in Kapitel 5.1.2 mit diesen neuen Parametern durch, wobei wir nun anstelle von A, B und C aus Satz 2.5 unsere neuen Werte \tilde{A}, \tilde{B} und \tilde{C} aus Satz 6.3 verwenden müssen. Da diese bereits in Integralform gegeben sind, können wir direkt in die Formeln einsetzen. Auch bei der Berechnung für die statische Hedgingstrategie müssen wir die neuen Ergebnisse aus 6.4 verwenden. Für das optimale Startkapital erhalten wir nun

$$c = 4.156922. \quad (83)$$

für die Strategien ϑ_1^i ergibt sich Tabelle 7.

Anzahl Handelstage	einmalig	monatlich	wöchentlich	täglich
Strategie	$N = 1$	$N = 3$	$N = 13$	$N = 63$
ϑ_1^0	0.3961734	0.5010714	0.5437752	0.5536524
ϑ_1^1	0.5586257	0.6633045	0.6999045	0.7079194
ϑ_1^2	0.1978355	0.2763833	0.3154457	0.3252384

Tabelle 7: Entwicklung der ϑ_1^i der GWK-Zerlegungen in Abhängigkeit von N im NIG-Modell für den allgemeinen Fall

Anzahl Handelstage	einmalig	monatlich	wöchentlich	täglich
Position in	$N = 1$	$N = 3$	$N = 13$	$N = 63$
$H^1 (\nu^1)$	0.62488545	0.6422429	0.62615735	0.60966849
$H^2 (\nu^2)$	0.51933037	0.5025366	0.47413150	0.46538408
Underlying $S (\phi_1^\nu)$	-0.05564563	-0.06382391	-0.04403786	-0.0293045

Tabelle 8: Entwicklung der statischen Position der jeweiligen Claims, sowie jener im Underlying zum Startzeitpunkt, unter Einfluss von N im allgemeinen NIG-Modell

Für die Positionen ν sowie ϕ^ν erhalten wir in Abhängigkeit von N Tabelle 8. Für rein statisches Hedging erhalten wir die Strategie

$$\nu^1 = 0.5674329, \quad \nu^2 = 0.5035608. \quad (84)$$

Die Entwicklung der Varianz des Hedgefehlers wird in Tabelle 9 für die üblichen Anzahlen von Handelsmöglichkeiten N dargestellt, in Abbildung 9 sieht man die komplette Entwicklung für wachsendes N .

Anzahl Handelstage	einmalig	monatlich	wöchentlich	täglich
Art des Hedgings	$N = 1$	$N = 3$	$N = 13$	$N = 63$
nur statisch	0.7082429	0.7082429	0.7082429	0.7082429
nur dynamisch	2.8402519	1.7920919	0.9926213	0.6414187
semistatisch mit K_1, K_2	0.6117610	0.5823076	0.4523903	0.3225919
semistatisch mit K_1	0.9962024	0.8426837	0.5722116	0.3943412
semistatisch mit K_2	1.3571614	1.0690137	0.6851310	0.4602463

Tabelle 9: Entwicklung von ε unter Einfluss von N im NIG-Modell im allgemeinen Fall

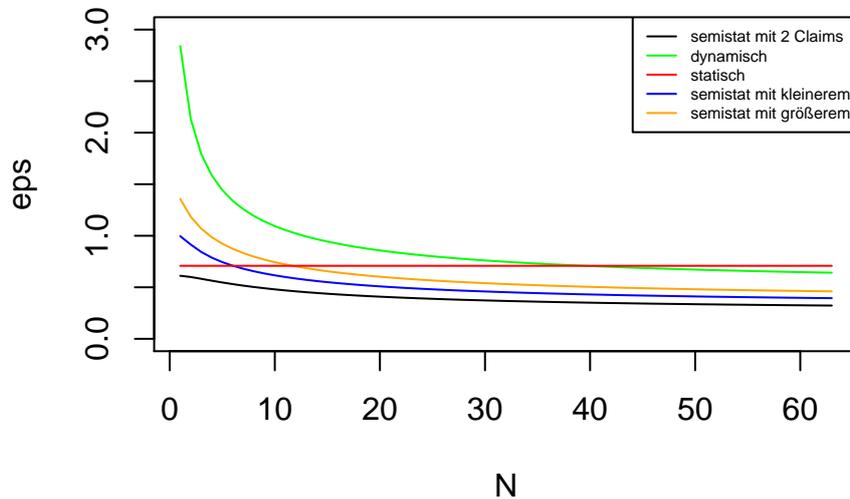


Abbildung 9: Entwicklung von ε in Abhängigkeit von N im allgemeinen NIG-Modell

6.2. Varianz-Gamma Verteilung

Auch im VG-Modell verwenden wir nun direkt die aus realen Daten geschätzten Werte für die wöchentlichen Parameter aus [MCC98, Tabelle II]. Wir rechnen sie genau so wie in Kapitel 5.2.1 um, sodass wir die täglichen Parameter

$$\delta = 1.1862, \quad \alpha = 403.1075, \quad \beta = -9.7596, \quad \mu = 0 \quad (85)$$

erhalten. Bei der Dichte (Abbildung 10) sieht man, dass sie etwas asymmetrischer ist als noch im Martingalfall.

Wieder verwenden wir anstelle von Satz 2.5 die Ergebnisse aus Satz 6.3 und erhalten für das optimale Startkapital

$$c = 0.02634048, \quad (86)$$

für die Strategien ϑ_1^i ergibt sich Tabelle 10.

Für ν und ϕ^ν erhalten wir abhängig von N Tabelle 11.

Die Entwicklung der Varianz des Hedgefehlers wird durch Tabelle 12 und Abbildung 11 dargestellt.

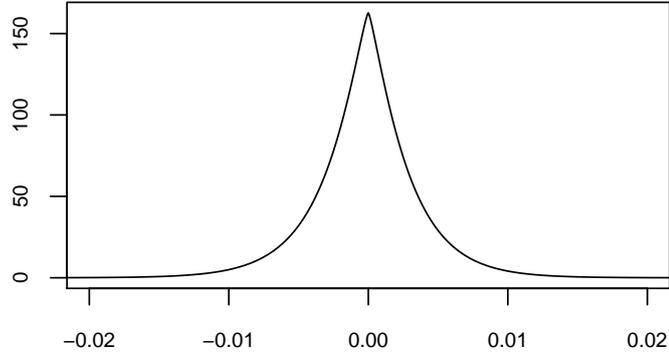


Abbildung 10: VG-Dichte mit unseren Modellparametern (allgemeines Modell)

Anzahl Handelstage	einmalig	monatlich	wöchentlich	täglich
Strategie	$N = 1$	$N = 3$	$N = 13$	$N = 63$
ϑ_1^0	0.0003193834	0.0046250747	0.1721743539	0.4750526985
ϑ_1^1	0.0004563634	0.0063851187	0.2111085475	0.5276371884
ϑ_1^2	0.0001887939	0.0028681422	0.1261015911	0.4019375589

Tabelle 10: Entwicklung der ϑ_1^i der GKW-Zerlegungen in Abhängigkeit von N im VG-Modell für den allgemeinen Fall

Anzahl Handelstage	einmalig	monatlich	wöchentlich	täglich
Position in	$N = 1$	$N = 3$	$N = 13$	$N = 63$
$H^1 (\nu^1)$	0.5055482	0.5093556	0.5178539	0.5297832
$H^2 (\nu^2)$	0.5385509	0.5325149	0.5283724	0.5231456e
Underlying $S (\phi_1^\nu)$	-1.300541×10^{-5}	-0.0001545499	-0.003777623	-0.0147525

Tabelle 11: Entwicklung der statischen Position der jeweiligen Claims, sowie jener im Underlying zum Startzeitpunkt, unter Einfluss von N im allgemeinen VG-Modell

Anzahl Handelstage	einmalig	monatlich	wöchentlich	täglich
Art des Hedgings	$N = 1$	$N = 3$	$N = 13$	$N = 63$
nur statisch	0.7871955	0.7871955	0.7871955	0.7871955
nur dynamisch	0.07293950	0.07214909	0.05573082	0.03144770
semistatisch mit K_1, K_2	0.005840518	0.006044533	0.005728520	0.005414561
semistatisch mit K_1	0.013578622	0.013501217	0.012200582	0.009468660
semistatisch mit K_2	0.01927610	0.01927966	0.01675818	0.01252866

Tabelle 12: Entwicklung von ε unter Einfluss von N im NIG-Modell im allgemeinen Fall

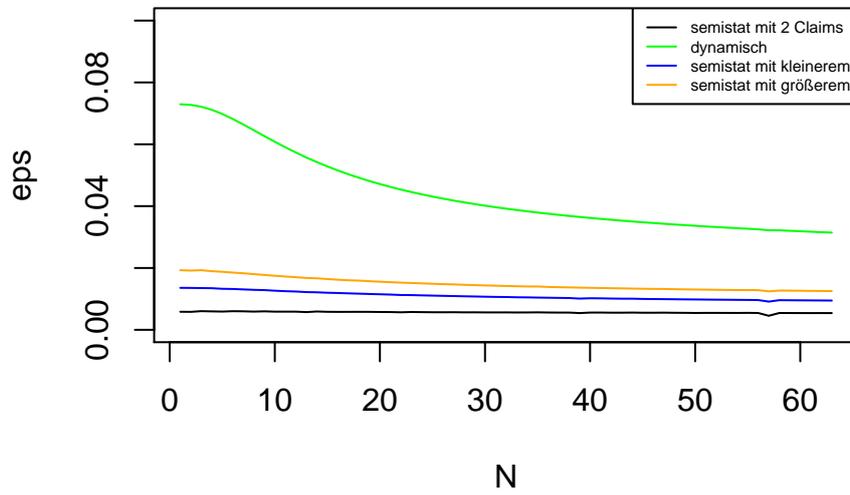


Abbildung 11: Entwicklung von ϵ in Abhängigkeit von N im allgemeinen VG-Modell

7. Fazit

Semistatisches varianzoptimales Hedging ist mit der Wahl der richtigen Claims in beiden Modellen deutlich besser als das klassische varianzoptimale Hedging. Statisches varianzoptimales Hedging ist für unser Setting bei wenigen Handelsmöglichkeiten besser als das klassische, was aber stark von den auf dem Markt verfügbaren Claims abhängt.

Im Martingalfall ist das optimale Startkapital im NIG-Modell deutlich kleiner als jenes für das VG-Modell. Die Varianz des statischen Hedgefehlers ist dafür im VG-Modell um einiges kleiner als im NIG-Modell, während sich die Varianz des semistatischen Fehlers in beiden Modellen ungefähr gleich entwickelt.

Während im NIG-Modell sowohl optimales Startkapital, als auch optimale Strategien und auch der Hedgefehler für den Nicht-Martingalfall von derselben Größenordnung sind, gibt es beim VG-Modell eklatante Unterschiede. Dies liegt in erster Linie am Verhalten der momentenerzeugenden Funktion. Während der Prozess S für unsere Parameter im NIG-Modell mit $m(1) = 0.9550575$ annähernd konstanten Erwartungswert hat, ist dies für unsere Parameter im VG-Modell nicht der Fall. Es gilt nämlich $m(1) = 0.1831877$, wodurch der Prozess im Erwartungswert stark fällt. Das erklärt auch das niedrige optimale Startkapital sowie die niedrigen Positionen in unserem optimalen Portfolio.

A. Anhang

Es folgen die R Codes zur Berechnung aller Ergebnisse des Beispiels aus Kapitel 5.1.2.

Dichteplot, Abbildung 2

```
1  ## NIG Dichteplot
2
3  rm(list=ls())
4
5  #Parameter
6  al<- 75.49
7  de<- 3.024
8  mu<- -0.04
9  a <- 1
10 b <- 1
11 c <- (mu^2+de^2)/(de^2*4)-(al^2*mu^2)/(mu^2+de^2)
12 be <- (-b+sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a)
13 be
14
15 #Dichtefunktion
16 dnig <- function(x, al, be, de, mu){
17   ((al*de*besselK(al*sqrt(de^2+(x-mu)^2),1))/(pi*sqrt(de^2+(x-
18     mu)^2)))*exp(de*sqrt(al^2-be^2)+be*(x-mu))
19 }
20
21 x <- seq(-100,100, by=0.005)
22
23 #Plotbereich festlegen
24 xlim <- c(-1,1)
25 ylim <- c(0,2.5)
26
27 #Funktionen mit verschiedenen alpha uebereinander plotten
28 plot(x,dnig(x,al,be,de,mu),type = "l", xlim = xlim, ylim =
29       ylim,
30       xlab = "", ylab = "", cex.axis = 0.75)
```

Berechnung des optimalen Startkapitals c (53)

```
31 #NIG Martingal Startkapital und vartheta
32
33 rm(list=ls())
34
35 # NIG parameter
36 al<- 75.49
37 de<- 3.024
38 mu<- -0.04
39 #Parameter zur Berechnung von beta
40 a <- 1
41 b <- 1
42 c <- (mu^2+de^2)/(de^2*4)-(al^2*mu^2)/(mu^2+de^2)
43 #berechne beta
44 be <- (-b+sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a)
45 be
46
47 # Optionsparameter
48 T<- 0.25
49 S<- 100
50 N<-5
51
52 #Strike des zu Hegdenden Claims
53 K <- 99
54
55
56 # NIG Kumulantenfunktion
57 ka<- function(z) mu*z+de*(sqrt(al^2-be^2)-sqrt(al^2-(be+z)^2))
58 ka(1)
59 # NIG Momentenerzeugende
60 mo<- function(z) exp(ka(z)*T/N)
61
62 # Komplexes Mass fuer europaeischen Call
63 p<- function(z)K^(1-z)/(2*pi*z*(z-1))
64
65 # Startkapitalfunktion
66 H<- Vectorize(function(n){
67   fun<- function(y){
68     z<- 1.5+1i*y
69     Re(S^z*mo(z)^(N-n)*p(z))
70   }
71   integrate(fun,-Inf,Inf)$value
72 })
73 H(0)
```

Berechnung von Tabelle 1, Tabelle 2 und Abbildung 3

```
75 #NIG Martingal Varthetas aus GWK-Zerlegungen
76 rm(list=ls())
77
78 # NIG parameter
79 al<- 75.49
80 de<- 3.024
81 mu<- -0.04
82 #Parameter zur Berechnung von beta
83 a <- 1
84 b <- 1
85 c <- (mu^2+de^2)/(de^2*4)-(al^2*mu^2)/(mu^2+de^2)
86 #berechne beta
87 be <- (-b+sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a)
88 be
89
90 # Optionsparameter
91 T<- 0.25
92 S<- 100
93
94 #Strike des zu Hegdenden Claims
95 K0 <- 99
96 #Strikes der zusaetzlichen Claims
97 vK <- c(95,105)
98
99 # NIG Kumulantenfunktion
100 ka<- function(z) mu*z+de*(sqrt(al^2-be^2)-sqrt(al^2-(be+z)^2))
101
102 #optimale Strategie aus GWK-Zerlegung
103 vartheta <- Vectorize(function(n,N,Ki) {
104   # NIG Momentenerzeugende
105   mo<- function(z) exp(ka(z)*T/N)
106   #Hilfsfunktionen aus Satz 4.2
107   alpha <- function(y,z) mo(y+z)-mo(y)*mo(z)
108   beta <- function(z) mo(z+1)-mo(z)
109   gamma <- mo(2)-2*mo(1)+1
110
111   #Integral aus Lemma 4.3
112   fun<- function(y){
113     z<- 1.5+1i*y
114     Re(S^(z-1)*mo(z)^(N-n)*beta(z)/gamma*(((Ki)^(1-z))/(2*pi*z
115       *(z-1))))
116   }
117   integrate(fun,-Inf,Inf)$value
```

```

117 })
118
119 #Fuehre die Berechnung fuer verschiedene Anzahlen von
      Handelszeitpunkten N durch
120 N <- 1:63
121
122 #Berechne vartheta fuer jeden Strike K_i
123 vartheta(1,N,K0)
124 vartheta(1,N,vK[1])
125 vartheta(1,N,vK[2])
126
127 # Kovarianz-Integral mithilfe von Satz 4.4 berechnen
128 Kovarianz <- Vectorize(function(S,N,Ki,Kj) {
129   # NIG Momentenerzeugende
130   mo<- function(z) exp(ka(z)*T/N)
131   #Hilfsfunktionen aus Satz 4.2 sowie Satz 4.4
132   alpha <- function(y,z) mo(y+z)-mo(y)*mo(z)
133   beta <- function(z) mo(z+1)-mo(z)
134   gamma <- mo(2)-2*mo(1)+1
135   g <- function(y,z) ifelse(mo(y+z)==mo(y)*mo(z),0,((mo(y+z)^N
      -(mo(y)*mo(z))^N)/(alpha(y,z)))*(alpha(y,z) -(beta(y)*
      beta(z))/(gamma)))
136
137   #Integrand mit Mass von europ. Call aus Satz 3.4
138   #sowie Substitution z = c+iv um Imaginaerteil wegzubekommen
139   fun<- function(u,v){
140     y<- 1.5+1i*u
141     z<- 1.2+1i*v
142     Re(S^(y+z)*g(y,z)*(((Ki)^(1-y))/(2*pi*y*(y-1)))*(((Kj)^(1-
      z))/(2*pi*z*(z-1))))
143   }
144   #iteriertes Integral mithilfe von Polarkoordinaten berechnen
145   fun1<- Vectorize(function(w){
146     fun2<- function(r){
147       r*fun(r*cos(w),r*sin(w))
148     }
149     integrate(fun2,0,Inf)$value
150   })
151   integrate(fun1,0,2*pi)$value
152 })
153
154 #Erstelle Matrix nu fuer statischen Anteil der jeweiligen
      zusaetzlichen Option sowie Vektor thetanu fuer den
      dynamischen Anteil zum Zeitpunkt 1
155 d <- length(vK)

```

```

156 nu <- matrix(data = NA,nrow = length(N), ncol = d)
157 thetanu <- N
158
159 #Ergebnisse aus vorheriger Berechnung
160 theta0 <- vartheta(1,N,K0)
161 theta1 <- vartheta(1,N,vK[1])
162 theta2 <- vartheta(1,N,vK[2])
163
164 #Befuelle nu und thetanu mithilfe von Satz 2.7, (10)
165 for (k in N) {
166   #A berechnen
167   A <- Kovarianz(100,k,K0,K0)
168
169   #Vektor vB berechnen
170   vB <- vector(mode = "numeric", length = d)
171   for(i in 1:d){
172     vB[i] <- Kovarianz(100,k,K0,vK[i])
173   }
174
175   #Matrix mC berechnen
176   mC <- matrix(0, nrow = d, ncol = d)
177   for(i in 1:d) {
178     for(j in 1:d){
179       mC[i,j] <- Kovarianz(100,k,vK[i],vK[j])
180     }
181   }
182
183   #Strategie berechnen
184   nu[k,] <- solve(mC) %*% vB
185   thetanu[k] <- theta0[k] - (nu[k,] %*% c(theta1[k],theta2[k])
186     )
186   print(c(k,nu[k,],thetanu[k]))
187 }
188
189 #Abbildung 3 plotten
190 plot(nu[,1])

```

Berechnung der statischen Hedgingstrategie (54)

```
191 ##Position nu fue statisches Hedging im NIG-Modell fuer
    Martingale
192 rm(list=ls())
193
194 # NIG parameter
195 al<- 75.49
196 de<- 3.024
197 mu<- -0.04
198 # beta berechnen mit Satz 5.6
199 a <- 1
200 b <- 1
201 c <- (mu^2+de^2)/(de^2*4)-(al^2*mu^2)/(mu^2+de^2)
202 be <- (-b+sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a)
203
204 # Laufzeit von H^0
205 T<- 0.25
206
207 #Strike K0 sowie Vektor mit Strikes Ki
208 K0 <- 99
209 vK <- c(95,105)
210
211 # NIG Kumulantenfunktion
212 ka<- function(z) (mu)*z+de*(sqrt(al^2-be^2)-sqrt(al^2-(be+z)
    ^2))
213
214 # Kovarianz-Integral
215 Kovarianz1 <- Vectorize(function(S,N,Ki,Kj) {
216   # NIG Momentenerzeugende
217   mo<- function(z) exp(ka(z)*T/N)
218   #Hilfsfunktionen
219   g <- function(y,z) ifelse(mo(y+z)==mo(y)*mo(z),0,((mo(y+z)^N
    -(mo(y)*mo(z))^N))
220
221   #Integrand
222   fun<- function(u,v){
223     y<- 1.5+1i*u
224     z<- 1.2+1i*v
225     Re(S^(y+z)*g(y,z)*(((Ki)^(1-y))/(2*pi*y*(y-1)))*(((Kj)^(1-
    z))/(2*pi*z*(z-1))))
226   }
227   #iteriertes Integral mit Polarkoordinaten
228   fun1<- Vectorize(function(w){
229     fun2<- function(r){
```

```

230     r*fun(r*cos(w),r*sin(w))
231   }
232   integrate(fun2,0,Inf)$value
233 })
234 integrate(fun1,0,2*pi)$value
235 })
236
237 #Egal wie viele Handelszeiten, wir handeln nur am Anfang
238 N <- 1:63
239 d <- length(vK)
240
241 #Vektor vB berechnen
242 vB <- vector(mode = "numeric", length = d)
243 for(i in 1:d){
244   vB[i] <- Kovarianz1(100,1,K0,vK[i])
245 }
246
247 #Matrix mC berechnen
248 mC <- matrix(0, nrow = d, ncol = d)
249 for(i in 1:d) {
250   for(j in 1:d){
251     mC[i,j] <- Kovarianz1(100,1,vK[i],vK[j])
252   }
253 }
254
255 #nu berechnen
256 nu <- solve(mC) %*% vB
257 nu

```

Berechnung des semistatischen varianzoptimalen Hedgefehlers, Tabelle 3 und Abbildung 4

```

258 ## Hedgefehler fuer semistatisches Hedging im NIG-Modell mit
      Plot
259
260 rm(list=ls())
261
262 # NIG parameter
263 al<- 75.49
264 de<- 3.024
265 mu<- -0.04
266 # beta berechnen mit Satz 5.6
267 a <- 1
268 b <- 1
269 c <- (mu^2+de^2)/(de^2*4)-(al^2*mu^2)/(mu^2+de^2)
270 be <- (-b+sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a)
271
272 # Laufzeit von H^0
273 T<- 0.25
274
275 # NIG Kumulantenfunktion
276 ka<- function(z) mu*z+de*(sqrt(al^2-be^2)-sqrt(al^2-(be+z)^2))
277
278 # Kovarianz-Integral mithilfe von Satz 4.4 berechnen
279 Kovarianz <- Vectorize(function(S,N,Ki,Kj) {
280   # NIG Momentenerzeugende
281   mo<- function(z) exp(ka(z)*T/N)
282   #Hilfsfunktionen aus Satz 4.2 sowie Satz 4.4
283   alpha <- function(y,z) mo(y+z)-mo(y)*mo(z)
284   beta <- function(z) mo(z+1)-mo(z)
285   gamma <- mo(2)-2*mo(1)+1
286   g <- function(y,z) ifelse(mo(y+z)==mo(y)*mo(z),0,((mo(y+z)^N
      -(mo(y)*mo(z))^N)/(alpha(y,z))*(alpha(y,z) -(beta(y)*
      beta(z))/(gamma)))
287
288   #Integrand mit Mass von Call aus Satz 3.4
289   #sowie Substitution z = c+iv um Imaginaerteil wegzubekommen
290   fun<- function(u,v){
291     y<- 1.5+1i*u
292     z<- 1.2+1i*v
293     Re(S^(y+z)*g(y,z)*(((Ki)^(1-y))/(2*pi*y*(y-1)))*(((Kj)^(1-
      z))/(2*pi*z*(z-1))))
294   }
295   #iteriertes Integral mithilfe von Polarkoordinaten berechnen

```

```

296     fun1<- Vectorize(function(w){
297         fun2<- function(r){
298             r*fun(r*cos(w),r*sin(w))
299         }
300         integrate(fun2,0,Inf)$value
301     })
302     integrate(fun1,0,2*pi)$value
303 })
304
305
306 #Fuehre die Berechnung fuer verschiedene Anzahlen von
      Handelszeitpunkten N durch
307 N <- 1:63
308 ylim <- c(0,3)
309
310 #####semistatisch mit zwei zusaetzlichen Claims
      #####
311
312 #Strike K0 sowie Vektor mit Strikes Ki
313 K0 <- 99
314 vK <- c(95,105)
315
316 #Erstelle Vektor epsq fuer quadratischen Hedgefehler
317 epsq <- N
318 d <- length(vK)
319
320 #Befuelle epsq und nu mithilfe von Satz 2.7
321 for (k in N) {
322     #A berechnen
323     A <- Kovarianz(100,k,K0,K0)
324
325     #Vektor vB berechnen
326     vB <- vector(mode = "numeric", length = d)
327     for(i in 1:d){
328         vB[i] <- Kovarianz(100,k,K0,vK[i])
329     }
330
331     #Matrix mC berechnen
332     mC <- matrix(0, nrow = d, ncol = d)
333     for(i in 1:d) {
334         for(j in 1:d){
335             mC[i,j] <- Kovarianz(100,k,vK[i],vK[j])
336         }
337     }
338

```

```

339   #Hedgefehler eps berechnen
340   epsq[k] <- A - t(vB) %*% solve(mC) %*% vB
341   print(c(k,epsq[k]))
342 }
343 #eps aus epsq berechnen und plotten
344 epssemi <- sqrt(epsq)
345 plot(N,epssemi,type="l",ylim = ylim, ylab = "eps")
346
347
348 #####dynamisch#####
349
350 #Strike K0, keine zusaetzlichen Optionen werden verwendet
351 K0 <- 99
352
353 #Erstelle Vektor epsq fuer quadratischen Hedgefehler
354 epsq <- N
355
356 #Befuelle epsq und nu mithilfe von Satz 2.7
357 for (k in N) {
358   #Hedgefehler eps berechnen
359   epsq[k] <- Kovarianz(100,k,K0,K0)
360   print(c(k,epsq[k]))
361 }
362 #eps aus epsq berechnen und plotten
363 epsdyn <- sqrt(epsq)
364 par(new = TRUE )
365 plot(N,epsdyn,type="l",ylim = ylim, axes = FALSE, col= "green"
      , xlab = "", ylab = "")
366
367
368 #####semistatisch mit einem zusaetzlichen Claims (
      kleinerer Strike) #####
369
370 #Strike K0 sowie Vektor mit Strikes Ki
371 K0 <- 99
372 vK <- 95
373
374 #Erstelle Vektor epsq fuer quadratischen Hedgefehler
375 epsq <- N
376 d <- length(vK)
377
378 #Befuelle epsq und nu mithilfe von Satz 2.7
379 for (k in N) {
380   #A berechnen
381   A <- Kovarianz(100,k,K0,K0)

```

```

382
383   #Vektor vB berechnen
384   vB <- vector(mode = "numeric", length = d)
385   for(i in 1:d){
386     vB[i] <- Kovarianz(100,k,K0,vK[i])
387   }
388
389   #Matrix mC berechnen
390   mC <- matrix(0, nrow = d, ncol = d)
391   for(i in 1:d) {
392     for(j in 1:d){
393       mC[i,j] <- Kovarianz(100,k,vK[i],vK[j])
394     }
395   }
396
397   #Hedgfeehler eps berechnen
398   epsq[k] <- A - t(vB) %*% solve(mC) %*% vB
399   print(c(k,epsq[k]))
400 }
401 #eps aus epsq berechnen und plotten
402 epssemil <- sqrt(epsq)
403 par(new = TRUE )
404 plot(N,epssemil,type="l",ylim = ylim, axes = FALSE, col = "
      blue", xlab = "", ylab = "")
405
406
407 #####semistatisch mit einem zusaetzlichen Claims (
      groesserer Strike) #####
408
409 #Strike K0 sowie Vektor mit Strikes Ki
410 K0 <- 99
411 vK <- 105
412
413 #Erstelle Vektor epsq fuer quadratischen Hedgfeehler
414 epsq <- N
415 d <- length(vK)
416
417 #Befuelle epsq und nu mithilfe von Satz 2.7
418 for (k in N) {
419   #A berechnen
420   A <- Kovarianz(100,k,K0,K0)
421
422   #Vektor vB berechnen
423   vB <- vector(mode = "numeric", length = d)
424   for(i in 1:d){

```

```

425     vB[i] <- Kovarianz(100,k,K0,vK[i])
426 }
427
428 #Matrix mC berechnen
429 mC <- matrix(0, nrow = d, ncol = d)
430 for(i in 1:d) {
431     for(j in 1:d){
432         mC[i,j] <- Kovarianz(100,k,vK[i],vK[j])
433     }
434 }
435
436 #Hedgefehler eps berechnen
437 epsq[k] <- A - t(vB) %*% solve(mC) %*% vB
438 print(c(k,epsq[k]))
439 }
440 #eps aus epsq berechnen und plotten
441 epssemi2 <- sqrt(epsq)
442 par(new = TRUE )
443 plot(N,epssemi2,type="l",ylim = ylim, axes = FALSE, col = "
         orange", xlab = "", ylab = "")
444
445
446 #####statisch#####
447
448 #Strike K0 sowie Vektor mit Strikes Ki
449 K0 <- 99
450 vK <- c(95,105)
451
452
453 # Kovarianz-Integral
454 Kovarianz1 <- Vectorize(function(S,N,Ki,Kj) {
455     # NIG Momentenerzeugende
456     mo<- function(z) exp(ka(z)*T/N)
457     #Hilfsfunktion aus Satz 4.5
458     g <- function(y,z) ifelse(mo(y+z)==mo(y)*mo(z),0,((mo(y+z)^N
         -(mo(y)*mo(z))^N)))
459
460     #Integrand
461     fun<- function(u,v){
462         y<- 1.5+1i*u
463         z<- 1.2+1i*v
464         Re(S^(y+z)*g(y,z)*(((Ki)^(1-y))/(2*pi*y*(y-1)))*(((Kj)^(1-
         z))/(2*pi*z*(z-1))))
465     }
466     #iteriertes Integral mit Polarkoordinaten

```

```

467     fun1<- Vectorize(function(w){
468         fun2<- function(r){
469             r*fun(r*cos(w),r*sin(w))
470         }
471         integrate(fun2,0,Inf)$value
472     })
473     integrate(fun1,0,2*pi)$value
474 })
475
476
477 #Egal wie viele Handelszeiten, wir handeln nur am Anfang
478 N <- 1:63
479 d <- length(vK)
480
481 #A berechnen
482 A <- Kovarianz1(100,1,K0,K0)
483
484 #Vektor vB berechnen
485 vB <- vector(mode = "numeric", length = d)
486 for(i in 1:d){
487     vB[i] <- Kovarianz1(100,1,K0,vK[i])
488 }
489
490 #Matrix mC berechnen
491 mC <- matrix(0, nrow = d, ncol = d)
492 for(i in 1:d) {
493     for(j in 1:d){
494         mC[i,j] <- Kovarianz1(100,1,vK[i],vK[j])
495     }
496 }
497
498 #Hedgefehler eps berechnen
499 epsq <- A - t(vB) %*% solve(mC) %*% vB
500 epssta <- sqrt(epsq)
501 epsstat <- 1:63
502 for(k in 1:63){
503     epsstat[k] <- epssta
504 }
505 epsstat
506
507 par(new = TRUE )
508 plot(N,epsstat,type="l",ylim = ylim, axes = FALSE, col = "red"
509     , xlab = "", ylab = "")
509
510

```

```
511 #Legende einfuegen
512 legend("topright", legend = c("semistat_+4_Claims","dynamisch
    " , "statisch", "semistat_+2_naehere", "semistat_+2_
    entferntere" ),
513     col = c("black", "green", "red", "blue", "orange"), lty
        = c(1,1,1,1,1), lwd = c(1,1,1,1,1),cex = 0.5)
```

Abbildungsverzeichnis

1.	Einfluss der jeweiligen Parameter der NIG-Verteilung, wenn nicht anders angegeben gilt: $\alpha = 5, \beta = 0, \delta = 1$ und $\mu = 0$ (jeweils schwarz).	21
2.	NIG-Dichte mit unseren Modellparametern	24
3.	Position in H^1 in Abhängigkeit von N	27
4.	Entwicklung von ε in Abhängigkeit von N im NIG-Modell	28
5.	Entwicklung von ε in Abhängigkeit von N im NIG-Modell für vier zusätzliche Claims	29
6.	VG-Dichte mit unseren Modellparametern	32
7.	Entwicklung von ε in Abhängigkeit von N im VG-Modell	34
8.	NIG-Dichte mit unseren Modellparametern (allgemeines Modell)	38
9.	Entwicklung von ε in Abhängigkeit von N im allgemeinen NIG-Modell . . .	40
10.	VG-Dichte mit unseren Modellparametern (allgemeines Modell)	41
11.	Entwicklung von ε in Abhängigkeit von N im allgemeinen VG-Modell . . .	42

Tabellenverzeichnis

1.	Entwicklung der ϑ_1^i der GKW-Zerlegungen in Abhängigkeit von N im NIG-Modell	26
2.	Entwicklung der statischen Position der jeweiligen Claims, sowie jener im Underlying zum Startzeitpunkt, unter Einfluss von N im NIG-Modell . . .	26
3.	Entwicklung von ε unter Einfluss von N im NIG-Modell	27
4.	Entwicklung der ϑ_1^i der GKW-Zerlegungen in Abhängigkeit von N im VG-Modell	33
5.	Entwicklung der statischen Position der jeweiligen Claims, sowie jener im Underlying zum Startzeitpunkt, unter Einfluss von N im VG-Modell	33
6.	Entwicklung von ε unter Einfluss von N im VG-Modell	34
7.	Entwicklung der ϑ_1^i der GKW-Zerlegungen in Abhängigkeit von N im NIG-Modell für den allgemeinen Fall	39
8.	Entwicklung der statischen Position der jeweiligen Claims, sowie jener im Underlying zum Startzeitpunkt, unter Einfluss von N im allgemeinen NIG-Modell	39
9.	Entwicklung von ε unter Einfluss von N im NIG-Modell im allgemeinen Fall	39
10.	Entwicklung der ϑ_1^i der GKW-Zerlegungen in Abhängigkeit von N im VG-Modell für den allgemeinen Fall	41
11.	Entwicklung der statischen Position der jeweiligen Claims, sowie jener im Underlying zum Startzeitpunkt, unter Einfluss von N im allgemeinen VG-Modell	41
12.	Entwicklung von ε unter Einfluss von N im NIG-Modell im allgemeinen Fall	41

Literatur

- [DHK17] Paolo Di Tella, Martin Haubold, and Martin Keller-Ressel. Semi-static variance-optimal hedging in stochastic volatility models with Fourier representation. *ArXiv e-prints*, September 2017, 1709.05527.
- [Doe71] Gustav Doetsch. *Handbuch der Laplace-Transformation. Band I: Theorie der Laplace-Transformation*. Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart, 1971.
- [HKK06] Friedrich Hubalek, Jan Kallsen, and Leszek Krawczyk. Variance-optimal hedging for processes with stationary independent increments. *The Annals of Applied Probability*, 16(2):853–885, 2006.
- [KP16] J. Kallsen and A. Papapantoleon. *Advanced Modelling in Mathematical Finance: In Honour of Ernst Eberlein*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Springer International Publishing, 2016.
- [MCC98] Dilip B. Madan, Peter Carr, and Eric C. Chang. The variance gamma process and option pricing. *European Finance Review*, 2:79–105, 1998.
- [Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.