

DIPLOMARBEIT

Einfluss eines Dichtemodells auf die regionale Schwerefeldmodellierung

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

im Rahmen des Studiums

Geodäsie und Geoinformation

eingereicht von

Manfred Heinrich

Matrikelnummer 0625035

ausgeführt am Institut für Geodäsie und Geoinformation
der Fakultät für Höhere Geodäsie der Technischen Universität Wien

Betreuung

Betreuer/in: Ao.Univ.Prof. Dipl. –Ing. Dr.techn. Robert Weber

Wien, 28.03.2018

Kurzfassung

Bei der Reduktion von, an der Erdoberfläche gemessenen Schwerewerten oder Lotabweichungen wird allgemein von einer homogene Dichteverteilung ($\rho = 2.67g/cm^3$) innerhalb der Erdkruste ausgegangen. Diese Annahme eines konstanten Dichtewertes im Untergrund wird auch bei dem Programm TOPOGRAV zur Berechnung der topographischen Koorektur mithilfe der sogenannten Quader-Methode, angewendet. In dieser Arbeit soll der Einfluss eines Dichtemodells des Untergrunds auf die Berechnung von reduzierten Lotabweichungen (ξ und η) und Schwerewerten mithilfe der Software TOPOGRAV untersucht werden. Das vom Autor implementierte ebene Dichtemodell ermöglicht es Tiefe und Dichtewert eines Dichtesprungs im Untergrund als Parameter für die Berechnung der Reduktion zu übergeben. Die in dieser Arbeit angestellten Untersuchungen zeigten, dass die Einbeziehung eines Dichtemodells besonders geeignet erscheint für Stationen unterhalb massiver Gebirgszüge und hoher Dichtedifferenzen. Für eine solche Station ergeben sich für reduzierte Schwerewerte bei unterschiedlichen Berechnungsmethoden (mit oder ohne Dichtemodell) Differenzen von knapp 30mGal. Ein wesentlich geringerer Unterschied ($<1''$) konnte hingegen für reduzierte Lotabweichungen festgestellt werden. Für eine genauere Untersuchung des Einflusses eines Dichtemodells werden Tests mit unterschiedlichen Geländemasken (vor allem Meer) nötig sein.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Aufgabenstellung	1
2	Theoretische Grundlagen	5
2.1	Schwerefeld der Erde	7
2.2	Das Geoid	11
2.3	Das Niveauellipsoid	12
2.4	Das Störpotential	13
2.5	Die Lotabweichungen	17
2.5.1	Astro-geodätische Lotabweichungen	18
2.5.2	Astronomisches Nivellement	21
2.6	Verfahren der Reduktion	26
2.6.1	Freiluftreduktion	26
2.6.2	Topographische Reduktion	27
2.6.3	Bouguer Reduktion	27
2.6.4	Reduktion von Poincare-Prey	28
2.6.5	Isostatische Reduktion	28
2.6.6	Der indirekte Effekt	29
3	Remove-and-Restore-Methode	31
3.1	Berechnung der langwelligen LA-Komponenten	32
3.2	Berechnung der kurzwelligen LA-Komponenten	33
3.2.1	FFT-Methode	34
3.2.2	Quader-Methode	35
3.2.3	Berechnung reduzierter LA und Schwerewerte	36

4	Praktische Umsetzung	39
4.1	Arten von Dichtemodellen	39
4.1.1	Topographisches Dichtemodell	40
4.1.2	Ebenes Dichtemodell	41
4.2	Änderungen in TOPOGRAV	44
4.3	Implementierung des Dichtemodells	47
4.3.1	Fallunterscheidungen	49
5	Simulation	65
6	Fallbeispiel	71
7	Ausblick	79
	Abbildungsverzeichnis	82
	Tabellenverzeichnis	84
	Literaturverzeichnis	84

Kapitel 1

Einleitung und Aufgabenstellung

Am 1. Juni 2016 war es soweit. Nach 17-jähriger Bauzeit wurde der Gotthard-Basistunnel feierlich offiziell eröffnet. Mit einer Länge von 57.1 km verbindet er in Nord-Süd-Richtung den Schweizer Kanton Uri (Nordportal bei Erstfeld in einer Höhe von 460m) mit den Kanton Tessin (Südportal bei Bodi TI in einer Höhe von 312m) und ist damit der weltweit längste Eisenbahntunnel. Er unterquert dabei die zentralen Schweizer Alpen, unter anderem auch das namensgebende Gotthardmassiv und ist damit auch der Tunnel mit der weltweit höchsten Gesteins-Überdeckung. Abbildung 1.1 zeigt einen Querschnitt des unterquerenden Gebirgsmassives (Marti, 2004).

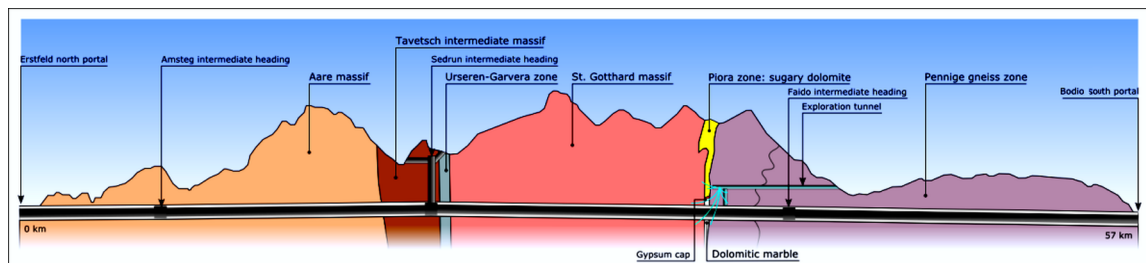


Abbildung 1.1: Geologisches Profil des Gotthard-Basistunnel (Wikipedia, 2017).

Diese gewaltigen Gebirgsmassen zeigen auf, dass für hochgenaue Vermessungen der unterirdischen Vortriebsnetze des Gotthard-Basistunnel in Lage und Höhe die Einflüsse des lokalen Schwerfeldes nicht zu vernachlässigen sind. Das Schweizer Geoidmodell CHGEO98 wurde im Fall des Gotthard-Basistunnel herangezogen, um Geoidundulationen, Schwerewerte und Lotabweichungen zu berechnen. Wie so viele andere Modelle, geht auch dieses, aufgrund des Mangels an einem großflächigen Krustendichtemodell bzw. Oberflächendichtemodell, von einer homogenen Dichteverteilung ($\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$) innerhalb der Erdkruste aus. Mithilfe dieser homogenen Dichte und eines digitalen Höhenmodells, welches die Massen zwischen Oberfläche und Meereshöhe umfasst, konnten Schwerewerte und Lotabweichungen im Tunnel berechnet werden. In Abbildung 1.2 sind die gerechneten Nord-Süd- und Ost-West-Komponenten der Lotabweichung, sowie Absolutschwerewerte (minus 980 mGal; $1\text{Gal} = 1\text{cm/s}^2$) an der projektierten Trasse des Gotthard-

Basistunnels dargestellt. Die so erhaltenen Lotabweichungen an der Oberfläche konnten mit einer Genauigkeit von ca. 3cc (1 Neusekunde = 1cc = 0.1 mgon), sowie die Oberflächenschweren mit einer Genauigkeit von 1-2 mgal, bestimmt werden. Es zeigt sich eine Schwankung der Lotabweichungskomponenten von +40cc bis -40cc. Diese Schwankungsbreite zeigt auf, dass hochpräzise Lotabweichungsangaben für die Korrektur von Kreismessungen erforderlich sind (Marti, 2004).

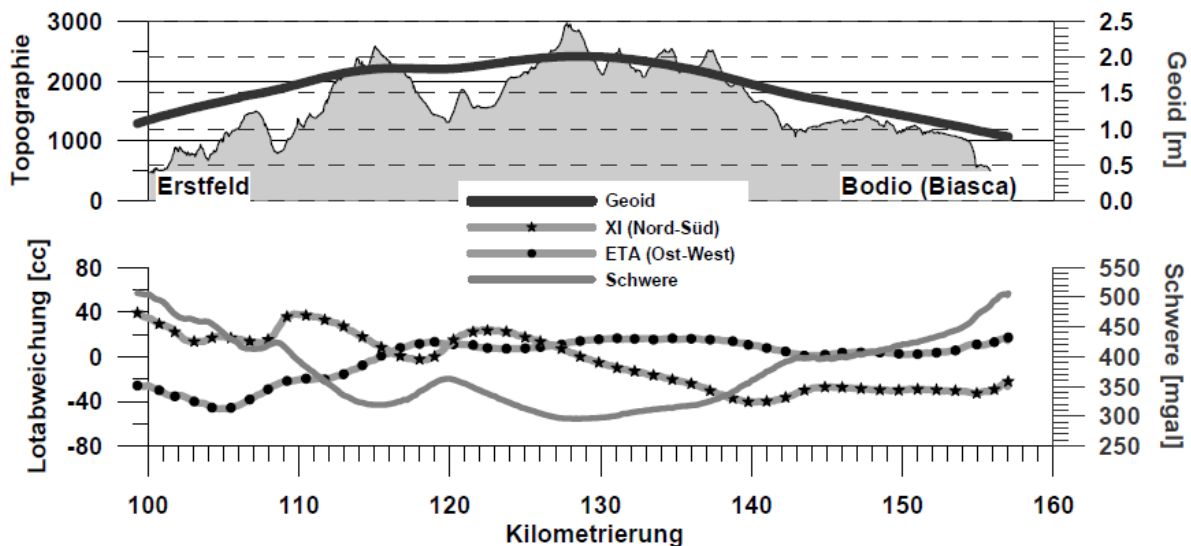


Abbildung 1.2: Verlauf des Geoids CHGEO98 und Schwankungen der LA-Komponenten entlang der Achse des Gotthard-Basistunnel (Marti, 2004).

Die angegebenen Genauigkeiten gelten jedoch nur unter der Annahme, dass es keine unberücksichtigten Masseninhomogenitäten in der Nähe der Aufpunkte gibt. Wie Abb.1.1 jedoch zeigt, gibt es unterschiedliche geologische Strukturen und damit einhergehende unterschiedliche Gesteinsdichten. Die Kenntnis der Massenverteilung im Untergrund ist somit für die Berechnung von Lotabweichungen an der Oberfläche und besonders für Oberflächenschwerewerte, aber auch für deren Reduktionen in tiefere Schichten, von großer Bedeutung.

Die Wirkung von unterschiedlichen geologischen Strukturen und damit unterschiedlicher Dichten, auf die Berechnung von Geoidundulation, Schwere und Lotabweichung mittels Geländemodell, soll in dieser Arbeit untersucht werden. Dafür wird das Programm TOPOGRAV, welches in den letzten Jahren am Department für Geodäsie und Geoinformation, FB Höhere Geodäsie, der TU-Wien entwickelt wurde, verwendet. Dieses ging bisher, ebenso wie das für den Gotthard-Basistunnel herangezogene Programm, von einer homogenen Dichte für die Berechnung der gewünschten Parameter, aus. Aufgabe dieser Arbeit ist es, ein Dichtemodell in diese Berechnung zu implementieren und anschließend zu überprüfen, wie sich ein solches auf die Berechnung auswirkt. Genauer gesagt, handelt es sich um die Berechnung des kurzwelligen Anteils des Schwerfeldes und dessen Auswirkung auf die Störfeldgrößen.

In Kapitel 2, werden die benötigten theoretischen Grundlagen bezüglich des Erdschwerfeldes, Geoid, Lotabweichung, Geoidundulation als auch die unterschiedlichen Methoden der Redukti-

on, erläutert. Kapitel 3 beschreibt im Detail, die topographische Korrektur, deren Berechnung und den Einfluss auf die Oberflächen-LA. Kapitel 4 beschreibt kurz das verwendete Programm TOPOGRAV und geht anschließend auf den in dieser Arbeit unternommenen Implementierungsversuch eines Dichtemodells ein. Im darauffolgenden Kapitel 5 wird anhand von Beispielen die Auswirkung der Berücksichtigung eines Dichtemodells aufgezeigt und diskutiert. Im Anhang A wird der Formelapparat zur Berechnung der Attraktion von Massenquadern auf Aufpunkte (Quadermethode) detailliert.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

Das einführende Beispiel anhand des Gotthard-Basistunnels hat gezeigt, welchen signifikanten Einfluss das Erdschwerefeld auf Messgrößen haben kann. Es ist deshalb notwendig vertikale und horizontale Richtungsmessungen bezüglich der Oberflächenlotabweichung zu korrigieren:

$$\begin{aligned} r &= r_m - (\xi \cdot \sin \alpha - \eta \cdot \cos \alpha) \cdot \cot z_m \\ z &= z_m + \varepsilon = z_m + (\xi \cdot \cos r + \eta \cdot \sin r), \end{aligned} \quad (2.1)$$

r_m und z_m bezeichnen die gemessene Richtung bzw. Zenitdistanz, α das Azimut der Visur und ξ, η die Komponenten der Lotabweichung (Daxinger, 1996).

Zur Reduktion von Streckenmessungen auf das Referenzellipsoid (siehe Abb.2.1) werden Geoidundulationen benötigt. Für die Sehne S ergibt sich:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{D_S^2 - \Delta H^2}{\left(1 + \frac{H_1}{R}\right) \cdot \left(1 + \frac{H_2}{R}\right)}} \\ \Delta H &= D_S \cdot \cos z + \frac{D_S^2}{2 \cdot R} \cdot \sin^2 z \end{aligned} \quad (2.2)$$

mit der gemessenen Schrägdistanz D_S und den ellipsoidischen Höhen der beiden Punkte H_1 und H_2 , welche sich aus den Geoidundulationen N_1 bzw. N_2 sowie den Stationshöhen über dem Meeresspiegel h_1 bzw. h_2 zusammensetzen. $\Delta H = H_2 - H_1$ bezeichnet den ellipsoidischen Höhenunterschied und R den Krümmungsradius (Elmiger, 1973). Weiters berechnet sich die Distanz D_0 in der ellipsoidischen Höhe $H=0$ nach 2.3.

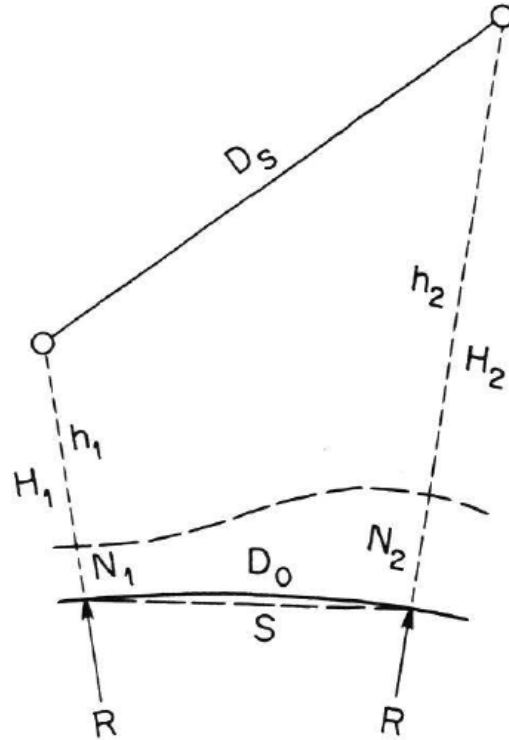


Abbildung 2.1: Die Reduktion der gemessenen Schrägstrecke D_S auf das Ellipsoid, ergibt die Sehne s bzw. den Bogen D_0 (Elmiger, 1973).

$$D_0 = 2 \cdot R \cdot \arcsin \frac{S}{2 \cdot R} \quad (2.3)$$

Die direkte Messung des astronomischen Azimuts A mithilfe eines Vermessungskreisels (z.B.: Gyromat 2000) ist speziell im Tunnelbau unverzichtbar, um über längere Distanzen, bei einem Polygonzug die gewünschten Genauigkeiten einhalten zu können. Die Korrektur gemessener astronomischer Azimute A bezüglich der Lotabweichung und der Übergang auf das ellipsoidische Azimut a , ist durch 2.4 gegeben.

$$a = A - \eta \cdot \tan \varphi - (\xi \cdot \sin A - \eta \cos A) \cdot \cot z \quad (2.4)$$

Auf viele der soeben genannten Begriffe wird in den nachfolgenden Kapiteln näher eingegangen.

2.1 Schwerefeld der Erde

Ausgehend von der gravitativen Anziehung zweier Massen nach Newton, sowie der Aufgrund von Dreh- und Kreisbewegung auf eine Masse wirkenden Zentrifugalbeschleunigung, kann die auf jeden Punkt der Erde wirkende, sogenannte Schwerebeschleunigung $\vec{g}$, wie folgt angeschrieben werden:

$$\vec{g} = \vec{G} + \vec{F} \quad (2.5)$$

mit $\vec{G}$ der Gravitationsbeschleunigung sowie $\vec{F}$ der Zentrifugalbeschleunigung oder Fliehkraftbeschleunigung. Die Richtung von $\vec{g}$ wird als Lotrichtung und der Betrag g als Schwere bezeichnet. Ist die in Abb. 2.2 gegebene z -Achse gleich der Rotationsachse der Erde, so ist $\vec{G}$ eine Funktion des Abstandes $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $\vec{F}$ eine Funktion des Normalabstandes $r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Damit wird ersichtlich, dass die Schwere an den Polen aufgrund der Abplattung und der Rotation der Erde um ca. 1/200 größer ist als am Äquator. Weitere Beiträge zur globalen, regionalen oder lokalen Variation von $\vec{g}$ liefern sichtbare und unsichtbare Massenverteilungen. Veränderungen der Richtung und des Betrages der Rotationsachse, Gezeiteneinflüsse sowie Verlagerungen terrestrischer Massen, verursachen zudem temporale Änderungen von $\vec{g}$. Damit ist die Schwerebeschleunigung eine Funktion des Ortes und der Zeit: $\vec{g} = f(\vec{r}, t)$.

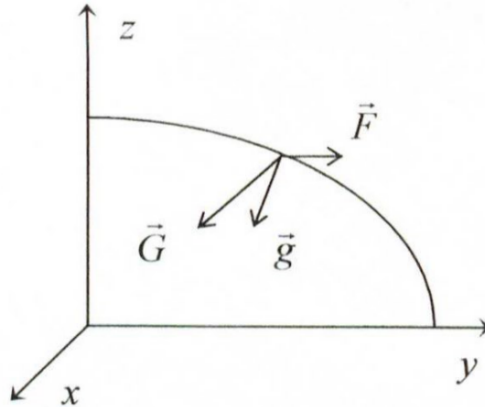


Abbildung 2.2: Die Schwerebeschleunigung $\vec{g}$ setzt sich aus der Gravitationsbeschleunigung $\vec{G}$ und der Fliehkraftbeschleunigung $\vec{F}$ zusammen.

Da es sich bei $\vec{g}$ um ein wirbelfreies Kraftfeld handelt ($\text{rot } \vec{g} = 0$), kann jedem Punkt mit $\vec{g}(x, y, z)$ durch

$$\vec{g} = \nabla W = \text{grad} W \quad (2.6)$$

eine skalare Größe $W(x, y, z)$ zugewiesen werden. Man nennt W das Schwerepotential der Erde. Der Begriff des Potentials beschreibt die Fähigkeit eines Massenpunktes Arbeit zu leisten. Genauer genommen beschreibt es die Arbeit die man aufwenden muss, um eine Masse gegen das Kraftfeld vom Aufpunkt $P(x, y, z)$ ins Unendliche zu bringen. W setzt sich aus dem Gravitationspotential V und dem Zentrifugalpotential Φ zusammensetzt:

$$W = V + \Phi \quad (2.7)$$

Das Gravitationspotential V einer Punktmasse m ergibt sich zu

$$V = \frac{G \cdot m}{r} \quad (2.8)$$

mit der Gravitationskonstante $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \right]$. Da es sich bei der Erde um einen inhomogenen Körper handelt, setzt sich die Gesamtmasse der Erde E aus einzelnen Massenelementen dm zusammen.

$$dm = \rho \cdot dv \quad (2.9)$$

mit der Dichte ρ und dem Volumenelemente dv . Integriert über das Gesamtvolumen der Erde ergibt sich für das Gravitationspotential V der Erde folgender Ausdruck:

$$V = G \cdot \iiint_{Erde} \frac{\rho}{r} dv \quad (2.10)$$

V erfüllt im Außenraum mit $\rho=0$ die Laplacesche Differentialgleichung,

$$\Delta V = 0 \quad (2.11)$$

Funktionen mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen, welche 2.11 erfüllen, bezeichnet man als harmonische Funktionen (Torge (2003)). In Bereichen von Dichtesprüngen (Innenraum und Grenzbereich von Außen- zu Innenraum), weisen die zweiten Ableitungen von V Unstetigkeiten auf. Für den Innenraum ($\rho \neq 0$) geht 2.11 in die Poissonsche DGL über:

$$\Delta V = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \quad (2.12)$$

Mit $\Delta V = \text{div} \nabla \vec{V}$ geben 2.11 und 2.12 Auskunft über die Quellergiebigkeit des betrachteten Gebiets. Massereiche Teilchen ($\rho \neq 0$) sind somit die Quellen des Gravitationsfeldes!

Da die Dichteverteilung der Erde nicht hinreichend bekannt ist, kann man V nicht nach 2.10 berechnen. Für den Außenraum findet sich jedoch eine spezielle Lösung von 2.11 anhand einer räumlichen Kugelfunktionsentwicklung der reziproken Abstandsfunktion $1/r$, welche zu folgendem Ausdruck für V, als Funktion des Abstandes des Aufpunktes r, der geographischen Länge λ sowie der Poldistanz θ , führt.

$$V(r, \lambda, \theta) = \frac{G \cdot M}{r} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n \cdot (C_{nm} \cdot \cos m\lambda + S_{nm} \cdot \sin m\lambda) \cdot P_{nm}(\cos \theta) \right) \quad (2.13)$$

M bezeichnet in 2.13 die Erdmasse, a die große Halbachse des Erdellipsoids, n den Grad und m die Ordnung der Entwicklung. P_{nm} sind die sogenannten Legendre-Polynome sowie C_{nm} und S_{nm} die Koeffizienten der Reihenentwicklung, auch Stokes-Koeffizienten genannt. In diesen Koeffizienten steckt die Integration über alle Massenterme dm. Sie berechnen sich mithilfe der Legendre-Polynome, mit $m \neq 0$, nach:

$$\begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{2 \cdot (n-m)!}{M \cdot (n+m)!} \iiint_{\text{Erde}} \left(\frac{r'}{a} \right)^n \cdot P_{nm}(\cos \theta') \cdot \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} dm \quad (2.14)$$

Für eine geometrische Interpretation der Kugelflächenfunktionen definiert man mit

$$\begin{aligned} Y_{nm}^c &= P_{nm}(\cos \theta) \cdot \cos m\lambda \\ Y_{nm}^s &= P_{nm}(\cos \theta) \cdot \sin m\lambda \end{aligned} \quad (2.15)$$

die sogenannten Laplacesche Kugelflächenfunktionen. Sie beschreiben das Verhalten von V auf der Einheitskugel. Die Nullstellen dieser Funktionen teilen die Kugeloberfläche in Gebiete unterschiedlichen Vorzeichens, welche durch Meridiane und Parallelkreise begrenzt werden (Torge, 2003). Dies führt zur Unterteilung in *zonale*, *tesserales* und *sektorielle* Kugelfunktionen (KF), wie in Abb.2.3 abgebildet.

Die Amplituden der einzelnen Kugelfunktionsterme werden durch die Stokes-Koeffizienten bestimmt. Die Kugelfunktionsentwicklung von V führt somit zu einer spektralen Zerlegung des



Abbildung 2.3: Oben: zonale KF. Unten links: tesserale KF. Unten rechts: sektorielle KF.

Gravitationsfeldes. Das Feld wird dabei in Strukturen der Wellenlänge $360^\circ/n$ zerlegt, was einer räumlichen Auflösung von $180^\circ/n$ (halbe Wellenlänge) entspricht (Torge, 2003). Aus diesem Grund spricht man auch von langwelligen und kurzwelligen Anteilen des Gravitationsfeldes bzw. des Erdschwerefeldes.

Im Gegensatz zu V kann das Zentrifugalpotential Φ im gesamten Bereich analytisch berechnet werden:

$$\Phi = \frac{\omega^2}{2} \cdot r_{\perp}^2 \quad (2.16)$$

Mithilfe des Legendre-Polynoms P_2 ergibt sich folgende Reihenentwicklung von Φ (Torge, 2003):

$$\Phi = \frac{\omega^3}{3} \cdot r^2 \cdot (1 - P_2(\cos \theta)) \quad (2.17)$$

Damit ergibt sich die Kugelfunktionsentwicklung des Schwerepotentials W durch Addition von 2.13 und 2.17. Weiters gibt es für Koeffizienten niedrigen Grades eine physikalische Interpretation. So entspricht der Term nullten Grades ($n=0$) dem Potential einer homogenen Kugel, weshalb in 2.13 der Term $G \cdot M/r$ aus dem Klammerausdruck herausgehoben ist und die Summation über n mit $n=1$ beginnt. Legt man den Ursprung des Koordinatensystems in den Massenschwerpunkt der Erde, so werden die Terme ersten Grades ($n=1$) gleich 0. In diesem Zusammenhang spricht man auch von den sogenannten *verbotenen* Termen ersten Grades, wenn das Koordinatensystem im Geozentrum gelagert ist. Die polare Abplattung wird durch den dynamischen Formfaktor J_2 beschrieben, welcher mit dem negativen Koeffizienten zweiter Ordnung C_2 in einer linearen Beziehung steht.

2.2 Das Geoid

Flächen gleichen Schwerepotentials werden Niveau-, Äquipotential- bzw. Geopotentialflächen genannt.

$$W(\vec{r}) = \text{const.} \quad (2.18)$$

Aufgrund der Inhomogenität des Erdkörpers verlaufen unterschiedliche Niveauflächen nicht parallel zueinander. Aus diesem Grund sind auch die Lotlinien (Richtung des Schwerevektors), welche immer normal auf die Niveauflächen stehen, gekrümmte Raumkurven. Eine ausgezeichnete Niveaufläche von W ist das sogenannte Geoid. Es fällt genähert mit dem mittleren Meeresspiegel zusammen und verläuft teils innerhalb der Landmassen. Obwohl es einer geschlossenen Fläche entspricht, weist es bei Dichtesprüngen Unstetigkeiten auf, weshalb es global keiner analytisch geschlossen darstellbarer Erdfigur entspricht. Jedoch kann es durch Kugelfunktionsentwicklungen hinreichend gut approximiert werden (Torge, 2003). In der Geodäsie dient das Geoid als Höhenbezugsfläche. Die Höhe eines Punktes P wird als der vertikale Abstand von einer Bezugsfläche definiert. Handelt es sich dabei um das Geoid, so spricht man von orthometrischer Höhe oder Meereshöhe. Der vertikale Abstand wird in diesem Fall über die Länge der gekrümmten Lotlinie von einem Punkt P_0 am Geoid bis zum Punkt P in einem beliebigen Abstand über dem Geoid definiert (siehe Abb.2.4). Die orthometrische Höhe h wird über die Differenz der Potentiale von Punkt P ($W = W_P$) und dem des Geoids ($W = W_0$) berechnet. Man nennt diese Potentialdifferenz die geopotentielle Kote C_P eines Punktes P .

$$C_P = W_0 - W_P \quad (2.19)$$

Um diese Potentialdifferenz in eine Länge in der Einheit Meter zu transformieren, wird durch den integralen Mittelwert der wahren Schwere entlang der Lotlinie $\overline{g_P}$ dividiert.

$$h = \frac{C_P}{\overline{g_P}} \quad (2.20)$$

Da für die exakte Berechnung von $\overline{g_P}$ Kenntnis der Dichte ρ zwischen P und P_0 erforderlich ist, kann $\overline{g_P}$ nicht in aller Strenge berechnet werden. $\overline{g_P}$ kann allerdings genähert durch den Schwerewert in halber Höhe von P ersetzt werden. Da auch in diesem Fall die Dichte in dieser Höhe bekannt sein muss, ist auch diese Näherung nicht hypothesenfrei, man arbeitet aber in diesem Fall meist mit der Standarddichte von $\rho = 2.67 [g/cm^3]$ (Weber, 2016a). Eine rein geometrisch

definierte Höhe ist die auf ein Referenz- oder das mittlere Erdellipsoid bezogene ellipsoidische Höhe H . Diese wird über die Ellipsoidnormale definiert und ist durch das Theorem von Villarceau

$$H = h + N \quad (2.21)$$

über die Geoidundulation N mit h verbunden. N entspricht somit dem vertikalen Abstand des Geoids vom jeweiligen Ellipsoid und wird entlang der Ellipsoidnormalen gemessen. Wie in Abb.2.4 ersichtlich weichen diese beiden Bezugsrichtungen, Ellipsoidnormale und natürliche Lotrichtung, aufgrund der Krümmung der Lotlinie und der damit zusammenhängenden Windschiefe der Bezugsflächen, voneinander ab.

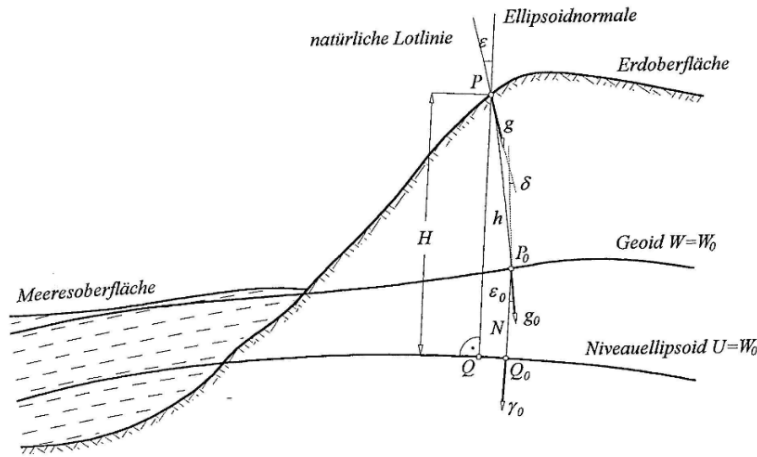


Abbildung 2.4: Zusammenhang zwischen orthometrischer Höhe h und ellipsoidischer Höhe H über die Geoidundulation N (Daxinger, 1996).

2.3 Das Niveauellipsoid

Ein Rotationsellipsoid als geometrische Figur der Erde ist für geodätische Berechnungen besser geeignet als die nicht analytisch geschlossen darstellbare Oberfläche des Geoids. Diesem Rotationsellipsoid kann ein normales Schwerefeld, unter der Bedingung, dass die Ellipsoidoberfläche eine Niveaufäche dieses Feldes ist, zugeordnet werden. Dieses Niveauellipsoid dient damit zugleich als geometrische als auch als physikalische Näherung des Erdkörpers. Das GRS80 (Geodetic Reference System 1980) legt ein solches geozentrisch gelagertes Niveauellipsoid fest und wird auf Beschluss der IUGG (International Union of Geodesy and Geophysics) über die folgenden definierenden Größen des Niveauellipsoids beschrieben (Moritz, 1980):

Äquatorradius / große Halbachse : $\mathbf{a} = 6.378137 \cdot 10^6$ [m]
 geozentrische Gravitationskonstante: $\mathbf{GE} = 3.986005 \cdot 10^{14}$ [m³/s²]
 dynamischer Formfaktor: $\mathbf{J}_2 = 1.08263 \cdot 10^{-3}$ []
 Winkelgeschwindigkeit $\omega = 7.292115 \cdot 10^{-5}$ [rad/s]

Die Masse des Niveauellipsoids und somit die Erdmasse E kann nur genau im Produkt mit der Gravitationskonstante G angegeben werden. Durch diese vier Parameter kann weiters das Potential U_0 auf der Oberfläche des Niveauellipsoids wie folgt berechnet werden:

$$U_0 = \frac{GE}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \arctan \eta + \frac{\omega^2 \cdot a^2}{3} \quad (2.22)$$

Die geometrische Abplattung f kann über den dynamischen Formfaktor J_2 berechnet werden. η entspricht der 2.Exzentrizität (nicht zu verwechseln mit der späteren Bezeichnung für die N-S Komponente der Lotabweichung), welche mithilfe der beiden Halbachsen a und b berechnet werden kann. Mit dem in 2.6 gegebenen Zusammenhang zwischen Potential und Kraft bzw. Schwere, lässt sich am Niveauellipsoid nicht nur ein theoretisches Potential U_0 sondern auch eine theoretische Schwere γ_0 angeben, welche nach der Formel von C. Somigliana berechnet werden kann:

$$\gamma_0 = \frac{\gamma_{\ddot{A}} \cdot a \cdot \cos^2 \varphi + \gamma_P \cdot b \cdot \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (2.23)$$

mit $\gamma_{\ddot{A}} = 9.7803267715$ [m/s²], der theoretischen Schwere am Äquator sowie $\gamma_P = 9.8321863685$ [m/s²], jener am Pol. Der Wert der theoretischen Schwere variiert auf dem Niveauellipsoid um nur 0.5%. Aufgrund von Rotationssymmetrie des Niveauellipsoids ist γ_0 nur eine Funktion der Breite φ .

Die große Halbachse a entspricht jener des GRS80 (Geodetic Reference System 1980) und wurde so gewählt, dass das Integral der Geoidundulationen über die gesamte Erde verschwindet. Im Normalfall $N \neq 0$, weichen das Potential eines Punktes P im wahren Schwerefeld W_P und jenes im theoretischen Schwerefeld U_P voneinander ab. Diese Potentialdifferenz bezeichnet man als das Störpotential T_P .

2.4 Das Störpotential

Für alle Punkte im Innen- und Außenraum kann ein Potential im wahren und theoretischen Schwerefeld angegeben werden. Daher ist auch das Störpotential als Potentialdifferenz dieser beiden Felder für alle Punkte des Raumes definiert durch:

$$T = W - U \quad (2.24)$$

Da W und U Niveauflächen zweier unterschiedlicher Massenanordnungen sind, wird T in 2.24, beim Vergleich zweier Niveauflächen desselben Potentialwertes, nur in Ausnahmefällen gleich Null. Dieser Vergleich ist als Theorie von Bruns bekannt und ist in Abb.2.5 dargestellt. Der Geoidpunkt P und sein, durch die Ellipsoidnormale auf das Ellipsoid projizierter Bildpunkt Q , stellen Punkte gleichen Potentialwertes $W_P = U_Q = W_0$ dar. Unter Berücksichtigung dieser Potentialgleichheit und einer Taylor-Entwicklung des im Normalfeld gegebenen Potentials von P , folgt das berühmte Theorem von Bruns, welches die Geoidundulation N mit dem Störpotential T in Verbindung bringt.

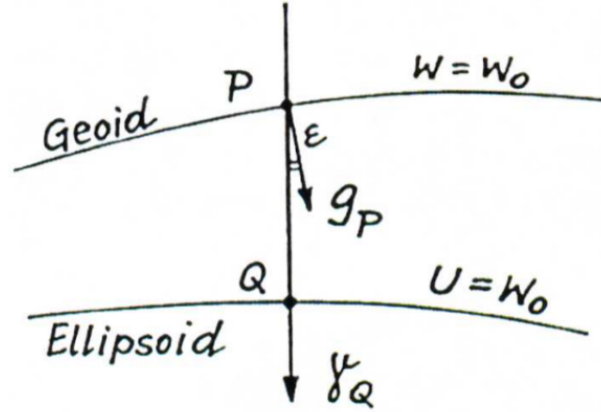


Abbildung 2.5: Niveauflächen W und U zweier unterschiedlicher Massenanordnungen.

$$N = \frac{T_P}{\gamma_Q} \quad (2.25)$$

Da γ_Q auf dem gesamten Niveauellipsoid nahezu konstant ist, misst der Wert von T die Hebungen und Senkungen des Geoids (Weber, 2016a). Die Differenz der Schwere in P , g_P und der theoretischen Schwere in Q , γ_Q , wird als scheinbare Schwereanomalie Δg bezeichnet.

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q \quad (2.26)$$

Je nachdem, wie die Schwere g_P auf das Geoid reduziert wird, unterscheidet man zwischen Freiluft-, Bouguer- oder Prey-Anomalie. Durch Differentiation von 2.24 nach der äußeren Nor-

malen $\vec{n}$ in einem Punkt P und unter Berücksichtigung von 2.25 sowie 2.26, gelangt man zur Differentialgleichung der physikalischen Geodäsie:

$$-\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial n} \cdot T = \Delta g \quad (2.27)$$

Da das Niveauellipsoid nur um Größen der Abplattung ($f \approx 3 \cdot 10^{-3}$) von einer Kugel abweicht, kann für 2.27 eine sphärische Näherung angegeben werden. Bezieht man diese auf das Geoid ergibt sich folgender Ausdruck:

$$-\frac{\partial T}{\partial l} - \frac{2}{R} \cdot T = \Delta g \quad (2.28)$$

Die scheinbaren Schwereanomalien Δg werden üblich aus Beobachtungen gewonnen, z.B. durch eine Schweremessung an der Oberfläche, Reduktion dieser auf das Geoid und Differenzbildung dieser mit der theoretischen Schwere γ_Q . Gelingt es 2.28 nach T aufzulösen, so erhält man nach 2.25 auch die Geoidundulation N (Weber, 2016a).

Sowohl das wahre Schwerepotentialfeld W, als auch jenes des Niveauellipsoides U enthalten einen gravitativen und einen zentrifugalen Anteil. Da die Zentrifugalbeschleunigung sehr genau bekannt ist kann die Gleichheit der Zentrifugalpotentialanteile in W und U angenommen werden. Unter dieser Annahme definiert das Störpotential T die Differenz zwischen der Gravitation der Erde und jener des Niveauellipsoides Torge (2003). Auch für T gilt im Außenraum die Laplace-Gleichung.

$$\Delta T = 0 \quad (2.29)$$

Da es im Zuge von Schwerereduktionen zur rechnerischen Entfernung der Massen außerhalb des Geoids kommt, bezeichnet der Begriff Außenraum im Bezug auf 2.29 den gesamten Raum außerhalb des Geoids. Mit T als Differenz zweier Gravitationspotentiale (bei welchen es sich um harmonische Funktionen handelt und somit auch T harmonisch ist), kann auch dieses nach Kugelfunktionen entwickelt werden.

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta C_{nm} \cdot \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \cdot \sin m\lambda) \cdot P_{nm}(\cos \theta) \quad (2.30)$$

Mit ΔC_{nm} und ΔS_{nm} als den residualen Kugelfunktionskoeffizienten. Aufgrund der Rotations-symmetrie des theoretischen Schwerefeldes U weichen nur die zonalen residualen Kugelfunktionskoeffizienten ΔC_l von jenen des Schwerefeldes C_n ab. Alle anderen Koeffizienten stimmen

mit jenen des wahren Schwerefeldes W überein. Durch die Annahme der Massengleichheit von Ellipsoid und Erdkörper sowie dem Zusammenfallen der Massenschwerpunkte, beginnt die KF-Entwicklung von T mit dem Grad $n=2$ (Torge, 2003). Anders als das Geoid kann ein Rotationsellipsoid und somit das Niveauellipsoid keine Niveaufläche eines inhomogenen Körpers sein. Mit U dem Potential eines homogenen und W jenem des realen inhomogenen Erdkörpers enthält T alles, was durch U nicht erfasst werden kann. Dabei handelt es sich im Wesentlichen um sichtbare und unsichtbare Masseunregelmäßigkeiten der Erde (Weber (2016a)).

Die Notwendigkeit von KF-Entwicklungen für diese Arbeit und somit deren Verwendung in TOPOGRAV liegt in der Berechnung von synthetischen Oberflächenwerten für ξ, η und g , sofern nicht geeignete Messwerte im Projektgebiet vorliegen. Im Kapitel 3.2.3 wird detaillierter auf die Verwendung der KF-Entwicklung und deren Beitrag zur Reduktion von Störfeldgrößen eingegangen.

Durch die in 2.28 gegebene Beziehung zwischen T und Δg , kann man auch Δg als harmonische Funktion $\Delta g(\theta, \lambda)$ auf der Einheitskugel auffassen und nach KF, $G_n(\theta, \lambda)$ entwickeln (Weber, 2016a).

$$\Delta g(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cdot \cos m\lambda + B_{nm} \cdot \sin m\lambda) \cdot P_{nm}(\cos \theta) \quad (2.31)$$

Führt man die Legendre-Polynome als Funktion des Zentriwinkels ψ zwischen Aufpunkt und einer Schwereanomalie ein und integriert über die gesamte Fläche σ der Einheitskugel, so lässt sich jedes G_n wie folgt berechnen:

$$G_n(\theta, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\sigma} P_n(\cos \psi) \cdot \Delta g(\theta, \lambda) d\sigma \quad (2.32)$$

Setzt man die KF-Entwicklungen von T und Δg in 2.28 ein, lässt sich T als Funktion von den G_n darstellen:

$$T = R \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{G_n(\theta, \lambda)}{n-1} \quad (2.33)$$

Setzt man 2.32 in 2.33 ein ergibt sich unter Verwendung von 2.25, eine KF-Entwicklung für N auf Basis beobachteter $\Delta g(\theta, \lambda)$. Diese KF-Entwicklung ist das berühmte Stokesche Integral:

$$N = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{R}{\gamma} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \iint_{\sigma} \Delta g(\theta, \lambda) \cdot P_n(\cos \psi) d\sigma \quad (2.34)$$

Der Summenterm in 2.34 lässt sich durch die sogenannte Stokesche Funktion $S(\psi)$ darstellen,

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6 \cdot \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cdot \cos \psi - 3 \cdot \cos \psi \cdot \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad (2.35)$$

womit sich für 2.34 folgender Ausdruck ergibt:

$$N(\theta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{R}{\gamma} \cdot \iint_{\sigma} S(\psi) \cdot \Delta g(\theta', \lambda') d\sigma \quad (2.36)$$

$S(\psi)$ fungiert als Gewichtsfunktion. Nahe am Aufpunkt $A(\theta, \lambda)$ befindlichen $\Delta g(\theta', \lambda')$ haben eine höhere Gewichtung bei der Berechnung von N nach 2.36 als weiter entfernt liegende. Die gestrichenen Größen beziehen sich auf das, über σ laufende Flächenelement, also auf die jeweilige beobachtete (bzw. interpolierte) Schwereanomalie. Das Integral von Stokes 2.36 wird unter anderem zur Berechnung von gravimetrischen Lotabweichungen verwendet.

2.5 Die Lotabweichungen

Der erwähnte Unterschied zwischen den Richtungen der Flächennormale des Referenz- oder des Erdellipsoid (und damit einer im Normalschwerefeld definierten Bezugsrichtung) und der aktuellen wahren Lotrichtungen, nach denen die Messinstrumente (Theodolit, Nivellier,...) aufgestellt werden, bezeichnet man als Lotabweichung. Dieser Winkel zwischen der Ellipsoidnormalen und der Lotrichtung wird durch sichtbare (Topographie, Kruste) und unsichtbare Massenunregelmäßigkeiten hervorgerufen (Richtwerte: 2/3 sichtbare und 1/3 unsichtbare). Da das Lot immer normal auf eine Äquipotentialfläche steht und diese aufgrund von Masseninhomogenitäten nicht parallel zueinander sind, verändert sich auch die Lotabweichung entlang des Lotes vom Geoid bis zur Erdoberfläche (Lotkrümmung).

Je nachdem in welchem Punkt die Lotabweichung definiert wird beziehungsweise welche Richtung als Bezugsrichtung gewählt wird, unterscheidet man zwischen drei Definitionen der Lotabweichung. In Abb. 2.7 sind diese unterschiedlichen Definitionen graphisch dargestellt.

a) Die Lotabweichung nach Molodenski ist an der Erdoberfläche sowie im Außenraum der Erde definiert. Sie hat die Lotlinie in Q (Punkt des Telluroid) als Bezugsrichtung.

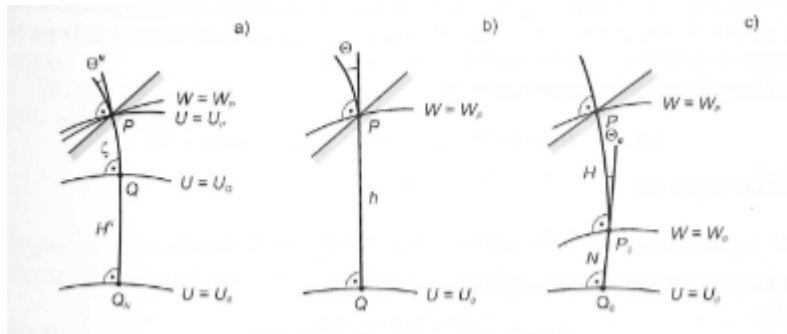


Abbildung 2.6: Lotabweichungen nach a) Molodenski, b) Helmert, c) Pizzetti (Torge, 2003).

b) Die Lotabweichung nach Helmert ist an der Erdoberfläche definiert und hat die Ellipsoidnormale als Bezugsrichtung. Sie wird von der Topographie der Oberfläche beeinflusst und ist jene Definition, welche von dem Programm TOPOGRAV berechnet werden kann.

c) Die Lotabweichung nach Pizzetti ist am Geoid definiert und hat ebenso wie jene nach Helmert die Ellipsoidnormale als Bezugsrichtung. Sie unterscheidet sich von den anderen beiden Definitionen durch die Krümmung der aktuellen Lotrichtung. Lotabweichungen an der Oberfläche (Helmert) können durch Reduktion auf das Geoid in jene nach Pizzetti umgerechnet werden.

Weiters spricht man von absoluter Lotabweichung, wenn sie auf das mittlere Erdellipsoid und von relativer Lotabweichung, wenn sie auf ein Referenzellipsoid bezogen wird. In den nachfolgenden Kapiteln wird auf die Berechnung von Lotabweichungen eingegangen und damit eine Differenzierung, zwischen astro-geodätischer und gravimetrischer Lotabweichung, getroffen.

2.5.1 Astro-geodätische Lotabweichungen

Bei der astro-geodätischen Lotabweichung (von hier an mit LA bezeichnet) handelt es sich um eine rein geometrische Interpretation. Wie bereits erwähnt handelt es sich dabei um die Winkel zwischen der Ellipsoidnormalen und der Tangente an die Lotlinie im betrachteten Standpunkt. In Österreich erreichen diese Winkel an der Oberfläche maximal $\pm 30''$ (Weber, 2016a). Der Ausdruck *astro-geodätisch* rührt daher, dass die Komponenten der LA, durch astronomische sowie geodätische Größen berechnet werden. Die natürliche Lotrichtung wird durch astronomische Beobachtungen von Breite φ , Länge λ und (oder) Azimut α festgelegt, welche mithilfe von Zenitkameras oder Astrolabmessungen bestimmt werden können. Das Messprinzip von Zenitkameras beruht auf der photographischen Richtungsmessung zu Sternen. Das in Zenitrichtung auf z.B. einem CCD-Bildschirm abgebildete Sternfeld, wird unter Kenntnis der exakten Belichtungszeitpunkte und der Näherungskordinaten der Station dem berechneten Referenzsternfeld aus einem Sternkatalog (z.B. Tycho-2 oder UCAC) gegenübergestellt und automatisch identifiziert. Der in das Sternfeld interpolierte Durchstoßpunkt der Kameradrehachse (gemittelt aus zwei Lagen) repräsentiert die durch φ und λ ausgedrückte Richtung der physikalischen Lotlinie im momentanten

Standpunkt (Bürki und Guillaume, 2010). Die geodätische (ellipsoidische) Breite B und Länge L eines Standpunktes können durch GNSS (Global Navigation Satellite System) oder durch Transformation der Landeskoordinaten auf das Bezugsellipsoid bestimmt werden.

Die Komponenten der LA bilden die Verbindung zwischen astronomischen und geodätischen Koordinaten eines Punktes. Zum genaueren Verständnis betrachte man Abb. 2.7. Darin wird um den Standpunkt die Gaußsche Richtungskugel geschlagen. Den Pol bildete eine Parallele zur Rotationsachse, Z_a ist das astronomische Zenit (physikalisches Lot) und Z_g das geodätische Zenit (Ellipsoidnormale). Mit ξ gleich der meridionalen (Nord-Süd), η der longitudinalen (Ost-West) sowie ε , der in einem beliebigen Azimut α gegebenen Komponente der LA. Über das durch den Pol, Z_a und Z_g gebildete sphärische Dreieck, lassen sich folgende Beziehungen herleiten:

$$\begin{aligned}\cos(\lambda - L) &= \cot(B + \xi) \tan \varphi \\ \sin(\eta) &= \sin(\lambda - L) \cos \varphi\end{aligned}\tag{2.37}$$

Wenn ξ , η und $(\lambda - L)$ klein sind, darf man schreiben:

$$\begin{aligned}\xi &= \varphi - B \\ \eta &= (\lambda - L) \cos \varphi\end{aligned}\tag{2.38}$$

Weiters lässt sich über das blaue rechtwinklige und das durch Pol- Z_a - Z_g gebildete sphärische Dreieck folgende Beziehung mit der totalen LA ϑ , sowie die, in einem beliebigen Azimut α befindliche Komponente der LA, ableiten:

$$\begin{aligned}\xi &= \vartheta \cos \alpha \\ \eta &= \vartheta \sin \alpha \\ \vartheta^2 &= \xi^2 + \eta^2 \\ \varepsilon &= \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha\end{aligned}\tag{2.39}$$

Die Formeln zur Berechnung der LA-Komponenten in 2.39 sind jedoch nur unter der Voraussetzung gültig, dass die kleine Halbachse des Referenzellipsoid parallel zur Rotationsachse der Erde ist. Ist dies nicht der Fall, so muss der Erdschwerevektor vom globalen geozentrischen System in das nationale Referenzsystem übergeführt werden. Dies kann analytisch durch eine Addition von Korrekturtermen (Drehwinkel) geschehen (Torge, 2003):

keiten (Lotstörungen) und Messfehler verursachen die zufälligen Anteile der LA-Komponenten (Weber, 2016a).

Projiziert man den Oberflächenpunkt P in Abb. 2.8 über die Ellipsoidnormale auf das Referenzellipsoid, so erhält man den Punkt Q. Wird P zuerst entlang der gekrümmten Lotlinie auf das Geoid nach P_0 und anschließend normal auf das Referenzellipsoid projiziert, so erhält man den Punkt Q_0 . Die Projektion von P nach Q wird als Projektion nach Helmert und jene von P nach Q_0 als Projektion nach Pizzetti, bezeichnet. Der Abstand von Q zu Q_0 ($\overline{QQ_0} = H \cdot \varepsilon$) ist jedoch so gering, dass er weit unter der Beobachtungsgenauigkeit astronomischer Messungen liegt (Weber, 2016a).

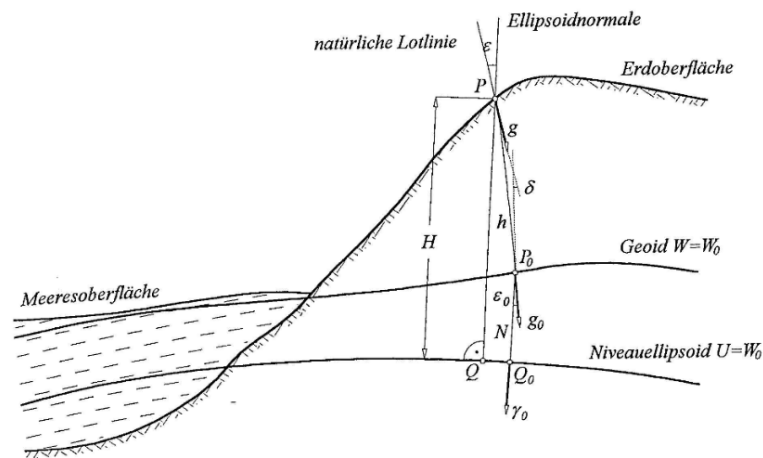


Abbildung 2.8: Projektion nach Helmert von P nach Q und jener nach Pizzetti von P nach Q_0 . Die Lotkrümmung δ als Differenz der, an der Erdoberfläche und jener am Geoid definierten LA (Daxinger, 1996).

Die astro-geodätische LA bezieht sich auf die Erdoberfläche und ist der Definition nach eine LA nach Helmert. Die Differenz zwischen dieser und jener nach Pizzetti, welche am Geoid definiert ist, wird als Lotkrümmung δ bezeichnet (siehe Abb. 2.8). Die Lotkrümmung ist stark von der Topographie, welche eine große Auswirkung auf die Oberflächenlotabweichung hat, und den Masseninhomogenitäten zwischen Oberfläche und Geoid abhängig, weshalb sie sehr schwer zu bestimmen ist. Die Kenntnis der Lotkrümmung ist für die Reduktion von LA-Komponenten auf das Geoid unabdingbar. Die reduzierte azimutale LA-Komponente ε_0 findet in der astro-geodätischen Geoidbestimmung, dem astronomischen Nivellement, Anwendung.

2.5.2 Astronomisches Nivellement

Diese auf Helmert zurückgehende Methode gestattet die Detailuntersuchung des Geoids in Bezug auf ein beliebiges Referenzellipsoid (Daxinger, 1996). Genauer gesagt, können damit Geoidundulationsunterschiede dN entlang des Geoids bestimmt werden. Wie in Abb. 2.11 dargestellt,

wird zur Bestimmung der Undulationsdifferenz dN die auf das Geoid reduzierte azimutale LA-Komponente ε_0 benötigt. Für den Geoidanstieg gilt die in Abb.2.11 gezeigte Beziehung:

$$\tan \varepsilon_0 = \frac{dN}{ds} \quad (2.42)$$

Bei ε_0 handelt es sich um kleine Winkel, weshalb man $\tan \varepsilon_0 = \varepsilon_0$ setzen kann:

$$dN = -\varepsilon_0 \cdot ds \quad (2.43)$$

Die Integration von ε_0 zwischen zwei Punkten des Geoids liefert die Geoidhöhendifferenz:

$$\Delta N_{1,2} = N_2 - N_1 = - \int_1^2 \varepsilon_0 \cdot ds \quad (2.44)$$

Das negative Vorzeichen folgt aus den Vorzeichenkonventionen für die Geoidundulation N und die Lotabweichung (Torge, 2003).

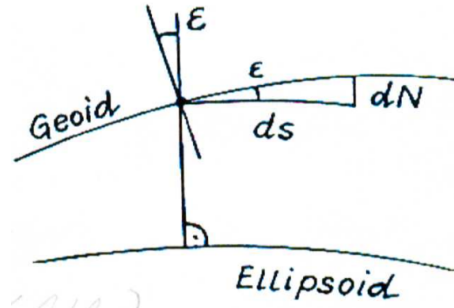


Abbildung 2.9: Prinzip des astronomischen Nivellement (Weber, 2016b).

Die nach 2.44 bestimmte Art der Geoidbestimmung setzt jedoch voraus, dass die integrierten azimutalen LA-Komponenten am Geoid definiert sind. Dafür bedarf es, wie schon im vorherigen Kapitel erwähnt, einer korrekten Reduktion der an der Oberfläche gemessenen azimutalen LA-Komponente ε auf das Geoid. Diese steht mit der am Geoid definierten Komponente ε_0 über die Lotkrümmung δ in Verbindung. Für die Berechnung von ε , nach 2.39, benötigt man ξ und η , welche wiederum astro-geodätisch nach 2.38 definiert sind. Um ε_0 berechnen zu können, müssen die an der Erdoberfläche beobachtete astronomische Breite B und Länge L auf das Geoid reduziert werden.

Die reduzierten astronomischen Koordinaten B_0 und L_0 , stehen mit B und L , über die, aus der Integration der Lotkrümmungskomponenten δ_x und δ_y , zwischen Erdoberfläche und dem Geoid, bestimmten Reduktionsterme δB und δL , in Verbindung (Torge, 2003).

$$\begin{aligned}
B_0 &= B + \delta B \\
L_0 &= L + \delta L
\end{aligned}
\tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
\delta B &= - \int_0^H \delta_x dH \\
\delta L \cdot \cos B &= - \int_0^H \delta_y dH
\end{aligned}
\tag{2.46}$$

In 2.46 wird von der Höhe 0 (Geoid) bis zur Erdoberfläche mit der orthometrischen Höhe H integriert. Die beiden Komponenten der Lotkrümmung werden durch die partiellen Ableitungen von B und L bestimmt, da diese eine bei einer Bewegung im Erdschwerefeld auftretende Änderung der Krümmung beschreiben. Findet die Bewegung in der Horizontalebene statt, handelt es sich um die Krümmung der Niveaulfläche, bei einer vertikalen Bewegung um die Krümmung der Lotlinie (Torge, 2003).

$$\begin{aligned}
\delta_x &= \frac{\partial B}{\partial z} \\
\delta_y &= \cos B \frac{\partial L}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{2.47}$$

Damit erhält man für die, auf das Geoid reduzierten Komponenten der LA:

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \xi + \delta B \\
\eta_0 &= \eta + \cos B \cdot \delta L \\
\varepsilon_0 &= \xi_0 \cdot \cos \alpha + \eta_0 \cdot \sin \alpha
\end{aligned}
\tag{2.48}$$

Die soeben beschriebene strenge Berechnung der reduzierten Komponenten der LA, ist nur hypothetisch möglich, da sie vom Verlauf der Schwere entlang der Lotlinie abhängt. Für eine genäherte Reduktion der astronomischen Koordinaten, kann man die sogenannte *normale Lotkrümmung* berechnen. Dabei handelt es sich um die im theoretischen Schwerefeld des Niveauellipsoides auftretende Lotkrümmung, welche aufgrund der Rotationssymmetrie des theoretischen Schwerefeldes nur in der Meridianebene auftritt (Torge, 2003). Diese normale Krümmung der Lotlinie bewirkt eine Abweichung ΔB der auf der Erdoberfläche gemessenen astronomischen Breite B gegenüber jener am Geoid B_0 . ΔB definiert außerdem die Differenz zwischen ε und ε_0 und kann wie folgt berechnet werden (Hunziker, 1960).

$$\begin{aligned}\Delta\varphi'' &= \xi - \xi_0 \\ &= 0.000171'' \cdot \sin 2\varphi \cdot H^m\end{aligned}\tag{2.49}$$

Nach 2.49 wächst die normale Lotkrümmung proportional mit der Höhe und darf daher als Kreisbogen angesehen werden. Diese Korrektur erreicht mit $H = 3000\text{m}$ und $\varphi=45^\circ$ einen Wert von $0.5''$, wohingegen die wahre Lotkrümmung Korrekturwerte von bis zu $20''$ erreichen kann (Hunziker, 1960).

Neben der Krümmung der Lotlinie spielt jene des Rotationsellipsoids eine wichtige Rolle im Zusammenhang mit den Komponenten der LA. Aus Abbildung 2.10 ergibt sich der Zusammenhang zwischen den Meridiankrümmungsradius M bzw. des Querkrümmungsradius N , mit den Bogenelement des Meridians bzw. des Parallelkreises zu

$$\begin{aligned}dG &= M \cdot d\varphi \\ dL &= N \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda\end{aligned}\tag{2.50}$$

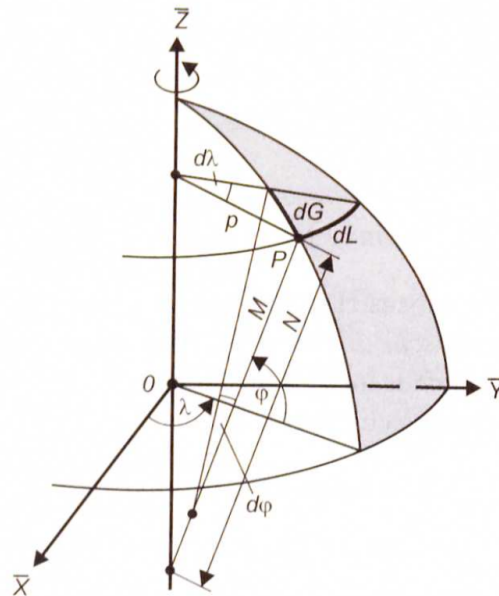


Abbildung 2.10: Krümmung des Rotationsellipsoids.

Mithilfe dieser Bogenelemente und unter Berücksichtigung von 2.25 lassen sich die LA-Komponenten in Zusammenhang mit dem Störpotential 2.5 bringen.

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{1}{\gamma \cdot (M + h)} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \\ \eta &= -\frac{1}{\gamma \cdot (N + h) \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \lambda}\end{aligned}\tag{2.51}$$

h entspricht der orthometrischen Höhe. In sphärischer Näherung erhält man

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{1}{\gamma \cdot R} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \\ \eta &= -\frac{1}{\gamma \cdot R \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \lambda}\end{aligned}\tag{2.52}$$

An dieser Stelle ist es wichtig zu erwähnen, dass TOPOGRAV die sphärische Näherungsformel 2.52 zur Berechnung der LA-Komponenten heranzieht. Jedoch werden bei den residualen KF-Koeffizienten, für die Berechnung des Störpotentials T nach 2.30, Terme bis zum Grad n=8, von der KF-Entwicklung des EGM abgezogen. Damit beziehen sich die LA-Komponenten, wie in Abbildung 2.11 dargestellt, auf die ellipsoidische Referenzfigur des Rotationsellipsoids.

Abschließend soll noch auf das Problem der Interpolation von Geoidundulationen eingegangen werden. Das Integral in 2.44 setzt voraus, dass eine kontinuierliche Angabe von Lotabweichungen entlang des Weges ds vorliegen. Dies ist in der Realität aber nicht gegeben. Übliche Messabstände von LA-Punkten betragen einige 10km und mehr (Torge, 2003). Unter der Annahme eines linearen Geoidverlaufes (siehe: Abb. 2.11) zwischen den Stützpunkten A und B kann die Geoiddifferenz zwischen A und B, wie folgt berechnet werden:

$$\Delta N_{12} = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \cdot s_{AB}\tag{2.53}$$

wobei s_{AB} der Abstand zwischen A und B ist.

Mithilfe des astronomischen Nivellements ist es möglich Geoidundulationsdifferenzen ΔN_{12} aus reduzierten, beobachteten LA zu bestimmen. Somit liegt der Umkehrschluß nahe, daß es möglich ist aus Geoidundulationen, LA zu gewinnen. Dies ist, indirekt über gemessene Schwereanomalien Δg und dem Integral von Stokes sowie durch Ableitung des Geoidanstiegs nach ds, möglich. Die so gewonnenen LA nennt man daher auch *gravimetrische LA*.

Anderes als bei den astro-geodätisch gewonnen LA, bei welchen auf die Wahl des Referenzellipsoides geachtet werden muss, sind die gravimetrischen LA für das mittlere Erdellipsoid gültig.

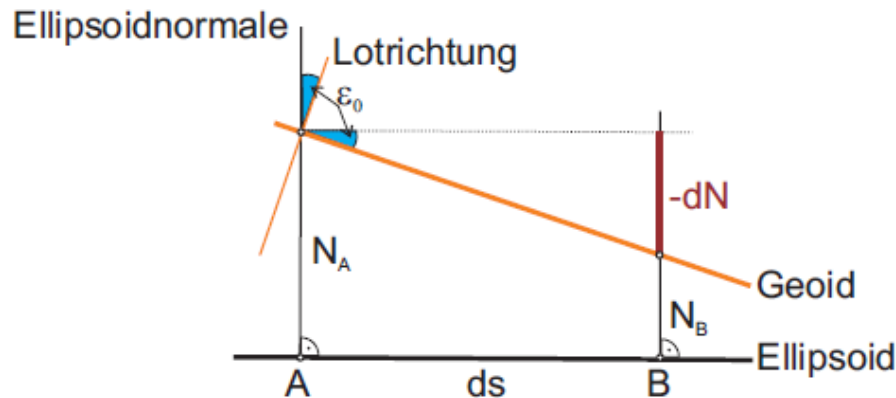


Abbildung 2.11: Linearisierung des Geoidverlaufes (Wiesenhofer, 2007).

Gravimetrische LA werden durch Schwereanomalien Δg gewonnen. Für Δg braucht man jedoch Schwerewerte am Geoid, welche man durch Reduktion der an der Oberfläche gemessene Schwere auf das Geoid, gewinnt. Die für Schwerereduktionen wesentlichen Verfahren sind die Freiluftreduktion, Bouguer-Reduktion, so wie die für diese Arbeit wichtige, topographische Korrektur.

2.6 Verfahren der Reduktion

Bei der in 2.27 gezeigten Differentialgleichung der physikalischen Geodäsie handelt es sich um ein drittes Randwertproblem. Daher muss es sich bei den für die Bildung von Schwereanomalien Δg verwendeten Schwerewerten auch tatsächlich um Randwerte handeln. Stellt das Geoid diese Randfläche dar, dann müssen im Rahmen der Schwerereduktion Massen oberhalb des Geoids ins Innere verlagert oder entfernt werden.

Möchte man g -Werte in der Masse oder in Hohlräumen, ist es jedoch nicht notwendig oder erwünscht, die darüberliegenden Massen zu entfernen oder umzuschichten. Viel mehr möchte man in diesem Fall, den Einfluss der darüberliegenden Massen auf eine im Tunnel durchgeführte Schweremessung, berechnen. Auch in diesem Fall können Methoden der Reduktion herangezogen werden.

2.6.1 Freiluftreduktion

Bei dieser Art der Reduktion werden über dem Geoid befindliche Massen einfach ignoriert. Anschließend wird mit dem von Faye bestimmten theoretischen vertikalen Gradienten die gemessene Oberflächenschwere auf das Geoid reduziert. Für die Berechnung der reduzierten Schwere g_0 ergibt sich nach Faye:

$$g_0 = g_{gem} + 0.3086 \cdot h[m] \quad (2.54)$$

mit g_{gem} der an der Erdoberfläche gemessenen Schwere, h der Höhe des Messpunktes über dem Geoid und dem vertikalen Gradienten von 0.3086 [mGal/m].

Folglich wird die Schwere größer, da die darüberliegenden Massen entfernt und somit keine Attraktion ausüben und der Abstand zum Gravitationszentrum kleiner geworden ist.

2.6.2 Topographische Reduktion

Bei dieser Form der Reduktion wird die sich in der Nähe des Aufpunktes befindliche natürliche Geländeform (Topographie) eingeebnet. Dabei werden alle Massen, welche sich über dem Niveau des Aufpunktes befinden, rechnerisch abgetragen und jene unterhalb des Niveaus aufgefüllt. Da diese in TOPOGRAV verwendete Remove-and-Restore-Methode in Kapitel 3 näher beschrieben ist, wird hier nicht näher darauf eingegangen.

2.6.3 Bouguer Reduktion

Diese Form der Reduktion berücksichtigt, im Gegensatz zur Freiluftreduktion, die Massen zwischen Geoid und Aufpunkt. Dabei wird der Zwischenraum Geoid-Aufpunkt, als unendlich ausgedehnte, ebene Platte betrachtet. Wird die Geländeform dabei nicht berücksichtigt, so spricht man von der sogenannten *einfachen* Bouguer-Reduktion. Die Schwerewirkung dieser unendlichen, ebenen Platte auf den Aufpunkt berechnet sich nach:

$$\delta g_B = 2 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \cdot h \quad (2.55)$$

mit $G = 6.67408 \cdot 10^{-11} [\frac{m^3}{kg \cdot s^2}]$ der Gravitationskonstante, ρ der Plattendichte und h der Dicke der Platte, welcher der Höhe des Aufpunktes entspricht.

Wird neben der unendlich ausgedehnten, ebenen Platte auch die Topographie und die Freiluftreduktion berücksichtigt, so wird von der *vollständigen* Bouguer-Reduktion gesprochen. Wird diese Platte im Zuge der Reduktion abgehoben, so verringert sich die Schwere im reduzierten Geoidpunkt und die *vollständige* Bouguer-Reduktion berechnet sich nach:

$$\begin{aligned} g_0 &= g_{gem} + \delta g_{topo} - \delta g_B + 0.3086 \cdot h \\ &= g_{gem} + \delta g_{topo} + 0.1967 \cdot h \end{aligned} \quad (2.56)$$

Der vertikale Gradient von $+0.1967 \text{ [mGal/m]}$ wird Bouguer-Gradient genannt und setzt sich aus dem Freiluftgradienten ($+0.3086 \text{ [mGal/m]}$) sowie dem in 2.55 mit einer Standarddichte von $\rho = 2.67 \text{ [g/cm}^3\text{]}$ berechneten vertikalen Gradienten (-0.1119 [mGal/m]) zusammen.

2.6.4 Reduktion von Poincare-Prey

Die bisher erwähnten Methoden der Reduktion liefern Randwerte des Geoids, da die darüber befindlichen Massen, rechnerisch entfernt wurden. Bei der Reduktion von Poincare-Prey wird nach der Einebnung der Topographie, Anhebung der Bouguer-Platte und Absenkung des Aufpunktes mittels Freiluftreduktion, die zuvor angehobene Bouguer-Platte wieder aufgesetzt. Nach dem Aufsetzen der Bouguer-Platte ist die topographische Reduktion für den bereits reduzierten Punkt neu zu berechnen, da diese sich von der zuvor für den Oberflächenpunkt berechneten topographischen Reduktion unterscheidet. Nach Poincare-Prey reduzierte Schwerewerte sind keine Randwerte des Geoids, sondern wahre Schwerewerte in der Masse wie sie mit einem Bohrlochgravimeter oder in einem Tunnel (wenn man die geringe Ausdehnung des Tunnelquerschnitts vernachlässigt) gemessen werden könnten. Die in einem Punkt des Erdinneren zu messende Schwere berechnet sich nach:

$$g_0 = g_{gem} + [\delta g_{Topo} - \delta g'_{Topo} - 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \cdot h + 0.3086 \cdot h] \quad (2.57)$$

mit δg_{Topo} der topographischen Reduktion des Aufpunktes, $\delta g'_{Topo}$ der topographischen Reduktion der reduzierten Punkten der Plattendicke und dem Faktor 4 als doppelte Bouguer-Reduktion. Fasst man nun die vertikalen Gradienten der Freiluftreduktion sowie der doppelten Bouguerplatte zusammen, so ergibt sich der vertikale Gradient nach Prey zu $+0.0848 \text{ [mGal/m]}$ (Weber, 2016a).

2.6.5 Isostatische Reduktion

Die Lehre von der Isostasie beschreibt den Gleichgewichtszustand zwischen den Massen der Erdkruste und dem darunter befindlichen Erdmantel. Danach wird ein Massenüberschuss der Erdkruste (Gebirge) durch ein Massendefizit (Dichtedefizit) im Erdmantel ausgeglichen - es herrscht hydrostatisches Gleichgewicht. Umgekehrt wird aber auch ein z.B. durch Meere hervorgerufenen Massendefizit durch eine höhere Dichte im Erdmantel, ausgeglichen. Diese Defizite/Überschüsse müssen bei großräumigen Untersuchungen bei Schwerereduktionen berücksichtigt werden. Zur Beschreibung und Berechnung dieses Effektes wurden Mitte des 19. Jahrhunderts zwei unterschiedliche Theorien (Airy-Heiskanen, Pratt-Hayford) entwickelt. Da diese beiden Theorien die auftretenden Effekte nicht hinreichend erklären, verwendet man heutzutage komplexere Modelle, wie jenes von Vening-Meinesz (Wikipedia (2016)).

Nach der Theorie von Airy-Heiskanen liegt die Lithosphäre (äusserste Schicht der Erde: Erdkruste + äusserster Teil des Erdmantels) nach dem archimedischen Prinzip, auf der Asthenosphäre des oberen Erdmantels. Eine weitere grundsätzliche Annahme ist, dass alle Massensäulen die gleiche Dichte haben. Gebirge werden durch längere Säulen repräsentiert als Gebiete im Flachland. Danach dringen diese aufgrund des höheren ausgeübten Drucks, tiefer in die darunterbefindliche Asthenosphäre ein, als jene des Flachlands. Unter dieser Annahme sinkt die Dichte unterhalb von Gebirgen im Vergleich zu Dichten unterhalb des Flachland, da die Säulendichte jener der Lithosphäre entspricht und diese eine geringere Dichte aufweist als die Asthenosphäre. Nach dieser Theorie dringen die unterschiedlichen Massensäulen unterschiedlich tief in den Mantel ein.

Nach der zweiten Theorie, jener von Pratt-Hayford, haben die unterschiedlichen Säulen (Gebirge und Flachland) die gleiche Eindringtiefe. In einer Tiefe von ca. 100km herrscht hydrostatisches Gleichgewicht und damit gleiche Dichte. Demnach müssen Gebirgssäulen eine geringere Dichte als Säulen des Flachlands aufweisen, um in dieser Tiefe gleichen Druck auszuüben (Wikipedia (2016)).

Wählt man im Zuge der Schwerereduktion ein isostatisches Modell aus, so wird dieses zusammen mit der topographischen Reduktion als topographisch-isostatische Reduktion verwendet. Bei dieser Form der Reduktion, werden Massendefizite so aufgefüllt, dass Massensäulen, repräsentiert durch ein digitales Geländemodell, gleiche Dichte aufweisen. Zusammen mit der topographischen Reduktion soll eine homogene Platte entstehen (Wiesenhofer (2007)).

Mithilfe eines digitalen Geländemodells und eines isostatischen Modells, kann auch das topographisch - isostatische Potential T_{TI} in eine Kugelfunktionsreihe entwickelt werden. Zieht man T_{TI} von einer globalen Störpotentialentwicklung T ab, so verbleiben im Restfeld Terme mittlerer Wellenlänge. In diesem 'glatten' Restfeld können Störfeldgrößen wie Geoidundulationen oder LA einfach interpoliert bzw. prädiiziert werden (Weber (2016b)).

Diese Modellierung von Einfüssen des langwelligen Anteils des Schwerfeldes durch Erdschwerfeldmodelle (wie dem in TOPOGRAV verwendeten Modell: EGM2008) sowie des mittel- und kurzwelligen Anteils durch eine topographische Korrektur mithilfe von digitalen Geländemodellen, findet in der sogenannten Remove-and-Restore-Methode Anwendung. Mit dieser Methode, werden in TOPOGRAV die Oberflächenlotabweichungen und reduzierten Schwerewerte berechnet.

2.6.6 Der indirekte Effekt

Durch die, im Zuge der besprochenen Verfahren der Reduktion durchgeführten Massenverlagerungen, kommt es auch zu einer Änderung des Schwerepotentials δW . Diese Potentialdifferenz, zwischen dem, durch die ursprüngliche Masse und jenem nach der Massenverlagerung hervorgerufenen Potentialfeldes, bewirkt eine Deformation des Geoids und wird als der indirekte Ef-

fekt einer Schwerereduktion bezeichnet (Daxinger, 1996). Werden Schwereanomalien Δg , welche durch reduzierte Schwerewerte ohne Berücksichtigung dieses indirekten Effekts gebildet werden, in die Formel von Stokes 2.34 eingesetzt, so ist die durch die erhaltenen Geoidundulationen berechnete, ausgezeichnete Äquipotentialfläche das sogenannte Co-Geoid (steht für: compensated geoid)(Weber, 2016b). Nach dem Theorem von Bruns 2.25 kann der Abstand δN zwischen Geoid und Co-Geoid durch

$$\delta N = \frac{\delta W}{\gamma_0} \quad (2.58)$$

berechnet werden. Da Massenverlagerungen keine Auswirkungen auf das Fliehkraftpotential Φ haben, kann man 2.58 auch durch die Änderung des Gravitationspotentials dV anschreiben.

$$\delta N = \frac{\delta V}{\gamma_0} \quad (2.59)$$

Zur Berechnung von δV wird die im nachfolgendem Kapitel besprochene Methode zur Berechnung des Potentials von Quadermassen dm auf einen Aufpunkt verwendet. dV ergibt sich durch Integration der Potentialwirkung einzelner Quadermassen: $dV = G \cdot dm / r$.

Der indirekte Effekt bewirkt eine Änderung der Schwereanomalie Δg

$$\delta g_{ind} = -\frac{\partial g}{\partial h} \cdot \delta N \approx 0.3086 \cdot \delta N \quad (2.60)$$

und beeinflusst auch die gravimetrischen LA.

$$\begin{aligned} \delta \xi &= -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \delta N}{\partial \varphi} \\ \delta \eta &= -\frac{1}{R \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{\partial \delta N}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Kapitel 3

Remove-and-Restore-Methode

Im letzten Abschnitt des vorherigen Kapitels wurde auf die unterschiedlichsten Verfahren der Schwere-Reduktion eingegangen. Die dabei angesprochene topographische Reduktion handelt von der Einebnung und Berechnung der auf einen Aufpunkt ausgeübten Attraktion, der sich in der unmittelbaren Umgebung befindlichen Topographie. Weiters versteht man unter dem Begriff *Einebnung*, das Abtragen aller sich über dem Niveau des Aufpunktes befindlichen Massen, sowie das Auffüllen, aller unterhalb diesem Niveau befindlichen Defizitmassen (wie in Abb.4.7 abgebildet). Mit der dadurch entstehenden ebenen Bouguerplatte kann anschließend eine Bouguer Reduktion durchgeführt werden.

Zur Berechnung der Attraktion dieser Überschuss- und Defizitmassen werden einmaschige digitale Höhenmodelle (DHM) verwendet. Aufgrund der limitierten Ausdehnung (einige 10er Kilometer) dieser DHM, definieren diese die mittleren und hohen Frequenzen des Erdschwerefeldes. Zur Berechnung von weiter entfernt liegenden topographischen Massen werden Erdschwerefeldmodelle herangezogen. Diese repräsentieren die langwelligen und damit niederfrequenten Anteile des Erdschwerefeldes (Weber (2016b)).

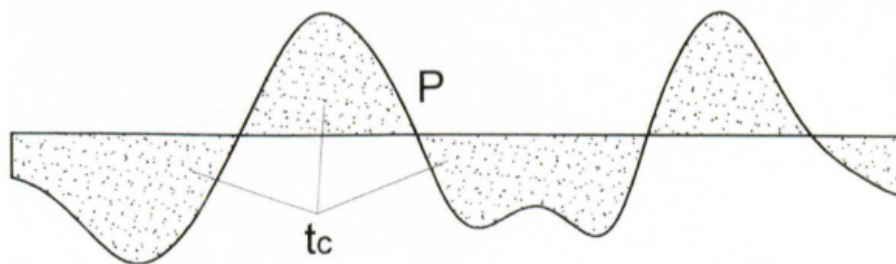


Abbildung 3.1: Darstellung der topographischen Korrektur (Weber, 2016b).

3.1 Berechnung der langwelligen LA-Komponenten

Erdschwerefeldmodelle oder Geopotentialmodelle sind Kugelfunktionsentwicklungen (KF - Entwicklungen) des Gravitationspotentials der Erde, üblicherweise bis zum Grad und Ordnung 200 bis 360 (entspricht $\lambda/2 = 55\text{km}$). Das in TOPOGRAV verwendete Modell EGM2008 (Earth Gravity Model 2008) ist sogar bis zum Grad und Ordnung 2190 (entspricht $\lambda/2 = 10\text{km}$) entwickelt (Weber (2016b)). Zur Berechnung der Koeffizienten dieser KF-Entwicklungen dienten Beobachtungen von Satellitenbahnstörungen, Altimeterdaten, Gradiometerdaten sowie terr. Schwereanomalien, welche entweder mittels Gravimeter gemessen oder aus Altimetermessungen abgeleitet werden können.

Das Modell der KF-Entwicklung des Gravitationspotentials der Erde ist in 2.13 dargestellt. Zur Berechnung von Schwerefeldfunktionalen, wie Geoidundulationen, LA oder Schwereanomalien, benötigt man das bereits erwähnte Störpotential T, welches als Differenz zwischen dem tatsächlichen und dem normalen Gravitationspotential der Erde, definiert ist. Die vollständig normierte KF-Entwicklung von T lautet:

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \bar{C}_{nm}^s \bar{Y}_{nm}^s(\theta, \lambda) \quad (3.1)$$

Mit

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{für } m=0 \\ 1/2 & \text{für } m \neq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

gilt für die vollständig normierten Kugelfunktionen

$$\bar{Y}_{nm}(\theta, \lambda) = \sqrt{\frac{(2n+1) \cdot (n-|m|)!}{\varepsilon_m \cdot (n+|m|)!}} \cdot Y_{nm}(\theta, \lambda) \quad (3.3)$$

sowie für die zugehörigen Koeffizienten

$$\bar{C}_{nm} = \sqrt{\frac{\varepsilon_m \cdot (n+|m|)!}{(2n+1) \cdot (n-|m|)!}} \cdot C_{nm} \quad (3.4)$$

Mit dem nach 3.1 entwickelten Störpotential T können, unter Berücksichtigung der sphärischen Näherung in 2.52, die langwelligen Komponenten der LA wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \xi_{egm} &= -\frac{1}{R \cdot \gamma} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \\ \eta_{egm} &= -\frac{1}{R \cdot \gamma \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit dem mittleren Erdradius R und der theoretischen Schwere am Niveauellipsoid γ nach 2.23. Der Zusatz *egm* weist darauf hin, dass die nach 3.5 berechneten LA-Komponenten nur den langwelligen und mithilfe von Erdschwerefeldmodellen berechneten Anteil der gesamten Oberflächenlotabweichung repräsentieren.

Bevor mit der Berechnung der topographischen Korrektur und damit mit der Berechnung der, durch Überschuss- und Defizitmassen auf einen Aufpunkt ausgeübten Attraktion begonnen werden kann, muss noch auf den Grad der KF-Entwicklung des Erdschwerefeldes eingegangen werden.

Der Grad der KF-Entwicklung des Erdschwerefeldes gibt Auskunft, über die geometrische Größe von topographischen Details, welche durch das globale Schwerefeldmodell abgedeckt werden. Beim EGM2008 entspricht dies einer Länge von ca. 10km. Um zu vermeiden, dass ein Wellenlängenbereich, welcher durch das globale Erdschweremodell bereits abgedeckt wurde, nicht nochmal durch das DHM erfasst wird bzw. das Risiko einzugehen, dass Wellenlängen weder durch das verwendete globale Erdschweremodell noch durch das verwendete DHM abgedeckt werden, ist das verwendete DHM bis zum passenden Grad vorab zu filtern. Im Programm TOPOGRAV geschieht dies durch eine Tiefpass-Filterung des DHM entsprechend dem Abbruchgrad der EGM2008-Entwicklung. Dieses gefilterte DHM (Residual Terrain Model-RTM) kann nun zur Berechnung der topographischen Korrektur herangezogen werden (Weber (2016b)).

Für die Berechnung der topographischen Korrektur (des kurzwelligen Anteils) benötigt TOPOGRAV gemessene Oberflächen LA-Komponenten. Liegen diese für eine Station nicht vor, so werden mithilfe des LA-Anteils des EGM2008 (ξ_{egm}, η_{egm}) und jenem Anteil des RTM (ξ_{rtm}, η_{rtm}) modellierte Oberflächen LA-Komponenten berechnet (Hohensinn, 2014):

$$\begin{aligned}\xi_{modell} &= \xi_{egm} + \delta\xi_{nc} + \xi_{rtm} \\ \eta_{modell} &= \eta_{egm} + \eta_{rtm}\end{aligned}\tag{3.6}$$

mit $\delta\xi_{nc}$ der Korrektur wegen der Krümmung des Erdschwerefeldes.

3.2 Berechnung der kurzwelligen LA-Komponenten

Zur Berechnung der DHM-Terme der LA-Komponenten aus 3.6 stehen zwei wesentliche Verfahren zur Verfügung. Bei beiden Varianten geht man von einer Verebnung der Aufpunktsumgebung, siehe Abb.3.2, aus. Die Erdkrümmung kann als Funktion des Abstands zum Aufpunkt als kleine Korrektur an die DHM-Gitterhöhen angebracht werden (Weber, 2016b).

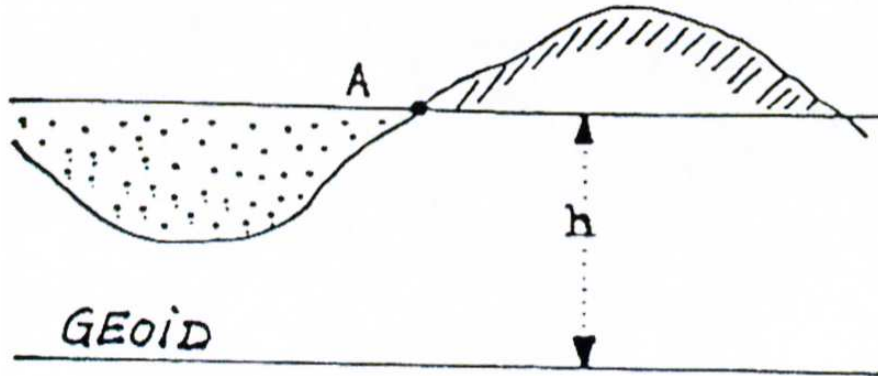


Abbildung 3.2: Ebene Approximation der Aufpunktshöhe h (Weber, 2016a).

3.2.1 FFT-Methode

Das erste Verfahren ist die sogenannte FFT-Methode (Fast-Fourier-Transformation) und geht von der ebenen Approximation des Stokes-Integrals 2.36 aus. Bei dieser Approximation werden die Stokes-Funktion 2.35 und das Flächenelement $d\sigma$ durch

$$S(\psi) = \frac{2}{\psi}$$

$$d\sigma = \frac{s}{R^2} ds d\alpha \quad (3.7)$$

angenähert. s entspricht dem Bogen von Aufpunkt zu betrachteter Schwereanomalie und R dem Krümmungsradius. Mit $s ds d\alpha = dx dy$ und dem Ersetzen von s durch die Distanz r

$$r = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2} \quad (3.8)$$

mit x_A, y_A den Koordinaten des Aufpunktes und x, y jenen des laufenden Flächenelements, wird auf ebene Koordinaten übergegangen. Für ebenes und hügeliges Gelände kann r durch die ebene Distanz r_0

$$r_0 = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} \quad (3.9)$$

ersetzt werden, wo hingegen im Bergland r in eine Potenzreihenentwicklung nach $z - z_A$ zu entwickeln ist. Dadurch kann man die Integration über die Kugelfläche in 2.36 als Faltungsintegral

anschreiben, welches mit Hilfe der FFT ausgewertet werden kann. Liegen keine Schwerewerte vor so kann in einer weiteren Approximation die Schwereanomalie Δg gleich der Wirkung einer Bouguerplatte 2.55 gesetzt werden. Unter dieser Annahme und Vereinfachung, können die Geoid- undulation N sowie die LA-Komponenten ξ und η eines Aufpunktes $A(x_A, y_A)$, das Störpotential T und alle Funktionale mithilfe eines DHM unter Nutzung der FFT (mit * dem Faltungssymbol) wie folgt berechnet werden:

$$N(x_A, y_A) = \frac{G \cdot \rho}{\gamma} \cdot \Delta h * \frac{1}{r_0(x, y)} \quad (3.10)$$

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}(x_A, y_A) = -\frac{G \cdot \rho}{\gamma} \cdot \Delta h * \frac{\begin{Bmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{Bmatrix}}{r_0^3(x, y)} \quad (3.11)$$

mit der Oberflächendichte ρ des Einflussgebiets. Da die Bouguerplatte mit der Dicke Δh als unendlich ausgedehnte Platte konstanter Dichte ρ betrachtet wird, erscheint die Implementierung eines möglichen Dichtemodells für die FFT-Methode nicht sinnvoll oder schwer implementierbar. In dieser Arbeit wird daher ausschließlich die sogenannte Quader- oder Prismenmethode, welche die topographische Korrektur über die Attraktionswirkung von Massenquader berechnet, herangezogen um variable Dichtemodelle in der lokalen Schwerefeldberechnung zu nutzen.

3.2.2 Quader-Methode

Anhang A kann die Berechnung der Attraktionswirkung eines Quaders, auf einen Aufpunkt $A(x_A, y_A, z_A)$, dessen Dimensionen durch die Auflösung des DHM bestimmt sind, entnommen werden. Bei der Berechnung der Gesamtattraktion, werden schlußendlich die einzelnen Quaderattraktionen über den gesamten Einflußbereich aufsummiert. Die ebenen Komponenten A_x und A_y dieses summierten Attraktionsvektors $\vec{A}$ stehen mit den Komponenten der Lotabweichung in folgendem Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \xi_{DHM}(x_A, y_A) &= -\frac{A_x}{g} \\ \eta_{DHM}(x_A, y_A) &= -\frac{A_y}{g} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die z-Komponente des Attraktionsvektors A_z dient in erster Linie zur Berechnung von Schwerewerten in Punkten entlang der Lotlinie des Aufpunktes (z.B. zur Berechnung eines integra-

len mittleren Schwerewertes $\overline{g_p}$ für die orthometrische Höhenberechnung, siehe 2.20) sowie zur Übertragung von Schwerewerten vom Aufpunkt zu weiteren Punkten einer vorgegebenen Oberflächentrajektorie (Weber (2016b)).

Stellvertretend für die Berechnung der Attraktion in x-Richtung eines Quaders j A_{x_j} :

$$A_{x_j} = -G \cdot \rho_j \cdot \left[\sum_{i=1}^4 (-1)^i \cdot \text{sign}(y_i \cdot z_i) \cdot F_{x_j}(i) \right]_{\text{unten}}^{\text{oben}} \quad (3.13)$$

Man sieht, dass die Dichte ρ linear in die Berechnung der Attraktion eingeht. Üblicherweise wird allen Quadern derselbe Dichtewert zugewiesen. Der Hauptgrund hierfür liegt, an dem Nichtvorhandensein eines Dichtemodells (der geographischen flächendeckenden Tiefeninformation eines Dichtesprungs im Untergrund). Daher wurde bisher mit einem Standard-Dichtewert von $\rho = 2.67 \text{ [g/cm}^3\text{]}$ gerechnet. Die Höhe eines Quaders fließt in die Berechnung von F_{x_j} ein. Mit 3.13 ist es möglich einen Quader in vertikaler Richtung in einzelne Subquadern zu unterteilen und diesen Subquadern einen eigenen Dichtewert zuzuweisen. Daher findet sich in 3.13 der Ansatz zur Implementierung eines vertikalen Dichtemodells.

Im Kapitel 2.6 wurden Verfahren der Schwerereduktion aufgezeigt. Genauso ist es möglich Oberflächen-LA in eine beliebige Tiefe zu reduzieren bzw. diese um den von topographischen Massen hervorgerufenen störenden Einfluss zu reduzieren.

3.2.3 Berechnung reduzierter LA und Schwerewerte

Ausgangspunkt der, mit 3.14 berechneten, Reduktion sind gemessene bzw. für den Fall, dass keine Messungen vorliegen, mithilfe des EGM2008 berechnete Modellwerte von Oberflächen-LA (ξ_{Surf} und η_{Surf}) nach 3.6.

Betrachtet man Punkte unterhalb der Erdoberfläche (z.B.: Messpunkte in einem Tunnel) so kennzeichnen ξ_{red} und η_{red} jene LA-Komponenten, welche man tatsächlich in der jeweiligen Tiefe messen würde. Für Punkte an der Erdoberfläche werden ξ_{Tun} und η_{Tun} sowie dh in 3.14 gleich 0.

$$\begin{aligned} \xi_{red} &= \xi_{Surf} - \xi_{Topo} - 1.7 \cdot 10^{-4} \cdot dh + \xi_{Tun} \\ \eta_{red} &= \eta_{Surf} - \eta_{Topo} + \eta_{Tun} \end{aligned} \quad (3.14)$$

ξ_{Topo} und η_{Topo} bezeichnen die topographischen Korrekturen die mithilfe einer, für einen unterirdischen Punkt zugeordneten, Oberflächen-Höhe des DHM berechnet werden. ξ_{Topo} und η_{Topo} beinhalten daher die Einflüsse von aufzufüllenden Defizitmassen als auch (wahren) überschüssigen Massen. ξ_{Tun} und η_{Tun} sind die mithilfe der tatsächlichen, unterirdischen Stationhöhe

berechneten topographischen Korrekturen (für Punkte an der Erdoberfläche entfällt die Berechnung dieser Terme). ξ_{Surf} ist noch um die, nach 2.49 berechnete, normale Lotkrümmung zu korrigieren.

Bei der Schwere-Reduktion nach 3.15 wird die vollständige Bouguer-Reduktion nach 2.56 angewandt. Die Addition der, mithilfe der tatsächlichen, unterirdischen Stationhöhe berechneten topographische Korrektur g_{Tun} , repräsentiert das Aufsetzen der Bouguer-Platte und die damit einhergehende nochmalige topographische Reduktion, wie sie in 2.57 angewandt wird.

$$g_{red} = g_{Surf} + g_{Topo} - 2 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \cdot dh + 0.3086 \cdot dh - g_{Tun} \quad (3.15)$$

Im folgenden Kapitel wird auf die in dieser Arbeit realisierte Implementierung und allen dazu notwendigen Änderungen und Erweiterungen an dem Programm TOPOGRAV eingegangen.

Kapitel 4

Praktische Umsetzung

Neben der wissenschaftlichen Nutzung des Programmes TOPOGRAV vom Department der Höheren Geodäsie der TU-Wien, wird TOPOGRAV exklusive von der Firma GEODATA ZT auch wirtschaftlich und besonders im Bereich des Tunnelbaus genutzt. GEODATA ZT war es auch welche sich, mit dem Wunsch einer möglichen Implementierung eines Dichtemodells, an die TU-Wien gewandt hat. Da es bereits eine detaillierte Beschreibung der Benutzeroberfläche, der korrekten Verwendung des Programms sowie der mathematischen Berechnung der gewünschten Parameter gibt, wird in diesem Abschnitt nicht nochmals darauf eingegangen. Für genauere Informationen dazu wird auf (Hohensinn, 2014) verwiesen.

Dieses Kapitel gliedert sich in drei Bereiche: Der erste Teil gibt einen kurzen Überblick über die verschiedenen Arten eine Dichteinformation des Untergrunds in die topographische Berechnung einzubringen. Im Zuge dieser Arbeit wurden unterschiedliche Implementierungsversuche unternommen. Teils erwiesen sich diese Versuche als von zu primitiver Natur oder wurden verworfen da sie sich zwar implementieren ließen aber die Art und Weise in welcher die dafür notwendigen Daten vorliegen müßten sich als nicht gegeben erwiesen. Der zweite Teil beschäftigt sich mit den für die Implementierung notwendigen Änderungen und dem Dichtemodell nicht betreffenden Implementierungen in TOPOGRAV. Dies betrifft die graphische Benutzeroberfläche (GUI- graphical user interface) sowie andere Bereiche des Codes. Im dritten Teil wird auf die, in Absprache mit GEODATA ZT gewählte, finale Dichteimplementierung eingegangen. Dabei werden theoretische Aspekte hinter der Implementierung teils durch, vom Verfasser als wichtig und relevant erachtete, Passagen des Quellcodes ergänzt.

4.1 Arten von Dichtemodellen

Prinzipiell unterscheiden sich Dichtemodelle nach der Art und Weise in welcher die Tiefeninformation eines Dichtesprungs vorliegt. Da die Quadermethode die Gesamtattraktion eines Einflußbereiches auf einen Aufpunkt berechnet, ist eine flächenhafte Tiefeninformation erwünschenswert.

Da es in TOPOGRAV jedoch möglich ist, topographische Koorekturen für mehrere Aufpunkte (Stationen) simultan zu berechnen, ist der Begriff *flächenhaft* genauer zu spezifizieren. Dazu ein kurzer Einschub bzgl. der Art wie TOPOGRAV den, für ein Stationsfile notwendigen, Bereich eines DHM auswählt:

Betrachtet man Abbildung 4.7, sieht man, dass in einem Stationsfile für jede Station deren Lagekoordinaten (EAST, NORTH) und Höhe angegeben ist. TOPOGRAV ermittelt, aus der Liste der Stationen, den minimalen Ost- und Nord-Wert (kann, muss aber nicht von ein und derselben Station sein) und speichert diesen als die linke untere (LL...lower left) Ecke, eines aufspannenden Rechteckes ab. Mit dem maximalen Ost- und Nord-Wert, wird die rechte obere Ecke (UR...upper right) des Rechtecks definiert. Damit auch für diese maximal 4 Stationen, von welchen die minimalen und maximalen Ost- und Nord-Werte bestimmt wurden, das, den Einflußradius einer Station abdeckende, Gebiet des DHM ermittelt wird, wird vom Ost- und Nordwert des LL der Einflußradius subtrahiert und zu jenen des UR dazuaddiert. Mit diesen beiden neu bestimmten Punkten wird der für das jeweilige Stationsfile, notwendige Teil des DHM bestimmt und ausgelesen.

Damit wird ersichtlich, dass, und das ist in Anwendungsfällen von TOPOGRAV eher der Fall, eine flächenhafte Tiefeninformation für ein mehrere Stationen umfassendes Gebiet erwünschenswert ist.

In Abbildung 4.7 ist ein dichtes Stationsnetz zu sehen, wodurch, aufgrund des typischen Einflußradius von 25km, das gesamte, alle Stationen umfassende Gebiet, durch das Einflußgebiet einer einzigen Station abgedeckt wird. Daher überlappen sich die einzelnen Einflußgebiete der Stationen, was bei den meisten Anwendungsbeispielen der Fall sein wird, theoretisch jedoch nicht immer der Fall sein muss. Somit ist auch eine flächendeckende Dichteinformation, bei welcher diese Information nur für einzelne Einflußgebiete einer Station gegeben ist, denkbar und nützlich, da die Gebiete zwischen den einzelnen Einflußgebieten für die Berechnung der topographischen Koorektur nicht erforderlich sind.

4.1.1 Topographisches Dichtemodell

Liegt nun für alle, durch das verwendete DHM, diskretisierten Punkte des Einflußgebietes einer Station, eine solche Tiefeninformation vor, so kann die Topographie des Dichtesprungs, wie in Abbildung 4.1 dargestellt, wiedergegeben werden. Natürlich ist es denkbar, dass es bis zur Stationstiefe zu mehreren Dichtesprüngen kommen kann. Bezeichnet man mit n die Anzahl an vorhandenen Dichtesprüngen, so müsste, die, durch die Auflösung des DHM definierte, Gebirgssäule in $n+1$ kleinere Gebirgssäulen, mit den jeweiligen Dichten $(\rho_1, \rho_2, \dots)$, unterteilt und deren Attraktion, für die Berechnung der topographischen Korrektur, aufsummiert werden.

Bedenkt man die, zur Realisierung eines solchen Dichtemodells, notwendige hohe Anzahl an Tie-

feninformationen, so wird ersichtlich, dass ein solches Modell mit hohem Aufwand und Kosten verbunden und daher aus wirtschaftlichen Gründen nicht realisierbar ist.

Eine Möglichkeit diesen Aufwand und die damit verbundenen Kosten zu senken, besteht darin, nur für einzelne, ausgewählte Punkte des Einflußgebietes diese Dichteeinformation zu bestimmen und in einem weiteren Schritt für die restlichen Punkte, durch Interpolation bzw. Extrapolation, die Tiefe eines Dichtesprungs zu bestimmen.

Ein weiterer Aufwand und Kosten senkender Schritt liegt darin, nur für einen einzigen Punkt des Gebietes (wünschenswerterweise der Stationspunkt selbst) Dichte und Tiefe des Dichtesprungs zu bestimmen und diese Werte allen anderen Punkten zuzuweisen. Diese, damit einhergehende, approximierte Dichtesprung-Ebene, führt zum, nach Absprache mit GEODATA ZT, in dieser Arbeit implementierten ebenen Dichtemodell.

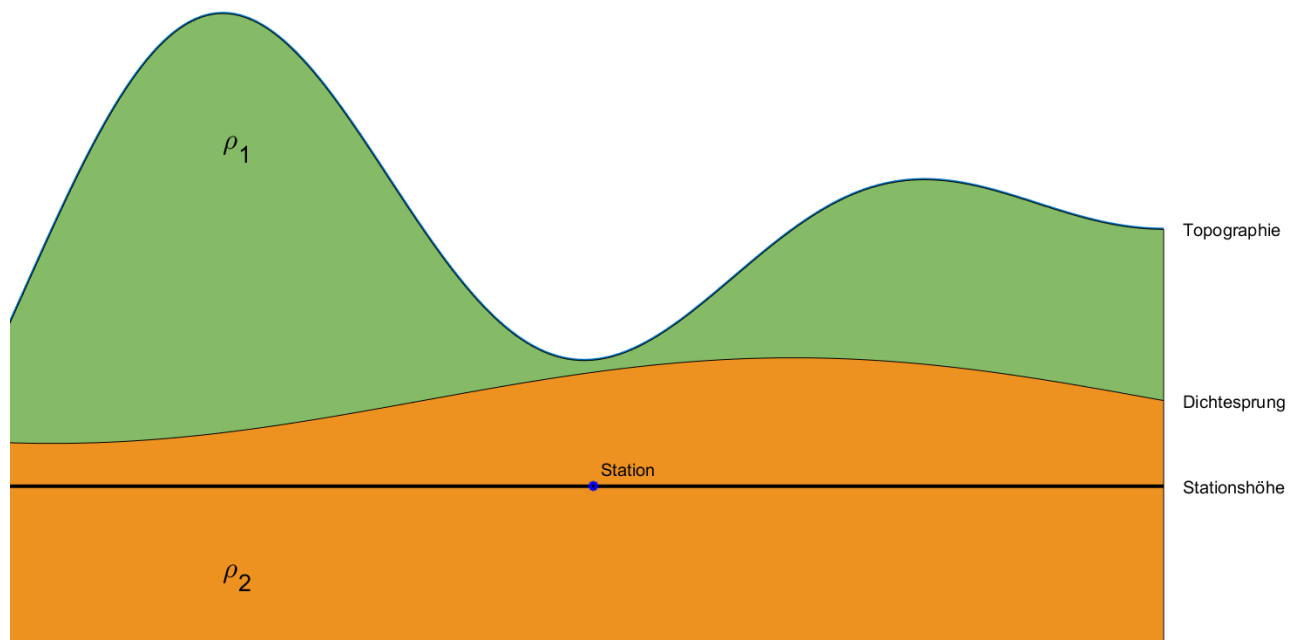


Abbildung 4.1: Darstellung eines topographischen Dichtemodells. Da für jeden Punkt des DHM eine Tiefeninformation vorhanden ist, kann ein detailliertes Profil eines Dichtesprungs im Untergrund dargestellt werden.

4.1.2 Ebenes Dichtemodell

Auch bei dieser Art von Dichtemodell ist es möglich, mehrere Dichtesprünge zwischen Oberfläche (in den Abbildungen 4.1 und 4.2 mit Topographie gekennzeichnet) und der Stationshöhe anzunehmen. Die Berechnung der Attraktion der, bei n Dichtesprüngen vorhandenen $n+1$ Gebirgssäulen, erfolgt auf die selbe Weise, wie beim topographischen Dichtemodell beschrieben.

In dem hier implementierten Dichtemodell wird, nach Absprache mit GEODATA ZT, ein ein-

ziger Dichtesprung im Untergrund angenommen. Eine Möglichkeit wie ein solches Dichtemodell aussehen kann, ist in Abbildung 4.2 dargestellt.

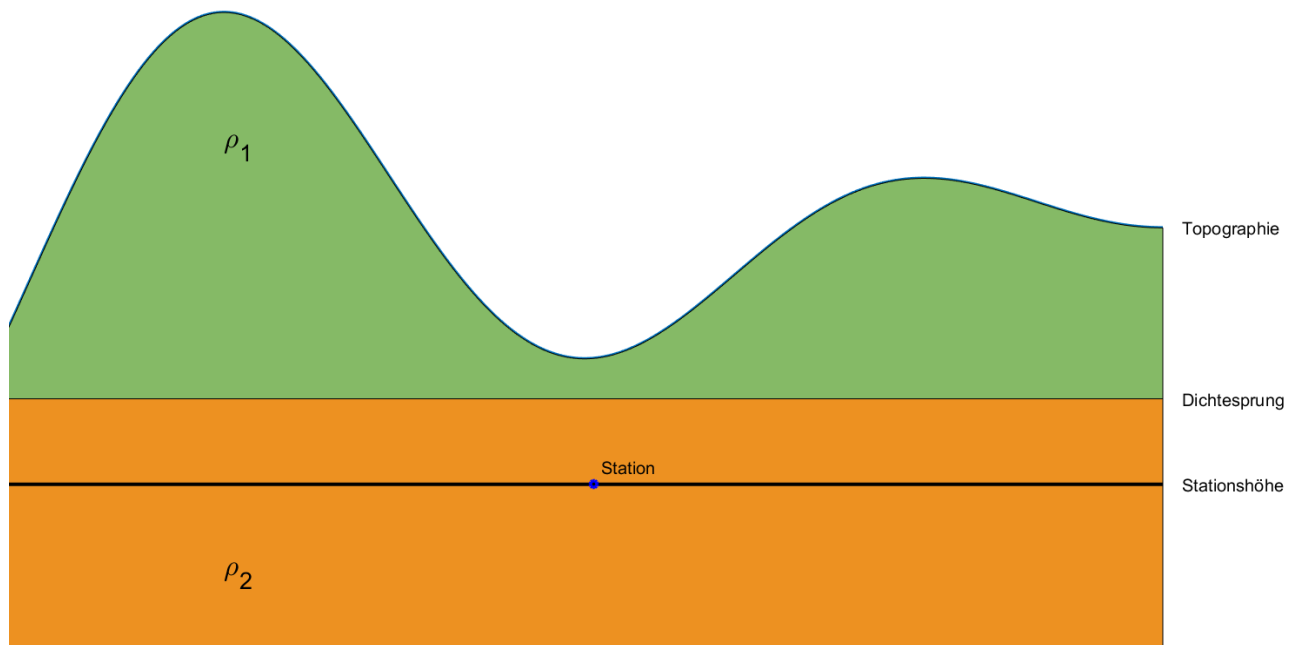


Abbildung 4.2: Durch die Annahme eines ebenen Dichtemodells ist eine flächendeckende Tiefeninformation des Dichtesprungs nicht mehr notwendig.

Bei der Betrachtung eines, mehrere Stationen umfassenden, Station-Files, wie dies bei einem Tunnelprojekt der Fall sein könnte, kann es Stationen geben, welche an der Oberfläche liegen (Tunnelportale) und solche die sich in unterschiedlichsten Tiefen befinden (Tunnelprofil). Befindet sich eine Station an der Oberfläche, kann es zu einem wie in Abbildung 4.3 dargestellten Dichtemodell kommen. Bei der Auffüllung von Defizitmassen (Luft Raum zw. Stationshöhe und Topographie etc.) käme es in einem solchen Fall, bei der Berechnung der topographischen Korrektur, wieder zur Unterteilung in kleinere Gebirgssäulen mit unterschiedlichen Dichten.

Die angeführten Beispiele zeigen auf, dass für eine korrekte Implementierung des ebenen Dichtemodells Fallunterscheidungen bezgl. der Höhen von Topographie, Dichtesprung und Stationshöhe notwendig sind.

Bei Tunnelprojekten, welche häufig in gebirgigen Gebieten auftreten, aber auch unterhalb von Wassermassen verlaufen können, wird eine weitere, zur korrekten Implementierung eines Dichtemodells, notwendige Fallunterscheidung offensichtlich. In Gebirgstälern kam es im Laufe der Geschichte zur Bildung von Sedimentschichten sowie zur Ausbildung von Seen und Teichen. In beiden Fällen kommt es zu horizontalen Dichteunterschieden an der Oberfläche. Um diese Fälle in der Implementierung zu berücksichtigen, ist es notwendig die DHM-Punkte in Land- und Wasserpunkte/Sedimentpunkte zu unterteilen. In Abbildung 4.4 ist ein solches Dichtemodell dargestellt.

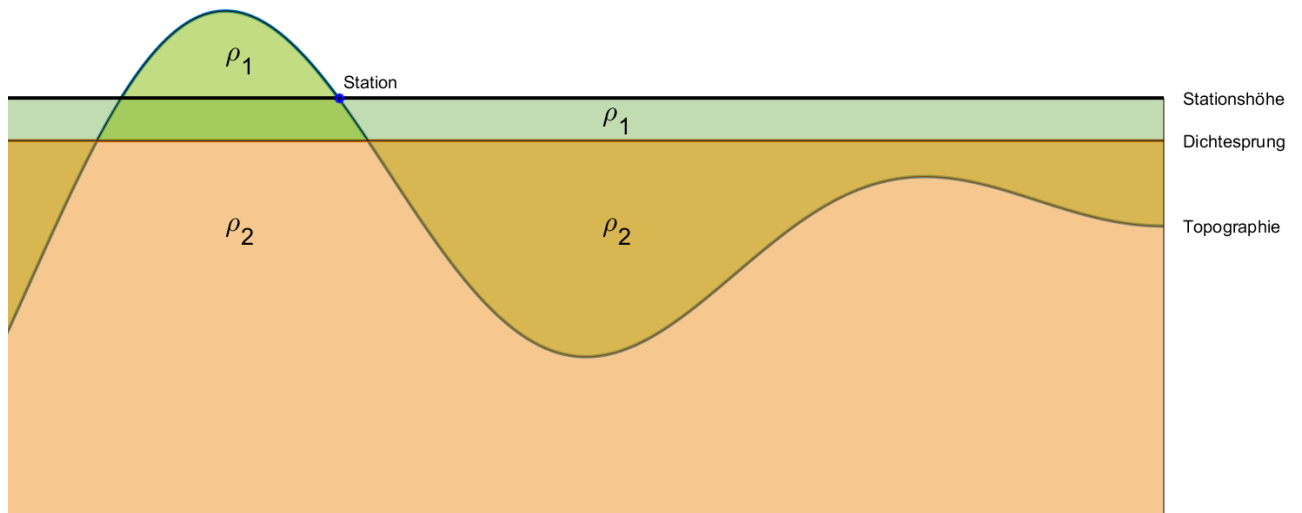


Abbildung 4.3: Befindet sich die Station an der Oberfläche bzw. gibt es Punkte der Topographie, welche unterhalb der Stationshöhe liegen, werden die Defizitmassen mit den jeweiligen Dichten aufgefüllt (hellgrün und braun dargestellte Bereiche).

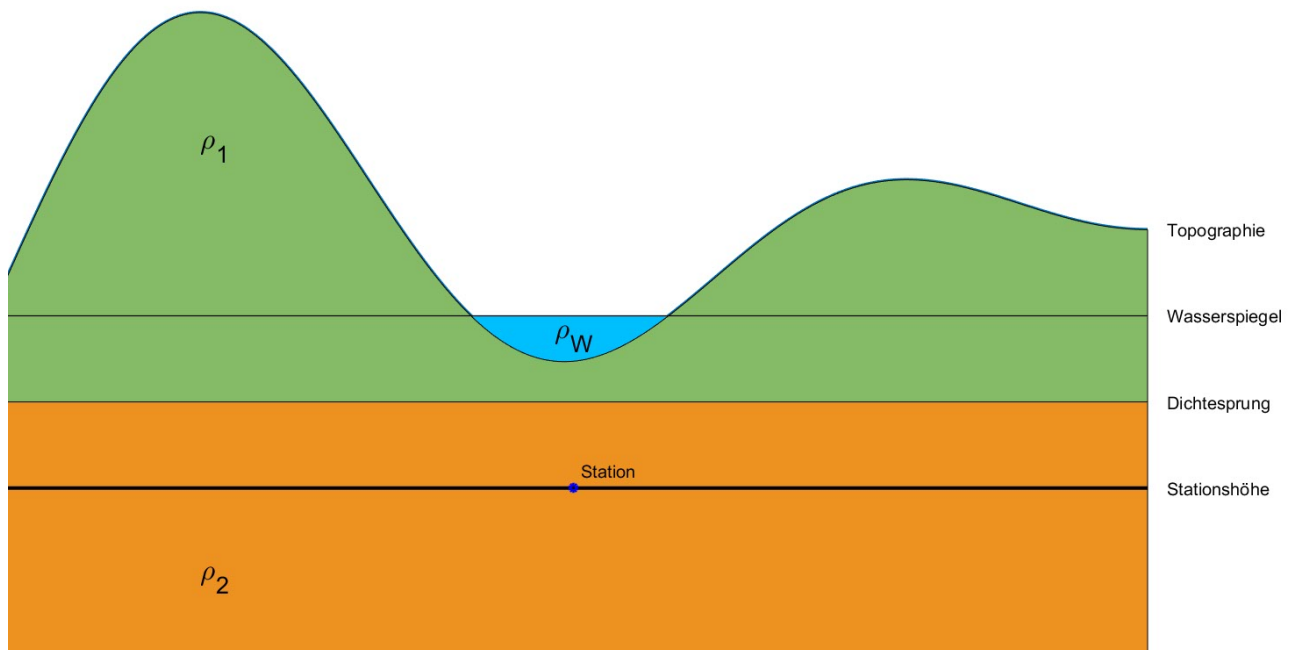


Abbildung 4.4: Befinden sich Wassermassen (Meer, See,...) im Einflußgebiet einer Station, so ist neben der vertikalen Unterteilung der Gebirgssäulen auch eine horizontale Unterteilung der DHM-Punkte in Land- und Wasserpunkte notwendig.

Die soeben besprochenen Fallunterscheidungen bilden das Herzstück des implementierten ebenen Dichtemodells. Um diese fehlerfrei in den vorhandenen TOPOGRAV-Quellcode zu implementieren, waren an einigen Stellen des Codes Änderungen vorzunehmen.

4.2 Änderungen in TOPOGRAV

In der ursprünglichen Version von TOPOGRAV, dessen GUI in Abbildung 4.5 dargestellt ist, kann die Dichteinformation des Untergrunds im Digital-Elevation-Model-Panel vom Benutzer eingegeben werden. Diese, schon vorhandene, direkte Eingabe des Dichtewertes durch den Benutzer war der ausschlaggebende Grund dafür, ein eigenes Panel zur Eingabe der Höhe des Dichtesprungs und des zweiten Dichtewertes ,in der TOPOGRAV-GUI anzulegen. Die Tatsache, dass bei einem ebenen Dichtemodell allen DHM-Punkten dieselbe Dichtesprung-Höhe zugewiesen wird, erlaubt die persönliche Eingabe der Tiefeninformation als skalare Größe durch den Benutzer. Diese erweiterte GUI ist in Abbildung 4.6 dargestellt.

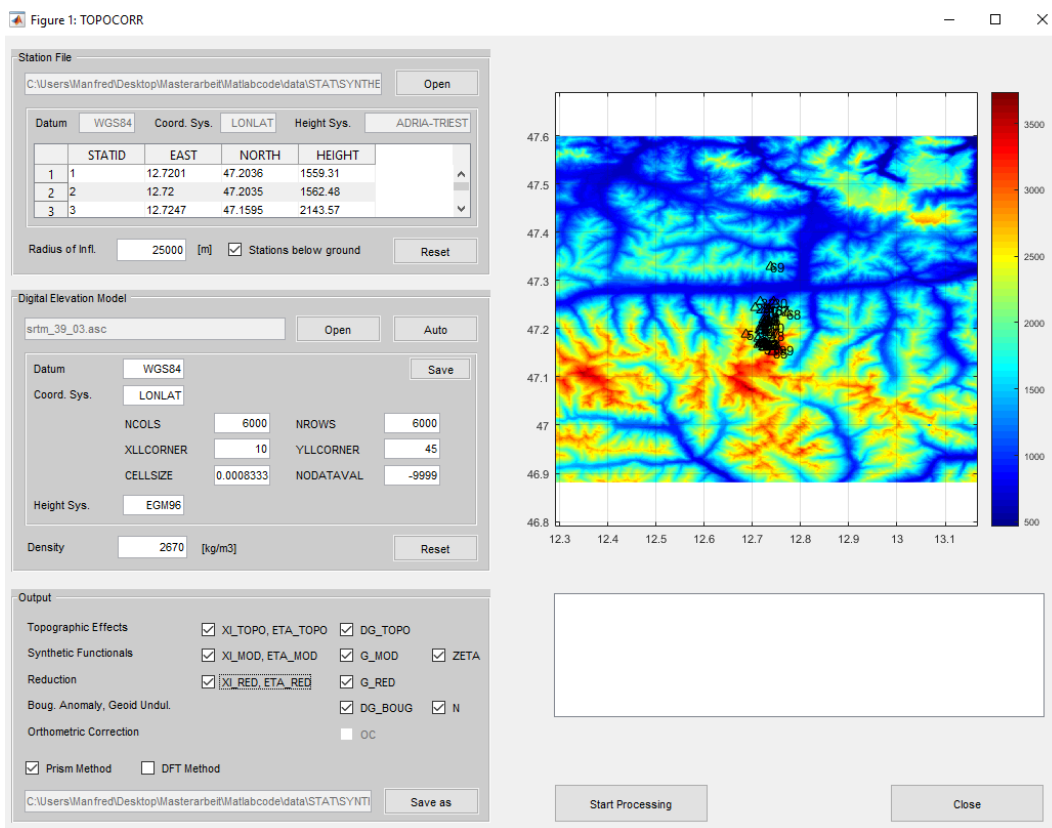


Abbildung 4.5: Ursprüngliche Version der TOPOGRAV-GUI. Die Dichteinformation des Untergrunds wird im Digital-Elevation-Model-Panel unter Density in $[kg/m^3]$ eingegeben.

Diese direkte Eingabe der Dichtemodell Parameter, Dichtewert und Höhe des Dichtesprungs, ermöglicht es dem Benutzer bei der Verwendung eines Stationfiles zwischen einer Inkludierung eines Dichtemodells oder der originalen Version zu wählen. Die Struktur bzw. der Informationsgehalt eines Stationfiles muss durch diese direkte Eingabe nicht verändert werden.

Die Auswahl, ob ein Dichtemodell in die Berechnung miteinbezogen werden soll oder nicht, wird durch die Eingabe eines Dichtewertes (Density) und der gleichzeitigen Angabe einer Dichtesprung-

Höhe (Layer Height) getroffen. Bleiben beide Felder leer, so wird die originale Berechnungsmethode herangezogen. Wird nur einem der beiden Parameter ein Wert zugewiesen, weist eine Fehlermeldung auf die inkorrekte Eingabe des Dichtemodells hin. Die hierfür notwendige Passage des Quellcodes ist in Abbildung 4.7 dargestellt.

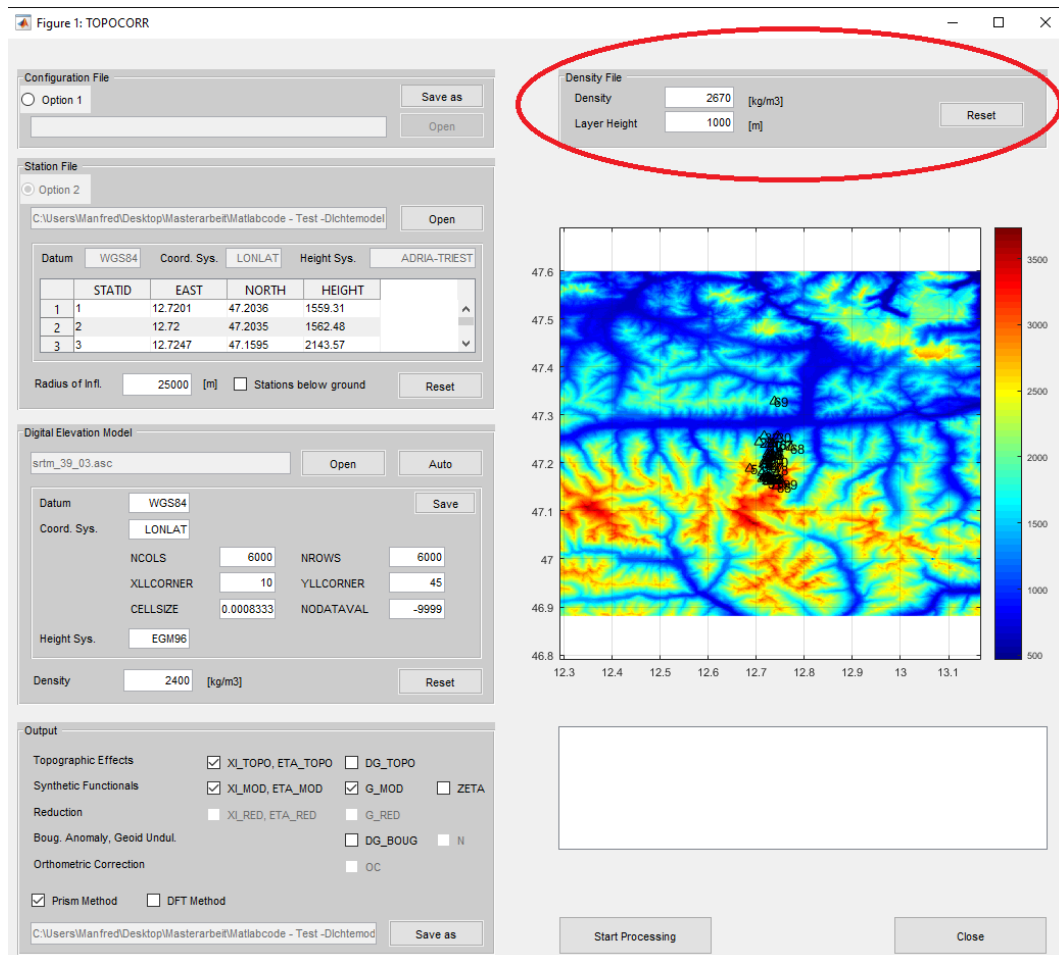


Abbildung 4.6: Erweiterung der TOPOGRAV-GUI. Neben dem, für die Implementierung des Dichtemodells nicht relevanten, Configuration-File-Panel wurde eine separates Density-File-Panel hinzugefügt. In diesem ist es möglich einen Dichtewert sowie die Höhe dieses Dichtesprungs als Parameter zu übergeben.

Neben weiteren kleineren Änderungen, welche an dieser Stelle nicht weiter erwähnt werden, besteht die zweite große Änderung darin den, die Attraktion eines Quaders nach 3.13 berechnenden Teil der Funktion *quaderMethod* in eine separate Funktion, genannt *attraction*, zu schreiben. Diese Änderung war aufgrund der vertikalen Unterteilung der einzelnen Quader und der damit einhergehenden mehrfachen Wiederholung der Code-Passage als notwendig erachtet worden. Die Anwendung der *attraction*-Funktion bei der Berechnung der topographischen Korrektur ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Der entscheidende Übergabeparameter darin ist die C-Matrix, welche die Höhen der einzelnen Gebirgssäulen enthält. Für die Unterteilung dieser Gebirgssäulen

ist eine wiederholte Definition dieser C-Matrix und damit ein wiederholter Aufruf der *attraction*-Funktion, zur Berechnung der Attraktion der einzelnen vertikal unterteilten Gebirgssäulen, notwendig. Diese Tatsache tritt bei der detaillierten Beschreibung des implementierten Dichtemodells, dessen Kernstück die bereits beschriebenen Fallunterscheidungen sind, noch deutlicher hervor.

```

1419 %      % DICHTE-FILE EINLESEN-----
1420 %      % Load density file
1421 %      [dfile,dvalues]=getDensityFile();
1422 %      sdfsize = size(dfile)
1423 %      ZDichte = [];
1424 %      for i=1:sdfsize(3)
1425 %          ZDichte(:,i) = dfile(:,i);
1426 %      end
1427 ZDichte = get(hDensityLayerEdit, 'String');
1428 ZDichte = str2num(ZDichte);
1429 dvalue = get(hDensityDensityEdit, 'String');
1430 dvalue = str2num(dvalue);
1431
1432 if isempty(dvalue) == 1 % wenn kein Dichtewert, dann nur DGM-Dichte
1433     dvalues = mDGM.Dichte;
1434 else
1435     dvalues = [mDGM.Dichte;dvalue]; % ansonsten Dichte-Vektor
1436 end
1437
1438 if (isempty(ZDichte) == 1 && numel(dvalues) == 2) || ...
1439     (isempty(ZDichte) == 0 && numel(dvalues) == 1)
1440     exception = MException('roc:mustDichte', ...
1441         'Höhe des Dichtesprungs und Dichtewert eingeben!');
1442     throw(exception)
1443 end

```

Abbildung 4.7: Code-Passage mit Überprüfung der Eingabefelder des Density-File-Panels.

```

2726 %% Unterscheidung zwischen Dichtemodell-Berechnung oder Original-Version-----
2727 switch EmptyZD
2728 case 1 % Originale Berechnung ohne Density-Layer und LANDMASK
2729     C = ZTopo - Zi;
2730     C = repmat(C, [1 1 4]);
2731     [Ax,Ay,Az]=attraction(A,B,C,Ri,G,rho);
2732     AX = Ax;
2733     AY = Ay;
2734     AZ = Az;
2735
2736 % sum up
2737 AX = nansum(AX(:));
2738 AY = nansum(AY(:));
2739 AZ = nansum(AZ(:));
2740
2741 % topographic effects
2742 xi(k) = (Ay/g)*(180/pi)*3600; % [arcsec]
2743 eta(k) = (Ax/g)*(180/pi)*3600; % [arcsec]
2744 az(k) = Az*100000; % [mGal]
2745 dh(k) = deltah;

```

Abbildung 4.8: Code-Passage mit Aufruf der *attraction*-Funktion. Der entscheidende Übergabeparameter ist die, die Höhe der Gebirgssäulen definierende, C-Matrix.

4.3 Implementierung des Dichtemodells

Wie bereits bei der Beschreibung des ebenen Dichtemodells erwähnt, sind zur korrekten Implementierung eines ebenen Dichtemodells zwei verschiedene Arten von Fallunterscheidungen notwendig.

Die erste Fallunterscheidung besteht darin zwischen Land- und Wasserpunkte/Sedimentpunkte zu unterscheiden (siehe Abbildung 4.4). Diese Unterscheidung wird mithilfe einer LS-Matrix (Land-Sea-Matrix), welche die selben Dimensionen wie die DHM-Matrix hat, getroffen. Dabei wird jedem Punkt des DHM eine, das Land bzw. Wasser/Sediment repräsentierende Zahl zugeordnet. In Abbildung 4.9 ist ein Beispiel einer LS-Matrix dargestellt. Darin wird DHM-Punkten der Landmasse die Zahl 1, Punkten die unterhalb der Wasseroberfläche liegen hingegen die Zahl 0, zugewiesen. Mithilfe der LS-Matrix ist es nun möglich zwischen DHM-Punkten des Landes und jene des Meeres etc. zu unterscheiden.

1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Abbildung 4.9: Mithilfe einer sogenannte Land-Sea-Mask kann zwischen Punkten des Landes (1) und solchen des Meeres, See, Teich etc. (0), unterschieden werden.

Zur Beschreibung der zweiten großen Fallunterscheidung sei nochmals auf Abbildung 4.3 verwiesen. Darin erkennt man, dass es für manche Punkte des innerhalb des Einflußbereichs der Station liegenden DHMs notwendig ist, die zwischen Topographie und Stationshöhe liegenden Quader vertikal zu unterteilen. Im angeführten Beispiel ist für solche Punkte die Station höher gelegen als der Dichtesprung und dieser wiederum höher als die Topographie. Hingegen liegen bei DHM-Punkten der Überschußmassen sowohl Stations- als auch Topographiehöhe oberhalb der Höhe des Dichtesprungs.

Damit wird ersichtlich, warum eine Fallunterscheidung bzgl. der vertikalen Lage von Topographie-, Station- und Dichtesprunghöhe zueinander, notwendig ist. Sind DHM-Punkte als Wasser (0) markiert, spielt zusätzlich die Höhe des Wasserspiegels eine Rolle in der Fallunterscheidung.

Bevor die Fallunterscheidungen detailliert beschrieben werden soll anhand des in Abbildung 4.10 dargestellten Quaders auf die Systematik der vertikalen Unterteilung eines Quaders in mehrere kleinere Quader eingegangen werden.

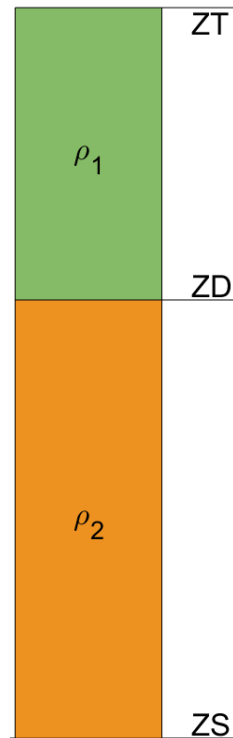


Abbildung 4.10: Bei der Attraktionsberechnung einzelner Quader bezieht sich dessen Höhe immer auf die Stationshöhe ZS (ZT...Höhe der Topographie, ZD...Höhe des Dichtesprungs).

In TOPOGRAV wird die Höhe eines Quaders (einer Gebirgssäule) durch die Differenz zwischen der Höhe des DHM (Höhe der Topographie ZT) und der Stationshöhe ZS berechnet. Beim Auffüllen von Defizitmassen (Höhe der Topographie ist kleiner als die Stationshöhe) entstehen dadurch negative Quaderhöhen. Diesem Umstand, dass es positive und negative Quaderhöhen geben kann, wird durch die Signum-Funktion, Rechnung getragen. In 3.13 ist auch zu sehen, dass die Berechnung der Attraktion zwischen den Grenzen *oben* und *unten* stattfindet. Damit werden die obere und untere Fläche des resultierenden Quaders definiert (siehe Abbildung A3 in Anhang A).

Der Übersicht halber wird von nun an die z-Komponente der *oberen* und *unteren* Grenze als solche angeschrieben. Die Höhe des zu berechnenden Quaders ergibt sich aus der Differenz dieser z-Komponenten ($H = \text{oben} - \text{unten}$).

Bisher grenzten alle Quader an die Stationshöhe an, wodurch diese immer als untere Grenze in 3.13 definiert wurde. Durch die Einführung eines Dichtemodells ergeben sich nun Quader, welche nicht direkt an die Stationshöhe angrenzen sondern sich in einer gewissen vertikalen Entfernung dazu befinden.

Die Attraktionsberechnung des orangenen Quaders in Abbildung 4.10, welcher direkt an die Sta-

tionshöhe angrenzt, erfolgt nach der bereits implementierten Methodik. Für den grünen Quader, welcher sich in einer Entfernung $ZD-ZS$ von der Stationshöhe ZS befindet, ergeben sich zwei Varianten der Attraktionsberechnung.

Variante 1: Direkte Anwendung von 3.13

$$\rightarrow A_{grün} (oben_{gr}=ZT, unten_{gr}=ZD \text{ und } \rho_{gr} = \rho_1)$$

Diese Variante hätte jedoch zur Folge gehabt, zu sehr in den bereits implementierten Algorithmus der Attraktionsberechnung eingreifen zu müssen. Daher wurde die zweite Variante zur Berechnung der Gesamtattraktion herangezogen.

Variante 2: Indirekte Berechnung durch 2-fache Anwendung von 3.13

- A_1 ($oben=ZT$, $unten=ZS$ und $\rho = \rho_1$)
- A_2 ($oben=ZD$, $unten=ZS$ und $\rho = \rho_1$)

$\rightarrow$ durch Subtraktion von A_2 von A_1 ergibt sich die Attraktion des grünen Quaders

$$A_{grün} = A_1 - A_2$$

Beide Quader, mit deren Attraktionen A_1 und A_2 grenzen direkt an die Stationshöhe ZS an, wodurch die bisherige Berechnungsmethode erhalten bleibt. Sowohl A_1 als auch A_2 werden mit jener Dichte des entfernten grünen Quaders ρ_1 berechnet. Die Differenz zwischen der Attraktion A_1 des Quaders mit der Höhe $H_1 = ZT - ZS$ und A_2 , jener des Quaders mit der Höhe $H_2 = ZD - ZS$, ergibt die gewünschte Attraktion $A_{grün}$ des grünen Quaders, mit der Höhe $H_{grün} = ZT - ZD$ und dem vertikalen Abstand $ZD - ZS$ von der Stationshöhe ZS .

Diese Differenzbildung zweier Attraktionen kann nun systematisch, für alle nachfolgend aufgelisteten Fälle, zur Attraktionsberechnung von nicht direkt an die Stationshöhe angrenzenden Quadern herangezogen werden.

4.3.1 Fallunterscheidungen

Die hirachische Struktur der Fallunterscheidungen bzgl. der relativen vertikalen Lage von ZT , ZS , ZD und ZW sind in Abbildung 4.11 und 4.12, in Form eines binären Baumes, dargestellt. Dabei kommt auch hier die Unterscheidung zwischen Land- und Wassermassen zum tragen, da für die Berechnung der Attraktion von Landmassen die Höhe des Wasserspiegels irrelevant ist.

Für DHM-Punkte, welche durch die LS-Matrix als Landpunkte deklariert wurden, ergeben sich

die in Abbildung 4.11, in **fettgedruckter** Schrift gekennzeichnet, dargestellten Fälle. Diese Fallunterscheidungen treten genauso für DHM-Punkte welche als Wasser deklariert wurden auf. Daher wird bei der Attraktionsberechnung im ersten Schritt zwischen diesen drei Fällen unterschieden und danach zwischen Land- und See-Punkten differenziert. Aus diesem Grund wird die Attraktionsberechnung für Landpunkte innerhalb der, in Abbildung 4.12 dargestellten, acht Fälle der als Wasser deklarierten DHM-Punkte behandelt.

Diese 8 Fälle sind in den nachfolgenden Abbildungen graphisch dargestellt. Die weiteren Fallunterscheidungen sind durch Quader in den Abbildungen gekennzeichnet und mit S (Sea) und L (Land) durchnummeriert. Innerhalb einer solchen Quaders kommt es, aufgrund von ZT, ZS, ZD bzw. ZW, zu einer vertikalen Unterteilung in Subquader. Die zur Berechnung der Attraktion eines Subquader notwendigen Parameter werden in folgender Form angeschrieben:

C-Matrix: $C = \text{oben-unten}$

Attraktion: $A(\text{oben}, \text{unten}, \rho)$

Die Attraktionen der Subquader werden, zu einer Quaderattraktion A_{S1} bzw. A_{L1} korrekt aufsummiert. Anschließend werden alle S- bzw. L-Quader zusammengerechnet, wobei es in manchen Fällen vorkommt, dass ein Landquader L auf die gleiche Art berechnet wird. In diesem Fall wird die Berechnung einmal aufgezeigt und bei nochmaligen Auftreten auf diese hingewiesen.

Die durch alle Landmassen hervorgerufene Gesamtattraktion A_L und jene der als Sea gekennzeichneten Massen A_S werden addiert und ergeben die Gesamtattraktion A auf eine Station, welche zur Berechnung der LA-Komponenten nach 3.12 benötigt wird.

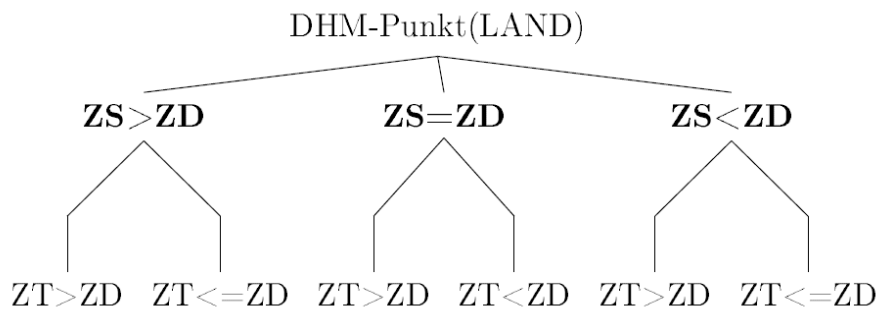


Abbildung 4.11: Fallunterscheidungen zwischen Stationshöhe (ZS), Höhe des Dichtesprungs (ZD) und der Topographiehöhe (ZT), innerhalb des ausgewählten Einflußbereichs.

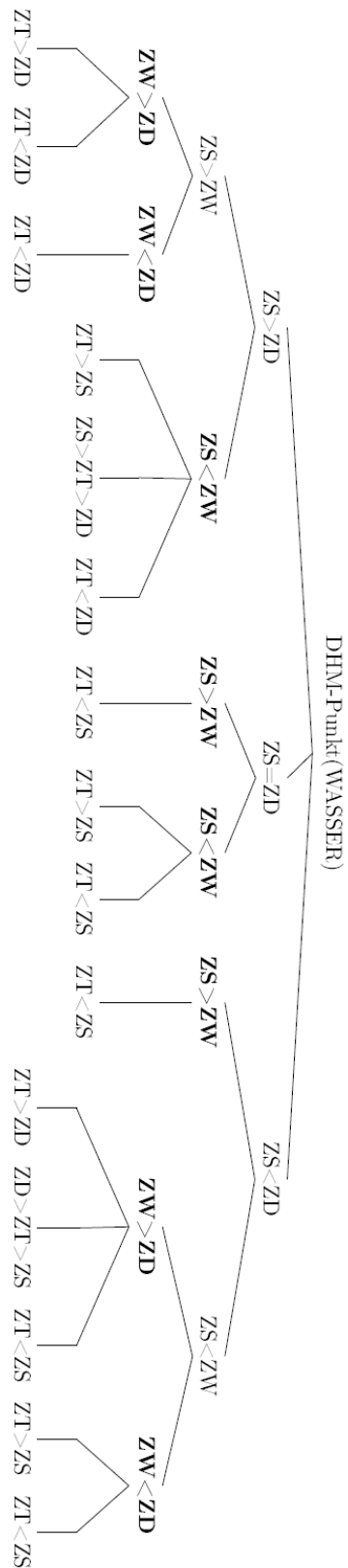


Abbildung 4.12: Fallunterscheidungen zwischen Stationshöhe (ZS), Höhe des Dichtesprungs (ZD) und jener des Wasserspiegels (ZW). Ab den **fettgedruckten** Fällen kommt es zu einer Unterscheidung zwischen den einzelnen DHM-Punkten, bzgl. deren Höhe ZT, innerhalb des ausgewählten Einflußbereichs.

$$A = A_L + A_S \quad (4.1)$$

Für den ersten aufgelisteten Fall wird die Berechnung eines S-Quaders und aller darin befindlichen Subquader aufgezeigt und detailliert beschrieben. In allen anderen Fällen wird nur der Rechengang aufgezeigt.

- $ZD > ZS$

1. Fall: $ZD < ZW$

Für diesen, in Abbildung 4.13 dargestellten, Fall, lässt sich das Einflußgebiet der, durch einen blauen Punkt markierten Station in vier unterschiedliche Quader, S1 bis S3 und L1 unterteilen. Das horizontale Ausdehnungsgebiet des Quaders S1 ist die Summe der einzelnen Quader aller, als LS=Wasser, markierten DHM-Punkten, für die gilt, dass deren Höhe ZT größer ist als ZD . S1 ist durch drei Subquader aufgebaut, deren Attraktionsberechnung in 4.2 angeschrieben ist.

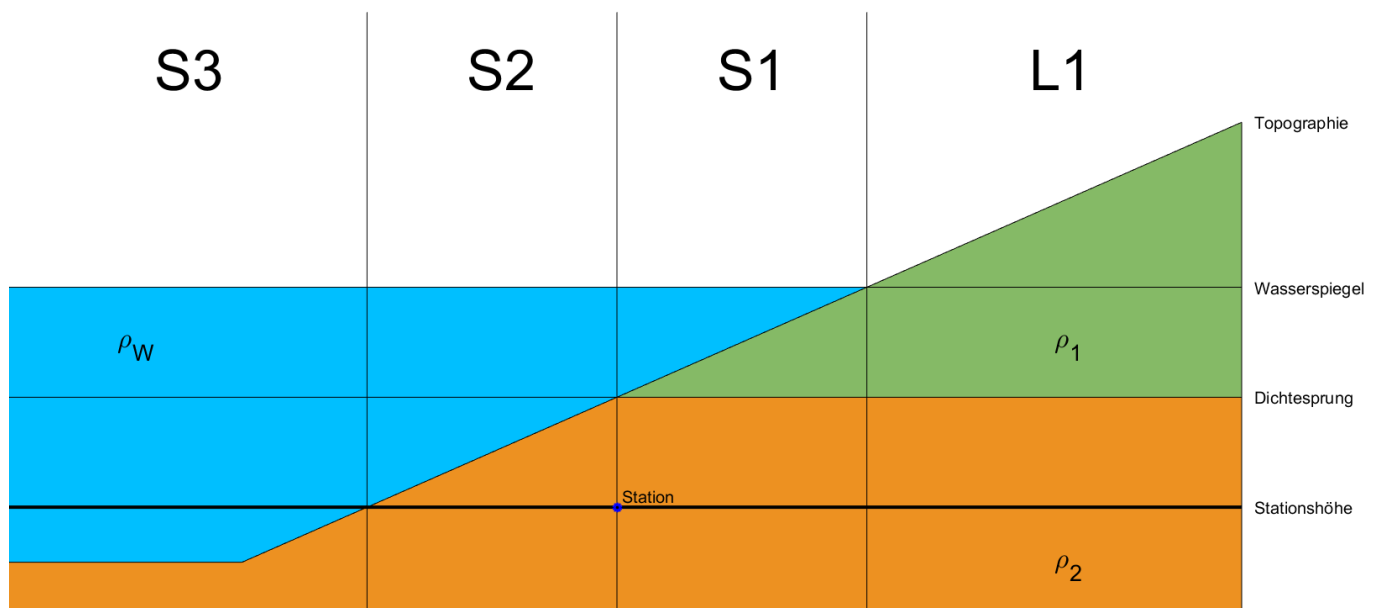


Abbildung 4.13: Graphische Darstellung von Fall 1 mit $ZD > ZS$ und $ZD < ZW$.

$$\mathbf{S1} \rightarrow \forall ZT(ZT > ZD)$$

$$C_1 = ZW - ZS \longrightarrow A_1(ZW, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$C_2 = ZT - ZS \longrightarrow A_2(ZT, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$C_3 = ZT - ZS \longrightarrow A_3(ZT, ZS, \rho_1)$$

$$C_4 = ZD - ZS \longrightarrow A_4(ZD, ZS, \rho_1)$$

$$C_5 = ZD - ZS \longrightarrow A_5(ZD, ZS, \rho_2)$$

$$\rightarrow A_{S1} = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 \quad (4.2)$$

Der weitentfernteste Quader (blau) wird durch *oben*=ZW und *unten*=ZT begrenzt. Da die Dichte des Quaders ρ_W geringer ist als jene des angrenzenden Materials ρ_1 muss dieser mit einer Dichte $\rho = \rho_1 - \rho_W$ aufgefüllt werden. Die Attraktion des Quaders berechnet sich mithilfe des oben beschriebenen Verfahrens der 2-fachen Anwendung von 3.13, nach:

$$A_{blau} = A_1 - A_2$$

Somit ergibt sich die Attraktion des grünen Quaders:

$$A_{grün} = A_3 - A_4$$

Da der orange Quader direkt an ZS angrenzt, ergibt sich seine Attraktion zu:

$$A_{orange} = A_5$$

Die Gesamtattraktion von S1 ergibt sich durch Addition zu

$$A_{S1} = A_{blau} + A_{grün} + A_{orange},$$

oder wie in 4.2 angeschrieben:

$$A_{S1} = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

Die weitere Berechnung von A_{S2} und A_{S3} ist in 4.3 und 4.4 aufgezeigt, sowie in 4.5 jene des

Quaders L1.

$$\mathbf{S2} \rightarrow \forall ZT (ZS < ZT \leq ZD)$$

$$C_1 = ZW - ZS \longrightarrow A_1(ZW, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$C_2 = ZD - ZS \longrightarrow A_2(ZD, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$C_3 = ZD - ZS \longrightarrow A_3(ZD, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$C_4 = ZT - ZS \longrightarrow A_4(ZT, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$C_5 = ZT - ZS \longrightarrow A_5(ZT, ZS, \rho_2)$$

$$\rightarrow A_{S2} = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 \quad (4.3)$$

$$\mathbf{S3} \rightarrow \forall ZT (ZT \leq ZS)$$

$$C_1 = ZW - ZS \longrightarrow A_1(\rho_1 - \rho_W)$$

$$C_2 = ZD - ZS \longrightarrow A_2(\rho_1 - \rho_W)$$

$$C_3 = ZD - ZS \longrightarrow A_3(\rho_2 - \rho_W)$$

$$C_4 = ZT - ZS \longrightarrow A_4(\rho_2 - \rho_W)$$

$$\rightarrow A_{S3} = A_1 - A_2 + A_3 + A_4$$

$$\Rightarrow A_W = A_{S1} + A_{S2} + A_{S3} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{L1} \rightarrow \forall ZT (ZT > ZD)$$

$$C_1 = ZT - ZS \longrightarrow A_1(\rho_1)$$

$$C_2 = ZD - ZS \longrightarrow A_2(\rho_1)$$

$$C_3 = ZD - ZS \longrightarrow A_3(\rho_2)$$

$$\rightarrow A_{L1} = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\Rightarrow A_L = A_{L1} \quad (4.5)$$

2. Fall: $ZD > ZW$

In diesem, in Abbildung 4.14 abgebildeten, Fall berechnen sich die Quader S1 und S2 nach 4.6 und 4.7. L1 ist gleich jenem aus dem vorherigen Fall 1 und berechnet sich nach 4.5. Der zweite als Land markierte Quader L2 berechnet sich nach 4.8.

$$\mathbf{S1} \rightarrow \forall ZT(ZT \geq ZS)$$

$$C_1 = ZW - ZS \longrightarrow A_1(ZW, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$C_2 = ZT - ZS \longrightarrow A_2(ZT, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$C_3 = ZT - ZS \longrightarrow A_3(ZT, ZS, \rho_2)$$

$$\rightarrow A_{S1} = A_1 - A_2 + A_3 \quad (4.6)$$

$$\mathbf{S2} \rightarrow \forall ZT(ZT < ZS)$$

$$C_1 = ZW - ZS \longrightarrow A_1(ZW, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$C_2 = ZT - ZS \longrightarrow A_2(ZT, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$\rightarrow A_{S2} = A_1 + A_2$$

$$\Rightarrow A_W = A_{S1} + A_{S2} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{L2} \rightarrow \forall ZT(ZT \leq ZD)$$

$$C_1 = ZT - ZS \longrightarrow A_1(ZT, ZS, \rho_2)$$

$$\rightarrow A_{L2} = A_1$$

$$\Rightarrow A_L = A_{L1} + A_{L2} \quad (4.8)$$

1. und 2. Fall auftretenden L1- und L2-Quadern und berechnen sich daher nach 4.5 bzw. 4.8.

$$\mathbf{S1} \rightarrow \forall ZT(ZT < ZS)$$

$$C_1 = ZT - ZS \longrightarrow A_1(ZT, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$C_2 = ZW - ZS \longrightarrow A_2(ZW, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$C_3 = ZW - ZS \longrightarrow A_3(ZW, ZS, \rho_2)$$

$$\Rightarrow A_W = A_1 - A_2 + A_3 \quad (4.9)$$

• $ZD < ZS$

4. Fall: $ZS < ZW$

Für den in Abbildung 4.16 dargestellten Fall, berechnen sich die Attraktionen der S1-, S2- und S3-Quader nach 4.10, 4.11 und 4.12, sowie jene des L1-Quaders nach 4.13.

$$\mathbf{S1} \rightarrow \forall ZT(ZT \geq ZS)$$

$$C_1 = ZW - ZS \longrightarrow A_1(ZW, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$C_2 = ZT - ZS \longrightarrow A_2(ZT, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$C_3 = ZT - ZS \longrightarrow A_3(ZT, ZS, \rho_1)$$

$$\rightarrow A_{S1} = A_1 - A_2 + A_3 \quad (4.10)$$

$$\mathbf{S2} \rightarrow \forall ZT(ZD \leq ZT < ZS)$$

$$C_1 = ZW - ZS \longrightarrow A_1(ZW, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$C_2 = ZT - ZS \longrightarrow A_2(ZT, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$\rightarrow A_{S2} = A_1 + A_2 \quad (4.11)$$

$$\mathbf{S3} \rightarrow \forall ZT(ZT < ZD)$$

$$C_1 = ZT - ZS \longrightarrow A_1(ZT, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$C_2 = ZD - ZS \longrightarrow A_2(ZD, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$C_3 = ZD - ZS \longrightarrow A_3(ZD, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$C_4 = ZW - ZS \longrightarrow A_4(ZW, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$\rightarrow A_{S3} = A_1 - A_2 + A_3 + A_4$$

$$\Rightarrow A_W = A_{S1} + A_{S2} + A_{S3} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{L1} \rightarrow \forall ZT(ZT \geq ZD)$$

$$C_1 = ZT - ZS \longrightarrow A_1(ZT, ZS, \rho_1)$$

$$\rightarrow A_{L1} = A_1$$

$$\Rightarrow A_L = A_{L1} \quad (4.13)$$

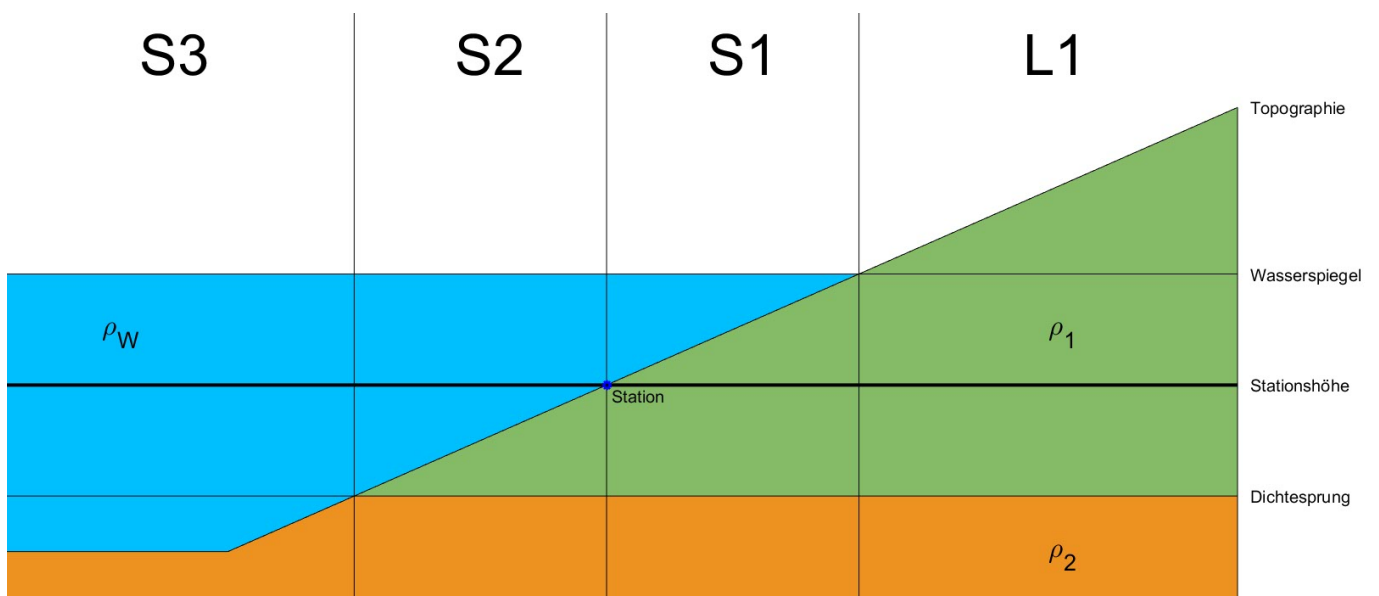


Abbildung 4.16: Graphische Darstellung von Fall 4 mit $ZD < ZS$ und $ZS < ZW$.

5. Fall: $ZD < ZW$

Dieser Fall ist in Abbildung 4.17 dargestellt. Die Quader S1 und S2 berechnen sich nach 4.14

bzw. 4.15. Die Attraktion des L1-Quaders entspricht jener aus dem 4. Fall und berechnet sich daher nach 4.13.

$$\mathbf{S1} \rightarrow \forall ZT(ZT > ZD)$$

$$C_1 = ZT - ZS \longrightarrow A_1(ZT, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$C_2 = ZW - ZS \longrightarrow A_2(ZW, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$C_3 = ZW - ZS \longrightarrow A_3(ZW, ZS, \rho_1)$$

$$\rightarrow A_{S1} = A_1 - A_2 + A_3 \tag{4.14}$$

$$\mathbf{S2} \rightarrow \forall ZT(ZT < ZD)$$

$$C_1 = ZT - ZS \longrightarrow A_1(ZT, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$C_2 = ZD - ZS \longrightarrow A_2(ZD, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$C_3 = ZD - ZS \longrightarrow A_3(ZD, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$C_4 = ZW - ZS \longrightarrow A_4(ZW, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$C_5 = ZW - ZS \longrightarrow A_5(ZW, ZS, \rho_1)$$

$$\rightarrow A_{S2} = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

$$\Rightarrow A_W = A_{S1} + A_{S2} \tag{4.15}$$

$$\mathbf{S1} \rightarrow \forall ZT(ZT < ZD)$$

$$C_1 = ZT - ZS \longrightarrow A_1(ZT, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$C_2 = ZW - ZS \longrightarrow A_2(ZW, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$C_3 = ZW - ZS \longrightarrow A_3(ZW, ZS, \rho_2)$$

$$C_4 = ZD - ZS \longrightarrow A_4(ZD, ZS, \rho_2)$$

$$C_5 = ZD - ZS \longrightarrow A_5(ZD, ZS, \rho_1)$$

$$\Rightarrow A_W = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 \quad (4.16)$$

$$\mathbf{L2} \rightarrow \forall ZT(ZT < ZD)$$

$$C_1 = ZT - ZS \longrightarrow A_1(ZT, ZS, \rho_2)$$

$$C_2 = ZD - ZS \longrightarrow A_2(ZD, ZS, \rho_2)$$

$$C_3 = ZD - ZS \longrightarrow A_3(ZD, ZS, \rho_1)$$

$$\rightarrow A_{L2} = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\Rightarrow A_L = A_{L1} + A_{L2} \quad (4.17)$$

- $ZD=ZS$

7. Fall: $ZS > ZW$

In diesem, in Abbildung 4.19 dargestellten, Fall berechnet sich die Attraktion des L1-Quaders genau wie in den davorgehenden Fällen, nach 4.13. Der einzige Unterschied besteht in der Tatsache, dass nun ZS und ZD zusammenfallen, was aber hier, bei der Attraktionsberechnung keine Rolle spielt. Die Attraktionen der S1- und S2-Quader berechnen sich nach 4.18 bzw. 4.19.

$$\mathbf{S1} \rightarrow \forall ZT (ZT > ZS)$$

$$C_1 = ZW - ZS \longrightarrow A_1(ZW, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$C_2 = ZT - ZS \longrightarrow A_2(ZT, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$C_3 = ZT - ZS \longrightarrow A_3(ZT, ZS, \rho_1)$$

$$\rightarrow A_{S1} = A_1 - A_2 + A_3 \quad (4.18)$$

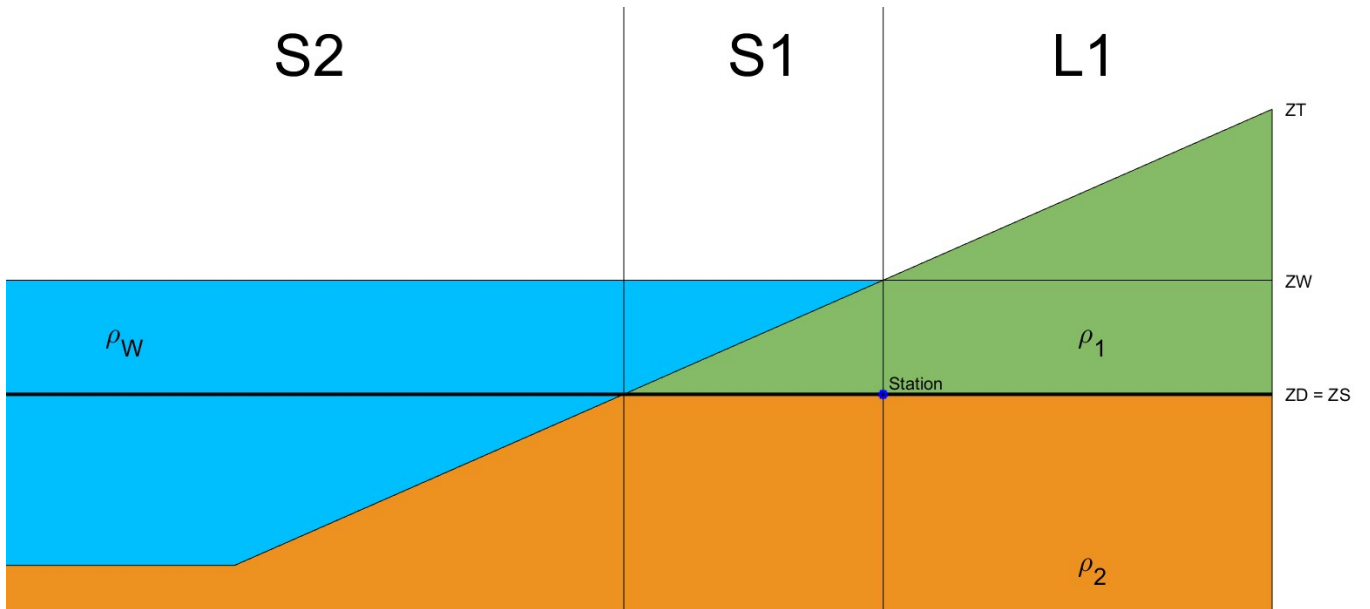


Abbildung 4.19: Graphische Darstellung von Fall 7 mit $ZD < ZS$ und $ZD > ZW$.

$$\mathbf{S2} \rightarrow \forall ZT (ZT < ZS)$$

$$C_1 = ZW - ZS \longrightarrow A_1(ZW, ZS, \rho_1 - \rho_W)$$

$$C_2 = ZT - ZS \longrightarrow A_2(ZT, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$\rightarrow A_{S2} = A_1 + A_2$$

$$\Rightarrow A_W = A_{S1} + A_{S2} \quad (4.19)$$

8. Fall: $ZS < ZW$

Dieser 8-te und letzte Fall ist in Abbildung 4.20 graphisch dargestellt. Die Attraktionen der S1- und L2-Quader berechnet sich nach 4.20 bzw. 4.21. Die Attraktion des L1-Quaders berechnet sich erneut nach 4.13.

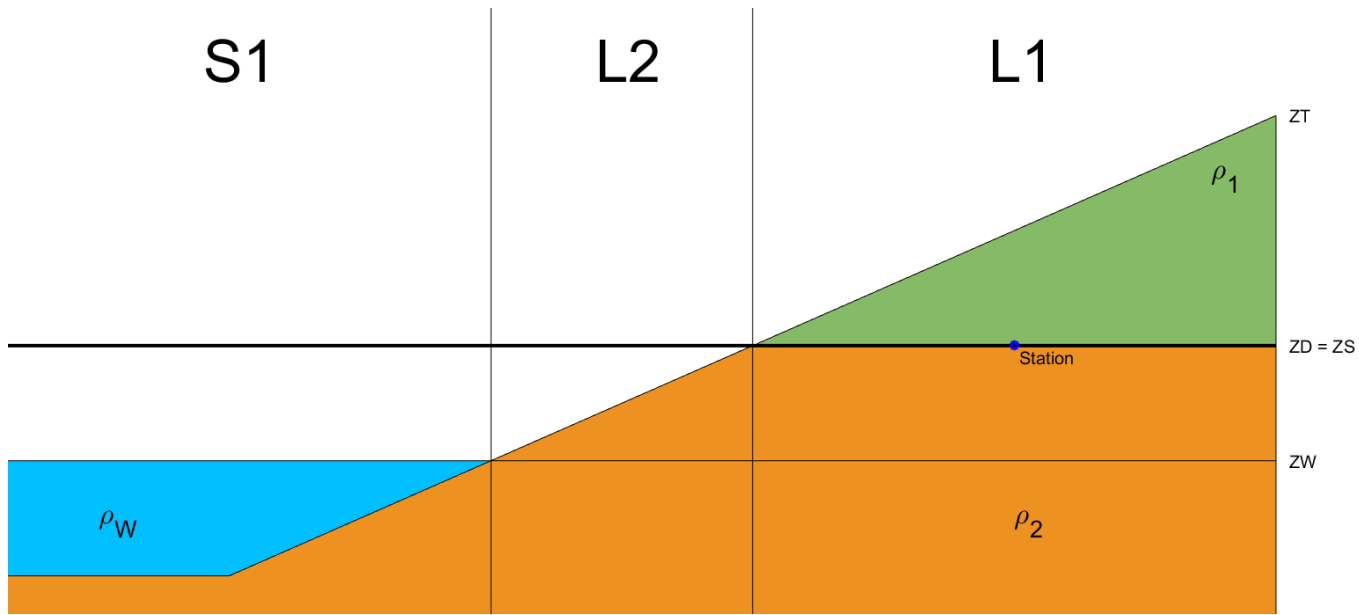


Abbildung 4.20: Graphische Darstellung von Fall 8 mit $ZD < ZS$ und $ZS < ZW$.

$$\mathbf{S1} \rightarrow \forall ZT (ZT < ZS)$$

$$C_1 = ZT - ZS \rightarrow A_1(ZT, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$C_2 = ZW - ZS \rightarrow A_2(ZW, ZS, \rho_2 - \rho_W)$$

$$C_3 = ZW - ZS \rightarrow A_3(ZW, ZS, \rho_2)$$

$$\Rightarrow A_W = A_1 - A_2 + A_3 \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L2} &\rightarrow \forall ZT(ZT < ZS) \\
C_1 = ZT - ZS &\longrightarrow A_1(ZT, ZS, \rho_2) \\
&\rightarrow A_{L2} = A_1 \\
&\Rightarrow A_L = A_{L1} + A_{L2} \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Damit sind alle möglichen Fälle der Berechnung der Quader-Attraktion auf eine Station abgedeckt. Die Beweisführung dieser Methode der Attraktionsberechnung von Quadern wird im folgenden Kapitel anhand von simulierten Beispielen (selbst konstruierte DHMs) gezeigt.

Kapitel 5

Simulation

Die Prüfung des implementierten Algorithmus erfolgte anhand synthetischer DHMs mit einer ebenen Ausdehnung von 100m x 100m. Dafür wurden eigene Station-Files erstellt und neben der Höhe des Dichtesprungs ZD auch jene der Station ZS variiert, um alle möglichen Fallunterscheidungen durchzurechnen. Der Beweis der korrekten Attraktionsberechnung bei Verwendung eines Dichtemodells erfolgt durch den direkten Vergleich mit der Attraktionsberechnung der originalen TOPOGRAV-Software, ohne implementierten Dichtemodell. Die genaue Durchführung wird anhand von zwei synthetischen Beispielen detailliert beschrieben.

• Beispiel 1

Das erste angeführte Beispiel ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Der Quader Q1 repräsentiert das synthetische DHM mit implementierten Dichtemodell.

Alle DHM-Punkte haben die selbe Höhe $ZT = 0\text{m}$. Die Station befindet sich in der Mitte des 100m x 100m großen Gebietes und hat eine Höhe von $ZS = -400\text{m}$. Die Dichte ρ_1 , welche im DEM-Panel der TOPOGRAV-GUI übergeben wird, hat einen Wert von $\rho_1 = 2670[\text{kg}/\text{m}^3]$. Die Parameter des Dichtemodells wurden im Density-Model-Panel, mit $\rho_2 = 2800[\text{kg}/\text{m}^3]$ und $ZD = -300\text{m}$, übergeben. Mit diesen Parametern wurde die Attraktion A_{Q1} des Quaders Q1 (welcher sich aus zwei Subquadern zusammenstellt) auf die Station nach 5.1 berechnet. Zur Überprüfung der korrekten implementierten Berechnung der Attraktion der Subquader und der daraus resultierenden Gesamtattraktion A_{Q1} werden mit dem originalen TOPOGRAV die Attraktionen der Quader Q2, Q3 und Q4 berechnet. Der Quader Q2 wird durch das gleiche DHM-File ($ZT = 0\text{m}$ für alle Punkte der DHM) wie der Quader Q1, repräsentiert und besitzt die Dichte ρ_1 . Seine Attraktion berechnet sich nach 5.2 und entspricht der Attraktion A_1 aus 5.1.

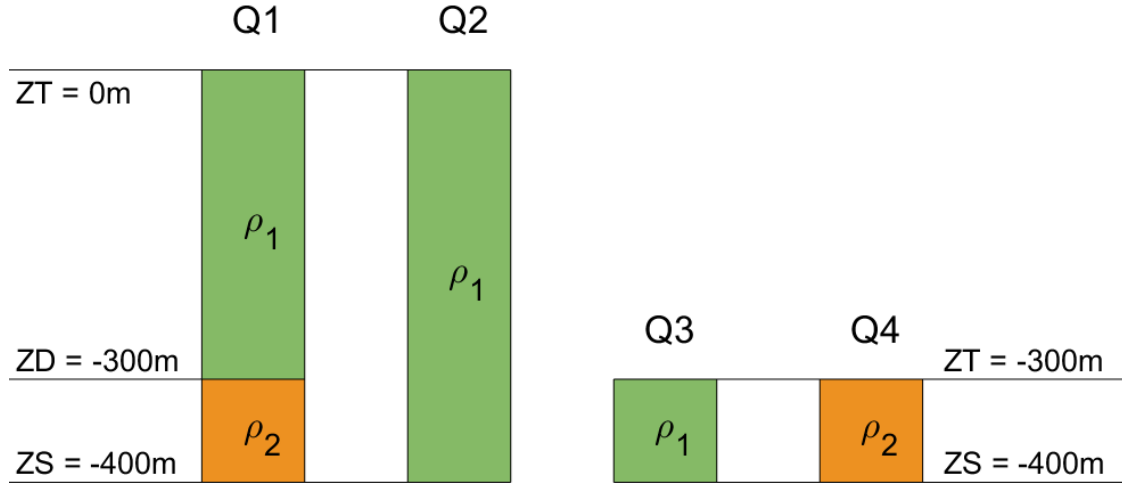


Abbildung 5.1: Zur Berechnung der Attraktion des Quaders Q1, bestehend aus zwei Sub-Quadern (grün: $H=300\text{m}$, $\rho = \rho_1$; orange: $H=100\text{m}$, $\rho = \rho_2$) ist die Berechnung und korrekte Aufsummierung der Attraktionen der Quader Q2, Q3 und Q4 erforderlich.

Q1

$$C_1 = 400 \longrightarrow A_1(0, -400, 2670)$$

$$C_2 = 100 \longrightarrow A_2(-300, -400, 2670)$$

$$C_3 = 100 \longrightarrow A_3(-300, -400, 2800)$$

$$\rightarrow A_{Q1} = A_1 - A_2 + A_3 \quad (5.1)$$

Q2

$$C = 400 \longrightarrow A_{Q2}(0, -400, 2670) \quad (5.2)$$

Zur Berechnung der Attraktion der Quader Q3 und Q4 wurde ein weiteres synthetisches DHM entworfen. Darin wurde allen Punkten die Höhe $ZT = -300\text{m}$ zugewiesen und eine Stationshöhe von $ZS = -400\text{m}$ gewählt (genauso hätte man $ZT=0\text{m}$ und $ZS = -100\text{m}$ wählen können, solange eine Quaderhöhe von 100m oberhalb der Station repräsentiert wird). Die Attraktionen von Q3 und Q4 berechnen sich nach 5.3 bzw. 5.4 und gleichen den Attraktionen A_2 bzw. A_3 aus 5.1.

Q3

$$C = 100 \longrightarrow A_{Q3}(-300, -400, 2670) \quad (5.3)$$

Q4

$$C = 100 \longrightarrow A_{Q4}(-300, -400, 2800) \quad (5.4)$$

Zur Überprüfung der korrekten Implementierung des Dichtemodells in TOPOGRAV stehen nun die Attraktionen A_{Q1} , A_1 , A_2 und A_3 (Dichtemodell) sowie A_{Q2} , A_{Q3} und A_{Q4} (ohne Dichtemodell), zur Verfügung. Da die numerischen Werte der einzelnen Attraktionen nicht repräsentativ sind, wurde die Differenz der entsprechenden Attraktionen betrachtet. Diese Differenz sollte, bei einer korrekten Anwendung der Fallunterscheidungen, gleich Null sein. Der nachstehenden Tabelle 5.1 sind die Attraktionen und deren entsprechenden Differenzen zu entnehmen.

Tabelle 5.1: Berechnung und Differenz unterschiedlicher Quader-Attraktionen des 1. Beispiels.

Quaderattraktion		
Dichtemodell	Original	Differenz [m/s^2]
A_1	A_{Q2}	0
A_2	A_{Q3}	0
A_3	A_{Q4}	0
$A_1 - A_2$	$A_{Q2} - A_{Q3}$	10^{-7}
A_{Q1}	$A_{Q2} - A_{Q3} + A_{Q4}$	10^{-7}

Es zeigt sich, dass die Attraktion eines Quaders, dessen vertiakler Abstand zur Stationshöhe gleich Null ist, exakt gleich berechnet wird. Dies zeigt, dass die *attraction*-Methode korrekt aufgerufen und der entsprechende Fall in der Fallunterscheidung gewählt wird.

Mit der Differenz $A_1 - A_2$ bzw. $A_{Q2} - A_{Q3}$ wird die Attraktion des grünen Subquaders von Q1 berechnet. Da $A_1 = A_{Q2}$ und $A_2 = A_{Q3}$, wäre zu erwarten, dass eine Differenz oder Summation von Attraktionen ebenso exakt das selbe Ergebnis liefert. Betrachtet man die Ergebnisse der Berechnung von A_{Q1} bzw. dessen grünen Subquaders durch das Dichtemodell und vergleicht diese mit der Summation der einzelnen, mithilfe des originalen TOPOGRAV, berechneten Attraktionen, so ergibt sich kein exaktes Ergebnis. Jedoch ist die geringe Differenz von 10^{-7} eher auf numerische Probleme zurückzuführen. Dies bedeutet, dass sich diese beiden Werte in der

siebenten Nachkommastelle unterscheiden, was für die Berechnung der LA-Komponenten mehr als ausreichend ist.

• Beispiel 2

Das zweite Beispiel soll den Beitrag der LS-Mask zur Berechnung von Quaderattraktionen überprüfen sowie den numerischen Einfluss, der Summation von Quadern, testen.

Das zweite Fallbeispiel besteht eigentlich aus drei unterschiedlichen Fällen. Betrachten wir dazu Abbildung 4.13. In diesem angeführten Fall werden, sollte es DHM-Punkte geben welche als *Sea* gekennzeichnet sind, immer die drei Quader S1, S2 und S3 berechnet. Sollte es keine DHM-Punkte geben, für die einer der beiden anderen Fälle zutrifft, so sind die berechneten Attraktionen der beiden anderen Quader gleich Null. Erläutern wir diese Tatsache anhand des folgenden, in Abbildung 5.2 dargestellten Beispiels. Dabei handelt es sich um den S1-Quader aus Abbildung 4.13.

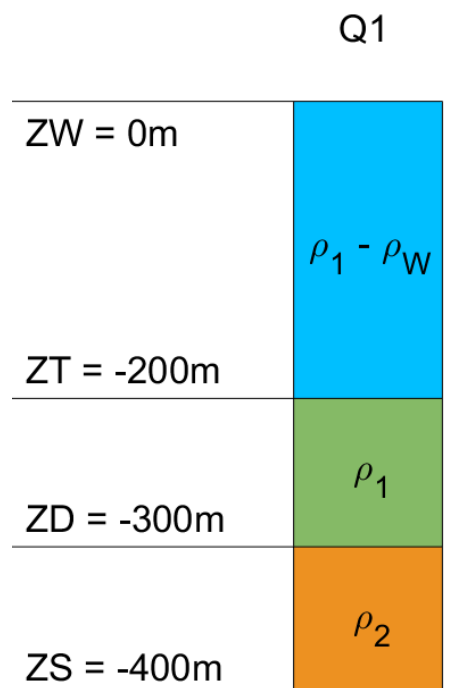


Abbildung 5.2: Der Quader Q1 ist vertikal in drei Subquader unterteilt. Der blaue Quader weist ein Massendefizit zum umliegenden Gebiet auf, weshalb seine Attraktion mit einer Dichte $\rho = \rho_1 - \rho_W$ berechnet wird (ZW...Höhe des Wasserspiegels, ρ_W ...Dichte von Wasser).

Für jeden der acht Fälle werden alle möglichen S- und L-Quader berechnet. Trifft keines der darin vorkommenden Kriterien zur Unterscheidung von ZT auf einen der DHM-Punkte zu, so wird die Attraktion eines solchen S- bzw. L-Quader auf Null gesetzt und mit den restlichen S- und L-Quadern zur Gesamtattraktion des Einflußgebietes aufaddiert. Daher kann anhand des

zweiten synthetischen Beispiels überprüft werden, ob die Attraktion der Land(L1)- sowie jene der, in Abbildung 5.3 dargestellten, Q2(S2)- und Q3(S3)-Quader gleich Null gesetzt wurden. Genau wie beim ersten Beispiel, soll auch hier die Dichtemodell-Berechnung mit jener des originalen-TOPOGRAV und die Differenzen der einzelnen Attraktionen, verglichen werden. In Tabelle 5.2 sind die Ergebnisse dieses zweiten Beispiels aufgelistet. Die Bezeichnung der Attraktionen der einzelnen Sub-Quader entspricht jener aus 4.2 und mit A_O werden jene die mithilfe des Original-TOPOGRAV berechnet wurden bezeichnet.

Q2		Q3	
ZW = 0m	$\rho_1 - \rho_W$	$\rho_1 - \rho_W$	ZW = 0m
ZD = -300m			ZD = -300m
ZT = -350m	$\rho_2 - \rho_W$	$\rho_2 - \rho_W$	ZS = -400m
ZS = -400m	ρ_2	$\rho_2 - \rho_W$	ZT = -500m

Abbildung 5.3: Zur Berechnung der Attraktion des Quaders Q1 aus Abbildung 5.2 ist die Berechnung und korrekte Aufsummierung der Attraktionen der Quader Q2 und Q3 erforderlich.

Tabelle 5.2: Berechnung und Differenz unterschiedlicher Quader-Attraktionen des 2. Beispiels.

Quaderattraktion		
Dichtemodell	Original	Differenz [m/s^2]
A_1	A_{O1}	10^{-9}
A_2	A_{O2}	0
A_3	A_{O3}	0
A_4	A_{O4}	10^{-7}
A_5	A_{O5}	10^{-7}
$A_1 - A_2$	$A_{O1} - A_{O2}$	10^{-7}
A_{Q1}	$A_{O1} - A_{O2} + A_{O3} - A_{O4} + A_{O5}$	10^{-8}

Wie anhand von A_1 , A_4 und A_5 , aus Tabelle 5.2, ersichtlich, kann es auch innerhalb der Funktion *attraction* zu minimalen numerischen Abweichungen kommen. Diese sind jedoch in der selben

Größenordnung wie jene durch Summation hervorgerufenen numerischen Abweichungen. Hingegen zeigt sich, dass es bei einer größeren Anzahl an Sub-Quadern und der damiteinhergehenden Summation, zu keinen größeren Differenzen kommt. Im angeführten Beispiel wird die Abweichung zwischen den Gesamtattraktionen sogar um eine 10er-Potenz genauer als die Differenz mancher Sub-Quader. Diese Größenordnung der Attraktionsdifferenzen von 10^{-7} bis 10^{-8} konnte für alle weiteren Fälle bestätigt werden.

Diese Gegenüberstellungen haben gezeigt, dass bei Verwendung eines Dichtemodells, die notwendigen Fallunterscheidungen korrekt implementiert und die benötigten Attraktionen korrekt aufsummiert werden. Weiters konnte die Funktionalität der LS-Maks zur Unterscheidung von Land- und Wasser-Massen nachgewiesen werden.

Mit dieser Bestätigung der korrekten und funktionstüchtigen Implementierung eines Dichtemodells in TOPOGRAV, kann anhand von vorhandenen DHMs und Stationsfiles der Einfluß eines Dichtemodells auf die lokale Schwerefeldmodellierung gezeigt werden.

Kapitel 6

Fallbeispiel

In diesem Kapitel soll, anhand eines tatsächlichen Stations-Files, der Einfluß des Dichtemodells auf die Berechnung der Schwerefeldgrößen ξ, η und g gezeigt werden. In Abbildung 6.1 ist das Einflußgebiet samt den Stationen dargestellt. Dabei handelt es sich um Stationen im Koralm-tunnel. Die Stationen befinden sich somit unterhalb der Erdoberfläche.

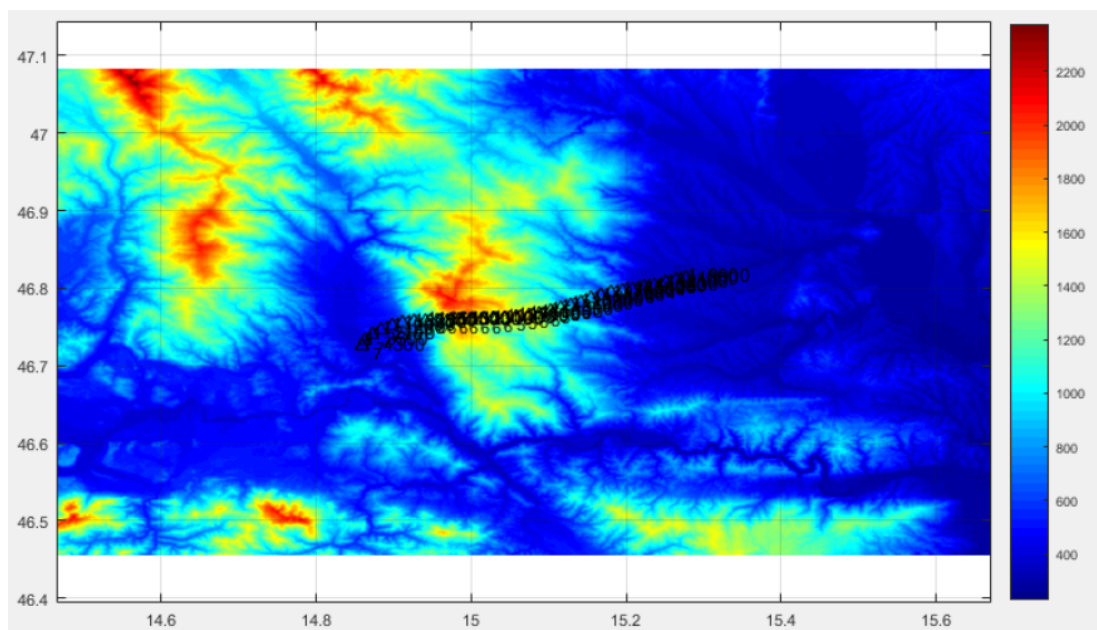


Abbildung 6.1: Darstellung aller das Stations-File Koralm-tunnel umfassenden Stationen samt farblich kodiertem DHM des Einflußbereichs.

Anhand dieses Beispiels sei noch auf eine nicht unwesentliches Problem hingewiesen – die Rechendauer. Das originale Programm TOPOGRAV, also ohne Einbindung eines Dichtemodells, benötigte knapp 17 Minuten zur Prozessierung des ca. 350 Stationen umfassenden Station-Files. Daher wurde zu diesen Testzwecken das Station-File auf 32 Stationen reduziert. Mit inkludiertem

Dichtemodell benötigte TOPOGRAV noch immer knapp 5 Minuten.

Für eine wirtschaftliche Nutzung ist diese Rechenzeit ineffizient. Eine recheneffizientere Implementierung wäre sinnvoll und sollte in naher Zukunft in Angriff genommen werden. Im Zuge dieser Diplomarbeit war es dem Verfasser nicht mehr möglich darauf einzugehen!

Anhand von sechs Stationen, aufgelistet in Tabelle 6.1, soll der Einfluß des Dichteunterschieds zwischen ρ_1 und ρ_2 sowie jener der Höhe des Dichtesprungs ZD, auf ξ , η und g untersucht werden. Die Lage dieser ausgewählten Stationen ist in Abbildung 6.2 dargestellt.

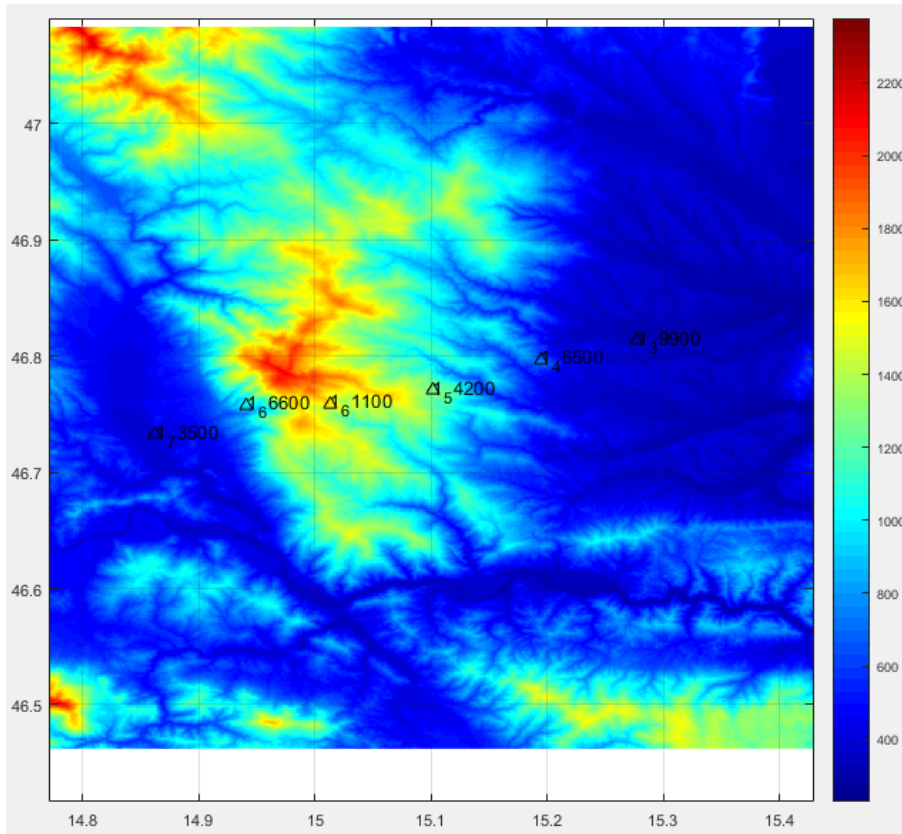


Abbildung 6.2: Reduzierte Anzahl an Stationen zum Testen des Dichtemodells.

Bei der nachfolgenden Untersuchung wurde die Dichte ρ_1 , mit $\rho_1 = 2670[kg/m^3]$, fix definiert und die Dichte ρ_2 variiert. Um den Einfluß der Höhe des Dichtesprungs ZD zu untersuchen wurde dieser zw. $ZD = 300m$ (ca. Stationshöhe) und $ZD=2000m$ (ca. maximale absolute Höhe eines, innerhalb des Einflußradius befindlichen, Topographiepunktes) variiert.

Tabelle 6.1: Für den Test des Dichtemodells ausgewählte Stationen.

Station ID	H-Station [m]	H-Topo [m]
9900	322.744	326.849
6500	358.648	711.319
4200	400.536	1251.836
1100	427.100	1614.513
6600	410.600	990.303
3500	389.900	419.259

Zur sinnhaften Überprüfung der berechneten reduzierten LA-Komponenten (ξ_{RED} , η_{RED}) sind in den nachfolgenden Abbildungen 6.3 bis 6.6, die Komponenten entsprechend der Gleichung 3.14 der einzelnen Stationen dargestellt. Da zu erwarten ist, dass die Ergebnisse bei Verwendung des Dichtemodells zwischen jenem mit konstanter Dichte $\rho = \rho_1 = 2670 [kg/m^3]$ (braun) und jenem mit $\rho = \rho_2 = 3500 [kg/m^3]$ (grün) liegen werden sind diese beiden Ergebnisse in den Abbildungen dargestellt.

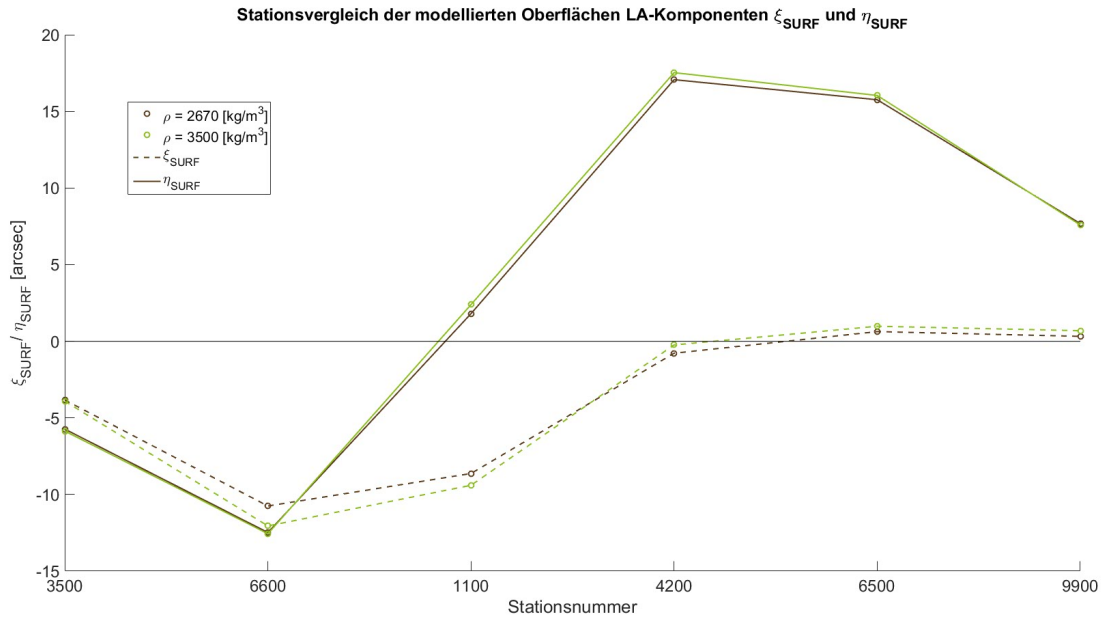


Abbildung 6.3: Nach Formel 3.6 modellierte Oberflächen LA-Komponenten ξ_{SURF} und η_{SURF} der sechs ausgewählten Stationen des Koralmtunnels.

Die, in Abbildung 6.3 dargestellten, modellierten Oberflächen LA-Komponenten ξ_{SURF} und η_{SURF} zeigen auf, dass eine Dichteänderung nahe der Erdoberfläche keinen signifikanten Einfluss auf die langwelligen Komponenten des Erdschwerefeldes hat, da sich die Ergebnisse kaum voneinander unterscheiden. Bis auf die ξ -Komponente der Station 6600, weisen alle Ergebnisse Differenzen unter 1" auf.

Eine Aussage bezüglich der numerischen Werte der LA-Komponenten ist aufgrund der starken Variation der umliegenden Topographie nicht möglich.

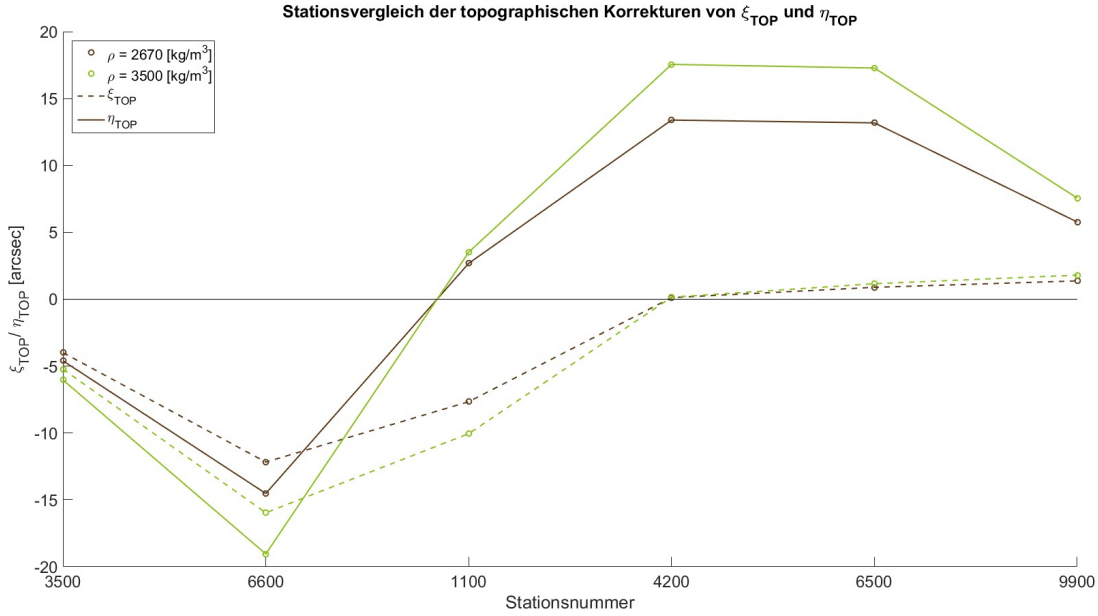


Abbildung 6.4: Topographische Korrekturen ξ_{TOP} und η_{TOP} der sechs ausgewählten Stationen des Koralmtunnels.

Signifikantere Unterschiede gibt es hingegen bei den topographischen Korrekturen. Sowohl für ξ_{TOP} und η_{TOP} (Stationshöhe wird gleich der korrespondierenden DHM-Höhe der geographischen Stationskoordinaten gesetzt) als auch für ξ_{TUN} und η_{TUN} (Abbildung 6.5)(tatsächliche Stationshöhe wird zur Berechnung des topographischen Einflusses verwendet) kommt es zu Differenzen von bis zu 5". Diese beiden berechneten topographischen Korrekturen gehen in 3.14 mit unterschiedlichem Vorzeichen in die Berechnung der reduzierten LA-Komponenten ein. Diese reduzierten LA-Komponenten, welche man in der jeweiligen Stationstiefe messen würde sind in Abbildung 6.6 dargestellt. Es ist leicht zu erkennen, dass die Einbindung eines Dichtemodells keine signifikanten Auswirkungen auf die Berechnung von LA-Komponenten hat. Diese Tatsache gilt sowohl für Stationen nahe der Erdoberfläche (z.B.: Station 9900) als auch für jene in größeren Tiefen (z.B.: Station 1100).

Die Auswirkung eines Dichtemodells auf reduzierte g-Messungen sind in Abbildung 6.7 zu sehen. Für tiefgelegene Stationen, wie der Station 1100, kommt es zu Differenzen von bis zu knapp 30mGal. Dies lässt die Schlussfolgerung zu, dass die Implementierung eines Dichtemodells für die genauere Berechnung von reduzierten g-Werten herangezogen werden kann.

Damit wurde gezeigt, dass ein Dichteunterschied von $\rho_2 - \rho_1 = 830 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ einen merkbaren Unterschied bei der Berechnung von Schwerefeldgrößen, speziell von g-Werten, ausmacht. Nun stellt sich noch die Frage, welchen Einfluss die Höhe des Dichtesprungs ZD auf diese Berechnungen hat. In Abbildung 6.8 ist der Verlauf von g_{RED} in Abhängigkeit von ZD für die Station 1100

dargestellt. Wie zu erwarten, zeigt sich ein Verlauf zwischen jenen beiden, mit einer konstanten Dichte $\rho = \rho_1$ und $\rho = \rho_2$, berechneten Werten.

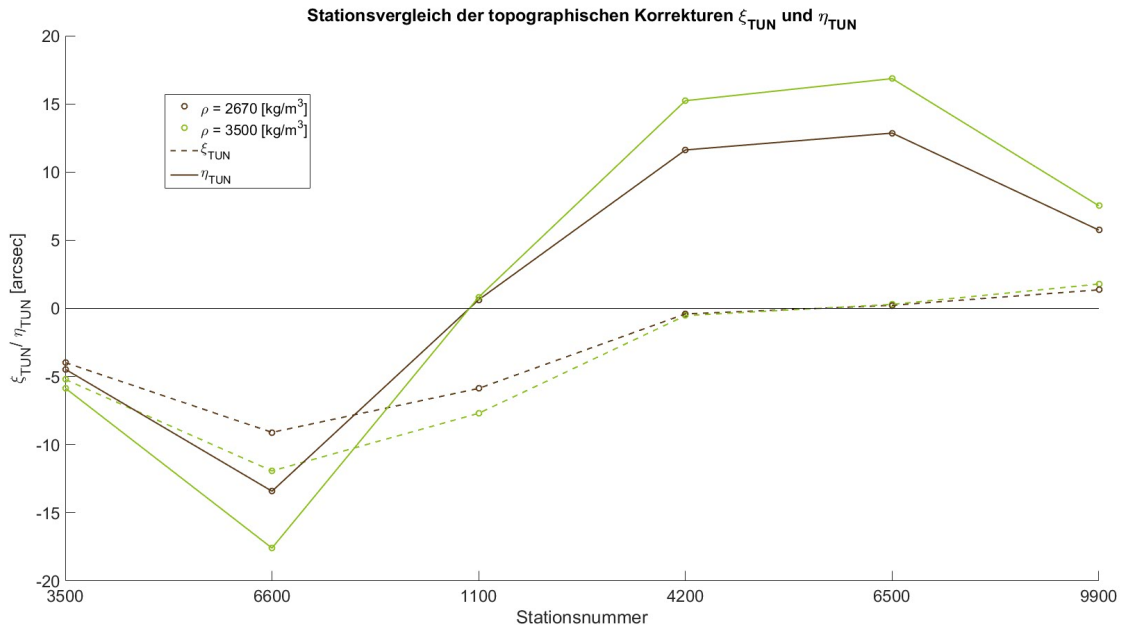


Abbildung 6.5: Topographische Korrekturen ξ_{TUN} und η_{TUN} der sechs ausgewählten Stationen.

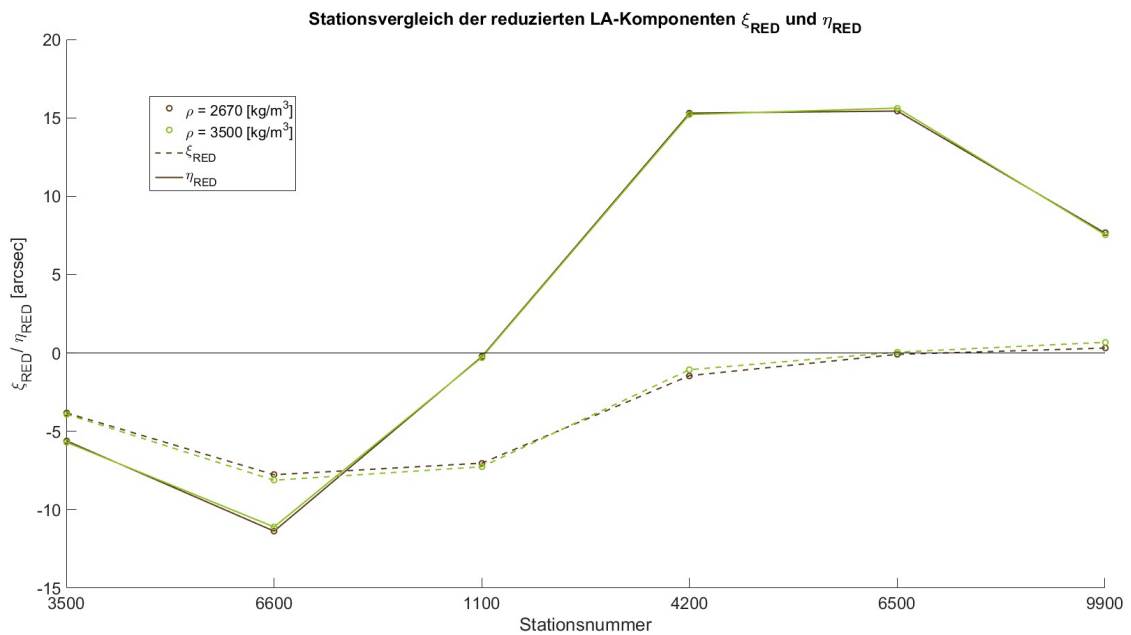


Abbildung 6.6: Reduzierte LA-Komponenten ξ_{RED} und η_{RED} der sechs ausgewählten Stationen.

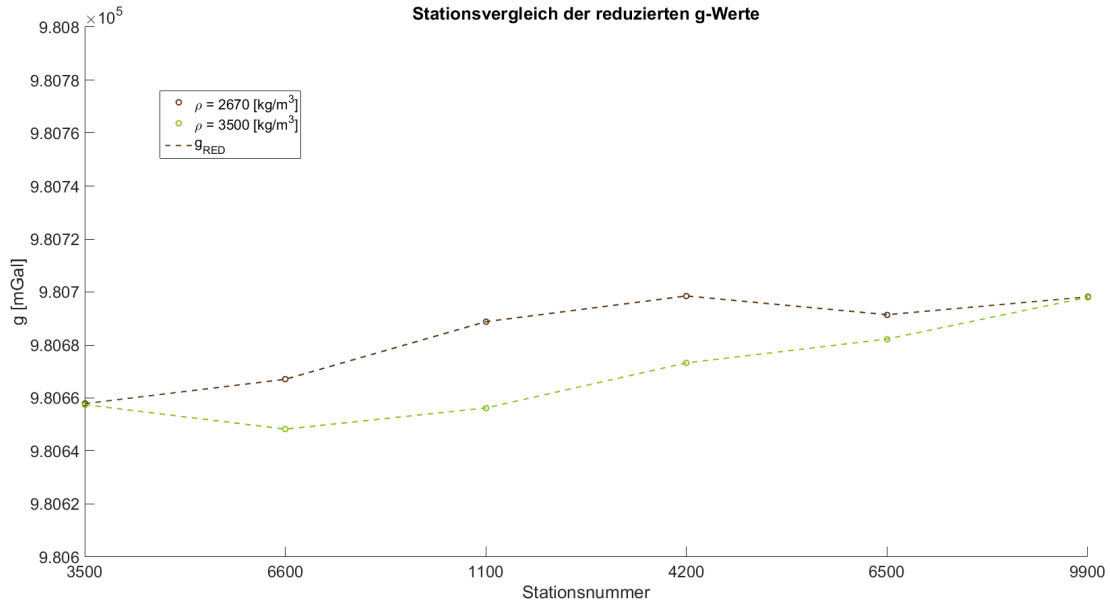


Abbildung 6.7: Reduzierte g-Messung g_{RED} der sechs ausgewählten Stationen.

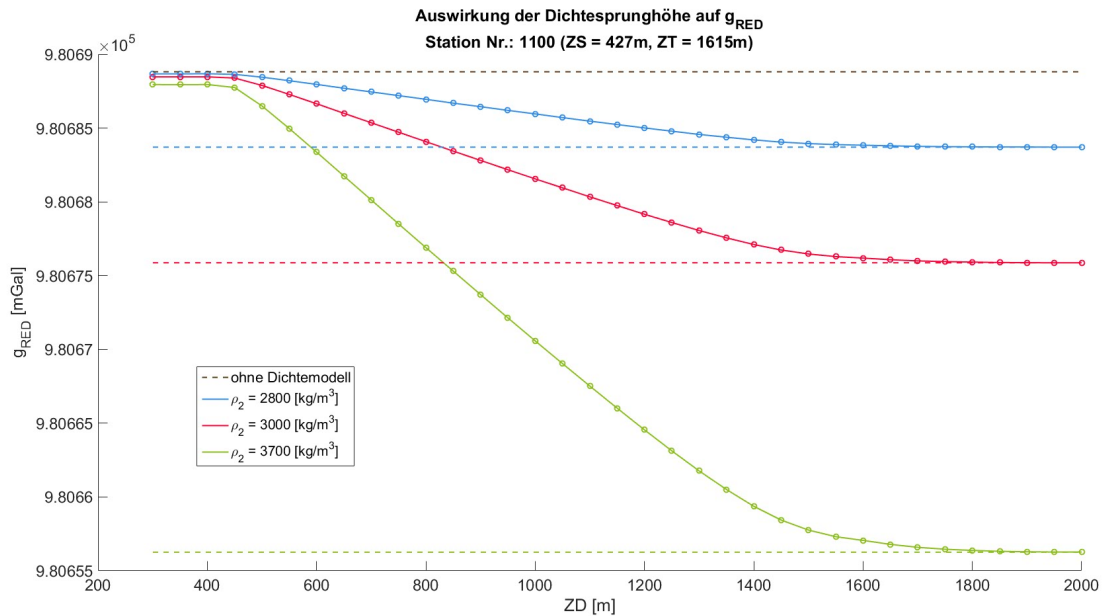


Abbildung 6.8: Darstellung reduzierter Schwerewerte g_{RED} in Abhängigkeit der Höhe des Dichtesprungs ZD für drei unterschiedliche Werte der Dichte ρ_2 . Die strichlierten Linien repräsentieren den Wert von g_{RED} bei einer Berechnung ohne Verwendung eines Dichtemodells für unterschiedliche konstante Dichten ρ .

Die Steigung des linear verlaufenden Teiles des, in Abbildung 6.8 dargestellten, Kurvenverlaufs für $\rho_2 = 3700[kg/m^3]$ liegt bei ca. $10mGal/300m$. Dieser Gradient ist groß genug um signifikanten Unterschiede zwischen den Berechnungsmethoden (mit oder ohne Dichtemodell) hervorzurufen.

Nicht für alle Stationen und besonders für alle Schwerefeldgrößen lässt sich ein solch linearer, zwischen den beiden Grenzwerten verlaufender Kurvenverlauf zeigen. In Abbildung 6.9 ist für die Station 4200 die reduzierte LA-Komponente η_{RED} in Abhängigkeit von ZD dargestellt. Zwar zeigt sich die gleiche Annäherung an den ρ_2 -Wert, die unterschiedlichen Startwerte sowie der, von ρ_2 unabhängige, Scheitelpunkt bei ZD=1350m zeugen von einer ganz eigenen Charakteristik, welche wohl auf die unbekannte und stark variierende Topographie des Einflussgebietes zurückzuführen ist.

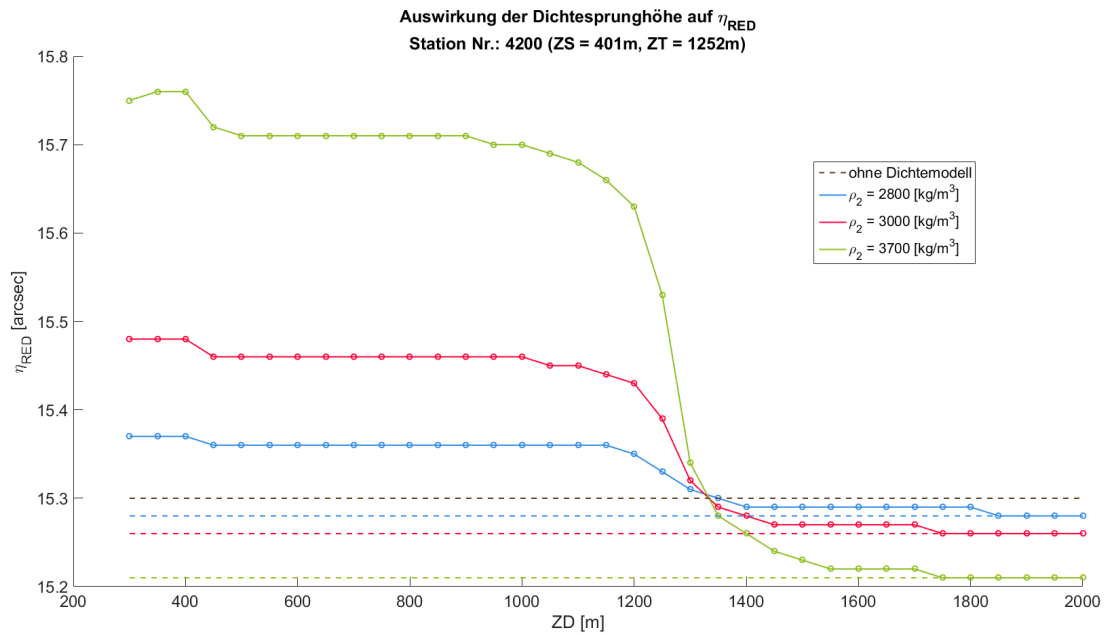


Abbildung 6.9: Darstellung eines, im Vergleich zu anderen Stationen, eher untypischen Verlaufs von η_{RED} -Werten.

Abschließend lässt sich festhalten, dass die Einbeziehung eines Dichtemodells besonders geeignet erscheint für Stationen unterhalb massiver Gebirgszüge und hoher Dichtedifferenzen. Den wohl größten Dichteunterschied erreicht man mit der Einbindung von Wassermassen. Um dies auch mit Fakten zu untermauern, wäre ein Station-File eines im Meer oder unterhalb eines Meeres verlaufenden Tunnels (z.B.: Eurotunnel zwischen Frankreich und England) notwendig!

Kapitel 7

Ausblick

Die beschriebenen Ergebnisse zeigen auf, dass die Inkludierung eines Dichtemodells in die lokale Schwerefeldmodellierung einen signifikanten Einfluß auf die Ergebnisse dieser Modellierung hat. Das implementierte ebene Dichtemodell stellt jedoch nur eine erste grobe Abschätzung einer möglichen Dichteinformation des Untergrunds dar. Dieser simple erste Ansatz wurde aufgrund von derzeit nicht oder nur ungenügend vorhandenen lokalen Krustendichteninformationen gewählt. Daher sind sämtliche mögliche Erweiterungen des in dieser Arbeit vorgestellten Dichtemodelles an die Verfügbarkeit dieser Ausgangsdaten geknüpft.

Sollten solche Ausgangsdaten zur Verfügung stehen, wäre es es möglich auf ein, wie in Abbildung 4.1 dargestelltes, topographisches Dichtemodell überzugehen. Dieses könnte leicht mit dem ebenen Dichtemodell (Annahme, dass ab einer gewissen Tiefe ein konstanter Dichtewert vorherrscht) oder weiteren topographischen Dichtesprüngen verbunden werden.

Was horizontale Dichtesprünge betrifft, kann die LS-Mask erweitert werden. Durch Hinzunahme weiterer Codierungen könnte nicht nur zwischen Land=0 und Wasser=1 unterschieden werden. In Gebirgen könnten Sedimentablagerungen oder Gletscher einen eigenen Code zugeordnet bekommen (Sediment=3, Gletscher=4,...). Um eine solche Erweiterung zu realisieren sind weitere Tests mit unterschiedlichen Geländemasken (vor allem Meer) unbedingt nötig!

Denkbar wäre auch die Einbindung von unterirdischen Lagerstätten oder Wasserreservoirs, wie in Abbildung 7.1 dargestellt, durch eine Kombination von LS-Mask und hochauflösender Dichteinformation.

Für alle diese möglichen Erweiterungen ist eine Optimierung der Rechenzeit unabdingbar!

Zur Veranschaulichung all dieser möglichen Information des Untergrunds wäre eine 3-dimensionale Darstellung innerhalb der TOPOGRAV-GUI vorstellbar. Diese Darstellung könnte die momentane Darstellung des Einflußgebietes samt Stationen ersetzen oder separat dargestellt werden. Eine weitere Möglichkeit wäre eine ebene farbcodierte Darstellung der Topographien der einzelnen Dichtesprünge.

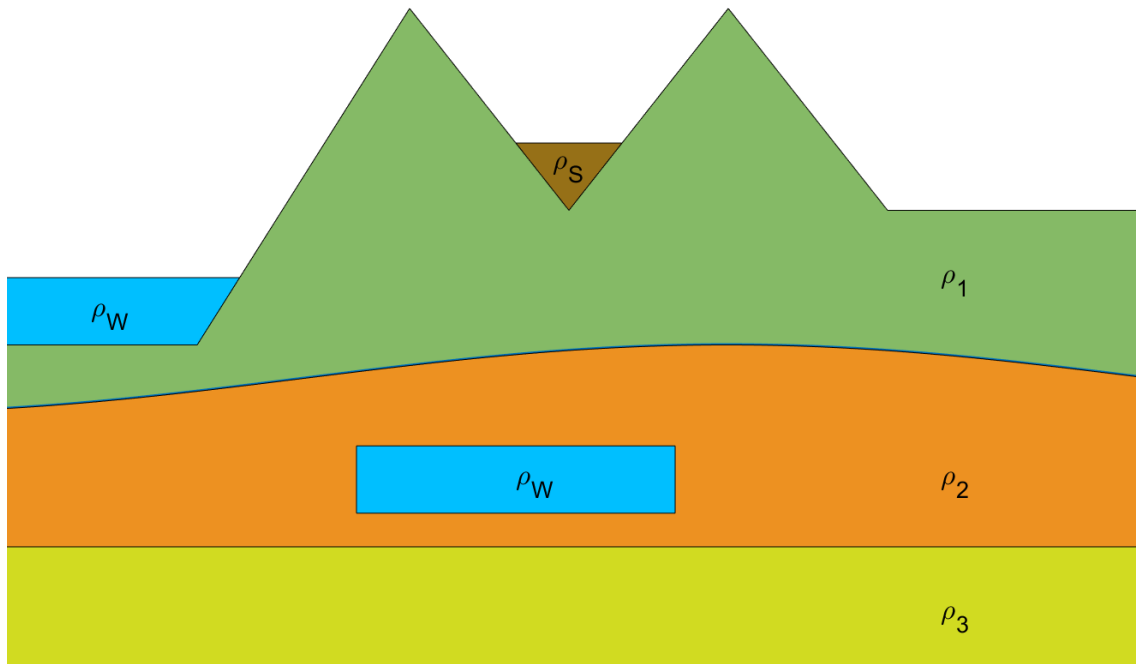


Abbildung 7.1: Darstellung eines möglichen zukünftigen Dichtemodells.

Es zeigt sich also, dass das implementierte Dichtemodell nur einen ersten, sehr groben Schritt Richtung Einbindung von Dichteinformation in die Modellierung lokaler Schwerfeldmodelle darstellt. Sollten in Zukunft hochauflösende lokale Daten des Untergrunds vorliegen kann das große Potential, der Inkludierung eines Dichtemodells in TOPOGRAV, ausgeschöpft werden!

Abbildungsverzeichnis

1.1	Querschnitt Gotthard-Basistunnel	1
1.2	Geoid und LA im Gotthard-Basistunnel	2
2.1	Streckenreduktion	6
2.2	Schwerevektor	7
2.3	Kugelfunktionen	10
2.4	Höhendefinition	12
2.5	Störpotential	14
2.6	Lotabweichungen	18
2.7	Komponenten der Lotabweichung	20
2.8	Lotkrümmung und Projektionen	21
2.9	Prinzip des astronomischen Nivellement	22
2.10	Krümmung des Rotationsellipsoids	24
2.11	Interpolation von Geoidundulationen	26
3.1	Topographische Korrektur	31
3.2	Ebenen Approximation der Aufpunktshöhe	34
4.1	Topographisches Dichtemodell	41
4.2	Ebenes Dichtemodell - Beispiel 1	42
4.3	Ebenes Dichtemodell - Beispiel 2	43
4.4	Ebenes Dichtemodell - Beispiel 3	43
4.5	Bisherige TOPOGRAV GUI	44
4.6	Erweiterte TOPOGRAV GUI	45
4.7	Code-Passage des Density-File-Panels	46

4.8	Code-Passage der <i>attraction</i> -Funktion	46
4.9	Land-Sea-Mask	47
4.10	Grundidee der Attraktionsberechnung einzelner Sub-Quader	48
4.11	Binärbaum - LAND	50
4.12	Binärbaum - WASSER	51
4.13	Fallunterscheidung 1.Fall	52
4.14	Fallunterscheidung 2.Fall	56
4.15	Fallunterscheidung 3.Fall	56
4.16	Fallunterscheidung 4.Fall	58
4.17	Fallunterscheidung 5.Fall	60
4.18	Fallunterscheidung 6.Fall	60
4.19	Fallunterscheidung 7.Fall	62
4.20	Fallunterscheidung 8.Fall	63
5.1	Beweisführung Beispiel 1	66
5.2	Beispiel 2	68
5.3	Beweisführung Beispiel 2	69
6.1	Fallbeispiel Koralmtunnel	71
6.2	Fallbeispiel Koralmtunnel - reduzierte Anzahl an Stationen	72
6.3	Stationsvergleich der modellierten Oberflächen LA-Komponenten	73
6.4	Stationsvergleich der topographischen Korrekturen ξ_{TOP} und η_{TOP}	74
6.5	Stationsvergleich der topographischen Korrekturen ξ_{TUN} und η_{TUN}	75
6.6	Stationsvergleich der reduzierten LA-Komponenten	75
6.7	Stationsvergleich reduzierter g-Messungen	76
6.8	g_{RED} in Abhängigkeit der Dichtesprunghöhe	76
6.9	η_{RED} in Abhängigkeit der Dichtesprunghöhe	77
7.1	Ausblick	80

Tabellenverzeichnis

5.1	Berechnung und Differenz unterschiedlicher Quader-Attraktionen des 1. Beispiels.	67
5.2	Berechnung und Differenz unterschiedlicher Quader-Attraktionen des 2. Beispiels.	69
6.1	Für den Test des Dichtemodells ausgewählte Stationen.	73

Literaturverzeichnis

- Bürki, B. und Guillaume, S. Astrogeodätische Lotabweichungs- und Azimutmessungen für Alp-Transit. *Geomatique Suisse*, pages 620 – 627, 12 2010.
- Daxinger, W. *Astrogravimetrische Geoidbestimmung für Ingenieurprojekte*. PhD thesis, TU Wien, 1996.
- Elmiger, A. Einfluss von Lotabweichungen und Geoidhöhen auf die Absteckung des Gotthard-Basistunnels. *Mensuration, photogrammetrie, genie rural*, 71-F(4):119 – 131, 1973.
- Hohensinn, R. Erzeugung von Modelllotabweichungen unter Ausnutzung von Geopotential- und digitalen Geländemodellen. 2014.
- Hunziker, E. Lotlinienkrümmung und Projektion eines Punktes oder einer Strecke auf das Geoid. *Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie*, 58(5):144 – 152, 1960.
- Marti, U. e. a. Lokale Schwerefeldstudien am AlpTransi Gotthard-Basistunnel. *Ingenieurvermessung 2004, 14th International Conference on Engineering Surveying*, 2004.
- Moritz, H. Bull. Geodesique. page 54:395, 1980. URL <https://doi.org/10.1007/BF02521480>.
- Torge, W. *Geodäsie*. De-Gruyter-Lehrbuch. de Gruyter, 2003.
- Weber, R. *Skriptum zur Vorlesung „Terrestrische Bezugsrahmen und physikalische Geodäsie“*. Weber, R., 2016a.
- Weber, R. *Skriptum zur Vorlesung „Theorie und Beobachtung des Erdschwerefeldes.“*. Weber, R., 2016b.
- Wiesenhofer, B. Untersuchungen zur astrogeodätischen Geoidlösung im Südosten Österreichs. Master’s thesis, TU Graz, 6 2007.
- Wikipedia. Isostasie — Wikipedia Die freie Enzyklopädie, 2016. URL <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Isostasie&oldid=157441769>. [Online; Stand 5. November 2017].

Wikipedia. Gotthard-Basistunnel — Wikipedia Die freie Enzyklopädie, 2017. URL <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gotthard-Basistunnel&oldid=165582120>. [Online; Stand 3. Juni 2017].

Anhang A : Berechnung der Topographischen Korrektur

Wir legen den Ursprung eines kartesischen xyz-Systems in den Aufpunkt und die z-Achse in die Lotlinie von A.

Die folgenden Formeln geben die Attraktionswirkung in allen 3 Achsenrichtungen eines Quaders Q_i an, der durch die Koordinatenebenen im Aufpunkt und Parallelebenen durch den entferntesten Punkt P_i begrenzt ist. Für die Schwerereduktion interessiert aber im allgemeinen nur die Attraktion in z-Richtung.

Wir setzen

$$A_k = G\rho F_k(i) \quad k = x, y, z \quad (A.1)$$

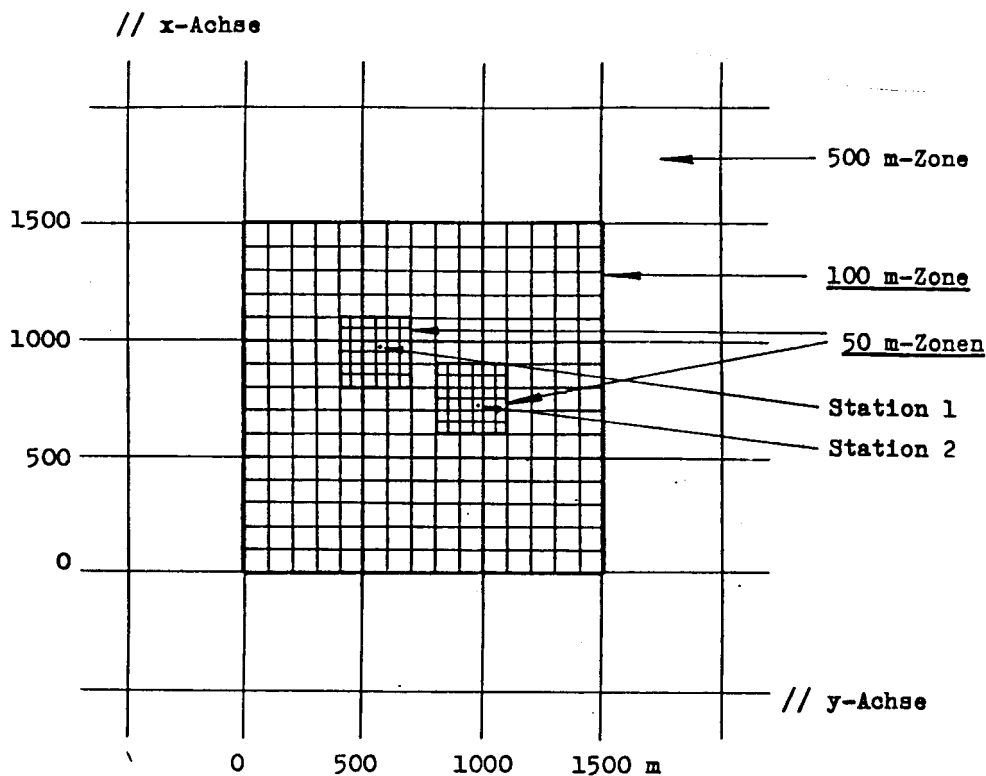


Abb. A1

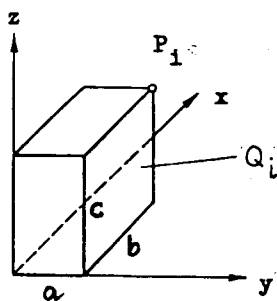


Abb. A2

Sind a, b, c die Seitenlängen des Quaders und benützt man die Abkürzungen

$$r_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad r_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$r_3 = \sqrt{b^2 + c^2} \quad r_4 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

so werden die Funktionen $F_k(i)$

$$\begin{aligned} F_x(i) &= a \arctan \frac{bc}{ar_4} + b \ln \frac{r_1(c+r_3)}{b(c+r_4)} + c \ln \frac{r_2(b+r_3)}{c(b+r_4)} \\ F_y(i) &= b \arctan \frac{ac}{br_4} + a \ln \frac{r_1(c+r_2)}{a(c+r_4)} + c \ln \frac{r_3(a+r_2)}{c(a+r_4)} \\ F_z(i) &= c \arctan \frac{ab}{cr_4} + a \ln \frac{r_2(b+r_1)}{a(b+r_4)} + b \ln \frac{r_3(a+r_1)}{b(a+r_4)} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Ein beliebiger Quader, dessen Grenzflächen parallel zu den Koordinatenflächen sind, lässt sich aus 8 Grundquadern aufbauen:

$$\begin{aligned} Q &= (Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4)^{\text{oben}} - (Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4)^{\text{unten}} \\ Q &= - \left[\sum_{i=1}^4 (-1)^i Q_i \right]_{\text{unten}}^{\text{oben}} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

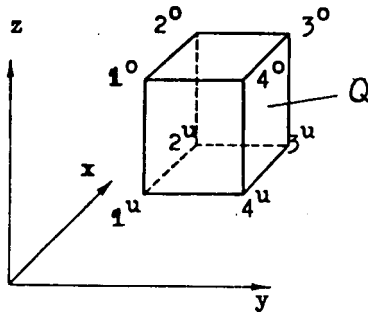


Abb. A3

Unabhängig vom Quadranten, in dem der Quader liegt, wird der Punkt 1_u unten links gewählt (kleinste Koordinate), und die Nummerierung der übrigen Punkte erfolgt im Uhrzeigersinn. Mit der Vorzeichenfunktion SIGN kann man eine einfache vorzeichenrichtige Form für die Attraktion eines beliebigen Quaders finden, der für alle Lagen des Aufpunktes gültig ist:

$$\begin{aligned} A_x &= -G\rho \left[\sum_{i=1}^4 (-1)^i \text{sign}(y_i \cdot z_i) \cdot F_x(i) \right]_{\text{unten}}^{\text{oben}} \\ A_y &= -G\rho \left[\sum_{i=1}^4 (-1)^i \text{sign}(z_i \cdot x_i) \cdot F_y(i) \right]_{\text{unten}}^{\text{oben}} \\ A_z &= -G\rho \left[\sum_{i=1}^4 (-1)^i \text{sign}(x_i \cdot y_i) \cdot F_z(i) \right]_{\text{unten}}^{\text{oben}} \end{aligned} \quad \begin{aligned} F_k(i) &= F_k(|x_i|, |y_i|, |z_i|) \\ k &= x, y, z \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Diese Formeln vernachlässigen, wie leicht ersichtlich, die Erdkrümmung und die Tatsache, dass die Achsen weiter entfernter Quader gegen die z-Achse geneigt sind (ebene Approximation).

Die Attraktionswirkung in x und y- Richtung steht nun mit der durch die Massen bedingten Lotabweichung in folgendem Zusammenhang

$$\xi = -\frac{A_x}{g} \rho'' \quad \eta = -\frac{A_y}{g} \rho'' \quad (\text{A.5})$$

Die Attraktion in z-Richtung entspricht der Korrektur die an die Gravimeterlesung anzubringen wäre, für den Fall dass die aktuelle Topographie in eine ebene Platte umgeschichtet wird, an deren Oberfläche der Aufpunkt liegt.