



DIPLOMARBEIT

Hawkes-Prozesse zur Modellierung des Limit Order Buches

Ausgeführt am Institut für
Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer

durch
Florian Klaue
Sechshauser Straße 13/38
1150 Wien

Wien, 31. Januar 2018

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig, ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen (einschließlich elektronischer Quellen) direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind ausnahmslos als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer anderen Prüfung noch nicht vorgelegt worden.

Wien, den 31. Januar 2018

(Florian Klaue)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Grundlagen	3
2.1	Der eindimensionale Hawkes-Prozess	3
2.2	Der multidimensionale Hawkes-Prozess	5
2.3	Eigenschaften erster und zweiter Ordnung	7
2.4	Martingal-Darstellung	10
2.5	Verhalten des Hawkes-Prozesses bei großen Zeiträumen	10
2.5.1	Diffusion zur Brownschen Bewegung	11
2.5.2	Verhalten bei anderen Reskalierungen	12
2.6	Cluster-Darstellung	12
2.7	Kausalität	14
3	Parameterschätzung	17
3.1	Maximum-Likelihood-Funktion	17
3.1.1	Maximum-Likelihood-Funktion für exponentiellen Kern	18
4	Das Limit Order Book	20
5	Datenbeschaffung und -analyse	24
6	Test auf Eignung der Daten	26
6.1	Transformation in einen Poisson-Prozess	26
6.2	Tests für Poisson-Prozesse	27
6.2.1	Grundlegende Tests	27
6.2.2	Test auf Unabhängigkeit	27
6.2.3	Test auf Approximation einer Brownschen Bewegung	28
7	Simulation von Hawkes-Prozessen	30
7.1	Transformation des Hawkes-Prozesses	30
7.2	Ogatas thinning algorithm	31
7.3	Superposition von Poisson-Prozessen	32
8	Implementierung und Simulation des Prozesses	35
8.1	Überprüfung der Stabilität	38
8.2	Fazit	39
9	Quellcode	40

1 Einleitung

Als Grundlage dieser Arbeit dienen die Arbeiten “Hawkes processes in finance” von Bacry, Mastromatteo und Muzy ([1]), “LIMIT THEOREMS FOR NEARLY UNSTABLE HAWKES PROCESSES” von Jaisson und Rosenbaum ([2]), “Hawkes Processes” von Laub, Taimre und Pollett ([3]) sowie Tokes Präsentation “An Introduction to Hawkes Processes with Applications to Finance” ([4]) und die Mitschrift der Vorlesung “Poissonsche Punktprozesse” von Prof. Thorsten Rheinländer ([5]). Weiterhin wurden die beiden Bände “An Introduction to the Theory of Point Processes” (Volume 1 und Volume 2) von D.J. Daley und D. Vere-Jones ([6]) hinzugezogen. Das Kapitel 4 über das Limit Order Book bezieht sich insbesondere auf [8].

In der Natur lassen sich zahlreiche Phänomene finden, bei denen das Eintreten eines Ereignisses weitere Ereignisse in kurzer zeitlicher Abfolge nach Auftreten des ersten Ereignisses nach sich ziehen. Ein anschauliches Beispiel dafür ist das Auftreten eines Erdbebens. Hier folgen dem eigentlichen Beben im Regelfall noch weitere Nachbeben. Auch bei zwei verfeindeten Straßengangs kann dieses Verhalten beobachtet werden. Der Gewaltakt einer Gang hat in vielen Fällen auch einen Racheakt der anderen Gang zur Folge, welche dann möglicherweise ihrerseits wieder zurückschlägt usw. Nicht zuletzt finden sich auch in der Finanzwelt solche Prozesse, welche das Thema dieser Masterarbeit darstellen. Auf dem Aktienmarkt lässt sich leicht beobachten, dass der Verkauf einer großen Zahl von Aktien eines einflussreichen Anlegers viele Kleinaktionäre ebenfalls dazu veranlasst, ihre Aktien kurze Zeit später abzustoßen.

In all den genannten Beispielen gibt es ein erstes Ereignis, welches dann wiederum Folgeereignisse “anregt”. Dabei ist der Zeitpunkt des Eintretens vorher nicht bekannt, es handelt sich also um Zufallsereignisse. Dieser zufällige Eintrittszeitpunkt wird in der Mathematik als Ankunftszeit bezeichnet. Ein bekannter mathematischer Prozess, der die Eigenschaft des “selbst Anregens” und der zufälligen Ankunftszeiten in geeigneter Weise abbildet, ist der sogenannte Hawkes-Prozess. Er wurde 1971 von Alan G. Hawkes entwickelt und hat sich seitdem in vielen Bereichen als nützliches Modell erwiesen. Daher soll er auch das zentrale Thema dieser Arbeit sein.

Es wird dabei insbesondere das oben erwähnte Beispiel für Aktienhandel genauer untersucht und der Versuch unternommen, das Kauf- und Verkaufverhalten am Aktienmarkt auf passende Art zu modellieren. Der Hawkes-Prozess wurde bereits in vielen früheren wissenschaftlichen Arbeiten auf seine Tauglichkeit hin untersucht und hat sich als dafür gut geeignetes Mittel erwiesen. Er soll daher nun im Folgenden genauer betrachtet werden.

2 Grundlagen

2.1 Der eindimensionale Hawkes-Prozess

Zuerst werden die in der Einleitung erwähnten Ankunftszeiten modelliert. Es handelt sich hierbei um zufällige Zeitpunkte innerhalb eines bestimmten Zeitraums, welcher nicht endlich sein muss. Der folgende Prozess fasst alle Ankunftszeiten zusammen:

Definition 1: Wenn eine Folge von Zufallszeiten $T = \{T_1, T_2, \dots\}$ mit Werten in $[0, \infty)$ die Bedingung $P(0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots) = 1$ erfüllt und die Anzahl der Punkte in einem beschränkten Gebiet fast sicher endlich ist, dann heißt T *Punktprozess*.

Es ist außerdem hilfreich zu wissen, wie viele Ereignisse bis zu einem bestimmten Zeitpunkt t bereits eingetreten sind. Dies gibt der Zählprozess an.

Definition 2: Sei $(T_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von Zufallszeiten. Der Prozess $N = (N_t)_{0 \leq t < \infty}$ mit

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{t \geq T_n}$$

heißt *Zählprozess* assoziiert mit T_n , wobei

$$\mathbb{1}_{t \geq T}(\omega) = \begin{cases} 1 & t \geq T(\omega) \\ 0 & t < T(\omega) \end{cases}.$$

Die folgende Grafik stellt den Zusammenhang zwischen Punktprozess und Zählprozess beispielhaft dar (siehe [3]).

Eine wichtige Größe zur Charakterisierung eines Punktprozesses ist die sogenannte bedingte Intensitätsfunktion. Wenn die bedingte Intensitätsfunktion existiert, lässt sich mit ihrer Hilfe die endlich-dimensionale Verteilung des Punktprozesses eindeutig bestimmen.

Definition 3: Sei $N(\cdot)$ ein Zählprozess mit zugehöriger Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Falls eine nicht negative Funktion λ^* existiert, sodass

$$\lambda^*(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E[N(t+h) - N(t) | \mathcal{F}_t(t)]}{h},$$

dann heißt diese Funktion *bedingte Intensitätsfunktion* von $N(\cdot)$. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass $\lambda^*(t)$ \mathcal{F}_t -messbar ist.

2 Grundlagen

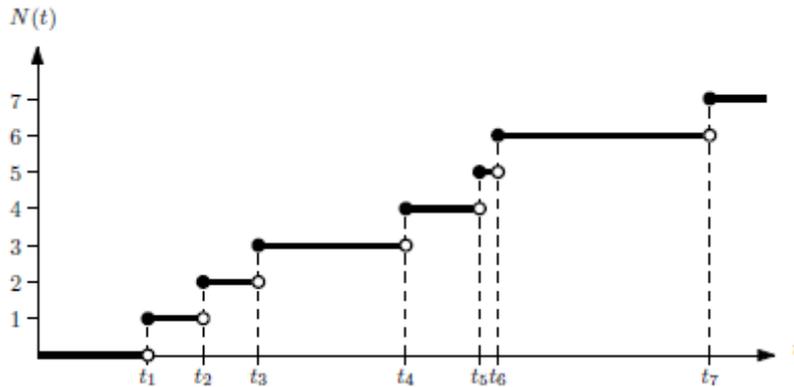


Abbildung 2.1: Darstellung der verschiedenen Ankunftszeiten t_i des Punktprozesses und des dazugehörigen Zählprozesses $N(t)$.

Die Filtration \mathcal{F} steht dabei für die verfügbaren Informationen bis zum Zeitpunkt t , wobei die Informationen zum Zeitpunkt t selbst nicht enthalten sind. Die Messbarkeitsbedingung sorgt dafür, dass sich $\lambda^*(t)$ nur auf Informationen aus der Vergangenheit von t bezieht.

Der Begriff des selbst Anregens kann mit Hilfe der Intensitätsfunktion gut erklärt werden. Führt das Auftreten eines Ereignisses zu einem Anstieg von $\lambda^*(t)$, so spricht man von einem selbst anregenden Prozess (siehe Abbildung 1.2 (vgl. [3])). Fällt die Intensitätsfunktion nach einem Ereignis, handelt es sich um einen selbst regulierenden Prozess.

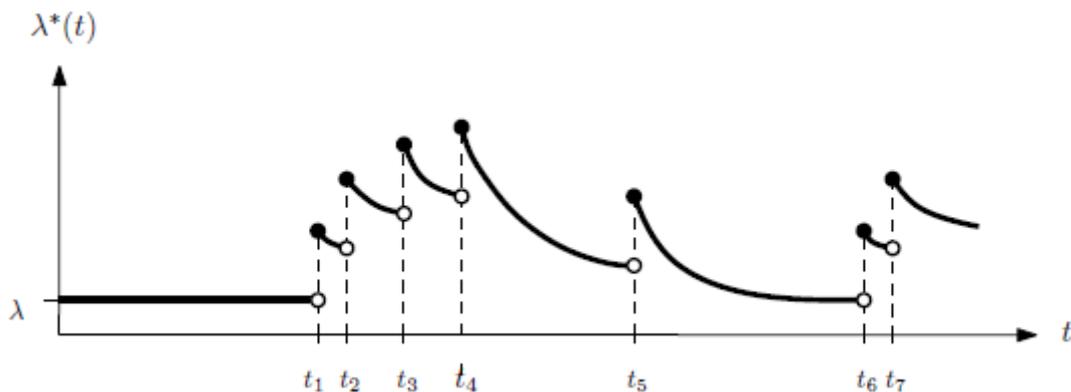


Abbildung 2.2: Beispiel einer bedingten Intensitätsfunktion für einen selbst anregenden Prozess.

Nach Einführung der Intensitätsfunktion kann nun der eigentliche Hawkes-Prozess definiert werden.

Definition 4: Sei für $t \geq 0$ $N(t)$ ein Zählprozess mit zugehörigem $\mathcal{F}(t)$, welcher der Bedingung

$$P(N(t+h) - N(t) = m | \mathcal{F}(t)) = \begin{cases} \lambda^*(t)h + o(h), & m = 1 \\ o(h), & m > 1 \\ 1 - \lambda^*(t)h + o(h), & m = 0 \end{cases}$$

genügt. Sei weiter die bedingte Intensitätsfunktion von der Form

$$\lambda^*(t) = \lambda + \int_0^t \mu(t-u) dN(u), \quad (2.1)$$

wobei $\lambda > 0$ und $\mu : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ integrierbar ist mit $\mu(\cdot) \neq 0$. Dann ist der Prozess $N(\cdot)$ ein *Hawkes-Prozess*.

Der Parameter λ wird dabei *Hintergrund-Intensität* genannt. Die Funktion μ ist die sogenannte *Anregungs-Funktion*. Sie bildet den Kern des Hawkes-Prozesses und muss dem Modell entsprechend gewählt werden. Eine häufige Wahl ist dabei ein exponentieller Kern der Form $\mu(t) = \alpha e^{-\beta t}$, wobei $\alpha, \beta > 0$. Die bedingte Intensitätsfunktion hat dann folgende Gestalt:

$$\lambda^*(t) = \lambda + \int_{-\infty}^t \alpha e^{-\beta(t-s)} dN(s) = \lambda + \sum_{t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)}.$$

Der Parameter α symbolisiert dabei ein unmittelbares Ansteigen der Intensitätsfunktion zum Zeitpunkt des eintretenden Ereignisses. Der sinkende Einfluss dieses Ereignisses im Laufe der Zeit wird durch den Parameter β modelliert.

Eine andere häufig gewählte Form für μ ist der Potenzkern mit $\mu(t) = \frac{k}{(c+t)^p}$, wobei $k, c, p > 0$. Die bedingte Intensitätsfunktion hat dann die Form

$$\lambda^*(t) = \lambda + \int_{-\infty}^t \frac{k}{(c+(t-s))^p} dN(s) = \lambda + \sum_{t_i < t} \frac{k}{(c+(t-t_i))^p}.$$

2.2 Der multidimensionale Hawkes-Prozess

Bisher wurde in dieser Arbeit lediglich auf eindimensionale Hawkes-Prozesse eingegangen. Für die Modellierung von komplexen Prozessen sind jedoch oftmals mehrdimensionale Prozesse von Nöten, weshalb im Folgenden auf sogenannte multivariate Hawkes-Prozesse eingegangen wird. Sei $N_t = \{N_t^i\}_{i=1}^D$ ein D-variater Hawkes-Prozess. Dann kann der Vektor der bedingten Intensitätsfunktionen $\lambda_t = \{\lambda_t^i\}_{i=1}^D$ komponentenweise als

$$\lambda_t^i = \lambda^i + \sum_{j=1}^D \int \mu(t-t') dN_{t'}^j \quad (2.2)$$

geschrieben werden. Eine mögliche Realisierung eines solchen multivariaten Hawkes-Prozesses ist in der nächsten Abbildung dargestellt (siehe [1]).

In weiterer Folge wird nun auch auf den Kern von multidimensionalen Hawkes-Prozessen eingegangen. Zuerst wird jedoch noch eine wichtige Eigenschaft des Kerns, die sogenannte Stabilität, erläutert.

2 Grundlagen

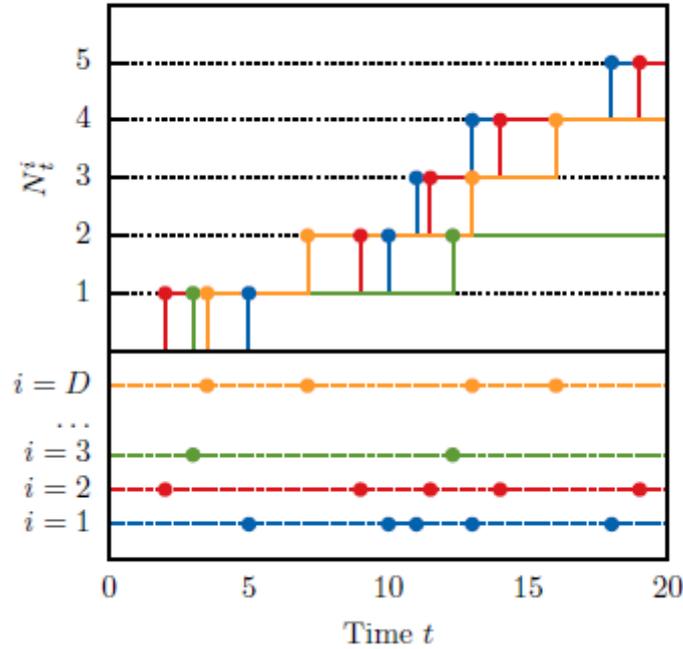


Abbildung 2.3: Realisierung eines Zählprozesses mit D unterschiedlichen Dimensionen.

Definition 5: Der Kern μ eines Hawkes-Prozesses genügt der *Stabilitätsbedingung*, wenn die Matrix $\|\mu\| = \{\|\mu^{ij}\|\}_{i,j=1}^D$ einen Spektralradius kleiner als 1 besitzt.

Ein stabiler Kern gewährleistet einige wünschenswerten Eigenschaften, wie der folgende Satz zeigt ([1]).

Satz 1. Wenn die **Stabilitätsbedingung** $\|\mu\| < 1$ für den Kern eines Hawkes-Prozesses erfüllt ist, dann hat dieser Prozess asymptotisch stationäre Inkremente und die bedingte Intensitätsfunktion dieses Prozesses ist asymptotisch stationär.

Beispiel 1: Als Beispiel für einen multidimensionalen Hawkes-Prozess soll hier nun ein bivariater Hawkes-Prozess mit exponentiellem Kern betrachtet werden. Sei der Matrix-Kern des Prozesses von folgender Form:

$$\mu(t) = \begin{pmatrix} \mu^{(s)}(t) & \mu^{(c)}(t) \\ \mu^{(c)}(t) & \mu^{(s)}(t) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Dabei haben die einzelnen Komponenten des Kerns die Form

$$\mu^{(s/c)}(t) = \alpha^{(s/c)} \beta^{(s/c)} e^{-\beta^{(s/c)} t}, t \geq 0.$$

Dabei steht der Index (s) für *self-exciting* und der Index (c) für *cross-exciting*.

Um die Stabilität des Prozesses zu gewährleisten, muss $\|\mu\| = \|\mu^{(s)}\| + \|\mu^{(c)}\| < 1$ gelten.

2 Grundlagen

Da $\alpha^{(s/c)} = \int_0^\infty \mu^{(s/c)}(t)$ gilt, muss für einen stabilen Kern

$$\alpha^{(s)} + \alpha^{(c)} < 1$$

erfüllt sein.

Exponentielle Kerne haben eine Reihe von vorteilhaften Eigenschaften. So lässt sich beispielsweise der Erwartungswert eines beliebigen Hawkes-Prozesses N_t berechnen; auch lässt sich ein Prozess dieser Art direkt simulieren. Weiters genügt die bedingte Intensitätsfunktion zusammen mit dem dazugehörigen Hawkes-Prozess der Markov-Eigenschaft ([1]).

Satz 2. Gegeben sei ein Hawkes-Prozess N_t mit exponentiellem Kern der Form

$$\mu^{ij}(t) = \alpha^{ij} \beta e^{\beta t}, t \geq 0.$$

Dann ist das Paar (N_t, λ_t) ein Markov-Prozess. Insbesondere kann die bedingte Intensitätsfunktion λ in Markovscher Form als

$$d\lambda_t = -\beta \lambda_t dt + \alpha \beta dN_t$$

dargestellt werden.

Im Falle eines exponentiellen Kerns sind Simulationen also sogar dann möglich, wenn lediglich Informationen über den Prozess in der Gegenwart vorhanden sind. Bei einem nicht-exponentiellen Kern müssten zusätzlich noch die Informationen über Ereignisse aus der Vergangenheit bekannt sein.

2.3 Eigenschaften erster und zweiter Ordnung

Unter der Annahme der Stabilitätsbedingung lassen sich Eigenschaften erster und zweiter Ordnung von Hawkes-Prozessen analytisch berechnen. Dafür wird zuerst die sogenannte Kern-Inversionsfunktion Ψ eingeführt.

Definition 6: Sei $N(t)$ ein Hawkes-Prozess mit stationären Inkrementen. Dann ist Ψ die kausale Lösung der Gleichung

$$\mu(t) + \Psi(t) * \mu(t) = \Psi(t).$$

Die Existenz von Ψ ist eine Folge der Stabilitätsbedingung und kann als folgende unendliche Faltung dargestellt werden:

$$\Psi(t) = \mu(t) + \mu(t) * \mu(t) + \mu(t) * \mu(t) * \mu(t) + \dots$$

Mit Hilfe der Laplace-Transformierten der Kern-Inversionsfunktion können die Statistiken erster und zweiter Ordnung eines Hawkes-Prozesses bestimmt werden ([1]).

2 Grundlagen

Satz 3. Für einen Hawkes-Prozess $N(t)$ mit stationären Inkrementen gilt: Die durchschnittliche Intensität $\Lambda = E[dN(t)]/dt$ ist gleich

$$\Lambda = (\mathbf{1} + \hat{\Psi}(0))\lambda$$

Die Laplace-Transformierte der linearen Korrelationsmatrix

$$c(t - t') = \frac{E[dN(t)dN^T(t')] - E[dN(t)]E[dN^T(t')]}{dtdt'}$$

ist gleich

$$\hat{c}(z) = (\mathbf{1} + \hat{\Psi}(-z))\Sigma(\mathbf{1} + \hat{\Psi}^T(z)),$$

wobei Σ eine Diagonalmatrix ist, bei der die nicht-Null Elemente gleich $\Sigma^{ii} = \Lambda^i$ sind.

Diese Charakterisierung erlaubt lineare Vorhersagen für einen Hawkes-Prozess anhand der Input-Parameter λ und Ψ . Außerdem lässt sich auf diese Weise der Kern μ von empirischen Daten herleiten, indem die Gleichungen für Λ und \hat{c} invertiert werden.

Beispiel 2: Es soll nun noch einmal ein bivariater Hawkes-Prozess mit einem Kern der Form (2.3) betrachtet werden. Die Stabilitätsbedingung war hier für $\alpha^{(s)} + \alpha^{(c)} < 1$ erfüllt. Die Laplace-Transformierte des Kerns $\hat{\mu}(z)$ hat dann die Form

$$\hat{\mu}(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mu}^{(s)}(z) + \hat{\mu}^{(c)}(z) & 0 \\ 0 & \hat{\mu}^{(s)}(z) - \hat{\mu}^{(c)}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

was eine Diagonalmatrix für den Kern für die symmetrischen und antisymmetrischen Kombinationen $N_t^\pm = 2^{-1/2}(N_t^1 \pm N_t^2)$ zur Folge hat.

Die Laplace-Transformierte der einzelnen Komponenten ist also von der Form

$$\hat{\mu}(z) = \frac{\alpha^{(s/c)}}{1 - z/\beta^{(s/c)}}.$$

Aufgrund der Diagonal-Form des Kerns kann der inverse Kern $\hat{\Psi}(z)$ direkt berechnet werden. Seien weiterhin die Anfangswerte $\lambda = (\lambda_0, \lambda_0)$ bekannt, dann ergibt sich für die durchschnittliche Intensität $\Lambda = (\Lambda_0, \Lambda_0)$

$$\Lambda_0 = \frac{\lambda_0}{1 - \alpha^{(s)} - \alpha^{(c)}}.$$

Die Korrelationsmatrix (für die symmetrischen und antisymmetrischen Kombinationen) hat für diesen Kern die Form

$$c^\pm(t - t') = \frac{E[(dN_t^1 \pm dN_{t'}^2)(dN_{t'}^1 \pm dN_t^2)]}{2dtdt'} - \Lambda_0^2.$$

Daraus lässt sich nun die Laplace-Transformierte der Korrelationsmatrix berechnen:

$$\hat{c}^\pm(z) = \frac{\Lambda_0}{(1 - \hat{\mu}^{(s)}(-z) \mp \hat{\mu}^{(c)}(-z))(1 - \hat{\mu}^{(s)}(z) \mp \hat{\mu}^{(c)}(z))}.$$

2 Grundlagen

Beispiel 3: Gegeben sei ein Potenz-Kern der Form

$$\mu(t) = \frac{\alpha\beta}{(1 + \beta t)^{1+\gamma}}, t \geq 0.$$

Die Laplace-Transformierte des Kerns hat dann die Form

$$\hat{\mu}(z) = \alpha e^{-z/\beta} (-z/\beta)^\gamma \Gamma(-\gamma, -z/\beta),$$

wobei $\Gamma(n, z)$ die unvollständige Gamma-Funktion ist. Die Funktion des inversen Kerns $\Psi(t)$ kann durch

$$\hat{\Psi}(z) = \frac{\alpha e^{-z/\beta} (-z/\beta)^\gamma \Gamma(-\gamma, -z/\beta)}{1 - \alpha e^{-z/\beta} (-z/\beta)^\gamma \Gamma(-\gamma, -z/\beta)}$$

berechnet werden.

Für die Norm des Kerns gilt $\|\mu\| = |\hat{\mu}(0)| = \alpha/\gamma$. Die Stabilitätsbedingung ist also für $\alpha < \gamma$ erfüllt und für die durchschnittliche Intensität gilt

$$\Lambda = \lambda \left(\frac{\gamma}{\gamma - \alpha} \right).$$

Weiter gilt für die Laplace-Transformierte der Korrelationsmatrix

$$\hat{c}(z) = \frac{\Lambda}{(1 - \hat{\mu}(-z))(1 - \hat{\mu}(z))}.$$

Diese Eigenschaften erster und zweiter Ordnung bestimmen einen Hawkes-Prozess eindeutig durch die Lösung eines Wiener-Hopf Systems. Darauf soll nun eingegangen werden.

Definition 7: Die *bedingte Intensitätsmatrix* $g(t)$ ist definiert durch

$$g^{ij}(t) = \frac{E[dN_t^i | dN_0^j = 1]}{dt} - \Lambda^i, \forall t > 0.$$

Es lässt sich zeigen, dass dann

$$c(t) = \Sigma g^T(t), \forall t > 0$$

gilt ([1]).

Mit Hilfe dieser Intensitätsmatrix kann nun ein Wiener-Hopf-System aufgestellt werden, dessen Lösung der Kern eines Hawkes-Prozesses ist ([1]).

Satz 4. Sei N_t ein multivariater Hawkes-Prozess, der die Stabilitätsbedingung erfüllt. Dann ist die Matrix Funktion $\chi(t) = \mu(t)$ die eindeutige Lösung des Wiener-Hopf-Systems

$$g(t) = \chi(t) + \chi(t) * g(t) \quad \forall t > 0.$$

Die Komponenten $\chi^{ij}(t)$ sind dabei kausal und es gilt $\chi^{ij}(t) \in L^1 \forall i, j$.

Dieser Satz impliziert, dass für einen festen Durchschnittsintensitäts-Vektor Λ und einer bedingten Erwartung $g(t)$ höchstens ein mit diesen Parametern konsistenter Hawkes-Prozess existiert.

2.4 Martingal-Darstellung

Ein Hawkes-Prozess der Gestalt (2.2) kann auch als Martingal dargestellt werden ([1]). Dazu wird der Kompensator benötigt.

Definition 8: Für einen Zählprozess $N(\cdot)$ heißt die nicht fallende Funktion

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda^*(s) ds \quad (2.4)$$

Kompensator des Zählprozesses.

Satz 5. Gegeben sei ein Hawkes-Prozess N_t . Dann sind die D stochastischen Prozesse

$$Y_t = N_t - \int_0^t ds \lambda_s$$

Martingale in Bezug auf die kanonische Filtration des Prozesses N_t . Ist der Hawkes-Prozess stabil, so hat die Intensitätsfunktion die Darstellung

$$\lambda_t = \lambda + \int_0^t \Psi(t-s) \lambda ds + \int_0^t \Psi(t-s) dY_s.$$

Für große t kann die Intensitätsfunktion sogar noch einfacher als

$$\lambda_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda + \int_0^t \Psi(t-s) dY_s$$

dargestellt werden.

Diese Martingal-Darstellung eines Hawkes-Prozesses bietet einige praktische Vorteile. Angenommen es soll die zukünftige Intensität $E[\lambda_t | \mathcal{F}_s]$ für $t > s$ für einen stabilen Hawkes-Prozess berechnet werden. Durch simples Einsetzen der Definition für die Intensität würde man dann auf den Ausdruck

$$E[\lambda_t | \mathcal{F}_s] = \lambda + \int_0^s \mu(t-u) dN_u + \int_s^t \mu(t-u) E[\lambda_u | \mathcal{F}_s]$$

kommen. Eine viel bessere Darstellung ergibt sich jedoch mit Hilfe der Martingal-Darstellung. So erhält man die explizite Form

$$E[\lambda_t | \mathcal{F}_s] = \lambda + \int_0^t \Psi(t-s) \lambda ds + \int_0^s \Psi(t-s) dY_s.$$

2.5 Verhalten des Hawkes-Prozesses bei großen Zeiträumen

Im Folgenden soll das Verhalten des Prozesses bei besonders großen Zeiträumen ($T \rightarrow \infty$) untersucht werden. Hierzu wird der Prozess auf geeignete Weise skaliert und anschließend eine Grenzwertbetrachtung vorgenommen. Es wird sich zeigen, dass sich der umskalierte Hawkes-Prozess wie ein anderer, bereits bekannter, stochastischer Prozess verhält.

2.5.1 Diffusion zur Brownschen Bewegung

Als Erstes soll gezeigt werden, dass sich der Hawkes-Prozess bei entsprechender Skalierung für große T wie die Linearkombination von Wiener Prozessen verhält ([1]). Um dieses Verhalten zu gewährleisten, müssen bestimmte Annahmen erfüllt sein.

Satz 6. *Sei ein Hawkes-Prozess N_t vorgegeben, der die Stabilitätsbedingung erfüllt. Dann gilt*

$$\sup_{u \in [0,1]} \|T^{-1}N_{uT} - u\mu\| \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

fast sicher und in L^2 -Norm.

Dieser Satz etabliert ein Gesetz der großen Zahlen für den Hawkes-Prozess, welcher für jeden stationären Kern Gültigkeit besitzt. Mit Hilfe weiterer Annahmen lassen sich noch andere Gesetzmäßigkeiten formulieren.

Satz 7. *Sei für alle $i, j \leq D$ und für jeden Kern die Gleichung*

$$\int_0^\infty t^{1/2} \mu^{ij}(t) dt < \infty$$

erfüllt. Dann ergibt sich für $u \in [0, 1]$ die folgende Konvergenz in Wahrscheinlichkeit für die Skorohod-Topologie:

$$T^{1/2}(T^{-1}N_{uT} - u\mu) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} (\mathbf{1} + \|\Psi\|)\Sigma^{1/2}W_u. \quad (2.5)$$

W_t bezeichnet hier eine D -dimensionale Brownsche Bewegung.

Beispiel 4: Als Beispiel soll nun noch einmal der schon betrachtete bivariate Hawkes-Prozess herangezogen werden. Aus Gleichung 2.3 und 2.5 folgt, dass

$$N_{uT} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \mu_0 u T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(\mu_0 T)^{1/2}}{(1 - \alpha^{(s)})^2 - (\alpha^{(c)})^2} \begin{pmatrix} 1 - \alpha^{(s)} & \alpha^{(c)} \\ \alpha^{(c)} & 1 - \alpha^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_u^1 \\ W_u^2 \end{pmatrix},$$

was in Bezug auf die Kombinationen $N_t^\pm = 2^{-1/2}(N_t^1 \pm N_t^2)$ die Konvergenz

$$N_{uT}^\pm \xrightarrow{T \rightarrow \infty} (1 \pm 1)^{1/2} \mu_0 u T + \frac{(\mu_0 T)^{1/2}}{1 - \alpha^{(s)} \mp \alpha^{(c)}} W_u^\pm \quad (2.6)$$

ergibt.

Dieses Verhalten ist in Abbildung 2.4 (siehe [1]) zusammengefasst. Hier wird der reskalierte Prozess N_{uT}^\pm für verschiedene T abgebildet.

2.5.2 Verhalten bei anderen Reskalierungen

Es ist bekannt, dass sich viele der beobachtbaren Parameter auch bei großen Zeiträumen (wie z.B. täglich oder sogar monatlich) nicht wie eine Brownsche Bewegung verhalten. Da die hier vorgestellten Hawkes-Prozesse zur Modellierung von Hochfrequenzhandel verwendet werden sollen, ist es von Interesse zu untersuchen, ob noch andere Grenzwerte als die im vorigen Abschnitt vorgestellten existieren. Dazu soll nun der reskalierte Hawkes-Prozess

$$Z_u^{(T)} = \frac{1 - a_T}{T} N_{uT}^{(T)},$$

wobei $a_T \in [0, 1[$, betrachtet werden. Dieser Prozess konvergiert für $T \rightarrow +\infty$ gegen einen integrierten Cox, Ingersoll, Ross-Prozess, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind ([1]):

- die korrespondierende Folge von Kernen $\mu^{(T)}(t)$ erfüllt die Gleichung $\mu^{(T)}(t) = a_T \mu(t)$, wobei μ differenzierbar ist und außerdem die (Un-)Gleichungen $\|\mu\| = \hat{\mu}(0) = 1$, $\hat{\mu}'(0) < +\infty$, $\|\mu'\|_\infty < +\infty$ und $\|\mu'\| < +\infty$ erfüllt sind
- die Stabilitätsbedingung mit Geschwindigkeit

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} (1 - a_T)T = \kappa, \quad \kappa > 0$$

erfüllt wird.

Es ist also möglich den Hawkes-Prozess durch Reskalierung für große T auf bereits bekannte andere nicht-triviale stochastische Prozesse zurückzuführen, wenn $T \sim (1 - \|\mu^{(T)}\|)^{-1}$ gewählt wird.

2.6 Cluster-Darstellung

Eine weitere nützliche Eigenschaft von Hawkes-Prozessen ist die sogenannte Cluster-Darstellung, welche aus der Linearität der Intensitätsfunktion (2.1) folgt. Diese Eigenschaft erlaubt es, einen effizienten Simulationsalgorithmus für den Prozess zu erstellen (siehe Abschnitt 7.3, Algorithmus 3). Weiters kann so das Konzept der Elternschaft eingeführt werden, welches im kommenden Abschnitt genauer erklärt wird. Zuerst einmal soll nun die Cluster-Darstellung mathematisch zusammengefasst werden ([1]).

Satz 8. *Sei D eine nicht negative natürliche Zahl und $[0, T]$ ein (nicht notwendigerweise endliches) Zeitintervall. In diesem wird eine Folge von Ereignissen $\{(t_m, k_m)\}_{m=1}^M$ nach folgendem Ablauf gebildet:*

- für jedes $1 \leq i \leq D$, betrachte eine Menge von Immigrant-Ereignissen $\{(t_m^0, i)\}_{m=1}^{M_i^{(0)}}$, welche mit der homogenen Poisson-Rate μ^i aus dem Intervall $[0, T]$ erzeugt wurden
- für jedes Immigrant-Ereignis vom Typ j , dargestellt durch $(t_m^{(0)}, j)$, und für jedes $1 \leq i \leq N$, erzeuge eine Folge von erste Generation-Ereignissen $\{(t_m^{(1)}, i)\}_{m=1}^{M_i^{(1)}}$,

2 Grundlagen

welche durch die zeit-abhängige Poisson-Rate $\phi^{ij}(t - t_{m'})$ im Intervall $[t_{m'}^{(0)}, T]$ erstellt wurde

- wiederhole die obige Vorgehensweise von Generation $n - 1$ auf Generation n , um die Folge von Ereignissen $\{(t_m^{(n)}, k_m^{(n)})\}_{m=1}^{M^{(n)}}$ zu erhalten, bis keine neuen Ereignisse im Intervall $[0, T]$ erzeugt werden

Die Vereinigung all dieser Ereignisse

$$\{(t_m, k_m)\}_{m=1}^M = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(t_m^{(n)}, k_m^{(n)})\}_{m=1}^{M^{(n)}}$$

korrespondiert mit denjenigen, welche durch den Hawkes-Prozess mit Intensitätsfunktion (2.1) erzeugt wurden.

Die Abbildung 2.5 (siehe [1]) stellt die soeben beschriebene Cluster-Konstruktion grafisch dar.

Der obere Teil der Grafik zeigt klar die verzweigte Struktur des bivariaten Hawkes-Prozesses, während der untere Teil lediglich die Ankunftszeiten darstellt (vgl. mit Abbildung 2.3). Die Zeiten für $i = 1$ sind in blau dargestellt, die Zeiten für $i = 2$ in rot. Im oberen Teil sind die Verbindungen der verschiedenen Ankunftszeiten ersichtlich, welche zur Entstehung von drei verschiedenen Clustern führen.

Die obige Konstruktion kann ebenso als Definition eines Hawkes-Prozesses genutzt werden. Sie besitzt sogar einen Vorteil im Hinblick auf die Stabilitätsbedingung. Setzt man $T = \infty$ in der beschriebenen Konstruktion, so lässt sich die Verzweigungsstruktur des Hawkes-Prozesses gut mit Hilfe eines Galton-Watson Baums abbilden. Das qualitative Verhalten des Modells wird dabei durch die durchschnittliche Anzahl von durch Mutter-Ereignissen erzeugten Ereignissen vorgegeben. Diese Anzahl ist genau $\int_0^{\infty} \mu(t) dt = \hat{\mu}(0) = \|M\|$. Die drei Phasen des Hawkes-Prozesses ($\|M\| < 1$, $\|M\| > 1$ und $\|M\| = 1$) können dann mit Hilfe des Galton-Watson-Prozesses anschaulich beschrieben werden:

- $\|M\| < 1$: Dies ist die subkritische Phase. Jedes Mutter-Ereignis erzeugt im Durchschnitt weniger als einen Nachkommen. Daraus folgt, dass die gesamte Anzahl an Nachkommen eines Ereignisses fast sicher endlich ist. Die durchschnittliche Anzahl an Generationen vor dem Aussterben des Prozesses ist ebenfalls fast sicher endlich.
- $\|M\| > 1$: Dies ist die superkritische Phase. Ein Mutter-Ereignis erzeugt mehr als einen Nachkommen. In diesem Fall kann die Gesamtzahl der Nachkommen sogar unendlich werden (mit endlicher Wahrscheinlichkeit).
- $\|M\| = 1$: Dies ist der kritische Fall. Die Anzahl der Nachkommen ist fast sicher endlich, jedoch unterliegt sie großen Schwankungen. Dies führt zu einer Divergenz in Bezug auf die durchschnittliche Anzahl von Generationen vor dem Aussterben.

2.7 Kausalität

Durch die Einführung der Cluster-Struktur und die dazugehörige “Verwandtschaft” zwischen bestimmten Ereignissen, kann nun eine Aussage über die Kausalität getroffen werden. Dazu werden die Zählfunktionen

$$N_t^{i\leftarrow 0} = \text{exogen erzeugte Ereignisse vom Typ } i,$$

$$N_t^{i\leftarrow j} = \text{Ereignisse vom Typ } i \text{ mit direktem Vorfahr vom Typ } j,$$

$$N_t^{i\leftarrow j^*} = \text{Ereignisse vom Typ } i \text{ mit ältestem Vorfahr vom Typ } j,$$

sodass $N_t^{i\leftarrow 0} + \sum_j N_t^{i\leftarrow j} = N_t^{i\leftarrow 0} + \sum_j N_t^{i\leftarrow j^*} = N_t^i$ gilt.

Satz 9. *Für einen stationären Hawkes-Prozess können die durchschnittlichen Inkremente $N_t^{i\leftarrow 0}$, $N_t^{i\leftarrow j}$ und $N_t^{i\leftarrow j^*}$ durch die Gleichungen*

$$\mathbb{E}[dN_t^{i\leftarrow 0}]/dt = \lambda^i$$

$$\mathbb{E}[N_t^{i\leftarrow j}]/dt = \hat{\mu}^{ij}(0)\Lambda^j$$

$$\mathbb{E}[N_t^{i\leftarrow j^*}]/dt = \hat{\psi}^{ij}(0)\lambda^j$$

ausgedrückt werden.

Durch diese Eigenschaft kann der durchschnittliche Anteil von Ereignissen (sowohl direkt als auch indirekt), welcher von einer bestimmten Komponente des Hawkes-Prozesses verursacht wurde, geschätzt werden.

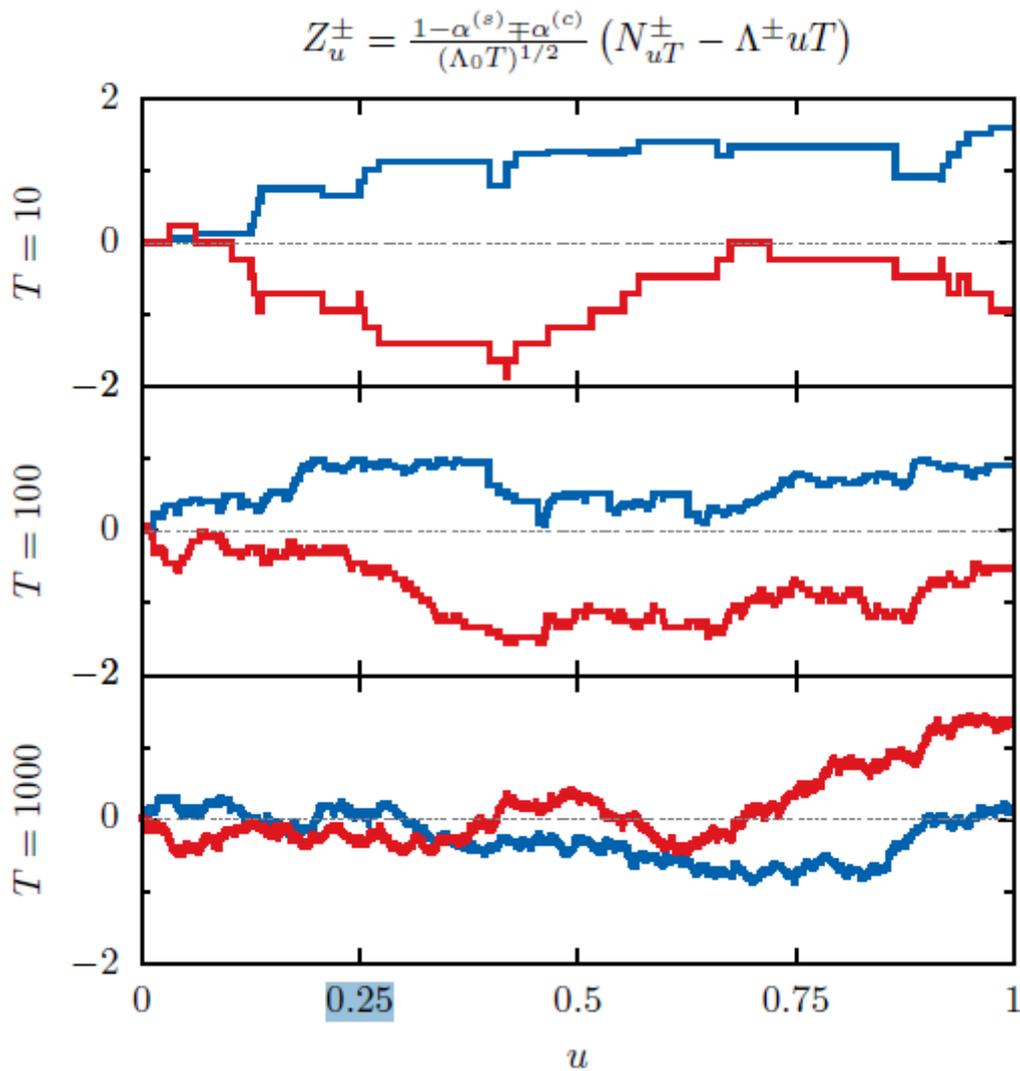


Abbildung 2.4: Die Abbildung zeigt den Verlauf des Prozesses N_{uT}^\pm für die verschiedenen Zeiträume $T = 10, 100, 1000$, wobei alle anderen Parameter jeweils unverändert bleiben. Der Prozess wurde entsprechend 4 reskaliert, um für $T \rightarrow \infty$ einen Wiener Prozess W_u zu erhalten. Die Grafik zeigt deutlich, dass diskrete Sprunghöhen, welche für $T = 10$ klar erkennbar sind, für $T \rightarrow \infty$ irrelevant werden.

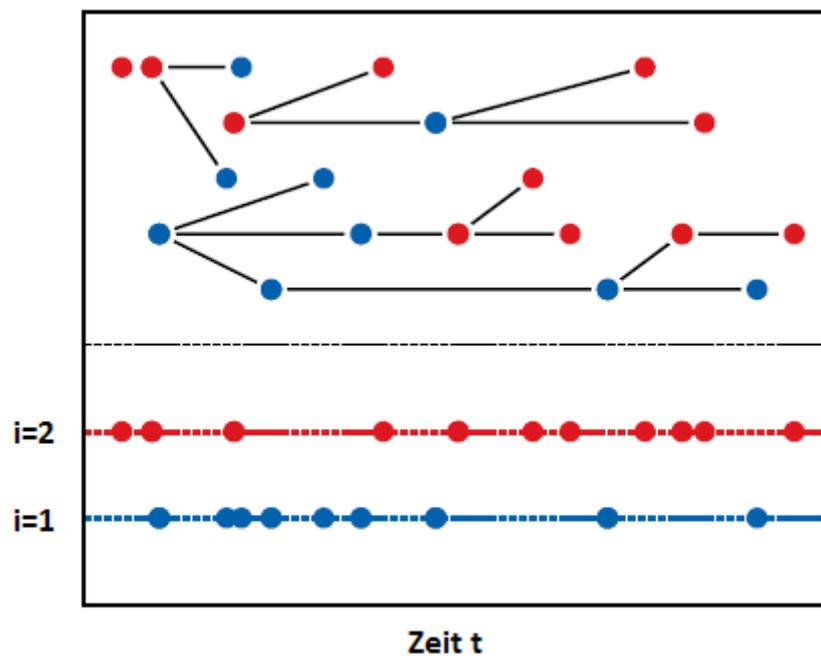


Abbildung 2.5: Cluster-Darstellung eines Hawkes-Prozesses

3 Parameterschätzung

3.1 Maximum-Likelihood-Funktion

Um die Parameter μ , α und β eines Hawkes-Prozesses zu bestimmen, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine weit verbreitete Variante ist dabei die Schätzung dieser Parameter mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Funktion. Im Folgenden soll diese erläutert werden.

Die Herleitung der Funktion und ihre spezielle Darstellung für einen exponentiellen Kern orientieren sich dabei an [3].

Satz 10. Sei $N(\cdot)$ ein regulärer Punktprozess auf einem Intervall $[0, T]$. Weiterhin sei t_1, \dots, t_k eine Realisierung von $N(\cdot)$ im Zeitraum $[0, T]$. Dann hat die Likelihood-Funktion L die Form

$$L = \left[\prod_{i=1}^k \lambda^*(t_i) \right] \exp\left(- \int_0^T \lambda^*(u) du\right).$$

Beweis. Als Erstes sei angenommen, dass der Prozess lediglich bis zur k -ten Ankunftszeit beobachtet wird. Die Dichtefunktion aller Realisierungen t_1, \dots, t_k hat dann die Form

$$L = f(t_1, t_2, \dots, t_k) = \prod_{i=1}^k f^*(t_i) \quad (3.1)$$

Ein Umformen der Intensitätsfunktion $\lambda^*(t) = \frac{f^*(t)}{1 - F^*(t)}$ liefert

$$\frac{f^*(t)}{1 - F^*(t)} = \frac{\frac{d}{dt} F^*(t)}{1 - F^*(t)} = - \frac{d \log(1 - F^*(t))}{dt}.$$

Ein Integrieren beider Seiten im Bereich von t_k bis t ergibt

$$- \int_{t_k}^t \lambda^*(u) du = \log(1 - F^*(t)) - \log(1 - F^*(t_k)).$$

Da bei einem Hawkes-Prozess keine zwei Ereignisse zum gleichen Zeitpunkt auftreten können, gilt $F^*(t_k) = 0$ für $T_{k+1} > t_k$ und folglich

$$- \int_{t_k}^t \lambda^*(u) du = \log(1 - F^*(t)). \quad (3.2)$$

3 Parameterschätzung

Einfaches Umformen nach der Verteilungsfunktion ergibt

$$F^*(t) = 1 - \exp\left(-\int_{t_k}^t \lambda^*(u) du\right). \quad (3.3)$$

Daraus lässt sich die Dichtefunktion bestimmen:

$$f^*(t) = \lambda^*(t) \exp\left(-\int_{t_k}^t \lambda^*(u) du\right).$$

Ein Einsetzen der Dichtefunktion in die anfängliche Produktdarstellung ((3.1)) liefert die Likelihood-Funktion

$$L = \prod_{i=1}^k f^*(t_i) = \prod_{i=1}^k \lambda^*(t_i) \exp\left(-\int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda^*(u) du\right) = \left[\prod_{i=1}^k \lambda^*(t_i)\right] \exp\left(-\int_{t_0}^{t_k} \lambda^*(u) du\right).$$

Es sei nun angenommen, dass der Prozess über eine längere Zeitspanne $[0, T] \supset [0, t_k]$ beobachtet wird. Das Eintreten eines weiteren Ereignisses im Intervall (t_k, T) hat die Wahrscheinlichkeit null, was sich entsprechend in der Likelihood-Funktion niederschlägt:

$$L = \prod_{i=1}^k f^*(t_i) (1 - F^*(T)).$$

Ein Einsetzen von (3.3) für die Verteilungsfunktion liefert dann

$$L = \left[\prod_{i=1}^k \lambda^*(t_i)\right] \exp\left(-\int_0^T \lambda^*(u) du\right),$$

womit der Beweis des Satzes abgeschlossen ist. □

3.1.1 Maximum-Likelihood-Funktion für exponentiellen Kern

Für einen Hawkes-Prozess mit exponentiellem Kern kann die allgemeine Likelihood-Funktion weiter vereinfacht werden. Ein Anwenden des Logarithmus auf die allgemeine Likelihood-Funktion liefert die log-Likelihood-Funktion

$$l = \sum_{i=1}^k \log(\lambda^*(t_i)) - \int_0^{t_k} \lambda^*(u) du = \sum_{i=1}^k \log(\lambda^*(t_i)) - \Lambda(t_k) \quad (3.4)$$

auf dem Intervall $[0, t_k]$. Dieses Intervall kann in die Abschnitte $[0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, ..., $(t_{k-1}, t_k]$ zerlegt werden. Damit ergibt sich

$$\Lambda(t_k) = \int_0^{t_k} \lambda^*(u) du = \int_0^{t_1} \lambda^*(u) du + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda^*(u) du.$$

Nun wird für $\lambda^*(\cdot)$ der exponentielle Kern eingesetzt:

$$\Lambda(t_k) = \int_0^{t_1} \lambda du + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda + \sum_{t_j < u} \alpha e^{-\beta(u-t_j)} du$$

3 Parameterschätzung

$$\begin{aligned}
&= \lambda t_k + \alpha \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{j=1}^i e^{-\beta(u-t_j)} \, du \\
&= \lambda t_k + \alpha \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^i \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\beta(u-t_j)} \, du \\
&= \lambda t_k - \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^i [e^{-\beta(t_{i+1}-t_j)} - e^{-\beta(t_i-t_j)}]
\end{aligned}$$

Schließlich lassen sich noch einige Terme dieser Doppelsumme herauskürzen, sodass sich nur noch eine Summe ergibt:

$$\Lambda(t_k) = \lambda t_k - \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^{k-1} [e^{-\beta(t_k-t_i)} - e^{-\beta(t_i-t_i)}] = \lambda t_k - \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^k [e^{-\beta(t_k-t_i)} - 1].$$

Obwohl der letzte Summand gleich null ist, wird er in der Literatur häufig mitgeschrieben. Werden nun die errechneten Werte für $\lambda^*(\cdot)$ und $\Lambda(\cdot)$ in die ursprüngliche log-Likelihood-Funktion (3.4) eingesetzt, erhält man

$$l = \sum_{i=1}^k \log[\lambda + \alpha \sum_{j=1}^{i-1} e^{-\beta(t_i-t_j)}] - \lambda t_k + \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^k [e^{-\beta(t_k-t_i)} - 1].$$

Aufgrund der Doppelsumme im ersten Term hat dieser Ansatz bei entsprechender Implementierung jedoch eine Laufzeit von $\mathcal{O}(k^2)$. Diese kann allerdings auf $\mathcal{O}(k)$ reduziert werden.

Sei dazu $A(i) = \sum_{j=1}^{i-1} e^{-\beta(t_i-t_j)}$ für $i \in \{2, \dots, k\}$, so ergibt sich

$$A(i) = e^{-\beta t_i + \beta t_{i-1}} \sum_{j=1}^{i-1} e^{-\beta t_{i-1} + \beta t_j} = e^{-\beta(t_i-t_{i-1})} \left(1 + \sum_{j=1}^{i-2} e^{-\beta(t_{i-1}-t_j)}\right) = e^{-\beta(t_i-t_{i-1})} (1 + A(i-1)). \quad (3.5)$$

Ist zusätzlich der Startwert $A(1) = 0$ vorgegeben, lassen sich die Werte für $A(i)$ rekursiv berechnen. Die log-Likelihood-Funktion kann nun als

$$l = \sum_{i=1}^k \log(\lambda + \alpha A(i)) - \lambda t_k + \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^k [e^{-\beta(t_k-t_i)} - 1]$$

geschrieben werden. Diese Darstellung erleichtert die Implementierung maßgeblich. Der Wert der Funktion kann nun leicht berechnet werden. Mit Hilfe eines Optimierungsalgorithmus können anschließend die Parameter λ , α und β so bestimmt werden, dass sie den Funktionswert maximieren.

4 Das Limit Order Book

Das Limit Order Book (abgekürzt: LOB) ist die Menge aller eingehenden Aufträge, die an den jeweiligen Wertpapiermarkt übermittelt wurden. Es wird in digitaler Form als Datei auf einem Computer gespeichert und bildet die Grundlage der in dieser Arbeit betrachteten Modellierung. In diesem Kapitel soll daher die Funktionsweise des LOB genauer erläutert werden.

Jeder Auftrag im Limit Order Book ist durch (mind.) vier verschiedene Eigenschaften gekennzeichnet: Die Art des Auftrags (Kauf oder Verkauf), der dazugehörige Preis, die dazugehörige Stückzahl und der Zeitpunkt, zu dem der Auftrag im LOB aufgenommen wurde. Trotz dieser auf den ersten Blick einfach erscheinenden Struktur ist das Limit Order Book ein komplexes Gebilde, welches sich im Laufe der Zeit durch die Aktionen der verschiedenen Teilnehmer stets verändert und weiterentwickelt. Die Suche nach dem optimalen Zeitpunkt zum Kauf oder Verkauf eines Wertpapiers beschäftigt daher nicht nur ÖkonomInnen, sondern auch MathematikerInnen und InformatikerInnen. Aus diesem Grund ist das Limit Order Book auch Thema vieler wissenschaftlicher Publikationen aus den genannten Gebieten. Grundsätzlich können drei verschiedene Arten von Aufträgen unterschieden werden:

- Limit order: Ein Auftrag mit einem fixen Preis, zu dem der Händler bereit ist, das Wertpapier zu kaufen bzw. zu verkaufen. Der letztendliche Zeitpunkt der Transaktion ist hier nicht vorgegeben.
- Market order: Ein Auftrag zum sofortigen Kauf bzw. Verkauf des Wertpapiers zum bestmöglichen Preis.
- Cancellation order: Ein Auftrag zum Löschen einer bereits getätigten Limit order.

Der Umfang des Limit Order Books kann grafisch sehr anschaulich dargestellt werden. Aus diesem Grund soll nun das folgende fiktive LOB betrachtet werden (siehe [9]).

Die Grafik enthält die verschiedenen eingetroffenen Limit orders für das dazugehörige Wertpapier. Gut zu erkennen ist hier die Diskrepanz zwischen dem höchsten aktuell gebotenen Kaufpreis P^B von 104,99 \$ und dem niedrigsten Verkaufspreis P^A von 105,02 \$. Diese Lücke S wird als “bid-ask-spread” bezeichnet. Es gilt $S = P^A - P^B$. Mit Hilfe dieser Größen kann außerdem der sogenannte “mid-price” P errechnet werden:

$$P = \frac{P^A + P^B}{2}.$$

Für gewöhnlich sind für ein Wertpapier nur der zuletzt gehandelte Preis bzw. der mid-price frei verfügbar. Um einen tieferen Blick in das Limit Order Book zu werfen, müssen die Daten von der jeweiligen Börse gekauft werden (siehe dazu auch Kapitel 5).

In der dargestellten Grafik ist außerdem gut zu erkennen, dass Limit Orders zu vielen

4 Das Limit Order Book

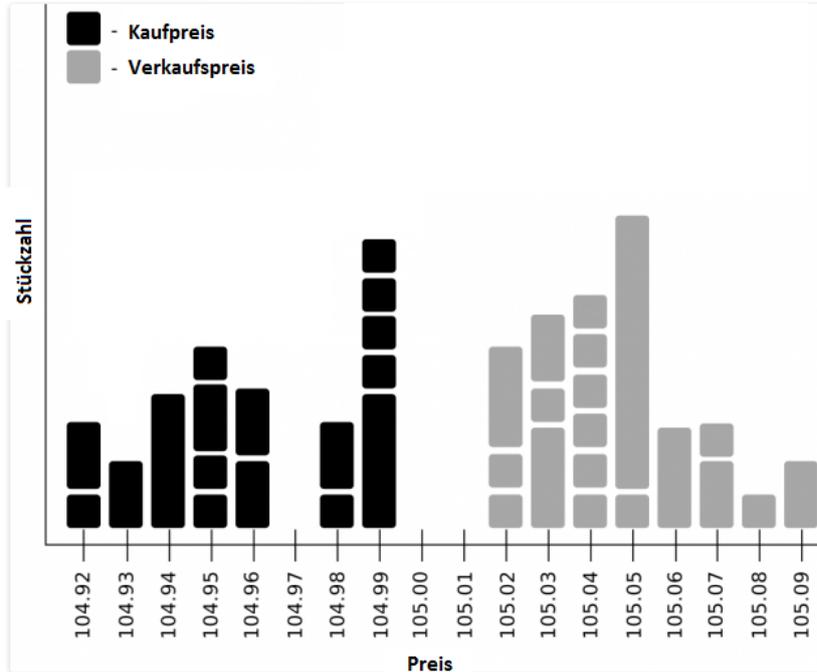


Abbildung 4.1: Auszug aus dem Limit Order Book

unterschiedlichen Kauf- und Verkaufspreisen existieren. Diese unterschiedlichen Preisniveaus werden als “Level” des LOB bezeichnet. Dabei bilden der beste Kauf- und Verkaufspreis (im Beispiel also 104,99 \$ und 105,02 \$) Level 1, der zweitbeste Kauf- und Verkaufspreis (im Beispiel 104,98 \$ und 105,03 \$) Level 2, usw. Die Anzahl der verfügbaren Level wird als Tiefe des LOB bezeichnet. Es sollen nun die verschiedenen Veränderungen beim Eintreffen eines neuen Auftrags betrachtet werden.

Das Eintreffen einer neuen Limit Order führt zu einer Erweiterung des Limit Order Books um die angegebene Stückzahl auf der Ebene des gebotenen Kauf- bzw. Verkaufspreises. In der Beispielgrafik 4.2 ist das Eintreffen einer neuen buy order zum Preis von 104,93 \$ dargestellt.

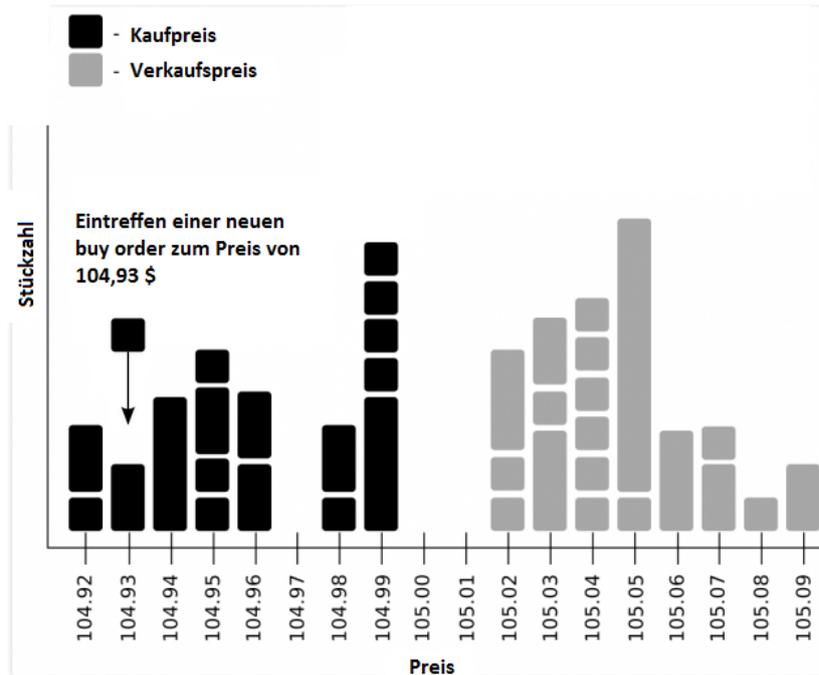


Abbildung 4.2: Eintreffen einer neuen buy order

Das Eintreffen einer neuen Limit Order kann außerdem zu einem tatsächlichen Handel zwischen Verkäufer und Käufer führen. In der Beispielgrafik 4.3 ist das Eintreffen eines neuen Verkaufsauftrags auf Preisebene eines bereits vorhandenen Kaufauftrags dargestellt. Dies führt zu einem unmittelbaren Aktienhandel. Die Stückzahl entspricht dabei im Normalfall dem Umfang des neu eingetroffenen Auftrags. Überschreitet ein neuer Auftrag jedoch die Menge an Wertpapieren, die im Limit Order Book vorhanden sind, so kann nur eine verringerte Stückzahl gehandelt werden. Die Menge der nicht sofort gehandelten Wertpapiere wird anschließend im Limit Order Book auf gewohnte Weise vermerkt.

Nach dem getätigten Handel wird der Kaufauftrag der Stückzahl entsprechend aus dem LOB entfernt (siehe 4.4).

4 Das Limit Order Book

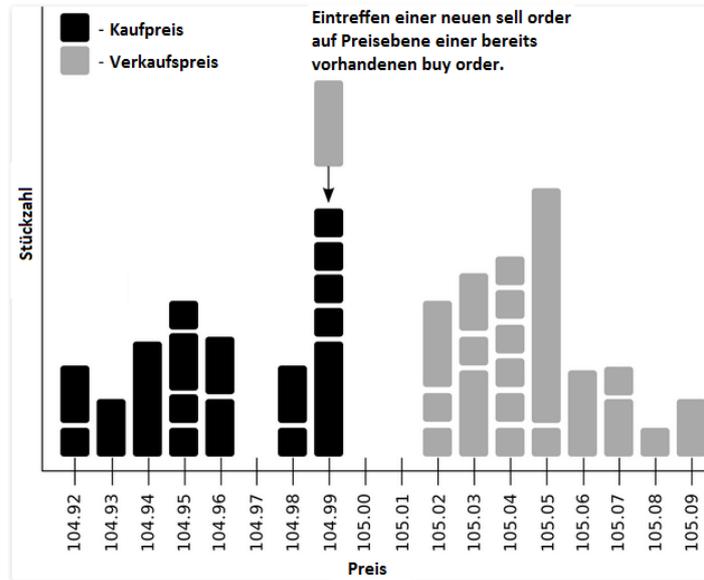


Abbildung 4.3: Eintreffen eines neuen Verkaufsauftrags auf Preisebene eines bereits vorhandenen Kaufauftrags

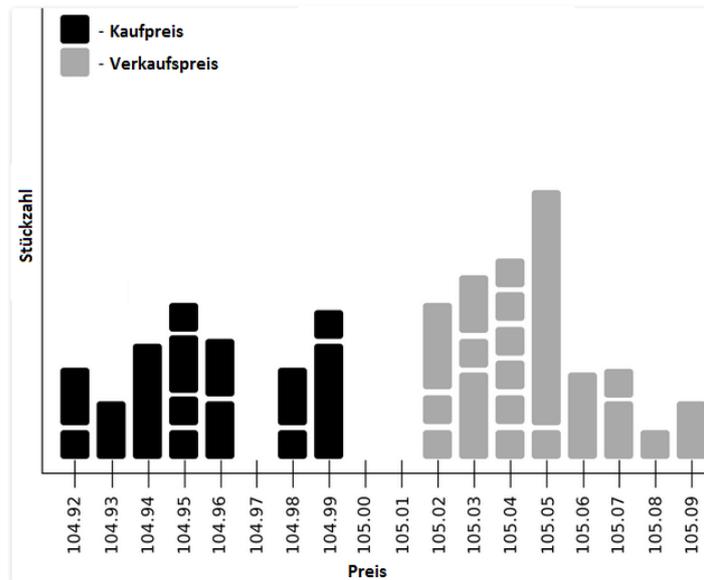


Abbildung 4.4: Darstellung des Limit Order Books nach Ausführung des Handels aus Abbildung 4.3

5 Datenbeschaffung und -analyse

Um eine gute Schätzung der Parameter λ , α und β zu gewährleisten, sollte eine möglichst große Menge aussagekräftiger Daten analysiert werden. Da präzise Daten für das Limit Order Book in der Regel nicht frei zugänglich sind, muss hier ein externer Dienstleister gewählt werden, der diese Daten bereitstellt. Für diese Arbeit wurde hierfür die Firma “Lobster” gewählt. Diese bietet auf ihrer Internetseite die Möglichkeit, Daten des Limit Order Books von der NASDAQ-Börse als csv-Dateien herunterzuladen. Hierbei kann das jeweilige Wertpapier wie auch der Analysezeitraum frei gewählt werden. Zur jetzigen Zeit sind Limit Order Book Daten rückblickend bis einschließlich 6. Januar 2009 verfügbar.

Im Folgenden sollen diese Daten genauer betrachtet werden. Zur Analyse der Limit Order Book Daten werden von Lobster zwei verschiedene Dateien bereitgestellt. Es handelt sich hierbei zum Einen um die “message”-Datei, in der die jeweiligen Handelsorder inklusive Handelszeitpunkt erfasst werden. Zum Anderen wird eine “order book”-Datei bereitgestellt, die Aufschluss über die verschiedenen Kauf- und Verkaufspreise sowie deren dazugehörige Handelsvolumina gibt.

Die message-Datei hat dabei folgenden schematischen Aufbau:

Time (sec)	Event Type	Order ID	Size	Price	Direction
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
34713.685155243	1	206833312	100	118600	-1
34714.133632201	3	206833312	100	118600	-1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Abbildung 5.1: Beispieldatensatz aus der “message”-Datei für das Limit Order Book

- Time (sec): Handelszeitpunkt in vergangenen Sekunden seit Mitternacht. Die Genauigkeit reicht hier (je nach gewähltem Wertpapier) vom Millisekunden- bis zum Nanosekundenbereich.
- Event Type:
 - 1: Eingabe einer neuen Limit Order
 - 2: teilweise Löschung einer Limit Order
 - 3: vollständige Löschung einer Limit Order
 - 4: Durchführung einer sichtbaren Limit Order

5 Datenbeschaffung und -analyse

- 5: Durchführung einer versteckten Limit Order
- 7: Unterbrechung des Wertpapierhandels
- Order ID: einzigartige Referenznummer der jeweiligen Order
- Size: Stückzahl des jeweiligen Wertpapiers
- Price: Preis in US-Dollar multipliziert mit 10000 (118600 entspricht also einem Preis von \$11,86)
- Direction:
 - -1: Verkauf einer Limit Order
 - 1: Kauf einer Limit Order

In der “order book“-Datei werden die verschiedenen Kauf- und Verkaufsebenen des Wertpapiers abgebildet. Die Datei hat dabei folgende Struktur:

Ask Price 1	Ask Size 1	Bid Price 1	Bid Size 1	Ask Price 2	Ask Size 2	Bid Price 2	Bid Size 2	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1186600	9484	118500	8800	118700	22700	118400	14930	...
1186600	9384	118500	8800	118700	22700	118400	14930	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Abbildung 5.2: Beispieldatensatz aus der “order book“-Datei für das Limit Order Book

- Ask Price 1: bester Verkaufspreis
- Ask Size 1: Volumen des besten Verkaufspreises
- Bid Price 1: bester Kaufpreis
- Bid Size 1: Volumen des besten Kaufpreises
- Ask Price 2: zweitbesten Verkaufspreis
- Ask Size 2: Volumen des zweitbesten Verkaufspreises

Die Anzahl der verschiedenen Preisebenen kann vor dem Herunterladen der Datei ausgewählt werden. Sollte die Anzahl der eingegebenen Preisebenen größer als die der tatsächlich verfügbaren sein, so werden die nicht vorhandenen Ebenen für die Kauf- und Verkaufspreise mit -999999999 bzw. 999999999 befüllt, um den symmetrischen Output beizubehalten. Die entsprechenden Volumina werden auf 0 gesetzt.

6 Test auf Eignung der Daten

Nicht jeder Datensatz ist für die Analyse mit Hilfe eines Hawkes-Prozesses geeignet. Deshalb sollte überprüft werden, ob eine Modellierung mit diesem Prozess für die vorliegenden Daten überhaupt sinnvoll ist. Darauf soll in diesem Kapitel näher eingegangen werden. Es wird dabei zuerst gezeigt, dass sich ein Hawkes-Prozess in einen Poisson-Prozess überführen lässt. Anschließend werden Verfahren zum Test der Daten auf Eignung für diesen Poisson-Prozess vorgestellt.

6.1 Transformation in einen Poisson-Prozess

Um einen Hawkes-Prozess in einen Poisson-Prozess zu überführen, ist es besonders wichtig, den Kompensator des Prozesses (siehe 2.4) zu analysieren ([3]). Außerdem spielt das “Random Time Change Theorem” eine wichtige Rolle:

Satz 11. *Seien $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ die Realisierungen im Zeitraum $[0, T]$ eines Punktprozesses mit bedingter Intensitätsfunktion $\lambda^*(\cdot)$. Ist $\lambda^*(\cdot)$ positiv auf $[0, T]$ und $\Lambda(T) < \infty$ fast sicher, dann formen die transformierten Punkte $\{\Lambda(t_1), \Lambda(t_2), \dots, \Lambda(t_k)\}$ einen Poisson-Prozess mit $\lambda = 1$.*

Dieser Satz spielt eine wichtige Rolle bei der Anwendung des sogenannten “Residual analysis”-Verfahrens, welches nun erklärt werden soll:

Satz 12. *Gegeben sei eine unbeschränkte, steigende Folge von Zeitpunkten $\{t_1, t_2, \dots\}$ auf dem Intervall $(0, \infty)$ und ein monotoner, steigender Kompensator $\Lambda(\cdot)$, für den $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t) = \infty$ fast sicher gilt. Dann ist die transformierte Folge $\{t_1^*, t_2^*, \dots\} = \{\Lambda(t_1), \Lambda(t_2), \dots\}$ des Zählprozesses $N^*(t)$ die Realisierung eines Poisson-Prozesses mit $\lambda = 1$ genau dann, wenn die ursprüngliche Folge $\{t_1, t_2, \dots\}$ eine Realisierung des Punktprozesses mit dem Kompensator $\Lambda(\cdot)$ ist.*

Durch Kenntnis über den Kompensator des Hawkes-Prozesses, lässt sich dieser also in einen Poisson-Prozess transformieren, welcher seinerseits mit Tests untersucht werden kann. Die Abbildung 6.1 zeigt die Transformation eines Hawkes-Prozesses in einen Poisson-Prozess mit Hilfe des time change theorems. Grafik (a) zeigt die Realisierung eines Hawkes-Prozesses mit den Parametern $(\lambda, \alpha, \beta) = (0, 5; 2; 2, 1)$. Grafik (b) zeigt die dazugehörige bedingte Intensitätsfunktion und Grafik (c) den entsprechenden Kompensator. In (d) ist der transformierte Prozess $N^*(t)$ mit seinen Ankunftszeiten $t_i^* = \Lambda(t_i)$ zu sehen. In der Grafik scheint $\Lambda(t)$ identisch mit $N(t)$ zu sein, dies ist jedoch nicht der Fall. Tatsächlich sind die Werte verschieden ($\Lambda(\cdot)$ ist stetig). Die Ähnlichkeit ist jedoch aufgrund der Doob-Meyer Dekomposition des Kompensators zu erwarten.

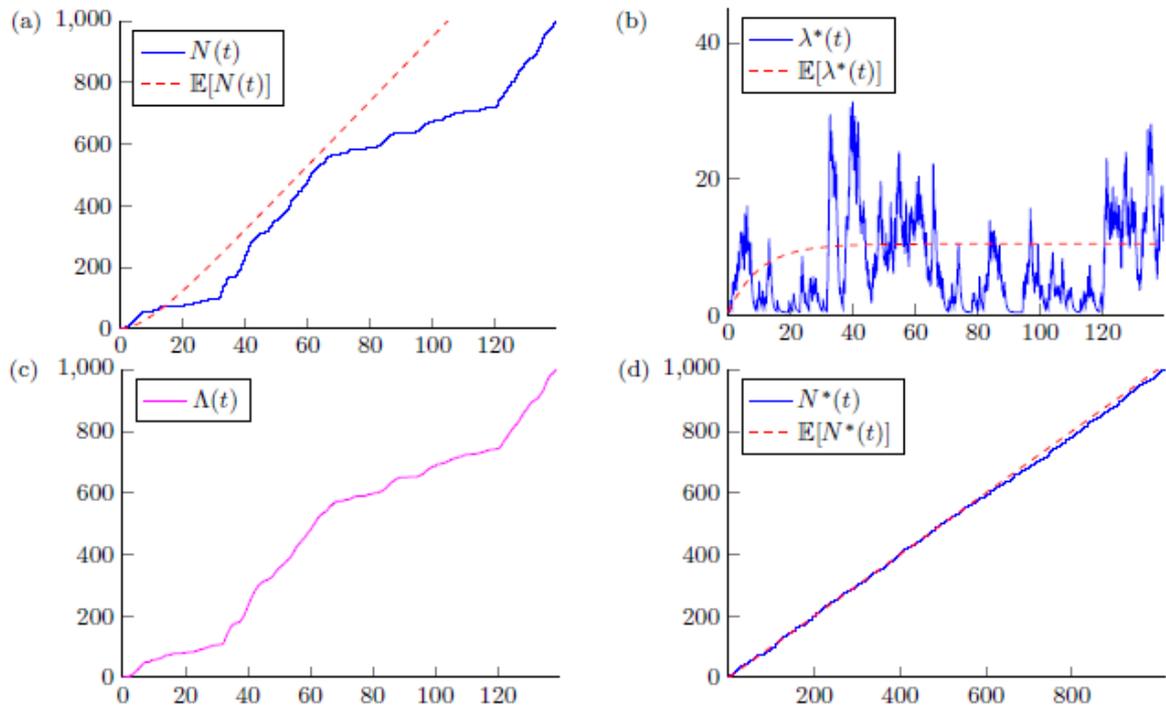


Abbildung 6.1: Transformation eines Hawkes-Prozesses ([3])

6.2 Tests für Poisson-Prozesse

6.2.1 Grundlegende Tests

Um zu testen, ob eine Reihe von Punkten einen Poisson-Prozess bildet, gibt es viele unterschiedliche Verfahren. Als erster Test kann beispielsweise ein Hypothesentest durchgeführt werden. Hierbei wird überprüft, ob $\sum_i \mathbb{1}_{\{t_i^* < t\}} \sim Poi(t)$ gilt. Ist dieser Test erfolgreich, so sollten die Wartezeiten

$$\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots\} = \{t_1^*, t_2^* - t_1^*, t_3^* - t_2^*, \dots\}$$

auf $\tau_i \sim Exp(1)$ getestet werden. Eine andere Möglichkeit bildet die Quantil-Quantil (Q-Q) Darstellung der τ_i auf Basis der Exponentialverteilung (siehe Abbildung 6.2 a). Außerdem bieten sowohl der Kolmogorov-Smirnov als auch der Anderson-Darling-Test eine quantitative Alternative.

6.2.2 Test auf Unabhängigkeit

Besteht (z.B. aufgrund der im vorigen Abschnitt vorgestellten Tests) Grund zu der Annahme, dass die Wartezeiten τ_i exponentialverteilt sind, so können diese nun auf Unabhängigkeit getestet werden. Dafür kann nach Autokorrelation in der Folge der τ_i gesucht werden. Dabei impliziert nicht vorhandene Autokorrelation nicht zwangsläufig Unabhängigkeit, jedoch könnte bei einem Wert ungleich Null die Annahme eines

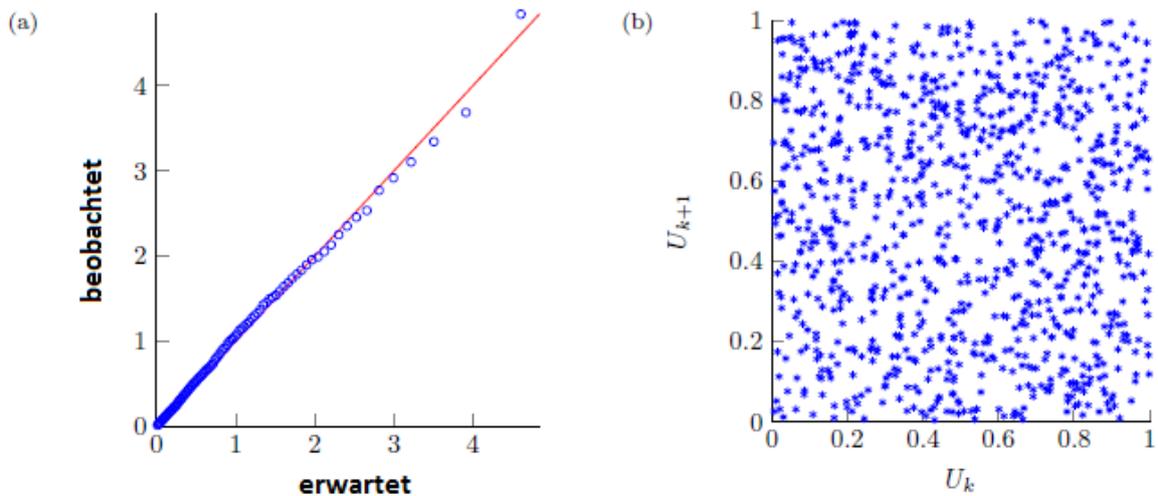


Abbildung 6.2: (a): Q-Q Test für i.i.d. $\text{Exp}(1)$ verteilte Wartezeiten. (b): Ein qualitativer Autokorrelationstest. Die Werte U_k sind definiert als $U_k = F(t_k^* - t_{k-1}^*) = 1 - e^{-(t_k^* - t_{k-1}^*)}$ ([3]).

Poisson-Prozesses verworfen werden. Die Korrelation kann z.B. untersucht werden, indem die Punkte (U_{i+1}, U_i) grafisch dargestellt werden. Wenn in der Grafik Muster zu erkennen sind, spricht dies für eine Autokorrelation der τ_i . Im gegenteiligen Fall sollten die Punkte gleichmäßig verteilt sein (siehe Abbildung 6.2 b).

6.2.3 Test auf Approximation einer Brownschen Bewegung

Dieser Poisson-Test nutzt eine Brownsche Bewegung, um den Poisson-Prozess zu approximieren. Dazu werden die Ankunftszeiten transformiert, sodass sie (angenähert) einer Brownschen Bewegung entsprechen ([3]). Diese modifizierten Zeiten können dann auf bekannte Eigenschaften der Brownschen Bewegung untersucht und dementsprechend angenommen oder abgelehnt werden. Dabei kann wie folgt vorgegangen werden. Sei $N(t)$ ein Poisson-Prozess mit Rate T . Definiere nun $M(t) = (N(t) - tT)/\sqrt{T}$ für $t \in [0, 1]$. Dann besagt Donskers Invarianz Prinzip, dass $(M(t) : t \in [0, 1])$ für $T \rightarrow \infty$ in Verteilung gegen eine Standard Brownsche Bewegung $(B(t) : t \in [0, 1])$ konvergiert. Die Abbildung 6.3 zeigt Realisierungen von $M(t)$ für verschiedene T , welche - qualitativ - eine geeignete Approximation der Brownschen Bewegung sind.

Ein anderer Test nutzt das erste Gesetz des Arkussinus für die Brownsche Bewegung. Dieses besagt, dass die Zufallszeit $M^* \in [0, 1]$, definiert durch

$$M^* = \arg \max_{s \in [0, 1]} B(s),$$

Arkussinus verteilt ist ([3]). Diese Verteilung ist ein Spezialfall der Beta-Verteilung mit den Parametern $\alpha = \beta = 1/2$. Es gilt also $M^* \sim \text{Beta}(1/2, 1/2)$. Der Test betrachtet dabei eine Folge von Ankunftszeiten auf dem Intervall $[0, T]$ und führt die folgenden 3 Schritte aus:

6 Test auf Eignung der Daten

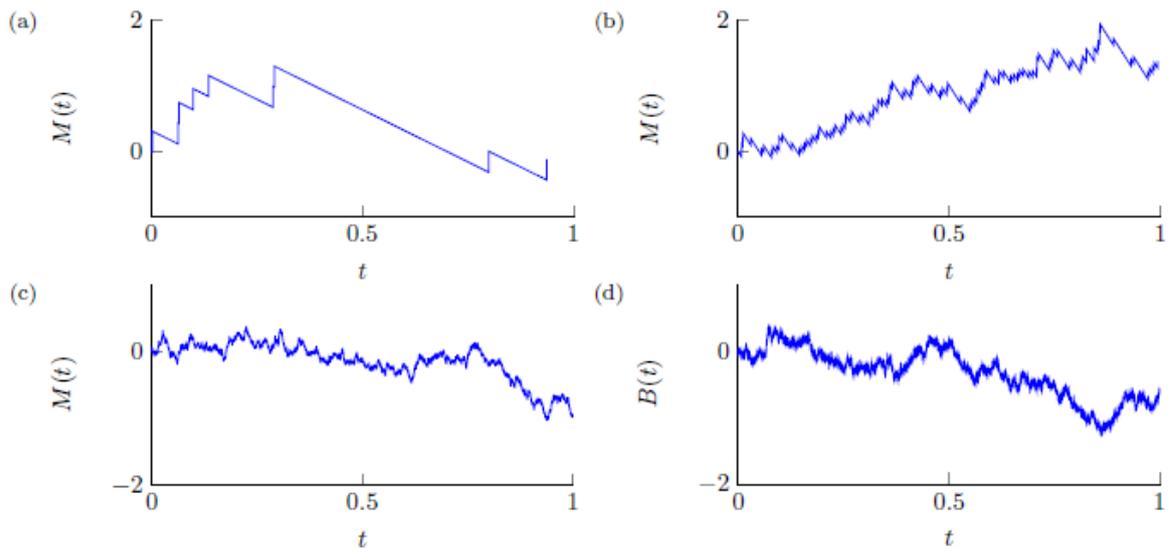


Abbildung 6.3: Realisierungen einer Poisson-Prozess Approximation mit Hilfe einer Brownschen Bewegung für die Parameter $T = 10$ (a), $T = 100$ (b), $T = 10000$ (c). Grafik (d) zeigt zum Vergleich eine direkte Simulation einer Brownschen Bewegung ([3]).

- transformiere die Ankunftszeiten zu $\{t_1^*/T, t_2^*/T, \dots, t_k^*/T\}$; dies ist ein Poisson-Prozess mit Rate T auf $[0, 1]$
- konstruiere die Approximation der Brownschen Bewegung $M(t)$ wie oben gezeigt und finde anschließend M^*
- akzeptiere die Hypothese eines Poisson-Prozesses mit Rate 1, falls M^* innerhalb der $(\alpha/2, 1 - \alpha/2)$ Quantile der Betaverteilung mit $\alpha = 1/2, \beta = 1/2$ liegt, lehne die Hypothese andernfalls ab

Abschließend sei noch zu erwähnen, dass es viele weitere Tests auf Eigenschaften der Brownschen Bewegung gibt. Ein Test könnte auch beispielsweise auf der Annahme $M(1) \sim N(0, 1)$ basieren und folglich akzeptiert werden, wenn $M(1) \in [Z_{\alpha/2}, Z_{1-\alpha/2}]$ und andernfalls abgelehnt werden.

7 Simulation von Hawkes-Prozessen

Die Simulation eines Hawkes-Prozesses ist eine unerlässliche Methode, um aus statistischen Daten gewonnene Parameter auf ihre Tauglichkeit zu testen. Im Folgenden sollen drei verschiedene Varianten zur Modellierung eines Hawkes-Prozesses vorgestellt werden (siehe [3]).

7.1 Transformation des Hawkes-Prozesses

Ein allgemeiner Simulationsalgorithmus für Punktprozesse kann durch die umgekehrte Nutzung des Random Time Change Theorem aus Abschnitt 6.1 kreiert werden. Dabei werden die Ankunftszeiten $\{t_1^*, t_2^*, \dots\}$ eines Poisson-Prozesses mit Rate 1 durch den inversen Kompensator $\Lambda(\cdot)^{-1}$ in einen beliebigen Punktprozess transformiert, welcher durch den verwendeten Kompensator definiert wird. Diese Methode wird als “inverse Kompensatormethode” bezeichnet. Dabei werden die Gleichungen

$$t_1^* = \int_0^{t_1} \lambda^*(s) ds, \quad t_{k+1}^* - t_k^* = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \lambda^*(s) ds$$

iterativ gelöst. Die $\{t_1, t_2, \dots\}$ bilden dabei die Ankunftszeiten des zu simulierenden Punktprozesses.

Für Hawkes-Prozesse wurde diese Vorgehensweise zuerst von Ozaki ([10]) vorgeschlagen, jedoch ohne die Transformation der Ankunftszeiten explizit zu erwähnen. Es wurde stattdessen die Beziehung aus 2.1

$$\int_{t_k}^t \lambda^*(u) du = -\log(1 - F^*(t))$$

benutzt. Sie betrachtet das Verhältnis zwischen der Verteilungsfunktion der nächsten Ankunftszeit und den bisherigen Ankunftszeiten $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ sowie $\lambda^*(t)$. Damit kann die nächste Ankunftszeit t_{k+1} erzeugt werden. Hierzu wird eine gleichverteilte Zufallszahl $U \sim \text{Unif}[0, 1]$ gezogen und anschließend die Gleichung

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \lambda^*(u) du = -\log(U) \tag{7.1}$$

nach t_{k+1} aufgelöst. Für einen Hawkes-Prozess mit exponentiellem Kern kann diese Gleichung zu

$$\log(U) + \lambda(t_{k+1} - t_k) - \frac{\alpha}{\beta} \left(\sum_{i=1}^k e^{\beta(t_{k-1} - t_i)} - \sum_{i=1}^k e^{-\beta(t_k - t_i)} \right) = 0$$

umgeformt werden. Das Lösen nach t_{k+1} kann in linearer Zeit durch das Benutzen der Rekursion (3.5) erreicht werden. Wird ein anderer Kern benutzt, so muss die Gleichung (7.1) numerisch gelöst werden. Dazu kann z.B. das Newton-Verfahren benutzt werden, welches jedoch einen höheren rechnerischen Aufwand erfordert.

7.2 Ogatas thinning algorithm

Die Simulation von Hawkes-Prozessen ist ein ähnliches Problem wie die Simulation von inhomogenen Poisson-Prozessen ([3]). Das Standardverfahren für solch einen Poisson-Prozess ist das sogenannte “thinning”, welches von der Intensitätsfunktion $\lambda(\cdot)$ bestimmt wird (siehe Algorithmus 1, [3]). Die Idee hinter diesem Algorithmus ist es, einen “schnelleren” homogenen Poisson-Prozess zu erzeugen, bei dem bestimmte Punkte mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit entfernt werden, um so der variierenden Intensität λ gerecht zu werden. Die erste Rate des Prozesses M auf $[0, T]$ kann dabei nicht geringer als $\lambda(\cdot)$ sein.

Ein ähnlicher Ansatz kann nun auch bei der Simulation von Hawkes-Prozessen verwendet werden. Der dazugehörige Algorithmus wird “Ogatas modified thinning algorithm” genannt (siehe Algorithmus 2, [3]). Die bedingte Intensität $\lambda^*(\cdot)$ hat dabei fast sicher keine asymptotische obere Schranke, es ist jedoch üblich, dass die Intensität in Zeiträumen ohne Ankunftszeiten nicht steigend ist. Dies bedeutet, dass für $t \in (T_i, T_{i+1}]$ die Ungleichung $\lambda^*(t) \leq \lambda^*(T_i^+)$ gilt. T_i^+ beschreibt dabei den Zeitpunkt, nachdem die Ankunft T_i registriert wurde. Der Wert für M kann also während jeder Simulation erneuert werden.

Algorithmus 1: Simulation eines inhomogenen Poisson-Prozesses

Input: $T, \lambda(\cdot), M$

Überprüfe: $\lambda(\cdot) \leq M$ auf $[0, T]$;

Initialisiere $P = \emptyset, t = 0$;

while $t < T$ **do**

 Generiere Zufallszahl $E \sim \text{Exp}(M)$;

 Setze $t = t + E$;

 Generiere Zufallszahl $U \sim \text{Unif}(0, M)$;

if $t < T$ **und** $U \leq \lambda(t)$ **then**

 | $P = P \cup t$

end

end

Gib P zurück;

Die Vorgehensweise des Algorithmus soll nun mit Hilfe der Darstellung einer Beispielsimulation (Abbildung 7.1, siehe [7]) erläutert werden. Für diese Simulation wurde ein Kern mit den Parametern $\alpha = 0,6$ und $\beta = 0,8$ verwendet. Weiters ist $\lambda = 1,2$.

Die in der Abbildung vertikal gepunkteten Linien stellen die möglichen Kandidaten s einer Ankunftszeit dar. Die vom Algorithmus angenommenen Zeiten sind zusätzlich mit der Markierung t_k , wobei $k = 1, \dots, 8$, versehen. Ein Zeitpunkt wird dabei genau dann

Algorithmus 2: Simulation eines Hawkes-Prozesses

Input: $\lambda, \alpha, \beta, T$

Initialisiere $\mathcal{T} = \emptyset, s = 0, n = 0$;

while $s < T$ **do**

 Setze $\bar{\lambda} = \lambda(s^+) = \lambda + \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \alpha e^{-\beta(s-\tau)}$;

 Generiere Zufallszahl $u \sim U(0, 1)$;

 Sei $w = -\ln u / \bar{\lambda}$; // es gilt also: $w \sim Exp(\bar{\lambda})$

 Setze $s = s + w$; // s ist der nächste Kandidat für eine Ankunftszeit

 Generiere Zufallszahl $D \sim U(0, 1)$;

if $D\bar{\lambda} \leq \lambda(s) = \lambda + \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \alpha e^{-\beta(s-\tau)}$ **then** // Annahme mit Wahrscheinlichkeit $\lambda(s)/\bar{\lambda}$

$n = n + 1$; // aktualisiere Anzahl angenommener Punkte

$t_n = s$; // Umbenennung des Kandidaten s

$\mathcal{T} = \mathcal{T} \cup t_n$; // füge t_n der geordneten Menge \mathcal{T} hinzu

end

end

if $t_n \leq T$ **then**

 | Gib $\{t_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ zurück

else

 | Gib $\{t_k\}_{k=1,2,\dots,n-1}$ zurück

end

als tatsächliche Ankunftszeit angenommen, wenn die Bedingung $D\bar{\lambda} \leq \lambda(\cdot)$ erfüllt ist. Die einzelnen Parameter dieser Bedingung sind ebenfalls der Grafik zu entnehmen. Die Realisierungen der gleichverteilten Zufallsvariable $D \sim U(0, 1)$ sind dabei mit einem Dreieck gekennzeichnet. Der Wert für $\bar{\lambda}$ entspricht der gestrichelten Linie und das Produkt $D\bar{\lambda}$ ist entweder durch einen Kreis (entspricht einem abgelehnten Zeitpunkt) oder ein Kreuz (entspricht einem angenommenen Zeitpunkt) gekennzeichnet. Außerdem ist die bedingte Intensität $\lambda(t)$ eingezeichnet.

7.3 Superposition von Poisson-Prozessen

Weiterhin ist es möglich, mit Hilfe der in Abschnitt 2.6 erläuterten Cluster-Darstellung einen Algorithmus zu erstellen ([3]). Dazu werden die Ankunftszeiten der Immigranten erzeugt und anschließend deren Nachfahren. Der Algorithmus 3 ([3]) beschreibt ein solches Vorgehen. Die Immigranten formen dabei einen homogenen Poisson-Prozess mit Rate λ , sodass die Anzahl an Immigranten auf dem Intervall $[0, T]$ $Poi(\lambda T)$ -verteilt ist. Bei einer Zahl von k Immigranten, sind deren Ankunftszeiten C_1, C_2, \dots, C_k wie die Ordnungsstatistiken von i.i.d. $Unif[0, T]$ Zufallsvariablen verteilt. Die Nachkommen eines jeden Immigranten formen dabei einen inhomogenen Poisson-Prozess. Die Nachkommen des i -ten Immigranten haben die Intensität $\mu(t - C_i)$ für $t > C_i$. Sei weiter D_i die Anzahl der Nachfahren des i -ten Immigranten, dann gilt $\mathbb{E}[D_i] = \int_0^\infty \mu(s) ds = n$ und somit $D_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} Poi(n)$. Seien die Ankunftszeiten der Nachfahren des i -ten Immigranten

7 Simulation von Hawkes-Prozessen

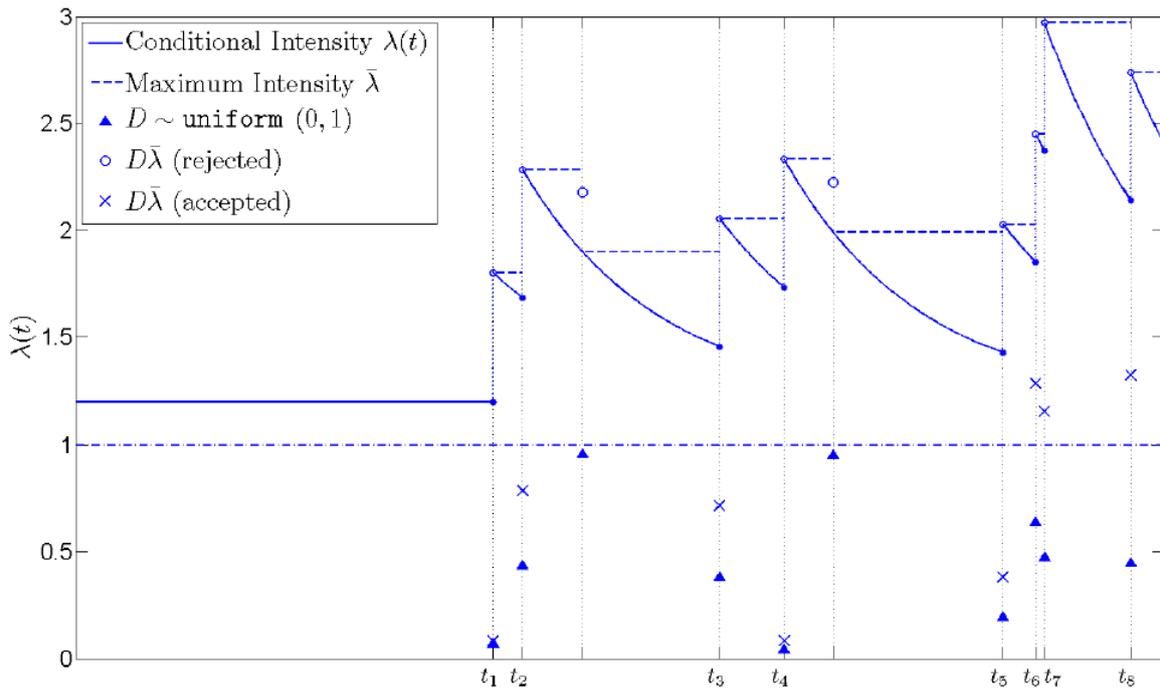


Abbildung 7.1: Simulation eines eindimensionalen Hawkes-Prozesses inklusive der Darstellung der im Algorithmus verwendeten Parameter.

durch $(C_i + E_1, C_i + E_2, \dots, C_i + E_{D_i})$ vorgegeben, dann sind - bei bekanntem D_i - die E_j gleich verteilte und unabhängige Zufallsvariablen mit der Dichtefunktion $\mu(\cdot)/n$. Für einen exponentiellen Kern gilt die Vereinfachung $E_j \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Exp}(\beta)$.

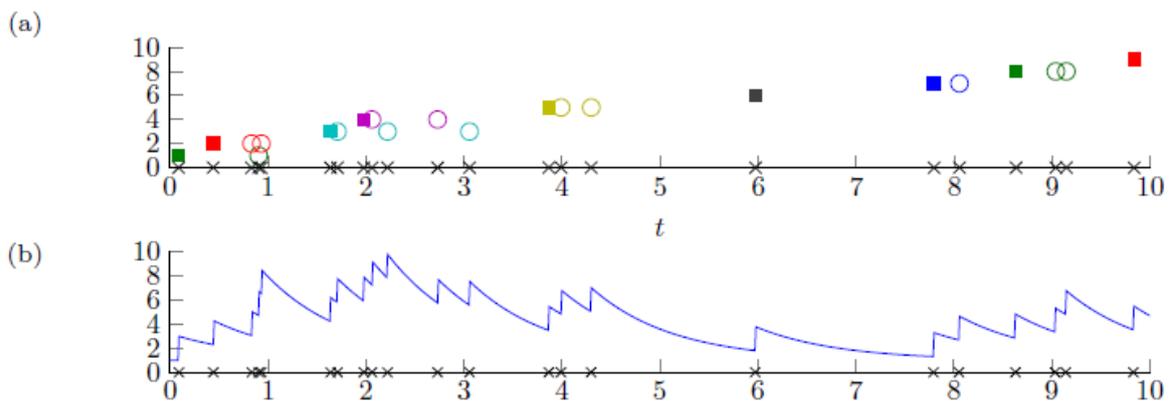


Abbildung 7.2: Ein durch Cluster erzeugter Hawkes-Prozess

Eine Beispielsimulation dieses Algorithmus ist in Abbildung 7.2 ([3]) dargestellt. Abbildung (a) zeigt dabei die durch Immigranten und deren Nachkommen erzeugten Ereignisse. Die Immigranten sind hier durch Quadrate abgebildet, deren Nachkommen durch Kreise in der gleichen Farbe. Abbildung (b) zeigt die Intensitätsfunktion mit den Parametern $(\lambda, \alpha, \beta) = (1; 2; 1, 2)$. Die jeweiligen Ankunftszeiten sind als Kreuze auf der x-Achse gekennzeichnet.

Algorithmus 3: Simulation eines Hawkes-Prozesses mittels Cluster-Darstellung;

Input: $T, \alpha, \beta, \lambda$

Initialisiere $P = \emptyset$;

Immigranten:

Generiere Zufallszahl $k \sim Poi(\lambda T)$;

Generiere Zufallszahlen $C_1, C_2, \dots, C_k \sim Unif(0, T)$;

Nachkommen:

Generiere Zufallszahlen $D_1, D_2, \dots, D_k \sim Poi(\alpha/\beta)$;

for $i = 1$ bis k **do**

if $D_i > 0$ **then**

 Erzeuge Zufallszahlen $E_1, E_2, \dots, E_{D_i} \sim Exp(\beta)$;

 Setze $P = P \cup \{C_i + E_1, \dots, C_i + E_{D_i}\}$;

end

end

Entferne Nachkommen außerhalb von $[0, T]$:

Setze $P = \{P_i : P_i \in P, P_i \leq T\}$;

Füge Immigranten hinzu und sortiere:

Setze $P = Sort(P \cup \{C_1, C_2, \dots, C_k\})$;

Gebe P zurück;

8 Implementierung und Simulation des Prozesses

Um eine geeignete Simulation eines Hawkes-Prozesses durchzuführen, wurde wie folgt vorgegangen: Als Erstes wurde die in Kapitel 3.1.1 hergeleitete ML-Funktion verwendet, um die Parameter λ , α und β zu schätzen. Zum Maximieren der ML-Funktion wurde dabei das Nelder-Mead-Verfahren verwendet. Da dieses jedoch den minimalen Funktionswert sucht, wurden die jeweiligen Werte der Maximum Likelihood-Funktion mit -1 multipliziert, um das Maximum zu erhalten. Der dazu verwendete Quellcode in Matlab kann in 9 nachgelesen werden.

Anschließend wurden diese Parameter verwendet, um einen Hawkes-Prozess zu simulieren. Für diese Simulation wurde der sogenannte “Thinning Algorithm” für Hawkes-Prozesse verwendet (siehe 7.2, Algorithmus 2).

Um möglichst aussagekräftige Eingabedaten zu verwenden, wurden sowohl Aktien ausgewählt, die an der NASDAQ-Börse besonders häufig gehandelt werden, als auch Aktien mit einer geringeren Anzahl von Handelszeiten. Als Zeitraum wurde immer der gesamte Handelstag gewählt (9:30 Uhr bis 16:00 Uhr). Es wurden dabei die folgenden Aktien analysiert:

- Applied Material, Inc. (kurz AMAT), am 02.10.2017
- PayPal Holdings, Inc. (kurz PYPL), am 02.10.2017
- Starbucks Corporation (kurz SBUX), am 02.10.2017
- QUALCOMM Incorporated (kurz QCOM), am 02.10.2017
- Apple Inc. (kurz AAPL), am 03.04.2017
- International Business Machines Corporation (kurz IBM), am 06.09.2017
- International Business Machines Corporation (kurz IBM), am 07.09.2017
- Microsoft Corporation (kurz MSFT), am 02.10.2017
- Microsoft Corporation (kurz MSFT), am 01.06.2016
- Microsoft Corporation (kurz MSFT), am 02.06.2016

8 Implementierung und Simulation des Prozesses

Für diese Aktien wurden die Ankunftszeiten für neue Buy Orders auf Level 1 des Limit Order Books untersucht. Die Gesamtzahl der Ankunftszeiten ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

Aktie	Gesamtzahl der Ankunftszeiten	Handelstag
AMAT	84041	02.10.2017
PYPL	42893	02.10.2017
SBUX	23832	02.10.2017
QCOM	23992	02.10.2017
AAPL	137595	03.04.2017
IBM	7092	06.09.2017
MSFT	84913	02.10.2017
MSFT	123162	01.06.2016
IBM	10413	07.09.2017
MSFT	106923	02.06.2016

Die Schätzung der Parameter λ , α und β auf Basis dieser Daten mit Hilfe des MLE-Verfahrens ergab folgende Ergebnisse:

Aktie	λ	α	β	Handelstag
AMAT	1,06	13046	18509	02.10.2017
PYPL	0,6588	9349	14593	02.10.2017
SBUX	0,3656	17037	26578	02.10.2017
QCOM	0,3691	13541	21158	02.10.2017
AAPL	1,8856	7972,8	11736	03.04.2017
IBM	0.1513	1455,7	2907,1	06.09.2017
MSFT	1,0718	16020	22734	02.10.2017
MSFT	1,3981	8726,9	11883	01.06.2016
IBM	0,2388	1156,6	2495,3	07.09.2017
MSFT	1,2277	8478,4	11593	02.06.2016

Die Schätzung der Parameter mit Hilfe des Nelder-Mead-Verfahrens konnte ohne Probleme durchgeführt werden. Die Anfangswerte wurden zwar entsprechend den zu erwartenden Parametern ausgewählt (siehe Quellcode in Kapitel 9), jedoch führten auch Optimierungen mit deutlich geringeren Anfangswerten zu den gleichen Ergebnissen. Das Verfahren zur Schätzung der Parameter hat sich somit als weitestgehend stabil erwiesen.

Bei der Analyse der Parameter sind besonders die hohen Werte für α und β auffallend. Diese sind jedoch durchaus plausibel, da bei der generell sehr großen Zahl an Ereignissen die Wahrscheinlichkeit eines auftretenden Folgeereignisses stets hoch ist. Weiterhin lässt sich beobachten, dass die größte Anzahl an Ankunftszeiten nicht automatisch auch die höchsten Werte für α und β nach sich zieht. So hat die Apple Aktie zwar ca. 53 000 Ankunftszeiten mehr als die Microsoft Aktie vom 02.10.2017, jedoch deutlich geringere Werte für die Parameter des Kerns. Eine Erklärung hierfür ist der Unterschied in der Grundintensität λ . Auch wenn deren Werte im Vergleich zu den

8 Implementierung und Simulation des Prozesses

beiden anderen Parametern sehr gering erscheinen, so hat sie doch einen maßgeblichen Einfluss auf die Zahl der simulierten Ankunftszeiten.

Die geschätzten Parameter wurden nun dazu benutzt, einen Hawkes-Prozess für den Zeitraum eines Handelstages zu simulieren und die geschätzten Ankunftszeiten mit den tatsächlichen zu vergleichen. Um die Güte der Daten zu erhöhen, wurden für jede Aktie 1000 Simulationen durchgeführt und dann die durchschnittliche Anzahl der Ankunftszeiten als Vergleichswert herangezogen. Dabei ergaben sich folgende Werte:

Aktie	durchschnittliche Zahl von Ankunftszeiten	Handelstag
AMAT	24803	02.10.2017
PYPL	15408	02.10.2017
SBUX	8549,7	02.10.2017
QCOM	8640,4	02.10.2017
AAPL	44134	03.04.2017
IBM	3539,4	06.09.2017
MSFT	25075	02.10.2017
MSFT	32732	01.06.2016
IBM	5584,7	07.09.2017
MSFT	28737	02.06.2016

Zum besseren Vergleich zwischen tatsächlichen und simulierten Ankunftszeiten sind diese in Abbildung 8.1 grafisch dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass bei einer größeren Zahl von Ankunftszeiten die Diskrepanz zwischen simulierten und tatsächlichen Werten zunimmt. Je weniger Ereignisse auftreten, desto besser ist die Simulation. Dies ist z.B. bei der IBM Aktie gut zu erkennen. Bei einer besonders häufig gehandelten Aktie wie Apple ist die Abweichung zwischen Simulation und Realität jedoch beträchtlich. Weiterhin ist zu bemerken, dass die Relation zwischen den Daten auch bei der Simulation erhalten bleibt. Sind a und b die jeweilige Anzahl der gemessenen Ankunftszeiten zweier beliebiger Aktien und gilt $a < b$, so gilt im simulierten Fall auch stets $a < b$. Letztlich ist jedoch festzuhalten, dass die hier verwendete Methode speziell bei Prozessen mit vielen auftretenden Ereignissen nicht die gewünschte Genauigkeit brachte.

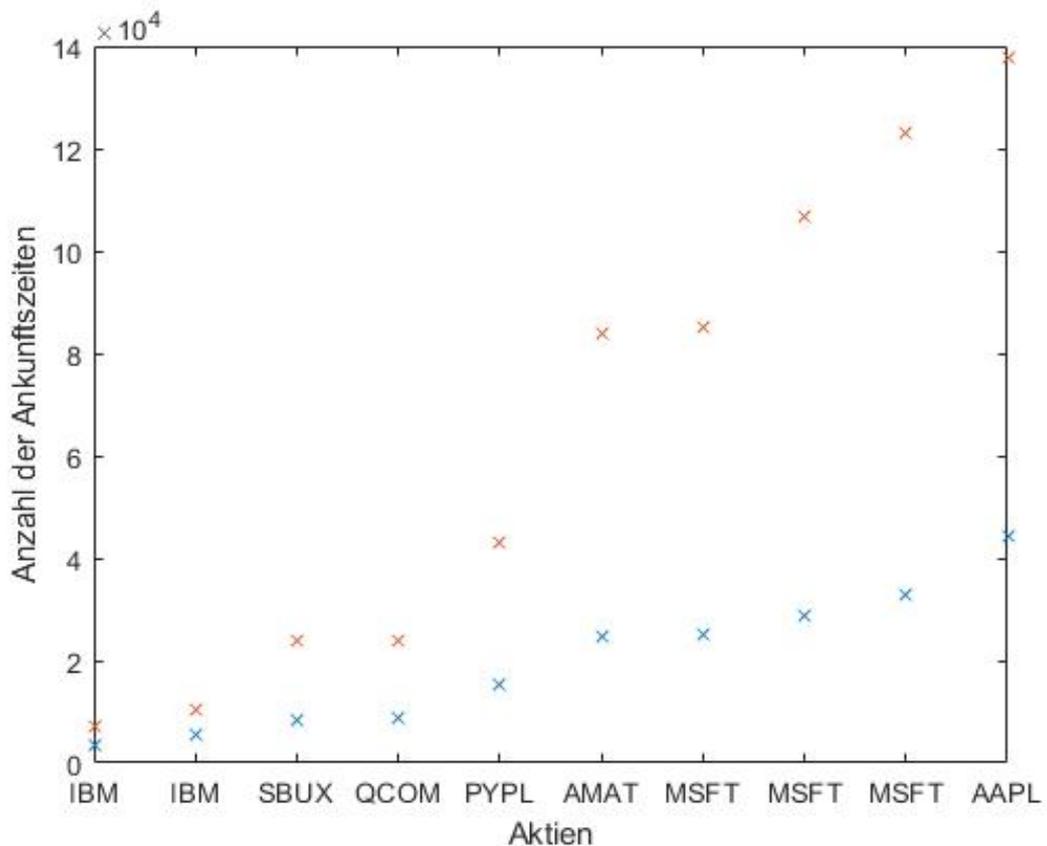


Abbildung 8.1: Vergleich der tatsächlichen und simulierten Ankunftszeiten für die jeweilige Aktie. Die tatsächlichen Zeiten sind in rot dargestellt, die simulierten Zeiten in blau.

8.1 Überprüfung der Stabilität

Für die erhaltenen Daten soll nun noch die Stabilitätsbedingung (2.2) überprüft werden. Dazu wird folgende Matrix A betrachtet:

$$A_{i,j} = \int_{-\infty}^0 \mu_{i,j}(t) dt.$$

Der Kern μ ist stabil, wenn der höchste Eigenwert dieser Matrix kleiner als eins ist ([11]). Für den hier verwendeten exponentiellen Kern hat die Matrix das Aussehen

$$A_{i,j} = \int_{-\infty}^0 \alpha_{i,j} e^{-\beta_j(s-t)} dt = \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_j}$$

Da für die hier betrachteten Daten $i = j = 1$ gilt, ergibt sich für A der skalare Quotient α/β , welcher aufgrund der Eindimensionalität gleichzeitig auch den höchsten Eigenwert darstellt.

Die folgende Tabelle zeigt die ermittelten Eigenwerte. Die Aktien sind dabei aufsteigend nach der Zahl der Ankunftszeiten geordnet.

Aktie	Eigenwert	Handelstag
IBM	0,5008	06.09.2017
IBM	0,4635	07.09.2017
SBUX	0,6410	02.10.2017
QCOM	0,6400	02.10.2017
PYPL	0,6406	02.10.2017
AMAT	0,7049	02.10.2017
MSFT	0,7047	02.10.2017
MSFT	0,7313	02.06.2016
MSFT	0,7344	01.06.2016
AAPL	0,6793	03.04.2017

Alle Eigenwerte liegen deutlich unter eins. Die erzeugten Hawkes-Prozesse sind also stabil. Mit zunehmender Zahl der Ereignisse steigt der Eigenwert jedoch an. Es ist daher möglich, dass bei sehr großen Werten für die Anzahl der Ankunftszeiten ein Eigenwert über eins auftritt und den Prozess instabil werden lässt.

8.2 Fazit

Die in dieser Arbeit erzeugten Ergebnisse lassen sich unter 2 verschiedenen Gesichtspunkten betrachten. Dies ist zum Einen die mathematische Vorgehensweise bei der Erzeugung der Daten und zum Anderen die Prüfung dieser Daten auf Plausibilität unter ökonomischen Aspekten. Vor allem die Schätzung der Parameter mit der ML-Methode hat sich als gut geeignetes Mittel erwiesen. Das zur Maximierung benutzte Nelder-Mead-Verfahren lieferte zuverlässige Ergebnisse, wobei es keiner besonderen Einschränkung hinsichtlich der Startwerte bedurfte. Weiterhin war die dafür benötigte Rechenzeit sehr gering. Dies gilt ebenso für die eigentliche Simulation des Hawkes-Prozesses mit den geschätzten Parametern. Der von Ogata vorgeschlagene Algorithmus lieferte hierbei Zufallszeiten, die auch bei 1000-facher Wiederholung eine geringe Streuung aufwiesen. Die Stabilität der Prozesse war außerdem stets gewährleistet.

Trotzdem ergaben sich hohe Abweichungen zwischen den beobachteten und simulierten Ankunftszeiten. Dafür kann es verschiedene Gründe geben. Im praktischen Teil dieser Arbeit wurde der eindimensionale Hawkes-Prozess verwendet, welcher eine Abhängigkeit der verschiedenen Buy Orders untereinander voraussetzt. Zusätzlich kann aber auch eine Abhängigkeit zu anderen Aktivitäten innerhalb des Limit Order Books (z.B. Eintreffen einer Sell Order) bestehen. In solch einem Fall kann ein multidimensionaler Hawkes-Prozess besser geeignet sein (siehe Kapitel 2.2). Weiterhin kann auch statt des hier benutzten exponentiellen Kerns ein Potenzkern zur Simulation verwendet werden.

Für den Anwender kann es außerdem von Bedeutung sein, nicht nur den Zeitpunkt der jeweiligen Order zu kennen, sondern auch die damit verbundene Stückzahl an Aktien. Dieses komplexere Modell kann ebenfalls mit Hilfe von Hawkes-Prozessen simuliert werden. Als Beispiel sei hier die Arbeit von Fauth und Tudor ([12]) zu diesem Themengebiet genannt.

9 Quellcode

```
function [Handelszeitpunkte, par, Anzahl_Zeitpunkte] = Hawkes_gesamt(Dateiname, ...
    Anzahl_Handel, Handelsstart, Handelsende, Iterationen)
%simuliert Ankunftszeiten durch Schaetzung der Parameter aus LOB-Daten
%   Eingabeparameter:
%       Dateiname           -   Name der zu verarbeitenden LOB-Datei
%       Anzahl_Handel       -   gibt die Anzahl der Auftraege aus der LOB-Datei an
%                               (entspricht der Zeilenanzahl der LOB-Datei)
%       Handelsstart       -   Zeitpunkt des Handelsstarts in Sekunden nach
%                               Mitternacht
%       Handelsende        -   Zeitpunkt des Handelendes in Sekunden nach
%                               Mitternacht
%       Iterationen        -   Anzahl der Wiederholungen der Simulation
%                               zur Bestimmung der durchschnittlichen
%                               Anzahl von Handelszeitpunkten
%   Ausgabeparameter:
%       Handelszeitpunkte  -   simulierte Handelszeitpunkte in Sekunden
%                               nach Handelsstart auf Grundlage der
%                               geschaezten Parameter Lambda, Alpha und Beta
%       Parameter          -   geschaezte Parameter Lambda, Alpha und Beta
%       Anzahl_Zeitpunkte  -   Anzahl der simulierten Handelszeitpunkte

tic;

geschaetzte_Parameter = FitHawkes(Anzahl_Handel, Handelsstart, Dateiname);
par.lambda = geschaetzte_Parameter(1);
par.alpha = geschaetzte_Parameter(2);
par.beta = geschaetzte_Parameter(3);
Handelslaenge = Handelsende - Handelsstart;
Anzahl_Zeitpunkte = 0;
for i = 1:Iterationen
    Handelszeitpunkte = simhawkes(Handelslaenge, par);
    Vektor_Handelszeitpunkte = Handelszeitpunkte{1};
    Vektorgroesse = size(Vektor_Handelszeitpunkte);
    Anzahl_Zeitpunkte = Vektorgroesse(2) + Anzahl_Zeitpunkte;
end
Anzahl_Zeitpunkte = Anzahl_Zeitpunkte / Iterationen;
Eigenwert = par.alpha/par.beta
Laufzeit=toc
end

function [geschaetzte_Parameter] = FitHawkes(Anzahl_Handel, Handelsstart, Dateiname)
% schaezt die Parameter Alpha, Beta und Lambda
% der Intensitaetsfunktion auf Basis des MLE-Verfahrens
%   Eingabeparameter:
%       Anzahl_Handel       -   Anzahl der Ankunftszeiten (Handelszeitpunkte)
%                               des Hawkes-Prozesses
```

9 Quellcode

```
% Handelsstart          - Zeitpunkt des Handelsstarts in Sekunden nach
%                       - Mitternacht
% Dateiname             - Name der zu verarbeitenden LOB-Datei
% Ausgabeparameter:
% geschaetzte_Parameter - optimale Parameter Alpha, Beta und
%                       - Lambda auf Basis des MLE-Verfahrens

Handelszeitpunkte = csvread(Dateiname);
Zeitpunkte = Handelszeitpunkte(1:Anzahl_Handel,1);
Zeitpunkte = Zeitpunkte - Handelsstart;

% Finde das Minimum

lambda0 = 0.5;
alpha0 = 10000;
beta0 = 15000;
parameters = [lambda0; alpha0; beta0]; % Startparameter fuer das MLE-Verfahren
func = @(parameters) HawkesMLE(parameters, Zeitpunkte);

[geschaetzte_Parameter, logLikelihood] = fminsearch(func, parameters, ...
    optimset('MaxFunEvals',1e9, 'TolFun',1e-8, 'TolX',1e-8, 'MaxIter',1e6));
% fminsearch benutzt das Nelder-Mead-Verfahren zur Optimierung

lambda = geschaetzte_Parameter(1);
alpha = geschaetzte_Parameter(2);
beta = geschaetzte_Parameter(3);

end

function logLikelihood = HawkesMLE(parameters, t)
% berechnet den negativen Wert der log-Likelihood-Funktion zur Optimierung
% der Parameter
% Eingabeparameter:
% parameters      - zu optimierende Parameter Alpha, Beta und Lambda
% t              - Ankunftszeiten des Hawkes-Prozesses
% Ausgabeparameter:
% logLikelihood  - Funktionswert der log-Likelihood-Funktion
%               - multipliziert mit -1

lambda = parameters(1);
alpha = parameters(2);
beta = parameters(3);
T = size(t,1);

% berechne erste Summe

d = t(T) - t;
Exponent = exp(-beta*d)-1;
erste_Summe = alpha/beta * sum(Exponent);

% berechne zweite Summe

R = zeros(T,1);
for i = 2:T
```

9 Quellcode

```

    R(i) = exp(-beta * (t(i) - t(i-1)))*(1+R(i-1));
end
zweite_Summe = sum( log(lambda + alpha*R) );

logLikelihood = -(-lambda*t(T) + erste_Summe + zweite_Summe);

\label{quell:MLE}

function [Tau] = simhawkes(T, par)
% simuliert einen Hawkes-Prozess
% Eingabeparameter:
%   T - Endzeitpunkt des zu simulierenden Zeitraums [0,T]
%   par - Parameter Alpha, Beta und Lambda der Intensitaetsfunktion
% Ausgabeparameter:
%   Tau - Array mit den simulierten Ankunftszeiten
s=0;
n=0;
t=0;
Tau={t};
while s<T
    lambda_quer=inthawkes(s, Tau, par);
    u=rand;
    w=-log(u)/lambda_quer;
    s=s+w;
    D=rand;
    if D*lambda_quer<=inthawkes(s, Tau, par);
        n=n+1;
        t(n)=s;
        Tau={t};
    end
end
if t(n)<=T
    Tau={t(1,1:n)};
else
    Tau={t(1,1:n-1)};
end

function [l] = inthawkes(t, H, par)
% berechnet die Intensitaetsfunktion zum Zeitpunkt t
% Eingabeparameter:
%   t - Zeitpunkt, zu dem die Intensitaetsfunktion
%       berechnet werden soll
%   H - Array mit den Ankunftszeiten des Hawkes-Prozesses
%   par - Parameter Alpha, Beta und Lambda zur Berechnung der
%         Intensitaetsfunktion
% Ausgabeparameter:
%   l - Funktionswert der Intensitaetsfunktion zum Zeitpunkt t

l = par.lambda;
h = H{1,1};
h = h(h < t);
if ~isempty(h)
    d = t - h;
    l = l + par.alpha*sum(exp(-par.beta*d));
end
end

```

Literaturverzeichnis

- [1] “Hawkes processes in finance” von Emmanuel Bacry, Iacopo Mastromatteo und Jean-Francois Muzy, 2015, arXiv:1502.04592
- [2] “LIMIT THEOREMS FOR NEARLY UNSTABLE HAWKES PROCESSES” von Thibault Jaisson und Mathieu Rosenbaum, Annals of Applied Probability 2015, Vol. 25, No. 2, Seiten 600-631, arXiv:1310.2033v2
- [3] “Hawkes Processes” von Patrick J. Laub, Thomas Taimre und Philip K. Pollett, 2015, arXiv:1507.02822
- [4] “An Introduction to Hawkes Processes with Applications to Finance” von Ioane Muni Toke, 2011, lamp.ecp.fr/MAS/fiQuant/ioane_files/HawkesCourseSlides.pdf
- [5] Mitschrift aus der Vorlesung “Poissonsche Punktprozesse” von Thorsten Rheinländer, WS 2015/16, TU Wien
- [6] “An Introduction to the Theory of Point Processes Volume I: Elementary Theory and Methods”, “An Introduction to the Theory of Point Processes Volume II: General Theory and Structure” von D.J. Daley und D. Vere-Jones (Second Edition), 2003, Springer Verlag
- [7] “Thinning Algorithms for Simulating Point Processes” von Yuanda Chen, 2016, www.math.fsu.edu/~ychen/research/Thinning%20algorithm.pdf
- [8] “Limit Order Books” von Frédéric Abergel, Marouane Anane, Anirban Chakraborti, Aymen Jedidi, Ioane Muni Toke, 2016, Cambridge University Press
- [9] “<http://www.ashbooth.com/blog/2014/02/05/limit-order-books-introduction/>” von Dr. Ash Booth
- [10] “Annals of the Institute of Statistical Mathematics” von T. Ozaki, Vol. 31, 1979, Seiten 145-155
- [11] “A point process model for the dynamics of limit order books” von Ekaterina Vinokovskaya, 2014, <https://academiccommons.columbia.edu/catalog/ac%3A171221>
- [12] “Modeling First Line Of An Order Book With Multivariate Marked Point Processes” von Alexis Fauth und Ciprian A. Tudor, 2012, arXiv:1211.4157