Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna | Austria

Diplomarbeit

Biegedrillknicken eines kreisförmig gekrümmten Balkens mit dünnem, teilkreisförmigem Querschnitt

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs
eingereicht an der TU Wien, Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften von

Jakob SCHEIDL

Mat. Nr.: 01127380

unter der Leitung von

Univ.Ass. Dr. habil. Yury Vetyukov
Institut für Mechanik und Mechatronik, E325

begutachtet von

Univ.Ass. Dr. habil. Yury Vetyukov
Institut für Mechanik und Mechatronik
Getreidemarkt 9/E325
1060 Wien, Österreich

Em.O.Univ.Prof. Dr. Franz Rammerstorfer
Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik
Getreidemarkt 9/E317
1060 Wien, Österreich

Ich nehme zur Kenntnis, dass ich zur Drucklegung meiner Arbeit unter der Bezeichnung

Diplomarbeit

nur mit Bewilligung der Prüfungskommission berechtigt bin.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass die vorliegende Arbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen von mir selbstständig erstellt wurde. Alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, sind in dieser Arbeit genannt und aufgelistet. Die aus den Quellen wörtlich entnommenen Stellen sind als solche kenntlich gemacht.

Das Thema dieser Arbeit wurde von mir bisher weder im In- noch Ausland einer Beurteilerin / einem Beurteiler zur Begutachtung in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt. Diese Arbeit stimmt mit der von den Begutachtern beurteilten Arbeit überein.

Wien, Jänner, 2018

Unterschrift

Zusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit behandelt ein akademisches Beispiel der Strukturmechanik im Rahmen der Statik. Mithilfe der in [6] hergeleiteten Theorie für Balken mit dünnwandigem, offenem Querschnitt wird das Deformations- und Stabilitätsverhalten eines in der undeformierten Ausgangslage kreisförmig gekrümmten Balkens mit Teilkreisquerschnitt untersucht. In den Betrachtungen zur geometrisch linearisierten Theorie wird das Konvergenzverhalten der Balkenlösung gegen Vergleichsresultate aus Schalen-Finite-Elemente-Berechnungen studiert. Zur Analyse des Stabilitätsverlustes durch Biegedrillknicken werden zunächst Knicklasten und Knickformen durch Anwendung der inkrementellen Theorie zweiter Ordnung ermittelt. Abschließend wird das Nachbeulverhalten mit der globalen Ritz-Methode sowie begleitenden Schalen-Finite-Elemente-Rechnungen nachvollzogen.

Abstract

The master thesis at hand addresses a rather academic example of static structural mechanics. Both linear deformation and stability analysis of a circularly curved rod in space with an open, thin-walled cross section (devided circle) are performed in the framework of a special beam theory, presented in [6]. The numerical calculations within the geometrically linearised setting provide a solid foundation for the subsequent stability analysis. The incremental formulation, introduced in [6], as well as the global Ritz-method are applied to study the torsional-flexural buckling of the structure. The incremental theory produces accurate results for the critical forces in comparison to shell-finite-element computations at less cost than the Ritz-method. The post-buckling analysis performed with the global Ritz-method and accompanied by shell-finite-element calculations concludes the numerical investigations.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Problemstellung und beschreibende Gleichungen der Balkentheorie **4**
2.1 Konkretisierung der Problemstellung 4
2.2 Beschreibende Gleichungen der Balkentheorie 7
2.2.1 Lösung des Problems im Querschnitt 8
2.2.2 Kinematik der materiellen Linie im Raum 11
2.2.3 Gleichgewichtsbedingungen und Konstitutivgleichungen 13
2.2.4 Geometrisch linearisierte Theorie und inkrementelle Gleichungen 17
2.2.5 Korrektur der Torsionssteifigkeit des Trägers 21
2.2.6 Formänderungsgleichungen für den schubstarren, dehnbaren Balken . . . 23

3 Numerische Schalen-Berechnungen mit shellFE **25**
3.1 Netzerstellung für Rechnungen mit shellFE 25
3.2 Lastschrittdefinition und Auswertung der Ergebnisse einer FE-Berechnung 29

4 Lineare Theorie: Vergleich von Balken- und FE-Schalenlösungen **31**
4.1 Herleitung des Randwertproblems aus den inkrementellen Gleichungen 31
4.1.1 Biegung in der Ebene 34
4.1.2 Biegung aus der Ebene 35
4.2 Konstruktion von Vergleichslösungen im Querschnitt 37
4.3 Konvergenzverhalten der Balkenlösungen 38

5 Anwendung der inkrementellen Theorie zur Stabilitätsanalyse **48**
5.1 Eigenwertproblem zur Knicklastberechnung 48
5.2 Schießverfahren zur Eigenwertberechnung 50
5.3 Resultate der Knicklastberechnung 53

6 Stabilitätsanalyse mit globalen Ritz-Ansätzen **59**
6.1 Parametrisierung der schubstarren Balkenkinematik und Implementierung von Imperfektionen 60
6.2 Konstruktion von Ritz-Ansätzen 62
6.3 Konvergenz bei Biegung aus der Ebene und erforderliche Polynomordnung 63
6.4 Resultate der Analysen mit Ritz-Ansätzen 64

7 Zusammenfassung und Ausblick **71**

Abbildungsverzeichnis

1.1 Geometrie der untersuchten Trägerformen 2
1.2 Illustration des Stabilitätsverlusts durch Biegedrillknicken 3

2.1 Trägergeometrie mit Bemaßung und Parametrisierung der Fläche 6
2.2 Koordinatensysteme und Basisvektoren am Träger in der Referenzlage 6
2.3 Querschnitt des Trägers: Geometrie, Koordinaten und Parametrisierung 8

3.1 Eben ausgebreitetes FE-Netz mit Elements- und Knotenpunktsnummerierung . . 26
3.2 Schalenelement am Mantel des Trägers 27

4.1 Reduktion der Ordnung des Randwertproblems; kritische Parameterwerte 34
4.2 Ebene Biegung; Lösungskurven zur linearisierten Balkentheorie 36
4.3 Biegung aus der Ebene; Lösungskurven zur linearisierten Balkentheorie 36
4.4 Ebene Biegung; Vergleich der Lösungen bei Vergrößerung des Radius a_1 39
4.5 Biegung aus der Ebene; Lösungen im Querschnitt für das Standardparameterset 41
4.6 Entwicklung der Fehlergrößen zu beiden Biegefällen bei Vergrößerung von S_1 . . 42
4.7 Konvergenzstudie bei Skalierung der Querschnittsgeometrie mit λ gemäß (4.20) . 43
4.8 Ebene Biegung; Entwicklung des Fehlers bei Begradigung des Balkens 44
4.9 Biegung aus der Ebene; Abweichungen bei Anpassung der Wandstärke h 45
4.10 Biegung aus der Ebene; Abweichungen bei Anpassung von Φ_2 46
4.11 Biegung des geschlitzten Rohrs ($\Phi_2 = \pi$) aus der Ebene 46

5.1 Stabilitätsanalyse mit der inkrementellen Theorie; Knickformen 58

6.1 Konvergenz der Ritz-Lösungen für Biegung aus der Ebene 65
6.2 Verlauf der Verzerrung ε für zwei Ritz-Lösungen 67
6.3 Deformationspfade der Ritz-Lösungen 67
6.4 Deformationspfade der Schalen-FE-Lösungen 69
6.5 Schalenkonfigurationen in undeformierter, kritischer und überkritischer Lage . . . 70

Tabellenverzeichnis

2.1 Parametersets für die Stabilitätsanalyse 7

4.1 Abweichungen von den FE-Resultaten für die Parametersets aus Tabelle 2.1 . . . 47

5.1 Wiederholung des Standardparametersets 1 aus Tabelle 2.1 53
5.2 Ergebnisse der Stabilitätsanalyse; Träger mit positiver Krümmung ($\Delta\Phi_2 = 0$), Kraftrichtung $\boldsymbol{F}/P = \boldsymbol{e}_x$ (Normalkraft) 54
5.3 Ergebnisse der Stabilitätsanalyse; Träger mit positiver Krümmung ($\Delta\Phi_2 = 0$), Kraftrichtung $\boldsymbol{F}/P = \boldsymbol{e}_y$ (Querkraft) 55
5.4 Ergebnisse der Stabilitätsanalyse; Träger mit negativer Krümmung ($\Delta\Phi_2 = \pi$), Kraftrichtung $\boldsymbol{F}/P = \boldsymbol{e}_x$ (Normalkraft) 56
5.5 Ergebnisse der Stabilitätsanalyse; Träger mit negativer Krümmung ($\Delta\Phi_2 = \pi$), Kraftrichtung $\boldsymbol{F}/P = \boldsymbol{e}_y$ (Querkraft) 57

6.1 Parameterset für die Rechnungen mit globalen Ritz-Ansätzen 66

1 Einleitung

Die vorliegende Diplomarbeit behandelt ein konkretes Beispiel zur Theorie dünnwandiger, gekrümmter Balken mit offenem Querschnitt. Derartige Strukturen sind besonders wölbempfindlich und können nur mit einer entsprechend adaptierten Balkentheorie behandelt werden. Abbildung 1.1 zeigt Skizzen der betrachteten Trägergeometrien. Es wird ein in der undeformierten Lage kreisförmig gekrümmter Balken untersucht. Der Querschnitt wird durch einen Teilkreisbogen mit der kleinen Dicke h gebildet und kann nach oben (in positiver y-Richtung) oder nach unten hin offen sein. Der Träger ist symmetrisch bezüglich der xy-Ebene. Er wird an einem Ende fest eingespannt und erfährt eine konzentrierte Belastung $\boldsymbol{F}$ am freien Ende.

Es werden das Deformationsverhalten im Rahmen der geometrisch linearisierten Theorie sowie das Stabilitätsversagen durch Biegedrillknicken (Kippen) der Struktur studiert und Vergleiche mit Ergebnissen aus Schalen-FE-Berechnungen durchgeführt. In [6] wurden die im Folgenden angewandte Balkentheorie hergeleitet und erste Beispielrechnungen am geraden Balken mit Halbkreisquerschnitt durchgeführt. Die vorliegende Arbeit dehnt diese Rechnungen auf in der Referenzlage gekrümmte Balken aus und soll die Grenzen der Balkentheorie im Vergleich mit der Schalentheorie ausloten.

Die Betrachtungen zur Theorie dünnwandiger Balken mit offenem Querschnitt in [6] stellen die Grundlage für die hier präsentierten Rechnungen dar und sollen im Folgenden kurz rekapituliert werden. Frühere Arbeiten zum Thema stammen etwa von Timoshenko [5] und Vlasov [7]. Deren Ergebnisse zur geometrisch linearen Theorie können durch Substitution einer geeigneten kinematischen Hypothese für das Verschiebungsfeld des 3D-Kontinuums im Prinzip der virtuellen Arbeiten reproduziert werden. Die Gültigkeit dieser auf kinematischen Annahmen beruhenden Theorie wird in [6] für den geraden Träger mittels asymptotischer Methoden ausgehend von den Gleichungen der linearisierten Schalentheorie gezeigt. Die Vereinfachung der Schalengleichungen in dieser asymptotischen Analyse ist eine Folge der Schlankheit balkenartiger Strukturen, d.h.: Relevante Größen ändern sich entlang der Balkenachse langsamer als im Querschnitt.

Die Herleitung der nichtlinearen Balkentheorie in [6] erfolgt über die Beschreibung der Deformation einer materiellen Linie. Am Ende dieser Rechnung steht die allgemeine Definition der Verzerrungsenergiedichte U als Funktion unabhängiger Verzerrungsmaße. Zur Konstruktion einer expliziten Darstellung dieser Funktion bedient man sich eines hybriden Zugangs und wählt U speziell so, dass es für kleine Deformationen der Verzerrungsenergiedichte der linearisierten Theorie

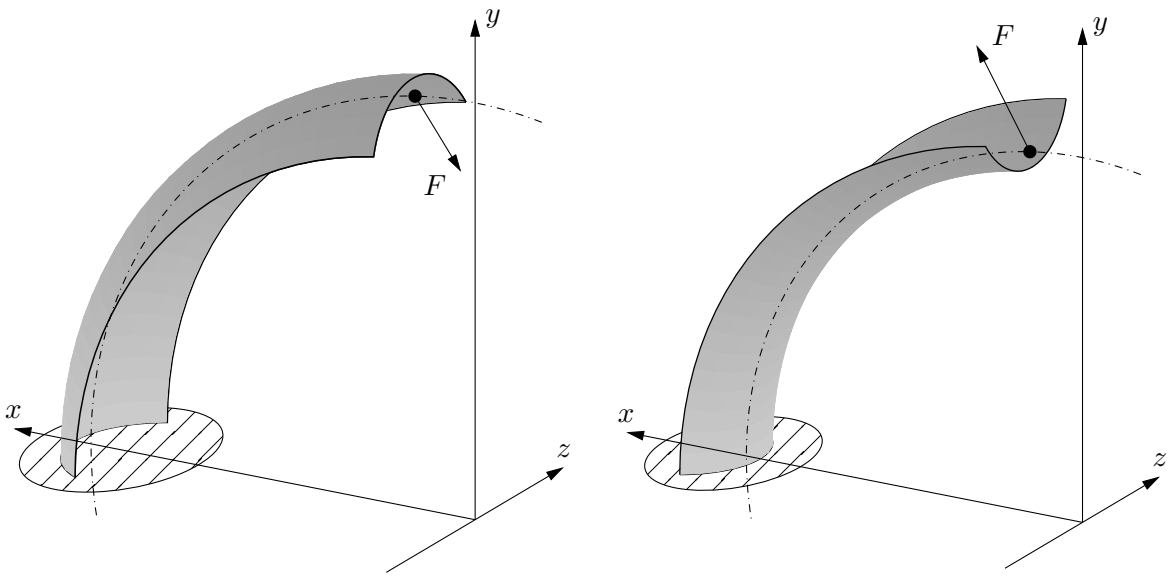


Abbildung 1.1: Geometrie der untersuchten Trägerformen

entspricht. Wie eine genauere Analyse zeigt, sind die auf Basis dieses Vergleichs gewonnenen Materialgleichungen für die Beschreibung des geometrisch nichtlinearen Verhaltens der Struktur und damit insbesondere für die Stabilitätsanalyse nicht ausreichend. Erst durch Erweiterung der Verzerrungsenergiedichte um kubische Terme, welche Kopplungseffekte zwischen Biegung, Zug-Druck und Torsion beschreiben, kann das nichtlineare Deformationsverhalten korrekt wiedergegeben werden. Die mit dieser erweiterten Theorie errechneten Ergebnisse halten einem Vergleich mit Schalen-FE-Kalkulationen stand. Zur Erklärung der kubischen Terme in der Verzerrungsenergie werden aufwändige Berechnungen am geraden, als Schale aufgefassten Träger unter kombinierter Zug/Druck-, Biegungs- und Torsionsbeanspruchung durchgeführt. Es zeigt sich, dass die aktuelle Torsionssteifigkeit vom Normalspannungszustand im Querschnitt abhängt.

Um die theoretischen Betrachtungen zu bekräftigen, werden in [6] numerische Experimente am Beispiel eines geraden Balkens mit dünnem Halbkreisquerschnitt durchgeführt. Die Analyse des Kippens dieser Struktur erfolgt anhand linearisierter Gleichungen um den vorgespannten aber näherungsweise undeformierten Zustand. Die Abweichungen der Knicklasten gegenüber den mittels Schalen-FE errechneten Werten sind bei Vernachlässigung der Vordeformationen im Balkenmodell jedoch erheblich. Betrachtet man hingegen den Fall der Torsion des geraden Trägers bei gleichzeitiger Vorspannung durch eine Einzellast am freien Ende in der Symmetrieebene, so hängt die aktuelle Torsionssteifigkeit vom Betrag der Vorspannung ab und solange die Vorspannungen selbst klein sind, dürfen nichtlineare Vordeformationen in der Balkenrechnung vernachlässigt werden. Die mit dieser Vereinfachung ermittelten Werte für den Zusammenhang zwischen Torsionswinkel und Vorspannkraft stimmen gut mit jenen der Schalenrechnung überein.

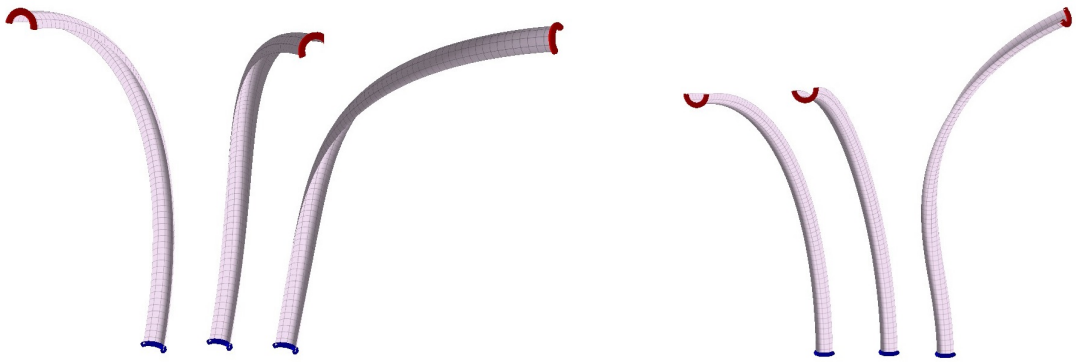


Abbildung 1.2: Illustration des Stabilitätsverlusts durch Biegedrillknicken

Auf Basis dieser Betrachtungen ergeben sich folgende Ziele für die Diplomarbeit:

1. Die asymptotische Analyse in [6] beschränkt sich auf den geraden Träger. Aus diesem Grund ist eine numerische Studie des Konvergenzverhaltens der Balken- gegen die Schalenlösung für die Biegung des gekrümmten Trägers im Rahmen der geometrisch linearisierten Theorie sinnvoll.

2. In Analogie zur Stabilitätsuntersuchung des geraden Trägers: Berechnung der Knicklasten für den gekrümmten Träger mithilfe der inkrementellen Balkentheorie, linearisiert um einen vorgespannten, aber näherungsweise undeformierten Zustand und anschließender Vergleich mit Schalen-FE-Berechnungen.

3. Erweiterung der Stabilitätsanalyse durch Berechnung der Knicklasten sowie des Nachbeulverhaltens mittels globaler Ritz-Ansätze in den Variationsgleichungen der nichtlinearen Balkentheorie und anschließender Vergleich mit Berechnungen der Schalen-FEM.

Hierzu beschäftigt sich das folgende Kapitel zunächst mit der Konkretisierung der Problemstellung sowie den theoretischen Grundlagen der Balkentheorie. Kapitel 3 beschreibt die Implementierung des Schalenmodells und den Ablauf der numerischen Analysen im nicht kommerziellen Schalen-FE-Programm shellFE. Im Anschluss daran werden die Ergebnisse der Beispielrechnungen im Rahmen der linearen Theorie präsentiert. Die beiden abschließenden Kapitel 5 und 6 untersuchen den Stabilitätsverlust durch Biegedrillknicken. In der inkrementellen Analyse von Kapitel 5 werden kritische Lasten und Knickmoden berechnet, während in Kapitel 6 mithilfe der Ritz-Methode und Schalen-FE-Kalkulationen zusätzlich das Nachbeulverhalten der Struktur nachvollzogen werden kann. Die in Abbildung 1.2 dargestellten Konfigurationen stammen aus der Analyse des Nachbeulverhaltens mit Schalen-FEM und vermitteln einen ersten Eindruck vom Biegedrillknicken der Struktur.

2 Problemstellung und beschreibende Gleichungen der Balkentheorie

Nach einigen Angaben zu Geometrie, Parametrisierung und Belastung, werden in diesem Kapitel die beschreibenden Gleichungen der Balkentheorie hergeleitet. Die für beliebig gekrümmte Träger gültigen Formeln aus [6] werden der hier verwendeten Notation für den kreisförmig gekrümmten Balken angepasst.

2.1 Konkretisierung der Problemstellung

Der untersuchte Balken verfügt im undeformierten Zustand über eine kreisförmig gekrümmte Achse, einen teilkreisförmigen Querschnitt und besteht aus linear elastischem Material mit Elastizitätsmodul E und Querdehnzahl ν. Die Geometrie der Referenzkonfiguration und die Parametrisierung der Fläche sind in Abbildung 2.1 dargestellt. Der Radius a_1 weist vom Ursprung des raumfesten, kartesischen Koordinatensystems zur Balkenachse. Letztere verbindet die Flächenschwerpunkte aller Querschnitte und liegt in der xy-Ebene dieses Systems. Die Geometrie ist bezüglich dieser Ebene symmetrisch. Jeder Teilkreis im Querschnitt hat Radius a_2 sowie kleine Dicke $h \ll a_2$ und der Abstand seines Mittelpunkts zum Schwerpunkt desselben Querschnitts beträgt d_{SP}. Der Träger ist an einem Ende fest eingespannt und wird am freien Ende mit der Kraft $\boldsymbol{F}$ belastet.

Die Referenzlage der Fläche wird wahlweise durch die zwei Winkelkoordinaten φ_1 und φ_2 oder die Bogenlängen s_1 und s_2 parametrisiert. Differentiation nach der Balkenlängskoordinate s_1 wird mit einem Strich gekennzeichnet, während Ableitungen nach anderen Koordinaten ausgeschrieben werden. Der Winkel φ_1 dreht positiv um die z-Achse, während φ_2 positiv um die Tangente der Balkenachse dreht und für Punkte in der Symmetrieebene null ist. Die Begrenzung des Trägers in beiden Richtungen ist gegeben durch $\varphi_1 \in [0,\, \Phi_1]$ sowie $\varphi_2 \in [\Delta\Phi_2 - \Phi_2, \Delta\Phi_2 + \Phi_2]$. Damit ist Φ_1 der gesamte von der Balkenachse eingeschlossene Winkel und Φ_2 ist der halbe Winkel des Teilkreises im Querschnitt. Der Winkelsprung $\Delta\Phi_2$ kann zwei Werte annehmen $\Delta\Phi_2 = \{0, \pi\}$ und dient der Unterscheidung zwischen den beiden Trägerformen: nach unten offen (positive Gauß-Krümmung[1], $\Delta\Phi_2 = 0$) bzw. nach oben offen (negative Gauß-Krümmung, $\Delta\Phi_2 = \pi$).

[1] Die Gauß-Krümmung an einem Punkt der betrachteten Fläche ist eine Invariante des zweiten metrischen Tensors dieser Fläche. Sie berechnet sich aus dem Produkt der vorzeichenbehafteten Hauptkrümmungen in diesem Punkt.

Entsprechende Größen S_1, S_2 und ΔS_2 lassen sich für die Bogenkoordinaten definieren. Die Umrechnung zwischen Bogen- und Winkelkoordinaten fällt nicht schwer

$$s_1 = a_1\,\varphi_1 \qquad S_1 = a_1\,\Phi_1 \qquad\qquad \mathrm{d}s_1 = a_1\,\mathrm{d}\varphi_1 \tag{2.1a}$$

$$s_2 = a_2\,\varphi_2 \qquad S_2 = a_2\,\Phi_2 \qquad \Delta S_2 = a_2\,\Delta\Phi_2 \qquad \mathrm{d}s_2 = a_2\,\mathrm{d}\varphi_2\,. \tag{2.1b}$$

Die Beschreibung der Lage eines Punktes auf der Fläche in den beiden Bogenkoordinaten kann in verschiedenen Koordinatensystemen geschehen. Die Basisvektoren der hier zum Einsatz kommenden Systeme sind in Abbildung 2.2 für die Referenzlage dargestellt. Falls notwendig wird die Referenzlage einer Größe stets gekennzeichnet durch die Zahl 0 vertikal über dem Grundsymbol. Das raumfeste, kartesische Koordinatensystem wird durch die drei Vektoren $[\boldsymbol{e}_x,\, \boldsymbol{e}_y,\, \boldsymbol{e}_z]$ aufgespannt und hat seinen Ursprung im Mittelpunkt des Kreises der Balkenachse. Die Belastung $\boldsymbol{F}$ ist eine Totlast mit fester Richtung im Raum und hat daher im kartesischen System die einfachste Gestalt

$$\boldsymbol{F} = P\,\left(\sin(\alpha_1)\,\cos(\alpha_2)\,\boldsymbol{e}_x + \sin(\alpha_1)\,\sin(\alpha_2)\,\boldsymbol{e}_y + \cos(\alpha_1)\,\boldsymbol{e}_z\right)\,. \tag{2.2}$$

Der Betrag der Kraft ist P und die beiden Winkel α_1 und α_2 legen die Wirkungslinie im Raum fest. Die Umrechnung auf Polarkoordinaten $[\boldsymbol{e}_r,\, \boldsymbol{e}_\varphi,\, \boldsymbol{e}_z]$ ist gegeben durch

$$\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_r\cos(\varphi_1) - \boldsymbol{e}_\varphi\sin(\varphi_1) \qquad \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x\cos(\varphi_1) + \boldsymbol{e}_y\sin(\varphi_1) \tag{2.3a}$$

$$\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_r\sin(\varphi_1) + \boldsymbol{e}_\varphi\cos(\varphi_1) \qquad \boldsymbol{e}_\varphi = -\boldsymbol{e}_x\sin(\varphi_1) + \boldsymbol{e}_y\cos(\varphi_1)\,. \tag{2.3b}$$

In den Balkenrechnungen wird jedem Punkt der Achse eine orthonormale, materielle Basis $[\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2,\, \boldsymbol{e}_3]$ zugeordnet, über deren Verdrehung die Rotation des Querschnitts beschrieben wird. Der Vektor $\boldsymbol{e}_1$ liegt in der Symmetrielinie des Querschnitts und spannt dessen Ebene mit $\boldsymbol{e}_3$ auf. Der Vektor $\boldsymbol{e}_2$ zeigt in Querschnittsnormalenrichtung und wird im Hinblick auf den späteren Übergang zur schubstarren Balkentheorie, siehe (2.38), alternativ mit $\boldsymbol{t}$ bezeichnet. In der Referenzkonfiguration ist $\overset{0}{\boldsymbol{t}}$ kongruent zur Tangentialrichtung an die Balkenachse $\overset{0}{\boldsymbol{r}}{}'$ und die so eingeführte materielle Basis fällt mit der polaren zusammen

$$\left[\overset{0}{\boldsymbol{e}}_1,\, \overset{0}{\boldsymbol{e}}_2,\, \overset{0}{\boldsymbol{e}}_3\right] = [\boldsymbol{e}_r,\, \boldsymbol{e}_\varphi,\, \boldsymbol{e}_z]\,. \tag{2.4}$$

Das System $[\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{n}]$ beschreibt die Orientierung eines materiellen Punktes auf der Fläche und ist nur für die Schalenberechnungen bedeutend. Dort tritt es bei der Beschreibung der Referenzlage des Finite-Elemente-Netzes in Erscheinung, siehe Kapitel 3.

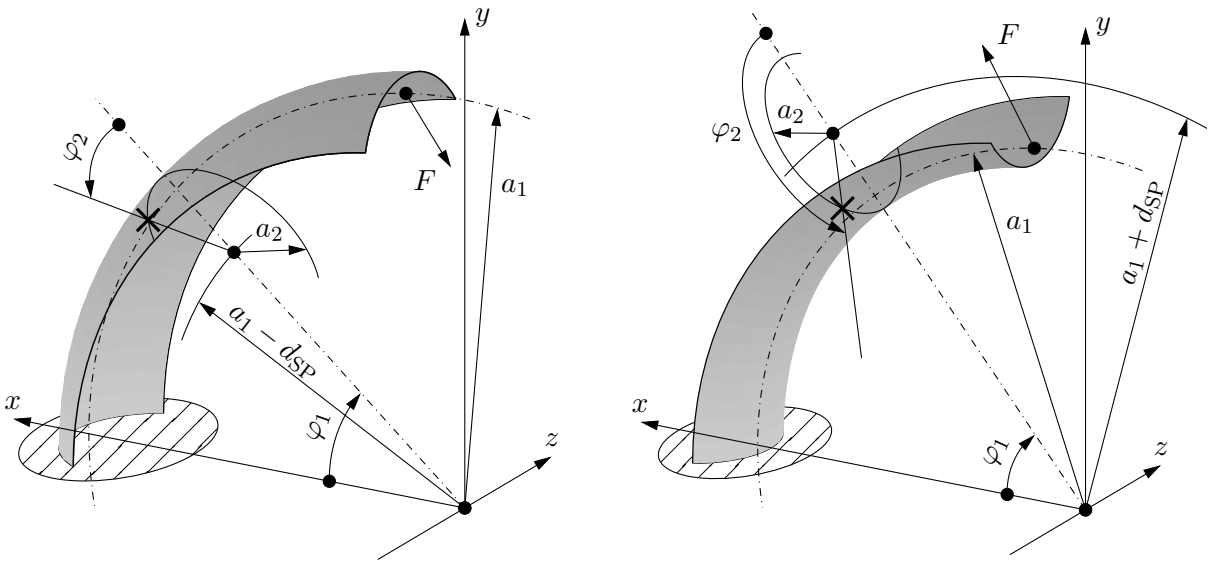


Abbildung 2.1: Trägergeometrie mit Bemaßung und Parametrisierung der Fläche; Träger mit positiver (negativer) Gauß-Krümmung links (rechts)

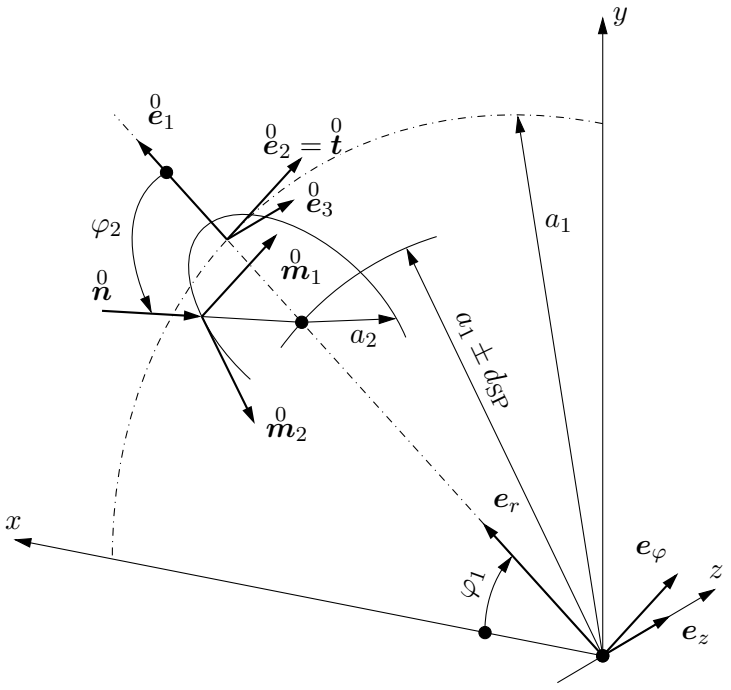


Abbildung 2.2: Koordinatensysteme und Basisvektoren am Träger in der Referenzlage

Nur ein geringer Teil der Berechnungen in den Folgekapiteln erfolgt rein symbolisch, d.h. ohne vorherige Festlegung spezieller Parameter für Geometrie und Belastung. Anstatt eine große Anzahl unterschiedlicher Parametersets zu analysieren, beschränken sich die numerischen Stabilitätsuntersuchungen auf die in Tabelle 2.1 angeführten Trägergeometrien, welche in Analogie zu jenen in [6] gewählt wurden. Das Standardparameterset in Zeile eins dieser Tabelle repräsentiert einen Viertelkreisbalken der Länge 1 m, der Querschnitt ist halbkreisförmig mit Radius 0.02 m und hat die Dicke 0.001 m. Alle übrigen Parametersets werden von diesen Defaultwerten durch Anpassung einzelner geometrischer Größen abgeleitet. Die elastischen Materialkenngrößen entsprechen jenen von Stahl und werden für alle Berechnungen konstant gehalten. Die Angabe von Einheiten entfällt vollständig, alle dimensionsbehafteten Größen entstammen dem SI-Einheitensystem {kg, m, s}.

NR.	$S_1 = a_1\,\Phi_1$	a_1	a_2	h	Φ_1	Φ_2	E	ν
1	1.00	$2/\pi$	0.02	1.0e−3	$\pi/2$	$\pi/2$	2.1e11	0.3
2	1.00	$2/\pi$	0.02	1.0e−3	$\pi/2$	$\pi/3$	2.1e11	0.3
3	1.00	$2/\pi$	0.02	1.0e−3	$\pi/2$	$3\pi/4$	2.1e11	0.3
4	1.00	$2/\pi$	0.02	5.0e−4	$\pi/2$	$\pi/2$	2.1e11	0.3
5	1.00	$2/\pi$	0.02	2.5e−4	$\pi/2$	$\pi/2$	2.1e11	0.3
6	0.50	$1/\pi$	0.02	1.0e−3	$\pi/2$	$\pi/2$	2.1e11	0.3
7	0.25	$1/(2\pi)$	0.02	1.0e−3	$\pi/2$	$\pi/2$	2.1e11	0.3

Tabelle 2.1: Parametersets für die Stabilitätsanalyse

2.2 Beschreibende Gleichungen der Balkentheorie

In diesem Abschnitt werden die Herleitungen zur verwendeten Balkentheorie angegeben und damit die allgemeinen Ausführungen des einleitenden Kapitels konkretisiert. Der Inhalt ist eine Zusammenfassung der ausführlicheren Darstellung in [6], wobei die Formeln an die hier verwendete Notation entsprechend angepasst werden.

Im Rahmen der Balkentheorie werden Deformationen eines höherdimensionalen Kontinuums durch jene eines eindimensionalen Kontinuums angenähert. Zur Berechnung einer konkreten Balkenlösung müssen zunächst querschnittsspezifische Größen berechnet werden, die als Koeffizienten in der Verzerrungsenergiedichte U aufscheinen und für die Ausformulierung der Konstitutivgleichungen benötigt werden. Im Anschluss daran kann die Bewegung des Balkens aus den beschreibenden Gleichungen ermittelt und daraus die Verformung des 3D-Körpers rekonstruiert werden.

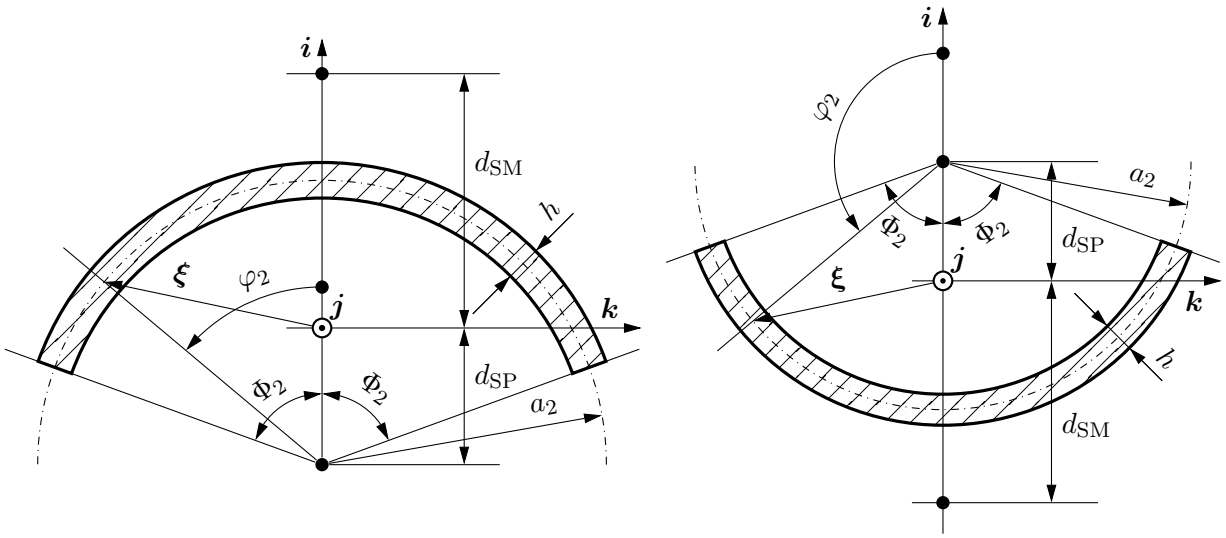


Abbildung 2.3: Querschnitt des Trägers: Geometrie, Koordinaten und Parametrisierung

2.2.1 Lösung des Problems im Querschnitt

Die Berechnung der erforderlichen Querschnittsgrößen ist hier den Herleitungen zur Balkentheorie im folgenden Abschnitt vorangestellt und darf isoliert von der räumlichen Gestalt der Struktur erfolgen. Die Einführung einer neuen Basis $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$ in Abbildung 2.3 soll diese Unabhängigkeit betonen. Die Transformation der Querschnittsgrößen in das System des gekrümmten Trägers kann später gemäß

$$[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] \rightarrow [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \tag{2.5}$$

erfolgen, weil die Basis im Querschnitt zur materiellen Basis kongruent ist und die Querschnitte starr mit der materiellen Basis mitrotieren. Der Ursprung des Koordinatensystems im Querschnitt muss im geometrischen Schwerpunkt liegen, weil durch diesen die Balkenachse gelegt wurde. Aufgrund der sehr kleinen Wandstärke $h \ll a_2$ dürfen alle Flächenintegrale über die Querschnittsfläche A gemäß

$$\iint_A \ldots \mathrm{d}A \approx h \int_{\Delta S_2 - S_2}^{\Delta S_2 + S_2} \ldots \mathrm{d}s_2 \tag{2.6}$$

durch Linienintegrale über die Mittellinie ersetzt werden. Dadurch geht beispielsweise der geometrische Flächenschwerpunkt näherungsweise in den Linienschwerpunkt über und für die Querschnittsfläche selbst gilt näherungsweise

$$A = \iint_A \mathrm{d}A \approx h \int_S \mathrm{d}s_2 = 2\,h\,S_2 \tag{2.7}$$

mit der Abkürzung $\int_S$ für Linienintegrale über die gesamte Querschnittsmittellinie.

Für beide Trägerformen (positive bzw. negative Gauß-Krümmung) wird dasselbe Koordinatensystem im Querschnitt verwendet und die Position entlang der Querschnittsmittellinie wird durch den Winkel φ_2 bzw. sein Pendant s_2 mit Nullage auf der Symmetrielinie beschrieben. Mit dem Betrag des Abstands zwischen Mittelpunkt des Kreises und Flächenschwerpunkt

$$d_{\mathrm{SP}} = a_2 \, \frac{\sin(\Phi_2)}{\Phi_2} \tag{2.8}$$

kann der Positionsvektor $\boldsymbol{\xi}$ eines Punktes entlang der Mittellinie angeben werden

$$\boldsymbol{\xi} = \left(a_2 \cos(\varphi_2) - d_{\mathrm{SP}} \cos(\Delta\Phi_2)\right) \boldsymbol{i} - \left(a_2 \sin(\varphi_2)\right) \boldsymbol{k} \, . \tag{2.9}$$

Die Steuerung des Vorzeichens bei d_{SP} für die beiden Trägerformen übernimmt $\cos(\Delta\Phi_2) = \pm 1$. Man überzeugt sich von der Richtigkeit des Ausdruckes für d_{SP} mithilfe der Probe $\int_S \boldsymbol{\xi} \, \mathrm{d}s_2 = 0$. Der Abstand der Balkenachse zum Schubmittelpunkt wird mit d_{SM} bezeichnet, er kann gemäß (2.19) berechnet werden. Der Normal- und der Tangenten-Einheitsvektor im Querschnitt sind

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{i} \cos(\varphi_2) - \boldsymbol{k} \sin(\varphi_2) \qquad \boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{i} \sin(\varphi_2) - \boldsymbol{k} \cos(\varphi_2) \; . \tag{2.10}$$

Die Benennung dieser Vektoren mit griechischen Buchstaben dient wieder der Unterscheidung von entsprechenden Vektoren der 3D-Geometrie in Abbildung 2.2.

Die Wölbfunktion $w(\boldsymbol{\xi})$ beschreibt den Verlauf der achsialen Deformation des Querschnitts und ist a priori festzulegen. Es ist naheliegend – und gemäß [6] für den geraden Balken auch asymptotisch korrekt – sie entsprechend der Theorie der reinen Torsion nach de Saint-Venant zu wählen. Für den dünnwandigen offenen Querschnitt gilt dann näherungsweise

$$w = -\int \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} \, \mathrm{d}s_2 \, , \tag{2.11}$$

was der negativen, doppelten, vom Vektor $\boldsymbol{\xi}$ überstrichenen Fläche entspricht. Die Integrationskonstante ist frei wählbar, weil sie lediglich eine zusätzliche Verschiebung des gesamten Querschnitts in achsialer Richtung bewirkt und diese Bewegung bereits vom Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}$ erfasst wird, vgl. (2.28). Mit der Forderung

$$\int_S w \, \mathrm{d}s_2 = 0 \tag{2.12}$$

ist die Integrationskonstante festgelegt und für den teilkreisförmigen Querschnitt gilt

$$w = a_2 \, \left(\Delta S_2 - s_2 + d_{\mathrm{SP}} \sin(\varphi_2) \, \cos(\Delta\Phi_2)\right) \, . \tag{2.13}$$

Bei Kenntnis der Wölbfunktion folgt der Wölbwiderstand zu

$$J_0 = h \int_S w^2 \, \mathrm{d}s_2 = \tag{2.14}$$
$$= \frac{a_2^5 \, h}{24 \, \Phi_2^2} \left[16 \, \Phi_2^5 + 6 \sin(2 \, \Phi_2) \left(8 \, \Phi_2^2 - 1 \right) + 36 \, \Phi_2 \, (\cos(2 \, \Phi_2) - 1) + 3 \sin(4 \, \Phi_2) \right] .$$

Der ebene Tensor der Flächenträgheitsmomente hat im gewählten System Hauptachsenform

$$\boldsymbol{J} = h \int_S \boldsymbol{\xi} \, \boldsymbol{\xi} \, \mathrm{d}s_2 = \tag{2.15}$$
$$= J_{11} \, \boldsymbol{ii} + J_{33} \, \boldsymbol{kk} =$$
$$= \left[\frac{a_2^3 \, h}{2} \, (2 \, \Phi_2 + \sin(2 \, \Phi_2)) - 2 \, S_2 \, h \, d_{\mathrm{SP}}^2 \right] \boldsymbol{ii} + \left[\frac{a_2^3 \, h}{2} \, (2 \, \Phi_2 - \sin(2 \, \Phi_2)) \right] \boldsymbol{kk} \, ,$$

wobei im Ausdruck für J_{11} der Steiner-Anteil zur Bildung des Trägheitsmomentes um die Schwerpunktsachse aufscheint. Der Torsionswiderstand eines dünnen offenen Profils darf analog zu dem eines schmalen Rechteckquerschnitts gewählt werden, siehe [2],

$$C = \frac{2}{3} \, S_2 \, h^3 \, . \tag{2.16}$$

Damit kann der klassische Balken-Steifigkeitstensor

$$\boldsymbol{a} = -E \, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{j} + \mu \, C \, \boldsymbol{jj} = \tag{2.17}$$
$$= E \, J_{33} \, \boldsymbol{ii} + E \, J_{11} \boldsymbol{kk} + \mu \, C \, \boldsymbol{jj}$$
$$= a_{11} \, \boldsymbol{ii} + a_{33} \, \boldsymbol{kk} + a_t \, \boldsymbol{jj} \, .$$

mit den Biegesteifigkeiten a_{11} und a_{33} sowie der Torsionssteifigkeit a_t gebildet werden. Nachdem sich die Berechnungen auf das Koordinatensystem im Schwerpunkt beziehen, tritt noch ein Vektor auf

$$\boldsymbol{\beta} = h \int_S \boldsymbol{\xi} \, w \, \mathrm{d}s_2 = \tag{2.18}$$
$$= \left[\frac{a_2^3 \, h}{2} \, (2 \, a_2 \sin(\Phi_2) - 4 \, S_2 \cos(\Phi_2) + d_{\mathrm{SP}} \sin(2 \, \Phi_2)) \, \cos(\Delta \Phi_2) \right] \boldsymbol{k}$$

mit dessen Hilfe der Abstand vom Schubmittelpunkt zum Schwerpunkt berechnet werden kann

$$d_{\mathrm{SM}} \, \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{J}^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} = \tag{2.19}$$
$$= \left[\frac{\cos(\Delta \Phi_2)}{2 \, \Phi_2 - \sin(2 \, \Phi_2)} \, (2 \, a_2 \sin(\Phi_2) - 4 \, S_2 \cos(\Phi_2) + d_{\mathrm{SP}} \sin(2 \, \Phi_2)) \right] \boldsymbol{i} \, .$$

Im Zusammenhang mit der angesprochenen Kopplung von Normal- und Torsionsspannungen im geometrisch nichtlinearen Bereich benötigt man

$$\boldsymbol{\gamma} = h \int_S \boldsymbol{\xi}\,\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}\; \mathrm{d}s_2 = \gamma\, \boldsymbol{i} = (-2\, d_{\mathrm{SP}}\, J_{11} \cos(\Delta\Phi_2))\; \boldsymbol{i} \tag{2.20a}$$

$$\boldsymbol{\zeta} = E\, \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{j} = \zeta\, \boldsymbol{k} = (-2\, E\, d_{\mathrm{SP}}\, J_{11} \cos(\Delta\Phi_2))\; \boldsymbol{k}\,. \tag{2.20b}$$

Der Vektor $\boldsymbol{\gamma}$ ist ein Flächenmoment dritter Ordnung und ζ ist ein elastischer Koppelkoeffizient zwischen Biegung und Torsion.

2.2.2 Kinematik der materiellen Linie im Raum

Der Balken wird aufgefasst als eine eindimensionale, materielle Linie im Raum. Diese wird parametrisiert mit der Bogenlänge der Referenzkonfiguration s_1, wobei jeder materielle Punkt für sich über sieben Freiheitsgrade verfügt: drei Verschiebungen des Punktes im Raum, drei Verdrehungen der materiellen Basis $\boldsymbol{e}_i$ gegenüber ihrer undeformierten Referenzlage $\overset{0}{\boldsymbol{e}}_i$ und den skalaren Betrag der Verwölbung im Querschnitt. Es müssen daher im Allgemeinen zur vollständigen Beschreibung der Bewegung eines freien materiellen Punktes sieben Lagekoordinaten gewählt werden. Zur Identifikation der Position eines materiellen Punktes im Raum eignen sich der Lagevektor $\boldsymbol{r}(s_1)$ oder der Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}(s_1)$, welche über die Referenzlage $\overset{0}{\boldsymbol{r}}(s_1)$ miteinander verknüpft sind

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} - \overset{0}{\boldsymbol{r}}\,. \tag{2.21}$$

Als Lagekoordinaten für beliebig große Rotation können drei Euler-Winkel $\chi_i(s_1)$ verwendet werden, die das Dreibein materieller Basisvektoren vom Referenzzustand in die aktuelle Lage rotieren. Der Betrag der Verwölbung wird mit $\psi(s_1)$ bezeichnet und beschreibt im Produkt mit der Wölbfunktion $w(s_2)$ den Verlauf der axialen Verformung des Querschnittes. Die Lage eines freien, materiellen Punktes ist dann durch den Satz an Lagekoordinaten $\{\boldsymbol{u},\, \chi_i,\, \psi\}$ oder alternativ $\{\boldsymbol{r},\, \chi_i,\, \psi\}$ eindeutig festgelegt. Im Folgenden wird aber die Bewegungsfreiheit mittels kinematischer Zwangsbedingungen stets eingeschränkt, sodass sich die erforderliche Anzahl an Lagekoordinaten entsprechend reduziert. Insbesondere werden davon die Winkel χ_i, siehe Abschnitt 2.2.6 und die Verwölbung ψ, siehe (2.47), betroffen sein.

Die Rotation der materiellen Basis geschieht mithilfe des orthogonalen Drehtensors $\boldsymbol{P}(s_1)$, der durch die Drehwinkel $\chi_i(s_1)$ festgelegt ist und wie diese auch als Funktion von s_1 dargestellt werden kann. Formal ist $\boldsymbol{P}$ über die Summe der Dyaden der materiellen Basisvektoren in den beiden Konfigurationen definiert

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{e}_i\, \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i\,, \tag{2.22}$$

wobei gemäß der Einstein-Summenkonvention über doppelte Indizes jeweils von eins bis drei summiert wird.

Orthogonalität bedeutet

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = \mathbb{1} = \delta_{ij}\, \boldsymbol{e}_i\, \boldsymbol{e}_j\,, \tag{2.23}$$

mit dem Einheitstensor $\mathbb{1}$ und dem Kronecker-Delta δ_{ij}. Variation dieser Orthogonalitätsbeziehung liefert

$$\delta\left(\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right) = \delta\mathbb{1} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \delta\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = -\left(\delta\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.24}$$

und folglich ist $\left(\delta\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right)$ ein schiefsymmetrischer Tensor. Für jeden schiefsymmtrischen Tensor existiert ein zugeordneter Vektor, sodass im aktuellen Fall mit dem neuen Vektor $\delta\boldsymbol{\theta}$ geschrieben werden darf

$$\left(\delta\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right) = \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbb{1}\,, \tag{2.25}$$

woraus nach Bildung des Skalarprodukts mit $\boldsymbol{P}$ von rechts unter Beachtung der Orthogonalität (2.23) folgt

$$\delta\boldsymbol{P} = \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{P}\,. \tag{2.26}$$

Der Vektor $\delta\boldsymbol{\theta}$ beschreibt kleine Rotationen um die aktuelle Lage. Er ist jedoch keine unabhängige Variation eines eigenständigen Vektors $\boldsymbol{\theta}$, sondern hängt gemäß obiger Gleichung über $\delta\boldsymbol{P}$ mittelbar von den unabhängigen Variationen der Winkel $\delta\chi_i$ ab. Schließlich existiert mit Ausnahme des geometrisch linearisierten Falls, vgl. Abschnitt 2.2 Formel (2.53), gar kein Vektor $\boldsymbol{\theta}$, mit dessen Hilfe die Verdrehungen der materiellen Punkte beschrieben werden könnten, d.h.: Die Komponenten eines Vektors $\boldsymbol{\theta}$ sind keine Lagekoordinaten. Mit der Definition des Rotationstensors (2.22) und seiner Variation (2.26) sowie $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$ kann die Transformation der materiellen Basis formuliert werden

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{P} \cdot \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i \qquad \delta\boldsymbol{e}_i = \delta\boldsymbol{P} \cdot \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i = \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{e}_i\,. \tag{2.27}$$

Die Variation der materiellen Basis und damit einhergehend die virtuelle Verdrehung der materiellen Punkte ist vollständig durch den Vektor der kleinen Rotationen $\delta\boldsymbol{\theta}$ beschrieben.

Die Bewegung des zugrunde liegenden dreidimensionalen Kontinuums lässt sich aus der Verformung der materiellen Linie rekonstruieren. Es ist hier jedoch im Hinblick auf den Vergleich mit Schalenberechnungen sinnvoller, lediglich die Bewegung der Mittelfläche des Trägers nachzubilden. Eine Erweiterung auf das 3D-Kontinuum wäre durch Implementierung einer Dickenkoordinate sehr einfach möglich. Der Positionsvektor $\boldsymbol{x}$ im Querschnitt zeigt in der deformierten Lage von der Balkenachse zu einem Punkt der Mittelfläche. Die aktuelle Konfiguration $\boldsymbol{R}$ eines Punktes der Schale mit den materiellen Koordinaten $(s_1,\, s_2)$ kann damit geschrieben werden als

$$\boldsymbol{R}\,(s_1, s_2) = \overbrace{\overset{0}{\boldsymbol{r}}\,(s_1) + \boldsymbol{u}\,(s_1)}^{\boldsymbol{r}(s_1)} + \boldsymbol{x}\,(s_1,\, s_2) + \psi\,(s_1)\; w\,(s_2)\; \boldsymbol{t}\,. \tag{2.28}$$

Hierin ist $\overset{0}{\boldsymbol{r}}$ die Referenzlage der Balkenachse, $\boldsymbol{u}$ bezeichnet die Verschiebung derselben und der Querschnitt verwölbt sich mit $\psi\, w$ in Normalenrichtung $\boldsymbol{t}$. Da der Querschnitt starr rotiert und sich nur axial verformen kann, unterscheidet sich der Vektor $\boldsymbol{x}$ von $\overset{0}{\boldsymbol{x}}$ nur durch die Verdrehung der materiellen Basis und es gilt

$$\boldsymbol{x} = \overset{0}{x}_1\, \boldsymbol{e}_1 + \overset{0}{x}_3\, \boldsymbol{e}_3\,. \tag{2.29}$$

2.2.3 Gleichgewichtsbedingungen und Konstitutivgleichungen

Den Ausgangspunkt zur Herleitung der beschreibenden Gleichungen der nichtlinearen Balkentheorie bildet das Prinzip der virtuellen Arbeiten. Man betrachtet ein freigeschnittenes Element des Balkens $s_1 \in [l_1,\, l_2]$ aufgefasst als materielle Linie wie im vorherigen Abschnitt.

Bei einer virtuellen, kinematisch zulässigen Verrückung, ausgedrückt durch das Variations-δ, leisten eingeprägte Kräfte sowie innere Kräfte entlang der Linie und Schnittgrößen an den beiden freigeschnittenen Enden virtuelle Arbeiten mit den Variationen der Lagekoordinaten. Der betrachtete virtuelle Zustand ist zum eigentlichen Gleichgewichtszustand unmittelbar benachbart und die virtuellen Verrückungen sind daher klein. Die virtuelle Verdrehung der materiellen Basisvektoren darf gemäß (2.27) mit dem Vektor der kleinen Rotationen $\delta\boldsymbol{\theta}$ formuliert werden. Wegen (2.21) und $\delta\overset{0}{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$ ist $\delta\boldsymbol{u} = \delta\boldsymbol{r}$, womit die Variation der Lage der materiellen Punkte durch das Set $\{\delta\boldsymbol{r},\, \delta\boldsymbol{\theta},\, \delta\psi\}$ vollständig beschrieben ist. Die Freiheitsgrade der materiellen Punkte bestimmen die Anzahl unterschiedlicher arbeitskonjugierter Paare im Prinzip der virtuellen Arbeiten, d.h.: Jeder variierten Lagekoordinate ist genau eine verallgemeinerte Kraft zugeordnet, die als verteilte Belastung oder konzentrierte Belastung am freigeschnittenen Ende auftreten kann. Aufgespalten in die einzelnen Beiträge lautet nun das Prinzip der virtuellen Arbeiten angesetzt am Teilstück $s_1 \in [l_1,\, l_2]$ des Balkens

$$\int_{l_1}^{l_2} \left(\boldsymbol{q}\cdot\delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{m}\cdot\delta\boldsymbol{\theta} + b\,\delta\psi - \delta U\right)\,\mathrm{d}s_1 + \left(\boldsymbol{Q}\cdot\delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{M}\cdot\delta\boldsymbol{\theta} + B\,\delta\psi\right)\Big|_{l_1}^{l_2} = 0\,. \tag{2.30}$$

Hierin sind $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{M}$, B die drei Schnittgrößen Schnittkraft, Moment und Bimoment (Wölbkraft), während mit den klein geschriebenen Größen die entsprechenden externen, verteilten Belastungen benannt werden. Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte entspricht der negativen Variation der Verzerrungsenergiedichte δU. Da der Integrationsbereich $s_1 \in [l_1,\, l_2]$ beliebig ist, folgt aus (2.30) nach Eingliederung der Randterme ins Integral die lokale Beziehung

$$\left(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{Q'}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r} + \left(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{M'}\right)\cdot\delta\boldsymbol{\theta} + \left(b + B'\right)\,\delta\psi + \boldsymbol{Q}\cdot\delta\boldsymbol{r'} + \boldsymbol{M}\cdot\delta\boldsymbol{\theta'} + B\,\delta\psi' = \delta U\,. \tag{2.31}$$

Es sei an dieser Stelle nochmals betont, dass $\delta\boldsymbol{\theta'}$ die Ableitung des eigenständigen Vektors $\delta\boldsymbol{\theta}$ bezeichnet, welcher im Allgemeinen nicht als Variation eines Vektors $\boldsymbol{\theta}$ darstellbar ist. Man wählt

nun die virtuelle Verschiebung speziell als kleine Starrkörperbewegung, die gekennzeichnet ist durch eine spezielle Wahl der Variation der Lage $\{\delta\boldsymbol{r},\, \delta\boldsymbol{\theta}\}$, Wölbfreiheit und das Verschwinden der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte gemäß

$$\delta\boldsymbol{r}(s) = \delta\bar{\boldsymbol{r}} + \delta\bar{\boldsymbol{\theta}} \times \boldsymbol{r}(s) \qquad \delta\boldsymbol{\theta} = \delta\bar{\boldsymbol{\theta}} \qquad \delta\psi = 0 \qquad \delta U = 0 \tag{2.32}$$

mit den konstanten Vektoren $\delta\bar{\boldsymbol{r}}$ und $\delta\bar{\boldsymbol{\theta}}$. Durch Substitution in (2.31) und Koeffizientenvergleich findet man die Gleichgewichtsbedingungen

$$\boldsymbol{Q}' + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{2.33a}$$

$$\boldsymbol{M}' + \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}\,. \tag{2.33b}$$

Nach Rückeinsetzen vereinfacht sich die lokale Form des Prinzips der virtuellen Arbeiten zu

$$\delta U = \boldsymbol{M} \cdot \delta\boldsymbol{\theta}' + \boldsymbol{Q} \cdot \left(\delta\boldsymbol{r}' - \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}'\right) + \left(B' + b\right)\, \delta\psi + B\, \delta\psi'\,. \tag{2.34}$$

Um die allgemeine Form von U zu finden, müssen die Variationen durch Einführung geeigneter Verzerrungsmaße voneinander unabhängig gemacht werden. Große Rotationen der materiellen Basis werden mit dem Drehtensor $\boldsymbol{P}$ beschrieben. Leitet man die Orthogonalitätsbeziehung (2.23) nach s_1 ab, so erkennt man auch $\left(\boldsymbol{P}' \cdot \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right)$ als schiefsymmetrischen Tensor. Mit dem zugeordneten Vektor $\boldsymbol{\kappa}$ lässt sich daher in Analogie zu (2.26) schreiben

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{P}\,. \tag{2.35}$$

Der sogenannte Krümmungsvektor $\boldsymbol{\kappa}$ verschwindet für eine Starrkörperbewegung wegen $\boldsymbol{P} =$ konst. und eignet sich zur Beschreibung der Verzerrungen zufolge Torsion und Biegung. Für die Darstellung der Verzerrungen aus Schub und Längsdehnung definiert man

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{P} \cdot \overset{0}{\boldsymbol{r}}{}'\,. \tag{2.36}$$

Es beinhaltet die Längsdehnung des Tangentenvektors und die Schubdeformation durch Rotation des Querschnittes gegenüber der Balkenachse. Für eine Starrkörperbewegung ist $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{0}$, denn mit $\boldsymbol{P} =$ konst. gilt für zwei benachbarte Punkte des Balkens

$$\boldsymbol{r}\left(s_1 + \Delta s_1\right) - \boldsymbol{r}\left(s_1\right) - \boldsymbol{P} \cdot \left(\overset{0}{\boldsymbol{r}}\left(s_1 + \Delta s_1\right) - \overset{0}{\boldsymbol{r}}\left(s_1\right)\right) = \boldsymbol{0}\,, \tag{2.37}$$

was nach Grenzübergang gleichbedeutend ist mit $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{0}$. In der klassischen Balkentheorie werden Schubstarrheit und Undehnbarkeit angenommen, dann gilt die Zwangsbedingung $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{0}$ für jede Deformation und die Anzahl unabhängiger Lagekoordinaten reduziert sich um drei. Es wird

hier ausschließlich mit schubstarren Balken gearbeitet und mit Ausnahme des Kapitels 6 auch Undehnbarkeit vorausgesetzt. Für die Anwendung des Ritz'schen Verfahrens mit globalen Ansätzen führt die Zwangsbedingung der Undehnbarkeit leicht zu Konvergenzproblemen, weil nur solche Näherungslösungen zugelassen werden, die dieser kinematischen Restriktion nicht widersprechen. Eine de facto Undehnbarkeit lässt sich dann immer noch mit Penalty-Methoden realisieren.[2] Für einen schubstarren aber dehnbaren Balken verschwinden lediglich die Komponenten $\boldsymbol{\Gamma}_\perp$ in der Querschnittsebene und es gilt

$$\boldsymbol{\Gamma}_\perp = \mathbf{0} \qquad \Gamma_t = \varepsilon = \left(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{P} \cdot \overset{0}{\boldsymbol{r}}{}'\right) \cdot \boldsymbol{t} = |\boldsymbol{r}'| - 1 \tag{2.38}$$

mit der Längsdehnung ε. Wie an der letzten Umformung $\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{t} = |\boldsymbol{r}'|$ zu erkennen ist, wird durch die Bedingung der Schubstarrheit $\boldsymbol{\Gamma}_\perp = \mathbf{0}$ die Kongruenz von Querschnittsnormalenrichtung und Tangentenrichtung an die Balkenachse erzwungen. Diese Restriktion reduziert die Anzahl erforderlicher Lagekoordinaten um zwei und kann durch geschickte Parametrisierung des Tensors $\boldsymbol{P}$ direkt in die Kinematik der geometrisch nichtlinearen Theorie eingebunden werden. Als Konsequenz erübrigt sich die explizite Verwendung der Euler-Winkel χ_i zur Beschreibung der Rotationen. Genaueres zur Implementierung der Zwangsbedingung der Schubstarrheit ist Abschnitt 6.1 zu entnehmen.

Zur Konstruktion unabhängig variierbarer Verzerrungsmaße werden nun die bisher präsentierten Gleichungen der Balkenkinematik geeignet kombiniert. Aus diesen Umformungen gehen die zwei nach Clebsch benannten Formeln zur Substitution der abhängigen Variationen in (2.34) hervor. Die folgenden Rechnungen gelten allgemein auch für schubweiche Balken. Die Variation $\delta\boldsymbol{\Gamma}$ aus (2.36) unter Berücksichtigung von (2.26) ergibt

$$\delta\boldsymbol{\Gamma} = \delta\boldsymbol{r}' - \delta\boldsymbol{P} \cdot \overset{0}{\boldsymbol{r}}{}' = \delta\boldsymbol{r}' - \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{P} \cdot \overset{0}{\boldsymbol{r}}{}' \,. \tag{2.39}$$

Das letzte innere Produkt lässt sich mit der Definition von $\boldsymbol{\Gamma}$ (2.36) ersetzen und die erste Formel von Clebsch lautet

$$\delta\boldsymbol{\Gamma} - \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Gamma} = \delta\boldsymbol{r}' - \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}' \,. \tag{2.40}$$

Für die Herleitung der zweiten Formel wird $\delta\boldsymbol{P}'$ mit (2.26) und (2.35) zweimal gebildet

$$(\delta\boldsymbol{P})' = \delta\boldsymbol{\theta}' \times \boldsymbol{P} + \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{P}' = \delta\boldsymbol{\theta}' \times \boldsymbol{P} + \delta\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{P}) \tag{2.41a}$$

$$\delta\left(\boldsymbol{P}'\right) = \delta\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{P} + \boldsymbol{\kappa} \times \delta\boldsymbol{P} = \delta\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{P} + \boldsymbol{\kappa} \times (\delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{P}) \,. \tag{2.41b}$$

Variation und Ableitung dürfen vertauscht werden, weil s_1 die Bogenkoordinate der Referenzkon-

[2] Die Dehnsteifigkeit des Balkens ist ohnehin so groß, dass die Längsdehnungen stets sehr klein bleiben. Die Größe der Längsverzerrungen einer Ritz-Lösung kann daher zur Überprüfung der physikalischen Sinnhaftigkeit der Resultate herangezogen werden, vgl. Abbildung 6.2.

figuration ist. Man ersetzt nun den Rotationstensor durch die Dyade $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{e}_i \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i$ und expandiert die doppelten Kreuzprodukte mithilfe der Identität von Graßmann[3]

$$\delta\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{e}_i) \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i = (\boldsymbol{\kappa}\, \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_i\, \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\kappa}) \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i \tag{2.42a}$$

$$\boldsymbol{\kappa} \times (\delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{e}_i) \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i = (\delta\boldsymbol{\theta}\, \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_i\, \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\kappa}) \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i\,. \tag{2.42b}$$

Das Gleichsetzen der beiden Ausdrücke (2.41) liefert unter Berücksichtigung von

$$(\delta\boldsymbol{\theta}\, \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{\kappa}\, \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{e}_i) \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i = (\delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\kappa}) \times \boldsymbol{P} \tag{2.43}$$

nach Herausheben des Kreuzprodukts mit $\boldsymbol{P}$ die zweite Formel von Clebsch

$$\delta\boldsymbol{\theta}' = \delta\boldsymbol{\kappa} - \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\kappa}\,. \tag{2.44}$$

Die Variationen der Komponenten der Vektoren $\boldsymbol{\Gamma}$ und $\boldsymbol{\kappa}$ in der materiellen Basis können mit (2.27) geschrieben werden als

$$\delta\Gamma_i\, \boldsymbol{e}_i = \delta\boldsymbol{\Gamma} - \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Gamma} \tag{2.45a}$$

$$\delta\kappa_i\, \boldsymbol{e}_i = \delta\boldsymbol{\kappa} - \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\kappa}\,, \tag{2.45b}$$

womit sich die Clebsch-Formeln (2.40) und (2.44) vereinfachen zu

$$\delta\Gamma_i\, \boldsymbol{e}_i = \delta\boldsymbol{r}' - \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}' \tag{2.46a}$$

$$\delta\kappa_i\, \boldsymbol{e}_i = \delta\boldsymbol{\theta}'\,. \tag{2.46b}$$

Damit entsprechen die Variationen der Komponenten des Krümmungsvektors jenen des abgeleiteten Vektors der kleinen Rotationen. Mit der Komponente in Richtung der Querschnittsnormale $\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{t}$, fortan als κ_t benannt, wird in Analogie zur freien Torsion eine Zwangsbedingung für die Verwölbung ψ eingeführt

$$\psi = \kappa_t \tag{2.47}$$

und für die Variation $\delta\psi$ gilt damit wegen (2.46b) auch

$$\delta\psi = \delta\kappa_t = \delta\boldsymbol{\theta}' \cdot \boldsymbol{t}\,. \tag{2.48}$$

Die Variationen in (2.34) können nun ersetzt werden und bei Spezialisierung auf schubstarre Balken folgt

$$\delta U = M_i\, \delta\kappa_i + Q_t\, \delta\varepsilon + \left(B' + b\right)\, \delta\kappa_t + B\, \delta\kappa_t'\,. \tag{2.49}$$

[3] Für drei Vektoren $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ gilt: $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

Hierin ist $Q_t = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{t}$ die Normalkraft und die Variationen $\delta\kappa_t$ und $\delta\kappa_t'$ sind voneinander unabhängig, weil es sich um eine lokale Beziehung handelt. Die Verzerrungsenergiedichte ist damit allgemein als Funktion $U(\varepsilon, \kappa_i, \kappa_t')$ festgelegt. Sie wird gemäß [6] in Übereinstimmung mit der linearen Theorie gewählt und mit den für nichtlineare Analysen erforderlichen, kubischen Kopplungstermen erweitert

$$U = U^{(2)} + U^{(3)} \tag{2.50a}$$

$$U^{(2)} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\kappa} + \frac{1}{2}\,E\,A\,\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\,E\,J_0\,\kappa_t'^2 - E\,\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\kappa}\,\kappa_t' \tag{2.50b}$$

$$U^{(3)} = \frac{1}{2}\,\left(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\kappa} + \varepsilon\,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{a}_\perp)\right)\,\kappa_t^2 = \frac{1}{2}\,\tilde{a}_t\,\kappa_t^2\,. \tag{2.50c}$$

Der Koeffizient $\tilde{a}_t$ in (2.50c) ist eine lineare Funktion in κ_i und ε. Er formt mit κ_t^2 den kubischen Anteil der Verzerrungsenergiedichte und hat die Bedeutung einer Korrektur der aktuellen Torsionssteifigkeit zufolge des Normalspannungszustands im Querschnitt. Abschnitt 2.2.5 widmet sich der Herkunft dieses Koeffizienten, eine alternative Ausformulierung von $\tilde{a}_t$ in den Schnittgrößen ist (2.68) oder (2.79b) zu entnehmen. Die Schnittgrößen folgen aus der partiellen Ableitung der Verzerrungsenergiedichte nach den Verzerrungsmaßen

$$\boldsymbol{M} + (B' + b)\,\boldsymbol{t} = \boldsymbol{e}_i\,\frac{\partial U}{\partial \kappa_i} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\kappa} - E\,\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\beta}\,\kappa_t' + \frac{1}{2}\,\frac{\partial \tilde{a}_t}{\partial \kappa_i}\,\boldsymbol{e}_i\,\kappa_t^2 + \tilde{a}_t\,\kappa_t\,\boldsymbol{t} \tag{2.51a}$$

$$Q_t = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} = E\,A\,\varepsilon + \frac{1}{2}\,\frac{\partial \tilde{a}_t}{\partial \varepsilon}\,\kappa_t^2 \tag{2.51b}$$

$$B = \frac{\partial U}{\partial \kappa_t'} = E\,J_0\,\kappa_t' - E\,\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\kappa}\,. \tag{2.51c}$$

Im Falle eines undehnbaren Balkens entfällt hier die Materialgleichung für die Normalkraft Q_t und an ihre Stelle tritt die kinematische Beziehung (2.38) für $\varepsilon = 0$.

2.2.4 Geometrisch linearisierte Theorie und inkrementelle Gleichungen

Dieser Abschnitt ist der Vereinfachung der kinematischen Beziehungen durch geometrische Linearisierung sowie der Herleitung der beschreibenden Gleichungen der inkrementellen Theorie gewidmet. Letztere wird zur Stabilitätsanalyse in Kapitel 5 herangezogen und dient als Ausgangspunkt für die Berechnung kleiner Verformungen des Balkens in Kapitel 4.

Im Gegensatz zur virtuellen Auslenkung des Systems, dargestellt durch δ, werden hier kleine, tatsächliche Änderungen (Inkremente) der relevanten Größen betrachtet. Die Inkremente werden mit einem Punkt über dem Symbol identifiziert, während nicht gekennzeichnete Größen den Wert der Größe im ursprünglichen Gleichgewichtszustand wiedergeben, d.h.: Sei y der Gesamtwert einer Größe, dann gilt die additive Aufspaltung $y = \bar{y} + y^\bullet$, wobei nach erfolgter Substitution

der Querbalken wieder weggelassen wird. Gemäß dieser Vorschrift werden alle Größen in den nichtlinearen Gleichungen transformiert. Da durch die nicht inkrementellen Größen ein Gleichgewichtszustand gegeben ist, vereinfachen sich die Gleichungen wesentlich. Die Linearisierung erfolgt anschließend durch Streichung aller Terme von höherer als erster Ordnung in den inkrementellen Größen. Noch einfacher gestaltet sich dieser Schritt durch Anwendung des Inkrement-Punktes als Ableitungsoperator, der sich wie das Variations-δ handhaben lässt, siehe [6]. Ableitung nach der Bogenlängenkoordinate der Referenzkonfiguration s_1 und Inkrementierung dürfen vertauscht werden. Nachdem Inkrement und Variation formal gleich verwendet werden dürfen, sind viele der bisher hergeleiteten Formeln weiter anwendbar, wenn das Variations-δ durch den Inkrement-Punkt ersetzt wird.

In der hier genutzten sog. Theorie zweiter Ordnung wird das Stabilitätsverhalten des um einen vorgespannten, näherungsweise undeformierten Gleichgewichtszustand linearisierten Systems untersucht. Die beschreibenden Gleichungen dieser Theorie stellen eine Vereinfachung der in [6] präsentierten inkrementellen Formeln dar, in denen große Vordeformationen berücksichtigt werden und deren Behandlung i.A. schwieriger ist. In der folgenden Herleitung zur Theorie zweiter Ordnung werden hingegen geometrisch nichtlineare Vordeformationen konsequent ignoriert. Zusätzlich wird sich der kreisförmig gekrümmte, symmetrische Träger vor Knicken lediglich in seiner Symmetrieebene deformieren und der Vordeformationszustand hat daher eine besonders einfache Gestalt. Bei Vernachlässigung nichtlinearer Vorverformungen dürfen die kinematischen Größen des Gleichgewichtszustands vor Stabilitätsverlust näherungsweise durch jene des Referenzzustands ersetzt werden

$$\boldsymbol{P} \approx \mathbb{1} \qquad \boldsymbol{e}_i \approx \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i \qquad \boldsymbol{r}' \approx \overset{0}{\boldsymbol{t}} \qquad \boldsymbol{t} \approx \overset{0}{\boldsymbol{t}} \qquad \boldsymbol{x} \approx \overset{0}{\boldsymbol{x}} \,. \tag{2.52}$$

Damit lässt sich die Balkenkinematik wesentlich vereinfachen: In Analogie zu (2.24) ist auch der Tensor $\left(\boldsymbol{P}^{\bullet} \cdot \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right)$ schiefsymmetrisch und mit dem zugeordneten Vektor $\boldsymbol{\theta}$ gilt

$$\boldsymbol{P}^{\bullet} = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{P} \qquad \boldsymbol{e}_i^{\bullet} = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{e}_i \,. \tag{2.53}$$

Die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{\theta}$ dürfen hier als Lagekoordinaten verwendet werden, weil sie die kleinen Rotationen der materiellen Basis vollständig beschreiben. Die Formeln von Clebsch (2.46) gelten unverändert, wenn man die Variation durch das Inkrement ersetzt. Für einen schubstarren, undehnbaren Balken mit $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{0}$ folgt dann

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}' \tag{2.54a}$$

$$\kappa_i^{\bullet}\, \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{\theta}' \,, \tag{2.54b}$$

worin $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}^{\bullet}$ kleine Verschiebungen der Balkenachse aus der Lage $\boldsymbol{r}$ bezeichnet. Die erste Gleichung verknüpft die Verschiebungen der Balkenachse direkt mit den kleinen Rotationen der materiellen

Basis und die Anzahl unabhängiger Lagekoordinaten reduziert sich um drei. Mit der zweiten Gleichung (2.54b) erhält die kinematische Restriktion (2.47) für die Verwölbung ψ die klassische, aus der Wölbkrafttorsion des geraden Balkens bekannte Form

$$\psi^\bullet = \theta_t' \,. \tag{2.55}$$

Die Verwölbung ist proportional zur Verdrillung θ_t' des Querschnitts, was exakt nur für die reine Torsion gilt. Für die Wölbkrafttorsion des geraden Trägers ist (2.55) asymptotisch korrekt, siehe [6] und bedeutet die Vernachlässigung der aus den Wölbschubspannungen resultierenden Schubverzerrungen, siehe [2]. Die Gleichgewichtsbedingungen (2.33) können doppelt angeschrieben werden – einmal für den Referenzzustand zur Berechnung der Schnittgrößen des Vorspannungszustands und einmal für den inkrementell ausgelenkten Zustand

$$\boldsymbol{Q}' + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{Q}^{\bullet\prime} + \boldsymbol{q}^\bullet = \boldsymbol{0} \tag{2.56a}$$

$$\boldsymbol{M}' + \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{M}^{\bullet\prime} + \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{Q}^\bullet + \boldsymbol{m}^\bullet = \boldsymbol{0} \,. \tag{2.56b}$$

Gemeinsam stellen diese Formeln in Analogie zum Problem des Euler-Knickstabes das mechanische Gleichgewicht am geringfügig ausgelenkten Balken sicher. Ausgangspunkt für die vereinfachten Konstitutivgleichungen sind die allgemeinen Formeln (2.51) der nichtlinearen Theorie, spezialisiert für den Fall ohne verteilte Bimomente $b = 0$. Für den schubstarren, undehnbaren Balken ist die Normalkraft allein aus den Gleichgewichtsbedingungen zu bestimmen und es verbleiben nur die Beziehungen für $\boldsymbol{M}$ und B, die hier nochmals angeschrieben werden

$$\boldsymbol{M} + B' \boldsymbol{t} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\kappa} - E \, \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta} \, \kappa_t' + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{a}_t}{\partial \kappa_k} \boldsymbol{e}_k \, \kappa_t^2 + \tilde{a}_t \, \kappa_t \, \boldsymbol{t} \tag{2.57a}$$

$$B = E \, J_0 \, \kappa_t' - E \, \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\kappa} \,. \tag{2.57b}$$

Vor Eintreten des Stabilitätsverlusts wird der betrachtete Träger eine ebene, torsions- und wölbfreie Biegung erfahren. Für die Verzerrungen im vordeformierten Gleichgewicht bedeutet dies

$$\kappa_3 \neq 0 \qquad \kappa_1 = 0 \qquad \psi = \kappa_t = 0 \qquad \kappa_t' = 0 \,. \tag{2.58}$$

Damit erhalten die Schnittgrößen dieses Zustands mit $\boldsymbol{\beta} = \beta \, \boldsymbol{e}_3$ aus (2.18) die besonders einfache Form

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\kappa} = a_{33} \, \kappa_3 \, \boldsymbol{e}_3 \qquad B = 0 \,. \tag{2.59}$$

Um die Konstitutivgleichungen der Größen $\boldsymbol{M}^\bullet$ und $B^\bullet$ herzuleiten, müssen die Inkremente der vollen Gleichungen (2.57) gebildet werden. Hierzu betrachtet man zunächst den Term $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\kappa}$ etwas genauer: Die Komponentendarstellung des Steifigkeitstensors ist $\boldsymbol{a} = a_{ij} \, \boldsymbol{e}_i \, \boldsymbol{e}_j$ mit konstanten Kom-

ponenten a_{ij} und jene des Krümmungsvektors lautet $\kappa = \kappa_i \, \boldsymbol{e}_i$. Mit (2.53) für die Transformation der materiellen Basis und (2.54b) findet man

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\kappa})^{\bullet} = (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\theta}' + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\kappa}) \; , \tag{2.60}$$

woraus wegen $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\kappa})$ unmittelbar folgt

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\kappa})^{\bullet} = \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\kappa}) + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\theta}' \, . \tag{2.61}$$

Des Weiteren transformieren sich alle Vektoren, deren Komponenten in der materiellen Basis konstant sind, wie die Basisvektoren selbst

$$\boldsymbol{t}^{\bullet} = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{t} \qquad (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta})^{\bullet} = \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta}) \; . \tag{2.62}$$

Das Inkrement der ersten Konstitutivgleichung (2.57a) lautet nun

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}^{\bullet} + B^{\bullet\prime} \, \boldsymbol{t} = \boldsymbol{\theta} \times \Big[- (B' + b) \; \boldsymbol{t} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\kappa} - E \, \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta} \, \kappa_t' + \left(\frac{1}{2} \, \frac{\partial \tilde{a}_t}{\partial \kappa_k} \, \boldsymbol{e}_k \, \kappa_t^2 + \tilde{a}_t \, \kappa_t \, \boldsymbol{t} \right) \Big] + \\ + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\theta}' - E \, \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta} \, \kappa_t^{\bullet\prime} + \tilde{a}_t \, \kappa_t^{\bullet} \, \boldsymbol{t} + \left(\frac{1}{2} \, \frac{\partial \tilde{a}_t}{\partial \kappa_k} \, \kappa_t^2 \right)^{\bullet} \boldsymbol{e}_k + \tilde{a}_t^{\bullet} \, \kappa_t \, \boldsymbol{t} \, , \end{aligned} \tag{2.63}$$

was sich nach Einsetzen für den Vordeformationszustand gemäß (2.58) und Substitution für das Moment mit (2.59) vereinfacht zu

$$\boldsymbol{M}^{\bullet} + B^{\bullet\prime} \, \boldsymbol{t} = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{M} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\theta}' - E \, \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta} \, \kappa_t^{\bullet\prime} + \tilde{a}_t \, \kappa_t^{\bullet} \, \boldsymbol{t} \, . \tag{2.64}$$

Wie in (2.59) verschwinden auch hier alle in den Größen des Vordeformationszustands nichtlinearen Terme bereits wegen (2.58), eine weitere Linearisierung erübrigt sich daher. Für das Inkrement des Bimoments bildet man zunächst mithilfe von (2.62) und (2.54b) die Umformung

$$((\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\kappa})^{\bullet} = (\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta})) \cdot \boldsymbol{\kappa} + (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta}) \cdot (\boldsymbol{\theta}' + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\kappa}) = (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\theta}' \, , \tag{2.65}$$

womit für $B^{\bullet}$ aus (2.57) folgt

$$B^{\bullet} = E \, J_0 \, \kappa_t^{\bullet\prime} - E \; (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\theta}' \, . \tag{2.66}$$

Die allgemeinen Konstitutivgleichungen (2.57) vereinfachen sich daher im Rahmen der linearisierten, inkrementellen Theorie zweiter Ordnung bei Einschränkung auf ebene Vordeformationen zu

$$\boldsymbol{M}^{\bullet} + B^{\bullet\prime} \, \boldsymbol{t} = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{M} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\theta}' - E \, \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta} \, \kappa_t^{\bullet\prime} + \tilde{a}_t \, \kappa_t^{\bullet} \, \boldsymbol{t} \tag{2.67a}$$

$$B^{\bullet} = E \, J_0 \, \kappa_t^{\bullet\prime} - E \; (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\theta}' \, . \tag{2.67b}$$

Um sich die explizite Berechnung der linearen Vordeformationen zu ersparen, erfolgt die Darstellung des Korrekturfaktors der Torsionssteifigkeit $\tilde{a}_t$ konsequenterweise in den Schnittgrößen des vorgespannten Zustands

$$\tilde{a}_t = \left(\boldsymbol{J}^{-1} \cdot (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{M})\right) \cdot \boldsymbol{\gamma} + \frac{Q_t}{A} \operatorname{tr}(\boldsymbol{J}) \tag{2.68}$$

mit der Pseudo-Inversen des Trägheitstensors $\boldsymbol{J}^{-1}$ und dem Vektor der Flächenmomente dritter Ordnung $\boldsymbol{\gamma}$ gegeben durch (2.20a). Die Herleitung des Korrekturterms mittels schalentheoretischer Überlegungen ist dem folgenden Abschnitt 2.2.5 zu entnehmen.

In Kapitel 5 wird ausgehend von obigen Gleichungen das Stabilitätsverhalten des Trägers untersucht und mit Ergebnissen der Schalen-FE-Rechnung verglichen. Um die Bewegung des Balkens als Schale zu rekonstruieren, kann der kleine Verschiebungszuwachs $\boldsymbol{R}^{\bullet}(s_1, s_2)$ über das Inkrement von (2.28) gebildet werden. Für den Vektor $\boldsymbol{x}$ und den Tangentenvektor $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{e}_2$ gilt mit (2.53) zunächst

$$\boldsymbol{x}^{\bullet} = \overset{0}{x}_i \boldsymbol{e}_i^{\bullet} = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{t}^{\bullet} = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{t}\,. \tag{2.69}$$

Daraus folgt bei Wölbfreiheit im Ausgangszustand $\psi = 0$ gemäß (2.58) mit der Substitution (2.55) schließlich

$$\boldsymbol{R}^{\bullet}(s_1, s_2) = \boldsymbol{u}(s_1) + \boldsymbol{\theta}(s_1) \times \boldsymbol{x}(s_2) + w(s_2)\, \theta_t'(s_1)\, \boldsymbol{t}(s_1)\,. \tag{2.70}$$

2.2.5 Korrektur der Torsionssteifigkeit des Trägers

In diesem Abschnitt wird näher auf den bereits angesprochenen Kopplungseffekt zwischen Torsion und Normalspannungszustand im Querschnitt eingegangen. Der Inhalt ist [6] entnommen, wobei auf eine vollständige Wiedergabe der darin präsentierten Herleitungen verzichtet wird. Es wird lediglich der grundsätzliche Ablauf der Analyse nachvollzogen, die auf unterschiedliche, äquivalente Formulierungen des Korrekturterms $\tilde{a}_t$ führt.

Es wird ein gerader, in seiner Referenzlage vorgespannter Träger mit dünnwandigem, offenem Querschnitt als Schale betrachtet. Die Koordinate in Längsrichtung des Trägers ist s_1 und s_2 bezeichnet wieder die Bogenlänge im Querschnitt. Der Träger sei durch Biegemomente und eine Normalkraft belastet. Daraus ergebe sich ein einachsiger, linearer Spannungszustand im Querschnitt mit dem Spannungsvektor

$$\boldsymbol{\sigma}(s_1) = (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{x}(s_2) + \bar{\sigma})\, \boldsymbol{t} \tag{2.71}$$

in axialer Richtung $\boldsymbol{t}$. Der Vektor $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ und die skalare Größe $\bar{\sigma}$ legen den Betrag der Normalspannungen fest. Der Vektor $\boldsymbol{x}$ liegt in der Querschnittsebene und weist von der Balkenachse zu den Punkten der Querschnittsmittellinie entlang s_2. Der Spannungszustand ist unabhängig von der Dickenkoordinate und die resultierende Schalenschnittgröße erhält man daher aus (2.71) durch

einfache Multiplikation mit der Wandstärke h. Für den näherungsweise undeformierten Träger ist der einachsige Spannungszustand (2.71) im Rahmen der Schalentheorie statisch zulässig. Mittels Integration über den Querschnitt werden die zu (2.71) statisch äquivalenten Schnittgrößen der Balkentheorie berechnet

$$\boldsymbol{Q} = h \int_S \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}s_2 \qquad \boldsymbol{M} = h \int_S \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}s_2 \, . \tag{2.72}$$

Die Integration erfolgt nach Substitution von $\boldsymbol{\sigma}$ aus (2.71), wobei Integrale der Form $\int_S \boldsymbol{x} \, \mathrm{d}s_2$ verschwinden, weil die Achse durch die Schwerpunkte der Querschnitte gelegt wurde. Bei Berücksichtigung der Definition (2.15) für den ebenen Tensor der Flächenträgheitsmomente können die Spannungskoeffizienten nach kurzer Rechnung in den Schnittgrößen der Balkentheorie ausgedrückt werden

$$\bar{\sigma} = \frac{\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{t}}{A} = \frac{Q_t}{A} \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{J}^{-1} \cdot (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{M}) \, . \tag{2.73}$$

Unter der Voraussetzung kleiner Deformationen dürfen diese Koeffizienten auch mit den Verzerrungsgrößen der Balkentheorie verknüpft werden. Mit der Definition des Steifigkeitstensors $\boldsymbol{a}$ gemäß (2.17) können die klassischen, entkoppelten Konstitutivbeziehungen für Biegung und Zug/Druck bei torsionsfreier Verformung ($\kappa_t = \kappa_t' = 0$) angeschrieben werden, vgl. (2.51),

$$\varepsilon = \frac{Q_t}{E\,A} \qquad \boldsymbol{\kappa} = -\frac{\boldsymbol{t}}{E} \times \left(\boldsymbol{J}^{-1} \cdot (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{M}) \right) \, , \tag{2.74}$$

woraus im Vergleich mit (2.73) für die Koeffizienten des Spannungszustands folgt

$$\bar{\sigma} = E\,\varepsilon \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = E \, (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\kappa}) \, . \tag{2.75}$$

Um die Kopplung von Normalspannungen mit der Torsion des Trägers zu untersuchen, wird nun die vorgespannte, undeformierte Schale einer konstanten Drillung $\theta_t' = \text{konst.}$ unterworfen. Es gilt dann für kleine Deformationen in Analogie zu (2.54b)

$$\theta_t' = \kappa_t = \text{konst.} \qquad \theta_t = \kappa_t \, s_1 \tag{2.76}$$

bei Einspannung des Trägers am linken Ende $s_1 = 0$. Die aktuelle Konfiguration der Schale wird über die lineare Balkenkinematik wie in (2.70) vorgeschrieben

$$\boldsymbol{R} = \overset{0}{\boldsymbol{R}} + s_1 \, \kappa_t \, \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{x} \, (s_2) + \kappa_t \, w \, (s_2) \, \boldsymbol{t} \, . \tag{2.77}$$

Dadurch ist eine direkte Verknüpfung von Schalen- und Balkenverzerrungen unmittelbar gegeben. Die Verzerrungsenergie der nichtlinearen Schalentheorie entspricht einer Überschiebung des gesamten Spannungszustandes (Vorspannungen und Spannungen zufolge Torsion) mit dem aus der

vorgeschriebenen Kinematik resultierenden Green-Verzerrungstensor. Nach Integration über die Querschnittsmittellinie ergibt sich daraus die äquivalente Verzerrungsenergiedichte U des Balkens, die, wie die Spannungen selbst, in zwei Teile zerfällt

$$U = \frac{1}{2}\, a_t\, \kappa_t^2 + \frac{1}{2}\, \tilde{a}_t\, \kappa_t^2 \,. \tag{2.78}$$

Der Koeffizient $\tilde{a}_t$ hat die Bedeutung einer Korrektur der Torsionssteifigkeit des Balkens und lässt sich mit (2.73) bzw. (2.74) darstellen als

$$\tilde{a}_t = (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \bar{\sigma}\, \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{J})) = \tag{2.79a}$$

$$= \left(\boldsymbol{J}^{-1} \cdot (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{M})\right) \cdot \boldsymbol{\gamma} + \frac{Q_t}{A}\, \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{J}) = \tag{2.79b}$$

$$= \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\kappa} + \varepsilon\, \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{a}_\perp) \,. \tag{2.79c}$$

Die neuen Größen $\boldsymbol{\gamma}$ und $\boldsymbol{\zeta}$ sind querschnittsspezifisch und wurden bereits in (2.20) definiert. Eine von der obigen Annahme der Schalenkinematik bei Torsion (2.77) freie Herleitung des Korrekturterms findet sich in [6]. Die dort angeführten Beispielrechnungen am geraden Träger mit halbkreisförmigem Querschnitt unterstreichen die Bedeutung des Korrekturterms $\tilde{a}_t$ insbesondere bei Biegedrillknicken der Struktur.

2.2.6 Formänderungsgleichungen für den schubstarren, dehnbaren Balken

In diesem Abschnitt wird erklärt, wie die Verzerrungsmaße $\{\varepsilon,\, \kappa_i\}$ in der nichtlinearen Theorie aus einer bekannten Konfiguration des Balkens berechnet werden können. Der Inhalt ist wieder [6] entnommen. Zur Berechnung der Dehnung der Balkenachse in der schubstarren Theorie ist die Kenntnis der aktuellen Lage $\boldsymbol{r} = \overset{0}{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{u}$ ausreichend und es gilt, vgl. (2.38),

$$\varepsilon = |\boldsymbol{r}'| - 1 \,. \tag{2.80}$$

Die Verzerrungsmaße κ_i für Biegung und Torsion sind mit dem Rotationstensor $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{e}_i \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i$ gemäß (2.35) verknüpft

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{P} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{e}_i' \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i + \boldsymbol{e}_i \overset{0\prime}{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{e}_i \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i \,. \tag{2.81}$$

Die Extraktion der Verzerrungskomponenten κ_i aus diesem Ausdruck erfolgt mithilfe der beiden Krümmungsvektoren in der undeformierten bzw. deformierten Konfiguration

$$\overset{0}{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{2}\, \overset{0}{\boldsymbol{e}}_j \times \overset{0\prime}{\boldsymbol{e}}_j \qquad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_j' \,. \tag{2.82}$$

Diese beiden Größen beschreiben die Veränderung der materiellen Basis entlang der Balkenachse in beiden Konfigurationen. Das Kreuzprodukt von $\boldsymbol{\Omega}$ mit einem Vektor der materiellen Basis $\boldsymbol{e}_j$ liefert unter Zuhilfenahme der Vektoridentität von Graßmann und der Produktregel der Differentiation

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e}_i &= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}'_j\right) \times \boldsymbol{e}_i = \\ &= \frac{1}{2}\left(\delta_{ij}\,\boldsymbol{e}'_j - \boldsymbol{e}_j\left(\boldsymbol{e}'_j \cdot \boldsymbol{e}_i\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{e}'_i - \boldsymbol{e}_j\left(\cancel{(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_i)'} - \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_i\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{e}'_i + \mathbb{1} \cdot \boldsymbol{e}'_i\right) = \boldsymbol{e}'_i\,. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Eine analoge Formel folgt für $\overset{0}{\boldsymbol{\Omega}}$ und zusammenfassend gilt

$$\overset{0}{\boldsymbol{\Omega}} \times \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i = \overset{0}{\boldsymbol{e}}{}'_i \qquad \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}'_i\,. \tag{2.84}$$

Nun können die Ableitungen der Einheitsvektoren in (2.81) substituiert werden

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{e}_i\,\overset{0}{\boldsymbol{e}}_i + \boldsymbol{e}_i\,\overset{0}{\boldsymbol{\Omega}} \times \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{e}_i\,\overset{0}{\boldsymbol{e}}_i \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{P} - \boldsymbol{e}_i\overset{0}{\boldsymbol{e}}_i \times \overset{0}{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{P}\,. \tag{2.85}$$

Mithilfe der Vektoridentität $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{P}$ findet man

$$-\,\boldsymbol{e}_i\overset{0}{\boldsymbol{e}}_i \times \overset{0}{\boldsymbol{\Omega}} = -\boldsymbol{P} \cdot \overset{0}{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{P}\,, \tag{2.86}$$

woraus nach Substitution in (2.85) für den Vektor der Verzerrungen $\boldsymbol{\kappa}$ und seine Komponenten κ_i in der materiellen Basis der aktuellen Konfiguration folgt

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{P} \cdot \overset{0}{\boldsymbol{\Omega}} \qquad \kappa_i = \Omega_i - \overset{0}{\Omega}_i\,. \tag{2.87}$$

Die Verzerrungsmaße κ_i berechnen sich aus der Differenz der Komponenten der Krümmungsvektoren in den ihnen zugeordneten Konfigurationen, d.h.: Die $\overset{0}{\Omega}_i$ sind Komponenten von $\overset{0}{\boldsymbol{\Omega}}$ in der materiellen Basis der Referenzkonfiguration gemäß $\overset{0}{\Omega}_i = \overset{0}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i$, während die Ω_i zur aktuellen Konfiguration gehören.

3 Numerische Schalen-Berechnungen mit shellFE

Um die Qualität der mit der Balkentheorie ermittelten Ergebnisse beurteilen zu können, werden diese einem Vergleich mit Schalen-FE-Berechnungen unterzogen. Für diese FE-Kalkulationen wird das nicht kommerzielle, nichtlineare Schalen-FE-Programm shellFE verwendet. Die theoretischen Grundlagen zu den verwendeten Finiten-Elementen sind [6] zu entnehmen. In diesem Kapitel soll ein Überblick über Implementierung und Ablauf einer FE-Berechnung mit diesem Programm gegeben werden. Besonderes Augenmerk liegt auf der Erklärung der Modellerstellung und der Beschreibung jener Methoden, welche zur Berechnung konkreter Ergebnisse betreffend lineares Deformationsverhalten, kritische Last und Nachbeulverhalten unter Berücksichtigung der beschränkten Möglichkeiten des Solvers angewendet wurden.

Der FE-Solver shellFE benötigt Input-Files im .xml-Format, das Postprocessing funktioniert auf der Basis von Textfiles. Aus diesen Output-Files können etwa Knotenpunktsverschiebungen und Reaktionskräfte für einzelne Inkremente ausgelesen werden. Das Präprocessing geschieht am einfachsten mit der Software Mathematica, da für diese, die erforderlichen Routinen zur Übersetzung einzelner Ausdrücke in das .xml-Format des Input Files bereits existieren. Die Aufgabe des Benutzers beschränkt sich dann darauf, die erforderlichen Teile eines FE-Modells in Mathematica korrekt zu beschreiben. Konkret wurde zur Ausformulierung des FE-Modells für den gekrümmten Träger ein bestehendes Mathematica-File adaptiert.

3.1 Netzerstellung für Rechnungen mit shellFE

Die Netzgenerierung ist in zwei Schritte gegliedert: die Elementdefinition und die Elementknotendefinition. Das Programm shellFE verwendet ausschließlich ein Vierknoten-Struktur-Schalenelement mit 48 Freiheitsgraden (12 pro Knoten). Die Lage eines Knotens wird beschrieben durch den Lagevektor im Raum $\boldsymbol{R}$, dessen erste Ableitungen nach den lokalen Elementskoordinaten $\boldsymbol{R}_1$ und $\boldsymbol{R}_2$ sowie die gemischte zweite Ableitung $\boldsymbol{R}_{12}$. Gepaart mit den Ansatzfunktionen beschreiben diese Lagekoordinaten die Deformation des Finiten-Elements. Diese Formulierung garantiert die erforderliche C^1-Stetigkeit der Fläche, solange die lokalen Koordinatenrichtungen an der Elementgrenze stetig übergehen. Das Element ist isoparametrisch, d.h.: Die Interpolation der

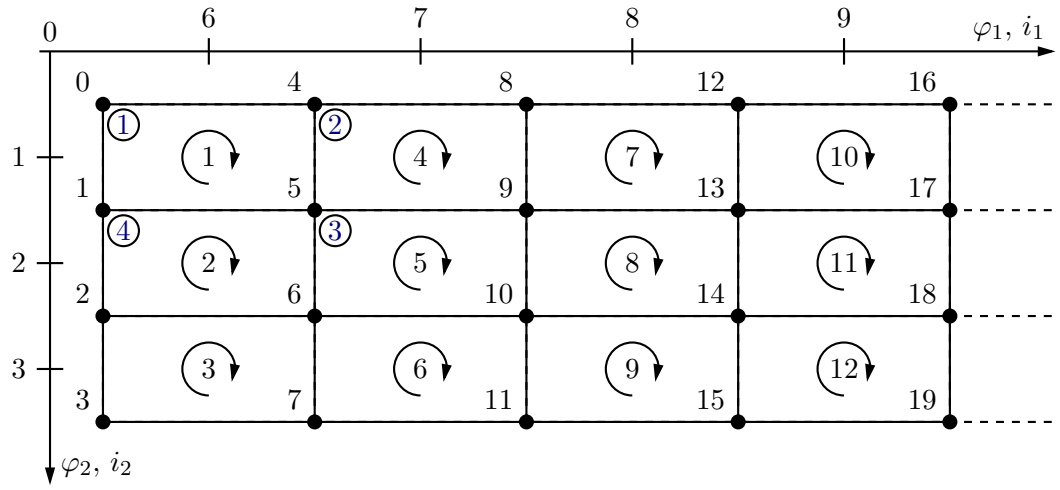


Abbildung 3.1: Eben ausgebreitetes FE-Netz mit Elements- und Knotenpunktsnummerierung

Elementgeometrie geschieht mit denselben Ansatzfunktionen. Für die Definition der Referenzlage müssen daher die den Freiheitsgraden entsprechenden Werte der Referenzgeometrie $\overset{0}{\boldsymbol{R}}$, $\overset{0}{\boldsymbol{R}}_1$, $\overset{0}{\boldsymbol{R}}_2$ und $\overset{0}{\boldsymbol{R}}_{12}$ für jeden Knoten ins Input-File eingetragen werden. Die lokale Knotennummerierung muss in einem geschlossenen Umlaufsinn erfolgen, der für alle Elemente beizubehalten ist, um den stetigen Übergang der lokalen Koordinaten an der Elementgrenze zu gewährleisten.

Die Elementdefinition erfüllt die Aufgabe der lokal $\leftrightarrow$ global Zuordnung der Freiheitsgrade. Zu diesem Zweck wird in einer Array-Struktur für jedes Element am Index des lokalen Knotens die entsprechende globale Knotennummer eingetragen, wobei die lokale Indizierung durch den vorab gewählten Umlaufsinn bestimmt ist. Abbildung 3.1 zeigt das gewählte Nummerierungs-Schema für das FE-Netz bei drei Elementen über den Umfang und die Darstellung der Fläche in der $\{\varphi_1, \varphi_2\}$-Ebene. Die lokale Knotennummerierung ist nur für das erste Element mit eingekreisten Ziffern eingetragen. Sie läuft jeweils im Uhrzeigersinn und beginnt stets beim oberen linken Knoten. Der Träger wird mit $N_1 \times N_2$ rechtwinkeligen Elementen diskretisiert und es kommen einheitlich Elemente mit konstanten Winkelteilungen b_1 und b_2 in den Koordinaten φ_1 bzw. φ_2 zum Einsatz. Jedes Element in diesem Rechteck-Schema kann mit zwei Indizes i_1 und i_2, die in Richtung φ_1 bzw. φ_2 laufen, identifiziert werden. Die globale Knotennummerierung beginnt bei 0 und verläuft in geraden Linien entlang der i_2-Richtung. Die Elementnummerierung beginnt bei 1 und erfolgt in derselben Weise.

In Abbildung 3.2 ist ein Element am Mantel des gekrümmten Trägers eingezeichnet. Durch den gewählten Umlaufsinn ist die Orientierung der lokalen Elementskoordinaten festgelegt. Der Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ folgt aus der mathematisch positiven Rotation der Einheitsvektoren $\boldsymbol{m}_1$ und $\boldsymbol{m}_2$, siehe Abbildung 2.2, zu den lokalen Koordinaten q_1 und q_2, die im Intervall $[-1, 1]$ laufen.

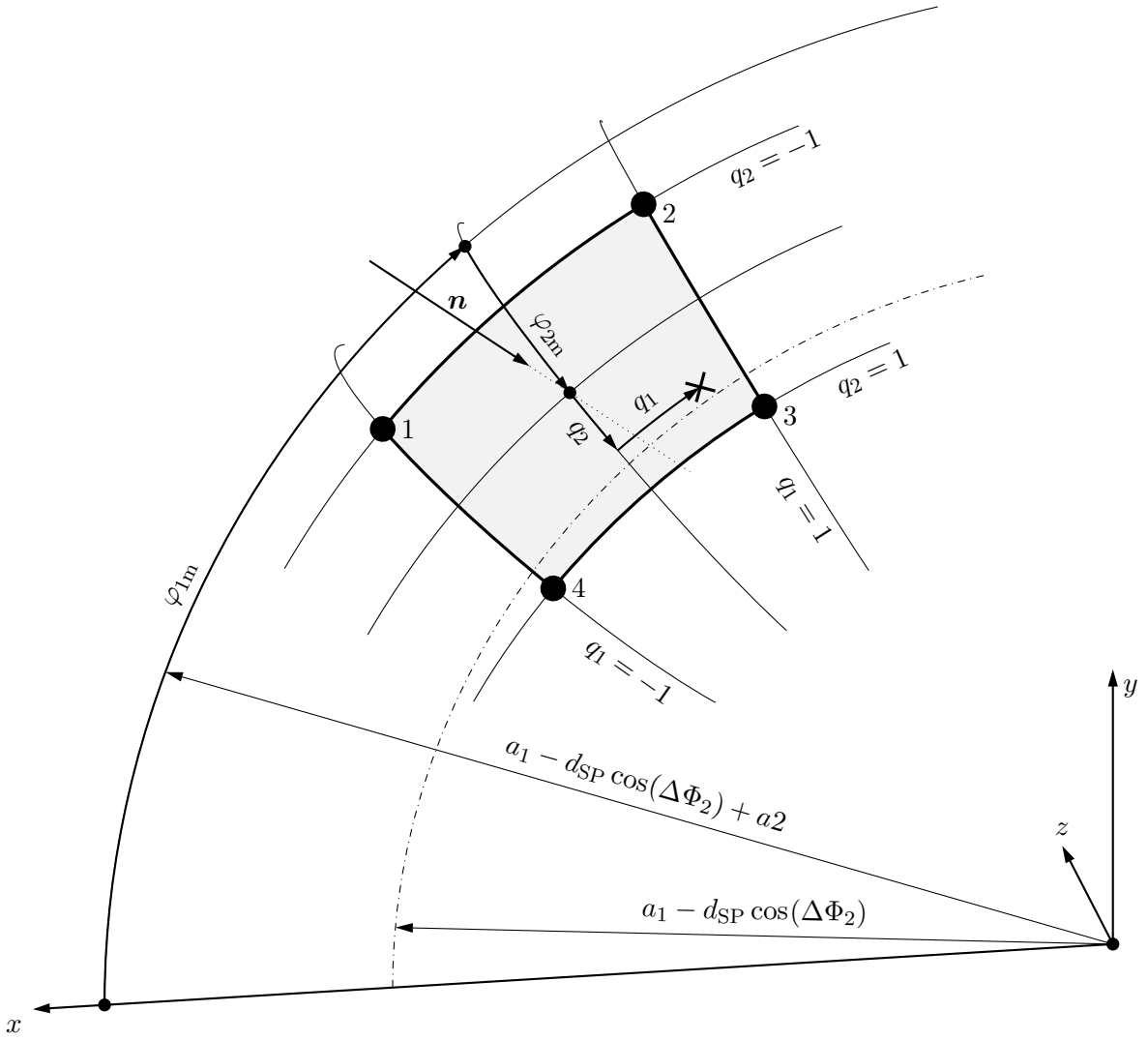


Abbildung 3.2: Schalenelement am Mantel des Trägers; Elements-Koordinaten und Parametrisierung des Lagevektors

Für die Definition der Referenzgeometrie muss zunächst der Lagevektor eines Knotenpunktes angegeben werden. Hierzu wird die Oberfläche des Trägers in den globalen Koordinaten φ_1 und φ_2 parametrisiert. Der Lagevektor der Referenzkonfiguration und seine Ableitungen dargestellt in der polaren Basis (2.3) lauten daher

$$\overset{0}{\boldsymbol{R}} = (a_1 - d_{\mathrm{SP}} \cos(\Delta\Phi_2) + a_2 \cos(\varphi_2))\ \boldsymbol{e}_r\,(\varphi_1) + (a_2 \sin(\varphi_2))\ \boldsymbol{e}_z \tag{3.1a}$$

$$\partial_{\varphi_1} \overset{0}{\boldsymbol{R}} = (a_1 - d_{\mathrm{SP}} \cos(\Delta\Phi_2) + a_2 \cos(\varphi_2))\ \boldsymbol{e}_\varphi\,(\varphi_1) \tag{3.1b}$$

$$\partial_{\varphi_2} \overset{0}{\boldsymbol{R}} = (-a_2 \sin(\varphi_2))\ \boldsymbol{e}_r\,(\varphi_1) + (a_2 \cos(\varphi_2))\ \boldsymbol{e}_z \tag{3.1c}$$

$$\partial_{\varphi_1}\partial_{\varphi_2} \overset{0}{\boldsymbol{R}} = (-a_2 \sin(\varphi_2))\ \boldsymbol{e}_\varphi\,(\varphi_1)\ . \tag{3.1d}$$

Nachdem jedes Element – im Winkelmaß ausgedrückt – b_1 lang und b_2 breit ist, folgen die Koordinaten eines Knotenpunktes mit Indizes $(i_1,\, i_2)$ gemäß Abbildung 3.1 zu

$$\varphi_1 = b_1\, i_1 \qquad \varphi_2 = \Delta\Phi_2 - \Phi_2 + b_2\, i_2\,, \tag{3.2}$$

wobei durch $\Delta\Phi_2 = \{0,\, \pi\}$ wieder zwischen den beiden Trägervarianten unterschieden wird. Für die partiellen Ableitungen des Lagevektors nach den lokalen Koordinaten beachtet man die Koordinatentransformation

$$\varphi_1 = \varphi_{1\mathrm{m}}\,(i_1,\, i_2) + \frac{b_1}{2}\, q_1 \qquad\qquad \partial_{q_1} = \frac{b_1}{2}\, \partial_{\varphi_1} \tag{3.3a}$$

$$\varphi_2 = \varphi_{2\mathrm{m}}\,(i_1,\, i_2) + \frac{b_2}{2}\, q_2 \qquad\qquad \partial_{q_2} = \frac{b_2}{2}\, \partial_{\varphi_2}\,. \tag{3.3b}$$

Dadurch wird der Ursprung des lokalen Koordinatensystems ins Zentrum des aktuellen Elements verschoben und eine den Vorgaben entsprechende Skalierung der Koordinaten vorgenommen. Die Koordinaten des Elementmittelpunktes folgen analog zu (3.2) aus der Doppelindizierung

$$\varphi_{1\mathrm{m}} = b_1 \left(i_1 + \frac{1}{2}\right) \qquad \varphi_{2\mathrm{m}} = \Delta\Phi_2 - \Phi_2 + b_2 \left(i_2 + \frac{1}{2}\right) \tag{3.4}$$

und sind damit unabhängig von den Laufkoordinaten, d.h.: Ihre partiellen Ableitungen verschwinden. Zur Definition der Referenzgeometrie eines Elements darf daher von der Darstellung des Lagevektors und seinen Ableitungen in den globalen Koordinaten gemäß (3.1) ausgegangen werden. Die Transformation der Ableitungen erfolgt dann durch einfache Skalierung mit den Koeffizienten aus (3.3) gemäß

$$\overset{0}{\boldsymbol{R}}_1 = \frac{b_1}{2}\, \partial_{\varphi_1} \overset{0}{\boldsymbol{R}} \qquad \overset{0}{\boldsymbol{R}}_2 = \frac{b_2}{2}\, \partial_{\varphi_2} \overset{0}{\boldsymbol{R}} \qquad \overset{0}{\boldsymbol{R}}_{12} = \frac{b_1\, b_2}{4}\, \partial_{\varphi_1}\partial_{\varphi_2} \overset{0}{\boldsymbol{R}}\,. \tag{3.5}$$

Bei der Definition der Knoten können diese auch gruppiert werden und in Node-Sets für das Postprocessing oder zu Verbindungslinien für die Festlegung von Randbedingungen sowie verteilten Belastungen zusammengefasst werden. Bringt man eine verteilte Belastung entlang einer solchen Knotenlinie auf, wird die Berechnung der konsistenten Knotenlasten vom Programm übernommen.

3.2 Lastschrittdefinition und Auswertung der Ergebnisse einer FE-Berechnung

In der Definition eines Lastschrittes werden das Belastungsinkrement und die Einstellungen des Solvers in diesem Schritt festgelegt. Aktuell sind in shellFE weder eine automatische Schrittweitensteuerung noch spezielle Verfahren zur Stabilitätsanalyse (begleitende Eigenwertanalyse) oder zur Verfolgung kritischer Nachbeulpfade (Bogenlängenverfahren) implementiert. Als iterativer Gleichungslöser stehen ein modifizierter oder ein reiner Newton-Raphson-Algorithmus zur Verfügung. Der Solver überprüft im Zuge der Gleichungslösung die Definitheit der Tangentensteifigkeitsmatrix in jedem Schritt. Nachdem im vorliegenden Fall der Stabilitätsverlust durch Divergenz untersucht wird, zeigt der Verlust der positiven Definitheit dieser Matrix einen kritischen Zustand an. Die Berechnung der Knicklast im FE-Modell gestaltet sich damit als iterativer Prozess, in dem mittels Verfeinerung der Inkrementierung im kritischen Bereich die Knicklast immer besser angenähert werden kann. Zweifelsfrei ist diese Vorgehensweise sehr zeitintensiv, weshalb darauf verzichtet wurde, die Qualität der FE-Diskretisierung anhand unterschiedlicher Verfeinerungen auszuloten. Stattdessen wurde einfach ähnlich fein diskretisiert, wie in den in [6] präsentierten Rechnungen für den geraden Träger. Eine Unsicherheit der gewählten Vorgehensweise ergibt sich aus einem bisher ungeklärten Verhalten des Solvers im Bereich der kritischen Last: Für entsprechend feine Inkrementierung verfolgt der Solver den bereits instabilen Gleichgewichtspfad des perfekten Systems zum Teil erheblich über die kritische Last hinaus, jedoch ohne zu Divergieren oder den Verlust der positiven Definitheit der Steifigkeitsmatrix in diesem überkritischen Bereich anzuzeigen. Es kann dann durch Verfeinerung der Inkrementierung zu kleineren Lasten hin eine kontinuierliche Verminderung jenes Wertes erzielt werden, an dem der Solver schließlich doch divergiert. Bei iterativer Ausdehnung der feinsten Inkrementierung auf immer kleinere Lasten verringert sich das Divergenz-Lastniveau solange, bis es bei einem Wert verharrt. Dieser letzte Wert wird als Knicklast für die gewählte feinste Inkrementierung akzeptiert. Er stellt eine Obergrenze der kritischen Belastung für die gewählte Diskretisierung dar und kann sich bei weiterer Verfeinerung der Inkrementierung noch geringfügig zu kleineren Lasten verschieben.

Eine Weiterrechnung auf dem überkritischen Gleichgewichtspfad ist aufgrund der eingeschränkten Möglichkeiten des Solvers nur für stabile Lösungen einfach möglich. Die Struktur besitzt dann eine Belastbarkeit über den kritischen Wert hinaus. Tatsächlich werden überkritische Lö-

sungen sogar gefunden, wenn man den Löser an der kritischen Last solange divergieren lässt, bis akkumulierte Rundungsfehler nach vielen Iterationen, zu einem Sprung der Lösung auf den Gleichgewichtspfad des geknickten Zustands führen. Eleganter und ohne Sprung kann das Nachbeulverhalten für eine mit geometrischer Imperfektion versehene Struktur nachempfunden werden. Zu diesem Zweck wird die Achse des perfekten Trägers in Normalenrichtung $\boldsymbol{e}_z$ linear mit $\epsilon\,\varphi_1$ ausgelenkt. Der entsprechend adaptierte Lagevektor (3.1a) lautet dann

$$\overset{0}{\boldsymbol{R}} = (a_1 - d_{\mathrm{SP}}\cos(\Delta\Phi_2) + a_2\cos(\varphi_2))\;\boldsymbol{e}_r\,(\varphi_1) + (a_2\sin(\varphi_2) + \epsilon\,\varphi_1)\;\boldsymbol{e}_z\,, \tag{3.6}$$

worin das perfekte System für $\epsilon = 0$ enthalten ist. Nachdem als Koordinaten immer noch φ_1 und φ_2 des ursprünglichen Systems fungieren, gelten die Transformationsvorschriften (3.5) unverändert, lediglich der Ausdruck für $\partial_{\varphi_1}\overset{0}{\boldsymbol{R}}$ (3.1b) muss mit der Ableitung der Imperfektion erweitert werden

$$\partial_{\varphi_1}\overset{0}{\boldsymbol{R}} = (a_1 - d_{\mathrm{SP}}\cos(\Delta\Phi_2) + a_2\cos(\varphi_2))\;\boldsymbol{e}_\varphi\,(\varphi_1) + \epsilon\,\boldsymbol{e}_z\,. \tag{3.7}$$

Grundsätzlich können mit shellFE Massenmatrix und Tangentensteifigkeitsmatrix eines Inkrementes abgespeichert werden, es existiert aber keine Möglichkeit diese Informationen programmintern beispielsweise in einem dynamischen Eigenwertproblem weiterzuverarbeiten. Gegen eine nachträgliche Verarbeitung dieser Daten sprechen der hohe Speicherbedarf und die durch das Speichern bedingte Verlangsamung der Berechnung.

Für den Vergleich mit Ergebnissen der geometrisch linearen Balkentheorie sollten auch Ergebnisse linearer Schalen-FE-Berechnungen herangezogen werden. Das gelingt in shellFE, wenn die Analyse mit nur einem Inkrement durchgeführt wird und vom Solver ein sog. „linear-Step“ verlangt wird. Die Newton-Raphson-Iteration bricht dann nach nur einem Schritt ab und liefert genau das Ergebnis einer linearen Rechnung. In diesem Fall gilt auch das Superpositionsprinzip und die Wahl des Belastungsniveaus ist – abgesehen von etwaigen Rundungsfehlern bei zu großen oder zu kleinen Lasten – beliebig.

Das Auslesen von Knicklasten erfolgt manuell aus der Konsole des grafischen Interfaces von shellFE. Über die Benutzeroberfläche können auch Bilddateien der deformierten Struktur exportiert werden. Zur Konstruktion von Kurven für lineare Analyse und Nachbeulverhalten werden einige Knotenpunktsverschiebungen im Lauf der Rechnung abgespeichert. Ein Vergleich mit der Balkenlösung im geometrisch linearen Fall gestaltet sich einfacher, wenn die Knotenpunktsverschiebungen mittels Regression zu resultierenden Größen der Balkenkinematik weiterverarbeitet werden, siehe Kapitel 4.

4 Lineare Theorie: Vergleich von analytischen Balkenlösungen mit Schalen-FE-Rechnungen

In diesem Abschnitt wird das Deformationsverhalten des Balkens bei ebener Biegung und Biegung aus der Symmetrieebene im Rahmen der geometrisch linearen Theorie untersucht. Die Belastung erfolgt durch eine Einzellast $\boldsymbol{F}$ am freien Ende, wobei $\boldsymbol{F}$ für die ebene Biegung in der Symmetrieebene und für die Biegung aus der Ebene in Normalenrichtung $\boldsymbol{e}_z$ wirkt. Zur Untersuchung des Konvergenzverhaltens werden die Balkenlösungen entsprechenden Ergebnissen linearer Schalen-FE-Berechnungen gegenübergestellt.

4.1 Herleitung des Randwertproblems aus den inkrementellen Gleichungen

Die beschreibenden Gleichungen der linearen Theorie folgen aus den inkrementellen Gleichungen, wenn die Linearisierung von der undeformierten, lastfreien Referenzlage ausgeht. Wegen der Übereinstimmung des Gleichgewichtszustandes vor Linearisierung mit dem Referenzzustand, verbleiben dann nur die inkrementellen Größen in den Formeln, so gilt etwa für das Biegemoment $\boldsymbol{M} = 0$ und $\boldsymbol{M}^{\bullet} \neq 0$. Da eine Unterscheidung zwischen den beiden Zuständen hier nicht erforderlich ist, kann die Kennzeichnung der Inkremente entfallen und die hochgestellten Punkte werden im Folgenden weggelassen. Die Gleichgewichtsbedingungen (2.56) lauten nun

$$\boldsymbol{Q}' + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{4.1a}$$

$$\boldsymbol{M}' + \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}\,. \tag{4.1b}$$

Der Balken sei undehnbar ($\varepsilon = 0$) und die kinematischen Beziehungen (2.54) gelten unverändert

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}' \tag{4.2a}$$

$$\kappa_i\, \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{\theta}'\,. \tag{4.2b}$$

während sich die Konstitutivgleichungen für Biege- und Bimoment (2.67) wesentlich vereinfachen

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\theta}' - E\, \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta}\, {\kappa_t}' - \left(B' + b\right)\, \boldsymbol{t} \tag{4.3a}$$

$$B = E\, J_0\, {\kappa_t}' - E\, \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\theta}'\,. \tag{4.3b}$$

Naturgemäß fallen die nichtlinearen Kopplungsterme heraus und sind nicht weiter von Belang. Mit Gleichung (4.2a) kann das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{u}$ aus der Lösung für $\boldsymbol{\theta}$ durch einmalige Integration rekonstruiert werden.

Die Herleitung des Randwertproblems für die Komponenten θ_k in der materiellen Basis beginnt mit der Auflösung der ersten Gleichgewichtsbedingung (4.1a). Wegen der Abwesenheit verteilter Lasten $\boldsymbol{q} = 0$ folgt unter Beachtung der dynamischen Randbedingung am freien Ende sofort

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F} = P\,(\sin(\alpha_1)\,\cos(\alpha_2)\,\boldsymbol{e}_x + \sin(\alpha_1)\,\sin(\alpha_2)\,\boldsymbol{e}_y + \cos(\alpha_1)\,\boldsymbol{e}_z) \tag{4.4}$$

mit der Darstellung der Totlast $\boldsymbol{F}$ gemäß (2.2). Für $\alpha_1 = 0$ kommt es zur Biegung aus der Ebene, während $\alpha_1 = \pi/2$ Biegung in der Ebene bedeutet. Nach Ableitung der Konstitutivgleichung (4.3a) und Substitution für die Ableitungen des Bimomentes kann $\boldsymbol{M}'$ im Momentengleichgewicht (4.1b) eingesetzt werden. Die resultierende vektorwertige Gleichung enthält als Unbekannte nur noch $\boldsymbol{\theta}$ und seine Ableitungen. Durch Projektion der drei Gleichungen auf die Richtungen $\boldsymbol{e}_i$ ergibt sich ein Differentialgleichungssystem in den Komponenten θ_k

$$\begin{aligned}
&\theta_2'''\,a_1\,(J_0 - \beta\,a_1) + \theta_1''\left(J_0 - 2\,\beta\,a_1 + J_{33}\,a_1^2\right) \\
&\qquad + \theta_2'\,(\beta - (J_{33} + a_t/E)\,a_1) - \theta_1\,a_t/E = -P\left(a_1^2/E\right)\cos(\alpha_1) && \text{(4.5a)}\\
&\theta_2^{\mathrm{IV}}\,a_1^2\,J_0 + \theta_1'''\,a_1\,(J_0 - \beta\,a_1) - \theta_2''\left(a_1^2\,a_t/E - 2\,\beta\,a_1\right) \\
&\qquad - \theta_1'\,((J_{33} + a_t/E)\,a_1 - \beta) + \theta_2\,J_{33} = 0 && \text{(4.5b)}\\
&\theta_3''\,a_{33} = P\cos(\varphi_1 - \alpha_2)\,\sin(\alpha_1)\,. && \text{(4.5c)}
\end{aligned}$$

Das System wird begleitet von acht Randbedingungen

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\theta}\,(s_1 = 0) = 0 && \boldsymbol{M}\,(s_1 = S_1) = 0 && \text{(4.6a)}\\
&\psi\,(s_1 = 0) = (\boldsymbol{\theta}' \cdot \boldsymbol{t})\,\big|_{s_1=0} \Rightarrow \theta_2'\,(s_1 = 0) = 0 && B\,(s_1 = S_1) = 0\,, && \text{(4.6b)}
\end{aligned}$$

das sind vier kinematische Randbedingungen an der Einspannung und vier dynamische am freien Ende. Projiziert man den Momentenvektor $\boldsymbol{M}$ am freien Ende auf die Richtungen $\boldsymbol{e}_i$ an dieser Stelle, so lassen sich die vier dynamischen Randbedingungen als skalare Gleichungen ausformulieren

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_1 \quad \Rightarrow \quad (\theta_2''\,\beta\,a_1 + \theta_1'\,(\beta - J_{33}\,a_1) + \theta_2\,J_{33})\,\big|_{s_1=S_1} = 0 && \text{(4.7a)}\\
&\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_2 \quad \Rightarrow \quad (+\theta_2'''\,J_0\,a_1 - \theta_1''\,(J_0 - \beta\,a_1) + \theta_2'\,(a_1\,a_t/E - \beta) + \theta_1\,a_t/E)\,\big|_{s_1=S_1} = 0 && \text{(4.7b)}\\
&\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{e}_3 \quad \Rightarrow \quad \theta_3'\,\big|_{s_1=S_1} = 0 && \text{(4.7c)}\\
&B \quad \Rightarrow \quad (\theta_2''\,J_0\,a_1 + \theta_1'\,(J_0 - \beta\,a_1) + \theta_2\,\beta)\,\big|_{s_1=S_1} = 0\,. && \text{(4.7d)}
\end{aligned}$$

In seiner ursprünglichen Form (4.5) hat das Differentialgleichungssystem vierte Ordnung in θ_2, dritte Ordnung in θ_1 und zweite Ordnung in θ_3. Es existieren aber nur acht Randbedingungen, weshalb die Ordnung des Systems um eins reduziert werden muss. Unter der Voraussetzung $(J_0 - \beta\, a_1) \neq 0$ kann durch Ableitung von (4.5a) und Einsetzen in der zweiten Gleichung (4.5b) die vierte Ableitung θ_2^{IV} eliminiert werden. Als Konsequenz muss θ_2''' mithilfe (4.5a) in der Randbedingung (4.7b) substituiert werden. Das Randwertproblem hat dann jeweils dritte Ordnung in θ_2 und θ_1 sowie zweite in θ_3.

Wie bereits angemerkt, ist diese Reduktion im Grenzfall $(J_0 - \beta\, a_1) = 0$ nicht möglich. Für diesen bleibt die vierte Ordnung θ_2^{IV} bestehen, während θ_1''' aus (4.5b) herausfällt und das System nur noch zweite Ordnung in θ_1 hat. In diesem Spezialfall ist eine analytische Lösung des Problems in geschlossener Form einfach möglich, weil durch geeignete Kombination der gekoppelten Gleichungen wahlweise θ_1 oder θ_2 eliminiert werden kann. Man erhält dann eine lineare Differentialgleichung sechster Ordnung mit konstanten Koeffizienten in einer dieser Größen. Die allgemeine Lösung gelingt mittels Exponentialansatz. Freilich sind diese Lösungen nur dann relevant, wenn dem Spezialfall auch realistische Parameterwerte zugeordnet werden können. Da J_0 und a_1 jedenfalls positiv sind, muss auch $\beta > 0$ sein, weshalb gemäß (2.18) nur die Trägerform mit positiver Gauß-Krümmung ($\Delta\Phi_2 = 0$) betroffen sein kann. Spezialisiert man den Ausdruck $(J_0 - \beta\, a_1)$ mithilfe der Ergebnisse aus Kapitel 2 Abschnitt 2.2.1 für den kreisförmig gekrümmten Träger mit Teilkreisquerschnitt, so gilt für den Quotienten der Radien a_2/a_1 im Grenzfall

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-6\,\Phi_2\,\left(-\cos(\Phi_2) + 8\,\Phi_2^2\cos(\Phi_2) + \cos(3\,\Phi_2) - 4\,\Phi_2\sin(\Phi_2)\right)}{-36\,\Phi_2 + 16\,\Phi_2^5 + 36\,\Phi_2\cos(2\,\Phi_2) - 6\sin(2\,\Phi_2) + 48\,\Phi_2^2\sin(2\,\Phi_2) + 3\sin(4\,\Phi_2)}\,. \tag{4.8}$$

Das Radienverhältnis a_2/a_1 hat den realistischen Wertebreich [0, 1] und der halbe Teilkreiswinkel Φ_2 im Querschnitt läuft im Intervall $[0, \pi]$. In Abbildung 4.1 ist dieser Zusammenhang dargestellt. Offenbar gilt $J_0 - \beta\, a_1 = 0$ nur für spezielle, schalenähnliche Träger mit großem Umfang im Querschnitt und ist für schlanke Strukturen stets positiv. Alle in der vorliegenden Arbeit untersuchten Parametersets liegen innerhalb dieses positiven Bereiches mit beträchtlichem Abstand zur Grenzkurve.

Für Biegung aus der Ebene $\alpha_1 = 0$ ist die Gleichung (4.5c) homogen und das zugeordnete Randwertproblem für θ_3 ist nur trivial lösbar. Dasselbe gilt im Fall der Biegung in der Ebene $\alpha_1 = \pi/2$ für das gekoppelte Randwertproblem in θ_1 und θ_2. Eine gemeinsame Betrachtung beider Probleme ist nicht sinnvoll, weil eine geschlossene, analytische Lösung zu unhandlich wäre. Auf Basis der Lösungen der linearen Biegeprobleme können einfache Ritz-Ansätze für das nichtlineare Problem konstruiert werden, siehe Kapitel 6.

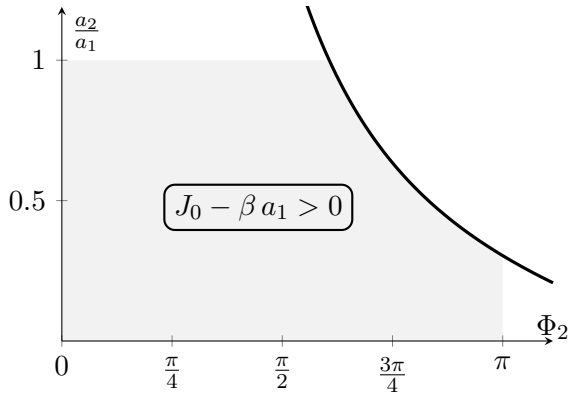


Abbildung 4.1: Reduktion der Ordnung des Randwertproblems; kritische Parameterwerte

4.1.1 Biegung in der Ebene

Die Last $\boldsymbol{F}$ wirkt in der Symmetrieebene des Trägers, wodurch sich das räumliche Problem reduziert auf das klassische ebene Biegeproblem des gekrümmten Trägers

$$\theta_3'' \, a_{33} = P \cos(\varphi_1 - \alpha_2) \qquad \theta_3 \left(s_1 = 0\right) = 0 \qquad \theta_3' \left(s_1 = S_1\right) = 0 \tag{4.9}$$

und es treten keine Deformationen aus der Ebene auf $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Die Lösung des Randwertproblems für θ_3 lautet

$$\theta_3 = P \, \frac{a_1^2}{a_{33}} \, \left(\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_2 - \varphi_1) + \varphi_1 \sin(\alpha_2 - \Phi_1)\right) \, , \tag{4.10}$$

wobei die Kraftrichtung in der Ebene durch den Winkel α_2 beschrieben wird. Mittels (4.2a) können daraus die Verschiebungskomponenten u_1 und u_2 durch einmalige Integration ermittelt werden

$$\begin{aligned} u_1 = P \, \frac{a_1^3}{4\, a_{33}} \, \Big(& 2\, \varphi_1 \cos(\alpha_2)\, \cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_1)\, \sin(\alpha_2 - 2\, \varphi_1) \\ & -3 \cos(\alpha_2)\, \sin(\varphi_1) - \cos(\alpha_2 - 2\, \varphi_1)\, \sin(\varphi_1) + 2\, \varphi_1 \sin(\alpha_2)\, \sin(\varphi_1) \\ & +4 \cos(\varphi_1)\, \sin(\alpha_2 - \Phi_1) - 4 \cos^2(\varphi_1)\, \sin(\alpha_2 - \Phi_1) - 4 \sin^2(\varphi_1)\, \sin(\alpha_2 - \Phi_1) \Big) \end{aligned} \tag{4.11a}$$

$$\begin{aligned} u_2 = P \, \frac{a_1^3}{4\, a_{33}} \, \Big(& -3 \cos(\alpha_2)\, \cos(\varphi_1) - \cos(\alpha_2 - 2\, \varphi_1)\, \cos(\varphi_1) + 4 \cos(\alpha_2)\, \cos^2(\varphi_1) \\ & +2\, \varphi_1 \cos(\varphi_1)\, \sin(\alpha_2) - 2\, \varphi_1 \cos(\alpha_2)\, \sin(\varphi_1) - \sin(\alpha_2)\, \sin(\varphi_1) \\ & +\sin(\alpha_2 - 2\, \varphi_1)\, \sin(\varphi_1) + 4 \cos(\alpha_2)\, \sin^2(\varphi_1) + 4\, \varphi_1 \cos^2(\varphi_1)\, \sin(\alpha_2 - \Phi_1) \\ & -4 \sin(\varphi_1)\, \sin(\alpha_2 - \Phi_1) + 4\, \varphi_1 \sin^2(\varphi_1)\, \sin(\alpha_2 - \Phi_1) \Big) \, . \end{aligned} \tag{4.11b}$$

Wegen der Abwesenheit von $\Delta\Phi_2$ in diesen Lösungen verformen sich beide Trägervarianten im Fall der ebenen Biegung vollkommen identisch. Für das Parameterset 1 aus Tabelle 2.1 zeigt Abbildung 4.2 den Verlauf dieser Lösungen bei Einleitung einer radial nach außen weisenden Querkraft am freien Ende mit Betrag $P = 1$. Man erkennt die kinematischen Randbedingungen an der Einspannung, insbesondere gilt wegen (4.2a) auch $u_1'(s_1 = 0) = u_2'(s_1 = 0) = 0$.

4.1.2 Biegung aus der Ebene

Das entkoppelte Randwertproblem für θ_3 hat nur die triviale Lösung und die übrigen gekoppelten Gleichungen lauten nach Reduktion auf zwei Differentialgleichungen dritter Ordnung

$$\begin{aligned}
&\theta_2''' a_1 (\beta a_1 - J_0) + \theta_1'' \left(\beta a_1 - J_{33} a_1^2 - J_0\right) \\
&\qquad + \theta_2' \left(a_1 \left(J_{33} + a_t/E\right) - \beta\right) + \theta_1 a_t/E = \frac{P a_1^2}{E} \qquad (4.12a) \\
&\theta_1''' a_1^3 \left(\beta^2 - J_0 J_{33}\right) + \theta_2'' a_1 \left(-2\beta^2 a_1 + J_0 J_{33} a_1 + \beta J_0 + \beta a_1^2 a_t/E\right) + \theta_1' \left(-\beta^2 a_1\right. \\
&\qquad \left. - J_0 J_{33} a_1 + \beta J_0 + a_1^2 \left(a_t/E + J_{33}\right)\right) + \theta_2 J_{33} \left(J_0 - \beta a_1\right) = 0\,. \qquad (4.12b)
\end{aligned}$$

Von den sechs Randbedingungen (4.6) muss lediglich (4.7b) in der Ordnung reduziert werden

$$\left(\theta_1'' a_1 \left(\beta^2 - J_0 J_{11}\right) + \theta_2' \left(J_0 J_{11} + \beta a_1 a_t/E - \beta^2\right) + \theta_1 \beta a_t/E\right)\Big|_{s_1 = S_1} = P \frac{J_0 a_1}{E}\,. \qquad (4.13)$$

Hier scheint die Kraft P auf, weil die höchste Ableitung θ_2''' mithilfe (4.12a) eliminiert wurde. Die geschlossene analytische Lösung dieses Problems existiert zwar, es ist aber bedeutend einfacher das Randwertproblem für ein konkretes Parameterset mit Mathematica numerisch zu lösen. Mit den Verdrehungen $\boldsymbol{\theta}$ erhält man $\boldsymbol{u}$ mittels einfacher Integration von (4.2a) unter Beachtung der Randbedingungen $\boldsymbol{u}(s_1 = 0) = \boldsymbol{0}$. Der Verlauf dieser Lösungen für das Standardparameterset aus Tabelle 2.1 ist in Abbildung 4.3 gezeigt. Die Kraft weist in positive z-Richtung des raumfesten Systems und beträgt wieder $P = 1$. Die Verformungen sind bei gleicher Last um zwei Größenordnungen höher und die Struktur verhält sich bedeutend weicher als für den ebenen Fall festgestellt, vgl. Abbildung 4.2.

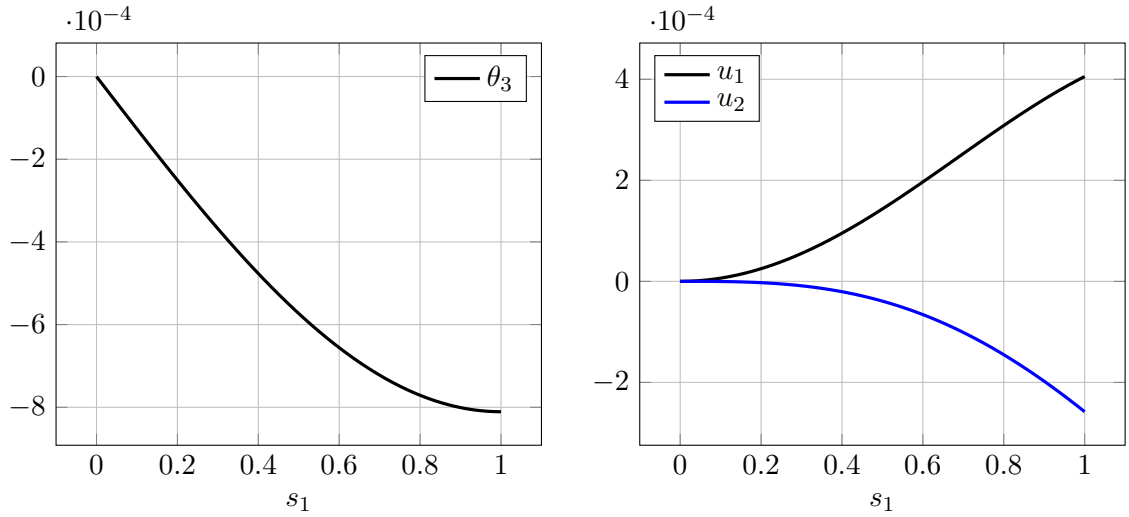


Abbildung 4.2: Ebene Biegung; Lösungskurven zur linearisierten Balkentheorie

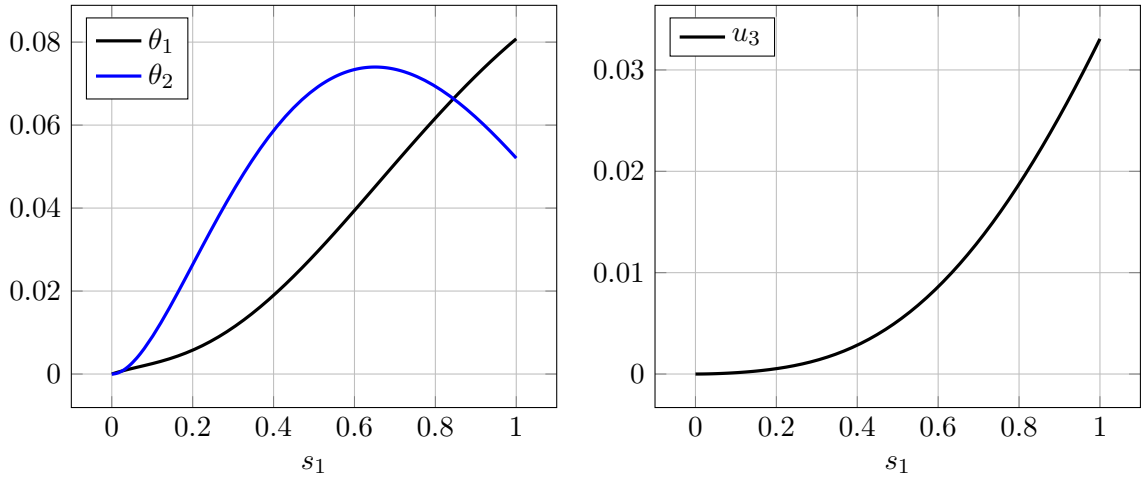


Abbildung 4.3: Biegung aus der Ebene; Lösungskurven zur linearisierten Balkentheorie

4.2 Konstruktion von Vergleichslösungen im Querschnitt aus FE-Knotenpunktsverschiebungen

Für die Berechnung mit Schalen-FEM wird wieder auf das Programm shellFE zurückgegriffen. Mit nur einem Inkrement in nur einem Newton-Raphson Schritt liefert der Solver die Ergebnisse einer linearen Analyse. Um vergleichbare Ergebnisse zu erzielen, muss die Belastung im Schalenmodell statisch äquivalent zum Balken aufgebracht werden. Die Wirkungslinie der Kraft P am Balken geht durch den geometrischen Schwerpunkt des Querschnittes, da die Balkenachse durch diesen gelegt wurde. Es ist daher für statische Äquivalenz ausreichend, das freie Ende der Schale mit einer Gleichlast $\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{F}}{2\,S_2}$ zu belasten, weil wegen

$$\int_S \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}\ \mathrm{d}s_2 = -\boldsymbol{f} \times \int_S \boldsymbol{x}\ \mathrm{d}s_2 = \boldsymbol{0} \tag{4.14}$$

das Moment der Gleichlast um den geometrischen Schwerpunkt verschwindet.

Zur besseren Vergleichbarkeit werden die aus der Schalen-FE-Berechnung gewonnenen Knotenpunktsverschiebungen mittels Regression in äquivalente Größen der Balkenkinematik umgerechnet. Hierzu wird die Deformation der Schale im untersuchten Querschnitt analog zu (2.70) angenähert gemäß

$$\hat{\boldsymbol{U}} = \hat{\boldsymbol{u}} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \boldsymbol{x}\,(s_2) + \hat{\psi}\, w\,(s_2)\ \boldsymbol{t}\,, \tag{4.15}$$

wobei die Werte der Balken-Freiheitsgrade $\left\{\hat{\boldsymbol{u}},\, \hat{\boldsymbol{\theta}},\, \hat{\psi}\right\}$ im betrachteten Querschnitt den Knotenpunktsverschiebungen bestmöglich anzupassen sind. Der Vektor der Knotenpunktsverschiebungen eines Knotens an der Position $s_2 = s_{2K}$ im betrachteten Querschnitt sei $\hat{\boldsymbol{U}}_K$. Aus der Minimierung der Summe der Abstandsquadrate

$$\sum_K \left(\left(\hat{\boldsymbol{U}} - \hat{\boldsymbol{U}}_K\right) \cdot \left(\hat{\boldsymbol{U}} - \hat{\boldsymbol{U}}_K\right)\right)\Big|_{s_2 = s_{2K}} \to \min \tag{4.16}$$

gewinnt man die sieben Unbekannten und daraus eine optimale Näherung für die Schalendeformation in der Form (4.15). Diese Vorgehensweise erlaubt den direkten Vergleich der beiden Lösungen. Aus der Genauigkeit der Regression lässt sich ableiten, inwieweit sich die Schale als Balken deformiert, d.h. ob es zu wesentlichen Verformungen des Querschnitts in seiner Ebene kommt oder nicht. Für eine sinnvolle Approximation der Deformation im Querschnitt müssen ausreichend Knotenpunktswerte zur Verfügung stehen. Dies erfordert eine große Elementzahl in Breitenrichtung

$$N_2 = 2\,\mathrm{Ceil}\left(10\,\frac{\Phi_2}{\pi}\right)\,. \tag{4.17}$$

Das sind zehn Elemente für den Halbkreisquerschnitt, wobei stets auf die nächst höhere gerade Zahl gerundet wird. Das Seitenlängenverhältnis ist ungefähr 1 mit den Einschränkungen, dass

die Elementzahl in Längsrichtung gerade sein muss und für besonders schlanke Träger mit $N_1 \leq 200$ beschränkt wird. Die Restriktion auf gerade Zahlen garantiert hier, dass Knotenpunkte im untersuchten, mittleren Querschnitt bei $s_1 = S_1/2$ liegen. Durch den Vergleich von Balken- und Schalenlösung in der Trägermitte lassen sich etwaige Randstörungen durch Einspannung oder Lasteinleitung vermeiden. Die wesentlichsten Aussagen können bereits aus der Analyse der Ergebnisse für den einen Querschnitt abgeleitet werden. Auf die Angabe von Verläufen in weiteren Querschnitten wird daher verzichtet. Als Fehlergrößen fungieren die relativen, auf die Balkenlösung bezogenen Abweichungen der Drehwinkel an dieser Stelle

$$s_1 = S_1/2 : \qquad \epsilon_i = \left| \frac{\hat{\theta}_i}{\theta_i} - 1 \right| . \tag{4.18}$$

4.3 Konvergenzverhalten der Balkenlösungen

In der folgenden Untersuchung werden die Einflüsse der unterschiedlichen Geometrieparameter auf die Genauigkeit der Ergebnisse studiert. Die relativen Abweichungen ϵ_i werden in der Trägermitte gebildet: ϵ_1 und ϵ_2 für Biegung aus der Ebene und ϵ_3 für die ebene Biegung.

Die numerischen Balkenlösungen für die Biegung aus der Ebene werden mit der in der Software Mathematica implementierten Routine NDSolve berechnet. Die numerische Integration des Randwertproblems erfolgt daher mittels Schießverfahren. Für gewisse Parametersets wird dieses Verfahren jedoch numerisch instabil und die Integration scheitert, weil die Randbedingungen am rechten Ende $s_1 = S_1$ nicht mit ausreichender Genauigkeit erfüllt werden können. Für die linearen Analysen erweisen sich hier beispielsweise Trägerformen mit $\Phi_2 < \pi/3$ als kritisch. Zum Teil können korrekte Lösungen noch durch verbesserte Präzision in der Fließkommadarstellung mit dem Nachteil längerer Rechenzeit erreicht werden. Diese Unzulänglichkeit des Schießverfahrens tritt auch im folgenden Kapitel bei der inkrementellen Stabilitätsanalyse zutage.

Den Ausgangspunkt für die numerischen Untersuchungen bildet das Standardparameterset aus Zeile eins in Tabelle 2.1. Die ersten Analysen befassen sich mit dem Verhalten der Lösungen beim Übergang von gedrungenen zu immer schlankeren Trägergeometrien durch schrittweise Vergrößerung der Achslänge S_1. Hält man an der Viertelkreisform $\Phi_1 = \pi/2$ fest, so skaliert S_1 linear mit dem Radius der Balkenachse a_1. Wir betrachten nun die Biegung in der Ebene mit der Kraft $\boldsymbol{F}$ in positiver y-Richtung, d.h. Einleitung einer reinen Querkraft in radialer Richtung, und verändern den Radius in den Grenzen $a_1 \in [0.05, 3]$. Für drei dieser Parametersets zeigt Abbildung 4.4 die Verläufe der Verschiebungskomponenten im untersuchten Querschnitt. Es wird der Träger mit positiver Gauß-Krümmung betrachtet, für jenen mit negativer Krümmung ließen sich dieselben Schlüsse ziehen.

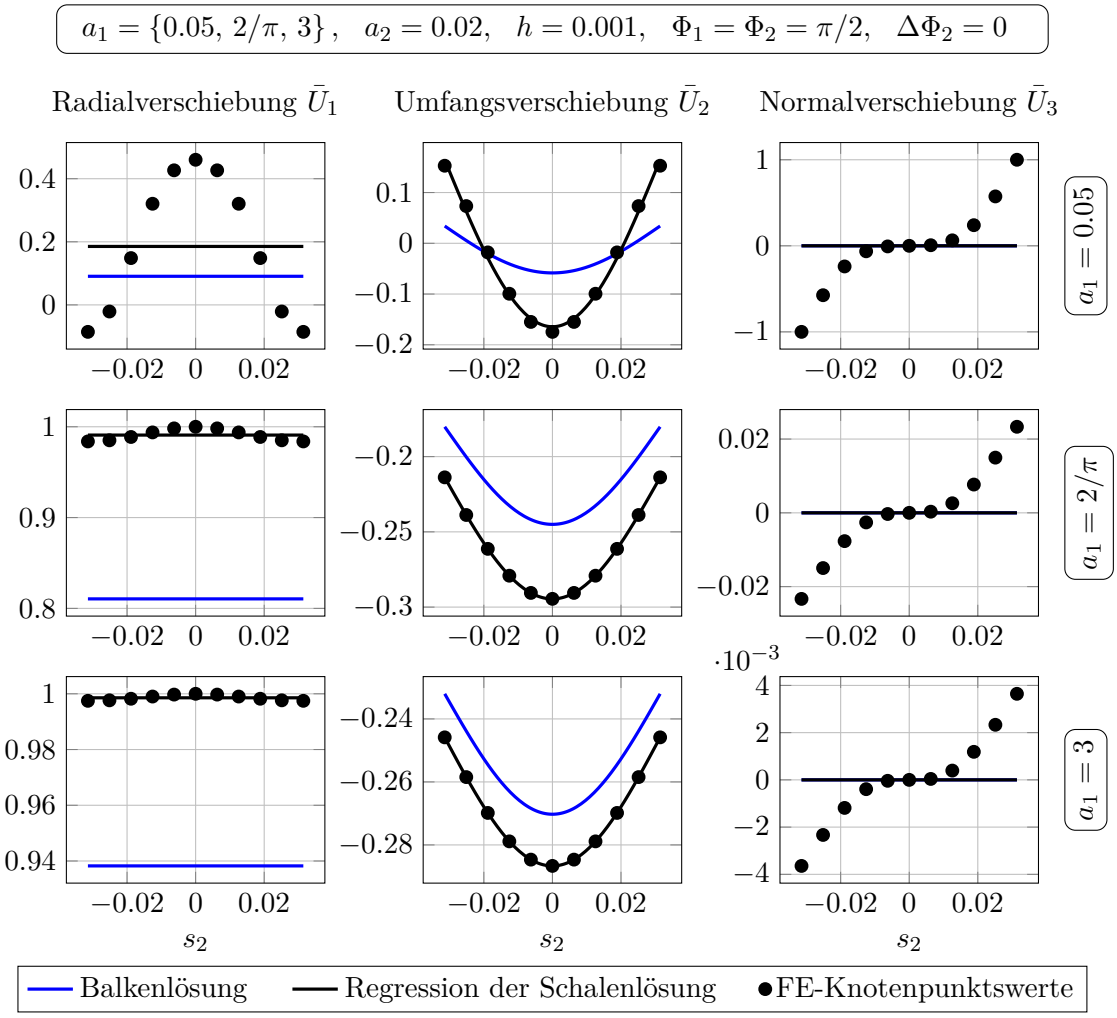


Abbildung 4.4: Ebene Biegung; Vergleich der Lösungen bei Vergrößerung des Radius a_1

Die Schaubilder enthalten jeweils die mithilfe der Balkentheorie gemäß (2.70) errechnete Approximation der Schalendeformation, die aus der Schalen-FE-Berechnung stammenden Knotenpunktswerte und das Ergebnis der Regression (4.15) zu den Knotenpunktsverschiebungen. In der ersten Zeile steht die Lösung für $a_1 = 0.05$ in der dritten Zeile jene für $a_1 = 3$ und in der Mitte jene zum Standardparameterset mit $a_1 = 2/\pi$. Die Verschiebungswerte jeder Zeile sind auf die maximale Komponente der Knotenpunktsverschiebungen in einer dieser Richtungen bezogen, d.h.

$$\bar{U}_i\left(s_2\right) = \frac{U_i\left(s_2\right)}{\max\left(\left\{U_{1K},\, U_{2K},\, U_{3K}\right\}\right)}\,, \tag{4.19}$$

wenn mit U_{jK} die Komponenten des Knotetnpunktsverschiebungsvektors $\boldsymbol{U}_K$ zum Knoten K der Schalenlösung bezeichnet werden. Der Vergleich der Ordinatenwerte einer Zeile zeigt daher, welche Verschiebungskomponente für das betrachtete Parameterset dominiert. So verliert etwa die Deformation in Normalenrichtung in der dritten Spalte mit zunehmender Schlankheit des Trägers kontinuierlich an Bedeutung und skaliert zuletzt schon mit 1e−3. Für eine gute Übereinstimmung der Balkenlösung mit der Schalenlösung ist dies auch erforderlich, da $\bar{U}_3$ hier eine Kontraktion des Querschnittes beschreibt, die von der Balkenkinematik nicht abgebildet werden kann. Eine weitere Einschränkung der Balkentheorie ist der ersten Spalte zu entnehmen: Die Regression der Schalendeformation nähert den Verlauf der Verschiebung in radialer Richtung im Querschnitt durch eine Konstante an d.h.: Der gesamte Querschnitt verschiebt sich starr in radialer Richtung mit demselben Betrag. Auch hier gleicht sich die Schalenlösung diesem konstanten Wert für schlankere Träger immer mehr an. Die Umfangskomponente $\bar{U}_2$ ist bedeutend kleiner als die radiale. In ihr sind die starre Verschiebung des Querschnittes in tangentialer Richtung und die Verdrehung des Querschnitts um die z-Achse enthalten. Es ist bemerkenswert, dass sich die Knotenpunktswerte für die Umfangsverschiebung $\bar{U}_2$ in allen drei Fällen gut durch die Regression approximieren lassen. Das bedeutet aber nicht, dass der Querschnitt der Schale schubstarr rotiert, weil die Forderung der schubfreien Deformation in der Regression (4.15) gar nicht enthalten ist. Zur Berechnung der Schubverzerrungen $\boldsymbol{\Gamma}_\perp$ durch Einsetzen der Regression in (2.36) wäre die Kenntnis des Verlaufes des Verschiebungsfeldes entlang der Balkenachse erforderlich. Tatsächlich wird hier aber nur die Deformation eines Querschnittes durch (4.15) angenähert und nicht die Bewegung des gesamten Trägers. Für die Lösung zum Standardparameterset in der mittleren Zeile ist der Unterschied in den Verschiebungswerten zwischen Balken- und Schalenrechnung noch erheblich. Die nicht vernachlässigbare Verformung des Querschnitt in seiner Ebene führt hier zu einem großen Wert für den Fehler ϵ_3, siehe Tabelle 4.1 am Ende dieses Abschnitts. Im Gegensatz dazu ist für das letzte Parameterset bereits eine gute Übereinstimmung festzustellen, womit ϵ_3 auch bedeutend kleiner ausfällt.

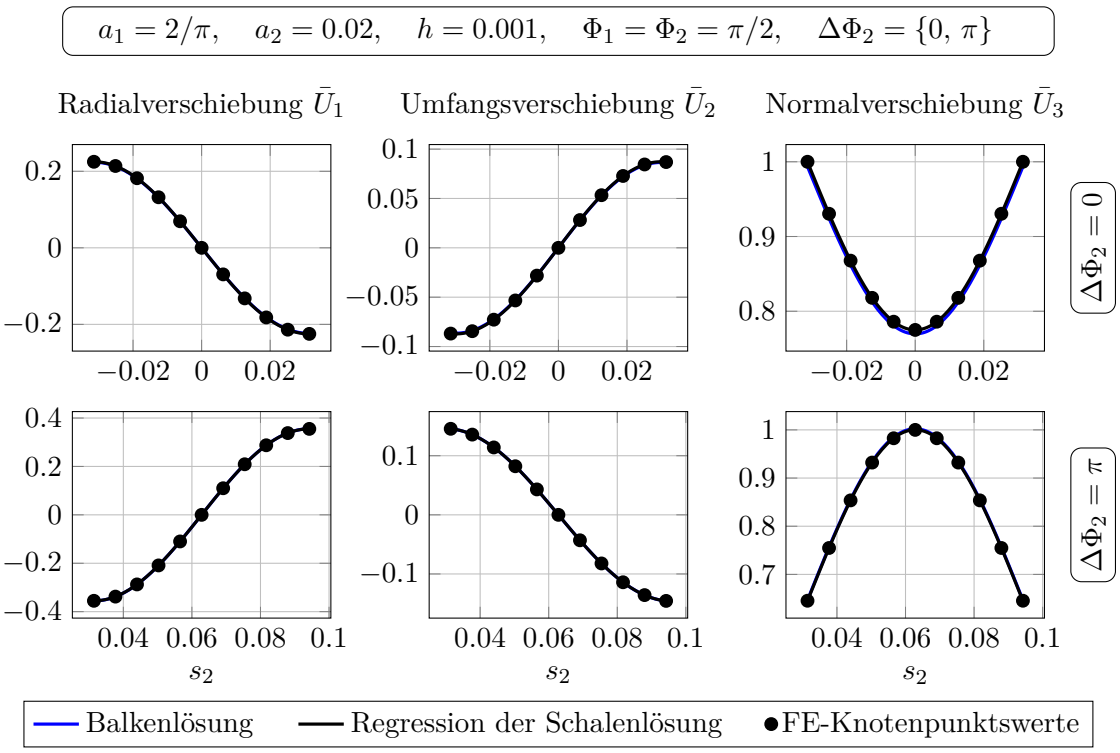


Abbildung 4.5: Biegung aus der Ebene; Lösungen im Querschnitt für das Standardparameterset der beiden Trägerformen: positive Gauß-Krümmung (oben) und negative Gauß-Krümmung (unten)

Eine analoge Darstellung der Verschiebungsverläufe im Querschnitt für Biegung aus der Ebene ist Abbildung 4.5 zu entnehmen. Es werden die Lösungen zum Standardparameterset bei Einleitung einer Querkraft $\boldsymbol{F}$ in z-Richtung für beide Trägerformen $\Delta\Phi_2 = \{0, \pi\}$ gezeigt. In der ersten Zeile sind die Kurven für den Träger mit positiver Krümmung abgebildet, in der zweiten jene für den Träger mit negativer Krümmung. Man beachte wegen $s_2 \in [\Delta S_2 - S_2, \Delta S_2 + S_2]$ den Umlaufsinn und die unterschiedlichen Grenzen der Bogenkoordinate des Querschnitts s_2 in beiden Zeilen, vgl. Abbildung 2.1. Im Gegensatz zur ebenen Biegung überwiegen hier die Verschiebungen $\bar{U}_3$ in Normalrichtung und die Balkenlösungen sind bereits für die Standardparameter kongruent zur Schalenlösung. Entsprechend gering sind daher die Abweichungen ϵ_1 und ϵ_2 in Tabelle 4.1 für das Defaultset. Die Verschiebung in radialer Richtung gibt gemeinsam mit einem Anteil der Normalverschiebungen die starre Rotation des Querschnittes um die Achse wieder, während die Verwölbung durch die Umfangsverschiebung $\bar{U}_2$ in Übereinstimmung mit w aus (2.13) beschrieben wird. Aufgrund der gegenüberliegenden Lage des Schubmittelpunktes rotieren die Querschnitte je nach Trägerform mit anderem Drehsinn.

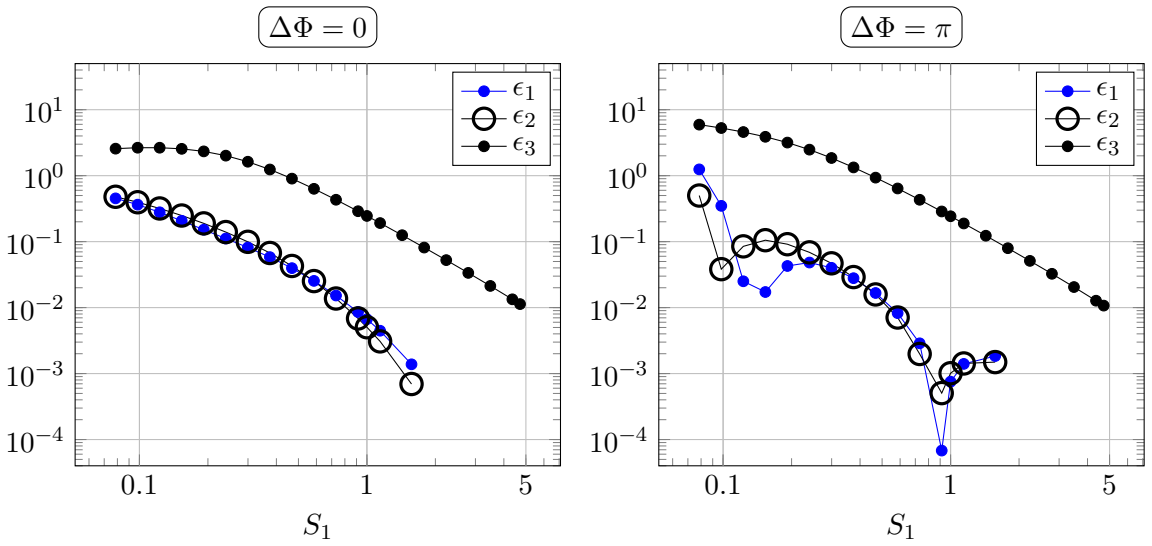


Abbildung 4.6: Entwicklung der Fehlergrößen zu beiden Biegefällen bei Vergrößerung von S_1

Wie bereits festgestellt wurde, ist die Größe der beobachteten Abweichungen zum Standardparameterset stark vom betrachteten Lastfall abhängig. Während für Biegung aus der Ebene die Balkenlösung bereits gegen die Schalenlösung konvergiert ist, Abbildung 4.5, ist die Approximation der Schalendeformation für die ebene Biegung nicht zufriedenstellend, Abbildung 4.4. Zur genaueren Untersuchung dieses Umstandes zeigt die doppelt logarithmische Darstellung 4.6 den Verlauf der Abweichungen ϵ_i zu beiden Biegeproblemen bei Steigerung der Achslänge des Viertelkreisbogens S_1 durch Vergrößerung des Radius a_1. Die Fehler zum Standardparameterset für die jeweilige Trägervariante können entlang der vertikalen Linie zum Abszissenwert 1 abgelesen werden. Wie aus der Steigung des geraden Abschnitts der Kurven zu ϵ_3 abzulesen ist, reduzieren sich die Abweichungen für Biegung in der Ebene mit ungefähr quadratischer Ordnung. Die der Biegung aus der Ebene zugeordneten Fehlermaße verringern sich mit überquadratischer Ordnung, wobei für den Balken mit negativer Krümmung ($\Delta\Phi_2 = \pi$) bei $S_1 \approx 0.9$ ein Minimum erreicht wird. Von diesem Punkt an entfernt sich die Balkenlösung bei weiterer Vergrößerung von S_1 wieder von der Schalen-Referenzlösung.

Dass sich die beobachtete Abweichung zur Schalenlösung beim Übergang zu immer längeren Strukturen nicht monoton verringert, bedeutet zunächst noch keinen Widerspruch zur Annahme, dass die angewandte Balkentheorie für den gekrümmten Träger asymptotisch korrekt ist. Schließlich müssen zur korrekten, numerischen Analyse des asymptotischen Verhaltens für Balken mit dünnwandigem offenem Querschnitt mehrere Geometrieparameter gleichzeitig angepasst werden. In der hier genutzten, für den geraden Träger asymptotisch korrekten, geometrisch linearen Balkentheorie werden gewisse Verhältnisse für die charakteristischen Geometrieparameter voraus-

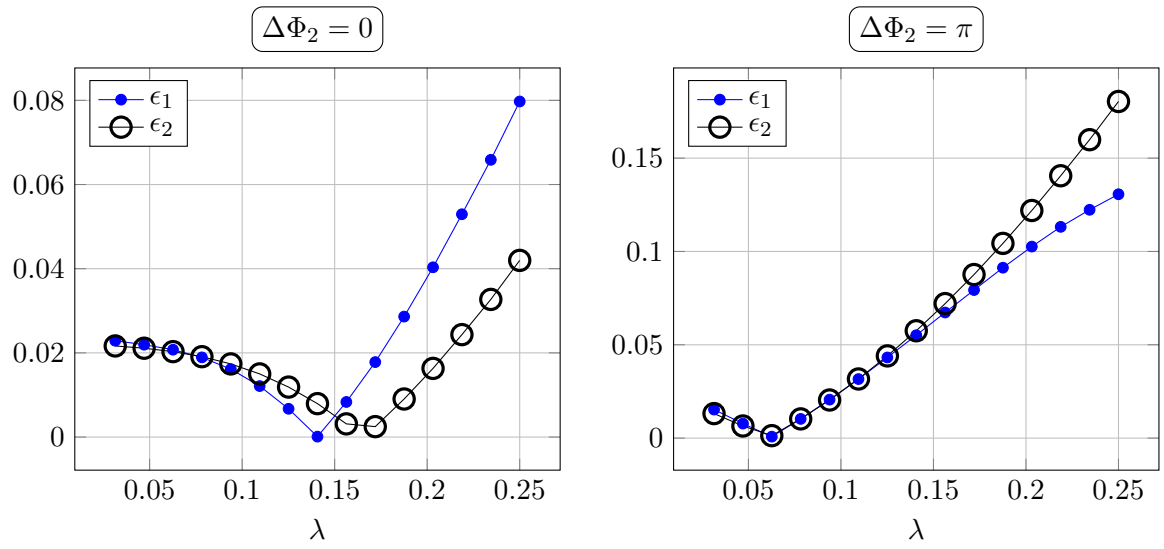


Abbildung 4.7: Konvergenzstudie bei Skalierung der Querschnittsgeometrie mit λ gemäß (4.20)

gesetzt: Die Wandstärke ist eine Ordnung kleiner als die Größe des Querschnitts, welche selbst eine Ordnung kleiner ist als die Balkenlänge. Neben der Dicke h bieten sich zur der Betrachtung eines gekrümmten Viertelkreisbalkens die beiden Radien a_1 sowie a_2 als charakteristische Längenmaße an. Mit dem kleinen Parameter λ lässt sich damit eine den Vorgaben der asymptotischen Herleitung entsprechende Parametrisierung der Geometrie realisieren

$$a_1 = a_1 \qquad a_2 = \lambda\, a_1 \qquad h = \lambda\, a_2 = \lambda^2\, a_1\,. \tag{4.20}$$

Um dem angenommenen asymptotischen Verhalten nicht zu widersprechen, müssen sich die für diese Parametrisierung berechneten Abweichungen ϵ_i monoton mit kleinem λ verringern, was für den geraden Träger in [6] bereits demonstriert wurde. Für den kreisförmig gekrümmten Träger kann daher bei gegebenem Radius a_1 durch Verkleinerung von λ überprüft werden, ob die Lösungen das angenommene Deformationsverhalten zeigen oder nicht. Um das zu beurteilen, werden in Abbildung 4.7 die Ergebnisse zur Biegung des Viertelkreisbalkens aus der Ebene bei Anpassung der Querschnittsgeometrie durch λ dargestellt, alle übrigen konstanten Parameter werden dem Standardparameterset entnommen. Für beide Trägerformen erreichen die Fehlermaße ein Minimum zu speziellen Werten von λ. Die erneute Vergrößerung der Abweichungen für noch kleinere Werte in diesem Parameter demonstriert, dass sich das asymptotische Verhalten des gekrümmten Balkens von jenem des geraden unterscheidet. Trotz dieses Mangels bleibt die in [6] präsentierte Balkentheorie für den gekrümmten Träger zweifellos anwendbar, wie die in dieser Arbeit präsentierten Ergebnisse bestätigen.

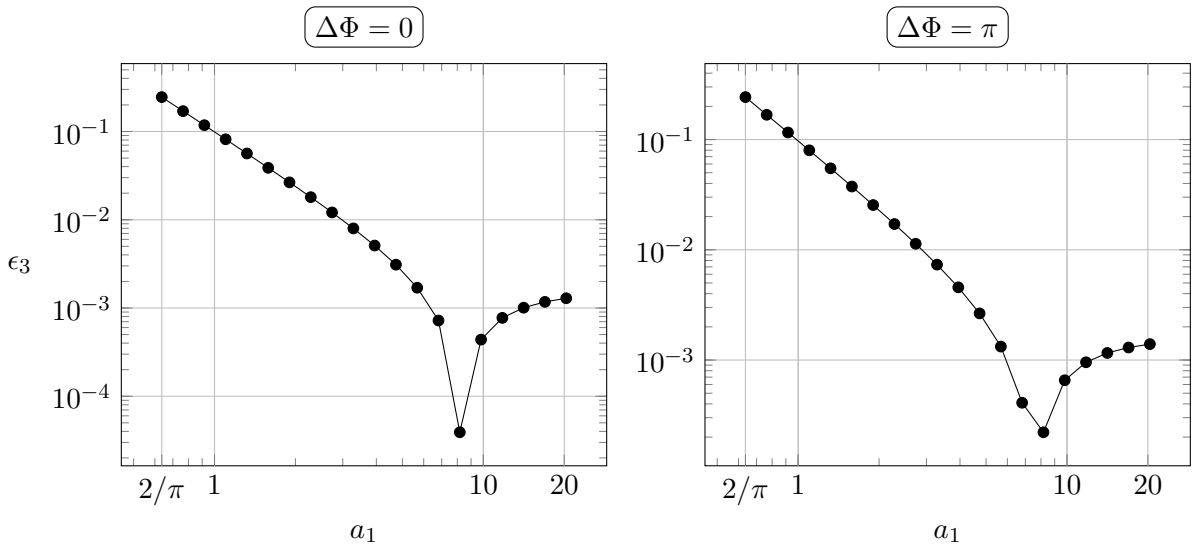


Abbildung 4.8: Ebene Biegung; Entwicklung des Fehlers bei Begradigung des Balkens

Die Parameterstudien werden nun mit der Untersuchung des Einflusses der Krümmung des Trägers auf die Genauigkeit der Ergebnisse für den Fall der ebenen Biegung fortgesetzt. Zu diesem Zweck wird der Balken mit Standardparametern betrachtet und der Winkel Φ_1 ausgehend vom Viertelkreis $\Phi_1 = \pi/2$ bei konstanter Länge S_1 kontinuierlich verringert, d.h.: Die Krümmung der Achse a_1^{-1} wird reduziert und die Referenzgeometrie dadurch begradigt. Die Kraftrichtung wird mit angepasst $\alpha_2 = \Phi_1$, sodass am freien Ende stets eine reine Querkraft in radialer Richtung eingeleitet wird. Das Ergebnis dieser Analyse ist Abbildung 4.8 zu entnehmen. Bei kontinuierlicher Vergrößerung des Krümmungsradius nimmt die Abweichung für beide Trägervarianten rapide ab. Für eine gewisse geringe Krümmung ist der Fehler minimal und steigt hin zum vollständig geraden Träger wieder geringfügig an, bleibt dabei aber im Bereich von wenigen Promille. Für die zu Abbildung 4.4 analogen Verläufe im Querschnitt bedeutet das vollständige Deckungsgleichheit der Kurven für Balken- und Schalenlösung.

Es bleibt noch zu untersuchen, wie sich Dickenänderung und Anpassung des Teilkreiswinkels Φ_2 auf die Lösungen zum Standardparameterset auswirken. Abbildung 4.10 zeigt die Abweichungen ϵ_1 und ϵ_2 für beide Trägerformen bei Veränderung der Dicke h im Fall der Biegung aus der Ebene. Die beträchtliche Vergrößerung des Fehlers für sehr kleine Wandstärken ist eine Folge der in den Herleitungen zur Balkentheorie angenommenen Größenverhältnisse der charakteristischen Längen zueinander, vgl. (4.20). Die Verformung einer Struktur mit völlig anderen geometrischen Relationen als in der Balkentheorie vorausgesetzt kann naturgemäß nur sehr schlecht approximiert werden. Es existiert für beide Trägervarianten je ein optimales Parameterset, zu dem die Abweichungen minimal werden. Für den Träger mit positiver Krümmung ($\Delta\Phi_2 = 0$) wird dieses Minimum bei $h/a_2 \approx 0.08$, für jenen mit negativer Krümmung bei $h/a_2 \approx 0.05$ erreicht.

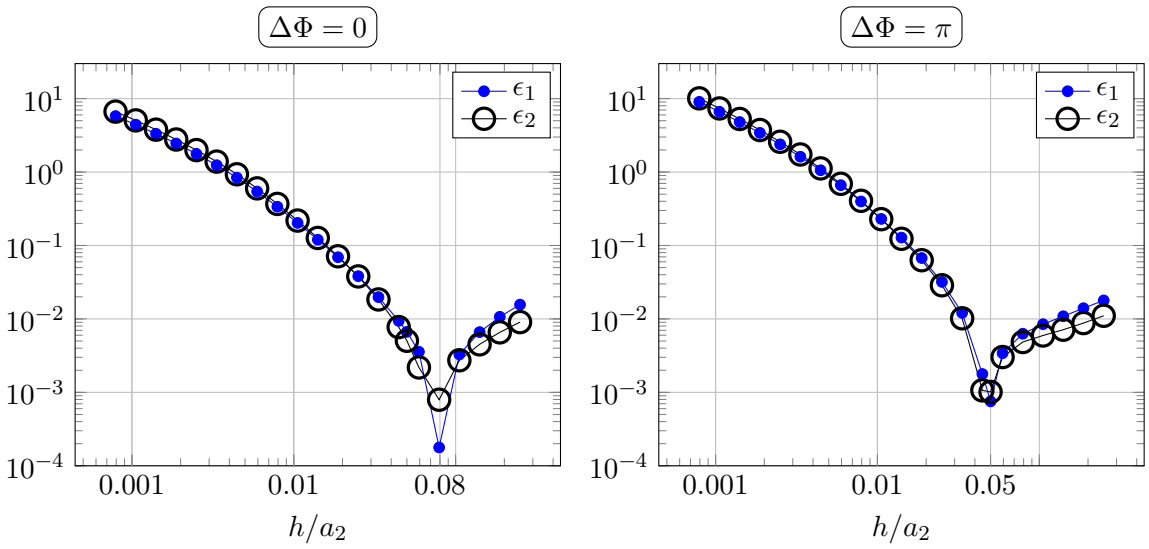


Abbildung 4.9: Biegung aus der Ebene; Abweichungen bei Anpassung der Wandstärke h

Bei der Veränderung des Teilkreiswinkels Φ_2 erhält man das doppelt logarithmische Diagramm 4.10 für Biegung aus der Ebene. Pro Trägervariante gibt es je einen optimalen Winkelwert, für den die Abweichungen minimal werden. Ausgehend von diesem Wert steigen die Fehlergrößen in beiden Richtungen an, wobei diese Zunahme beim Übergang zu kleineren Winkeln Φ_2 kleiner ausfällt. Maximal sind die Abweichungen für das geschlitzte, gekrümmte Rohr mit $\Phi_2 = \pi$. Für diesen Fall sind die Verläufe der Verschiebungslösungen in Abbildung 4.11 für beide Balkenformen gezeigt. Auch hier stimmen die Knotenpunktswerte außerordentlich gut mit der Regression (4.15) überein, weshalb die Verformung des Querschnittes in seiner Ebene für die ausgeprägten Abweichungen nicht verantwortlich sein kann. Die schubstarre Balkentheorie ist hier zwar in der Lage, die grundsätzliche Form der Deformation des Querschnitts wiederzugeben, sie reagiert aber wesentlich steifer als das Schalenmodell für dieses Parameterset.

Zum Abschluss dieses Kapitels sind in Tabelle 4.1 die Ergebnisse zu den geometrisch linearen Biegeproblemen für die in der folgenden Stabilitätsanalyse betrachteten Parametersets aus Tabelle 2.1 zusammengestellt. Die eingetragenen Werte für die Abweichungen ϵ_i können entsprechenden Punkten in den doppelt logarithmischen Abbildungen zugeordnet werden. In allen Fällen übersteigt der Fehler für die ebene Biegung ϵ_3 die der Biegung aus der Ebene zugeordneten Werte ϵ_1 und ϵ_2.

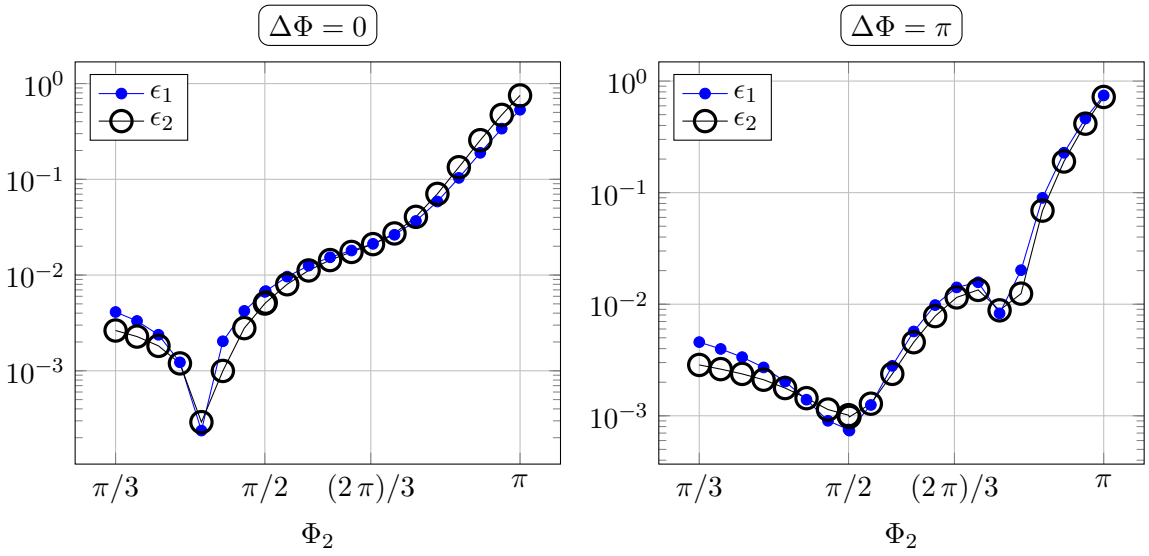


Abbildung 4.10: Biegung aus der Ebene; Abweichungen bei Anpassung des Winkels Φ_2

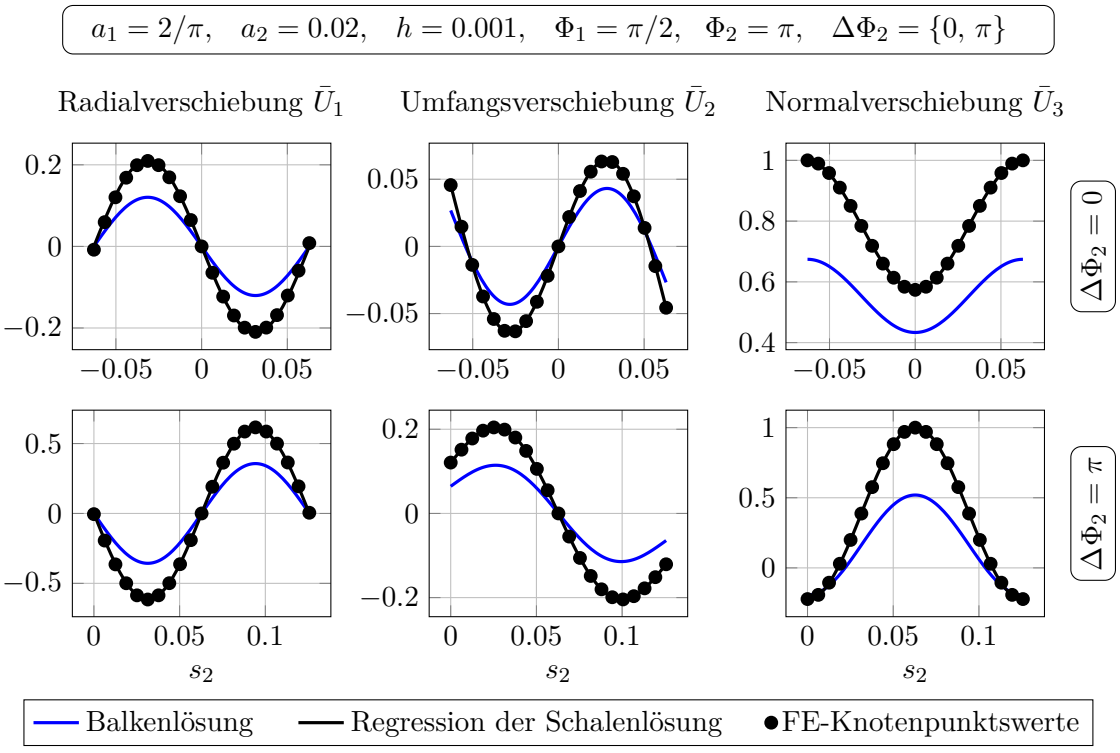


Abbildung 4.11: Biegung des geschlitzten Rohrs ($\Phi_2 = \pi$) aus der Ebene; Lösungen im Querschnitt der beiden Trägerformen: positive Gauß-Krümmung (oben) und negative Gauß-Krümmung (unten)

Parameter					$\Delta\Phi_2 = 0$			$\Delta\Phi_2 = \pi$		
NR.	S_1	$\frac{100}{\pi} S_2$	h	Φ_1	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3
1	1.00	1	1.0e−3	$\pi/2$	0.0067	0.0050	0.2453	0.0008	0.0010	0.2426
2	1.00	2/3	1.0e−3	$\pi/2$	0.0044	0.0071	0.1008	0.0046	0.0029	0.0803
3	1.00	3/2	1.0e−3	$\pi/2$	0.0355	0.0390	0.1430	0.0095	0.0096	0.1770
4	1.00	1	5.0e−4	$\pi/2$	0.0383	0.0380	0.8917	0.0320	0.0288	0.9090
5	1.00	1	2.5e−4	$\pi/2$	0.1494	0.1591	2.7788	0.1641	0.1599	3.0068
6	0.50	1	1.0e−3	$\pi/2$	0.0350	0.0369	0.8146	0.0139	0.0128	0.8368
7	0.25	1	1.0e−3	$\pi/2$	0.1049	0.1312	1.9413	0.0474	0.0645	2.3549

Tabelle 4.1: Abweichungen von den FE-Resultaten für die Parametersets aus Tabelle 2.1

5 Anwendung der inkrementellen Theorie zur Stabilitätsanalyse

Diese Kapitel beschäftigt sich mit der Anwendung der in Abschnitt 2.2.4 hergeleiteten inkrementellen Theorie zur Analyse der Strukturstabilität des gekrümmten Trägers, wenn der Balken durch eine Einzellast am freien Ende in seiner Symmetrieebene belastet wird. Die nichtlinearen Vordeformationen vor Stabilitätsverlust werden näherungsweise vernachlässigt. Das erlaubt die Verwendung der vereinfachten Konstitutivgleichungen (2.67) und die Darstellung der vektoriellen Größen in der materiellen Basis der Referenzkonfiguration gemäß $\boldsymbol{e}_i \approx \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i$, vgl. (2.52). Die numerischen Untersuchungen beschränken sich auf die Trägergeometrien aus Tabelle 2.1, es werden daher ausschließlich Viertelkreisträger mit $\Phi_1 = \pi/2$ untersucht. Zusätzlich werden die Ergebnisse aus [6] durch Grenzübergang des gekrümmten zum geraden Träger reproduziert.

5.1 Eigenwertproblem zur Knicklastberechnung

Das System ist statisch bestimmt und die Schnittgrößen des vorgespannten und näherungsweise undeformierten Gleichgewichtszustands vor Stabilitätsverlust können direkt aus den Gleichgewichtsbedingungen (2.56) berechnet werden. Aus der ersten Gleichung (2.56a) folgt wie bisher $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F}$, wobei die Totlast $\boldsymbol{F}$ in der Form (2.2) für $\alpha_1 = \pi/2$, d.h. Belastung in der Symmetrieebene, gegeben ist

$$\boldsymbol{F} = P\ (\cos(\alpha_2)\ \boldsymbol{e}_x + \sin(\alpha_2)\ \boldsymbol{e}_y)\ . \tag{5.1}$$

Bezüglich der Wirkungslinie der konzentrierten Last am freien Ende werden zwei Fälle unterschieden: Einleitung einer Normalkraft in Druckrichtung ($\alpha_2 = 0$ bzw. $\boldsymbol{F}/P = \boldsymbol{e}_x$) und Einleitung einer reinen, radial nach außen weisenden Querkraft ($\alpha_2 = \pi/2$ bzw. $\boldsymbol{F}/P = \boldsymbol{e}_y$). Das in der Referenzlage ($\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{t}$) angesetzte Momentengleichgewicht (2.56b) kann direkt nach $\boldsymbol{M}$ aufintegriert werden. Die Integrationskonstante wird aus der Randbedingung am freien Ende $\boldsymbol{M}\,(s_1 = S_1) = \boldsymbol{0}$ bestimmt und für die Darstellung der Schnittgrößen in der materiellen Basis ergibt sich

$$\boldsymbol{M} = M_3\,\boldsymbol{e}_3 = -P\,a_1\ [\cos(\alpha_2)\ (\sin(\Phi_1) - \sin(\varphi_1)) + \sin(\alpha_2)\ (\cos(\varphi_1) - \cos(\Phi_1))]\ \boldsymbol{e}_3 \tag{5.2a}$$

$$\boldsymbol{Q} = Q_1\,\boldsymbol{e}_1 + Q_t\,\boldsymbol{e}_2 = P\ [\cos(\alpha_2 - \varphi_1)\ \boldsymbol{e}_1 + \sin(\alpha_2 - \varphi_1)\ \boldsymbol{e}_2]\ . \tag{5.2b}$$

Die Verzerrungsenergie der inkrementellen Theorie unterscheidet sich von jener der linearen Theorie insbesondere durch die Anwesenheit des kubischen Kopplungsterms. Die Korrektur der Torsionssteifigkeit $\tilde{a}_t$ in diesem Term hat einen wesentlichen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten der Struktur. Nach Substitution der Querschnittsgrößen für die konkrete Problemgeometrie aus Abschnitt 2.2.1 in der Definition für $\tilde{a}_t$ (2.68) ergibt sich

$$\tilde{a}_t = -\left(2\, d_{\mathrm{SP}} \cos(\Delta\Phi_2)\right)\, M_3 + \left(a_2^2 - d_{\mathrm{SP}}^2\right)\, Q_t\,, \tag{5.3}$$

mit der Komponente des Biegemoments M_3 für Biegung in der Ebene und der Tangentialkraft Q_t aus (5.2). Vor der numerischen Untersuchung ist es hilfreich zu wissen, für welche Belastungsrichtungen (ausgedrückt durch α_2) eine Reduktion der Torsionssteifigkeit bei Steigerung der Last P auftritt und dadurch Biegedrillknicken begünstigt wird. Im umgekehrten Fall einer Vergrößerung der Torsionssteifigkeit wird zwar der Stabilitätsverlust durch Biegedrillknicken erschwert, aber nicht zwangsläufig verhindert. Eine Verringerung der effektiven Torsionssteifigkeit $a_t + \tilde{a}_t$ im betrachteten Punkt s_1 tritt genau dann auf, wenn $\frac{\partial \tilde{a}_t}{\partial P} < 0$ gilt. Der Korrekturterm skaliert über die Schnittgrößen (5.2) linear mit P und seine Veränderung bei Laststeigerung wird deshalb durch die Vorzeichen der beiden Terme in (5.3) bestimmt. Der Koeffizient der Tangentialkraft ist wegen $d_{\mathrm{SP}} \leq a_2$ stets positiv, das Vorzeichen des Koeffizienten bei M_3 hängt von der Trägervariante, d.h. von $\Delta\Phi_2$, ab. Für den Träger mit negativer Gaußkrümmung ist $\Delta\Phi_2 = \pi$ und beide Koeffizienten sind positiv. In diesem Fall verringert sich in beiden betrachteten Lastfällen die Torsionssteifigkeit im gesamten Balken. Diese Trägerform ist daher für diese Lastfälle hinsichtlich Biegedrillknicken wesentlich empfindlicher als der Träger mit positiver Krümmung. Für Letzteren verringert sich die Torsionssteifigkeit bei Kraftrichtung $\boldsymbol{e}_x$ (Normalkraft) nur in einem Teil des Balkens, während sie sich für die Richtung $\boldsymbol{e}_y$ (Querkraft) im gesamten Träger sogar vergrößert.

Die Herleitung eines Differentialgleichungssystems für die kleinen Verdrehungen $\boldsymbol{\theta}$ verläuft völlig analog zur linearen Analyse. Das Inkrement der Totlast $\boldsymbol{F}$ verschwindet und es treten weder verteilte Kräfte $\boldsymbol{q}$ noch verteilte Momente $\boldsymbol{m}$ auf. Daraus folgt unter Berücksichtigung der Randbedingung am freien Ende aus der ersten Gleichgewichtsbedingung (2.56a) für das Inkrement der Schnittkraft sofort $\boldsymbol{Q}^\bullet = \boldsymbol{F}^\bullet = \boldsymbol{0}$. Mit der Schnittkraft des Vorspannungszustands aus (5.2b) reduziert sich die zweite Gleichgewichtsbedingung zu

$$\boldsymbol{M}^{\bullet\prime} + \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}\,. \tag{5.4}$$

Die Ableitung des Inkrements des Momentenvektors $\boldsymbol{M}^{\bullet\prime}$ folgt aus den Konstitutivgleichungen (2.67), wenn man (2.67a) ableitet und darin die Ableitungen des Bimomentes mithilfe (2.67b) substitutiert. Das ausformulierte Momentengleichgewicht wird auf die Richtungen $\boldsymbol{e}_i$ projiziert und bildet so ein System dreier Gleichungen für die Komponenten θ_i in der materiellen Basis. Das

allgemeine Differentialgleichungssystem für den kreisförmig gekrümmten Träger ist recht groß, weshalb auf die explizite Angabe verzichtet wird. Eine Überprüfung der Gleichungen kann durch den Vergleich mit jenen des geraden Trägers geschehen, wenn man den Grenzübergang $a_1 \to \infty$ durchführt, siehe (5.6). Die Randbedingungen für die inkrementellen Größen lauten vollkommen analog zum linearen Problem, vgl. (4.6),

$$\boldsymbol{\theta}\,(s_1 = 0) = 0 \qquad \boldsymbol{M}^{\bullet}\,(s_1 = S_1) = 0 \tag{5.5a}$$

$$\theta_2'\,(s_1 = 0) = 0 \qquad B^{\bullet}\,(s_1 = S_1) = 0\,. \tag{5.5b}$$

Das Randwertproblem für die Verdrehung θ_3 entkoppelt wieder und lässt sich nur trivial lösen. Die gekoppelten Gleichungen für θ_1 und θ_2 bilden nach einmaliger Reduktion der Ordnung ein System zweier linearer, homogener Randwertprobleme dritter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Dieses homogene System besitzt nur für kritische Werte der Last P nichttriviale Lösungen. Die Lösung dieses Eigenwertproblems in P für ein konkretes Parameterset geschieht mithilfe einer Abwandlung des Schießverfahrens für lineare Systeme aus [1]. Der genaue Ablauf dieses Verfahrens wird im folgenden Abschnitt behandelt.

Zur Überprüfung der Differentialgleichungen und der korrekten Implementierung des Lösungsverfahrens zur Eigenwertberechnung kann man das Randwertproblem für den gekrümmten Träger durch den Grenzübergang $a_1 \to \infty$ spezialisieren. Dadurch verschwindet die Krümmung der Achse und der Balken geht in den geraden Träger der Länge S_1 über, dessen Stabilitätsverhalten in [6] bereits mithilfe der inkrementellen Theorie untersucht wurde. Wird der Grenzübergang für das Randwertproblem des gekrümmten Viertelkreisträgers mit positiver Gauß-Krümmung ($\Delta\Phi_2 = 0$) und Belastung in negativer x-Richtung durchgeführt, so findet man die Differentialgleichungen

$$P\,(S_1 - s_1)\,\theta_2 + a_{11}\,\theta_1' - \beta\,E\,\theta_2'' = 0 \tag{5.6a}$$

$$P\,(S_1 - s_1)\,\theta_1' - 2\,P\,d_{\mathrm{SP}}\,\theta_2' - (a_{22} - 2\,P\,d_{\mathrm{SP}}\,(S_1 - s_1))\,\theta_2'' - \beta\,E\,\theta_1''' + J_0\,E\,\theta_2^{IV} = 0\,. \tag{5.6b}$$

Sie sind vollkommen identisch zu den in [6] präsentierten. Zur Kontrolle des Lösungsverfahrens konnten mithilfe dieser Gleichungen die kritischen Lasten für den geraden Träger aus [6] erfolgreich reproduziert werden.

5.2 Schießverfahren zur Eigenwertberechnung

Das in dieser Arbeit verwendete Schießverfahren wurde [1] entnommen und unter Zuhilfenahme der Ausführungen zu linearen Anfangswertproblemen in [4] geringfügig adaptiert. Die aus den Herleitungen der inkrementellen Stabilitätsanalyse hervorgehenden Differentialgleichungssysteme stammen aus der Klasse der linearen, homogenen Differentialgleichungen mit variablen Koeffizien-

ten. Die einzelnen Gleichungen sind von dritter Ordnung und können durch Einführung neuer abhängiger Variablen gemäß

$$\{\theta_1'',\, \theta_2'',\, \theta_1',\, \theta_2',\, \theta_1,\, \theta_2\}^{\mathrm{T}} = \{y\} \tag{5.7}$$

in ein System von sechs Gleichungen erster Ordnung transformiert werden. Die Umformulierung des Randwertproblems in $\boldsymbol{\theta}$ als System in der Spaltenmatrix $\{y\}$ führt auf

$$\{\boldsymbol{A}\} \cdot \{y'\} = \{\boldsymbol{B}\} \cdot \{y\} \tag{5.8a}$$

$$s_1 = 0: \quad \{\boldsymbol{R_l}\} \cdot \{y\} = \{0\} \tag{5.8b}$$

$$s_1 = S_1: \quad \{\boldsymbol{R_r}\} \cdot \{y\} = \{0\}\ . \tag{5.8c}$$

Die Matrizen $\{\boldsymbol{A}\}$ und $\{\boldsymbol{B}\}$ enthalten die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems, wobei $\{\boldsymbol{B}\}$ eine Funktion in s_1 ist und zusätzlich die Last P als Parameter enthält. Die Matrizen der Randbedingungen $\{\boldsymbol{R_l}\}$ für den linken bzw. $\{\boldsymbol{R_r}\}$ für den rechten Rand sind nur spärlich besetzt und nicht invertierbar.

Ein dem Randwertproblem zugeordnetes Anfangswertproblem zum Anfangswert $\{\hat{y}\}$ kann geschrieben werden als

$$\{\boldsymbol{A}\} \cdot \{y'\} = \{\boldsymbol{B}\} \cdot \{y\} \tag{5.9a}$$

$$s_1 = 0: \quad \{y\} = \{\hat{y}\}\ . \tag{5.9b}$$

Unter der Voraussetzung stetiger Funktionen $\{\boldsymbol{A}\}$ und $\{\boldsymbol{B}\}$ verfügt das Anfangswertproblem stets über eine eindeutige Lösung. Kennt man eine Fundamentallösung, so kann jede beliebige Lösung des Anfangswertproblems aus dieser konstruiert werden. Ein Fundamentalsystem für ein m-dimensionales Problem wird von m linear unabhängigen Lösungen $\{y_i\}$ gebildet, die den Vektorraum aller Lösungen aufspannen. Jede Lösung $\{y\}$ ist dann als Linearkombination der Basis $\{y_i\}$ mit $i \in [1,\, m]$ darstellbar

$$\{y\} = c_i\ \{y_i\}\ . \tag{5.10}$$

Im vorliegenden Fall ist $m = 6$ und ein System von Lösungen $\{y_i\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn für die Wronski-Determinante gilt

$$s_1 = 0: \quad |\,\{y_1\}\,,\, \{y_2\}\,,\, \ldots\,,\, \{y_6\}\,| \neq 0\,. \tag{5.11}$$

Wählt man als Anfangswerte für die Lösungen $\{y_i\}$ konkret die Spalten der Einheitsmatrix, so ist die Wronski-Determinante 1 und das System $\{y_i\}$ linear unabhängig. Des Weiteren dürfen für dieses speziell konstruierte Fundamentalsystem die Koeffizienten c_i in der Linearkombination

(5.10) direkt durch die Anfangswerte $\hat{y}_i$ ersetzt werden gemäß

$$\{y\} = \hat{y}_i \, \{y_i\} \, . \tag{5.12}$$

Es bleibt zu untersuchen, ob im vom Fundamentalsystem aufgespannten Vektorraum eine nichttriviale Lösung zum gegebenen Randwertproblem existiert. Wenn eine solche existiert, lässt sich ein Anfangswertproblem mit speziellem $\{\hat{y}\}$ derart konstruieren, dass dessen Lösung alle Randbedingungen erfüllt.

In allen hier betrachteten Fällen liegen gemäß (5.5) am linken Rand $s = 0$ homogene Randbedingungen vor. Mit der gewählten Aufspaltung (5.7) für das System erster Ordnung folgt damit für den trivialen Anteil der Anfangsbedingungen

$$s_1 = 0 : \qquad \theta_2' = \hat{y}_4 = 0 \quad \theta_1 = \hat{y}_5 = 0 \quad \theta_2 = \hat{y}_6 = 0 \, . \tag{5.13}$$

Um eine nichttriviale Lösung des Randwertproblems mit (5.12) zu konstruieren, kommt aus diesem Grund nur der erste Teil des Fundamentalsystems $\{y_j\}$ bis zum Index $j = 3$ in Frage. Die Integration der Anfangswertprobleme zu den anderen Lösungen erübrigt sich daher. Der verbliebene Teil der Fundamentallösung erfüllt die Randbedingungen am linken Ende (5.8b) identisch, während am rechten Ende (5.8c) gefordert werden muss

$$s_1 = S_1 : \quad \{\boldsymbol{R}_\mathbf{r}\} \cdot (\hat{y}_j \, \{y_j\}) = \{0\} \, . \tag{5.14}$$

Das ist ein lineares, homogenes Gleichungssystem zur Berechnung der drei unbekannten Koeffizienten $\hat{y}_j$. Es ist nur dann nichttrivial lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet. Die Lösungen $\{y_j\}$ enthalten den Lastfaktor P als Parameter, weshalb die Nullstellensuche zur Koeffizientendeterminante aus (5.14) die Lösung der charakteristischen Gleichung bedeutet.

Anstatt P als Unbekannte im System zu halten und in einem Schritt den kritischen Wert zu berechnen, ist eine iterative Berechnung der kritischen Last aus numerischer Sicht sinnvoller. Es genügt hier in Mathematica dem Nullstellensucher FindRoot eine Funktion in P zu übergeben, welche das beschriebene Schießverfahren durchführt und als Ergebnis den Wert der Determinante zurückgibt. Setzt man den iterativ berechneten Eigenwert in (5.14) ein, kann die Knickform durch Auflösung des Gleichungssystems nach $\{\hat{y}\}$ bis auf den Betrag rekonstruiert werden, da dann die Linearkombination

$$\{y\} = \hat{y}_j \, \{y_j\} \, . \tag{5.15}$$

eine Lösung des Randwertproblems (5.8) beschreibt.

Nr.	$S_1 = a_1\,\Phi_1$	a_1	a_2	h	Φ_1	Φ_2	E	ν
1	1	$2/\pi$	0.02	0.001	$\pi/2$	$\pi/2$	2.1e11	0.3

Tabelle 5.1: Wiederholung des Standardparametersets 1 aus Tabelle 2.1

5.3 Resultate der Knicklastberechnung

Die Ergebnisse der Knicklastberechnungen für die unterschiedlichen Parametersets aus Tabelle 2.1 sind in den Tabellen 5.2 bis 5.5 angeführt. Es wurden Knicklasten in zwei Kraftrichtungen $\boldsymbol{F}/P = \{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ (Normalkraft und Querkraft) für beide Trägervarianten $\Delta\Phi_2 = \{0, \pi\}$ auf vier verschiedene Arten ermittelt: Die Werte P_B sind die mithilfe der inkrementellen Balkentheorie ermittelten Knicklasten, während mit P_S die Resultate der Berechnungen mit shellFE an imperfektionsfreien Schalenmodellen benannt werden. Die übrigen beiden Größen $P^{\mathrm{incr}}_{\mathrm{Abqs}}$ und $P^{\mathrm{nl}}_{\mathrm{Abqs}}$ stammen aus Schalen-FE-Berechnungen mit dem kommerziellen FE-Programm Abaqus. Die Modelle in Abaqus wurden besonders fein mit dem Schalenelement S4 der Standardelementbibliothek diskretisiert. Bei diesem Element handelt sich um ein linear interpoliertes, voll integriertes Kontinuums-Schalenelement mit vier Knoten. Zur Berechnung der kritischen Lasten mit Abaqus wurden sowohl Anfangsstabilitätsanalysen als auch begleitende Eigenwertanalysen durchgeführt. In der Anfangsstabilitätsanalyse bleiben geometrisch nichtlineare Vordeformationen wie in der inkrementellen Balkentheorie außer Betracht. Die Knicklasten dieser Analyse $P^{\mathrm{incr}}_{\mathrm{Abqs}}$ ermöglichen daher einen ebenbürtigen Vergleich mit den Ergebnissen der inkrementellen Balkentheorie. Zusätzlich kann anhand der Abweichungen zu den kritischen Lasten der nichtlinearen, begleitenden Eigenwertanalyse $P^{\mathrm{nl}}_{\mathrm{Abqs}}$, die Bedeutung der Vordeformationen für das Stabilitätsverhalten beurteilt werden.

In den ersten beiden Spalten der folgenden Tabellen wird jeweils das Parameterset gemäß Tabelle 2.1 mit seiner Nummer identifiziert und allenfalls der Wert jenes Parameters angegeben, der sich vom Standardparameterset 1 unterscheidet, welches in Tabelle 5.1 nochmals wiederholt wird. Neben den Knicklasten werden die relativen Abweichungen der Balkenlösung P_B zur Schalenlösung von shellFE und zum Ergebnis der Anfangsstabilitätsanalyse $P^{\mathrm{incr}}_{\mathrm{Abqs}}$ betrachtet. Ferner werden die beiden nichtlinearen Schalenberechnungen miteinander verglichen und in der letzten Spalte die bezogenen Abweichungen zwischen Anfangsstabilitätsanalyse und begleitender Eigenwertanalyse angegeben.

In einigen Fällen wird mit *error* auf das Scheitern der Balkenrechnung hingewiesen. Grund dafür sind numerische Konvergenzprobleme des Schießverfahrens, die bereits bei der Behandlung des linearen Problems in Kapitel 4 beobachtet wurden. Wegen der numerischen Schwierigkeiten mit dem Schießverfahren wäre zur Berechnung der noch fehlenden Werte der Übergang zu einem anderen Verfahren (z.B. finite Differenzen) ratsam.

Parameterset		Knicklasten				Relative Abweichungen			
Nr.	speziell	P_B	P_S	$P^\mathrm{incr}_\mathrm{Abqs}$	$P^\mathrm{nl}_\mathrm{Abqs}$	$\frac{P_\mathrm{S}}{P_\mathrm{B}} - 1$	$\frac{P^\mathrm{incr}_\mathrm{Abqs}}{P_\mathrm{B}} - 1$	$\frac{P_\mathrm{S}}{P^\mathrm{nl}_\mathrm{Abqs}} - 1$	$\frac{P^\mathrm{incr}_\mathrm{Abqs}}{P^\mathrm{nl}_\mathrm{Abqs}} - 1$
1	standard	16.58	16.63	16.32	16.35	+0.003	−0.016	0.017	−0.002
2	$\Phi_2 = \pi/3$	*error*	8.251	8.033	8.120			0.016	−0.011
3	$\Phi_2 = 3\,\pi/4$	62.09	59.95	59.17	59.08	−0.034	−0.047	0.015	+0.002
4	$h = 5\mathrm{e}{-4}$	3.088	3.014	2.974	2.974	−0.024	−0.037	0.013	±0.000
5	$h = 2.5\mathrm{e}{-4}$	.7085	.6332	.6225	.6244	−0.106	−0.121	0.014	−0.003
6	$S_1 = 0.5$	105.7	103.2	102.1	101.9	−0.024	−0.034	0.013	+0.002
7	$S_1 = 0.25$	771.0	718.3	712.8	709.6	−0.068	−0.075	0.012	+0.005

Tabelle 5.2: Ergebnisse der Stabilitätsanalyse; Träger mit positiver Krümmung ($\Delta\Phi_2 = 0$), Kraftrichtung $\boldsymbol{F}/P = \boldsymbol{e}_x$ (Normalkraft)

In Tabelle 5.2 werden die ersten Ergebnisse zum Träger mit positiver Gauß-Krümmung bei Belastung in positiver x-Richtung, d.h. bei Einleitung einer Druckkraft am freien Ende, präsentiert. Der Einfluss der geometrischen Nichtlinearität auf das Resultat der Stabilitätsanalyse ist hier in allen Fällen vernachlässigbar, wie der letzten Spalte entnommen werden kann. Große Fehler der mit der inkrementellen Theorie berechneten Knicklasten P_B gegenüber den Werten der Schalenberechnungen, bedeuten daher tatsächlich eine unzulängliche Genauigkeit der Balkentheorie für das gegebene Parameterset. Der mit Abstand größte Fehler ist für das Set 5 mit der kleinsten Wandstärke $h = 2.5\mathrm{e}{-4}$ zu beobachten. Auch in den übrigen Lastfällen sind die Abweichungen für dieses Set stets beträchtlich. Dieser Umstand ist in Relation zum in Abbildung 4.9 gezeigten Konvergenzverhalten beim linearen Biegeproblem für die Veränderung der Dicke h zu sehen: Wenn das Größenverhältnis h/a_2 des aktuellen Parametersets zu stark von dem in den Herleitungen zur Balkentheorie angenommenen Wert abweicht, verschlechtern sich die Ergebnisse. Der Vergleich der beiden mit der nichtlinearen Schalentheorie berechneten Knicklasten in der vorletzten Spalte zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der mit shellFE und Abaqus berechneten Ergebnisse. Die Abweichungen sind hier stets kleiner als 2 %.

Parameterset		Knicklasten				Relative Abweichungen			
Nr.	speziell	P_B	P_S	$P^\mathrm{incr}_\mathrm{Abqs}$	$P^\mathrm{nl}_\mathrm{Abqs}$	$\frac{P_\mathrm{S}}{P_\mathrm{B}}-1$	$\frac{P^\mathrm{incr}_\mathrm{Abqs}}{P_\mathrm{B}}-1$	$\frac{P_\mathrm{S}}{P^\mathrm{nl}_\mathrm{Abqs}}-1$	$\frac{P^\mathrm{incr}_\mathrm{Abqs}}{P^\mathrm{nl}_\mathrm{Abqs}}-1$
1	standard	67.19	77.21	65.80	74.23	+0.149	−0.021	0.040	−0.114
2	$\Phi_2=\pi/3$	*error*	k.A.	37.34	78.09				−0.522
3	$\Phi_2=3\,\pi/4$	183.2	185.2	172.4	181.0	+0.011	−0.059	0.023	−0.048
4	$h=5\mathrm{e}{-4}$	10.55	11.02	10.21	10.69	+0.045	−0.032	0.031	−0.045
5	$h=2.5\mathrm{e}{-4}$	2.056	1.962	1.830	1.899	−0.046	−0.110	0.033	−0.036
6	$S_1=0.5$	*error*	k.A.	696.8	1244				−0.440
7	$S_1=0.25$	Kein Biegedrillknicken für diesen Lastfall							

Tabelle 5.3: Ergebnisse der Stabilitätsanalyse; Träger mit positiver Krümmung ($\Delta\Phi_2=0$), Kraftrichtung $\boldsymbol{F}/P=\boldsymbol{e}_y$ (Querkraft)

Wie im Zuge der Diskussionen zum Korrekturfaktor $\tilde{a}_t$ unterhalb der Formel (5.3) festgestellt wurde, wird der Stabilitätsverlust durch Biegedrillknicken bei Belastung des Trägers mit positiver Gauß-Krümmung in y-Richtung erschwert, weil die Einleitung einer radial nach außen wirkenden Querkraft am freien Ende die effektive Torsionssteifigkeit der Struktur vergrößert. Aus diesem Grund erfährt der Balken vor Knicken viel größere Deformationen und der Einfluss der Vordeformationen auf die Stabilitätsanalyse steigt, wie Tabelle 5.3 zu entnehmen ist. Da für das Standardset Nr.1 gemäß der letzten Spalte große Verformungen vor Knicken auftreten, unterscheidet sich P_B zwar beträchtlich von P_S, aber nicht von der kritischen Last der Anfangsstabilitätsanalyse $P^\mathrm{incr}_\mathrm{Abqs}$. Für das Parameterset 3 sind die Vordeformationen weniger bedeutend und P_B stimmt mit P_S sogar besser überein als mit $P^\mathrm{incr}_\mathrm{Abqs}$. Größere Fehler sind wieder für den Träger mit $h=2.5\mathrm{e}{-4}$ zu verzeichnen und für den gedrungenen Träger zum Set 7 tritt schließlich gar kein Biegedrillknicken mehr auf. Nachdem ohnehin keine Ergebnisse aus der inkrementellen Balkenrechnung gewonnen werden konnten, wurde für die Parametersets 2 und 6 auf die Berechnung der Knicklasten mit shellFE verzichtet. Die Rechnungen mit Abaqus zeigen klar den Stabilitätsverlust durch Biegedrillknicken für diese Trägergeometrien an.

Die Belastung des Trägers mit negativer Krümmung durch eine reine Druckkraft am freien Ende in x-Richtung stellt den hinsichtlich Biegedrillknicken günstigsten aller untersuchten Fälle dar. Konsequenterweise sind die Verformungen vor Knicken gering und die Unterschiede zwischen den Knicklasten der Anfangsstabilitätsanalyse und den kritischen Werten der begleitenden Eigen-

Parameterset		Knicklasten				Relative Abweichungen			
Nr.	speziell	P_{B}	P_{S}	$P^{\mathrm{incr}}_{\mathrm{Abqs}}$	$P^{\mathrm{nl}}_{\mathrm{Abqs}}$	$\frac{P_{\mathrm{S}}}{P_{\mathrm{B}}}-1$	$\frac{P^{\mathrm{incr}}_{\mathrm{Abqs}}}{P_{\mathrm{B}}}-1$	$\frac{P_{\mathrm{S}}}{P^{\mathrm{nl}}_{\mathrm{Abqs}}}-1$	$\frac{P^{\mathrm{incr}}_{\mathrm{Abqs}}}{P^{\mathrm{nl}}_{\mathrm{Abqs}}}-1$
1	standard	13.57	13.68	13.46	13.46	+0.008	−0.008	0.016	±0.000
2	$\Phi_2=\pi/3$	*error*	6.625	6.509	6.531			0.018	−0.003
3	$\Phi_2=3\,\pi/4$	61.59	61.90	61.13	60.98	+0.005	−0.007	0.015	+0.002
4	$h=5\mathrm{e}{-4}$	2.657	2.605	2.571	2.569	−0.020	−0.032	0.014	+0.001
5	$h=2.5\mathrm{e}{-4}$	.6489	.5739	.5644	.5651	−0.130	−0.130	0.016	−0.001
6	$S_1=0.5$	78.70	77.68	77.42	76.99	−0.013	−0.016	0.009	+0.006
7	$S_1=0.25$	564.8	513.2	537.8	509.9	−0.091	−0.048	0.006	+0.055

Tabelle 5.4: Ergebnisse der Stabilitätsanalyse; Träger mit negativer Krümmung ($\Delta\Phi_2=\pi$), Kraftrichtung $\boldsymbol{F}/P=\boldsymbol{e}_x$ (Normalkraft)

wertanalyse in Tabelle 5.4 sind vernachlässigbar. Die Übereinstimmung aller Ergebnisse in dieser Tabelle ist grundsätzlich gut. Die schlechtesten Resultate erhält man erwartungsgemäß für den Träger mit der dünnsten Wandstärke Nr.5 und den gedrungen Balken Nr.7.

Ganz ähnlich fällt die Beurteilung der Ergebnisse in Tabelle 5.5 bei Belastung des Trägers mit negativer Krümmung durch eine Querkraft in radialer Richtung aus. Der Einfluss der Vordeformationen ist immer noch gering aber bereits etwas größer als bei Einleitung einer Druckkraft am freien Ende. Demgemäß ist die Übereinstimmung von P_{B} mit $P^{\mathrm{incr}}_{\mathrm{Abqs}}$ mit Ausnahme der beiden Sets 4 und 5 besser als mit der kritischen Last P_{S} aus der Schalenrechnung. Für die Sets 4 und 5 kompensiert die verminderte Genauigkeit für kleinere Wandstärken h zufällig den Fehler durch Vernachlässigung der nichtlinearen Vordeformationen im Balkenmodell, was insgesamt zu einer besseren Übereinstimmung mit der kritischen Last der Schalenberechnung führt. Grundsätzlich stellt aber die Abweichung gegenüber der Knicklast $P^{\mathrm{incr}}_{\mathrm{Abqs}}$ der Anfangsstabilitätsanalyse das sinnvollere Fehlermaß dar. Es steigt erwartungsgemäß sowohl für die verminderten Wandstärken in den Sets 4 und 5 als auch beim Übergang zu schalenartigen Trägern in den beiden Sets 6 und 7 an.

Die Größenordnung der für die obigen Analysen festgestellten Abweichungen korrespondiert gut mit den Ergebnissen für den geraden Träger in [6]. Oftmals sind die Fehler sogar wesentlich kleiner, weil der hier betrachtete gekrümmte Viertelkreisbalken besonders anfällig für Biegedrillknicken ist und daher die Vordeformationen vor Stabilitätsverlust klein bleiben. Es ist auch bemerkenswert,

Parameterset		Knicklasten				Relative Abweichungen			
Nr.	speziell	P_{B}	P_{S}	$P^{\mathrm{incr}}_{\mathrm{Abqs}}$	$P^{\mathrm{nl}}_{\mathrm{Abqs}}$	$\frac{P_{\mathrm{S}}}{P_{\mathrm{B}}} - 1$	$\frac{P^{\mathrm{incr}}_{\mathrm{Abqs}}}{P_{\mathrm{B}}} - 1$	$\frac{P_{\mathrm{S}}}{P^{\mathrm{nl}}_{\mathrm{Abqs}}} - 1$	$\frac{P^{\mathrm{incr}}_{\mathrm{Abqs}}}{P^{\mathrm{nl}}_{\mathrm{Abqs}}} - 1$
1	standard	27.10	28.34	26.88	27.68	+0.046	−0.008	0.024	−0.029
2	$\Phi_2 = \pi/3$	*error*	17.74	15.58	17.20			0.031	−0.094
3	$\Phi_2 = 3\,\pi/4$	93.07	95.10	92.13	93.78	+0.022	−0.010	0.014	−0.018
4	$h = 5\mathrm{e}{-4}$	4.684	4.721	4.555	4.622	+0.008	−0.028	0.021	−0.014
5	$h = 2.5\mathrm{e}{-4}$	.9983	.9152	.8810	.8980	−0.083	−0.117	0.019	−0.019
6	$S_1 = 0.5$	117.1	122.4	115.2	120.4	+0.045	−0.016	0.017	−0.043
7	$S_1 = 0.25$	594.7	620.9	572.0	614.3	+0.044	−0.038	0.011	−0.069

Tabelle 5.5: Ergebnisse der Stabilitätsanalyse; Träger mit negativer Krümmung ($\Delta\Phi_2 = \pi$), Kraftrichtung $\boldsymbol{F}/P = \boldsymbol{e}_y$ (Querkraft)

dass sehr geringe Abweichungen in den kritischen Lasten berechnet werden konnten, obwohl insbesondere für die Biegung des Viertelkreisträgers in der Ebene bei der linearen Analyse in Abschnitt 4.1.1 zum Teil beträchtliche Unterschiede zur Schalenlösung festgestellt wurden.

Zum Abschluss der inkrementellen Analyse sind in Abbildung 5.1 die Knickformen der beiden Trägervarianten für die betrachteten Lastfälle zum Standardparameterset gezeigt. Es wird jeweils die undeformierte Referenzlage neben der Eigenform dargestellt. Die Lösungen zum Träger mit positiver Gauß-Krümmung ($\Delta\Phi_2 = 0$) sind in der ersten Zeile, jene zum Träger mit negativer Krümmung in der zweiten abgebildet. In den Bildern der ersten Spalte wirkt am freien Ende der Balken eine Druckkraft ($\boldsymbol{F}/P = \boldsymbol{e}_x$), während für die Darstellungen der zweiten Spalte eine reine, radial nach außen weisende Querkraft ($\boldsymbol{F}/P = \boldsymbol{e}_y$) eingeleitet wird. Nachdem die Vordeformationen vernachlässigt wurden und das Randwertproblem in θ_3 nur die triviale Lösung besitzt, treten weder vor noch nach Stabilitätsverlust Verformungen in der Symmetrieebene auf. Der Stabilitätsverlust nimmt daher in allen vier Fällen die Form einer gekoppelten Biege-Torsions-Deformation in Normalenrichtung $\boldsymbol{e}_z$ an. Die scheinbare Verformung der Querschnitte in ihrer Ebene in diesen Bildern ist eine Folge der Skalierung der linearisierten Kinematik gemäß (2.70).

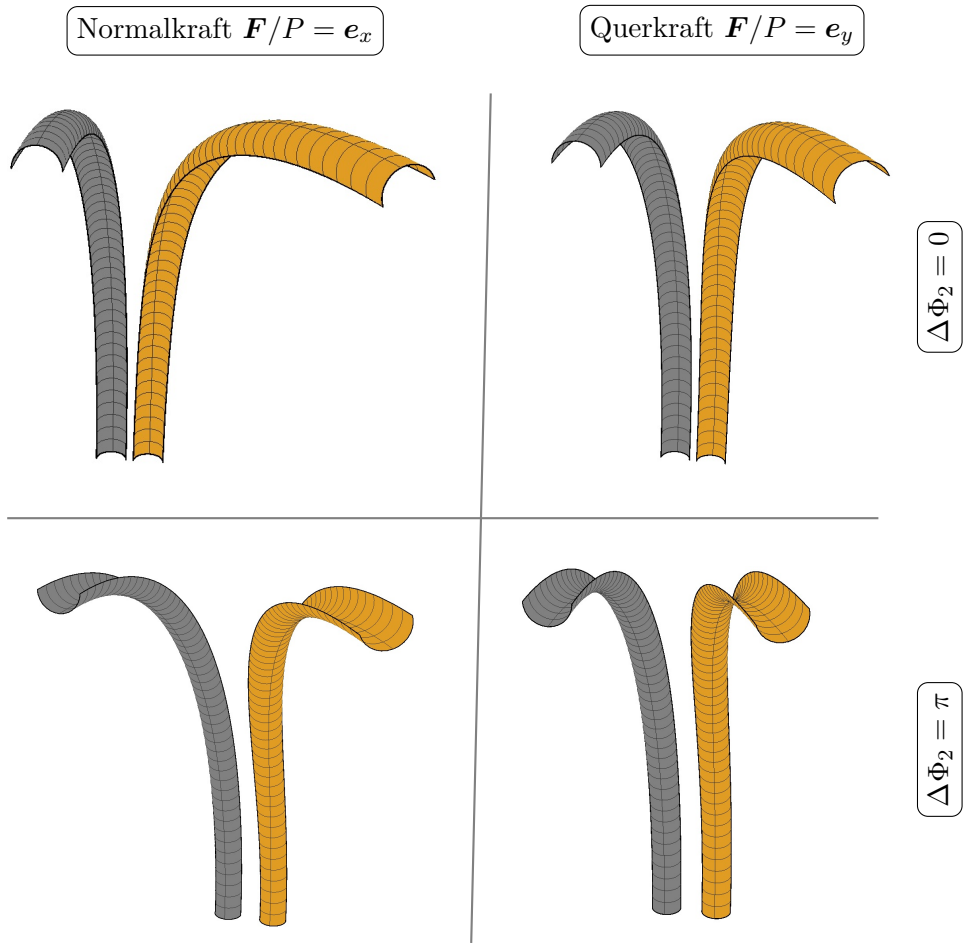


Abbildung 5.1: Stabilitätsanalyse mit den Gleichungen der inkrementellen Theorie; Darstellung der Knickformen für beide Trägervarianten bei Belastung mit Normal- bzw. Querkraft

6 Stabilitätsanalyse mit globalen Ritz-Ansätzen

In diesem Kapitel wird das Stabilitätsverhalten des gekrümmten Balkens mithilfe der globalen Ritz-Methode analysiert. Die Bewegung des Balkens wird durch Ansatzfunktionen mit unbekannten Koeffizienten approximiert und dadurch das Variationsproblem zur Berechnung von Gleichgewichtslagen diskretisiert. Stabilitätsverlust durch Divergenz tritt genau dann ein, wenn das Gesamtpotential in der eingenommenen Gleichgewichtslage kein Minimum mehr besitzt. Wird die ideale Struktur durch eine imperfekte ersetzt, können Nachbeulpfade für überkritische Lasten konstruiert werden, sofern die Struktur über den kritischen Wert hinaus belastbar ist.

Es wird die geometrisch nichtlineare Theorie aus Abschnitt 2.2 für schubstarre, dehnbare Balken mit der Zwangsbedingung (2.47) zur Kopplung der Verwölbung an die Verdrillung betrachtet. Dann berechnet sich die gesamte elastische Verzerrungsenergie Π aus der Integration der Verzerrungsenergiedichte U (2.50) über die Gesamtlänge S_1

$$\Pi = \int_0^{S_1} \left[\frac{1}{2}\, \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\kappa} + \frac{1}{2}\, E\, A\, \varepsilon^2 + \frac{1}{2}\, E\, J_0\, \kappa_t'^2 - E\, \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\kappa}\, \kappa_t' + \frac{1}{2}\, \tilde{a}_t\, \kappa_t^2 \right] \mathrm{d}s_1 \tag{6.1}$$

mit der Korrektur der Torsionssteifigkeit $\tilde{a}_t\,(\varepsilon,\, \kappa_i)$ gemäß (2.79c). Das Potential der externen Kräfte bei konzentrierter Belastung $\boldsymbol{F}$ am freien Ende ist gegeben durch

$$W = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}\,(s_1 = S_1) \tag{6.2}$$

und das Gesamtpotential V ist die Summe dieser beiden Beiträge

$$V = W + \Pi\,. \tag{6.3}$$

In einer Gleichgewichtslage hat das Gesamtpotential einen stationären Wert $\delta V = 0$ und die dadurch bestimmte Lage ist genau dann stabil, wenn das Potential an dieser Stelle ein Minimum $\delta^2 V\big|_{\delta V = 0} > 0$ annimmt. An der Stabilitätsgrenze gilt hingegen $\delta^2 V\big|_{\delta V = 0} = 0$, was nach Einsetzen der Ritz-Approximation in den unbekannten Ritz-Koeffizienten q_i äquivalent ist zu

$$\det \left(\left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i\, \partial q_j} \right|_{\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0} \right) = 0\,. \tag{6.4}$$

Das klassische Newton-Verfahren zur iterativen Lösung des Minimierungsproblems lautet

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_k + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\,\partial q_j}\right|_k \left(q_j|_{k+1} - q_j|_k\right) = 0 \tag{6.5}$$

und gemäß (6.4) kann Divergenz durch eine singuläre Hesse-Matrix $\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\,\partial q_j}\right|_k$ angezeigt werden. Aus der Stabilitätsbedingung $\delta^2 V|_{\delta V=0} > 0$ folgt die positive Definitheit der Hesse-Matrix im unterkritischen Bereich. Der kleinste Eigenwert dieser Matrix geht daher bei Annäherung an den kritischen Zustand allmählich gegen null und kann das Erreichen der Knicklast anzeigen. Aus numerischer Sicht erweist sich diese Methode der Stabilitätsanalyse mit dem Ritz-Verfahren jedoch als ungünstig, weil die sehr komplexen Ausdrücke eine symbolische Berechnung der Hesse-Matrix verunmöglichen. Ferner ist die von Mathematica in der Minimierungsprozedur FindMinimum genutzte interne, numerische Näherung für diese Matrix einerseits schwer zugänglich und andererseits auch zu ungenau, um die kritische Last präziser zu berechnen, als dies für das imperfekte Problem möglich ist. Aus diesem Grund wird hier darauf verzichtet, die Knicklasten anhand des perfekten Systems zu bestimmen und stattdessen versucht, das Verhalten der perfekten Struktur mittels kleiner Imperfektionen anzunähern. Das Auslesen der kritischen Lasten kann dann grafisch anhand von Deformationspfaden geschehen.

6.1 Parametrisierung der schubstarren Balkenkinematik und Implementierung von Imperfektionen

Dieser Abschnitt beginnt mit der Vorstellung einer aus [6] entnommenen Vorgehensweise zur Parametrisierung des Rotationstensors $\boldsymbol{P}$ im Rahmen der Theorie schubstarrer Balken und schließt mit der Präsentation einer einfachen Methode zur Implementierung kinematischer Imperfektionen im Balkenmodell.

Die Zwangsbedingung der Schubstarrheit $\boldsymbol{\Gamma}_\perp = \boldsymbol{0}$ stellt die Orthogonalität zwischen der Querschnittsebene und der Tangentialrichtung an die Balkenachse $\boldsymbol{r}'$ für beliebige Deformationen sicher. Unter dieser Einschränkung kann die materielle Basis $\boldsymbol{e}_i$ relativ zu $\boldsymbol{r}'$ nur noch um die Tangentialrichtung $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{t}$ rotieren. Diese Kinematik lässt sich durch eine multiplikative Aufspaltung des Rotationstensors $\boldsymbol{P}$ erzwingen gemäß

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{e}_i \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i \qquad \tilde{\boldsymbol{P}} = \tilde{\boldsymbol{e}}_i \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i \qquad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{e}_i \tilde{\boldsymbol{e}}_i \tag{6.6a}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} \cdot \tilde{\boldsymbol{P}} \qquad \tilde{\boldsymbol{P}} \cdot \overset{0}{\boldsymbol{e}}_k = \tilde{\boldsymbol{e}}_k \qquad \boldsymbol{Q} \cdot \tilde{\boldsymbol{e}}_k = \boldsymbol{e}_k\,. \tag{6.6b}$$

Der Tensor $\tilde{\boldsymbol{P}}$ rotiert die materielle Basis der Referenzkonfiguration zunächst in eine Übergangsbasis $\tilde{\boldsymbol{e}}_k$, deren Tangentialrichtung mit der tatsächlichen übereinstimmt $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{e}_2 = \tilde{\boldsymbol{e}}_2$. Anschließend dreht

der Tensor $\boldsymbol{Q}$ diese Hilfsbasis um die Tangente $\boldsymbol{t}$ in die aktuelle Konfiguration $\boldsymbol{e}_k$. Zur Konstruktion der Hilfsbasis werden die Tangentialrichtung $\boldsymbol{t}$ und eine dazu nicht parallele Bezugsrichtung $\hat{\boldsymbol{e}}\,(s_1)$ benötigt. Im konkreten Fall kann $\hat{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{e}_z$ als raumfeste Bezugsrichtung gewählt werden, weil wegen der Orthogonalität in der Referenzlage $\overset{0}{\boldsymbol{t}}\,(s_1) \perp \boldsymbol{e}_z$ davon auszugehen ist, dass sich die Tangentialrichtungen im Zuge der Rechnung stets ausreichend von $\boldsymbol{e}_z$ unterscheiden werden. Für die Übergangsbasis folgt damit

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{e}_z}{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{e}_z|} \qquad \tilde{\boldsymbol{e}}_2 = \boldsymbol{t} \qquad \tilde{\boldsymbol{e}}_3 = \tilde{\boldsymbol{e}}_1 \times \tilde{\boldsymbol{e}}_2\,, \tag{6.7}$$

wobei die Hilfsrichtungen so gewählt wurden, dass sie in der Referenzlage mit der materiellen Basis zusammenfallen $\overset{0}{\tilde{\boldsymbol{e}}}_k = \overset{0}{\boldsymbol{e}}_k$. Die materielle Basis der aktuellen Konfiguration folgt aus der zusätzlichen mathematisch positiven Rotation mit dem Winkel Ψ um die Tangentialrichtung gemäß

$$\boldsymbol{e}_1 = \tilde{\boldsymbol{e}}_1 \cos(\Psi) - \tilde{\boldsymbol{e}}_3 \sin(\Psi) \qquad \boldsymbol{e}_2 = \tilde{\boldsymbol{e}}_2 \qquad \boldsymbol{e}_3 = \tilde{\boldsymbol{e}}_1 \sin(\Psi) + \tilde{\boldsymbol{e}}_3 \cos(\Psi)\ . \tag{6.8}$$

Die Rotationstensoren aus (6.6) sind damit vollständig definiert. Die Verdrehungen der materiellen Punkte sind wegen der vorausgesetzten Schubstarrheit nicht völlig frei, sondern an die Normalenrichtung des Querschnitts $\boldsymbol{t}$ gebunden. Aus diesem Grund findet man im Gegensatz zur Beschreibung mit drei Euler-Winkeln χ_i hier mit nur einem Winkel Ψ das Auslangen und die Anzahl der Lagekoordinaten reduziert sich um zwei. Die Formulierung der Formänderungsbeziehungen für große Deformationen schubstarrer Balken ist damit vollständig. Die Verzerrungsmaße können in einigen Schritten, wie in Abschnitt 2.2.6 beschrieben, aus den aktuellen Werten der Lagekoordinaten $\{\boldsymbol{u},\, \Psi\}$ berechnet werden.

Zur Untersuchung des Nachbeulverhaltens der Struktur werden typischerweise kinematische Imperfektionen eingeführt. Bei stabilem überkritischem Verhalten ist das Minimierungsverfahren dann über die kritische Last hinaus anwendbar. In der hier behandelten Balkentheorie können solche Imperfektionen bemerkenswert einfach mithilfe des Krümmungsvektors der Referenzkonfiguration $\overset{0}{\boldsymbol{\Omega}}$ eingeführt werden. Es existiert nämlich keine Verträglichkeitsbedingung für diesen Vektor, sodass jeder beliebigen Wahl $\overset{0}{\boldsymbol{\Omega}}$ eine zulässige undeformierte Lage des Balkens zugeordnet werden kann. Um die Referenzkonfiguration $\overset{0}{\boldsymbol{r}}$ zu einem gegebenen $\overset{0}{\boldsymbol{\Omega}}$ zu berechnen, kann man die Differential-Algebraische-Problemstellung

$$\overset{0}{\boldsymbol{r}}{}' = \overset{0}{\boldsymbol{e}}_2 \qquad \overset{0}{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\overset{0}{\boldsymbol{e}}_i \times \overset{0}{\boldsymbol{e}}{}'_i\right) \qquad \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i \cdot \overset{0}{\boldsymbol{e}}_j = \delta_{ij} \tag{6.9}$$

lösen oder einfach das Minimum des Gesamtpotentials ohne äußere Belastung ($W = 0$) bestimmen. Nachdem in der Referenzlage für das aktuelle Beispiel die materielle Basis kongruent zur polaren

Basis gewählt wurde, gilt für den Krümmungsvektor des perfekten Systems

$$\overset{0}{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{a_1}\, \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\varphi = \frac{1}{a_1}\, \boldsymbol{e}_z = \overset{0}{\Omega}_3\, \overset{0}{\boldsymbol{e}}_3 \,. \tag{6.10}$$

Eine additive geometrische Imperfektion $\overset{0}{\Omega}_\epsilon\, \overset{0}{\boldsymbol{e}}_1$ führt zur geringfügigen Krümmung des Trägers aus der Ebene in der Referenzkonfiguration. Der Krümmungsvektor zum imperfekten System lautet dann

$$\overset{0}{\boldsymbol{\Omega}} = \overset{0}{\Omega}_\epsilon\, \overset{0}{\boldsymbol{e}}_1 + \overset{0}{\Omega}_3\, \overset{0}{\boldsymbol{e}}_3 \,, \tag{6.11}$$

mit $\overset{0}{\Omega}_\epsilon \ll \overset{0}{\Omega}_3$.

Für die Nachbeulanalysen mit Schalen-FE wurde eine andere Formulierung der kinematischen Imperfektion gewählt, siehe (3.6). Dort wird die Balkenachse mit einer in s_1 linearen, homogenen Funktion in z-Richtung ausgelenkt. Grundsätzlich wäre es natürlich erstrebenswert, die Imperfektionen aus beiden Rechnungen aufeinander abzustimmen. Dies Vereinheitlichung ließe sich etwa durch Implementierung der imperfekten Balkenkonfiguration im Schalenmodell erreichen. Nachdem die geschlossene, analytische Lösung des DAE-Problems (6.9) nur schwer möglich sein wird, könnte man die Näherungslösung mit Ritz-Ansätzen aus der Minimierung des Gesamtpotentials ohne Belastung verwenden. Aus der durch diese Approximation gegebenen Balkenkonfiguration ließe sich dann die zum imperfekten Balken äquivalente Konfiguration der imperfekten Schale $\overset{0}{\boldsymbol{R}}$ rekonstruieren. Insbesondere für kleine Imperfektionen ist der zusätzliche Aufwand für diese spezielle Implementierung aber kaum gerechtfertigt, wie aus der Betrachtung der Deformationspfade in Abschnitt 6.4 hervorgeht.

6.2 Konstruktion von Ritz-Ansätzen

Gemäß der kinematischen Formulierungen im vorhergehenden Abschnitt ist die Lage eines materiellen Punktes über $\{\boldsymbol{u},\, \Psi\}$ eindeutig festgelegt. Dehnung und Biegung werden überwiegend durch $\boldsymbol{u}$ beschrieben, während Torsion und Verwölbung in Ψ erfasst sind. Es gilt daher, kinematisch zulässige Ritz-Ansätze für die drei Komponenten des Verschiebungsvektors und die Rotation der materiellen Basis um die Tangentialrichtung zu definieren. Alle kinematischen Randbedingungen sind am linken Rand definiert, das erleichtert die Konstruktion eines einfachen Polynomansatzes

$$u_1 = \sum_{i=1}^{k} q_{1i}\, s_1^{i+1} \qquad u_2 = \sum_{i=1}^{k} q_{2i}\, s_1^{i} \qquad u_3 = \sum_{i=1}^{k} q_{3i}\, s_1^{i+1} \qquad \Psi = \sum_{i=1}^{k} q_{\Psi i}\, s_1^{i+1} \,. \tag{6.12}$$

Für jede Komponente wird dieselbe Anzahl k an unbekannten Ritz-Koeffizienten verwendet. Die Ordnung der einzelnen Summen ist so angepasst, dass die Randbedingungen für die Verschiebungen

und für die Verwölbung erfüllt werden

$$\boldsymbol{u}\,(s_1 = 0) = 0 \qquad u_1' = 0 \qquad u_3' = 0 \tag{6.13a}$$

$$\Psi\,(s_1 = 0) = 0 \qquad \Psi'\,(s_1 = 0) = 0\,. \tag{6.13b}$$

Zur Erklärung der Bedingungen für u_1' und u_3' beachte man: An der Einspannung bleibt die materielle Basis $\boldsymbol{e}_i\,(s_1 = 0)$ stets kongruent zur polaren und die Verdrehungen in unmittelbarer Nähe zu $s_1 = 0$ sind stets klein. Damit darf die Verdrehungsrandbedingung auch im geometrisch nichtlinearen Fall wie in der linearisierten Theorie gemäß (2.54a) formuliert werden als

$$\boldsymbol{u}\,(s_1 = 0) = 0 \quad \wedge \quad \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{t} = \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad u_1' = 0 \qquad u_3' = 0\,. \tag{6.14}$$

Bezüglich der ersten Randbedingung von (6.13b) ist zu beachten, dass der Winkel Ψ lediglich die zusätzliche Verdrehung der materiellen Basis um die aktuelle Tangente aus der Zwischenlage $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ beschreibt. Nun wäre es zulässig, die Zwischenlage in der Referenzkonfiguration ungleich gegenüber der materiellen Basis zu wählen. In diesem Fall müsste die Approximation für Ψ einen konstanten Anteil enthalten, der diese Rotation in der Referenzlage an der Einspannstelle wieder auf null stellt. Im aktuellen Fall gilt aber $\overset{0}{\tilde{\boldsymbol{e}}}_i = \overset{0}{\boldsymbol{e}}_i$ und damit lautet die Randbedingung für die Verdrehung an der Einspannung einfach $\Psi\,(s_1 = 0) = 0$.

Für kleine Deformationen sind die Lösungen des linearen Problems aus Abschnitt 4 zulässige Ansatzfunktionen. Diese sind jedoch relativ komplex und nicht in der Lage, große Verformungen zu beschreiben. Sie dienen bestenfalls als Referenzlösung für eine erste Kontrolle der Implementierung des Minimierungsverfahrens. Diese Probe ist insbesondere für den geometrisch linearen Fall der ebenen Biegung besonders einfach umzusetzen, indem die Verbiegung der Balkenachse in der Symmetrieebene mit den Verschiebungsverläufen u_i^{lin} gemäß (4.11a) sowie (4.11b) approximiert wird gemäß

$$u_1 = q_1\, u_1^{\text{lin}} \qquad u_2 = q_2\, u_2^{\text{lin}} \qquad u_3 = 0 \qquad \Psi = 0\,. \tag{6.15}$$

Für kleine Lasten werden die Deformationen durch diese Näherung gut approximiert und bei korrekter Implementierung des Minimierungsverfahrens erhält man für die zwei unbekannten Koeffizienten $q_1 = q_2 = 1$, weil die Verformung linear mit der Last P skaliert.

6.3 Konvergenz bei Biegung aus der Ebene und erforderliche Polynomordnung

Die Kosten der numerischen Minimierung des Gesamtpotentials erhöhen sich mit der Anzahl unbekannter Ritz-Koeffizienten in der Polynomapproximation (6.12). Eine gewisse minimale

Polynomordnung ist jedenfalls erforderlich, um die tatsächliche Deformation des Balkens gut annähern zu können. Die Mitnahme zu hoher Polynomordnungen kann wiederum numerische Probleme schaffen. Anhand der Analyse des Deformationsverhaltens der Struktur bei Biegung aus der Ebene (Kraftrichtung $\boldsymbol{e}_z$) soll daher bestimmt werden, mit welchen Polynomordnungen sinnvolle Ergebnisse für die Stabilitätsanalyse zu erwarten sind. Es ist klar, dass die angesetzten Polynome zumindest in der Lage sein müssen, die Verläufe zur linearisierten Problemstellung genau wiederzugeben. Durch Wahl eines höheren Lastniveaus als für den linearen Fall zulässig, kann der Einfluss der geometrischen Nichtlinearität des Problems mitberücksichtigt werden. In Abbildung 6.1 wird der Verlauf der Lösungen des Ritz-Verfahrens für Biegung aus der Ebene mit Belastung $P = 5$ gezeigt. Die unterschiedlich dicken Kurven sind mit einer Ziffer benannt. Diese Ziffer steht für die Anzahl an unbekannten Polynomkoeffizienten k in den Ritz-Ansätzen gemäß (6.12). Da alle vier Lagekoordinaten mit je k-Freiheitsgraden diskretisiert werden, beträgt die Gesamtanzahl unbekannter Ritz-Koeffizienten $4\,k$. Es zeigt sich, dass eine minimale Ordnung von ca. 7 erforderlich ist, um das Biegeproblem aus der Ebene ausreichend genau zu beschreiben. Die analytische Lösung aus der geometrisch linearen Theorie ist strichliert eingezeichnet und wurde bereits in Abbildung 4.3 dargestellt, dort allerdings für die Einheitslast $P = 1$. Die Verschiebungen in normaler Richtung u_3 sind bereits wesentlich größer als der Radius $a_2 = 0.02$ im Querschnitt. Obwohl die Gestalt der Lösungen für u_3 und den Torsionswinkel Ψ noch gut mit der Kurve zur geometrisch linearen Theorie übereinstimmt, unterscheiden sich die Beträge der Verformungen bereits merklich. Zusätzlich treten im nichtlinearen Fall auch Verschiebungen in Umfangsrichtung und in Radialrichtung auf, die in der linearen Analyse nicht erfasst werden. Nachdem die Eigenform des Balkens bei Stabilitätsverlust durch Biegedrillknicken starke Ähnlichkeit mit der Deformation bei Biegung aus der Ebene aufweist, sollten sich Ansätze, welche die Biegung aus der Ebene ausreichend genau beschreiben, in einer gewissen Umgebung um die Knicklast auch für die Untersuchung des Nachbeulverhaltens eignen. Für die folgenden Stabilitätsanalysen wird einheitlich mit $k = 6$ gerechnet, weil das Minimierungsverfahren im überkritischen Bereich für $k > 6$ rasch divergiert. Mit der gewählten Ordnung konnten ausreichend genaue Ergebnisse in der unmittelbaren Umgebung der kritischen Last ermittelt und die Nachbeulpfade zu höheren Lasten ausgedehnt werden, als das für eine größere Anzahl an Freiheitsgraden möglich war.

6.4 Resultate der Analysen mit Ritz-Ansätzen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Knicklast- und Nachbeulanalyse mit dem Ritz-Verfahren den Resultaten der inkrementellen Theorie bzw. der entsprechenden Rechnungen mit Schalen-FE gegenübergestellt. Konkret wird der Träger mit Standardparametern gemäß Tabelle 6.1 untersucht, wobei wie zuvor am freien Ende entweder eine reine Normalkraft auf Druck in $\boldsymbol{e}_x$ oder eine reine Querkraft in radialer Richtung $\boldsymbol{e}_y$ eingeleitet wird. Zur numerischen

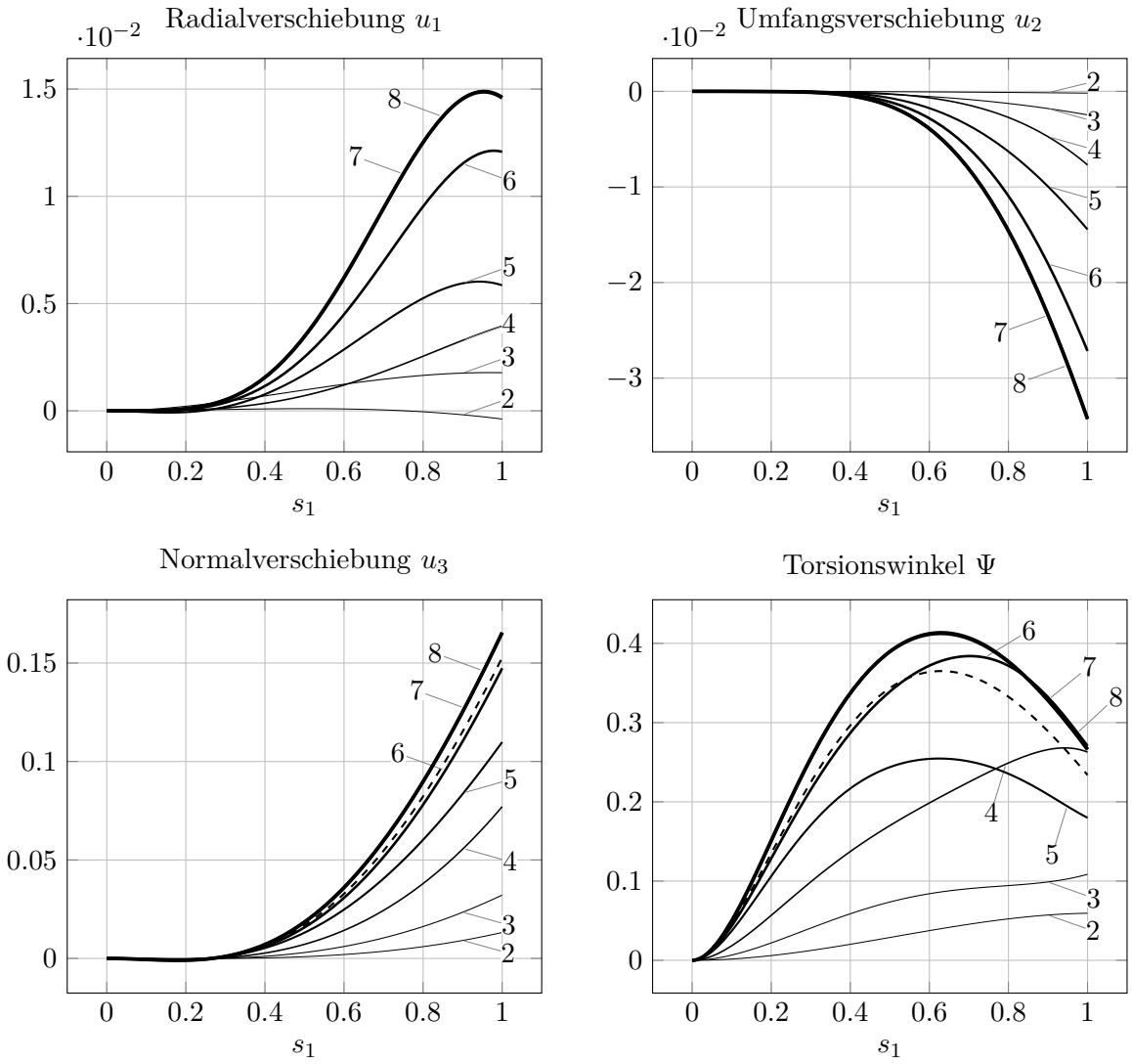


Abbildung 6.1: Nichtlineares Biegeproblem aus der Ebene; Konvergenz der Ritz-Lösungen

NR.	$S_1 = a_1\,\Phi_1$	a_1	a_2	h	Φ_1	Φ_2	$\Delta\Phi_2$	E	ν
1	1	$2/\pi$	0.02	0.001	$\pi/2$	$\pi/2$	$\{0,\,\pi\}$	2.1e11	0.3

Tabelle 6.1: Parameterset für die Rechnungen mit globalen Ritz-Ansätzen

Berechnung von Gleichgewichtslagen in Mathematica werden zunächst die Verzerrungsmaße in der Verzerrungsenergiedichte U mithilfe der kinematischen Gleichungen der Balkentheorie durch die Lagekoordinaten $\{\boldsymbol{u},\,\Psi\}$ ersetzt. Nach Substitution der Ritz-Ansätze kann die Verzerrungsenergie des mit der Imperfektion $\overset{0}{\Omega}_\epsilon$ versehenen Systems durch Gauß-Integration über $s_1 \in [0,\,S_1]$ gebildet und daraus mit W aus (6.2) das Gesamtpotential in der Form $V = V\,(q_{1i},\,q_{2i},\,q_{3i},\,q_{\Psi i},\,P)$ zusammengesetzt werden. Anschließend werden mit der Minimierungsroutine FindMinimum iterativ für inkrementelle Laststeigerung in P Gleichgewichtszustände in den Ritz-Koeffizienten berechnet. Als Anfangswert für die nächste Berechnung wird dabei die Lösung des vorhergehenden Inkrements angesetzt. Der Solver greift standardmäßig auf ein modifiziertes Newton-Verfahren zurück, wobei die Ableitungen aufgrund der Komplexität des Ausdrucks für das Gesamtpotential V numerisch angenähert werden müssen.

Bei der numerischen Gauß-Integration muss eine ausreichende Anzahl an Integrationsstützstellen gewählt werden, weniger um den Integrationsfehler selbst zu minimieren, sondern um physikalisch falsche Lösungen (spurious modes) im Minimierungsverfahren zu vermeiden. Die solchen falschen Ritz-Lösungen zugeordneten Verzerrungen verschwinden in den Gaußpunkten und erzeugen so, ganz analog zum Hourglassing-Effekt bei Finiten-Elementen, keine Verzerrungsenergie. Für die hier präsentierten Analysen wurde einheitlich mit 20 Integrationsstützpunkten gerechnet. Da die Längsverzerrungen stets klein bleiben sollten, lässt sich die Sinnhaftigkeit einer Ritz-Lösung aus der Betrachtung des Verlaufs von ε einfach kontrollieren. Abbildung 6.2 zeigt beispielhaft zwei Verzerrungsverläufe die aus den Ritz-Lösungen erhalten wurden. Um zu veranschaulichen, dass die eingezeichneten Lösungen einen von null verschiedenen Beitrag zur Verzerrungsenergie leisten, wurden die 20 Gaußpunkte auf der Abszisse eingetragen. Die beiden Diagramme entsprechen den Lösungen der beiden letzten Lastinkremente im Zuge des Minimierungsverfahrens. Der Sprung in den Beträgen von ε im rechten Bild markiert das Scheitern des Lösers im letzten Lastschritt.

Das bedeutendste Resultat der inkrementell, iterativen Analysen liefern die in Abbildung 6.3 für die Diskretisierungsstufe $k = 6$ dargestellten Deformationspfade. In den vier Bildern werden die Normalverschiebungen am freien Ende $u_3\,(s_1 = S_1)$ der beiden Trägerformen $\Delta\Phi_2 = \{0,\,\pi\}$ für beide Lastrichtungen (Normalkraft, Querkraft) zu unterschiedlich großen Imperfektionen $\overset{0}{\Omega}_\epsilon \in \{1\mathrm{e}{-2},\,1\mathrm{e}{-3},\,1\mathrm{e}{-4},\,1\mathrm{e}{-5}\}$ gezeigt. Alle vier Diagramme haben gemein, dass aufgrund von Konvergenzproblemen im Minimierungsverfahren die Lösungen im überkritischen Bereich nicht weit über die kritische Last hinaus gesteigert werden konnten. Die relative Größe der

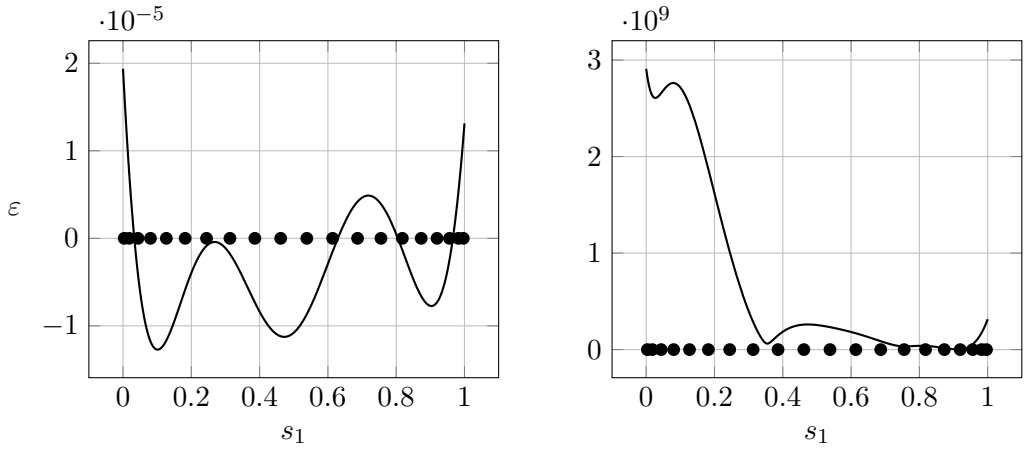


Abbildung 6.2: Verlauf der Verzerrung ε für zwei Ritz-Lösungen; letzte korrekte Lösung links, falsche Lösung rechts

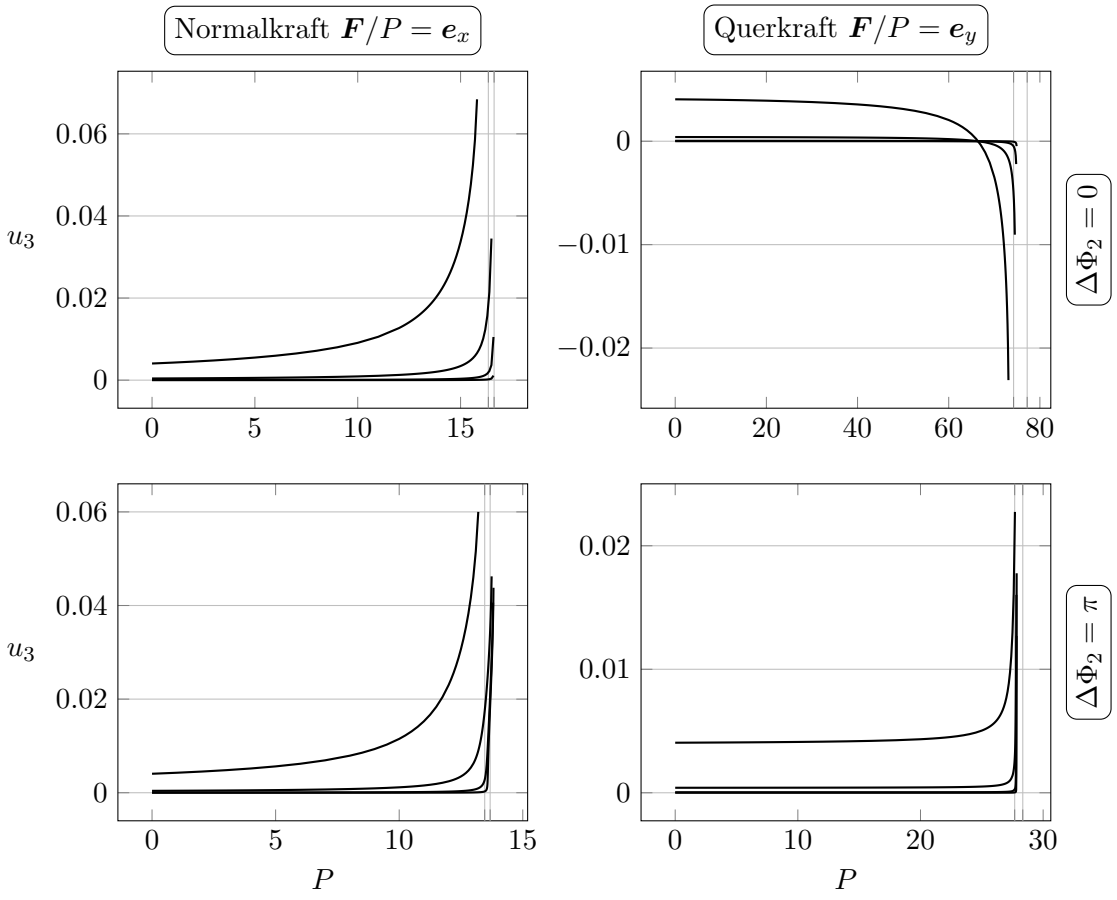


Abbildung 6.3: Deformationspfade der Ritz-Lösungen; Belastung mit Normalkraft bzw. Querkraft am freien Ende; Ergebnisse für den Träger mit positiver (negativer) Krümmung oben (unten)

kleinen Imperfektionen bei $P = 0$ gegenüber den tatsächlichen Verschiebungen unterstreicht dieses Problem. Obwohl die Genauigkeit der Fließkommadarstellung gegenüber dem Standardwert bereits gesteigert wurde, stößt die numerische Minimierung des Gesamtpotentials mit der globalen Ritz-Methode an ihre Grenzen. Die Verbesserung der Resultate durch Adaption der Ansatzfunktionen scheint nur wenig erfolgversprechend, weil der enorm große Ausdruck für die Verzerrungsenergie und damit einhergehend Speicherbedarf sowie Rechenzeit stark anwachsen würden. Für die Berechnung sinnvoller Lösungen weit über die kritische Last hinaus, ist daher der Übergang zu einem Balken-Finite-Elemente-Modell unbedingt anzuraten. Zusätzlich zu den Deformationspfaden für unterschiedlich große Imperfektionen sind in Abbildung 6.3 mit vertikalen, grauen Linien die kritischen Lasten aus den nichtlinearen Schalen-Berechnungen mit shellFE und Abaqus eingetragen. Der Knick in den Kurven der Ritz-Lösungen zur jeweils kleinsten Imperfektion markiert eine Näherung der kritischen Last des perfekten Systems. Wie der Vergleich mit den vertikalen Linien zeigt, ist hier die Übereinstimmung zu den Schalen-Simulationen außerordentlich gut. Die zum Teil größeren Abweichungen der mithilfe der inkrementellen Theorie berechneten Knicklasten für das Standardparameterset in den Tabellen von Kapitel 5 sind damit auch vonseiten der Ritz-Analyse auf den Einfluss der nichtlinearen Vordeformationen zurückgeführt.

Die mithilfe des Schalen Finite Elemente Modells in shellFE in gleicher Weise ermittelten Deformationspfade sind in Abbildung 6.4 dargestellt. Die Anordnung der einzelnen Diagramme ist zu jener in Abbildung 6.3 identisch, wobei hier die Normalverschiebungen des Scheitelpunktes des Halbkreises am freien Ende über der Belastung aufgezeichnet werden. Die Nachbeulanalysen im Schalenmodell wurden bei einem gewissen Lastniveau abgebrochen und konnten weit über die kritischen Lasten hinaus gesteigert werden. Eine Überlagerung mit den entsprechenden Kurven der Balkenrechnung ist aus diesem Grund wenig zielführend. In allen vier Fällen zeigt die Struktur im überkritischen Bereich ein stabiles Nachbeulverhalten, allerdings vergrößern sich die Deformationen nach Stabilitätsverlust beträchtlich. Als Referenz wurde in diesen Bildern die mit shellFE am perfekten System berechnete Knicklast mit einer vertikalen, grauen Linie eingetragen. In der rechten Spalte, insbesondere im rechten oberen Bild, unterscheiden sich die am idealen System berechneten Knicklasten merklich von jenen Werten, die aus dem Knick in den Kurven zur kleinsten Imperfektion abgelesen werden können. Diese Diskrepanz ist auf Probleme in der Knicklastberechnung mit dem Solver shellFE zurückzuführen, worauf bereits in Abschnitt 3.2 hingewiesen wurde. Als Folge dieser Schwierigkeiten konnten nur obere Schranken für die kritischen Lasten ermittelt werden, wie ein Blick auf die Abbildungen 6.4 bestätigt.

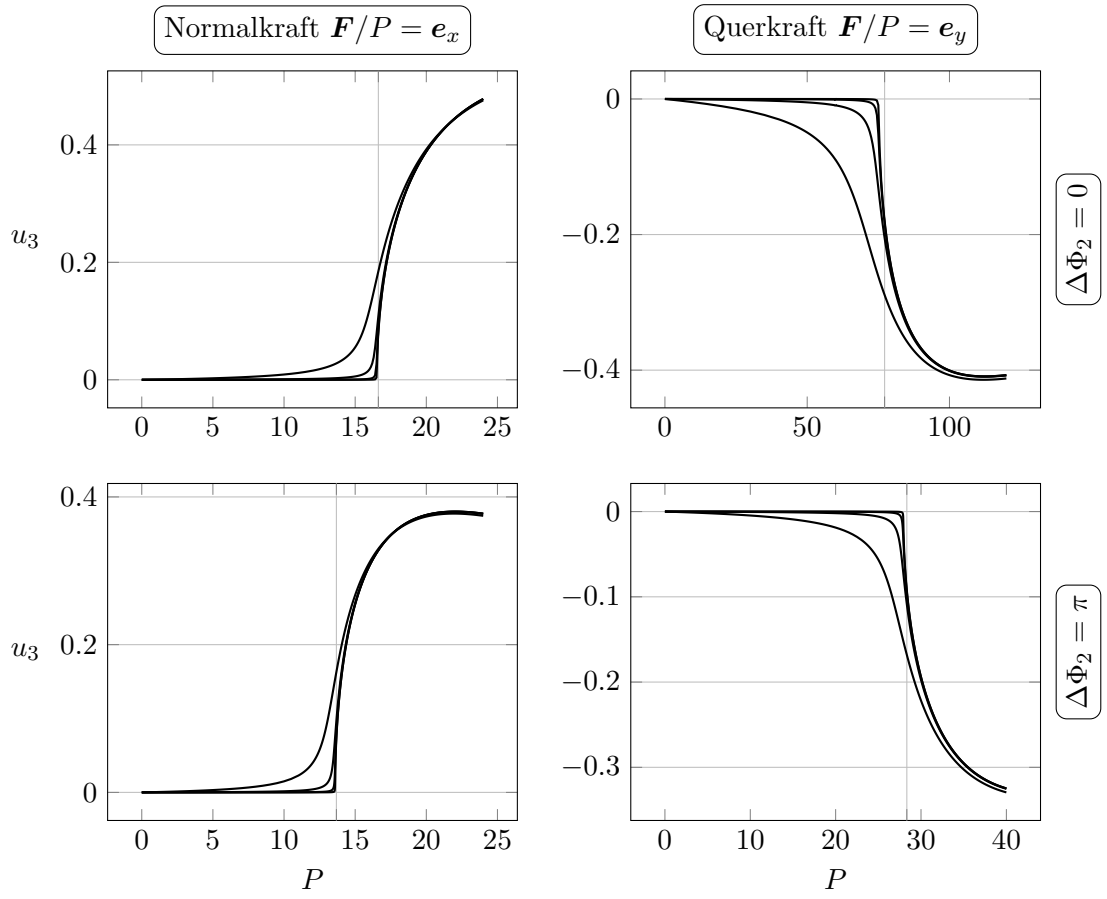


Abbildung 6.4: Deformationspfade der Schalen-FE-Lösungen; Belastung mit Normalkraft bzw. Querkraft am freien Ende; Ergebnisse für den Träger mit positiver (negativer) Krümmung oben (unten)

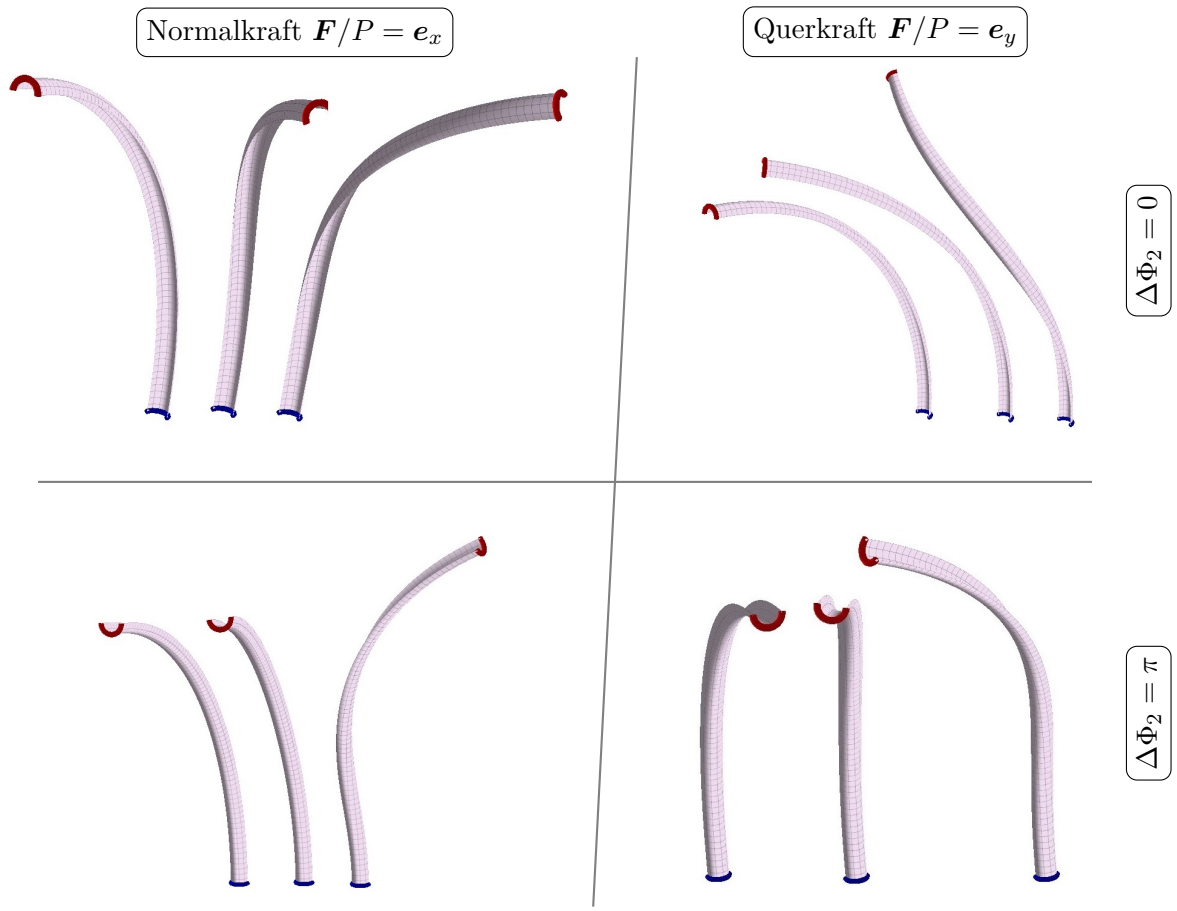


Abbildung 6.5: Schalenkonfigurationen in undeformierter, kritischer und überkritischer Lage aus den FE-Berechnungen für beide Trägervarianten zum Standardparameterset

Der Verlauf der Schalenverformung für beide Trägerformen ist in Abbildung 6.5 in jeweils drei deformierten Konfigurationen illustriert. Neben der undeformierten Struktur, wird der deformierte Träger in den Zuständen knapp nach Stabilitätsverlust sowie am Ende der Nachbeulanalyse gezeigt. Die Anordnung der Grafiken entspricht den vorherigen Abbildungen. Das Ausweichen der Träger in Form einer kombinierten Biege-Torsionsdeformation ist in allen vier Bildern erkennbar. Im linken oberen Bild, also bei Belastung des Trägers mit positiver Krümmung mit einer Druckkraft am freien Ende, weicht die Struktur zur Seite und in Lastrichtung nach hinten aus. In den übrigen drei Fällen tendieren die Balken im überkritischen Bereich jeweils dazu sich aufzurichten und noch stärker zu tordieren, wodurch die Balkenachse zusehends begradigt wird. Für die Ritz-Analysen könnten nur weniger aussagekräftige Bilder erstellt werden, da die Analysen im überkritischen Bereich zu früh abgebrochen werden mussten und daher die typische Knickform nicht in derselben Deutlichkeit wie in den Bildern der FE-Berechnungen sichtbar gemacht werden kann. Aus diesem Grund wird auf die entsprechenden Darstellungen verzichtet.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Die numerischen Untersuchungen der vorliegenden Diplomarbeit liefern einen Beitrag zur Untersuchung von Balken mit dünnwandigem, offenem Querschnitt. Durch die Betrachtung eines kreisförmigen Trägers mit teilkreisförmigem Querschnitt konnte die in [6] hergeleitete Balkentheorie erstmals am Beispiel einer in der Referenzkonfiguration gekrümmten Struktur erprobt werden. Den Ergebnissen der Rechnungen im Rahmen der linearen Theorie ist zu entnehmen, dass sich das asymptotische Verhalten des gekrümmten Balkens von jenem des geraden unterscheidet. Ferner treten im Schalenmodell für manche Parametersets in Abhängigkeit von Lastfall und Krümmung zum Teil ausgeprägte Querschnittsverformungen auf, die durch die Balkenkinematik nicht abgebildet werden können.

Die Resultate der inkrementellen Stabilitätsanalyse des gekrümmten Trägers zu unterschiedlichen Parametersets bestätigen sowohl die Bedeutung der kubischen Terme in der Verzerrungsenergie des Balkens als auch die Leistungsfähigkeit der Theorie zweiter Ordnung. Je nach Lastfall und konkreter Problemgeometrie ist die Übereinstimmung mit den Werten der nichtlinearen Schalenrechnungen unterschiedlich gut. Durch Erweiterung der Rechnungen um Stabilitätsanalysen mit der Software Abaqus konnten einerseits die mit dem nicht kommerziellen Programm shellFE erhaltenen Ergebnisse bestätigt und andererseits der Einfluss der in der inkrementellen Theorie vernachlässigten Vordeformationen quantifiziert werden. In den Analysen mit globalen Ritz-Ansätzen wurde ein Versuch zur einfachen Berechnung des Nachbeulverhaltens der imperfekten Struktur gestartet. In der hier gezeigten Implementierung ist dieses Verfahren den numerischen Simulationen mit Schalen-Finite-Elementen jedoch klar unterlegen. Nichtsdestoweniger kann mithilfe dieser geometrisch nichtlinearen Formulierung die Genauigkeit der kritischen Lasten gegenüber der inkrementellen Theorie weiter gesteigert werden.

Die bisher durchgeführten numerischen Experimente demonstrieren das Potenzial der in [6] vorgestellten Balkentheorie. Für komplexere Analysen im geometrisch nichtlinearen Bereich, erweist sich die globale Ritz-Methode jedoch als nicht zuverlässig genug. Aus diesem Grund ist eine Finite-Elemente-Implementierung auf Basis der in [6] präsentierten Umsetzung für Balken mit vollem Querschnitt anzuraten. In diesem Zusammenhang sollte nicht unerwähnt bleiben, dass der in [6] angesprochene Koppeleffekt zwischen Torsion und Normalspannungen im Querschnitt in den Balken-Elementformulierungen des kommerziellen FE-Programms Abaqus nur teilweise berücksichtigt wird, siehe [3]. Zukünftige Untersuchungen könnten Elementformulierungen anderer Programme überprüfen.

Literatur

[1] Hendrik C. Kuhlmann. „Numerische Methoden der Ingenieurwissenschaften“. Vorlesungsskriptum, TU Wien, LVA Nr. 322.036. 2012.

[2] Heinz Parkus. *Mechanik der festen Körper*. 2. Aufl. Springer-Verlag Wien New York, 2005. ISBN: 978-3-211-80777-4.

[3] J. Scheidl. „Neuere Arbeiten zur Mechanik thermo-elektro-elastischer Strukturen“. Seminararbeit, TU Wien, LVA Nr. 325.088. 2017.

[4] W.I. Smirnow. *Lehrgang der höheren Mathematik*. Bd. 2. 4 Bde. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972.

[5] S.P. Timoshenko. „Theory of bending, torsion and buckling of thin-walled members of open cross-section“. In: (1945), S. 201–219, 249–268, 343–361.

[6] Yury Vetyukov. *Nonlinear Mechanics of Thin-Walled Structures. Asymptotics, Direct Approach and Numerical Analysis*. Springer-Verlag Wien, 2014. ISBN: 978-3-7091-1776-7.

[7] V.Z. Vlasov. *Thin-walled elastic beams*. 2. Aufl. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1961.