Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.

http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.

http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Absichern von großen Optionsportfolios in diskreter Zeit

Ausgeführt am Institut für

Stochastik und Wirtschaftsmathematik

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

durch

Petra Wakolbinger BSc.

Aschauerstraße 68
6365 Kirchberg in Tirol

Wien, 01.10.2017

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei all jenen bedanken, die mich während meines ganzen Studiums und insbesondere während meiner Diplomarbeit unterstützt haben. Mein Dank geht an meine Professoren an der TU Wien, ganz besonders an Dr. Stefan Gerhold für die ausgezeichnete Betreuung meiner Diplomarbeit, meiner Mutter, die mich mit motivierenden Worten nach Rückschlägen aufzubauen verstand und meinem Freund, der mir beigebracht hat, meinen Prüfungen mit der mehr Selbstvertrauen entgegenzusehen. Des Weiteren möchte ich mich bei meinen Studienkollegen und Freunden bedanken, die meine Studienzeit zu einem unvergesslichen Lebensabschnitt gemacht haben.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **7**

2 Black-Scholes-Merton Modell **9**
2.1 Das Modell 9
2.2 Die partielle Black-Scholes-Differentialgleichung 10
2.3 Preisformeln 12
2.4 Greeks 13
2.5 Kritik am Black-Scholes-Modell 14

3 Hedgen großer Optionsportfolios in diskreter Zeit **15**
3.1 Einführung 15
3.2 Modell und Hauptresultate 15
3.3 Numerische Illustrationen 47
3.3.1 Festlegen der Parameter 47
3.3.2 Verbesserungen für endliche Portfoliogrößen 48
3.3.3 Verbesserungen für unendliche Portfoliogröße 52
3.4 Schlussfolgerungen 54

4 Unterschiede zum Paper **57**

Kapitel 1

Einleitung

In vollständigen Märkten können individuelle Optionen perfekt repliziert werden sowie Preise und Absicherungsportfolios einfach berechnet werden. Da das Replizieren von einzelnen Optionen möglich ist, spielt Diversifikation keine Rolle. Geht man jedoch von diskreten Zeitpunkten aus, was aufgrund der Tatsache, dass das Handeln und die Neujustierung der Absicherung von Optionsportfolios nur in diskreten Zeitintervallen möglich ist, durchaus einleuchtend erscheint, so befindet man sich in einem unvollständigen Markt, was zu Absicherungsfehlern führt, die möglicherweise sogar mit den Risikofaktoren korrellieren. Dieses Problem wird in einem Paper von B. Peeters, C.L. Dert und A. Lucas behandelt, das die Grundlage für die folgende Arbeit bildet.

In Kapitel 2 werden das Black-Scholes-Merton Modell erklärt, die partielle Black-Scholes-Differentialgleichung sowie die Preisformeln hergeleitet und weitere grundlegende Resultate präsentiert. In Kapitel 3 werden die Ergebnisse des Papers vorgestellt. Dabei wird das Absichern eines Optionsportfolios, dessen zugrundeligende Wertpapierpreise von einer Kombination einer idiosynkratischen und einer systematischen Risikokomponente abhängen, in diskreter Zeit analysiert. Es wird gezeigt, dass trotz der Unvollständigkeit des Marktes, welche durch die diskreten Zeitpunkte hervorgerufen wird, große Optionsportfolios einen eindeutigen Preis besitzen und ohne Risiko durch die Wahl von alternativen Absicherungsportfolios abgesichert werden können. Dabei kann beobachtet werden, dass sich das Absicherungsportfolio im Limes der Portfoliogröße wesentlich anders verhält als im stetigen Fall. Anstelle des linearen Absicherns des totalen Risikos einer jeden einzelnen Option werden im diskreten Fall die linearen Expositionen und auch die höherer Ordnung nur von der systematischen Risikokomponente abgesichert. Das idiosynkratische Risiko wird nicht abgesichert, verschwindet aber aufgrund von Diversifikation.

Kapitel 2

Black-Scholes-Merton Modell

2.1 Das Modell

Das Black-Scholes-Merton Modell, kurz auch oft Black-Scholes Modell genannt, ist ein von Fischer Black, Myron Samuel Scholes und Robert C. Merton 1973 entwickeltes finanzmathematisches Modell zur Bewertung von Finanzoptionen. Es basiert auf einem risikoneutralen Bewertungsansatz, bei dem der Preis eines Derivates den risikolos abgezinsten erwarteten zukünftigen Cashflows entspricht. Man möchte also aus einem Derivat/Bond und einer Aktie ein risikoloses Portfolio konstruieren. Risikolos bedeutet in diesem Zusammenhang, dass der Wert des Portfolios innerhalb kurzer Zeiträume nicht vom Kurs der Aktie abhängt.

Im Black-Scholes-Merton Modell werden die folgenden Annahmen getroffen:

- Der Aktienpreis folgt einer geometrischen Brownschen Bewegung mit konstantem Drift und Volatilität.
- Es gibt keine Transaktionskosten oder Steuern.
- Es gibt keine Arbitragemöglichkeit.
- Es werden keine Dividenden ausbezahlt.
- Der Leerverkauf von Finanzinstrumenten ist uneingeschränkt möglich, d.h. es ist möglich Wertpapiere zu verkaufen, die man zum Zeitpunkt des Verkaufs noch nicht besitzt.
- Das Finanzinstrument folgt einem lognormal verteilten Kurs.
- Es findet ein ständiges Delta-Hedging statt. Darunter versteht man eine Absicherungsstrategie, bei der eine Optionsposition gegen Preisänderungen des Basiswerts abgesichert wird.
- Das Handeln von Finanzinstrumenten ist zu jedem beliebigen Zeitpunkt möglich (kontinuierlich).

Wir gehen bei unserem Modell von einem endlichen Zeithorizont T und von 2 Finanzgütern aus:

- Die Anleihe ist eine festverzinsliche Anlage mit stetiger, risikoloser Verzinsung mit einer fest vorgegebenen Zinsrate $r \geq 0$.

$$S_t^0 := e^{rt} \quad t \in [0, T] \tag{2.1}$$

- Die Aktie ist ein risikobehaftetes Finanzgut, dessen Kurs sich gemäß einer geometrischen Brownschen Bewegung B_t mit inkrementellen Kursänderungen bewegt.

$$S_t^1 = S_0^1 \exp[\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t] \tag{2.2}$$

Häufig wird auch die abgeleitete Form für Berechnungen verwendet. Hierzu wird S_t^1 als stochastischer Prozess angesehen. Wir betrachten zuerst $\ln S_t^1 = \ln S_0^1 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t$ und bilden hiervon die Ableitung:

$$d(\ln S_t^1) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dB_t. \tag{2.3}$$

Dies ist ein Ito-Prozess. Mit Hilfe des Lemmas von Ito mit der Wahl $f(x) = \exp[x]$ und den drei partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \exp[x], \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) = \exp[x], \ \frac{\partial f}{\partial t}(x) = 0 \tag{2.4}$$

folgt

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= d(\exp[\ln S_t^1]) \\ &= (\mu - \frac{\sigma^2}{2})S_t^1 dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^1 dt + \sigma S_t^1 dB_t \\ &= \mu S_t^1 dt + \sigma S_t^1 dB_t, \end{aligned} \tag{2.5}$$

was äquivalent zu

$$\frac{dS_t^1}{S_t^1} = \mu dt + \sigma dB_t \tag{2.6}$$

ist.

2.2 Die partielle Black-Scholes-Differentialgleichung

Im Folgenden wird mit S_t der Vektor (S_t^1, S_t^2) und mit V der Wertprozess eines Derivats mit Underlying S bezeichnet, dieser ist also von der Form $V(t, S_t)$. Auf diesen Wertprozess wenden wir nun die Ito Formel an, um die Black-Scholes Differentialgleichung zu erhalten:

$$\begin{aligned} dV(t, S_t) = \frac{\partial V}{\partial S_t}(t, S_t)dS_t + \frac{\partial V}{\partial t}(t, S_t)dt + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(t, S_t)d\langle t\rangle \\ + 2\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial S_t}(t, S_t)d\langle S_t, t\rangle + \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}(t, S_t)d\langle S\rangle_t\Big). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Da t von lokal beschränkter Variation ist, gilt $d\langle t\rangle = d\langle S_t, t\rangle = 0$ und wir erhalten in vereinfachter Form:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} d\langle S\rangle_t \\ &= \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t(\sigma dB_t + \mu dt) + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 dt \\ &= \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t \sigma dB_t + \Big(\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\partial V}{\partial t}\Big) dt. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Betrachtet man nun die Veränderung des Portfolios, die durch dynamisches Handeln, bzw. hedgen[1] entsteht, so erhalten wir für den Portfoliowert zum Zeitpunkt t:

$$\Pi_t = V_t - \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t \tag{2.9}$$

und daher für die Veränderung des Portfoliowertes:

$$d\Pi_t = dV_t - \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t. \tag{2.10}$$

Das Zusammensetzen der Ito Formel für den Wertprozess und der Ito Formel für die geometrische Brownsche Bewegung führt zu:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t \sigma dB_t + \Big(\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\partial V}{\partial t}\Big) dt \\ &\quad - \frac{\partial V}{\partial S_t} \sigma S_t dB_t - \frac{\partial V}{\partial S_t} \mu S_t dt \\ &= \Big(\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\Big) dt \end{aligned} \tag{2.11}$$

Durch die gewählte Hedging-Strategie wird das Risiko eliminiert und das Portfolio entwickelt sich mit einer deterministischen Rendite. Aufgrund der Arbitragefreiheit im Black-Scholes Modell müssen sich der festverzinsliche Bond und das Hedging-Portfolio gleich entwickeln, wodurch

$$d\Pi_t = r\Pi dt \tag{2.12}$$

gelten muss, wodurch wir mit dem obigen Ergebnis

$$\Big(\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\Big) dt = r\Big(V - \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t\Big) dt \tag{2.13}$$

erhalten.

Durch Umformen erhalten wir nun die partielle Black-Scholes-Differentialgleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - rV = 0. \tag{2.14}$$

[1] hedgen bedeutet, dass der Anleger sein Portfolio zu jedem Zeitpunkt so anpasst, dass durch das Derivat die Wertveränderung des Aktienkurses abgesichert wird

2.3 Preisformeln

Das Black-Scholes Modell ist, obwohl nicht alle am Markt üblichen Faktoren berücksichtigt werden, in der Praxis doch recht beliebt, da der faire Preis direkt berechnet werden kann.

Wir werden dies am Beispiel einer europäischen Call-Option zeigen. Wir wollen daher $e^{-rT}\mathbb{E}[(S_t - K)^+]$ berechnen. Es wäre ebenfalls möglich die geschlossene Formel aus der partiellen Black-Scholes-Differentialgleichung mit Hilfe von Randbedingungen, den Auszahlungen bei Fälligkeiten, zu berechnen.

$$\begin{aligned}
e^{-rT}\mathbb{E}[(S_t - K)^+] &= \int_\Omega e^{-rT}(S_T(\omega) - K)^+ dP \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT}(S_T - K)^+ f_{S_T}(x)dx \\
&= e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}(S_0 \exp[\sigma\sqrt{T}x + \mu T - \frac{\sigma^2}{2}T] - K)^+\Phi(x)dx \\
&= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(S_0 \exp[\sigma\sqrt{T}x + \mu T - \frac{\sigma^2}{2}T] - K)^+ \exp[-\frac{x^2}{2}]dx
\end{aligned}$$

Wir müssen also nur über den Bereich

$$S_0 \exp[\sigma\sqrt{T}x + \mu T - \frac{\sigma^2}{2}T] - K > 0$$

integrieren, da im anderen Fall das Integral 0 ist. Durch Umformen erhalten wir:

$$x > \frac{\ln\frac{K}{S_0} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},$$

was aufgrund der Rechenregeln für den Logarithmus zu

$$x > -\frac{\ln\frac{S_0}{K} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} =: -d_2$$

äquivalent ist. Das obige Integral lässt sich daher schreiben als:

$$\begin{aligned}
e^{-rT}\mathbb{E}[(S_t - K)^+] &= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}(S_0 \exp[\sigma\sqrt{T}x + \mu T - \frac{\sigma^2}{2}] - K)\exp[-\frac{x^2}{2}]dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty} S_0 \exp[\sigma\sqrt{T}x - \frac{\sigma^2}{2}T - \frac{x^2}{2}]dx - \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty} K\exp[-\frac{x^2}{2}]dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty} S_0 \exp[\sigma\sqrt{T}x - \frac{\sigma^2}{2}T - \frac{x^2}{2}]dx - Ke^{-rT}(1 - \Phi(-d_2)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty} S_0 \exp[-\frac{(x - \sigma\sqrt{T})^2}{2}]dx - Ke^{-rT}(1 - \Phi(-d_2)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty} S_0 \exp[-\frac{(x - \sigma\sqrt{T})^2}{2}]dx - Ke^{-rT}\Phi(d_2).
\end{aligned}$$

Wählen wir nun die Substitution $y = x - \sigma\sqrt{T}$ für die $\frac{dy}{dx} = 1$ gilt, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} e^{-rT}\mathbb{E}[(S_t - K)^+] &= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2-\sigma\sqrt{T}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - Ke^{-rT}\Phi(d_2) \\ &= S_0(1 - \Phi(-d_2 - \sigma\sqrt{T})) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) \\ &= S_0\Phi(d_2 + \sigma\sqrt{T}) - Ke^{-rT}\Phi(d_2). \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$d_1 := d_2 + \sigma\sqrt{T} = \frac{ln\frac{S_0}{K} + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{2.15}$$

so erhalten wir die Black-Scholes-Formel für die europäische Call-Option:

$$C(S,t) := e^{-rT}\mathbb{E}[(S_t - K)^+] = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2). \tag{2.16}$$

Zum Berechnen der europäischen Put-Option kann genauso vorgegangen werden. Es ergibt sich dabei folgende Formel:

$$P(S,t) := e^{-rT}\mathbb{E}[(K - S_t)^+] = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1). \tag{2.17}$$

2.4 Greeks

Mit Greeks werden im Allgemeinen die partiellen Ableitungen des Optionspreises nach den jeweiligen Parametern bezeichnet.

Delta

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) \geq 0 \\ \Delta_P &= \frac{\partial P}{\partial S} = -\Phi(-d_1) = \Phi(d_1) - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Das Optionsdelta gibt an, um wieviel sich der Peis einer Option ändert, wenn sich der Kurs des Basiswertes um eine Einheit ändert und alle übrigen Einflussfaktoren gleich bleiben.

Gamma

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{\Phi'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} \geq 0$$

Diese partielle Ableitung stimmt im Black-Scholes-Merton Modell für Call und Put überein. Da das Gamma nichtnegativ ist, steigt (fällt) der Optionspreis mit steigender (fallender) Volatilität. Mit Φ und ϕ werden die Verteilungsfunktion bzw. die Dichtefunktion der Normalverteilung bezeichnet, für die gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big[-\frac{y^2}{2}\Big] dy \text{ und} \\ \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big[-\frac{y^2}{2}\Big] \end{aligned}$$

Lambda

$$\Lambda = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = S\Phi'(d_1)\sqrt{T-t} = S\phi(d_1)\sqrt{T-t} \geq 0$$

Lambda, oder auch Kappa bzw. Vega,bezeichnet die Ableitung des Optionspreises nach der Volatilität und drückt daher aus, wie stark eine Option auf Änderungen von σ reagiert.

Theta

$$\Theta_C = \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rK\exp[-r(T-t)]\Phi(d_2)$$
$$\Theta_P = \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rK\exp[-r(T-t)]\Phi(-d_2)$$

Theta bezeichnet die partielle Ableitung nach der Zeit, und gibt damit die Sensitivität der Option gegenüber Zeitänderungen an.

Rho

$$P_C = \frac{\partial C}{\partial r} = (T-t)K\exp[-r(T-t)]\Phi(d_2) \geq 0$$
$$P_P = \frac{\partial P}{\partial r} = -(T-t)K\exp[-r(T-t)]\Phi(-d_2) \leq 0$$

Rho bezeichnet daher die Sensitivität der Option gegenüber kleinen Zinssatzänderungen.

Omega

$$\Omega_C = \frac{\frac{\Delta C}{C}}{\frac{\Delta S}{S}} = \Phi(d_1)\frac{S}{C} > 0$$
$$\Omega_P = \frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta S}{S}} = (\Phi(d_1)-1)\frac{S}{P} < 0$$

Omega bezeichnet die Optionselastizität und ist daher eine prozentuale Größe.

2.5 Kritik am Black-Scholes-Modell

Das entscheidende Problem des Black-Scholes-Modells ist die Annahme, dass sowohl die Renditen als auch die Kurse einer Normalverteilung folgen. Bei dieser wird durch die flachen Enden signalisiert, dass extreme Ereignisse extrem selten vorkommen, was spätenstens durch die Finanzkrise widerlegt wurde. Weitere Kritikpunkte sind die folgenden:

- die Renditen sind nicht stochastisch unabhängig
- die Volatilität σ ist nicht konstant
- die Pfade von $(S_t)_{t\in T}$ werden als stetig angenommen
- der Zins wird positiv angenommen ($r > 0$)

Kapitel 3

Hedgen großer Optionsportfolios in diskreter Zeit

3.1 Einführung

3.2 Modell und Hauptresultate

Betrachten wir eine Menge von N Wertpapieren S_i, $i = 1, ..., N$, die einem multivariaten stetigen Zeitprozess

$$\mathrm{d}S = S \odot (\mu \mathrm{d}t) + S \odot (\Sigma^{1/2} \mathrm{d}\tilde{z}) \tag{3.1}$$

folgen, mit $S = (S_1, ..., S_N)'$, $\Sigma = \Sigma^{1/2}(\Sigma^{1/2})'$ einer positiv definiten Kovarianzmatrix, $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, ..., \tilde{z}_N)'$ einer N-dimensionalen Standard Brownsche Bewegung und $a \odot b = (a_1 b_1, ..., a_N b_N)'$ für zwei N-dimensionale Vektoren a und b. Durch die Wahl befinden wir uns nun in der Black-Scholes-Merton Welt. Für kompliziertere Berechnungen kann ähnlich vorgegangen werden, solange eine Zerlegung in ein systematisches und idiosynkratisches Risiko, so wie sie im Folgenden verwendet wird, möglich ist. Dazu führen wir eine Ein-Faktor-Struktur für die Kovarianzmatrix Σ ein. Wir gehen also von

$$\Sigma = \beta\beta' + \mathrm{diag}(\sigma_1^2, ..., \sigma_N^2), \tag{3.2}$$

mit $\beta = (\beta_1, ..., \beta_N)'$ aus, wodurch das Ein-Faktor-Modell für die Bewegung des Wertpapierpreises impliziert wird. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf einen einzigen systematischen Risikofaktor, da es in diesem Fall möglich ist, den Austausch zwischen der planmäßigen Absicherung und dem idiosynkratischen Optionsrisiko zum aktuellen Bestandslevel genau zu berechnen. Im Falle von mehreren Faktoren kann genauso vorgegangen werden. Die Berechnungen sind allerdings um einiges mühsamer. Unter der Verwendung von (3.2) kann (3.1) für das i-te Wertpapier geschrieben werden als

$$\frac{\mathrm{d}S_i}{S_i} = \mu_i \mathrm{d}t + \beta_i \mathrm{d}z_0 + \sigma_i \mathrm{d}z_i, \tag{3.3}$$

wobei $z = (z_0, z_1, ..., z_N)$ eine $(N+1)$-dimensionale standard Brownsche Bewegung(BM) mit $z(t) \sim N(0, t\mathbf{I})$ und das i-te Element von $\Sigma^{1/2}\mathrm{d}\tilde{z} = \beta_i \mathrm{d}z_0 + \sigma_i \mathrm{d}z_i$ ist.

Dies gilt, da (3.1) äquivalent zu

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu \mathrm{d}t + \Sigma^{1/2}\mathrm{d}\tilde{z}$$

ist und für die i-te Komponente folgende Umformungen gelten:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S_i}{S_i} &= \mu_i \mathrm{d}t + (\Sigma^{1/2})_i \mathrm{d}\tilde{z}_i \\ &= \mu_i \mathrm{d}t + ((\beta\beta' + \mathrm{diag}(\sigma_1^2, ..., \sigma_N^2)^{1/2})_i \mathrm{d}\tilde{z}_i \\ &= \mu_i \mathrm{d}t + (\beta_i + \sigma_i)\mathrm{d}\tilde{z}_i.\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Notation definieren wir $\tilde{\sigma}_i^2 = \sigma_i^2 + \beta_i^2$ als das i-te Diagonalelement von Σ aus (3.2) gemäß dem Gesamtrisiko des Wertpapieres S_i. z_0 und z_i aus (3.3) können als planmäßige und idiosynkratische Risikofaktoren interpretiert werden.

Um die folgenden Aussagen beweisen zu können, sind nachstehende Resultate von esstentieller Bedeutung:

Lemma 1. *Das diskrete Analogon zu* (3.3) *gestaltet sich folgendermaßen:*

$$\frac{\Delta S_i}{S_i} = \exp\left[(\beta_i \hat{z}_0 + \sigma_i \hat{z}_i)\Delta t^{1/2} + (\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t\right] - 1. \tag{3.4}$$

Beweis. Die Berechnung folgt direkt aus (3.3), da

$$\begin{aligned}S_i &= S_0 \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)t + \beta_i z_0(t) + \sigma_i z_i(t)], \\ \frac{\Delta S_i}{S_i} &= \frac{S_i(t+\Delta t) - S_i(t)}{S_i(t)} = \frac{S_i(t+\Delta t)}{S_i(t)} - 1\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}\frac{\Delta S_i}{S_i} &= \frac{S_0 \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)(t+\Delta t) + \beta_i z_0(t+\Delta t) + \sigma_i z_i(t+\Delta t)]}{S_0 \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)t + \beta_i z_0(t) + \sigma_i z_i(t)]} - 1 \\ &= \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t + \beta_i z_0(t+\Delta t) - \beta_i z_0(t) + \sigma_i z_i(t+\Delta t) - \sigma_i z_i(t)] - 1.\end{aligned}$$

Aufgrund der Eigenschaften der BM gilt: $\beta_i z_0(t+\Delta t) - \beta_i z_0(t) \stackrel{d}{=} \beta_i z_0(\Delta t)$. Wodurch wir

$$\begin{aligned}\frac{\Delta S_i}{S_i} &= \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t + \beta_i z_0(\Delta t) + \sigma_i z_i(\Delta t)] - 1 \\ &= \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t + (\beta_i \hat{z}_0 + \sigma_i \hat{z}_i)\sqrt{\Delta t}] - 1\end{aligned}$$

erhalten, wobei $\hat{z}_0$ und $\hat{z}_i$ unabhängig $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt sind. □

Lemma 2. *Der Erwartungswert des Potenzenprodukt aus* (3.4) *lässt sich wie folgt schreiben:*

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{\Delta S_i}{S_i}\right)^k\left(\frac{\Delta S_j}{S_j}\right)^l\right] = \sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{l}(-1)^{k+l+m+n}\binom{k}{m}\binom{l}{n}\exp[(m(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2) + n(\mu_j - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_j^2) + \frac{1}{2}(m\beta_i + n\beta_j)^2 + \frac{1}{2}m^2\sigma_i^2 + \frac{1}{2}n^2\sigma_j^2 + mn\sigma_i^2\delta_{ij})\Delta t]. \tag{3.5}$$

Beweis. Betrachten wir zuerst den Ausdruck $\left(\frac{\Delta S_i}{S_i}\right)^k$: Wegen (3.4) lässt sich dieser Ausdruck auch schreiben als:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta S_i}{S_i}\right)^k &= (\exp[(\beta_i\hat{z}_0 + \sigma_i\hat{z}_i)\Delta t^{1/2} + (\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t] - 1)^k \\ &= \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}(-1)^{k+m}\exp[m((\beta_i\hat{z}_0 + \sigma_i\hat{z}_i)\Delta t^{1/2} + (\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t)]\end{aligned}$$

Woraus sich für das Potenzenprodukt

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta S_i}{S_i}\right)^k\left(\frac{\Delta S_j}{S_j}\right)^l &= \left(\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}(-1)^{k+m}\exp[m((\beta_i\hat{z}_0 + \sigma_i\hat{z}_i)\Delta t^{1/2} + (\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t)]\right) \\ &\quad\cdot\left(\sum_{n=0}^{l}\binom{l}{n}(-1)^{l+n}\exp[n((\beta_j\hat{z}_0 + \sigma_j\hat{z}_j)\Delta t^{1/2} + (\mu_j - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_j^2)\Delta t)]\right) \\ &= \sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{l}(-1)^{k+l+m+n}\binom{k}{m}\binom{l}{n}\exp[m((\beta_i\hat{z}_0 + \sigma_i\hat{z}_i)\Delta t^{1/2} + (\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t) \\ &\quad + n((\beta_j\hat{z}_0 + \sigma_j\hat{z}_j)\Delta t^{1/2} + (\mu_j - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_j^2)\Delta t)]\end{aligned}$$

ergibt. Betrachtet man nun den Erwartungswert des Exponentialteils für $i \neq j$, so erhält man:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[\exp[m((\beta_i\hat{z}_0 + \sigma_i\hat{z}_i)\Delta t^{1/2} + (\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t) + n((\beta_j\hat{z}_0 + \sigma_j\hat{z}_j)\Delta t^{1/2} + (\mu_j - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_j^2)\Delta t)]] \\ &= \exp[m(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t + n(\mu_j - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_j^2)\Delta t]\mathbf{E}[\exp[(m\beta_i + n\beta_j)\Delta t^{\frac{1}{2}}\hat{z}_0 + m\sigma_i\Delta t^{\frac{1}{2}}\hat{z}_i + n\sigma_j\Delta t^{\frac{1}{2}}\hat{z}_j]] \\ &= \exp[m(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t + n(\mu_j - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_j^2)\Delta t + \frac{1}{2}(m\beta_i + n\beta_j)^2\Delta t + \frac{1}{2}m^2\sigma_i^2\Delta t + \frac{1}{2}n^2\sigma_j^2\Delta t].\end{aligned}$$

Für den Fall $i = j$ erhält man:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[\exp[m((\beta_i\hat{z}_0 + \sigma_i\hat{z}_i)\Delta t^{1/2} + (\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t) + n((\beta_j\hat{z}_0 + \sigma_j\hat{z}_j)\Delta t^{1/2} + (\mu_j - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_j^2)\Delta t)]] \\ &= \exp[m(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t + n(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t + \frac{1}{2}(m\beta_i + n\beta_j)^2\Delta t]\mathbf{E}[\exp[(m+n)]\sigma_i\Delta t^{\frac{1}{2}}\hat{z}_i] \\ &= \exp[m(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t + n(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t + \frac{1}{2}(m\beta_i + n\beta_j)^2\Delta t + \frac{1}{2}(m+n)^2\sigma_i^2\Delta t].\end{aligned}$$

Setzt man nun die beiden Fälle zusammen, so erhält man die gewünschte Formel. □

Bildet man nun aus der gewonnenen Formel Taylorreihenentwicklungen bis zu den für den Beweis relevanten Ordnungen, so erhält man die folgenden Identitäten:

Lemma 3.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\frac{\Delta S_i}{S_i}\right] &= \mu_i \Delta t + O(\Delta t^2) \\
\mathbf{E}\left[\frac{\Delta S_i}{S_i}\frac{\Delta S_j}{S_j}\right] &= [\beta_i\beta_j + \sigma_i^2\delta_{ij}]\Delta t \\
&\quad + [\mu_i\mu_j + \frac{1}{2}\beta_i^2\beta_j^2 + \beta_i\beta_j(\mu_i+\mu_j) \\
&\quad + (\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_i^4 - \beta_i^4) + 2\mu_i\sigma_i^2)\delta_{ij}]\Delta t^2 + O(\Delta t^3) \\
\mathbf{E}\left[\frac{\Delta S_i}{S_i}\left(\frac{\Delta S_j}{S_j}\right)^2\right] &= [\mu_i\tilde{\sigma}_j^2 + \beta_i^2\beta_j^2 + 2\beta_i\beta_j(\mu_j + \tilde{\sigma}_j^2) \\
&\quad + (\tilde{\sigma}_i^4 - \beta_i^4 + 2\sigma_i^2(\mu_i + \tilde{\sigma}_i^2))\delta_{ij}]\Delta t^2 + O(\Delta t^3) \\
\mathbf{E}\left[\frac{\Delta S_i}{S_i}\left(\frac{\Delta S_j}{S_j}\right)^3\right] &= 3[\beta_i\beta_j + \sigma_i^2\delta_{ij}]\tilde{\sigma}_j^2\Delta t^2 + O(\Delta t^3) \\
\mathbf{E}\left[\left(\frac{\Delta S_i}{S_i}\right)^2\left(\frac{\Delta S_j}{S_j}\right)^2\right] &= [\tilde{\sigma}_i^2\tilde{\sigma}_j^2 + 2\beta_i^2\beta_j^2 + 2(\tilde{\sigma}_i^4 - \beta_i^4)\delta_{ij}]\Delta t^2 + O(\Delta t^3)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Beweis. Die erste Identität ist leicht aus (3.4) ersichtlich, man bilde dazu einfach den Erwartungswert und für die Exponentialverteilung die Taylorreihenentwicklung.

$$
\mathbf{E}\left[\frac{\Delta S_i}{S_i}\right] = \exp[0] + (-1)\exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 + \frac{1}{2}\beta_i^2 + \frac{1}{2}\sigma_i^2)\Delta t] - 1 = \mu_i\Delta t \tag{3.7}
$$

Für die folgenden Identitäten verwendet man die in (3.5) gewonnene Darstellung des Potenzenprodukts und bildet ebenfalls die Taylorreihenentwicklung.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\frac{\Delta S_i}{S_i}\frac{\Delta S_j}{S_j}\right] &= 1 - \exp[(\mu_j - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_j^2) + \frac{1}{2}\beta_j^2 + \frac{1}{2}\sigma_j^2)\Delta t] - \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 + \frac{1}{2}\beta_i^2 + \frac{1}{2}\sigma_i^2)\Delta t] \\
&\quad + \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 + \mu_j + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_j^2 + \frac{1}{2}(\beta_i+\beta_j)^2 + \frac{1}{2}\sigma_i^2 + \frac{1}{2}\sigma_j^2 + \beta_i^2 + 2\beta_i\beta_j + \beta_j^2 + \sigma_i^2\delta_{ij})\Delta t] \\
&= 1 - \exp[\mu_j\Delta t] - \exp[\mu_i\Delta t] + \exp[(\mu_i + \mu_j + \beta_i\beta_j + \sigma_i^2\delta_{ij})\Delta t]
\end{aligned}
$$

Bilden wir nun die Taylorreihenentwicklung, so erhalten wir:

i=0:

$$
1 - 1 - 1 + 1 = 0
$$

i=1:

$$
-\mu_i\Delta t + \mu_j\Delta t + \mu_i\Delta t + \mu_j\Delta t + \beta_i\beta_j\Delta t + \sigma_i^2\delta_{ij}\Delta t = \beta_i\beta_j\Delta t + \sigma_i^2\delta_{ij}\Delta t
$$

i=2:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Delta t^2(-\mu_j^2 - \mu_i^2 + \mu_i + \mu_j^2 + 2\mu_i\mu_j + 2\mu_i\beta_i\beta_j + 2\mu_j\beta_i\beta_j + 2\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij} + 2\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij} \\
&\quad + \beta_i^2\beta_j^2 + 2\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij}) + \frac{1}{2}\sigma_i^4\delta_{ij}\Delta t^2 + \beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij}\Delta t^2 \\
&= (\frac{1}{2}\beta_i^2\beta_j^2 + \mu_i\mu_j + \beta_i\beta_j(\mu_i + \mu_j) + 2\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij} + \frac{1}{2}\sigma_i^4\delta_{ij} + \beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij})\Delta t^2 \\
&= (\frac{1}{2}\beta_i^2\beta_j^2 + \mu_i\mu_j + \beta_i\beta_j(\mu_i + \mu_j) + 2\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij} + \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_i^4 - \beta_i^4)\delta_{ij})\Delta t^2
\end{aligned}
$$

Durch Zusammensetzen der Teilergebnisse erhält man die obige Identität.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\frac{\Delta S_i}{S_i}\left(\frac{\Delta S_j}{S_j}\right)^2\right] &= -1 + 2\exp[(\mu_j - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_j^2 + \frac{1}{2}\beta_j^2 + \frac{1}{2}\sigma_j^2)\Delta t] \\
&\quad - \exp[2(\mu_j - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_j^2 + 2\beta_j^2 + 2\sigma_j^2)\Delta t] \\
&\quad + \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 + \frac{1}{2}\beta_i^2 + \frac{1}{2}\sigma_i^2)\Delta t] \\
&\quad - 2\exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 + \mu_j - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_j^2 + \frac{1}{2}\beta_i^2 + \beta_i\beta_j + \frac{1}{2}\beta_j^2 + \frac{1}{2}\sigma_i^2 + \frac{1}{2}\sigma_j^2 + \sigma_i^2\delta_{ij})\Delta t] \\
&\quad + \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 + 2\mu_j - \tilde{\sigma}_j^2 + \frac{1}{2}\beta_i^2 + 2\beta_i\beta_j + 2\beta_j^2 + \frac{1}{2}\sigma_i^2 + 2\sigma_j^2 + 2\sigma_i^2\delta_{ij})\Delta t] \\
&= -1 + 2\exp[\mu_j\Delta t] - \exp[(2\mu_j + \beta_j^2 + \sigma_j^2)\Delta t] + \exp[\mu_i\Delta t] \\
&\quad - 2\exp[(\mu_i + \mu_j + \beta_i\beta_j + \sigma_i^2\delta_{ij})\Delta t] \\
&\quad + \exp[(\mu_i + 2\mu_j + 2\beta_i\beta_j + \beta_j^2 + \sigma_j^2 + 2\sigma_i^2\delta_{ij})\Delta t]
\end{aligned}
$$

Bilden wir hier ebenfalls die Taylorreihenentwicklung:

i=0:

$$-1 + 2 - 1 + 1 - 2 + 1 = 0$$

Zur Vereinfachung ordnen wir die Terme bei i=1:

$$
\begin{aligned}
2\mu_j - 2\mu_j - 2\mu_j + 2\mu_j &= 0 \\
-\beta_j^2 + \beta_j^2 &= 0 \\
-\sigma_j^2 + \sigma_j^2 &= 0 \\
\mu_i - 2\mu_i + \mu_i &= 0 \\
-2\beta_i\beta_j + 2\beta_i\beta_j &= 0 \\
-2\sigma_i^2\delta_{ij} + 2\sigma_i^2\delta_{ij} &= 0
\end{aligned}
$$

i=2

$$
\begin{aligned}
&(2\mu_j^2 - (4\mu_j^2 + 4\mu_j\beta_j^2 + 4\mu_j\sigma_j^2 + \beta_j^4 + 2\beta_j^2\sigma_j^2 + \sigma_j^4) + \mu_i^2 \\
&\quad - (2(\mu_i^2 + 2\mu_i\mu_j + 2\mu_i\beta_i\beta_j + 2\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij} + \mu_j^2 + 2\mu_j\beta_j\beta_i + 2\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij} + \beta_i^2\beta_j^2 + 2\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij} + \sigma_i^4\delta_{ij}) \\
&\quad + \mu_i^2 + 4\mu_i\mu_j + 4\mu_i\beta_i\beta_j + 2\mu_i\beta_j^2 + 2\mu_i\sigma_j^2 + 4\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij} + 4\mu_j^2 + 8\mu_j\beta_i\beta_j + 4\mu_j\beta_j^2 \\
&\quad + 4\mu_j\sigma_j^2 + 8\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij} + 4\beta_i^2\beta_j^2 + 4\beta_i\beta_j^3 + 4\beta_i\beta_j\sigma_j^2 + 8\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij} \\
&\quad + \beta_j^4 + 2\beta_j^2\sigma_j^2 + 4\beta_j^2\sigma_i^2\delta_{ij} + \sigma_j^4 + 4\sigma_j^2\sigma_i^2\delta_{ij} + 4\sigma_i^4\delta_{ij})\Delta t^2
\end{aligned}
$$

Ordnen wir auch hier die Terme:

$$
\begin{aligned}
2\mu_j^2 - 4\mu_j^2 - 2\mu_j^2 + 4\mu_j^2 &= 0 \\
-2\mu_i^2 + \mu_i^2 + \mu_i^2 &= 0 \\
-4\mu_j\beta_j^2 + 4\mu_j\beta_j^2 &= 0 \\
-4\mu_j\sigma_j^2 + 4\mu_j\sigma_j^2 &= 0 \\
-\beta_j^4 + \beta_j^4 &= 0 \\
-2\beta_j^2\sigma_j^2 + 2\beta_j^2\sigma_j^2 &= 0 \\
-\sigma_j^4 + \sigma_j^4 &= 0 \\
-4\mu_i\mu_j + 4\mu_i\mu_j &= 0 \\
-4\mu_i\beta_i\beta_j + 4\mu_i\beta_i\beta_j &= 0 \\
-4\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij} + 4\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij} &= 0 \\
-4\mu_j\beta_i\beta_j + 8\mu_j\beta_i\beta_j &= 4\mu_j\beta_i\beta_j \\
-4\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij} + 8\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij} &= 4\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij} \\
-2\beta_i^2\beta_j^2 + 4\beta_i^2\beta_j^2 &= 2\beta_i^2\beta_j^2 \\
-4\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij} + 8\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij} &= 4\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij} \\
-2\sigma_i^4\delta_{ij} + 4\sigma_i^4\delta_{ij} &= 2\sigma_i^4\delta_{ij} \\
2\mu_i\beta_j^2 & \\
2\mu_i\sigma_j^2 & \\
4\beta_i\beta_j^3 & \\
4\beta_i\beta_j\sigma_j^2 & \\
4\beta_j^2\sigma_i^2\delta_{ij} & \\
4\sigma_i^2\sigma_j^2\delta_{ij} &
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Taylorreihenentwicklung müssen die im Fall i=2 erhaltenen Terme noch durch 2 dividiert werden. Des weiteren wird im Folgenden bei allen Termen, bei denen $i = j$ gilt, immer i statt j geschrieben. Dies führt zu:

$$
(\mu_i\sigma_j^2 + \mu_i\beta_j^2 + \beta_i^2\beta_j^2 + 2\beta_i\beta_j\mu_j + 2\beta_i\beta_j^3 + 2\beta_i\beta_j\sigma_j^2 + (\sigma_i^4 + 2\beta_i^2\sigma_i^2 + 2\sigma_i\mu_i + 2\sigma_i^2\beta_i^2 + 2\sigma_i^4)\delta_{ij})\Delta t^2 + O(\Delta t^3),
$$

was äquivalent zu obiger Behauptung ist.

Betrachten wir nun die vierte Identität:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\frac{\Delta S_i}{S_i}\left(\frac{\Delta S_j}{S_j}\right)^3\right] &= 1 - 3\exp[(\mu_j - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_j^2 + \frac{1}{2}\beta_j^2 + \frac{1}{2}\sigma_j^2)\Delta t] + 3\exp[(2\mu_j - \tilde{\sigma}_j^2 + 2\beta_j^2 + 2\sigma_j^2)\Delta t] \\
&\quad - \exp[(3\mu_j - \frac{3}{2}\tilde{\sigma}_j^2 + \frac{9}{2}\beta_j^2 + \frac{9}{2}\sigma_j^2)\Delta t] - \exp[\mu_i \Delta t] \\
&\quad + 3\exp[(\mu_j + \mu_i + \sigma_i^2\delta_{ij} + \beta_i\beta_j)\Delta t] \\
&\quad - 3\exp[(\mu_i + 2\mu_j + 2\beta_i\beta_j + \beta_j^2 + \sigma_j^2 + 2\sigma_i^2\delta_{ij})\Delta t] \\
&\quad + \exp[(\mu_i + 3\mu_j + 3\beta_j^2 + 3\sigma_j^2 + 3\sigma_i^2\delta_{ij} + 3\beta_i\beta_j)\Delta t] \\
&= 1 - 3\exp[\mu_j \Delta t] + 3\exp[(2\mu_j + \beta_j^2 + \sigma_j^2)\Delta t] - \exp[(3\mu_j + 3\beta_j^2 + 3\sigma_j^2)\Delta t] \\
&\quad - \exp[\mu_i \Delta t] + 3\exp[(\mu_j + \mu_i + \sigma_i^2\delta_{ij} + \beta_i\beta_j)\Delta t] \\
&\quad - 3\exp[(\mu_i + 2\mu_j + 2\beta_i\beta_j + \beta_j^2 + \sigma_j^2 + 2\sigma_i^2\delta_{ij})\Delta t] \\
&\quad + \exp[(\mu_i + 3\mu_j + 3\beta_j^2 + 3\sigma_j^2 + 3\sigma_i^2\delta_{ij} + 3\beta_i\beta_j)\Delta t]
\end{aligned}
$$

Durch die Taylorreihenentwicklung erhalten wir die folgenden Terme:
i=0

$$1 - 3 + 3 - 1 - 1 + 3 - 3 + 1 = 0$$

i=1 Terme in geordneter Reihenfolge:

$$
\begin{aligned}
-3\mu_j + 6\mu_j - 3\mu_j + 3\mu_j - 6\mu_j + 3\mu_j &= 0 \\
-\mu_i + 3\mu_i - 3\mu_i + \mu_i &= 0 \\
3\beta_j^2 - 3\beta_j^2 - 3\beta_j^2 + 3\beta_j^2 &= 0 \\
3\sigma_j^2 - 3\sigma_j^2 - 3\sigma_j^2 + 3\sigma_j^2 &= 0 \\
3\sigma_i^2\delta_{ij} - 6\sigma_i^2\delta_{ij} + 3\sigma_i^2\delta_{ij} &= 0 \\
3\beta_i\beta_j - 6\beta_i\beta_j + 3\beta_i\beta_j &= 0
\end{aligned}
$$

Auch hier fallen die Terme der Ordnung Δt weg. Betrachten wir nun wieder die Terme von quadratischer Ordnung:

i=2

$$
\begin{aligned}
&-3\mu_j^2-\mu_i^2+3(4\mu_j^2+4\mu_j\beta_j^2+4\mu_j\sigma_j^2+\beta_j^4+2\beta_j^2\sigma_j^2+\sigma_j^4-9\mu_j^2-18\mu_j\beta_j^2-18\mu_j\sigma_j^2-9\beta_j^4\\
&-18\beta_j^2\sigma_j^2-9\sigma_j^4+3(\mu_j^2+2\mu_i\mu_j+\mu_i^2+2\mu_j\beta_i\beta_j+2\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij}+2\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij}+2\mu_i\beta_i\beta_j+\sigma_i^4\delta_{ij}\\
&+2\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij}+\beta_i^2\beta_j^2)-3(\mu_i^2+4\mu_i\mu_j+4\mu_i\beta_i\beta_j+2\mu_i\sigma_j^2+4\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij}+4\mu_j^2+8\mu_j\beta_i\beta_j+4\mu_j\beta_j^2\\
&+4\mu_j\sigma_j^2+8\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij}+4\beta_i^2\beta_j^2+4\beta_i\beta_j^3+4\beta_i\beta_j\sigma_j^2+8\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij}+\beta_j^4+2\beta_j^2\sigma_j^2\\
&+4\beta_j^2\sigma_i^2\delta_{ij}+\sigma_j^4+4\sigma_j^2\sigma_i^2\delta_{ij}+4\sigma_i^4\delta_{ij})+\mu_i^2+6\mu_i\mu_j+6\mu_i\beta_j^2+6\mu_i\sigma_j^2+6\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij}+6\mu_i\beta_i\beta_j\\
&+9\mu_j^2+18\mu_j\beta_j^2+18\mu_j\sigma_j^2+18\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij}+18\mu_j\beta_i\beta_j+9\beta_j^4+18\beta_j^2\sigma_j^2+18\beta_j^2\sigma_i^2\delta_{ij}+18\beta_i\beta_j^3\\
&+9\sigma_j^4+18\sigma_j^2\sigma_i^2\delta_{ij}+18\sigma_j^2\beta_i\beta_j+9\sigma_i^4\delta_{ij}+18\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij}+9\beta_i^2\beta_j^2
\end{aligned}
$$

Ordnen wir auch hier wieder die Terme zur besseren Übersicht:

$$
\begin{aligned}
-3\mu_j^2+12\mu_j^2-9\mu_j^2+3\mu_j^2-12\mu_j^2+9\mu_j^2&=0\\
-\mu_i^2+3\mu_i^2-3\mu_i^2+\mu_i^2&=0\\
12\mu_j\beta_j^2-18\mu_j\beta_j^2-12\mu_j\beta_j^2+18\mu_j\beta_j^2&=0\\
12\mu_j\sigma_j^2-18\mu_j\sigma_j^2-12\mu_j\sigma_j^2+18\mu_j\sigma_j^2&=0\\
3\beta_j^4-3\beta_j^4-9\beta_j^4+9\beta_j^4&=0\\
6\beta_j^2\sigma_j^2-18\beta_j^2\sigma_j^2-6\beta_j^2\sigma_j^2+18\beta_j^2\sigma_j^2&=0\\
3\sigma_j^4-9\sigma_j^4-3\sigma_j^4+9\sigma_j^4&=0\\
6\mu_i\mu_j-12\mu_i\mu_j+6\mu_i\mu_j&=0\\
6\mu_j\beta_i\beta_j-24\mu_j\beta_i\beta_j+18\mu_j\beta_i\beta_j&=0\\
6\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij}-24\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij}+18\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij}&=0\\
6\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij}-12\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij}+6\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij}&=0\\
6\mu_i\beta_i\beta_j-12\mu_i\beta_i\beta_j+6\mu_i\beta_i\beta_j&=0\\
3\sigma_i^4\delta_{ij}-12\sigma_i^4\delta_{ij}+9\sigma_i^4\delta_{ij}&=0\\
6\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij}-24\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij}+18\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij}&=0\\
3\beta_i^2\beta_j^2-12\beta_i^2\beta_j^2+9\beta_i^2\beta_j^2&=0\\
-6\mu_i\beta_j^2+6\mu_i\beta_j^2&=0\\
-6\mu_i\sigma_j^2+6\mu_i\sigma_j^2&=0\\
-12\beta_i\beta_j^3+18\beta_i\beta_j^3&=6\beta_i\beta_j^3\\
-12\beta_i\beta_j\sigma_j^2+18\beta_i\beta_j\sigma_j^2&=6\beta_i\beta_j\sigma_j^2\\
-12\beta_j^2\sigma_i^2\delta_{ij}+18\beta_j^2\sigma_i^2\delta_{ij}&=6\beta_j^2\sigma_i^2\delta_{ij}\\
-12\sigma_j^2\sigma_i^2\delta_{ij}+18\sigma_j^2\sigma_i^2\delta_{ij}&=6\sigma_j^2\sigma_i^2\delta_{ij}
\end{aligned}
$$

Auch hier muss aufgrund der Taylorreihenentwicklung wieder durch 2 dividiert werden, ebenfalls wird wie in der vorigen Identität, im Fall $i=j$ wieder i statt j geschrieben.

$$(3\beta_i\beta_j^3 + 3\beta_i\beta_j\sigma_j^2 + 3\beta_j^2\sigma_i^2\delta_{ij} + 3\sigma_j^2\sigma_i^2\delta_{ij})\Delta t^2 = 3(\beta_i\beta_j + \sigma_i^2\delta_{ij})\tilde{\sigma}_j^2\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

Woraus die behauptete Identität folgt.

Betrachten wir nun die letzte Identität:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left(\frac{\Delta S_i}{S_i}\right)^2\left(\frac{\Delta S_i}{S_i}\right)^2\right] &= 1 - 2\exp[\mu_j] + \exp[2\mu_j + \beta_j^2 + \sigma_j^2] - 2\exp[\mu_i] \\ &+ 4\exp[\mu_i + \mu_j + \beta_i\beta_j + \sigma_i^2\delta_{ij}] \\ &- 2\exp[\mu_i + 2\mu_j + 2\beta_i\beta_j + \beta_j^2 + \sigma_j^2 + 2\sigma_i^2\delta_{ij}] \\ &+ \exp[2\mu_i + \beta_i^2 + \sigma_i^2] - 2\exp[2\mu_i + \beta_i^2 + \sigma_i^2 + \mu_j + 2\beta_i\beta_j + 2\sigma_i^2\delta_{ij}] \\ &+ \exp[2\mu_i + \beta_i^2 + \sigma_i^2 + 2\mu_j + \beta_j^2 + \sigma_j^2 + 4\beta_i\beta_j + 4\sigma_i^2\delta_{ij}]\end{aligned}$$

Führen wir abermals die Taylorreihenentwicklung durch:
i=0:

$$1 - 2 + 1 - 2 + 4 - 2 + 1 - 2 + 1 = 0$$

i=1: Auch hier ordnen wir die Terme gleich wieder und sehen leicht, dass diese wegfallen:

$$\begin{aligned}2\mu_j - 2\mu_j - 4\mu_j + 4\mu_j + 2\mu_j - 2\mu_j &= 0 \\ -\beta_j^2 + 2\beta_j^2 - \beta_j^2 &= 0 \\ -\sigma_j^2 + 2\sigma_j^2 - \sigma_j^2 &= 0 \\ 2\mu_i - 4\mu_i + 2\mu_i - 2\mu_i + 4\mu_i - 2\mu_i &= 0 \\ -4\beta_i\beta_j + 4\beta_i\beta_j + 4\beta_j\beta_j - 4\beta_i\beta_j &= 0 \\ -4\sigma_i^2\delta_{ij} + 4\sigma_i^2\delta_{ij} + 4\sigma_i^2\delta_{ij} - 4\sigma_i^2\delta_{ij} &= 0 \\ -\beta_i^2 + 2\beta_i^2 - \beta_i^2 &= 0 \\ -\sigma_i^2 + 2\sigma_i^2 - \sigma_i^2 &= 0\end{aligned}$$

i=2:

$$
\begin{aligned}
&(-2\mu_j^2 - 2\mu_i^2 + 4\mu_j^2 + 4\mu_j\beta_j^2 + 4\mu_j\sigma_j^2 + \beta_j^4 + 2\beta_j^2\sigma_j^2 + \sigma_j^4 + 8\mu_i\mu_j + 8\mu_i\beta_i\beta_j + 8\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij} \\
&+ 4\mu_j^2 + 8\mu_j\beta_i\beta_j + 8\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij} + 4\beta_i^2\beta_j^2 + 8\sigma_i^2\beta_i\beta_j\delta_{ij} + 4\sigma_i^4\delta_{ij} - 2\mu_i^2 - 8\mu_i\mu_j - 8\mu_i\beta_i\beta_j \\
&- 4\mu_i\beta_j^2 - 4\mu_i\sigma_j^2 - 8\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij} - 8\mu_j^2 - 16\mu_j\beta_i\beta_j - 8\mu_j\beta_j^2 - 8\mu_j\sigma_j^2 - 16\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij} - 8\beta_i^2\beta_j^2 \\
&- 8\beta_i\beta_j^3 - 8\beta_i\beta_j\sigma_j^2 - 16\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij} - 2\beta_j^4 - 4\beta_j^2\sigma_j^2 - 8\beta_j^2\sigma_i^2\delta_{ij} - 2\sigma_j^4 - 8\sigma_j^2\sigma_i^2\delta_{ij} - 8\sigma_i^4\delta_{ij} \\
&+ 4\mu_i^2 + 4\mu_i\beta_i^2 + 4\mu_i\sigma_i^2 + \beta_i^4 + 2\beta_i^2\sigma_i^2 + \sigma_i^4 - 8\mu_i^2 - 8\mu_i\beta_i^2 - 8\mu_i\sigma_i^2 - 8\mu_i\mu_j - 16\mu_i\beta_i\beta_j \\
&- 16\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij} - 2\beta_j^4 - 4\beta_i^2\sigma_i^2 - 4\beta_i^2\mu_j - 8\beta_i^3\beta_j - 8\beta_i^2\sigma_i^2\delta_{ij} - 2\sigma_i^4 + 4\sigma_i^2\mu_j - 8\sigma_i^2\beta_i\beta_j - 8\sigma_i^4\delta_{ij} \\
&- 2\mu_j^2 - 8\mu_j\beta_i\beta_j - 8\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij} - 8\beta_i^2\beta_j^2 - 16\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij} - 8\sigma_i^4\delta_{ij} + 4\mu_i^2 + 4\mu_i\beta_i^2 + 4\mu_i\sigma_i^2 + 8\mu_i\mu_j \\
&+ 4\mu_i\beta_j^2 + 4\mu_i\sigma_j^2 + 16\mu_i\beta_i\beta_j + 16\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij} + \beta_i^4 + 2\beta_i^2\sigma_i^2 + 4\beta_i^2\mu_j + 2\beta_i^2\beta_j^2 + 2\beta_i^2\sigma_j^2 + 8\beta_i^3\beta_j \\
&+ 8\beta_i^2\sigma_i^2\delta_{ij} + \sigma_i^4 + 4\sigma_i^2\mu_j + 2\sigma_i^2\beta_j^2 + 2\sigma_i^2\sigma_j^2 + 8\sigma_i^2\beta_i\beta_j + 8\sigma_i^4\delta_{ij} + 4\mu_j^2 + 4\mu_j\beta_j^2 + 4\mu_j\sigma_j^2 \\
&+ 16\mu_j\beta_i\beta_j + 16\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij} + \beta_j^4 + 2\beta_j^2\sigma_j^2 + 8\beta_j^3\beta_i + 8\beta_j^2\sigma_i^2\delta_{ij} + \sigma_j^4 + 8\beta_i\beta_j\sigma_j^2 + 8\sigma_j^2\sigma_i^2\delta_{ij} \\
&+ 16\beta_i^2\beta_j^2 + 32\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij} + 16\sigma_i^4\delta_{ij})\Delta t^2
\end{aligned}
$$

Ordnen wir nun ein letztes Mal die Terme zur besseren Übersicht:

$$
\begin{aligned}
-2\mu_j^2 + 4\mu_j^2 + 4\mu_j^2 - 8\mu_j^2 - 2\mu_j^2 + 4\mu_j^2 &= 0 \\
-2\mu_i^2 + 4\mu_i^2 - 2\mu_i^2 + 4\mu_i^2 - 8\mu_i^2 + 4\mu_i^2 &= 0 \\
4\mu_j\beta_j^2 - 8\mu_j\beta_j^2 + 4\mu_j\beta_j^2 &= 0 \\
4\mu_j\sigma_j^2 - 8\mu_j\sigma_j^2 + 4\mu_j\sigma_j^2 &= 0 \\
\beta_j^4 - 2\beta_j^4 - 2\beta_j^4 + \beta_j^4 + \beta_j^4 + \beta_j^4 &= 0 \\
\sigma_j^4 - 2\sigma_j^4 + \sigma_j^4 &= 0 \\
2\beta_j^2\sigma_j^2 - 4\beta_j^2\sigma_j^2 + 2\beta_j^2\sigma_j^2 &= 0 \\
8\mu_j\mu_j - 8\mu_j\mu_j - 8\mu_j\mu_j + 8\mu_j\mu_j &= 0 \\
8\mu_i\beta_i\beta_j - 8\mu_i\beta_i\beta_j - 16\mu_i\beta_i\beta_j + 16\mu_i\beta_i\beta_j &= 0 \\
8\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij} - 8\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij} - 16\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij} + 16\mu_i\sigma_i^2\delta_{ij} &= 0 \\
8\mu_j\beta_i\beta_j - 16\mu_j\beta_i\beta_j - 8\mu_j\beta_i\beta_j + 16\mu_j\beta_i\beta_j &= 0 \\
8\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij} - 16\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij} - 8\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij} + 16\mu_j\sigma_i^2\delta_{ij} &= 0 \\
4\beta_i^2\beta_j^2 - 8\beta_i^2\beta_j^2 - 8\beta_i^2\beta_j^2 + 2\beta_i^2\beta_j^2 + 16\beta_i^2\beta_j^2 &= 6\beta_i^2\beta_j^2 \\
8\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij} - 16\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij} - 16\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij} + 32\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij} &= 8\beta_i\beta_j\sigma_i^2\delta_{ij} \\
4\sigma_i^4\delta_{ij} - 8\sigma_i^4\delta_{ij} - 8\sigma_i^4\delta_{ij} - 8\sigma_i^4\delta_{ij} + 8\sigma_i^4\delta_{ij} + 16\sigma_i^4\delta_{ij} &= 4\sigma_i^4\delta_{ij} \\
-4\mu_i\beta_j^2 + 4\mu_i\beta_j^2 &= 0 \\
-4\mu_i\sigma_j^2 + 4\mu_i\sigma_j^2 &= 0 \\
-8\beta_i\beta_j^3 + 8\beta_i\beta_j^3 &= 0 \\
-8\beta_i\beta_j\sigma_j^2 + 8\beta_i\beta_j\sigma_j^2 &= 0 \\
-8\beta_j^2\sigma_i^2\delta_{ij} + 8\beta_j^2\sigma_i^2\delta_{ij} &= 0 \\
-8\sigma_i^2\sigma_j^2\delta_{ij} + 8\sigma_i^2\sigma_j^2\delta_{ij} &= 0 \\
2\beta_i^2\sigma_i^2 - 4\beta_i^2\sigma_i^2 + 2\beta_i^2\sigma_i^2 &= 0 \\
\sigma_i^4 - 2\sigma_i^4 + \sigma_i^4 &= 0 \\
-8\mu_i\beta_i^2 + 4\mu_i\beta_i^2 + 4\mu_i\beta_i^2 &= 0 \\
-8\mu_i\sigma_i^2 + 4\mu_i\sigma_i^2 + 4\mu_i\sigma_i^2 &= 0 \\
-4\mu_j\beta_i^2 + 4\mu_j\beta_i^2 &= 0 \\
-8\beta_i^3\beta_j + 8\beta_i^3\beta_j &= 0 \\
-8\beta_i^2\sigma_i^2\delta_{ij} + 8\beta_i^2\sigma_i^2\delta_{ij} &= 0 \\
-4\mu_j\sigma_i^2 + 4\mu_j\sigma_i^2 &= 0 \\
-8\sigma_i^2\beta_i\beta_j + 8\sigma_i^2\beta_i\beta_j &= 0 \\
2\beta_i^2\sigma_j^2 &= 2\beta_i^2\sigma_j^2 \\
2\sigma_i^2\beta_j^2 &= 2\sigma_i^2\beta_j^2 \\
2\sigma_i^2\sigma_j^2 &= 2\sigma_i^2\sigma_j^2
\end{aligned}
$$

Auch hier muss aufgrund der Taylorreihenentwicklung wieder durch 2 dividiert werden, ebenfalls wird wie in den vorigen Identitäten im Fall $i = j$ wieder i statt j geschrieben. Durch eine einfache Umformung erhalten wir das gewünschte Ergebnis:

$$\begin{aligned}
&(\sigma_i^2\sigma_j^2 + \beta_i^2\sigma_j^2 + \sigma_i^2\beta_j^2 + 3\beta_i^2\beta_j^2 + 2\sigma_i^4\delta_{ij} + 4\sigma_i^2\beta_i^2\delta_{ij})\Delta_t^2 = \\
&(\sigma_i^2 + \beta_i^2)(\sigma_j^2 + \beta_j^2) + 2\beta_i\beta_j + 2(\sigma_i^4 + \beta_i^4 + 2\sigma_i^2\beta_i^2 - \beta_i^4)\delta_{ij})\Delta t^2 = \\
&(\tilde{\sigma}_i^2\tilde{\sigma}_j^2 + 2\beta_i^2\beta_j^2 + 2(\tilde{\sigma}_i^4 - \beta_i^4)\delta_{ij})\Delta t^2 + O(\Delta t^3).
\end{aligned}$$

□

Im Folgenden betrachten wir ein Portfolio, bestehend aus N gleichgewichteten Short Call Optionen geschrieben auf N verschiedene Wertpapiere S_i. Es ist zu beachten, dass im diskreten Setting die Absicherung nach Black-Scholes-Merton nicht mehr perfekt ist und zwar in jenem Sinne, dass der erwartete Output des Hedgingportfolios nur mehr im Erwartungswert verschwindet und nicht mehr fast sicher. Wir werden im Folgenden zeigen, dass alternative Hedgingportfolios gefunden werden können, die eine geringere Hedgingfehlervarianz in diskreter Zeit aufweisen. Diese alternativen Methoden beruhen auf einem Fokus auf höheren Ordnungen der systematischen Risikofaktoren im Vergleich zu einer linearen Exposure des totalen Risikos, also der Aufteilung des Risikos in einen idiosynkratischen und systematischen Risikoanteil. Dies werden wir in 3 Schritten zeigen, die den folgenden 3 Theoremen entsprechen. Zuerst werden wir eine Darstellung für die Hedgingfehlervarianz, wenn für alle individuellen Call Positionen im Portfolio ein Standard Delta Hedge angenommen wird, finden. Im zweiten Theorem, werden wir für den Fall, dass ein beliebiges Portfolio verwendet wird, um sich gegen Fluktuationen in den Werten des Optionsportfolios abzusichern eine ähnliche Darstellung finden. Dies erlaubt uns zu zeigen, wie die Varianz des Hedgingfehlers durch eine geeignete Wahl des Heding Portfolios reduziert werden kann. Schlussendlich zeigen wir das Hauptresultat: Wächst die Portfoliogröße unbegrenzt, so ist es möglich einen perfekt statischen Portfoliohedge in endlicher Zeit zu konstruieren, indem man die linearen und höheren Exposures des systematischen Risikofaktors betrachtet und den idiosynkratischen außen vor lässt.

Den Callpreis eines Wertpapiers S_i der gewöhnlichen Black-Scholes-Merton Preisgleichung werden wir mit $C^i(S_i, t)$ bezeichnen und mit $C_S^i(S_i, t)$ dessen Ableitung nach S_i. In diesem Fall ist die Standardherangehensweise dieses Portfolios über einen diskreten Zeithorizont Δt abzusichern, die Konstruktion eines Absicherungsportfolios, bestehend aus einer Position $C_S^i(S_i, t)$ für jedes der zugrundeliegenden Wertpapiere und einer Position Q^i in bar mit

$$Q^i = C^i(S_i, t) - C_S^i(S_i, t)S_i. \tag{3.8}$$

Der individuellen Hedgingfehler ΔH_i und der des entsprechenden Portfolios ΔH ergibt sich wie folgt:

$$\Delta H_i = C_S^i(S_i, t)[S_i(t + \Delta t) - S_i(t)] + Q^i[\exp[r\Delta t] - 1] \tag{3.9}$$

$$- [C^i(S_i(t + \Delta t), t + \Delta t) - C^i(S_i(t), t)], \tag{3.10}$$

$$\Delta H = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \Delta H_i. \tag{3.11}$$

Im Folgenden werden wir statt $C^i(S_i(t), t)$ der Einfachheit halber C^i schreiben. Dasselbe gilt für die Ableitungen, beispielsweise C^i_S für das Delta der Option.

Verwendet man die obige Hedgingstrategie, so ist leicht zu erkennen, dass das Absichern des gesamten Portfolios der Summe der Absicherungen der individuellen Positionen entspricht. Entwickelt man den obigen Absicherungsfehler aus (3.9) in eine Reihenentwicklung der Länge der Absicherungsperiode Δt (Leland(1985) und Mello und Neuhaus (1998)), so entsprechen der erwartete Absicherungsfehler und seine Varianz den folgenden Formeln:

Theorem 1. *Verwendet man Delta Hedging für die individuelle Position, so erfüllt der Hedgingfehler ΔH*

$$\mathbb{E}[\Delta H | S_1(t), ...S_N(t)] = O(\Delta t^2) \tag{3.12}$$

und hängt natürlich von $S_1(t), ..., S_N(t)$ ab.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\Delta H)^2 | S_1(t), ...S_N(t)] = & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{N}\sum_i C^i_{SS} S_i^2 \beta_i^2\right]^2 \Delta t^2 \\ & + \frac{1}{2N^2}\sum_i \left[(C^i_{SS} S_i^2)^2 (\tilde{\sigma_i^4} - \beta_i^4)\right] \Delta t^2 + O(\Delta t^3),\end{aligned}$$

wobei die beiden Summen $O(N)$ sind.

Für $N = 1$ erhalten wir den bekannten Ausdruck für die Varianz des Hedgingfehlers als Quadrat des Options Gamma. Logischerweise impliziert dieses Darstellung der Varianz, dass die Auszahlung des Optionsportfolios nicht länger ohne Risiko in diskreter Zeit repliziert werden kann. Daher scheint es so, als würde es keinen exakten Preis für das Optionsportfolio geben. Der erste Term im obigen Theorem beschreibt die Verteilung des systematischen Risikofaktors z_0. Dieser Term ist von Ordnung $O(\Delta t^2)$, was darauf hindeutet, dass die systematische Risikokomponente in einem großen Portfolio nicht diversifiziert werden kann und daher von Orndung $O(1)$ in N ist. Der zweite Term rührt von der idiosynkratischen Risikokomponente her und ist von Ordnung $O(\Delta t^2/N)$. Hier ist klar ersichtlich, dass Deltahedging von der Diversifikation profitiert. Die Varianz der idiosynkratischen Komponente ist von Ordnung $O(1/N)$, was dazu führt, dass diese für große N verschwindet und nur mehr jene Risiken übrig bleiben, die auf bekannten Märkten exisitieren.

Bemerkenswert ist weiter, dass der erste Term proportional zum Quadrat der Kovarianz ist, was bedeutet, die Vorteile der Diversifikation sind größer als für einen Investor in lineare Sicherheiten, bei denen die Varianz proportional zu Kovarianz ist, zu investieren. Für endliche N ist die Varianz ebenfalls reduziert, dies entsteht durch die Korrelation zwischen den verschiedenen zugrundeliegenden Sicherheiten.

Es ist möglich, die Varianz für große N zu reduzieren, indem man die Wahl des Absicherungsportfolios optimiert, woraus ein großerer Profit aus der Abhängigkeitsstruktur der

verschiedenen zugrundeliegenden Werte gezogen werden kann. Wir betrachten eine alternative Absicherungsstrategie, bei der das Absicherungsportfolio einen festgelegten Anteil D^i anstatt der C_S^i für das i-te Wertpapier enthält und wir nehmen an, dass der Preis der Option weiterhin dem Black-Scholes-Merton Preis gleicht. Später wird gezeigt, dass dies in einem unbegrenzten Wirtschaftssystem formal fast sicher gerechtfertigt ist. Die Bareinlage ist daher in diesem Fall:

$$Q^i = C^i - D^i S_i. \tag{3.13}$$

Verwendet man diese Absicherungsstrategie, so erhalten wir die folgenden Resultate für die Varianz des Absicherungsfehlers:

Theorem 2. *Wählen wir die Hedgingstrategie, bei der $D^i S_i$ in das i-te Risiko investiert wird, so können wir das Hedgingportfolio so wählen, dass der Hedgingfehler ΔH^B*

$$\mathbb{E}[\Delta H^B | S_1(t), ..., S_N(t)] = O(\Delta t^2) \tag{3.14}$$

erfüllt. Wird nur das Marktrisiko bepreist, also $\mu_i = r + \kappa_0 \beta_i$ für alle i, wobei κ_0 den Preis des systematischen Risikos beschreibt, so ist die Varianz des Absicherungsfehlers gegeben durch

$$\mathbb{E}[(\Delta H^B)^2 | S_1(t), ..., S_N(t)] = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + O(\Delta t^3), \tag{3.15}$$

mit

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{N^2} \sum_i (X^i \sigma_i)^2 \Delta t, \tag{3.16}$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \Big[\frac{1}{N} \sum_i (C_{SS}^i S_i^2 - X^i) \beta_i^2 \Big]^2 \Delta t^2, \tag{3.17}$$

$$\mathcal{A}_3 = \frac{1}{N^2} \sum_i \Big[\frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_i^4 - \beta_i^4)(C_{SS}^i S_i^2 - X^i)^2 + 2\mu_i \sigma_i^2 (X^i)^2 - 2(\mu_i - r)\sigma_i^2 X^i C_{SS}^i S_i^2 \Big] \Delta t^2, \tag{3.18}$$

wobei mit $X^i = (D^i - C_S^i) S_i$ die Abweichung vom Standard Hedgingportfolio beschreibt und mit ΔH^B der Absicherungsfehler des auf die Wahl der D^i eingeschränkten Absicherungsstrategie bezeichnet wird.

Wir beschränken uns in diesem Theorem darauf, nur das Marktrisiko zu bepreisen. Dies führt zur Abwesenheit der asymptotischen Arbitrage im Limes $N \to \infty$, sei also $\mu_i = r + \kappa_0 \beta_i + \kappa_i \sigma_i$, wobei κ_i den Preis des idiosynkratischen Risikos beschreibt, so führt das Ausschließen der asymptotischen Arbitrage auf die Einschränkung, dass durch die Menge $\{i | \kappa_i \neq 0\}$, die Aussage nur fast sicher gilt.

Theorem 2 beschreibt also die Aufteilung der Absicherungsfehlervarianz bis zur Ordnung $O(\Delta t^2)$ in drei Teile. $\mathcal{A}_2$ beschreibt die systematische Risikokomponente, wohingegen die Terme $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_3$ den idiosynkratischen Teil darstellen. $\mathcal{A}_2$ liegt in $O(1)$ von N und $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_3$ in $O(1/N)$. Bemerkenswert ist weiter, dass $\mathcal{A}_1$ linear in Δt ist und $\mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_3$ quadratisch in Δt sind.

Für endliche Portfoliogrößen N, sollten wir im Limes $\Delta t \to 0$ fordern, dass die Terme linear in Δt verschwinden, um das Absicherungsrisiko minimieren zu können. Dies resultiert

in der Aufteilung $D^i = C^i_S$ oder $X^i = 0$ aufgrund von $\mathcal{A}_1$. Es gilt also: In stetiger Zeit ist das optimale Absicherungsportfolio die Summe der individuellen Black-Scholes-Merton Absicherungsportfolios.

Im Falle nicht infinitesimaler Werte von Δt ist dies nicht mehr der Fall, weshalb wir einen anderen Weg betrachten werden, um die Varianz des Absicherungsportfolios zu dezimieren. Dies erscheint am deutlichsten, wenn man den Limes der Portfoliogröße $N \to \infty$ betrachtet, wodurch die Terme $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_3$ ignoriert werden könnnen. Die Forderung $\mathbb{E}[\Delta H^B] = O(\Delta t^2)$ stellt nur eine kleine Einschränkung an die Zuordnung der Menge D^i dar, um das lineare systematische Risiko zu eliminieren. Die verbleibende Flexibilität in den D^i kann anschließend dazu verwendet werden, um die Varianz in höheren Ordnungen von Δt zu reduzieren, wie wir in Theorem 3 sehen werden.

Es ist möglich, D^i so zu setzen, dass auch $\mathcal{A}_2$ verschwindet, unter der Annahme, dass nicht alle β_i identisch sind. Die Intuition dieses Ergebnisses ist klar. In einem großen Portfoliokontext ist die systematische Risikokomponente breit gefächert, weshalb in unserem Ein-Faktor Modell nur die systematische Risikokomponente übrig bleibt. Wählt man $\mathcal{A}_2 = 0$, so verschwindet das systematische Gamma Risiko. Im Gegensatz dazu fixiert der Standardabsicherungs Ansatz a priori die Zerlegung des Absicherungsportfolios, sodass durch das lineare Delta sowohl die systematischen als auch die idiosynkratischen Risikofaktoren abgesichert werden. Daher bleiben keine Freiheiten mehr, um die nicht variierbaren höheren Ordnungen der systematischen Risikokomponente abzusichern. Bei endlichen Portfoliogrößen N und endlicher Zeit Δt besteht ein Konflikt zwischen dem Absichern aller idiosynkratischen Risiken ($N\Delta t \to 0$) und dem Absichern des Marktrisikos ($N\Delta t \to \infty$). Klarerweise sind Abweichungen vom Standardabsicherungsvorgehen, sowohl in den Absicherungsverhältnissen als auch in der Reduktion der Varianz größer, je größer die Portfolios und die Intervalle sind.

Beweis von Theorem 2: Betrachten wir ein Portfolio aus Beständen D^i des jeweiligen Wertpapiers S_i, eines Baranteils wie in (3.8) von $Q = \frac{1}{N}\sum_i Q^i$ und einer Short Position auf jeder Option C^i. Die erste Gleichung ist leicht ersichtlich, indem in (3.8) C^i_S durch D^i ersetzt wird woraus

$$Q^i = C^i(S_i, t) - D^i(S_i, t)S_i$$

folgt und über i summiert wird. Die Änderung des Wertes des Portfolios zwischen aufeinanderfolgenden Intervallen werden durch den Absicherungsfehler ΔH beschrieben, der durch

$$\Delta H = \frac{1}{N}\sum_i D^i \Delta S_i + \Delta Q - \frac{1}{N}\sum_i \Delta C^i$$

gegeben ist. Hier muss nur für ΔH_i (3.9) eingesetzt werden und C^i_S durch D^i ersetzt werden.

Für den folgenden Schritt verwenden wir, dass ΔS_i von Ordnung $O(\Delta t^{\frac{1}{2}})$ ist. Dies folgt mit Hilfe des 1. Lemmas, aus dem sich leicht berechnen lässt, dass $\mathbb{E}[\left(\frac{\Delta S_i}{S_i}\right)^2] = \tilde{\sigma}_i^2 \Delta t + O(\Delta t^2)$ gilt, indem man eine Taylorreihenentwicklung durchführt, woraus sich für $\mathbb{E}[\Delta S_i^2 | S_1(t), ..., S_N(t)] = S_i^2 \sigma_i^2 \Delta t$ ergibt, was durch Wurzel ziehen zum gewünschten Ergebnis führt.

Jetzt können wir die obige Gleichung für ΔH unter der Verwendung der Reihenentwicklung von ΔC^i darstellen.

$$\begin{aligned}
\Delta C^i &= \frac{\Delta C^i}{\Delta S_i}\Delta S_i + \frac{\Delta C^i}{\Delta t}\Delta t + \frac{\Delta^2 C^i}{\Delta t \Delta S_i} + \frac{1}{2}\frac{\Delta^2 C^i}{\Delta t^2}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\frac{\Delta^2 C^i}{\Delta S_i^2}\Delta S_i^2 + \frac{1}{6}\frac{\Delta^3 C^i}{\Delta t^3}\Delta t^3 \\
&\quad + \frac{1}{6}\frac{\Delta^3 C^i}{\Delta S_i^3}\Delta S_i^3 + \frac{1}{2}\frac{\Delta^3 C^i}{\Delta t \Delta S_i \Delta t}\Delta t \Delta S_i \Delta t \\
&= C_S^i \Delta S_i + C_t^i \Delta t + C_{St}^i \Delta S \Delta t + \frac{1}{2}C_{tt}^i(\Delta t)^2 + \frac{1}{2}C_{SS}^i(\Delta S_i)^2 + \frac{1}{6}C_{ttt}^i(\Delta t)^3 + \frac{1}{6}C_{SSS}^i(\Delta S_i)^3 \\
&\quad + \frac{1}{2}C_{tSt}^i \Delta t \Delta S_i \Delta t,
\end{aligned}$$

woraus folgt, dass alle Terme bis auf ΔS_i^3 in $O(\Delta t^2)$ liegen. Mit Hilfe der Taylorreihenentwicklung für $\exp[r\Delta t] - 1 = 1 + r\Delta t + O(\Delta t^2) - 1$ folgt die Entwicklung von ΔH:

$$\begin{aligned}
\Delta H = \frac{1}{N}\sum_i [&D^i \Delta S_i + r(C^i - D^i S_i)\Delta t - C_S^i \Delta S_i - \frac{1}{2}C_{SS}^i(\Delta S_i)^2 - C_t^i \Delta t - \frac{1}{6}C_{SSS}^i(\Delta S_i)^3 \\
&- C_{St}^i \Delta S_i \Delta t] + O(\Delta t^2)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Da die Optionspreise der C^i nach dem Black-Scholes-Merton Prinzip berechnet werden, kann auch in unserem Setting die Black-Scholes-Merton Gleichung

$$C_t^i + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 C_{SS}^i S_i^2 - r(C^i - C_S^i S_i) = 0 \tag{3.20}$$

angewendet werden und ihre Ableitung entspricht der folgenden Form:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dS}(C_t^i + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 C_{SS}^i S_i^2 - r(C^i - C_S^i S_i)) \\
&= C_{tS}^i + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 C_{SSS}^i S_i^2 + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 C_{SS}^i 2S_i - rC_S^i + rC_{SS}^i S_i + rC_S^i \\
&= C_{tS}^i + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 C_{SSS}^i S_i^2 + (r + \tilde{\sigma}_i^2)C_{SS}^i S_i = 0.
\end{aligned}$$

Diese wird im Folgenden verwendet, um C_t^i bzw. C_{St}^i zu substituieren.

$$-C_t^i = \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 C_{SS}^i S_i^2 - r(C^i - C_S^i S_i)$$

$$C_{St}^i = -\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 S_i^2 C_{SSS}^i - (r + \tilde{\sigma}_i^2)C_{SS}^i S_i$$

Durch Einsetzen in (3.19) erhält man die folgende Form des Hedgingfehlers:

$$\begin{aligned}
\Delta H = \frac{1}{N}\sum_i [&(D^i - C_S^i)(\Delta S_i - rS_i \Delta t) - \frac{1}{2}C_{SS}^i((\Delta S_i)^2 - \tilde{\sigma}_i^2 S_i^2 \Delta t) \\
&- \frac{1}{6}C_{SSS}^i((\Delta S_i)^3 - 3\tilde{\sigma}_i^2 S_i^2 \Delta S_i \Delta t) + (r + \tilde{\sigma}_i^2)C_{SS}^i S_i \Delta S_i \Delta t] + O(\Delta t^2)
\end{aligned}$$

Fälschlicherweise wird an dieser Stelle im Paper von einem Faktor $1/H$ ausgegangen. Verwendet man nun die Formeln aus Lemma 2, so kann der Erwartungswert des Hedgingfehlers leicht berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Delta H|S_1(t),...,S_N(t)] &= \mathbb{E}[\frac{1}{N}\sum_i[(D^i - C_S^i)(\Delta S_i - rS_i\Delta t) - \frac{1}{2}C_{SS}^i((\Delta S_i)^2 - \tilde{\sigma}_i^2 S_i^2 \Delta t) \\
&\quad - \frac{1}{6}C_{SSS}^i((\Delta S_i)^3 - 3\tilde{\sigma}_i^2 S_i^2 \Delta S_i \Delta t) \\
&\quad + (r + \tilde{\sigma}_i^2)C_{SS}^i S_i \Delta S_i \Delta t]|S_1(t),...,S_N(t)] \\
&= \frac{1}{N}\sum_i (D^i - C_S^i)(S_i \mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i}{S_i}\right] - r\Delta t) - \frac{1}{2}C_{SS}^i S_i^2 (\mathbb{E}\left[\frac{(\Delta S_i)^2}{S_i^2}\right] - \tilde{\sigma}_i^2 \Delta t) \\
&\quad - \frac{1}{6}C_{SSS}^i (S_i^3 (\mathbb{E}\left[\frac{(\Delta S_i)^3}{S_i^3}\right] - 3\tilde{\sigma}_i^2 \mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i}{S_i}\right]\Delta t)
\end{aligned}$$

Die Identität $\mathbb{E}[\frac{\Delta S_i}{S_i}] = \mu_i \Delta t$ haben wir bereits in Lemma 2 hergeleitet. Für die restlichen beiden Erwartungswerte gehen wir analog vor:

$$\mathbb{E}\left[\frac{(\Delta S_i)^2}{S_i^2}\right] = 1 - 2\exp[\mu_i \Delta t] + \exp[(2\mu_i + \beta_i^2 + \sigma_i^2)\Delta t].$$

Führen wir auch hier eine Taylorreihenentwicklung durch, so fallen wiederrum die Terme für $i = 0$ weg, da $1-2+1 = 0$ gilt. Für $i = 1$ erhalten wir $-2\mu_i\Delta t + 2\mu_i \Delta t + (\beta_i^2 + \sigma_i^2)\Delta t = \tilde{\sigma}_i^2 \Delta t$, Terme höherer Ordnung werden wir hier nicht betrachten. Es gilt daher:

$$\mathbb{E}\left[\frac{(\Delta S_i)^2}{S_i^2}\right] = \tilde{\sigma}_i^2 \Delta t + O(\Delta t^2).$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{(\Delta S_i)^3}{S_i^3}\right] &= 1 - \exp[\mu_i \Delta t] + 3\exp[(2\mu_i - \tilde{\sigma}_i^2 + 2(\beta_i^2 + \sigma_i^2))\Delta t] - \exp[(3\mu_i - \frac{3}{2}\tilde{\sigma}_i^2 \\
&\quad + \frac{9}{2}(\beta_i^2 + \sigma_i^2))\Delta t]
\end{aligned}$$

Auch in diesem Fall fallen bei einer Taylorreihenentwicklung die Terme für $i = 0$ weg und wie wir sehen werden verschwinden sie auch im Fall $i = 1$, da $-3\mu_i + 6\mu_i - 3\mu_i - 3\tilde{\sigma}_i^2 + 6(\beta_i^2 + \sigma_i^2) + \frac{3}{2}\tilde{\sigma}_i^2 - \frac{9}{2}(\beta_i^2 + \sigma_i^2) = 0$ gilt. Woraus für den Erwartungswert des Hedgingfehlers

$$\mathbb{E}[\Delta H|S_1(t),...,S_N(t)] = \frac{1}{N}\sum_i (D^i - C_S^i)S_i(\mu_i - r)\Delta t + O(\Delta t^2) \tag{3.21}$$

folgt. Die Berechnung der Varianz des Hedgingfehlers ist um einiges aufwändiger. Wir wollen

zeigen, dass für diese gilt:

$$\mathrm{Var}[\Delta H|S_1(t),...,S_N(t)] = \left[\frac{1}{N}\sum_i (D^i - C_S^i)S_i\beta_i\right]^2 \Delta t + \frac{1}{N^2}\sum_i (D^i - C_S^i)^2 S_i^2\sigma_i^2\Delta t \quad (3.22)$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{N}\sum_i [(D^i - C_S^i)S_i - C_{SS}^i S_i^2]\beta_i^2\right]^2 \Delta t^2 \quad (3.23)$$

$$+ 2\left[\frac{1}{N}\sum_i (D^i - C_s^i)S_i\beta_i\right]\left[\frac{1}{N}\sum_j (D^j - C_S^j)S_j\mu_j\beta_j\right]\Delta t^2 \quad (3.24)$$

$$- 2\left[\frac{1}{N}\sum_i (D^i - C_s^i)S_i\beta_i\right]\left[\frac{1}{N}\sum_j C_{SS}^j S_j^2\beta_j(\tilde{\sigma}_j^2 - r)\right]\Delta t^2 \quad (3.25)$$

$$+ \frac{1}{N^2}\sum_i \left[\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_i^4 - \beta_i^4)[(D^i - C_S^i)S_i - C_{SS}^i S_i^2\right]^2 \quad (3.26)$$

$$+ 2\mu_i\sigma_i^2(D^i - C_S^i)^2 S_i^2 - 2\sigma_i^2(\mu_i - r)(D^i - C_S^i)C_{SS}^i S_i^3]\Delta t^2. \quad (3.27)$$

Wir wenden hierfür den Verschiebungssatz $\mathrm{Var}[\Delta H|S_1(t),...,S_N(t)] = \mathbb{E}[\Delta H^2|S_1(t),...,S_N(t)] - \mathbb{E}[\Delta H|S_1(t),...,S_N(t)]^2$ an und berechnen zuerst $\mathbb{E}[\Delta H|S_1(t),...,S_N(t)]^2$:

$$\mathbb{E}[\Delta H|S_1(t),...,S_N(t)]^2 = \frac{1}{N^2}\sum_i\sum_j (D^i - C_S^i)(D^j - C_S^j)S_iS_j(\mu_i - r)(\mu_j - r)\Delta t^2 \quad (3.28)$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_i\sum_j (D^i - C_S^i)(D^j - C_S^j)S_iS_j(\mu_i\mu_j - r\mu_j - r\mu_i + r^2)\Delta t^2. \quad (3.29)$$

Um das Ergebnis der Varianz besser mit den aus dem Verschiebungssatz gewonnenen Darstellungen vergleichen zu können, stellen wir das gewünschte Ergebnis zunächst anders dar:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\Delta H|S_1(t),...,S_N(t)] = & \frac{1}{N^2}\sum_i\sum_j (D^i - C_S^i)(D^j - C_S^j)S_iS_j\beta_i\beta_j\Delta t && (3.30)\\
& + \frac{1}{N^2}\sum_i\sum_j (D^i - C_S^i)(D^j - C_S^j)S_iS_j\sigma_i\sigma_j\delta_{ij}\Delta t && (3.31)\\
& + \frac{1}{2N^2}\sum_i\sum_j [(D^i - C_S^i)S_i\beta_i^2(D^j - C_S^j)S_j\beta_j^2 \\
& \qquad - C_{SS}^iS_i^2\beta_i^2(D^j - C_S^j)S_j\beta_j^2 - (D^i - C_S^i)S_i\beta_i^2C_{SS}^jS_j^2\beta_j^2 \\
& \qquad + C_{SS}^iC_{SS}^jS_i^2\S_j^2\beta_i^2\beta_j^2]\Delta t^2 && (3.32)\\
& + 2\frac{1}{N^2}\sum_i\sum_j (D^i - C_S^i)(D^j - C_S^j)S_iS_j\beta_i\beta_j\mu_j\Delta t^2 && (3.33)\\
& - 2\frac{1}{N^2}\sum_i\sum_j (D^i - C_S^i)S_i\beta_iC_{SS}^jS_j^2\beta_j(\mu_j - r)\Delta t^2 && (3.34)\\
& + \frac{1}{N^2}\sum_i [\frac{1}{2}\sigma_i^4\left[(D^i - C_S^i)^2S_i^2 - 2(D^i - C_S^i)S_i^3C_{SS}^i + C_{SS}^iS_i^4\right] \\
& \qquad + \sigma_i^2\beta_i^2\left[(D^i - C_S^i)^2S_i^2 - 2(D^i - C_S^i)S_i^3C_{SS}^i + C_{SS}^iS_i^4\right] \\
& \qquad + 2\mu_i\sigma_i^2(D^i - C_S^i)^2S_i^2 - 2\sigma_i^2(\mu_i - r)(D^i - C_S^i)C_{SS}^iS_i^3]\Delta t^2 \\
& && (3.35)
\end{aligned}
$$

und berechnen nun

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Delta H^2|S_1(t),...,S_N(t)] = \frac{1}{N^2}\mathbb{E}[\sum_i\sum_j (D^i - C_S^i)(D^j - C_S^j)(\Delta S_i \Delta S_j \\
- r\Delta S_i S_j \Delta t - rS_i \Delta S_j \Delta t + r^2 S_i S_j \Delta t^2) \qquad (3.36)\\
+ 2(-\frac{1}{2}\sum_i\sum_j (D^i - C_S^i)C_{SS}^j(\Delta S_i \Delta S_j^2 - \Delta S_i \tilde{\sigma}_j^2 S_j^2 \Delta t \\
- rS_i \Delta t \Delta S_j^2 + rS_i \Delta t \tilde{\sigma}_j^2 S_j^2 \Delta t) \qquad (3.37)\\
+ 2(-\frac{1}{6}\sum_i\sum_j (D^i - C_S^i)C_{SSS}^j(\Delta S_i \Delta S_j^3 - rS_i \Delta t \Delta S_j^3 \\
- 3\Delta S_i \Delta S_j \tilde{\sigma}_j^2 S_j^2 \Delta t + 3rS_i \Delta t \tilde{\sigma}_j^2 S_j^2 \Delta s_j \Delta t) \qquad (3.38)\\
+ 2\sum_i\sum_j (D^i - C_S^i)(\Delta S_i \Delta S_j S_j C_{SS}^j \Delta t(r + \tilde{\sigma}_j^2) \\
- rS_i \Delta t C_{SS}^j S_j \Delta S_j \Delta t(r + \tilde{\sigma}_j^2)) \qquad (3.39)\\
+ \frac{1}{4}\sum_i\sum_j C_{SS}^i C_{SS}^j(\Delta S_i^2 \Delta S_j^2 - \tilde{\sigma}_i^2 S_i^2 \Delta S_j^2 \Delta t - \tilde{\sigma}_j^2 S_j^2 \Delta S_i^2 \Delta t \\
+ \tilde{\sigma}_i^2 \tilde{\sigma}_j^2 S_i^2 S_j^2 \Delta t^2) \qquad (3.40)\\
+ 2\frac{1}{12}\sum_i\sum_j C_{SS}^i C_{SSS}^j(\Delta S_i^2 \Delta S_j^3 - \tilde{\sigma}_i S_i^2 \Delta S_j^3 \Delta t \\
- \Delta S_i^2 \Delta S_j 3\tilde{\sigma}_j^2 S_j^2 \Delta t + 3\tilde{\sigma}_i^2 \tilde{\sigma}_j^2 S_i^2 S_j^2 \Delta S_j \Delta t^2) \qquad (3.41)\\
- 2\frac{1}{2}\sum_i\sum_j C_{SS}^i C_{SS}^j(r + \tilde{\sigma}_i^2)(\Delta S_i^2 \Delta S_j S_j \Delta t \\
- \Delta S_j S_j \tilde{\sigma}_i^2 S_i^2 \Delta t^2) \qquad (3.42)\\
+ \frac{1}{36}\sum_i\sum_j C_{SSS}^i C_{SSS}^j(\Delta S_i^3 \Delta S_j^3 - 3\Delta S_i^3 \tilde{\sigma}_j S_j^2 \Delta S_j \Delta t \\
- 3\Delta S_j^3 \Delta S_i \tilde{\sigma}_i S_i^2 \Delta t + 9\Delta S_i \Delta S_j \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j S_i^2 S_j^2 \Delta t^2) \qquad (3.43)\\
+ 2(-\frac{1}{6}\sum_i\sum_j C_{SSS}^i C_{SS}^i S_j \Delta t(r + \tilde{\sigma}_j^2)(\Delta S_j \Delta S_i^3 \\
- 3\Delta S_j \tilde{\sigma}_i S_i^2 \Delta S_i \Delta t)) \qquad (3.44)\\
+ \sum_i\sum_j (r + \tilde{\sigma}_i)(r + \tilde{\sigma}_j) C_{SS}^i C_{SS}^j S_i S_j \Delta S_i \Delta S_j \Delta t^2 \\
|S_1(t),...,S_N(t)]. \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

Berechnen wir nun die einzelnen Erwartungswerte und vergleichen diese gleich mit dem gewünschten Ergebnis:

(3.36)

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \sum_j (D^i - C_S^i)(D^j - C_S^j)\Big(\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i \Delta S_j}{S_i S_j}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] S_i S_j \\
&\quad - r\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i}{S_i}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] S_i S_j \Delta t - r S_i S_j \mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_j}{S_j}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] \Delta t + r^2 S_i S_j \Delta t^2\Big) \\
&= \sum_i \sum_j (D^i - C_S^i)(D^j - C_S^j) S_i S_j ([\beta_i \beta_j + \sigma_i \delta_{ij}]\Delta t + [\mu_i \mu_j + \frac{1}{2}\beta_i^2 \beta_j^2 + \beta_i \beta_j (\mu_i + \mu_j) \\
&\quad + (\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_i^4 - \beta_i^4) + 2\mu_i \sigma_i)\delta_{ij}]\Delta t^2 - r\mu_i \Delta t^2 - r\mu_j \Delta t^2 + r^2 \Delta t^2) \\
&= \sum_i \sum_j (D^i - C_S^i)(D^j - C_S^j) S_i S_j \beta_i \beta_j \Delta t \\
&\quad + \sum_i (D^i - C_S^i)^2 S_i^2 \sigma_i^2 \Delta t \\
&\quad + \sum_i \sum_j (D^i - C_S^i)(D^j - C_S^j) S_i S_j (\mu_i \mu_j + \frac{1}{2}\beta_i^2 \beta_j^2 + \beta_i \beta_j (\mu_i + \mu_j))\Delta t^2 \\
&\quad + \sum_i (D^i - C_S^i)^2 S_i^2 (\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_i^4 - \beta_i^4) + 2\mu_i \sigma_i^2)\Delta t^2 \\
&\quad - \sum_i \sum_j (D^i - C_S^i)(D^j - C_S^j) S_i S_j (r\mu_i \Delta t^2 + r\mu_j \Delta t^2 - r^2 \Delta t^2)
\end{aligned}
$$

Hier ist leicht zu erkennen, dass im letzten Ausdruck die erste Doppelsumme (3.30) und der zweite Term (3.31) entspricht. Des weiteren kann man durch genaues Betrachten des eben gefundenen Ausdrucks und (3.28) feststellen, dass der letzte Term und im dritten Term $\mu_i \mu_j$ durch den Verschiebungssatz wegfallen. Des weiteren kommt der $\frac{1}{2}\beta_i^2 \beta_j^2$ Teil aus dem dritten Term in (3.32) und der $\beta_i \beta_j (\mu_i + \mu_j)$ Teil ebenfalls aus dem dritten Term in (3.33), da $2\sum_i \sum_j (D^i - C_S^i)(D^j - C_S^j) S_i S_j \beta_i \beta_j \mu_j \Delta t^2 = \sum_i \sum_j (D^i - C_S^i)(D^j - C_S^j) S_i S_j \beta_i \beta_j (\mu_i + \mu_j)\Delta t^2$ entspricht, wodurch noch der vierte Term zuzuordnen bleibt. Vergleicht man diesen mit (3.35), so ist durch die einfache Rechnung $\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_i^4 - \beta_i^4) = \frac{1}{2}\sigma_i^4 + \beta_i^2 \sigma_i^2$zu erkennen, dass wir damit die ersten Terme $(D^i - C_S^i)$ gefunden haben.

(3.37)

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_i \sum_j (D^i - C_S^i) C_{SS}^j \Big(\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i \Delta S_j^2}{S_i S_j^2} \Big| S_1(t), ..., S_N(t) \right] S_i S_j^2 \\
&\quad - \mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i}{S_i} \Big| S_1(t), ..., S_N(t) \right] S_i \tilde{\sigma}_j^2 S_j^2 \Delta t - r S_i \Delta t \mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_j^2}{S_j^2} \Big| S_1(t), ..., S_N(t) \right] S_j^2 \\
&\quad + r S_i \Delta t \tilde{\sigma}_j^2 S_j^2 \Delta t \Big) \\
&= -\sum_i \sum_j (D^i - C_S^i) C_{SS}^j (S_i S_j^2 [\mu_i \tilde{\sigma}_i^2 + \beta_i^2 \beta_j^2 + 2\beta_i \beta_j (\mu_j + \tilde{\sigma}_j^2) + (\tilde{\sigma}_i^4 - \beta_i^4 \\
&\qquad\qquad + 2\sigma_i (\mu_i + \tilde{\sigma}_i^2)) \delta_{ij} - \mu_i \tilde{\sigma}_j^2 - r\tilde{\sigma}_j^2 + r\tilde{\sigma}_j^2] \Delta t^2 \\
&= -\sum_i \sum_j (D^i - C_S^i) C_{SS}^j S_i S_j^2 (\beta_i^2 \beta_j^2 + 2\beta_i \beta_j \mu_j + 2\beta_i \beta_j^3 + 2\beta_i \beta_j \sigma_j^2) \Delta t \\
&\quad - \sum_i (D^i - C_S^i) C_{SS}^i S_i^3 (\sigma_i^4 + 2\sigma_i^2 \beta_i^2 + 2\sigma_i^2 \mu_i + 2\sigma_i^2 \tilde{\sigma}_i^2) \Delta t^2
\end{aligned}
$$

Im ersten Term des Endergebnisses gleicht nun der Teil $\beta_i^2 \beta_j^2$ dem Teil $C_{SS}^i S_i^2 \beta_i^2 (D^j - C_S^j) S_j \beta_j^2)$ aus (3.32) und demselben Ausdruck mit i anstelle von j, da diese mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ versehen sind. Der Teil $2\beta_i \beta_j \mu_j$ entspricht dem μ_j aus (3.34). Bei genauerer Betrachtung von (3.39) werden wir sehen, dass dadurch der Teil $2\beta_i \beta_j \sigma_j^2$ ebenso wie $\beta_i \beta_j^3$ aus der ersten Doppelsumme aufgehoben wird. Im zweiten Term des letzten Ausdrucks ist der Term $\sigma_i^4 + 2\sigma_i^2 \beta_i^2 + 2\sigma_i^2 \mu_i$ äquivalent zu den zweiten Klammertermen in (3.35). Auch hier bleibt ein Term übrig, $2\sigma_i^2 \tilde{\sigma}_i^2 = 2\sigma_i^4 + 2\sigma_i^2 \beta_i^2$, der sich ebenfalls mit (3.39) auflösen wird.

(3.38)

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3} \sum_i \sum_j (D^i - C_S^i) C_{SSS}^j \Big(\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i \Delta S_j^3}{S_i S_j^3} \Big| S_1(t), ..., S_N(t) \right] S_i S_j^3 \\
&\quad - r S_i \Delta t \mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_j^3}{S_j^3} \Big| S_1(t), ..., S_N(t) \right] S_j^3 - 3\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i \Delta S_j}{S_i S_j} \Big| S_1(t), ..., S_N(t) \right] S_i S_j^3 \tilde{\sigma}_j^2 \Delta t \\
&\quad + 3r S_i \Delta t \tilde{\sigma}_j^2 S_j^3 \mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_j}{S_j} \Big| S_1(t), ..., S_N(t) \right] \Delta t) \\
&= -\frac{1}{3} \sum_i \sum_j (D^i - C_S^i) C_{SSS}^j (S_i S_j^3 (3[\beta_i \beta_j + \sigma_i^2 \delta_{ij}] \tilde{\sigma}_j^2 \Delta t^2) - r S_i \Delta t S_j^3 \cdot 0 \\
&\quad + 3r S_i \tilde{\sigma}_j^2 S_j^3 \Delta t^3 \mu_j - 3 S_i S_j \tilde{\sigma}_j^2 S_j^2 \Delta t^2 (\beta_i \beta_j + \sigma_i^2 \delta_{ij}) \Big)
\end{aligned}
$$

Es ist leicht zu erkennen, dass die Terme, in denen r vorkommt, für die Berechnung irrelevant sind, da der erste aufgrund des bedingten Erwartungswertes mit 0 multipliziert wird und der zweite aufgrund von Δt^3 eine höhere Ordnung besitzt. Betrachtet

man nun die beiden übrigen Terme, so sieht man, dass auch diese sich aufheben, was dazu führt, dass der gesamte Ausdruck 0 wird und somit wegfällt.

(3.39)

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_i \sum_j (D^i - C_S^i)\Big(\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i \Delta S_j}{S_i S_j}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] S_i S_j^2 C_{SS}^j \Delta t (r + \tilde{\sigma}_j^2) \\
&\qquad - r S_i C_{SS}^j S_j \mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_j}{S_j}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] \Delta t^2 (r + \tilde{\sigma}_j^2)\Big) \\
&= 2\sum_i \sum_j (D^i - C_S^i)\Big(C_{SS}^j (r + \tilde{\sigma}_j^2) S_i S_j^2 (\beta_i \beta_j + \sigma_i^2 \delta_{ij}) \Delta t^2 - r S_i (r + \tilde{\sigma}_j^2) \mu_j C_{SS}^j S_j \Delta t^3\Big)
\end{aligned}
$$

Auch hier liegt der zweite Term in $O(\Delta t^3)$.

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_i \sum_j (D^i - C_S^i) C_{SS}^j (r + \tilde{\sigma}_j^2) S_i S_j^2 \beta_i \beta_j \Delta t^2 \\
&\quad + 2\sum_i (D^i - C_S^i) C_{SS}^i (r + \tilde{\sigma}_i^2) S_i^3 \sigma_i^2 \Delta t^2
\end{aligned}
$$

Betrachten wir in diesem Fall zuerst die zweite Summe. Wir haben in den Umformungen von (3.37) gesehen, dass einige Terme noch übrig geblieben sind. Vergleicht man nun die zweite Summe mit den Umformungen von (3.37) so bleibt nur der Teil mit $r\sigma_i^2$ übrig, der dem letzten Ausdruck aus (3.35) gleicht. Im ersten Summanden finden wir den noch fehlenden Teil aus (3.34), $\sigma_j^2 \beta_i \beta_j + \beta_i \beta_j^3$, dieser hebt ebenfalls den in (3.37) übrigen Term auf.

(3.40)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\sum_i \sum_j C_{SS}^i C_{SS}^j \Big(\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i^2 \Delta S_j^2}{S_i^2 S_j^2}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] S_i^2 S_j^2 \\
&\quad - \tilde{\sigma}_i^2 S_i^2 \Delta t \mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_j^2}{S_j^2}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] S_j^2 - \tilde{\sigma}_j^2 S_j^2 \Delta t \mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i^2}{S_i^2}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] S_i^2 \\
&\quad + \tilde{\sigma}_i^2 \tilde{\sigma}_j^2 S_i^2 S_j^2 \Delta t^2\Big) \\
&= \frac{1}{4}\sum_i \sum_j C_{SS}^i C_{SS}^j (S_i^2 S_j^2 [\tilde{\sigma}_i^2 \tilde{\sigma}_j^2 + 2\beta_i^2 \beta_j^2 + 2(\tilde{\sigma}_i^4 - \beta_i^4)\delta_{ij}] \Delta t^2 \\
&\quad - \tilde{\sigma}_i^2 S_i \Delta t^2 \tilde{\sigma}_j^2 S_j^2 - \tilde{\sigma}_j^2 S_j^2 \Delta t^2 \tilde{\sigma}_i^2 S_i^2 + \tilde{\sigma}_i^2 \tilde{\sigma}_j^2 S_i^2 S_j^2 \Delta t^2)
\end{aligned}
$$

Hier fallen alle Terme mit $\tilde{\sigma}_i^2\tilde{\sigma}_j^2$ weg und es bleibt

$$= \frac{1}{2}\sum_i\sum_j C_{SS}^i C_{SS}^j S_i^2 S_j^2 \beta_i^2 \beta_j^2 \Delta t^2$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_i C_{SS}^i (S_i^4(\tilde{\sigma}_i^4 - \beta_i^4)\Delta t^2)$$

übrig. Die erste Doppelsumme findet sich in (3.32) wieder. Die zweite Summe beschreibt die fehlenden Terme in (3.35).

(3.41)

$$= \frac{1}{6}\sum_i\sum_j C_{SS}^i C_{SSS}^j \Big(\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i^2 \Delta S_j^3}{S_i^2 S_j^3}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] S_i^2 S_j^3$$
$$- \tilde{\sigma}_i S_i^2 \Delta t \mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_j^3}{S_j^3}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] S_j^3 - 3\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i^2 \Delta S_j}{S_i^2 S_j}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] S_i^2 S_j^3 \tilde{\sigma}_j^2 \Delta t$$
$$+ 3\tilde{\sigma}_i^2 \tilde{\sigma}_j^2 S_i^2 S_j^3 \mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_j}{S_j}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] \Delta t^2\Big)$$

Es ist leicht ersichtlich, dass dieser Ausdruck keinen relevanten Beitrag zum Ergebnis leisten wird, da die Terme entweder 0 sind oder in $O(\Delta t^3)$ liegen.

(3.42)

$$= -\sum_i\sum_j C_{SS}^i \Big(\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i^2 \Delta S_j}{S_i^2 S_j}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] S_i^2 S_j^2 (r + \tilde{\sigma}_j^2) C_{SS}^j \Delta t$$
$$- \mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_j}{S_j}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] \Delta t^2\Big)$$

Auch hier liegen die Ausdrücke in $O(\Delta t^3)$.

(3.43)

$$= \frac{1}{36}\sum_i\sum_j C_{SSS}^i C_{SSS}^j \Big(\left[\frac{\Delta S_i^3 \Delta S_j^3}{S_i^3 S_j^3}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] S_i^3 S_j^3$$
$$- 3\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i^3 \Delta S_j}{S_i^3 S_j}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] S_i^3 S_j \tilde{\sigma}_j S_j^2 \Delta t$$
$$- 3\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_j^3 \Delta S_i}{S_j^3 S_i}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] S_j^3 S_i^3 \tilde{\sigma}_i \Delta t$$
$$+ 9\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i \Delta S_j}{S_i S_j}\Big| S_1(t), ..., S_N(t)\right] \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j S_i^3 S_j^3 \Delta t^2\Big)$$

Diese Ausdrücke liegen ebenfalls in $O(\Delta t^3)$.

(3.44)

$$= -\frac{1}{3}\sum_i\sum_j C^i_{SSS}C^i_{SS}S_j\Delta t(r+\tilde{\sigma}_j^2)\Big(\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_j\Delta S_i^3}{S_jS_i^3}\Big|S_1(t),...,S_N(t)\right]$$
$$-3\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i\Delta S_j}{S_iS_j}\Big|S_1(t),...,S_N(t)\right]S_i^3S_j\tilde{\sigma}_i\Delta t\Big)$$

Auch hier liegt die gesamte Summe in $O(\Delta t^3)$, ebenso beim folgenden Ausdruck:

(3.45)

$$= \sum_i\sum_j(r+\tilde{\sigma}_i)(r+\tilde{\sigma}_j)C^i_{SS}C^j_{SS}S_iS_j\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i\Delta S_j}{S_iS_j}\Big|S_1(t),...,S_N(t)\right]S_iS_j\Delta t^2$$

Hiermit ist die Darstellung von $\mathrm{Var}[\Delta H|S_1(t),...,S_N(t)]$ gezeigt.

Die soeben gefundene Darstellung kann beträchtlich vereinfacht werden, wenn wir folgende Annahme für die Aufteilung der D^i aufstellen: Die totale lineare Markt Exposure des Absicherungsportfolios soll verschwinden, was gleichbedeutend mit

$$\frac{1}{N}\sum_i(D^i-C^i_S)S_i\beta_i = 0 \tag{3.46}$$

ist. Diese Einschränkung kann immer auferlegt werden und ist ebenfalls für das Absichern nach Black-Scholes-Merton erfüllt. Die alternative Hedgingstrategie, die wir gewählt haben erfüllt ebenfalls diese Bedingung. Wird nur das Marktrisiko bepreist, also $\mu_i = r+\kappa_0\beta_i$ für alle i, wobei κ_0 das Marktrisiko bezeichnet, so garantiert diese Bedingung, dass die erwartete Rendite des Absicherungsportfolios (3.21) bis auf $O(\Delta t^2)$ verschwindet und daher $\mathbb{E}[\Delta H^B|S_1(t),...,S_N(t)] = O(\Delta t^2)$ gilt, wobei mit ΔH^B der Absicherungsfehler des auf die Wahl der D^i eingeschränkten Absicherungsstrategie bezeichnet wird. Dies führt zur folgenden Vereinfachung der Varianz:

$$\mathrm{Var}[\Delta H^B|S_1(t),...,S_N(t)] = \frac{1}{N^2}\sum_i(D^i-C^i_s)^2S_i^2\sigma_i^2\Delta t \tag{3.47}$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{N}\sum_i[(D^i-C^i_s)S_i-C^i_{SS}S_i^2]\beta_i^2\right]2\Delta t^2 \tag{3.48}$$
$$+\frac{1}{N^2}\sum_i\Big[\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_i^4-\beta_i^4)[(D^i-C^i_S)S_i-C^i_{SS}S_i^2)]^2 \tag{3.49}$$
$$+2\mu_i\sigma_i^2(D^i-C^i_S)^2S_i^2-2\sigma_i^2(\mu_i-r)(D^i-C^i_S)C^i_{SS}S_i^3\Big]\Delta t^2. \tag{3.50}$$

Macht man sich über die Positivität von (3.22) oder auch (3.47) Gedanken, so erscheint diese a priori nicht klar. Es ist jedoch möglich, mit Hilfe von Termen, die linear in Δt sind, die beiden Darstellungen der Varianzen bis zur Ordnung $O(\Delta t^3)$ zu Quadraten zu erweitern. □

Beweis von Theorem 1: Der Beweis dieses Theorems ist ein Spezialfall von Theorem 2 und folgt, da per Definition im Falle des Standard Hedgingportfolios $X^i = 0$ gilt. Daraus lässt sich direkt

$$\mathbb{E}[(\Delta H)^2|S_1(t),...S_N(t)] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{N}\sum_i C^i_{SS}S_i^2\beta_i^2\right]^2 \Delta t^2 + \frac{1}{2N}\sum_i \left[(C^i_{SS}S_i^2)^2(\tilde{\sigma}_i^4 - \beta_i^4)\right]\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

ableiten. □

Das folgende und letzte Theorem beschäftigt sich damit, ein risikoloses statisches Absicherungsportfolio zu bilden. Wir werden den Nachweis des allgemeinen Resultats, dass in großen Optionsportfolios das Absichern höherer Ordnungen des systematischen Risikos gegenüber der Absicherung des linearen idiosynkratischen Risikos bevorzugt wird, bringen.

Theorem 3. *Sichern wir ein Optionsportfolio, wie im vorigen Setting ab, bei dem nur das Marktrisiko bepreist wird, so können wir die D^i so wählen, dass*

$$\mathbb{E}[\Delta H^B|S_1(t),...,S_N(t)] = O(\Delta t^{\frac{n+1}{2}}) + O(1/N) \tag{3.51}$$

und

$$\mathbb{E}[(\Delta H^B)^2|S_1(t),...,S_N(t)] = O(\Delta t^{n+1}) + O(1/N) \tag{3.52}$$

im Falle $N \geq n$ gilt und zumindest n der Parameter β_i verschieden und ungleich Null sind.

Die Resultate aus Theorem 3 zeigen, dass es möglich ist, eine risikolose Absicherungsstrategie für eine endliche Zeit Δt im Limes $N \to \infty$ zu finden, falls die β_i unterschiedlich sind. Das Risiko, das dadurch entsteht diskrete Zeitintervalle zu betrachten verschwindet komplett: die systematische Risikokomponente kann durch jede beliebige Ordnung von Δt durch die Wahl einer geeigneten Nichtstandard Absicherungsstrategie eliminiert werden. Gleichzeitig verschwindet die idiosynkratische Risikokomponente durch Diversifikation. Der Schlüsselschritt im Beweis ist, dass das Absicherungsportfolio so gewählt wird, dass bis zu einer genügend hohen Ordnung in Δt die auf die systematische Risikokomponente bedingte Erwartung mit der unbedingten Erwartung übereinstimmt. Werden die Absicherungsanteile so gewählt, dass diese Erwartungswerte des Absicherungsfehlers übereinstimmen, so ist der einzige Beitrag der Varianz des Absicherungsfehlers der idiosynkratische Risikofaktor, der im Limes von großen N verschwindet.

Die Gleichheit der bedingten und unbedingten Erwartung des Absicherungsfehlers kann durch Vergleichen der höheren Ordnungen des systematischen Risikos bewiesen werden. Um die beiden Erwartungen zu vergleichen, muss eine Menge von Bedingungen an die Gewichtung der D^i gestellt werden. Alle diese Bedingungen sind linear in D^i. Die Koeffizienten beinhalten Potenzen der systematischen Volatilität β_i und höhere Ordnungen der Ableitungen des Black-Scholes-Merton Preises. Damit die Menge an Bedingungen eine Lösung findet,

muss die Anzahl der Wertpapiere ausreichend groß sein, $N \geq n$. Weiters darf das System der Bedingungen nicht singulär sein. Letzteres ist durch die Forderung, dass zumindest n der β_i ungleich und nicht Null sein dürfen, erfüllt.

Beweis von Theorem 3: Zuerst zeigen wir, dass der Unterschied zwischen dem Erwartungswert des Absicherungsfehlers und seines auf den Marktprozess $\hat{z}_0$ bedingten Erwartungswert beliebig klein gemacht werden kann. Formal, für jede natürliche Zahl n können wir die D^i so wählen, dass

$$\mathbb{E}[\Delta H | S_1(t), ..., S_N(t)] = \mathbb{E}[\Delta H | \hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)] + O(\Delta t^{\frac{n+1}{2}}), \tag{3.53}$$

wobei $\hat{z}_0 = \frac{z_0(t+\Delta t) - z_0(t)}{\Delta t^{1/2}}$ ist. $\hat{z}_0$ ist eine $\mathcal{N}(0,1)$ verteilte Zufallsvariable und beschreibt in diesem Sinn die Realisierung des Marktprozesses. Es wird sich herausstellen, dass beide Erwartungen bei der obigen Ordnung von Δt verschwinden werden. Um das anfängliche Resultat zu zeigen, werden wir den bedingten Erwartungswert in Potenzen von Δt und $\hat{z}_0$ entwickeln. Betrachtet man diese beiden Parameter genauer, so lässt sich feststellen, dass jeder Faktor von $\hat{z}_0$ von dem Faktor $\Delta t^{1/2}$ begleitet wird und noch weitere Potenzen von Δt auftreten, weshalb wir den bedingten Erwartungswert als

$$\mathbb{E}[\Delta H | \hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)] = \sum_{\substack{m,n \geq 0 \\ m+n>0}} \tilde{h}_{mn} (\hat{z}_0 \Delta t^{1/2})^m \Delta t^{n/2} = \sum_{l>0} \sum_{k=0}^{l} h_k^l \hat{z}_0^k \Delta t^{l/2} \tag{3.54}$$

schreiben können. Um die zweite Darstellung der Summe zu erhalten, wurde $l = m + n$ und $k = m$ gesetzt. h_k^l beschreibt das Polynom der Koeffizienten. Im Folgenden werden wir mit der zweiten Darstellung der bedingten Erwartung arbeiten.

Verwenden wir die Tatsache, dass für ungerade Potenzen n von z_i und daher insbesondere auch für z_0 gilt, dass $\mathbb{E}[z_i^n] = 0$, so folgt sofort, dass $h_k^l = 0$ ist, wenn $l - k$ ungerade ist, da $n = k - l$ gilt.

Da es unser Ziel ist D^i zu finden, sodass der Markt-stochastische Faktor z_0 in $\mathbb{E}[\Delta H | \hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)]$ verschwindet, müssen die Koeffizienten h_k^l verschwinden, weshalb wir uns direkt auf die Terme in h_k^l konzentrieren, die proportional zu den D^i sind. Diese Terme sind äquivalent zu

$$\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i}{S_i} \middle| \hat{z}_0\right] = \exp[\beta_i \hat{z}_0 \Delta t^{1/2} + (\mu_i - \frac{1}{2}\beta_i^2)\Delta t] - 1. \tag{3.55}$$

Die Gleichheit folgt aus der Berechnung der bedingten Erwartung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i}{S_i}\Big|\hat{z}_0\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_i}{S_i}\Big|\frac{z_0(t+\Delta t)-z_0(t)}{\Delta t^{1/2}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t + \big(\beta_i\hat{z}_0 + \sigma_i\hat{z}_i\big)\Delta t^{1/2}]\Big|\hat{z}_0\right] - 1 \\
&= \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t]\mathbb{E}\left[\exp[\big(\beta_i\hat{z}_0 + \sigma_i\hat{z}_i\big)\Delta t^{1/2}]\Big|\hat{z}_0\right] - 1 \\
&= \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t + \beta_i\hat{z}_0\Delta t^{1/2}]\mathbb{E}\left[\sigma_i\hat{z}_i\Delta t^{1/2}\right] - 1 \\
&= \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)\Delta t + \beta_i\hat{z}_0\Delta t^{1/2} + \frac{1}{2}\sigma_i^2\Delta t] - 1 \\
&= \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\beta_i^2)\Delta t + \beta_i\hat{z}_0\Delta t^{1/2}] - 1,
\end{aligned}$$

wobei von der dritten auf die vierte Zeile die Messbarkeit und Unabhängigkeit eingehen.

Entwickelt man die obige Darstellung nach $\hat{z}_0$ und Δt und bezeichnet man den Selbstbehalt mit h_k^l und mit c_k^l die abgeleiteten Komponenten des Absicherungsportfolios, so erhält man

$$h_k^l = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \frac{1}{m!k!} D^i S_i(\mu_i - \frac{1}{2}\beta_i^2)^m \beta_i^k - D^i r\Delta t S_i - c_k^l & l-k \text{ gerade mit } m = \frac{l-k}{2}, \\ 0 & l-k \text{ ungerade}, \end{cases} \tag{3.56}$$

wobei c_k^l unabhängig von D^i ist.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Delta H|\hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)] &= \mathbb{E}[\frac{1}{N}\sum_i (D^i - C_S^i)(\Delta S_i - rS_i\Delta t) - \frac{1}{2}C_{SS}^i((\Delta S_i)^2 - \tilde{\sigma}_i^2 S_i^2\Delta t) \\
&\quad - \frac{1}{6}C_{SSS}^i((\Delta S_i)^3 - 3\tilde{\sigma}_i S_i^2\Delta S_i\Delta t) \\
&\quad + (r + \tilde{\sigma}_i^2)C_{SS}^i\Delta S_i S_i\Delta t|\hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)] \\
&= \frac{1}{N}\sum_i (D^i - C_S^i)(\mathbb{E}[\frac{\Delta S_i}{S_i}|\hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)]S_i - rS_i\Delta t) + c_l^k \\
&= \frac{1}{N}\sum_i D^i S_i(\exp[\beta_i\hat{z}_0\Delta t^{1/2} + (\mu_i - \frac{1}{2}\beta_i^2)\Delta t] - 1 - r\Delta t) - c_k^l
\end{aligned}$$

Führt man hier eine Reihenentwicklung nach Δt und z_0 durch, so erhält man die gewünschte Form. Zu diesem Zeitpunkt ist erwähnenswert, dass im Paper von B.Peeters, C.L.Dert & A.Lucas der Term $D^i r\Delta t S_i$ fehlt.

Es ist jetzt möglich, die D^i so zu wählen, dass alle h_k^l für $k > 0$ und $l \leq n$ verschwinden, wenn n gegeben ist. Wird nur das Marktrisiko bepreist, so führt dies zu einer Menge von n linearen Bedingungen für D^i. Wir zeigen dies, indem wir einen Operator $\mathcal{K}$ definieren, wodurch $\mathcal{K}\mathbb{E}[\Delta H|\hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)]$ verschwindet. Dieser Operator ist folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{K} = \frac{\partial}{\partial\Delta t} - \frac{\hat{z}_0 + 2\kappa_0\sqrt{\Delta t}}{2\Delta t}\frac{\partial}{\partial\hat{z}_0} + \frac{1}{2\Delta t}\frac{\partial^2}{\partial\hat{z}_0^2} - r. \tag{3.57}$$

$\mathcal{K}$ ist unabhängig vom idiosynkratischen Parameter, da kein i in der Formel vorkommt. Zuerst werden wir zeigen, dass $\mathcal{K}$ tatsächlich verschwindet, wenn es auf den bedingten Erwartungswert des Absicherungsfehlers angewandt wird.

$$\mathcal{K}\mathbb{E}[S_i(t+\Delta t)|\hat{z}_0] = (\mu_i - r - \kappa_0\beta_i)\mathbb{E}[S_i(t+\Delta t)|\hat{z}_0] = 0 \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[S_i(t+\Delta t)|\hat{z}_0] = \mathbb{E}\left[\exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)(t+\Delta t) + \beta_i z_0(t+\Delta t) + \sigma_i z_i(t+\Delta t)]\Big|\hat{z}_0\right] \\
&= \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)(t+\Delta t)]\mathbb{E}\left[\exp[\beta_i \frac{z_0(t+\Delta t) - z_0(t)}{\Delta t^{1/2}}\Delta t^{1/2} + \beta_i z_0(t) + \sigma_i \hat{z}_i(t+\Delta t)]\Big|\hat{z}_0\right] \\
&= \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2)(t+\Delta t) + \beta_i \frac{z_0(t+\Delta t) - z_0(t)}{\Delta t^{1/2}}\Delta t^{1/2} + \frac{1}{2}\beta_i^2 t + \frac{1}{2}\sigma_i^2(t+\Delta t)] \\
&= \exp[\mu_i(t+\Delta t) - \frac{1}{2}\beta_i^2\Delta t + \beta_i\hat{z}_0\Delta t^{1/2}]
\end{aligned}$$

Berechnet man nun die einzelnen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\Delta t}\mathbb{E}[S_i(t+\Delta t)|\hat{z}_0(t)] &= (\mu_i - \frac{1}{2}\beta_i^2 + \frac{1}{2\Delta t^{1/2}}\beta_i\hat{z}_0)\mathbb{E}[S_i(t+\Delta t)|\hat{z}_0(t)] \\
\frac{\partial}{\partial\hat{z}_0}\mathbb{E}[S_i(t+\Delta t)|\hat{z}_0(t)] &= \beta_i\Delta t^{1/2}\mathbb{E}[S_i(t+\Delta t)|\hat{z}_0(t)] \\
\frac{\partial^2}{\partial\hat{z}_0}\mathbb{E}[S_i(t+\Delta t)|\hat{z}_0(t)] &= \beta_i^2\Delta t\mathbb{E}[S_i(t+\Delta t)|\hat{z}_0(t)]
\end{aligned}$$

Setzen wir nun die 3 Ableitungen mit den Fakoren von $\mathcal{K}$ zusammen:

$$\begin{aligned}
&\mu_i - \frac{1}{2}\beta_i^2 + \frac{1}{2\Delta t^{1/2}}\beta_i\hat{z}_0 - \frac{\hat{z}_0 + 2\kappa_0\sqrt{\Delta t}}{2\Delta t}\beta_i\Delta t^{1/2} + \frac{1}{2\Delta t}\beta_i^2\Delta t - r \\
&= \mu_i - \frac{1}{2}\beta_i^2 + \frac{1}{2\Delta t^{1/2}}\beta_i\hat{z}_0 - \frac{1}{2\Delta t^{1/2}}\beta_i\hat{z}_0 - \kappa_0\beta_i + \frac{1}{2}\beta_i^2 - r \\
&= \mu_i - \kappa_0\beta_i - r = 0.
\end{aligned}$$

Die letzten Gleichheit gilt, da wir seit Theorem 2 von der Bedingung $\mu_i = r + \kappa_0\beta_i$ ausgehen. Auf ähnliche Art und Weise können wir zeigen, dass $\mathcal{K}$ angewandt auf die bedingte Erwartung des Optionsportfolios ebenfalls verschwindet. Berechnen wir die bedingte Erwartung und verwenden, dass der Operator $\mathcal{K}$ kommutiert, so können wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}\mathbb{E}[C^i|\hat{z}_0] &= \mathbb{E}[\mathcal{K}C^i|\hat{z}_0] \\
&= \mathbb{E}[C_t^i + \frac{1}{2}\beta_i^2 C_{SS}^i S_i^2 + C_S^i S_i(\mu_i - \kappa_0\beta_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 + \frac{1}{2}\frac{\sigma_i\hat{z}_i}{\sqrt{\Delta t}}) - rC^i|\hat{z}_0]
\end{aligned}$$

schreiben.

Dies ist einzusehen, indem man zuerst analog zu oben die Ableitung $\frac{\partial}{\partial\Delta t}S_i$ bildet

$$\frac{\partial}{\partial\Delta t}S_i = S_i(\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 + \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}}(\beta_i\hat{z}_0 + \sigma_i\hat{z}_i))$$

und diese bei den folgenden Ableitung benutzt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \Delta t} C^i &= C^i_S \frac{\partial}{\partial \Delta t} S_i + C^i_t = C^i_S S_i (\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 + \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}}(\beta_i \hat{z}_0 + \sigma_i \hat{z}_i)) \\
\frac{\partial}{\partial \hat{z}_0} C^i &= C^i_S \frac{\partial}{\partial \hat{z}_0} S_i = \beta_i \sqrt{\Delta t} S_i C^i_S \\
\frac{1}{2\Delta t}\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} C^i &= \frac{1}{2\Delta t}(C^i_{SS}\beta_i^2 \Delta t S_i^2 + C^i_S S_i \beta_i^2 \Delta t) = \frac{1}{2}\beta_i^2 (C^i_{SS} S_i^2 + C^i_S S_i),
\end{aligned}$$

womit man für $\mathcal{K}C^i$

$$\mathcal{K}C^i = C^i_S S_i (\mu_i - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 + \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}}(\beta_i \hat{z}_0 + \sigma_i \hat{z}_i)) - \frac{\hat{z}_0 + 2\kappa_0\sqrt{\Delta t}}{2\Delta t}\beta_i \sqrt{\Delta t} S_i C^i_S + \frac{1}{2}\beta_i^2 (C^i_{SS} S_i^2 + C^i_S S_i) - rC^i$$

erhält. Umformen führt auf das gewünschte Ergebnis.

Gehen wir im Folgenden von

$$\mathbb{E}[C^i_S S_i \hat{z}_i | \hat{z}_0] = \sigma_i \sqrt{\Delta t} \mathbb{E}[C^i_S S_i + C^i_{SS} S_i^2 | \hat{z}_0] \tag{3.59}$$

aus, was durch die explizite Darstellung der bedingten Erwartung als Integral über die idiosynkratische Wahrscheinlichkeitsdichte gezeigt werden kann und setzen wir dies in die vorherige Gleichung ein und verwenden wir die Black-Scholes-Merton Gleichung, so führt dies zu

$$\mathcal{K}\mathbb{E}[C^i | \hat{z}_0] = (\mu_i - r - \kappa_0 \beta_i)\mathbb{E}[C^i_S S_i | \hat{z}_0]. \tag{3.60}$$

Dieses Resultat ist einfach einzusehen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}\mathbb{E}[C^i | \hat{z}_0] &= \mathbb{E}[C^i_t + \frac{1}{2}\beta_i^2 C^i_{SS} S_i^2 + C^i_S S_i (\mu_i - \kappa_0 \beta_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 + \frac{1}{2}\frac{\sigma_i \hat{z}_i}{\sqrt{\Delta t}}) - rC^i | \hat{z}_0] \\
&= \mathbb{E}[C^i_t + \frac{1}{2}\beta_i^2 C^i_{SS} S_i^2 + C^i S_i \mu_i - C^i S_i \kappa_0 \beta_i - \frac{1}{2} C^i_S S_i \sigma_i^2 + \frac{1}{2}\sigma_i^2 (C^i_S S_i + C^i_{SS} S_i^2) - rC^i | \hat{z}_0].
\end{aligned}$$

Die Black-Scholes-Merton Gleichung lautet

$$C^i_t + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 C^i_{SS} S_i^2 - r(C^i - C^i_S S_i) = 0 \tag{3.61}$$

$$\Leftrightarrow -rC^i = -C^i_t - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_i^2 C^i_{SS} S_i^2 - rC^i_S S_i. \tag{3.62}$$

Setzen wir dies in die vorherige Gleichung ein, so folgt:

$$\mathcal{K}\mathbb{E}[C^i | \hat{z}_0] = \mathbb{E}[(\mu_i - r - \kappa_0 \beta_i) C^i_S S_i | \hat{z}_0] = (\mu_i - r - \kappa_0 \beta_i)\mathbb{E}[C^i_S S_i | \hat{z}_0].$$

Daraus folgt direkt, dass $\mathcal{K}$ angewandt auf die Cash-Komponente des Absicherungsportfolios verschwindet und wir erhalten tatsächlich

$$\mathcal{K}\mathbb{E}[\Delta H | \hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)] = 0, \tag{3.63}$$

wenn nur das Marktrisiko bepreist wird.

Als nächstes werden wir die Darstellung von $\mathbb{E}[\Delta H|\hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)]$ aus (3.56) verwenden, um die notwendigen Bedingungen an h_k^l herzuleiten. Jene h_k^l, die aufgrund der vorherigen Gleichung verschwinden, stellen keine Einschränkungen für die D^i dar, weshalb wir (3.63) als Ergebnis der Anwendung von $\mathcal{K}$ auf $\mathbb{E}[\Delta H|\hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)]$, als

$$\sum_{l>0}\sum_{k=0}^{l}[\frac{1}{2}(l-k)h_k^l - rh_k^{l-2} - \kappa_0(k+1)h_{k+1}^{l-1} + \frac{1}{2}(k+1)(k+2)h_{k+2}^l]\hat{z}_0^k\Delta t^{l/2-1} = 0$$

schreiben können, wobei h_k^0, h_k^{-1} und h_k^l für $k > l$ als 0 definiert werden. Daher muss jeder Koffizient innerhalb der eckigen Klammer einzeln verschwinden. Verwendet man diese Beziehung, so folgt direkt, dass durch jede nachfolgende Ordnung in Δt nur eine zusätzliche Bedingung für h_l^l eingeführt wird. Dieser Koeffizient ist jedoch klarerweise in der obigen Formel noch nicht berücksichtigt. Setzt man diesen Null, und zusätzlich alle h_k^k ebenfalls Null für $k < l$, so stellt dies sicher, dass alle h_k^m für alle $m \leq l$ verschwinden. Die verbleibenden Bedingungen für h_l^l mit $l \leq n$ können erfüllt werden, indem die D^i gewählt werden, wenn die Matrix B mit Einträgen $b_{il} = (\beta_i)^l$ für $i = 1, ..., N, l = 1, ..., n$ $rank(B) \geq n$ erfüllt. Diese Bedingung ist äquivalent zu der geforderten Annahme, dass zumindest n verschiedene Wertpapiere mit unterschiedlichen β_i benötigt werden und $\beta_i \neq 0$ gelten muss. Des weiteren bewirkt das Nullsetzen von h_l^l für alle $l \leq n$, dass $\mathbb{E}[\Delta H|\hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)]$ Null ist bis zur Ordnung $O(\Delta t^{n+1})$. Klarerweise müssen auch die Koeffizienten h_0^{2l} verschwinden. Die expliziten Formen der ersten beiden Koeffizienten lauten:

$$h_1^1 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}(D^i - C_S^i)S_i\beta_i$$
$$h_2^2 = \frac{1}{2N}\sum_{i=0}^{N}[(D^i - C_S^i)S_i - C_{SS}^i S_i^2]\beta_i^2.$$

Diese Terme decken sich klarerweise mit (3.22), die für große N bei linearer und quadratischer Ordnung in Δt dominieren. Generell lassen sich diese Terme durch

$$h_l^l = \frac{1}{l!N}\sum_i\left[D^iS_i - \sum_{m=1} la_l^m\frac{\partial^m C^i}{\partial S_i^m}S_i^m\right]\beta_i^l, \tag{3.64}$$

mit den rekursiv definierten Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_l^1 &= 1, \\ a_l^m &= ma^m l - 1 + a_{l-1}^{m-1} \qquad \text{für } m = 2, ..., l-1, \\ a_l^l &= 1, \end{aligned}$$

schreiben. Wir werden später in den numerischen Illustrationen sehen, dass diese Darstellung von Bedeutung sein wird. Als nächstes zeigen wir, dass die für die Varianz der bedingten Erwartung

$$\mathbb{E}\left[(\Delta H)^2\middle|\hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)\right] = \mathbb{E}[\Delta H|\hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)]^2 + O(1/N) \tag{3.65}$$

gilt. Um dies einzusehen, finden wir zuerst eine alternative Darstellung für $(\Delta H)^2$:

$$(\Delta H)^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{ij} \Delta H^i \Delta H^j. \tag{3.66}$$

Dabei ist zu beachten, dass ΔH^i nur von den stochastischen Realisationen z_0 und z_i abhängt. Betrachten wir die Erwartungen aller idiosynkratischen Prozesse z_i, so erhalten wir

$$\mathbb{E}[\Delta H^i \Delta H^j | \hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)] = \mathbb{E}[\Delta H^i | \hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)] \mathbb{E}[\Delta H^i | \hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)] + \delta_{ij} f^i(\hat{z}_0), \tag{3.67}$$

wobei $f^i(\hat{z}_0)$ eine Funktion von $\hat{z}_0$ beschreibt. Setzen wir dieses Ergebnis in (3.66) ein, so ist (3.65) gezeigt.

Schlussendlich können wir die beiden gewonnenen Resultate kombinieren und zeigen, dass die Varianz der unbedingten Erwartung des Absicherungsfehlers bis zu einer genügend großen Ordnung von Δt und $1/N$ verschwindet. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\Delta H)^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(\Delta H)^2 | \hat{z}_0, S_1(t), ...S_N(t)]] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Delta H | \hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)]^2] + O(1/N) \\
&= \mathbb{E}[(\mathbb{E}[\Delta H] + \mathbb{E}[\Delta H | \hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)] - \mathbb{E}[\Delta H])^2] + O(1/N) \\
&= \mathbb{E}[\Delta H]^2 + O(1/N) + O(\Delta t^{n+1}),
\end{aligned}$$

aufgrund der Turm Eigenschaft, (3.65) und (3.53). □

Korollar 1. *Wird nur das Marktrisiko bepreist, die Anzahl der Wertpapiere divergiert, also $N \to \infty$, und β_is sind verschieden, sodass wir die Approximationsordnung n beliebig groß wählen können ($n \to \infty$), so ist der eindeutige arbitragefreie Preis der Option fast sicher gleich dem Black-Scholes-Merton Preis.*

Arbitragemöglichkeiten in Korollar 1 sind definiert als die Möglichkeit einen Ertrag zu erwirtschaften, der fast sicher höher als der risikofreie Kursgewinn ist. Aufgrund der gewählten Konstruktion enstpricht der Preis dem eines Black-Scholes-Merton Preises. Theorem 3 impliziert, dass der Preis des Optionsportfolios der Summe von Black-Scholes-Merton Preisen gleicht. Da Theorem 3 ebenfalls für jede Folge von Call-Optionen und deren zugrundeliegenden Basiswert erfüllt ist, so muss gelten, dass die Menge der Optionen mit einem Preis ungleich dem Black-Scholes-Merton Preis vernachlässigbar ist. Auf den ersten Blick mag dieses Resultat unlogisch wirken: Für das beschränkte Absicherungsportfolio muss nur das Marktrisiko abgesichert werden, wohingegen der Preis gleich der Summe von Black-Scholes-Merton Preisen ist, die ebenfalls von idiosynkratischen Risikoparametern abhängen. Bemerkenswert ist aber, dass die Absicherungsverhältnisse der Portfoliooptionen von den (bedingten) Erwartungen der idiosynkratischen Risikofaktoren abhängen. Daher würde man annehmen, dass die idiosynkratischen Risikofaktoren eine Rolle im Preis durch deren Einfluss in den Absicherungsverhältnissen des systematischen Risikos eine Rolle spielen. Dies ist erfüllt, obwohl die idiosynkratischen Faktoren nicht abgesichert werden müssen.

3.3 Numerische Illustrationen

Um die gewonnenen Resultate zu illustrieren und diese intuitiver zu machen, werden im Folgenden einige Beispiele betrachtet, sowohl für endliche, wachsende N, wie in Thorem 2, als auch für den Limes $N \to \infty$.

3.3.1 Festlegen der Parameter

Wie bereits in Theorem 3, muss für die systematischen Risikofaktoren β_i Heterogenität erfüllt sein. Des weiteren wollen wir die Anzahl an freien Parametern in unseren numerischen Darstellungen begrenzen. Dafür setzen wir zuerst $r = 0$, des weiteren werden wir nur einen einzigen Indikator des idiosynkratischen Risikos betrachten und daher gilt $\sigma_i^2 \equiv \sigma^2 = c\sigma_m^2$, wobei mit σ_m die systematische Volatilität bezeichnet wird und c die Werte $0.5, 1.0, 2.0$ annehmen kann. Die anfänglichen Aktienpreise werden normalisiert und wir betrachten at-the-money Call Optionen mit einer Maturität von 3 Monaten und einer Absicherungsperiode von einem Monat, woraus sich $\Delta t = \frac{1}{12}$ ergibt. Daher bleiben uns noch $N+2$ Parameter: die Marktvolatilität σ_m^2, der Preis des systematischen Risikos κ_0 und die β_i. Um die Portfolios bei steigendem N vergleichen zu können, modellieren wir die β_i wie folgt. Für eine gegebene kumulative Verteilungsfunktion F definieren wir

$$\beta_i = F^{-1}\Big(\frac{2i-1}{2N}\Big)\sigma_m, \tag{3.68}$$

wobei mit F^{-1} die Inverse von F bezeichnet wird und $i = 1, ..., N$. Die Vergleichbarkeit für wachsende Portfoliogrößen N ist in diesem Fall dadurch garantiert, dass die β_i eine diskrete Darstellung der inversen Verteilungsfunktion F^{-1} bilden. Wir wählen für F eine Normalverteilung mit Mittelwert 1 und Standardabweichung 0.3 und $\kappa_0 = 20\%$, sowie $\sigma_m = 25\%$. Die folgenden 4 Graphiken illustrieren die Ergebnisse aus Theorem 2 für endliche Portfoliogrößen N, wohingegen in Graphik 5 der asymptotische Fall $N \to \infty$ aus Theorem 3 und Korollar 1 betrachtet wird. Es muss angemerkt werden, dass alle Optimierungen unter der Bedingung $\sum_i (D^i C_S^i) S_i \beta_i = 0$ durchgeführt werden, siehe auch Beweis von Theorem 2.

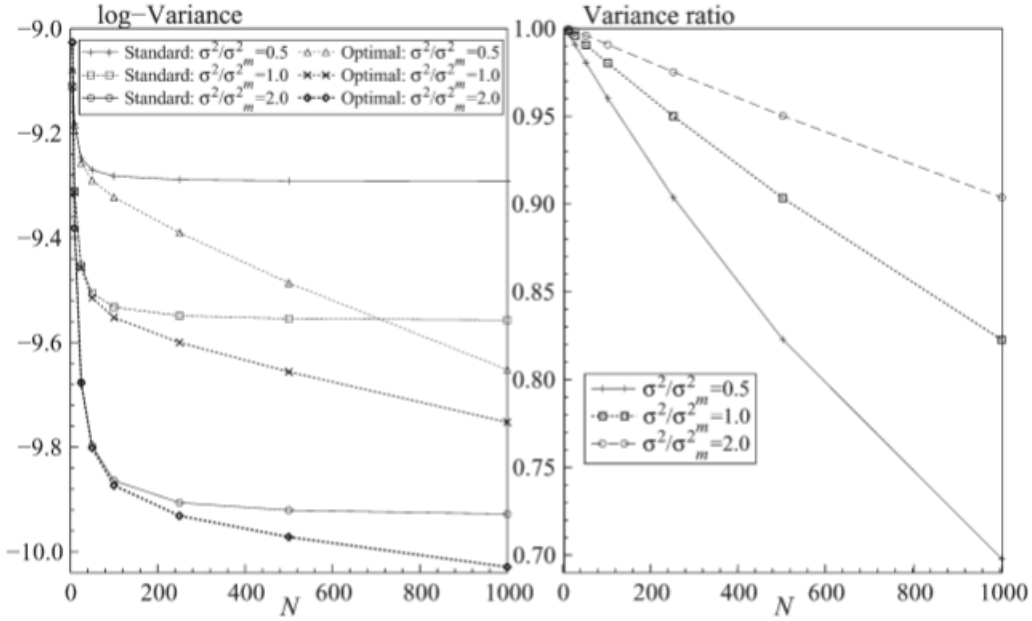

Abbildung 3.1: In Graphik 1 werden die Varianzen eines Portfolios von N at-the-money Call Optionen dargestellt. Im linken Teil werden die Varianzen der Absicherungsfehler des Standard Delta Absicherungsportfolios sowie die Varianzen des optimalen Portfolios dargestellt. Der rechte Teil zeigt das Verhältnis dieser Varianzen. In beiden Graphiken werden die Ergebnisse als Funktion der Portfoliogröße N beschrieben. Das systematische Risiko kann durch $\beta_i/\sigma_m \approx 1 + 0.3\Phi^{-1}((2i-1)/(2N))$ dargestellt werden, wobei mit Φ^{-1} die inverse Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet wird. Für die idiosynkratische Varianz gilt $\sigma^2 = c\sigma_m^2$ für $c = 0.5, 1, 2$, $\sigma_m = 25\%$, $r = 0$ und $\kappa_0 = 20\%$. Die Maturität der Option ist 3 Monate, weshalb $T - t = 0.25$ gilt, die Absicherungsperiode beträgt 1 Monat ($\Delta t = 1/12$).

3.3.2 Verbesserungen für endliche Portfoliogrößen

In Graphik 1 werden die Varianzen des Absicherungsfehlers für die Standard Delta Absicherungsstrategie und die neue Absicherungsstrategie verglichen, wobei die neue Strategie durch Minimieren der Absicherungsfehlervarianz über die Wahl der D^i wie in Theorem 2 optimiert wird. Im Falle der Standard Absicherungsstrategie führt Diversifikation zu einer sinkenden Absicherungsfehlervarianz für eine wachsende Portfoliogröße N. Die Konvergenzrate im Limes ist dabei äquivalent zu $1/N$. Ab $N = 100$ sind so gut wie keine Verbesserungen mehr möglich und die Varianz bleibt stabil. Die verbleibende Varianz ist durch den systematischen Risikofaktor zweiter Ordnung, dem systematischen Gamma Risiko, bedingt. Dieses Resultat ist ebenfalls in Graphik 2 zu sehen, in der die Prozentsätze der Varianzen der Absicherungsfehler bedingt durch die systematische Risikokomponente graphisch dargestellt sind. Ab $N = 100$ beträgt dieser Prozentsatz nahezu 100%. Auf der linken Seite von Graphik 1

führt ein geringeres idiosynkratisches Risiko zu einem Anstieg der Varianz des Absicherungsfehlers in N. Dieser Effekt ist auf die Parametrisierung zurückzuführen, da das totale Risiko $\sigma^2 + \beta_i^2$ niedriger für niedrige Werte von σ^2/σ_m^2 ist. Folglich ist der Gamma Term C_{SS} größer für kleinere σ^2.

Die Dominanz von $\mathcal{A}_2$ gegenüber $\mathcal{A}_3$ für große N erklärt den Kurvenverlauf. Für kleine N spielt $\mathcal{A}_3$ ebenfalls eine große Rolle, weshalb sich der Kurvenverlauf umkehrt. Man könnte erwarten, dass die Diversifikation sehr schnell einsetzt, dennoch ist das Verhältnis der neuen Absicherungsfehlervarianz zum Standardverfahren im besten unserer präsentierten Fälle 70%, welches man bei $c = 2$ und $N = 1000$ erhält. Um die langsame Konvergenzrate besser zu verstehen, betrachten wir im Folgenden die Beitrage $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ zur Varianz. Es ist notwendig, dass die lineare Darstellung des Marktrisikos bis zur Ordnung Δt verschwindet, andernfalls wäre die Darstellung der Varianz um einiges komplizierter als in Theorem 2. Durch diese Einschränkung dominiert der Term $\mathcal{A}_1$ die optimale Lösung für kleine N, wohingegen $\mathcal{A}_2$ für große N dominiert. Im Standard Black-Scholes-Merton Modell wird durch die Wahl $D^i = C_S^i$ $\mathcal{A}_1$ gleich Null gesetzt. Im neuen Modell können nur geringe Verbesserungen vorgenommen werden, indem man für kleine N $\mathcal{A}_2$ bei gegebenem $\mathcal{A}_1$ vermindert. In der Graphik wird verdeutlicht, dass für typische Parameterwerte ein sehr großes N für die Verminderung in $\mathcal{A}_2$ notwendig ist, um den Zuwachs in $\mathcal{A}_1$ wettzumachen. Im Gegensatz dazu zeigt die linke Hälfte von Graphik 1, dass die Varianz des Absicherungsfehlers für das optimale Absicherungsportfolio für wachsende N weiter sinkt. Wie schon vorher erwähnt, passiert dies aufgrund der Tatsache, dass das optimale Absicherungsportfolio ebenfalls gegen höhere Ordnungen des systematischen Risikofaktors abgesichert ist.

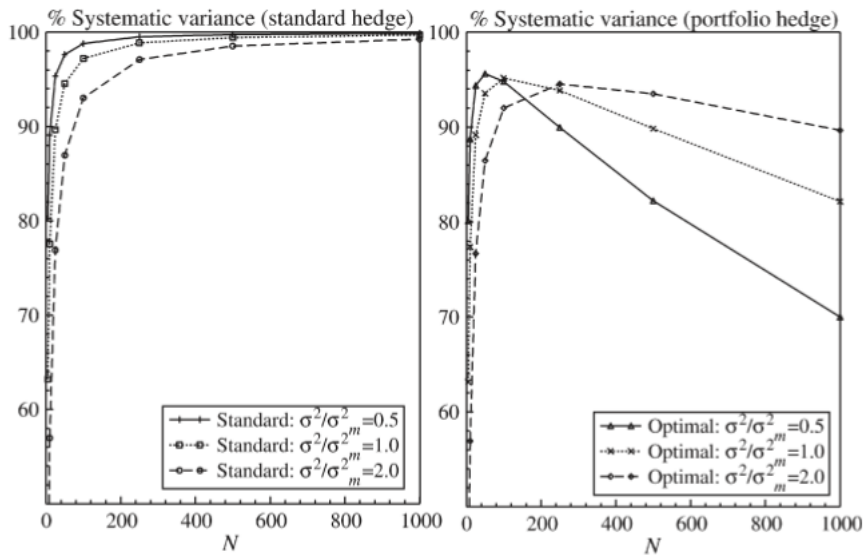

Abbildung 3.2: In Graphik 2 wird die Dekomposition der Varianzen veranschaulicht. Für ein Portfolio von N at-the-money Call Optionen mit verschiedenen Basiswerten werden in der Graphik die Prozentsätze der Absicherungsfehlervarianzen in Bezug auf das systematische Risiko dargestellt, welche aufgrund der Definition der Varianz des Absicherungsfehlers aus Theorem 2 als $\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$ definiert ist. Auch in dieser Graphik sind die Prozentsätze als Funktion der Portfoliogröße N dargestellt. Die Parameter sind wie in Graphik 1 gewählt.

Dies ist im rechten Teil von Graphik 2 verdeutlicht, indem der Prozentsatz der Varianz bedingt durch das systematische Risiko abgebildet ist. Diese Prozentsätze fallen mehr, als sie in N für genug große N wachsen. Lässt man N gegen unendlich streben, so nähert sich die Absicherungsfehlervarianz für das optimale Portfolio Null an. Der Prozentsatz der systematischen Varianz ist kleiner, wenn das idiosynkratische Risiko für gegebene β_i geringer ist. Dies folgt aus der Betrachtung von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$. Kleinere σ_i führen zu kleineren Werten von $\mathcal{A}_1$. Daraus folgt, dass der Spielraum für eine Reduktion von $\mathcal{A}_2$ durch die Wahl $D^i \neq C_S^i$ ohne $\mathcal{A}_1$ zu viel zu erhöhen für niedrige idiosynkratische Risiken höher ist. Die rechte Seite der Graphik 1 fasst dieses Resultat zusammen. Die Varianz des Absicherungsfehlers kann signifikant vermindert werden, indem man, um Optionen abzusichern, das Portfolio in diskreter Zeit betrachtet. Diese Vorteile sind größer, je kleiner σ^2/σ_m^2 ist.

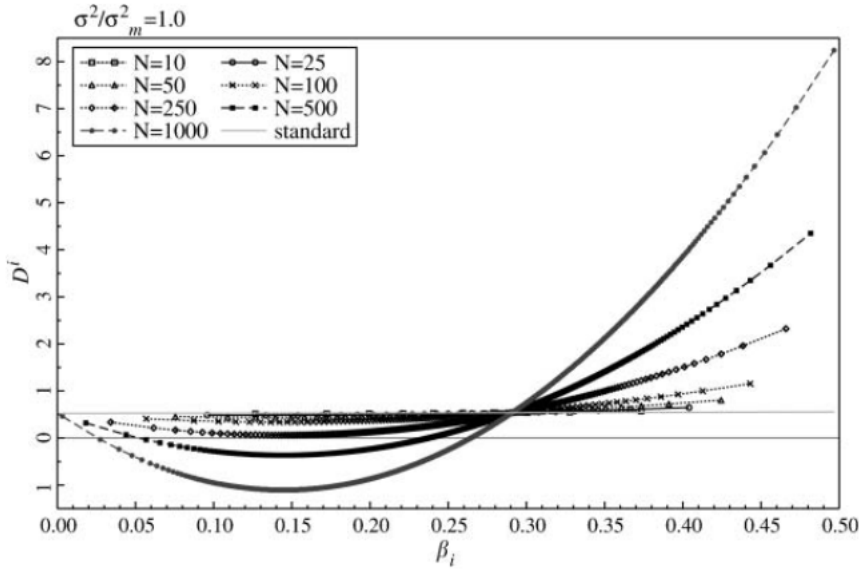

Abbildung 3.3: In Graphik 3 werden die Absicherungen der Portfoliobestände dargestellt. Die Graphik beschreibt die optimalen Anteile D^i als Funktion der systematischen Risikokomponenten β_i für verschiedene Portfoliogrößen N. Die Parameter sind auch hier analog zu Graphik 1 gewählt. Zum Vergleich beinhaltet die Graphik ebenfalls den Standardfall $D^i = C_S^i$.

In Graphik 3 wird der Aktienanteil D^i als Funktion von β_i für verschiedene Portfoliogrößen dargestellt. Dies erlaubt uns zu sehen, ob das optimale Absicherungsportfolio die Anteile β gering oder um einiges übersteigen. Da die Resultate für verschiedene Verhältnisse von σ^2 zu σ_m^2 sehr ähnlich sind, betrachten wir nur den Fall $\sigma^2/\sigma_m^2 = 1$. Bemerkenswert ist, dass sich die Gewichtungen im Standardabsicherungsfall, $D^i = C_S^i$, relativ stabil verhalten, sie wachsen mit β_i, deren Varianz aber im Vergleich zur Varianz der Anteile für alternative Absicherungsportfolios vernachlässigbar ist. Die Anteile D^i des alternativen Absicherungsportfolios hängen stark vom Marktrisiko der zugrundeliegenden Wertpapiere ab. Anteile, die keinem systematischen Risiko ausgesetzt sind, ($\beta_i \approx 0$), verhalten sich ähnlich wie im Standardabsicherungsfall. Die Intuition dahinter ist, dass Änderungen der Anteilsmenge dieser Wertpapiere keine großartigen Änderungen in den systematischen Risikokomponenten erzeugen. Die optimale Absicherungsstrategie übersteigt hohe Anteile von β und mögliche negative Anteile in β und unterschreitet niedrige und mittlere Anteile von β.

Es mag zunächst unklar erscheinen, warum sich die Portfolioanteile wie in Graphik 3 verhalten. Die Absicherungsverhältnisse wurden derart gewählt, dass sie die totale Varianz $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$ minimieren und die Terme linear in Δt im Absicherungsfehler selbst verschwinden. Ähnlich wie im Beweis von Theorem 3, sollte die Differenz zwischen der bedingten und der unbedingten Erwartung des Absicherungsfehlers mit steigendem N sinken und für große N sogar Null werden. Dieser Effekt kann auch visualisiert werden.

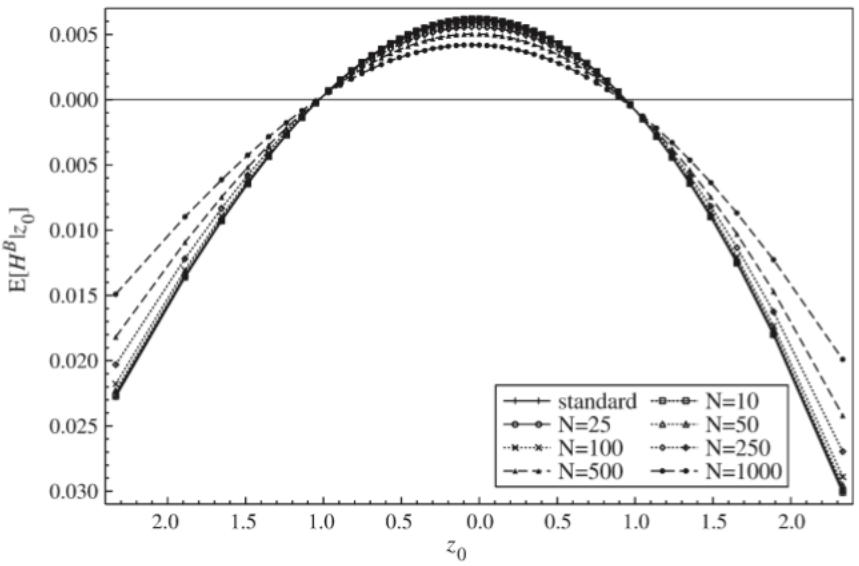

Abbildung 3.4: In Graphik 4 werden die bedingten Erwartungen der Absicherungsfehler dargestellt. Die horizontale Achse realisiert die systematische Risikokomponente z_0, wohingegen die vertikale Achse die auf $\hat{z}_0$ bedingten Erwartungen des Absicherungsfehlers aufzeichnet. Die Anteile des Absicherungsportfolios sind jene aus Graphik 3, die durch Minimieren der Audrücke der Absicherungsfehlervarianz in Theorem 2 entstehen.

In Graphik 4 wird die bedingte Erwartung des Absicherungsfehlers $\mathbb{E}[\Delta H^B|\hat{z}_0, S_1(t), ..., S_N(t)]$ gezeichnet. Das Ergebnis für das Standard Delta Absicherungsportfolio zeigt, dass sich die Absicherungfehler am extremsten für extreme Werte von $\hat{z}_0$ verhalten. Für große Werte von $\hat{z}_0$ kann die Standardabsicherungsstrategie der Konvexität des Optionspayoffs nicht nachkommen. Durch Überschreiten hoher Anteile von β und Unterschreiten geringer Anteile wird die optimale Absicherungsstrategie sensitiver gegenüber extremen Realisierungen von $\hat{z}_0$, weshalb die Muster in Graphik 3 auftauchen. Dies kann auch durch die Reduktion der bedingten Erwartungen über eine große Bandbreite der $\hat{z}_0$ beobachtet werden. Wie auch in Graphik 4 ersichtlich, wird die wachsende Möglichkeit des optimalen Absicherungsportfolios, die Konvexität des Optionspayoffs zu erfassen, ersichtlicher für größere Portfolien N.

3.3.3 Verbesserungen für unendliche Portfoliogröße

Der bedingte Erwartungswert des Absicherungsfehlers kann im Weiteren reduziert werden, indem man den Limes $N \to \infty$ betrachtet und die Ergebnisse aus Theorem 3 verwendet. Für die approximierenden Ordnungen $n = 1, 2, ...$ betrachten wir eine Menge von n verschiedenen β_i. Jedes dieser β_i kann als Beschreibung einer homogenen Gruppe von Basiswerten betrachtet werden und folgen (3.68). Verwendet man diese β_i, so können die $D_1, ..., D_N$ so gewählt werden, dass die Varianz des Absicherungsfehlers Null ist, bis auf Terme der Ord-

nungen $O(\Delta t^{n+1})$ und $O(1/N)$. Da wir jedoch den Limes $N \to \infty$ betrachten, verschwinden die Terme in $O(1/N)$. Dieses Näherungssystem führt zu einem Gleichungssystem, das einfach numerisch gelöst werden kann. Die bedingte Erwartung des Wertes des Optionsportfolios hat dabei folgende Form:

$$\mathbb{E}[\Delta C_i|\hat{z}_0] = \tilde{S}N(\tilde{d}_{1i}) - \exp[-r(T-\Delta t)]K_i N(\tilde{d}_{2i}), \tag{3.69}$$

mit

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_i &= S_i \exp[(\mu_i - \frac{1}{2}\beta_i^2)\Delta t + \beta_i \hat{z}_0 \sqrt{\Delta t}] \\
\tilde{d}_{1i} &= \frac{\ln(\tilde{S}_i/K_i) + r(T-\Delta t) + \frac{1}{2}\Sigma_i^2}{\Sigma_i} \\
\tilde{d}_{2i} &= \tilde{d}_{1i} - \Sigma_i \\
\Sigma_i^2 &= \tilde{\sigma}_i^2(T-\Delta t) + \sigma_i^2 \Delta t
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ergibt sich direkt aus der Anwendung der Preisformel aus Kapitel 2 auf unser Modell.

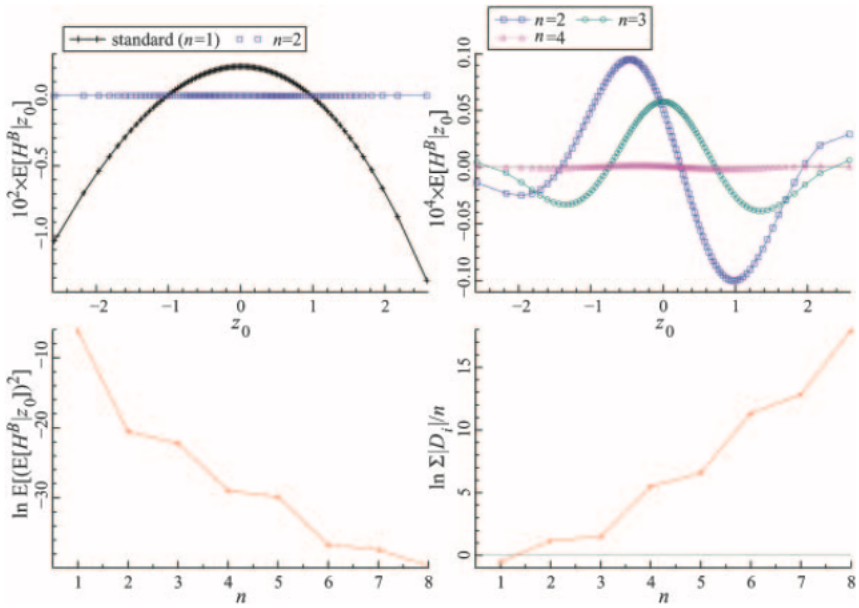

Abbildung 3.5: Graphik 5 beschreibt die Absicherungsfehler für asymptotische Portfolios ($N \to \infty$). Die horizontale und die vertikale Achse in den oberen beiden Teilen stellen eine Realisation des systematischen Risikos und die auf die systematische Risikokomponente bedingte Erwartung des Absicherungsfehlers ΔH^B dar. Die Aktienanteile des Absicherungsportfolios erhält man durch Verwendung der Formeln aus Theorem 3, indem man die Varianz des Absicherungsfehlers bis zur n-ten Ordnung von Δt gleich Null setzt. Zu Beachten ist der Unterschied in der vertikalen Skalierung der beiden oberen Abbildungen, sowie der beiden unteren.

Die oberen beiden Abbildungen in Graphik 5 zeigen die Resultate als bedingte Erwartungen des Absicherungsfehlers bis zu einer Approximation von Ordnung $n = 4$. Der Fall $n = 1$ bezieht sich auf die Standard-Absicherungsstrategie. Auf der Graphik ist leicht ersichtlich, dass ein Sprung in der Größe des Absicherungsfehlers durch den Übergang von $n = 1$ zu $n = 2$ entsteht. Ähnliche Sprünge sind zu beobachten, wenn n von einer ungeraden zu einer geraden natürlichen Zahl wechselt, was darauf zurückzuführen ist, dass die ungeraden Momente der Normalverteilung Null sind. Um einen Indikator des Abnahmemusters für wachsende n zu erhalten berechnen wir die Erwartung der quadrierten Kurven in der oberen Abbildung und zusätzlichen Kurven für bis zu $n = 8$. Der natürliche Logarithmus dieser Größe ist in der unteren linken Abbildung von Graphik 5 dargestellt. Hier ist ebenfalls der Abfall der Größe des Absicherungsfehlers bei wachsendem n ersichtlich. Des weiteren erscheint die Abnahmerate bei gegebenem linearen Muster in der unteren Abbildung nahezu exponentiell. Dies zeigt wieder, dass in einem Absicherungsportfolio die Möglichkeit besteht, höhere Ordnungen der systematischen Risikokomponente durch Diversifikation ($N \to \infty$) zu eliminieren. Das Argument dafür ist ähnlich zu jenem aus der Arbitrage Preis Theorie: Im Limes einer großen Anzahl von Wertpapieren muss nur die systematisches Risikokomponente in diskreter Zeit abgesichert werden. Wir werden im Folgenden dieses Kapitel mit der Angabe einiger Berechnungsaspekte bezüglich Graphik 5 beenden. Um die optimalen Anteile D^i für eine spezifische Approximation der Ordnung n zu berechnen, muss ein lineares System der Größe n von der Form $A \cdot D = b$ gelöst werden. Dabei ist die n-te Reihe der Koeffizientenmatrix von Ordnung β_i^n und fällt damit exponentiell gegen Null in n. Das n-te Element des Vektors b ist linear bezüglich der n-ten Ableitung der Black-Scholes-Merton Formel. Diese Ableitung kann leicht rekursiv berechnet werden. Kombiniert man die Eigenschaften von A und b, so ist ersichtlich, dass die optimalen D^i betragsmäßig für wachsende Werte von n schnell wachsen, weshalb ebenfalls die Verteilung der Varianz jedes einzelnen Wertpapiers wächst. Aufgrund der Korrelation der verschiedenen Wertpapiere geht die totale Varianz trotzdem gegen Null. Verwendet man doppelte Genauigkeit der Werte, also Gleitkommazahlen mit 64 Bit, so ist diese nur bis $n \leq 8$ erfüllt. In der unteren rechten Abbildung von Graphik 5 wird die Abhängigkeit der durchschnittlichen Größe des absoluten asymptotischen Absicherungsverhältnisses $|D^i|$ bezüglich n dargestellt. Hier wird auch das Hauptresultat der Arbeit deutlich: Es ist eine signifikante Reduktion des Absicherungsfehlers möglich, wenn von der Standard-Delta-Absicherungsstrategie ($n = 1$) zu $n = 2$ gewechselt wird.

3.4 Schlussfolgerungen

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass das Absicherungsrisiko für Optionsportfolios in diskreter Zeit im Vergleich zum Standard Black-Scholes-Merton Modell reduziert werden kann, indem von der Abhängigkeitsstruktur der Wertpapiere Gebrauch gemacht wird. Für endliche Portfoliogrößen exisitiert ein Austausch zwischen den Absicherungsfehlern aufgrund nicht abgesicherter Risiken des linearen idiosynkratischen Risikos und der Absicherungsfehler aufgrund nicht abgesicherter höherer Ordnungen des Marktrisikos. Im Limes der unendlichen Menge an Wertpapieren können Absicherungsfehler komplett eliminiert werden. Die korrekte

Absicherungsstrategie in diskreter Zeit unterscheidet sich signifikant vom standardmäßigen kontinuierlichen Black-Scholes-Merton Delta Absicherungsverfahren. In diskreter Zeit werden erste, zweite und höhere Ordnungen des systematischen Risikofaktors nur auf Kosten des idiosynkratischen Risikos abgesichert. Letzteres bleibt unabgesichert, verschwindet aber aufgrund von Diversifikation. Bereits in der Standard Annäherung der Absicherung des Optionsportfolios gibt es bedeutende Verbesserungen aufgrund von Diversifikation. Diese Vorteile sind am größten, wenn die Korrelation der Optionen, und auch der zugrundeliegenden Wertpapiere eines Portfolios von Call Optionen, möglichst gering ist. Im Gegensatz dazu verwenden wir in unserer Annäherung explizit die Abhängigkeitsstruktur, um die optimale Absicherungsstrategie zu finden. Die Vorteile gegenüber der Standard-Absicherungsstrategie sind bei uns am größten, wenn die Korrelation der zugrundeliegenden Wertpapiere groß ist, womit durch das Ergebnis eine alternative Herangehensweise zur Konstruktion eines Absicherungsportfolios präsentiert wird. Risikofaktoren sollten bereits zu Beginn identifiziert werden und es kann von Vorteil sein, höhere Ordnungen dieser systematischen Risikofaktoren auf Kosten der linearen Exposure der idiosynkratischen Risiken abzusichern. Dieser Effekt wird bereits relevant, wenn das systematische Risiko zweiter Ordnung, das Gamma Risiko, eliminiert werden soll.

Das Ergebnis dieser Arbeit könnte durch die Einführung von Transaktionskosten erweitert werden, wodurch man ein mehrperiodisches dynamisches Optimierungsproblem in diskreter Zeit erhält, das nur schwer analytisch handhabbar ist und wird hier nicht weiter behandelt.

Abschließend lässt sich zusammenfassen, dass der Schlüssel der Resultate im Abtausch zwischen dem Absichern der nicht-linearen systematischen Risikokomponente und dem linearen idiosynkratischen Risiko liegt.

Kapitel 4

Unterschiede zum Paper

Notation und Unklarheiten

- Im Paper werden z_0 und $\hat{z}_0$ mit z_0 bezeichnet, was an einigen Stellen zur Verwirrung führen kann, da mit $\hat{z}_0 = \frac{z_0(t+\Delta t)-z_0(t)}{\Delta t^{1/2}}$ gemeint wird.
- Alle Erwartungswerte müssen auf $S_1(t), ..., S_N(t)$ bedingt werden, ansonsten sind die angegebenen Ergebnisse nicht möglich.
- In Theorem 2 wird der Absicherungsfehler auf einmal mit ΔH^B bezeichnet, dessen Bedeutung jedoch nicht erklärt wird. Es bezeichnet den Absicherungsfehler der auf die Wahl der D^i eingeschränkten Absicherungsstrategie.
- Die in Lemma 3 gegebenen Identitäten werden ohne Fehlerabschätzung angegeben, obwohl eine Reihenentwicklung durchgeführt wird.
- Fälschlicherweise wird in (A5) des Papers, das (3.19) entspricht, von dem Faktor $1/H$ anstelle von $1/N$ ausgegangen.
- In Formel (A13), entspricht (3.56), fehlt der Term $D^i r \Delta t S_i$.

Literaturverzeichnis

- B. Peeters, C. L. Dert & A. Lucas (2008) Hedging Large Portfolios of Options in Discrete Time, Applied Mathematical Finance, 15:3, 251-275, DOI: 10.1080/13504860701718471 (http://dx.doi.org/10.1080/13504860701718471)
- Boortz, Christopher: Seminar Differentialgleichungen Die stochastische Herleitung der Black-Scholes-Gleichung (SS 2005), http://page.math.tu-berlin.de/ wittbold/Teach/LehreSS05/sem1.pdf (08.09.2017)
- John C. Hull, Options, Futures and other Derivatives, Eight Edition, Prentice Hall Global Edition,2011, 299-315
- Hans Föllmer, Alexander Schied, Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time, Third revised and extended edition, De Gruyter, Berlin/New York, 2011
- BLACK-SCHOLES-MODELL Ist eine Formel Schuld an der Finanzkrise?, in Handelsblatt(11.12.2013), http://www.handelsblatt.com/technik/das-technologie-update/frage-der-woche/black-scholes-modell-ist-eine-formel-schuld-an-der-finanzkrise/9197650.html