

Diploma Thesis

Design of wooden freeform structures through elastic deformation

submitted in satisfaction of the requirements for the degree of
Diplom-Ingenieur
of the TU Wien, Faculty of Civil Engineering

Diplomarbeit

Gestaltung von Freiform-Holztragwerken durch elastische Verformung

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieurs
eingereicht an der Technischen Universität Wien, Fakultät für Bauingenieurwesen

von

Stefan Pillwein, BSc

Matr.Nr.: 0925449

unter der Anleitung von

Assistant Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. **Josef Füssl**

Dipl.-Ing. Dr. techn. **Markus Lukacevic**

Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen
Technische Universität Wien
Karlsplatz 13/202, A-1040 Wien

Wien, im November 2017

Danksagung

Ich möchte mich sehr herzlich bei meinen Betreuern Assistant Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Füssl und Dipl.-Ing. Dr. techn. Markus Lukacevic für die tolle und unkomplizierte Zusammenarbeit während der Erstellung meiner Diplomarbeit bedanken. Ihr fachlicher Input war stets hilfreich um die Problemstellungen dieser Arbeit zu lösen. Darüber hinaus möchte ich mich bedanken, Zugriff auf den Server des Instituts für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen für Simulationen erhalten zu haben, was eine große Erleichterung im Arbeitsprozess war.

Sehr großer Dank gilt meiner Familie und ganz besonders meinen lieben Eltern und meiner Schwester. Ihr habt mich seit jeher hundertprozentig unterstützt und wart für mich auch in schwierigen Zeiten eine Quelle der Motivation.

Außerdem möchte ich meinen Freunden und Kollegen wie Felix Schobesberger, Lukas Zeilbauer, Barbara Laa, Benno Schmieder, Daniel Shatkin, Hannes Karrer und vielen anderen danken, mit denen ich gemeinsam die vielen Höhen und manchen Tiefen der Studienzeit durchleben durfte.

Kurzfassung

Die elastischen Eigenschaften von Materialien wie Holz können genutzt werden, um durch Verformung räumliche Strukturen aus mehreren ursprünglich geraden Stäben zu errichten. Die Verformung der Stäbe ist keineswegs auf die Biegung beschränkt, der Torsion kommt ebenfalls eine wichtige Rolle zu.

Eindrucksvolle Beispiele von Holzgitterschalen zeigen, dass Strukturen aus elastisch verformten Stäben ein großes Potential für die Holz-Freiformarchitektur haben. Die Frage, wie diese Strukturen bemessen werden können, ist jedoch weitgehend offen. Viele der Vereinfachungen, die im Bauingenieurwesen getroffen werden, sind für solche Strukturen nicht mehr zulässig. Eine Überdimensionierung der Querschnitte, um "auf der sicheren Seite" zu sein, ist aufgrund des Verformungsprozesses nicht möglich. Wie kann man solche Strukturen ingenieurmäßig erfassen? Diese Frage ist der Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit.

Ein Gestaltungsprozess für Strukturen aus elastisch verformten Holzstäben wird vorgeschlagen. Sein Ergebnis ist ein digitales Modell, erstellt mit der Methode der finiten Elemente, mit dem die Eigenschaften der erstellten Strukturen untersucht werden können. Die Basis für diesen Prozess ist eine Freiformfläche, auf der Stäbe im verformten Zustand geometrisch erzeugt werden. Aus dem Vergleich von verformter und unverformter Lage der Stäbe werden Informationen gewonnen, die den Verformungsprozess quantifizieren. Mit diesen Informationen wird anschließend das FEM-Modell erstellt, das die verformten Stäbe und deren Interaktion abbildet. Anschließend können auch die Auswirkungen von Belastungen mit diesem Modell untersucht werden. Die zentrale Forderung ist, dass die geometrisch erzeugte Ausgangsform mit der simulierten Endform gut übereinstimmt. Diese Forderung wird überprüft und scheint erfüllbar zu sein. In der simulierten Endform sind die Stäbe nur an den Auflagern und durch die Interaktion der Stäbe in den Kreuzungspunkten gehalten und nehmen ihre Form entsprechend ihrer Steifigkeiten ein.

Diese Arbeit gliedert sich in vier Teile: In einer Einführung werden die Eigenschaften von Holz in Hinblick auf elastische Verformung untersucht. In Kapitel 2 wird, inspiriert durch Erkenntnisse im Modellbau, eine Methode zur Formfindung von Freiformstrukturen aus elastisch verformten Holzstäben vorgeschlagen. Im dritten Kapitel werden einige Herausforderungen der FEM-Simulation anhand von Beispielen gelöst, etwa die zielführende Formulierung des Kontakts von Stäben. In Kapitel 4 wird eine Struktur aus elf Stäben mit dem erarbeiteten Gestaltungsprozess erstellt und simuliert. Anschließend erfolgt eine Analyse der Übereinstimmung der geometrisch erzeugten Ausgangsform mit der simulierten Endform.

Die Werkzeuge für den Gestaltungsprozess waren das CAD-Programm Rhinoceros und der eingebettete Editor Grasshopper für algorithmische Modellierung. Die anschließende Simulation erfolgte mit Hilfe der FEM-Software Abaqus. Der Arbeitsprozess war geprägt von der Erstellung geometrischer Informationen in Grasshopper und der anschließenden Einspeisung in Abaqus. Für Teile dieses Prozesses war eine Rückkoppelung nötig: Informationen aus Abaqus wurden in Grasshopper verarbeitet, verändert und erneut ausgegeben, um abermals eingespeist zu werden.

Mit der Simulation einer komplexen Struktur in Kapitel vier konnte gezeigt werden, dass eine integrale Modellierung von Verformung, Interaktion und dem Auffinden der simulierten Endform möglich ist. Außerdem wurde gezeigt, dass bei einer sorgfältigen Anordnung und einer ausreichenden Anzahl von Stäben auf der Freiformfläche durchaus gute Übereinstimmungen der geometrisch erzeugten Ausgangsform und der simulierten Endform erreicht werden können.

Abstract

The elastic properties of materials like wood can be used to design spatial structures by deformation of multiple initially straight timber lamella. This deformation is not limited to bending, torsion also plays an important role.

Impressive examples of timber gridshells show that structures built of elastically deformed lamellas offer great potential for freeform-wood-architecture. How to evaluate the mechanical performance of such structures is still largely unclear. Existing design concepts in civil engineering cannot be applied here. Oversizing the cross sections of the lamellas “to be on the safe side” is also not meaningful because of the deformation process. How can these structures be grasped from a civil engineering point of view? This question has been the starting point of this thesis.

A design-process for structures built from elastically deformed lamellas is proposed. It results in a digital model which is subsequently analyzed with the finite element method. This process starts with a freeform surface, with lamellas on it, which are geometrically created in their deformed state. Comparing the non-deformed and the deformed state of the lamellas, information is collected to quantify the deformation process. With this information a FEM model can be created, featuring the deformed lamellas and their interaction. Afterwards, loads can be applied and the behavior of the structure can be studied. A central demand for the proposed process is that the geometrically created initial form and the simulated end form match well. This demand is being tested and seems to be satisfiable. In the simulated end form, the lamellas are only held by their supports and by the interaction with other lamellas in intersection points. They adopt their form with respect to their stiffnesses.

This thesis is divided into four parts: In the introduction, the properties of wood with regard to elastic deformation is studied. In the second part, a method for the form finding of freeform-structures, made of elastically deformed lamellas, is proposed. It is inspired by findings of model building on a small scale. In the third part, challenges of the FEM simulation are solved on the basis of some examples, for instance finding useful ways for defining the contact between the lamellas. In the fourth part, a structure built of eleven lamellas is created with the proposed design process and simulated. The simulation is followed by a consistency analysis of the geometrically created initial form and the simulated end form.

The tools used in the design process were the CAD software Rhinoceros and the embedded editor Grasshopper for algorithmic modeling. The subsequent simulation was done with the FEM software Abaqus. The working process was determined by creating geometric information in Grasshopper and feeding it to Abaqus afterwards. Parts of the workflow were based on feedback: information from Abaqus was exported to Grasshopper, processed and modified to be exported and implemented in Abaqus again.

In part four, the simulation of a complex structure demonstrates that the integral modeling of deformation, interaction and finding of the simulated end form is possible. Additionally it could be shown that a carefully created layout and an adequate number of lamellas result in a high similarity of the geometrically created initial form and the simulated end form.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	10
1.1	Gestaltung von Strukturen durch elastische Verformung	10
1.1.1	Beschreibung und Abgrenzung	11
1.1.2	Thema in der Literatur	11
1.2	Holz und elastische Verformung	12
1.2.1	Struktureller Aufbau	12
1.3	Verformungsmethoden für einzelne Holzelemente	16
1.3.1	Elastische Verformung	17
1.3.2	Plastische Verformung	22
2	Strukturelle Formfindung	26
2.1	Modellbau	28
2.1.1	“Hochgefüge”	29
2.1.2	“Überwindung”	33
2.1.3	Ansätze zur Erhöhung der Stabsteifigkeit	36
2.2	Der Gestaltungsprozess	40
2.3	Geometrische Erzeugung einer geeigneten Struktur	41
2.3.1	Flächenkurven und Flächenstreifen	42
2.3.2	Erzeugung von Tangentialstreifen	45
2.3.3	Vorevaluierung der Querschnittsabmessungen	50
2.3.4	Erzeugung des Querschnittes und des verformten Stabes	53
2.3.5	Erzeugung der Abwicklung der Flächenstreifen	53
2.3.6	Freiformfläche	53
2.4	Aufbereitung der Geometrie für die FEM-Simulation	54
3	Simulation	61
3.1	Verformungsvorgang	62
3.2	Entspannung der verformten Stäbe	62
3.3	Entspannung in Kombination mit Kontakt	66
3.3.1	Bolzenverbindung	66
3.3.2	Reibung-Normalkraft-Verbindung	71
3.3.3	Resümee	75
3.4	Stabssteifigkeit und Verformung	76
4	Prototyp	80
4.1	Freiformfläche, Stablayout und Stabquerschnitte	80
4.2	Simulation und Diskussion der Ergebnisse	84
5	Resümee und Ausblick	93

1 Einführung

Der strukturelle Einsatz von Holz ist mit gedrungenen Querschnitten verbunden. Hohe Querschnittsabmessungen sind vorteilhaft, um grundlegende, in Regelwerken festgelegte Anforderungen an Tragfähigkeit, Gebrauchstauglichkeit und Brandschutz zu erfüllen. Verlässt man gedanklich diesen Rahmen, ergeben sich für die Formgebung von Tragstrukturen aus Holz gestalterisch völlig neue Möglichkeiten. Schlanke Stäbe ertragen aufgrund geringerer Steifigkeiten hohe Verformungen und nehmen im Zusammenspiel von Verformungen, Spannungen und Steifigkeiten oftmals elegant wirkende räumliche Formen an. Durch die Kombination solcher Stäbe können Strukturen erstellt werden, die sehr freie geometrische Formen zulassen. Der Werkstoff Holz bietet sich mit seinen elastischen Eigenschaften und der einfachen Verarbeitbarkeit für solche Strukturen an.

Die entstehenden Leichtbau-Tragwerke können aus geraden Elementen vor Ort erstellt werden. Der Materialeinsatz wird minimiert, die Herstellung und der Transport von Freiform-Sonderanfertigungen würde wegfallen. Das gestalterische Potential, das diese Methode eröffnet, ist groß. Groß sind jedoch auch die damit verbundenen Unsicherheiten. Wie etwa kann man die Tragfähigkeit einer elastisch verformten Struktur quantifizieren und welche Form nimmt sie nach der Errichtung wirklich ein?

Die Planung solcher Strukturen erfolgt durch digitale Gestaltungsprozesse. Diese müssen in der Lage sein, die komplexen Verformungsvorgänge der Stäbe samt ihrem Zusammenspiel zu simulieren. Es muss möglich sein, eine physikalisch korrekte Endform der Struktur zu simulieren und den Spannungszustand der Stäbe zu beschreiben. Zu den Herausforderungen gehören dabei unter anderem die für das Bauingenieurwesen unüblich großen Verformungen.

Ziel dieser Arbeit ist, die Eigenschaften elastisch verformter Tragwerke quantifizierbar zu machen. Um dieses Ziel zu erreichen, wurde ein Gestaltungsprozess für elastisch verformte Strukturen entwickelt, dessen Ergebnis ein belastbares Modell ist, erstellt mit der Methode der finiten Elemente.

Von speziellem Interesse ist, wie groß allenfalls vorhandene Tragfähigkeitsreserven für elastisch verformte Strukturen sein können. Diese Frage beeinflusst maßgeblich den Einsatz solcher Strukturen. Sie kann in dieser Arbeit nicht geklärt werden, die Grundlage zur Klärung wird aber geschaffen. Es werden auch Vorschläge zur Erhöhung der Tragfähigkeit angeboten.

1.1 Gestaltung von Strukturen durch elastische Verformung

Die Gestaltung von elastisch verformten Strukturen kann empirisch durch den Modellbau erfolgen. Dabei können intuitiv Lösungen gefunden werden, da man unmittelbar erkennt, was mit dem verwendeten Material funktioniert und was nicht. Ist ein Modell fertig, lassen sich allerdings kaum quantitative Aussagen über die Zustandsgrößen in den Elementen der Struktur machen. Dieses Problem kann durch die Digitalisierung der Struktur und anschließende Untersuchungen behoben werden.

Der in dieser Arbeit verfolgte Gestaltungsansatz ist die durchgängige digitale Planung einer Struktur, die anschließend produziert werden kann. Die grundlegenden Schritte der Planung sind:

- Erzeugung einer Freiformfläche
- Platzierung von verformten Stäben auf dieser Fläche

- Analyse des Verformungszustands der Stäbe
- Verknüpfung der unverformten und der verformten Lage der Stäbe
- Wahl der Querschnittsgeometrie
- Finite-Elemente-Simulation der Struktur

Die Unklarheit bei diesem Ansatz ist, ob und wie genau sich die geplante und die reale Form decken können. Unabhängig von der Herangehensweise gibt es grundlegende Operationen, um einen Stab elastisch zu verformen. Diese sind Biegung, Torsion, Stauchung und Dehnung. Wie später gezeigt wird, lassen sich durch den Einsatz von Biegung und Torsion Stäbe, im Rahmen ihrer Steifigkeiten, in nahezu beliebige räumliche Formen bringen. Die später ebenfalls diskutierte enge Verknüpfung von Verformungen, Steifigkeiten und Spannungen relativiert diese Möglichkeiten jedoch erheblich. Je größer die Verformungen, desto geringer müssen die Steifigkeiten der Stäbe sein und desto schwieriger wird die Tragwerkskonzeption. Trotz enormer Möglichkeiten der digitalen Tools bleiben viele Unklarheiten bezogen auf die Gesamtstruktur, die bis dato nur mit einem erheblichen Rechenaufwand zu klären sind. Dabei handelt es sich etwa um die angesprochenen Tragfähigkeitsreserven der Struktur. Auch das Langzeitverhalten elastisch verformter Strukturen ist weitgehend unbekannt.

1.1.1 Beschreibung und Abgrenzung

Durch die elastische Verformung von Stäben werden Spannungen hervorgerufen, die im elastischen Materialbereich liegen. Die primäre Einwirkungsgröße für den Stab besteht aus Verschiebungen aufgrund des Verformungsprozesses. Die sekundäre Einwirkungsgröße sind Kraftgrößen aus möglichen zusätzlichen Belastungen. Die vorgegebenen Verformungen, die zugehörigen Spannungen und Stabsteifigkeiten sind bei der Gestaltung eng miteinander verknüpft. Große Verformungen rufen in Stäben mit zu hohen Steifigkeiten Spannungen hervor, die den elastischen Materialbereich verlassen. Unerwünschte Plastifizierungen oder Versagen treten aufgrund der ungeeigneten Abstimmung von Steifigkeiten und eingepprägten Verformungen auf. Eine Überdimensionierung auf Querschnittsebene, um auf “der sicheren Seite” zu liegen, ist daher nicht möglich. Die Querschnittsgeometrie der eingesetzten Stäbe muss sich der gewünschten Verformung unterordnen, die geringe Stabsteifigkeit muss in der Gesamtstruktur durch entsprechende Strategien kompensiert werden. Die aus dem Formgebungsprozess resultierenden Spannungen der einzelnen Stäbe und Spannungen aus zusätzlichen Beanspruchungen für die Gesamtstruktur sollen kombiniert noch immer im elastischen Materialbereich liegen. Gilt dies nicht, ist mit dem Versagen der Struktur zu rechnen.

Im Fokus dieser Arbeit sind Strukturen, die aus Verbänden elastisch verformter Stäbe bestehen. Gezielte plastische Verformungsprozesse werden ebenfalls vorgestellt. Nicht untersucht werden schichtartige Stabverbände, die elastisch verformt wurden und ihre Form anschließend durch vollflächige Verklebung beibehalten.

1.1.2 Thema in der Literatur

Die Methode der elastischen Verformung wurde bereits in mehreren Publikationen behandelt, wie etwa in [14], [8], [9]. Motiviert von verschiedenen Bezeichnungen, wie “active bending”, “elastic bending”, “elastic deformation” und “post forming”, wurde für diese Arbeit die Bezeichnung “elastische Verformung” gewählt. Sie erscheint geeignet, da sie alle möglichen Verformungszustände einbezieht.

Definitionen in der Literatur:

“Bending-active structures are curved beam or surface structures that base their geometry and structural integrity on the elastic deformation of their initially straight or planar elements.” [14]

“Active bending is the utilisation of elastic deformation as a shaping process for straight linear elements or planar elemental surfaces.” [8]

“Active bending is understood to be systemised elastic deformation i.e. bending. The main motivation behind using it lies in the simplicity of producing curved elements.” [9]

1.2 Holz und elastische Verformung

Das Wachstum eines Baumes wird von Umwelteinflüssen und dem Streben nach Sonnenlicht geleitet. Um in diesem Spannungsfeld ein rasches und kontinuierliches Wachstum und Stabilität bei möglichst geringem Materialeinsatz zu ermöglichen, ist ein ausgeprägtes elastisches Materialverhalten vorteilhaft. Der Baum kann so auf schädliche Belastungen, wie etwa Sturm, elastisch reagieren und Schaden minimieren oder verhindern. Der mikro- und makroskopische Aufbau von Holz ist verantwortlich für dessen günstige elastische Eigenschaften. Im Zusammenspiel mit dem sekundären Dickenwachstum sterben die Zellen im Zentrum des Stammes allmählich ab, die elastischen Eigenschaften der Holzzellen bleiben allerdings erhalten, auch nach dem Fällen des Baumes.

Die Eignung eines Materials für die Erzeugung von elastisch deformierten Elementen ist von ausreichend elastischem Materialverhalten abhängig. Das Verhältnis von Materialkonstanten wie E-Modul oder Schubmodul und zugehöriger Festigkeit legt den Rahmen der elastischen Verformbarkeit fest. Anhand des Beispiels einachsiger Biegung wäre ein Material geeignet, das bei einem verhältnismäßig geringen E-Modul hohe zulässige Spannungen erduldet. Ein hoher E-Modul würde bei Verformungen zu hohen Spannungen führen; geringe zulässige Spannungen würden den Gestaltungsspielraum einschränken. In [8] wird die Eignung folgendermaßen beschrieben: *“Materials appropriate for active bending must have a low ratio of modulus of elasticity to bending strength in order to allow small bending radii. In this context fibre reinforced composites—natural and engineered timber, NFRP, bamboo, GFRP, CFRP—are the materials of choice.”*

Abstrahiert kann gesagt werden, dass Materialkennwerte die zu Elementsteifigkeiten beitragen möglichst gering sein sollten, während zulässige Spannungen möglichst hoch sein sollten. In [14] werden ebenfalls Untersuchungen zu geeigneten Materialien angestellt. Darunter befinden sich:

- Metalle wie Aluminium, Titan und Stähle wie Federstahl
- Faserverstärkte Kunststoffe
- Hölzer wie Buche, Eiche oder Tropenhölzer
- Holzwerkstoffe wie Sperrholz

1.2.1 Struktureller Aufbau

Holz besitzt als orthotroper Werkstoff richtungsabhängige Materialeigenschaften. Die drei Hauptrichtungen (longitudinal, radial und tangential) werden in Abhängigkeit zur Wuchsrichtung festgelegt. Im makroskopischen Bereich gibt es entsprechend den Hauptrichtungen drei E-Moduli (E_L , E_R , E_T), drei Schubmoduln (G_{RT} , G_{LR} , G_{LT}) und sechs Poissonsche Zahlen, von denen drei unabhängig sind. Äste oder andere Störungen der Struktur können lokal einen wesentlichen Einfluss auf diese Kenngrößen haben. Im mikroskopischen Bereich werden die elastischen Verformungseigenschaften etwa durch die Dicke der Zellwände oder die unterschiedlich dichte

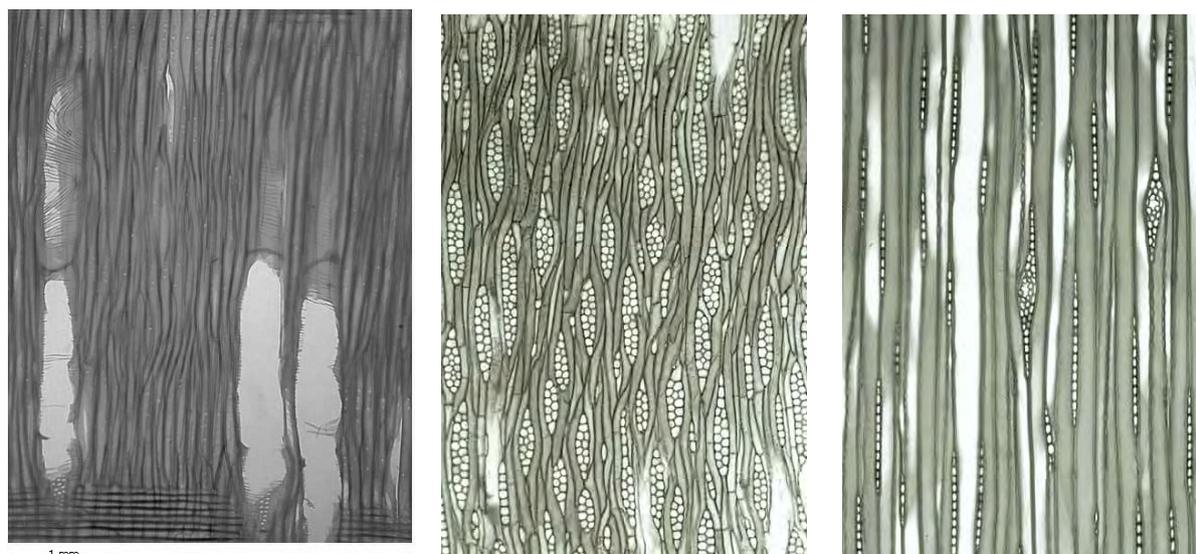


Abbildung 1.1: Links: Bergahorn - radialer Schnitt, spiralförmige Verdickungen auf der Innenseite der sekundären Zellwand erkennbar; Mitte: Apfel - tangentialer Schnitt, Holzstrahlen erkennbar; Rechts: Gemeine Fichte - tangentialer Schnitt, Holzstrahlen erkennbar [21]

Anordnung von Spät- und Frühholz beeinflusst. Als Grundlage für den elastischen Verformungsprozess und ebenfalls vorgestellte plastische Verformungstechniken wird daher der Aufbau der Holzzelle und der übergeordneten Struktur vorgestellt. Detaillierte Beschreibungen des Aufbaus von Holz und der zugehörigen Eigenschaften, auf denen dieser Überblick unter anderem basiert, finden sich in den Arbeiten [6] und [15].

Die Struktur von Holz wird hauptsächlich von länglichen Zellen gebildet, die parallel zur Wuchsrichtung ausgerichtet und an den Enden miteinander verschränkt sind (siehe Abbildung 1.1). Die durchschnittliche Länge beträgt 2 mm bis 10 mm, der Durchmesser etwa $20\ \mu$ bis $50\ \mu$ [6]. Das Wachstum dieser Zellen findet im Kambium statt, einer Zone zwischen Rinde und Splintholz. Die sogenannten Holzstrahlen durchziehen das Holz vom Kern zur Rinde, normal zur Hauptwuchsrichtung ausgerichtet. Schneidet man einen Stamm rechtwinklig zur Wuchsrichtung, erkennt man Unterschiede im strukturellen Aufbau von Nadelhölzern und Laubhölzern. Der Grund ist die unterschiedliche evolutionäre Entwicklung. Laubhölzer besitzen einen vielschichtigeren Aufbau mit stärker differenzierten Zellen. Ein in Abbildung 1.3 erkennbares Unterscheidungsmerkmal für Laubhölzer sind die im Vergleich zum durchschnittlichen Zellendurchmesser größeren Röhrenstrukturen. Diese sogenannten Poren sorgen in Laubhölzern für den Wasser- und Nährstofftransport, der in Nadelhölzern von allen Zellen gemeinsam ausgeführt wird. Trotz der unterschiedlichen Spezialisierungen der Holzzellen in Laub- und Nadelhölzern folgt der Aufbau der Zellwände einem Grundmuster. Da die Unterschiede im mikroskopischen Aufbau von Laub- und Nadelhölzern für diese Arbeit nicht von besonderem Interesse sind, wird nicht näher darauf eingegangen.

Die Anordnung der Holzzellen im Querschnitt basiert auf den hexagonalen oder annähernd rechteckigen Zellquerschnitten. In Abbildung 1.2 erkennt man, dass die Zellen unterschiedlich dicht verteilt sind und verschiedene Wanddicken aufweisen. Das hängt mit dem zyklischen Wachstum in den Jahreszeiten unserer Breiten zusammen. Aufgrund dieses ungleichmäßigen Zellwachstums lassen sich Jahresringe und somit das Alter des Baumes erkennen. Frühholz dient dem raschen Wassertransport im Frühjahr, besitzt dünne Zellwände und ein großes Lumen

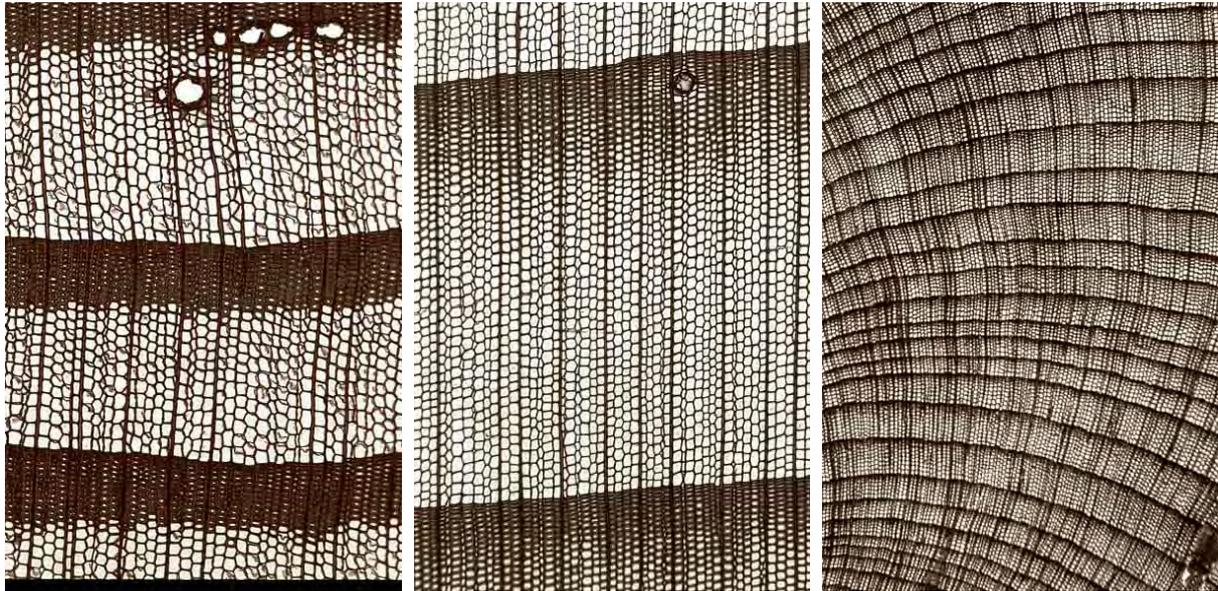


Abbildung 1.2: Nadelhölzer im transversalen Schnitt. Links: Europäische Lärche, abrupter Übergang zwischen Früh- und Spätholz erkennbar; Mitte: Gemeine Fichte gradueller Übergang zwischen Früh- und Spätholz erkennbar; Rechts: Alpen-Wacholder geringe Zellanzahl in einem Jahresring lässt auf langsames Wachstum schließen [21]

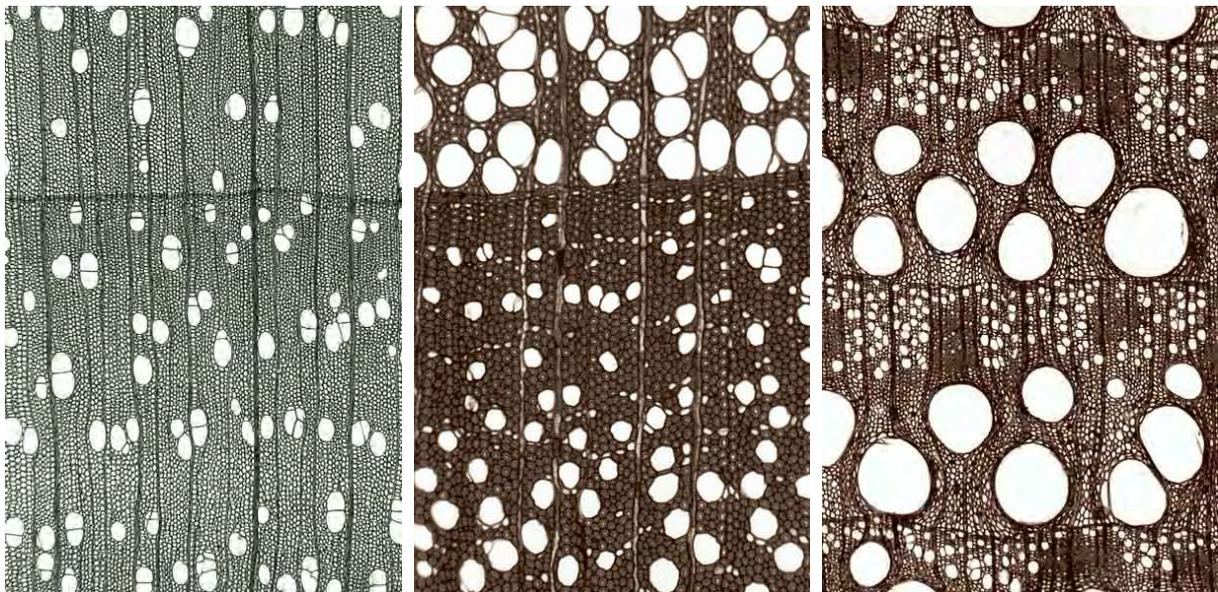


Abbildung 1.3: Laubhölzer im transversalen Schnitt. Links: Hänge-Birke, Spätholz besteht aus wenigen Reihen abgeflachter Zellen; Mitte: Rotbuche, Reaktionsholz mit dicken Zellwänden; Rechts: Trauben-Eiche, Spätholz schwer erkennbar, Große Poren nur im Frühholz angeordnet [21]

Tabelle 1.1: Stoffliche Hauptbestandteile von Holz [17]

Bestandteil	Nadelhölzer	Laubhölzer
Cellulose	42–49 %	42–51 %
Hemicellulose	24–30 %	27–40 %
Lignin	25–30 %	18–24 %
Extraktstoffe	2–9 %	1–10 %
Asche	0,2–0,8 %	0,2–0,8 %

(zentraler Hohlraum in der Zelle). Spätholzzellen entstehen im Sommer. Sie sind dickwandig, dichter angeordnet und dienen der Stabilität (vgl. [17]).

Die Zelle ist von außen nach innen durch eine Mittellamelle sowie eine Primär-, Sekundär- und Tertiärwand aufgebaut, die um einen zentralen Hohlraum, dem Lumen, angeordnet sind. Benachbarte Zellen teilen sich eine gemeinsame Mittellamelle. Sie besteht zum Großteil aus Lignin, Pektin und Hemicellulose. Der hohe Ligninanteil bedingt eine hohe Druckfestigkeit und Steifigkeit. Die restlichen Zellwände bestehen aus einer Hemicellulose-Lignin-Polymermatrix, in der unterschiedlich ausgerichtete Cellulosefasern (in Mikrofibrillen angeordnet) eingebettet sind. Die Orientierung der Bestandteile in den verschiedenen Zellwänden ist das Produkt eines natürlichen Optimierungsprozesses: *“The highly oriented microfibrils are responsible for the high tension stiffness and strength, while the hemicellulose-lignin-matrix makes for shear and compression stiffness by interconnecting the microfibrils. Different inclinations of the cellulose fibrils with respect to the cell axis enable the tree to react to different loading types.”* [6]

Cellulose ist ein lineares Polymer, das aus etwa 3000 bis 8000 Glucosemolekülen besteht. Durch die lineare Struktur können sich die Cellulosemoleküle zumindest abschnittsweise kristallin anordnen und zu Ketten zusammenschließen. Der Zusammenschluss aus diesen Verbänden ergibt sogenannte Mikrofibrillen. Sie besitzen abschnittsweise amorphe und kristalline Bereiche (vgl. [17]). *“Crystalline cellulose shows an almost purely elastic, anisotropic mechanical behavior with brittle failure under tension.”* [6]

Hemicellulose besteht aus verschiedenen Sachhariden und besitzt eine Länge von etwa 70-280 dieser Zuckermoleküle. Im Gegensatz zur Cellulose ist die Struktur verzweigt, was eine kristalline Struktur kaum möglich macht. Hemicellulose liegt daher in amorpher Form vor, dadurch sind die Molekülketten flexibel. Die vielen Verzweigungen sind außerdem leicht für Wasser zugänglich. (vgl. [17])

Lignin ist ein Makromolekül mit einer dreidimensionalen Vernetzung. Es besitzt viele verschiedene funktionelle Gruppen, ist nicht elastisch, jedoch thermoplastisch. Es umhüllt in den Schichten der Zellwand die Cellulose und Hemicellulose. Das Lignin besitzt weniger hydrophile Anteile als Cellulose und Hemicellulose und ist darum weniger hygroskopisch. (Frei formuliert nach [17])

Die Interaktion von zusammengesetzten Polymeren kann folgendermaßen zusammengefasst werden: *“Die Kräfte innerhalb der Ketten- bzw. Makromoleküle werden als Hauptvalenzbindungen (Elektronenpaarbindungen) bezeichnet. Zwischen den Kettenmolekülen bestimmen Nebenvalenzbindungen, wie z.B. Van-der-Waals-Kräfte, polare Kräfte, Wasserstoffbrückenbindungen den Zusammenhalt der Polymere. Ebenso sind „mechanische Verschlingungen“ der Moleküle für Thermoplaste festigkeitsbestimmend.”* [10]

Das Verformungsverhalten der Zelle ist aufgrund des Aufbaus und der Interaktion der Bestandteile überaus komplex: *“The deformation behavior of the wood cell wall therefore consists*

of an elastic component and a viscoelastic component (up to a certain mechanical state, where plastic deformations and/or damage occur in addition). Further, the mechanical behavior of the polymer matrix materials is depending on temperature, especially because of the glass transition of the wood polymers (hemicelluloses and lignin) at a certain temperature, which is in addition depending on moisture content. Being part of the molecular structure of wood, the bound water also strongly influences the stiffness and time-dependent behavior of wood. High levels of bound water concentration implicate a lowered stiffness and increased viscosity of wood, since water acts as a plasticizer [91].”[6] basierend auf [20]

Auf die Glasübergangstemperatur und die Feuchtigkeitsabhängigkeit der Materialeigenschaften wird in Kapitel 1.3.2 näher eingegangen.

Zusammenfassung:

- Polymerketten mit unterschiedlicher Form und Aufbau schließen sich zu funktionalen Einheiten zusammen. Chemische Bindungsenergien und physikalische Verhakungen bestimmen ihre Interaktion. So ordnen sich etwa die Cellulose-Moleküle kristallin zu Mikrofibrillen an.
- Die funktionalen Einheiten sind nach einer festen, wiederkehrenden Ordnung in den Zellwänden arrangiert. Die Zellwände umschließen einen Hohlkörper und sind länglich-röhrenförmig gestaltet.
- Die Aufgaben dieser Zellwände - und damit auch ihre Dicke - sind abhängig vom Zeitpunkt des Zellwachstums.
- Das Wachstum eines Jahres bildet einen Jahresring.
- Nach der Anhäufung mehrerer Jahresringe sterben die Zellen im Inneren ab. Das entstehende Kernholz hat keine wasserleitende Funktion mehr.
- Äste, Schäden und Umwelteinflüsse führen zu einem ungleichmäßigen Wachstum.

1.3 Verformungsmethoden für einzelne Holzelemente

Die mechanischen Eigenschaften von Holz orientieren sich an der Wuchsachse. Die Ausrichtung der Holzzellen ist durch diese Achse definiert. Sind Wuchsachse und Elementachse nicht parallel, können die Materialparameter nicht mehr voll angesetzt werden (siehe Abbildung 1.4).

Die Herstellung gekrümmter Elemente kann durch Ausfräsen aus einem größeren Element oder durch Verleimen und anschließendes Ausfräsen erfolgen. Diese Methode bringt neben dem Vorteil der schnellen und präzisen Herstellung den Nachteil, dass die gekrümmte Elementachse nicht in der Wuchsrichtung verläuft. Dadurch können die Materialeigenschaften nicht optimal ausgenutzt werden. Zusätzlich fallen Verluste durch das Fräsen an. Es erscheint sinnvoll, die parallele Ausrichtung von Elementachse und Wuchsrichtung beizubehalten.

Dieser Umstand war im Schiffbau schon immer bekannt. So verwendeten etwa die Wikinger “gewachsene Spanten” für ihre Schiffe (Spanten sind skelettartige Rumpfverstärkungen). Für diese Bauteile wurden Bäume mit einer passenden Krümmung eingesetzt (vgl. [7]). Das geringere Gewicht dieser optimierten Bauteile ermöglichte den Bau von Schiffen mit weniger Tiefgang.

Die Herstellung gekrümmter Holzelemente mit paralleler Ausrichtung der Elementachse zur Wuchsrichtung kann mit elastischen und plastischen Verformungsmethoden erreicht werden. Die dabei zum Einsatz kommenden Holzelemente sind stab- oder lamellenförmig, sie besitzen daher ein Verhältnis von Querschnittshöhe zu Querschnittsbreite von etwa 1:1 bis 1:10.

Eine Sonderform der elastischen Verformung ist die Verleimung von verformten Elementen, die parallel zueinander liegen. Es entsteht ein zusammengesetzter Querschnitt, dessen Abmessungen

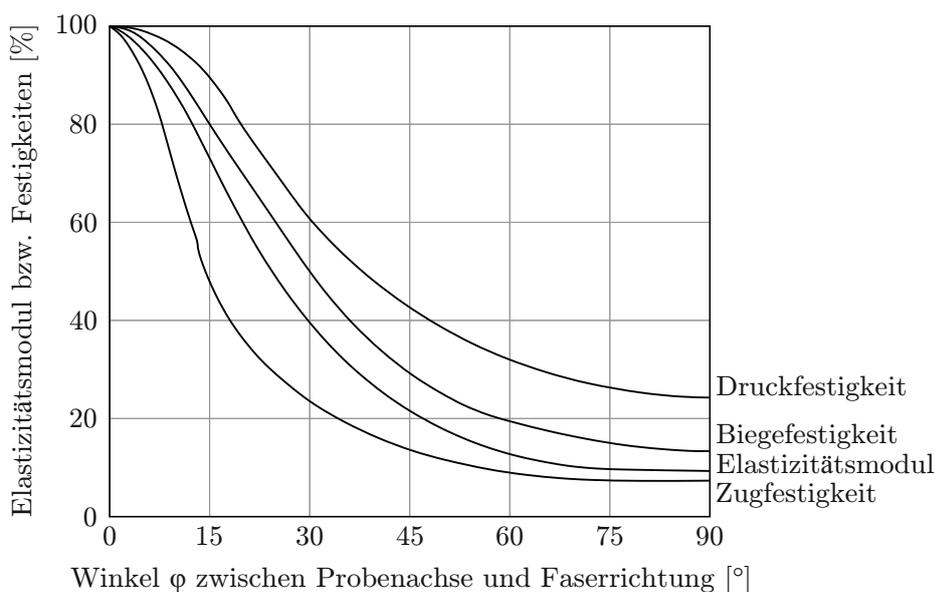


Abbildung 1.4: Materialeigenschaften bezogen auf die Faserrichtung, adaptiert aus [17]

gezielt gesteuert werden können. Die Klebefugen verhindern das Abgleiten der einzelnen Elemente und gewährleisten so die Formstabilität. Diese Technik bietet einige Vorteile, wird hier aber lediglich erwähnt und nicht weiter behandelt.

1.3.1 Elastische Verformung

Da sich die Steifigkeit und somit die Querschnittsgeometrie der gewünschten Verformung des Stabes unterordnen muss, benötigt man Informationen über den Verformungszustand. Wie in Kapitel 1.1 erwähnt, kann ein Stab durch Biegung und Torsion der Stabachse in eine räumliche Form gebracht werden. Die Analyse des Verformungszustandes des Stabes kann mit CAD-Programmen erfolgen. Wichtig hierfür ist der Grad der approximierenden NURBS-Kurve der verformten Stabachse. Um korrekte Aussagen über Krümmung und Torsion machen zu können, muss die Kurve mindestens drei mal stetig differenzierbar sein und daher den Grad 4 besitzen.

Für die Nachbildung von Freiformflächen mit der Forderung, dass die verwendeten Stäbe in ihrer unverformten Lage gerade sind, eignen sich nur gewisse Kurven. Auf die Möglichkeiten, geeignete Kurven auf einer Freiformfläche für die Methode der elastischen Verformung zu finden, wird in einem späteren Kapitel genauer eingegangen. Abbildung 1.5 zeigt eine mögliche Umsetzung.

Abgesehen von der Abstimmung von Verformung, Steifigkeit und zulässigen Spannungen spielen die Methode, wie die Verformung eingebracht wird, und Rückstellkräfte der Stäbe eine bedeutende Rolle. Die unverformte und verformte Lage können in der Theorie durch eine beliebige Anzahl von Vektoren miteinander verknüpft werden, wodurch eine exakte Beschreibung der verformten Lage ermöglicht wird. In der Praxis kann in die Verformung nur an den Rändern und in den Knoten eingegriffen werden. Je gleichförmiger der Verlauf von Krümmung und Torsion entlang der Stabachse ist, desto einfacher wird es, die erstellte Struktur mit der gewünschten Form in Einklang zu bringen. Eine Herausforderung sind allenfalls vorhandene Wendepunkte der Stabachse.

In den folgenden Abschnitten werden die Zusammenhänge von Verformungszuständen, Materialeigenschaften, Querschnittsgeometrie und Spannungen erläutert. Mögliche Verformungszustände zur Erstellung räumlicher Strukturen sind:

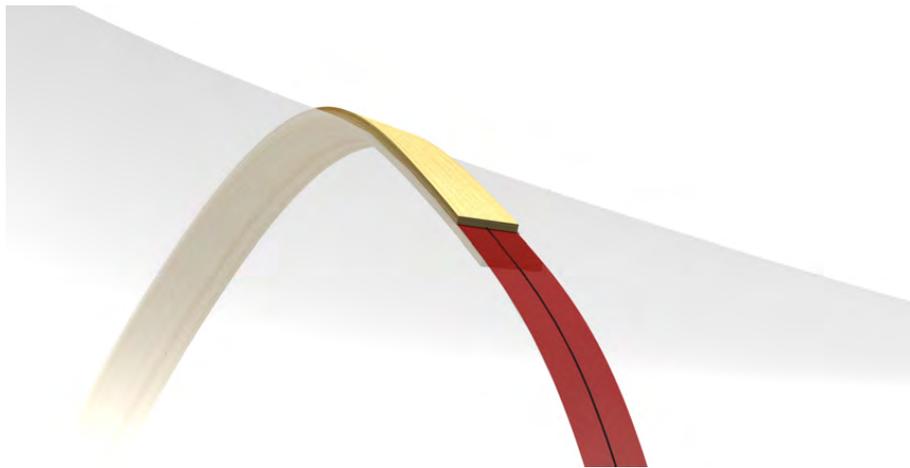


Abbildung 1.5: Kurve, Streifen und Stab auf einer Freiformfläche

- Einachsige Biegung
- Torsion
- Zweiachsige Biegung
- Einachsige Biegung und Torsion
- Zweiachsige Biegung und Torsion

1.3.1.1 Einachsige Biegung

Der Zusammenhang von Krümmung, Biegesteifigkeit und Biegemoment ist durch die fundamentalen Differentialgleichungen der Baustatik vorgegeben. Die Krümmung der Stabachse kann auch direkt mit dem Biegeradius in Verbindung gebracht werden:

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI(x)} + \kappa^e(x) \quad \text{mit} \quad \kappa(x) = \frac{\varepsilon_u(x) - \varepsilon_o(x)}{h} = -\frac{1}{r(x)}$$

x Laufkoordinate der Stabachse

h Querschnittshöhe

$\kappa(x)$ Krümmung der Stabachse

$\kappa^e(x)$ eingeprägte Krümmung

$\varepsilon_u(x)$, $\varepsilon_o(x)$ lokale Längenänderung der Stabunterseite und Staboberseite

$M(x)$ Biegemoment

$E(x)$ Elastizitätsmodul

$I(x)$ Flächenträgheitsmoment

$EI(x)$ Biegesteifigkeit

$r(x)$ Biegeradius der Stabachse

Die Biegesteifigkeit ist das Produkt aus Elastizitätsmodul und Flächenträgheitsmoment. Das Flächenträgheitsmoment steigt beim Anwachsen der Querschnittshöhe mit der dritten Potenz. Stä-

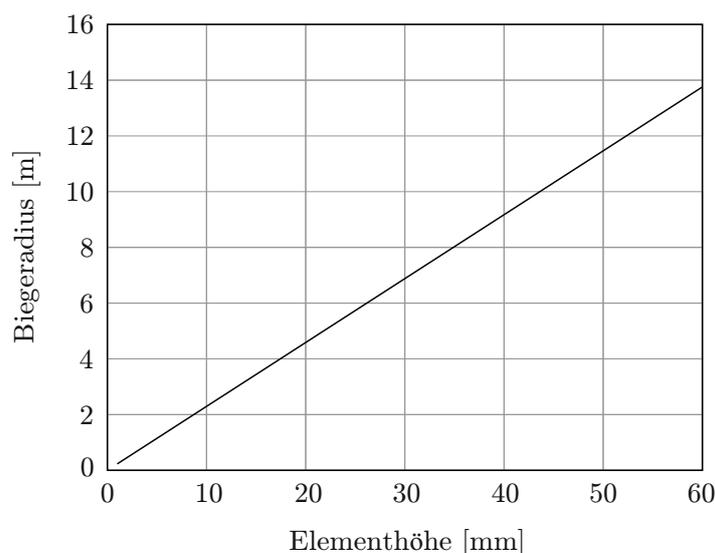


Abbildung 1.6: Beispielhaftes Verhältnis Querschnittshöhe-Biegeradius mit der charakteristischen Biegefestigkeit von Holz der Klasse C24 als zulässige Spannung

be, die große Verformungen durch Biegung ertragen sollen, müssen eine geringe Querschnittshöhe haben und sind daher lamellenförmig. Sie besitzen eine “schwache” Achse, um die gebogen wird. Der Versuch, einen lamellenförmigen Stab um seine “starke” Achse zu biegen, führt unmittelbar zu Stabilitätsversagen.

Die Grenze der erzielbaren Krümmung wird durch die Spannungen im Zugrand vorgegeben. Zu hohe Biegespannungen führen zum Überschreiten der Festigkeit im Zugrand, der dadurch versagt. Im Druckrand werden mit Überschreiten der Festigkeit plastische Verformungen ausgelöst. Die Randspannungen $\sigma_{o,u}$ sind direkt proportional zur Querschnittshöhe h und zur Krümmung κ bzw. indirekt proportional zum Biegeradius r (siehe Abbildung 1.6).

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{M}{EI} + \kappa^e & \text{und} & & \sigma_{o,u} &= \pm \frac{M}{I} \cdot \frac{h}{2} \\ r &= \frac{h \cdot E}{2 \cdot \sigma_{o,u}} & \text{bzw.} & & \sigma_{o,u} &= \pm \frac{h \cdot E}{2 \cdot r} \\ \kappa &= \frac{2 \cdot \sigma_{o,u}}{h \cdot E} & \text{bzw.} & & \sigma_{o,u} &= \pm \frac{h \cdot E \cdot \kappa}{2} \end{aligned}$$

$\sigma_{o,u}$ Spannungen an der Staboberseite und Stabunterseite

Die Breite der Lamelle hat keinen Einfluss auf den Biegeradius. Die Spannungen aus der Krümmung sind ebenfalls nicht von der Breite abhängig. Das aufnehmbare Moment aus der Summe von Krümmung und zusätzlichen Belastungen ist jedoch von der Breite der Lamelle abhängig.

Tabelle 1.2: Faktoren zur näherungsweisen Berechnung von I_T und τ_{max} [16]

b/h	1	5	10
κ_A	0,140	0,291	0,312
κ_B	4,81	3,43	3,20

1.3.1.2 Torsion

Der Zusammenhang von Verdrillung der Stabachse, Drillsteifigkeit und Torsionsmoment lautet:

$$\vartheta(x) = \frac{M_T(x)}{GI_T(x)}$$

$\vartheta(x)$	Verdrillung der Stabachse
$M_T(x)$	Torsionsmoment
$G(x)$	Schubmodul
$I_T(x)$	Drillwiderstand
$GI_T(x)$	Drillsteifigkeit

Drillwiderstand und Schubspannung können für verschiedene Seitenverhältnisse näherungsweise durch die Verwendung der Parameter κ_A und κ_B berechnet werden.

$$I_T = \kappa_A \cdot b \cdot h^3 \quad \text{und} \quad \tau_T = \kappa_B \cdot \frac{M_T}{b \cdot h^2}$$

$$\vartheta = \frac{\tau_T}{\kappa_A \cdot \kappa_B \cdot G \cdot h} \quad \text{bzw.} \quad \tau_T = \vartheta \cdot \kappa_A \cdot \kappa_B \cdot G \cdot h$$

$$h = \frac{\tau_T}{\vartheta \cdot \kappa_A \cdot \kappa_B \cdot G}$$

τ_T Schubspannung zufolge Torsion

κ_A, κ_B Werte aus Tabelle 1.2

Die Verdrillung ϑ ist indirekt proportional zur Querschnittshöhe h und direkt proportional zum Verhältnis von Breite zu Höhe, welches in κ_A und κ_B enthalten ist (siehe dazu 1.7).

Für die in dieser Arbeit verwendete Verformung der Stäbe stimmt die Verdrillung der Stabachse mit der geometrischen Torsion der Stabachse überein, da die erzeugten Stabachsen geodätische Linien auf Freiformflächen sind und Querschnitte besitzen, die in Richtung der Binormalen ausgerichtet sind (siehe Kapitel 2.3.1.1).

1.3.1.3 Zweiachsige Biegung sowie zweiachsige Biegung und Torsion

Um einen Stab zweiachsrig zu verbiegen, muss das Verhältnis von h/b mit den jeweiligen Biegespannungen abgestimmt werden, um Stabilitätsversagen zu verhindern. Die Nulllinie des

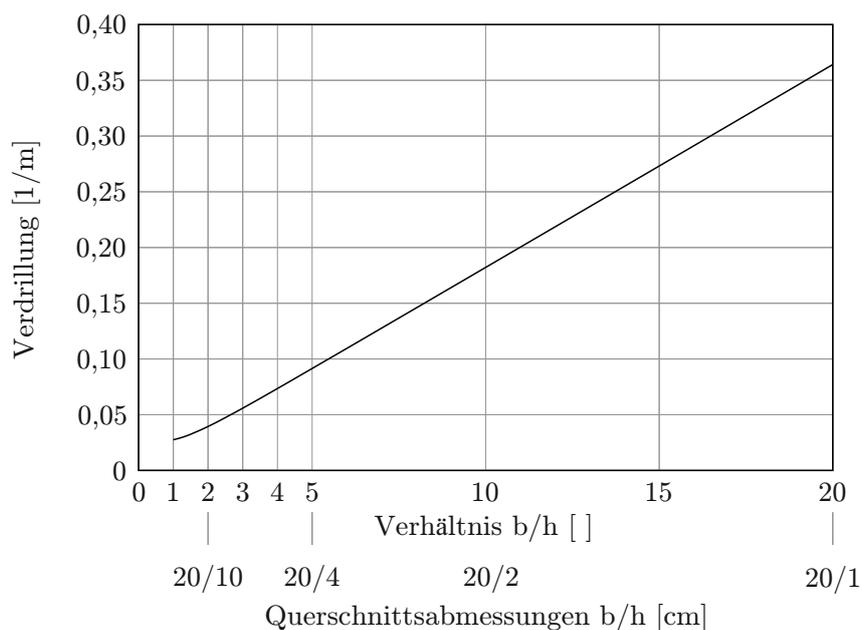


Abbildung 1.7: Beispielhaftes Verhältnis b/h-Verdrillung mit der charakteristischen Schubfestigkeit von Holz der Klasse C24 als zulässige Spannung; $b=20$ cm, h =variabel

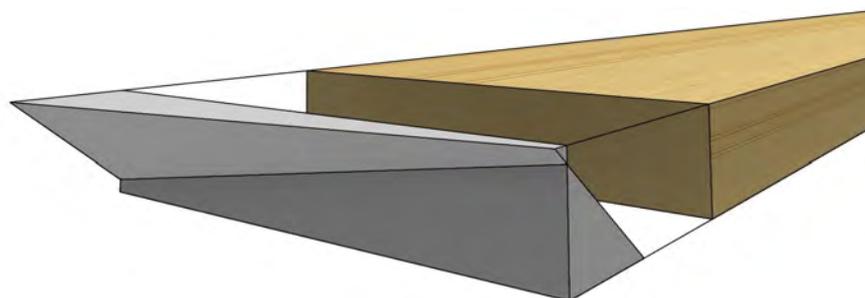


Abbildung 1.8: Spannungsverlauf bei zweiachsiger Biegung

nun dreidimensionalen Spannungsverlaufs dreht sich aufgrund der beiden Biegeanteile, womit Spannungsspitzen an zwei Querschnittsecken auftreten (siehe Abbildung 1.8). Dieser Umstand wirkt ungünstig, da der Eckpunkt mit den größten Zugspannungen in Kombination mit Imperfektionen das Reißen des Querschnittes begünstigt. Daher sind diese zusammengesetzten Verformungszustände für die Zielsetzung dieser Arbeit ungeeignet.

1.3.1.4 Einachsige Biegung und Torsion

Die Interaktion der Spannungen und die Vorhersage der Versagensformen dieser Verformungszustände hängt von deren Größe ab und kann nicht so einfach veranschaulicht werden. Versuche mit lamellenförmigen Stäben im Modellbau weisen in die Richtung, dass die Kombination dieser Verformungszustände gut funktioniert. Die Bestätigung dieser Beobachtung kann mittels FEM-Simulation erfolgen. Für die Vorevaluierung der Querschnittsabmessungen für die FEM-Simulation (siehe Kapitel 2.3.3) werden Biegung und Torsion jedoch getrennt betrachtet.

1.3.2 Plastische Verformung

Holzelemente sind durch alleinige Krafteinwirkung nur begrenzt plastisch verformbar. Zur gezielten plastischen Verformung benötigt man zusätzlich Feuchtigkeit und Hitze. Für geringe plastische Verformungen reicht die im Holz vorkommende Feuchtigkeit aus. Andernfalls wird sie durch Kochen oder Dämpfen gezielt zugeführt. Die Kombination dieser Einflüsse verändert kurzzeitig die Mikrostruktur des Holzes, wodurch plastische Verformungen ermöglicht werden.

Einige Beispiele für die Anwendung von Hitze, Feuchtigkeit und Krafteinwirkung zur Erzielung plastischer Verformungen sind:

- Die Dauben von Fässern werden mit Dampf behandelt, bevor sie maschinell mit einem Fasszug zusammengezogen werden. Ebenfalls üblich ist die Wässerung der Dauben und die Erwärmung durch ein Feuer im Fassinneren.
- Im Musikinstrumentenbau wird mit Biegeeisen gearbeitet. Das Biegeeisen ist ein zylinderförmiges, gedrungenes Werkzeug aus Metall, im einfachsten Fall ein Rohr. Es wird erhitzt, und anschließend werden schlanke Holzelemente oder Furniere durch mehrmaliges Darüberziehen verformt. Dicke und gewünschte Krümmung bestimmen, ob das Holz zuerst gewässert werden muss, oder ob die natürliche Feuchtigkeit ausreicht. Mit dem Biegeeisen werden beispielsweise die Seitenteile des Korpus von Zupf- und Streichinstrumenten hergestellt. [7]
- Die Zinken von Heugabeln wurden früher in einem Ofen gedünstet und anschließend in ein Gabelgatter eingespannt. Das Gabelgatter bestand aus Holz und zwang den Zinken ihre neue Form auf. Nach dem Trocknen erhöhte Räuchern die Dauerhaftigkeit.
- Bugholz ist eine Erfindung aus dem Möbelbau, wird jedoch auch für größere Bauteile verwendet. Für die Herstellung werden Holzelemente zuerst in Wasser gekocht oder gedämpft und anschließend im warmen Zustand mit einer mechanischen Presse gebogen. Die Kombination von Biegung und Stauchung ermöglicht noch kleinere Radien. Diese Erkenntnis führte zur Industrialisierung des Dampfbiegeprozesses. Die Stauchung erfolgt durch die Biegemaschine selbst oder durch ein Zugband, welches fest mit den Enden des Holzelements verbunden ist.

Die Technik der Bugholzerstellung ist die übliche Art, Holz plastisch zu verformen. Der Prozess wird nun näher beschrieben. Wie der Name schon sagt, können mit Bugholz Biegungen realisiert werden. Die Herstellung von tordierten Elementen ist ebenfalls möglich. Für die erfolgreiche Erzeugung sind die richtige Holz Auswahl, eine ausreichend lange Plastifizierungsphase, das Einbringen von Kraft und eine anschließende Abkühlungs- und Trocknungsphase entscheidend.

Für Bugholz werden Laubhölzer bevorzugt, denn *“Wird Nadelholz stark auf Biegung beansprucht, knicken die dünnen Zellwände des Frühholzes ein, und die Holzstruktur bricht auf ganzer Breite zusammen”* [7]. Bei der Besichtigung eines modernen Holzbiegewerks (Firma Winkler in Felsenau, Schweiz) wurde bestätigt, dass die Verwendung von Nadelholz eher zu unbefriedigenden Ergebnissen führt. Die Ursachen für die unterschiedliche Eignung liegen im unterschiedlichen Aufbau von Laub- und Nadelholz. In Nadelhölzern ist der Unterschied zwischen Frühholz und Spätholz meistens sehr deutlich ausgeprägt. Damit schwanken Materialeigenschaften wie der E-Modul stark innerhalb des Querschnittes. Bei Kiefernholz liegt das Verhältnis von E-Modul von Früh- zu Spätholz etwa bei 1:4 [7]. Bei Laubhölzern ist der Übergang meist weniger stark ausgeprägt, siehe Abbildung 1.3. Verwendung finden vor allem Buche, Eiche, Esche, Lärche, Ahorn, Kirsch- und Nussholz. Bei der Holz Auswahl wird außerdem genau auf sichtbare Störungen wie Äste geachtet. Aufgrund lokaler Steifigkeitsunterschiede führen solche Störungen mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit zu Defekten.

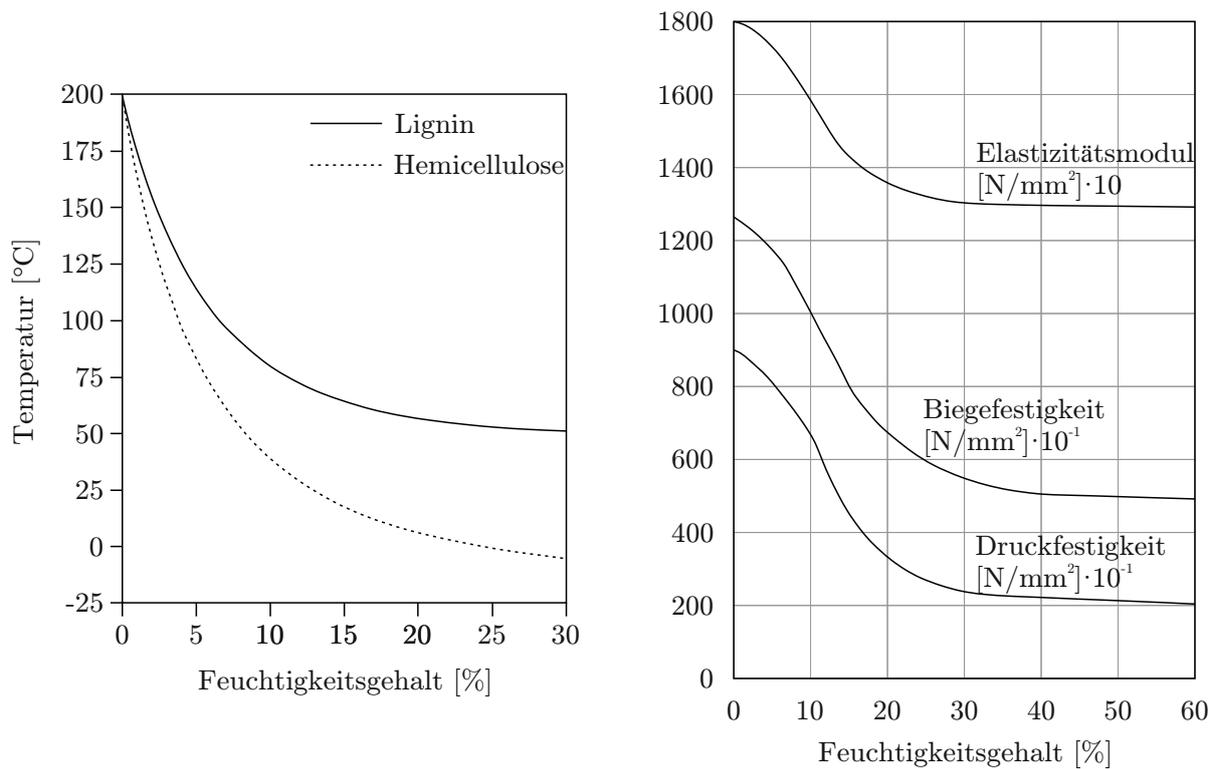


Abbildung 1.9: Links: Glasübergangstemperatur in Abhängigkeit vom Feuchtigkeitsgehalt [13], basierend auf [12] und [11]; Rechts: Einfluss von Feuchtigkeit auf Materialeigenschaften [17]

Der Kernprozess der plastischen Verformung ist die Plastifizierungsphase. Dabei dämpft man das Holzelement bei etwa 120°C je nach Größe eine bis eineinhalb Stunden in einem Ofen. Die Zufuhr von Hitze und Feuchtigkeit greift dabei in die Eigenschaften der Zellwände ein. Eine für Plastifizierungsprozesse von Polymeren relevante Kenngröße ist die Glasübergangstemperatur. Diese kann man für Lignin und Hemicellulose angeben. Die Glasübergangstemperatur bezeichnet einen Bereich, in dem die thermische Energie groß genug ist, um die Bindungen zwischen den Molekülen soweit zu überwinden, dass die Moleküle beweglicher werden. Bei Erreichen der Glasübergangstemperatur können ohne äußere Kräfte spontane mikrostrukturelle Umlagerungsprozesse stattfinden. Die vorhandene thermische Energie ist dafür ausreichend. Die verhakteten Lignin- und Hemicellulosemoleküle werden immer “weicher” und damit auch die Matrix, in die die Cellulosefasern eingebettet sind. Es entstehen Verformungen wie das gegenseitige Abgleiten von Molekülketten oder die Rotation von Teilen von Molekülketten. Der Übergang in diesen erweichten Zustand erfolgt nicht abrupt, sondern kontinuierlich. [13] trifft basierend auf [24] die Annahme, dass für signifikante Erweichungen die Glasübergangstemperatur von Lignin überschritten werden muss.

Im Anschluss an die Plastifizierungsphase erfolgt die Formgebung. Zur Herstellung einachsiger gebogener Elemente benötigt man Formteile, zwischen die das Werkstück gepresst wird. Der Vorgang muss rasch erfolgen, damit das Holzelement nicht auskühlt. Wie einleitend erwähnt, ist es für die Realisierung kleiner Biegeradien nötig, die Randspannungen auf der Zugseite zu minimieren. Dies kann durch ein Zugband oder eine Presse, die das Werkstück staucht, geschehen. Die im Querschnitt auftretenden Druckspannungen sind aufgrund der veränderten Werkstoffeigenschaften durch den Plastifizierungsvorgang aufnehmbar: “*The heat and moisture*



Abbildung 1.10: Biegedefekte und Versagen des Querschnittes durch kleine Biegeradien, Besichtigung Holzbiegewerk Winkler

plasticization from pre-steaming greatly increases the compressibility of wood, but in comparison has little effect on the tensile properties (Stevens and Turner 1970).” [19], basierend auf [22]. Durch das Erweichen der Zellwände können Belastungszustände, wie Druckspannungen, einfacher zum Kollabieren der Mikrostruktur führen - etwa durch Ausbeulen der schlanken Zellwände.

Nach dem Biegevorgang kühlt das Holzelement, noch eingespannt in den Formteilen, für einige Zeit ab. Mit dem Erkalten unterschreiten Lignin und Hemicellulose wieder ihre Glasübergangstemperatur, und die neue Form wird dauerhaft eingepreßt. Die Radien der Formteile werden etwas kleiner als im fertigen Element ausgeführt, denn es muss mit einem geringen Rückfedern des Werkstücks gerechnet werden. Die Anpassung der Radien erfolgt empirisch (vgl. [7]). Anschließend folgt eine Trocknungsphase.

Die Grenzen dieser Methode werden von der Elementlänge, der Querschnittshöhe und dem gewünschten Biegeradius vorgegeben. Die maximale Elementlänge wird von der Größe der Dampföfen bestimmt. Kann das Holzelement nicht stark genug gestaucht werden, treten auf der Zugseite Spannungen auf, die zum Reißen der Randfasern führen. Bei hohen Querschnitten ist außerdem zu beachten, dass die Druckseite hohe plastische Verformungen durchmacht, die sich in einem beulähnlichen Verhalten ausdrücken (siehe Abbildung 1.12). Diese Bereiche können nachträglich weggefräst werden. Ohne Stauchung sind mit dieser Methode Radien im Bereich der 25 bis 30-fachen Holzdicke erreichbar, mit Stauchung sogar Radien im Bereich der 10-fachen Holzdicke (vgl. [7]).



Abbildung 1.11: Ausbeulen der Querschnittsränder, Besichtigung Holzbiegewerk Winkler



Abbildung 1.12: Längsrisse, ausgelöst durch Querzug, Besichtigung Holzbiegewerk Winkler

2 Strukturelle Formfindung

Anordnungen von elastisch verformten Stäben besitzen das Potential, freie geometrische Formen nachzubilden. Die Eigenschaften einer solchen Struktur hängen vor allem von der Form, der Anzahl der Stäbe, der Art der Kreuzungspunkte und dem verwendeten Material ab. Um Strukturen zu erstellen, die Räume bilden, sind Verbände von interagierenden Stäben zweckmäßig. Um bei den großen Verformungen während des Baus nicht zu versagen, dürfen sie nur geringe Steifigkeiten besitzen. Diesem Mangel der einzelnen Stäbe kann durch die Interaktion an Kreuzungspunkten und einer damit einhergehenden gemeinsamen Tragwirkung begegnet werden.

Die Erstellung elastisch verformter Strukturen kann empirisch oder auf digitaler Basis geschehen. Eine empirisch erstellte Struktur, die aus dem intuitiven Modellbau hervorgegangen ist, lässt maximale gestalterische Freiheit zu, erschwert jedoch die Quantifizierung der strukturellen Eigenschaften. Versuche können Aussagen über Verformungen ermöglichen, die Quantifizierung der Belastungszustände einzelner Stäbe der Struktur ist nicht möglich. Die Beschaffung von derartigen Daten kann über eine digitale Rekonstruktion geschehen, etwa durch Laserscannen oder Photogrammetrie. Mit dem Wissen über die verformte Lage der Stäbe kann diese mit der unverformten Lage in Beziehung gesetzt werden, was eine Quantifizierung ermöglicht.

Wird die Quantifizierung struktureller Eigenschaften wie des Belastungszustandes der Stäbe beabsichtigt, ist ein digital basierter Ansatz zielführender. Durch die digitale Erstellung der Struktur sind Informationen über den Verformungszustand der Stäbe verfügbar. Belastungszustände einzelner Stäbe können über fundamentale Zusammenhänge mit deren Verformungszuständen abgeschätzt oder durch die Modellierung mit der Finite-Elemente-Methode ermittelt werden. Der Bau der Struktur wird durch die Informationen im digitalen Modell der Struktur erleichtert, etwa durch die Möglichkeit der Vorfertigung.

Die Erstellung eines FEM-Modells bietet für beide Ansätze die Möglichkeit, zusätzliche Lastfälle neben der Belastung durch die Formgebung miteinzubeziehen. Mit einem FEM-Modell, das die Verbandswirkung kreuzender Stäbe berücksichtigt, könnten verlässliche Aussagen über die Brauchbarkeit der elastischen Verformung zur Formgebung von Tragwerken getroffen werden.

In dieser Arbeit wird der digital basierte Ansatz zur Erstellung der Struktur verfolgt. Die behandelten Strukturen bestehen aus beliebig vielen Stäben, die an ihren Kreuzungspunkten miteinander interagieren und dadurch als Verband wirken. Für den Gestaltungsprozess solcher Strukturen wird eine allgemein anwendbare Methode entwickelt. Diese enthält neben der geometrischen Konzeption eine statische Vorevaluierung der einzelnen Elemente und eine Aufbereitung für die anschließende FEM-Simulation.

Als Ausgangspunkt für diese Methode wird eine Freiformfläche verwendet. Auf der Fläche wird eine beliebige Anzahl von Kurven gesucht, wobei jede dieser Kurven die Achse eines verformten Stabes darstellt. Die zum Einsatz kommenden Kurven sind geodätische Linien. Sie verbinden zwei Punkte einer Fläche auf dem kürzesten Weg und besitzen für die angestrebten Zwecke günstige Eigenschaften. Die gewählten Kurven werden anschließend um einen Querschnitt erweitert, um verformte Stäbe zu ergeben. Aus dem Vergleich der verformten und unverformten Stäbe werden Verformungsvektoren generiert, um in einer FEM-Software den angestrebten Verformungszustand zu erzeugen. Aus Versuchen im Vorfeld werden einige Forderungen für das Kurvennetz und die Freiformfläche abgeleitet.

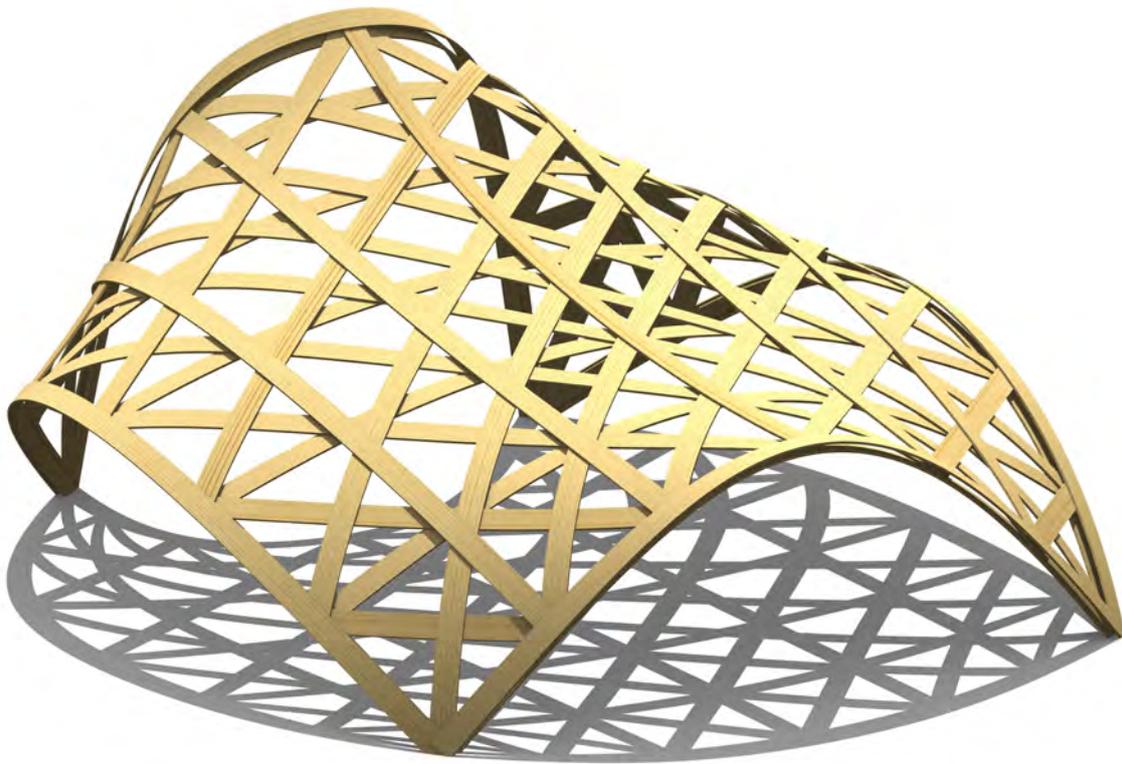


Abbildung 2.1: Digitales Modell einer geodätischen Gitterschale

Die physische Erstellung der Strukturen kann durch das Verformen und schrittweise Zusammenfügen der einzelnen Stäbe an ihren Kreuzungspunkten erfolgen. Ist die verwendete Freiformfläche abwickelbar, können die Strukturen sogar eben zusammengebaut und nachträglich verformt werden. Dies kann zum Beispiel durch ein Luftkissen erfolgen [4].

Die Grenzen der Gestaltungsfreiheit für die erstellbaren Strukturen werden von der Geometrie der Freiformfläche und der vorgesehenen Nutzung vorgegeben. Die unterschiedlichen Krümmungen der Fläche bestimmen indirekt die Eigenschaften der Struktur sowie den Verformungszustand der Stäbe. Mit zunehmender Verformung nimmt deren Querschnittshöhe ab, was zu einer verminderten Steifigkeit führt. Ansätze zur Kompensation der Steifigkeit von Einzelstäben werden ebenfalls behandelt.

Die verfolgte Methode basiert auf der Annahme, dass die Form der rein geometrisch erzeugten Struktur und die Form der simulierten bzw. realen Struktur bei einer ausreichend hohen Anzahl von Stäben und der Einhaltung einiger Regeln sehr ähnlich sind.

Die Verfahrensweise zur strukturellen Formfindung entwickelte sich aus Erkenntnissen im Laufe des Baus physischer Modelle und den dabei identifizierten Problemen. Die verwendeten Werkzeuge für den Gestaltungsprozess waren das CAD-Programm Rhinoceros und der darin eingebettete Editor Grasshopper für algorithmische Modellierung. Die anschließende Simulation erfolgte mit Hilfe der FEM-Software Abaqus.



Abbildung 2.2: Digitales Modell einer geodätischen Gitterschale

2.1 Modellbau

Im Zuge der Erstellung dieser Arbeit wurden mehrere Modelle aus elastisch verformten Stäben gebaut. Die Annäherung an das Thema durch den Modellbau erzeugte ein Bewusstsein für die Möglichkeiten dieser Formgebungsmethode. Die Grenzen der Verformbarkeit von Stäben und deren Versagensmechanismen wurden erkennbar. So wurden etwa die realisierbaren Verformungen mit einem bestimmten Stabquerschnitt anfangs überschätzt. Aus dem intuitiven Modellbau konnten mit der Zeit Regeln für die erfolgreiche Erstellung einer Struktur abgeleitet werden.

Eine ideale Basis für diese Arbeit stellte die interdisziplinäre Lehrveranstaltung “Modul Spannwerk” des Instituts für dreidimensionales Gestalten und Modellbau an der Fakultät für Architektur und Raumplanung der TU Wien dar. Eingebunden war auch die Gruppe der Studenten des Doktoratskollegs Computational Design, in die der Autor temporär eingebunden war. Das Ziel war die Erstellung einer Struktur, die auf mehreren Punkten ruht und dem Aufenthalt oder der Fortbewegung von Personen dient. Modelle des Autors, die in diesem Rahmen gebaut wurden, sind in den folgenden Kapiteln 2.1.1 und 2.1.2 zu sehen.

Die Arbeitsmaterialien waren lamellenförmige Stäbe aus Sperrholz, Vollholz oder Holzfurnieren. Alle Materialien eigneten sich gut, wobei es innerhalb aller Materialgruppen erhebliche Qualitätsunterschiede gab. Stark schwankte beispielsweise die Qualität der Stäbe, die aus Holzfurnierplatten ausgeschnitten wurden. Vor allem die Übereinstimmung der Faserrichtung mit der Achse der Stäbe spielte eine wesentliche Rolle. Eine schlechte Übereinstimmung ergab Stäbe mit merkbar abweichenden Steifigkeiten. Sie hatten die Neigung, in den Bereichen mit schräg durchtrennten Fasern unter Belastung zu reißen.

Aufgrund des rechteckigen Querschnitts der Stäbe mit einer geringen Querschnittshöhe war eine Biegung um die starke Achse des Querschnitts kaum möglich, ohne den Stab zum Stabilitätsversagen durch Ausknicken zu bringen. Daher beruhte die räumlich verformte Lage hauptsächlich auf Biegung um die schwache Achse und Torsion. Ein Modell, das seine Form durch die gesteuerte Verwendung von Stabilitätsversagen erhalten hat, wird in Kapitel 2.1.1 vorgestellt.

Ein weiterer Ansatz war die Erzeugung von Geflechtern. Sie wurden durch das Verweben von mehreren Stäben erzeugt. Hier entsteht eine gedachte Fläche, in der sich die Stäbe anordnen. Zur Erstellung solcher Geflechte reichten die mit lamellenförmigen Stäben möglichen Verformungen Biegung (um die schwache Achse) und Torsion aus.

Ausdrucksvolle Formen ergaben sich durch das Biegen und Verdrillen der Stäbe bis kurz vor dem Versagen, was oft plastische Verformungen zurückließ. Der intuitive Modellbau brachte, neben der Verlockung, die Stäbe über den elastischen Bereich hinaus zu beanspruchen, eine Schwierigkeit in Bezug auf die Kreuzungspunkte der Lamellen hervor. Je mehr regellos verformte Stäbe zusammengefügt wurden, desto schwieriger wurde die Verbindung an Kreuzungspunkten, ohne Zwangsverformungen zu induzieren.

Ohne System verformte Stäbe haben keine parallele Ausrichtung ihrer Oberflächen in den Kreuzungspunkten. Eine bündige Verbindung erfordert eine zusätzliche Verdrillung bzw. Biegung der beteiligten Stäbe. Dadurch entstehende Formen wirken aufgezwungen. Es ist offensichtlich, dass die natürliche und freie Verformung behindert ist. Abgesehen von den optischen Nachteilen steht dies einer hohen Anzahl von Kreuzungspunkten im Weg.

Da die Steifigkeit der Struktur auch mit der Anzahl der Stäbe wächst, erschien eine Lösung des Problems der unzufriedenstellend kreuzenden Stäbe notwendig. Es folgte eine tiefere Auseinandersetzung mit Linien auf Flächen und die Recherche in der Literatur wie in [3]. Die Verwendung von geodätischen Linien erschien zweckmäßig. Stäbe, die auf geodätischen Linien basieren, können wie Papierstreifen auf eine Fläche gelegt werden. Treffen sich zwei Streifen, so liegen sie im Kreuzungspunkt parallel zueinander.

Da es dem Autor nicht möglich war, intuitiv geodätische Linien auf einer gedachten Fläche zu finden, wurde die in Kapitel 2.2 vorgestellte, digital basierte Gestaltungsmethode entwickelt. Das in Kapitel 2.1.2 vorgestellte Modell basiert auf dieser Methode und diente auch ihrer Entwicklung.

Der Kontext, in den sich die Entstehung der Modelle einordnen lässt, ist die fiktive Erschließung einer nicht zugänglichen Wehranlage für Fußgänger am Wiener Donaukanal. Dabei galt es, eine Lücke von etwa 15 m zu überbrücken.

2.1.1 “Hochgefüge”

In ersten Modellen entstanden Strukturen, die ernüchternd geringe strukturelle Steifigkeiten aufwiesen. Dann wurde versucht, ein Modell zu entwickeln, das sich bei steigender Belastung zur Gänze oder in Teilbereichen selbst versteift. Zur Umsetzung wurde das Induzieren von stabilisierenden Zugkräften in Tragwerksteilen angedacht. Ein bei wachsender Belastung veränderlicher Anteil der Steifigkeit wird als geometrische Steifigkeit bezeichnet. Der Einfluss der geometrischen Steifigkeit wurde in einer dem Thema verwandten Publikation untersucht, die elastisch verformte Hybridstrukturen behandelt:

“The elastic stiffness of a structural element is dependent on the cross section, the material properties, and the static system, but is independent of deformations and remains constant if boundary conditions hold. The geometric stiffness depends on the static system and applied loads on the structural elements. The absolute value of the geometric stiffness increases as deformations increase. An element’s geometric stiffness is positive if the element is under axial tension forces and negative if it is under axial compression forces.” [8] basierend auf [1]

Die in den Abbildungen 2.3, 2.4 und 2.5 gezeigte Struktur ist aus Überlegungen zur geometrischen Steifigkeit entstanden. Es wurden zwei Stapel von identischen Lamellen um ihre schwache Achse gebogen und Differentialverschiebungen bewusst zugelassen. Nach diesem ersten Biegevorgang wurden die Enden der Stapel mit den entstandenen Differentialverschiebungen fixiert. Im zweiten Schritt wurden die Lamellen in die entgegengesetzte Richtung gebogen, wobei Differentialverschiebungen verhindert wurden. Die entstehenden Biege- und Druckspannungen



Abbildung 2.3: Modell mit Einfassungen der Lamellenbündel und Zugseil



Abbildung 2.4: Auffächerung der Lamellen



Abbildung 2.5: oben: geringfügige Imperfektionen in der Erzeugung führen zu ungleichmäßigem Knickverhalten, unten: Lamellen laufen in den Auflagern zusammen (Ansicht von unten)

fürten mit zunehmender Biegung zum Stabilitätsversagen einer Lamelle nach der anderen. Die Auslenkung und das Muster der ausgeknickten Lamellen können gezielt durch eine Veränderung der Prozessschritte erfolgen.

Der ausgeknickte Zustand wurde durch das Kurzschließen der Reaktionskräfte an den Enden der Stapel mit einem Zugseil eingefroren. Da jeder der beiden Lamellenstapel der aufgetragenen Belastung durch eine Rotation entkommen will, wurden die beiden Stapel in eine gemeinsame Umhüllung eingefasst, wodurch sich die Rotationen gegenseitig aufheben.

Die ausgeknickten äußeren Lamellen umhüllen zwei zentrale Lamellen. Diese liegen teilweise auf den äußeren Lamellen auf und erhalten Zug, da sie die obersten Lamellen des Biegestabes sind. Obwohl die Lamellen nur teilweise aufeinander liegen, interagieren sie miteinander. Ab einer gewissen Belastung müssen die zentralen Lamellen an den äußeren Lamellen im Punkt der Auffächerung erst abgleiten, um sich weiter durchbiegen zu können. Durch das Abgleiten verschiebt sich der Ausgangspunkt der Auffächerung in Richtung Auflager, und die ausgeknickten Lamellen erhöhen ihre Auslenkung. Ob dadurch weitere, stabilisierende Zugkräfte in den Mittellamellen induziert werden, ist fraglich.

Die Rolle, die der Anteil der geometrischen Steifigkeit in Bezug auf die Gesamtsteifigkeit besitzen kann, beurteilt [8] folgendermaßen: *“The total stiffness is the sum of elastic and geometric stiffness. The elastic bending of elements also induces shear and axial forces. The elastic stiffness thus remains constant whereas the geometric stiffness changes; the latter may be so small that it does not affect structural behaviour or it might increase or decrease total stiffness (Alpermann et. al., 2012).”* [8] basierend auf [1]

Eine tiefere Analyse dieses Systems wurde nicht durchgeführt, daher können nur Beobachtungen des Verhaltens geschildert werden. Eine (wie auch immer geartete) Verbindung der umhüllenden Lamellen wäre ein interessanter Ansatz, um die Struktur weiterzuentwickeln.

2.1.2 “Überwindung”

Die in diesem Entwurf verfolgte Strategie zur Formgebung der Struktur beruhte auf der Annahme, dass eine geschlossene Schale mit vielen kreuzenden Stäben eine ausreichende Steifigkeit entwickeln kann. Nach einigen vergeblichen Versuchen, ein Modell mit den gewünschten Eigenschaften intuitiv zu bauen, wurde ein Gestaltungsansatz auf digitaler Basis verfolgt. Der Hauptgrund dafür war die eingangs beschriebene Problematik der unzufriedenstellend kreuzenden Stäbe.

Als Basis für den Entwurf wurde zuerst eine NURBS-Fläche generiert. Dann wurden Stäbe mit Hilfe geodätischer Linien erzeugt. Bei der Erstellung der Freiformfläche ist darauf zu achten, dass sie auch entlang der Randkurven der Patches mindestens zwei mal stetig differenzierbar ist (also tangentialstetig und krümmungstetig). Dies ist für die Erzeugung von glatten geodätischen Linien wichtig. Denkbar ist jedoch eine bewusste Durchtrennung einer Fläche, um eine spezielle Anordnung von geodätischen Linien erreichen zu können. Bei der digitalen Erstellung der Freiformfläche offenbarte sich ein Nachteil des digital basierten Ansatzes: Eine Fläche zu generieren, die dazu dient, eine bereits vorhandene Idee für eine Struktur umzusetzen, ist ein schwieriger Schritt und kann die Qualität eines Entwurfs stark beeinflussen. In Abbildung 2.8 kann man die Stäbe erkennen, die auf dieser Fläche digital modelliert und später im Modellbau umgesetzt wurden. Die Strategie für den Modellbau beruhte auf der Annahme, dass die korrekte Lage der Kreuzungspunkte, bezogen auf die Laufkoordinate der Stäbe, den gewünschten Verformungszustand der Stäbe automatisch hervorrufen würde. Der digitale Gestaltungsansatz lieferte die Möglichkeit, Kreuzungspunkte von Lamellen zu erfassen, zu kennzeichnen und im Modellbau korrekt umzusetzen. Als Startpunkte wurden sieben fixe Punkte auf der Geländeoberfläche gewählt. Außerdem wurden die Anfangstangenten der Stabachsen durch Festkleben fixiert. Die Struktur besteht aus 26 Stäben. Die Schritte in der Produktion waren:

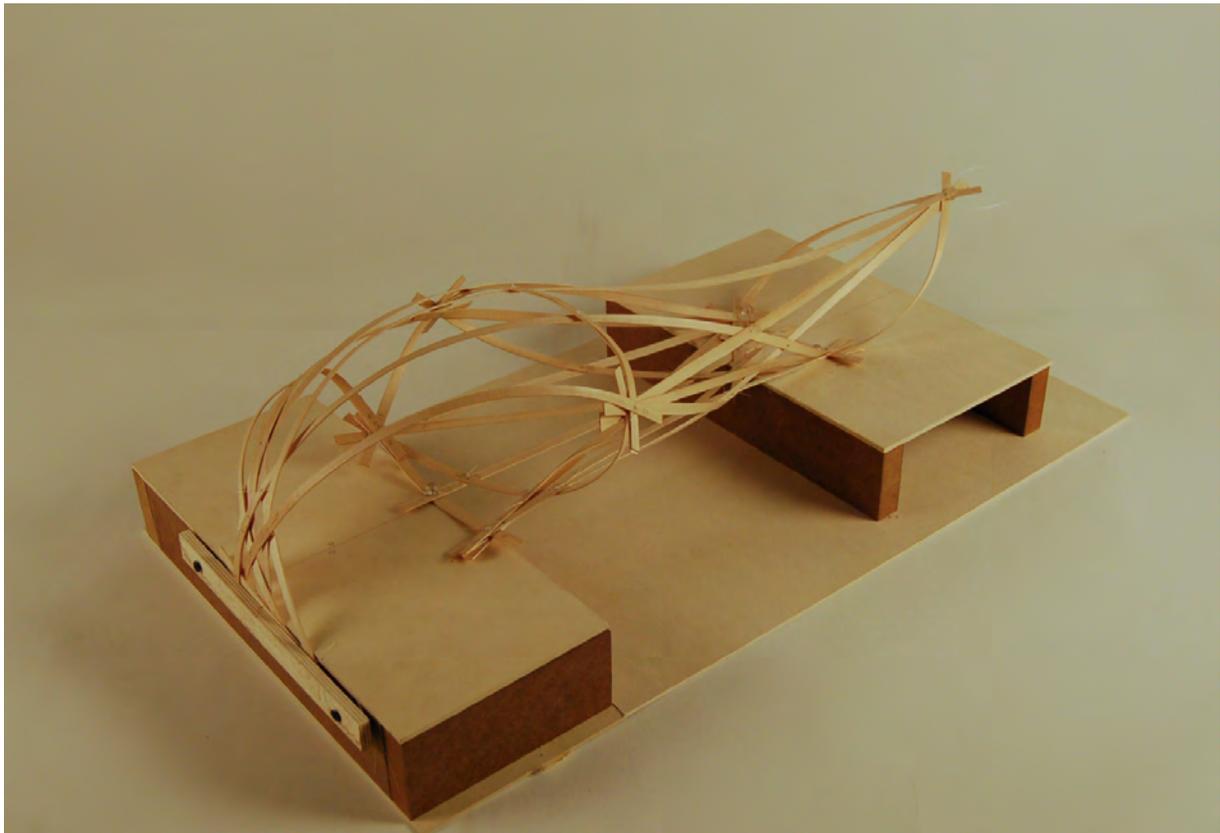


Abbildung 2.6: Modell

- Nummerierung der Stäbe und Ermittlung ihrer Längen
- Ermittlung der Lage der Kreuzungspunkte, Versehen der Kreuzungspunkte mit den Nummern der kreuzenden Stäbe
- Zuschnitt der Lamellen und Bohren von Löchern in den Kreuzungspunkten
- Übertragen der Stabnummer und der Nummern der kreuzenden Stäbe in den Kreuzungspunkten
- Führen eines Seils durch die vorgebohrten Löcher, Formen der Struktur durch Ziehen am Seil und provisorisches Fixieren durch Würgeknoten
- Nachziehen und endgültiges Fixieren der Seilverbindungen

Diese Strategie für den Modellbau funktionierte zufriedenstellend. Während des Baus konnte man beobachten, wie sich die Form mit jeder Knotenverbindung veränderte und an die digitale Form annäherte. Die anfängliche Hoffnung, dass sich die gewünschte Form durch die korrekte Lage der Knotenpunkte automatisch einstellt, erfüllte sich aber nur teilweise. Gründe für die aufgetretenen Abweichungen werden in Kapitel 2.1.2.1 diskutiert. Die in Abbildung 2.6 erkennbaren Überstände der Lamellen in den Kreuzungspunkten waren lediglich für den Zusammenbau nötig. Eine praktikable Lösung für Knotenverbindungen wäre auch das Aneinanderklemmen der Stäbe, wie etwa im Gridshell of Weald & Downland Open Air Museum (Sussex, Großbritannien, 2002).

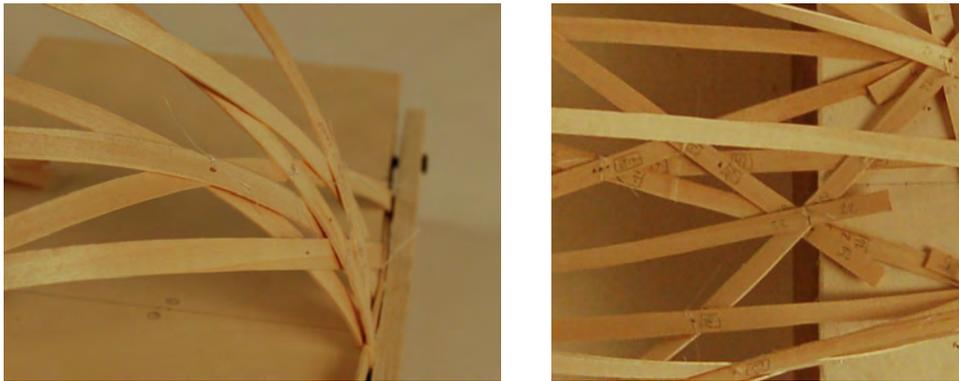


Abbildung 2.7: Links: Knoten realisiert durch Seilverbindungen, rechts: Lamelle mit Beschriftungen für den Modellbau

2.1.2.1 Vergleich von Modell und Entwurf

Obwohl die Struktur rein geometrisch erzeugt wurde, also ohne Berücksichtigung der Materialeigenschaften oder Querschnittsform der Stäbe, sind das digitale und das physische Modell vergleichbar, wie in Abbildung 2.8 zu sehen ist. Außerdem ist zu bemerken, dass die kreuzenden Stäbe trotz der Abweichungen beinahe parallel zueinander liegen, wie in Abbildung 2.7 links erkennbar ist.

Da sich dieser Ansatz für den Bau elastisch verformter Strukturen als teilweise erfolgreich herausgestellt hatte, wurden Gründe für die aufgetretenen Abweichungen gesucht, um den Ansatz weiterzuentwickeln:

1. Jede Lamelle agiert wie eine Feder und beeinflusst alle Lamellen, die mit ihr in Kontakt stehen
2. Wechsel im Verformungsverhalten (Krümmung, Verdrillung) eines Stabes können nur durch kreuzende Lamellen ausgelöst werden
3. “Offene Enden” oder Kreuzungspunkte, in denen Reaktionskräfte von der Struktur nicht aufgenommen werden können, führen zu hohen Abweichungen (siehe rechten Kreuzungspunkt in Abbildung 2.8)

Aus diesen Problempunkten können folgende Schlüsse gezogen werden:

- ad (1) Die willkürliche Verteilung von Stäben, wie etwa eine lokale Ansammlung mehrerer Stäbe, führt aufgrund der Federwirkung zu unerwünscht starken Beeinflussungen der Form der Struktur. Es sollte daher eine gleichmäßige Verteilung und Verwendung von ausreichend vielen Stäben angestrebt werden. Die Generierung besonders gleichmäßig verteilter geodätischer Linien kann sehr schwierig sein. Dieses Problem wird zum Beispiel in [23] behandelt.
- ad (2) Punkt zwei legt nahe, dass die Einführung von möglichst vielen Knotenpunkten die Übereinstimmung der Formen erhöht. Die Beweglichkeit von einzelnen Stäben wird durch viele Knoten weitgehend eingeschränkt. Durch die Verwendung von geodätischen Linien ist die Problematik der unzufriedenstellend kreuzenden Knoten, wie in Kapitel 2.1 beschrieben, gelöst.

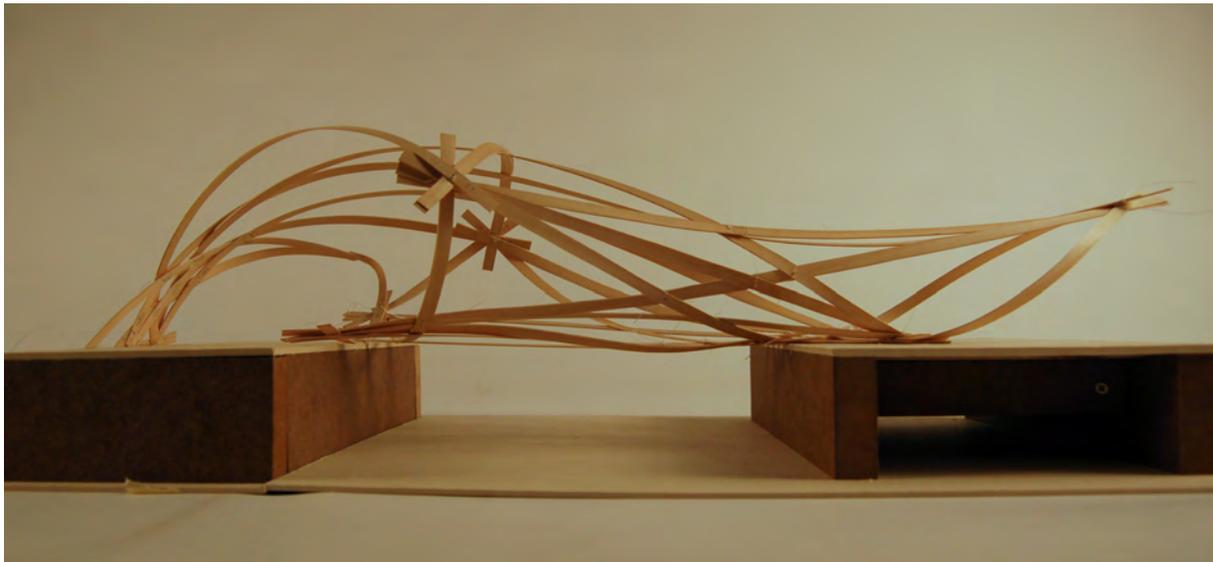


Abbildung 2.8: Vergleich von physischem und digitalem Modell

- ad (3) Es erscheint günstig, neben den Anfangs- und Endpunkten auch die Anfangs- und Endtangentialen der Stabachsen für möglichst viele Stäbe in der Struktur vorzugeben. Diese Ausrichtung ist aber schwierig umzusetzen. Sie könnte durch externe Elemente, wie etwa Seile, erreicht werden.

Die Erkenntnisse aus diesem Modell flossen in die Gestaltung einer regelmäßigeren Struktur ein, die für die FEM-Modellierung als Studienobjekt diente und in Kapitel 4 vorgestellt wird.

2.1.3 Ansätze zur Erhöhung der Stabsteifigkeit

Die Steifigkeit und der Verformungszustand eines elastisch verformten Stabes sind eng miteinander verknüpft. Die für den Gestaltungsprozess nötigen Verformungen bestehen aus Biegung und Torsion. Die Stäbe können so schlank und ihre Steifigkeit so gering werden, dass die Struktur auf Lasten lokal mit unverhältnismäßig hohen Verformungen reagiert. Für den Lesefluss wird vereinfachend von der "Stabsteifigkeit" gesprochen, gemeint ist die Biegesteifigkeit des Stabes um die schwache Achse.

Die oftmals geringen Querschnittsabmessungen sollen durch ein Beispiel veranschaulicht werden: Das Modell der Brücke aus Kapitel 2.1.2 ist aus 0,5 mm dicken Stäben aus Lindenholfurnier errichtet, die zum Teil bis an ihre Belastungsgrenze verformt sind. Aufgrund des Maßstabs würden die Stäbe eine reale Dicke von lediglich 2,5 cm auf Stablängen von 15 m und mehr aufweisen.

Ob die für die Formgebung nötigen, im Allgemeinen geringen Stabdicken für eine tragfähige Struktur ausreichen, ist fraglich. Ansätze zur Erhöhung der Steifigkeit im Modellbau waren:

- Einführen von möglichst vielen Knotenpunkten, um eine schalenartige Wirkung der Struktur zu erreichen
- Verwendung von mehrlagigen Strukturen
- Einsatz von sekundären Tragstrukturen
 - Verwendung von Zugseilen
 - Spannen von Membranen
- Verwendung flächiger Elemente

Die Steifigkeit der geplanten Strukturen lässt sich in zwei Teile zerlegen: die Steifigkeit in der Tragwerksebene der Struktur (Steifigkeit gegenüber tangentialen Verformungen, “in-plane-stiffness”) und die Steifigkeit normal zur Tragwerksebene (Steifigkeit gegenüber normalen Verformungen, “out-of-plane-stiffness”). Die Steifigkeit in der Tragwerksebene lässt sich etwa durch die Anzahl der Stäbe, die Stabbreiten oder die Verwendung von Zugseilen beeinflussen. Die Steifigkeit normal zur Tragwerksebene kann durch die Anzahl der Stäbe, die Erhöhung ihres Flächenträgheitsmoments oder die Verwendung von mehreren Tragwerkslagen beeinflusst werden.

Eine ausreichende Steifigkeit normal zur Tragwerksebene zu erreichen, ist eine Herausforderung. Um dieses Problem für einen Einzelstab zu behandeln, wurden einige Ansätze getestet. Dabei steht die Erhöhung des Flächenträgheitsmoments um die schwache Achse im Fokus. Es wurde ein Versuchsaufbau geschaffen, wo eine Lamelle eingespannt werden kann, die einer Schraublinie folgt. Aufgrund der Geometrie der Schraublinie, der eingesetzten Holzart und der maximalen elastischen Biegespannung ergibt sich eine maximale Querschnittshöhe, welche der Höhe einer Lamelle entspricht. Am Hochpunkt des Stabes wurde eine Last appliziert und die Verformung beobachtet. Die Untersuchung diente vor allem der Beurteilung der Zweckmäßigkeit der Ansätze. Untersucht wurden:

- Aufeinanderschichten mehrerer Lamellen
- Aufeinanderschichten und punktförmige Verbindung mehrerer Lamellen
- Aufeinanderschichten und Verklebung mehrerer Lamellen
- Unterspannung einer Lamelle
- Einkerben von Lamellen mit überhöhtem Querschnitt

Alle Ansätze, bis auf das Einkerben von Lamellen, waren erfolgreich. Ab fünf übereinander geschichteten Lamellen konnte nur noch eine sehr geringe Durchbiegung festgestellt werden. Das Aufeinanderschichten mehrerer Lamellen erscheint als einfache und sinnvolle Methode. Auch die Verbindung von mehreren Punkten im Raum durch Seile wirkt vielversprechend.

Die eingekerbten Lamellen besaßen die doppelte bzw. dreifache maximal erlaubte Querschnittshöhe (vgl. Kapitel 1.3.1.1 und 1.3.1.2) und wurden bis auf die maximale Querschnittshöhe eingeschnitten. Wie in Abbildung 2.10 zu sehen ist, fungierten die Kerben leider als Sollbruchstellen.



Abbildung 2.9: Versuchsaufbau mit mehreren verbundenen Lamellen

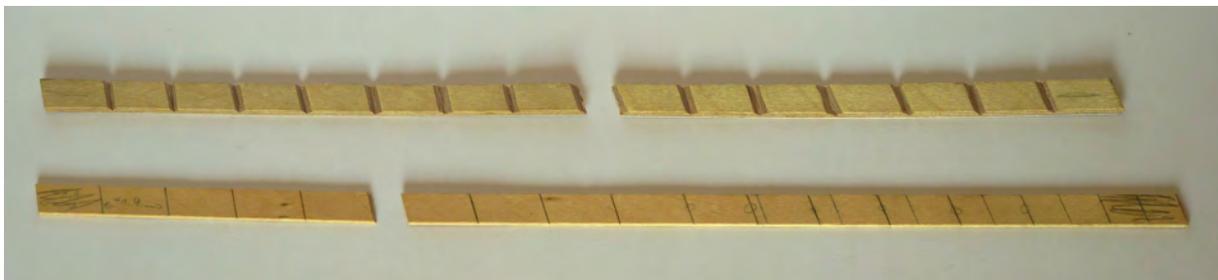


Abbildung 2.10: Eingekerbte Lamellen



Abbildung 2.11: Die Verformung einer einzelnen Lamelle unter Gewichtsbelastung

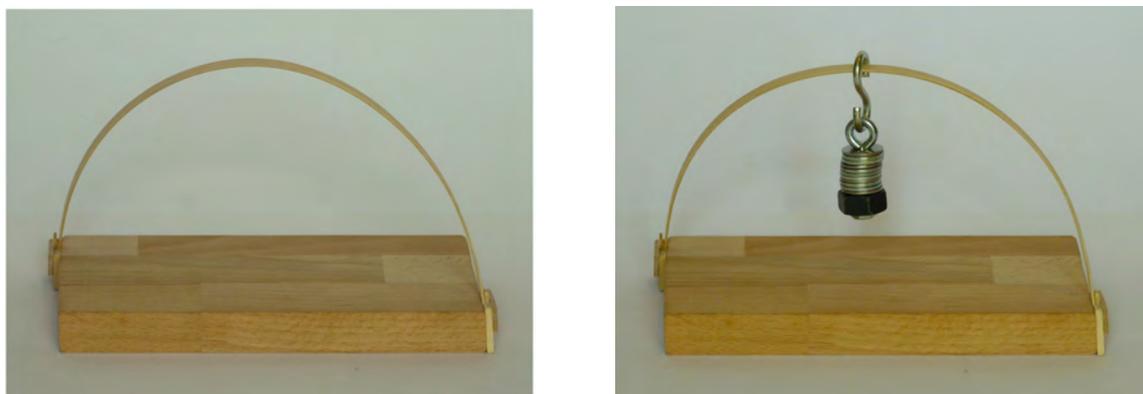


Abbildung 2.12: Zwei nicht verbundene Lamellen unter Gewichtsbelastung



Abbildung 2.13: Fünf nicht verbundene Lamellen unter Gewichtsbelastung



Abbildung 2.14: Rechts: fünf punktförmig verbundene Lamellen, Mitte: fünf verleimte Lamellen, Links: eine einzelne unterspannte Lamelle

Die verklebten Lamellen stellen das steifste System dar. Allerdings erscheint der Transport von Stäben aus verklebten Lamellen oder eine Verklebung von verformten Lamellen vor Ort wenig praktikabel.

Ein Vorteil des Aufeinanderschichtens von Lamellen ist, dass sie aufgrund ihrer geringen Querschnittshöhe während des Aufbaus als Bündel einfach zu verformen sind und nachträglich verbunden werden können. Durch eine nachträgliche Verbindung, wie etwa eine Verschraubung, können zusätzliche Steifigkeitsanteile mobilisiert werden. Im Fall der einfachen Biegung ließe sich so ein Teil des Steiner-Anteils des Flächenträgheitsmoments mobilisieren. Reibungskräfte zwischen den Lamellen können auch eine Art Verbundwirkung mobilisieren. Das Aufeinanderschichten, Verformen und anschließende Fixieren von Lamellen könnte eine brauchbare Lösung für die geringe Steifigkeit von stark verformten Stäben darstellen.

Die Verwendung von mehreren Lagen der Tragstruktur ist eine bereits erprobte Methode. Ein bekanntes Beispiel ist die Multihalle Mannheim (Mannheim, Deutschland, 1975), eine beeindruckende Gitterschale aus Holz. Die Verbindung zwischen Lagen gleicher Orientierung kann durch den Einsatz von Scherblöcken erreicht werden. Sie werden nach dem Verformungsvorgang eingesetzt und dienen der Übertragung von Scherkräften in der Tragwerksebene. Dadurch ist die Erhöhung der Tragfähigkeit und das Fixieren der finalen Form möglich: *“When the final shape is reached, shear block elements are introduced to prevent the slipping so increasing the bending stiffness of the build-up beam. [...] Once the grid came in to its final position, further structural diagonals members and shear blocks were added, in order to “freeze” that reached shape.*” [18]

2.2 Der Gestaltungsprozess

Die verfolgte Methode zur Gestaltung einer Struktur aus elastisch verformten Stäben besteht aus vier Schritten. In den ersten beiden Schritten erfolgt die geometrische Erstellung und die Aufbereitung für die Modellierung mit der FEM-Software. Neben der genaueren Beschreibung werden auch Erkenntnisse durch Modelle und Fehlschläge erwähnt, die den Gestaltungsprozess beeinflussen. Die FEM-Modellierung und die Diskussion der Ergebnisse erfolgen in den nächsten beiden Schritten.

1. Geometrische Erzeugung einer geeigneten Struktur

- Erzeugung einer Freiformfläche
- Erzeugung der verformten Stabachse durch eine geodätische Linie
- Erzeugung eines tangential auf der Fläche liegenden Flächenstreifens
- Vorevaluierung und Festlegung der Querschnittsabmessungen aufgrund des Verformungszustandes
- Erzeugung des verformten Stabs anhand der Stabachse und der Querschnittsabmessungen
- Wiederholung der Staberzeugung in der gewünschten Anordnung auf der Fläche und auf Offsetflächen
- Erzeugung der unverformten Stäbe anhand der Abwicklungen der Flächenstreifen

2. Aufbereitung für die Finite Elemente-Simulation

- Verknüpfung der unverformten und verformten Lage der Stäbe durch Verschiebungsvektoren

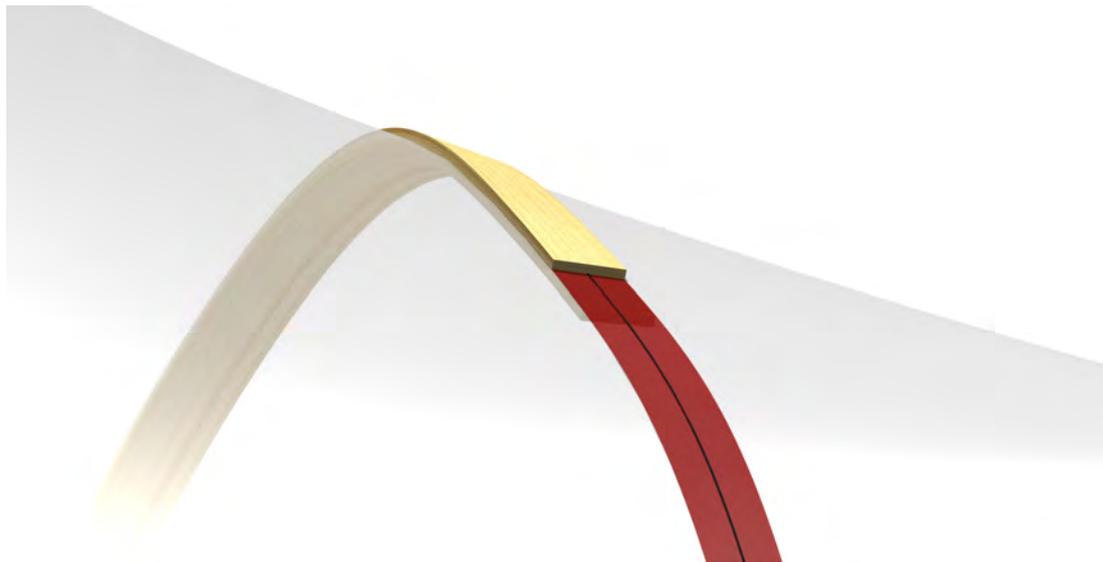


Abbildung 2.15: Visualisierung eines Flächenstreifens, zur Erzeugung des Querschnitts

- Manipulation der Verschiebungsvektoren, um einen geeigneten Verschiebungspfad zu erhalten
- Export der unverformten Stäbe und der Vektoren des Verschiebungspfads

3. Finite Elemente Simulation

- Verformung der Stäbe
- Einführung der Interaktion der Stäbe
- Entspannung der Struktur

4. Evaluierung

2.3 Geometrische Erzeugung einer geeigneten Struktur

Die geometrische Erzeugung einer Struktur erfolgte mit Hilfe eines Algorithmus, der im grafischen Editor von Grasshopper verfasst wurde. Zur Festlegung der Struktur dienten eine Freiformfläche und darauf liegende Anfangs- und Endpunkte für geodätische Linien.

Die Erzeugung der geodätischen Linien erfolgte durch einen eingebauten Befehlsbaustein in Grasshopper. Die Erzeugung des Querschnitts war eine umfangreiche Aufgabe und erfolgte durch eine eigene Subroutine. Um Kreuzungspunkte von Stäben korrekt zu erzeugen, musste auf mehreren Offset-Flächen gearbeitet werden, damit sich die Stäbe nicht gegenseitig durchdringen. Das wurde durch die Anwendung von Offsetflächen erreicht, deren Abstand durch die Querschnittshöhe der verwendeten Stäbe festgelegt wurde. Die verwendete Querschnittshöhe beruht auf einer fundierten Abschätzung, die mit einer Subroutine für die statische Vorevaluierung des Querschnitts getroffen wurde. Die Subroutine beruht auf der stabilen Berechnung der Krümmung und der Torsion der verformten Stabachse (vgl. Kapitel 1.3.1 und 2.3.3). Die folgende Beschreibung beginnt, zur besseren Verständlichkeit, mit einer Auseinandersetzung von Kurven auf Flächen und behandelt anschließend geodätische Linien.

2.3.1 Flächenkurven und Flächenstreifen

Ein wertvoller Anstoß, die Eignung verschiedener Kurven zu untersuchen, waren ein Vortrag bei einem Besuch der TU-München über Studentenarbeiten des Design Studios “Gridshells” des Chair of Structural Design der Fakultät für Architektur und die zugehörige Publikation [3].

Mit der Erzeugung der Stabachse als räumliche Kurve und der Ausrichtung der Querschnitte des Stabes ist der räumliche Verformungszustand des Stabes definiert. Die daraus entstehenden Beanspruchungen hängen von der Form, der Ausrichtung und den Dimensionen des Querschnitts ab. Die in dieser Arbeit verwendeten Querschnitte sind langgestreckte Rechtecke. Mit Querschnitt ist das Rechteck gemeint, das durch einen Normalschnitt auf die Stabachse entsteht.

Kreisrunde Querschnitte bieten aufgrund des Fehlens einer dominierenden Querschnittsachse die Möglichkeit, ein breiteres Spektrum an Flächenkurven zu realisieren. Die Stabsteifigkeit kann jedoch nicht gleichsam differenziert wie bei Rechtecksquerschnitten gesteuert werden. Mit einem rechteckigen Stabquerschnitt kann mit einer erhöhten Querschnittsbreite zumindest in der Tragwerksebene eine höhere Steifigkeit erzeugt werden. Eine weitere Herausforderung kreisrunder Querschnittsprofile stellt die Umsetzung der Kreuzungspunkte dar.

Entscheidend für die Erzeugung eines verformten Stabes ist die Ausrichtung seines Querschnitts zur Fläche. Diese ergibt sich aus der Ausrichtung eines sinnvollen, der Kurve zugeordneten Flächenstreifens. Die Möglichkeiten der Herstellung solcher Flächenstreifen werden in den folgenden Abschnitten erläutert. Flächenstreifen, die tangential oder normal zur Freiformfläche liegen, erscheinen am zweckmäßigsten. Abbildung 2.15 zeigt einen tangentialen Flächenstreifen, der die Ausrichtung eines rechteckigen Querschnitts festlegt und auf einer geodätischen Linie basiert.

Aufgrund der Formgebungsmethode, der Eigenschaften von Holz und der im Modellbau identifizierten Probleme können folgende Forderungen für die Flächenstreifen gestellt werden:

- Der Flächenstreifen ist exakt oder näherungsweise abwickelbar
- Die Abwicklung des Flächenstreifens ist geradlinig
- Die Kreuzungen von Flächenstreifen ermöglichen eine einfache Knotenkonstruktion

Durch diese Forderungen wird sichergestellt, dass beliebig viele gerade Stäbe eingesetzt werden können.

2.3.1.1 Krümmung und Torsion von Raumkurven

Der Formelapparat für die folgenden Ausführungen stammt, sofern nicht anders angegeben, aus [5].

Die Krümmung und Torsion einer Raumkurve c kann mit Hilfe der Frenet-Basis beschrieben werden. Diese lokale Orthonormalbasis ist im jeweiligen Kurvenpunkt P angehängt und besteht aus dem Tangentialvektor \mathbf{t} , dem Hauptnormalvektor \mathbf{h} und dem Binormalvektor \mathbf{b} von c in P . Die Frenetschen Formeln geben die Ableitungen dieser Vektoren nach der Bogenlänge s von c an:

$$\mathbf{t}' = \kappa \cdot \mathbf{h} \quad \mathbf{h}' = -\kappa \cdot \mathbf{t} + \tau \cdot \mathbf{b} \quad \mathbf{b}' = -\tau \cdot \mathbf{h} \quad (2.1)$$

Die Koeffizienten κ und τ werden als Krümmung und Torsion der Raumkurve c im Punkt P bezeichnet. Die Krümmung κ beschreibt die Richtungsänderung von \mathbf{t} relativ zur Bogenlänge s lokal um P . Die Torsion τ beschreibt Richtungsänderung von \mathbf{b} relativ zur Bogenlänge s lokal um P . Durch die Vektoren der Frenet-Basis lassen sich Ebenen aufspannen. Die Ebene, die durch \mathbf{t} und \mathbf{b} aufgespannt wird, heißt rektifizierende Ebene. Die Ebene, die durch \mathbf{t} und \mathbf{h} aufgespannt

wird, heißt Schmiegeebene. Die Formeln für die Krümmung und Torsion einer Kurve c mit der Parameterdarstellung $c = c(t)$ lauten bei Ableitung nach einem beliebigen Parameter t :

$$\kappa = \frac{|\dot{c} \times \ddot{c}|}{|\dot{c}|^3} \quad (2.2)$$

$$\tau = -\frac{[\dot{c} \times \ddot{c}] \cdot \ddot{c}}{|\dot{c} \times \ddot{c}|^2} \quad (2.3)$$

Man erkennt, dass die verwendete Kurve für die Ermittlung der Krümmung mindestens zweimal stetig differenzierbar, für die Torsion sogar mindestens dreimal stetig differenzierbar sein muss.

2.3.1.2 Normalkrümmung und geodätische Krümmung

Handelt es sich bei der Kurve c um eine Flächenkurve, können weitere geometrische Größen eingeführt werden, um das Verhalten der Kurve auf der Freiformfläche zu beschreiben. Der Krümmungsvektor $\kappa = \kappa \cdot h$ im Kurvenpunkt P kann in zwei Vektoren zerlegt werden, die normal bzw. tangential zur Fläche stehen:

$$\kappa = \kappa_n + \kappa_t \quad (2.4)$$

Die Beträge dieser Vektoren bezeichnet man als Normalkrümmung $\kappa_n = |\kappa_n|$ und geodätische Krümmung $\kappa_g = |\kappa_t|$ der Flächenkurve c in P . Offensichtlich gilt:

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2 \quad (2.5)$$

Die Normalkrümmung κ_n von c in P hängt nur von der Richtung der Tangente t von c in P ab. Jede andere durch P gehende Flächenkurve mit derselben Tangente t hat dieselbe Normalkrümmung κ_n . Daher kann κ_n auch als Krümmung des durch t festgelegten Normalschnitts der Fläche aufgefasst werden. Die geodätische Krümmung κ_g von c in P kann als Krümmung der Normalprojektion von c auf die Tangentialebene der Fläche in P aufgefasst werden.

Dreht man die Flächentangente t in der Tangentialebene von P , so nimmt die Normalkrümmung κ_n in der Regel ein Maximum und ein Minimum an. Diese Werte κ_1 und κ_2 sind die Hauptkrümmungen der Fläche in P . Die zugehörigen Flächentangenten sind orthogonal und legen die Hauptkrümmungsrichtungen fest. Die Formel von Euler beschreibt den Zusammenhang zwischen den Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 , der zu t gehörenden Normalkrümmung κ_n und dem Winkel φ zwischen t und der zu κ_1 gehörenden Hauptkrümmungsrichtung:

$$\kappa_n = \kappa_1 \cdot \cos^2 \varphi + \kappa_2 \cdot \sin^2 \varphi \quad (2.6)$$

2.3.1.3 Tangentialstreifen und Normalstreifen

Für jede Flächenkurve c können unendlich viele Tangentialstreifen definiert werden: Wählt man in jedem Kurvenpunkt P eine Flächentangente t^* (nach einer beliebigen Methode), so bilden diese Flächentangenten eine Regelfläche, welche die Freiformfläche längs c berührt. Berandet man diese Regelfläche entsprechend der gewünschten Streifenbreite, so erhält man einen Tangentialstreifen von c .

Der einfachste Tangentialstreifen wird von den zu c normalen Flächentangenten festgelegt. Ein besonderer Tangentialstreifen ist der abwickelbare Tangentialstreifen, der von ganz bestimmten Flächentangenten t^* festgelegt wird (siehe Kapitel 2.3.2.2). Er wird von jeder Tangentialebene

längs c nicht nur im Punkt P berührt, sondern in allen Punkten von t^* . Dies ist der einzige Tangentialstreifen, der verzerrungsfrei abgewickelt werden kann. Er ist stets entweder ein Teil einer Zylinderfläche, einer Kegelfläche, einer Tangentenfläche einer Raumkurve oder aus Teilen der genannten Flächen zusammengesetzt.

Im Gegensatz zu den unendlich vielen Tangentialstreifen einer Flächenkurve c gibt es nur einen Normalstreifen. Dieser wird von den Flächennormalen längs c gebildet. Der Normalstreifen einer Flächenkurve c ist in der Regel nicht abwickelbar.

2.3.1.4 Geeignete Flächenkurven

Für die Untersuchung der Brauchbarkeit von Flächenkurven als verformte Stabachsen ist die geodätische Krümmung κ_g der Flächenkurve c auf dem Tangentialstreifen bzw. dem Normalstreifen von c entscheidend. Im Gegensatz zur Krümmung κ von c bleibt die geodätische Krümmung κ_g von c beim Verbiegen des Streifens stets gleich. Breitet man den Streifen in eine Ebene aus (dies ist beim abwickelbaren Tangentialstreifen exakt möglich, sonst nur näherungsweise), so geht die geodätische Krümmung κ_g von c auf dem Streifen in die (gewöhnliche) Krümmung der ausgebreiteten Kurve c_a über. Da die unverformte Stabachse c_a geradlinig sein soll (Krümmung 0), muss die geodätische Krümmung κ_g von c auf dem Streifen gleich 0 sein. Beliebige Flächenkurven kommen also für verformte Stabachsen nicht in Frage.

Hauptkrümmungslinien folgen in jedem Punkt einer Hauptkrümmungsrichtung. Für eine Krümmungslinie c ist der von den zu c normalen Flächentangenten festgelegte Tangentialstreifen abwickelbar. Auch der Normalstreifen ist abwickelbar. Da die geodätischen Krümmungen auf beiden Streifen aber in der Regel von 0 verschieden sind, ist c_a nicht geradlinig. Die unverformten „Stäbe“ wären gekrümmt und müssten aus Platten ausgeschnitten werden. Die Verwendung von Hauptkrümmungslinien und ihren Normalstreifen wäre aus statisch-konstruktiver Sicht interessant, da die statische Höhe der Stäbe gut ausgenutzt werden könnte. Die Umsetzung einer Tragstruktur auf dieser Basis wäre mit isotropen Materialien mit passenden elastischen Eigenschaften möglich.

Schmiegeflächen haben auf der Freiformfläche die Normalkrümmung $\kappa_n = 0$. Auf dem Normalstreifen ist dies die geodätische Krümmung. Diese Flächenkurven wären also als verformte Stabachsen geeignet, wenn die verformten Stäbe normal auf die Fläche gestellt werden. Da Schmiegeflächen aber nur auf sattelförmigen Flächen (sie bestehen nur aus hyperbolischen Punkten) auftreten, eignen sie sich nur für spezielle Freiformflächen und sind daher für den gewählten Gestaltungsansatz ungeeignet.

Geodätische Linien haben auf der Freiformfläche die geodätische Krümmung $\kappa_g = 0$. Dies ist auch die geodätische Krümmung auf jedem Tangentialstreifen. Daher sind geodätische Linien als verformte Stabachsen geeignet, wenn die verformten Stäbe tangential zur Fläche aufgebracht werden.

2.3.1.5 Geodätische Linien

Es ist üblich, geodätische Linien als kürzeste Wege auf Flächen zu definieren. Eine differentialgeometrische Definition und Beschreibung findet sich etwa in [23] (übersetzt): Flächenkurven mit verschwindender geodätischer Krümmung werden als geodätische Linien bezeichnet. Eine Flächenkurve c ist genau dann eine geodätische Linie, wenn ihre Hauptnormalen h stets die Flächennormalen sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Schmiegeebenen von c normal auf die Fläche Φ stehen. Das bedeutet im Umkehrschluss, dass die rektifizierenden Ebenen tangential zur Fläche sind. In jedem Punkt P einer geodätischen Linie c ist daher die Binormale b die zu c



Abbildung 2.16: Verlauf geodätischer Linien in einem Bereich mit stark unterschiedlichen Krümmungen

normale Flächentangente. Dadurch können Stäbe, basierend auf geodätischen Linien, sehr elegant auf einer Fläche erzeugt werden.

Das experimentelle Auffinden von geodätischen Linien kann mit Papierstreifen erfolgen. Biegt man einen geraden Papierstreifen so auf eine Fläche Φ , dass er entlang der gebogenen Mittellinie c auf Φ aufliegt, so ist c eine geodätische Linie von Φ .

Die Generierung der geodätischen Linien erfolgte durch ein Tool in Grasshopper anhand wählbarer Start- und Endpunkte. Abbildung 2.16 charakterisiert einen gestalterischen Aspekt der Eigenschaften geodätischer Linien. Geodätische Linien weisen die Tendenz auf, Bereiche mit starker Krümmung zu umgehen. Eine gleichmäßige oder gar “parallele” Verteilung von geodätischen Linien auf einer Fläche mit stark wechselnden Krümmungen ist schwierig.

2.3.2 Erzeugung von Tangentialstreifen

Der Erzeugung eines der geodätischen Linie zugeordneten Tangentialstreifens Ψ (siehe roter Streifen in Abbildung 2.15) kommt im weiteren Prozess eine wichtige Bedeutung zu. Der Tangentialstreifen Ψ bildet, neben der Festlegung der Querschnittsausrichtung, die Basis für die anschließende FEM-Modellierung. Dabei dienen Ψ und die (näherungsweise) Abwicklung von Ψ als Trägerflächen für die Referenzierung der verformten und der unverformten Lage. Die Erzeugung des Tangentialstreifens Ψ kann auf unendlich viele Arten geschehen, von denen zwei untersucht werden.

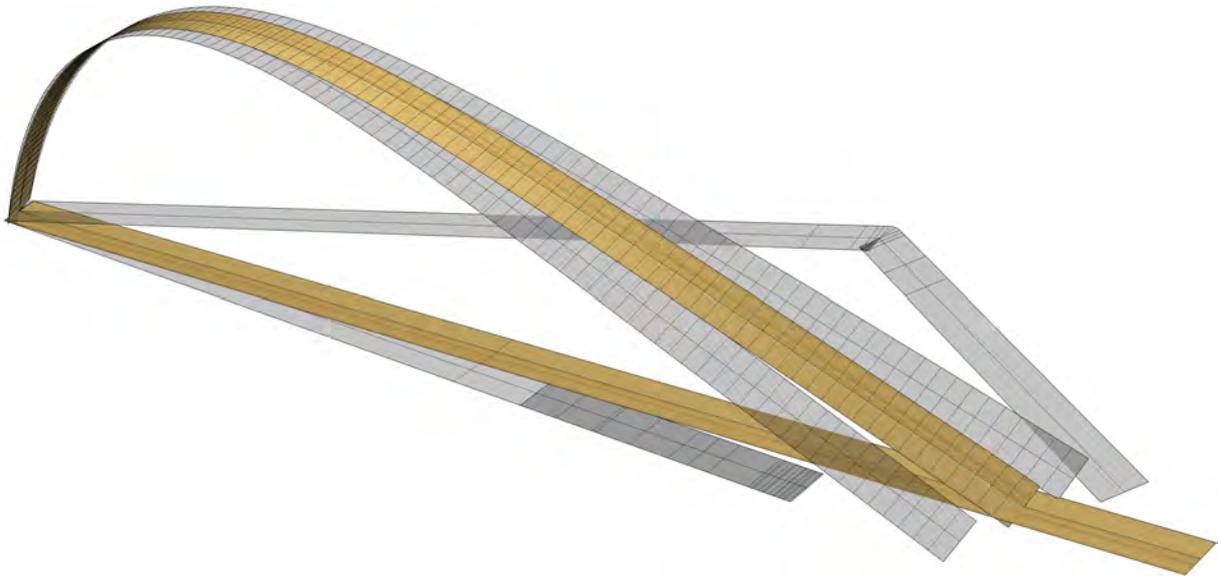


Abbildung 2.17: Tangentiale Flächenstreifen mit Parameterlinien erzeugt nach der Binormalen-Methode. Die grauen Streifen zeigen Probleme mit der Abwickelbarkeit auf.

2.3.2.1 Binormalen-Methode

Ein Tangentialstreifen Ψ kann am einfachsten mit den Binormalen \mathbf{b} der geodätischen Linie \mathbf{c} erzeugt werden. Dieser Tangentialstreifen Ψ wird als Binormalenstreifen bezeichnet. Die Breite des Streifens kann durch die Länge der Erzeugenden direkt festgelegt werden. Der Binormalenstreifen ist nicht (exakt) abwickelbar. Das hat mit der Torsion τ von \mathbf{c} zu tun. *“Die Torsionsbeanspruchung bewirkt in der Regel auch Verschiebungen u der Querschnittspunkte in Richtung der Stabachse. Dadurch wird ein ursprünglich ebener Querschnitt zu einer räumlich gekrümmten Fläche verformt. Man spricht von der Verwölbung des Querschnitts.”* [16] Diese Verwölbung des Querschnitts fehlt bei der Binormalen-Methode.

Je größer die Torsion τ von \mathbf{c} ist, desto mehr weicht der Binormalenstreifen von der abwickelbaren Idealform ab. Dies lässt sich durch den Vergleich der Bogenlänge s von \mathbf{c} mit den Bogenlängen s_1 und s_2 der Randkurven \mathbf{c}_1 und \mathbf{c}_2 des Binormalenstreifens quantifizieren. Für das Bogendifferential $ds_{1,2}$ von $\mathbf{c}_{1,2}$ gilt

$$ds_{1,2} = |\mathbf{c}'_{1,2}| \cdot ds \quad (2.7)$$

wobei $'$ die Ableitung nach der Bogenlänge s von \mathbf{c} bedeutet. Wegen

$$\mathbf{c}_{1,2}(s) = \mathbf{c}(s) \pm \frac{B}{2} \cdot \mathbf{b}(s) \quad (2.8)$$

und den Frenetschen Ableitungsgleichungen folgt

$$\mathbf{c}'_{1,2} = \mathbf{t} \pm \frac{B}{2} \cdot \tau \cdot \mathbf{h} \quad (2.9)$$

Daher gilt

$$ds_{1,2} = \sqrt{1 + \left(\frac{B}{2} \cdot \tau\right)^2} \cdot ds \quad (2.10)$$

Die Randkurven c_1 und c_2 sind daher länger als c , wenn die Torsion τ nicht verschwindet. Wenn τ in allen Punkten von c gleich 0 ist, ist c eine ebene Kurve und der Binormalenstreifen stimmt mit dem abwickelbaren Tangentialstreifen überein. Die Krümmung κ_c wirkt sich nicht auf die Länge der Randkurven c_1 und c_2 aus.

Abbildung 2.17 zeigt drei Binormalenstreifen in benachbarter Lage, von denen zwei nicht abwickelbar sind. Um in Hinblick auf die FEM-Modellierung einen exakt abwickelbaren Tangentialstreifen Ψ zur Verfügung zu haben, werden im nächsten Abschnitt weiterführende Überlegungen angestellt.

2.3.2.2 Konjugierte Tangenten-Methode

Wegen der geforderten Abwickelbarkeit von Ψ dürfen die Erzeugenden von Ψ nicht beliebig in den Tangentialebenen entlang von c gewählt werden, sondern müssen bestimmte Flächentangenten sein. Die gesuchten Erzeugenden sind die zu den Tangenten t von c konjugierten Flächentangenten t^* . Wegen der unbekannt Parameterdarstellung der NURBS-Fläche können die in der Differentialgeometrie entwickelten Formeln zur Ermittlung von t^* nicht verwendet werden.

Mit lokalen Koordinatensystemen, die mit Grasshopper erzeugt werden können, kann die Konstruktion von t^* dennoch erfolgen. Das für die Berechnung von t^* benötigte Koordinatensystem wird folgendermaßen erzeugt:

Grasshopper stellt in jedem Flächenpunkt P ein als “Frame” bezeichnetes, lokales Koordinatensystem zur Verfügung. Es ist tangential zu Φ ausgerichtet, die z-Achse liegt auf der Flächennormalen und die x-Achse weist in Richtung einer Parameterlinie durch den betreffenden Punkt P . Dieses Koordinatensystem wird in der Tangentialebene von P so gedreht, dass die x-Achse und y-Achse in Richtung der Hauptkrümmungen im betreffenden Punkt zeigen. Koordinaten in diesem Koordinatensystem werden mit dem Index C gekennzeichnet.

Der Vorgang, den idealen, abwickelbaren Tangentialstreifen zu erzeugen, ist in [23] beschrieben (die verwendeten Kürzel decken sich in der Bedeutung):

“For smooth surfaces the notion of conjugate tangents is defined [...] Mathematically vectors v , w which are expressed in a coordinate system whose basis are principal curvature vectors are conjugate, if and only if $v^T \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2)w = 0$, where κ_1, κ_2 are the principal curvatures.”

Die weiter oben vorweggenommene Bedeutung der Methode wird folgendermaßen beschrieben:

“Conjugate tangents play an important role here because they can be used to create a developable surface Ψ which is tangentially circumscribed to a given surface Φ along a curve s [...]. That tangent developable even has the nice property, that s is a geodesic not only for Φ , but also for Ψ .”

Die Erzeugung der konjugierten Tangenten t^* kann gemäß [23] ausführlich geschrieben folgendermaßen aussehen:

$$\mathbf{v}^T \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2) \mathbf{w} = 0 \quad (2.11)$$

$$\text{mit } \mathbf{v} \hat{=} \mathbf{t} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} \hat{=} \mathbf{t}^* = \begin{pmatrix} x_C^* \\ y_C^* \end{pmatrix}$$

$$(x_C \quad y_C) \cdot \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_C^* \\ y_C^* \end{pmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

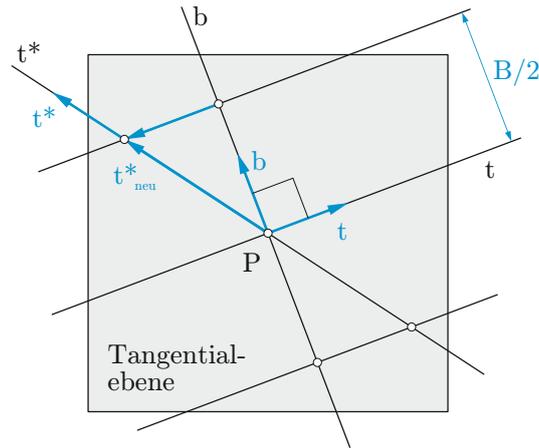


Abbildung 2.18: Berechnung der Punkte der Randkurven

Daraus folgt

$$\mathbf{t}^* = \begin{pmatrix} -\kappa_2 \cdot y_C \\ \kappa_1 \cdot x_C \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Um aus der durch die geodätische Linie c und den Flächentangenten \mathbf{t}^* festgelegten abwickelbaren Regelfläche einen Tangentialstreifen Ψ herzustellen, muss die Regelfläche durch zwei Kurven begrenzt werden, die in der Abwicklung zur Mittellinie parallel sind. Ihr Abstand zu c legt die Querschnittsbreite B fest. Dazu muss der Vektor \mathbf{t}^* in seiner Länge so verändert werden, dass der Vektor \mathbf{t}_{neu}^* bei Normalprojektion auf den Binormalenvektor \mathbf{b} von c in der Tangentialebene von P die Länge $B/2$ hat (siehe Abbildung 2.18). Die beiden Randkurven ergeben sich durch Anhängen der Vektoren \mathbf{t}_{neu}^* und $-\mathbf{t}_{neu}^*$ an den Punkt P der geodätischen Linie c .

Der Faktor für die Längenänderung von \mathbf{t}^* wird nachfolgend als λ bezeichnet. Betrachtet man Abbildung 2.18, so kann man die folgende Bedingung für die gewünschte Länge von \mathbf{t}_{neu}^* formulieren:

$$\left(\mathbf{t}_{neu}^* - \frac{B}{2} \cdot \mathbf{b}\right) \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (2.14)$$

$$\text{mit } \mathbf{t}_{neu}^* = \lambda \cdot \mathbf{t}^*, \quad \mathbf{t}^* = \begin{pmatrix} x_C^* \\ y_C^* \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -y_C \\ x_C \end{pmatrix}.$$

Ausmultiplizieren des Klammerausdruckes ergibt:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} -\kappa_2 \cdot y_C \\ \kappa_1 \cdot x_C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_C \\ x_C \end{pmatrix} - \frac{B}{2} \cdot 1 = 0 \quad (2.15)$$

$$\text{mit } \lambda = \frac{B}{2} \cdot \frac{1}{\kappa_1 \cdot x_C^2 + \kappa_2 \cdot y_C^2}. \quad (2.16)$$

Die Ausrichtung der Erzeugenden \mathbf{t}^* lässt bei näherer Betrachtung einige Schlüsse zu. Sind die Erzeugenden \mathbf{t}^* in der Abwicklung von Ψ parallel zueinander, so ist Ψ eine Zylinderfläche (vgl. dazu die schrägen Einkerbungen im Holzstab in Kapitel 2.1.3, Abbildung 2.10). Liegen die



Abbildung 2.19: Abwicklung der Flächenstreifen mit den Erzeugenden t^*



Abbildung 2.20: Links: Flächenstreifen mit den Erzeugenden t^* auf der Freiformfläche; Rechts: Ausschnitt von Abbildung 2.19 mit einer Problemstelle (rechter Streifen)

Erzeugenden t^* außerdem normal zur geodätischen Linie, liefert diese Erzeugungsmethode ein identisches Ergebnis wie die Binormalen-Methode. Im Allgemeinen sind die Erzeugenden t^* in der Abwicklung von Ψ aber nicht parallel zueinander.

Aus der Lage von t^* können Aussagen über den Verformungszustand des Stabes getroffen werden. Steht t^* normal auf c , so ist der Stab an dieser Stelle ausschließlich gekrümmt, es tritt keine Torsion auf. Je mehr t^* in die Richtung von c weist, desto mehr Torsion ist vorhanden. Wenn sich die Ausrichtung von t^* der Ausrichtung von t zu sehr annähert, so wird die Konstruktion der Tangentialstreifen problematisch.

Die Vermutung liegt nahe, dass die Ausrichtung von t^* der Ausrichtung von t kritisch nahe kommt, wenn die Torsion τ im Vergleich zur Krümmung κ sehr hoch ist, oder wenn c überhaupt keine Krümmung besitzt. Neben Stellen mit hoher Torsion stellen daher vor allem Wendepunkte von c für die Erzeugung der Tangentialstreifen Ψ nach dieser Methode ein großes Problem dar. Wendepunkte von c ($t = t^*$) gibt es nur auf sattelförmigen Flächenteilen.

In Abbildung 2.19 sind drei nach der konjugierten Tangenten-Methode erzeugte Tangentialstreifen zu sehen. Die Abwicklungen zeigen auch kritische Ausrichtungen von t^* . Der dritte Tangentialstreifen ist unbrauchbar.

2.3.2.3 Diskussion der Erzeugungsmethoden

Der Binormalenstreifen einer geodätischen Linie ist im Allgemeinen nicht exakt abwickelbar. Die unerwünschten Abweichungen manifestieren sich in einer Dehnung der Randkurven. Übertragen auf die FEM-Modellierung bedeutet das, dass die Holzstäbe neben den gewünschten formgebenden Verformungen einen weiteren, unerwünschten Verformungsanteil aus den Imperfektionen der Binormalen-Methode erhalten.

Der Nachteil der konjugierten Tangenten-Methode ist, dass sie nicht für beliebige geodätische Linien auf beliebigen Freiformflächen anwendbar ist. Somit steht die konjugierte Tangenten-Methode einem automatisierbaren Prozess im Weg. Wie in Kapitel 2.3.2.2 aufgezeigt, können hyperbolische Flächenpunkte ein Problem für diese Erzeugungsmethode sein. Ist im Vorhinein klar, dass auf der verwendeten Freiformfläche keine Bereiche mit hyperbolischen Punkten auftreten, stellt sie jedoch die Ideallösung dar.

Bei nicht allzu großen Torsionswerten der verformten Stabachse sind die Dehnungen der Randkurven des Binormalenstreifens eher gering (vgl. Formel 2.10 für das Bodendifferential der Randkurven). Daher scheinen Binormalenstreifen für die angestrebten Zwecke gut geeignet zu sein. Zusammen mit der einfachen Erzeugung und Anwendbarkeit wird die Binormalen-Methode insgesamt als zielführender angesehen. Der Fehler, der in der fehlenden Verwölbung der Querschnitte besteht, wird als vernachlässigbar klein angenommen.

Die Verformung der Stäbe im FEM-Modell basiert auf einer gewissen Menge an zusammengehörigen Punkten auf dem Tangentialstreifen und dessen Abwicklung. Das Verhalten des Stabes zwischen diesen Punkten ergibt sich durch das Materialverhalten und die Querschnittsgeometrie, es deckt sich daher nicht genau mit dem geometrisch erzeugten Modell.

2.3.3 Vorevaluierung der Querschnittsabmessungen

Die Abschätzung der maximal möglichen Querschnittsabmessungen unter Berücksichtigung des Verformungszustands der Holzstäbe basiert auf den fundamentalen Zusammenhängen zwischen Verformung und Spannung aus Kapitel 1.3.1. Dadurch kann ein sinnvoller Querschnitt für die FEM-Modellierung festgelegt werden. Die Evaluierung erfolgt nach den in Kapitel 1.3.1 angegebenen Formeln separat für die Biege- und Torsionsanteile der Verformung. Die Materialparameter und die

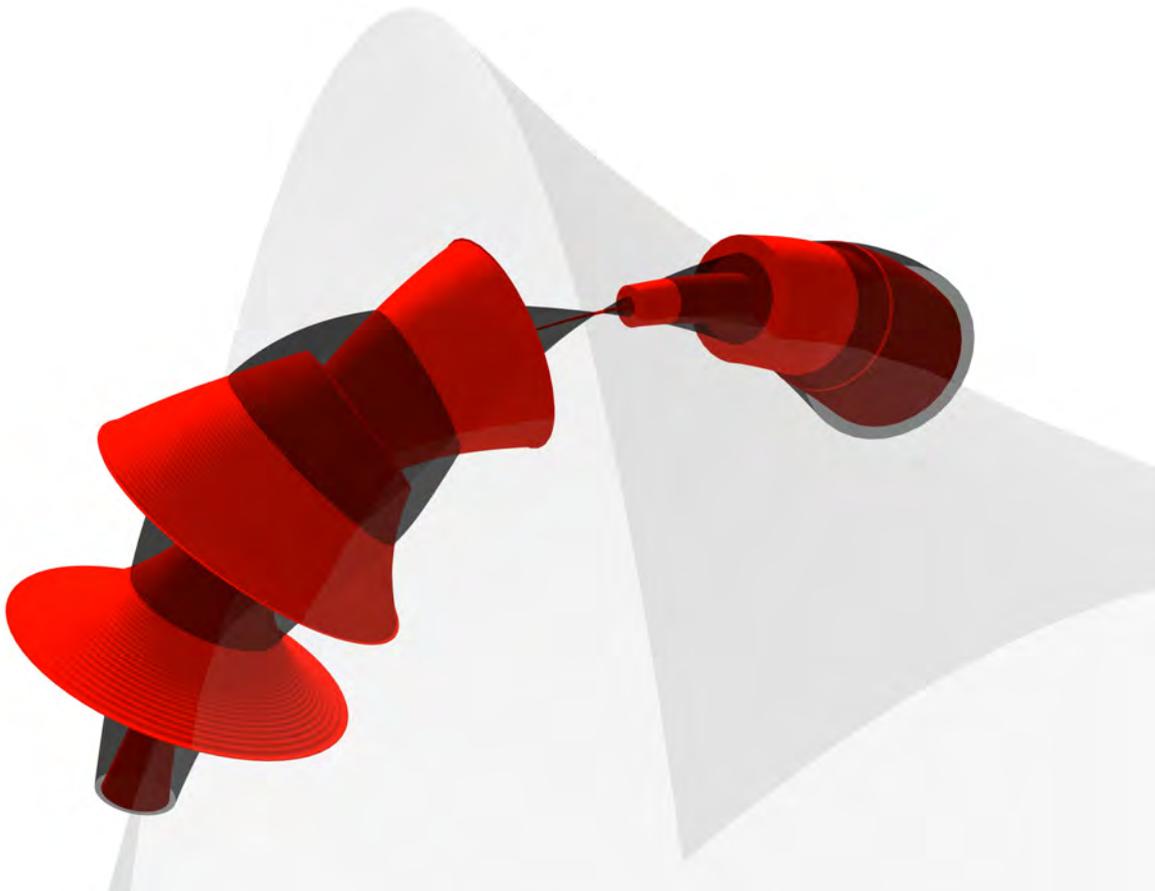


Abbildung 2.21: Torsion jeweils als Schlauch dargestellt, durch Grasshopper ausgegebene Torsion (rot) und auf der Fläche berechnete Torsion (grau)

zulässigen Spannungen wurden durch Holz der Klasse C24 festgelegt. Alle weiteren quantitativen Aussagen basieren auf dieser Grundlage.

Die Evaluierung benötigt numerisch stabile Krümmungs- und Torsionswerte entlang der verformten Stabachsen. Grasshopper erzeugt geodätische Linien näherungsweise als NURBS-Kurven 3. Grades. Die ausgegebenen Werte für die Krümmung κ sind nur bedingt brauchbar und haben Ausreißer. Die Werte für die Torsion τ sind völlig unbrauchbar. Dies ist in der Approximation der geodätischen Linien durch NURBS-Kurven 3. Grades begründet und resultiert in linearen Torsionsverläufen mit sprunghaften Änderungen an den Nahtstellen der Kurventeile. Erst bei NURBS-Kurven 4. Grades wären torsionsstetige Übergänge gewährleistet.

In der Differentialgeometrie werden Formeln zur Verfügung gestellt, mit denen die Krümmung κ und die Torsion τ einer geodätischen Linie mit Hilfe der Hauptkrümmungen der Fläche berechnet werden können. Dies sind die Formeln für die Normalkrümmung κ_n (Formel von Euler) und die geodätische Torsion τ_g

$$\kappa_n = \kappa_1 \cdot \cos^2 \varphi + \kappa_2 \cdot \sin^2 \varphi \quad \text{und} \quad (2.17)$$

$$\tau_g = (\kappa_1 - \kappa_2) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \quad , \quad (2.18)$$

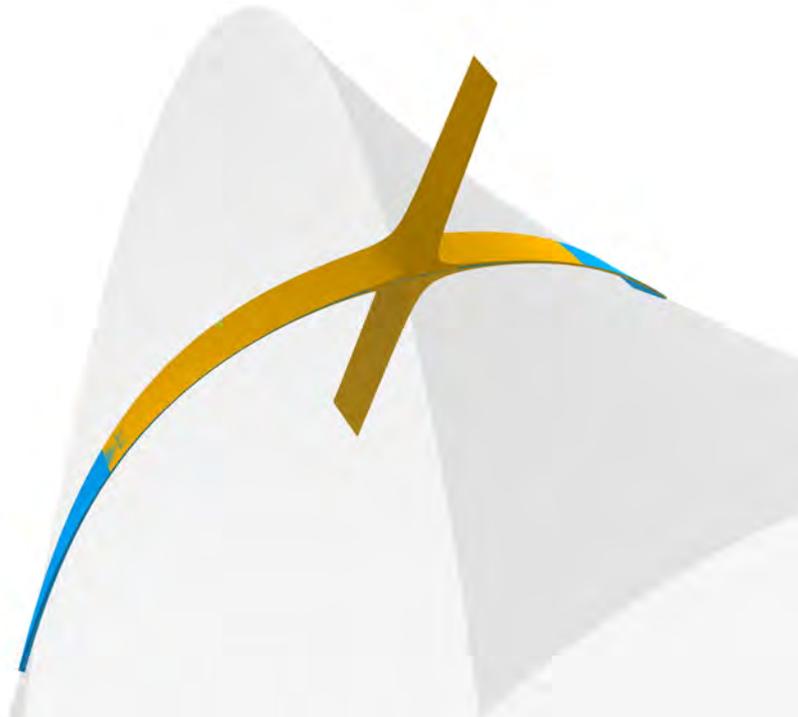


Abbildung 2.22: Mögliche Querschnittshöhen zufolge Torsion (gelb) und Biegung (türkis)



Abbildung 2.23: Eine festgelegte Querschnittshöhe (schwarz) wird mit der maximal möglichen Querschnittshöhe zufolge Biegung und Torsion (rot) verglichen (überhöhte Darstellung)

in denen κ_1 und κ_2 die Hauptkrümmungen im jeweiligen Flächenpunkt sind und φ der Winkel zwischen der Kurve und der zu κ_1 gehörenden Hauptkrümmungsrichtung ist. Für eine geodätische Linie gilt $\kappa_n = \kappa$ und $\tau_g = \tau$.

Da die Fläche ausreichend oft stetig differenzierbar erzeugt wurde, können die Krümmung und die Torsion der geodätischen Linien numerisch stabil berechnet werden. In Abbildung 2.21 ist der Unterschied zwischen der von Grasshopper ausgegebenen Torsion (in rot) und der auf der Fläche berechneten Torsion (in grau) dargestellt.

Die durch eine Subroutine automatisierte Berechnung der maximal möglichen Querschnittshöhen ermöglicht die Identifizierung der Stellen mit der geringsten zulässigen Querschnittshöhe (vgl. die Visualisierungen in den Abbildungen 2.22 und 2.23). Sie können bei der Positionierung der geodätischen Linien helfen, etwa wenn eine Mindestdicke der Stäbe vorgegeben ist.

2.3.4 Erzeugung des Querschnittes und des verformten Stabes

Die geodätischen Linien mit einem Querschnitt auszustatten und anschließend die verformten Stäbe zu erzeugen, ist für die spätere FEM-Simulation nicht erforderlich. Dieser Schritt dient nur der realitätsnahen Visualisierung der Struktur. Für die Binormalen-Methode wurden viele Punkte auf der geodätischen Linie erzeugt und dazugehörige lokale Koordinatensysteme platziert, festgelegt durch den Binormalenvektor als x-Achse und den Tangentenvektor als z-Achse. In diesen lokalen Koordinatensystemen wurden Rechtecke erzeugt und durch eine Loft-Fläche verbunden. Bei der konjugierten Tangenten-Methode wurden die Ober- und Unterseiten der Stäbe durch Offsetflächen erzeugt. Für die seitlichen Flächen wurden die Randkurven durch Loft-Flächen verbunden.

2.3.5 Erzeugung der Abwicklung der Flächenstreifen

Bei der Verwendung der konjugierten Tangenten-Methode mit deutlichen Richtungsunterschieden der Tangente t und der konjugierten Tangente t^* ist die Abwicklung des Flächenstreifens mit Grasshopper problemlos möglich.

Bei der Verwendung der Binormalen-Methode ist die automatische Erzeugung der (näherungsweise) Abwicklung in der Regel nicht möglich. Hier wird ein Rechteck mit der Länge der geodätischen Linie und der Querschnittsbreite erstellt. Der Bezug des Flächenstreifens zu diesem Rechteck erfolgt durch die Laufkoordinate der geodätischen Linie. Für die folgenden Schritte wird das Rechteck in der Tangentialebene im Anfangspunkt der geodätischen Linie so platziert, dass die Mittellinie des Rechtecks mit der Anfangstangente der geodätischen Linie zusammenfällt.

2.3.6 Freiformfläche

Für ein hohes Maß an gestalterischer Freiheit sind NURBS-Flächen gut geeignet. Es ist darauf zu achten, dass sie an den Nahtstellen der Patches krümmungsstetig sind. Denkbar ist eine gezielte Unterteilung in mehrere Bereiche, um eine spezielle Anordnung der geodätischen Linien zu erreichen.

Es empfiehlt sich, die Trägerfläche etwas größer als die geplante Struktur zu gestalten. Der Verlauf von geodätischen Linien ist intuitiv schwer erfassbar. Wird eine Randlinie von der automatisch erzeugten geodätischen Linie getroffen, ist sie unbrauchbar.

Die Auswirkung hoher lokaler Krümmungsunterschiede auf den Verlauf geodätischer Linien wurde bereits anhand von Abbildung 2.16 aufgezeigt. Darüber hinaus besitzen Stäbe in solchen Bereichen aufgrund ihres Verformungszustandes zwangsläufig geringe Stabsteifigkeiten. Weitere allgemeine Aussagen zur Flächengeometrie zu treffen ist schwierig. Eine doppelt gekrümmte Fläche erscheint wegen ihrer räumlich versteifenden Wirkung jedenfalls vorteilhaft.

2.4 Aufbereitung der Geometrie für die FEM-Simulation

In diesem Kapitel muss, aufgrund der engen Verknüpfung zur Erzeugung der verformten Lage mit der verwendeten Software, ein Vorgriff auf den nächsten Abschnitt gemacht werden. Um einen effizienten Arbeitsfluss zu ermöglichen, wurden möglichst viele Arbeitsschritte automatisiert, die den Input für die FEM-Simulation betreffen. Die Automatisierung der Aufgabe war wegen der großen Menge an Punkten, die manipuliert werden mussten, und der wenig effizienten Benutzeroberfläche des Pre-Processing Moduls von Abaqus vorteilhaft. Die meisten Eingaben erfolgten durch direktes Schreiben in das Input-File für den Solver der FEM-Software.

Die Schritte für die Aufbereitung waren:

- Verknüpfung der unverformten und verformten Lage der Stäbe durch Verschiebungsvektoren
- Manipulation der Verschiebungsvektoren um einen geeigneten Verschiebungspfad zu erhalten
- Export der unverformten Stäbe und der Vektoren des Verschiebungspfads

Um die Verformung von Stäben mit der FEM-Software zu simulieren, müssen die verformte und unverformte Lage des Stabes verknüpft werden. Die Verknüpfung geschieht mit einer Schar von Punkten und Verschiebungsvektoren.

Dazu wird für jede geodätische Linie ihr Anfangspunkt als Startpunkt für die Laufkoordinate der verformten Stabachse gewählt. Genauso wird für die Abwicklung der geodätischen Linie vorgegangen und eine Laufkoordinate für die unverformte Stabachse festgelegt. Jeder Stab besitzt zwei zusammengehörige Flächenstreifen: einen Tangentialstreifen in der verformten Lage mit der geodätischen Linie als Mittellinie und einen Streifen in der unverformten Lage (Abwicklung des Tangentialstreifens). Diese zusammengehörigen Flächenstreifen werden so aufeinandergelegt, dass die geodätische Linie und deren Abwicklung den gleichen Anfangspunkt und die gleiche Anfangstangente besitzen.

Anschließend werden zusammengehörige Punkte auf beiden Flächen in Abhängigkeit von der Laufkoordinate gewählt. Die Bildung der Verschiebungsvektoren erfolgt durch die Verknüpfung jeweils zweier solcher Punkte. Der Erfolg der folgenden FEM-Simulation ist jedoch vom Verschiebungsweg abhängig. Eine einfache Verknüpfung der verformten und unverformten Lage führt bei dieser Aufgabenstellung wegen der hohen Verformungen im Allgemeinen nicht zum Erfolg.

Um ausgehend vom unverformten Flächenstreifen den verformten Flächenstreifen zu entwickeln, kann man sich vorstellen, dass der unverformte Flächenstreifen auf dem verformten Flächenstreifen rollt. Zusätzlich zum Rollvorgang bleibt jeder Punkt des rollenden Flächenstreifens auf dem verformten Flächenstreifen "kleben", wenn er ihn berührt hat. Wählt man einen Punkt auf dem rollenden Streifen und verfolgt seine Bewegung, kann man den realen Verschiebungspfad des Punktes erkennen. Da der Verschiebungspfad durch Rotation des rollenden Streifens um eine fortschreitende Rotationsachse auf einem Streifen mit Torsion entsteht, handelt es sich im Allgemeinen um eine räumliche Kurve.

Die Approximation des Verschiebungspfades durch lineare Verbindungen der Punkte der verformten und unverformten Lage ist in der FEM-Simulation oft nicht zielführend. Das Problem ist, dass der Stab entlang des linearen Verschiebungspfades eine ungewünschte Verkürzung durchmacht. Überschreiten die Verkürzungen einen Grenzwert, kann dadurch eine kritische Verzweigungslast im Stab hervorgerufen werden, die den Abbruch der Simulation nach sich zieht. Durch das Aufteilen der Verformung in mehrere Schritte kommt es zu weniger gravierenden Verkürzungen, da sie durch das abschnittsweise Platzieren von Sekanten geringer werden. Das Problem wird dadurch aber nicht vollständig gelöst. Eine ideale Linearisierung des Verschiebungspfades müsste daher durch das abschnittsweise Platzieren von Tangenten auf dem realen Verschiebungspfad geschehen.

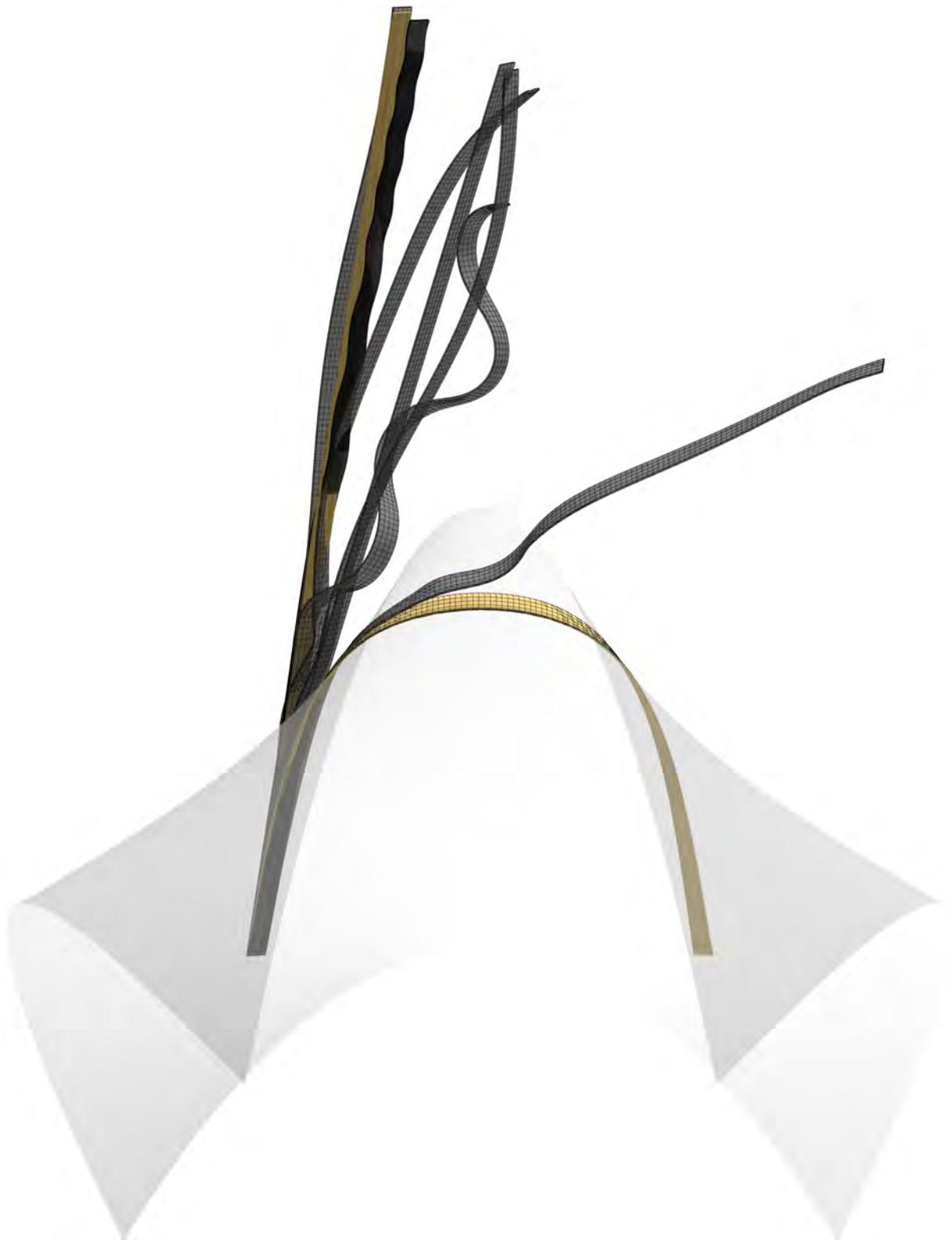


Abbildung 2.24: Fehlschläge in der FEM-Modellierung beim Versuch, den verformten Stab zu erzeugen. Der unverformte und der erfolgreich verformte Stab sind hervorgehoben.

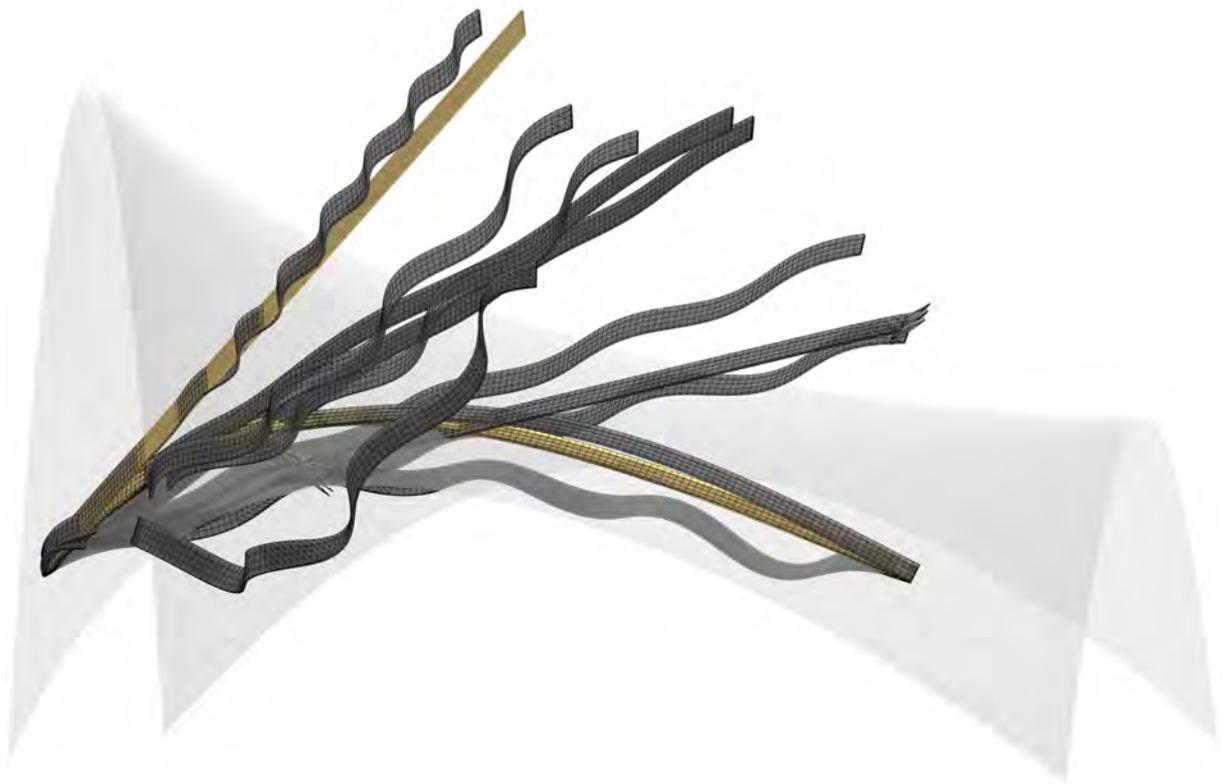


Abbildung 2.25: Fehlschläge in der FEM-Modellierung beim Versuch, den verformten Stab zu erzeugen. Der unverformte und der erfolgreich verformte Stab sind hervorgehoben.

Die Lösung dieser Herausforderung wurde im konkreten Anwendungsfall näherungsweise durch die Wahl von jeweils 50 Punkten auf den beiden Flächenstreifen, deren Verknüpfung in 10 Verformungsschritten und eine anschließende Manipulation erreicht. Dafür wurden pro Stab 10 Schnitte (bezogen auf die Laufkoordinate) gewählt, die auf Kreuzungspunkte mit anderen Lamellen abgestimmt waren. Auf jedem Schnitt wurden fünf Punkte platziert. Der Rollvorgang erfolgte in 9 Schritten, die auf die Lage der Schnitte abgestimmt sein mussten. Durch den bis hierher beschriebenen Vorgang konnte ein durch Sekanten linearisierter Verschiebungspfad erstellt werden. Die exakte Konstruktion eines durch Tangenten linearisierten Verschiebungspfads wurde nicht vorgenommen. Stattdessen wurde für jeden Verschiebungsvektor ein zusätzlicher Verschiebungsanteil in Richtung der unverformten Stabachse in der aktuellen Rolllage definiert. Der Verschiebungspfad wurde daher für einen künstlich gestreckten Stab erstellt. Je nach Lage des Schnittes wurde eine empirisch ermittelte Dehnung von 0,5 - 4,5 % (bezogen auf die gesamte Stablänge) angesetzt. Im letzten Schritt der Verformung wurde die Dehnung zurückgebildet, um die gewünschte Endform zu erreichen. Pro Stab ergaben sich somit 50 Punkte, an denen mit 500 Verschiebungsvektoren die verformte Lage hergestellt wurde.

Der Export der unverformten Stäbe und der Vektoren des Verschiebungspfads sind bereits eng mit der Funktionsweise der FEM-Software verknüpft. Zur Beschreibung des Vorgangs wird daher ein wenig auf die FEM-Modellierung vorgegriffen. Um die Datenmenge in die FEM-Simulation einzuspeisen, ist ein automatisierter Vorgang vorteilhaft. Der verfolgte Ansatz hilft, den Großteil der Eingabearbeit im Pre-Processing Modul zu automatisieren und wird bezugnehmend auf die

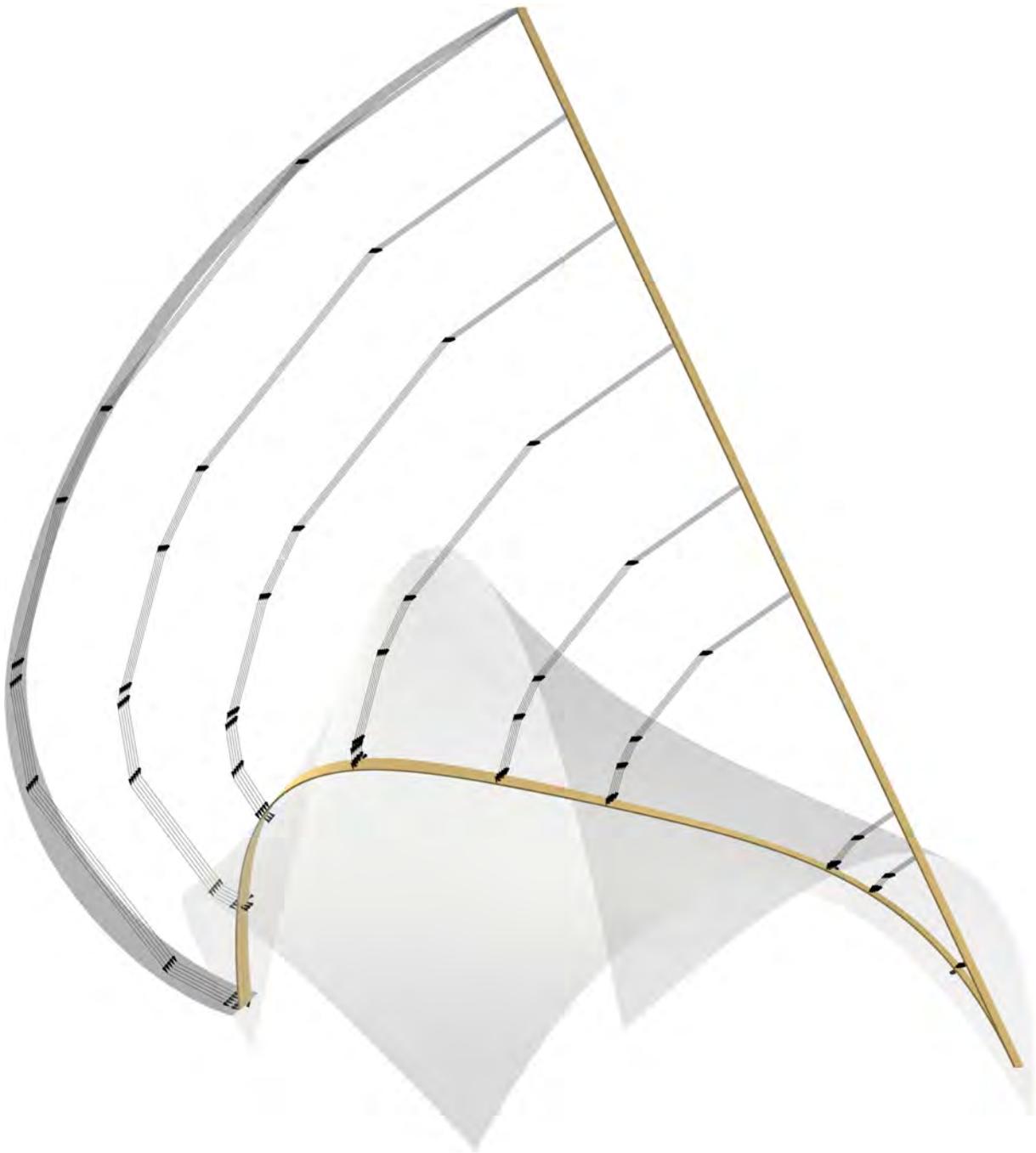


Abbildung 2.26: Visualisierung der Approximation des Verschiebungspfades durch Sekanten. Die dunkelgraue Fläche (links) stellt den realen Verschiebungspfad der Endkante dar. Starke Abweichungen der Sekanten vom realen Verschiebungspfad sind problematisch.

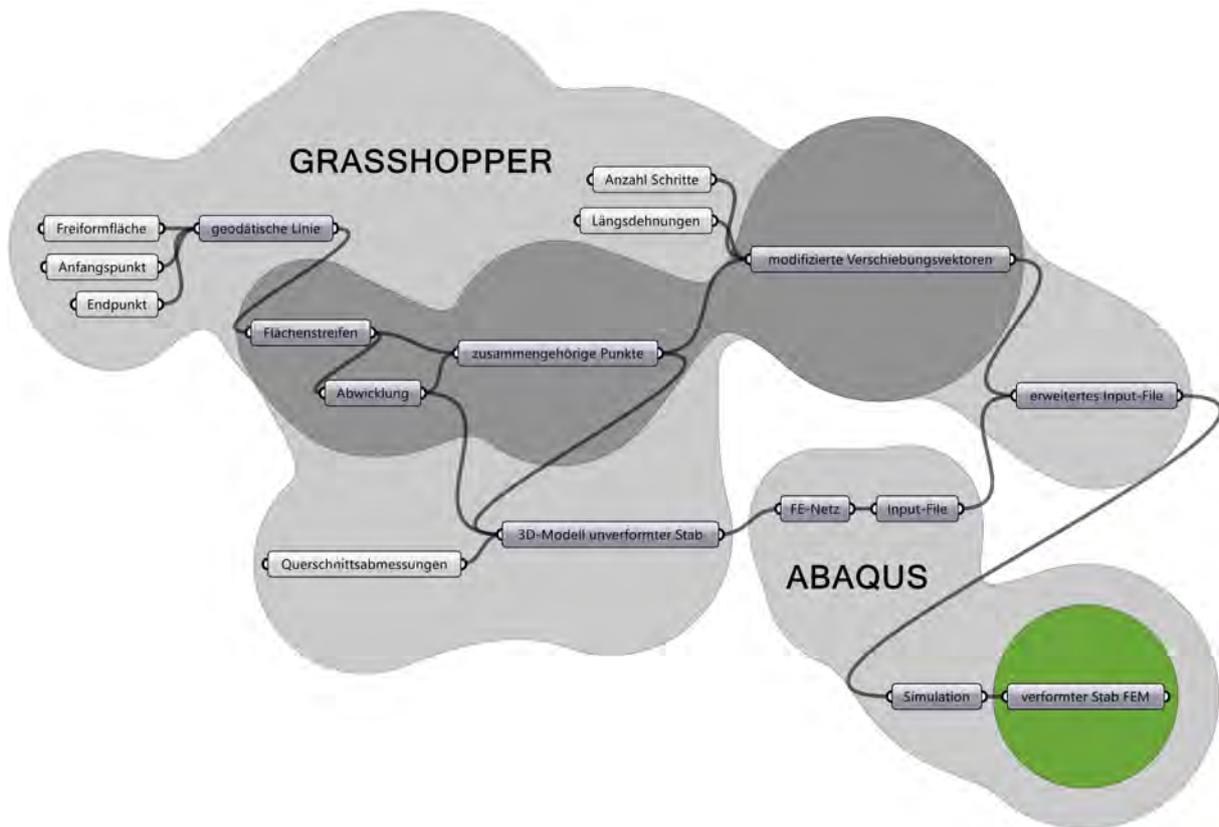


Abbildung 2.27: Systemdiagramm des Gestaltungsprozesses in vereinfachter Form. Der Kernprozess des Verformungsvorgangs ist dunkelgrau hervorgehoben. Hellgraue Bausteine sind Input für den Prozess.

verwendete FEM-Software beschrieben. Die Basis dafür sind die Abstimmung der FE-Netzgröße mit den Dimensionen des Stabes und ein Programm, das Daten analysieren und ausgeben kann.

Anhand der Lage der Schnitte und des Mittelstreifens wurde jeder Stab in 72 Volumenkörper geteilt. An jedem der Eckpunkte eines Volumenkörpers lag ein Ausgangspunkt für einen Verschiebungsvektor. Der Stab wurde unter Erhaltung der Kanten der Teilkörper in die FEM-Software importiert. Anschließend wurde das FE-Netz auf der importierten Geometrie erstellt. Der Mesh-Algorithmus der Software behält die Kanten der Volumenkörper bei. Jeder Eckpunkt eines Volumenkörpers war somit ein Eckpunkt eines FE-Elements. Somit lagen die Ausgangspunkte für alle Verschiebungsvektoren ebenfalls an Eckpunkten von FE-Elementen. Informationen über das FE-Netz wurden in das Input-File geschrieben und enthielten auch die Koordinaten der Eckpunkte des FE-Netzes. Die Koordinaten der Eckpunkte wurden ausgelesen und mit den Koordinaten in der CAD-Software abgeglichen. So konnten die Ausgangspunkte für die Verschiebungsvektoren eindeutig identifiziert werden. Die FEM-Software definiert Punkte in der Geometrie, in denen etwa eine Kraft oder Verformung angreift, als Sets. Somit konnten die identifizierten Punkte als neue Sets definiert werden und samt der koordinatenmäßigen Beschreibung der Verschiebungsvektoren wieder in das Input-File geschrieben werden. Somit müssen im Pre-Processing Modul aktiv nur der Import der Geometrie, das Erzeugen des FE-Netzes und die Materialzuweisung erfolgen.

Abbildungen 2.27 und 2.28 geben eine grafische Übersicht über den Gestaltungsprozess und das Zusammenspiel zwischen Grasshopper und Abaqus. In Abbildung 2.29 ist der Teil der Grasshopper-Definition abgebildet, der der Erzeugung der Verschiebungspfade dient.

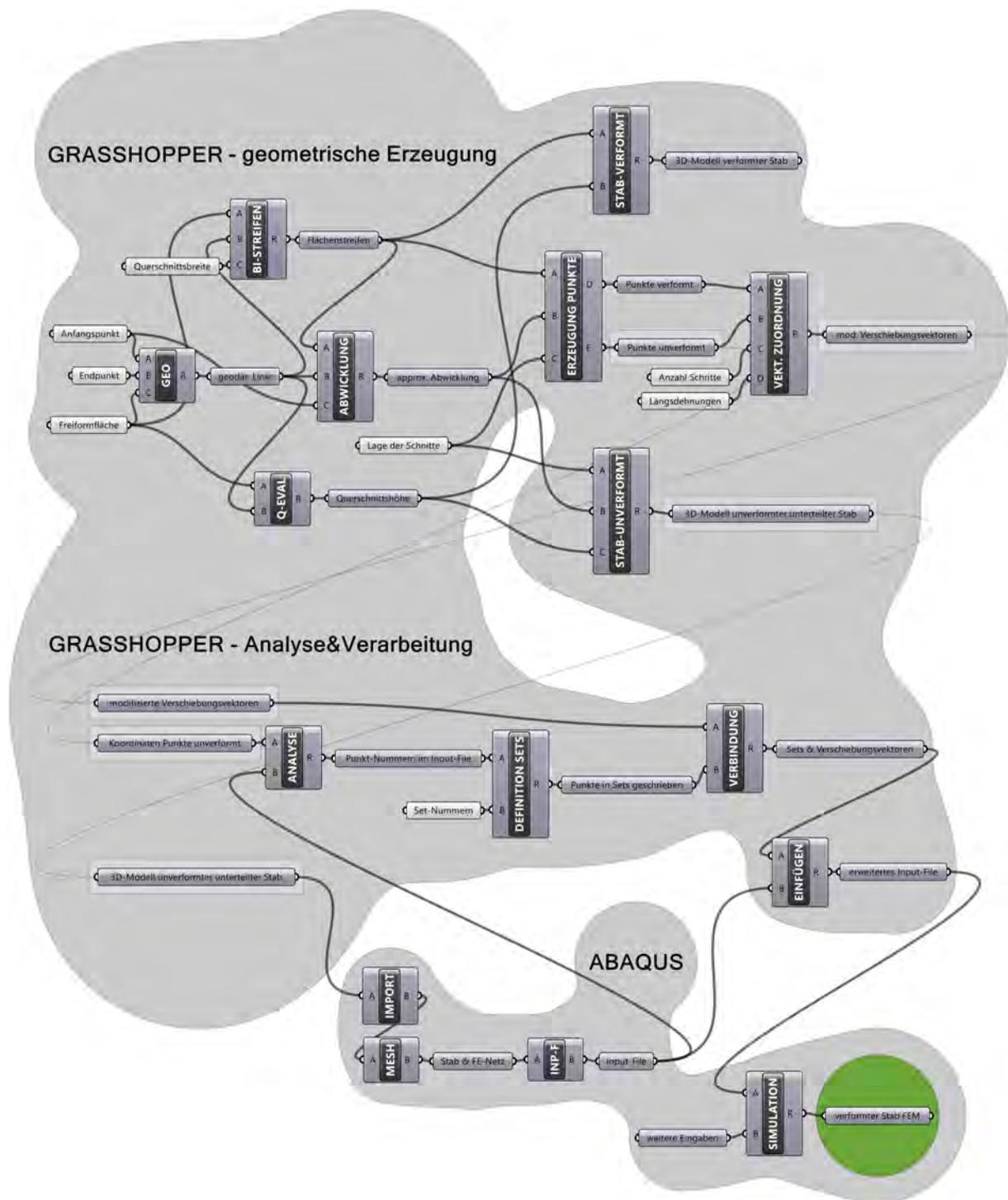


Abbildung 2.28: Systemdiagramm des Gestaltungsprozesses in detaillierter Form samt Darstellung der wichtigsten Subprozesse. Prozessschritte in Grasshopper sind zur besseren Verständlichkeit in zwei Gruppen gegliedert.

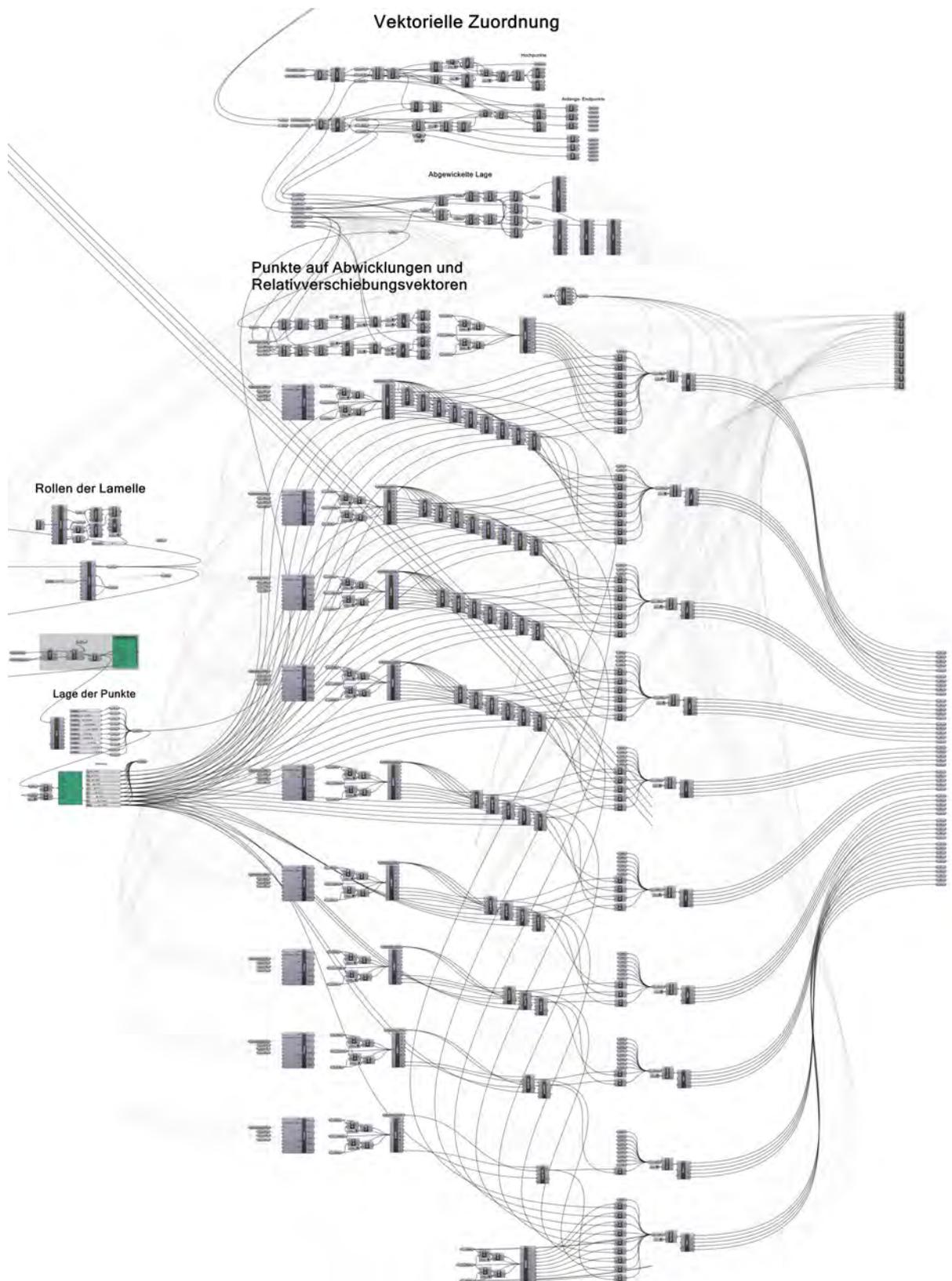


Abbildung 2.29: Subroutine zur Erzeugung der Verschiebungspfade. Bausteine am rechten Rand der Abbildung enthalten für jeden der erzeugten Punkte eine hierarchische Liste von Vektoren. Diese Listen werden nach einer Aufbereitung in das Input-File geschrieben.

3 Simulation

Dieses Kapitel behandelt die FEM-Simulation von verformten Stabsystemen. Neben dem Verformungsvorgang werden auch verschiedene Möglichkeiten behandelt, die Interaktion der Stäbe zu definieren. Weiters wird die Auswirkung der Interaktion in Kombination mit der Entspannung der Stäbe beschrieben.

Die Grundlage für den Verformungszustand der Stäbe sind die auf der Freiformfläche liegenden Stabachsen. Entsprechend ihrer geometrischen Eigenschaften können, wie im vorigen Abschnitt gezeigt, passende Querschnittsabmessungen abgeschätzt werden. Die verformte Lage spiegelt allerdings keinen realisierbaren Zustand wieder, da jeder Stab an vielen Punkten, verteilt über die gesamte Stablänge, gehalten wird. Bis auf die Auflager müssen diese Punkte anschließend wieder losgelassen werden. Durch diesen Schritt kann sich der Stab entspannen, daher die Lage einnehmen, die sich durch seine Material- und Querschnittseigenschaften sowie sonstige Einwirkungen ergibt. Um diese beiden Zustände klar abzugrenzen, wird der Zustand nach der erfolgten Verformung als “aufgezwungen” und der Zustand nach dem Loslassen der überzähligen gehaltenen Punkte als “entspannt” bezeichnet.

Eine besondere Bedeutung kommt der Implementierung der Interaktion der Stäbe zu. Neben der Abbildung eines korrekten Kraftflusses trägt sie zur Angleichung von aufgezwungener und entspannter Lage bei. Der Fokus wurde auf die Möglichkeiten der Umsetzung der Interaktion und das daraus resultierende Verformungsverhalten gelegt. Eine qualitative Auseinandersetzung mit Spannungszuständen wird nicht durchgeführt.

Der Belastungszustand elastisch verformter Strukturen setzt sich aus der Einwirkung der Verformung und Einwirkungen aus zusätzlich aufgebrachten Lasten zusammen. Eine Möglichkeit, den Belastungszustand abzuschätzen, wäre die Überlagerung der Spannungen aus der Verformung und zusätzlichen Belastungen.

Streng genommen ist dieser Ansatz nicht korrekt, da das Superpositionsprinzip hier nicht gilt. Die materielle Linearität ist zwar gegeben, jedoch ist die Forderung nach kleinen Verschiebungsableitungen nicht erfüllt. Außerdem kann davon ausgegangen werden, dass sich elastisch verformte Tragwerke geometrisch nichtlinear verhalten und es kann, je nach Art der Modellierung der Kreuzungspunkte, auch eine strukturelle Nichtlinearität bestehen (wenn etwa die Separation aufeinanderliegender Stäbe möglich ist).

Ein weiteres Problem besteht darin, dass die entspannte Form, auf die zusätzliche Belastungen aufgebracht werden, im Vorhinein nicht bekannt ist. Wie in Kapitel 2.1.2.1 erläutert, sollte mit einer entsprechend hohen Anzahl von Stäben, die miteinander verbunden sind, die entspannte Form der aufgezwungenen Form weitgehend gleichen. Für einen einzelnen Stab, der nicht mit anderen Stäben verbunden ist, können diese beiden Formen stark abweichen. Werden mehrere Belastungen aufgebracht, ist zu beachten, dass sich die Struktur mit jeder weiteren Last ändert.

Ein realitätsnaher Ansatz zur Ermittlung des Belastungszustandes elastisch verformter Strukturen ist daher eine integrale Modellierung von Verformungsvorgang, Interaktion, Entspannung und zusätzlich aufgebrachter Lasten.

3.1 Verformungsvorgang

Die Umsetzung des in Kapitel 2.4 theoretisch erläuterten Verformungsvorgangs erfolgt in mehreren Schritten. Der für die folgenden Modelle angewandte Verformungsvorgang besteht aus zehn Schritten. In Abbildung 3.1 sind die Resultate der Verformungsschritte in der FEM-Simulation abgebildet. Die ersten neun Schritte sind grau dargestellt. In jedem dieser Schritte wird mit fortschreitender Laufkoordinate des Stabes eine Schar von Punkten in die gewünschte Lage bewegt und dort gehalten. Im letzten Schritt, grün dargestellt, werden die eingeführten Längsdehnungen rückgebildet. Die Längsdehnungen sind nötig, um während des Verformungsvorgangs Verzweigungsprobleme zu unterbinden (vgl. die Misserfolge beim Verformungsvorgang in Abbildung 2.25).

Die Umsetzung des Verformungsvorgangs erfolgte mit isotropem Materialverhalten. Beim Versuch, orthotrope Materialeigenschaften zu implementieren, ergaben sich während des Verformungsvorgangs derart große Verzerrungen im FE-Netz, dass die Simulation abgebrochen wurde (vgl. Abbildung 3.2). Die Vermutung liegt nahe, dass die Ursache die geringen Steifigkeiten normal zur Stabachse sind. Dieses Problem kann wohl durch eine höhere Anzahl und engere Anordnung von Punkten, an denen die Verformungen aufgebracht werden, beherrscht werden. Die in Abbildung 3.1 realisierte Verformung wurde an 50 Punkten mit je 5 Punkten pro Schnitt aufgebracht.

3.2 Entspannung der verformten Stäbe

Nach dem Verformungsvorgang besitzt ein Stab annähernd die gewünschte geometrische Form. Damit sich die nach dem Materialverhalten und den Querschnittsabmessungen korrekte Form einstellt, müssen die gehaltenen Punkte, bis auf die Auflager, losgelassen werden. Es empfiehlt sich, auch die Anfangstangenten der Stäbe zu fixieren, etwa durch zwei nahe aneinander liegende gehaltene Punktreihen bei den Auflagern.

Zur Veranschaulichung des Entspannungsvorgangs wurde ein Modell mit zwei Stäben auf einer Freiformfläche erstellt. Die räumliche Lage der Stäbe ist in Abbildung 3.3 zu erkennen. Der lange Stab ist identisch mit dem Stab aus Abbildung 3.1. Die Abbildung 3.4 stellt die aufgezwungene Lage der Stäbe in grau und die entspannte Lage in grün dar. Es gibt keine Interaktion zwischen den Stäben. Alle Auflager sind durch zwei nahe aneinander liegende Punktreihen gestaltet. Während die entspannte Lage des kurzen Stabes sehr gut mit der aufgezwungenen Lage übereinstimmt, weicht der lange Stab stark von der aufgezwungenen Lage ab. In Kapitel 3.3.2 wird dieses Beispiel mit einer Interaktion zwischen den Stäben wieder aufgegriffen.

Die Fixierung von Anfangstangenten dient neben der Erzeugung einer möglichst guten Übereinstimmung von aufgezwungener und entspannter Lage auch der erfolgreichen Simulation. Durch die Verwendung einer zweiten Reihe von Punktlagern kann die Anfangstangente des Stabes fixiert werden. Der Vorgang des Auffindens der physikalisch korrekten Form nach dem Loslassen der überflüssigen Punkte wird dadurch wesentlich vereinfacht. So können auch Durchschlagprobleme beim Übergang in die entspannte Lage verhindert werden. In den Abbildungen 3.5 und 3.6 werden die beiden Stäbe separat im Entspannungsprozess ohne fixierte Anfangstangenten gezeigt. Die Simulation brach jeweils nach einigen Inkrementen im Schritt der Entspannung ab. Die dargestellten Formen sind im Schwingvorgang und haben die Gleichgewichtslage noch nicht erreicht.

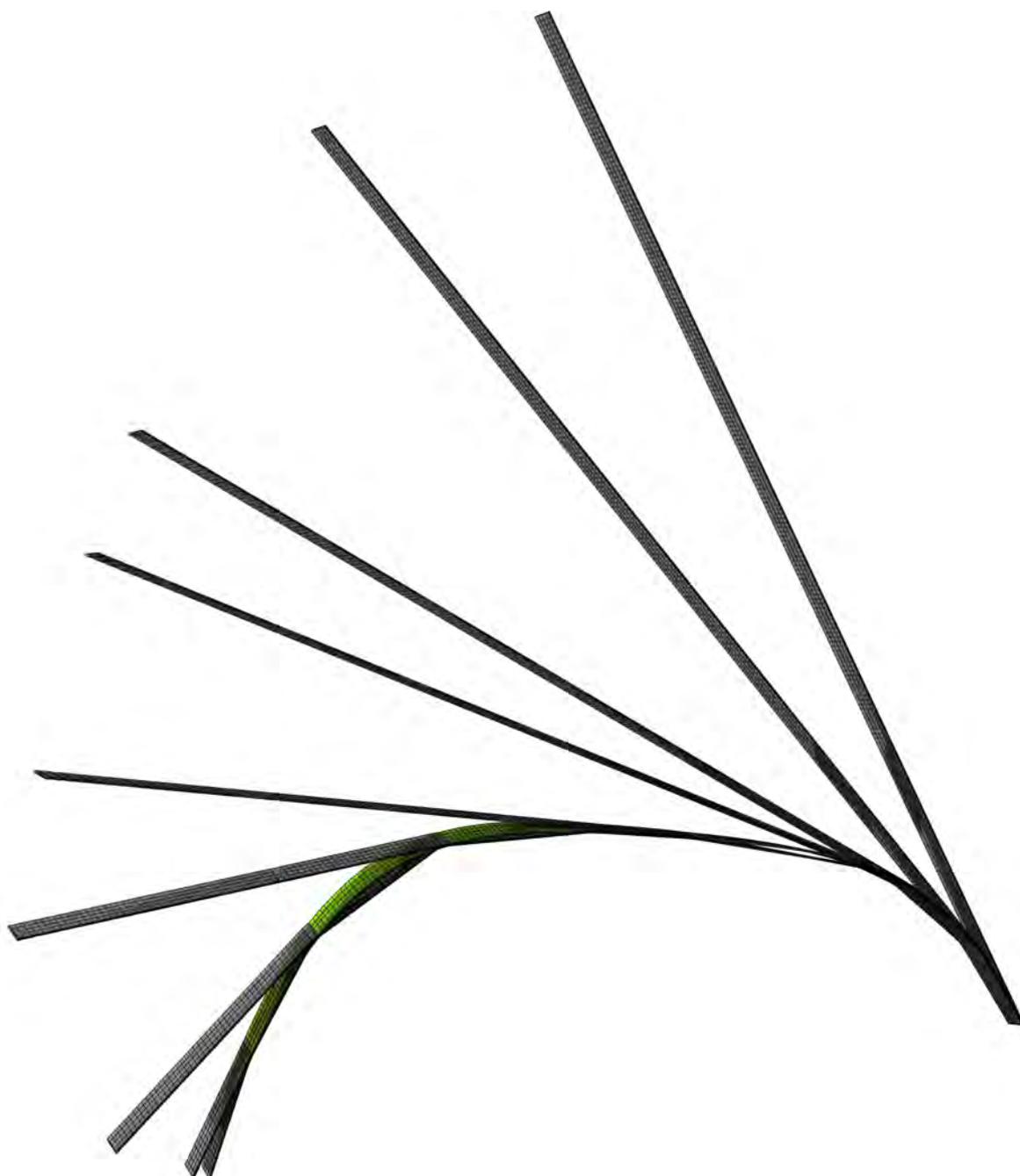


Abbildung 3.1: Schritte des Verformungsvorgangs (grau) mit dem Endergebnis (grün)

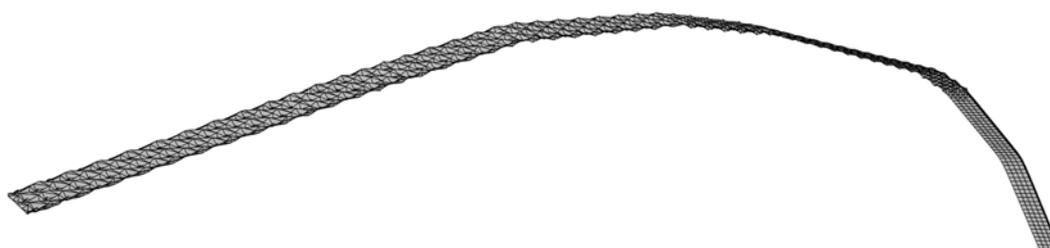


Abbildung 3.2: Verzerres FE-Netz beim Einsatz orthotropen Materialverhaltens

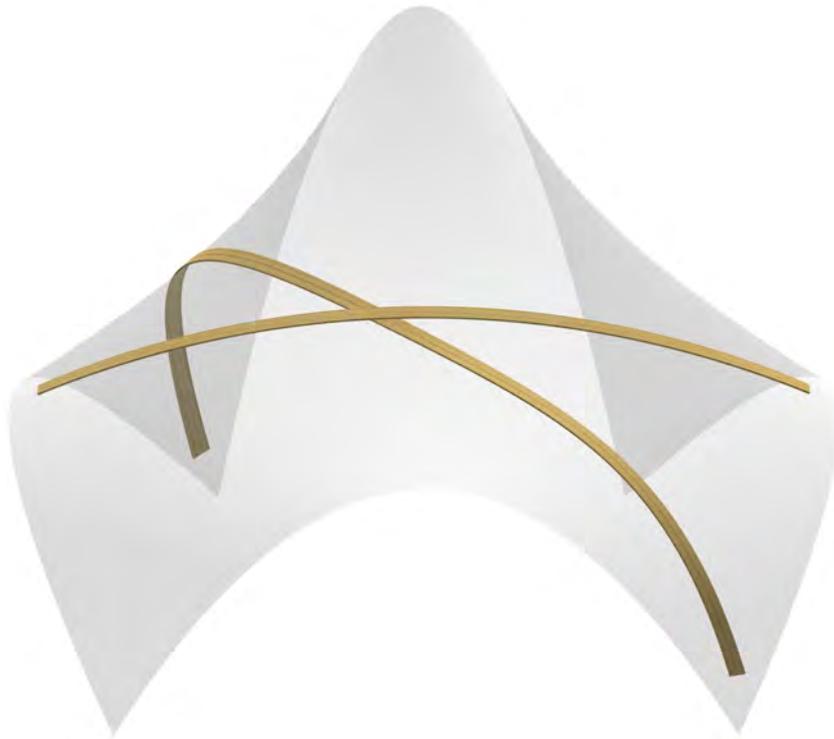


Abbildung 3.3: Räumliche Anordnung von zwei verformten Stäben auf einer Freiformfläche



Abbildung 3.4: Aufgezwungene Lage (grau) und entspannte Lage (grün) von verformten Stäben mit fixierten Anfangstangenten

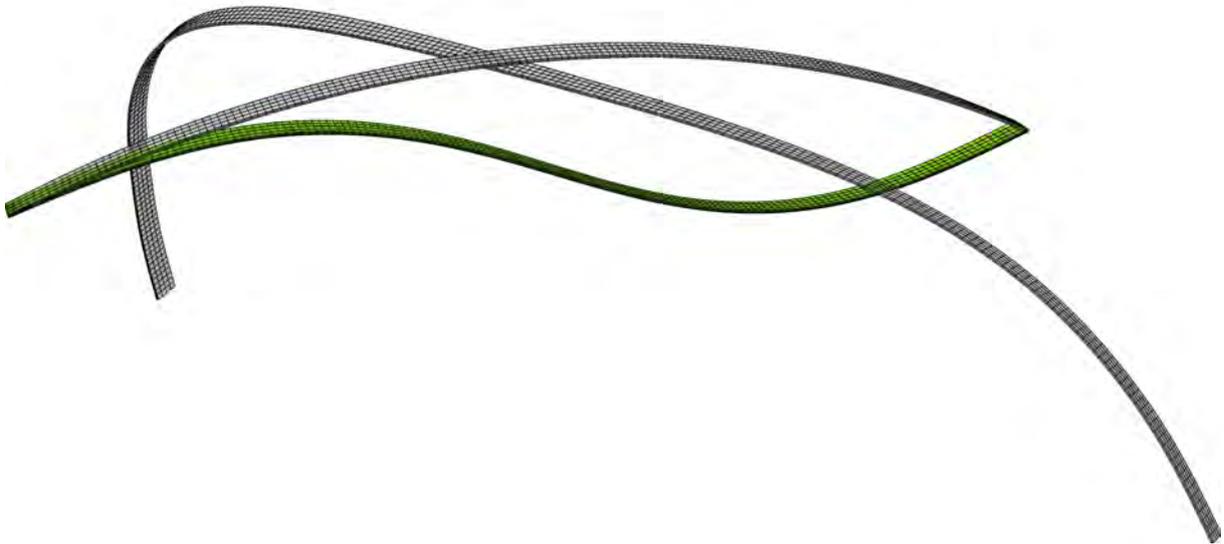


Abbildung 3.5: Durchschlagen des kurzen Stabes während des Entspannungsvorgangs ohne fixierte Anfangstangenten

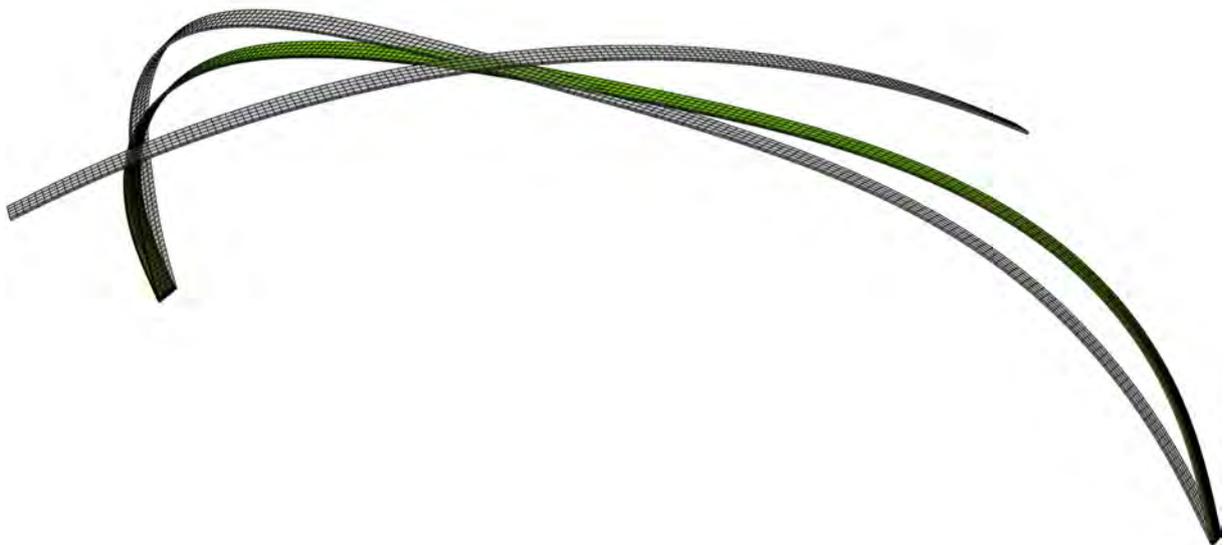


Abbildung 3.6: Verformung des langen Stabes während des Entspannungsvorgangs ohne fixierte Anfangstangenten

3.3 Entspannung in Kombination mit Kontakt

Um eine Struktur zu verwirklichen, die einen realitätsnahen Lastabtragungsmechanismus besitzt und deren aufgezwungene Form der entspannten Form weitgehend gleicht, ist die Interaktion der Stäbe erforderlich. Die Verbindungen müssen in der Lage sein Belastungen zu übertragen, darunter auch solche, die die Stäbe separieren würden.

Die FEM-Software Abaqus bietet zahlreiche Möglichkeiten, Kontakt und Interaktionseigenschaften zu formulieren. Für das bündige Aufliegen von Flächen besteht unter Anderem auch die Möglichkeit, Überlappungen spannungsfrei rückzubilden, oder Punkte bzw. Flächen miteinander trotz eines gewissen Abstands spannungsfrei zu verbinden (etwa durch den Befehl "tie"). Diese Operationen sind jedoch nur im ersten, initialen Schritt der Simulation möglich und können nicht zu einem späteren Zeitpunkt eingefügt werden. Abbildung 3.7 zeigt das Ergebnis von "tie" im initialen Schritt des Verformungsvorgangs. Da der Kontakt der Stäbe erst nach dem Verformungsvorgang zu Stande kommt, fallen einige Möglichkeiten der Verbindung weg. Abaqus stellt auch ein breites Spektrum an Kontakteigenschaften zur Verfügung. Für die Zwecke dieser Arbeit sind tangenciales und normales Kontaktverhalten interessant. Das tangenciales Kontaktverhalten lässt verschiedene Reibungsformulierungen mit einem oder mehreren Reibungskoeffizienten zu. Das normale Kontaktverhalten enthält eine Auswahl von Spannungs-Überlappungs-Verhältnissen wie "Hard" Contact, Exponential, Linear, Tabular etc. Die Einstellungsmöglichkeit von "Hard" Contact, eine Separation nach der Erstberührung zu untersagen, ist nützlich. Die restlichen Spannungs-Überlappungs-Verhältnisse erlauben die Festlegung eines "weichen" Kontakts. Sie erlauben gegenseitiges Eindringen, verbunden mit einem Anwachsen der Kontaktkräfte. Leider gibt es in der verwendeten Analyseverfahren Abaqus/Standard (im Gegensatz zu Abaqus/Explicit) keine Möglichkeit, die Separation nach dem Erstkontakt zu untersagen. Einige Parameter der Interaktionseigenschaften können während der Schritte geändert werden, wie beispielsweise der Reibungsbeiwert. Eine Änderung des Spannungs-Überlappungs-Verhältnisses ist jedoch nicht möglich. Die Kontaktformulierungen, die in dieser Arbeit verwendet werden, sind flächenbasiert, sie können jedoch auch Knoten-Flächen-basiert sein. Um den Kontakt der Stäbe umzusetzen, werden zwei Methoden untersucht:

1. Die Modellierung der Verbindung durch einen Bolzen, deren Verbundwirkung auf der Übertragung von Scherkräften beruht
2. Die Modellierung der Verbindung als Reibung-Normalkraft-Verbindung ohne zusätzliche Verbindungselemente

3.3.1 Bolzenverbindung

Für die Verbindung durch einen Bolzen wird in den Stäben ein Loch vorgesehen und ein zylindrischer Bolzen eingeführt. Die Verbindung der Stäbe kann entweder nur über den Bolzen stattfinden oder mit einer zusätzlichen Interaktion zwischen den Stäben kombiniert werden. Das tangenciales Kontaktverhalten ist durch einen Reibungskoeffizienten festgelegt, das normale Kontaktverhalten wird mit dem Spannungs-Überlappungs-Verhältnis "Hard" Contact und erlaubter Separation definiert. Die Bolzenverbindung erfolgt in mehreren Schritten:

1. Erzeugung der aufgezwungenen Lage der Stäbe
2. Einführen des Bolzens in die übereinander liegenden Stäbe
3. Einführen der Kontaktbeziehungen Lochwand A - Bolzenmantel und Lochwand B - Bolzenmantel, eventuell zusätzlich Stab A - Stab B



Abbildung 3.7: Ergebnis des Versuchs zwei weit entfernte Stäbe mit dem Befehl “tie” zu verbinden

4. Loslassen der gehaltenen Punkte des Bolzens
5. Loslassen der gehaltenen Punkte der Stäbe A und B

Angenommen wurde, dass ein Bolzen zur Verbindung von Stäben und im Speziellen für die Übertragung von separierenden Kräften ausreicht. Die Annahme beruhte auf dem Auftreten von Scherkräften durch kleine Verschiebungen im Entspannungsprozess der Stäbe. Diese Kräfte, in Kombination mit der Reibung zwischen dem Bolzenmantel und der Lochwand, sollten die Übertragung jeglich orientierter Kräfte ermöglichen. Diese Annahme bestätigte sich, wie in den folgenden Abschnitten gezeigt wird. Mit dem Reibungskoeffizienten zwischen dem Bolzenmantel und der Lochwand kann die Art der Verbindung und ihre Eigenschaft, Kräfte in Achsrichtung des Bolzens zu übertragen, eingestellt werden.

Um die Verbindung zu testen, wurde ein vereinfachtes Modell erstellt, das in den Abbildungen 3.8 bis 3.10 zu sehen ist. Dabei wird, um die Entspannung der Stäbe nach dem Loslassen der gehaltenen Punkte zu simulieren, eine minimale Verschiebung in Stabrichtung aufgebracht (zwischen Abbildung 3.8 rechts und und 3.9 links). Die Lage der aufgebrachten Verschiebung ist in Abbildung 3.10 zu sehen. Die in die positive z-Achse orientierte Kraft wurde zentral auf den oberen Stab aufgebracht, um den Verbund zu testen.

Anschließend wurde die Verbindung von zwei elastisch verformten Stäben mit einem Kreuzungspunkt in einem hyperbolischen Flächenpunkt untersucht. Wichtig für eine erfolgreiche Verbindung ist, dass die Löcher in den Stäben korrekt übereinander liegen. Abbildung 3.11 zeigt die räumliche Anordnung der Stäbe.

Abbildung 3.12 zeigt die Stäbe in der aufgezwungenen Lage, Abbildung 3.13 zeigt ein Detail des Lochbereichs. Abbildung 3.14 zeigt die aufgezwungene und die entspannte Lage der verbundenen Stäbe. Abbildung 3.15 zeigt die Reaktion des Stabverbundes auf Lasten. Beim linken Bild wird eine separierende Kraft auf die obere Seite des oberen Stabes aufgebracht. Das rechte Bild zeigt einen anderen Lastfall. Die Anfangstangenten der Stäbe wurden für diese Beispiele nicht fixiert, die Stäbe stabilisieren sich aufgrund ihrer Lage zueinander gegenseitig.

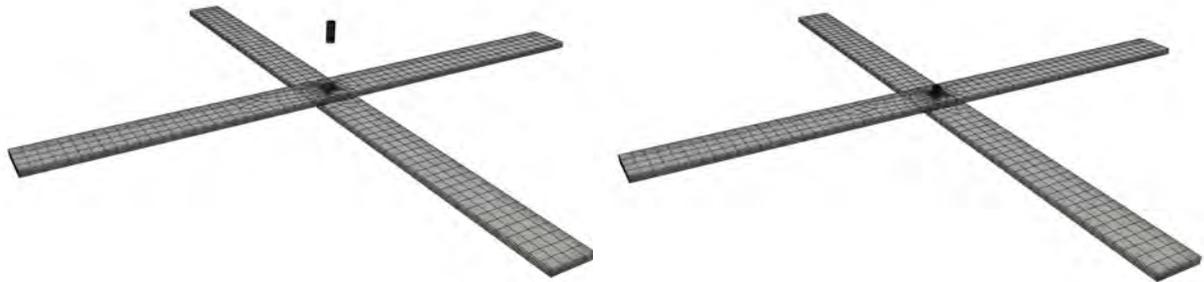


Abbildung 3.8: FE-Modellierung einer Bolzenverbindung

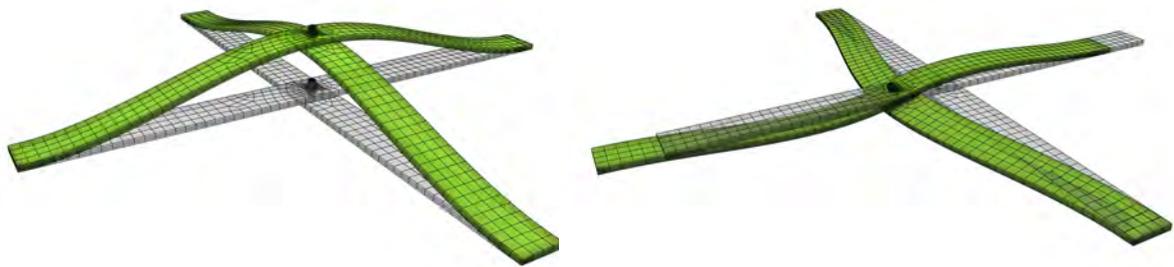


Abbildung 3.9: Übertragung der Kräfte durch eine Bolzenverbindung

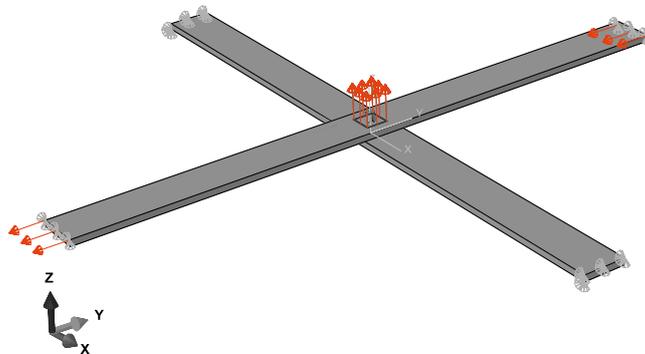


Abbildung 3.10: Aufgebrachte Kräfte für die oberen Verformungsbeispiele in Abaqus

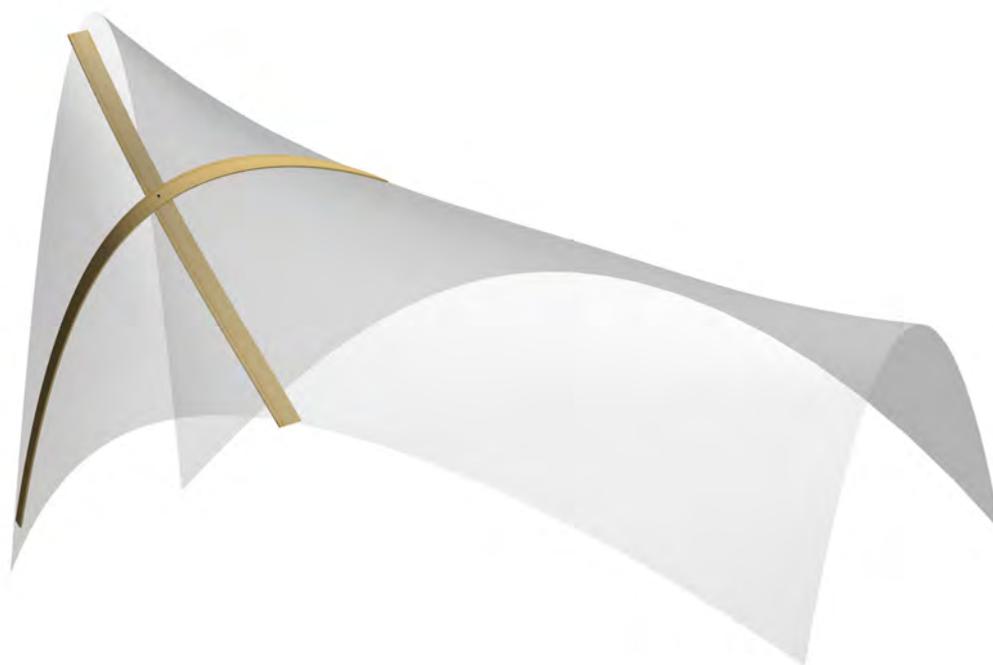


Abbildung 3.11: Räumliche Anordnung von zwei verformten Stäben auf einer Freiformfläche

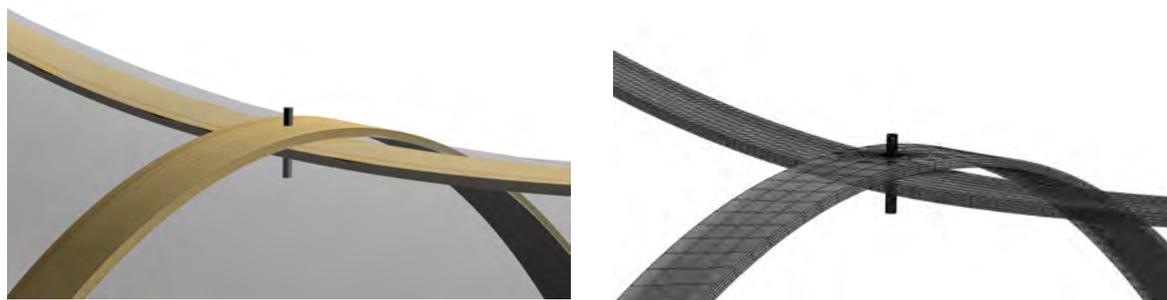


Abbildung 3.12: Links: Geometrische Erstellung der Verbindung; Rechts: Umsetzung in einem FEM-Modell

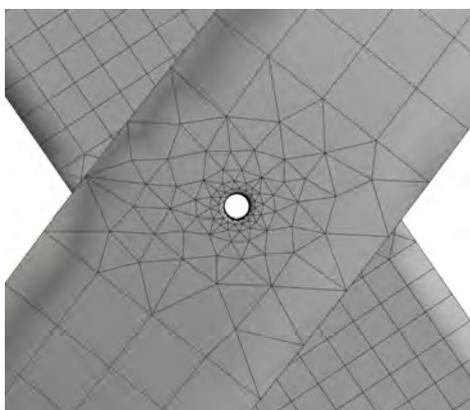


Abbildung 3.13: Blick auf die übereinander liegenden Stäbe vor Einführung des Bolzens

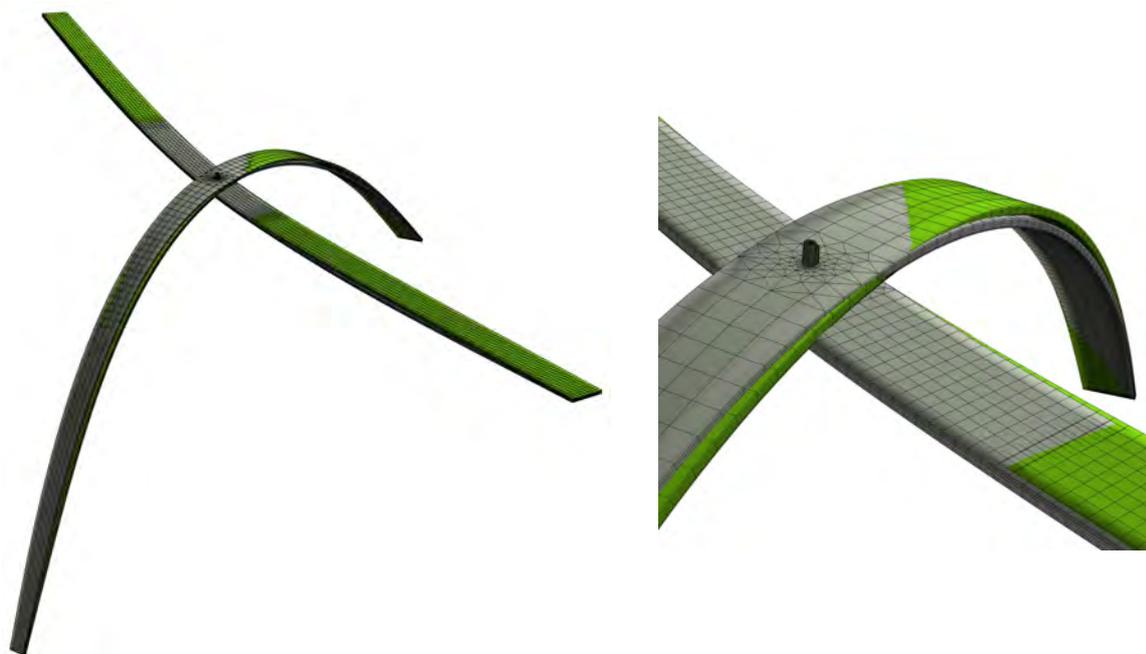


Abbildung 3.14: Entspannung der verbundenen Stäbe: aufgezwungene Lage (grau) und entspannte Lage (grün)

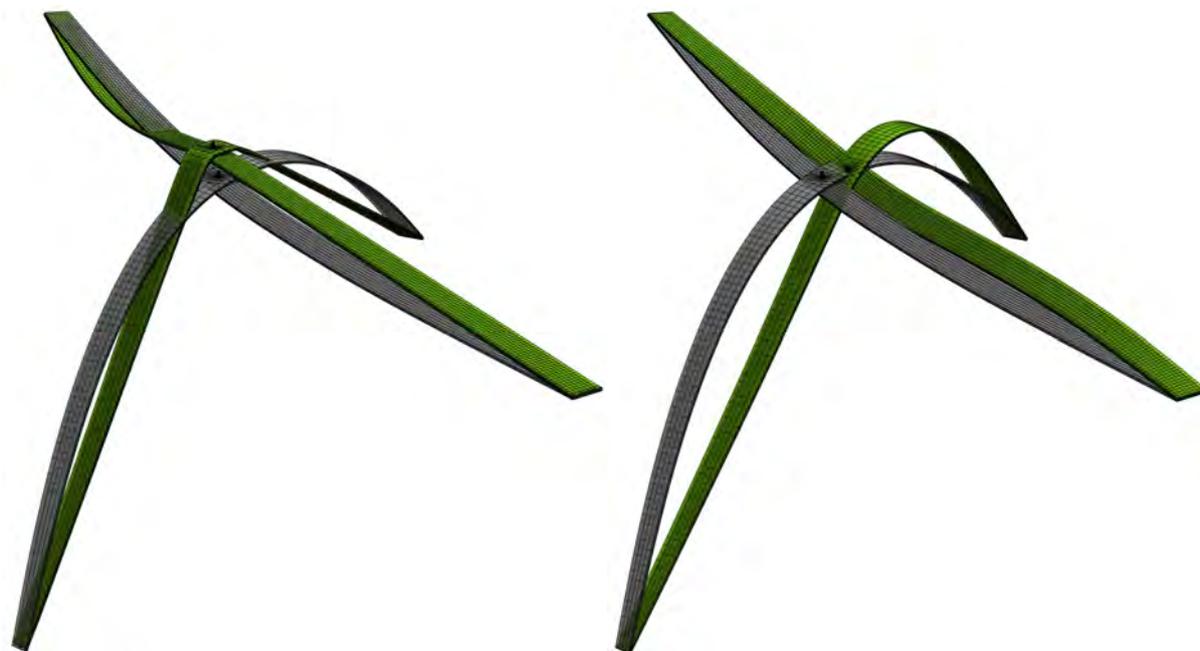


Abbildung 3.15: Probelastungen und entsprechende Verformungen der Stäbe (grün)

Die in beiden Versuchen eingesetzten Kontaktbeziehungen zwischen Lochwand A - Bolzenmantel und Lochwand B - Bolzenmantel sind identisch definiert. Bei dem Kontakt zwischen den Stäben und dem Bolzen wurde der Bolzenmantel wegen des feineren FE-Netzes als slave surface definiert. Das Kontaktverhalten setzt sich aus tangentialem und normalem Verhalten zusammen. Das tangential Verhalten verwendet die Standardeinstellungen mit einem generischen Reibungskoeffizienten von 0,1. Dadurch wird die Verbindung zwischen Bolzen und Stab (Metall - Holz) in ihrer Wirksamkeit unterbewertet. Das normale Verhalten verwendet die Einstellung "Hard" Contact, eine Separation nach dem Kontakt ist erlaubt.

3.3.2 Reibung-Normalkraft-Verbindung

Eine zufriedenstellende Verbindung setzt voraus, dass separierende Kräfte übertragen werden können. Die Übertragung von solchen Kräften kann in Abaqus mit dem Flächen- Normalverhalten der Kontakteigenschaften "Hard" Contact und verhinderter Separation nach dem Erstkontakt geschehen. Je nach Größe des Reibungskoeffizienten kann die Verbindung das Verhalten einer Klebeverbindung wiedergeben, es kann jedoch auch ein gewisser Spielraum für Abgleitungen vorgesehen werden. Die Schritte in der Herstellung der Verbindung sind:

1. Erzeugung der aufgezwungenen Lage der Stäbe
2. Einführen der Kontaktbeziehungen der Stäbe A und B
3. Loslassen der gehaltenen Punkte der Stäbe A und B

Bei der initialen Herstellung des Kontakts (Punkt 2) offenbart sich ein geometrisches Problem: Man stelle sich im Kreuzungspunkt aufeinander treffenden Stabachsen und ihre Tangentialstreifen vor. Mit wachsender Querschnittsbreite kommt es (in Abhängigkeit von der Art des Flächenpunktes und der Lage der Stäbe zueinander) zu größer werdenden Überschneidungen oder Abhebungen in den Randbereichen. Geometrisch ist ein vollflächiges Aufeinanderlegen der Staboberflächen daher nicht möglich. Um dieses Problem zu lösen, können die Stäbe mit einem minimalen Abstand voneinander hergestellt und anschließend aufeinander zubewegt werden, bis sie optimal in Kontakt treten. Die folgenden Modelle wurden auf diese Art erstellt. Man könnte die beiden Staboberflächen auch nur bis zu einem gewissen Grad aufeinanderdrücken und nicht verbundene Flächenbereiche akzeptieren. Das Ergebnis hängt stark mit der FE-Netzdichte der Stäbe zusammen. Die Reibung-Normalkraft-Verbindung wurde mit zwei Modellen untersucht, die nun vorgestellt werden.

Das erste Beispiel ist geometrisch identisch mit dem Beispiel aus dem vorherigen Kapitel, es wurde lediglich der Bolzen entfernt. Die Stäbe wurden so erzeugt, dass sie nach dem Verformungsvorgang einen minimalen Abstand aufweisen. Anschließend wurden die Interaktionsbeziehungen eingeführt und die beiden Stäbe um diesen Abstand aufeinander zubewegt. Abbildung 3.16 zeigt die verformte Lage (grau) und die entspannte Lage (grün). Um die Verbindung zu testen, wurde erneut eine separierende Kraft aufgebracht. In Abbildung 3.17 sind die resultierenden Verformungen (grün) zu sehen.

Das zweite Beispiel wurde in Kapitel 3.2 vorgestellt und hier um die Interaktion der Stäbe erweitert. In Abbildung 3.18 kann man erkennen, dass sich durch das Fixieren der Anfangstangenten und die Interaktion der Stäbe die entspannte Form (grün) schon sehr an die aufgezwungene Form annähert. Abbildung 3.19 zeigt einen Vergleich der entspannten Lagen mit Kontakt der Stäbe (grün) und ohne Kontakt (orange).

Abbildung 3.20 zeigt qualitativ den Abbau von lokalen Spitzen in den Hauptspannungen durch den Entspannungsprozess. In Abbildung 3.21 wird auch diese Verbindung durch eine separierende Kraft getestet.

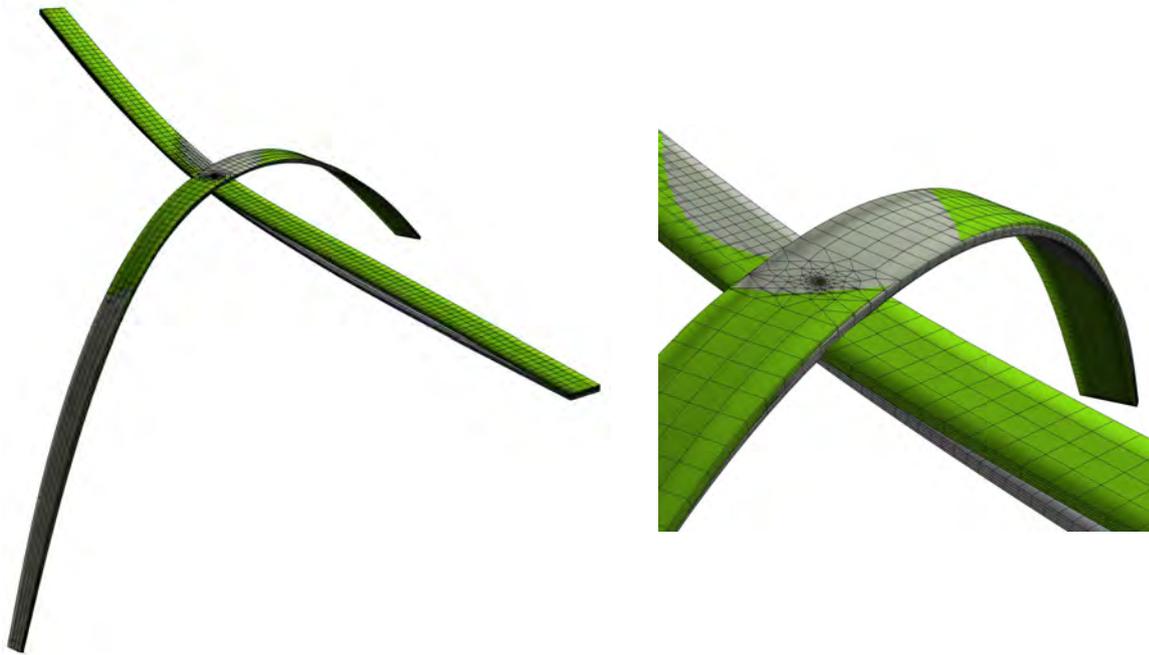


Abbildung 3.16: Entspannung der verbundenen Stäbe: aufgezwungene Lage (grau) und entspannte Lage (grün)

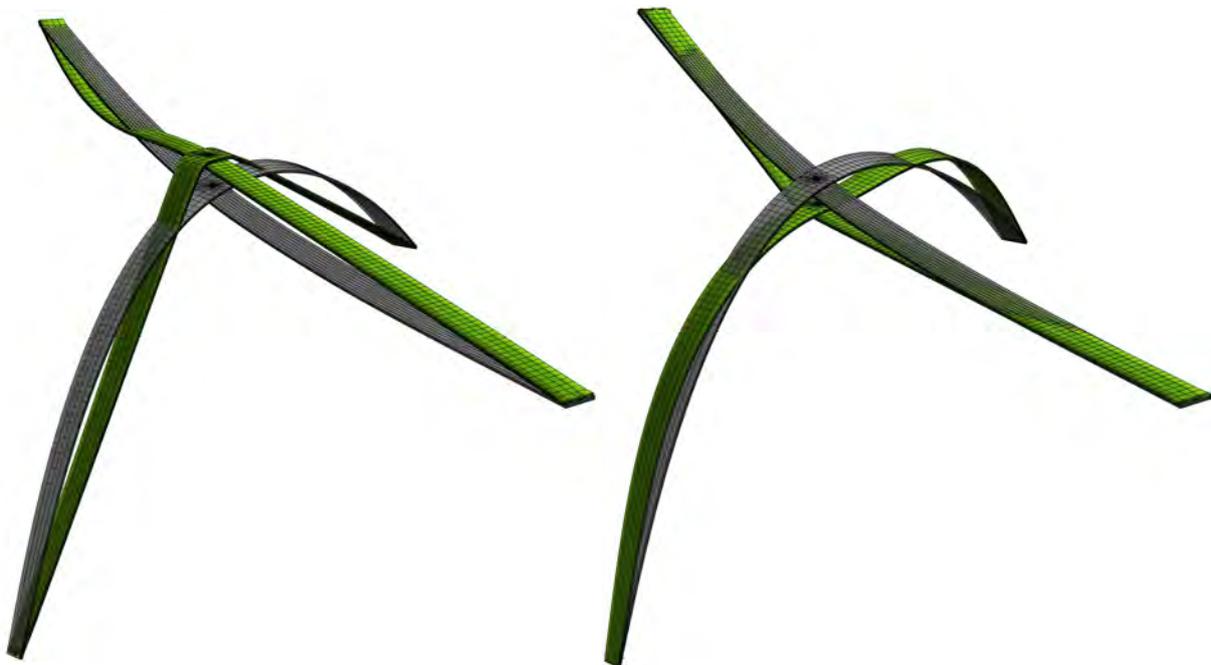


Abbildung 3.17: Probelastungen und entsprechende Verformungen der Stäbe (grün)

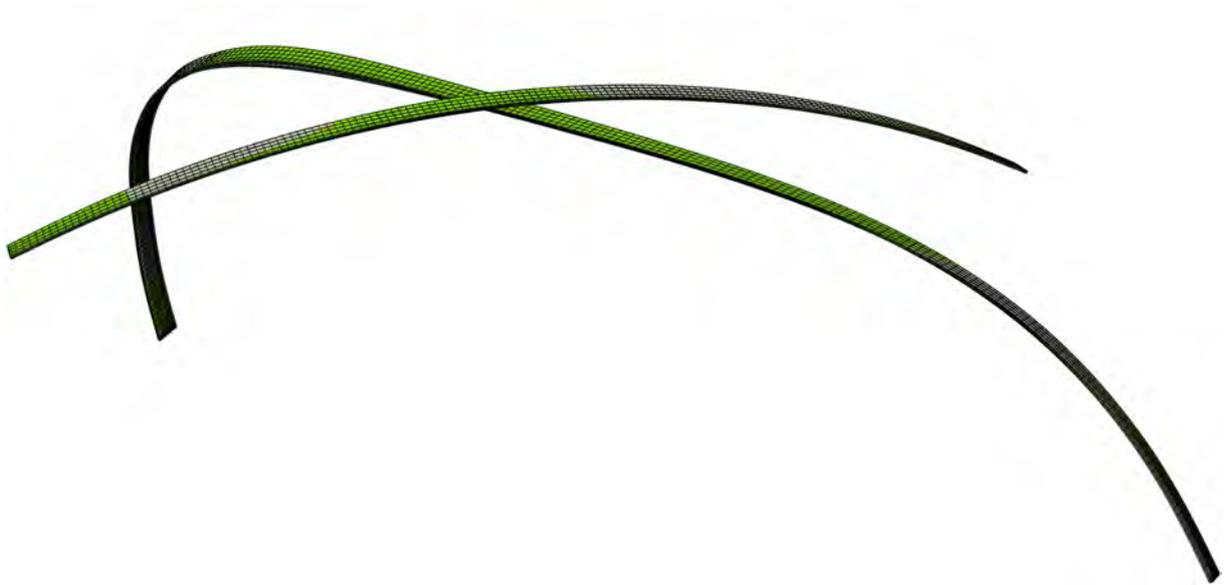


Abbildung 3.18: Entspannung der verbundenen Stäbe: aufgezwungene Lage (grau) und entspannte Lage (grün), mit fixierter Anfangstangente

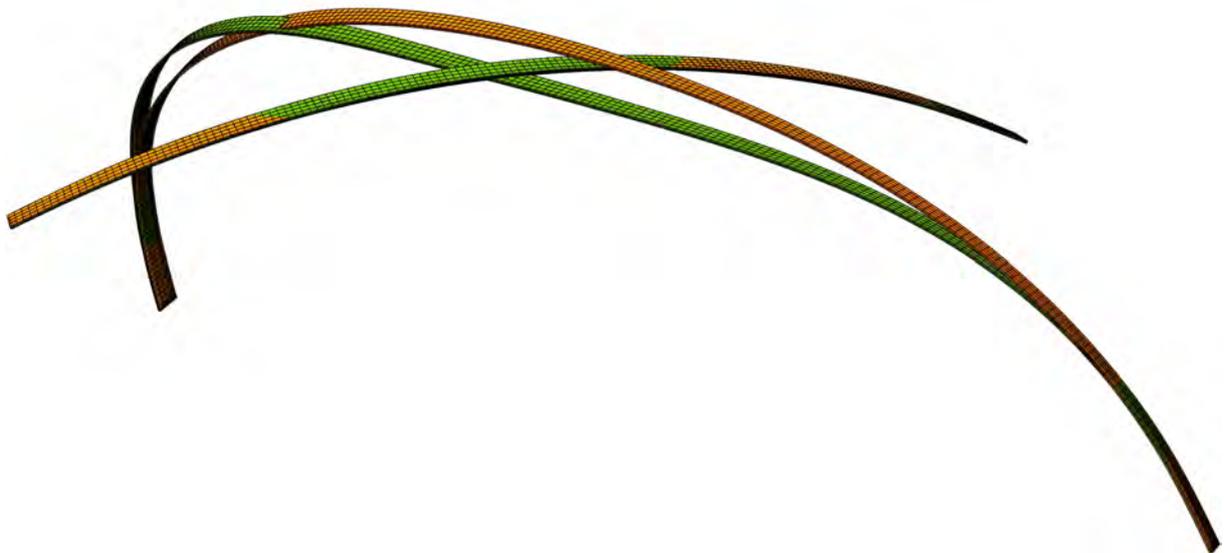


Abbildung 3.19: Vergleich der entspannten Lage mit Kontakt (grün) mit der entspannten Lage ohne Kontakt (orange), jeweils mit fixierter Anfangstangente

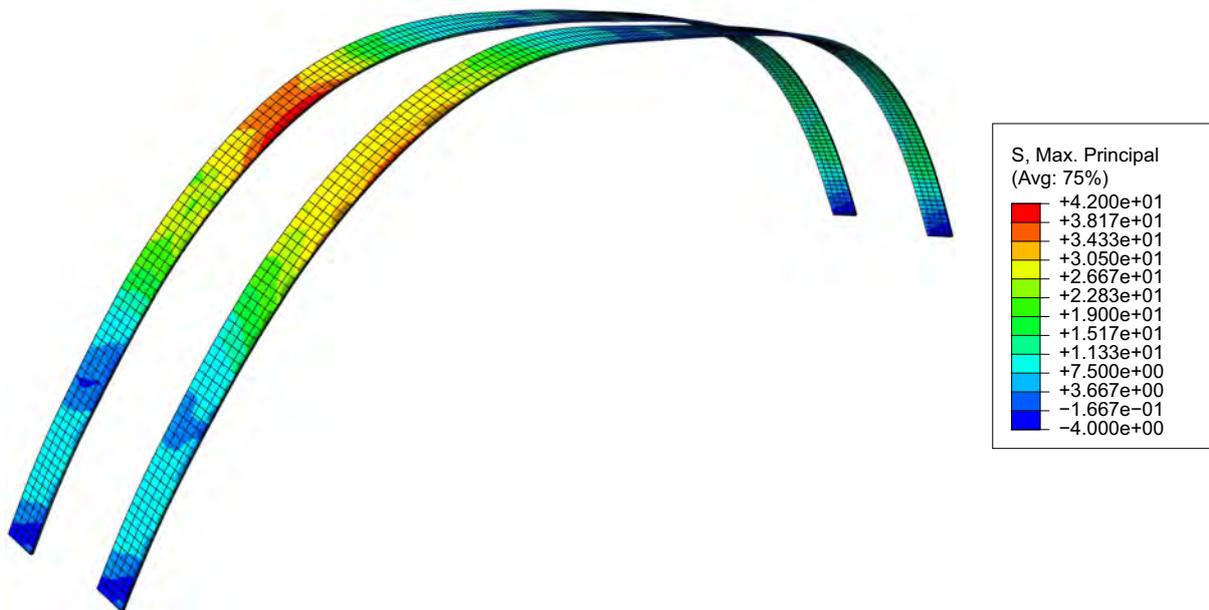


Abbildung 3.20: Vergleich der Hauptspannungen an der am stärksten belasteten Stelle vor und nach dem Entspannungsprozess mit Kontakt (kurzer Stab ausgeblendet), Skala in N/mm^2

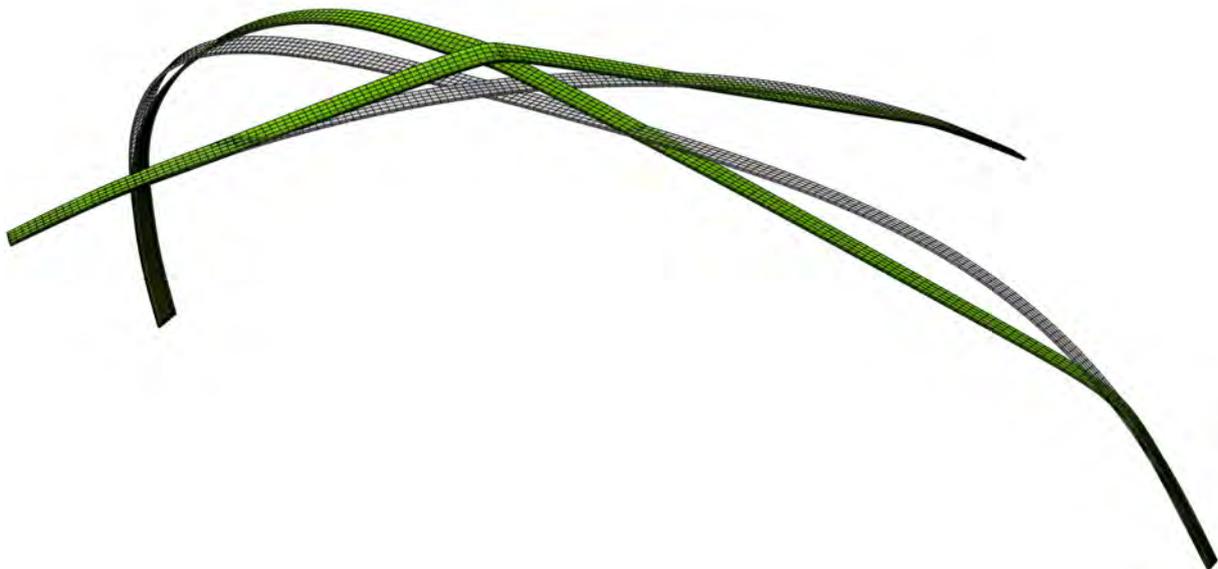


Abbildung 3.21: Probelastung und entsprechende Verformung (grün)

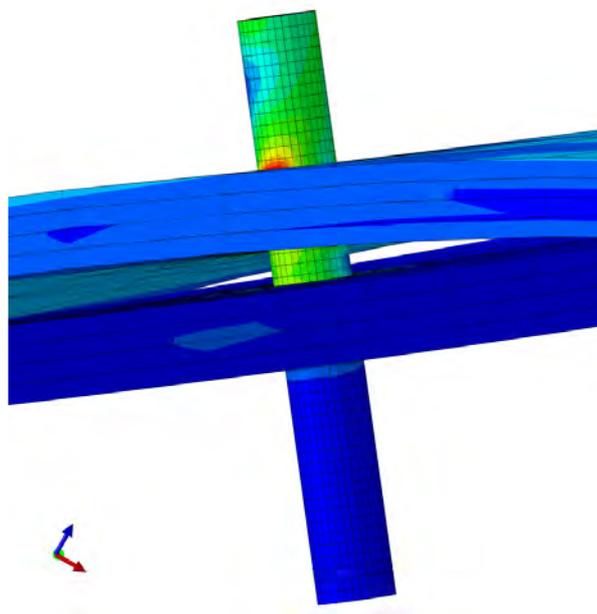


Abbildung 3.22: FE-Modell der Bolzenverbindung

3.3.3 Resümee

Bei der Verbindung der Stäbe durch Bolzen ist als Vorteil zu nennen, dass Abstände zwischen Stäben, problemlos überbrückt werden können (siehe Abbildung 3.22). Der direkte Kontakt der Stäbe ist nicht unbedingt erforderlich. Der Nachteil ist, dass die geometrische Erzeugung der Struktur aufwendiger ist. Neben der Einführung neuer Elemente müssen die vorgesehenen Löcher in den Stäben genau aufeinanderliegen. Arbeitet man mit Offsetflächen, so geht man vom Lochzentrum auf einer der Flächen aus. Die Flächennormale im Lochzentrum legt die Lochzentren auf den anderen Flächen fest. Sie definiert auch die Bahn, entlang der der Bolzen in die übereinanderliegenden Stäbe gesteckt wird. Für die Verbindung von zwei Stäben müssen mit dieser Methode mindestens drei Flächen definiert werden, die miteinander interagieren: der Bolzenmantel und die beiden Innenflächen der Löcher. Zusätzlich können die zusammengehörigen Staboberflächen auch noch mit Kontaktbeziehungen versehen werden.

Für die Umsetzung der Reibung-Normalkraft-Verbindung spricht, dass kein zusätzlicher Aufwand in der geometrischen Erzeugung nötig ist. Extraschritte in der Simulation ermöglichen einen ausreichenden Kontakt zwischen den Stäben. Für die Verbindung von zwei Stäben müssen lediglich zwei Flächen definiert werden. Weiters kann die entstehende Struktur einen gewissen Spielraum erhalten, wenn man Stäbe ein gewisses Stück aneinander abgleiten lässt. Das könnte vorteilhaft sein, um Spitzenspannungen weiter abzubauen. Mit steigender Stabbreite wird die Herstellung eines für diese Methode notwendigen initialen Kontakts aufwändig. Die damit einhergehenden Zwangsverformungen werden größer.

Die Beurteilung, welche Verbindungsmethode angemessen ist, hängt von der Anzahl der eingesetzten Offsetflächen ab. Bei vielen Flächen können Stäbe mit einer Reibung-Normalkraft-Verbindung auf nicht benachbarten Flächen nur schwer verbunden werden. Hier ist der Einsatz einer Bolzenverbindung, trotz höherem geometrischen Aufwand, sicher zielführender.

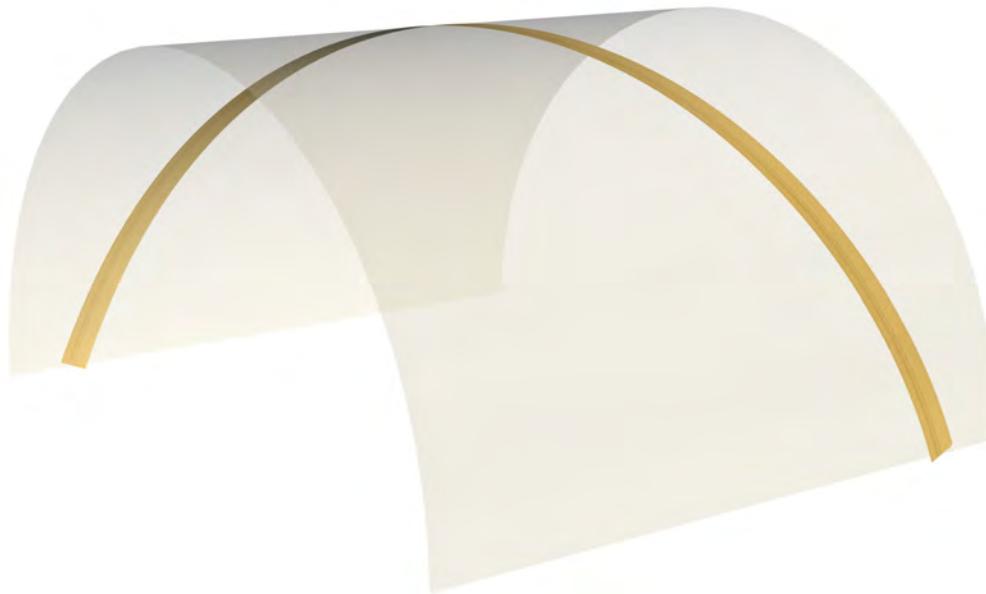


Abbildung 3.23: Binormalenstreifen einer Schraublinie auf einer Drehzylinderfläche

3.4 Stabssteifigkeit und Verformung

Wie in Kapitel 2.1.3 erläutert, ist fraglich, ob die geringen Stabdicken für die Errichtung einer tragfähigen Struktur ausreichen. In struktureller Hinsicht, kann die Steifigkeit durch die Anzahl der Stäbe gesteuert werden. Für die Erhöhung der Steifigkeit in der Tragwerksebene der Struktur (Steifigkeit gegenüber tangentialen Verformungen, “in-plane-stiffness”) kann die Erhöhung der Querschnittsbreite der Stäbe Vorteile bringen. Die Steifigkeit normal zur Tragwerksebene (Steifigkeit gegenüber normalen Verformungen, “out-of-plane-stiffness”) kann durch das Aufeinanderschichten von mehreren Lamellen, die gemeinsam einen Stab ergeben, erhöht werden.

Noch nicht diskutiert wurde der Einfluss der Spannungen, die durch die Verformung auftreten. Dass diese “Vorspannung” der einzelnen Stäbe einen positiven Effekt haben kann, wird anhand eines Beispiels gezeigt.

Abbildung 3.23 zeigt die Mittelfläche (den Binormalen-Streifen) eines Stabes. Die Stabachse ist eine Schraublinie auf einer Drehzylinderfläche. Ausgehend von dieser Mittelfläche wurden drei unterschiedliche Stäbe in Abaqus erzeugt:

- Stab 1: in der verformten Lage importiert, demnach spannungsfrei
- Stab 2: elastisch verformt
- Stab 3: elastisch verformt, mehrlagig

Im Hochpunkt der Stäbe wurde anschließend eine Kraft aufgebracht, um die Verformungen zu vergleichen.

Um Stab 1 spannungsfrei in Abaqus zu erzeugen, wurde dessen Mittelfläche importiert und anschließend mit einer virtuellen Querschnittshöhe versehen, die in den folgenden Abbildungen nicht zu sehen ist. Dieser Schritt war erforderlich, da der Import von sehr dünnen, gekrümmten Volumenelementen keine qualitativ ausreichenden Resultate lieferte.



Abbildung 3.24: Entspannte Lage der Stäbe, Ansicht von vorne; Stab 3 in hellgrau, Stab 2 in dunkelgrau, Stab 1 als grüne Linie (Querschnittshöhe nur virtuelle vorhanden)

Stab 2 besitzt die gleiche Querschnittshöhe wie Stab 1, wurde jedoch elastisch verformt und befindet sich in der entspannten Lage.

Stab 3 besteht aus drei Stäben, die aufeinanderliegen und miteinander interagieren. Sie besitzen jeweils die Querschnittshöhe von Stab 1 und 2. Die Interaktion besteht aus einem tangentialen Kontaktverhalten mit einem Reibungskoeffizienten von $\mu=0.4$ und einem normalen Verhalten mit dem Spannungs-Überlappungs-Verhältnis Linear mit $k=30$. Der gewählte weiche Kontakt ermöglichte ein einfaches Ableiten der einzelnen Stäbe und begünstigte eine stabile Simulation.

Es ist anzumerken, dass Stäbe, deren Achsen einer Schraublinie folgen, nahezu identische aufgezogene und entspannte Lagen besitzen. In Abbildung 3.24 ist dies gut zu erkennen: gezeigt werden die Hochpunkte von drei hintereinander liegenden Stäben in einer Ansicht von vorne. Dadurch ist ein Vergleich zwischen Stab 1 (der die aufgezogene Form besitzt) und den Stäben 2 und 3, die sich in der entspannten Form befinden, möglich. Das Eigengewicht der Stäbe wurde vernachlässigt.

Die Abbildungen 3.25 und 3.26 zeigen die Verformung der Stäbe durch das Aufbringen einer generischen Last im Hochpunkt. Diese Kraft ist für die Stäbe 1 und 2 gleich, auf Stab 3 wurde die dreifache Kraft aufgebracht. Es fällt auf, dass der elastisch verformte Stab 2 geringere Verformungen als Stab 1 aufweist. Betrachtet man das Spannungsniveau, wird ersichtlich, dass sich im Stab 1 Spannungen im Punkt der Belastung und den Auflagern konzentrieren, während im Stab 2 die Spannungen in den Kantenbereichen am höchsten sind. Stab 3 weist trotz gleichem Volumen/Kraft-Verhältnis die geringste Durchbiegung auf. Aufgrund der Interaktion der Teile des zusammengesetzten Stabes, zwischen denen Reibungskräfte auftreten, kann ein Teil des Steiner-Anteils der Biegesteifigkeit mobilisiert werden, was die Gesamtsteifigkeit des Stabes wesentlich erhöht.

Die Abbildungen zeigen, dass die “Vorspannung” der elastisch verformten Stäbe, die von einer aufgebrachten Kraft verursachte Durchbiegung deutlich reduziert. Die in Abschnitt 2.1.3 vorgeschlagene Methode, Stäbe aufeinander zu schichten, stellt sich auch in der Simulation als sinnvolle Methode heraus.

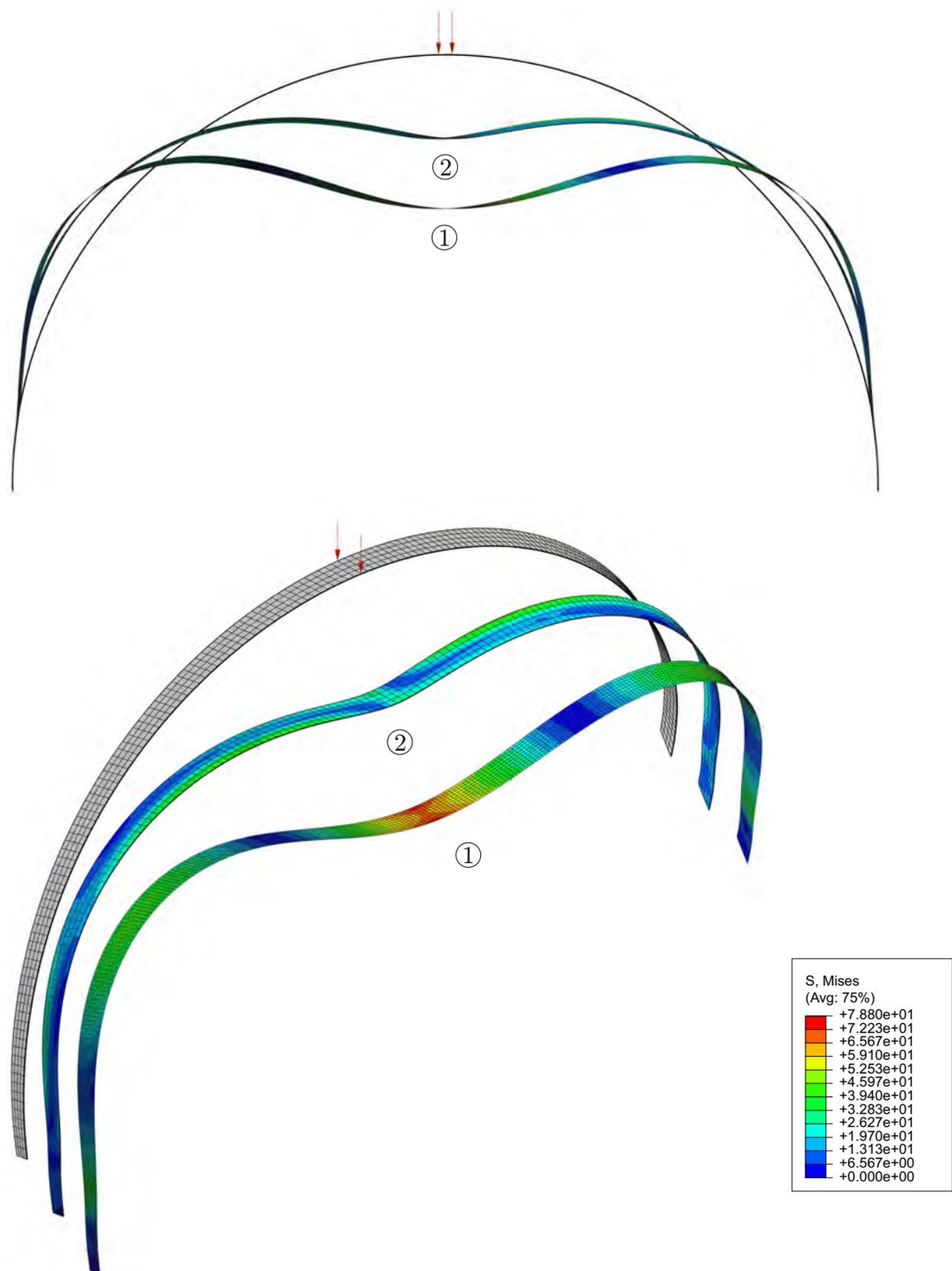


Abbildung 3.25: Vergleich der Verformung der Stäbe 1 und 2 durch einen Lastfall; Vergleichsspannungen in N/mm^2

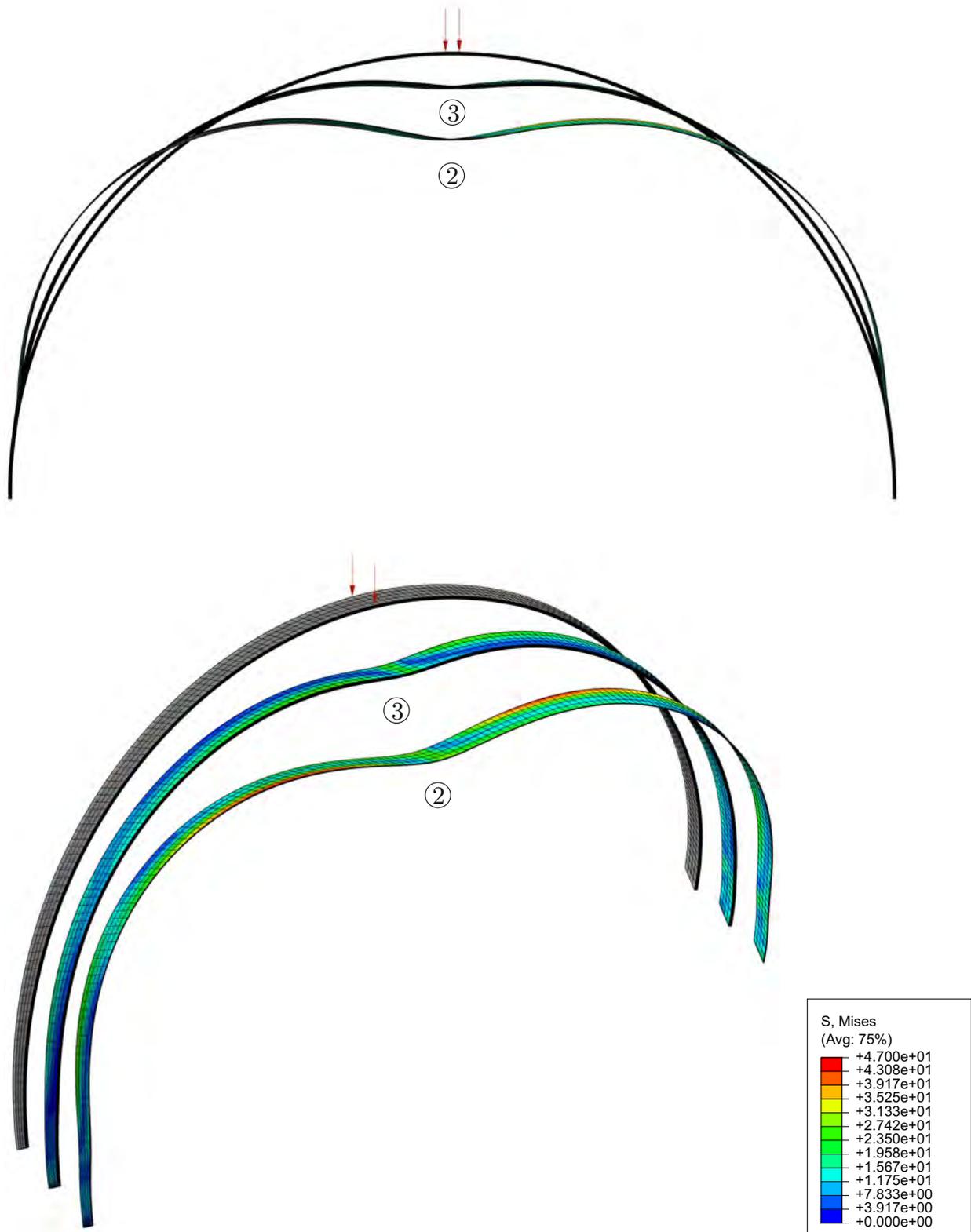


Abbildung 3.26: Vergleich der Verformung der Stäbe 2 und 3 durch einen Lastfall; Vergleichsspannungen in N/mm² (andere Skala als Abbildung 3.25)

4 Prototyp

In diesem Kapitel wird eine Struktur beschrieben, die aus elf Stäben besteht. Sie wurde nach dem beschriebenen Gestaltungsprozess erstellt. In diesem Kapitel werden nur wesentliche Schritte oder Ergebnisse des Gestaltungsprozesses vorgestellt. Die geometrisch erzeugte Struktur ist in Abbildung 4.1 zu sehen. Die Auflager der Struktur befinden sich an den sechs freien Enden.

Die Anordnung der Stäbe erfolgte nach dem ästhetischen Empfinden des Autors. Eine nüchterne Suche nach den geodätischen Linien, die die größten Querschnittshöhen zulassen, wurde bewusst vermieden. Eine Stärke des entwickelten Gestaltungsprozesses liegt darin, schöpferischen Freiraum für Planer zu erhalten. Diesem Leitmotiv folgend wurden die ästhetischen Qualitäten nicht der technisch sinnvollsten Variante untergeordnet. Folglich darf es nicht verwundern, dass die Querschnittshöhen der Stäbe im Vergleich zu den Abmessungen der gesamten Struktur aus technischer Sicht äußerst gering sind. Die in Kapitel 2.1.3 und 3.4 vorgestellte Methode, Stapel aus dünnen Stäben zu einem Stab zusammenzufassen, ist ein vielversprechender Lösungsansatz, um solche geringe Stabsteifigkeiten zu kompensieren. Die Stäbe der Struktur besitzen jedoch keine mehrlagigen Querschnitte, der Proof of Concept stand bei der Erstellung im Vordergrund.

Durch das Zusammenwirken von vielen Stäben ergaben sich Effekte, die in den bisherigen kleineren Beispielen nicht auftraten. Vor allem der Schritt der Entspannung war für die FEM-Software wesentlich rechenintensiver. Die minimale Größe der Inkremente musste herabgesetzt werden, gleichzeitig wurde eine deutlich höhere Anzahl an Inkrementen pro Schritt benötigt. Die Formulierung des Kontakts spielte wegen der größeren Anzahl von Stäben eine noch wichtigere Rolle, wie in Kapitel 4.2 erläutert wird.

Das Endresultat ist ein FEM-Modell der Struktur, in dem die Verformung, der Kontakt und die Entspannung kollektiv stattfinden. Die Schritte im Gestaltungsprozess sind darauf ausgelegt, eine hohe Übereinstimmung der geometrisch erzeugten und der physikalisch korrekten Form zu erreichen. Das Endresultat erfüllt diese Forderung in einigen Bereichen gut, in anderen weniger gut. Eine Diskussion sowie eine Quantifizierung der Abweichungen erfolgt in Kapitel 4.2.

4.1 Freiformfläche, Stablayout und Stabquerschnitte

Um die Stabquerschnitte mit den Abmessungen der Struktur in Beziehung zu setzen, wird die bereits bekannte Freiformfläche genauer vorgestellt. Sie wurde als Loft-Fläche mit drei Parabeln erzeugt (siehe Abbildungen 4.2 und 4.3). Wie in Abbildung 4.3 zu erkennen ist, besitzt die Fläche auch Bereiche mit hyperbolischen Flächenpunkten. Der hintere Bereich der Fläche besitzt höhere Krümmungen als der vordere Bereich. Im hinteren Bereich der Fläche diktieren die höheren Krümmungen geringere maximale Querschnittshöhen als im vorderen Bereich.

Die Struktur besteht aus insgesamt elf Stäben, die auf vier Offsetflächen angeordnet sind. Abbildung 4.4 zeigt die Stäbe auf den zugehörigen Flächen. Bei der Erzeugung des Stablayouts wurde die Anzahl der Kreuzungspunkte maximiert. Gleichzeitig wurde die Anzahl der Flächen minimiert. Um die Machbarkeit zu gewährleisten, wurde die Querschnittshöhe aller Stäbe auf die kleinste auftretende Querschnittshöhe herabgesetzt. Die Stäbe 4, 5, 7, 8 und 10, die den hinteren Bereich der Freiformfläche durchfahren, besitzen mit etwa 7 mm die geringste Querschnittshöhe. Da die Stäbe auch als gespannte Federn gesehen werden können, ist es zweckmäßig, alle Stäbe mit der gleichen Querschnittshöhe auszustatten.

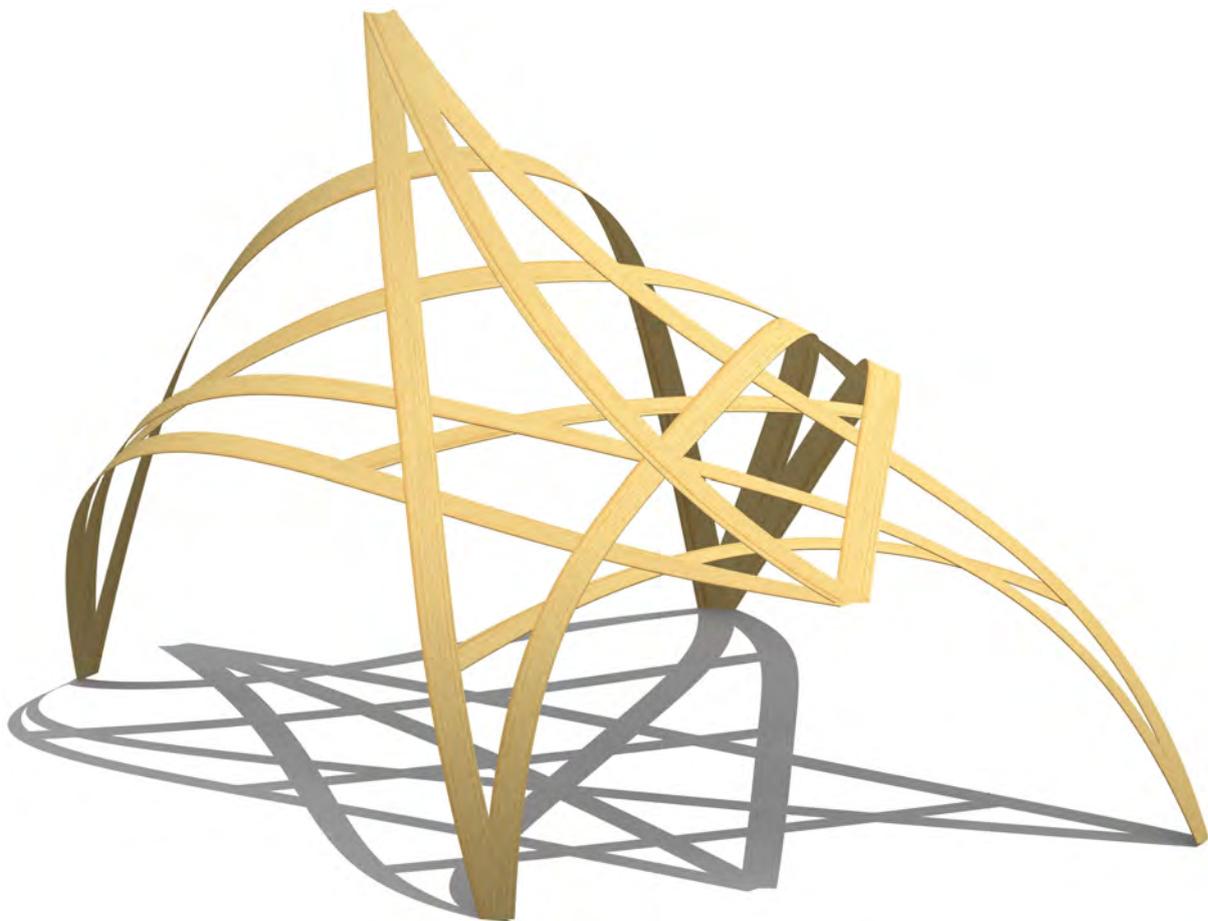


Abbildung 4.1: Geometrisch erzeugte Struktur

Tabelle 4.1 gibt eine Übersicht über die möglichen und verwendeten Querschnittsabmessungen, die Breite der Stäbe wurde generisch festgelegt.

Die Struktur besitzt sechs Auflager. Sie befinden sich an den freien Enden der Stabstruktur. Die Auflager bestehen aus jeweils zwei gehaltenen Punktreihen pro Stab, die nahe aneinander liegen. Somit sind die Anfangstangenten der Stäbe fixiert. Der Abstand dieser Punktreihen wurde mit 3% der jeweiligen Stablänge festgelegt. Die Stäbe 0, 1 und 2 besitzen kein eigenes Auflager, sie sind lediglich an den Stäben der Struktur fixiert und verbinden die restlichen Stäbe miteinander.

Nach der initialen Erzeugung des Stablayouts wurde eine Optimierung der Querschnittshöhen der Stäbe versucht. Dabei wurden die oberen zwei Auflager (verbunden durch Stab 3) fixiert und die unteren vier Auflager in mehreren Versuchen verschoben. Dabei wurde die Auswirkung auf die Stabquerschnitte beobachtet. Der Bereich, in dem die Auflager verschoben wurden, ist in Abbildung 4.3 rechts dunkelgrau hervorgehoben. Die Optimierungsaufgabe wurde mit dem in Grasshopper eingebetteten evolutionären Solver Galapagos durchgeführt. Dabei wurde in den erlaubten Bereichen eine gewisse Menge von Punkten als neue Auflagerlagen durchgespielt. Die Subroutine zur Vorevaluierung der Querschnitte lieferte in diesem Prozess die Querschnittshöhe der Stäbe jeder Lage. Mit diesem Prozess konnten jedoch nur unbedeutende Verbesserungen im einstelligen Prozentbereich erzielt werden. Diese wurden letztendlich nicht umgesetzt. Ist die Lage der Stäbe nicht so starr definiert, kann mit solchen simplen Optimierungsprozessen vermutlich eine Verbesserung der maximal möglichen Querschnittshöhen erzielt werden.

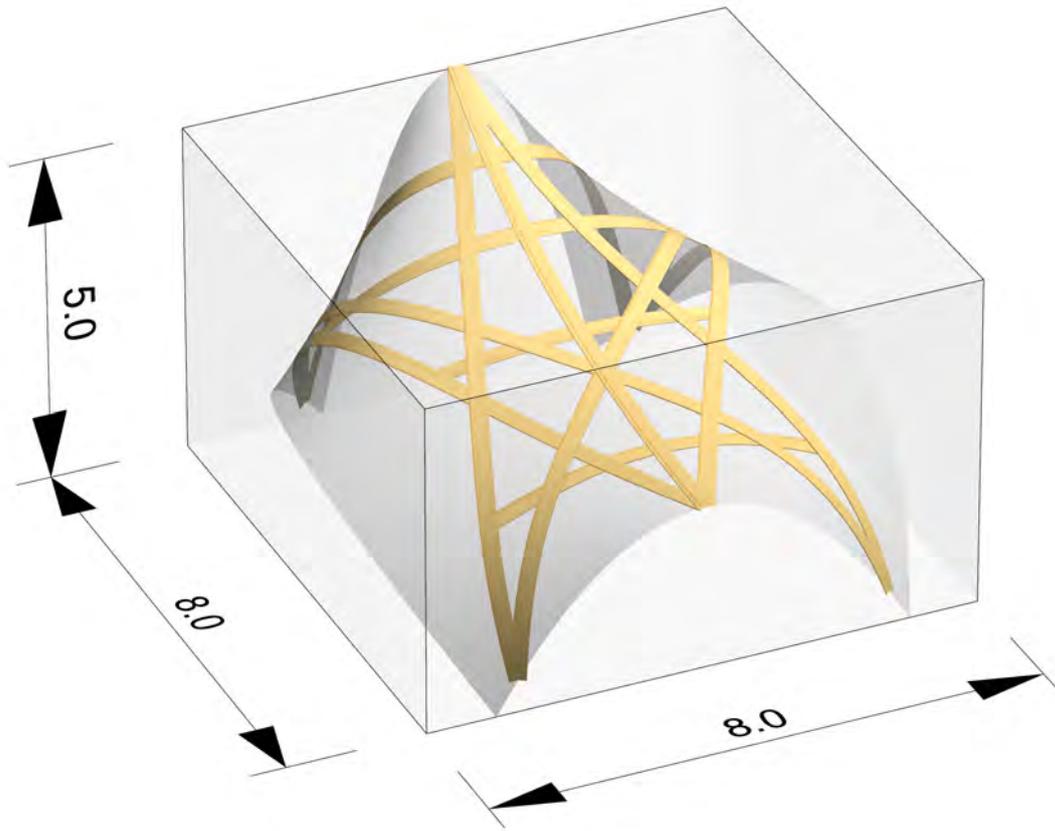


Abbildung 4.2: Freiformfläche und Struktur, Maße in Meter

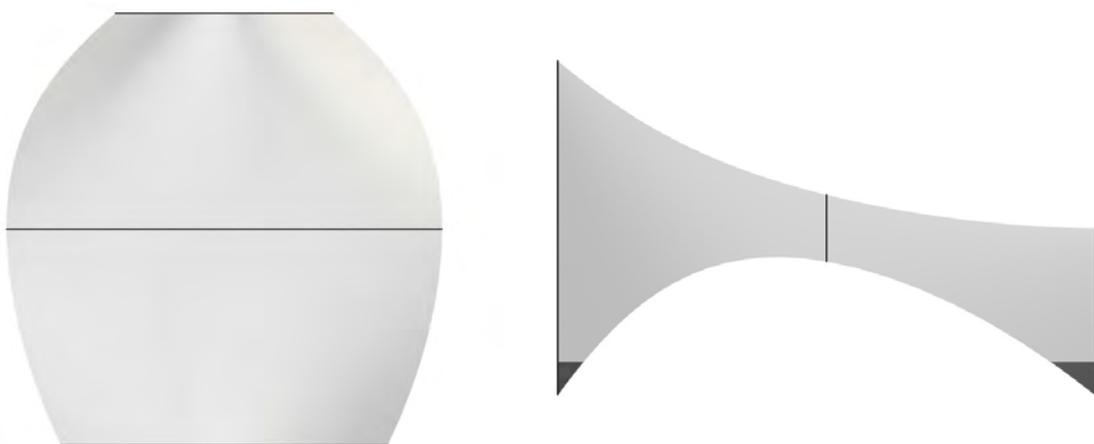


Abbildung 4.3: Grundriss und Kreuzriss der Freiformfläche

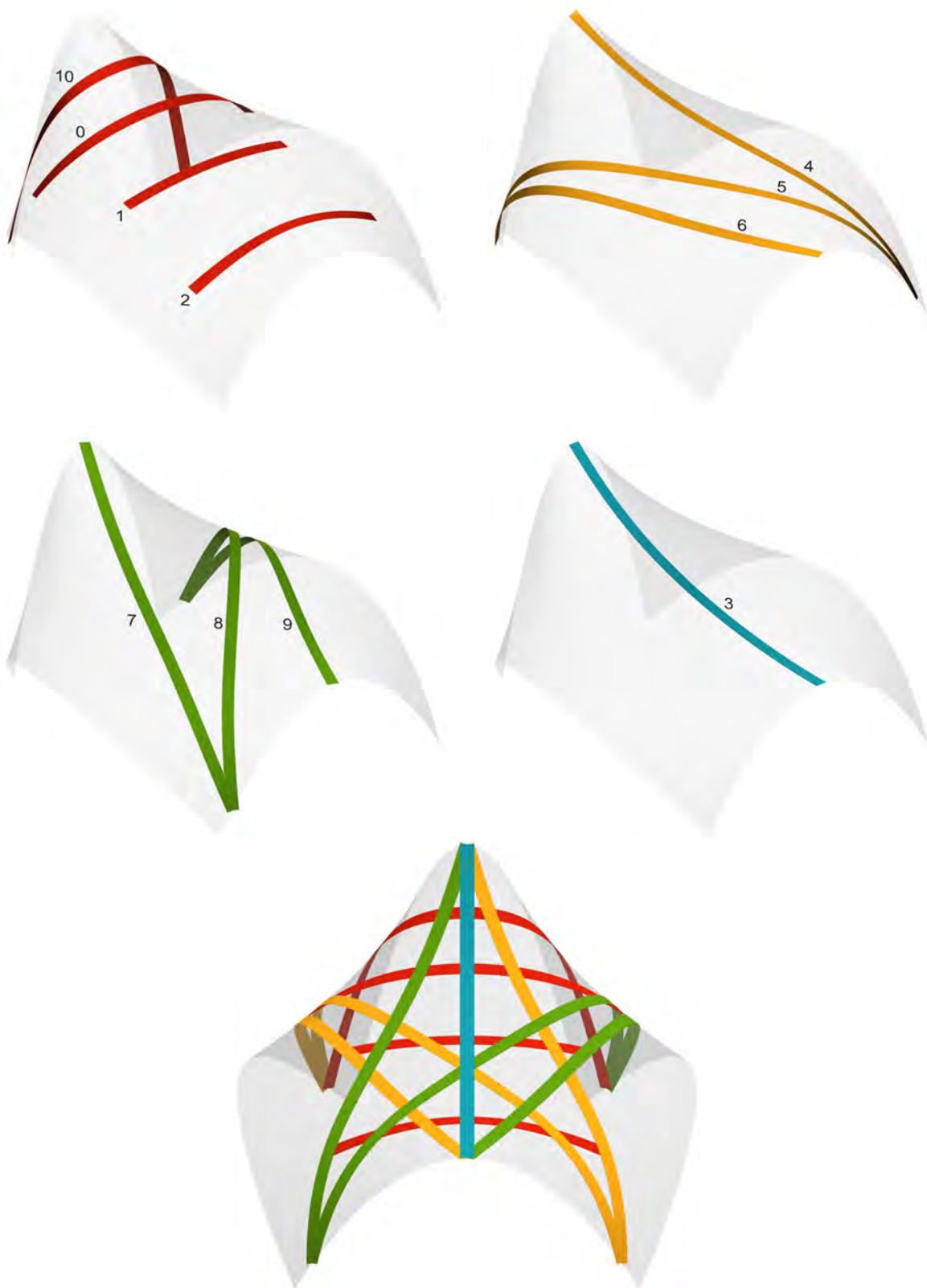


Abbildung 4.4: Stablayout: Offsetflächen und Stäbe, einzeln und übereinander

Tabelle 4.1: Querschnittsabmessungen der Stäbe (Maße in mm)

	gewählte Breite	gewählte Höhe	max. Höhe bez. Biegung	max. Höhe bez. Torsion	Anzahl Kreuzungen
Stab 0	240	7	15,6	10,4	7
Stab 1	240	7	36,0	144,9	7
Stab 2	240	7	18,2	23,1	7
Stab 3	240	7	36,7	>1000	7
Stab 4	240	7	19,0	7,0	8
Stab 5	240	7	6,8	34,7	8
Stab 6	240	7	7,6	14,9	7
Stab 7	240	7	19,0	7,0	8
Stab 8	240	7	6,8	34,7	8
Stab 9	240	7	7,6	14,9	7
Stab 10	240	7	6,7	6,8	5

4.2 Simulation und Diskussion der Ergebnisse

Die Herstellung des FEM-Modells sowie der aufgezwungenen Lage erfolgte wie in den vorigen Abschnitten beschrieben. Die Lage der Schnitte und daher die Lage der Punkte, an denen der Verschiebungsweg aufgebracht wird, wurde auf die Lage der Kreuzungspunkte abgestimmt. Für sämtliche Schritte der Simulation wurde der Einfluss des Eigengewichts vernachlässigt. Die vier Stablagen (vgl. Abbildung 4.4) wurden nacheinander verformt.

Der Kontakt der Stäbe wurde mit einer Normalkraft-Reibungsverbindung umgesetzt. Das Kontaktverhalten setzt sich aus tangentialem und normalem Verhalten zusammen. Das tangential Verhalten verwendet die Standardeinstellungen mit einem geringen Reibungskoeffizienten von 0,1. Dieser wurde durch Trial and Error bestimmt. Das normale Verhalten verwendet die Einstellung "Hard" Contact mit verhinderter Separation nach dem Erstkontakt. Das Abgleiten der Stäbe in den Kreuzungspunkten wurde begrenzt. Um die Stäbe bündig miteinander zu verbinden, wurden die Stablagen nach dem Verformungsvorgang in einigen Extraschritten aneinander gepresst. Dabei wurden auch Verbindungen zwischen Stäben aus nicht angrenzenden Stablagen hergestellt.

Nach der Verformung und der Interaktion der Stäbe erfolgte das Lösen der überflüssigen gehaltenen Punkte und damit die Entspannung der Struktur. Dieser Schritt barg einige Herausforderungen, die in den kleineren Beispielen mit wenigen Stäben nicht auftraten. Hauptsächlich waren dies Stabilitätsprobleme und das Versagen der Stabverbindungen. Bezugnehmend auf die Funktionsweise von Abaqus werden diese Herausforderungen in den nächsten Absätzen erläutert.

Während des Auffindens der simulierten physikalisch korrekten Lage im Entspannungsprozess ändern die Stäbe ihren Verformungszustand. Wie in Abbildung 3.20 zu sehen ist, kann diese Veränderung ein Abbau von starken lokalen Krümmungen sein bzw. eine Verteilung auf einen größeren Bereich. Durch die Veränderung des Verformungszustandes der Stäbe in Kombination mit dem Kontakt traten folgende Probleme auf:

1. Das Zusammenwirken der Stäbe löste lokal Druckspannungen aus, die zum Ausknicken von Stabbereichen führten.
2. Die Stabverbindungen lösten sich trotz untersagter Separation.

Hinter diesen Problemen steht die konkrete Verbindungsmethode der Stäbe.

ad (1) Um das lokale Entstehen von Druckspannungen in einem Stab zu verhindern, ist es sinnvoll, einen gewissen Toleranzbereich für Ableitungen der Stäbe in den Verbindungspunkten festzulegen.

ad (2) Die Separation der verbundenen Stäbe kann mehrere Ursachen besitzen:

- Mit dem Formulieren von flächenbasiertem Kontakt in Abaqus geht die Definition einer master-surface und einer slave-surface einher. Die master-surface und die slave-surface können einander penetrieren, dabei können die FE-Netzknoten der master-surface in die slave-surface eindringen, aber nicht umgekehrt. Um diese knotenbasierte Definition auf Flächen zu erweitern, werden in dem gewählten surface-to-surface-Kontakt die Knoten der slave-surface auf Bereiche erweitert. Das dient nicht zuletzt dazu, dass sich die Spannungen nicht bei den Knoten der slave-surface konzentrieren.

Da die Flächen bündig aufeinander liegen und aufeinander “kleben” sollen, müssen möglichst alle Knoten der slave-surface die Oberfläche der master-surface berühren. Um das zu erreichen, müssen in den Knotenpunkten lokal Zwangsverformungen eingeleitet werden. Nach dem Vorgang, die Flächen aneinander zu pressen, sind sie durch die verbotene Separation von “Hard” Contact miteinander verbunden.

Der Schritt des Aneinanderpressens kann mit den Punkten in den Schnitten der beteiligten Stäbe am Verbindungspunkt geschehen. Jeder dieser Schnitte steht normal auf die Stabachse und besteht aus fünf Punkten. Da sich Stäbe in einem Kreuzungspunkt in einem gewissen Winkel treffen, liegen die zugehörigen Schnitte nie direkt übereinander. Ein exaktes Aufeinanderpressen ist daher nicht möglich.

- Ist es den Oberflächen der Stäbe erlaubt, aneinander abzugleiten, können sich verbundene Bereiche wieder lösen, da sie beispielsweise über den Stabrand des verbundenen Stabs gleiten. Weiters muss man beachten, dass die beiden Stäbe gewölbte Oberflächen besitzen, die nicht parallel zueinander sind.

Die Formulierung des Kontakts und das lokale Stabilitätsversagen sind daher verknüpft. Mögliche Lösungsansätze für die aufgetretenen Probleme widersprechen einander. Das Ergebnis des Spannungsvorgangs ist in Abbildung 4.5 zu sehen. Es fallen einige Abweichungen zur gewünschten Form auf:

- Die Symmetrie der ursprünglichen geometrischen Struktur ist nicht mehr gegeben.
- Der rechte hintere Bereich wirkt eingedrückt. Hier ist der Stabverbund lokal durchgeschlagen.
- Stab 0 induziert in den seitlichen Stäben 6 und 9 starke lokale Verformungen. Die Steifigkeit der beteiligten Stäbe ist offensichtlich nicht optimal abgestimmt.
- Stab 10 ist nur mit Stab 4 verbunden. Beide Stäbe werden in ihrem Verbindungspunkt stark verzerrt.
- Die seitlichen Bereiche von Stab 10 stehen offensichtlich kurz vor dem Ausknicken.
- Alle Stäbe weisen eine gewisse Wellenform auf.

Betrachtet man den vorderen Bereich der Struktur, sind die Abweichungen zwischen der aufgezungenen und der entspannten Lage gering. Die Abweichungen bestehen lediglich in der leichten Wellenform der Stäbe.

Der hintere Bereich der Struktur weist größere Abweichungen auf. Dafür sind vor allem der durchgeschlagene Bereich und die langen, ungehaltenen Abschnitte von Stab 10 verantwortlich. Die deutliche Asymmetrie des entspannten Zustands beruht wahrscheinlich auf der leichten Asymmetrie der aufgezungenen Lage. Zum einen sind die Schnitte der Stäbe (wie etwa bei Stab 10) nicht symmetrisch verteilt, zum anderen hat sicher auch die Lage der Stäbe auf unterschiedlichen Offsetflächen einen Einfluss. Zusammenfassend kann für den hinteren Bereich gesagt werden, dass das Stablayout zu hohe Abweichungen von der gewünschten Form erzeugt hat. Die Gründe könnten eine zu geringe Anzahl von Stäben, zu lange freie Stablängen und die hohen Krümmungen in diesem Bereich sein.

Generell liegt die Vermutung nahe, dass die zugelassenen Abgleitungen an den Verbindungspunkten nicht ausreichend hoch waren. Mit einigen Parameterstudien wurde allerdings herausgefunden, dass zu hohe Abgleitungen (Hälfte- bzw. Viertel der Stabbreite) zum Abbruch der Simulation führen.

Zusammenfassend kann man feststellen, dass weitere Anstrengungen nötig sind, um Stabilitätsversagen im Entspannungsprozess effektiv zu unterbinden. Die Lösung dieses Problems ist jedenfalls eng mit der Formulierung der Verbindung der Stäbe verbunden.

Um die aufgetretenen Abweichungen zu quantifizieren, wurde das FE-Netz in Grasshopper analysiert. Die Abbildungen 4.9 und 4.10 zeigen die Abweichung der Knotenpunkte des FE-Netzes vom gewünschten Zustand. Dieser wird durch eine Fläche repräsentiert, die genau in der Mitte der Offsetflächen liegt (zwischen Lage 2 und 3). Wie man Abbildung 4.9 entnehmen kann, gibt es bereits bei der aufgezungenen Lage Bereiche, die ein leichtes Beulverhalten andeuten. Ein Zusammenhang mit den Bereichen, die in der entspannten Lage ausbeulen, ist beim Vergleich der Abbildungen 4.9 und 4.10 jedoch nicht erkennbar.

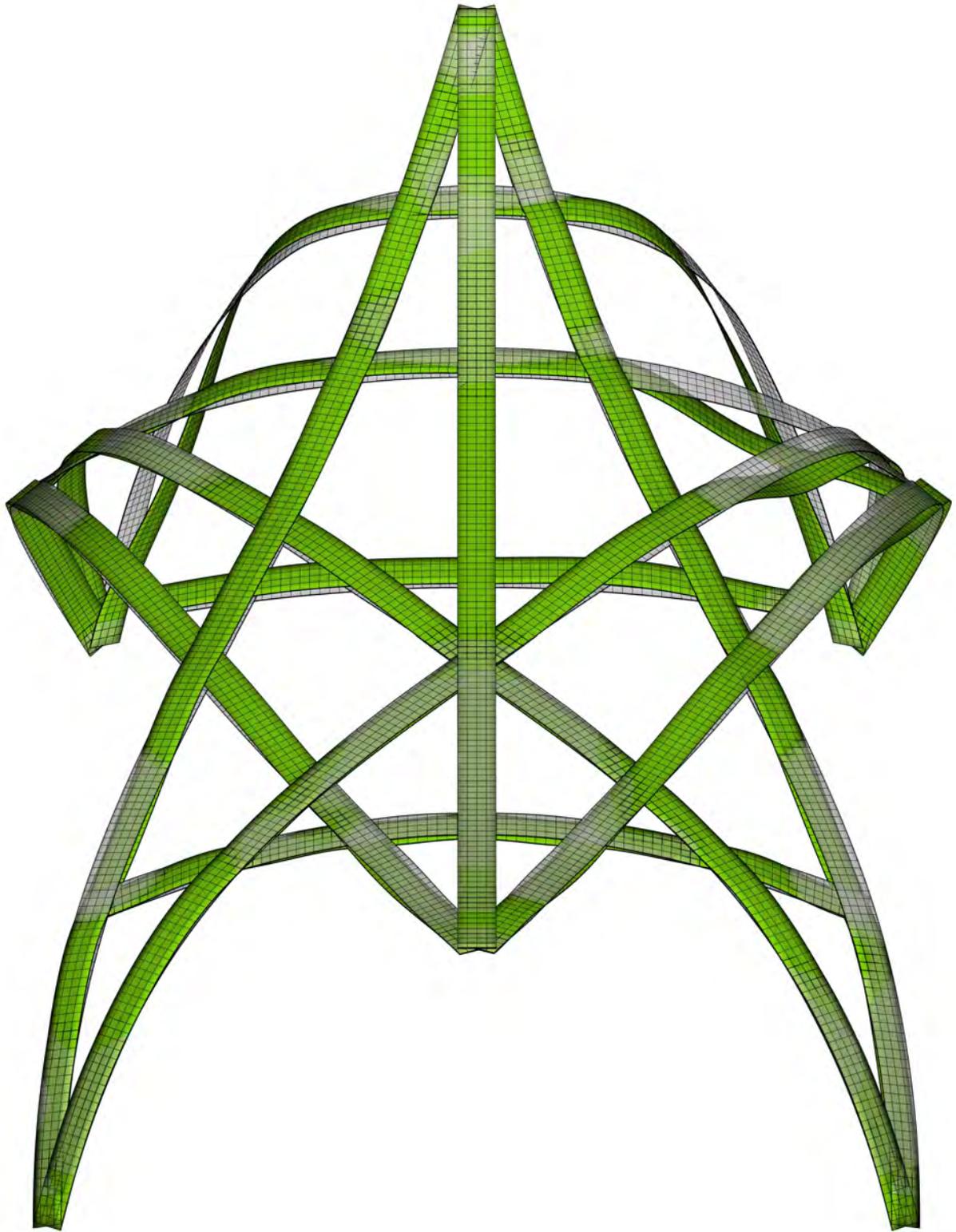


Abbildung 4.5: Entspannung der Struktur: aufgezwungene Lage (grau) und entspannte Lage (grün)

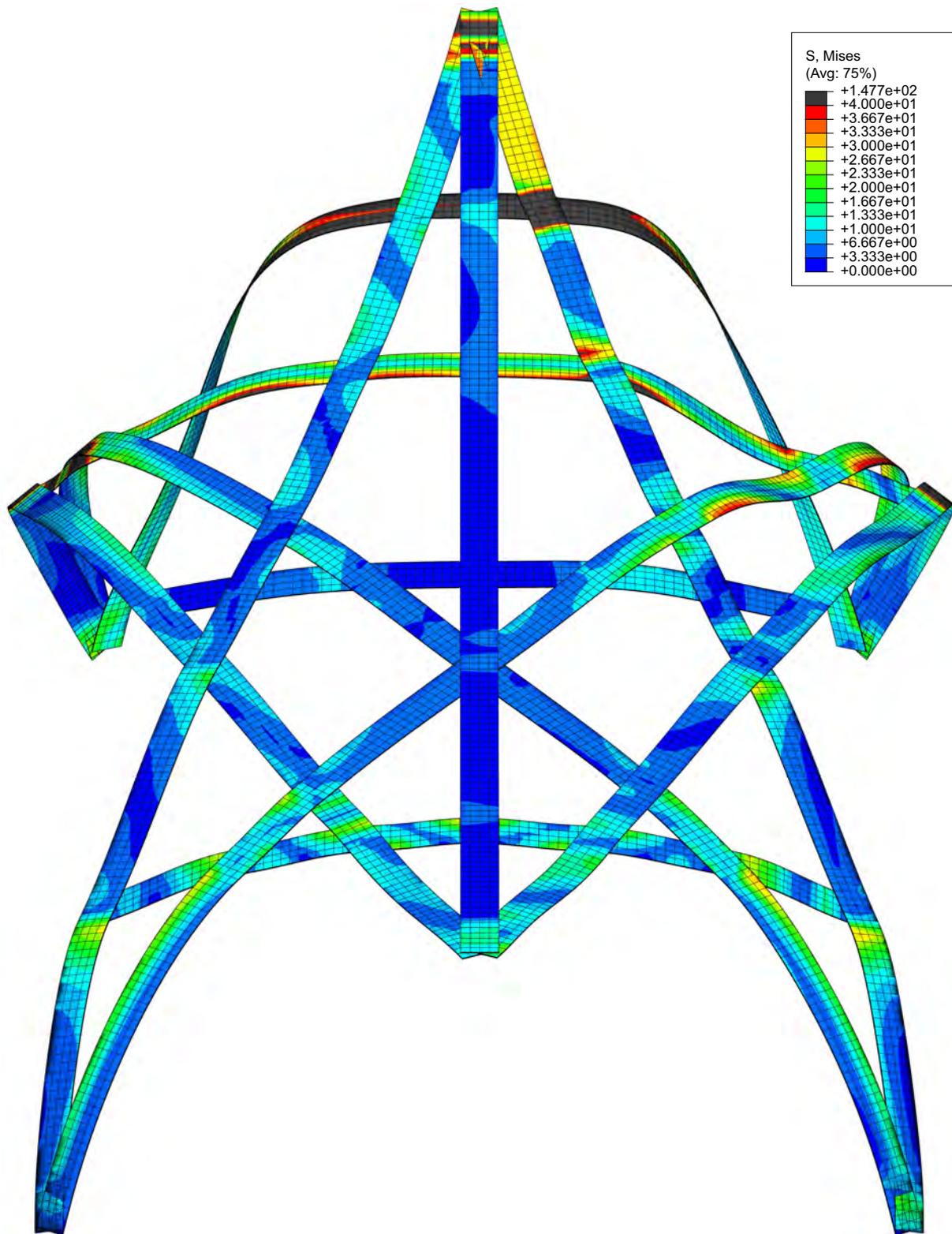


Abbildung 4.6: Entspannte Lage mit Spannungszustand, Vergleichsspannung in N/mm²

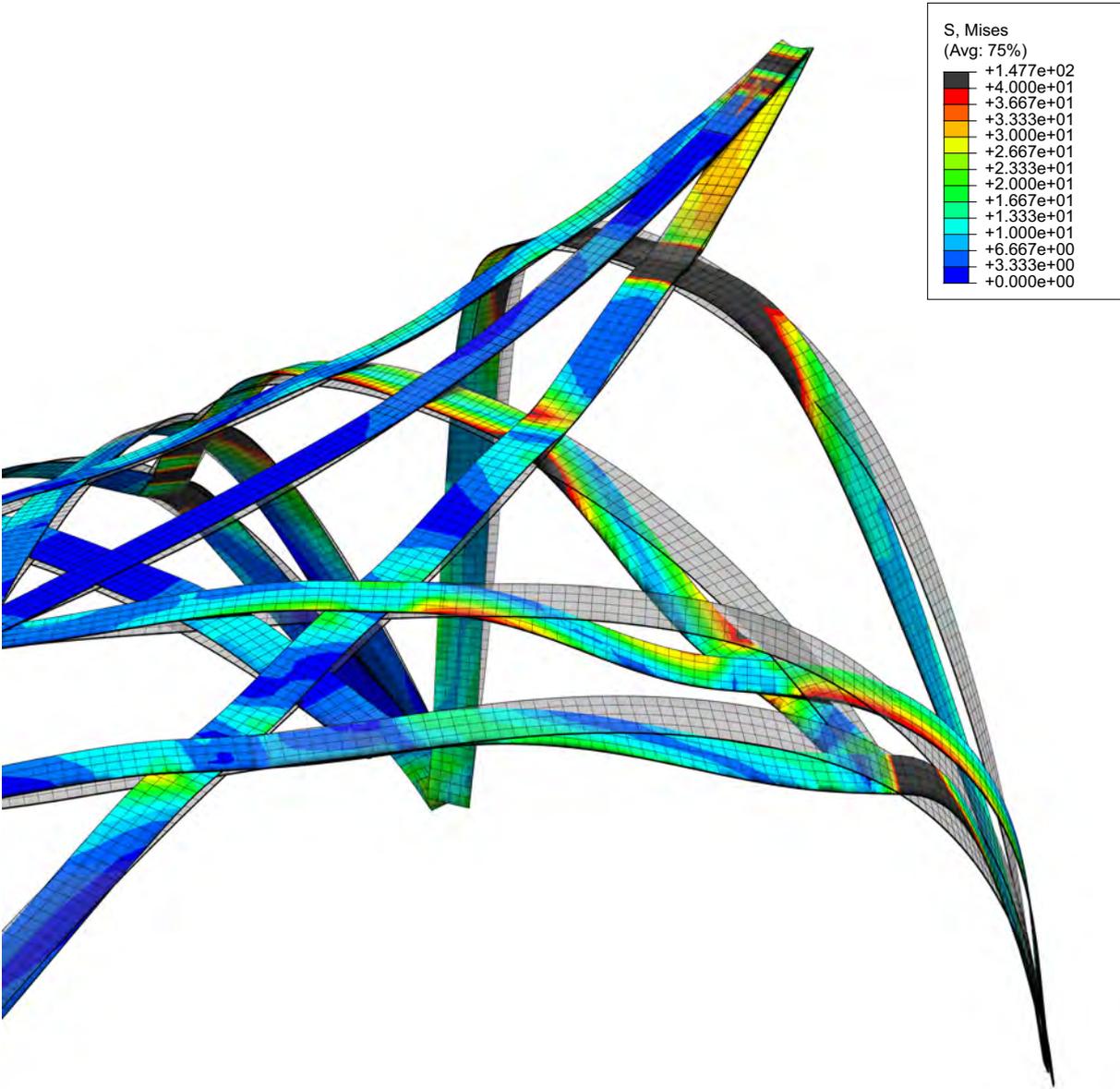


Abbildung 4.7: Problembereich der entspannten Lage mit Spannungszustand, Vergleichsspannung in N/mm²

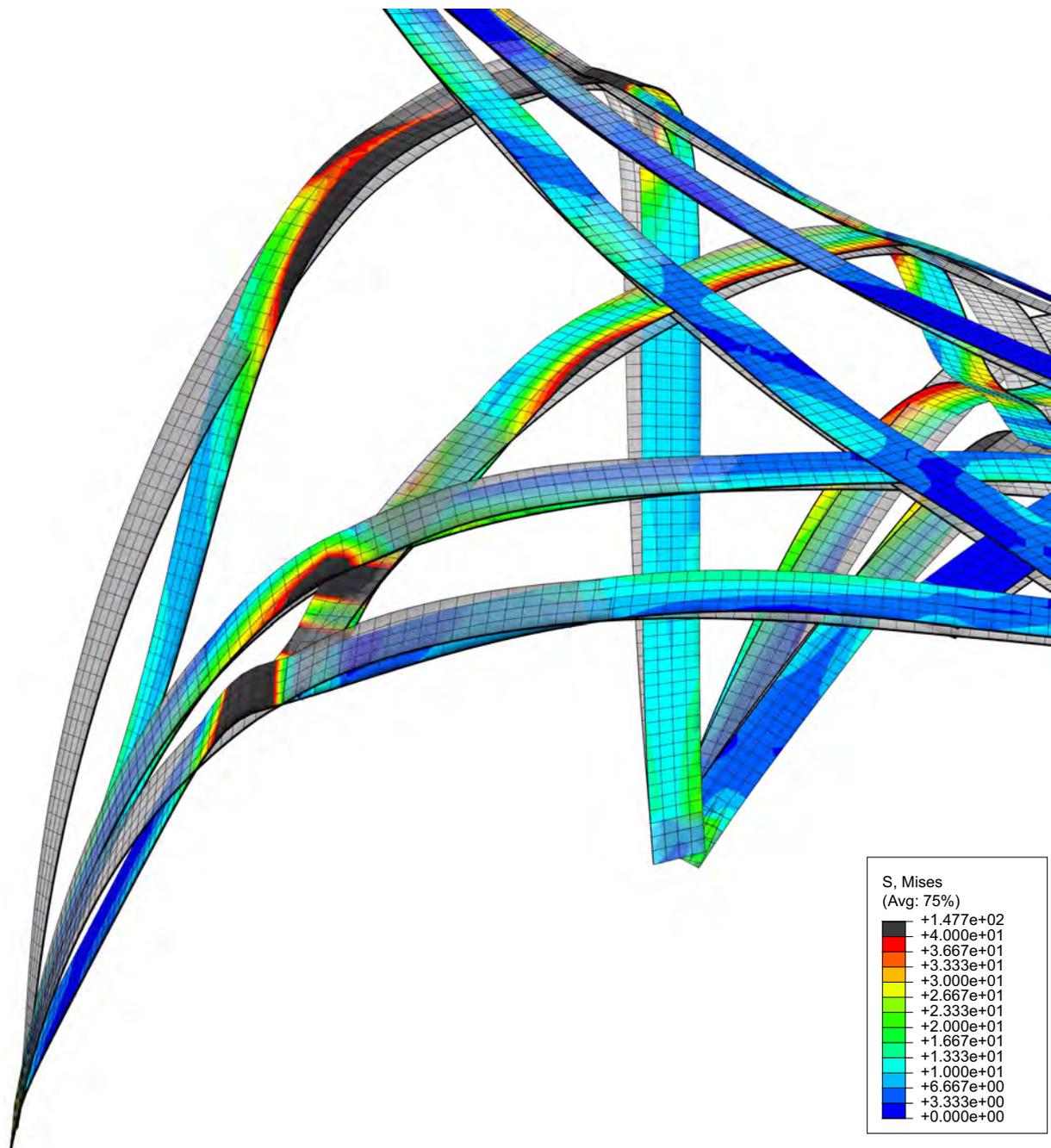


Abbildung 4.8: Problembereich der entspannten Lage mit Spannungszustand, Vergleichsspannung in N/mm^2

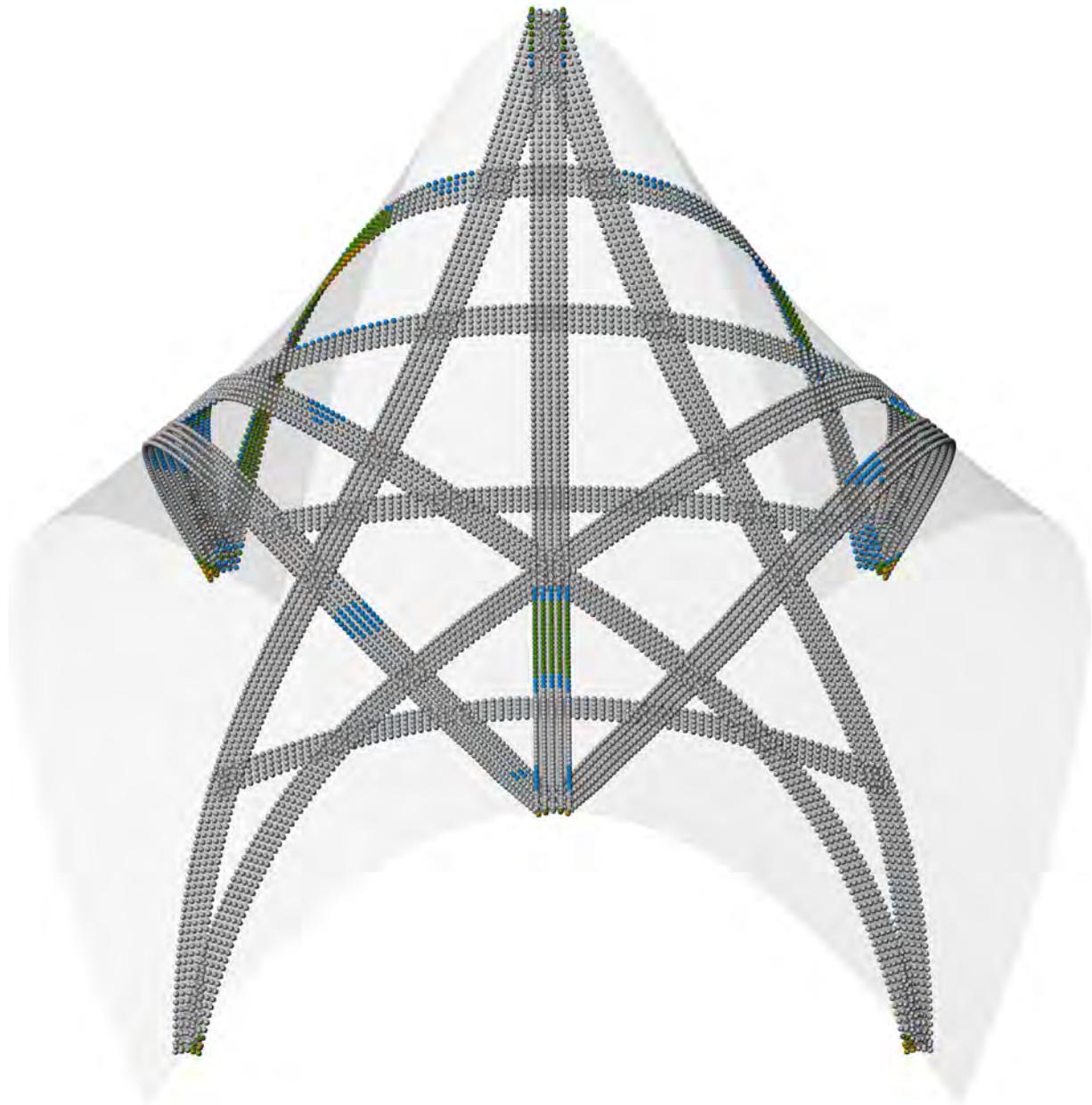


Abbildung 4.9: Analyse der aufgezwungenen Lage anhand des Abstands zu einer Referenzfläche. Graue Punkte liegen exakt im erwarteten Bereich (beidseitig 16mm von der Referenzfläche entfernt), blaue Punkte liegen gering außerhalb des Bereichs (0-4mm), grüne Punkte liegen deutlich außerhalb (4-34mm), gelbe Punkte liegen weit außerhalb (mehr als 34mm)

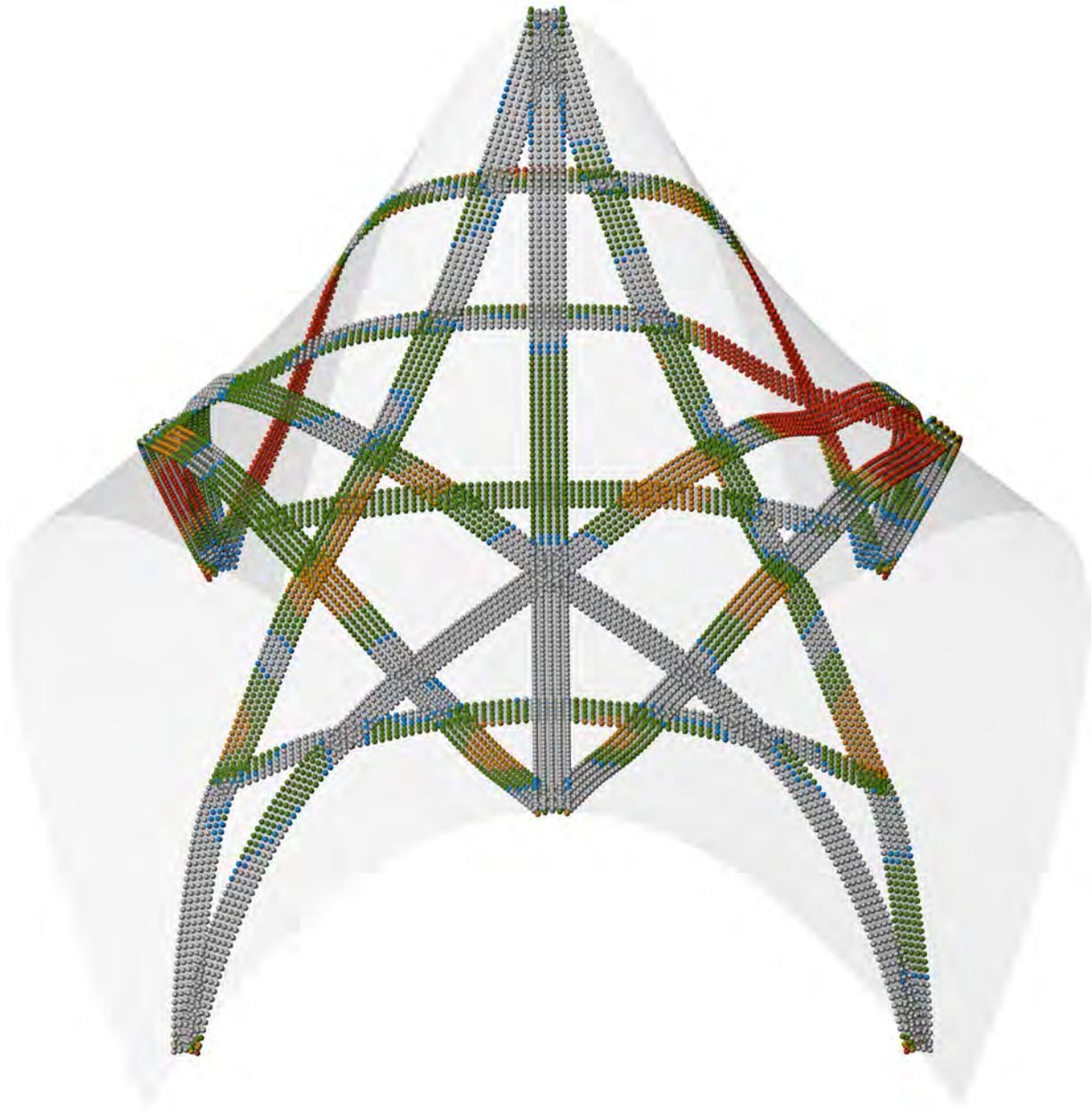


Abbildung 4.10: Analyse der entspannten Lage anhand des Abstands zu einer Referenzfläche. Graue Punkte liegen exakt im erwarteten Bereich (beidseitig 16mm von der Referenzfläche entfernt), blaue Punkte liegen gering außerhalb des Bereichs (0-4mm), grüne Punkte liegen deutlich außerhalb (4-34mm), gelbe Punkte liegen weit außerhalb (34-64mm), rote Punkte liegen sehr weit außerhalb (mehr als 64mm)

5 Resümee und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein Gestaltungsprozess entwickelt, der zur Planung elastisch verformter Freiformtragwerke herangezogen werden kann. Er enthält eine Beschreibung der geometrischen Erstellung einer Struktur sowie deren Implementierung in einer FEM-Software.

Diese Arbeit gliedert sich in vier Teile: In einer Einführung werden die Eigenschaften von Holz in Hinblick auf elastische Verformung untersucht. Dabei wird auf den strukturellen Aufbau von Holz eingegangen, die Materialeigenschaften in Bezug zur Faserrichtung bewertet und ein Vergleich zu plastischen Verformungsprozessen angestellt.

In Kapitel zwei wird, inspiriert durch Erkenntnisse im Modellbau, eine Methode zur Formfindung von Freiformstrukturen mit elastisch verformten Holzstäben vorgeschlagen. Anhand einer Freiformfläche und geodätischer Linien wird die gewünschte Struktur geometrisch erzeugt. Es werden weitere Methoden zur Erhöhung der Stabsteifigkeit vorgestellt und experimentell evaluiert. Das Problem machbarer Knotenpunkte wird ebenfalls geklärt. Schließlich wird ein Feld von Verschiebungsvektoren für die Stäbe generiert, das für die anschließende FEM-Simulation die unverformte Lage mit der verformten Lage der Stäbe verknüpft.

Im dritten Kapitel werden Herausforderungen der FEM-Simulation anhand von Beispielen behandelt. Neben einer Strategie zum Verformen von Stäben werden Möglichkeiten zum Formulieren von Kontakten erörtert, die in einem Vergleich der geometrisch erzeugten Form mit der physikalisch simulierten Form münden. Vorschläge für die Kontaktformulierung werden anhand von Beispielen mit mehreren Lastfällen getestet. In einem weiteren Beispiel wird der Einfluss der Vorspannwirkung auf die Verformung durch einen einfachen Lastfall evaluiert. Dabei wird auch ein möglicher Ansatz zur Erhöhung der Stabsteifigkeit aus Kapitel zwei getestet.

In Kapitel vier wird der Gestaltungsprozess anhand einer Struktur aus elf Stäben, getestet. Anschließend erfolgt eine Analyse der Übereinstimmung der geometrisch erzeugten Ausgangsform mit der physikalisch simulierten Endform und der aufgetretenen Abweichungen.

Die Analyse der Struktur lässt den Schluss zu, dass der Gestaltungsprozess im Wesentlichen funktioniert. Sie zeigt aber auch, dass in einigen Bereichen der FEM-Modellierung weitere Anstrengungen nötig sind. Das betrifft konkret die Interaktion der Stäbe und das lokale Stabilitätsversagen einzelner Stäbe.

Die Formulierung des Kontakts im Entspannungsprozess war komplexer als anfangs angenommen. Aufgrund fehlender Erfahrungswerte war das Erreichen eines akzeptablen Ergebnisses ein langwieriger, iterativer Prozess. Anteil daran hatten die vielen Möglichkeiten, Einstellungen in Interaktionseigenschaften zu ändern. Außerdem wurden die Modelle zusehends rechenintensiv. Um einen funktionierenden Entspannungsprozess zu erreichen, musste etwa mit Stabilisierung und sehr kleinen Inkrementen gearbeitet werden.

Der Gestaltungsprozess basiert auf der Verbindung von parametrischer Modellierung und FEM-Simulation. Die Effizienz und die Möglichkeit, Informationen zu verarbeiten und auszugeben, sind große Vorteile von Tools wie Grasshopper. Als Beispiel kann die Erstellung der Verschiebungsvektoren für den Verformungsvorgang genannt werden: Für die Struktur aus Kapitel 4 wurden durch die vom Autor verfasste Subroutine für jeden der 11 Stäbe an jedem der 50 Punkte je 10 Vektoren mit drei Koordinaten erstellt. Das entspricht 16.500 Einzelinformationen, die ihren Weg in das FEM-Programm finden mussten.

Es gibt viele offene Punkte für Strukturen aus elastisch verformten Holzstäben, darunter etwa die optimale Materialwahl, der Errichtungsprozess und die Rolle der Vorspannwirkung:

- Auf der Materialseite wäre das die Frage nach gut geeigneten Holzarten und ansetzbaren Materialparametern. Außerdem muss das Langzeitverhalten dieser Holzarten unter den konstant vorhandenen Spannungen zufolge der Verformung und weiterer Lasten untersucht werden. Das Langzeitverhalten von Holz kann mit einer Abnahme des E-Moduls simuliert werden. Da der E-Modul ein Teil der Biegesteifigkeit ist, die in Beziehung zur Krümmung steht, kann man folgern, dass sich wesentliche Formänderungen ergeben können.
- Ein möglicher Errichtungsprozess wurde an einem Modell in Kapitel 2.1.2 getestet. Er basiert auf der korrekten Lage der Kreuzungspunkte, bezogen auf die Laufkoordinaten der Stäbe. Ob diese Methode auch im Großen funktioniert, ist jedoch fraglich. Denkbar wäre, die Struktur teilweise am Boden zusammenzubauen und anschließend an einem zentralen Element hochzuziehen.
- In Kapitel 3.4 konnte gezeigt werden, dass die Vorspannwirkung elastisch verformter Stäbe eine wesentliche Rolle für Verformungen zufolge einer Last spielen kann. Man muss sich bewusst machen, dass ein elastisch verformtes Tragwerk de facto aus gespannten, verbundenen Federn besteht.

Wie groß allenfalls vorhandene Tragfähigkeitsreserven für zusätzliche Lasten sind, kann in dieser Arbeit nicht geklärt werden. Es wird aber die Grundlage zur Klärung dieser Frage geschaffen. Selbstverständlich hängt dies mit der Geometrie der Freiformfläche und dem Stablayout zusammen. Denkbar ist auch der Einsatz einer externen Stützstruktur. Dem elastisch verformten Tragwerk könnte dann die Rolle der Gestaltung der Außenhaut eines Gebäudes zukommen. In der geometrischen Gestaltung könnten geodätische Linien auch bewusst abschnittsweise platziert werden, etwa aus ästhetischen Gründen oder um differenzierte Querschnitte zu erlauben.

Abschließend kann jedenfalls festgestellt werden, dass elastisch verformte Strukturen aus Holzstäben interessante Möglichkeiten für die Gestaltung von Freiformtragwerken bieten. Weitere Recherchen auf diesem Gebiet sind sinnvoll und nötig.

Literatur

- [1] H. Alpermann, E. Lafuente Hernández und C. Gengnagel. „Case-studies of arched structures using actively-bent elements“. In: *Proceedings of the IASS-APCS Symposium: From Spatial Structures to Space Structures* (2012).
- [2] H. Ast und G. Winner. *Historische Holzverwendung und Waldnutzung in der Schneebergregion: Formen für Bugholz*. Hrsg. von Universität für Bodenkultur. Wien, 2011.
- [3] Chair of Structural Design, Department of Architecture Technische Universität München. *Design Studio: Experimental Structures Gridshells*. Bd. Vol. 42. Publication series of the Chair of Structural Design. Technische Universität München TUM, Fakultät für Architektur, 2016.
- [4] G. Charles Quinn und C. Gengnagel. „Pneumatic Falsework for the Erection of Strained Grid Shells: A Parameter Study“. In: *Conference Paper: VII International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures* (2015).
- [5] M. P. do Carmo. *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Dritte, durchgesehene Auflage. Bd. 55. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1993.
- [6] J. Eitelberger. „A multiscale material description for wood below the fiber saturation point with particular emphasis on wood-water interactions“. Dissertation. Wien: Technische Universität Wien, 2011, S. 10, 17, 18.
- [7] W. Fiwek. *Holz biegen. Eine grundlegende Einführung in das Verformen von Holz*. 2. Auflage. Hannover: Vincentz, 2011, S. 187.
- [8] C. Gengnagel, H. Alpermann und E. Lafuente. „Active bending in hybrid structures“. In: *Form - rule, rule - form 2013* (2014), S. 16, 21, 5.
- [9] C. Gengnagel, J. Lienhard, H. Alpermann und J. Knippers. „Active Bending, A Review on Structures where Bending is used as a Self-Formation Process“. In: *International Journal of Space Structures* Vol. 28.3-4 (2013), S. 189.
- [10] A. Gieler Rolf P. und Dimmig-Osburg. *Kunststoffe für den Bautenschutz und die Betoninstandsetzung*. 1. Aufl. BauPraxis. Springer-Verlag, 2006, S. 13.
- [11] G. Irvine. „The glass transitions of lignin and hemicellulose and their measurement by differential thermal analysis“. In: *Tappi Journal* Vol. 67.5 (1984), S. 18–121.
- [12] S. S. Kelley, T. G. Rials und W. G. Glasser. „Relaxation behaviour of the amorphous components of wood“. In: *Journal of Materials Science* Vol. 22.2 (1987), S. 617–624.
- [13] A. N. Lenth C. A. und Haslett. „Moisture uptake patterns in pressure steaming of Radiata Pine“. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* Vol. 61.6 (2003), S. 445.
- [14] J. Lienhard und J. Knippers. „Biegeaktive Tragwerke“. In: *Bautechnik* Vol. 92.6 (2015), S. 394.
- [15] M. Lukacevic. „Numerical simulation of wooden boards considering morphological characteristics and complex failure processes“. Dissertation. Wien: Technische Universität Wien, 2014.

-
- [16] H. Mang, G. Hofstetter und J. Eberhardsteiner. *Festigkeitslehre*. 3., aktualisierte Aufl. Wien: Springer, 2008, S. 213, 205.
- [17] G. Neroth und D. Vollenschaar. *Wendehorst Baustoffkunde*. 27., vollständig überarbeitete Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag / Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH Wiesbaden, 2011, S. 821–828, 835, 818, 819, 841, 840.
- [18] S. Pone, S. Colabella, B. Parenti, D. Lancia, A. Fiore, B. D’Amico, F. Portioli’, R. Landolfo’, M. D’Aniello und C. Ceraldi. „Construction and form-finding of a post-formed timber grid-shell“. In: *Structures and Architecture*. CRC Press, 2013, S. 246.
- [19] J. Rice R.W. und Lucas. „The effect of moisture content and bending rate on the work required to bend solid red oak“. In: *Forest Products Journal* Vol. 53 (2003), S. 73.
- [20] A. P. Schniewind. „Recent progress in the study of the rheology of wood“. In: *Wood Science and Technology* Vol. 2 (1968), S. 188–206.
- [21] W. Schoch, I. Heller, F. Schweingruber und F. Kienast. *Wood anatomy of central European Species*. Accessed: 2017-04-20. 2004. URL: www.woodanatomy.ch.
- [22] W. C. Stevens und N. Turner. *Wood bending handbook*. Parkersburg: Woodcraft, 1970.
- [23] J. Wallner, A. Schiftner, M. Kilian, S. Flöry, M. Höbinger, B. Deng, Q. Huang und H. Pottmann. „Tiling Freeform Shapes With Straight Panels: Algorithmic Methods“. In: *Advances in Architectural Geometry 2010*. Vienna: Springer Vienna, 2010, S. 79.
- [24] M. P. Wolcott, F. A. Kamke und D. A. Dillard. „Fundamental aspects of wood deformation pertaining to manufacture of wood-based composites“. In: *Wood and Fiber Science* Vol. 26.4 (1994), S. 496.