Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/ Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna | Austria

Diplomarbeit

Stornorisiko nach Solvency II mit Fokus auf Lebensversicherung

Ausgeführt am
Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer
Univ.Lektorin Dipl.-Ing. Dr.techn. Karin Hirhager
Univ.Lektorin Dipl.-Ing. Dr.techn. Christina Ziehaus

durch
Camilla Greilich
Stiegergasse 8/16
1150 Wien

Wien, 12.09.2017 _____

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass die vorliegende Diplomarbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen von mir selbstständig erstellt wurde. Alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, sind in dieser Arbeit genannt und aufgelistet. Die aus den Quellen wörtlich entnommenen Stellen sind als solche kenntlich gemacht.

Das Thema dieser Diplomarbeit wurde von mir bisher weder im In- noch Ausland einer Beurteilerin/einem Beurteiler zur Begutachtung in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt. Diese Diplomarbeit stimmt mit der von den Begutachterinnen/Begutachtern beurteilten Diplomarbeit überein.

Wien, 12.09.2017

Camilla Greilich

Danksagung

Ich danke Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer für die Betreuung meiner Diplomarbeit. Besonderer Dank gilt auch Univ.Lektorin Dipl.-Ing. Dr.techn. Karin Hirhager und Univ.Lektorin Dipl.-Ing. Dr.techn. Christina Ziehaus, die mich stets unterstützt haben und mir mit Rat und Tat zur Seite standen.

Abstract

Lebensversicherungsverträge charakterisieren sich in der Regel durch sehr lange Vertragslaufzeiten. Da sich der persönliche Bedarf von Versicherungsnehmern im Laufe der Vertragsdauer ändern kann, ermöglichen vertragliche Optionen eine Anpassung des Versicherungsschutzes an individuelle Gegebenheiten. In der Praxis sind Vertragsänderungen und Kündigungen daher keine Seltenheit. Die Ausübung der vertraglichen Rechte durch den Versicherungsnehmer stellt jedoch ein finanzielles Risiko für das Versicherungsunternehmen dar und muss bei der Bewertung des Versicherungsportfolios berücksichtigt werden.

Gemäß Solvency II dient die modular aufgebaute Standardformel zur Berechnung der Eigenmittelanforderungen. Im Risikomodul Storno werden diese anhand eines szenariobasierten Ansatzes bestimmt. Dabei werden drei separate Schockszenarien angewendet, aus denen anschließend das Maximum ermittelt wird. In den Szenarien werden nur Verträge mit einem positiven bzw. negativen Stornoergebnis betrachtet.

Im weiteren Verlauf der Diplomarbeit wird ein Simulationsmodell für das Stornoergebnis vorgestellt, welches den Vertragstyp der Kapitallebensversicherung abbildet. Unter Berücksichtigung der jährlich verstorbenen und stornierten Policen werden Beiträge, Reserven und Leistungen des Versicherungsbestandes berechnet. Anhand einer Gewinn- und Verlustrechnung werden Einnahmen und Ausgaben des getätigten Versicherungsgeschäfts gegenübergestellt und der Wert des Versicherungsportfolios ermittelt. Dabei werden drei separate Schockszenarien auf die Stornoraten angewendet und im Anschluss das Szenario mit der maximalen Auswirkung identifiziert.

Das vorletzte Kapitel ist einer rein mathematischen Betrachtung gewidmet. Dabei liegt das Interesse in der Bestimmung von Reserven in Bezug auf das erwartete Verhalten von Versicherungsnehmern. Dies erfolgt im Rahmen eines Markovschen Mehrfachzustandsmodells für das Versicherungsrisiko und das Verhalten von Versicherungsnehmern hinsichtlich Storno und Beitragsfreistellung.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis **III**

Tabellenverzeichnis **IV**

Abkürzungsverzeichnis **V**

1 Einführung **1**
1.1 Motivation . . . 1
1.2 Ziel . . . 1
1.3 Aufbau . . . 2

2 Grundlagen **3**
2.1 Solvency II . . . 3
2.1.1 Ziele . . . 4
2.1.2 Drei-Säulen-Ansatz . . . 4
2.1.3 Grundelemente der ersten Säule . . . 5
2.2 Optionen und Garantien in der Lebensversicherung . . . 6
2.2.1 Kündigungs- und Rückkaufsoption . . . 8
2.3 Zusammenfassung . . . 8

3 Stornorisiko gemäß der Standardformel nach Solvency II **9**
3.1 Modularer Aufbau der Standardformel . . . 9
3.2 Szenariobasierter Berechnungsansatz . . . 13
3.3 Risikomodul Leben . . . 15
3.4 Untermodul Storno . . . 16
3.4.1 Schockszenarien . . . 17
3.5 Dynamisches Stornoverhalten . . . 19
3.6 Zusammenfassung . . . 21

4 Simulationsmodell für das Stornoergebnis **22**
4.1 Kapitallebensversicherung . . . 22
4.2 Modellbeschreibung . . . 23
4.2.1 Ziel . . . 23
4.2.2 Annahmen . . . 24
4.2.3 Rechnungsgrundlagen . . . 25
4.2.4 Prämien . . . 28

4.2.5 Dekrementmodelle 29
4.2.6 Versicherungsbestand 30
4.2.7 Gewinn und Verlustrechnung 31
4.2.8 Stornoergebnis 33
4.3 Modellergebnisse 33
4.3.1 Keine Gewinnquelle 34
4.3.2 Stornoabzug als Gewinnquelle 34
4.3.3 Kosten (70%) als Gewinnquelle 35
4.3.4 Stornoabzug und Kosten (70%) als Gewinnquellen 36
4.3.5 Stornoabzug und Kosten (99.5%) als Gewinnquellen 37
4.3.6 Kosten (120%) als Verlustquelle 37
4.3.7 Conclusio 38
4.4 Zusammenfassung 38

5 Markovsches Mehrfachzustandsmodell für das Versicherungsrisiko und das Verhalten von Versicherten hinsichtlich Storno und Beitragsfreistellung 40
5.1 Einführung 40
5.2 Grundlagen 42
5.2.1 Prospektive Reserve 43
5.2.2 Thielesche Differentialgleichung 44
5.2.3 Markovketten 45
5.2.4 Deckungskapital im Markovmodell 50
5.2.5 Optimaler Stornozeitpunkt 51
5.3 Risiko- und Verhaltensmodell 52
5.4 Zahlungsströme im Risiko- und Verhaltensmodell 56
5.4.1 Bedingt auf den Zustand der Beitragsfreistellung 58
5.4.2 Bedingt auf den Zustand der Prämienzahlung 60
5.5 Wichtige Spezialfälle 62
5.5.1 Invaliditätsmodell 62
5.5.2 Überlebensmodell 64
5.6 Beitragsfreistellungsfaktor 65
5.7 Zusammenfassung 66

6 Zusammenfassung 67

Literaturverzeichnis 68

Abbildungsverzeichnis

Abb. 2.1: Ökonomische Bilanz 6
Abb. 3.1: Modularer Aufbau der Standardformel 11
Abb. 5.1: Invaliditätsmodell als kanonisches Beispiel für ein Risikomodell . 52
Abb. 5.2: Kanonisches Beispiel für ein Verhaltensmodell 53
Abb. 5.3: Kombiniertes Modell 56

Tabellenverzeichnis

Tab. 3.1: Korrelationsmatrix der Risikomodule 12
Tab. 3.2: Korrelationsmatrix der Untermodule im Risikomodul Leben 16
Tab. 4.1: Modellannahmen 24
Tab. 4.2: Kostensätze 28
Tab. 4.3: PVFP Basis Szenario: Keine Gewinnquelle 34
Tab. 4.4: Stornoergebnis: Keine Gewinnquelle 34
Tab. 4.5: PVFP Basis Szenario: Stornoabzug als Gewinnquelle 35
Tab. 4.6: Stornoergebnis: Stornoabzug als Gewinnquelle 35
Tab. 4.7: PVFP Basis Szenario: Kosten (70%) als Gewinnquelle 35
Tab. 4.8: Stornoergebnis: Kosten (70%) als Gewinnquelle 36
Tab. 4.9: PVFP Basis Szenario: Stornoabzug und Kosten (70%) als Gewinnquellen 36
Tab. 4.10: Stornoergebnis: Stornoabzug und Kosten (70%) als Gewinnquellen 36
Tab. 4.11: PVFP Basis Szenario: Stornoabzug und Kosten (99.5%) als Gewinnquellen 37
Tab. 4.12: Stornoergebnis: Stornoabzug und Kosten (99.5%) als Gewinnquellen 37
Tab. 4.13: PVFP Basis Szenario: Kosten (120%) als Verlustquelle 38
Tab. 4.14: Stornoergebnis: Kosten (120%) als Verlustquelle 38

Abkürzungsverzeichnis

BE	Best Estimate
BOF	Basic Own Funds
BSCR	Basic Solvency Capital Requirement
CoC	Cost-of-Capital
DAV	Deutsche Aktuarvereinigung
DGL	Differentialgleichung
DT	Deferred Taxes
EGT	Ergebnis der gewöhnlichen Geschäftstätigkeit
EIOPA	European Insurance and Occupational Pensions Authority
FDB	Future Discretionary Benefits
FLV	Fondsgebundene Lebensversicherung
GuV	Gewinn- und Verlustrechnung
IAS	International Accounting Standards
IFRS	International Financial Reporting Standards
MCR	Minimum Capital Requirement
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
ORSA	Own Risk and Solvency Assessment
PVFP	Present Value of Future Profit
RM	Risikomarge
RSR	Regular Supervisory Report
SCR	Solvency Capital Requirement

SFCR	Solvency and Financial Condition Report
TP	Technical Provisions
VaR	Value at Risk
VVG	Versicherungsvertragsgesetz

Kapitel 1

Einführung

Im Folgenden werden Motivation, Ziel und Aufbau dieser Diplomarbeit dargelegt.

1.1 Motivation

Optionen in der Lebensversicherung werden bei Vertragsbeginn zugesichert und berechtigen den Versicherungsnehmer, den Versicherungsschutz im Laufe der Vertragsdauer anzupassen bzw. zu kündigen. Die Ausübung dieser vertraglichen Optionen beeinflusst zukünftige Zahlungsströme und stellt somit ein finanzielles Risiko für das Versicherungsunternehmen dar. Dies motiviert die vorliegende Diplomarbeit mit dem Titel Stornorisiko nach Solvency II mit Fokus auf Lebensversicherung.

1.2 Ziel

Das Ziel dieser Diplomarbeit besteht darin, den Leser an das Stornorisiko in der Lebensversicherung gemäß der Standardformel nach Solvency II heranzuführen. Zudem wird in Excel ein Simulationsmodell für das Stornoergebnis erstellt. Hierbei soll die These, dass bei einem profitablen Versicherungsprodukt ein Storno Up Szenario und bei einem nicht profitablen Versicherungsprodukt ein Storno Down Szenario wirkt, untersucht werden. Des Weiteren interessiert man sich für Reserven in Bezug auf das erwartete Verhalten von Versicherungsnehmern. Dies erfolgt im Rahmen eines Markovschen Mehrfachzustandsmodells für das Versicherungsrisiko und das Verhalten von Versicherungsnehmern hinsichtlich Storno und Beitragsfreistellung.

1.3 Aufbau

Im zweiten Kapitel werden neben Grundlagen und zentralen Begriffen zu Solvency II, Optionen und Garantien in der Lebensversicherung eingeführt. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Kündigungs- und Rückkaufsoption.

Das dritte Kapitel widmet sich dem Stornorisiko gemäß der Standardformel nach Solvency II. Dabei wird der modulare Aufbau der Standardformel vorgestellt, der szenariobasierte Ansatz zur Bestimmung der Kapitalanforderungen für das Stornorisiko beschrieben und auf das dynamische Stornoverhalten von Versicherungsnehmern eingegangen.

Im vierten Kapitel wird ein Simulationsmodell für das Stornoergebnis vorgestellt, welches auf einer vereinfachten Kapitallebensversicherung beruht. Zunächst wird der Begriff der Kapitallebensversicherung dargelegt, gefolgt von der Beschreibung des Modells und einer Zusammenfassung der Modellergebnisse. Dabei wird die These, dass bei einem profitablen Versicherungsprodukt ein Storno Up Szenario und bei einem nicht profitablen Versicherungsprodukt ein Storno Down Szenario wirkt, untersucht.

Das fünfte Kapitel ist einer rein mathematischen Betrachtung gewidmet. Zunächst werden Grundlagen der höheren Lebensversicherungsmathematik eingeführt. Des Weiteren behandelt dieses Kapitel die Berechnung von Reserven in Bezug auf das erwartete Verhalten von Versicherungsnehmern. Der Fokus liegt hierbei auf einem Markovschen Mehrfachzustandsmodell für das Versicherungsrisiko und das Verhalten von Versicherungsnehmern hinsichtlich Storno und Beitragsfreistellung. Die Reserven werden in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben und anschließend deren Lösungen dargestellt. Des Weiteren interessiert man sich für die Abhängigkeit zwischen dem Versicherungsrisiko und dem Verhalten von Versicherungsnehmern.

Kapitel 2

Grundlagen

Gegenstand dieser Diplomarbeit ist das Stornorisiko mit Fokus auf Lebensversicherung. Zunächst werden Grundlagen und zentrale Begriffe zu Solvency II eingeführt. Anschließend wird auf Optionen und Garantien in der Lebensversicherung und insbesondere auf die Kündigungs- und Rückkaufsoption eingegangen.

2.1 Solvency II

Solvabilität bezeichnet die Fähigkeit eines Versicherungsunternehmens, allen vertraglich eingegangenen Verpflichtungen nachzukommen. Um adverse Entwicklungen ausgleichen zu können, muss der Versicherer genügend Eigenmittel in Abhängigkeit des eigenen Risikoprofils vorhalten. Vergleiche Kriele & Wolf (2016, Kapitel 8.2.1) und Weindorfer (2011, Kapitel 1).

Basierend auf der Weiterentwicklung der Bankenaufsicht hin zu Basel II und durch die Veränderungen der Versicherungsmärkte infolge von Deregulierung, höherer Wettbewerbsintensität und der Entwicklung neuer Finanzinstrumente wurden unter Solvency II neue Solvabilitätsvorschriften für Versicherungs- und Rückversicherungsunternehmen eingeführt. Solvency II ist ein überarbeitetes und an geänderte Verhältnisse angepasstes Versicherungsaufsichtssystem, welches am 1. Januar 2016 in Kraft getreten ist.

2.1.1 Ziele

Ziele von Solvency II bestehen in der Gestaltung eines prinzipienorientierten EU-Aufsichtssystems, welches Wettbewerbsneutralität gewährleistet, die Entwicklung effizienter Versicherungsmärkte vorantreibt und die Interessen der Versicherungsnehmer schützt. Weitere Ziele sind risikobasierte Eigenmittelerfordernisse, Weiterentwicklung des Risikomanagements und Stärkung der Corporate Governance. Zudem soll die Marktdisziplin der Versicherungsunternehmen gestärkt werden. In Anlehnung an Kriele & Wolf (2016, Kapitel 8.2.4.1).

2.1.2 Drei-Säulen-Ansatz

Solvency II beruht auf einem Drei-Säulen-Ansatz. Die erste Säule behandelt quantitative Anforderungen an die Eigenmittelausstattung, Grundlagen für die Bewertung der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten und Bestimmungen über die Anlage von Vermögen. In Kapitel 2.1.3 werden die Grundelemente der ersten Säule vorgestellt.

Die zweite Säule behandelt qualitative Anforderungen an die Unternehmenssteuerung und regelt das aufsichtsrechtliche Überprüfungsverfahren (engl. Supervisery Review Process), welches neben einem adäquaten Risikomanagement, ein funktionsfähiges System interner Kontrollen gewährleistet. Die Versicherungsunternehmen sollen in einer unternehmenseigenen Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung, namens Own Risk and Solvency Assessment (ORSA), ihr Risikomanagementsystem selbst überwachen und konsequent weiterentwickeln. Frühwarnindikatoren und Stresstests sind ebenfalls Gegenstand der zweiten Säule.

Die dritte Säule behandelt Offenlegungspflichten gegenüber der Öffentlichkeit und den Aufsichtsbehörden und dient dazu, die Marktdisziplin zu stärken. Unter Solvency II sind neben der IAS/IFRS Berichterstattung, die folgenden zwei Berichte vorzulegen: der Solvency and Financial Condition Report (SFCR) ist für die Öffentlichkeit bestimmt und beinhaltet unter anderem Informationen über Geschäftsstrategie, Ertragslage, Bewertungsansätze zu versicherungstechnischen Rückstellungen, sowie Methoden zur Berechnung der Kapitalanforderungen. Der Regular Supervisory Report (RSR) wird der Aufsichtsbehörde vorgelegt und enthält weitere detaillierte Informationen. Siehe Kriele & Wolf (2016, Kapitel 8.2.4.2) und Weindorfer (2011, Kapitel 3.2).

Im Folgenden wird sich ausschließlich mit der ersten Säule befasst.

2.1.3 Grundelemente der ersten Säule

Die ökonomische Bilanz (Abbildung 2.1) stellt die Ausgangsbasis der ersten Säule dar. Dabei werden Vermögenswerte (Assets) zu Marktpreisen angesetzt und versicherungstechnische Verbindlichkeiten (Liabilities) mit einem Best Estimate (BE) zuzüglich einer Risikomarge (RM) bewertet. Die Risikomarge dient als Zuschlag für nicht-hedgebare Risiken[1] und wird anhand eines Cost-of-Capital (CoC) Ansatzes bestimmt.

Zur Berechnung der Eigenmittelanforderungen dient die modular aufgebaute Standardformel oder ein internes Modell. Das interne Modell muss relevante Risiken erfassen und durch die Versicherungsaufsicht gemäß bestimmter Kriterien zertifiziert werden. Wesentlich sind folgende zwei Eigenmittelanforderungsniveaus, deren Unterschreiten aufsichtsrechtliche Maßnahmen bewirken: ein Versicherungsunternehmen soll

- anrechnungsfähige Basiseigenmittel[2] zur Deckung des Minimum Capital Requirement (MCR) und
- anrechnungsfähige Eigenmittel[3] zur Deckung des Solvency Capital Requirement (SCR)

halten. Das MCR stellt ein Mindestniveau mit festgelegter Ober- und Untergrenze dar, welches zumindest vierteljährlich ermittelt werden muss.

Das SCR bezieht sich auf eine maximal tolerierbare Ruinwahrscheinlichkeit, kalibriert auf einen Einjahreshorizont. Es entspricht dem Risikomaß Value at Risk (VaR) zu einem Konfidenzniveau von 99.5% und muss mindestens einmal jährlich berechnet werden. Anrechnungsfähige Eigenmittel in Höhe des SCR dienen dem Ausgleich signifikanter Verluste und sollen sicherstellen, dass Zahlungen gegenüber den Versicherten bei Fälligkeit geleistet werden.

Nachfolgende Abbildung 2.1 zeigt eine ökonomische Bilanz, die auf der Passivseite

[1] Ein Risiko ist hedgebar, wenn es handelbare Finanzinstrumente mit einem eindeutig bestimmbaren Marktwert gibt, mit denen das Risiko abgesichert werden kann. Vergleiche Kriele & Wolf (2016, Kapitel 4.4.2).

[2] Basiseigenmittel = Vermögenswerte - Verbindlichkeiten + nachrangige Verbindlichkeiten.

[3] Eigenmittel = Basiseigenmittel + ergänzende Eigenmittel. Die Anrechnungsfähigkeit der Eigenmittel ist abhängig von deren Qualität. Entsprechende Regeln sind in der Richtlinie festgelegt. Hierfür wird auf Weindorfer (2011, Kapitel 4.1) verwiesen.

SCR und versicherungstechnische Verbindlichkeiten[4] abbildet. Auf der Aktivseite der ökonomischen Bilanz stehen Own Funds und Anlagen zur Bedeckung des SCR und der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten.

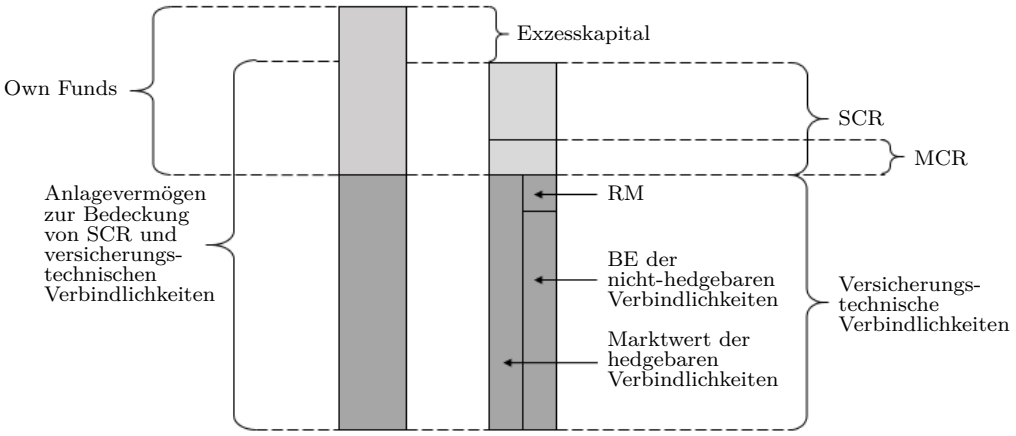

Abbildung 2.1: Ökonomische Bilanz

In Anlehnung an Kriele & Wolf (2016, Kapitel 4.7.1, 8.2.4.2, 8.2.4.4), Weindorfer (2011, Kapitel 3.2, 4.2 - 4.3) und Solvency II kompakt: das aktuelle Kompetenzportal zu Solvency II (2017b).

2.2 Optionen und Garantien in der Lebensversicherung

Es wird unterschieden zwischen zwei Formen der Lebensversicherung: der Kapitalversicherung und der Rentenversicherung. Bei der Kapitalversicherung entspricht die Leistung der Auszahlung der Versicherungssumme. Im Allgemeinen wird sie einmal ausbezahlt und ist bei Tod oder bei Überleben des Versicherten bis zu einem vereinbarten Zeitpunkt fällig. Die Rentenversicherung charakterisiert sich durch wiederkehrende Zahlungen, die sich auf den Erlebensfall der versicherten Person beziehen. Eine Lebensversicherung wird als kapitalbildende Lebensversicherung bezeichnet, falls im Laufe der Vertragsdauer Mittel zum Erreichen eines Sparziels angesammelt werden. Eine kapitalbildende Lebensversicherung stellt somit eine Alternative zur reinen Geldanlage dar. Siehe Ortmann (2016, Kapitel 1.3).

[4]Bei der Berechnung des SCR werden die versicherungstechnischen Rückstellungen ohne RM berücksichtigt. Siehe Weindorfer (2011, Kapitel 4.2.1.4).

Lebensversicherungsverträge kennzeichnen sich durch sehr lange Vertragslaufzeiten. Die versicherte Person verbindet mit dem Vertragsabschluss die Erwartung, für ihr Alter in angemessener Art und Weise vorzusorgen. Der persönliche Bedarf kann sich jedoch im Laufe des Vertragslebens ändern. Versicherungsunternehmen werten ihre Verträge daher durch Optionsrechte auf, die eine Anpassung des Versicherungsschutzes an individuelle Gegebenheiten ermöglichen. Eine Option stellt somit ein Wahlrecht des Versicherten dar, welches bei Abschluss des Vertrages zugesichert wird. Mögliche Optionen sind

- Kündigung,
- Beitragsfreistellung und -wiederaufnahme,
- Teilauszahlungsoption,
- Freiwillige Zuzahlung,
- Abrufoption,
- Kapitalwahlrecht,
- Aufschub- und Verlängerungsoption und
- Erhöhung der Versicherungssumme.

Die Ausübung solcher Finanzoptionen beeinflusst künftige Zahlungsströme und stellt dadurch ein Finanzrisiko für den Versicherer dar. Unter Solvency II müssen Optionen und Garantien daher bei der Bestimmung des BE der versicherungstechnischen Rückstellungen in den künftigen Zahlungsströmen berücksichtigt werden. Einflussfaktoren auf die Ausübung der vertraglichen Rechte sind die aktuelle Kapitalmarktsituation, die Höhe der Überschussbeteiligung, sowie persönliche Faktoren. Vergleiche Solvency II kompakt: das aktuelle Kompetenzportal zu Solvency II (2017a).

Im Folgenden wird sich ausschließlich mit der Kündigungs- und Rückkaufsoption befasst. Laut Versicherungsvertragsgesetz (VVG) ist die versicherte Person berechtigt, das bestehende vertragliche Verhältnis zu beenden. Dabei besteht Anspruch auf Garantiewerte, deren Auszahlung im Bezug zum Deckungskapital (Deckungsrückstellung) steht. Der Versicherungsvertrag kann seitens des Versicherungsunternehmens nur dann gekündigt werden, wenn der Versicherte der Aufforderung zur Beitragszahlung dauerhaft nicht nachkommt. Siehe Ortmann (2016, Kapitel 5.5).

2.2.1 Kündigungs- und Rückkaufsoption

Bei Verträgen mit Rückkaufsrecht verfügen die Versicherungsnehmer über die Option, den Vertrag vollständig oder teilweise gegen Erhalt eines Rückkaufswertes zu stornieren. Siehe dazu European Insurance and Occupational Pensions Authority (2014a, Abschnitt TP.2.96). Diese vertragliche Option kann als Amerikanische Option interpretiert werden, deren Wert sich anhand eines optimalen Stoppzeitproblems (siehe Kapitel 5.2.5) bestimmen lässt. Vergleiche Eling & Kochanski (2013, Kapitel 2.1.2). Durch die Zahlung des Rückkaufswertes erlischt die Versicherung und der vertragliche Anspruch. Im Falle einer teilweisen Stornierung des Versicherungsvertrages wird der Rückkaufswert nicht vollständig ausbezahlt. Der überschüssige Anteil dient zusammen mit den übrigen Beitragseinnahmen zur Finanzierung einer verminderten Versicherungsleistung.

Als versicherungsmathematische Grundlage zur Bestimmung des Rückkaufswertes dient das Bruttodeckungskapital. Bei Vertragsabschluss werden die unmittelbaren Abschlusskosten im Voraus finanziert und während der Vertragslaufzeit durch die Versicherungsbeiträge getilgt. Bei einer vorzeitigen Kündigung könnte das Deckungskapital jedoch negativ sein und das Versicherungsunternehmen müsste dann Verluste realisieren.

Im Gegenzug sind Versicherungsunternehmen dazu berechtigt, eine angemessene vereinbarte Stornogebühr, d.h. einen Stornoabzug, einzubehalten. Denn die Kosten pro Vertrag werden im Vorhinein auf Basis des gesamten Bestandes angesetzt. Reduziert sich die Bestandsgröße, so sind die Kosten pro Versicherungsvertrag höher als zu Beginn angenommen. Zudem verringert sich die Volatilität der Schadenserfahrung mit Verringerung des Gesamtbestandes. Ferner soll der Stornoabschlag der negativen Risikoauslese (Adversen Selektion) entgegenwirken. In Anlehnung an Ortmann (2016, Kapitel 5.5.2 - 5.5.4).

2.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden Grundlagen und zentrale Begriffe zu Solvency II eingeführt, die Grundelemente der ersten Säule erläutert und Optionen und Garantien in der Lebensversicherung vorgestellt.

Kapitel 3

Stornorisiko gemäß der Standardformel nach Solvency II

Dieses Kapitel widmet sich dem Stornorisiko gemäß der Standardformel nach Solvency II. Zunächst wird auf den modularen Aufbau der Standardformel und auf die Berechnung des SCR eingegangen. Im Anschluss wird der szenariobasierte Ansatz zur Bestimmung der Kapitalanforderungen im Risikomodul *Storno* vorgestellt und das dynamische Stornoverhalten von Versicherungsnehmern behandelt.

3.1 Modularer Aufbau der Standardformel

Das höchste Aggregationsniveau bildet das *SCR*. Dieses ergibt sich als Summe aus dem Basic Solvency Capital Requirement (*BSCR*), den Kapitalanforderungen für das operationelle Risiko (SCR_{Op}), sowie der Adjustierung (*Adj*) für die risikomitigierende Wirkung latenter Steuern (DT)[1] und zukünftiger Überschussbeteiligung (FDB)[2]

$$SCR = BSCR + SCR_{\text{Op}} + Adj. \tag{3.1}$$

Die Adjustierung ergibt sich aus

$$Adj = Adj_{\text{TP}} + Adj_{\text{DT}}, \tag{3.2}$$

[1] engl. deferred taxes
[2] engl. future discretionary benefits

wobei Adj_{TP} die Adjustierung für die Verlustausgleichsfähigkeit der versicherungstechnischen Rückstellungen (TP)[3] und Adj_{DT} die Adjustierung für die Verlustausgleichsfähigkeit der latenten Steuern bezeichnet. Eine Änderung der in den versicherungstechnischen Rückstellungen enthaltenen FDB muss bei der Berechnung der Solvency Capital Requirements (SCRs) einbezogen werden. Vergleiche Deutsche Aktuarvereinigung e.V. (2014, Kapitel 1.1) und European Insurance and Occupational Pensions Authority (2014a, Abschnitt SCR.2.8).

Für die Berechnung der FDB_0[4] sei $Bonus(t)$, $t \geq 0$, die erwartete zukünftige Überschussbeteiligung (Bonus) am Ende des Jahres t. Dabei wird angenommen, dass in dem Jahr keine weiteren Überschüsse ausgezahlt werden. $f_{0;t}$ sei der risikolose Forwardzins für das Jahr t und $\lambda_{t,\text{Cash}}^{\text{Kosten,relativ}}$ die relativen Kapitalanlagekosten für die risikolose Kapitalanlage. Mit $FDB_0 = FDB_{0;0}$ gilt

$$FDB_{0;t} = \frac{\left(FDB_{0;t+1} + Bonus(t+1) + \lambda_{t+1,\text{Cash}}^{\text{Kosten,relativ}}\right)}{(1 + f_{0;t+1})}.$$

$FDB_{0;t}$ sei dabei der zur Zeit 0 erwartete Wert, der zum Zeitpunkt t zukünftigen Überschussbeteiligung. Siehe Kriele & Wolf (2016, Kapitel 4.7.2) und Weindorfer (2011, Kapitel 4.2). Ferner ist es möglich, die relativen Kosten im Zins zu absorbieren. Hierfür wird auf Kriele & Wolf (2016, Lemma 4.6) verwiesen.

Das *BSCR* untergliedert sich in die folgenden sechs Module (Risikoklassen): SCR_{Markt}, SCR_{Leben}, $SCR_{\text{Nichtleben}}$, SCR_{Kranken}, SCR_{Kredit} und SCR_{Immat}. Die Risikomodule zerlegen sich wiederum in Untermodule. Dadurch berücksichtigt die Standardformel verschiedene Risiken auf der Aktivseite (Marktrisikomodul und Risikomodul der immateriellen Vermögenswerte) und auf der Passivseite (versicherungstechnische Risikomodule und Kreditrisikomodul). Folgende Abbildung 3.1 zeigt den modularen Aufbau der Standardformel.

[3] engl. technical provisions

[4] Die Ausgangsbilanz beruht auf dem Jahr 0. Im Folgenden kennzeichnet der Index „0“, dass die entsprechende Größe auf Information beruht, welche zum Zeitpunkt 0 bekannt ist. Die Bestimmung von FDB_0 setzt jedoch die Berechnung künftiger Bilanzen voraus. Vergleiche Kriele & Wolf (2016, Kapitel 4.7.5.3).

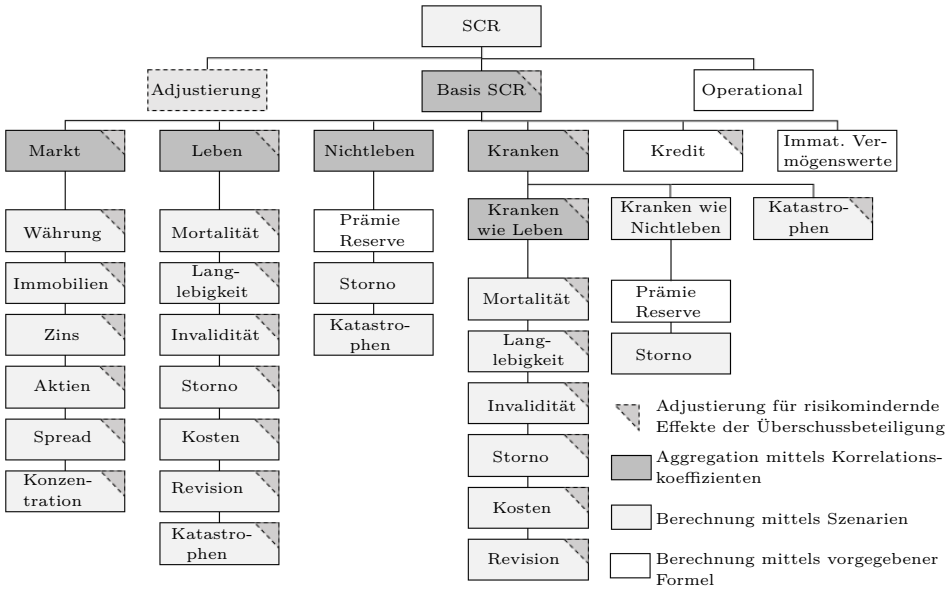

Abbildung 3.1: Modularer Aufbau der Standardformel

Die Berechnung der einzelnen SCRs erfolgt zunächst auf tiefster Untermodulebene. Dabei wird die Kapitalanforderung der Untermodule entweder auf Grundlage eines szenariobasierten oder eines faktorbasierten Ansatzes berechnet. Der szenariobasierte Ansatz wird in Kapitel 3.2 vorgestellt. Für die Ermittlung der Kapitalanforderung anhand eines faktorbasierten Ansatzes wird eine risikorelevante Bezugsgröße mit einem entsprechenden Stressfaktor multipliziert. Hierfür wird auf European Insurance and Occupational Pensions Authority (2014a, Abschnitt SCR.7.56 - SCR.7.57) verwiesen.

Basierend auf der Annahme vorgegebener Korrelationsmatrizen dient ein zweistufiger Varianz/Kovarianz-Ansatz zur Aggregation der einzelnen Kapitalanforderungen. Zunächst wird das SCR pro Untermodul innerhalb eines Moduls i mittels der Wurzelformel und vorgegebener Korrelationsmatrix ($corr_i$) aggregiert,

$$SCR_i = \sqrt{corr_i^{j,k} SCR_{i,j} SCR_{i,k}}.$$

$SCR_{i,j}$ bezeichnet dabei die Kapitalanforderung für den Risikotyp j des Risikomoduls i, z.B. für den Risikotyp *Storno* des Risikomoduls *Leben*. Um die Kapitalanforderungen pro Modul zum *BSCR* zu aggregieren wird folgende Korrelationsmatrix $corr_{\text{BSCR}}$ verwendet

$corr_{\text{BSCR}}$	Markt	Kredit	Leben	Kranken	Nichtleben
Markt	1.00	0.25	0.25	0.25	0.25
Kredit	0.25	1.00	0.25	0.25	0.50
Leben	0.25	0.25	1.00	0.25	0.00
Kranken	0.25	0.25	0.25	1.00	0.00
Nichtleben	0.25	0.50	0.00	0.00	1.00

Tabelle 3.1: Korrelationsmatrix der Risikomodule

Die Formel

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j \in \{\text{Markt, Kredit, Leben, Kranken, Nichtleben}\}} corr_{BSCR}^{i,j} SCR_i SCR_j} + SCR_{\text{Immat}} \tag{3.3}$$

aggregiert die Kapitalanforderungen der zentralen Risiken zum *BSCR*. Kriele & Wolf (2016, Anmerkung 4.14) zeigen, dass diese mehrstufige Aggregation jedoch zu einer Unterschätzung des BSCR führen kann.

Für jedes Modul wird eine Brutto SCR, sowie eine Netto SCR Berechnung durchgeführt. Für diejenigen Module mit szenariobasiertem Berechnungsansatz wird das Schockszenario auf Grundlage des Netto SCR ermittelt. Bei der Brutto SCR Berechnung bleiben die FDB unverändert gegenüber der BE Berechnung. Bei der Netto SCR Berechnung (unter Berücksichtigung der Überschussbeteiligung) muss der Wert der in den versicherungstechnischen Rückstellungen enthaltenen FDB in den Schockszenarien neu ermittelt werden. Die Differenz zwischen Brutto SCR und Netto SCR für das relevante Schockszenario entspricht dann der Veränderung der FDB. Die einzelnen SCR^{brutto}[5] werden anhand der vorgegebenen Korrelationsmatrizen zum BSCR aggregiert. Entsprechend werden die SCR^{netto} der Schockszenarien aggregiert. Die Adjustierung für die risikomitigierende Wirkung der Überschussbeteiligung ergibt sich schließlich aus der Differenz der beiden aggregierten SCRs. In Anlehnung an Deutsche Aktuarvereinigung e.V. (2014, Kapitel 1.1), European Insurance and Occupational Pensions Authority (2014a, Abschnitt SCR.2.2, SCR.2.11 - SCR.2.12), Kriele & Wolf (2016, Kapitel 4.7.2) und Weindorfer (2011, Kapitel 4.2.1.1 - 4.2.1.2).

Im folgenden Kapitel wird der szenariobasierte Berechnungsansatz zur Bestimmung des SCR vorgestellt.

[5] Im Folgenden wird SCR^{brutto} mit SCR bezeichnet.

3.2 Szenariobasierter Berechnungsansatz

Für einen Großteil der versicherungstechnischen Risiken in der Lebensversicherung wird das SCR unter Verwendung eines szenariobasierten Ansatzes ermittelt. Dabei werden Schockszenarien simuliert, welche prognostizierte Auswirkungen auf die Solvency II Bilanz, eine (angenähert) ökonomische Bilanz des Versicherungsunternehmens, berechnen. Das SCR eines Untermoduls ergibt sich dann aus dem Verlust, der infolge eines speziellen Schockereignisses eintritt. Dieser Verlust berechnet sich aus der Veränderung der Basic Own Funds (BOF_0), welche definiert sind als Differenzbetrag aus (modifizierten) Vermögenswerten $\tilde{A}_0$ und (modifizierten) versicherungstechnischen Verpflichtungen $\tilde{L}_0$,

$$BOF_0 = \tilde{A}_0 - \tilde{L}_0.$$

Bei der Ermittlung von $\tilde{A}_0$ und $\tilde{L}_0$ werden die zugrundeliegenden Cashflows realistisch gemessen, jedoch folgende Modifikationen vorgenommen:

- für $\tilde{L}_0$ werden Nachrangdarlehen[6] abgezogen. Des Weiteren werden Steuerverpflichtungen undiskontiert abgezogen;
- bei $\tilde{A}_0$ werden Steuerguthaben angerechnet, jedoch nicht diskontiert. Ferner werden die Aktiva aus nachrangigen Darlehen berücksichtigt.

$\tilde{A}_0^{\text{netto}}$[7] definieren die Netto Vermögenswerte und $\tilde{L}_0^{\text{netto}}$ die Netto Verpflichtungen unter Berücksichtigung von verlustmindernden Maßnahmen wie einer möglichen Kürzung der Überschussbeteiligung. Trifft das Schockszenario $Szen_{i,k}$ unmittelbar ein, so bezeichnen $\tilde{A}_{0,i,k}^{\text{netto}}$ bzw. $\tilde{L}_{0,i,k}^{\text{netto}}$ die Netto Vermögenswerte bzw. Netto Verpflichtungen.

Somit gilt für die Netto Kapitalanforderung des Untermoduls k im Risikomodul i

$$SCR_{i,k}^{\text{netto}} = \tilde{A}_0^{\text{netto}} - \tilde{L}_0^{\text{netto}} - (\tilde{A}_{0,i,k}^{\text{netto}} - \tilde{L}_{0,i,k}^{\text{netto}}).$$

$\tilde{A}_{0,i,k}^{\text{netto}}$ und $\tilde{L}_{0,i,k}^{\text{netto}}$ werden unter der Annahme bestimmt, dass infolge des Risikos i ein Verlust eingetreten ist, welcher dem Value at Risk zu einem Konfidenzniveau von 99.5% entspricht.

[6] Von den Verpflichtungen werden nachrangige Darlehen abgezogen, da sie verwendet werden können, um eine Insolvenz abzuwehren. Dies ist eine Vereinfachung, da in der Praxis die Überschussbeteiligung gekürzt werden würde, bevor nachrangige Verpflichtungen nicht mehr bedient werden.

[7] Die Tilde kennzeichnet eine Modifikation der jeweiligen Größe für die Solvency II Berechnung.

Die Verbindlichkeiten ergeben sich als Summe aus dem BE der versicherungstechnischen Rückstellungen V_0^{BE} und den übrigen Verbindlichkeiten $\tilde{L}_0^{\text{übrig}}$. Dabei setzt sich V_0^{BE} aus dem BE der versicherungstechnischen Rückstellungen für garantierte Leistungen $V_{0,\text{gar}}^{\text{BE}}$ und dem Barwert künftiger Boni FDB_0 zusammen. Es gilt $\tilde{A}_0^{\text{netto}} = \tilde{A}_0$ und $\tilde{A}_{0,i,k}^{\text{netto}} = \tilde{A}_{0,i,k}$, da der Marktwert der Vermögenswerte nicht von künftigen risikomindernden Maßnahmen abhängt. Falls kein Verlust eintritt, gilt $\tilde{L}_0^{\text{netto}} = \tilde{L}_0$. Hat das Schockszenario keine Auswirkung auf den Diskontierungszins[8], so folgt

$$\begin{aligned} SCR_{i,k} - SCR_{i,k}^{\text{netto}} &= \tilde{L}_0 - \tilde{L}_{0,i,k}^{\text{netto}} \\ &= \overbrace{\tilde{L}_0^{\text{übrig}} + V_{0,\text{gar}}^{\text{BE}} + FDB_0} - \overbrace{(\tilde{L}_0^{\text{übrig}} + V_{0,\text{gar}}^{\text{BE}} + FDB_{0;0,i,k})} \\ &= FDB_0 - FDB_{0;0,i,k}, \end{aligned}$$

wobei $FDB_{0;0,i,k}$ der zum Zeitpunkt 0 erwartete Wert der Überschussbeteiligung zur Zeit 0 ist, unter der Annahme des Schockszenarios $Szen_{i,k}$. Somit gilt für das Brutto SCR

$$SCR_{i,k} = SCR_{i,k}^{\text{netto}} + FDB_0 - FDB_{0;0,i,k}.$$

Die Bestimmung von SCR_i^{netto} aus $(SCR_{i,k}^{\text{netto}})_k$ erfolgt auf gleiche Weise wie die Bestimmung von SCR_i aus $(SCR_{i,k})_k$. Analog zu (3.3) gilt

$$\begin{aligned} BSCR^{\text{netto}} = &\sqrt{\sum_{i,j\in\{\text{Markt, Kredit, Leben, Kranken, Nichtleben}\}} corr_{\text{BSCR}}^{i,j} SCR_i^{\text{netto}} SCR_j^{\text{netto}}} \\ &+ SCR_{\text{Immat}}, \end{aligned}$$

wobei $SCR_{\text{Immat}}^{\text{netto}} = SCR_{\text{Immat}}$.

Nun kann die Adjustierung für risikomindernde Wirkung der zukünftigen Überschussbeteiligung und latenter Steuern bestimmt werden. Die Adjustierung für den risikomindernden Effekt[9] der Überschussdeklaration ist gegeben durch

$$Adj_{\text{TP}} = -\max\Big(\min(BSCR - BSCR^{\text{netto}}, FDB_0), 0\Big).$$

[8] Ist der Diskontierungszins durch das Schockszenario betroffen, so ändern sich $V_{0,\text{gar}}^{\text{BE}}$ und $\tilde{L}_0^{\text{übrig}}$.

[9] Die bei der Berechnung der aggregierten Netto- und Brutto Kapitalanforderungen verwendeten Zinskurven müssen übereinstimmen. Vergleiche Kriele & Wolf (2016, Anmerkung 4.18).

Mit (3.1) und (3.2) folgt

$$SCR = BSCR - \max\Big(\min(BSCR - BSCR^{\text{netto}}, FDB_0),0\Big) + Adj_{\text{DT}} + SCR_{\text{Op}}.$$

Dabei betrachte man $BSCR$ als Funktion von $(SCR_{i,k}^{\text{netto}})_{i,k}$, $(FDB_{0;0,i,k})_{i,k}$ und FDB_0. Die Formel

$$\widetilde{SCR} = BSCR^{\text{netto}} + Adj_{\text{TP}} + SCR_{\text{Op}}$$

wäre eingängig, kann hier jedoch nicht verwendet werden, da die Aggregation von $(FDB_{0;0,i,k})_{i,k}$ größer als FDB_0 sein könnte und die risikomindernden Effekte dadurch doppelt gezählt werden würden.

Aufgeschobene Steuern können sowohl Steuerguthaben, als auch Steuerschulden darstellen. DT_0 bezeichne den aktuellen Wert der aufgeschobenen Steuern und DT_0^{Schock} den Wert infolge eines unmittelbaren Verlustes in Höhe von

$$BSCR + Adj_{\text{TP}} + SCR_{\text{Op}}.$$

Dann ist Adj_{DT} gegeben durch

$$Adj_{\text{DT}} = \min(DT_0^{\text{Schock}} - DT_0,0).$$

Vergleiche European Insurance and Occupational Pensions Authority (2014a, Abschnitt SCR.1.5 - SCR.1.6, SCR.2.13 - SCR.2.15), Kriele & Wolf (2016, Kapitel 4.7.2 - 4.7.3) und Weindorfer (2011, Kapitel 4.2.1.4).

Im weiteren Verlauf wird der Fokus auf das Risikomodul *Leben* und insbesondere auf das Untermodul *Storno* gerichtet.

3.3 Risikomodul Leben

Die nachfolgenden zwei Kapitel stützen sich auf European Insurance and Occupational Pensions Authority (2014a, Abschnitt SCR.7.43 - SCR.7.51), European Insurance and Occupational Pensions Authority (2014b, Kapitel 3.6), Kriele & Wolf (2016, Kapitel 4.7.4.5) und Solvency II kompakt: das aktuelle Kompetenzportal zu Solvency II (2017c).

Das Risikomodul *Leben* untergliedert sich in folgende Untermodule: *Mortalität*, *Langlebigkeit*, *Invalidität*, *Storno*, *Kosten*, *Revision* und *Katastrophen*. Die Kapitalanforderungen $(SCR^{\text{netto}}_{\text{Leben},k})_{k\in\{1,\dots,7\}}$ und $(SCR_{\text{Leben},k})_{k\in\{1,\dots,7\}}$ werden dann unter Verwendung der Wurzelformel

$$SCR^{\text{netto}}_{\text{Leben}} = \sqrt{\sum_{i,j} corr^{i,j}_{\text{Leben}} SCR^{\text{netto}}_{\text{Leben},i} SCR^{\text{netto}}_{\text{Leben},j}},$$
$$SCR_{\text{Leben}} = \sqrt{\sum_{i,j} corr^{i,j}_{\text{Leben}} SCR_{\text{Leben},i} SCR_{\text{Leben},j}}$$

und gegebener Korrelationsmatrix $corr_{\text{Leben}}$

$corr_{\text{Leben}}$	Mortalität	Langlebigkeit	Invalidität	Storno	Kosten	Revision	Katastrophen
Mortalität	1.00	-0.25	0.25	0.00	0.25	0.00	0.25
Langlebigkeit	-0.25	1.00	0.00	0.25	0.25	0.25	0.00
Invalidität	0.25	0.00	1.00	0.00	0.50	0.00	0.25
Storno	0.00	0.25	0.00	1.00	0.50	0.00	0.25
Kosten	0.25	0.25	0.50	0.50	1.00	0.50	0.25
Revision	0.00	0.25	0.00	0.00	0.50	1.00	0.00
Katastrophen	0.25	0.00	0.25	0.25	0.25	0.00	1.00

Tabelle 3.2: Korrelationsmatrix der Untermodule im Risikomodul Leben

aggregiert.

Nun wird das Untermodul *Storno* betrachtet und der szenariobasierte Ansatz zur Berechnung der Kapitalanforderungen $SCR^{\text{netto}}_{\text{Leben,Storno}}$ und $SCR_{\text{Leben,Storno}}$ vorgestellt.

3.4 Untermodul Storno

Das Untermodul *Storno* erfasst adverse Entwicklungen der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten, welche aus Veränderungen in Höhe und Volatilität der Storno- und Rückkaufsraten der Versicherungsverträge hervorgehen.

Sei $l^{\text{C}}_{t;\tau}$ der BE der Stornorate für den Versicherungsvertrag C und das Jahr τ, basierend auf der zum Zeitpunkt t gegebenen Information. Die sich für das Jahr τ realisierende Stornorate wird mit l^{C}_{τ} bezeichnet. In Kapitel 3.5 wird auf eine dynamische Modellierung der Stornoraten in Abhängigkeit vom Finanzmarkt eingegangen.

3.4.1 Schockszenarien

Für die Ermittlung der Kapitalanforderung $SCR_{\text{Leben,Storno}}$ anhand eines szenariobasierten Ansatzes werden drei separate Schockszenarien angewendet:

- **Down Szenario:** Eine unmittelbare dauerhafte Verringerung der Stornoraten,

  $$l^{\text{C}}_{0;\tau} \mapsto \max(50\% l^{\text{C}}_{0;\tau}, l^{\text{C}}_{0;\tau} - 20\%),$$

  auf diejenigen Versicherungsverträge, für die eine Verringerung zu einer Erhöhung der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten (ohne Risikomarge) führt. D.h. auf Verträge, die durch die Stornierung einen Gewinn erzeugen (positives Stornoergebnis) wird das Risiko der Verringerung der Stornoraten angewendet. Die resultierenden Kapitalanforderungen sind gegeben durch

  $$\begin{aligned} SCR^{\text{netto,down}}_{\text{Leben,Storno}} &= \tilde{A}_0 - \tilde{L}_0 - (\tilde{A}^{\text{netto,down}}_{0,\text{Leben,Storno}} - \tilde{L}^{\text{netto,down}}_{0,\text{Leben,Storno}}) \text{ und} \\ SCR^{\text{down}}_{\text{Leben,Storno}} &= SCR^{\text{netto,down}}_{\text{Leben,Storno}} + FDB_0 - FDB^{\text{down}}_{0;0,\text{Leben,Storno}}. \end{aligned}$$

- **Up Szenario:** Eine unmittelbare dauerhafte Erhöhung der Stornoraten,

  $$l^{\text{C}}_{0;\tau} \mapsto \min(150\% l^{\text{C}}_{0;\tau}, 1),$$

  auf diejenigen Versicherungsverträge, für die eine Erhöhung zu einer Erhöhung der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten (ohne Risikomarge) führt. D.h. auf Verträge, die durch die Stornierung einen Verlust erzeugen (negatives Stornoergebnis) wird das Risiko der Erhöhung der Stornoraten angewendet. Die resultierenden Kapitalanforderungen sind gegeben durch

  $$\begin{aligned} SCR^{\text{netto,up}}_{\text{Leben,Storno}} &= \tilde{A}_0 - \tilde{L}_0 - (\tilde{A}^{\text{netto,up}}_{0,\text{Leben,Storno}} - \tilde{L}^{\text{netto,up}}_{0,\text{Leben,Storno}}) \text{ und} \\ SCR^{\text{up}}_{\text{Leben,Storno}} &= SCR^{\text{netto,up}}_{\text{Leben,Storno}} + FDB_0 - FDB^{\text{up}}_{0;0,\text{Leben,Storno}}. \end{aligned}$$

- **Mass Szenario:** Ein Massenstorno von

  – -70% derjenigen Versicherungsverträge, die innerhalb eines Gruppenvertrages für die betriebliche Altersvorsorge[10] abgeschlossen wurden und für die das Schockszenario zu einer Erhöhung der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten (ohne Risikomarge) führt.

[10] In European Insurance and Occupational Pensions Authority (2014a, Abschnitt SCR.7.51) wird auf Ausnahmen hingewiesen.

– -40% der übrigen Versicherungsverträge, für die das Schockszenario zu einer Erhöhung der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten (ohne Risikomarge) führt.

Die resultierenden Kapitalanforderungen sind gegeben durch

$$SCR^{\text{netto,mass}}_{\text{Leben,Storno}} = \tilde{A}_0 - \tilde{L}_0 - (\tilde{A}^{\text{netto,mass}}_{0,\text{Leben,Storno}} - \tilde{L}^{\text{netto,mass}}_{0,\text{Leben,Storno}}) \text{ und}$$
$$SCR^{\text{mass}}_{\text{Leben,Storno}} = SCR^{\text{netto,mass}}_{\text{Leben,Storno}} + FDB_0 - FDB^{\text{mass}}_{0;0,\text{Leben,Storno}}.$$

Dabei bezeichnen $\tilde{A}^{\text{netto,down/up/mass}}_{0,\text{Leben,Storno}}$ Schätzwerte für den Wert der modifizierten Vermögenswerte und $\tilde{L}^{\text{netto,down/up/mass}}_{0,\text{Leben,Storno}}$ Schätzwerte für den Wert der modifizierten Verbindlichkeiten unter Berücksichtigung des Up-, Down- bzw. Mass Szenarios.

Aus diesen drei Schockszenarien wird das Maximum ermittelt. Für die Kapitalanforderungen des Untermoduls *Storno* gilt dann

$$SCR^{\text{netto}}_{\text{Leben,Storno}} = \max(SCR^{\text{netto,down}}_{\text{Leben,Storno}}, SCR^{\text{netto,up}}_{\text{Leben,Storno}}, SCR^{\text{netto,mass}}_{\text{Leben,Storno}}) \text{ und}$$

$$SCR_{\text{Leben,Storno}} = \begin{cases} SCR^{\text{down}}_{\text{Leben,Storno}}, & \text{falls } SCR^{\text{netto}}_{\text{Leben,Storno}} = SCR^{\text{netto,down}}_{\text{Leben,Storno}} \\ SCR^{\text{up}}_{\text{Leben,Storno}}, & \text{falls } SCR^{\text{netto}}_{\text{Leben,Storno}} = SCR^{\text{netto,up}}_{\text{Leben,Storno}} \\ SCR^{\text{mass}}_{\text{Leben,Storno}}, & \text{falls } SCR^{\text{netto}}_{\text{Leben,Storno}} = SCR^{\text{netto,mass}}_{\text{Leben,Storno}}. \end{cases}$$

Insbesondere wird im $SCR^{\text{netto}}_{\text{Leben,Storno}}$ die Verlustausgleichsfähigkeit der versicherungstechnischen Rückstellungen berücksichtigt. Vergleiche European Insurance and Occupational Pensions Authority (2014a, Abschnitt SCR.7.47).

Folgendes Kapitel behandelt das Stornoverhalten von Versicherungsnehmern und bezieht sich auf ein Beispiel von Kriele & Wolf (2016). Darin wird ein Verhaltensmodell vorgestellt, welches Entscheidungen dynamisch in Abhängigkeit vom Zustand des Versicherungsunternehmens und vom ökonomischen Umfeld modelliert.

Kriele & Wolf (2016, Kapitel 4.7.5) stellen das dynamische Stornoverhalten im Rahmen eines Beispiels für die Berechnung der Kapitalanforderung für ein vereinfachtes Lebensversicherungsunternehmen vor. Dabei wird das Versicherungsportfolio eines Beispielunternehmens betrachtet und die Kapitalanforderung anhand von fiktiven Zahlen berechnet. In der vorliegenden Diplomarbeit wird das dynamische Stornoverhalten nur auf theoretischer Basis behandelt. Für die praxisbezogenen Berechnungen wird auf Kriele & Wolf (2016, Kapitel 4.7.5) verwiesen.

3.5 Dynamisches Stornoverhalten

Das Stornoverhalten von Versicherungsnehmern ist abhängig von persönlichen Gegebenheiten, Konkurrenzprodukten, volkswirtschaftlichen Faktoren, sowie der Überschussbeteiligung, die den Versicherten gezahlt wird. Da sich persönliche Gegebenheiten und Konkurrenzprodukte schwer schätzen und modellieren lassen, betrachten Kriele & Wolf (2016) das Stornoverhalten als Funktion des Zustands des Kapitalmarktes und der Überschussdeklaration. Der Zustand des Kapitalmarktes am Ende des Jahres t sei dabei gegeben durch

$$Zustand_t^{\text{ökon}} = \frac{\frac{S_t}{S_{t-1}} - 1 - s_t}{s_t},$$

wobei $\frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$ die Rendite des Aktienindexes und s_t den risikolosen Zins darstellt. Die Überschussdeklaration b_t^{C} ist abhängig vom Geschäftserfolg des Versicherungsunternehmens und vom ökonomischen Umfeld. Für die Berechnung von b_t^{C} wird auf das Beispiel von Kriele & Wolf (2016, Kapitel 4.7.5.2) verwiesen. Die Überschussbeteiligung ergibt sich aus $Bonus_t^{\text{C}} = b_t^{\text{C}} V_{t-1}^{\text{C,Preis}}$, wobei $V_{t-1}^{\text{C,Preis}}$ die versicherungstechnischen Rückstellungen bezeichnen.

Bei Vertragsabschluss wird den Versicherten ein ungünstiges, ein wahrscheinliches und ein günstiges Szenario vorgestellt. Die hypothetische Überschussdeklaration $b_t^{\text{C,hypo}}$ entspricht derjenigen aus dem wahrscheinlichen Szenario. Es wird zur Vereinfachung angenommen, dass die hypothetische Überschussdeklaration für jedes Jahr t und für jede versicherte Person konstant bleibt.

Zunächst schätzt das Versicherungsunternehmen Stornoraten aufgrund der Vergangenheitserfahrung unter der Annahme, dass die Überschussdeklaration jedes Jahr der hypothetischen Überschussdeklaration entspricht, d.h. $b_t^{\text{C}} = b_t^{\text{C,hypo}}$ und der Zustand des Kapitalmarkts gleich bleibt, d.h. $Zustand_t^{\text{ökon}} = Zustand_0^{\text{ökon}}$. Diese Schätzung dient als Basisstorno $l_t^{\text{C,Basis}}$ für die dynamische Modellierung. Ferner wird im Beispiel von Kriele & Wolf (2016) angenommen, dass das Basisstorno während der Vertragslaufzeit für jede versicherte Person linear auf 0 fällt. Die Basisstorni werden für die Versicherungsverträge C_d mit Restlaufzeit d zur Zeit 0 geschätzt.

Die Dynamik wird folgenderweise modelliert:

- Für Jahre t mit

$$\frac{Zustand_t^{\text{ökon}}}{Zustand_0^{\text{ökon}}} < 50\%$$

erfolgt eine Erhöhung des Basisstornos um 15%.

- Für Jahre t mit

$$\frac{Zustand_t^{\text{ökon}}}{Zustand_0^{\text{ökon}}} > 200\%$$

erfolgt eine Verringerung des Basisstornos um 15%.

- Die Zufriedenheit mit der tatsächlichen Überschussdeklaration wird modelliert durch $\frac{bi_t^{\text{C}}}{bi_t^{\text{C,hypo}}}$, wobei

$$bi_t^{\text{C}} = \frac{\frac{S_t}{S_{t-1}} - 1}{b_{t-1}^{\text{C}} + s_t^{\text{Preis}}},\ bi_t^{\text{C,hypo}} = \frac{\frac{S_0}{S_{-1}} - 1}{b^{\text{C,hypo}} + s_0^{\text{Preis}}}.$$

Der Diskontzins s_t^{Preis} sei dabei für alle Verträge C des Portfolios gleich. Es wird angenommen, dass ein Anstieg von $\frac{bi_t^{\text{C}}}{bi_t^{\text{C,hypo}}}$ über einen Wert von 1.2 das Storno (relativ) um 25% ansteigen lässt, bis zu einer maximalen Verdopplung des Basisstornos.

Somit gilt insgesamt

$$l_t^C = \min(1, \delta_t^{\text{sx,C}} l_t^{\text{C,Basis}}).$$

Der dynamische Faktor $\delta_t^{\text{sx,C}}$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned}\delta_t^{\text{sx,C}} = 1 &+ 0.15 \times \mathbb{1}_{\left\{\frac{Zustand_t^{\text{ökon}}}{Zustand_0^{\text{ökon}}} < 0.5\right\}} - 0.15 \times \mathbb{1}_{\left\{\frac{Zustand_t^{\text{ökon}}}{Zustand_0^{\text{ökon}}} > 2\right\}} \\ &+ 0.25 \times \min\left(4, \max\left(0, \frac{bi_t^{\text{C}}}{bi_t^{\text{C,hypo}}} - 1.2\right)\right),\end{aligned}$$

falls der Vertrag vor dem Jahr t schon im Bestand war. Ansonsten fällt der letzte Summand weg.

Wie bereits erwähnt, beruht die Ausgangsbilanz auf dem Jahr 0. Die Bestimmung der Rückstellungen für garantierte Leistungen zum Bilanzzeitpunkt $t = 0$, V_0^{gar},

setzt jedoch die Berechnung künftiger Bilanzen voraus, da diese vom BE künftiger Stornoraten abhängen. Die künftigen Stornoraten sind hingegen abhängig vom späteren Zustand des Unternehmens und insbesondere von der Höhe der aktuellen und der künftigen Rückstellungen. Dabei entsteht ein implizites System von Gleichungen für V_0^{gar}. Kriele & Wolf (2016) stellen daher folgende Approximation für das Jahr $\tau > t$ vor[11]

$$l_{t;\tau}^{\text{C}} = \min(1, \delta_t^{\text{sx,C}} l_\tau^{\text{C,Basis}}),$$

wobei der gegenwärtige Faktor $\delta_t^{\text{sx,C}}$ den BE für zukünftige Zeitpunkte bestimmt[12]. Siehe (Kriele & Wolf, 2016, Kapitel 4.7.5.1, 4.7.5.2).

3.6 Zusammenfassung

Dieses Kapitel widmete sich dem Stornorisiko gemäß der Standardformel nach Solvency II. Dabei wurde der modulare Aufbau der Standardformel, sowie der szenariobasierte Ansatz zur Bestimmung der Kapitalanforderungen für das Stornorisiko beschrieben. Im Anschluss daran wurde ein Beispiel für die Modellierung von dynamischem Stornoverhalten vorgestellt.

[11] Diese Vereinfachung müsste jedoch erst von der Versicherungsaufsicht anerkannt werden.

[12] Kriele & Wolf (2016) weisen daraufhin, dass dieser Ansatz nicht vollständig konsistent ist. Denn in einem deterministischen Modell würde man annehmen, dass der BE der Stornoraten für das Jahr $\tau > t > 0$ unabhängig davon ist, ob dieser zur Zeit 0 oder zur Zeit t geschätzt wird.

Kapitel 4

Simulationsmodell für das Stornoergebnis

In diesem Kapitel wird ein Simulationsmodell für das Stornoergebnis vorgestellt, welches auf einer (vereinfachten) Kapitallebensversicherung beruht. Zu Beginn wird der Begriff der Kapitallebensversicherung erläutert, gefolgt von der Beschreibung des Modells und einer Zusammenfassung der Modellergebnisse.

4.1 Kapitallebensversicherung

Eine Kapitallebensversicherung ist eine gemischte Versicherung, bestehend aus einer Erlebensfallversicherung und einer Risikolebensversicherung mit identischer Laufzeit. Die Versicherungssumme ist im Allgemeinen konstant und wird zum Vertragsende ausbezahlt, falls der Versicherungsnehmer die Vertragsdauer überlebt. Falls der Versicherungsnehmer vor Ende der Vertragsdauer stirbt, wird die Versicherungssumme vorzeitig ausbezahlt. Zudem gibt es auch Varianten mit erhöhter Todesfall- bzw. Erlebensfallleistung oder mehreren Teilauszahlungen. Die Kapitallebensversicherung vereint die Zwecke der Alters- und der Hinterbliebenenversorgung. Ferner eignet sie sich zur Absicherung von Krediten, Darlehen und Hypotheken und kombiniert somit Sicherungs- und Sparfunktion. Siehe Ortmann (2016, Kapitel 1.3, 1.5, 4.5.1).

4.2 Modellbeschreibung

Ein wesentlicher Bestandteil dieser Diplomarbeit besteht darin, ein Simulationsmodell für das Stornoergebnis zu erstellen. Dieses wird anhand des Tabellenkalkulationsprogramms Microsoft Excel umgesetzt, trägt den Titel „Simulationsmodell_Stornoergebnis.xlsx“ und besteht aus einer Arbeitsmappe mit neun Blättern: *Annahmen*, *Stornoergebnis*, *Versicherungsbestand*, *VN*, *Kosten*, *GuV*, *Stornoraten*, *Sterbetafel* und *Dekrementmodelle*.

Das Modell simuliert einen Versicherungsbestand, bestehend aus a gleichaltrigen und gleichgeschlechtlichen Versicherungsnehmern, die jeweils eine Kapitallebensversicherung mit Versicherungssumme S über eine Laufzeit von n Jahren abschließen. Dabei werden Vertragsbedingungen festgelegt und Annahmen über Geschlecht, Alter und Anzahl der Versicherungsnehmer getroffen. Des Weiteren werden Beiträge und Reserven anhand von Kommutationswerten kalkuliert und Leistungen auf Grundlage der Sterbetafel DAV 2008 T und auf Basis von deterministischen Stornoraten bestimmt. Im Hintergrund berechnet ein Dekrementmodell die Anzahl aktiver Policen pro Jahr und berücksichtigt dabei verstorbene und stornierte Policen. Unter Verwendung von typischen Kostensätzen für eine Kapitallebensversicherung wird eine (vereinfachte) Gewinn- und Verlustrechnung (GuV) aufgestellt. Dabei wird das Ergebnis der gewöhnlichen Geschäftstätigkeit (EGT), der BE der Versicherungsleistungen, sowie der Present Value of Future Profit (PVFP), welcher den Wert des Versicherungsportfolios ermittelt, bestimmt. Diese Berechnungen werden jeweils für das Storno Up-, Down- und Mass Szenario, sowie für das Basis Szenario durchgeführt.

Es wird darauf hingewiesen, dass in diesem Modell Zuschläge, wie Stückkostenzuschläge und Ratenzuschläge bzw. -abschläge[1], nicht berücksichtigt werden. Die ausreichende Prämie wird daher im Folgenden als Bruttoprämie bezeichnet. Man beachte, dass Kosteninflation und Überschussbeteiligung[2] hier ebenfalls keine Berücksichtigung finden.

4.2.1 Ziel

Das Ziel des vorliegenden Simulationsmodells besteht darin, den Vertragstyp der Kapitallebensversicherung abzubilden, um das Stornoergebnis zu betrachten. Dabei

[1] Vergleiche Ortmann (2016, Kapitel 4.11).
[2] Siehe Ortmann (2016, Kapitel 6.2).

werden die Best Estimates (BEs) der Versicherungsleistungen für das Storno Up-, Down- und Mass Szenario bestimmt, die Differenz aus den BEs und dem BE des Basis Szenarios ermittelt und folglich das Szenario mit der maximalen Auswirkung identifiziert.

Das Modell wird motiviert durch die These, dass bei einem profitablen Versicherungsprodukt ein Storno Up Szenario und bei einem nicht profitablen Versicherungsprodukt ein Storno Down Szenario wirkt. Diese These soll anhand des Simulationsmodells untersucht werden. Dabei wird der wirtschaftliche Hintergrund der Gewinnquellen und deren Abhängigkeit vom Storno analysiert und die Ergebnisse gegenübergestellt. Als Gewinnquelle dient neben den tatsächlich anfallenden Kosten, die Einbehaltung eines Stornoabzuges seitens des Versicherungsunternehmens.

4.2.2 Annahmen

Im Arbeitsblatt *Annahmen* werden zunächst folgende Annahmen getroffen.

Beschreibung	**Parameter**	**Wert**
Vertragsdauer in Jahren	n	20
Beitragszahlungsdauer in Jahren	h	20
Geschlecht der Versicherungsnehmer	g	männlich
Alter der Versicherungsnehmer zum Zeitpunkt $t = 0$	x	40
Anzahl der Versicherungsnehmer zum Zeitpunkt $t = 0$	a	Eingabe
Versicherungssumme in € konstant	S	Eingabe
Zins	i	0%
Abzinsungsfaktor	v	1
Bruttoprämie pro Versicherungsnehmer	B^B	abhängig von S
Nettoprämie pro Versicherungsnehmer	B^N	abhängig von S

Tabelle 4.1: Modellannahmen

Die Anzahl der Versicherungsnehmer, sowie die Versicherungssumme können beliebig eingegeben werden. Beide Eingaben müssen jedoch positiv sein und die Anzahl der Versicherungssumme muss zudem ganzzahlig sein. Ansonsten tritt eine Fehlermeldung auf. Als Defaultwerte werden 100 Versicherungsnehmer und eine Versicherungssumme in Höhe von je 100 000€ angenommen. Die Eingabefelder sind im Simulationsmodell jeweils gelb hinterlegt.

Der dem Simulationsmodell zugrundeliegende Zins[3] beträgt 0% und der Abzinsungsfaktor ergibt sich aus

$$v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+0\%} = 1.$$

Die Berechnungen der Brutto- und Nettoprämie werden in Kapitel 4.2.4 näher erläutert. Die Höhe der Prämien ist jeweils abhängig von der Versicherungssumme.

4.2.3 Rechnungsgrundlagen

Der Tarifkalkulation liegen drei Typen von Rechnungsgrundlagen zugrunde:

- Zins,
- Sterblichkeit und
- Kosten.

Die bei der Berechnung verwendeten Rechnungsgrundlagen heißen Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung. Diese beinhalten Sicherheitszuschläge gemäß dem Vorsichtsprinzip. Die der Realität entsprechenden Rechnungsgrundlagen heißen Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung. Die Differenz aus Rechnungsgrundlagen 1. und 2. Ordnung ist wesentlich für die Ermittlung der Gewinne und Verluste eines Versicherungsunternehmens. Vergleiche Ortmann (2016, Kapitel 4, 4.1). Im Folgenden werden die Rechnungsgrundlagen näher erläutert.

Rechnungszins

Der Rechnungszins dient als Kalkulationsgrundlage zur Diskontierung künftiger Zahlungen. Dabei wird eine garantierte Minimalverzinsung festgelegt, welche gesetzlich geregelt ist. Vergleiche Ortmann (2016, Kapitel 4.1.1).

Der Zins fließt über die Berechnung der Kommutationswerte in die Sterbetafel (siehe Abschnitt Sterblichkeit) und somit in die Kalkulation der Beiträge und der Reserven ein. Des Weiteren wird er verwendet für die Berechnung der Kapitalerträge des technischen Geschäfts, die Berechnung des BE der Versicherungsleistungen und die

[3]Die Rechnungsgrundlagen werden im nächsten Abschnitt behandelt.

Berechnung des PVFP. Diese werden im Rahmen der GuV in Abschnitt 4.2.7 näher erläutert.

Sterblichkeit

Die Modellierung der Sterblichkeit erfolgt auf Basis der geschlechterspezifischen Sterbetafel DAV 2008 T, wobei hier diejenige für Männer betrachtet wird. In einer Sterbetafel wird der natürliche Abbau einer geschlossenen Personengesamtheit, von der Geburt bis zum Tod jedes Individuums, in Abhängigkeit des erreichten Lebensalters ausgedrückt. Die Elemente der Sterbetafel sind

- das erreichte Lebensalter x,
- die Anzahl der Lebenden l_x im Alter x,
- die Anzahl der Gestorbenen d_x zwischen den Altern x und $x+1$,
- die Überlebenswahrscheinlichkeit p_x, d.h. die relative Häufigkeit, dass ein x-Jähriger das Alter $x+1$ erreicht und
- die Sterbewahrscheinlichkeit q_x, d.h. die relative Häufigkeit, dass ein x-Jähriger vor Erreichen des Alters $x+1$ stirbt.

Diese verkürzte Sterbetafel wird im Arbeitsblatt *Sterbetafel* des vorliegenden Modells durch Kommutationswerte erweitert. Es wird von einer Gesamtheit von $l_0 = 100\,000$ Männern mit jeweiligem Schlussalter von $\omega = 121$ ausgegangen. Die Sterbewahrscheinlichkeit (Sterblichkeit) 2. Ordnung, die die wahre Sterblichkeitsrate angibt, wird der Sterbetafel DAV 2008 TM entnommen. Diese wird für die Berechnung der Todesfallleistung in der GuV (siehe Kapitel 4.2.7) benötigt.

Die Sterblichkeit 1. Ordnung berücksichtigt einen Sicherheitszuschlag auf die Sterbewahrscheinlichkeit und findet Anwendung bei der Kalkulation der Beiträge und der Reserven. Der diesem Modell zugrundeliegende Zuschlag beträgt 0.34.

Für die Lebenden im Alter x gilt

$$l_x = l_{x-1} \cdot p_{x-1} = l_{x-1}(1 - q_{x-1}).$$

Die Anzahl der diskontierten Lebenden im Alter x ergibt sich aus

$$D_x = l_x v^x,$$

wobei $v = \frac{1}{1+i}$. Für die Summe der diskontierten Lebenden im Alter x bis ω gilt

$$N_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k}.$$

Für die Anzahl der diskontierten Toten im Alter x gilt

$$C_x = d_x v^{x+1},$$

wobei $d_x = l_x - l_{x+1}$. Die Summe der diskontierten Toten im Alter x bis ω ergibt sich aus

$$M_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x+k}.$$

Siehe Ortmann (2016, Kapitel 3.4.2, 3.7.1, 4.1.2, 4.2). Die mit den genannten Kommutationswerten erweiterte Sterbetafel wird im Arbeitsblatt *Sterbetafel* berechnet.

Kosten

Durch den Versicherungsvertragsabschluss entstehen Abschluss- und Vertriebskosten, welche bei der Tarifkalkulation berücksichtigt werden. Es werden fünf Arten von Kosten betrachtet.

- Unmittelbare Abschlusskosten (α^{Z}) für
  - Außendienst, Vermittler und Makler,
  - Werbung und Produktmarketing,
  - Ärztliche Untersuchung zur Feststellung des Gesundheitszustandes.
- Amortisationskosten (α^{γ}) für
  - Angebotserstellung,
  - Antragsbearbeitung, Anlegen des Vertrages und Ausstellen des Versicherungsscheines.
- Inkassokosten (β), d.h. Transaktionskosten im Geldverkehr.
- Verwaltungskosten (γ_1), darunter fallen direkte und indirekte Kosten für Bestandsverwaltung.

- Verwaltungskosten (γ_2), darunter fallen Kosten für Leistungsabwicklung.

Im Arbeitsblatt *Kosten* werden folgende Annahmen für die Kosten 1. Ordnung getroffen.

Kostenart	**Höhe**	**Bezugsgröße**	**Fälligkeit**
α^Z	40‰	Beitragssumme	einmalig bei Vertragsbeginn
α^γ	0.2‰	Versicherungssumme	vorschüssig für jedes Jahr der Beitragszahlungsdauer
β	4.5%	Jährlicher Beitrag	vorschüssig für jedes Jahr der Beitragszahlungsdauer
γ_1	0.5‰	Versicherungssumme	vorschüssig für jedes Jahr der Beitragszahlungsdauer
γ_2	1.0‰	Versicherungssumme	vorschüssig für jedes Jahr der Versicherungsdauer

Tabelle 4.2: Kostensätze

Vergleiche Ortmann (2016, Kapitel 4.1.3, 4.9, 4.9.1).

Die Kosten 2. Ordnung (tatsächlich anfallende Kosten) kommen in der GuV zum Tragen und dienen als Gewinnquelle. Die Abschlusskosten 2. Ordnung stimmen mit den Abschlusskosten 1. Ordnung überein.

4.2.4 Prämien

Wie bereits erwähnt, wird im Arbeitsblatt *Annahmen* die Brutto- und Nettoprämie pro Versicherungsnehmer berechnet. Brutto bezeichnet dabei die Berücksichtigung der Kosten. Man betrachte Beiträge, die während der gesamten Vertragslaufzeit konstant bleiben und jährlich vorschüssig zu zahlen sind. Die Beitragszahlungsdauer stimmt hier mit der Vertragsdauer überein.

Bruttoprämie

Für die Herleitung des jährlichen Bruttobeitrages für eine Kapitallebensversicherung wird auf Ortmann (2016, Kapitel 4.9.4) verwiesen. Ausgedrückt in Kommutationswerten ergibt sich die jährliche Bruttoprämie aus

$$B^B = S\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n} + (\alpha^\gamma + \gamma_1 + \gamma_2)N_x - (\alpha^\gamma + \gamma_1)N_{x+h} - \gamma_2 N_{x+n}}{(1-\beta)(N_x - N_{x+h}) - \alpha^Z h D_x}.$$

Siehe Ortmann (2016, Kapitel 4.9.4).

Nettoprämie

Für die Herleitung des jährlichen Nettobeitrages für eine Kapitallebensversicherung wird auf Ortmann (2016, Kapitel 4.7.4) verwiesen. Ausgedrückt in Kommutationswerten ergibt sich die jährliche Nettoprämie aus

$$B^N = S\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

Siehe Ortmann (2016, Kapitel 4.7.4). Die Zillmerung wird hier nicht näher erläutert. Dazu wird auf Ortmann (2016, Kapitel 4.8) verwiesen.

4.2.5 Dekrementmodelle

Im Arbeitsblatt *Dekrementmodelle* werden zwei Dekrementmodelle berechnet. Das erste Dekrementmodell bestimmt die Anzahl aktiver Policen unter Berücksichtigung der verstorbenen und stornierten Policen und unter der Annahme der Sterblichkeit 1. Ordnung (d.h. mit einem Sicherheitszuschlag). Das zweite Dekrementmodell bestimmt die Anzahl aktiver Policen unter Berücksichtigung der verstorbenen und stornierten Policen und unter der Annahme der Sterblichkeit 2. Ordnung (d.h. mit der wahren Sterblichkeitsrate).

Im Basis Szenario ergibt sich die Anzahl stornierter Policen pro Jahr unter Verwendung von deterministischen Stornoraten, welche im Arbeitsblatt *Stornoraten* dargestellt sind. Für das erste Jahr beträgt die Stornorate 10%. Diese fällt jährlich um 1%, bis sie 2% erreicht[4]. Des Weiteren werden die folgenden drei Schockszenarien auf die deterministischen Stornoraten angewendet:

- **Down Szenario:** Eine unmittelbare dauerhafte Verringerung der Stornoraten, d.h. die Stornoraten werden mit einem Faktor von 0.5 geschockt.
- **Up Szenario:** Eine unmittelbare dauerhafte Erhöhung der Stornoraten, d.h. die Stornoraten werden mit einem Faktor von 1.5 geschockt.
- **Mass Szenario:** Ein Massenstorno, d.h. die Stornorate des ersten Jahres entspricht einem Wert von 0.4. Die Stornoraten der darauffolgenden Jahre entsprechen denjenigen des Basis Szenarios.

[4]Die Stornoraten lehnen sich an Kochanski (2010, Kapitel 1.1) an.

Beide Dekrementmodelle sind jeweils untergliedert in ein Basis-, Up-, Down- und Mass Szenario. In den einzelnen Szenarien werden dann die Stornoraten aus den entsprechenden geschockten Stornoraten verwendet.

4.2.6 Versicherungsbestand

Im Arbeitsblatt *Versicherungsbestand* werden die Beiträge und Reserven für den gesamten Versicherungsbestand berechnet. Dabei wird die im Arbeitsblatt *Annahmen* kalkulierte Brutto- und Nettoprämie pro Jahr mit der Anzahl aktiver Policen multipliziert.

Die Reserven, d.h. die Brutto- und Nettodeckungsrückstellungen ${}_tV_x^B$ und ${}_tV_x^N$, berechnen sich wie folgt

$$\begin{aligned} {}_tV_x^B =& S\frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n} + (\alpha^\gamma + \gamma_1 + \gamma_2)N_{x+t} - (\alpha^\gamma + \gamma_1)N_{x+h} - \gamma_2 N_{x+n}}{D_{x+t}} \\ & - B^B \frac{(1-\beta)(N_{x+t} - N_{x+h})}{D_{x+t}}, \end{aligned}$$

$${}_tV_x^N = S\frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} - B^N \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}$$

und werden anschließend mit der Anzahl aktiver Policen pro Jahr multipliziert.

Zudem werden im Arbeitsblatt *Versicherungsbestand* die Stornoleistungen bestimmt. Die Rückkaufswerte entsprechen den Bruttodeckungsrückstellungen abzüglich einer Stornogebühr. Diese werden dann pro Jahr mit der Anzahl aktuell stornierter Policen multipliziert. Der Stornoabzug entspricht einem Prozentsatz des Rückkaufswertes. Im ersten Jahr beträgt der Prozentsatz 5%. Dieser fällt jährlich um 0.5%, bis er 0% erreicht[5]. Die jährlichen Prozentsätze sind im Blatt *Stornoraten* dargelegt.

Des Weiteren werden die Bruttoprämien für den gesamten Versicherungsbestand in Spar-, Risiko- und Kostenprämien aufgegliedert. Diese Aufgliederung erfolgt im Arbeitsblatt *VN* zunächst pro Versicherungsnehmer. Anschließend werden die Prämien im Arbeitsblatt *Versicherungsbestand* mit der Anzahl aktiver Policen pro Jahr multipliziert.

[5]Die Prozentsätze lehnen sich an Kochanski (2010, Kapitel 1.1) an.

Spar-, Risiko- und Kostenprämie ergeben sich anhand folgender Formeln

$$
\begin{aligned}
B_t^{\text{Spar}} &= v \cdot {}_{t+1}V_x^N - {}_tV_x^N, \\
B_t^{\text{Risiko}} &= v \cdot q_{x+t}(T_{t+1} - {}_{t+1}V_x^N) \\
B_t^{\text{Kosten}} &= B^B - B^N,
\end{aligned}
$$

wobei T_t der Todesfallleistung entspricht, welche bei Tod innerhalb der Periode $[t-1, t)$ am Ende des Jahres, d.h. zum Zeitpunkt t, anfällt. Vergleiche Ortmann (2016, Kapitel 5.1.4, 5.3.4, 5.9).

Diese Berechnungen werden jeweils für das Basis, Up-, Down- und Mass Szenario durchgeführt, unter Verwendung des entsprechenden Dekrementmodells.

4.2.7 Gewinn und Verlustrechnung

Im Arbeitsblatt *GuV* wird eine (vereinfachte) GuV für das Lebensversicherungsgeschäft dargestellt. Eine GuV ist eine Gegenüberstellung der Einnahmen und Ausgaben des getätigten Versicherungsgeschäfts. Somit kann eine Zerlegung des Unternehmensgewinns in seine Ergebnisquellen vorgenommen werden. Das Stornoergebnis entspricht dabei den finanziellen Auswirkungen aus Vertragsstornierungen. Die GuV stellt neben der Bilanz, dem Anhang und dem Lagebericht, einen Teil des Jahresabschlusses dar. Folglich ist die GuV ein nicht unerheblicher Teil der Rechnungslegung. Es wird unterschieden zwischen versicherungstechnischen und nicht versicherungstechnischen Positionen. Zu den versicherungstechnischen Positionen in der Lebensversicherung zählen

- verdiente Beiträge für eigene Rechnung,
- Kapitalerträge des technischen Geschäfts,
- Aufwendungen für Versicherungsfälle (Todesfall- und Erlebensfallleistungen),
- Aufwendungen für Rückkäufe (Stornoleistungen),
- Veränderung der Bruttodeckungsrückstellungen und
- Aufwendungen für den Versicherungsbetrieb.

Zu den nicht versicherungstechnischen Positionen in der Lebensversicherung zählen

- sonstige Erträge,
- sonstige Aufwendungen und
- Steuern.

Im vorliegenden Modell werden nur die wesentlichen versicherungstechnischen Positionen in der Lebensversicherung betrachtet. Das EGT entspricht der Differenz aus Summe der Einnahmen und Summe der Ausgaben. Ein Gewinn liegt vor, sofern das Ergebnis positiv ist. Andernfalls liegt ein Verlust vor. Vergleiche Ortmann (2016, Kapitel 6.1.2).

Im Arbeitsblatt *GuV* werden zunächst die verrechneten Prämien pro Stichtag (31.12.2010 - 31.12.2029) angegeben. Diese gehen negativ in die GuV ein. Es wird darauf hingewiesen, dass im vorliegenden Modell keine Rückversicherungsverträge abgeschlossen werden.

Als Nächstes werden die Kapitalerträge des technischen Geschäfts,

$$K_t = (B_t^{\text{Spar}} + B_t^{\text{Risiko}} + {}_tV_x^B)i,$$

berechnet, welche ebenfalls negativ in die GuV eingehen. Da hier ein realistischer Zins in Höhe von 0% angenommen wird, betragen die Kapitalerträge des technischen Geschäfts jeweils 0.

Des Weiteren werden Aufwendungen für Versicherungsfälle, gegliedert in Todesfall-, Erlebensfall- und Stornoleistungen, berechnet. Die Todesfallleistungen entsprechen der Versicherungssumme, multipliziert mit der Anzahl jährlich verstorbener Policen. Die Erlebensfallleistungen werden zum 31.12.2029 fällig und entsprechen der Versicherungssumme multipliziert mit der Anzahl aktiver Policen zu diesem Zeitpunkt. Die Stornoleistungen werden aus dem Arbeitsblatt *Versicherungsbestand* übernommen.

Die Veränderungen der versicherungstechnischen Rückstellungen ergeben sich aus der Differenz aus ${}_tV_x^B$ und ${}_{t-1}V_x^B$.

Die Aufwendungen für den Versicherungsbetrieb untergliedern sich in Aufwendungen für den Versicherungsabschluss und sonstige Aufwendungen für den Versicherungsbetrieb. Die Kosten werden jeweils mit der Anzahl aktiver Policen pro Jahr multipliziert.

Anschließend wird der BE der Versicherungsleistungen berechnet und der PVFP bestimmt. Der BE der Versicherungsleistungen entspricht dabei dem Barwert der erwarteten zukünftigen Prämien, Leistungen und Kosten und der PVFP dem Barwert der erwarteten zukünftigen Rohüberschüsse. Abgezinst wird mit der Diskontrate $(\frac{1}{1+i})^t$. Da im vorliegenden Simulationsmodell ein Zins von 0% angenommen wird, beträgt der Abzinsungsfaktor hier 1 und der BE entspricht dem PVFP.

Die GuV wird jeweils für das Basis-, Up-, Down- und Mass Szenario, unter Verwendung des entsprechenden Dekrementmodells, angefertigt.

Zudem existieren im Arbeitsblatt *GuV* drei Drop Down Listen. Die erste Drop Down Liste ermöglicht die Auswahl zwischen einer Auszahlung des Rückkaufswertes und einer Auszahlung des Rückkaufswertes ohne Stornoabzug im Falle einer Stornierung. Der Stornoabzug dient dabei als Gewinnquelle. Die anderen zwei Drop Down Listen ermöglichen die Auswahl zwischen Sterblichkeit 1. und 2. Ordnung und Kosten 1. und 2. Ordnung für die Berechnungen in der GuV. Somit kann der Zusammenhang zwischen SCR Risiko und wirtschaftlichem Risiko analysiert werden.

4.2.8 Stornoergebnis

Im Arbeitsblatt *Stornoergebnis* werden die BEs der einzelnen Szenarien gegenübergestellt und die Differenz aus dem BE des Up-, Down- bzw. Mass Szenarios und dem BE des Basis Szenarios ermittelt. Anschließend wird das Szenario mit der maximalen Auswirkung identifiziert.

4.3 Modellergebnisse

Nun wird der wirtschaftliche Hintergrund der Gewinnquellen und deren Abhängigkeit vom Storno analysiert. Dabei wird anhand der Modellergebnisse die These untersucht, dass bei einem profitablen Versicherungsprodukt ein Storno Up Szenario und bei einem nicht profitablen Versicherungsprodukt ein Storno Down Szenario wirkt.

4.3.1 Keine Gewinnquelle

Zunächst wird der Fall untersucht, dass die Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung den Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung entsprechen. D.h. in den Drop Down Listen wird jeweils die Rechnungsgrundlage 1. Ordnung ausgewählt. Beim Storno wird der Rückkaufswert ohne Stornoabzug ausbezahlt. Folglich liegt in diesem Fall keine Gewinnquelle vor. Gemäß versicherungsmathematischem Äquivalenzprinzip[6] entspricht der erwartete Versicherungsbarwert dem erwarteten Beitragsbarwert. Demnach muss das EGT im Basis-, Up-, Down- und Mass Szenario jeweils Null ergeben.

Für den PVFP des Basis Szenarios gilt

Szenario	**PVFP**
Basis Szenario	0

Tabelle 4.3: PVFP Basis Szenario: Keine Gewinnquelle

Für das Stornoergebnis gilt

Szenario	**BE**	**Differenz zum BE des Basis Szenarios**
Basis Szenario	0	0
Up Szenario	0	0
Down Szenario	0	0
Mass Szenario	0	0

Tabelle 4.4: Stornoergebnis: Keine Gewinnquelle

Folglich ist dies kein aussagekräftiges Szenario für die Analyse der These.

4.3.2 Stornoabzug als Gewinnquelle

Als nächstes wird der Fall untersucht, dass nur der Stornoabzug als Gewinnquelle vorliegt. D.h. in den Drop Down Listen wird jeweils die Rechnungsgrundlage 1. Ordnung ausgewählt. Beim Storno wird der Rückkaufswert ausbezahlt. Für den PVFP des Basis Szenarios gilt

[6] Vergleiche Ortmann (2016, Kapitel 4).

Szenario	PVFP
Basis Szenario	13 336

Tabelle 4.5: PVFP Basis Szenario: Stornoabzug als Gewinnquelle

In diesem Fall liegt ein profitables Versicherungsprodukt vor. Für das Stornoergebnis gilt

Szenario	BE	Differenz zum BE des Basis Szenarios
Basis Szenario	-13 336	0
Up Szenario	-17 084	-3 748
Down Szenario	-7 787	5 549
Mass Szenario	-9 786	3 550

Tabelle 4.6: Stornoergebnis: Stornoabzug als Gewinnquelle

Demnach wird durch die Stornierungen ein Gewinn erzeugt und somit ist eine hohe Stornorate für das Versicherungsunternehmen von Vorteil. Folglich ist das Down Szenario jenes mit der maximalen Auswirkung, und die These kann widerlegt werden.

4.3.3 Kosten (70%) als Gewinnquelle

Nun wird der Fall untersucht, dass nur die tatsächlich anfallenden Kosten als Gewinnquelle vorliegen. D.h. in den Drop Down Listen werden Sterblichkeit 1. Ordnung und Kosten 2. Ordnung ausgewählt, wobei die Kosten 2. Ordnung hier 70% der Kosten 1. Ordnung entsprechen. Beim Storno wird der Rückkaufswert ohne Stornoabzug ausbezahlt. Für den PVFP des Basis Szenarios gilt

Szenario	PVFP
Basis Szenario	155 795

Tabelle 4.7: PVFP Basis Szenario: Kosten (70%) als Gewinnquelle

In diesem Fall liegt ebenfalls ein profitables Versicherungsprodukt vor. Für das Stornoergebnis gilt

Szenario	BE	Differenz zum BE des Basis Szenarios
Basis Szenario	-155 795	0
Up Szenario	-123 415	32 380
Down Szenario	-197 710	-41 915
Mass Szenario	-108 109	47 687

Tabelle 4.8: Stornoergebnis: Kosten (70%) als Gewinnquelle

Hier wird der Gewinn aufgrund der Kosten 2. Ordnung und nicht wie in 4.3.2 aufgrund der Stornierungen erzielt. Folglich erhält man eine andere Wirkung. Das Mass Szenario ist jenes mit der maximalen Auswirkung, und die These kann in diesem Fall widerlegt werden.

4.3.4 Stornoabzug und Kosten (70%) als Gewinnquellen

Des Weiteren wird der Fall untersucht, dass sowohl der Stornoabzug wie in 4.3.2, als auch die tatsächlich anfallenden Kosten wie in 4.3.3 als Gewinnquellen vorliegen. D.h. in den Drop Down Listen werden Sterblichkeit 1. Ordnung und Kosten 2. Ordnung ausgewählt, wobei die Kosten 2. Ordnung hier ebenfalls 70% der Kosten 1. Ordnung entsprechen. Beim Storno wird der Rückkaufswert ausbezahlt. Für den PVFP des Basis Szenarios gilt

Szenario	PVFP
Basis Szenario	169 131

Tabelle 4.9: PVFP Basis Szenario: Stornoabzug und Kosten (70%) als Gewinnquellen

Auch hier liegt ein profitables Versicherungsprodukt vor. Für das Stornoergebnis gilt

Szenario	BE	Differenz zum BE des Basis Szenarios
Basis Szenario	-169 131	0
Up Szenario	-140 499	28 633
Down Szenario	-205 497	-36 365
Mass Szenario	-117 895	51 237

Tabelle 4.10: Stornoergebnis: Stornoabzug und Kosten (70%) als Gewinnquellen

Dieser Fall ist konsistent mit den vorherigen zwei Fällen. Die Wirkung des Up- und des Down Szenarios ist vergleichbar mit derjenigen in 4.3.3, jedoch ist sie entgegengesetzt zu derjenigen in 4.3.2. Des Weiteren übersteigt die Wirkung des Mass Szenarios in

4.3.3 die Wirkung des Down Szenarios in 4.3.2. Folglich wirkt hier, der Erwartung entsprechend, ebenfalls das Mass Szenario, und die These kann widerlegt werden.

4.3.5 Stornoabzug und Kosten (99.5%) als Gewinnquellen

Nun wird wie in 4.3.4 der Fall untersucht, dass sowohl der Stornoabzug, als auch die tatsächlich anfallenden Kosten als Gewinnquellen vorliegen. D.h. in den Drop Down Listen werden Sterblichkeit 1. Ordnung und Kosten 2. Ordnung ausgewählt, wobei die Kosten 2. Ordnung hier 99.5% der Kosten 1. Ordnung entsprechen. Beim Storno wird der Rückkaufswert ausbezahlt. Für den PVFP des Basis Szenarios gilt

Szenario	**PVFP**
Basis Szenario	15 933

Tabelle 4.11: PVFP Basis Szenario: Stornoabzug und Kosten (99.5%) als Gewinnquellen

In diesem Fall liegt ebenfalls ein profitables Versicherungsprodukt vor. Für das Stornoergebnis gilt

Szenario	**BE**	**Differenz zum BE des Basis Szenarios**
Basis Szenario	-15 933	0
Up Szenario	-19 140	-3 208
Down Szenario	-11 082	4 851
Mass Szenario	-11 588	4 345

Tabelle 4.12: Stornoergebnis: Stornoabzug und Kosten (99.5%) als Gewinnquellen

Dieser Fall ist konsistent mit 4.3.2. Die Wirkung der Szenarien ist vergleichbar mit derjenigen in 4.3.2. Folglich ist das Down Szenario jenes mit der maximalen Auswirkung. Da ein profitables Versicherungsprodukt vorliegt, kann die These auch in diesem Fall widerlegt werden.

4.3.6 Kosten (120%) als Verlustquelle

Abschließend wird der Fall untersucht, dass die tatsächlich anfallenden Kosten als Verlustquelle vorliegen. D.h. in den Drop Down Listen werden Sterblichkeit 1. Ordnung und Kosten 2. Ordnung ausgewählt, wobei die Kosten 2. Ordnung hier

120% der Kosten 1. Ordnung entsprechen. Beim Storno wird der Rückkaufswert ohne Stornoabzug ausbezahlt. Für den PVFP des Basis Szenarios gilt

Szenario	**PVFP**
Basis Szenario	-103 864

Tabelle 4.13: PVFP Basis Szenario: Kosten (120%) als Verlustquelle

In diesem Fall liegt ein nicht profitables Versicherungsprodukt vor. Für das Stornoergebnis gilt

Szenario	**BE**	**Differenz zum BE des Basis Szenarios**
Basis Szenario	103 864	0
Up Szenario	82 277	-21 587
Down Szenario	131 800	27 943
Mass Szenario	72 073	-31 791

Tabelle 4.14: Stornoergebnis: Kosten (120%) als Verlustquelle

In diesem Fall und in 4.3.3 können die tatsächlich anfallenden Kosten als „Hebel“ interpretiert werden, welcher jeweils in die entgegengesetzte Richtung wirkt. In 4.3.3 wirken die tatsächlich anfallenden Kosten als Gewinnquelle, in diesem Fall jedoch als Verlustquelle. Das Down Szenario ist folglich jenes mit der maximalen Auswirkung. Hier ist die Intuition, dass bei einem nicht profitablen Versicherungsprodukt ein Down Szenario wirkt, zutreffend.

4.3.7 Conclusio

Im Allgemeinen kann die These, dass bei einem profitablen Versicherungsprodukt ein Storno Up Szenario und bei einem nicht profitablen Versicherungsprodukt ein Storno Down Szenario wirkt, aufgrund der Ergebnisse widerlegt werden. Eine Möglichkeit wäre, den wirtschaftlichen Hintergrund der Gewinnquellen und deren Abhängigkeit vom Storno zu ergänzen, um so eine genauere These aufstellen zu können.

4.4 Zusammenfassung

Das Simulationsmodell für das Stornoergebnis modelliert einen Versicherungsbestand, bestehend aus a gleichaltrigen und gleichgeschlechtlichen Versicherungsnehmern,

die jeweils eine Kapitallebensversicherung mit Versicherungssumme S über eine Laufzeit von n Jahren abschließen. Unter Berücksichtigung der jährlich verstorbenen und stornierten Policen, werden Beiträge, Reserven und Leistungen des Versicherungsbestandes berechnet. In einer GuV werden die Einnahmen und Ausgaben des Lebensversicherungsgeschäfts gegenübergestellt und der BE der Versicherungsleistungen, sowie der PVFP ermittelt. Diese Berechnungen werden jeweils für das Storno Up-, Down- und Mass Szenario, sowie für das Basis Szenario durchgeführt. Im Anschluss daran wird das Stornoergebnis dargestellt und das Szenario mit der maximalen Auswirkung identifiziert.

Das Ziel des Simulationsmodells bestand darin, die These, dass bei einem profitablen Versicherungsprodukt ein Storno Up Szenario und bei einem nicht profitablen Versicherungsprodukt ein Storno Down Szenario wirkt, zu untersuchen. Dabei wurde der wirtschaftliche Hintergrund der Gewinnquellen und deren Abhängigkeit vom Storno analysiert. Aufgrund der Ergebnisse kann die These im Allgemeinen widerlegt werden. Eine Möglichkeit wäre, den wirtschaftlichen Hintergrund der Gewinnquellen und deren Abhängigkeit vom Storno zu ergänzen, um so eine genauere These aufstellen zu können.

Dem Simulationsmodell liegt eine deterministische Stornorate zugrunde. Ein Ausblick wäre, dynamisches bzw. finanzrationales Stornoverhalten zu modellieren, bei dem Versicherte stornieren, sobald der Rückkaufswert den tatsächlichen Wert der Versicherungspolice übersteigt. Dazu wird bspw. auf Kochanski (2010) verwiesen, der ein Verfahren zur Modellierung von dynamischem (jedoch nicht finanzrationalem) Stornoverhalten im Rahmen eines partiellen internen Modells zur Berechnung des Solvenzkapitals betrachtet. Das Stornoverhalten wird dabei beeinflusst durch die Entwicklung des Kapitalmarktes und folglich des Fondswertes einer Fondsgebundene Lebensversicherung (FLV).

Kapitel 5

Markovsches Mehrfachzustandsmodell für das Versicherungsrisiko und das Verhalten von Versicherten hinsichtlich Storno und Beitragsfreistellung

Das folgende Kapitel basiert auf Henriksen et al. (2014, Kapitel 1 - 5). Die darin behandelten Grundlagen beruhen auf Koller (2010) und Rheinländer (2016).

5.1 Einführung

Das vorliegende Kapitel ist einer rein mathematischen Betrachtung gewidmet. Gegenstand dieses Kapitels ist die Berechnung von Reserven hinsichtlich des erwarteten Verhaltens von Versicherungsnehmern. Das Verhalten wird dabei so modelliert, dass es in gleicher Weise wie das Versicherungsrisiko eintritt. Dies erfolgt im Rahmen eines Markovschen Mehrfachzustandsmodells für das Versicherungsrisiko und das Verhalten von Versicherungsnehmern. Für das Verhalten der Versicherungsnehmer werden die folgenden zwei Optionen betrachtet:

- Die Option des Rückkaufes, d.h. die Option den Vertrag gegen Erhalt eines Rückkaufswertes zu stornieren, vergleiche Ortmann (2016, Kapitel 5.5.2).
- Die Option der Beitragsfreistellung, d.h. die Option der Umwandlung des Vertrages in eine beitragsfreie Versicherung mit reduziertem Versicherungsschutz, vergleiche Ortmann (2016, Kapitel 5.5.5).

Diese Optionen können zu jeder Zeit ausgeübt und somit als Amerikanische Optionen betrachtet werden.

Es gibt verschiedene Ansätze, das Verhalten von Versicherungsnehmern zu modellieren. Ein möglicher Ansatz liegt der Annahme zugrunde, dass die versicherte Person die Option nach einer ökonomisch optimalen Strategie ausübt, um den Wert der Vertragsauszahlung zu maximieren. Der Versicherungsnehmer kann hier sowohl von der Option der Beitragsfreistellung, als auch von der Option des Rückkaufes Gebrauch machen. Wird die Option der Beitragsfreistellung ausgeübt, so läuft der Vertrag unter veränderten Konditionen weiter und enthält möglicherweise weiterhin die Option des Rückkaufes. Dieser Ansatz wird bspw. in Steffensen (2002) beschrieben.

Ein weiterer Ansatz liegt der Annahme zugrunde, dass Interventionsoptionen wie die Option der Beitragsfreistellung und die des Rückkaufes, rein zufällig ausgeübt werden. Dieses Interventionsrisiko kann formal als diversifiziertes Versicherungsrisiko angesehen werden, obgleich sie verschiedenen Konzepten unterliegen und die betrachteten Zustände dadurch i.A. verkompliziert werden. Dieser Ansatz wird bspw. in Buchardt et al. (2014) erläutert.

Ein moderner Ansatz der Rechnungslegung basiert darauf, Reserven aufgrund von erwartetem Verhalten anstelle von rationalem Verhalten zu bestimmen. Für das erwartete Verhalten von Versicherten ist dabei die Berücksichtigung des ökonomischen Umfelds und/oder die Abwägung, ob die Option vorteilhaft ist, erforderlich. Dieser Ansatz wird bspw. in De Giovanni (2010) beschrieben.

Hier betrachte man einen Ansatz, bei dem die Interventionsoptionen rein zufällig ausgeübt werden. Das Interesse liegt darin, die Abhängigkeit zwischen dem Versicherungsrisiko und dem Verhalten von Versicherungsnehmern anhand von Markovmodellen mit endlichen Zustandsräumen zu analysieren. Die bedingten Erwartungswerte, d.h. die Reserven, werden mittels gewöhnlicher Differentialgleichungen (DGLen) beschrieben und anschließend deren Lösungen bestimmt. Ferner interessiert man sich auch für die Unabhängigkeit zwischen den Modellen. Diese Annahme vereinfacht zwar die Formeln, jedoch führt sie aufgrund numerischer Fehler zu falschen Ergebnissen.

5.2 Grundlagen

Zunächst werden Grundlagen und zentrale Definitionen eingeführt bzw. wird auf entsprechende Literatur verwiesen. Dieses Kapitel beruht auf der Vorlesung der höheren Lebensversicherungsmathematik von Prof. Dr. Rheinländer an der TU Wien im Sommersemester 2016, vergleiche Rheinländer (2016).

Sei τ der Todeszeitpunkt eines Neugeborenen, definiert auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $N_t(\omega) = \mathbb{1}_{\{\tau(\omega)\leq 1\}}$ ein rechtsstetiger Prozess[1]. N_t heißt auch Indikator des Todes.

$\mathbb{H} : \mathcal{H}_t = \sigma(N_u, u \leq t)$ sei eine Filtration[2], welche die Information enthält, ob die Person noch am Leben ist. Andernfalls enthält sie die Information über den genauen Todeszeitpunkt. $\mathbb{F}$ sei eine Filtration, welche die Information über systematische Mortalität und den Finanzmarkt enthält. $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}$ sei die von $\mathbb{F}$ und $\mathbb{H}$ aufgespannte Filtration.

Der Überlebensprozess $\overline{F}_{t,T}$ sei definiert durch den stochastischen Prozess

$$\overline{F}_{t,T} = P(\tau > T|\mathcal{F}_t) := \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau>T\}}|\mathcal{F}_t], \text{ wobei } \overline{F}_t = \overline{F}_{0,t}.$$

Der Todesprozess bzw. kumulative Verteilungsprozess sei definiert durch

$$F_{t,T} = 1 - \overline{F}_{t,T}, \text{ wobei } F_t = F_{0,t}.$$

Ferner wird angenommen, dass

$$\overline{F}_{t,T} = \mathbb{1}_{\{\tau>T\}}\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\int_t^T \mu_s ds\Big)\Big|\mathcal{F}_t\Big]$$

gilt, wobei μ die Mortalitätsintensität bezeichne und $\mathbb{F}$-vorhersehbar (engl. predictable)[3] sei. Aus der Doob-Meyer Zerlegung[4] folgt, dass für $t \geq 0$,

$$N_t - \int_0^{t\wedge\tau} \mu_s ds.$$

ein $\mathbb{G}$-Martingal ist[5].

[1] Für die Definition des stochastischen Prozesses, siehe Koller (2010, Definition 2.1.6).
[2] Für die Definition der Filtration wird auf Kersting (2014, Kapitel 1.6) verwiesen.
[3] Für predictable Prozesse, siehe Rheinländer & Sexton (2011, Theorem 2.21).
[4] Für die Doob-Meyer Zerlegung wird auf Klenke (2013, Satz 10.1) verwiesen.
[5] Für die bedingte Erwartung und Martingale, siehe Kersting (2014, Kapitel 1).

5.2.1 Prospektive Reserve

Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ ein Zahlungsstrom (Ausgaben abzüglich Prämien) und $S = (S_t)_{t\geq 0}$ mit $S_t = \exp(\int_0^t r_s ds)$ und $dS_t = r_t S_t dt$ ein Bankkonto. Der Wert der zukünftigen Zahlungen abzüglich der Prämien zum Zeitpunkt t sei gegeben durch

$$\tilde{V}_{t,T} = S_t \int_t^T S_u^{-1} dB_u.$$

Die Prospektive Reserve sei definiert durch

$$V_t := \mathbb{E}[\tilde{V}_{t,T}|\mathcal{G}_t]$$

und der Wertprozess der diskontierter Zahlungen durch

$$M_t := \mathbb{E}\Big[\int_0^T S_u^{-1} dB_u \Big| \mathcal{G}_t\Big].$$

Es kann gezeigt werden, dass M ein Martingal ist.

Für den stochastischen Verlust im Intervall $(s,t]$ gilt

$$L(s,t) = M_t - M_s,\ s \leq t.$$

Dies führt zum Hattendorffschen Theorem. Es besagt, dass $L(s,t)$ den bedingten Erwartungswert Null besitzt, und dass die stochastischen Verluste bedingt unkorreliert sind über Intervalle, die sich nicht überlappen.

Für den bedingten Erwartungswert gilt

$$\mathbb{E}\Big[L(s,t)\Big|\mathcal{G}_s\Big] = \mathbb{E}[M_t - M_s|\mathcal{G}_s] = \mathbb{E}[M_t - M_s] = 0. \tag{5.1}$$

Für die zweite Aussage seien (s,t), (u,v) disjunkt und $s < t < u < v$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[(M_t - M_s)(M_v - M_u)\Big|\mathcal{G}_s\Big] &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[(M_t - M_s)(M_v - M_u)\Big|\mathcal{G}_u\Big]\Big|\mathcal{G}_s\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[(M_t - M_s)\underbrace{\mathbb{E}\Big[(M_v - M_u)\Big|\mathcal{G}_u\Big]}_{\overset{(5.1)}{=}0}\Big|\mathcal{G}_s\Big] \quad = 0.\end{aligned}$$

5.2.2 Thielesche Differentialgleichung

Seien Π zeitstetige Prämien und b zeitstetige Ablebenszahlungen. Für den Zahlungsstrom B gilt

$$dB_t = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\Pi_t dt + b_t dN_t,$$

wobei N der Indikator des Todes sei. r sei eine Zinsrate und

$$R_t = r_t + \mu_t \tag{5.2}$$

bezeichne die aktuarielle Zinsrate. Die Mortalitätsintensität μ sei deterministisch und $\mathcal{G}_t$ enthalte $\{\emptyset, \Omega, (\tau \geq t), (\tau < t)\}$. Wie bereits erwähnt, kann gezeigt werden, dass

$$N_t - \int_0^{t\wedge\tau} \mu_s ds = N_t - \int_0^t \mathbb{1}_{\{\tau>u\}}\mu_u du \tag{5.3}$$

ein $\mathbb{G}$-Martingal ist. Für $u > t$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau>u\}}|\tau > t] &= P(\tau > u|\tau > t) \\
&= \frac{P(\tau > u, \tau > t)}{P(\tau > t)} \\
&= \frac{P(\tau > u)}{P(\tau > t)} \\
&= \frac{\exp(-\int_0^u \mu_s ds)}{\exp(-\int_0^t \mu_s ds)} \\
&= \exp\Big(-\int_t^u \mu_s ds\Big).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Für die Reserve V auf $\{\tau > t\}$ folgt

$$\begin{aligned}
V_t &= \mathbb{E}\Big[S_t \int_t^T S_u^{-1} dB_u \Big| \mathcal{G}_t\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\int_t^T \exp\Big(-\int_t^u r_s ds\Big)(-\mathbb{1}_{\{\tau>u\}}\Pi_u du + b_u\mu_u dN_u)\Big|\tau > t\Big] \\
&\overset{(5.3)}{=} \mathbb{E}\Big[\int_t^T \exp\Big(-\int_t^u r_s ds\Big)(-\mathbb{1}_{\{\tau>u\}}(\Pi_u + b_u\mu_u)du)\Big|\tau > t\Big] \\
&= \int_t^T \exp\Big(-\int_t^u r_s ds\Big)\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau>u\}}|\tau > t](-\Pi_u + b_u\mu_u)du \\
&\overset{(5.4)}{=} \int_t^T \exp\Big(-\int_t^u r_s ds\Big)\exp\Big(-\int_t^u \mu_s ds\Big)(-\Pi_u + b_u\mu_u)du \\
&\overset{(5.2)}{=} \int_t^T \exp\Big(-\int_t^u R_s ds\Big)(-\Pi_u + b_u\mu_u)du.
\end{aligned}$$

Definiere nun $\tilde{S}_t := \exp\left(\int_0^t R_u du\right)$ und $\tilde{B}_t := \int_0^t (-\Pi_u + b_u \mu_u) du$. Mit $\tilde{S}$ und $\tilde{B}$ gilt dann $dVt = d\tilde{S}_t \int_t^T \tilde{S}_u^{-1} d\tilde{B}_u$. Mit partieller Integration[6] folgt

$$\begin{aligned} dV_t &= -\tilde{S}_t \tilde{S}_t^{-1} d\tilde{B}_t + \int_t^T \tilde{S}_u^{-1} d\tilde{B}_u d\tilde{S}_u \\ &= -d\tilde{B}_t + R_t \tilde{S}_t \int_t^T \tilde{S}_u^{-1} d\tilde{B}_u dt \\ &= -d\tilde{B}_t + R_t V_t dt. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Thielesche DGL, $V_T = 0$,

$$\frac{dV_t}{dt} = \Pi_t - b_t \mu_t + (r_t + \mu_t) V_t \Leftrightarrow \frac{dV_t}{dt} = \underbrace{r_t V_t + \Pi_t}_{\text{Sparkapital}} - \underbrace{\mu_t (b_t - V_t)}_{\text{Risikokapital}} \tag{5.5}$$

5.2.3 Markovketten

In diesem Kapitel werden Markovketten eingeführt. Dabei werden zunächst Markovketten mit abzählbarem Zustandsraum betrachtet und anschließend wird auf Markovketten in stetiger Zeit eingegangen. Folgende zwei Abschnitte beruhen auf Koller (2010, Kapitel 2.2, 2.3). Für weiterführende Literatur wird ebenfalls auf Koller (2010) verwiesen.

Markovketten mit abzählbarem Zustandsraum

Sei S eine abzählbare Menge.

Definition 5.2.1 *Sei $(X_t)_{t \in T}$ ein stochastischer Prozess über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Zustandsraum S und sei $T \subset \mathbb{R}$. X heißt Markovkette, falls für alle*

$$\begin{aligned} &n \geq 1,\ t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} \in T,\ i_1, i_2, \ldots, i_{n+1} \in S,\ \textit{mit} \\ &P[X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \ldots, X_{t_n} = i_n] > 0,\ \textit{folgendes gilt} \\ &P[X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_k} = i_k\ \forall k \leq n] = P[X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n]. \end{aligned}$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten hängen ausschließlich von dem letzten Zustand ab, jedoch nicht von dem „Weg“, auf dem die Markovkette diesen Zustand erreicht hat.

[6] Für die partielle Integration, siehe Rheinländer & Sexton (2011, Theorem 2.21).

Definition 5.2.2 *Sei $(X_t)_{t\in T}$ ein stochastischer Prozess über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $s \leq t$, $i, j \in S$. Dann definiert*

$$p_{ij}(s,t) := P[X_t = j | X_s = i]$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit, in den Zeitpunkten s bzw. t von Zustand i in den Zustand j zu wechseln. Die bedingte Wahrscheinlichkeit p_{ij} wird auch Übergangswahrscheinlichkeit genannt.

Nun wird die Definition der Übergangsmatrix eingeführt.

Definition 5.2.3 *Die Matrix $P = (p_{ij})_{i,j\in S}$ heißt Übergangsmatrix, falls gilt*

1. $p_{ij}(s,t) \geq 0$.
2. $\sum_{j\in S} p_{ij}(s,t) = 1$.
3. $p_{ij}(s,s) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j, \end{cases}$ *falls* $P[X_s = i] > 0$.
4. $p_{ik}(s,u) = \sum_{j\in S} p_{ij}(s,t)p_{jk}(t,u)$ *für* $s \leq t \leq u$ *und* $P[X_s = i] > 0$.

Folgendes Theorem der Chapman-Kolmogorov-Gleichung stellt für $s \leq t \leq u$ den Zusammenhang von $P(s,t)$, $P(t,u)$ und $P(s,u)$ her.

Theorem 5.2.1 *Sei $(X_t)_{t\in T}$ eine Markovkette. Seien $s \leq t \leq u \in T$ und $i, k \in S$ mit $P[X_s = i] > 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} p_{ik}(s,u) &= \sum_{j\in S} p_{ij}(s,t)p_{jk}(t,u) \text{ und} \\ P(s,u) &= P(s,t) \times P(t,u). \end{aligned}$$

Beweis. Für $t = s$ bzw. $t = u$ gilt dies offensichtlich. Seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) $s < t < u$. Bezeichne

$$\begin{aligned} S^* &= \Big\{ j \in S : P[X_t = j | X_s = i] \neq 0 \Big\} \\ &= \Big\{ j \in S : P[X_t = j, X_s = i] \neq 0 \Big\}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aufgrund der Voraussetzung $P[X_s = i] > 0$ erfüllt ist.

Dann gilt

$$\begin{aligned} p_{ik}(s,u) &= P[X_u = k | X_s = i] \\ &= \sum_{j \in S^*} P[X_u = k, X_t = j | X_s = i] \\ &= \sum_{j \in S^*} P[X_t = j | X_s = i] \times P[X_u = k | X_s = i, X_t = j] \\ &= \sum_{j \in S^*} p_{ij}(s,t) \times p_{jk}(t,u) \\ &= \sum_{j \in S} p_{ij}(s,t) \times p_{jk}(t,u), \end{aligned}$$

wobei bei der vierten Gleichung die Markoveigenschaft[7] verwendet wurde. □

Markovketten in stetiger Zeit

Im Folgenden werden ausschließlich Markovketten über endliche Zustandsräume betrachtet.

Definition 5.2.4 *Sei $(X_t)_{t \in T}$ eine Markovkette mit endlichem Zustandsraum S und sei $T \in \mathbb{R}$. Dann definiert man*

$$p_{jN}(s,t) := \sum_{k \in N} p_{jk}(s,t),$$

für $N \subset S$.

Definition 5.2.5 *Sei $(X_t)_{t \in T}$ eine zeitstetige Markovkette mit endlichem Zustandsraum S. $(X_t)_{t \in T}$ heißt regulär, falls nachfolgende Grenzwerte existieren und stetig in den Variablen sind*

$$\mu_i(t) = \lim_{\Delta t \searrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}, \ \forall\ i \in S,$$

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \searrow 0} \frac{p_{ij}(t, t+\Delta t)}{\Delta t}, \ \forall\ i \neq j \in S.$$

Diese Funktionen heißen Übergangsintensitäten der Markovkette. Des Weiteren sei μ_{ii} gegeben durch

$$\mu_{ii}(t) = -\mu_i(t), \ \forall\ i \in S.$$

[7] Für die elementare, schwache und starke Markoveigenschaft wird auf Klenke (2013, Definition 17.1, 17.3(iii), 17.12) verwiesen.

Bemerkung 5.2.1 1. Im Versicherungsmodell wird die Regularität der Markovketten genutzt, um DGLen für den Wert der Versicherung herzuleiten.

2. Die Übergangsintensitäten lassen sich auch als Ableitungen der Übergangswahrscheinlichkeiten betrachten. Für $i \neq j$ gilt

$$\begin{aligned}\mu_{ij}(t) &= \lim_{\Delta t \searrow 0} \frac{p_{ij}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \searrow 0} \frac{p_{ij}(t, t+\Delta t) - p_{ij}(t,t)}{\Delta t} \\ &= \frac{d}{ds} p_{ij}(t,s)\Big|_{s=t}.\end{aligned}$$

3. $\mu_{ij}(t)dt$ lässt sich interpretieren als infinitesimale Übergangswahrscheinlichkeit $i \rightsquigarrow j$ im Zeitintervall $[t, t+dt]$. $\mu_i(t)dt$ lässt sich interpretieren als infinitesimale Wahrscheinlichkeit, im entsprechenden Zeitintervall den Zustand i zu verlassen.

4. Die Matrix Λ bezeichnet den Generator der Entwicklung,

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \mu_{11}(t) & \mu_{12}(t) & \cdots & \mu_{1n}(t) \\ \mu_{21}(t) & \mu_{22}(t) & \cdots & \mu_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1}(t) & \mu_{n2}(t) & \cdots & \mu_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Kolmogorovsche Differentialgleichungen

Die folgenden Kolmogorovschen DGLen stellen den Zusammenhang zwischen den partiellen Ableitungen von p_{ij} und den μ dar.

Theorem 5.2.2 *Sei $(X_t)_{t\in T}$ eine reguläre Markovkette mit endlichem Zustandsraum S. Dann gilt*

1. *Rückwärts Differentialgleichungen*

$$\frac{d}{ds} p_{ij}(s,t) = \mu_i(s) p_{ij}(s,t) - \sum_{k \neq i} \mu_{ik}(s) p_{kj}(s,t),$$

$$\frac{d}{ds} P(s,t) = -\Lambda(s) P(s,t).$$

2. Vorwärts Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(s,t) = -p_{ij}(s,t)\mu_j(t) + \sum_{k\neq j} p_{ik}(s,t)\mu_{kj}(t),$$

$$\frac{d}{dt}P(s,t) = P(s,t)\Lambda(t).$$

Beweis. Der Beweis folgt aus dem Theorem 5.2.1 der Chapman-Kolmogorov-Gleichung und wird in der Matrixversion vorgestellt.

1. Sei $\Delta s > 0$ und $\zeta := s + \Delta s$. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{P(\zeta,t) - P(s,t)}{\Delta s} &= \frac{1}{\Delta s}\Big(P(\zeta,t) - P(s,\zeta)P(\zeta,t)\Big)\\ &= \Big(\frac{1}{\Delta s}\Big(1 - P(s,\zeta)\Big)\Big) \times P(\zeta,t)\\ &\longrightarrow -\Lambda(s)P(s,t) \text{ für } \Delta s \searrow 0,\end{aligned}$$

   unter Verwendung der Chapman-Kolmogorov-Gleichung und der Stetigkeit der Matrixmultiplikation.

2. Der Beweis der zweiten DGL erfolgt analog. Sei dazu $\Delta t > 0$.

$$\begin{aligned}\frac{P(s,t+\Delta t) - P(s,t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t}\Big(P(s,t)P(t,t+\Delta t) - P(s,t)\Big)\\ &= P(s,t) \times \frac{1}{\Delta t}\Big(P(t,t+\Delta t) - 1\Big)\\ &\longrightarrow P(s,t)\Lambda(t) \text{ für } \Delta t \searrow 0.\end{aligned}$$

□

Mit den Kolmogorovschen DGLen können, ausgehend von den Übergangsintensitäten μ, die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} berechnet werden.

Definition 5.2.6 *Sei $(X_t)_{t\in T}$ eine reguläre Markovkette mit endlichem Zustandsraum S. Seien $s,t \in \mathbb{R}$, $s \leq t$ und $j \in S$. Dann definiert man mit*

$$p_{\overline{jj}}(s,t) := P\Big[\bigcap_{\zeta\in[s,t]} \{X_\zeta = j\}\Big| X_s = j\Big]$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit, im Zeitintervall $[s,t]$ immer im Zustand j zu bleiben.

Mit folgendem Satz kann $p_{\overline{jj}}$ unter Verwendung von Übergangsintensitäten berechnet werden.

Satz 5.2.1 *Falls $P[X_s = j] > 0$ und $s \leq t$, gilt für eine reguläre Markovkette*

$$p_{\overline{jj}}(s,t) = \exp\Big(-\sum_{k\neq j}\int_s^t \mu_{jk}(\tau)d\tau\Big).$$

Für den Beweis wird auf Koller (2010, Beweis zu Satz 2.3.7) verwiesen. Nun wird das Deckungskapital im Markovmodell eingeführt.

5.2.4 Deckungskapital im Markovmodell

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Markovkette in stetiger Zeit. Der Zustandsindikator H^i sei definiert durch

$$H_t^i = \begin{cases} 1, & \text{falls } X_t = i \\ 0, & \text{falls } X_t \neq i. \end{cases}$$

H^{ij} sei der Zählprozess, welcher die Anzahl der Wechsel von i nach j zählt. Für den Zahlungsstrom B gilt

$$dB_t = \sum_j b_t^j H_t^j dt + \sum_{j\neq k} b_t^{jk} dH_t^{jk},$$

wobei b^j Zahlungen mit stetigen Raten im Zustand j und b^{jk} einmalige Zahlungen bei Zustandswechsel darstellen.

Das zustandsabhängige Deckungskapital ist gegeben durch

$$V_t^j = \mathbb{E}\Big[\int_t^T \exp\Big(-\delta(t-s)\Big)dB_s \Big| X_t = j\Big].$$

Mit der Thieleschen DGL aus (5.5) folgt

$$\frac{dV_t^j}{dt} = \underbrace{\delta V_t^j}_{1.} - \underbrace{b_t^j}_{2.} - \sum_{k\neq j} \underbrace{\mu_t^{jk}}_{3.}(\underbrace{b_t^{jk}}_{4.} + V_t^k - V_t^j),$$

wobei

1. Verzinsung,
2. zustandsabhängige Zahlungen bzw. Prämien,

3. Einträge der Intensitätsmatrix und

4. Einmalzahlungen

darstellen. Siehe Rheinländer (2016).

Wie in der Einführung dieses Kapitels erwähnt, wird die Rückkaufsoption hier rein zufällig ausgeübt. Die Ausübung der Option kann auch als optimales Stoppzeitproblem betrachtet werden, bei dem der Zeitpunkt der Stornierung so gewählt wird, dass der Wert der Vertragsauszahlung maximiert wird. Dies wird im Folgenden kurz erläutert.

5.2.5 Optimaler Stornozeitpunkt

Sei τ der Zeitpunkt des Todes, B ein Zahlungsstrom, T die Vertragsdauer und G der Rückkaufswert. Der Zeitpunkt $\sigma \in (t, T]$, zu dem die Stornierung erfolgt, sei eine Stoppzeit[8].

Für die Reserve V gilt

$$V_t = \max_{\sigma} \mathbb{E}\Big[\int_t^{\sigma} \exp\Big(-\delta(s-t)\Big) dB_s + \exp\Big(-\delta(\sigma - t)\Big) \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} G(\sigma) \Big| \mathcal{F}_t\Big].$$

Dieses optimale Stoppzeitproblem[9] ist vergleichbar mit einer Amerikanisches Option.

Man definiere einen Hilfsprozess Y mit

$$Y_t(u) = \int_t^{u} \exp\Big(-\delta(s-t)\Big) dB_s + \exp\Big(-\delta(u - t)\Big) \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} G(u),$$

wobei der jetzige Zeitpunkt t fest sei. Falls Y ein Submartingal[10] ist, so ist es optimal, nie zu stornieren, d.h. $\sigma = T$. Denn es gilt $V_t = \max_\sigma \mathbb{E}\Big[Y_t(\sigma)\Big|\mathcal{F}_t\Big]$ und somit

$$\mathbb{E}\Big[Y_t(T)\Big|\mathcal{F}_t\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[Y_t(T)\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big]\Big|\mathcal{F}_t\Big] \geq \mathbb{E}\Big[Y_t(\sigma)\Big|\mathcal{F}_t\Big].$$

Falls Y ein Supermartingal[11] ist, so ist es optimal, sofort zu stornieren, d.h. $\sigma = t$.

[8] Für die Definition der Stoppzeit wird auf Kersting (2014, Kapitel 1.8) verwiesen.

[9] Bei einem optimalen Stoppzeitproblem betrachtet man eine Vergütungsfunktion $g \geq 0$. Das Ziel besteht darin, jene Stoppzeit zu finden, welche den Wert $\mathbb{E}^X\big[g(X_T)\big]$ maximiert. Ferner interessiert man sich für den Wert dieses Erwartungswertes. Siehe Bass (2011, Kapitel 23).

[10] Für die Definition eines Submartingals wird auf Kersting (2014, Kapitel 1.6) verwiesen.

[11] Für die Definition eines Supermartingals wird auf Kersting (2014, Kapitel 1.6) verwiesen.

Denn es gilt

$$\mathbb{E}\Big[Y_t(\sigma)\Big|\mathcal{F}_t\Big] \leq \mathbb{E}\Big[Y_t(t)\Big|\mathcal{F}_t\Big] = Y_t(t).$$

Vergleiche Rheinländer (2016).

5.3 Risiko- und Verhaltensmodell

Basierend auf den Grundlagen werden nun das Risiko- und das Verhaltensmodell vorgestellt und ein kombiniertes Zustandsmodell eingeführt.

Man betrachte das kombinierte Zustandsmodell $(Z^{\text{Risiko}}, Z_{\text{Verhalten}})$, bestehend aus einem Zustandsmodell für das Risiko, Z^{Risiko} und einem für das Verhalten, $Z_{\text{Verhalten}}$. Die separaten Zustandsmodelle sind jeweils abhängig bzw. unabhängig voneinander.

Z^{Risiko} bedingt auf $Z_{\text{Verhalten}}$, sei eine Markovkette mit endlichem Zustandsraum und mit Werten in $\mathbf{Z^{Risiko}}$. Gegeben $Z_{\text{Verhalten}}$ existieren Übergangsintensitäten $\mu^{jk}(t)$ für $j, k \in \mathbf{Z^{Risiko}}$ und $t \geq 0$, so dass für alle $k \in \mathbf{Z^{Risiko}}$, $\int_0^t \mu^{Z^{\text{Risiko}}(s)k}(s)ds$ (gegeben $Z_{\text{Verhalten}}$) ein Kompensator[12] für den Sprungprozess ist. Dieser zählt die Anzahl der Sprünge in den Risikozustand k. Falls die Übergangsintensitäten unabhängig von $Z_{\text{Verhalten}}$ sind, ist Z^{Risiko} ebenfalls eine Markovkette mit endlichem Zustandsraum.

Folgende Abbildung 5.1 zeigt das Invalidititätsmodell, als kanonisches Beispiel für ein Risikomodell. Die Zustände {*aktiv*, *invalid*, *tot*} werden mit {a, i, d} gekennzeichnet. Der Zustand des Todes ist ein absorbierender Zustand.

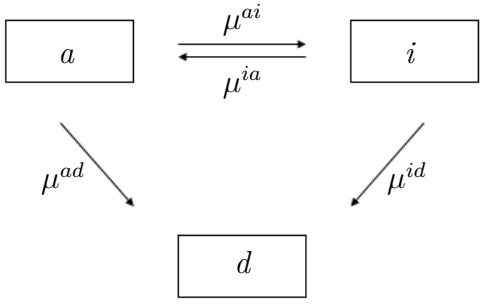

Abbildung 5.1: Invalidititätsmodell als kanonisches Beispiel für ein Risikomodell

Gegeben Z^{Risiko}, sei $Z_{\text{Verhalten}}$ ebenfalls eine Markovkette. $\nu_{jk}(t)$ bezeichnen für $j, k \in$

[12] Für die Definition des Kompensators, siehe Kersting (2014, Kapitel 4.5).

$\mathbf{Z_{Verhalten}}$ und $t \geq 0$, die Übergangsintensitäten.

Folgende Abbildung 5.2 zeigt ein kanonisches Beispiel für ein Verhaltensmodell. Die Zustände {*Prämienzahlung*, *Beitragsfreistellung*, *Rückkauf*} werden mit {p, f, s} gekennzeichnet.

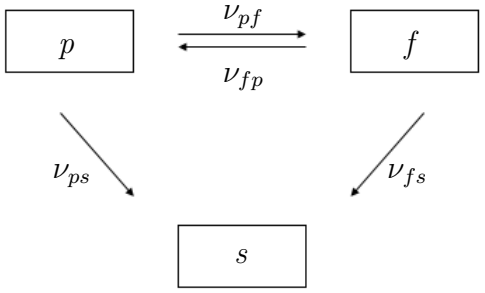

Abbildung 5.2: Kanonisches Beispiel für ein Verhaltensmodell

Wie man in den Abbildungen sehen kann, stehen Zustände im Risikomodell im Exponenten (hochgestellt) und Zustände im Verhaltensmodell im Index (tiefgestellt).

Sind Z^{Risiko} gegeben $Z_{\text{Verhalten}}$ und $Z_{\text{Verhalten}}$ gegeben Z^{Risiko} Markovmodelle, so ist das kombinierte Modell $Z = (Z^{\text{Risiko}}, Z_{\text{Verhalten}})$ ebenfalls ein Markovmodell. Es existieren Übergangsintensitäten $\mu_l^{jk}(t)$ für $j, k \in \mathbf{Z^{Risiko}}$, $l \in \mathbf{Z_{Verhalten}}$ und $t \geq 0$, so dass für alle $k \in \mathbf{Z^{Risiko}}$, $\int_0^t \mu_{Z_{\text{Verhalten}}(s)}^{Z^{\text{Risiko}}(s)k}(s)ds$ ein Kompensator für den Sprungprozess ist. Dieser zählt die Anzahl der Sprünge in den Risikozustand k. Analog dazu existieren Übergangsintensitäten $\nu_{jk}^l(t)$ für $j, k \in \mathbf{Z_{Verhalten}}$, $l \in \mathbf{Z^{Risiko}}$ und $t \geq 0$, so dass für alle $k \in \mathbf{Z_{Verhalten}}$, $\int_0^t \nu_{Z_{\text{Verhalten}}(s)k}^{Z^{\text{Risiko}}(s)}(s)ds$ ein Kompensator für den Sprungprozess ist. Dieser zählt die Anzahl der Sprünge in den Verhaltenszustand k.

$p_{lm}^{jk}(t,s)$ bezeichne die Übergangswahrscheinlichkeit von (t,s), dass der Risikoprozess vom Zustand j in den Zustand k wechselt und der Verhaltensprozess vom Zustand l in den Zustand m. Sind die Submodelle Z^{Risiko} und $Z_{\text{Verhalten}}$ unabhängig, d.h. die Übergangsintensitäten μ hängen nicht von $Z_{\text{Verhalten}}$ ab, und die Übergangsintensitäten ν hängen nicht von Z^{Risiko} ab, so kann die Übergangswahrscheinlichkeit als Produkt der Wahrscheinlichkeiten bzgl. des jeweiligen Submodells geschrieben werden,

$$p_{lm}^{jk}(t,s) = p^{jk}(t,s)p_{lm}(t,s).$$

Im Falle der Unabhängigkeit seien die Übergangswahrscheinlichkeiten wie in den obigen Modellen veranschaulicht. Sind μ^{ai} und μ^{ia} beide positiv, gibt es keinen Ausdruck

in geschlossener Form für die Übergangswahrscheinlichkeiten $(p^{aa}, p^{ii}, p^{ai}, p^{ia}, p^{ad}, p^{id})$. Existiert keine Reaktivierung, d.h. gilt $\mu^{ia} = 0$, so folgt für die Kolmogorovsche Vorwärts DGL aus Theorem 5.2.2,

$$\frac{d}{dt}p^{aa}(t,s) = -p^{aa}(t,s) \times \Big(\mu^{ai}(s) + \mu^{ad}(s)\Big),$$

mit Randbedingung $p^{ij}(t,t) = \delta_{ij}$[13]. Für die Übergangswahrscheinlichkeit $p^{aa}(t,s)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{d}{dt}p^{aa}(t,s)}{p^{aa}(t,s)} = -\Big(\mu^{ai}(s) + \mu^{ad}(s)\Big) \\
\Leftrightarrow\ &\ln\Big(p^{aa}(t,s)\Big) = -\int_t^s \Big(\mu^{ai}(\tau) + \mu^{ad}(\tau)\Big)d\tau \\
\Leftrightarrow\ &p^{aa}(t,s) = \exp\Big(-\int_t^s \Big(\mu^{ai}(\tau) + \mu^{ad}(\tau)\Big)d\tau\Big).
\end{aligned}$$

Analog lassen sich auch die Übergangswahrscheinlichkeiten p^{ii}, p^{ai} und p^{ia} berechnen.

$$\begin{aligned}
p^{ii}(t,s) &= \exp\Big(-\int_t^s \mu^{id}(\tau)d\tau\Big), \\
p^{ai}(t,s) &= \int_t^s p^{aa}(t,\tau)\mu^{ai}(\tau)p^{ii}(\tau,s)d\tau, \\
p^{ia}(t,s) &= 0.
\end{aligned}$$

Folglich können auch p^{ad} und p^{id} bestimmt werden, da sich die bedingten Wahrscheinlichkeiten p^{aa}, p^{ai} und p^{ad}, sowie p^{ii}, p^{ia} und p^{id} jeweils zu eins aufsummieren.

Sind entsprechend ν_{pf} und ν_{fp} strikt positiv, gibt es keinen Ausdruck in geschlossener Form für die Übergangswahrscheinlichkeiten $(p_{pp}, p_{ff}, p_{pf}, p_{fp}, p_{ps}, p_{fs})$. Existiert keine Wiederaufnahme der Prämienzahlung, d.h. gilt $\nu_{fp} = 0$, so folgt

$$\begin{aligned}
p_{pp}(t,s) &= \exp\Big(-\int_t^s \Big(\nu_{pf}(\tau) + \nu_{ps}(\tau)\Big)d\tau\Big), \\
p_{ff}(t,s) &= \exp\Big(-\int_t^s \nu_{fs}(\tau)d\tau\Big), \\
p_{pf}(t,s) &= \int_t^s p_{pp}(t,\tau)\nu_{pf}(\tau)p_{ff}(\tau,s)d\tau, \\
p_{fp}(t,s) &= 0.
\end{aligned}$$

Analog lassen sich auch die bedingten Wahrscheinlichkeiten p_{ps} und p_{fs} bestimmen

[13] δ_{ij} bezeichnet das Kronecker-Delta.

Ein typisches Beispiel für ein Verhaltensmodell ist ein Modell für die Nachfrage von Versicherungsnehmern. Darin wird die Tendenz beschrieben, dass Versicherungsnehmer bestimmte Verträge nachfragen. Dabei könnte angenommen werden, dass zwischen Z^{Risiko} und $Z_{\text{Verhalten}}$ eine Abhängigkeit besteht. Adverse Selektion bedeutet zum einen, dass Versicherungsnehmer, die bestimmte Risiken verursachen, bestimmte Verträge nachfragen. Dies kann im Modell wiedergegeben werden, indem die Übergangsintensitäten des Verhaltensmodells vom Risikomodell abhängen. Andererseits bedeutet Adverse Selektion, dass Versicherungsnehmer, die bestimmte Verträge nachfragen, d.h. die ein bestimmtes Verhalten aufweisen, bestimmte Risiken verursachen. Analog kann dies im Modell wiedergegeben werden, indem die Übergangsintensitäten des Risikomodells vom Verhaltensmodell abhängen. D.h. die kausalen Zusammenhänge zwischen den Modellen haben verschiedene Richtungen und somit verschiedene ökonomische Interpretationen. Man betrachte jedoch einen kombinierten Prozess, bei dem es fast unmöglich ist, die Richtung der kausalen Zusammenhänge festzustellen.

Das kanonische Verhaltensmodell in Abbildung 5.2 stellt ebenfalls ein Modell für die Nachfrage von Versicherungsnehmern dar, bei dem Adverse Selektion eine Rolle spielt. Versicherte Personen in unterschiedlichen Risikozuständen tendieren dazu, die Optionen der Beitragsfreistellung und des Rückkaufes unterschiedlich auszuüben. Des Weiteren zeigen sich auch Auswirkungen von Moral Hazard. Denn die Mortalitäts- und Invaliditätsraten der Versicherungsnehmer im Zustand der Prämienzahlung unterscheiden sich von denjenigen im Zustand der Beitragsfreistellung. In der Praxis ist es üblich, dass ausschließlich versicherte Personen im Risikozustand „aktiv“ in den Zustand der Beitragsfreistellung und in den des Rückkaufes wechseln können. Andernfalls entfallen die Optionen.

In folgender Abbildung 5.3 werden die durch die vertraglichen Optionen entstehenden Abhängigkeiten anhand eines zweidimensionalen Modells veranschaulicht.

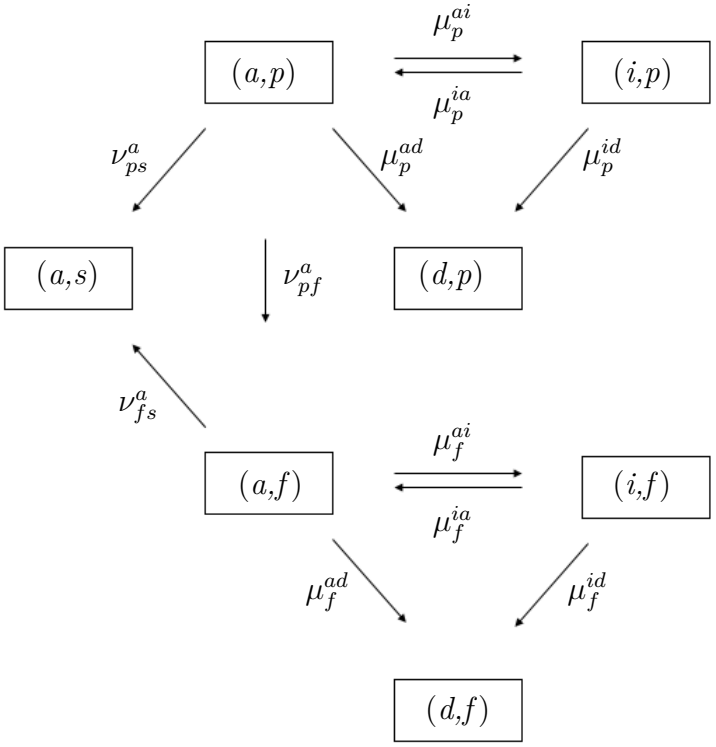

Abbildung 5.3: Kombiniertes Modell

5.4 Zahlungsströme im Risiko- und Verhaltensmodell

In diesem Kapitel werden vertragliche Zahlungen beschrieben, und Formeln zur Berechnung der bedingten erwarteten Barwerte vorgestellt. Dazu betrachte man ein verallgemeinertes Risikomodell in Kombination mit dem kanonischen Verhaltensmodell aus Abbildung 5.2. Es wird angenommen, dass die Versicherungsnehmer die Prämienzahlung nicht wieder aufnehmen, nachdem sie die Option der Beitragsfreistellung ausgeübt haben, d.h. $\nu_{fp} = 0$. Die Wiederaufnahme der Prämienzahlung wird folglich als ein neuer Vertrag angesehen.

Zunächst betrachte man einen Vertrag, dessen Zahlungen festgelegt sind durch das Risikomodell, bedingt auf das Verhaltensmodell im Zustand der Prämienzahlung p. Dem Versicherungsnehmer wird eine Nettoleistung der Höhe b^j ausbezahlt, falls er sich im Zustand j befindet und eine Einmalzahlung b^{jk} beim Übergang vom Zustand j in den Zustand k. Die Nettoleistung entspricht dabei den (positiven) Zahlungen, die dem Versicherten ausbezahlt werden, abzüglich den (positiven) Prämien, die er gezahlt hat. Der Vertrag endet zum Zeitpunkt n. Für den erwarteten Zahlungsstrom

zum Zeitpunkt s, unter der Bedingung, dass sich der Versicherungsnehmer zum Zeitpunkt s im Risikozustand k befindet und in den Zustand $l \neq k$ wechselt, gilt

$$c^k(s) = b^k(s) + \sum_{l:l\neq k} \mu_p^{kl}(s) b^{kl}(s),$$

wobei Zustände in $\mathbf{Z}^{\mathbf{Risiko}}$ angenommen werden.

Im Falle eines Rückkaufes im Risikozustand k zum Zeitpunkt t, entfallen alle zukünftigen Zahlungen und der Rückkaufswert $G^k(t)$ wird ausbezahlt.

Ferner werden die zukünftigen Zahlungen, im Falle einer Beitragsfreistellung im Risikozustand h zum Zeitpunkt t, folgendermaßen umgewandelt. Die negativen Komponenten von b^j und b^{jk} (wie Prämien), werden auf Null gesetzt. Die positiven Komponenten (gekennzeichnet mit b^{j+} und b^{jk+}), werden mit einem Beitragsfreistellungsfaktor $f^h(t)$ multipliziert, welcher ausschließlich von t und h abhängt. Für den erwarteten Zahlungsstrom der positiven Zahlungen (vor Multiplikation mit $f^h(t)$) gilt dann

$$c^{k+}(s) = b^{k+}(s) + \sum_{l:l\neq k} \mu_f^{kl}(s) b^{kl+}(s).$$

Der erwartete Zahlungsstrom zum Zeitpunkt s, unter der Bedingung, dass sich der Versicherungsnehmer zum Zeitpunkt s im Risikozustand k befindet und zum Zeitpunkt t, während er sich im Risikozustand h befindet, in den Verhaltenszustand der Beitragsfreistellung wechselt, ist gegeben durch

$$f^h(t)c^{k+}(s) = f^h(t)\Big(b^{k+}(s) + \sum_{l:l\neq k} \mu_f^{kl}(s) b^{kl+}(s)\Big).$$

Der Rückkaufswert, sowie der verminderte Versicherungsschutz infolge der Ausübung der Beitragsfreistellungsoption, sind vertraglich vereinbart. Stellt der Versicherungsnehmer die Prämienzahlung ein, müssen die Versicherungsleistungen jedoch neu kalkuliert werden um Spekulation zu vermeiden.

Der Beitragsfreistellungsfaktor vermindert die Zahlungen proportional, da sich ein Teil der Zahlungen auf zukünftige Prämien bezieht, welche durch die Ausübung der Option entfallen. Die Zahlung des Rückkaufswertes wird ebenfalls proportional vermindert. Wird der Vertrag in eine beitragsfreie Versicherung umgewandelt, während sich der Versicherte zum Zeitpunkt t im Risikozustand h befindet und wird der Vertrag zum Zeitpunkt $u > t$ gekündigt, während sich der Versicherungsnehmer im Risikozustand

j befindet, dann wird der Rückkaufswert $f^h(t)G^{j+}(u)$ ausbezahlt. Alle Koeffizienten, die sich auf die Auszahlung beziehen, einschließlich f und G, seien dabei stetig und beschränkt. Alle Formeln lassen sich dahingehend verallgemeinern, dass die Koeffizienten abzählbar viele Unstetigkeitsstellen aufweisen. D.h. die Reserven sind in diesen Punkten zwar nicht differenzierbar, jedoch immer noch stetig.

Da Z ein Markovprozess ist, hängt die Übergangsintensität zum Zeitpunkt t nur von der Position von Z ab. Das heißt aber nicht, dass die Auszahlung zum Zeitpunkt t nur von Z abhängt. Da der erwartete Zahlungsstrom zum Zeitpunkt s, $f^h(t)c^{k+}(s)$, durch den Beitragsfreistellungsfaktor von t und h abhängt, existiert eine zeitliche Abhängigkeit im Zahlungsprozess, die jedoch nicht im Markovmodell existiert.

Im Folgenden bleibt diese zeitliche Abhängigkeit unberücksichtigt. Des Weiteren nehme man eine deterministische Zinsrate r an.

5.4.1 Bedingt auf den Zustand der Beitragsfreistellung

In diesem Abschnitt wird eine DGL eingeführt, welche die Reserve beschreibt als erwarteten Barwert zukünftiger Zahlungen zum Zeitpunkt $t > \tau$, bedingt auf den Übergang in den Zustand der Beitragsfreistellung, während sich der Versicherungsnehmer zum Zeitpunkt τ im Risikozustand h befindet. In Steffensen (2000) wird ein arbitragefreier Ansatz der Thieleschen Differentialgleichung hergeleitet. Die im Folgenden verwendeten DGLen und deren Lösungen beruhen auf dem resultierenden Theorem aus Steffensen (2000, Theorem 1), wobei die entsprechenden Zustände eingesetzt werden. $V_f^j(t)_{\tau h}$ bezeichne die Reserve, dass sich der Versicherte zum Zeitpunkt t im Risikozustand j befindet und der Vertrag in eine beitragsfreie Versicherung umgewandelt wird, während sich der Versicherungsnehmer zum Zeitpunkt τ im Risikozustand h befindet. $V_f^j(t)_{\tau h}$ ist gegeben durch die DGL

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V_f^j(t)_{\tau h} = \; & \underbrace{rV_f^j(t)_{\tau h}}_{\text{Verzinsung}} - \underbrace{f^h(\tau)b^{j+}(t)}_{\text{Nettoleistung}} \\ & \underbrace{- \sum_{k:k\neq j} \mu_f^{jk}(t)\Big(f^h(\tau)b^{jk+}(t) + V_f^k(t)_{\tau h} - V_f^j(t)_{\tau h}\Big)}_{\text{Risikokapital des Zustandswechsels im Risikomodell}} \\ & \underbrace{- \nu_{fs}^j(t)\Big(f^h(\tau)G^{j+}(t) - V_f^j(t)_{\tau h}\Big)}_{\text{Risikokapital des Rückkaufes}},\end{aligned}$$

wobei die Randbedingung $V_f^j(n)_{\tau h} = 0$ nicht berücksichtigt wird. Des Weiteren stellt $f^h(\tau)$ den Beitragsfreistellungsfaktor zum Zeitpunkt τ dar, während sich der Versicherte im Risikozustand h befindet, und der Vertrag in eine beitragsfreie Versicherung umgewandelt wird. Die Lösung ist gegeben durch

$$V_f^j(t)_{\tau h} = f^h(\tau) \int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big) \sum_k p_{ff}^{jk}(t,s)\Big(c^{k+}(s) + \nu_{fs}^k G^{k+}(s)\Big)ds,$$

wobei $p_{ff}^{jk}(t,s)$ die Wahrscheinlichkeit bezeichne, dass der Versicherte vom Zustand j in den Zustand k des Risikomodells wechselt, während er sich im Zustand f des Verhaltensmodells befindet. Dies liegt der Annahme zugrunde, dass $\nu_{fp} = 0$ und somit $p_{ff}^{jk}(t,s) = p_{\overline{ff}}^{jk}(t,s)$. Dabei kennzeichnet $p_{\overline{ff}}^{jk}(t,s)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit im Zeitintervall $[t,s]$ immer im Verhaltenszustand f zu bleiben.

Anhand der Integrallösung wird ersichtlich, dass sich die Reserve zusammensetzt

- aus Zahlungen, die durch das Verweilen im Zustand der Beitragsfreistellung entstehen ($c^{k+}(s)$ Terme) und
- aus Zahlungen, die durch den Rückkauf entstehen ($G^{k+}(s)$ Terme).

Im Spezialfall, dass Risiko- und Verhaltensmodell unabhängig sind, gilt

$$p_{ff}^{jk}(t,s) = p_{ff}(t,s)p^{jk}(t,s),$$

so dass

$$V_f^j(t)_{\tau h} = f^h(\tau) \int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big)p_{ff}(t,s) \sum_k p^{jk}(t,s)\Big(c^{k+}(s) + \nu_{fs}G^{k+}(s)\Big)ds.$$

Diese Lösung ist praktisch, denn sie enthält die „ursprünglich“ erwarteten Zahlungen $\sum_k p^{jk}(t,s)c^{k+}(s)$ und die Zahlungen $\sum_k p^{jk}(t,s)\nu_{fs}(s)G^{k+}(s)$. Die Annahme der stochastischen Unabhängigkeit vereinfacht die Formeln zwar, jedoch führt sie aufgrund von numerischen Fehlern zu falschen Ergebnisses (wie in Henriksen et al. (2014, Kapitel 6) gezeigt wird). Da die hergeleiteten Gleichungen auch ohne Verwendung der stochastischen Unabhängigkeit handhabbar sind, wird von dieser Annahme abgeraten.

5.4.2 Bedingt auf den Zustand der Prämienzahlung

In diesem Abschnitt wird eine DGL eingeführt, welche die Reserve, gegeben dass sich der Vertrag zum Zeitpunkt t im Zustand der Prämienzahlung und im Zustand j des Risikomodells befindet, beschreibt. Die Reserve wird mit $V^j(t)$ bezeichnet, wobei die (tiefgestellten) Indizes p hier weggelassen werden. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V^j(t) = \underbrace{rV^j(t)}_{\text{Verzinsung}} - \underbrace{b^j(t)}_{\text{Nettoleistung}} - \underbrace{\sum_{k:k\neq j}\mu_p^{jk}\Big(b^{jk}(t)+V^k(t)-V^j(t)\Big)}_{\text{Risikokapital des Zustandswechsels im Risikomodell}} \\ - \underbrace{\nu_{pf}^j(t)\Big(V_f^j(t)_{tj}-V^j(t)\Big)}_{\text{Risikokapital der Beitragsfreistellung}} - \underbrace{\nu_{ps}^j(t)\Big(G^j(t)-V^j(t)\Big)}_{\text{Risikokapital des Rückkaufes}}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Die Reserve $V_f^j(t)_{tj}$ ergibt sich, indem die DGL für $V_f^j(t)_{\tau j}$ mit festem τ gelöst und nachträglich τ durch t ersetzt wird. Für die Lösung gilt

$$\begin{aligned}V^j(t) = &\int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big)\sum_k p_{pp}^{jk}(t,s)\Big(c^k(s)+G^k(s)\nu_{ps}^k(s)\Big)ds \\ &+\int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big)\sum_k W^{jk}(t,s)\Big(c^{k+}(s)+\nu_{fs}^k(s)G^{k+}(s)\Big)ds,\end{aligned} \tag{5.7}$$

wobei $p_{pp}^{jk}(t,s)$ die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass der Versicherungsnehmer vom Zustand j in den Zustand k des Risikomodells wechselt, während er sich im Zustand p des Verhaltensmodells befindet. Dies liegt der Annahme zugrunde, dass $\nu_{fp}=0$, so dass $p_{pp}^{jk}(t,s)=p_{\overline{pp}}^{jk}(t,s)$. Des Weiteren gilt

$$W^{jk}(t,s)=\int_t^s\sum_h p_{pp}^{jh}(t,\tau)\nu_{pf}^h(\tau)p_{ff}^{hk}(\tau,s)f^h(\tau)d\tau.$$

Anhand der Integrallösung wird ersichtlich, dass sich die Reserve zusammensetzt

- aus Zahlungen, die durch das Verweilen im Zustand der Prämienzahlung entstehen ($c^k(s)$ Terme),
- aus Zahlungen, die durch den Übergang vom Zustand der Prämienzahlung in den des Rückkaufs entstehen ($G^k(s)$ Terme),
- aus Zahlungen, die nach einem Wechsel durch das Verweilen im Zustand der Beitragsfreistellung entstehen ($c^{k+}(s)$ Terme) und

- aus Zahlungen, die nach einem Wechsel durch den Übergang vom Zustand der Beitragsfreistellung in den des Rückkaufs entstehen ($G^{k+}(s)$ Terme).

Der erwartete Beitragsfreistellungsfaktor von (t, s), gegeben dass der Versicherte im Risikomodell vom Zustand j in den Zustand k wechselt und im Verhaltensmodell vom Zustand p in den Zustand f, ist gegeben durch $\frac{W^{jk}(t,s)}{p^{jk}_{pf}(t,s)}$.

Im Spezialfall, dass Risiko- und Verhaltensmodell unabhängig sind, gilt

$$\begin{aligned}
p^{jk}_{pp}(t,s) &= p_{pp}(t,s)p^{jk}(t,s),\\
p^{jk}_{ff}(t,s) &= p_{ff}(t,s)p^{jk}(t,s),\\
p^{jk}_{pf}(t,s) &= p_{pf}(t,s)p^{jk}(t,s),
\end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned}
V^j(t) = &\int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big)p_{pp}(t,s)\sum_k p^{jk}(t,s)\Big(c^k(s)+\nu_{ps}(s)G^k(s)\Big)ds\\
&+\int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big)\sum_k W^{jk}(t,s)\Big(c^{k+}(s)+\nu_{fs}(s)G^{k+}(s)\Big)ds,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

wobei

$$W^{jk}(t,s) = \int_t^s p_{pp}(t,\tau)\nu_{pf}(\tau)p_{ff}(\tau,s)\sum_h p^{jh}(t,\tau)p^{hk}(\tau,s)f^h(\tau)d\tau.$$

Diese Lösung ist praktisch, denn sie enthält wieder die „ursprünglich“ erwarteten Zahlungen $\sum_k p^{jk}(t,s)c^k(s)$ und die Zahlungen $\sum_k p^{jk}(t,s)\nu_{ps}(s)G^k(s)$. Jedoch führt die Annahme der stochastischen Unabhängigkeit auch hier zu falschen Ergebnissen. Man nehme nun an, dass $f^h(\tau)$ nicht vom Risikozustand h abhängt und bezeichne f^h mit f. Dann gilt

$$W^{jk}(t,s) = p^{jk}(t,s)W(t,s),$$

mit

$$W(t,s) = \int_t^s p_{pp}(t,\tau)\nu_{pf}(\tau)p_{ff}(\tau,s)f(\tau)d\tau, \tag{5.9}$$

so dass für die zweite Zeile in (5.8) folgt

$$+\int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big)W(t,s)\sum_k p^{jk}(t,s)\Big(c^{k+}(s)+\nu_{fs}(s)G^{k+}(s)\Big)ds.$$

Diese Lösung enthält zwar die „ursprünglich“ erwarteten Zahlungen $\sum_k p^{jk}(t,s)c^k(s)$ und $\sum_k p^{jk}(t,s)c^{k+}(s)$, sowie $\sum_k p^{jk}(t,s)\nu_{ps}(s)G^k(s)$ und $\sum_k p^{jk}(t,s)\nu_{fs}(s)G^{k+}(s)$, dennoch führt sie zu falschen Ergebnissen.

5.5 Wichtige Spezialfälle

In diesem Kapitel werden die Resultate aus dem vorherigen Kapitel auf zwei wichtige Spezialfälle, den des Invaliditätsmodells und den des Überlebensmodells, angewendet. In beiden Fällen werden die entsprechenden DGLen und deren (explizite) Lösungen vorgestellt, wobei vom Zustand der Prämienzahlung ausgegangen wird. Dabei werden Annahmen zur Vereinfachung der Berechnungen getroffen.

5.5.1 Invaliditätsmodell

Zunächst betrachte man das Invaliditätsmodell aus Abbildung 5.1. Dabei wird angenommen, dass im Zustand des Todes keine Leistungen erfolgen. Die Reserve, gegeben der Versicherte zahlt Prämien und ist zum Zeitpunkt t aktiv, kann als Spezialfall von (5.6) angesehen werden,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V^a(t) = {} & rV^a(t) - b^a(t) \\ & - \mu^{ai}(t)\Big(b^{ai}(t) + V^i(t) - V^a(t)\Big) - \mu^{ad}(t)\Big(b^{ad}(t) - V^a(t)\Big) \\ & - \nu^a_{pf}\Big(V^a_f(t)_{ta} - V^a(t)\Big) - \nu^a_{ps}(t)\Big(G^a(t) - V^a(t)\Big).\end{aligned}$$

Die zweite Zeile enthält das Risikokapital hinsichtlich des Zustandswechsels im Risikomodell, während die dritte Zeile das Risikokapital hinsichtlich des Zustandswechsels im Verhaltensmodell enthält.

Die verallgemeinerte Lösung in (5.7) wird zu

$$\begin{aligned}V^a(t) = {} & \int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big) \begin{pmatrix} p^{aa}_{pp}(t,s)\Big(c^a(s) + \nu^a_{ps}(s)G^a(s)\Big) \\ +p^{ai}_{pp}(t,s)\Big(c^i(s) + \nu^i_{ps}(s)G^i(s)\Big)\end{pmatrix} ds \\ & + \int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big) \begin{pmatrix} W^{aa}(t,s)\Big(c^{a+}(s) + \nu^a_{fs}(s)G^{a+}(s)\Big) \\ +W^{ai}(t,s)\Big(c^{i+}(s) + \nu^i_{fs}(s)G^{i+}(s)\Big)\end{pmatrix} ds,\end{aligned}$$

wobei

$$W^{aa}(t,s) = \int_t^s \begin{pmatrix} p_{pp}^{aa}(t,\tau)\nu_{pf}^{a}(\tau)p_{ff}^{aa}(\tau,s)f^{a}(\tau) \\ +p_{pp}^{ai}(t,\tau)\nu_{pf}^{i}(\tau)p_{ff}^{ia}(\tau,s)f^{i}(\tau) \end{pmatrix} d\tau$$
$$W^{ai}(t,s) = \int_t^s \begin{pmatrix} p_{pp}^{aa}(t,\tau)\nu_{pf}^{a}(\tau)p_{ff}^{ai}(\tau,s)f^{a}(\tau) \\ +p_{pp}^{ai}(t,\tau)\nu_{pf}^{i}(\tau)p_{ff}^{ii}(\tau,s)f^{i}(\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

Nun wird die Annahme getroffen, dass Ereignisse hinsichtlich des Verhaltens nur eintreten, sofern sich der Versicherungsnehmer im aktiven Zustand befindet. D.h. $\nu_{pf}^{i}(t) = \nu_{ps}^{i}(t) = 0$, so dass sich W^{aa} und W^{ai} vereinfachen zu

$$W^{aa}(t,s) = \int_t^s p_{pp}^{aa}(t,\tau)\nu_{pf}^{a}(\tau)p_{ff}^{aa}(\tau,s)f^{a}(\tau)d\tau$$
$$W^{ai}(t,s) = \int_t^s p_{pp}^{aa}(t,\tau)\nu_{pf}^{a}(\tau)p_{ff}^{ai}(\tau,s)f^{a}(\tau)d\tau.$$

Diese Formeln sind nicht explizit, sofern eine positive Reaktivierungsrate zulässig ist. Wird die Reaktivierung ausgeschlossen, gilt für die Wahrscheinlichkeiten

$$p_{pp}^{aa}(t,s) = p_{pp}^{\overline{aa}}(t,s) = \exp\Big(-\int_t^s \mu_p^{ai} + \mu_p^{ad} + \nu_{pf}^{a} + \nu_{ps}^{a}\Big)$$
$$p_{ff}^{aa}(t,s) = p_{ff}^{\overline{aa}}(t,s) = \exp\Big(-\int_t^s \mu_f^{ai} + \mu_f^{ad} + \nu_{fs}^{a}\Big).$$

Somit vereinfachen sich auch die Berechnungen von $p_{ff}^{ai}(t,s)$, $W^{aa}(t,s)$ und $W^{ai}(t,s)$.

Nun wird die Annahme getroffen, dass Risiko- und Verhaltensmodell unabhängig voneinander sind. Für die Reserve gilt dann

$$\begin{aligned} V^{a}(t) = & \int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big)p_{pp}(t,s) \begin{pmatrix} p^{aa}(t,s)\Big(c^{a}(s) + \nu_{ps}(s)G^{a}(s)\Big) \\ +p^{ai}(t,s)\Big(c^{i}(s) + \nu_{ps}(s)G^{i}(s)\Big) \end{pmatrix} ds \\ & + \int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big) \begin{pmatrix} W^{aa}(t,s)\Big(c^{a+}(s) + \nu_{fs}(s)G^{a+}(s)\Big) \\ +W^{ai}(t,s)\Big(c^{i+}(s) + \nu_{fs}(s)G^{i+}(s)\Big) \end{pmatrix} ds, \end{aligned}$$

wobei

$$W^{aa}(t,s) = \int_t^s p_{pp}(t,\tau)\nu_{pf}(\tau)p_{ff}(\tau,s) \begin{pmatrix} p^{aa}(t,\tau)p^{aa}(\tau,s)f^{a}(\tau) \\ +p^{ai}(t,\tau)p^{ia}(\tau,s)f^{i}(s) \end{pmatrix} d\tau,$$
$$W^{ai}(t,s) = \int_t^s p_{pp}(t,\tau)\nu_{pf}(\tau)p_{ff}(\tau,s) \begin{pmatrix} p^{aa}(t,\tau)p^{ai}(\tau,s)f^{a}(\tau) \\ +p^{ai}(t,\tau)p^{ii}(\tau,s)f^{i}(s) \end{pmatrix} d\tau.$$

Mit dieser Darstellung sind weiterhin Schwierigkeiten verbunden. Auch wenn sich einige Komponenten auf die bedingten erwarteten Zahlungen des ursprünglichen Vertrages beziehen, können die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht explizit berechnet werden, sofern Reaktivierung zulässig ist. Wie im vorherigen Kapitel nehme man an, dass $f^i = f^a$. Somit folgt

$$\begin{aligned} W^{aa}(t,s) &= p^{aa}(t,s)W(t,s) \\ W^{ai}(t,s) &= p^{ai}(t,s)W(t,s), \end{aligned}$$

wobei W definiert sei wie in (5.9), so dass

$$\begin{aligned} V^a(t) = & \int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big) p_{pp}(t,s) \begin{pmatrix} p^{aa}(t,s)\Big(c^a(s) + \nu_{ps}(s)G^a(s)\Big) \\ +p^{ai}(t,s)\Big(c^i(s) + \nu_{ps}(s)G^i(s)\Big) \end{pmatrix} ds \\ & + \int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big) W(t,s) \\ & \begin{pmatrix} p^{aa}(t,s)\Big(c^{a+}(s) + \nu_{fs}(s)G^{a+}(s)\Big) \\ +p^{ai}(t,s)\Big(c^{i+}(s) + \nu_{fs}(s)G^{i+}(s)\Big) \end{pmatrix} ds, \end{aligned}$$

Nun beziehen sich die Komponenten auf die ursprünglichen Zahlungen. Wird Reaktivierung ausgeschlossen, so sind die Wahrscheinlichkeiten explizit und man erhält die Darstellung der Reserve in der „einfachsten“ Form.

5.5.2 Überlebensmodell

Nachfolgend betrachte man das Überlebensmodell. Darin bleibt der Invaliditätszustand aus Abschnitt 5.5.1 unberücksichtigt. Des Weiteren wird der (hochgestellte) Exponent a in der Reserve weggelassen, da bedingt wird, dass sich der Versicherungsnehmer im aktiven Zustand befindet. Im Zustand des Todes fallen alle Zahlungen und Verhaltensoptionen weg. Die verallgemeinerte Lösung in (5.7) wird zu

$$\begin{aligned} V(t) = & \int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big) p_{pp}^{aa}\Big(c^a(s) + \nu_{ps}(s)G^a(s)\Big)ds \\ & + \int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big) W^{aa}(t,s)\Big(c^{a+}(s) + \nu_{fs}(s)G^a(s)\Big)ds, \end{aligned}$$

wobei

$$W^{aa}(t,s) = \int_t^s p_{pp}^{aa}(t,\tau)\nu_{pf}(\tau)p_{ff}^{aa}(\tau,s)f^a(\tau)d\tau.$$

Nimmt man an, dass die Modelle unabhängig voneinander sind, so wirkt sich der Zustand des Verhaltensmodells nicht auf die Mortalitätsrate und der Zustand des Risikomodells nicht auf die Übergangsintensitäten des Verhaltensmodells aus. Da Zahlungen im Zustand des Todes wegfallen, macht es keinen Unterschied, ob im Zustand des Todes, ein Wechsel in einen anderen Verhaltenszustand zulässig ist oder nicht. Würde man jedoch Zahlungen im Zustand des Todes annehmen, dann hätte es auch Auswirkungen, ob im Zustand des Todes, ein Wechsel in einen anderen Verhaltenszustand zulässig ist oder nicht. Unter der Annahme der Unabhängigkeit erhält man folgende Vereinfachung

$$\begin{aligned} V(t) = &\int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big) p_{pp}(t,s) p^{aa}(t,s)\Big(c^a(s) + \nu_{ps}(s) G^a(s)\Big) ds \\ &+ \int_t^n \exp\Big(-\int_t^s r(u)du\Big) W^{aa}(t,s)\Big(c^{a+}(s) + \nu_{fs}(s) G^{a+}(s)\Big) ds, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} W^{aa}(t,s) &= \int_t^s p_{pp}(t,\tau)\nu_{pf}(\tau)p_{ff}(\tau,s)p^{aa}(t,\tau)p^{aa}(\tau,s)f^a(\tau)d\tau \\ &= p^{aa}(t,s)\int_t^s p_{pp}(t,\tau)\nu_{pf}(\tau)p_{ff}(\tau,s)f^a(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Somit erhält man einen Ausdruck basierend auf den „ursprünglichen“ Zahlungsströmen. Im Überlebensmodell ist die vereinfachende Annahme $f^h = f$ nicht notwendig, denn im Zustand des Todes erfolgen keine Zahlungen.

5.6 Beitragsfreistellungsfaktor

In obigen Berechnungen wurde angenommen, dass zukünftige Zahlungen beim Übergang in den Zustand der Beitragsfreistellung, während sich der Versicherte zum Zeitpunkt t im Risikozustand j befindet, mit dem selben Faktor $f^j(t)$ multipliziert werden. $f^j(t)$ sei gegeben durch

$$f^j(t) = \frac{V^{j*}(t)}{V^{j+*}(t)},$$

wobei „*“ den Wert der Zahlungen bezüglich der technischen Basis (r^*,μ^*)[14] bezeichne und „+“ dass ausschließlich positive Zahlungen berücksichtigt werden. Man betrachte das Risikokapital der Betragsfreistellung $V_f^j(t)_{tj} - V^j(t)$. Da $V_f^j(t)_{tj} = f^j(t)V^{j+}(t)$,

[14] Die technische Basis (r^*,μ^*) weicht möglicherweise von den verwendeten Rechnungsgrundlagen ab.

gilt

$$V_f^j(t)_{tj} - V^j(t) = f^j(t)V^{j+}(t) - V^j(t).$$

Im Falle, dass $f^j(t) = \frac{V^{j*}(t)}{V^{j+*}(t)}$, folgt

$$V_f^{j*}(t)_{tj} - V^{j*}(t) = f^j(t)V^{j+*}(t) - V^{j*}(t) = 0.$$

D.h. auf der technischen Basis übernimmt der Versicherungsnehmer das Risiko der Beitragsfreistellung selbst. Demzufolge kann die Option der Beitragsfreistellung auf technischer Basis unberücksichtigt bleiben. Des Weiteren kann vom Beitragsfreistellungsfaktor gefordert werden, dass das Risikokapital der Beitragsfreistellung auf technischer Basis gleich Null ist.

Es gibt jedoch Situationen, in denen die zukünftigen Zahlungen mit unterschiedlichen Beitragsfreistellungsfaktoren multipliziert werden. Hierfür wird auf Henriksen et al. (2014, Kapitel 5) verwiesen.

Ferner werden in Henriksen et al. (2014, Kapitel 6) numerische Ergebnisse vorgestellt und die Auswirkungen der zugrundeliegenden Verhaltensannahmen für einen „neuen“ und einen „alten“ Vertrag analysiert.

5.7 Zusammenfassung

Dieses Kapitel behandelte eine rein mathematische Betrachtung. Dabei wurden zunächst Grundlagen der Prospektiven Reserve, der Thieleschen Differentialgleichung, der Markovketten und des Deckungskapitals im Mehrfachzustandsmodell eingeführt.

Basierend auf diesen Kenntnissen wurde ein Markovsches Mehrfachzustandsmodell für das Versicherungsrisiko und das Verhalten von Versicherten hinsichtlich Storno und Beitragsfreistellung eingeführt. Es wurden Zahlungsströme im Risiko- und Verhaltensmodell vorgestellt, Reserven mittels gewöhnlicher Differentialgleichungen beschrieben und deren Lösungen dargelegt. Anschließend wurden wichtige Spezialfälle behandelt, wobei vereinfachende Annahmen getroffen wurden. Ferner wurden jeweils die Fälle der Abhängigkeit und der Unabhängigkeit zwischen dem Risiko- und dem Verhaltensmodell dargestellt.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Diplomarbeit war das Stornorisiko in der Lebensversicherung gemäß der Standardformel nach Solvency II. Zunächst wurden Grundlagen und zentrale Begriffe zu Solvency II eingeführt und Grundelemente der ersten Säule dargelegt.

Des Weiteren wurde ein Excel Modell für das Stornoergebnis erstellt, welches den Vertragstyp der Kapitallebensversicherung abbildet. Unter Berücksichtigung der jährlich verstorbenen und stornierten Policen, werden Beiträge, Reserven und Leistungen des Versicherungsbestandes berechnet. In einer Gewinn und Verlustrechnung werden Einnahmen und Ausgaben gegenübergestellt und der Wert des Versicherungsportfolios bestimmt. Diese Berechnungen werden für das Storno Up-, Down, Mass- und das Basis Szenario durchgeführt und das Szenario mit der maximalen Auswirkung identifiziert. Das Modell wurde motiviert durch die These, dass bei einem profitablen Versicherungsprodukt ein Storno Up Szenario und bei einem nicht profitablen Versicherungsprodukt ein Storno Down Szenario wirkt. Dabei wurde der wirtschaftliche Hintergrund der Gewinnquellen und deren Abhängigkeit vom Storno analysiert. Die These kann aufgrund der Ergebnisse im Allgemeinen widerlegt werden.

Das vorletzte Kapitel behandelte eine rein mathematische Betrachtung. Hierbei lag das Interesse in der Bestimmung von Reserven in Bezug auf das erwartete Verhalten von Versicherungsnehmern. Es wurde ein Markovsches Mehrfachzustandsmodell für das Versicherungsrisiko und das Verhalten von Versicherungsnehmern hinsichtlich Storno und Beitragsfreistellung betrachtet. Die Reserven wurden mittels gewöhnlicher Differentialgleichungen beschrieben und anschließend deren Lösungen dargestellt.

Literaturverzeichnis

Bass, R. F. (2011). *Stochastic Processes.* Cambridge: Cambridge University Press.

Buchardt, K., Møller, T., & Schmidt, K. B. (2014). *Life insurance cash flows with policyholder behavior.* Risks(2015)3:290-317.

De Giovanni, D. (2010). *Lapse rate modeling: a rational expectation approach.* Scand Actuar J 2010(1):56-67.

Deutsche Aktuarvereinigung e.V. (2014). *Risikomindernde Wirkung der Überschussbeteiligung auf Gruppenebene unter Solvency II. Ergebnisbericht des Ausschusses Rechnungslegung und Solvabilität.*

Eling, M. & Kochanski, M. (2013). *Research on lapse in life insurance: what has been done and what needs to be done?* Emerald Group Publishing Limited.

European Insurance and Occupational Pensions Authority (2014a). *Technical specification for the preparatory phase (part I).* EIOPA-14/209.

European Insurance and Occupational Pensions Authority (2014b). *The underlying assumptions in the standard formula for the solvency capital requirement calculation.* EIOPA-14-322.

Henriksen, L., Nielsen, J., & Steffensen, M. (2014). *Markov chain modeling of policyholder behavior in life insurance and pension.* Eur. Actuar. J. (2014)4:1-29.

Kersting, G. (2014). *Stochastische Prozesse.* Mathematik Kompakt. Basel [u.a.]: Springer.

Klenke, A. (2013). *Wahrscheinlichkeitstheorie* (3rd ed.). Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin [u.a.]: Springer Spektrum.

Kochanski, M. (2010). *Solvenzkapital für FLV unter Berücksichtigung von dynamischem Storno.* ZVersWiss(2010)99:689-710.

Koller, M. (2010). *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung* (2nd ed.). Springer-Lehrbuch. Berlin [u.a.]: Springer.

Kriele, M. & Wolf, J. (2016). *Wertorientiertes Risikomanagement von Versicherungsunternehmen* (2nd ed.). Springer-Lehrbuch Masterclass. Berlin [u.a.]: Springer Spektrum.

Ortmann, K. M. (2016). *Praktische Lebensversicherungsmathematik* (2nd ed.). Studienbücher Wirtschaftsmathematik. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Rheinländer, T. (2016). *Höhere Lebensversicherungsmathematik*. Vorlesung an der TU Wien im Sommersemester 2016.

Rheinländer, T. & Sexton, J. (2011). *Hedging Derivatives*, volume 15 of *Advanced series on statistical science & applied probability*. New Jersey [u.a.]: World Scientific.

Solvency II kompakt: das aktuelle Kompetenzportal zu Solvency II (2017a). *Bewertung der Optionen und Garantien von Lebensversicherungspolicen*. http://www.solvency-ii-kompakt.de/content/bewertung-der-optionen-und-garantien-von-lebensversicherungspolicen. Zugriff am 18.05.2017.

Solvency II kompakt: das aktuelle Kompetenzportal zu Solvency II (2017b). *Bewertung versicherungstechnischer Verpflichtungen*. http://www.solvency-ii-kompakt.de/content/bewertung-versicherungstechnischer-verpflichtungen. Zugriff am 17.05.2017.

Solvency II kompakt: das aktuelle Kompetenzportal zu Solvency II (2017c). *Ermittlung der Kapitalanforderungen VT Leben*. http://www.solvency-ii-kompakt.de/content/ermittlung-der-kapitalanforderungen-vt-leben. Zugriff am 22.03.2017.

Steffensen, M. (2000). *A no arbitrage approach to Thiele's differential equation*. Insur Math Econ 27:201-2014.

Steffensen, M. (2002). *Intervention options in life insurance*. Insur Math Econ 31:71-83.

Weindorfer, B. (2011). *Solvency II. Eine Übersicht*. University of Applied Sciences bfi Vienna. Number 64/2011.