TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Auf den Spuren der Zahlen

Ausgeführt am Institut für Mathematik und Geoinformation
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao. Univ. Prof. Mag. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger

durch

Katharina Zechner

Streichergasse 8/12
1030 Wien

21. März 2017

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der historischen Entwicklung der Zahlen. Dabei liegt der Schwerpunkt auf Zahlensystemen sowie auf den ersten Nachweisen von Zahlen in Kulturen des amerikanischen Doppelkontinentes, Asiens, Nordafrikas und Europas (hierfür werden vorwiegend schriftliche Quellen betrachtet und die Zahlsprache wird nur am Rande behandelt). Die unterschiedlichen Möglichkeiten der Zahlendarstellung werden vorgestellt und erklärt, wobei ebenfalls geläufige Rechenmethoden und Rechenhilfen erläutert werden. Des Weiteren werden Einblicke in die Entwicklung und Motivation der Mathematik gegeben.

Der hier gewählte Ausschnitt der Zahlengeschichte gibt einen Eindruck über die Vielfalt an Zahlendarstellungen und komplexen Zahlensystemen. Manche ähneln einander, andere unterscheiden sich grundlegend. Beachtlich ist dabei, dass sich zum Teil auch ohne kulturellen Austausch bei verschiedenen Völkern vergleichbare Strukturen entwickeln konnten. (vgl. Wußing 2008)

Eine besondere Bedeutung kommt der Erfindung von Positionssystemen und damit auch der Null zu. Diese Entwicklung brachte eine deutliche Vereinfachung der Zahlschrift und des schriftlichen Rechnens und erfolgte zum ersten Mal vor etwa 4 000 Jahren im vorderen Orient. Das heute weltweit verbreitete dezimale Positionssystem wurde rund 2 500 Jahre darauf in Indien entwickelt und brauchte bis zu seiner Verbreitung in Europa etwa weitere 1 000 Jahre. (Vgl. Wußing 2008)

Diese Arbeit gibt einen Einblick in die historische Entwicklung der Zahlen und möchte zur Reflexion über das, heute als selbstverständlich betrachtete, internationale Positionssystem aus Indien anregen.

Danksagung

An dieser Stelle möcht' ich mich bei allen bedanken,
die mich begleitet mit Taten und Gedanken
die mich ermuntert zur rechten Zeit
die zu den kleinen Hilfen bereit.

Besonders hat mich meine Familie getragen
jedwede Unterstützung, kaum lästige Fragen.

Und nicht zuletzt, ganz besonders und vor allem
Hat mir die Betreuung an der TU gefallen.
Fr. Ao. Univ. Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger war stets da für Anliegen und Fragen,
auch bezüglich moralischer Stütze oder wichtiger Anregungen kann ich nicht klagen!

Danke schön

Inhaltsverzeichnis

1 „Was sind und was sollen die Zahlen?“

(Wußing 2009, Seite 226)

Die Mathematik wird manchmal als Wissenschaft der Zahlen betitelt, was bei weitem keine ausreichende Definition dieser breitgefächerten Wissenschaft ist. Jedoch sind Zahlen ein wichtiger Bestandteil der Mathematik, die unter anderem auch von Richard Dedekind erforscht wurden, der eine Arbeit mit dem Namen dieses Kapitels verfasste. (vgl. Blum 2007 und Wußing 2009)

Die Arbeit publizierte Dedekind 1888 (sie beschäftigte sich mit der axiomatischen Einführung der natürlichen Zahlen) und beantwortete die, im Titel gestellte, Frage wie folgt: „die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen.“ ([Link 9]). (vgl. Wußing 2009 und [Link 9])

Auch die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dieser Frage - jedoch im historischen Kontext: Das heißt, die Definition der Zahl ist in dieser Arbeit von geringerer Bedeutung, dafür ihre Geschichte umso mehr. Durch die Darlegung der Zahlenentwicklung in verschiedenen Kulturkreisen sollen folgende Fragen beantwortet werden: Wo liegt der Ursprung der Zahlen? Warum und wie sind sie entstanden? Wie können Zahlen dargestellt werden und wozu wurden sie benutzt?

Dazu werden vorwiegend die verschriftlichten Zahlen und Zahlensysteme betrachtet, die es in Amerika (vor der Kolonialisierung durch die Europäer), Asien, Europa und (Nord-)Afrika gegeben hatte und gibt. Das Hauptaugenmerk wird dabei auf die Entwicklung der natürlichen Zahlen gelegt. Neben der Zahlendarstellung an sich werden ebenfalls gängige Rechenmethoden und Rechenhilfen, sowie die Bedeutung der Zahlen für die Mathematik im Lauf der Zeit vorgestellt.

Diese Arbeit ist in zwei große Kapitel gegliedert; der Schwerpunkt liegt auf der Zahlenentwicklung in einer Auswahl unterschiedlicher Kulturen und Sprachen.

2 Die Anfänge der Zahlen

Die Voraussetzungen um Zahlen entwickeln zu können sind abstraktes Denkvermögen und ein Zahlengefühl. Zahlengefühl ist etwas, das bereits Kleinkinder und auch viele Tiere besitzen (so können sie beispielsweise bemerken, wenn eines ihrer Jungtiere fehlt), und die Fähigkeit des abstrakten Denkens besaßen bereits frühe *Hominide*, Vorfahren und Verwandte des Homo sapiens sapiens (Menschen). Der älteste Nachweis für das menschliche Schaffen von abstrakten (vermutlich numerischen) Symbolen ist etwa 1,1 Millionen Jahre alt und besteht aus intendierten Ritzungen auf einem Tierknochen, der im Nordwesten von Bulgarien gefunden wurde. Von vor 350 000 Jahren gibt es einen weiteren Fund aus Zentraldeutschland: Die gruppierten Ritzungen, wiederum auf einem Knochen, werden heute als eine Art Mondkalender interpretiert. (vgl. Haarmann 2008 und Ifrah 1986)

Vom Homo sapiens sapiens gibt es von vor 22 000 Jahren, aus dem Nordosten der Demokratischen Republik Kongo, erste Nachweise für das Benutzen von Symbolen für Zahlen. Die ebenfalls in einen Knochen geritzten und gruppierten Striche, wie sie in Abbildung 2 a gezeigt werden, sind komplexer angeordnet als jene auf den älteren Fundstücken, wobei die Bedeutung der Zahlen bis heute noch nicht geklärt ist. Von der, etwa 5 000 bis 12 000 Jahre späteren, Periode gibt es Funde, die die Anfänge eines Kalenderwesens in Frankreich und Spanien zeigen: Um den Zeitpunkt für saisonale Zeremonien und Rituale zu bestimmen und Mondphasen zu berechnen, ritzten vermutlich Schamanen unter anderem Zahlzeichen auf Tiergebein. (vgl. Blum 2007 und Haarmann2008)

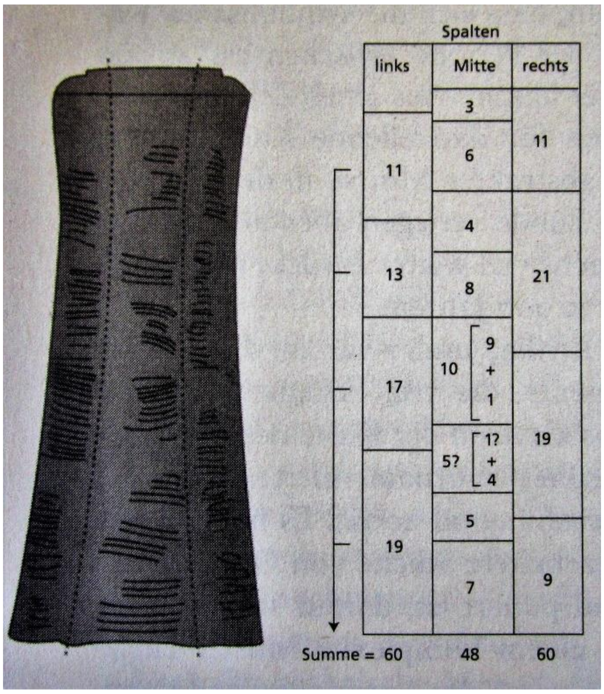


Abbildung 2 a: Zeichnung des 22 000 Jahre alten Knochens mit numerischen Ritzzeichen (Haarmann 2008, Seite 12)

Die ersten Zahlzeichen entstanden also vor langer Zeit. Sie bestanden aus einzelnen geritzten Strichen und wurden vermutlich für einfache astrologische Zwecke festgehalten, aber auch um beispielsweise einen Jagdbestand aufzuzeichnen. (vgl. Blum 2007 und Haarmann 2008)

Das besondere am Zahlgebrauch ist, davor auf die Idee des Zählens zu kommen, also der Anzahl von Dingen eine Wichtigkeit zu geben. Heute mag es auf Grund seiner Allgegenwärtigkeit kaum vorstellbar sein, doch das Zählen an sich erfordert bereits eine abstrakte Denkleistung. Wodurch das Zählen und somit die ersten Zahlen motiviert wurden, kann heute nicht mehr festgestellt werden, und auch, ob es vor der geritzten Zahlschrift Zahlwörter oder konkrete Gesten dafür gab, kann nicht mit Sicherheit gesagt werden. (vgl. Ifrah 1986)

Auch heute gibt es beispielsweise noch vereinzelt Volksgruppen (vor allem im Amazonasgebiet, im Norden Australiens und Papua-Neuguineas sowie im Süden Afrikas), die über gar keine oder nicht mehr Zahlwörter als „eins", „zwei" , „drei", „vier" und „fünf" verfügt. Die *Kobon* sind zum Beispiel ein Volk in Papua-Neuguinea, das über keine eigenen Zahlwörter verfügt. Dafür verwenden sie die Benennung von Körperteilen um Zahlen auszudrücken.

Wiederum ein andere Volksgruppe, die *Pirahã* im Amazonasgebiet, zählen wie folgt: „eins", „zwei", „viele". Um Anzahlen anzugeben stellen sie Vergleiche mit Anzahlen bekannter Objekte aus ihrem Umfeld an. (vgl. Haarmann 2008)

Die eben genannten Beispiele geben Ideen, wie manche unserer Vorfahren vor Zehntausenden von Jahren gezählt haben könnten, und zeigen, dass es auch ohne einer eigenen Zahlsprache möglich ist, mit Zahlen umzugehen, und dass für den Umgang mit Zahlen nicht zwingend Zahlzeichen notwendig sind. Laut Haarmann (2008) ist heute, auf Grund der Evolution, jeder Mensch in der Lage mit der abstrakten Begrifflichkeit der Zahl umzugehen und damit geistige Operationen auszuführen, unabhängig davon, ob dieser Mensch einer Gesellschaft mit Zahlwortsystem angehört oder nicht. (vgl. Haarmann 2008 und Ifrah 1986)

Auf Völker und Kulturen die eigene Zahlwort- und Zahlschriftsysteme entwickelten wird nun im folgenden Kapitel eingegangen.

3 Die Entwicklung der Zahlen in unterschiedlichen Kulturkreisen

Nach dem vorangegangenen Einblick in die Anfänge der zählenden Menschheitsgeschichte, wird in diesem Kapitel ein detaillierterer Einblick in die Geschichte der (geschriebenen) Zahlen gegeben. Es entstanden im Laufe der Zeit viele unterschiedliche Kulturen, die sich auf Grund ihrer räumlichen Distanz zum Teil ohne äußere Einflüsse entwickelten, ein Ausschnitt der Vielzahl an Zahlensystemen, die sich dabei entwickelten, wird in diesem Kapitel behandelt. (vgl. Wußing 2008)

Für die verschiedenen Zählweisen von „eins", „zwei", „viele" hin bis zu Positionssystemen, wie dem international wichtigen Binärsystem, gibt es unterschiedlichste Quellen. Während die Frühmenschen Striche in Tierknochen ritzten, hinterließen viele Hochkulturen (abstrakte) Symbole beispielsweise auf Stein und Papier. In örtlicher Nähe, aber auch großer Entfernung entstanden zum Teil ähnliche Zahlzeichen und Rechenmethoden. (vgl. Haarmann 2008)

Im Folgenden wird eine Einsicht in verschiedene Zahlensysteme und den Umgang mit diesen gegeben. Dazu wird eine grobe geographische Unterteilung getroffen, beginnend mit Kulturen des amerikanischen Doppelkontinentes vor 1492.

3.1 Präkolumbianisches Amerika

um 18000 – 13000 v. Chr.	Entdeckung und Besiedelung Amerikas
um 3600 v. Chr.	Ursprung der Olmeken (älteste Hochkultur des amerikanischen Doppelkontinentes mit nachweisbarer Schrift und Zahlschrift)
um 2000 v. Chr.	Ursprung indianischer Völker mit Maya-Sprache im Süden von Mexiko

um 1200 v. Chr.	Machtentfaltung der Olmeken an der Golfküste im Süden Mexikos
um 300 n. Chr.	Reichsgründung der Maya
um 500	Höhepunkt der Maya-Kultur
um 1000	„Entdeckung“ Amerikas durch die Wikinger (Besiedelungsversuche in den Folgejahren scheiterten)
1325	Azteken gründen ihre Hauptstadt
um 1400 – 1500	Reichsbildung der Inka
1492	Spanier treffen erstmals in Mittelamerika ein (mit folgender Kolonialisierung und Zerstörung von Kulturgütern)

Tabelle 3.1 a: Chronologische Übersicht über, für dieses Kapitel wichtige, Eckdaten im präkolumbischen Amerika (vgl. Wußing 2008 und Morris 2003)

Die Entdeckung Amerikas ist nicht, wie oft ausgesprochen, 1492 durch Kolumbus geschehen. Bereits vor 15 000 bis 20 000 Jahren begannen die ersten Menschen dieses Land zu besiedeln. In dieser Zeit gab es zwischen Nordostasien und Nordwestamerika, wo sich heute die Beringstraße befindet, eine Landverbindung, über die die Einwanderer kamen. (vgl. Wußing 2008)

Etwa ein halbes Jahrtausend vor Beginn unserer Zeitrechnung gelang diesen die Kultivierung von Nutzpflanzen, wie vor allem von Mais und Bohnen. Diese Entwicklung, vom Jäger und Sammler zum Bauern und sesshaften Menschen, ermöglichte die Entstehung von Hochkulturen. (vgl. Wußing 2008)

Um 1800 vor Christus entstanden bereits in Peru lokal begrenzte Kulturen, die aufwändige Kunstbauten hervorbrachten und folglich über ein gewisses Ingenieurwissen verfügt haben mussten. Es sind jedoch bis heute keine Nachweise über eine Sprache dieser Kulturen bekannt, ganz zu schweigen von Erkenntnissen über deren Zahlenverständnis. Erst von der Hochkultur der Olmeken, deren Anfänge circa 3 600 Jahre zurückliegen, ist eine Schrift bekannt, sowie ein Rechenwesen, das sie für die Kalenderrechnung einführten. Über die ersten 400 Jahre der Geschichte der Olmeken ist nichts bekannt, bis sie 1200 vor Christus die Vorherrschaft im Südosten Mexikos erlangten und, als erstes Volk, das Netz der Handelsrouten im alten Amerika regierten, wodurch sich ihr Kulturgut ausbreitete. Ihre Schrift- und Zahlenkultur wurden unter anderem Grundlage des Schriftwesens und der Rechenkünste der Maya. (vgl. Haarmann 2008 und Wußing 2008)

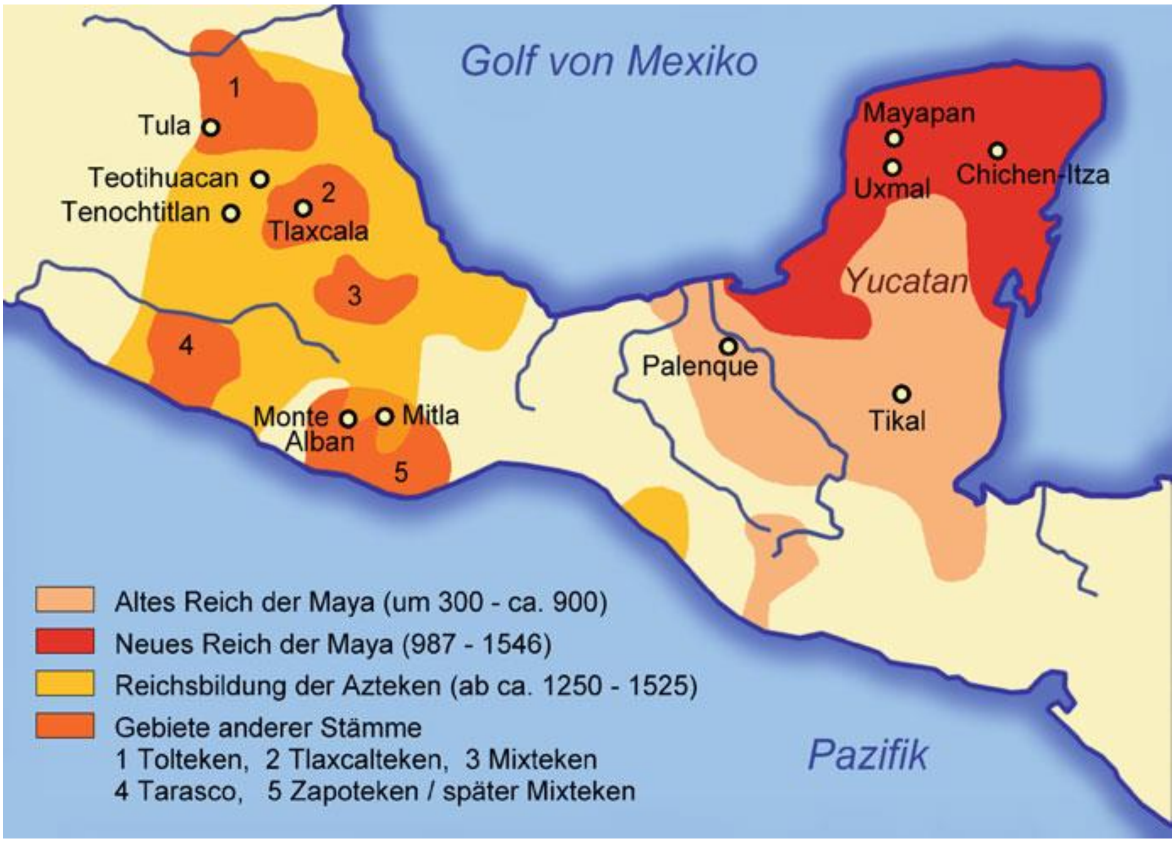


Abbildung 3.1 a: Bedeutende Völker im alten Mittelamerika (Wußing 2008, Seite 23)

Die Maya haben vor ungefähr 4 000 Jahren ihren Ursprung. Indianische Völker im südlichen Mexiko entwickelten die Maya-Sprache. Die Zeit der so genannten Maya-Kultur begann jedoch erst um 300 nach Christus, hatte ihren Höhepunkt um 500 nach Beginn unserer Zeitrechnung und ging mit der Eroberung durch die Spanier unter; wobei es auch heute noch Dörfer in Mexiko gibt, in denen Maya-Sprache gesprochen wird und deren Religion eine Mischung aus christlichen Überzeugungen mit solchen aus der Maya-Zeit ist. (vgl. Wußing 2008)

Die Maya-Kultur wurde, wie bereits erwähnt, vom Zahlen- und Schriftsystem der Olmeken beeinflusst. Das Rechen- und Kalenderwesen wurde in dieser Kultur jedoch stark weiterentwickelt. Diese Errungenschaften, auf die im nächsten Abschnitt genauer eingegangen werden wird, setzten sich auch in deren Nachbarkulturen durch und verliehen so den Maya eine Schlüsselrolle im präkolumbianischen Amerika. (vgl. Haarmann 2008)

Das Reich der Maya, das als Verbund von Stadtstaaten funktionierte (beziehungsweise immer wieder nicht funktionierte, da sich die Stadtstaaten zeitweise auch gegenseitig bekriegten), wird in ein neues und ein altes Reich unterteilt (vgl. Abbildung 3.1), da sich das alte Reich gegen Ende der klassischen Periode, um 900 nach Christus, wegen bis heute noch unbekannten Gründen, auflöste. (vgl. Ifrah 1986 und Wußing 2008)

Das neue Reich der Maya begann mit Ende des zehnten Jahrhunderts und war für etwa 200 Jahre den Tolteken unterworfen (vgl. Ifrah 1986) oder im Frieden mit diesen lebend (vgl. Wußing 2008). Laut Ifrah (1986) übernahmen dadurch die davor friedlichen Maya grausame Riten, die das Erbringen von Menschenopfern erforderten.

Ebenfalls um die Jahrtausendwende „entdeckten“ die Wikinger Nordamerika und starteten in den Folgejahren Besiedelungsversuche. Diese scheiterten jedoch und die präkolumbianischen Kulturen blieben weiterhin unbeeinflusst von außen. (vgl. Wußing 2008 und [Link 2])

Im zweiten Jahrtausend gewannen neben den Maya zwei weitere Kulturen an Größe: die Azteken, die von der Mitte des 13ten Jahrhunderts an begannen einen zentral gesteuerten Staat in Mittelamerika auszubilden, und die Inka, die ab dem zwölften Jahrhundert als Bauern und Nomaden bestanden und ein Großreich im 15ten Jahrhundert errichteten, das sich von Nordchile bis Kolumbien erstreckte. Die Reiche beider Völker wurden nach der „Entdeckung Amerikas“ durch Kolumbus zerstört und der Großteil ihrer Errungenschaften wurde vernichtet. Beispielsweise wurden aztekische Tempel zerschlagen und die Steine zum Bau christlicher Kirchen verwendet. Die Spanier zerstörten somit bis 1521 die Hauptstadt der Azteken und bis 1536 das gesamte Inkareich. (vgl. Wußing 2008)

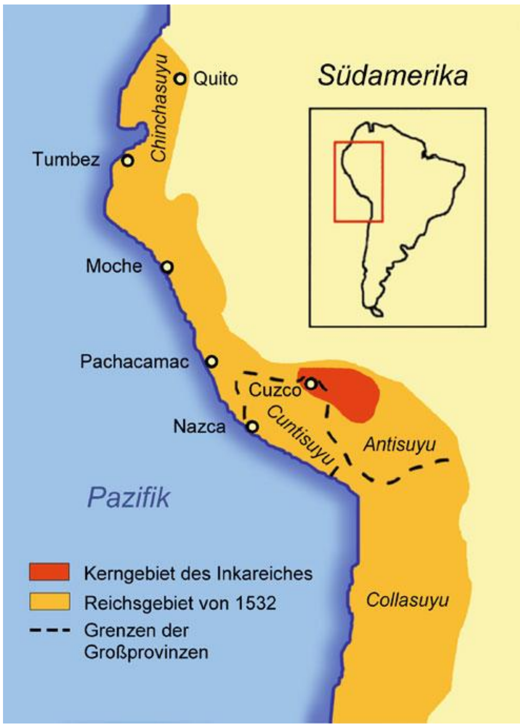


Abbildung 3.1 b: Das Inkareich in Südamerika (Wußing 2008, Seite 34)

Nach der vorangegangenen Skizzierung des geschichtlichen Kontextes, folgt nun eine detailliertere Beschreibung der drei - laut Wußing (2008) – bekanntesten Hochkulturen im präkolumbianischen Amerika und ihrer Zahlensysteme:

3.1.1 Die Maya als Rechenmeister

Die Maya waren „Sklaven ihres Mystizismus und ihrer Religion“ (Ifrah 1986, Seite 447); um ihren Göttern bestmöglich dienen zu können benötigten sie ein exzellentes Zahlensystem und Rechenwesen. Aufbauend auf dem Zahlensystem der Olmeken, die als erstes Volk des amerikanischen Doppelkontinentes ein Rechenwesen für ihre Kalenderrechnungen eingeführt hatten, entwickelten sie ein reines (für Zahlen im Allgemeinen) und ein unreines vigesimales Positionssystem (für Datumsangaben); folglich (*vigesima*, aus dem Lateinischen, bedeutet 20) ein Positionssystem zur Basis 20. Was unter diesem verstanden werden kann, wird nach zugrundeliegenden kulturellen Erklärungen genauer ausgeführt. (vgl. Grube 2006 und Ifrah 1986)

Zuerst wird auf die Notwenigkeit von Zahlen für die Maya eingegangen. Zum einen war für sie als sesshaftes, vom (Mais-)Anbau abhängiges, Volk das Wissen über die unterschiedlichen Jahreszeiten von großer Bedeutung, zum anderen wurde in ihrer Überzeugung die Welt von

Göttern beherrscht, die den Menschen gut oder schlecht gesonnen sein konnten, und somit ertragreiche Phasen bis hin zu Katastrophen hervorrufen konnten. Um mit diesen Gegebenheiten optimal umgehen zu können, entwickelten die Maya ein ausgeklügeltes Kalenderwesen. (vgl. Ifrah 1986)

Die Priester und Astronomen der Maya konnten berechnen an welchen Tagen dem Glück der Maya nichts im Weg stand und an welchen Opfer gebracht werden mussten um die Götter zu besänftigen. Dafür hatten sie einen Kalender mit 260 Tagen geschaffen, den sogenannten *Tzolkin* beziehungsweise rituellen Kalender, der die Güte der Götter vorhersehen konnte und wichtige Festtage bestimmte. Zahlen und deren Bedeutung waren somit einer der wichtigsten Bestandteile im Leben der Maya. (vgl. Ifrah 1986)

An dieser Stelle sei angemerkt, dass in dieser Arbeit nur das Wesentliche des Kalenderwesens der Maya skizziert wird. Für einen umfangreicheren Einblick sei unter anderem auf das Werk „Universalgeschichte der Zahlen" von Ifrah (1986) verwiesen.

Das Jahr des Tzolkin bestand aus 13 Monaten zu je 20 Tagen, wobei jeder Tag aus einer Kombination aus zwei Zeichen bestand: einer Nummer von eins bis 13 und einem festgelegten Namen, der sich alle 20 Tage wiederholte. Da 13 und 20 teilerfremde Zahlen sind, konnte auf diese Art jeder Tag in diesem Jahr eindeutig dargestellt werden. Die Tage im ersten Monat lauteten etwa: 1 Imix, 2 Ik, 3 Akbal, 4 Kan, 5 Chicchan, 6 Cimi, 7 Manik, 8 Lamat, 9 Muluc, 10 Oc, 11 Chuen, 12 Eb, 13 Ben, 1 Ix, 2 Men, 3 Cib, 4 Caban, 5 Eznab, 6 Canac und 7 Ahau. (vgl. Ifrah 1986)

Da sich dieser Kalender nicht für die Planung der Landwirtschaft eignete, besaßen die Maya einen zweiten Kalender, *Haab* oder Sonnenkalender genannt. Dieser verfügte über 18 20-tägige Monate und einen fünf-tägigen Monat, also über 365 Tage, wobei alle vier Jahre, unseren Schaltjahren entsprechend, ein zusätzlicher Tag eingeschoben wurde. Das Datum des Haab gab man in einer zu unserem Kalender analogen Art und Weise an: Für den Tag des Monats stand eine Zahl von null bis 19 und jeder Monat hatte einen eigenen Namen; Zahl und Monatsname aneinander geschrieben ergaben so das jeweilige Datum. Dabei wurden die fünf Tage des zusätzlichen Monats als Unheil-verheißend angesehen. Das Schriftzeichen für diesen Monat stand gleichzeitig für Chaos und die fünf Tage wurden immer mit Angst auf ein Unglück erlebt. Unter anderem wurden an einem dieser Tage Geborene als Taugenichts für ihr ganzes Leben abgestempelt. (vgl. Grube 2016 und Ifrah 1986)

Um ein Datum anzugeben benutzte man beide Kalender, so wurde zuerst das jeweilige Datum des Tzolkin und dann das des Haab geschrieben. Diese Daten wiederholen sich somit alle 52 Jahre, da das kleinste gemeinsame Vielfache von 365 und 260 Tagen 18 980 ist und diese Tageszahl das 52fache von 365 ist. Der Abschluss eines 52-Jahres-Zyklus (einer *Kalenderrunde*) war Grund für eine große Festlichkeit und kann mit der Besonderheit einer Jahrhundertwende unserer Zeitrechnung verglichen werden. (vgl. Haarmann 2008)

In der nachfolgenden Abbildung kann man einen Ausschnitt der Datumszusammenstellung betrachten, wobei die kleinen Räder alle Daten des Ritualkalenders angeben können und das große Rad jene des Sonnenkalenders anzeigt. Dreht man die Räder weiter, so könnten alle 18 980 Daten einer vollen Kalenderrunde angezeigt werden. Der zusätzliche Tag eines

Schaltjahres änderte dabei nicht die Zusammensetzung der einzelnen Tage in einer Kalenderrunde. (vgl. Grube 2006)

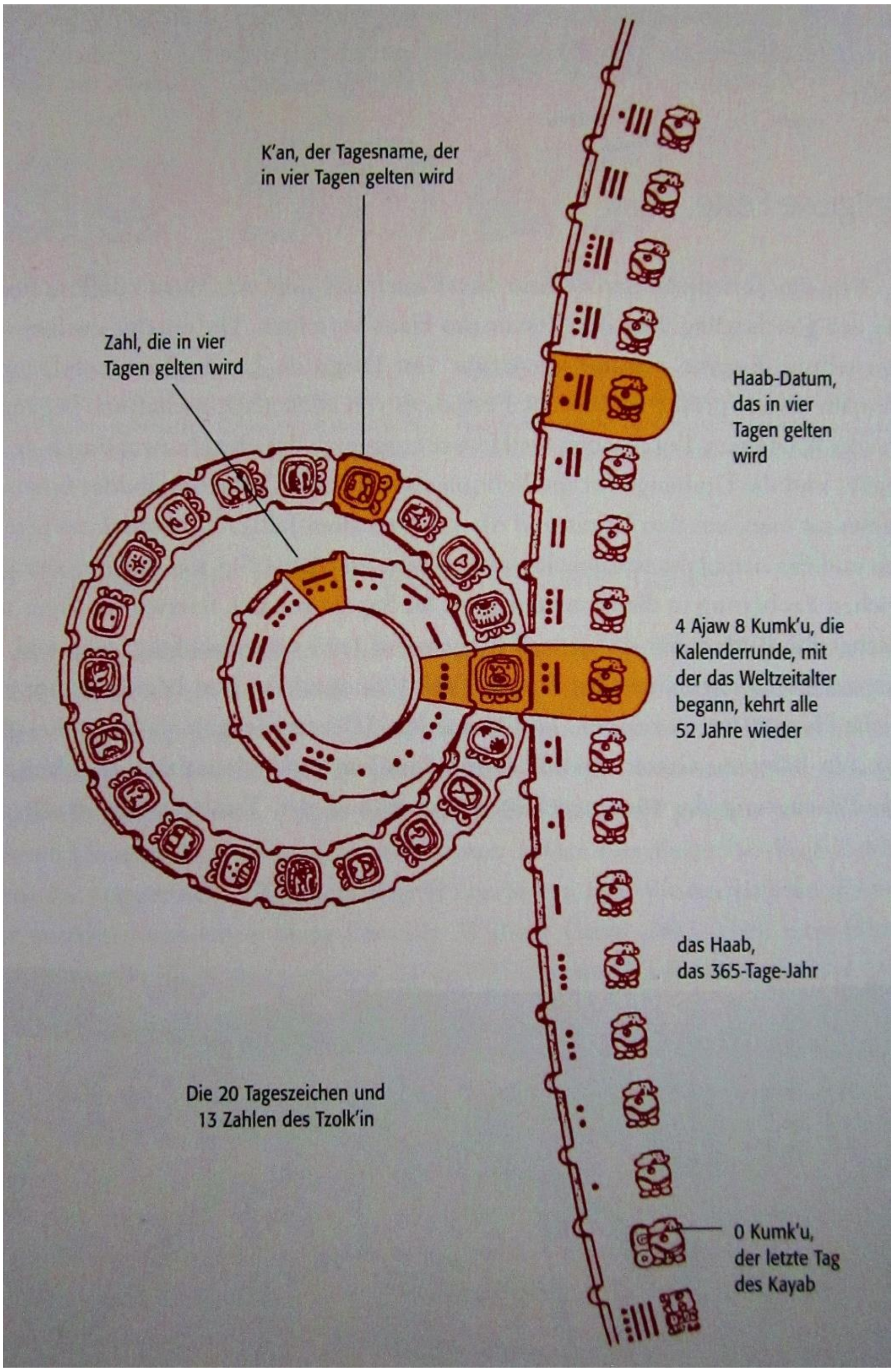


Abbildung 3.1.1 a: Die Datumszusammenstellung anhand beider Maya-Kalender (Grube 2006, Seite 136)

In Abbildung 3.1.1 a ist ebenfalls eine Art der Zahlendarstellung zu sehen. Sie besteht aus Strichen und Punkten, die senkrecht angeordnet sind (wobei auch eine waagrechte Anordnung, wie sie beispielsweise in Abbildung 3.1.1 b zu sehen ist, eine Möglichkeit der Zahlendarstellung war). Jeder Strich steht für fünf Einheiten und jeder Punkt für eine. Die Zahl 17 konnte beispielsweise durch zwei Punkte und drei Striche angegeben werden. (vgl. Grube 2006)

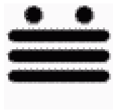


Abbildung 3.1.1 b: Darstellungsmöglichkeit der Zahl 17 ([Link 3])

Die Maya hatten zusätzlich andere Möglichkeiten Zahlen anzuschreiben, da sie ein multivalentes Schriftsystem besaßen und somit generell mehrere Zeichen für ein Wort beziehungsweise eine Zahl zur Verfügung hatten und auch jedes Zeichen mehrere Bedeutungen haben konnte. (Ein System, das ihre späteren Erforscher und Erforscherinnen sehr forderte und das dazu beitrug, dass die Maya-Schrift erst nach 1990 vollständig entziffert werden konnte). Eine andere Darstellungsart war mit Hilfe von Kopfglyphen (vgl. Abbildung 3.1.1 c, d und e). Die Symbole für eins bis 13 entsprachen jenen der 13 großen Götter der oberen Welt. 14, 15, 16, 17, 18 und 19 wurden aus den Glyphen von 10 und des jeweiligen fehlenden Summanden zusammengesetzt. (vgl. Ifrah 1986)

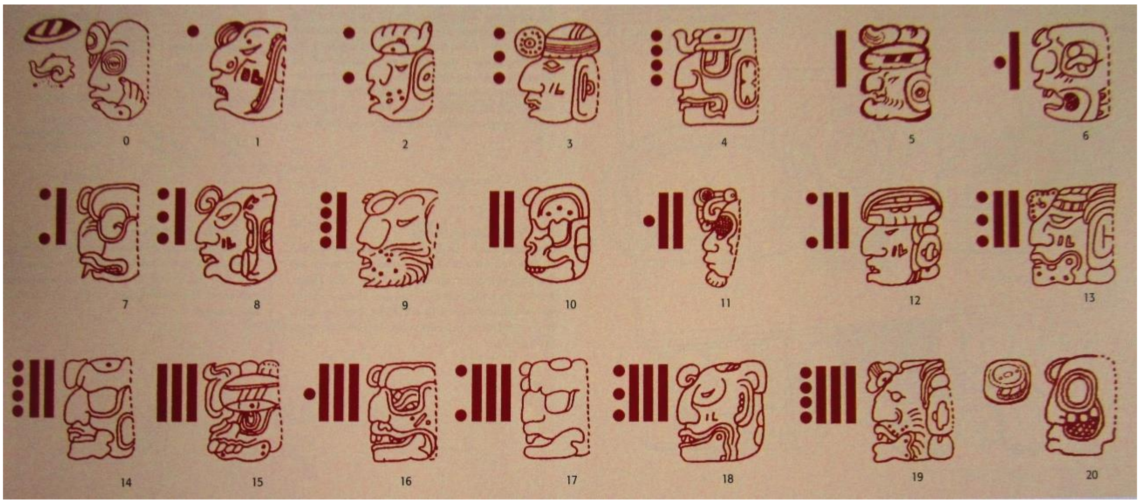


Abbildung 3.1.1 c: Die Zahlen von null bis 20 der Maya (Grube 2006, Seite 131)

Auf den nachstehenden Abbildungen sind mögliche Variationen der Darstellung von neun und 19 zu sehen und die „additive" Zusammensetzung des Kopfsymbols für 19, wie sie analog bei den Zahlen 14 bis 18 zu Grunde lag. (vgl. Ifrah 1986)

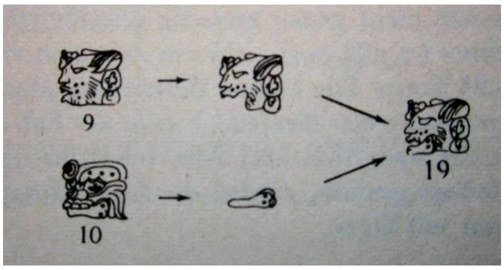


Abbildung 3.1.1 d: Zusammensetzung der Zahl 19 (Ifrah 1986, Seite 462)

Abbildung 3.1.1 e: Variationen der Zahlen neun und 19 (Ifrah 1986, Seite 462)

Auch für Null gab es mehrere Darstellungsformen. (An dieser Stelle sei bemerkt, dass es außergewöhnlich war, dass die Maya bereits eine Null besaßen. Sie sind, nach den Olmeken, weltweit die erste Kultur, die eine solche in ihrem Zahlensystem hatte. In Eurasien kam erst um das siebente Jahrhundert nach Christus eine gleichbedeutende Null auf.) Die Maya unterschieden zwischen einer ordinalen und kardinalen Null und je nachdem, ob es sich um eine Inschrift, einen Textcodex, eine Zeitspanne oder ein Datum handelte, wurde ein entsprechendes Symbol verwendet. (vgl. Haarmann 2008, Ifrah 1986, Schröder 2006 und Wußing 2008)

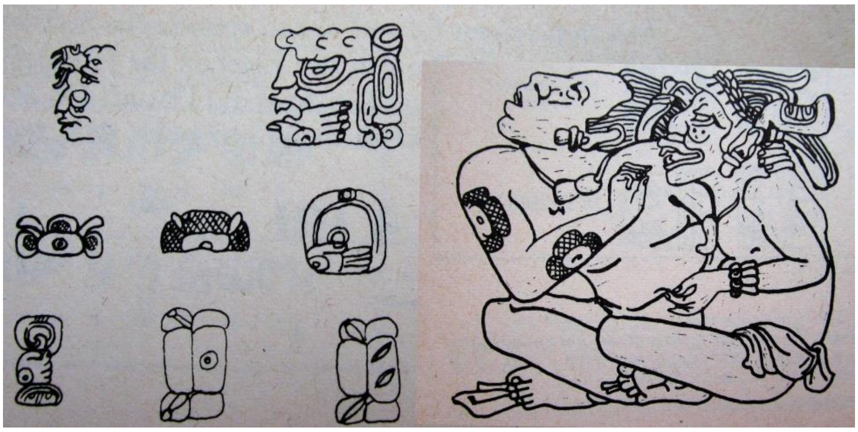


Abbildung 3.1.1 f: Symbole zur Darstellung der Null (vgl. Ifrah 1986, Seiten 498 und 469)

In Abbildung 3.1.1 f sind unterschiedliche Teilglyphen, wie eine beispielsweise bereits in Abbildung 3.1.1 a, an ein anderes Symbol angefügt, auftrat, und Vollglyphen von Null zu sehen. Die Vollglyphe rechts in der Abbildung stellt eine Person dar, die enttäuscht auf eine, den Tag verkörpernde Figur, zeigt, sie symbolisiert das Fehlen des Tages. (vgl. Haarmann 2008 und Ifrah 1986)

Hier ist wiederum zu erkennen, dass das Zählen der Tage wichtige Motivation und Grundbaustein des Zahlensystems war und jeder Zahl eine Bedeutung beigemessen wurde. Die Maya kannten keine kleinere Einheit als einen Tag beziehungsweise keine Brüche, größere Einheiten entwickelten sie ebenfalls auf Basis der Zeitrechnung. So fassten sie 20 *Kin* (=Tage) zu einem *Uinal* (=Monat) zusammen. Beispielsweise schrieben sie statt „27 Kin" „ein Uinal und sieben Kin". (vgl. Grube 2006 und Ifrah 1986)

Das bereits zu Beginn erwähnte vigesimale Zahlensystem ist hier erkennbar. Jedoch wurde für die Kalenderrechnung eine, vom reinen Vigesimalsystem abweichende, Zählweise verwendet, die im nächsten Schritt erklärt wird: Die Maya fassten nicht 20 Uinal zu der nächst größeren Einheit zusammen, sondern 18 Uinal zu einem *Tun* (=Jahr), wodurch das, zu Beginn erwähnte, unreine Positionssystem entstand. 18 Monate begründen sich vermutlich dadurch, dass das 19te Monat mit seinen lediglich fünf Tagen nicht als vollwertig angesehen wurde und 360 Tage fast einem Jahr entsprachen. Alle weiteren Einheiten bestanden wieder aus 20 Einheiten der jeweils vorangehenden Einheit. In Abbildung 3.1.1 g ist eine entsprechende Tabelle zu sehen, die alle Einheiten ab einem Tun bis hin zur größten, einem *Alautun*, welches 23 040 000 000 Tagen entspricht, auflistet. (vgl. Grube 2006 und Ifrah 1986)

Wie die mittelamerikanischen Hochkulturen auf die Verwendung eines 20er-Systems kamen (das auch in Europa, bei den Kelten, vorkam), schreiben Forscher dem Zählen mit Händen und

Füßen zu. Während Kulturen, die Zehnersysteme verwendeten, mit Hilfe ihrer zehn Finger zählten, nutzten Völker, wie die Maya, ihre Finger und Zehen und hatten so 20 Zähleinheiten zur Verfügung. (vgl. Blum 2007 und Ifrah 1986)

Name	*Bedeutung*	*Zähleinheit*	*Anzahl der Tage*
tun	Jahr	Grundbegriff	360
katun	20-Jahres-Zyklus	20 tun	7200
baktun	20x20-Jahres-Zyklus	20 katun (400 Jahre)	144 000
pictun	20x20x20-Jahres-Zyklus	20 baktun (8000 Jahre)	2 880 000
calabtun	20x20x20x20-Jahres-Zyklus	20 pictun (160 000 Jahre)	57 600 000
kinchiltun	20x20x20x20x20-Jahres-Zyklus	20 calabtun (3 200 000 Jahre)	1 152 000 000
alautun	20x20x20x20x20x20-Jahres-Zyklus	20 kinchiltun (64 000 000 Jahre)	23 040 000 000

Abbildung 3.1.1 g: Die Zähleinheiten der Maya (Haarmann 2008, Seite 66)

Die großen Einheiten der Zahlen gebrauchten die Maya für ihre Zeitrechnung, da eine Datumsangabe mit Hilfe der Kalenderrunde nur innerhalb von 52 Jahren eindeutig war. Diese Zeitrechnung begann mit dem Nulldatum, welches sie in ihrer Kosmologie errechneten und welches nach gregorianischem Kalender dem elften August 3114 vor Christus entspricht. So war beispielsweise der 23. Dezember 2012, *13 Baktun.0 Katun.0 Tun.0 Uinal.0 Kin*, ein außergewöhnliches Datum nach der traditionellen Maya-Zeitrechnung, vergleichbar mit einer Jahrtausendwende unseres Kalenders. (vgl. Haarmann 2008)

Mit Datumsangaben verzierten die Maya Stelen und andere Bauwerke (aus diesem Grund konnten Zahlen als eine der ersten Schriftzeichen entziffert werden); dabei verwendeten sie stets das selbe Prinzip: Die Anzahl der höchsten Einheit (des Baktun) wurde als erste geschrieben, daneben der Name der Einheit und auf analoge Weise wurde die jeweils um eins kleinere Einheit mit ihrer Anzahl daneben und die übernächste darunter geschrieben und so weiter. Aus ästhetischen Gründen wurde dabei keine Einheit ausgelassen, selbst wenn sie null-mal vorkam. So beginnt in manchen Fällen die Datumsangabe sogar mit null Alautun. Dabei wäre jede Datumsangabe auch ohne dem Auflisten der Einheiten, die null-mal vorkamen, eindeutig gewesen. (vgl. Haarmann 2008)

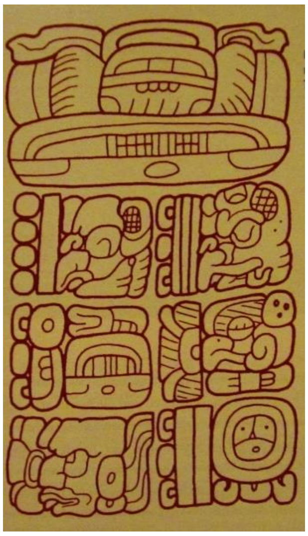


Abbildung 3.1.1 h: Datum auf der abgezeichnete Inschrift einer Maya-Stele aus Südmexiko (Grube 2006, Seite 139)

Abbildung 3.1.1 i: Original-inschrift der Stele aus Abbildung 3.1.1 h (Grube 2006, Seite 139)

Die Stele aus den Abbildungen 3.1.1 h und i enthalten die Jahresangabe *9 Baktun.16 Katun.1 Tun.0 Uinal.0 Kin* und den entsprechenden Tag des Tzolkin-Kalenders an letzter Stelle. Die verstrichene Jahresanzahl seit Beginn der Maya-Zeitrechnung kann daher so berechnet werden:

9 x Baktun + 16 x Katun + 1 x Tun + 0 x Uinal + 0 Kin =

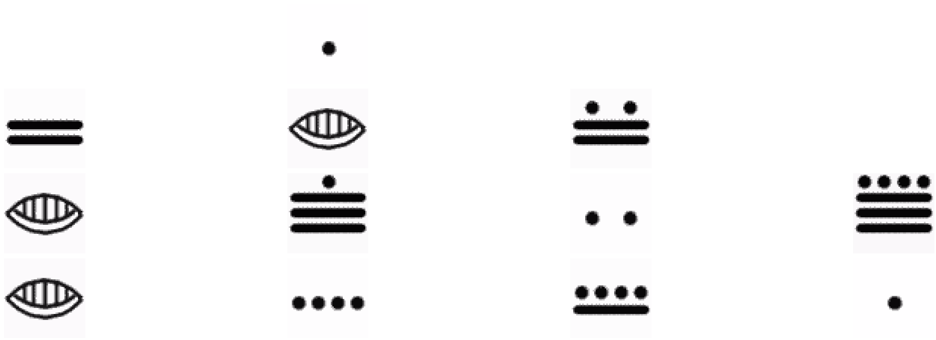
$\mathbf{9 \cdot (18{\cdot}20^3) + 16 \cdot (18{\cdot}20^2) + 1 \cdot (18{\cdot}20^1) + 0 \cdot 20^1 + 0 \cdot 20^0 =}$

$\mathbf{9 \cdot 144\,000 + 16 \cdot 7\,200 + 1 \cdot 360 + 0 \cdot 20 + 0 = 1\,411\,560}$ **Kin** (Tage)

(vgl. Grube 2006)

Die anfänglich künstlerisch motivierte systematische Datumsdarstellung (inklusive der Angabe überflüssiger Einheiten, wie *0 Katun*), führte im Endeffekt zu einem (unbenannten) Positionssystem, in dem die Gelehrten die Namen der Zwanzigerpotenzen (mal 18) aussparten, und zum Beispiel das Datum der letzten Abbildung nur durch Zahlen der Form *9.16.1.0.0* angaben. Diese Weiterentwicklung des Zahlensystems konnte den wenigen (nach dem Zerstörungswillen der Kolonialisierer) erhaltenen Handschriften, den sogenannten *Codices*, entnommen werden. (vgl. Ifrah 1986)

Das Positionssystem übertrug sich ebenfalls auf das reine Vigesimalsystem, mit welchem jene Zahlen angegeben wurden, die sich nicht auf Datumsangaben bezogen. Es folgen ein paar Beispiele mit darunterstehender Auflösung:



$10\cdot20^2 + 0\cdot20^1 + 0\cdot20^0 = \mathbf{4\,000}$	$1\cdot20^3 + 0\cdot20^2 + 16\cdot20^1 + 4\cdot20^0 = \mathbf{8\,324}$	$12\cdot20^2 + 2\cdot20^1 + 9\cdot20^0 = \mathbf{4\,849}$	$19\cdot20^1 + 1\cdot20^0 = \mathbf{381}$

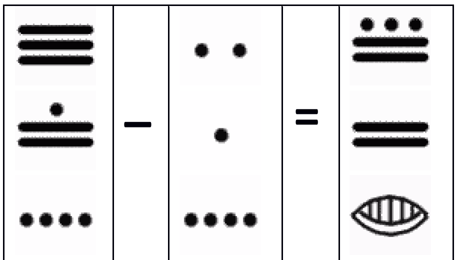
(vgl. Grube 2006 und [Link 3])

Den, mit Kalk überzogenen, Handschriften aus Feigenbastpapier, können Rechnungen sowie Rechenmethoden entnommen werden. Additionen und Subtraktionen wurden in ähnlicher Art und Weise wie in unserem Dezimalsystem durchgeführt. Für die Multiplikation bis Zahlen von 361 verfügten sie laut [Link 3] über eine Hilfstabelle und für Multiplikationen größerer Zahlen nutzten sie, so schreibt Fettweis (2016), folgendes Prinzip: Sie zerlegten einen der Faktoren in ein Produkt und multiplizierten den zweiten Faktor mit einem Anteil des ersten und dessen Ergebnis mit einem weiteren Anteil und so fort. Dabei wurden die einzelnen Multiplikationen gelöst, indem das Einmaleins des größeren Faktors aufgeschrieben wurde. (vgl. Fettweis 2016, Grube 2006 und [Link 3])

Die eben beschriebene Rechenmethode benutzten Priester, Astronomen und Großkaufleute. Das einfache Maya-Volk rechnete hingegen mit Kakaobohnen als Veranschaulichungsmittel (daher kommt vermutlich das kreisförmige Zeichen für „1“). Die Multiplikation 13 mal vier lösten sie beispielsweise durch das Bilden von vier Haufen zu je 13 Bohnen oder 13 Haufen zu je vier Bohnen und das darauffolgende Abzählen aller Kakaobohnen. (vgl. Fettweis 2016)

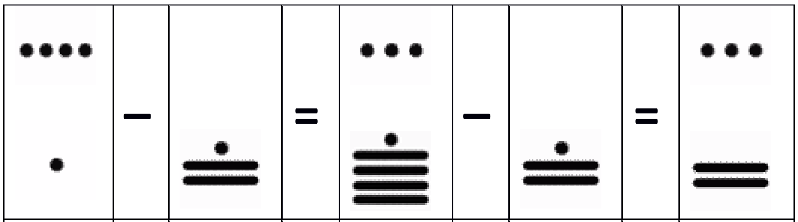
Bei der Subtraktion griffen Gelehrte gegebenenfalls auf das Prinzip des „Ausborgens“ zurück, wie an den folgenden Rechnungen gezeigt wird. Die Rechnungen 3.1.1.1 bis 3.1.1.3 beziehen sich auf das reine Positionssystem zur Basis 20 und Rechnung 3.1.1.4 bezieht sich auf das unreine Positionssystem der Kalenderrechnung.

Rechnung 3.1.1.1:



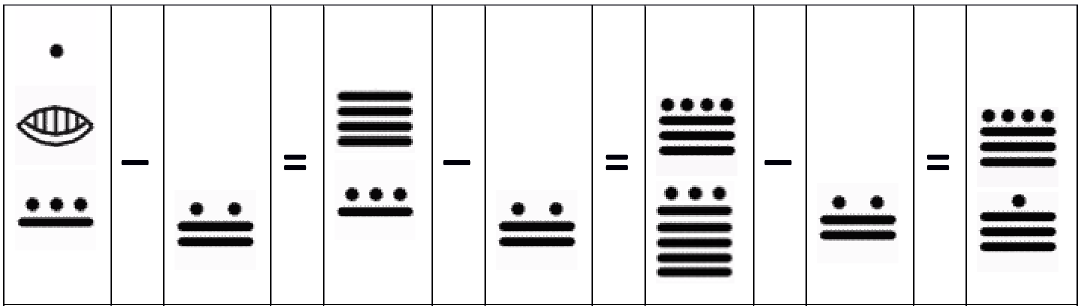
6 224	**-**	**824**	**=**	**5 400**

Rechnung 3.1.1.2:



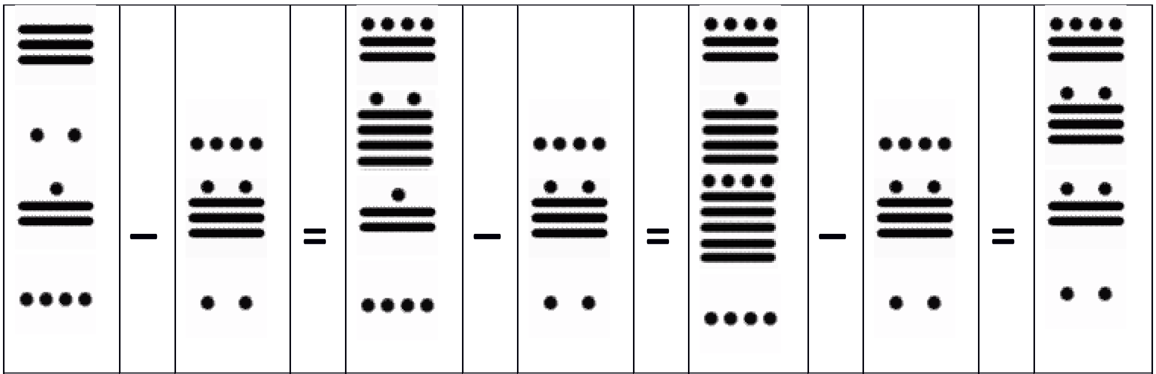
81	**-**	**11**	**=**	**81**	**-**	**11**	**=**	**70**

Rechnung 3.1.1.3:



408	**-**	**12**	**=**	**408**	**-**	**12**	**=**	408	**-**	**12**	**=**	**396**

Rechnung 3.1.1.4:



108 944	**-**	**1 782**	**=**	**108 944**	**-**	**1 782**	**=**	**108 944**	**-**	**1 782**	**=**	**107 162**

Bei der ersten dieser vier Subtraktionen war kein „Ausborgen“ notwendig, da jede Stelle des Minuenden größer war als die jeweilige des Subtrahenden. So konnte Stelle für Stelle subtrahiert werden um zum Ergebnis zu gelangen. Bei den restlichen Beispielen war dies jedoch nicht immer der Fall und es wurde der Trick angewendet, sich von der um eins größeren Stelle eine Einheit auszuborgen. In Rechnung 3.1.1.2 funktioniert das folgendermaßen: Von den vier Einheiten der größten Stelle wurde eine von der niedrigeren Stelle „geborgt“, es wurden also 20 Einheiten zu dieser hinzugefügt. Rechnerisch kann dies so gezeigt werden: $(\mathbf{4}\cdot 20 + \mathbf{1}) - 11 = (\mathbf{3}\cdot 20 + \mathbf{21}) - 11 = 70$.

Rechnung 3.1.1.4 funktioniert nach demselben Prinzip, nur dass beachtet werden musste, dass es sich hierbei um Zahlen in einem unreinen Positionssystem handelte. Die Rechnung kann wie folgt mit Dezimalzahlen aufgeschlüsselt werden:

$(\mathbf{15}\cdot 20^2\cdot 18 + \mathbf{2}\cdot 20\cdot 18 + \mathbf{11}\cdot 20 + \mathbf{4}) - (4\cdot 20\cdot 18 + 17\cdot 20 + 2) = (\mathbf{14}\cdot 20^2\cdot 18 + \mathbf{22}\cdot 20\cdot 18 + \mathbf{11}\cdot 20 + \mathbf{4}) - (1\,782) = (\mathbf{14}\cdot 20^2\cdot 18 + \mathbf{21}\cdot 20\cdot 18 + \mathbf{29}\cdot 20 + \mathbf{4}) - (1\,782) = 107\,162$
(vgl. [Link 1] und [Link 3])

Aus einem der Codices, dem *Codex Dresdensis* (welcher in Dresden aufbewahrt wird), geht hervor, dass es keine Rechenoperationssymbole entsprechend unserem „+“ gab, jedoch wurde eine Addition durch schwarze Schriftfarbe signalisiert und ihr Ergebnis durch rote. Für Multiplikationen existierte kein explizites Zeichen. (vgl. Neurohr 2010)

Die Maya standen mit mehreren Völkern für Handel und Kulturaustausch in Kontakt. So etablierten sich die Schrift, das Kalender- und das Rechenwesen auch in den Kulturen ihrer Handelspartner. Unter anderem wurde das Rechenwesen der Azteken stark von dem der Maya beeinflusst, worauf im nachfolgenden Abschnitt eingegangen wird. (vgl. Haarmann 2008)

Auch heute gibt es noch Maya in Mittelamerika. Ihr Zahlensystem haben sie jedoch dem spanischen beziehungsweise europäischen angepasst und auch ihr Kalenderwesen ist nicht mehr in Verwendung. Wichtige Festtage ihres alten Kalenders synchronisierten sie jedoch mit dem der Europäer. Erst für den Tourismus wurde der traditionelle Maya-Kalender erneut hervorgeholt (Touristen können eine Urkunde mit ihrem Geburts- oder Besucherdatum nach diesem Kalender erstehen). (vgl. Haarmann 2008)

3.1.2 Die Azteken und ihre Version der Mayazahlen

1325 gründeten die Azteken ihre Hauptstadt *Tenochtitlán* in der heutigen Stadt Mexiko City. Durch Unterwerfung ihrer Nachbarn, konnten sie ihr Reich zu einem, von über fünf Millionen Menschen bewohnten, Staat ausdehnen, in dem eine strenge Hierarchie von König, Priestern, Adeligen, Soldaten und Sklaven in dieser Reihenfolge herrschte. Nach dieser Unterteilung erfuhren Personen aus niederen Schichten eine militärische Ausbildung und die männlichen Nachkommen der Adeligen erhielten eine umfassende Schulbildung, mit den Inhalten Militärstrategie, Kalenderrechnung, Naturwissenschaften, Dichtkunst und Rhetorik, um später das Amt eines Offiziers, eines Priesters oder eines höheren Beamten ausführen zu können. (vgl. Wußing 2008)

Das Leben der Azteken war, wie das der Maya, von ihrer Religion geprägt. Priester waren, nach dem König, am privilegiertesten in der Gesellschaft. Außerdem wurden Kriege zum Teil nur geführt um Gefangene zu beschaffen, die als Menschenopfer für ihre Götter dienten. Wann religiöse Riten durchgeführt werden mussten, gab ihr Kalender vor, den sie wiederum aus zweiter Hand über die Zapoteken, einer kleineren Kultur im Südwesten Mexikos (vgl. Abbildung 3.1 a), von den Maya in ihre Kultur aufgenommen hatten. So besaßen sie ebenfalls einen Sonnen- und einen rituellen Kalender. (vgl. Ifrah 1986 und Wußing 2008)

Die Struktur der Kalender der Azteken und der Maya war dieselbe, nur legten die Azteken neue Namen für die Monate und die Tage fest. Ebenfalls war das Ende eines sakralen Zyklus, wenn sich die Konstellation der Daten beider Kalender nach 52 Sonnenjahren zu wiederholen begann (vgl. Kalenderrunde bei den Maya), ein wichtiges Datum für die Azteken. Sie befürchteten große Katastrophen und flehten ihre Götter an, einen weiteren Zyklus erleben zu dürfen. Dazu brachten sie viele Menschenopfer und ummantelten ihre Pyramiden neu. (vgl. Haarmann 2008, Ifrah 1986 und Wußing 2008)

Abbildung 3.1.2 a: Kalenderstein der Azteken, in dessen Mitte sich die Sonne befindet, umrundet von vier vergangenen Weltzeitaltern, wiederum umschlossen von den 20 Namen der Tage eines Monats (Wußing 2008, Seite 27)

Ferner übernahmen die Azteken über die Zapoteken die Idee des Zwanzigersystems der Maya. Sie führten jedoch andere Zahlzeichen ein und ihr Zahlensystem zur Basis 20 war kein Positionssystem mehr, ihre Zahlzeichen konnten also beliebig angeordnet werden. Die Zahl eins war entsprechend dem Einser der Maya ein, der Kakaobohne nachempfundener, Kreis und es gab ein gesondertes Zeichen für fünf sowie weitere Zahlen, die in der folgenden Abbildung gezeigt werden. (vgl. Becker, Eusemann, Geißler, Hess, Siebeck, Schlitt & Wiegand 2011 und Haarmann 2008)

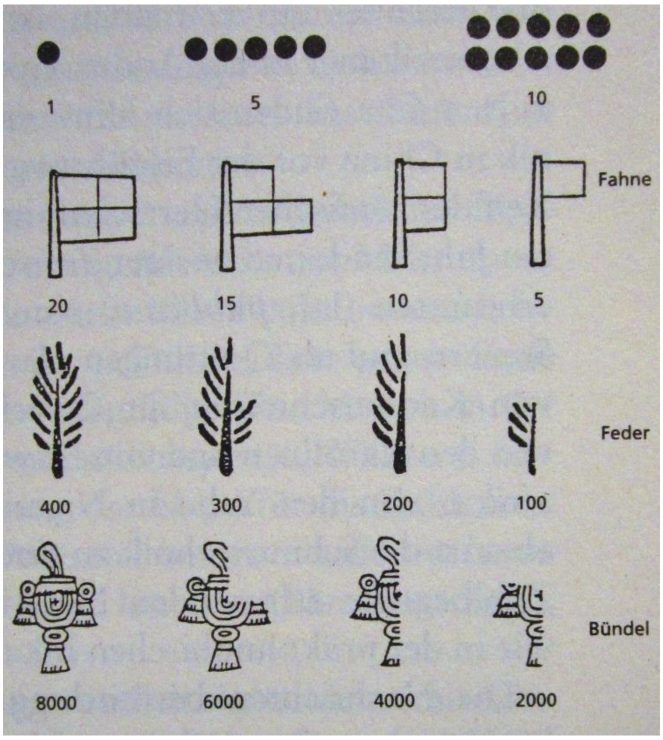


Abbildung 3.1.2 b: Zahlensymbole der Azteken (Haarmann 2008, Seite 69)

Abbildung 3.1.2 c: Anwendungsbeispiele der Zahlschrift (Haarmann 2008, Seite 69)

Da die Azteken nur ein Additionssystem zur Zahlendarstellung benutzten, hatten sie nicht nur Zeichen für Zwanzigerpotenzen, wie 1, 20, 400 und 8 000, sondern entwickelten ebenfalls Symbole für ¼, ½ und ¾ dieser Werteinheiten. Diese Anteilsmäßigkeit spiegelte sich in der Darstellung der Symbole wider. In Abbildung 3.1.2 b zeigt sich beispielsweise, dass das Viertel einer Feder „100“ darstellt und „400“ von einer kompletten Feder symbolisiert wird. (vgl. Haarmann 2008)

In der Sprache der Azteken merkte man hingegen nichts von Bruchteilen. So wurde 300 beispielsweise *caxtulli-poualli* gesprochen, was „fünfzehn-zwanzig“ (beziehungsweise „15·20“) bedeutet und nicht, wie man nach der Zahlendarstellung vermuten könnte eine Variation von „dreiviertel-vierhundert“. Das Additionssystem konnte auch bei den gesprochenen Zahlen erkannt werden. 17 hieß zum Beispiel *caxtulli-on-ome*, mit der Bedeutung „fünfzehn-plus-zwei“. (vgl. Ifrah 1986)

Der straff organisierte Staat der Azteken gebrauchte oft Zahlen. Jedes unterworfene Volk musste eine bestimmt Quantität an Steuern abgeben, die die aztekischen Buchhalter genau berechneten und festhielten. (vgl. Beck 2011)

Ifrah nennt das Beispiel: „Toluca mußte zweimal jährlich 400 Ladungen Baumwollstoff, 400 Ladungen Mäntel in dekoriertem ixtle, 1.200 Ladungen weißen ixtla-Gewebes abliefern“ (Ifrah 1986, Seite 62).

Neben der Berechnung abzugebender Steuern benötigten die Azteken ihr Zähl- und Rechenwesen vor allem für den Handel und Flächenberechnungen, da sie Felder und Grundstücke penibelst vermaßen um unter anderem deren Wert für den Verkauf zu schätzen.

Auf ihre Methoden zur Flächenberechnung wird nun genauer eingegangen. (vgl. Beck 2011 und [Link 4])

Die Azteken entwarfen viele Pläne (innerhalb von nur 4 Jahren zeichneten sie über 2 000) um ihre Grundstücke genau verwalteten zu können. Zum Messen benutzten sie die Längeneinheit *tlaquahuitl*, die 2,5 Metern entsprach, und hielten die jeweilige Länge, entsprechend der nachfolgenden Abbildung am Plan fest. Dabei stand ein Strich für die Länge eines tlaquahuitl und jeder Punkt für 20 tlaquahuitl. (vgl. [Link 5])

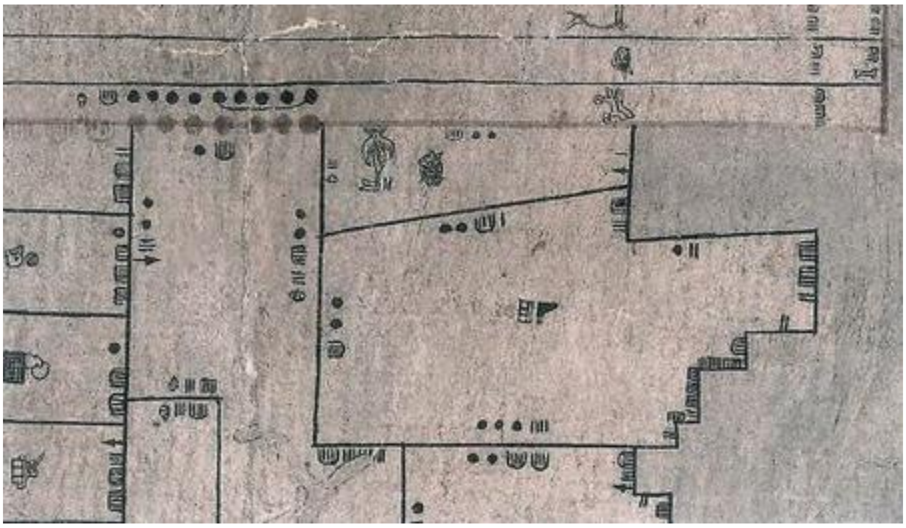


Abbildung 3.1.2 d: Aztekischer Plan über Landbesitz ([Link 5])

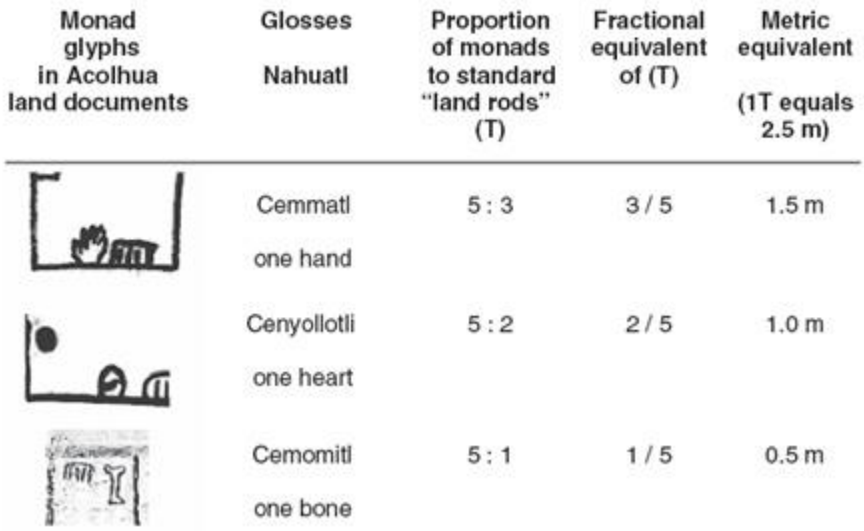
Den Flächeninhalt, der auf den Plänen in die Mitte der skizzierten Grundstücke eingetragen wurde, berechneten sie anhand unterschiedlicher Methoden. Viereckige Grundflächen mit nahezu rechten Winkeln, welche häufig auftraten, ermittelten sie mit der auch heute bekannten Rechtecksformel *Länge-mal-Breite*. Sie kannten noch weitere Algorithmen, welche unter den nachfolgenden vier Punkten aufgelistet werden; dazu sind gedanklich die Seiten des Vierecks der Reihe nach mit a, b, c und d zu beschriften.

- zwei gegenüberliegende Seiten wurden gemittelt und mit einer der anderen beiden multipliziert: $\frac{a+c}{2} \cdot b$, $\frac{a+c}{2} \cdot d$, $\frac{b+d}{2} \cdot a$ oder $\frac{b+d}{2} \cdot c$
- das Viereck wurde in zwei Dreiecke unterteilt: $\frac{a \cdot b}{2} + \frac{c \cdot d}{2}$ oder $\frac{b \cdot c}{2} + \frac{a \cdot d}{2}$
- Verringern einer Seite und Erweiterung der benachbarten: $(a - x) \cdot (b + x)$, $(b - x) \cdot (a + x)$, $(c - x) \cdot (d + x)$ und analoge Möglichkeiten
- Produkt der jeweils gegenüberliegenden gemittelten Seiten: $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$

Die letzte angeführte Methode, die sogenannte Landvermesser-Regel, ist aus geometrischer Sicht meist falsch, für eine näherungsweise Flächenberechnung jedoch sehr geeignet. Interessant ist, dass Vermesser in Europa denselben Berechnungsalgorithmus kannten, zu einer Zeit, zu der noch kein Austausch zwischen amerikanischem Doppelkontinent und Europa stattfand.
(vgl. [Link 4] und [Link 5])

Wann die Azteken auf welche Methode der Flächenberechnung zurückgriffen konnte bis heute nicht herausgefunden werden; vermutlich basierte die Entscheidung auf Erfahrung und / oder Intuition. Umso erstaunlicher ist es, dass sie in 60% der Fälle mit ihren Berechnungen richtig lagen, die sie zusätzlich nur ganzzahlig angaben. Auch in den restlichen Fällen wichen ihre Berechnungen nur gering von den genauen, später nachgerechneten, Ergebnissen ab. (vgl. [Link 5])

Diese Genauigkeit hängt unter anderem damit zusammen, dass die Azteken für Längenangaben auch die Zeichen in Form einer Hand, eines Herzes, Pfeiles und Knochens zur Verfügung hatten, welche für Bruchteile ihrer Längeneinheit standen. So entsprach die Länge von einem „Herz“ zwei Fünftel einer Längeneinheit, somit war die Länge von fünf Herzen und zwei Standardlängen gleich lange. (vgl. [Link 5])



Monad glyphs in Acolhua land documents	Glosses Nahuatl	Proportion of monads to standard "land rods" (T)	Fractional equivalent of (T)	Metric equivalent (1T equals 2.5 m)
	Cemmatl one hand	5 : 3	3 / 5	1.5 m
	Cenyollotli one heart	5 : 2	2 / 5	1.0 m
	Cemomitl one bone	5 : 1	1 / 5	0.5 m

Abbildung 3.1.2 e: Symbole für Bruchteile des aztekischen Längenmaßes ([Link 5])

Die Azteken waren Rechenmeister ihrer Zeit und hatten ein umfassendes Zahlenverständnis sowie ein Gefühl für Größenordnungen, wie unter anderem ihre Kunst der Flächenbestimmung zeigte. Zu Beginn der Kolonialisierung wurde jedoch auch viel Kulturgut von ihnen zerstört. (vgl. Wußing 2008 und [Link 4])

3.1.3 Die Inka und die geknüpfte Schrift

Das Inka-Reich ist, wie das der Azteken, erst kurz vor Beginn der Kolonialzeit entstanden. Erst im 15ten Jahrhundert bildete sich dieser zentralisierte Staat voll aus und wurde zum größten Herrschaftsgebiet in der präkolumbianischen Geschichte. Die Bewohner dieses Gebietes nannten sich Inka und Tahuantinsuyu. Wobei heute fälschlicherweise oft alle als Inka bezeichnet werden. Zur Zeit des Inka-Reiches bezeichnete Inka jedoch nur das Adelsgeschlecht. Der Staat hatte eine strikte Hierarchie, in der ein Inka, der sogenannte Sapā Inka, welcher als Gott verehrt wurde, an der Spitze stand, ihm folgten „gewöhnliche“ Inka, niedere Adelsleute, Priester, Offiziere, Baumeister, Landwirte und zuletzt Kriegsgefangene. (vgl. Morris 2003 und Wußing 2008)

Die Inka schafften es ohne Kenntnis vom Rad, Reittieren oder größeren technischen Hilfsmitteln, große Gebäude und Festungen aus Stein, sowie Straßen zu bauen. Das war unter anderem durch ihr Steuersystem möglich, da neben Nahrungsmitteln und anderen Produkten auch harte Arbeit von den niederen Schichten eingefordert wurde. Des Weiteren schafften sie es, den großen Staat unter diesen Bedingungen zusammenzuhalten. Dabei spielten Knotenschnüre, so genannte *quipu*, eine Schlüsselrolle. (vgl. Morris 2003 und Wußing 2008)

Während die Maya und auch die Azteken eine Schrift im klassischen Sinne besaßen, benutzte das Volk der Inka ein System, das „an der typologischen Schwelle zur Schriftverwendung" (Haarmann 2008, Seite 73) stand. Sie knüpften in 20cm- bis 50cm-lange Schnüre, die an einer Grundschnur hingen, eine bedeutungstragende Abfolge von Knoten. Die Knoten stellten Zahlen nach einem dezimalen Positionssystem dar: Die Gruppe von Knoten, die am nächsten zur Grundschnur war, gab die Anzahl der Tausender an, die darunter die Anzahl der Hunderter, die darunter die Anzahl der Zehner und als letzte Gruppe schließlich die Anzahl der Einer. Dabei stand jeder Knoten für eine Einheit und das Ausbleiben einer Gruppe für unsere Ziffer Null. (vgl. Haarmann 2008)

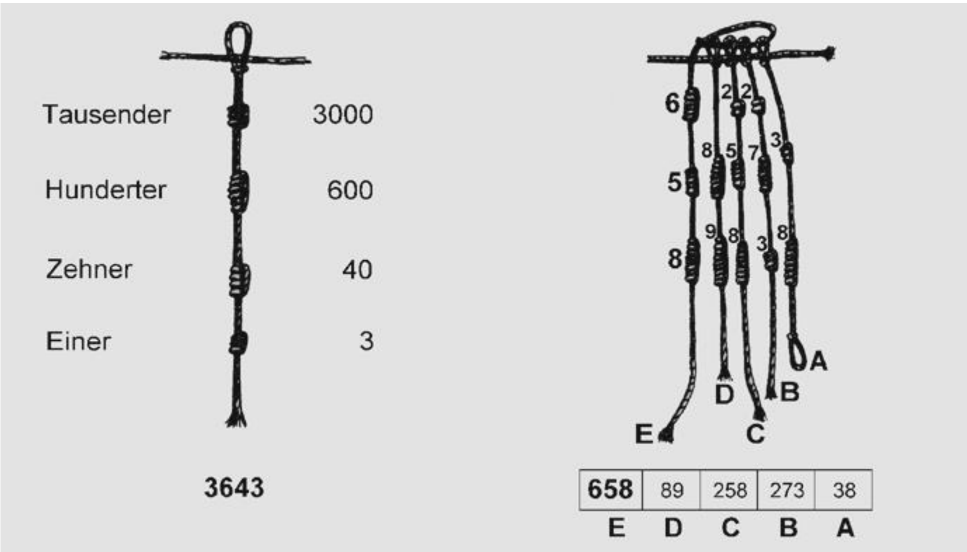


Abbildung 3.1.3 a: Gezeichnete Beispiele von Knotenschnüren der Inka (Wußing 2008, Seite 38)

Links in der obenstehenden Abbildung ist zu sehen wie im Inka-Reich die Zahl 3 643 festgehalten wurde, rechts daneben eine Addition (Nebenschnüre A-D) mit Ergebnis (Hauptschnur E). An den Knotenschnüren A und D können ausbleibende Gruppe an Knoten erkannt werden. Da die Knotengruppen, die jeweils die Anzahl einer gewissen Zehnerpotenz angaben immer auf derselben Höhe geknüpft wurden, war diese Art der Zahlenangabe eindeutig. (vgl. Ifrah 1986)

Eine gewisse Knotenanzahl war jedoch nicht die einzige Information, die ein quipu enthielt. Durch eine bewusste Variation der Schnurfarbe und der Ordnung der Schnüre, sowie ein differenziertes Benutzen von Haupt- und Nebenschnüren, konnten tausende verschiedene

Begriffskategorien dargestellt werden. Mit Hilfe dieses Systems wurden beispielsweise Volkszählungen festgehalten und Geburten- und Sterberegister geführt. (vgl. Haarmann 2008)

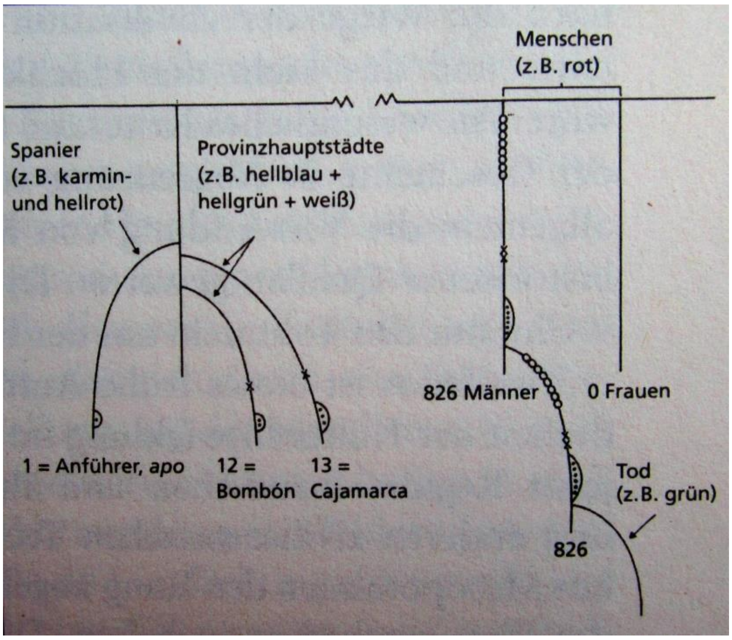


Abbildung 3.1.3 b: Beispiel eines quipu, das folgendermaßen entschlüsselt werden könnte: „Als der Marquis (von Cajamarca) nach Bombón zog, gaben wir ihm 826 Männer (und keine Frauen) mit, und alle starben während der Expedition." (Haarmann 2008, Seite 73)

Jährlich mussten wesentliche quipu von allen Städten in die Hauptstadt gebracht werden, damit die Regierung statistische Daten aus dem ganzen Reich zur Verfügung hatte. Dafür und für weiteren Informationsaustausch, hatte jede Provinz, Provinzhauptstadt und größere Ortschaft eine Identifikationsnummer und einen *quipucamayoc* (wörtlich „Wächter der Knoten"), der Experte im Knotenlesen sowie –knüpfen war. Auch für die Überbringung der Nachrichten gab es einen eigenen Berufsstand, den der Boten, die die Nachrichten von einem Botenstopp zum nächsten transportierten. (vgl. Haarmann 2008)

Knotenschnüre wurden nicht nur von den Inka benutzt; in China waren sie etwa vor 3 000 Jahren, bevor es eine Schrift gab, in Gebrauch, in manchen Gebieten des frühen römischen Reiches wurden mit Hilfe solcher Schnüre Steuern aufgelistet oder Quittungen ausgestellt und auch heute werden solche Schnüre von manchen Volksgruppen genützt (beispielsweise in Nigeria). Doch keine dieser Kulturen entwickelte so ein komplexes und inhaltsreiches System, das wie das der Inka als Kommunikationssystem, Kalender und Archiv statistischer Daten genutzt werden konnte. (vgl. Haarmann 2008)

Im Zuge der Kolonialisierung wurde die Inka-Elite, so auch die quipumayoc, fast vollständig vernichtet und es blieb niemand, der das aufwändige Knotensystem deuten oder reproduzieren hätte können. In vereinfachter Form führten Hirten die Tradition von Knotenschnüren weiter (um zum Beispiel ihren Viehbestand festzuhalten). Bis heute hat sich eine leicht abgewandelte Form der Knotenschnur bei indigenen Völkern in Bolivien und Peru gehalten. Sie halten Zahlen auf Schnüren, die sie *chimpu* nennen, fest, indem die Höhe der Zehnerpotenz durch die Anzahl der miteinander verknoteten Fäden angezeigt wird, wie in der folgenden Abbildung zu sehen ist. (vgl. Haarmann 2008 und Wußing 2008)

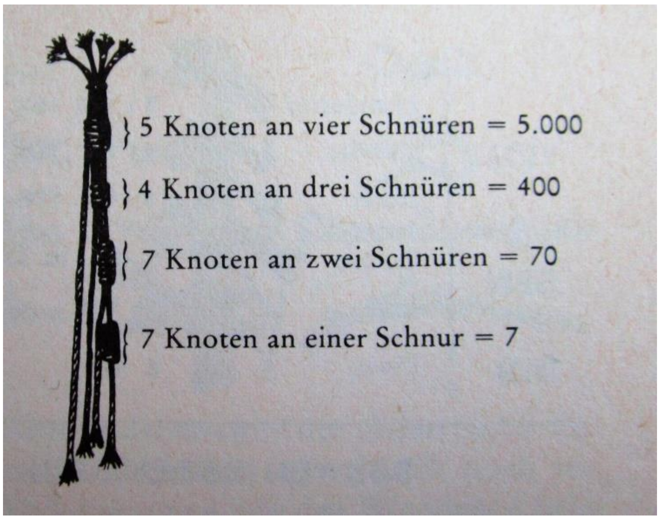


Abbildung 3.1.3 c: Darstellung der Zahl 5 477 auf einem chimpu (Wußing 2008, Seite 125)

3.2 Ein Einblick in asiatische (Zahlen-)Kulturen

Asien hat eine interessante und weitreichende Zahlengeschichte. Während in Indien die Null, mit ihrer noch heute gültigen Bedeutung, erfunden und eingeführt wurde, besitzt China eine Jahrtausende-alte Zahlentradition. Nachweislich wurden bereits um 1300 vor Christus chinesische Zahlen schriftlich festgehalten, wobei das Grundprinzip dieser Zahlenschreibweise bis heute unverändert blieb. Damit ist China die einzigen Sprachkultur, deren Zählprinzip sich so lange halten konnte. Außerdem hatte China großen Einfluss auf die Schriftkultur weiterer asiatischer Länder. (vgl. Blum 2007, Gericke 1984 und Wußing 2008)

In den folgenden Unterkapiteln werden aus diesem Grund die chinesische Zahlengeschichte als erste, sowie folgend die japanische und die indische Zahlengeschichte behandelt. (Die Zahlengeschichte Mesopotamiens, welche ebenfalls eine asiatische ist, wird im nachfolgenden Kapitel behandelt.)

3.2.1 China

3000 – 1500 v. Chr.	Erste sesshafte Stromtalkulturen (Siedlungen am Janktsekiang und am Gelben Fluss)
ca. 2205 – 1766 v. Chr.	Xia-Dynastie
ca. 1500 – 1030 v. Chr.	Shang-Dynastie, im Wesentlichen im Gebiet um den gelben Fluss: Orakelknochen werden mit Zahlzeichen beschriftet
11. Jahrhundert – 481 v. Chr.	Chou-Dynastie: Zeit der Philosophen Konfuzius und Laotse

475 – 256 v. Chr.	Zeit der streitenden Staaten: Philosophie wird bedeutender in der Gesellschaft; ein Sonnenkalender mit 365,25 Tagen wird eingeführt
221 – 207 v. Chr.	Ch'in-Dynastie: Shi-Huang-ti einigt als erster Kaiser China; es werden bereits Rechenbretter benutzt
206 v. Chr. – 220 n. Chr.	Han-Dynastie, ein theokratischer Beamtenstaat: Astronomie, Mathematik, Kunst und Philosophie erleben eine Hochphase, sowie Beginn der Papierherstellung; unter Kaiser Wudi reicht das chinesische Reich von Korea bis Turkmenistan Späte Han-Dynastie, ab 25 n. Chr.: Buddhismus kommt von Indien nach China
221 – 280	Zeit der drei Reiche
265 – 618	Chin-Dynastie, nördliche und südliche Dynastien von Nan Pei Ch'ao und Sui-Dynastie: in dieser Zeitspanne zerfällt das chinesische Reich
618 – 906	Tang-Dynastie: Buddhismus herrscht vor, Wirtschaft und Kultur erleben ihre Blütezeit
960 – 1127	Nördliche Sung-Dynastie, ein Beamtenstaat mit zentraler Ausbildung
1127 – 1278	Südliche Sung-Dynastie: Konfuzianismus ist Norm; 1215 nehmen die Mongolen Peking ein und erobern bis 1280 ganz China; Marco Polo trifft 1275 in Peking ein
1278 – 1368	Yuan-Dynastie unter Mongolenherrschaft: die Mathematik erlebt erneut eine Blütezeit
1368 – 1644	Ming-Dynastie mit der Hauptstadt Nanjing: die chinesische Mauer wird erneuert und ausgebaut; portugiesische Kaufleute und jesuitische Missionare kommen nach China und bringen mathematische Erkenntnisse aus Europa
1644 – 1911	Qing-Dynastie: Konfuzianismus herrscht vor; kolonialer Einfluss macht sich bemerkbar und internationale Konventionen mathematischer Zeichen setzen sich schließlich Ende des 19ten Jahrhunderts durch
1911	Ausrufung der Republik, woraufhin erstmals internationale Mathematiker und Mathematikerinnen Vorträge in China halten dürfen und einige chinesische Studierende im Ausland studieren
1949	Gründung der Volksrepublik; China ist am Stand der internationalen Mathematik und führt den gregorianischen Kalender ein

Tabelle 3.2.1 a: Chronologische Kurzübersicht über die chinesischen Dynastien (vgl. Gericke 1984, Menninger 1979 und Wußing 2008)

In China ließen sich vor etwa dreieinhalb bis fünf Jahrtausenden erstmals Menschen nieder. Sie besiedelten das fruchtbare Gebiet rund um die Flüsse Janktsekiang und den Gelben Fluss. Die Zahlengeschichte dieses Gebietes geht etwa auf das zweite Jahrtausend vor Christus zurück. Wie auch in anderen Ländern wurden anfänglich Kerbhölzer und Knotenschnüre als Zählhilfen benutzt. Es waren jedoch auch bald abstrakte Zahlensymbole in Verwendung. (vgl. Haarmann 2008)

Die ersten abstrakten Schrift- und Zahlzeichen bestanden aus symbolhaften Strichzeichnungen und waren die Vorreiter der heutigen Strichzeichen. Laut Ifrah (1986) könnte die Eigenheit der chinesischen Sprache, viele einsilbige, phonetisch sehr unterschiedliche, Wörter zu beinhalten, eine Ursache für die Entstehung des komplizierten chinesischen Schriftsystems sein, da diese einsilbigen Wörter eine sprachliche Zerlegung in Laute nicht zuließ und so das Einteilen der Sprache in Silben oder gar Buchstaben verhinderte. Auch im modernen China besitzt jedes Wort sein eigenes Schriftzeichen, von denen es mehrere zehntausende gibt. Es reicht jedoch aus etwa 2 000 zu kennen, um alle Beiträge in der täglichen Zeitung lesen zu können. Für das Lesen von Zahlen (chinesische Zahlzeichen unterliegen dem System der restlichen Schrift) reicht sogar die Kenntnis von wesentlich weniger Schriftzeichen aus. Die schriftliche Wiedergabe von Zahlen wird im Folgenden noch genauer erläutert, davor wird auf die geschichtlichen Ursprünge von Zahl- und Schriftzeichen eingegangen. (vgl. Haarmann 2008 und Ifrah 1986)

Erste Belege niedergeschriebener Symbole für Zahlen und Wörter stammen aus der Zeit der ausgehenden Shang-Dynastie. Beckenknochen größerer Tiere und Schildkrötenpanzer wurden für wahrsagerische Zwecke mit Zahlzeichen beschriftet. Die beschrifteten Tierskeletttteile wurden in „heiliges“ Feuer gelegt und die Risse, die durch die Hitze entstanden, von Schamanen gedeutet. Ein Brauch, der lange exklusiv für das privelegierte Volk Chinas bestimmt war. (vgl. Ifrah 1986 und Wußing 2008)

Des Weiteren war der Gebrauch von Schrift in erster Linie der Wahrsagerei und Religion vorbehalten. Vor Schriftkundigen und der Schrift selbst herrschte somit, bis etwa ins siebente Jahrhundert vor Christus, großer Respekt, sowie großes Misstrauen. Das verursachte, dass die Schrift in der chinesischen Gesellschaft, im Vergleich zum Zeitpunkt ihrer Erfindung, erst relativ spät auch für weltliche Dinge benutzt wurde. Diese Tatsache stand jedoch nicht der Entwicklung der Zahlendarstellung im Weg, die im siebenten Jahrhundert vor Beginn unserer Zeitrechnung bereits sehr fortschrittlich war. Die, für die Wahrsagung benutzte, Zahlschrift ähnelte den weiteren Zahlschriften der chinesischen Geschichte bereits sehr. Auch wenn die Zahlzeichen noch eine abweichende Form hatten, war die Struktur bereits dieselbe. (vgl. Ifrah 1986 und Wußing 2008)

Dass sich das Prinzip der chinesischen Zahlschrift von Anbeginn ihrer Niederschrift bis heute gehalten hat, ist eine große Besonderheit dieser Zahlschrift. Des Weiteren ist es außergewöhnlich, dass die Ziffernschrift gleich der herkömmlichen chinesischen Schreibschrift ist. (Nur im alten Ägypten und Babylon ist das außerdem der Fall gewesen, in allen anderen Schriftsystemen der Welt unterscheiden sich Zahl- und Wortschrift). (vgl. Menninger 1979)

Eine weitere Besonderheit ist der Besitz und Gebrauch mehrerer Zahlschriften. Auf die chinesische Ziffern-Grundschrift, die bereits vor 2 000 Jahren ihre heutige Form fand, wird nun genauer eingegangen; die weiteren Zahlschriften werden zu einem späteren Zeitpunkt in diesem Kapitel vorgestellt. Es ist bemerkenswert, dass sich die ersten zehn Ziffern, der auch heute gebräuchlichen Grundschrift, der Darstellung der chinesischen Fingerzahlen bedienen, wie in der nachfolgenden Abbildung gezeigt wird. (vgl. Haarmann 2008 und Menninger 1979)

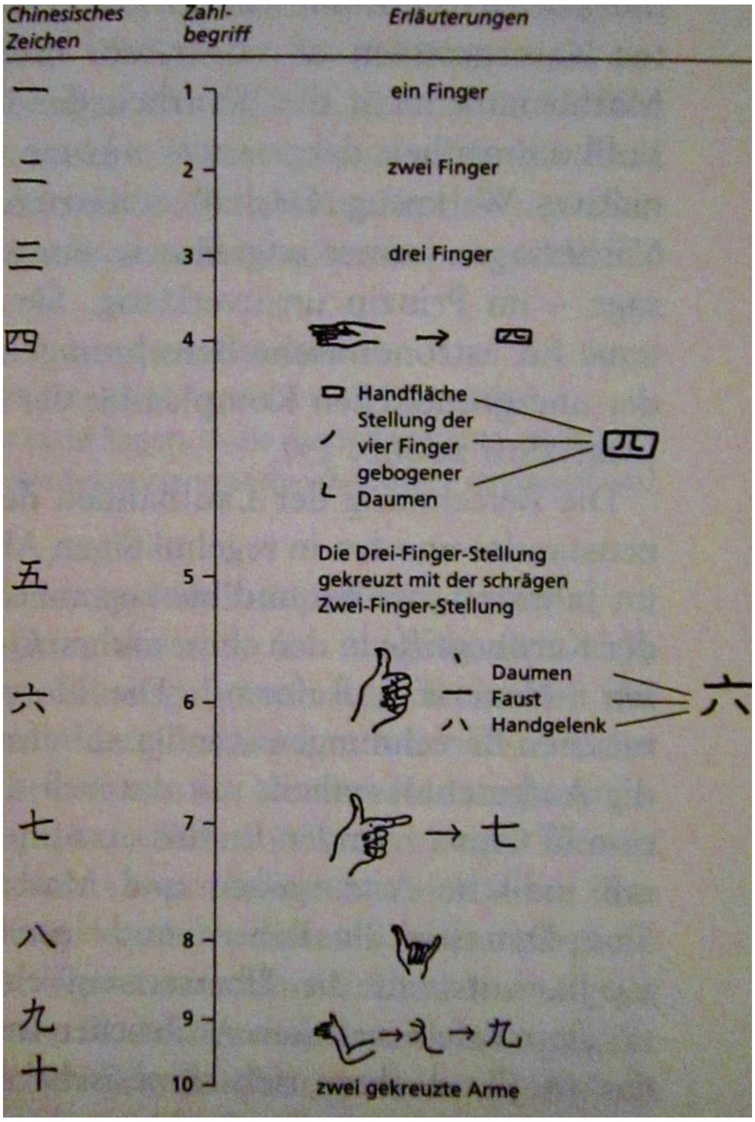


Abbildung 3.2.1 a: Der Zusammenhang zwischen den chinesischen Zahlzeichen von 1-10 und den jeweiligen Fingerzahlen (Haarmann 2008, Seite 51)

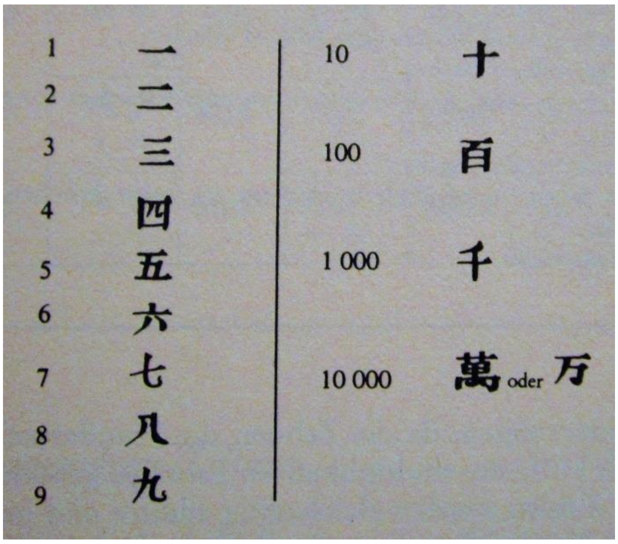


Abbildung 3.2.1 b: Alle Zahlzeichen der Zahlschrift aus Abbildung 3.2.1 a (Ifrah 1986, Seite 383)

In Abbildung 3.2.1 b ist zu sehen, dass es in der erwähnten Grundschrift Zeichen für die Ziffern eins bis neun gibt, sowie für die Zehnerpotenzen 10^1 bis 10^4. Beim chinesischen Zahlensystem handelt es sich um ein Dezimalsystem, wobei Zahlen über zehn „gestuft" dargestellt werden, in Form eines benannten Positionssystems. Das bedeutet, dass jede Zahl aus den Anzahlen der Zehner, Hunderter und so weiter, sowie den Zeichen der jeweiligen Rangschwellen zehn (Z), 100 (H), 1000 (T) und 10 000 (Z‘) zusammengesetzt wird. So wird beispielsweise die Zahl 41 957 sinngemäß wie folgt aufgeschrieben:

4 (Z‘) 1 (T) 9 (H) 5 (Z) 7, beziehungsweise

$4 \cdot 10\,000 + 1 \cdot 1\,000 + 9 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7.$

In Abbildung 3.2.1 c wird eine Möglichkeit der Zahlendarstellung gezeigt: Die Zahlensymbole und die nachfolgenden Symbole der Zehnerpotenzen werden von oben beginnend untereinander geschrieben, wobei keine Rechensymbole verwendet werden (entsprechend der chinesischen Schrift würden mehrere Zahlen von rechts nach links gelesen werden). Durch internationale Einflüsse gibt es mittlerweile auch andere Schriftkonventionen: Zum Teil werden heutzutage Ziffern auch nebeneinander und von links nach rechts geschrieben. (vgl. Ifrah 1986 und Menninger 1979)

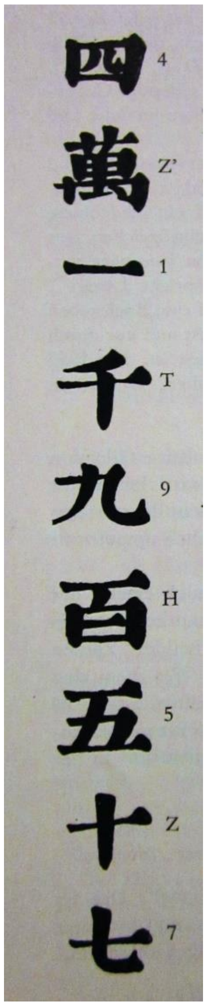


Abbildung 3.2.1 c: Niederschrift der Zahl 41 957 in chinesischer Grundschrift (Menninger 1979, Seite 270)

Nach der eben erläuterten Darstellung von Zahlen bis 99 999, stellt sich die Frage, wie größere Zahlen dargestellt werden konnten und können. Zahlen bis 100 000 000 konnten durch Multiplikation beziehungsweise Aneinanderreihen der bereits bekannten Zahlzeichen aufgeschrieben werden. Die Zahl 3 470 500 beispielsweise würde auf diese Art so aufgeschrieben werden:

3 (H) 4 (Z) 7 (Z') 5 (H), beziehungsweise

[3·100 + 4·10 + 7]·10 000 + 5·100.

Für noch größere Zahlen, die unter anderem in astronomischen Abhandlungen benötigt wurden, sind zehn weitere Zahlzeichen entwickelt worden, mit denen neben den Zehnerpotenzen Hunderttausend bis hundert Billionen auch weit höhere Zahlen wiedergeben werden können. Dazu wurden 3 Systeme unterschiedlichen Grades eingeführt: Im System „niederer Grad" stehen die Zahlzeichen beispielsweise für 10^5 bis 10^{14}. Dieselben Schriftzeichen stehen jedoch in den Systemen „mittlerer Grad" und „höherer Grad" für ganz andere Zahlen, wie in der folgenden Abbildung zu sehen ist. (vgl. Ifrah 1986)

		System »xià deng« NIEDERER GRAD	System »zhōng deng« MITTLERER GRAD	System »shàng deng« HÖHERER GRAD
萬	wàn	10^4	10^4	10^4
億	yì *	10^5	10^8	10^8
兆	zhào	10^6	10^{12}	10^{16}
京	jing	10^7	10^{16}	10^{32}
垓	gai	10^8	10^{20}	10^{64} THEORETISCHE WERTE
補	bù**	10^9	10^{24}	10^{128}
壤	ràng	10^{10}	10^{28}	10^{256}
溝	gou***	10^{11}	10^{32}	10^{512}
澗	jián	10^{12}	10^{36}	10^{1024}
正	zheng	10^{13}	10^{40}	10^{2048}
載	zái	10^{14}	10^{44}	10^{4096}

* Graphische Variante: 亿
** Wort mit derselben Bedeutung: 秭 cè
*** Graphische Variante: 溝

Abbildung 3.2.1 d: Zahlensymbole zur Darstellung von Rangschwellen ab 10^4 (Ifrah 1986, Seite 408)

三京五千三百一億二百七萬六千一百八十五兆三億一萬

sān jing wǔ qiān sān bǎi yī yì èr bǎi qī wàn liù qiān yī bǎi bā shí wǔ zhào sān yì yī wàn

$3 \times 10^{32} + \left[[5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 1].10^8 + [2 \times 10^2 + 7].10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 8 \times 10 + 5 \right] 10^{16} + 3 \times 10^8 + 1 \times 10^4$

300 005 301 020 761 850 000 000 300 010 000

Abbildung 3.2.1 e: Darstellung einer 33-stelligen Zahl mit Hilfe des Systems „höherer Grad" (Ifrah 1986, Seite 407)

Mit Hilfe dieser Konvention konnten Zahlen bis 10^{64}, wie jene aus Abbildung 3.2.1 e, dargestellt werden (da vom System „höherer Grad“ nur die ersten 3 neuen Zahlzeichen benutzt wurden). Für die Darstellung größerer Zahlen gab es keinen Bedarf, schon Zahlen über 10^{16} wurden kaum benötigt. Mittlerweile gibt es in China, neben diesem System der unterschiedlichen Grade, ebenfalls die Möglichkeit Zahlen mit Hilfe des indischen, international verbreiteten, unbenannten Positionssystems aufzuschreiben. (vgl. Haarmann 2008 und Ifrah 1986)

Das chinesische Zahlensystem ist wohl das älteste dezimale Positionssystem, das es gibt. Es unterscheidet sich vom indischen nur sofern, dass es ein *benanntes* Positionssystem ist und ohne einer Null auskommt. Die beiden Eigenschaften haben zur Folge, dass sich das chinesische Zahlensystem nicht gut zum schriftlichen Rechnen eignet. Nichts desto trotz waren astronomische Kenntnisse in China schon vor etwa dreieinhalb-tausend Jahren, in der Zeit der Shang-Dynastie, weit ausgereift (schon im fünften Jahrhundert vor Christus wurde etwa ein Kalender mit 365 ¼ Tagen eingeführt). Des weiteren war bereits der Satz des Pythagoras bekannt und Eigenschaften von Dreiecken und Kreisen wurden gelehrt. (vgl. Gericke 1984, Menninger 1979 und Wußing 2008)

Für die Hürde des schriftlichen Rechnens war bald eine Abhilfe gefunden: Etwa im dritten Jahrhundert vor Christus wurden Rechenbretter als Hilfsmittel beim Rechnen zur Hand genommen. Ein Rechenbrett war ein Brett auf dem quadratische Felder eingezeichnet waren (vergleichbar mit einem Schachbrett), auf das Rechenstäbchen aufgelegt werden konnten. Die Rechenstäbchen hatten einen quadratischen oder dreieckigen Querschnitt, und hatten etwa die Größe eines gewöhnlichen Streichholzes aus heutiger Zeit. Mit diesen Stäbchen konnten so, durch gekonnte Positionierung am Rechenbrett, Zahlen dargestellt werden. (vgl. Ifrah 1986 und Wußing 2008)

Jedes Feld des Rechenbrettes stand für eine bestimmte Rangschwelle, durch das Legen von Rechenstäbchen auf das jeweilige Feld wurde die Anzahl der entsprechenden Zehnerpotenz festgehalten. Dabei gab es für die Ziffern sechs bis neun eine Vereinfachung: Ein, zu den restlichen orthogonal gelegtes, Stäbchen ersetzte fünf Stäbchen und gewährleistete so, dass die gelegte Zahl auf einen Blick erkennbar war, wie in beiden nachfolgenden Abbildungen zu sehen ist. Des Weiteren änderte sich die Ausrichtung der Stäbchen bei jedem zweiten Feld um 90°, eine Konvention, die die Unterscheidung der Rangschwellen erleichtern sollte, da nicht alle Rechenbretter einzelne Felder eingezeichnet hatten. (vgl. Ifrah 1986 und Wußing 2008)

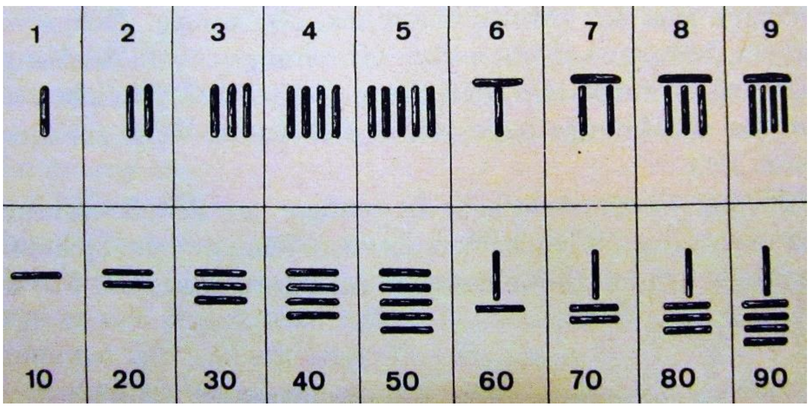


Abbildung 3.2.1 f: Zifferndarstellung mit Rechenstäbchen (Ifrah 1986, Seite 149)

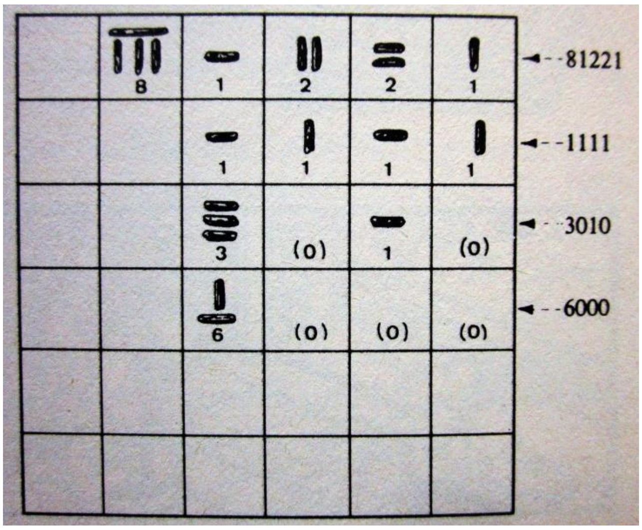


Abbildung 3.2.1 g: Vier Beispiele der Zahlendarstellung am Rechenbrett (Ifrah 1986, Seite 150)

Eine weitere Eigenart der Zahlendarstellung am chinesischen Rechenbrett kann Abbildung 3.2.1 g entnommen werden: Entgegen der gewöhnlichen chinesischen Schrift, die von oben nach unten geschrieben wurde, werden Zahlen am Rechenbrett in der Waagrechten gelegt. Außerdem ergibt sich so ein dezimales Positionssystem, das dem indischen entspricht. Das Freibleiben eines Feldes entspricht dabei einer Null. (vgl. Menninger 1979)

Durch diese fortschrittliche Transkription der chinesischen Zahlen konnten am Rechenbrett nun leicht Additionen und Subtraktionen durchgeführt werden: Die Summanden beziehungsweise Minuend und Subtrahend wurden untereinander aufgeschrieben und Spalte für Spalte wurden die Stäbchen zusammengelegt beziehungsweise die entsprechende Anzahl an Stäbchen beim Minuenden entnommen. (vgl. Ifrah 1986)

Auch Multiplikationen und Divisionen waren damit möglich. Zum Multiplizieren wurde ein Faktor in der ersten Zeile des Brettes aufgelegt, sowie der andere in der letzten Zeile. Die ermittelten Zwischenergebnisse, die sich durch Multiplikation der einen Zahl mit den Einern, Zehnern, Hundertern et cetera der anderen Zahl ergaben, wurden in den mittleren Zeilen festgehalten und am Ende addiert. In umgekehrter Weise erfolgte die Division: Der Divisor wurde in die letzte Zeile geschrieben und der Dividend in die Mitte. Der Quotient wurde dann Schritt für Schritt darüber geschrieben, indem der Dividend jeweils um die Teilprodukte reduziert wurde. (vgl. Ifrah 1986)

Für die Durchführung von Multiplikationen und Divisionen mussten die Rechnenden das Einmaleins beherrschen. Zur Unterstützung gab es Einmaleinstafeln (unter anderem auf Papier, da in China schon ein bis zwei Jahrhunderte vor Beginn unserer Zeitrechnung mit der Papierproduktion begonnen worden war). Die nachfolgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt einer solchen Einmaleinstafel. (vgl. Ifrah 1986 und Wußing)

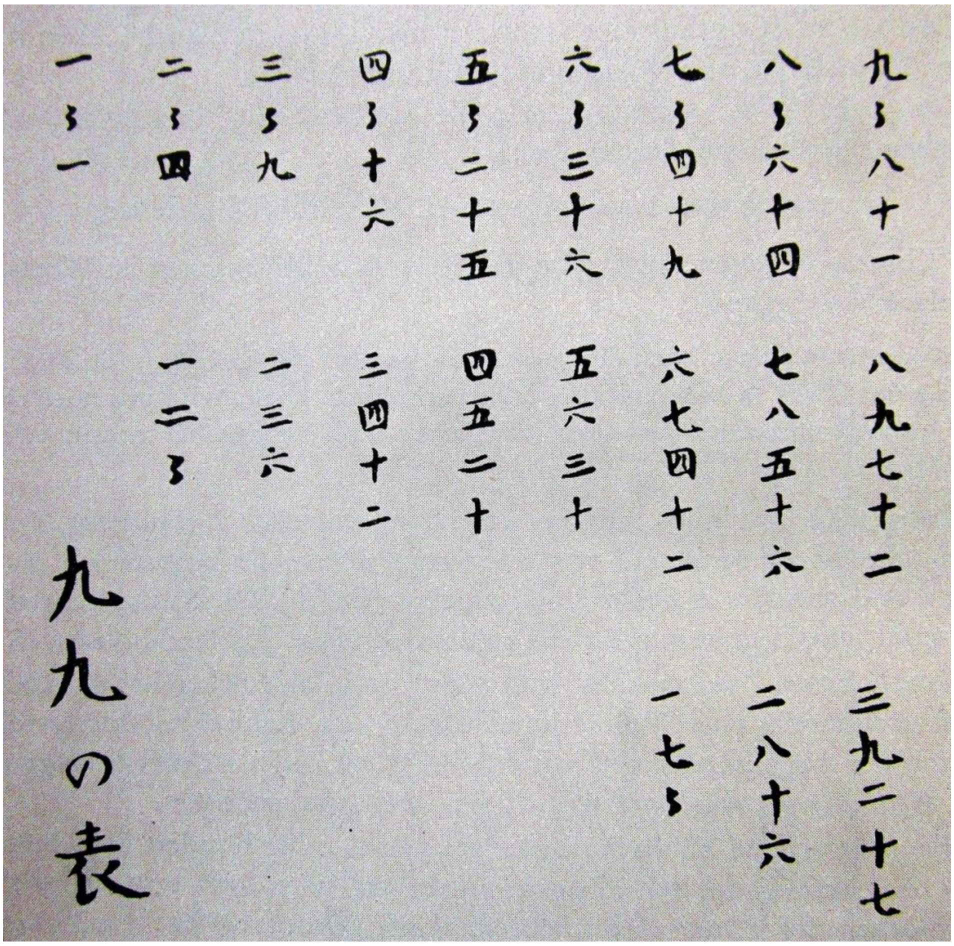


Abbildung 3.2.1 h: Ausschnitt einer Einmaleinstafel (Menninger 1979, Seite 276)

Die abgebildete Einmaleins-Liste kann zur besseren Verständlichkeit so transkribiert und erweitert werden (vgl. Menninger 1979):

1(·1)	2(·2)	3(·3)	4(·4)	5(·5)	6(·6)	7(·7)	8(·8)	9(·9)
1	4	9	16	25	36	49	64	81
	1(·)2	2(·)3	3(·)4	4(·)5	5(·)6	6(·)7	7(·)8	8(·)9
	(2)	6	12	20	30	42	56	72
		1(·)3	2(·)4	3(·)5	4(·)6	5(·)7	6(·)8	7(·)9
		3	8	15	24	35	48	63
								.
								.
								.
						1(·)7	2(·)8	3(·)9
						7	16	27
							1(·)8	2(·)9
							8	18
								1(·)9
								9

In Abbildung 3.2.1 h sind die ersten zwei Absätze und der vorvorletzte Absatz der transkribierten Einmaleinstafeln zu sehen. Wie bereits erwähnt wurden Rechenoperationszeichen zu dieser Zeit noch nicht verwendet, aus diesem Grund sind die Multiplikations-Punkte auf der transkribierten Liste eingeklammert. Des Weiteren stehen die beiden Faktoren untereinander, sowie ihr Produkt darunter. Um sich in dieser Art der Einmaleins-Tabelle gut zurecht zu finden, empfiehlt es sich, das gesuchte Produkt in der Spalte des größeren Faktors zu suchen. (vgl. Menninger 1979)

Rechenbretter, mit denen schon bald neben der Durchführung einfacher Rechenoperationen auch Quadrat- und Kubikwurzeln gezogen oder auch lineare Gleichungen gelöst werden konnten, und das Wissen, wie mit diesen verfahren werden konnte, erlangten vor allem in der Han-Dynastie große Wichtigkeit. Die genannte Dynastie bestand aus einem Beamtenstaat, der die Verwaltung auf die tätigen Beamten übertrug. Beamte wurden in eigenen Schulen ausgebildet, die das Buch „Neun Kapitel“ von Chiu Chang Suan Shu, eines der ersten umfassenden Bücher über Mathematik in China, als Lehrbuch benutzten. Das Buch beschäftigte sich mit dem Lösen unterschiedlicher Problemstellungen, die auch für die Ausbildung der, den Staat verwaltenden, Personen als wichtig erachtet wurden. So mussten Beamte in der Lage sein Flächen und Volumina bestimmter Figuren zu berechnen, mit Proportionen umzugehen, Umkehraufgaben von Flächen- und Volumsberechnungen zu lösen, lineare Gleichungssysteme aufzulösen, Berechnungen zum rechtwinkeligen Dreieck durchzuführen, lineare Interpolation anwenden zu können und gerechte Steuereinschätzungen zu treffen. (vgl. Gericke 1984 und Wußing 2008)

Zwei Aufgabenstellungen aus „Neun Kapitel“, lauteten beispielsweise wie folgt:

- „Der Nordbezirk hat 8 758 Suan, der Westbezirk 7 236 Suan, der Südbezirk 8 356 Suan. Die drei Bezirke sollen zusammen 378 Mann für eine Schanzarbeit abstellen, und zwar entsprechend der Anzahl ihrer Suan“ (Gericke 1984, Seite 174). Dabei bezeichnet Suan eine Steuereinheit, die aus 120 Personen besteht. – Hier wurde das Wissen über proportionale Verteilungen genutzt, um die Aufgabe zu lösen.
- „In einen Teich führen 5 Kanäle. Öffnet man den ersten Kanal, so wird der Teich in 1/3 Tag gefüllt, vom zweiten in 1 Tag, vom dritten in 2 ½ Tagen und vom vierten in 3 Tagen, vom fünften in 5 Tagen. In wieviel Tagen füllen sie den Teich, wenn alle zugleich geöffnet werden?“ (Gericke 1984, Seite 176). – Diese Aufgabe galt als Übung zur gerechten Steuereinschätzung.

(vgl. Gericke 1984)

Das Werk war laut Gericke (1984) pädagogisch hochwertig aufbereitet, da eine gute Anordnung und teilweise amüsante Aufgabenstellungen vorhanden waren, sowie allgemein formulierte Lösungen gegeben waren. Wie bereits die beiden genannten Beispiele vermuten lassen, befasste sich das Lehrbuch mit praktischen Aufgaben und enthielt keine abstrakten Definitionen – eine langwährende Vorliebe der chinesischen Mathematik, die gegensätzlich zur Mathematik der griechischen Antike war, wie in einem späteren Kapitel gezeigt wird. Des Weiteren zeigt das zweite Beispiel, dass Bruchzahlen in dieser Zeit bereits bekannt waren und mit diesen auch gerechnet wurde. (vgl. Gericke 1984 und Martzloff 1997)

Neben Brüchen kannte man in China auch schon Dezimalzahlen beziehungsweise Dezimalbrüche und negative Zahlen, die auf intelligente Art und Weise in das Rechnen mit dem Rechenbrett integriert wurden. So wurden zur Darstellung von negativen Zahlen schwarze Rechenstäbe benutzt und zum Legen von positiven Zahlen rote. Für Dezimalzahlen wurden Spalten rechts neben der Spalte der Einer hinzugefügt, in die die Anzahl der Zehntel, Hundertstel und so fort gelegt werden konnte (entsprechend Abbildung 3.2.1 j). Festgehalten wurden die Dezimalzahlen mit zusätzlichen eingeführten Symbolen für die Rangschwellen der kleinen Zehnerpotenzen (mit negativen Exponenten), wie zum Beispiel in Abbildung 3.2.1 i. (vgl. Martzloff 1997)

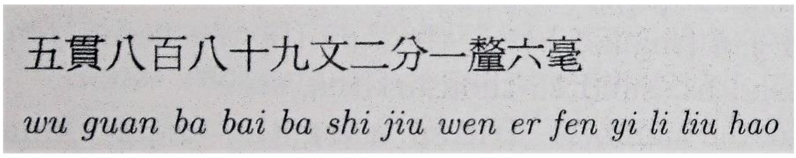


Abbildung 3.2.1 i: Niederschrift der Zahl 5 889,216 mit Hilfe der Symbole für Zehntel, Hundertstel und Tausendstel (Martzloff 1997, Seite 202)

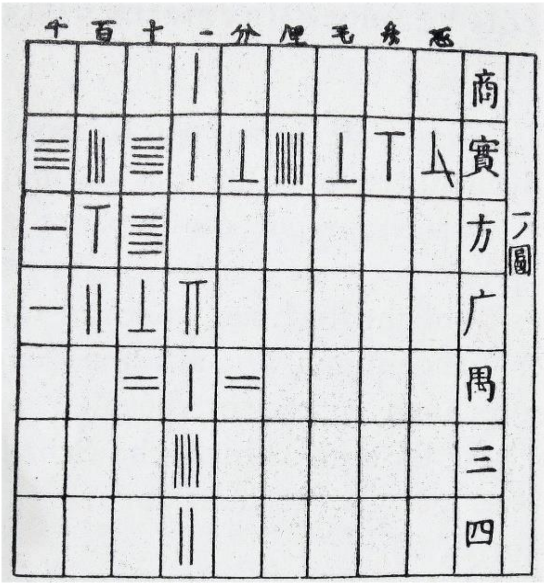


Abbildung 3.2.1 j: Beschriftetes Rechenbrett mit Feldern für Dezimale bis Hunderttausentstel (das Durchstreichen der letzten Ziffer war eine weitere Möglichkeit negative Zahlen kennzuzeichnen) (Menninger 1979, Seite 184)

Das Rechenbrett behielt lange seine zentrale Rolle. Unter anderem ist das Symbol für das Wort *suan*, das mit „rechnen“ zu übersetzen ist, aus drei chinesischen Zeichen mit der Bedeutung „Zwei Hände halten ein aus Bambus hergestelltes Rechenbrett“ (Menninger 1979, Seite 118) zusammengesetzt. (vgl. Menninger 1979)

Es entwickelte sich durch den Gebrauch des Rechenbrettes auch eine weitere Zahlschrift, die aus sogenannten Strichziffern besteht. Entsprechend der Zifferndarstellung am Rechenbrett mit Stäbchen werden die Ziffern durch Striche ausgedrückt, wie in Abbildung 3.2.1 k gezeigt wird. Die Art und Weise wie diese aufgeschrieben wurden variierte, so wurden unter anderem die einzelnen Ziffern pausenlos aneinander gereiht (siehe Abbildung 3.2.1 l). (vgl. Ifrah 1986 und Menninger 1984)

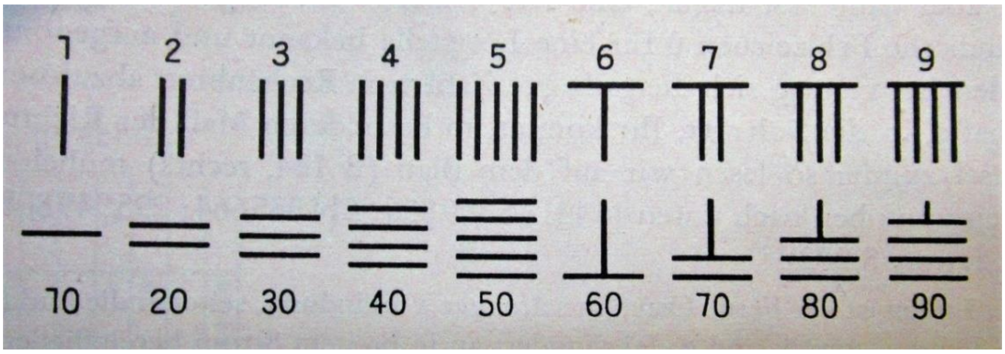


Abbildung 3.2.1 k: Strichziffern, die sich durch ihre angepasste Länge der fünf-wertigen Striche von der Darstellung mit Rechenstäbchen (vgl. Abbildung 3.2.1 f) unterschieden (Menninger 1979, Seite 185)

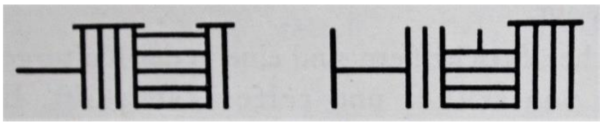


Abbildung 3.2.1 l: Die Zahlen 1 975 und 11 399 geschrieben in Strichziffern (Menninger 1979, Seite 185)

An dieser Stelle wird die Frage aufgeworfen, wie etwa die, durch Strichziffern ausgedrückten, Zahlen 7 045 und 745 beziehungsweise verallgemeinert Zahlen, die in der indischen Ziffernschrift eine Null enthalten, unterschieden werden konnten. Zum Zeitpunkt der Einführung der Strichziffern war eine eindeutige Darstellung in diesem Fall noch nicht möglich, es wurde dann auf die klassische chinesische Zahlenschrift zurückgegriffen. Eine richtige Lösung für die eindeutige Zahlenschreibung mit zusammengerückten Ziffern, auch *Sangi* genannt, tauchte erst ab dem 13ten Jahrhundert auf. (vgl. Menninger 1979 und Wußing 2008)

Der Weg zu dieser Zahlenschrift, einer vollkommenen Stellenschrift, hatte seinen Ursprung etwa zu Beginn unserer Zeitrechnung. In der damaligen Han-Dynastie, einer Blütezeit der Mathematik und eines ausgedehnten chinesischen Reiches, gab es mehrere Handelsbeziehungen zu anderen Ländern, so auch zu Indien. Durch diesen Austausch kam der Buddhismus erstmals nach China und brachte die Vorliebe für große Zahlen mit sich. Der Kontakt zu Indien blieb erhalten und im siebenten Jahrhundert, zur Zeit der Tang-Dynastie, begann der Buddhismus Vorherrschaft zu nehmen. So verbreitete sich auch die Idee einer Null, die in Indien im vorangegangenen Jahrhundert eingeführt wurde, in China. Es dauerte jedoch noch weitere 600 Jahre bis die Null erstmals in chinesischen Büchern gedruckt wurde. (vgl. Menninger 1979 und Wußing 2008)

Die Null wurde somit in die Sangi-Zahlenschrift aufgenommen, wie in Abbildung 3.2.1 m zu sehen ist, und auch in die restlichen Schriftsysteme integriert. In Abbildung 3.2.1 n sind die wichtigsten unterschiedlichen chinesischen Zahlschriften angeführt, deren Ziffern auch gerne untereinander vertauscht werden, da alle Zahlendarstellungen demselben Prinzip folgen. Auch die indischen Ziffern wurden und werden in China benutzt. Durch ihre internationale Wichtigkeit lösten sie sogar 1955 die chinesischen Amtsziffern ab. (vgl. Menninger 1979)

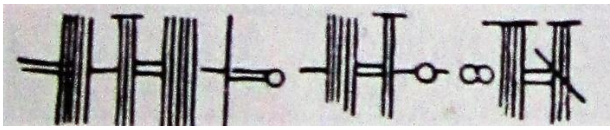


Abbildung 3.2.1 m: 2 518 251 120 und -152 710 100 928 (da die letzte Ziffer durchgestrichen ist, handelt es sich um einen negative Zahl) als Sangi-Zahlen (Menninger 1979, Seite 184)

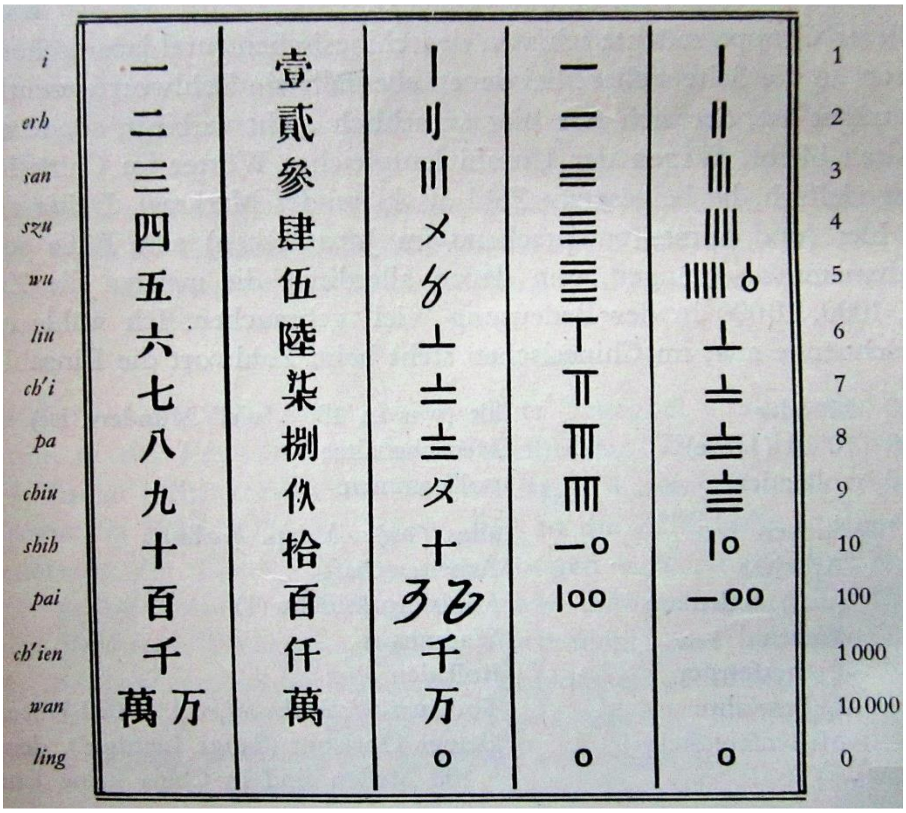


Abbildung 3.2.1 n: *Chinesische Zahlschriften in Spalten (von links nach rechts): die Grundziffern, die Amtsziffern, die Handelsziffern und zwei Arten der Strichziffern (Menninger 1979, Seite 274)*

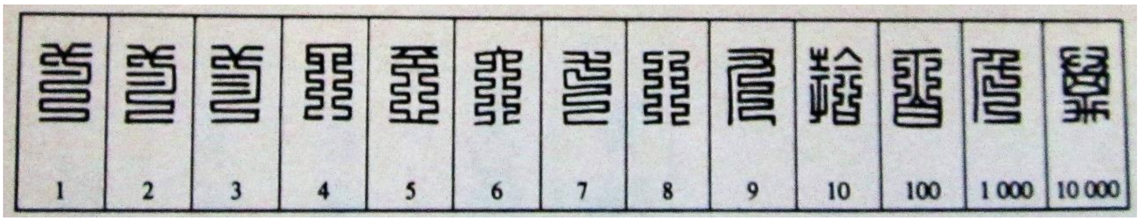


Abbildung 3.2.1 o: Weitere chinesische Zahlschrift: eine kalligraphische Zahlschrift, die noch heute für Unterschriften und Siegel gebraucht wird (Ifrah 1986, Seite 390)

Doch nicht nur die indischen Ziffern wurden in China angenommen, auch die, einfacheren, indischen Rechenmethoden wurden übernommen, wenngleich sie oft mit chinesischen Ziffern ausgeführt wurden und werden. Neben dem vereinfachten schriftlichen Rechnen wurde auch das Brettrechnen weiterentwickelt: Weitreichende Handelsbeziehungen brachten China in Kontakt mit dem römischen Abakus (dieser wird im Zuge der europäischen Zahlengeschichte vorgestellt), nach dessen Vorbild im zwölften Jahrhundert der sogenannte *Suan-pan* (wörtlich Rechenbrett) in China erfunden wurde. (vgl. Martzloff 1997 und Menninger 1979)

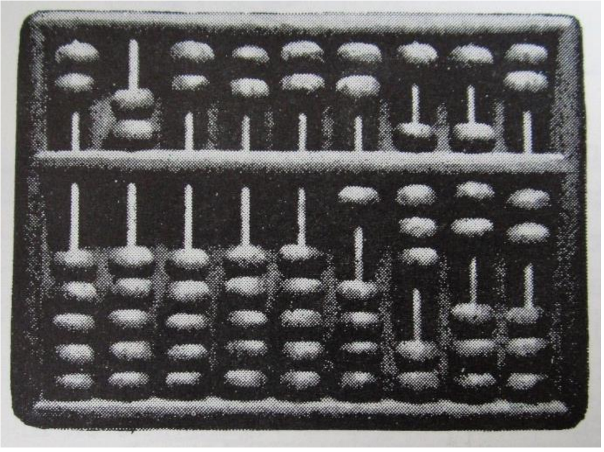


Abbildung 3.2.1 p: Chinesisches Kugel-Rechenbrett, auf dem die Zahl 100 001 872 ausgerechnet wurde (Menninger 1979, Seite 118)

Der Suan-pan, der meist aus Holz gefertigt ist, besteht aus nebeneinander aufgespannten Drähten, auf denen sich Kugeln befinden. Durch einen Balken wird das Brett in zwei Zeilen unterteilt: In der oberen Zeile sind jeweils zwei Kugeln auf jedem Draht aufgefädelt und in der unteren sind es jeweils fünf Kugeln. In der Spalte ganz rechts wird die Anzahl der Einer angegeben, in der darauf folgenden Spalte links daneben die Anzahl der Zehner und so fort. Dazu wird die passende Anzahl an Kugeln an den Mittelbalken geschoben, wobei jede Kugel in der oberen Zeile für fünf Einheiten steht. In der oberen Zeile würde folglich jeweils eine Kugel und in der unteren Zeile würden jeweils 4 Kugeln ausreichen. Die zusätzlichen Kugeln wurden angebracht um das Rechnen zu vereinfachen, so müssen Stellensprünge bei berechneten Ergebnissen nicht sofort ausgeführt werden, sondern können später „bereinigt“ werden (so wie beispielsweise in Abbildung 3.2.1 p: zwei fünfwertige Kugeln befinden sich an der zehn-Millionen-Stelle, statt einer ein-wertigen Kugel an der 100-Millionen-Stelle). (vgl. Ifrah 1986)

Mit dem in Abbildung 3.2.1 p gezeigten Brett können Zahlen bis eine Milliarde dargestellt werden. Die Spalte ganz rechts des Suan-pan steht jedoch nicht zwingend für die Anzahl der Einer, sie könnte beispielsweise auch für die Anzahl der Hundertstel zur Verfügung stehen. Auf manchen Rechenbrettern gibt es daher eine markierte Spalte für die Einer, die die Anzahl der Dezimalen genau festlegt. (vgl. Menninger 1979)

Der Suan-pan war von seiner Erfindung an eine große Rechenhilfe, da damit schneller als mit dem Stäbchen-Rechenbrett gerechnet werden konnte. Geübte Suan-pan-Rechnende konnten mit dem Brett ebenfalls schneller als schriftlich rechnen, sodass selbst die ersten Computer diese Rechengeschwindigkeit nicht übertreffen konnten. Auch heute wird diese altbewährte Rechenhilfe noch im ländlichen China verwendet. (vgl. Haarmann 2008 und Menninger 1979)

Neben dem europäischen Abakus kamen im vergangenen Jahrtausend noch weitere Einflüsse westlicher Mathematik nach China. Vor allem vom 13ten bis zum 15ten Jahrhundert herrschte ein reger Austausch mit zentralasiatischen und persischen Astronomen. (In dieser Zeit kam ebenfalls Marco Polo nach China. Nach seiner Rückkehr wollten ihm seine Landsleute in Italien die Erzählungen vom fortschrittlichen asiatischen Land jedoch nicht glauben). Ab dem 16ten Jahrhundert kamen einige jesuitische Missionare und brachten neben ihrer Religion auch europäische Mathematikkenntnisse nach China. Die Missionierung misslang, dafür wurden mathematischen Errungenschaften in der chinesischen Mathematik aufgenommen. (Wobei einige griechische Werke den Chinesen und Chinesinnen zu Beginn eher zu praxisfern waren.) Abbildung 3.2.1 q zeigt eine solche mathematische Errungenschaft: Eine Logarithmentafel, die chinesische Ziffern (inklusive einer Null) enthält, jedoch waagrecht geschrieben ist. (vgl. Menninger 1979 und Wußing 2008)

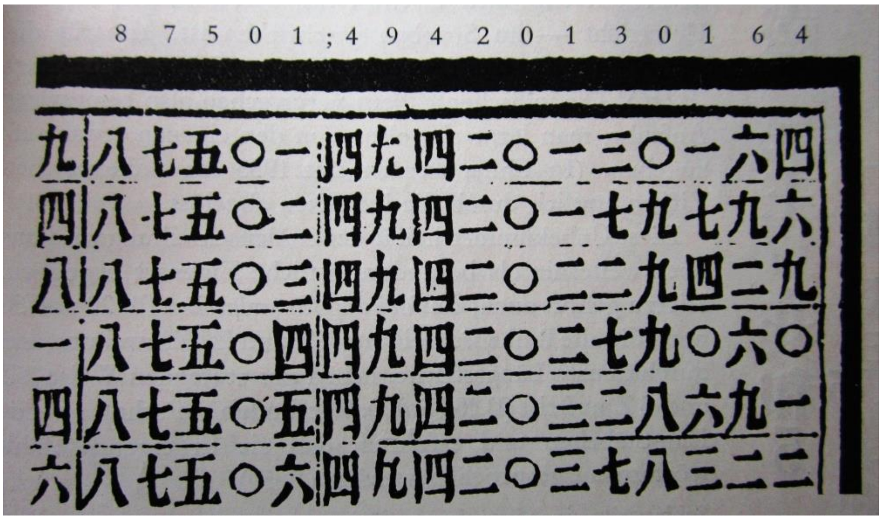


Abbildung 3.2.1 q: Ausschnitt einer Logarithmentafel von 1633, die einer holländischen nachempfunden ist; die erste Zeile trägt die Bedeutung „log(87501) = 4,9420130164“ (Menninger 1979, Seite 279)

Gegen Ende des 19ten Jahrhunderts begannen sich schließlich auch internationale Symbole und Bezeichnungen in China durchzusetzen. Außerdem ist seit der Ausrufung der chinesischen Republik ein fortwährender wissenschaftlicher Austausch mit Europa und Amerika in Gang. (vgl. Wußing 2008)

Trotz der Integration äußerer Einflüsse hat sich auch die jahrtausendealte chinesische Zahlentradition gehalten. Des Weiteren hat sie unter anderem die Zahlenschreibung in Japan und Korea maßgeblich beeinflusst. (vgl. Menninger 1979 und Haarmann 2008)

Auf die japanische Zahlengeschichte wird nun im nächsten Kapitel eingegangen.

3.2.2 Japan

600 v. Chr.	Japan wird als Kaiserreich gegründet
400 n. Chr.	Chinesische Schrift wird übernommen
nach 600	Japan wird Beamtenstaat, der Hofadel steigt auf
nach 1200	Feldherren (Schogun) sind eigentliche Machthaber und haben Samurai als Lehnsleute
1542 / 1543	Japan wird von portugiesischen Seefahrern entdeckt; es folgen christliche Missionare, Holländer und Engländer
1637	Japan wird durch das Schogunat von der Außenwelt abgeschlossen, nur

	mit Holland wird eine kleine Handelsmission fortgeführt
nach 1700 / 1800	Eine eigenständige, reiche Kultur entwickelt sich: Wasan-Mathematik
1853 / 1854	Japan wird vom amerikanischen Kommodore Perry für die USA als Handelspartner geöffnet
1867 / 1868	Durch die Meiji-Reformation wird das Schogunat von einer Monarchie abgelöst: darauf folgte eine große Weiterentwicklung und der Anschluss an die Weltwissenschaft und die Mitwirkung bei dieser durch regen internationalen Austausch
1894	Chinesisch-japanischer Krieg
1904	Russisch-japanischer Krieg
1941-1945	Japan involviert sich durch den Angriff auf Pearl Harbour in den zweiten Weltkrieg 1945 Atombombenangriffe auf Hiroshima und Nagasaki
ab 1950	Japan steigt zur modernen Wirtschaftsmacht auf

Tabelle 3.2.2 a: Chronologische Kurzübersicht über geschichtliche Eckdaten Japans (vgl. Wußing 2008)

Die Datierungen der japanischen Frühgeschichte gehen auseinander. Um das dritte oder vierte Jahrhundert vor Christus wanderten Stämme vom Festland auf den japanischen Inseln ein und verdrängten die Ureinwohner nach Norden. Die Einwanderer besaßen bereits Geräte aus Metall und betrieben Nassfeldanbau. Manche Quellen sagen nun, dass bereits 600 Jahre vor Beginn unserer Zeitrechnung ein japanische Kaiserreich gegründet wurde, mit Sicherheit weiß man jedoch nur, dass ein japanischer Staat um 350 nach Christus existierte. (vgl. Wußing 2008)

Etwa im dritten Jahrhundert vor Christus kamen erstmals chinesische Schriftzeichen nach Japan, wodurch einige Adelige begannen Lesen und Schreiben zu lernen. Auch ein dezimales Zahlensystem war in dieser Zeit bereits bekannt und es konnten hohe Zehnerpotenzen ausgedrückt werden. Des Weiteren besaßen die Japaner und Japanerinnen einen Kalender und ein Maßsystem, von dem man jedoch nicht weiß, wie damit gerechnet wurde. (vgl. Wußing 2008)

380 nach Christus versuchte Japan sein kriegerisches Glück in Korea und kam aus diesem Grund erneut mit dem chinesischen Schrifttum in Kontakt. Obwohl das Chinesische und das Japanische keineswegs sprachverwandt sind, wurde die japanische Kultur stark von der chinesischen geprägt, vor allem durch ihre (Zahl-)Schrift. So werden auch heute noch einige chinesische Schriftzeichen in Japan benutzt, auch wenn diese in Japan andere Bedeutungen haben. Auf Grund des Sprachunterschiedes konnte eine eigene japanische Schrift entwickelt werden, eine Silbenschrift – an Hand von 50 verschiedenen Schriftzeichen, die je für eine eigene Silbe stehen, können alle Wörter niedergeschrieben werden. Außerdem unterscheiden sich, anders als im Chinesischen, Wort- und Zahlschrift: Es gibt also Schriftzeichen für die einzelnen Ziffern, aber auch die Wortschrift mit der eine Zahl ausgeschrieben werden kann,

unter anderem vergleichbar mit der lateinischen Schrift (zum Beispiel „37“ und „siebenunddreißig“). (vgl. Menninger 1979 und Wußing 2008)

Grundsätzlich wurde im Japanischen eine eigene Zählreihe entwickelt, doch durch den Einfluss Chinas wurden über die Zeit die chinesischen Zahlzeichen übernommen und chinesische Zahlwörter entlehnt, welche man sino-japanisch nennt. In Abbildung 3.2.2 a ist eine Tabelle der japanischen Zählreihen zu sehen, wobei heute nur mehr die ersten 13 rein japanischen Zahlwörter in Gebrauch sind und sich diese je nach Kontext mit den sino-japanischen Zahlwörtern abwechseln. So werden die ursprünglichen japanischen Zahlen beispielsweise bei Datumsangaben zur Angabe des Tages in einem Monat verwendet oder für das Zählen von konkreten Objekten. (vgl. Haarmann 2008 und Menninger 1979)

	chinesisch	japanisch rein	japanisch sino-japanisch
1	*i*[1]	*hito-tsu*	*ichi*
2	*erh*	*futa-*	*ni*
3	*san*	*mi-*	*san*
4	*szu*	*yo-*	*shi*
5	*wu*	*itsu-, i-*	*go*
6	*liu*	*mu-*	*roku*
7	*ch'i*	*nana-*	*shichi*
8	*pa*	*ya-*	*hachi*
9	*chiu*	*kokono-*	*ku*
10	*shih*	*to (-so-)*	*ju*
11	*shih-i*		*ju-ichi*
12	*-erh*		*-ni*
20	*erh-shih*	[*hata-chi*	*ni-ju*
30	*san-*	*mi-so-ji*	*san-*
40	*szu-*	*yo-so-*	*shi-*
50	*wu-*	*i-so-*	*go-*
60	*liu-*	*mu-so*	*roku-*
70	*ch'i-*	*nana-so-*	*shichi-*
80	*pa-*	*ya-so-*	*hachi-*
90	*kiu-*	*kokono-so-*	*ku-*
100	*pai*	*momo, (ho)*	*hyaku*
1000	*ch'ien*	*chi*	*sen*
2000	*erh-ch'ien*		*ni-sen*
10000	*wan*	*yorozu*]	*man, ban*
10^5	*shi-wan*		*ju-wan*

Abbildung 3.2.2 a: Übersicht über japanische und chinesische Zahlwörter (Menninger 1979, Seite 267)

Neben der Aufnahme der chinesischen Zahlensymbole wurde ebenfalls das Prinzip der Zahlschreibung zur Gänze übernommen, so auch das Rangschwellensystem und die besondere Bedeutung der Rangschwelle 10 000 (vergleichbar mit der Bedeutung von 1 000 im europäischen Raum). Im Japanischen wurde außerdem, entsprechend der chinesischen Schrift, von oben nach unten und die Spalten von rechts nach links geschrieben (wobei Zahlen mittlerweile auch waagrecht geschrieben werden können). Es kamen alle chinesischen Zahlschriften (siehe Abbildung 3.2.1 n im vorangegangenen Unterkapitel) in Verwendung, sowie später, nach dem Eindringen der indischen Zahlschrift, auch diese. (vgl. Haarmann 2008 und Menninger 1979)

In der Mitte des sechsten Jahrhunderts wurde durch Korea der Buddhismus auch auf den japanischen Inseln populär und koreanische Priester brachten zugleich astronomisches Wissen aus China mit. In den folgenden Jahrhunderten wurden einige Errungenschaften der chinesischen Wissenschaft übernommen, wie die Zeitrechnung (die zu Beginn den Tag in 100 Stunden teilte), das Kalenderwesen, Maßsysteme und das Brettrechnen mit Rechenstäbchen. (vgl. Wußing 2008)

Unter der Kaiserin Suiko, die Anfang des siebenten Jahrhunderts herrschte, wurden der Buddhismus und das Lernen gefördert. Daraufhin wurde um 701 eine Art Universitätssystem eingeführt, das vor allem auf chinesische Lehrbücher zurückgriff. Dabei war Mathematik ein wichtiger Bestandteil dieses Bildungssystems. Jedoch anders als in China galt die Mathematik und Rechenkunst nicht nur als Mittel zur Lösung angewandter Problemstellungen oder Wissensgenerierung in der Naturwissenschaft. In den mittleren Gesellschaftsschichten, wie der Samurai-Kaste, war kaufmännisches Rechnen (und später der Gebrauch des Kugelrechenbrettes) sogar verpönt. Stattdessen schätzten die Samurai den intellektuellen Wert der Mathematik und nutzen ihn um sich in ihrer Freizeit geistig fit zu halten. (vgl. Wußing 2008)

Ferner wurden wissenschaftliche Erkenntnisse aus Europa, die im 16ten Jahrhundert durch den ersten Kontakt mit europäischen Handelsleuten und Missionaren nach Japan kamen, kaum beachtet. Zudem beschlossen die herrschenden Feldherren 1639 Japan von der Außenwelt abzuschotten und keinen Handel (mit Ausnahme der Handelsbeziehung zu den Niederlanden) mehr zuzulassen. In dieser Zeit kam es zur Renaissance der Mathematik Japans: Es entwickelte sich die sogenannte *Wasan*-Kultur (*Wasan* kann mit „japanische Mathematik“ übersetzt werden) die von den intellektuellen Samurai zur Schulung des Geistes und zur Unterhaltung geschaffen wurde. So wurden beispielsweise bei Tempeln geschmückte Holztafeln aufgestellt, die Denksportaufgaben enthielten, magische Quadrate (wie dem heute international bekannten Sudoku) und Kreise erstellt, sowie genauere Näherungswerte für die Kreiszahl Pi berechnet. (vgl. Wußing 2008)

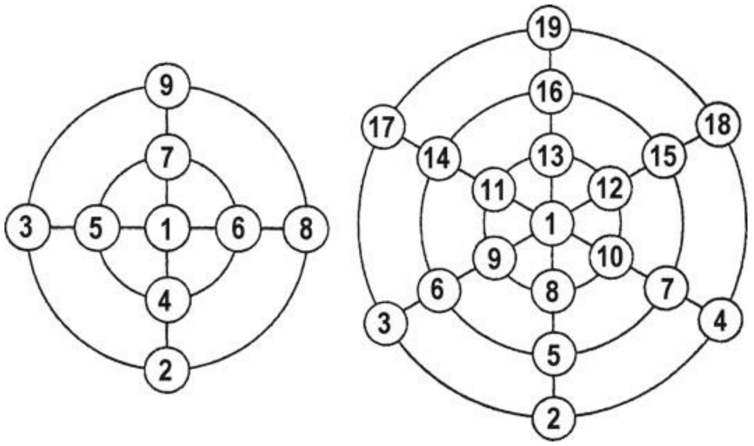


Abbildung 3.2.2 b: Zwei einfache magische Kreise: die Summen der, in den Diagonalen stehenden, Zahlen ist jeweils gleich sowie die Zahlensummen in den einzelnen Kreisbögen (Wußing 2008, Seite 74)

Im 17ten Jahrhundert wurde außerdem der chinesische Suan-Pan in Japan eingeführt (welcher von den intellektuellen Japanern und Japanerinnen zuerst nicht sehr angesehen war). Das japanische Kugelrechenbrett wurde *Soroban* genannt und unterlag im Laufe der Zeit kleinen Veränderungen im Vergleich zum chinesischen: In der Mitte des 19ten Jahrhunderts wurde die zweite fünf-wertige Kugel in der oberen Zeile weggelassen und etwa 100 Jahre später wurde auch die fünfte Kugel der unteren Zeile eingespart. Dadurch war noch mehr Fingerfertigkeit gefragt als beim ursprünglichen Suan-Pan. (vgl. Ifrah 1986 und Wußing 2008)

Abbildung 3.2.2 c: Ein japanischer Soroban, auf dem die Zahl 123 456 890 eingestellt wurde ([Link 6])

Die japanische Mathematik wurde in privaten Schulen weitergegeben, im Gegensatz zum chinesischen System der staatlichen Ausbildung, und es herrschte Neid, wenn von anderen Personen mathematische Fortschritte erzielt werden konnten. Errungenschaften der Außenwelt wurden kaum beachtet, da der naturwissenschaftliche Nutzen der Mathematik die japanischen Mathematiker und Mathematikerinnen kaum interessierte, da sie die Mathematik hauptsächlich als hohe Kunst ansahen. (vgl. Wußing 2008)

Seit der Isolation Japans durch das Schogunat gelangten auch nur selten internationale Erkenntnisse auf die japanischen Inseln; höchstens durch die wenigen christlichen Missionare, die dort tätig waren, oder durch chinesische Schriften, welche westlich beeinflusst waren. Diese Situation änderte sich jedoch schlagartig durch die gewaltsame „Öffnung" Japans 1853 für Amerika und die, 14 Jahre darauf durchgeführte, *Meiji*-Reformation: Das japanische Feudalsystem wurde durch eine konstitutionelle Monarchie ersetzt und in Japan kam es zum Bruch mit der selbstständig erarbeiteten Wissenschaft. Unter anderem wurde das Soroban-Rechnen vom schriftlichen Rechnen mit indischen Ziffern abgelöst, die Zeitrechnung wurde auf den gregorianischen Kalender umgestellt und es wurde versucht, so schnell als möglich Anschluss an die internationale Wissenschaft zu finden. (vgl. Menninger 1979 und Wußing 2008)

Die Adaption an die Weltwissenschaft funktionierte sehr gut – so fuhr etwa in Japan die erste Eisenbahn bereits fünf Jahre nach der Meiji-Reformation. Auch in anderen Bereichen hatte Japan den internationalen Wissenschaftsstand schnell aufgeholt und konnte schon bald selbst Erkenntnisse für die Weltwissenschaft liefern. (vgl. Wußing 2008)

Um 1930 begann die japanischen Handels- und Industriekammer überraschender Weise das beinahe vergessene Rechnen mit dem Soroban wieder zu fördern: In der Schule wurde es erneut gelehrt und jährliche wurden Wettkämpfe und Prüfungen organisiert (1942 nahmen beispielsweise etwa 40 000 Personen an einem solchen Rechen-Wettkampf teil). Selbst das Auftreten elektronischer Rechenmaschinen, stoppte diese Förderung nicht. (vgl. Menninger 1979)

Als amerikanische Soldaten 1945 nach der Kapitulation Japans im zweiten Weltkrieg auf den japanischen Inseln einrückten, empfanden sie das Rechnen mit dem Kugelrechenbrett als sehr rückständig und organisierten einen rechnerischen Wettkampf um die Fortschrittlichkeit ihrer Rechenmaschinen zu demonstrieren. Es traten ein Amerikaner und ein Japaner gegeneinander an, die die elektrische Rechenmaschine beziehungsweise den Soroban sehr gut und schnell bedienen konnten. Gestellt wurden verschiedene Aufgaben, bei denen drei- bis zwölf-stellige Zahlen zu addieren, subtrahieren, multiplizieren oder dividieren waren. Von fünf Aufgabenbereichen gewann der Amerikaner nur in einem und der Japaner in den restlichen. Die Demonstration der amerikanischen Fortschrittlichkeit scheiterte also kläglich. (vgl. Ifrah 1986 und Menninger 1979)

Nach 1950 schaffte es Japan zur modernen Wirtschaftsmacht aufzusteigen und glänzt auch heute noch mit mathematischen Leistungen. (vgl. Wußing 2008)

Das nächste Unterkapitel widmet sich einem asiatischen Land, das die internationale Mathematik auf eine ganz andere Art und Weise geprägt hat.

3.2.3 Indien

nach 3000 v. Chr.	Hochkulturen, unter anderem Harappa-Kultur, um den Indus Fluss im heutigen Pakistan: Besitz einer Schrift und Zahlenschreibweise
nach 1500 v. Chr.	Indogermanische Arier (Indoarier) wandern aus dem Nordwesten ein und unterdrücken Einheimische
900-600 v. Chr.	Erste Staatsgründungen unter strenger Hierarchie von 4 Kasten, es herrscht die Kaste der Krieger und Priester (Brahmanen): Die brahmanische Sprache der Gelehrten (Sanskrit) entsteht
um 600-500 v. Chr.	Siddharta Gautama Buddha lebt von 560 bis 483: eine gesicherte Zeitrechnung setzt ein Entstehung des Buddhismus, Jainismus und Hinduismus: Religionen mit Schwerpunkt des moralischen Lebenswandels im Gegensatz zum Brahmanismus Nordwest-Indien gehört zum persischen Reich: Aramäische Sprache und Schrift kommen nach Indien
327-325 v. Chr.	Alexander der Große ist am Indus
322-184 v. Chr.	Maurya-Dynastie: Es gibt die indische Kharosthi-Schrift, sowie -Ziffern (mit Ähnlichkeit zur aramäischen Schrift)
272-236 v. Chr.	Kaiser Ashoka Maurya errichtet großes Reich über fast ganz Indien, Buddhismus ist Staatsreligion: Älteste Belege der Brahmi-Schrift und -

	Ziffern
184 v. Chr. – 320 n. Chr.	In Nordwest-Indien herrschen verschiedene Staaten: Mathematik und Astronomie erfahren hellenistischen Einfluss
320-544 n. Chr.	Großreich der Gupta-Dynastie: Kunst und Wissenschaft erleben goldenes Zeitalter, etwa gegen Ende der Dynastie wird das dezimale Positionssystem mit Null erfunden
5. – 12. Jh.	Es gibt viele Dynastien in mehreren Kleinstaaten: Blütezeit der Mathematik; dezimales Positionssystem mit Null etabliert sich in ganz Indien Orthodoxer Hinduismus entsteht Der Islam dringt nach Indien vor, gefolgt von zerstörerischen Raubzügen des Mahmud von Ghazna
1206-1828	Großreich der Mogul-Dynastie: Sultanat von Delhi ist 1206-1508 in Nordindien Eine christliche Gemeinde wird in Goa aufgebaut
1600	Die East Indian Company wird gegründet: Kultureller Einfluss kommt aus Westeuropa
1858	England macht Indien zur Kolonie: Englisch wird Verwaltungs- und Bildungssprache
1947	Indien wird unabhängig, sowie Indien und Pakistan werden geteilt

Tabelle 3.2.3 a: Chronologische Kurzübersicht über geschichtliche Eckdaten Indiens (vgl. Gericke 1984, Menninger 1979 und Wußing 2008)

Die ersten sesshaften Kulturen Indiens lebten im vierten Jahrtausend vor Christus am Unterlauf des Flusses Indus, aus der sich im darauf folgenden Jahrtausend eine Hochkultur im Nordwesten um den Indus (im heutigen Pakistan) entwickelte. Es gab Städte mit einem orthogonalen Straßen- und einem durchdachten Kanalisationssystem. Auch Handwerk und Handel waren sehr fortschrittlich, es bestanden Handelsbeziehungen unter anderem bis nach Mesopotamien, Zentralasien und Arabien. In der nachfolgenden Abbildung werden die Gebiete der Hochkulturen bis 544 nach Christus gezeigt. (vgl. Wußing 2008)

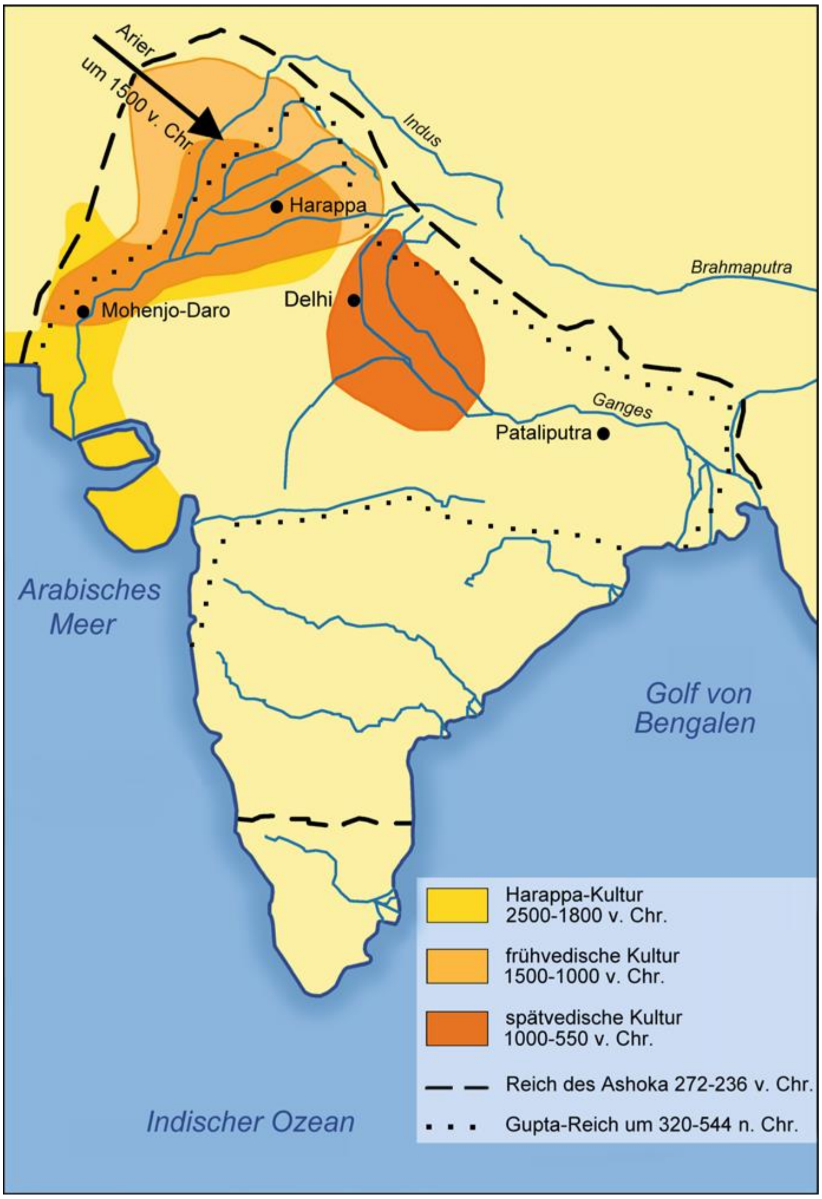


Abbildung 3.2.3 a: Unterschiedliche indische Kulturen und Reiche bis zum Mittelalter (Wußing 2008, Seite 83)

Die frühen indischen Hochkulturen besaßen bereits eine eigene Schrift (die noch heute zu entziffern versucht wird) und eine eigene Zahlendarstellung. So wurden die Ziffern eins, zwei, drei und vier anhand einer Gruppe aus vertikalen Kerben festgehalten, fünf, sechs und sieben wurden durch zwei waagrecht oder senkrecht gekerbte Gruppen dargestellt und neun mit Hilfe drei vertikal gekerbter Gruppen. Für die Ziffer acht wurde interessanter Weise kein Repräsentant gefunden und nach welchem Prinzip das Zahlensystem funktionierte konnte ebenfalls noch nicht herausgefunden werden. (vgl. Wußing 2008)

In der indischen Geschichte gibt es mehrere Ungewissheiten, da die Inder und Inderinnen „keinen Sinn für Geschichte“ (Wußing 2008, Seite 84) hatten. Zum einen gab es unter der Herrschaft der Brahmanen, circa ab 1500 vor Christus, eine gewisse Schreibfeindlichkeit und zum anderen wurden Werke oft nicht mit dem Namen des Autors beziehungsweise der Autorin versehen sondern zum Teil mit dem Namen eines Gottes oder Menschen aus der

Vorzeit. Des Weiteren beginnt die gesicherte indische Zeitrechnung erst mit dem Leben Buddhas um 500 vor Beginn unserer Zeitrechnung. (vgl. Menninger 1979 und Wußing 2008)

Wie in Tabelle 3.2.3 a zu lesen ist, kamen indoarische Stämme in der zweiten Hälfte des zweiten Jahrtausends vor Christus nach Indien und unterdrückten die indischen Einheimischen indem sie diese der, hierarchisch gesehen, untersten Kaste zuordneten. Es herrschte in der Folgezeit die Kaste der Krieger und Priester, kurz der Brahmanen, die das Volk von Bildung fern hielt. In dieser Zeit entstand die brahmanische Gelehrtensprache, der Sanskrit, die sich noch bis heute als Sprache der Wissenschaft halten konnte, jedoch nicht mehr vom Volk gesprochen wird. Im Sanskrit wurden für die ersten 50 Zahlen neben eigenen Zahlwörtern auch symbolhafte Wörter aus Tradition, Natur und Mythologie, mit eigentlich anderer Bedeutung, benutzt: Beispielsweise konnten die indischen Wörter für Augen, Arme, die Zwillingsgötter und einige mehr auch für die Zahl zwei stehen. (vgl. Ifrah 1986, Menninger 1979 und Wußing 2008)

Die Brahmanen hatten vor allem Interesse an der Mathematik, um für religiöse Zwecke Altäre und Opferplätze nach konkreten Vorschriften bauen zu können. Aus diesem Grund entwickelten sie die sogenannten Schnurregeln oder *Sulbasutras* (von *sulba*, bedeutend Messkunst), mit deren Hilfe unter anderem rechte Winkel durch rechtwinkelige Dreiecke beziehungsweise pythagoreischen Tripel konstruiert werden konnten. Es war folglich der Satz von Pythagoras bekannt und des Weiteren wurden bereits Näherungswerte für Pi und die Quadratwurzel aus zwei berechnet. (vgl. Gericke 1984 und Wußing 2008)

Im sechsten Jahrhundert vor Christus entstand der Buddhismus in Indien, der ein Gegenstück zur ausschließlichen Religion der Brahmanen bildete und im Gegensatz zu dieser ein reiches Schrifttum pflegte. Um diese Zeit gehörte außerdem Nordwest-Indien zum persischen Reich, wodurch die aramäische Sprache und Schrift nach Indien kamen. In der Folgezeit kam Indien, Dank der kurzen Herrschaft Alexanders des Großen über das persische Reich im vierten Jahrhundert vor Christus, in Kontakt mit hellenistischer Wissenschaft und somit auch in Kontakt mit ägyptischen, babylonischen und syrischen Erkenntnissen. (vgl. Menninger 1979 und Wußing 2008)

Während der Maurya-Dynastie von 322 bis 184 vor Christus kamen vermutlich die ersten beiden indischen Buchstabenschriften auf, die *Kharosthi*- und die *Brahmi*-Schrift. Beide Schriften enthielten ebenfalls Zahlzeichen, wobei die Kharosthi-Schrift Ähnlichkeiten zur aramäischen Schrift aufwies und ihre Zahlen durch Bündelung zu jeweils vier, zehn und 20 Einheiten aufgebaut war, siehe Abbildung 3.2.3 b. Im Gegensatz dazu bestand die Brahmi-Zahlschrift aus einzelnen Ziffern und, mit Ausnahme der Vielfachen von zehn (die mit individuellen Schriftzeichen verziffert wurden), funktionierte sie als benannte Stellenschrift (vergleichbar mit der chinesischen Zahlschrift), siehe Abbildung 3.2.3 c. Die Kharosthi-Schrift ging im Laufe der Geschichte verloren, wo hingegen die Brahmi-Schrift Grundlage aller weiteren indischen Schriften wurde. (vgl. Gericke 1984 und Menninger 1979)

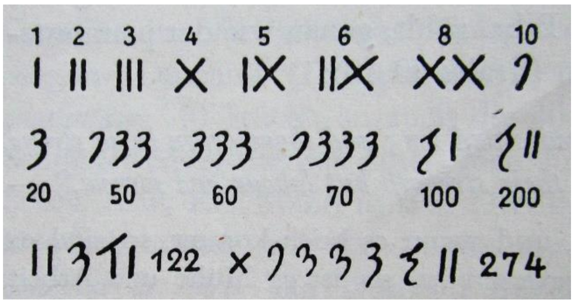


Abbildung 3.2.3 b: Die Zahlzeichen der Kharosthi-Zahlschrift und zwei Beispiele ihrer Zahlendarstellung (Menninger 1979, Seite 62)

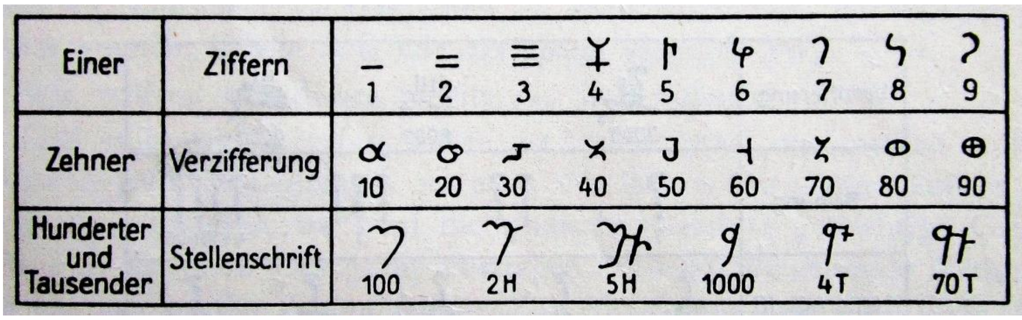


Abbildung 3.2.3 c: Die Brahmi-Zahlschrift (Menninger 1979, Seite 209)

Die beiden ersten Buchstabenschriften unterschieden sich außerdem durch ihren Verlauf: Während die Kharosti-Schrift linksläufig war, also von rechts nach links geschrieben und gelesen wurde, war die Brahmi-Schrift rechtsläufig. Des weiteren wurden „Brahmi-Zahlen“ mit der kleinsten Einheit beginnend aufgeschrieben. Die Zahl 6 389 wäre also nach folgendem Prinzip geschrieben (und ausgesprochen) worden:

> neun achtzig drei Hundert sechs Tausend, beziehungsweise
> 9 + 80 + 3·100 + 6·1000

oder in Symbolworten zum Beispiel so:

> „Planeten“ „Die (acht) Gestalten Shivas“ Zehn „Die drei Welten“ Hundert „Die (sechs) Geschmacksarten“ Tausend.

(vgl. Ifrah 1986 und Menninger 1979)

Das Festhalten von Zahlen durch Symbolworte war in Indien sehr üblich, auch in wissenschaftlichen Texten und sogar mathematischen Lehrbüchern wurden sprachliche Sinnbilder zur Zahlenangabe verwendet. Wissenschaftliche Texte wurden des Weiteren in Versen formuliert und die symbolhafte Zahlschrift ließ die freie Wahl eines zum Vers passenden synonymen Zahlwortes zu. Die in Lehrbüchern verwendete Versform sollte den Lernenden helfen sich den Inhalt leichter zu merken. Auch, als das unkomplizierte Positionssystem mit Null erfunden wurde, wurden Zahlen in mathematischen Schriften weiterhin durch Sinnbilder ausgedrückt anstatt durch Ziffern, was vermutlich auch durch die Schriftkonvention des Sanskrit motiviert wurde. (vgl. Gericke 1984 und Ifrah 1986)

Das fortschrittliche, eben erwähnte, Stellensystem mit Null wurde voraussichtlich um das Ende der Gupta-Dynastie, in der ersten Hälfte des sechsten Jahrhunderts unserer Zeitrechnung, erfunden. Es bestand aus den Brahmi-Ziffern eins bis neun und einem Punkt oder später einem kleinen Kreis für die Null und wurde bereits zu Beginn in der, auch heute in Europa gebräuchlichen, Reihenfolge aufgeschrieben: von der höchsten Zehnerpotenz bis zur niedersten, also genau entgegengesetzt zur herkömmlichen Brahmi-Zahlschrift. Die Vorteile dieser, heute kurz „indische Zahlschrift“ genannten, Erfindung waren und sind überzeugend: Anhand von nur zehn unterschiedlichen Ziffern kann jede beliebige Zahl dargestellt werden und mit diesen Zahlen kann unter Kenntnis des Einmaleins sehr einfach schriftlich gerechnet werden. Aus diesen Gründen etablierte sich das Zahlensystem im Laufe der Zeit in fast allen Kulturen und ist heute eine auf der ganzen Welt verbreitete Zahlschrift. (vgl. Ifrah 1986 und Menninger 1979)

Wie man in Indien auf diese bedeutende Zahlendarstellung kam, kann wegen mangelnder Quellen nicht genau gesagt werden. Ifrah (1986) nennt dazu drei Theorien: Auf Grund des griechischen Einflusses, der unter anderem in den Jahrhunderten um Beginn unserer Zeitrechnung verstärkt auf die indische Mathematik und Astronomie wirkte, kam Indien mit astronomischen Texten aus Babylon in Kontakt sowie mit ihrem Zahlensystem, ein Positionssystem zur Basis 60, das in seinem späten Stadium sogar ein Zeichen für Null kannte. Die erste Theorie besagt somit, dass das indische Zahlensystem durch Anpassung des babylonischen Zahlensystems an die Basis Zehn entstanden ist. (vgl. Ifrah 1986 und Menninger 1979)

Als weitere Hypothese gibt Ifrah (1986) eine Beeinflussung durch chinesische Strichziffern an (vgl. Abbildung 3.2.1 k und 3.2.1 l), denen eventuell indische Ziffern nachgebildet wurden.

Als plausibelste und dritte Theorie wird das Benutzen des indischen Rechenbrettes angeführt. Dank historischer Quellen aus anderen Ländern, ist bekannt, dass auch in Indien Rechenbretter, neben dem Rechnen mit Fingern, Kieselsteinen oder anderen kleinen Gegenständen, als Rechenhilfe benutzt wurden. Diese Rechenhilfen waren ähnlich dem chinesischen Stäbchen-Rechenbrett: In Spalten, die für die jeweiligen Zehnerpotenzen standen, wurden die Anzahlen der Einer, Zehner, Hunderter, et cetera eingetragen, wobei die Spalte ganz rechts für die Einer stand (dem chinesischen Rechenbrett entsprechend und konträr zur Darstellung von Zahlen in der Brahmi-Zahlschrift). Dafür wurden in Indien jedoch keine Stäbchen gelegt, sondern die Brahmi-Ziffern der ersten neun Zahlen verwendet. (vgl. Ifrah 1986 und Menninger 1979)

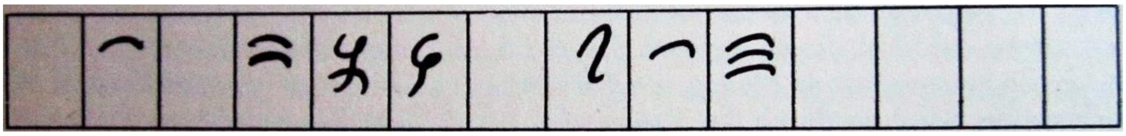


Abbildung 3.2.3 d: Die Zahl 1 024 607 130 000 am indischen Rechenbrett (Ifrah 1986, Seite 510)

Als Rechenbretter dienten der mit Sand bestreute Boden, ein mit Sand bestreutes Brett, eine mit Wachs überzogene Tafel oder eine Art Schiefertafel, auf der mit Kreide geschrieben wurde. (Der indische Begriff *dhuli-karma*, wörtlich übersetzt „Sandarbeit“, steht für „höhere Rechenkunst“ und leitet sich vom mit Sand überzogenen Rechenbrett ab.) Subtrahiert und addiert wurde durch Aufschreiben der Zahlen untereinander und durch spaltenweises Ausrechnen, Wischen und Neuschreiben des Ergebnisses. Die Niederschrift des Ergebnisses erfolgte sodann mit Hilfe der klassischen Brahmi-Zahlschrift, durch Sinnbilder oder im Laufe der Zeit in der Form, in der das Ergebnis am Rechenbrett stand: mit den ersten neun Brahmi-Ziffern und einem Zeichen für eine Leerstelle, einer Null. (vgl. Ifrah 1986 und Menninger 1979)

Menninger (1979) merkt dazu an, dass die Erfindung des noch heute fundamentalen Zahlensystems wohl ein Zusammenspiel aus verschiedenen äußeren Anregungen und eigener Kreativität gewesen ist. Ein Zeichen für Null in Form eines kleinen Kreises kannte beispielsweise bereits der griechische Astronom Ptolemäus – als Fehlzeichen bei der Niederschrift von baylonischen 60er-Brüchen. Es ist durchaus möglich, dass in Indien genau dieses Symbol für Null übernommen worden ist. Jedoch die große Errungenschaft, die unterschiedlichen fremden und eigenen Ideen zu diesem Zahlensystem zusammenzuführen und im Vorfeld offen für fremde Erkenntnisse und Gedanken zu sein, die ist mit Sicherheit Verdienst der Inder und Inderinnen. (vgl. Menninger 1979)

Im darauf folgenden Jahrhundert wurden Rechenmethoden mit dem neuen Zahlensystem erforscht und untere anderem von dem Lehrer Brahmagupta verschriftlicht. Brahmagupta schrieb über die Rechenregeln beim Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Quadrieren ganzer Zahlen und gab erste Hinweise auf negative Zahlen. Indessen begann sich das revolutionäre Dezimalsystem in Syrien und Mesopotamien zu verbreiten. Im zwölften Jahrhundert erreichte die indische Mathematik noch einmal einen Höhepunkt (es traten quadratische Gleichungen mit negativen Lösungen auf und die Kugeloberfläche wurde näherungsweise berechnet). 1600 wurde dann die East Indian Company gegründet und es kam zu einem Austausch von westeuropäischem und indischem Wissen, der bis heute währt. (vgl. Gericke 1984 und Wußing 2008)

3.3 Frühe Hochkulturen im vorderen Orient

Nach den vorangegangenen Einblicken in die ost- und südasiatische Zahlengeschichte, wird in diesem Kapitel die Zahlenentwicklung, geografisch gesehen, weiter östlich betrachtet. In den Gebieten von Mesopotamien und Ägypten entstanden schon früh Hochkulturen, die als eine der ersten eine (nachweisbare) Schrift hervorbrachten. Aus diesem Grund können ihre Zahlensysteme und mathematischen Kenntnisse gut nachvollzogen werden. Die zum Teil sehr fortschrittlichen Erkenntnisse beeinflussten auch die europäische Mathematik, deren Zahlengeschichte im nachfolgenden Kapitel behandelt wird. (vgl. Haarmann 2008, Ifrah 1986 und Wußing 2008)

3.3.1 Mesopotamien

4. Jahrtausend v. Chr.	Entstehung sumerischer Städte und Stadtstaaten; gegen Ende des Jahrtausends wird die erste sumerische Schrift mit sexagesimalem Zahlensystem entwickelt
2700-2600 v. Chr.	Akkader beginnen in das Gebiet einzuwandern; die Keilschrift wird entwickelt

um 2500 v. Chr.	Sumerer werden von Akkadern politisch unterworfen
um 2000-1900 v. Chr.	Neusumerisches Reich: das Positionssystem wird eingeführt
um 1900-1600 v. Chr.	Babylonier und Assyrer erobern das sumerische Gebiet: Altbabylonisches und Altassyrisches Reich; Algebra und Geometrie haben ihre Blütezeit
um 1600-1250 v. Chr.	Herrschaft der Kassiten und Hethiter: Fortschritte in der Astronomie
um 1200 v. Chr.	Beginn der Machtentfaltung der Assyrer
883-612 v. Chr.	Neuassyrisches Reich
625-539 v. Chr.	Neubabylonisches Reich: Astrologie und Astronomie erleben eine Blütezeit
ab 539 v. Chr.	Perser herrschen über Babylon: Astronomie hat ihren Höhepunkt
330 v. Chr.	Eroberung durch Alexander den Großen Es folgt eine Zeit des Hellenismus, bis das Reich Ende des 4. Jahrhunderts endgültig verfällt.

Tabelle 3.3.1 a: Chronologische Kurzübersicht über die Geschichte der mesopotamischen Frühzeit (vgl. Ifrah 1986, Menninger 1979 und Wußing 2008)

Das Land zwischen den Flüssen Euphrat und Tigris im heutigen Irak wurde von den Griechen Mesopotamien genannt. Auch heute wird dieser Name noch im archäologischen Kontext verwendet, bezieht sich jedoch auf ein größeres Gebiet, das neben dem Irak auch angrenzende Teile des Iran, der Südtürkei und Syriens umfasst. (vgl. Wußing 2008)

Im vierten Jahrtausend vor Christus wurden die Sumerer, ein nicht-semitisches Volk dessen Herkunft unbekannt ist, im südlichen Mesopotamien, dem fruchtbaren Zwischenstrom-Land, sesshaft und entwickelten große Städte und Stadtstaaten. Vermutlich um die Verwaltung der Städte zu erleichtern entwickelte sich zwischen 3200 und 3100 vor Christus eine Schrift, die eine der ersten Schriften war. (vgl. Gericke 1979, Haarmann 2008 und Ifrah 1986)

Vom Nachbarvolk der Sumerer, den Elamiter, die ihre Schrift unabhängig von ihren Nachbarn ein- bis zweihundert Jahre später entwickelten, konnten Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen die Entstehungsgeschichte der Schrift bereits nachvollziehen. Es wird angenommen, dass sich der Schriftgebrauch auch beim Volk de Sumerer auf eine ähnliche Weise entwickelt hatte. (vgl. Ifrah1986)

Die Elamiter hatten ein spezielles System um Tauschgeschäfte sicher abzuhandeln: Wollte beispielsweise ein Schafbesitzer einem Hirten seine Schafe für eine gewisse Zeit geben, wurden die Tiere vorher und nachher gezählt. Dabei wurde, um Betrug und Streitigkeiten zu vermeiden, ein Buchhalter herangezogen, der die Anzahl der Schafe festhielt, indem er eine entsprechende Anzahl an kleinen Tonfiguren in eine Tonbulle gab und diese verschloss. Die versiegelte Tonbulle wurde außen mit einem Siegel versehen und nach Ende des Handels wurde sie zerschlagen um festzustellen, ob noch alle Tiere vorhanden waren. Dabei folgten die Tonfiguren bereits einem dezimalen Zahlensystem: Sie hatten verschiedene Formen und so entsprach beispielsweise eine kleine Kugel der Anzahl von zehn Tieren und eine große der Anzahl von 100, wie auch in Abbildung 3.1.1 a zu sehen ist. (vgl. Ifrah 1986)

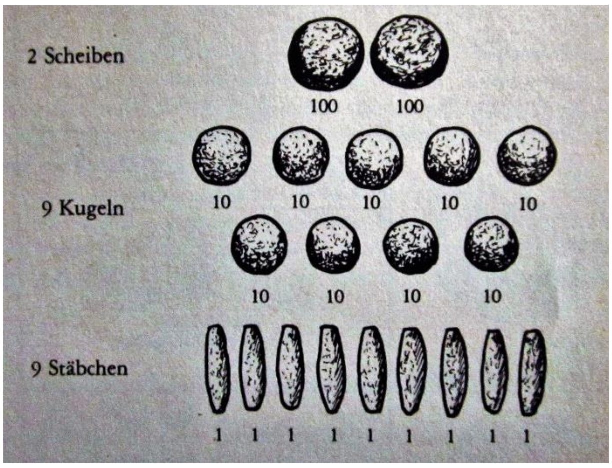


Abbildung 3.3.1 a: Symbolische Tonfiguren von 3500-3300 v. Chr., die insgesamt die Zahl 299 wiedergeben (Ifrah 1986, Seite 191)

Um die Tonbulle nicht immer zerschlagen zu müssen entwickelte sich der Brauch, neben dem Siegel auch die Anzahlen der Tonfiguren auf der Außenseite der Bulle festzuhalten. Für Einer wurden längliche, für Zehner kleine runde und für Hunderter große runde Abdrücke erzeugt. So wurde die Bulle überflüssig und Anzahlen wurden mit der Zeit nur mehr auf Tontafeln festgehalten. Neben Symbolen für Zahlen entwickelten sich auch bald weitere Schriftzeichen in Form von Piktogrammen und Ton wurde zum „Papier Mesopotamiens“. (vgl. Ifrah 1986)

Auch die Sumerer schrieben auf Ton (unter anderem weil Leder und Holz schwierig aufzubewahren waren und es kaum Steine gab). Ihre Zahlschrift bestand zu Beginn aus durch Abdrücke produzierten Kreis-förmigen und Halbkreis-förmigen Kerben, sowie Kombinationen daraus. In Abbildung 3.3.1 b sind diese Zeichen und ihre Zahlenwerte zu sehen, sowie in Abbildung 3.3.1 c wird das Schreibwerkzeug dazu gezeigt. Interessant ist, dass bei dieser ersten, archaischen Schrift, die Zahlzeichen durch Eindrücken des runden Griffel-Endes festgehalten wurden, während die restlichen Schriftzeichen mit der dünnen Spitze malend eingeritzt wurden. (vgl. Ifrah 1986)

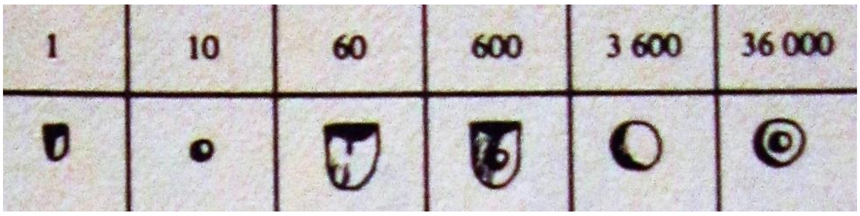


Abbildung 3.3.1 b: Archaische Zahlzeichen der Sumerer (Ifrah 1986, Seite 214)

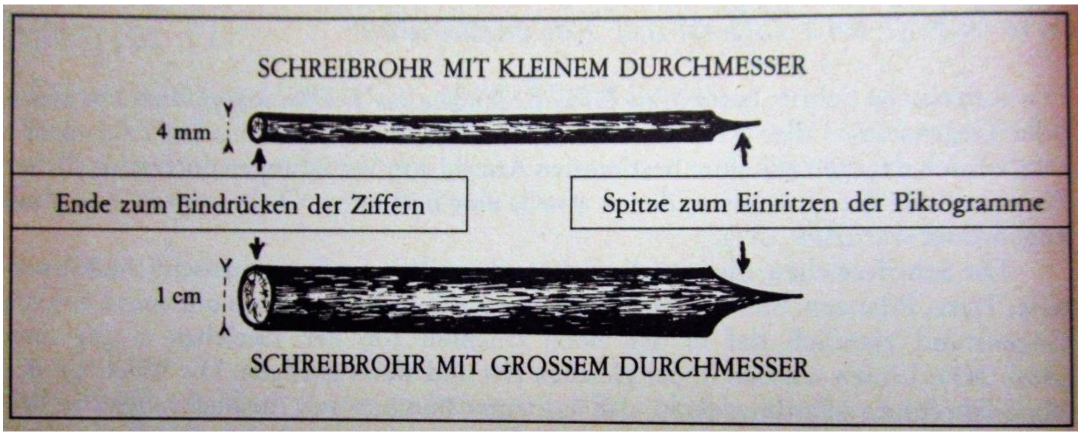


Abbildung 3.3.1 c: Griffel als Schreibwerkzeug der sumerischen Schrift (Ifrah 1986, Seite 206)

Aus Abbildung 3.3.1 b geht hervor, dass die Sumerer, im Gegensatz zum zuvor erwähnten Dezimalsystem der Elamiter, ein Sexagesimalsystem besaßen, also ein Zahlensystem zur Basis 60, das jedoch zusätzlich die Hilfsbasis zehn besaß. Menninger (1979) erklärt dieses ungewöhnliche Zahlensystem so: Ursprünglich hatten die Sumerer wohl zwei unterschiedliche Maßeinheiten von großem Größenunterschied (vergleichbar mit Elle und Meile im europäischen Raum), ein kleineres, das sie mit dem kleinen D-förmigen Abdruck bezeichneten, und ein größeres, das sie mit demselben Zeichen in groß bezeichneten. Dabei gab es eine herkömmliche Zehner-Bündelung bei beiden Maßeinheiten zur jeweils größeren Einheit, einem kleinen Kreis beziehungsweise einem großen D mit einem kleinen Kreis in der Mitte. (vgl. Menninger 1979)

Um beide Maßgruppen zusammenzuführen also das Kleinmaß in das Großmaß umwandeln zu können, suchten die Sumerer eine geeignete „Anschlusszahl“. Dabei beachteten sie, dass auch die im Alltag gebräuchlichen Bruchteile $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ des Großmaßes bequem ganzzahlig im Kleinmaß angegeben werden können sollten. Die kleinstmögliche Anschlusszahl, die diese Eigenschaften erfüllt, wäre sechs (das kleinste gemeinsame Vielfache von zwei und drei) – da das Großmaß ursprünglich um einiges größer als das Kleinmaß war, hätte die kleine Zahl sechs allerdings keinen Sinn gemacht – weswegen schließlich das Zehnfache von sechs, also 60, als Anschlusszahl gewählt wurde. Da 60 wieder recht groß war und umständlich aufzuschreiben gewesen wäre, wurde der Zwischenschritt der Zehner-Bündelung ebenfalls etabliert. (vgl. Menninger 1979)

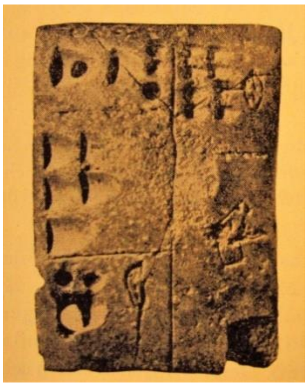


Abbildung 3.3.1 d: Sumerische Tontafel, auf der in der ersten Zeile die Zahl 1·600 + 1·60 + 3·10 + 8·1 = 11·60 +38 = 698 in archaischen Ziffern zu sehen ist (Menninger 1979, Seite174)

Etwa 500 Jahre nach Erfindung der archaischen Schrift, wurde die Keilschrift entwickelt. Sie entstand basierend auf Bequemlichkeit, da Zeichen in Ton leichter eingedrückt als geritzt werden können. Mit einem zugespitzten Griffel von dreieckigem Querschnitt konnten alle Keilschriftzeichen produziert werden. Ziffern unterschied man nun, entsprechend Abbildung 3.3.1 e unten, durch Keile (kleiner Keil für eins und großer für 60) und Winkel (für zehn) sowie Kombinationen daraus. Des Weiteren wurde ein Zeichen für 60^3 beziehungsweise 216 000 eingeführt, das es in der archaischen Schrift noch nicht gegeben hatte. (vgl. Ifrah 1986 und Menninger 1979)

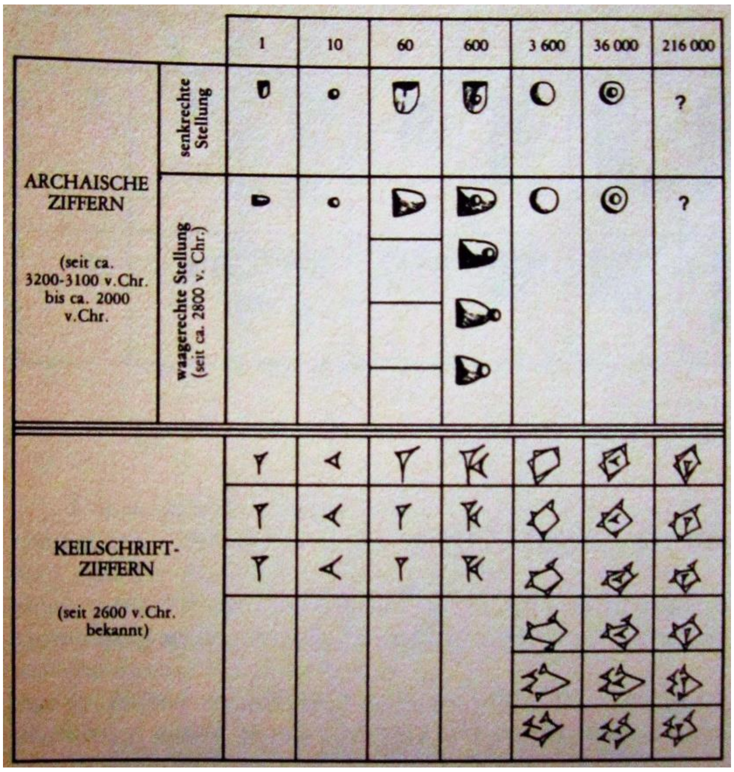


Abbildung 3.3.1 e: Die ersten Entwicklungsstufen der sumerischen Zahlschrift (Ifrah 1986, Seite 214)

Zahlen wurden entsprechend der Schrift von rechts nach links geschrieben, wobei mit der kleinsten Einheit begonnen wurde und die Ziffernsymbole oft geblockt zur besseren Übersicht angegeben wurden. In der archaischen Schrift etablierte sich außerdem die Möglichkeit Zahlen durch eine Subtraktion darzustellen um diese übersichtlicher zu gestalten: Das aus zwei keilförmigen Kerben bestehende Minuszeichen *lal* wurde über die abzuziehenden Einheit geschrieben, wie in der nachstehenden Abbildung zu sehen ist. In der Keilschrift setzte sich lal nicht durch, dafür wurde eine gute Übersichtlichkeit durch konkrete Formationen der Ziffern, wie sie in Abbildung 3.3.1 g gezeigt werden, gewährleistet. (vgl. Gericke 1984 und Ifrah 1986)

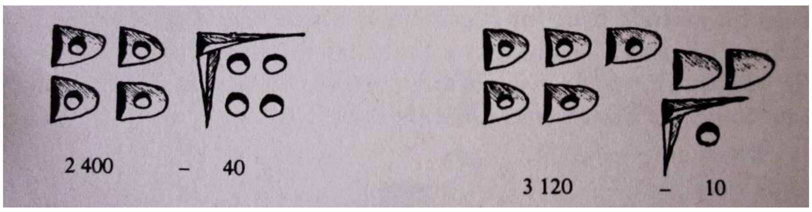


Abbildung 3.3.1 f: Alternative Zahlendarstellung der Zahlen 2 360 und 3 110 in archaischer Zahlschrift (Ifrah 1986, Seite 212)

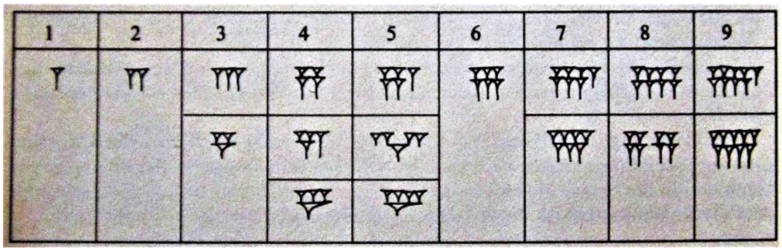


Abbildung 3.3.1 g: Darstellung der ersten neun Ziffern in Keilschrift (Ifrah 1986, Seite 212)

Eine weitere Art, wie die sumerische Zahlendarstellung überschaubarer gemacht wurde, basiert auf dem Prinzip des Assoziativgesetzes. In Abbildung 3.3.1 h und 3.3.1 i werden nach dieser Überlegung zwei unterschiedliche Darstellungen der Zahlen 72 000, 108 000, 144 000 und 180 000 gezeigt: Das Symbol für 36 000 besteht aus einem Kreis aus Keil-Abdrücken, dem Zeichen für 3 600, und einem Winkel, dem Zeichen für zehn, es kann also als $10 \cdot 3600$ aufgefasst werden. Die nachstehenden Darstellungen können also wie folgt formal am Beispiel von 72 000 erläutert werden:

$72\,000 = 3\,600 \cdot 10 + 3\,600 \cdot 10 = (3\,600 \cdot 10) \cdot 2 = 3\,600 \cdot (10 \cdot 2) = 3\,600 \cdot 20.$

(vgl. Ifrah 1986)

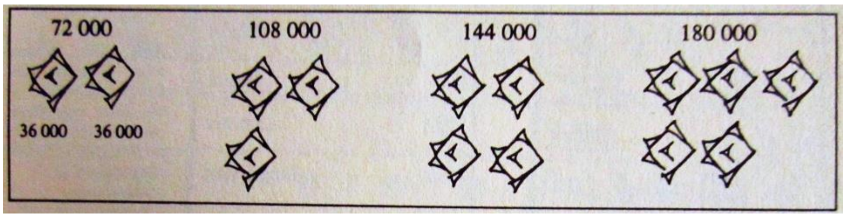


Abbildung 3.3.1 h: Darstellungsmöglichkeit einiger Vielfachen von 36 000 (Ifrah 1986, Seite 215)

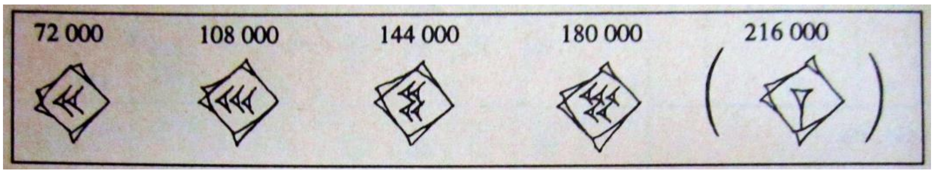


Abbildung 3.3.1 i: Darstellungsmöglichkeit einiger Vielfachen von 36 000 (Ifrah 1986, Seite 216)

Nach der Einführung der Keilschrift entwickelte sich die sumerische Zahlschrift von der benannten Stellenschrift (mit unterschiedlichen Symbolen für jede Rangschwelle, also jede 60er-Potenz und jedes Zehnfache einer 60er-Potenz) innerhalb von 800 Jahren zu einem reinen Positionssystem. Zu Beginn konnten die Zeichen für eins und 60 durch den Größenunterschied der Kerben auseinander gehalten werden. Diese Unterscheidung verschwand jedoch schon bald und Anfang des darauf folgenden (zweiten) Jahrtausends wurden ebenfalls die Symbole der höheren Rangschwellen vereinfacht und nur mehr jene für eins und zehn, der Keil und der Winkelhaken, verwendet. Das Zahlensystem wurde also zum reinen (unbenannten) Stellensystem. (vgl. Ifrah 1986 und Wußing 2008)

Dabei ist zu erwähnen, dass die Herrschaft der Akkader in der zweiten Hälfte des dritten Jahrtausends die sumerische Zahlenentwicklung kaum beeinflusst hatte, da die Akkader die Sumerer zwar politisch unterworfen hatten, ihre Kultur inklusive der Zahl- und Schreibschrift jedoch völlig übernommen hatten (das, obwohl sich die sumerische, nicht-semitische, und akkadische, semitische, Sprache wesentlich unterschieden). Auch in der Folgezeit unter unterschiedlichen Herrschenden blieb das Sexagesimalsystem bestehen. Die Assyrer führten zwar ihr Dezimalsystem in Mesopotamien ein, in wissenschaftlichen Texten wurde jedoch weiterhin nur das sexagesimale Zahlensystem verwendet. (vgl. Gericke 1984 und Menninger 1979)

Das Sexagesimalsystem hatte nämlich durch seine Weiterentwicklung zum unbenannten Positionssystem wesentliche Vorteile: Das Rechnen mit einem Stellensystem war leichter als mit einem anderen Zahlensystem und der Übergang zur Bruchrechnung, sowie das Rechnen mit diesen Brüchen, das analog zum Rechnen mit ganzen Zahlen ablief, war ebenfalls ohne Umstände möglich. Additionen und Subtraktionen konnten Stelle für Stelle, vergleichbar mit der heute gebräuchlichen Methode für das Rechnen mit Dezimalzahlen, durchgeführt werden, mit dem einzigen Unterschied, dass bei der Addition erst beim Erreichen von 60 ein Stellensprung geschah und beim Abziehen gegebenenfalls 60 Einheiten von der nächsthöheren Stelle „ausgeborgt“ werden mussten, im Gegensatz zu zehn im Dezimalsystem. (vgl. Menninger 1979 und Wußing 2008)

Auch die Multiplikation konnte entsprechend heutiger Methoden bewältigt werden; der oder die Rechnende hatte jedoch die Erschwernis ein größeres Einmaleins beherrschen zu müssen, und zwar ein 36-mal so umfangreiches (errechnet durch den Umfang des sexagesimalen Einmaleins durch den Umfang des dezimalen Einmaleins: $\frac{60 \cdot 60}{10 \cdot 10} = 36$). Als Hilfestellung dafür wurden Einmaleinstafeln geschrieben, wie jene aus Abbildung 3.3.1 j. Ebenso gab es Reziprokentafeln, die zu jeder Zahl unter 60 ihr „Gegenüber“ angab, bedeutend wie oft sie in 60 passt (für Zahlen, die keine Teiler von 60 sind, wurde angegeben, dass es kein „Gegenüber“ gab). Die Auflistung der Reziproken half unter anderem bei Divisionen, die so, durch das Zurückführen auf Multiplikationen, gelöst werden konnten. (vgl. Gericke 1984 und Menninger 1979)

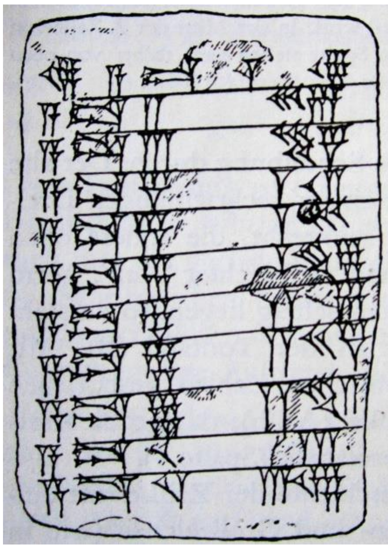


Abbildung 3.3.1 j: Abbild der ersten Seite einer Einmaleinstafel, die die Rechnungen „18·1“ bis „18·11“ enthält: In der ersten Zeile steht „18 (=) 1 ‚mal‘ 18“, in der zweiten nur mehr „36 (=) 2 ‚mal‘“ und so fort (Menninger 1979, Seite 178)

Unter anderem Dank des fortschrittlichen Zahlensystems konnte sich die mesopotamische Mathematik sehr weit entwickeln. Für Kreisberechnungen wurde zwar der relativ ungenaue

Näherungswert „3“ für Pi benutzt, dafür konnten mesopotamische Gelehrte bereits Quadrat- und Kubikwurzeln ziehen, kubische Gleichungen bearbeiten, den Satz von Pythagoras anwenden und vieles mehr. Die Forschung und die Problemstellungen, mit denen sie sich befassten, fußten anfangs auf Überlegungen zur Wirtschaft, dem Bauwesen und astronomischen Beobachtungen. Mit der Zeit wurden jedoch auch abstraktere Gedanken verfolgt. Wußing (2008, Seite 141) schreibt sogar, „dass die mesopotamische Mathematik erst nach der hellenistischen Periode übertroffen werden konnte“. (vgl. Wußing 2008)

Eine berühmte Aufgabenstellung für die Anwendung des Satzes von Pythagoras ist folgende: „Ein Balken (?) von der Länge 0; 30 (der gegen eine Mauer oder ähnliches steht) ist um 0;6 mit der Spitze herabgerutscht. Wie weit hat sich das untere Ende von der Wand entfernt?“ (Wußing 2008, Seite 135). Dabei sind hier die vorkommenden Zahlen in einer heute oft gebräuchliche Form, Zahlen eines Sexagesimalsystems zu deskribieren, angegeben: „a_3, a_2, a_1, a_0; a_{-1}, a_{-2}, ...“ $\triangleq a_3 \cdot 60^3 + a_2 \cdot 60^2 + a_1 \cdot 60^1 + a_0 \cdot 60^0 + a_{-1} \cdot 60^{-1} + a_{-2} \cdot 60^{-2} + \ldots$
„0; 30“ wurde also durch drei Winkelhaken dargestellt und entspricht der Zahl $0 \cdot 1 + 30 \cdot 60^{-1} = 0{,}5$, sowie „0; 6“ folglich den dezimalen Wert $6 \cdot 60^{-1} = 0{,}1$ hat und durch sechs Keile dargestellt wurde. (vgl. Wußing 2008)

Neben den Vorteilen des Positionssystems brachte andererseits die sumerische Zahlenschreibweise Schwierigkeiten mit sich. Zum einen gab es kein Kommazeichen um den Unterschied von ganzen Einheiten und Brüchen zu signalisieren und zum anderen gab es kein Zeichen für eine leer bleibende Stelle. Vom beschreibenden Text neben dem die Zahl stand konnte man meistens die Größenordnung dieser gut erkennen, jedoch ohne Kontext gab es oft viele Möglichkeiten, welche Zahl gemeint war. So könnte zum Beispiel die Zahl in Abbildung 3.3.1 k unter anderem für folgende, unterschiedliche Zahlen stehen:

4, 1, 22:	$4 \cdot 60^2 + 1 \cdot 60 + 22 \cdot 1 = 14\,482$
4, 0, 1, 22:	$4 \cdot 60^3 + 1 \cdot 60 + 22 \cdot 1 = 864\,082$
4, 1, 0, 22:	$4 \cdot 60^3 + 1 \cdot 60^2 + 22 \cdot 1 = 867\,622$
4, 1, 22, 0:	$4 \cdot 60^3 + 1 \cdot 60^2 + 22 \cdot 60 = 868\,920$
4, 1, 20, 2:	$4 \cdot 60^3 + 1 \cdot 60^2 + 20 \cdot 60 + 2 \cdot 1 = 868\,802$
4, 1; 22:	$4 \cdot 60 + 1 \cdot 1 + 22 \cdot 60^{-1} = 241{,}3 + \frac{2}{30}$
0; 4, 1, 22:	$4 \cdot 60^{-1} + 1 \cdot 60^{-2} + 22 \cdot 60^{-3} = 0{,}06704 + \frac{17}{2700000}$

(vgl. Menninger 1979 und Wußing 2008)

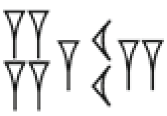


Abbildung 3.3.1 k: Nicht eindeutige Darstellung einer Zahl in Keilschrift (Wußing 2008, Seite 130)

Das eben genannte Problem, die Mehrdeutigkeit der mesopotamischen Keilschrift, wurde zu beheben versucht, indem ein eindeutiger Abstand zwischen den Ziffern gelassen wurde um eine leere Stelle zu signalisieren. Auf Grund von Ungenauigkeiten der Schreiber und Schreiberinnen, war dies allerdings nicht immer gewährleistet. Erst im sechsten Jahrhundert vor Christus kam die Idee auf, ein eigenes Zeichen (siehe Abbildung 3.3.1 m) für eine ausgelassene Rangschwelle zu schreiben, welche sich in astronomischen Texten durchsetzen konnte. (vgl. Gericke 1984, Menninger 1979 und Wußing 2008)

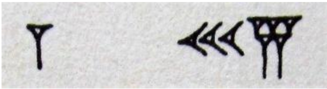


Abbildung 3.3.1 l: Darstellung der Zahl „1, 0, 35“ = $1 \cdot 60^2 + 35 = 3\,635$ mit Hilfe eines großen Abstands für die fehlende 60er-Potenz (Ifrah 1986, Seite 418)

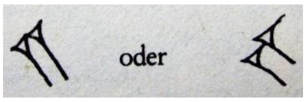


Abbildung 3.3.1 m: Symbole um das Fehlen einer 60er-Potenz anzugeben (Ifrah 1986, Seite 420)

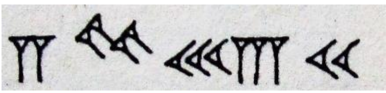


Abbildung 3.3.1 n: Darstellung der Zahl „2, 0, 0, 33, 20“ = $2 \cdot 60^3 + 33 \cdot 60 + 20 = 434\,000$ mit Hilfe von Symbolen für die fehlenden 60er-Potenzen (Ifrah 1986, Seite 420)

Jedoch schon wenige Jahrhunderte nachdem diese sehr fortschrittliche Errungenschaft aufgekommen war, war die Zeit des mesopotamischen Reiches bereits zu Ende. Zu dieser Zeit trug die Herrschaft Griechenlands über Mesopotamien durch die Feldzüge Alexander des Großen wesentlich dazu bei, dass mesopotamische Kenntnisse weitergegeben wurden: Viele „Himmelskundige“ wanderten in den Westen und verbreiteten ihr Wissen. In Mesopotamien wurde der rund 360 Tage dauernde Kreislauf der Sonne als Anlass genommen einen vollen Winkel in 360 Grad einzuteilen, die entsprechend des sumerischen Zahlensystems wiederum in 60 Minuten zu je 60 Sekunden eingeteilt wurden. Des Weiteren wurde ein Tag von babylonischen Priestern in 12 Doppelstunden eingeteilt und den aufeinanderfolgenden Tagen wurden die damals bekannten sieben Planeten zugeordnet (vergleichbar mit der heutigen Sieben-Tage-Woche). Mesopotamische Einflüsse haben folglich bis heute Spuren in Europa hinterlassen. (vgl. Menninger 1979)

Außerdem übernahm die hellenistische Astronomie völlig das Sexagesimalsystem, da mit diesem Rechnungen - vor allem Bruchrechnungen - leichter durchgeführt werden konnten. In der Astronomie musste viel berechnet werden und in der Antike wurde kein Zahlensystem erfunden, das annähernd gleich leistungsfähig gewesen wäre. Über die Griechen festigte sich so das Stellensystem zur Basis 60 bei Winkelangaben und behielt bis heute seine Wichtigkeit. (vgl. Wußing 2008)

In etwa zeitgleich zur mesopotamischen Zahlenschreibung entstand in Ägypten eine Zahlschrift (vgl. Gericke 1984), welche im folgenden Unterkapitel behandelt wird.

3.3.2 Ägypten

vor 3000 v. Chr.	Vordynastische Periode: Es gibt bereits eine Schrift
3000-2700 v. Chr.	Ober- und Unterägypten werden politisch vereint: Ein Kalender mit 365 Tagen wird eingeführt; die Hieroglyphenschrift entwickelt sich
2700-2170 v. Chr.	Altes Reich: Die befestigte Hauptstadt Memphis und Pyramiden werden

	erbaut; Hieroglyphen werden weiterentwickelt
2170-2040 v. Chr.	Erste Zwischenzeit
2040-1794 v. Chr.	Mittleres Reich: Goldenes Zeitalter Ägyptens auf Grund von wirtschaftlichem Wachstum und Stabilität; die hieratische Schrift ist bereits ausgeprägt; mathematische Texte werden auf Papyrus verfasst
1794-1550 v. Chr.	Zweite Zwischenzeit: Abschriften der mathematischen Papyri entstehen
1550-1070 v. Chr.	Neues Reich: Epoche der größten Machtentfaltung unter anderem unter Ramses II.
1070-664 v. Chr.	Dritte Zwischenzeit: Die demotische Schrift geht aus der hieratischen hervor
664-332 v. Chr.	Spätzeit: Letzte Blütezeit Ägyptens
ab 332 v. Chr.	Alexander der Große erobert Ägypten: Hiermit endet die Zeit der ägyptischen Dynastien 238 v. Chr.: Der Kalender wird von 365 Tagen pro Jahr auf 365,25 ausgebessert es folgen die Herrschaft der Ptolemäer und die der Römer, bis 395 n. Chr. Ägypten dem oströmischen Reich untergeordnet wird

Tabelle 3.3.2 a: Chronologische Kurzübersicht über die Geschichte der ägyptischen Frühzeit (vgl. Gericke 1984, Haarmann 2008 und Wußing 2008)

Vor etwa 5 000 Jahren gelang es den ersten Völkern Ackerbau und Viehzucht im Nildelta zu betreiben und dort sesshaft zu werden. Dies gelang ihnen Dank der Erkenntnis, wann die regelmäßigen Nilüberschwemmungen stattfanden, die die Fruchtbarkeit des Landes gewährleisteten. So konnten sich Dörfer bilden, die sich zu größeren Gemeinden zusammenschlossen, was schließlich dazu führte, dass in Ober- wie Unterägypten Königreiche entstanden. Es wurde ein Kalender mit drei Jahreszeiten, der Zeit der Nilüberschwemmung, des Anbaus und der Ernte, eingeführt. Jede Jahreszeit bestand aus vier Monaten zu je 30 Tagen und zusätzlich gab es fünf Tage um das Jahr zu vervollständigen, die als gefährlich angesehen wurden (ähnlich den Unheil-verheißenden Tagen im Kalender der Maya), da sie nicht zum restlichen Jahresrhythmus passten. (Der 365-Tage-Kalender wurde dann in Jahr 238 vor Christus, durch Einführung eines Schaltjahres alle vier Jahre, zu einem 365,25-Tage-Kalender korregiert, welchen die Römer unter Caesar als den „Julianischen Kalender" übernahmen.) (vgl. Wußing 2008)

Zu dieser Zeit gab es außerdem laut Haarmann (2008) bereits eine Schrift – noch vor der Schriftentwicklung in Mesopotamien. Die Erfindung der Hieroglyphenschrift geht jedoch nach Wußing (2008) und weiteren Autoren erst auf die Zeit der Einigung der Reiche zurück. Die Hieroglyphen bildeten ein Mischsystem aus Bild- und Lautzeichen, die Symbole konnten also für einzelne Silben oder für ganze Wörter stehen (diese von frühen Forschenden unerwartete

Komplexität der Schriftzeichen war ein Grund dafür, dass die Hieroglyphenschrift erst Anfang des 19ten Jahrhunderts, nach einigen gescheiterten Entschlüsselungsversuchen, entziffert werden konnte). Des Weiteren konnten Hieroglyphen in beliebige Richtungen geschrieben beziehungsweise gelesen werden. Die jeweilige Leserichtung wurde durch die Blickrichtung der Schriftsymbole angezeigt, die den Lesenden entgegen blickten. (vgl. Gericke 1984, Haarmann 2008, Ifrah 1986 und Wußing 2008)

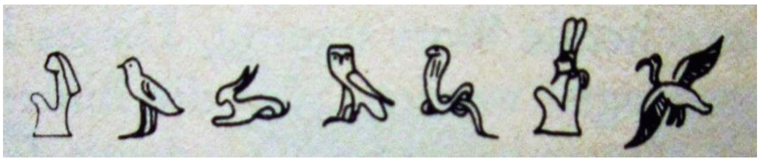


Abbildung 3.3.2 a: Hieroglyphen-Text, der von links nach rechts geschrieben und gelesen wurde (Ifrah 1986, Seite 223)

Hieroglyphen wurden ebenfalls für die Zahlschrift verwendet. Die Zahlen waren dezimal aufgebaut und jeder Zehnerpotenz war ein eigenes Zahlzeichen zugeordnet, wie sie in Abbildung 3.3.2. b zu sehen sind (beziehungsweise deren Spiegelbilder, entsprechend der benutzten Schreibrichtung). Alle Vielfachen der Zehner-Potenzen wurden durch Reihung des Rangschwellensymbols nach dem additiven Prinzip aufgeschrieben. Zur besseren Lesbarkeit wurden die wiederholten Zahlzeichen dabei in Gruppen aufgeschrieben. (vgl. Ifrah 1986 und Wußing 2008)

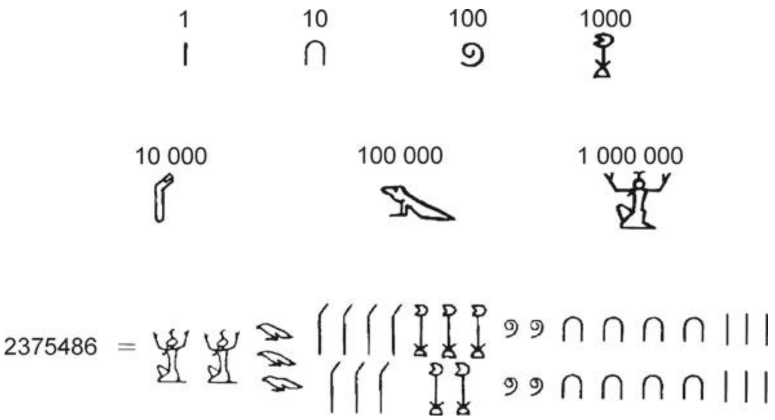


Abbildung 3.3.2 b: Die Hieroglyphen der Zehner-Potenzen und Darstellung der Zahl 2 375 486 anhand dieser (Wußing 2008, Seite 115)

In der eben angeführten Abbildung erkennt man, dass diese Zahlschrift sehr Zeichen-aufwändig sein konnte: Bei diesem konkreten Zahlenbeispiel werden statt sieben Ziffern, wie im indischen Positionssystem, 35 Zahlzeichen benötigt. Des Weiteren wurden die Schrift- und Zahlzeichen zumeist in steinerne Gebäudewände gemeißelt, aber auch auf Kalkplatten, Tontöpfe und Papyrusrollen gezeichnet. Vor allem das zuletzt erwähnte Schreibmedium regte eine Weiterentwicklung der Hieroglyphenschrift an: Um schneller schreiben zu können wurden beim Schreiben auf Papyrus die Zeichen immer weiter vereinfacht, bis ihre zugrundeliegenden Hieroglyphen zum Teil nicht mehr erkannt werden konnten. Diese Weiterentwicklung, die im Mittleren Reich um Beginn des zweiten Jahrtausends vor Christus bereits sehr ausgereift war, nennt man heute *hieratische Schrift*. (vgl. Ifrah 1986 und Wußing 2008)

Neben der hieratischen Schrift blieb die Hieroglyphenschrift weiterhin bestehen, sie wurde fortwährend für Steingravuren verwendet. Etwa 1 500 Jahre später entwickelte sich aus der hieratischen Schrift außerdem die *demotische Schrift* weiter, womit sich diese Arbeit jedoch nicht näher beschäftigen wird, da die demotische Schrift erst gegen Ende der ägyptischen Reiche aufkam und nicht wesentlich für die hier betrachtete Zahlengeschichte ist. (vgl. Ifrah 1986 und Wußing 2008)

Die hieratische Schrift wurde nur mehr in eine Richtung geschrieben, von rechts nach links, und etablierte sich in allen wichtigen Bereichen: Unter anderem wurden administrative, religiöse, kaufmännische, mathematische und astronomische Texte in dieser Schrift verfasst. Die Motivation der Schriftentwicklung brachte auch große Veränderungen für die Zahlendarstellung. Alle Vielfachen der Zehnerpotenzen wurden verziffert, es gab also eigene Zeichen für jeden Einer, Zehner, Hunderter und Tausender. So konnten Zahlen schnell und mit weniger Zeichen geschrieben werden, das Gedächtnis war jedoch mehr gefordert, da es statt vier unterschiedlichen Zeichen nun 40 verschiedene gab. (vgl. Ifrah 1986)

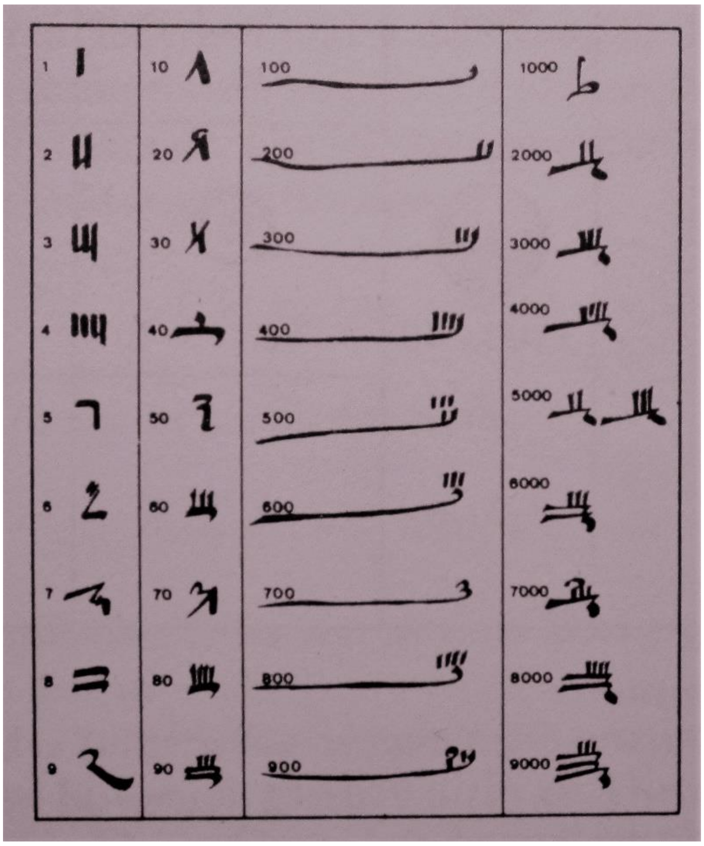


Abbildung 3.3.2 c: Die hieratischen Zahlzeichen (Ifrah 1986, Seite 264)

Im alten Ägypten waren auch bereits Brüche bekannt, sie wurden mit der Hieroglyphe für das Wort „Mund“ und der Zahl des Nenners aufgeschrieben (siehe Abbildung 3.3.2 f) beziehungsweise in hieratischer Zahlschrift mit einem Punkt über den Zahlzeichen. Auf diese Art konnte man nur Stammbrüche, also Brüche mit dem Zähler eins, angeben. Alle anderen Brüche, mit einem Zähler ungleich eins, wurden im alten Ägypten auch nicht als echte Brüche angesehen. Um den Wert eines solchen anderen Bruches darzustellen wurde dieser als Summe von Stammbrüchen niedergeschrieben. Diese Darstellung war natürlich nicht eindeutig, folgte aber einer klaren Regel: Die triviale Zerlegung in Stammbrüche desselben Nenners wurde nicht gewählt. $\frac{5}{7}$ wäre also beispielsweise nicht als $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$ aufgeschrieben worden, die Zusammensetzung $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{70}$ wäre jedoch eine Möglichkeit gewesen. (vgl. Ifrah 1986 und Wußing 2008)

Zur Erleichterung der Darstellung als Summe von Stammbrüchen wurden eigene Listen erstellt. Im Vergleich zur heutigen Darstellung von Brüchen war es dennoch ein aufwändiges Unterfangen Brüche, die keine Stammbrüche waren, aufzuschreiben. Für die sehr häufig gebrauchten Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ gab es daher eigene Zeichen, wie sie in Abbildung 3.3.2 d zu sehen sind, und auch $\frac{1}{2}$ besaß in Hieroglyphenschrift ein gesondertes Zeichen, das in Abbildung 3.3.2 e gezeigt wird. Bei der Wiedergabe eines Bruches als Maßangabe in Hieroglyphenschrift gab es außerdem, vom Symbol „Mund", abweichende Zeichen (zur genaueren Erläuterung dieser sei auf Ifrah 1986, Seite 235 und 236, verwiesen). (vgl. Ifrah 1986)

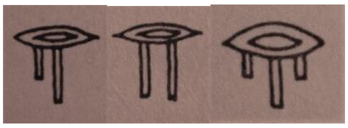


Abbildung 3.3.2 d: Darstellung der Brüche $\frac{2}{3}$ (die beiden Zeichen links) und $\frac{3}{4}$ (das Zeichen gaz rechts) mittels ägyptischer Hieroglyphen (Ifrah 1986, Seite 235)

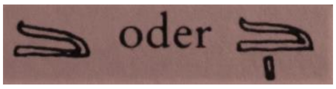


Abbildung 3.3.2 e: Ägyptische Hieroglyphen für $\frac{1}{2}$ (Ifrah 1986, Seite 235)

Abbildung 3.3.2 f: Darstellung von $\frac{3}{5}$ als Summe: $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ (Ifrah 1986, Seite 235)

In Ägypten herrschte eine strenge Hierarchie. Den Göttern unterlag alles und Pharaonen herrschten als ihre Vertreter auf Erden ohne Einschränkungen, wobei in den geschichtlichen Zwischenzeiten keine Pharaonen herrschten, sondern zum Teil fremde Völker. (vgl. Wußing 2008)

Die altägyptische Hochkultur war weit entwickelt; es konnte Metall verarbeitet und Glas hergestellt werden, sowie die bildende Kunst als auch die Medizin waren bereits sehr fortschrittlich. Dies verlangte einen gut organisierten Staat mit klarer Arbeitsteilung, für dessen Verwaltung der Beruf des Schreibers aufkam. (vgl. Wußing 2008)

Erfahrene Schreiber mussten in der Lage sein Steuern und Abgaben zu berechnen, die nötige Verpflegung für ein Heer zu kalkulieren, Projektpläne für Bauwerke zu erstellen, die Größe von Behältnissen auszurechnen und Feldvermessungen durchzuführen, da auf Grund der regelmäßigen Nilüberschwemmungen das Ackerland oft neu vermessen werden musste. Zur Unterstützung bei diesen Problemstellungen wurden in der Zeit des mittleren Reiches mathematische Aufgaben und ihre Lösungen auf Papyrus festgehalten (die wenigen noch heute erhaltenen Papyri brachten den größten Aufschluss über die Kenntnisse der ägyptischen

Mathematik). Die Aufgaben können in geometrische, algebraische und „Hau“-Aufgaben unterteilt werden. (vgl. Gericke 1984 und Wußing 2008)

Dabei handelt es sich bei sogenannten „Hau“-Aufgaben um Problemstellungen, bei denen eine oder mehrere unbekannte Größen beziehungsweise Haufen, wie sie in diesen Beispielen genannt wurden, gesucht waren. „Hau“ steht also für Haufen und entspricht der heute oft „x“ genannten Unbekannten in einem Gleichungssystem. Nachfolgend wird eine solche Aufgabenstellung und ihr dazugehöriger Lösungsweg vorgestellt. (vgl. Gericke 1984 und Wußing 2008)

„Form der Berechnung eines Haufens, gerechnet 1½ mal zusammen mit 4. Er ist gekommen bis 10. Der Haufe nun nennt sich? Berechne du die Größe dieser 10 über dieser 4. Es entsteht 6. Rechne du mit 1½ , um zu finden 1. Es entsteht 2/3. Berechne du 2/3 von diesen 6. Es entsteht 4. Siehe: 4 nennt sich. Du hast richtig gefunden.“ (Wußing 2008, Seite 117)

Heutzutage ist es üblich, so eine Aufgabe durch Aufstellen einer Gleichung zu lösen. Der Ansatz dazu könnte in diesem Fall wie folgt lauten:

$$x \cdot (1 + \tfrac{1}{2}) + 4 = 10.$$

(vgl. Wußing 2008)

Die ägyptische Mathematik erreichte nicht so ein hohes Niveau wie jene Mesopotamiens. Unter anderem war das Rechnen mit dem ägyptischen gereihten Zahlensystem nicht so leicht möglich wie mit dem mesopotamischen Stellensystem. Aus diesem Grund wurde ein System aus Verdoppelung und Halbierung zur Durchführung von Multiplikationen und Divisionen erfunden. Diese Rechenmethode wird nun anhand dreier Beispiele erläutert: (vgl. Wußing 2008)

Wollte man in Ägypten beispielsweise das 17-fache von 90 errechnen, also **17·90**, so verdoppelte man 90 so oft, bis man das 17-fache zusammenzählen konnte.

(·1)	**90** ↓·2
(·2)	180 ↓·2
(·4)	360 ↓·2
(·8)	720 ↓·2
(·16)	**1440**

Das gesuchte Produkt kann nun als Summe von 90, dem ein-fachen, und 1440, dem nach dem vierten Verdoppeln erreichten 16-fachen, errechnet werden. Formal kann dies so erklärt werden:

$$17 \cdot 90 = (1 + 16) \cdot 90 = 1 \cdot 90 + 16 \cdot 90 = 90 + 1440 = \mathbf{1530}.$$

(vgl. Wußing 2008)

Die Division wurde analog, durch zusätzliches Halbieren neben dem Verdoppeln errechnet. Ein 16tel von 43 beziehungsweise **43:16** wurde zum Beispiel so errechnet:

(·4) 64

(·2) 32 $\uparrow \cdot 2$

(·1) 16 $\downarrow :2$ *,* $\uparrow \cdot 2$

$\mathbf{(\cdot \frac{1}{2})}$ **8** $\downarrow :2$

$(\cdot \frac{1}{4})$ 4 $\downarrow :2$

$\mathbf{(\cdot \frac{1}{8})}$ **2** $\downarrow :2$

$\mathbf{(\cdot \frac{1}{16})}$ **1**

Der gesuchte Quotient ergibt sich nun also als Summe von 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{16}$, da die Summe aus 32, acht, zwei und eins 43 ist. Formal erklärt sich dies wie folgt:

$$43:16 = 43\cdot\frac{1}{16} = (32 + 8 + 2 + 1)\cdot\frac{1}{16} = 32\cdot\frac{1}{16} + 8\cdot\frac{1}{16} + 2\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{1}{16} = \mathbf{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = 2{,}6875.$$

(Es ist zu sehen, dass sich die Verwendung von Stammbrüchen für diese Divisionsmethode als praktisch erweist.) (vgl. Wußing 2008)

Da die eben gezeigte Methode der Division nicht mit jedem Zahlenpaar möglich ist, kann auch wie folgt vorgegangen werden. Zum Beispiel kann das Ergebnis der Division **35:6** so berechnet werden:

(·1) 6 $\downarrow \cdot 2$

(·2) 12 $\downarrow \cdot 2$

(·4) 24

Da die Differenz von 35 und 30 (= 6 + 24) fünf, also kleiner als sechs, ist, lautet das Ergebnis 5 + $\frac{5}{6}$. Dabei kann $\frac{5}{6}$ beispielsweise in die Stammbrüche $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ zerlegt werden. Durch das Verdoppeln wurde also festgestellt wie oft sechs in 35 passt und der Rest fünf wurde als Bruch festgehalten beziehungsweise als Summe von Stammbrüchen. Das Ergebnis lautet also $\mathbf{5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$. (vgl. [Link 7])

332 vor Christus kam es auf Grund der Eroberung Ägyptens durch den Griechen Alexander den Großen zum Ende der ägyptischen Dynastien. Die griechische und später die römische Herrschaft führten dazu, dass einige mathematische Erkenntnisse auch in Europa genutzt werden konnten, wie beispielsweise der Julianische Kalender, der ägyptischem Wissen zu verdanken ist. Einen besseren Einblick in die Vielzahl an Errungenschaften erhielt man jedoch erst Anfang des 19ten Jahrhunderts, als die Hieroglyphen- und hieratische Schrift übersetzt werden konnten. (vgl. Wußing 2008)

3.4 Europäische Zahlengeschichte und der große Einfluss des arabischen Reiches

Europäische Zahlengeschichte besteht, wie die jedes Kontinentes, aus unzähligen Zahlengeschichten, da eine Vielzahl an unterschiedlichen Kulturen auch eine Vielzahl an Zahlensystemen hervorbringen kann. So erinnern beispielsweise die französischen Zahlwörter von 80 bis 99 an den Einfluss des keltischen vigesimal-dezimalen Mischsystems (98 wird zum Beispiel *quatre-vingt-dix-huit* in Frankreich genannt, übersetzt also „vier-zwanzig-zehn-acht“). Dieses Kapitel wird sich, mit Mut zur Lücke, nur mit den wesentlich erscheinenden zahlengeschichtlichen Errungenschaften beschäftigen, für einen umfassenderen Einblick, sei auf Ifrah (1986) und Menninger (1979) verwiesen. (vgl. Gericke 1984, Hein 2010, Ifrah 1986, Menninger 1979 und Wußing 2008)

Laut Haarmann (2008) ist die älteste europäische Hochkultur, die eine Schrift und Zahlzeichen besaß, auch die älteste Hochkultur in der gesamten Kulturgeschichte mit einer solchen Errungenschaft. Diese, so genannte, Donauzivilisation existierte in etwa von 5500 bis 3200 vor Beginn unserer Zeitrechnung im Südosten Europas. Ihre Zahlzeichen, die aus Punkten und Strichen bestanden, und ihre Schrift konnten bis heute noch nicht entziffert werden, jedoch konnte bereits festgestellt werden, dass ein dezimales Zahlensystem und eventuell zusätzlich ein Zahlensystem mit der Basis zwölf zugrunde lagen. (vgl. Haarmann 2008)

Die Hochkultur und mit ihr der Schriftgebrauch endeten gegen Ende des vierten Jahrtausends vor Christus auf Grund von Unruhen, die durch Völkerwanderungen in der Balkanregion entstanden. Dabei ist es durchaus möglich, aber umstritten, dass der alteuropäische Schriftgebrauch die Schrift der minoischen Kultur, die vom dritten Jahrtausend bis ins zwölfte Jahrhundert vor Christus auf der griechischen Insel Kreta währte, beeinflusst hatte, da es mehrere eindeutig ähnliche Schriftzeichen in beiden Kulturen gab. (vgl. Haarmann 2008 und Wußing 2008)

Auch die altkretische Kultur war sehr fortschrittlich, wobei ihre Schrift ebenfalls noch nicht entziffert werden konnte. Dafür weiß man von ihrer Zahlschrift mehr: Sie hatten ein dezimales Zahlensystem, das auf Reihung, also wiederholtem Niederschreiben der Zehnerpotenzen, basierte. Ihre Zahlzeichen, deren älteste bekannte Form in Abbildung 3.4 a zu sehen sind, wurden vorwiegend in Ton gedrückt. Vor etwa 3 400 Jahren starb die minoische Zivilisation entweder durch eine Naturkatastrophe oder die Invasion des Volkes der Mykener vollständig aus und ihre Kultur erhielt sich lange nur in Form von mystischen Geschichten und Sagen. (vgl. Haarmann 2008 und Ifrah 1986)

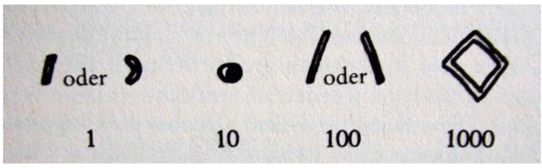


Abbildung 3.4 a: Die minoischen Zahlzeichen in der ersten Hälfte des zweiten Jahrtausends (Ifrah 1986, Seite 243)

Die europäische Geschichte kann in fünf große Perioden unterteilt werden:

Vor- und Frühgeschichte (bis zum achten Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung),

Antike (vom achten Jahrhundert vor Christus bis zum Ende des fünften Jahrhunderts nach Christus),

Mittelalter (fünftes bis 15tes Jahrhundert),

Neuzeit (16tes bis 19tes Jahrhundert) und

Neueste Geschichte (20tes und 21tes Jahrhundert).

(vgl. [Link 8])

Entsprechend dieser Unterteilung wird die Einteilung dieses Kapitels erfolgen. Nachdem in den vorangegangenen Absätzen die ersten Hochkulturen Europas (aus der erstgenannten Periode) vorgestellt wurden, widmet sich das nächste Unterkapitel der europäischen Antike.

3.4.1 Die griechisch-römische Antike

8.–6. Jahrhundert v. Chr.	Griechische Kolonialstädte entstehen im Süden Italiens, Libyen und am Schwarzen Meer mit engem kulturellem Austausch zwischen Griechenland und den Kolonien; zu dieser Zeit ist die griechische Alphabetschrift bereits vollständig entwickelt
um 600 v. Chr.	Rom wird durch die Etrusker gegründet; zu dieser Zeit gibt es bereits Rechenbretter
529 v. Chr.	Der Orden der Pythagoreer wird in Unteritalien gegründet
471 v. Chr.	Athen herrscht Dank vorausgegangener gewonnener Schlachten gegen die Perser im ersten attischen Seebund vor
388/387 v. Chr.	In Athen wird die Akademie von Platon gegründet
ab 338 v. Chr.	Makedonien herrscht über Griechenland
336-323 v. Chr.	Alexander der Große ist König von Makedonien und führt großteils erfolgreiche Kriegszüge gegen Persien, Indien und Ägypten an 331 v. Chr. wird Alexandria in Ägypten gegründet
311 v. Chr.	Das durch Alexander den Großen aufgebaute Reich wird geteilt
um 300 v. Chr.	Euklid schreibt das, laut Blum (2007), bis heute einflussreichste Mathematikbuch „Die Elemente“
1. Jahrhundert v. Chr.	Die griechische Buchstabenzahlschrift wird amtliche Zahlschrift in Athen Die jüngere römische Zahlenschreibung, wie sie noch heute bekannt ist, verbreitet sich
30 v. Chr.	Rom macht Ägypten zur Provinz
27 v. Chr.	Rom macht Griechenland zur Provinz
9 n. Chr.	Römer werden von den Germanen im Teutoburger Wald besiegt
250	Erste Christenverfolgung im römischen Reich (ab 313 wird das Christentum dann als gleichberechtigt geduldet)
395	Das Römische Reich wird endgültig in West- und Oströmisches Reich geteilt
476	Letzter weströmischer Kaiser wird durch den Germanenkönig abgesetzt; zu dieser Zeit war der Niedergang der Wissenschaft bereits im Gange

Tabelle 3.4.1 a: Chronologische Kurzübersicht über die griechisch-römische Antike (vgl. Blum 2007, Gericke 1984, Haarmann 2008 und Wußing 2008)

Nach der dorischen Wanderung vor ungefähr 3200 Jahren lebten die Griechen in Griechenland. Schon vor Beginn der Antike war die griechische Kultur weit entwickelt: Es gab verschiedene Herrschaftsformen und allgemeine Gesetze, die ebenfalls die Herrschenden betrafen, und es wurde die semitische Schrift der Phönizier, eine Buchstabenschrift (vermutlich die erste solche in der Geschichte der Schrift), angenommen. Etwa zu Beginn des ersten Jahrtausends vor Christus passten die Griechen das semitische Alphabet ihrer Sprache an und integrierten als erstes Volk Vokale in ihre Schrift. Das griechische Alphabet aus Vokalen und Konsonanten war später die Vorlage des lateinischen Alphabetes. (vgl. Gericke 1984 und Ifrah 1986)

Laut Ifrah (1986) ist es nicht sicher, ob die Phönizier bereits Buchstaben als Zahlen benutzten, die Griechen verwendeten jedenfalls welche, zuerst zur gereihten Zahlschrift und später, ab etwa 500 vor Beginn unserer Zeitrechnung, zur benannten Positionsschrift. Die alte griechische Zahlschrift war dezimal mit einer zusätzlichen Fünfer-Bündelung aufgebaut, durch ihr Prinzip der Reihung eignete sie sich nicht gut zum Rechnen. Aus diesem Grund nahm man in Griechenland bereits vor 600 vor Christus ein Rechenbrett, *abakion* („fußloses Brett“ bedeutend) genannt, zur Hilfe, das auf einem dezimalen Positionssystem mit Hilfsbasis fünf beruhte (was in den folgenden Absätzen genauer erläutert wird). Das älteste noch erhaltene Rechenbrett wird in Abbildung 3.4.1 b gezeigt. (vgl. Ifrah 1986 und Menninger 1979)

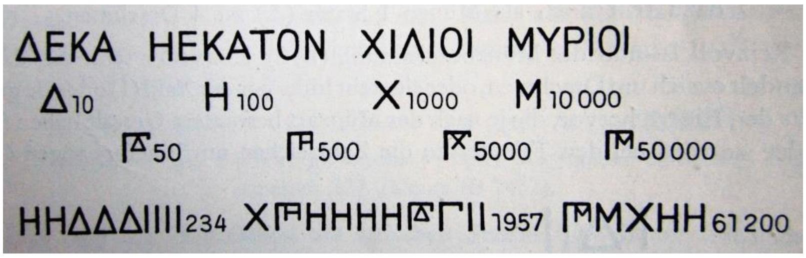


Abbildung 3.4.1 a: Die alten griechischen Zahlzeichen und 3 Zahlenbeispiele, wobei unter anderem beim mittleren Beispiel die Darstellung der Einer und Fünfer zu sehen ist (Menninger 1979, Seite 73)

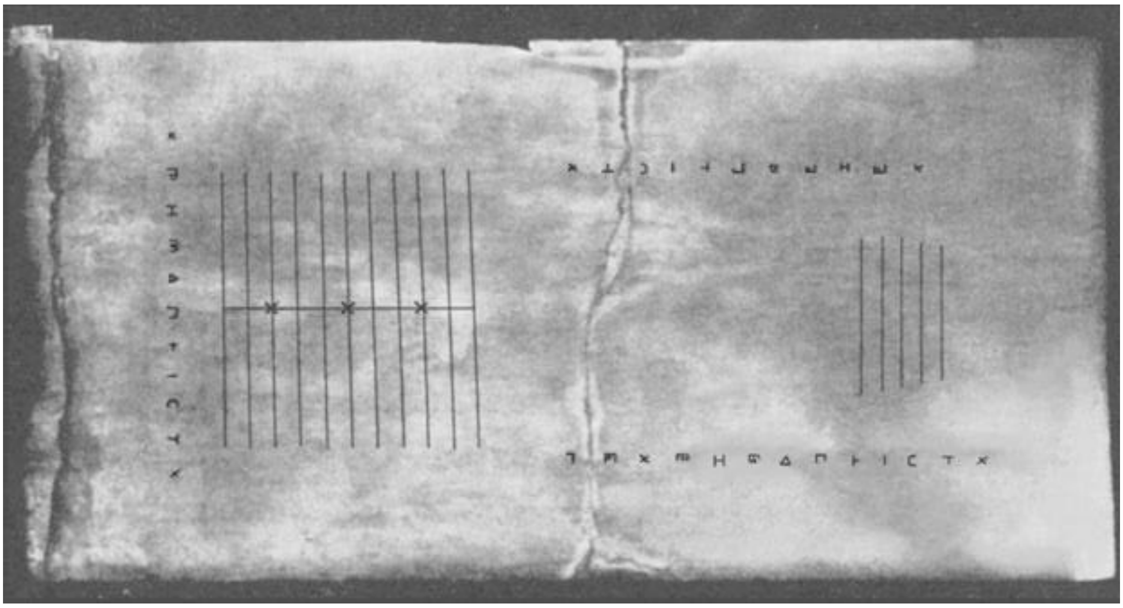


Abbildung 3.4.1 b: Die älteste erhaltene griechische Rechentafel (sie wurde 1846 auf Salamis gefunden

und wird daher auch Salaminische Rechentafel genannt) ist aus Marmor und 159 mal 75 cm groß (Wußing 2008, Seite 152)

Das Rechenbrett bestand aus zwei Gruppen senkrechter Linien, dabei war die Linien-Gruppe auf der linken Seite für die ganzen Einheiten gedacht und jene auf der rechten Seite für Bruchteile. Es gab drei Beschriftungen, die in Abbildung 3.4.1 d genauer zu sehen sind und dazu dienten, die Zahl, mit der beispielsweise multipliziert werden sollte, als Gedächtnisstütze darunter aufzulegen. Dass mehrere Beschriftungen existieren, könnte darauf hinweisen, dass zwei Personen gleichzeitig am Brett rechnen konnten. (vgl. Gericke 1979)

Gerechnet wurde durch das Auflegen von Rechensteinchen, so genannten *psephoi* (wörtlich „Steine"), wobei in der linken Linien-Gruppe jeweils zwei Spalten für die Vielfachen einer Zehnerpotenz genutzt wurden: In der jeweils rechten Spalte wurde die Anzahl exakt, falls die Zahl kleiner gleich fünf war, oder die Differenz um die die Zahl fünf überschritt, falls die Zahl größer als fünf war, gelegt und in der jeweils linken Spalte wurde gegebenenfalls ein Steinchen, das für fünf Einheiten stand, platziert (wie es in Abbildung 3.4.1 c zu sehen ist). (vgl. Menninger 1979)

Eine Addition, wie sie in Abbildung 3.4.1 c gezeigt wird, wurde durch das Auflegen beider Zahlen auf dem griechischen Rechenbrett vollführt. Nachdem die Zahlen untereinander dargestellt worden waren, musst nur mehr bereinigt werden: Das heißt, lagen in der rechten Spalte einer Doppelspalte für eine Zehnerpotenz mehr als vier Steinchen, wurden fünf entnommen und durch ein Steinchen in der Spalte links daneben hinzugefügt, und lagen in einer linken solchen Spalte zwei Steinchen oder mehr, wurden zwei entnommen und durch ein Steinchen in der Spalte links daneben (bei den Einern der nächsthöheren Zehnerpotenz) ersetzt. Nach der spaltenweisen Bereinigung konnte das Ergebnis einfach abgelesen werden. (vgl. Menninger 1979)

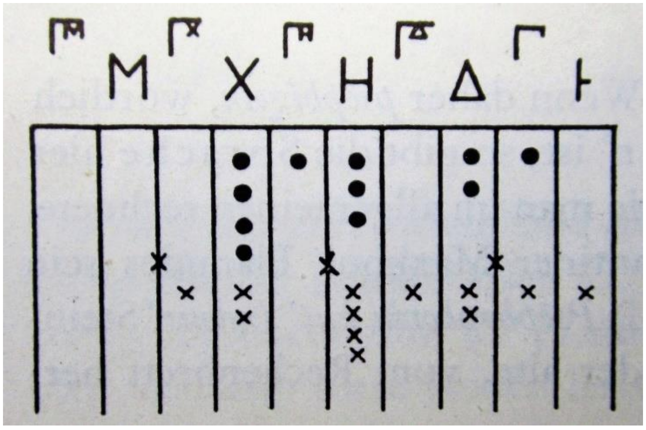


Abbildung 3.4.1 c: Schematische Addition der Zahlen 4 825 (durch Punkte symbolisiert) und 7 476 (durch Kreuze symbolisiert) am griechischen Rechenbrett (Menninger 1979, Seite 108)

Die Subtraktion funktionierte analog zur Addition, nur dass im Falle einer höheren Anzahl einer Zehnerpotenz des Subtrahenden im Vergleich zum Minuenden, beim Minuenden eine Einheit von der nächsthöheren Zehnerpotenz „ausgeborgt" (weggenommen) wurde (und bei der zu niedrigen Zehnerpotenz zehn Einheiten hinzugefügt wurden). Multipliziert wurde, dem Distributivgesetz entsprechend, durch das aufgeteilte Multiplizieren der Zahl jeder

Zehnerpotenz des einen Faktors mit jeder des zweiten Faktors und anschließender Addition dieser Teilprodukte. **93·27** hätte zum Beispiel so funktioniert:

$$93 \cdot 27 = (90 + 3) \cdot (20 + 7) = 90 \cdot 20 + 20 \cdot 3 + 90 \cdot 7 + 7 \cdot 3 = 2511$$

Dafür musste allerdings das kleine Einmaleins beherrscht werden (beziehungsweise Einmaleins-Tafeln vorhanden sein) und eine gute Übersicht über die jeweilige Größe der Teilprodukte behalten werden. Über alte Divisionsmethoden ist leider nicht viel bekannt. (vgl. Menninger 1979)

Abbildung 3.4.1 d: Die Beschriftung des Salaminischen Rechenbrettes (Menninger 1979, Seite 106)

Die Beschriftung der Salaminischen Rechentafel bestand aus den frühen griechischen Zahlzeichen und diente ebenfalls zur Münzbezeichnung. Die Grundeinheiten der Währung waren *Drachmen*, sie besaßen eine Übereinheit, *Talent*, die 600 Drachmen gleichwertig war, und konnten in *Obolus* unterteilt werden, wobei sechs Obolus einer Drachme entsprachen. Die Bezeichnungen *C* (symbolisch für ein halbes *O*), *T* (von *Tetartemorion*, „Viertelstück“) und *X* (von *Chalkos*, „Erz, Kupfer“) wurden auch losgelöst von ihrem Münzwert verwendet: C stand dabei (auf Grund des Wertes eines Obolus) für $\frac{1}{12}$, *T* für $\frac{1}{24}$ und *X* für $\frac{1}{48}$. (vgl. Menninger 1979)

Neben der eben beschriebenen Zahlenschreibweise wurde um ein halbes Jahrtausend vor Christus eine Buchstabenzahlschrift (laut Haarmann (2008) von einer phönizischen Zahlschreibung inspiriert) entwickelt, die auf einem Positionssystem basierte und jedem Vielfachen einer Zehnerpotenz einen Buchstaben zuordnete, und sich im ersten Jahrhundert vor Beginn unserer Zeitrechnung als amtliche Zahlschrift in Athen etablierte. Die älteren Zahlzeichen wurden parallel dazu weiterverwendet und werden auch heute noch zum Teil in wissenschaftlichen Texten, zum Beispiel um Illustrationen zu nummerieren, benutzt. Die neuen Zahlzeichen hatten, entsprechend den hieratischen Zahlen in Ägypten, den Vorteil, dass die Zahlschreibung um einiges schneller und mit weniger Zeichen möglich war, jedoch auch den Nachteil, dass man sich nun mehr Zahlzeichen merken musste. Des Weiteren reichten die 27 griechischen Buchstaben nicht aus, sodass für die drei Zahlen sechs, 90 und 900 semitische Buchstaben „ausgeliehen“ werden mussten. (vgl. Haarmann 2008 und Menninger 1979)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Einer	A	B	Γ	Δ	E	Ϝ	Z	H	Θ
	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	ϑ
Zehner	I	K	Λ	M	N	Ξ	O	Π	Q
	ι	$\varkappa$	λ	μ	ν	ξ	o	π	ϙ
Hunderter	P	Σ	T	Y	Φ	X	Ψ	Ω	ϡ
	ϱ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
Tausender	͵α	͵β	͵γ	͵δ	͵ε	͵ς	͵ζ	͵η	͵ϑ

Abbildung 3.4.1 e: Die jüngere altgriechische Zahlschrift, Groß- und Kleinbuchstaben wurden äquivalent verwendet (Wußing 2008, Seite 153)

Die neuen Zahlzeichen werden in Abbildung 3.4.1 e gezeigt. Unter anderem ist zu sehen, dass die Tausender durch die Buchstaben der Einer mit einem zusätzlichen Strich links unten, neben dem jeweiligen Buchstaben, angegeben wurden. Auch für die Zehntausender wurde letztendlich eine ähnliche Lösung gefunden: Über der Anzahl der Zehntausender wurden Doppelpunkte geschrieben. Davor gab es auch die Lösung Zahlen ab 10 000 durch das Verwenden des alten Zahlzeichens für Zehntausend, *M*, mit darüber gestellter Anzahl darzustellen (siehe Abbildung 3.4.1 f). (vgl. Wußing 2008)

$$\overset{\lambda\beta}{M} = \ddot{\lambda}\ddot{\beta} = 320\,000$$

Abbildung 3.4.1 f: Darstellungsmöglichkeiten der Zehntausender am Beispiel 320 000 (Wußing 2008, Seite 153)

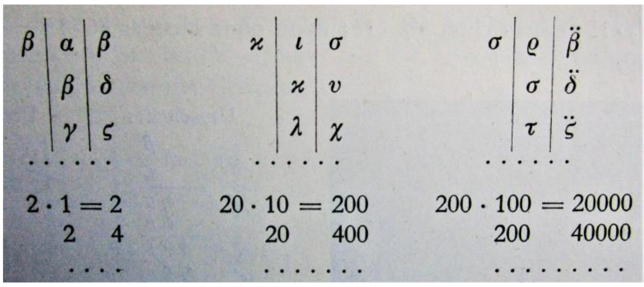


Abbildung 3.4.1 g: Die Struktur griechischer Einmaleins-Tafeln in Buchstaben-Ziffern (Menninger 1979, Seite 79)

Da eine Buchstabenzahlschrift mit der restlichen Schrift verwechselt werden konnte, etablierte sich des Weiteren, dass eine Art Beistrich am Schluss der Buchstabenzahl geschrieben wurde oder über die gesamten Zahl ein Strich gezogen wurde. Die neue Zahlschrift eignete sich besser zum Rechnen, da ihr ein (benanntes) Positionssystem zugrunde lag, und es konnten auch mehr unterschiedliche Brüche angegeben werden (wobei diese nicht Brüche genannt wurden, sondern Zahlenverhältnisse). Stammbrüche wurden zum Teil mit der Zahl des Nenners und einem Hochstrich, rechts oben neben der Zahl angegeben, ansonsten wurden Brüche ab dem dritten Jahrhundert vor Christus durch das Übereinanderschreiben von Nenner und Zähler verschriftlicht. Dabei wurde zu Beginn der Nenner über den Zähler geschrieben, was jedoch etwa 200 Jahre später umgekehrt wurde (woraus letztlich die heute übliche Bruchschreibweise hervorgegangen ist). (vgl. Menninger 1979 und Wußing 2008)

Brüche wurden zum Teil auch unter Verwendung des sumerischen Sexagesimalsystems aufgeschrieben. Vor allem in der Astronomie wurde mit diesem Zahlensystem gerechnet, wobei großteils statt den Keilschriftzeichen griechische Buchstabenziffern benutzt wurden. (Der Astronom Ptolemäus, der etwa im zweiten Jahrhundert nach Christus lebte, verwendete dabei für seine Winkelangaben sogar eine Art Null, ein kleines „o“, um freibleibende Stellen kennzuzeichnen.) (vgl. Menninger 1979 und Wußing 2008)

Des Weiteren waren Brüche in der Antike nicht unumstritten: In der theoretischen Arithmetik sträubte man sich gegen das Teilen der Eins. Das hing mit der Zahlenvorstellung der damaligen Zeit zusammen, welche in Euklids mathematischer Abhandlung „Die Elemente“ (das um 300 vor Christus entstand) wie folgt definiert wurde: „Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge“ (Wußing 2008, Seite 154), wobei Einheit das sei, „wonach jedes Ding eines genannt wird“ (Wußing 2008, Seite 154). Weder eins noch Brüche galten daher als Zahlen. Das antike Zahlenverständnis war vor allem von den Pythagoreern geprägt worden. (vgl. Gericke 1984 und Wußing 2008)

Pythagoreer nannte man die Mitglieder des vom Mathematiker Pythagoras, im sechsten Jahrhundert vor Beginn unserer Zeitrechnung, gegründeten sektenartigen Ordens, der dem Leitspruch „Alles ist Zahl“ (Blum 2007, Seite 35) folgte. In ihrer religiösen Ideologie glaubten die Pythagoreer, dass die gesamte Welt auf (natürlichen) Zahlen beziehungsweise Zahlenverhältnissen aufgebaut ist. Dank dieses Glaubens wurden Zahlen als eigener Gegenstand untersucht. Unter anderem wurden Zahlen in Klassen unterteilt, Teilbarkeiten sowie Primzahlen untersucht und eine Formel zur Findung vollkommener Zahlen aufgestellt: Die Zahl n gilt als vollkommen, wenn $n = 2^{m-1} \cdot (2^m - 1)$ und $2^m - 1 = p$ eine Primzahl ist. (vgl. Blum 2007 und Gericke 1984)

Vermutlich ebenfalls von Pythagoreern wurden die *figurierten Zahlen* entdeckt:
Die n-te *Dreieckzahl* $d = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$,
die n-te *Quadratzahl* $q = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n \cdot n$,
die n-te *Rechteckzahl* $r = \sum_{i=1}^{n} 2i = n \cdot (n+1)$ und
die n-te *Fünfeckzahl* $f = \sum_{i=1}^{n} (i-1) + (2i-1) = \sum_{i=1}^{n} 3i - 2 = \frac{n\cdot(n-1)}{2} + n \cdot n = \frac{n\cdot(3n-1)}{2}$,
die sich als Kombination der (n-1)-ten Dreieck- und n-ten Quadratzahl ergibt.
Diese Zahlen wurden durch einfache Überlegungen, die getroffen werden konnten, wenn beispielsweise Rechensteinchen gleichmäßig zu ebenen Figuren aufgelegt wurden (entsprechend Abbildung 3.4.1 h), berechnet. Des weiteren wurden auch *körperliche Zahlen* und ihre Gesetzmäßigkeiten betrachtet, die durch Übereinanderlegen von solchen m-Eckzahlen entstanden (für einen genaueren Einblick sei hier auf Hein 2010 verwiesen). (vgl. Gericke 1984, Hein 2010 und Wußing 2008)

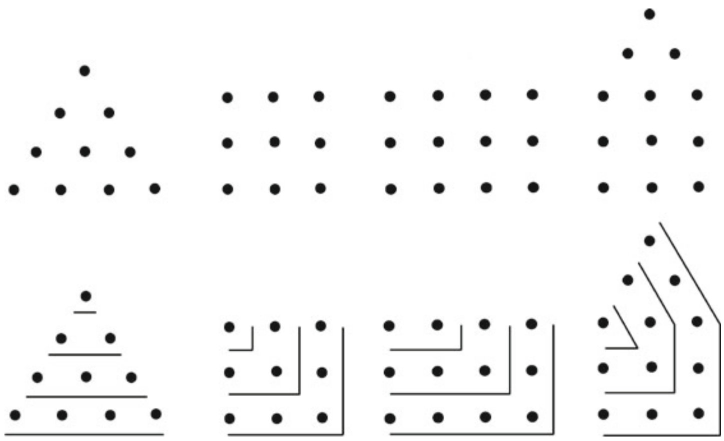


Abbildung 3.4.1 h: Figurierte Zahlen: An den Beispielen der Dreieckzahl 10, der Quadratzahl 9, der Rechteckzahl 12 und der Fünfeckzahl 12 (Wußing 2008, Seite 175)

Des Weiteren beschäftigte sich die Gemeinschaft der Pythagoreer mit Zahlenverhältnissen und deren Anwendung auf Strecken. Sie überlegten, wie oft eine Strecke hintereinander gelegt werden müsste um dem (ganzzahligen) Vielfachen einer anderen Strecke zu gleichen. Bei zwei Strecken die beispielsweise im Verhältnis 3:4 standen, hätte die kürzere viermal und längere dreimal an einander gereiht werden müssen, damit beide Streckenzüge dieselbe Länge erreichten. Existierte so ein gemeinsames Maß zweier Größen beziehungsweise Strecken, nannte man diese *kommensurabel*. Wie jedoch ein Pythagoreer feststellen musste, gibt es auch *inkommensurable* Größen (genau dann, wenn kein ganzzahliges Verhältnis der Strecken vorliegt, sondern das Größenverhältnis irrational ist), was der Philosophie seines Ordens, alles sei auf natürlichen Zahlen aufgebaut, völlig widersprach. Ironischerweise beinhaltet genau das Pentagramm, das Symbol der Pythagoreer, das jedes Mitglied der Gemeinschaft tätowiert hatte, ein irrationales Verhältnis. (vgl. Gericke 1984)

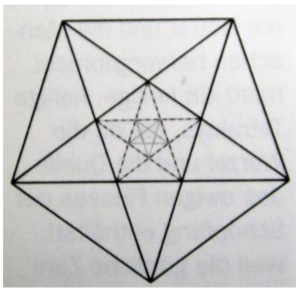


Abbildung 3.4.1 i: Das pythagoreische Wahrzeichen, ein Fünfeck mit eingeschriebenem Pentagramm mit dem Diagole-zu-Seite-Verhältnis $1 + \sqrt{5} : 2$ *(Blum 2007, Seite 36)*

Neben pythagoreischen Vorstellungen, welche die griechische Mathematik stark prägten, war das antike Zahlenverständnis vor Christus generell eng verbunden mit einer geometrischen Interpretation von Zahlen. Erst um Beginn unserer Zeitrechnung rechnete der erste griechische Mathematiker mit Zahlen ohne diese geometrisch zu deuten. (Um diese Zeit war der Höhepunkt der griechischen Mathematik bereits vorbei.) (vgl. Blum 2007, Gericke 1984 und Wußing 2008)

Die Machtübername durch Makedonien, Ende des vierten Jahrhunderts vor Christus, hatte noch positive Auswirkungen auf die griechische Wissenschaft, da durch die Feldzüge Alexander des Großen viele neue Einflüsse anderer Kulturen eingebracht werden konnten. Danach verlor das Reich jedoch nach und nach an Macht und Größe und wissenschaftliche Zentren, wie die Bibliothek in Alexandria (durch den römischen Machthaber Caesar), wurden zerstört. Auch die darauffolgende Zeit der römischen Herrschaft brachte kein stabiles Fundament für außerordentliche Wissenschaft. (vgl. Haarmann 2008 und Wußing 2008)

Des Weiteren war für die Römer abstrakte Mathematik, die sehr theorielastig und meist auf strengen Beweisen basierend war und welche sich im griechischen Reich erstmals als eigenständige Wissenschaft herausbildet hatte, weniger interessant und sie führten die griechische Forschung kaum fort (Griechisch blieb daher die Sprache der Wissenschaft). Man könnte sogar so weit gehen, zu sagen: „Der einzige Beitrag, den die Römer zur Mathematikgeschichte geleistet haben, war der, daß ein römischer Soldat den Archimedes erschlagen hat.“ (Gericke 1984, Seite 164). Das wäre jedoch nicht ganz fair, auf die europäische Zahlengeschichte hatten die Römer beispielsweise einen großen Einfluss. (vgl. Gericke 1984 und Wußing 2008)

Die altgriechische Kultur prägte die römische stark, jedoch nicht direkt. Über das Handelsvolk der Etrusker kamen griechische Erkenntnisse und auch ihre Buchstabenschrift ins römische Reich, allerdings nicht ihre Zahlschrift. Die Etrusker hatten eine, von ihrer griechisch gefärbten Schreibschrift, abweichende Zahlendarstellung, die auf einem dezimalen Zahlensystem mit zusätzlicher Fünfer-Bündelung basierte. Im römischen Raum wurde daher die etruskische Zahlschrift leicht abgewandelt (manche Zahlensymbole wurden gedreht) übernommen. Diese alte römische Zahlschrift, die in den Abbildungen 3.4.1 j bis l zu sehen ist, wurde dann im ersten Jahrhundert vor Beginn unserer Zeitrechnung zum Teil durch andere Zahlzeichen ersetzt beziehungsweise erweitert. Die jüngeren römischen Zahlzeichen (vgl. Abbildung 3.4.1 m) sind auch heute noch in Verwendung, beispielsweise zur Strukturierung wissenschaftlicher Texte. (vgl. Haarmann 2008 und Wußing 2008)

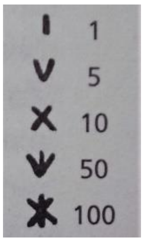


Abbildung 3.4.1 j: Alte römische Zahlzeichen (Haarmann 2008, Seite 105)

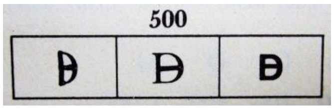


Abbildung 3.4.1 k: Alte römische Zahlzeichen für 500 (Ifrah 1986, Seite 164)

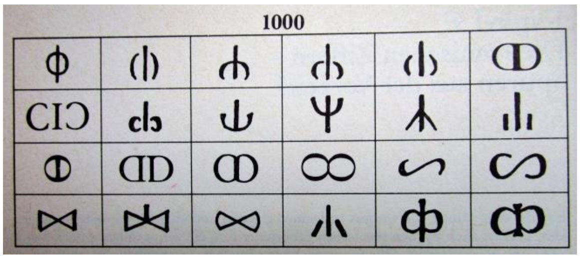


Abbildung 3.4.1 l: Alte römische Zahlzeichen für 1 000 (Ifrah 1986, Seite 164)

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

Abbildung 3.4.1 m: Jüngere römische Zahlzeichen, die sich aus den älteren entwickelten und für 100 und 1 000 zur Vereinfachung die Anfangsbuchstaben der Zahlwörter verwendeten (Ifrah 1986, Seite 163)

Die Zahlschrift folgte in der Antike rein dem additiven Prinzip, unabhängig von der Position wurden die benötigten Zahlensymbole aneinandergereiht. Die Zahlen 736 und 2 194 wären zum Beispiel so dargestellt worden: DCCXXXVI und MMCLXXXXIIII. (Im Laufe des Mittelalters etablierte sich dann zur besseren Übersicht die Konvention, dass für die Zahl vier oder neun einer Zehnerpotenz eine Subtraktion angeführt wurde: Nun durften nur mehr drei gleiche Zeichen aneinandergereiht werden. Stand das Zeichen der niedrigeren Zahl rechts neben einem höheren Zahlzeichen, so wurden die Zahlwerte wie gewohnt addiert, stand die niedriger Zahl jedoch auf der linken Seite, so wurde sie von der höheren abgezogen. Die zuvor genannten Zahlenbeispiele wurden nun wie folgt aufgeschrieben: DCCXXXVI wie zuvor für 736 und MMCXCIV schließlich für 2 194.) (vgl. Gericke 1984 und Haarmann 2008)

Wie auch das alte griechische Zahlensystem eignete sich das römische nicht gut zum Rechnen; mit Ausnahme der Addition, die mit dieser gebündelten Zahlschrift sehr einfach durchzuführen war. Für Multiplikationen wurde zum Teil auf die ägyptische Methode des Verdoppeln und Halbieren zurückgegriffen und es wurde das griechische Rechenbrett, abakion, unter dem lateinischen Namen *abacus*, heute auch Abakus geschrieben, verwendet (die Rechensteinchen wurden dabei *calculi* genannt). Neben dem Abakus wurde im römischen Reich ebenfalls eine handlichere Version des Rechenbrettes erfunden: Der sogenannte *Handabakus* war ein Kugelrechenbrett aus Bronze in Postkartengröße. Im Gegensatz zu den asiatischen Kugelrechenbrettern waren die Kugeln nicht auf Schnüren befestigt, sondern konnten jeweils in einer Rille verschoben werden. (vgl. Gericke 1984, Ifrah 1986 und Menninger 1979)

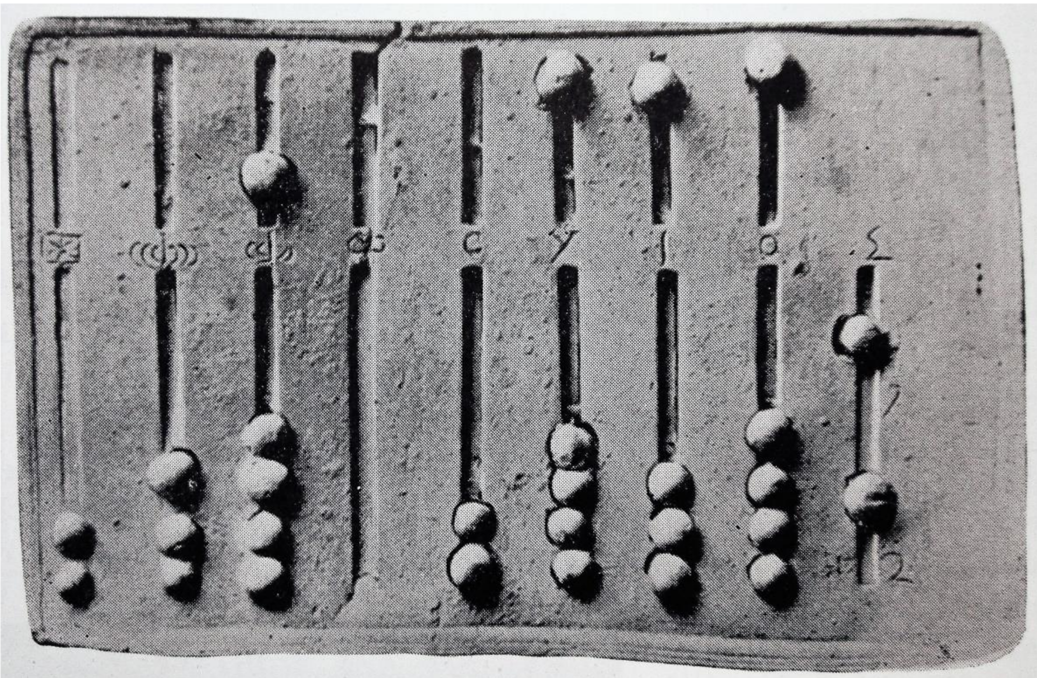


Abbildung 3.4.1 n: Gibsabguss eines noch erhaltenen römischen Handabakus, dem bereits ein paar Kugeln fehlen (Menninger 1979, Seite 112)

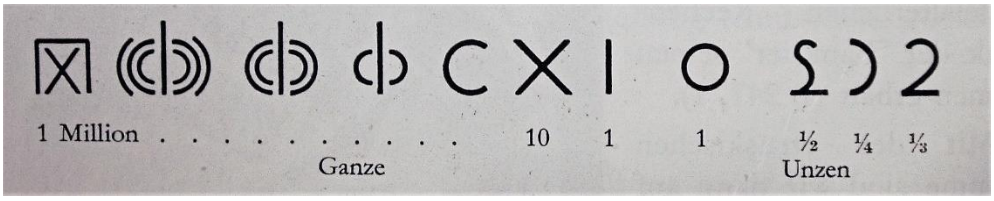


Abbildung 3.4.1 o: Beschriftung des römischen Handabakus (Menninger 1979, Seite 112)

In den vorangegangenen Abbildungen sind der Handabakus und seine Beschriftung zu sehen. Durch Positionieren der Kugeln nahe der Beschriftung am Mittelbalken konnten Zahlen, den asiatischen Rechenschiebern entsprechend, angegeben werden, wobei die einzelnen Kugeln in der oberen Zeile für jeweils fünf Einheiten standen und die vier Kugeln pro Rille in der unteren Zeile jeweils eine Einheit angaben. Die Spalte ganz rechts gab noch die Möglichkeit Bruchteile, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$, einer Unze anzugeben, dabei entsprachen zwölf Unzen einem Ganzen. Gerechnet wurde am Rechenbrett gleich den griechischen Rechenmethoden. (vgl. Menninger 1979)

Wie bereits erwähnt galt das römische Interesse kaum abstrakter Theorie. In gehobenen Schichten wurden dennoch die *septem artes liberales*, wörtlich die „sieben freien Künste“, gelehrt (die ihren Ursprung in dem *enkyklios paideia*, dem griechischen Kreis des Wissens, Wissenswerten und Wissensnotwendigen, hatten), welche unter anderem die arithmetische Wissenschaft (die Lehre über die Zahl an sich) und Musikwissenschaft (die Lehre über Zahlenverhältnisse) beinhalteten. Ansonsten waren Lösungsansätze für praktische Problemstellungen von größerem Interesse. Berechnungen in der Architektur und im Vermessungswesen für unterschiedliche Bereiche wie Städtebau oder Militär ließen sogar einen eigenen Berufsstand, den der *Agrimensoren*, entstehen. (vgl. Hein 2010)

Nichts desto trotz herrschte in der Spätantike ein kontinuierlicher Niedergang der Wissenschaft, bis das weströmische Reich, und mit ihm das antike Schul- und Bildungswesen, auf Grund zunehmender Völkerwanderungen im vierten und fünften Jahrhundert nach Christus sein Ende nahm. Zu Beginn des Mittelalters wurde im Jahr 529 schließlich auch die Akademie in Athen geschlossen und das aufkommende Christentum versuchte Wissenschaft eher zu unterdrücken als sie zu fördern, da diese großteils nicht mit dem christlichen Glauben vereinbar war. Die darauffolgenden Entwicklungen werden im nachfolgenden Unterkapitel skizziert. (vgl. Hein 2010 und Wußing 2008)

3.4.2 Mittelalter in Europa und Ländern des Islam

6. Jahrhundert n. Chr.	Der Ostgote Boethius übersetzt „Die Elemente“ ins Lateinische
525	Die christliche Zeitrechnung wird eingeführt
527-565	Justinian I. ist byzantinischer (oströmischer) Kaiser: Er lässt die Akademie in Athen schließen
622	Die islamische Zeitrechnung beginnt

635-651	Die Araber erobern Damaskus, Mesopotamien, Ägypten und Persien
711	Die iberische Halbinsel wird für 500 Jahre von Arabern besiedelt
um 750	Das islamische Kalifat ist am weitesten ausgebreitet (von Portugal bis ins Tal der Indus); Das „Haus der Weisheit“ (ein Ort, für den Austausch über wissenschaftliche Erkenntnisse) wird laut Blum (2007) in Bagdad gegründet (laut Wußing, 2008, erst Anfang des 9. Jahrhunderts)
um 825	Das indische dezimale Positionssystem wird von arabischen Gelehrten übernommen; Araber beginnen indische, griechische und persische Texte zu übersetzen al-Hwarizmi schreibt daraufhin ein Buch über das Rechnen mit indischen Zahlen
999	Gerbert von Aurillac wird Papst, er versucht das arabisch-indische Zahlensystem zu verbreiten
um 1000	Die Wikinger „entdecken“ Amerika; Gerbert von Aurillac führt einen Abakus mit indisch-arabischen Ziffern in Europa ein
11. Jahrhundert	Adelard von Bath übersetzt die arabische Übersetzung von „Die Elemente“ ins Lateinische
1031	Das Kalifat von Córdoba zerfällt
1054	Die Ostkirche wird von der Westkirche getrennt
1096-1099	Erster Kreuzzug
um 1202	Fibonacci schreibt ein Buch über das Rechnen und versucht das arabisch-indische Zahlensystem zu verbreiten; 20 Jahre darauf verwendet er als erster einen Bruchstrich
1270	Letzter Kreuzzug
1275	Marco Polo kommt in Peking an
1258	Bagdad wird von den Mongolen erobert
1337-1453	England und Frankreich befinden sich im Hundertjährigen Krieg
1445	Der Buchdruck wird in Europa erfunden
1453	Konstantinopel wird von den Türken erobert, dadurch endet das byzantinische Kaiserreich

Tabelle 3.4.2 a: Chronologische Kurzübersicht über die europäische und islamische Geschichte im Mittelalter (vgl. Blum 2007, Haarmann 2008 und Wußing 2008)

Das Mittelalter ist auch als „dunkles Zeitalter“ bekannt. Es wird oft mit Rittern, Kreuzzügen und ungebildeten Menschen in Verbindung gebracht. Es gab tatsächlich einen wissenschaftlichen Entwicklungsrückschritt im Vergleich zur griechischen Antike, der sich in etwa zum Beginn unserer Zeitrechnung abzuzeichnen begann und mit dem Ende des weströmischen Reiches seinen Höhepunkt hatte. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass antikes Wissen zum Teil erhalten bleiben konnte und, dass das „finstere“ Mittelalter in Zentraleuropa herrschte und abgesehen von der europäischen, viele Kulturen eine Blütezeit erlebten. Neben beispielsweise den, in vorangegangenen Kapiteln behandelten, Kulturen Asiens oder der Maya in Amerika, erlebten auch die Araber, Usbeken, Tadschiken, Perser, Juden, Turmenen und weitere Völker (kurz als Länder des Islam beziehungsweise Länder unter arabischer Herrschaft zusammengefasst) eine wissenschaftliche Hochphase und hatten großen Einfluss auf das europäische Mittelalter. (vgl. Hein 2010 und Wußing 2008)

Zu Beginn des Frühmittelalters bemühten sich vor allem drei Persönlichkeiten antikes Wissen in Europa zu erhalten: Dank Cassidor und Boethius in Italien und Isidor in Spanien wurde Euklids Werk „Die Elemente“ ins Lateinische übersetzt und in Klosterschulen wurden unter anderem die mathematischen Inhalte der sieben freien Künste (*Quadrivium* genannt) Bestandteil einer „wahren“ Bildung. Des Weiteren war eine wesentliche Herausforderung der Gelehrten Glaube und Wissenschaft zu vereinen um in dem, nun von einer Religion dominierten, Land das bereits bekannte Wissen zu erhalten. (vgl. Hein 2010)

Im Mittelalter wurden römischen Zahlen weiterhin verwendet und Latein hielt sich als Sprache der Gelehrten. Gerechnet wurde hauptsächlich mit den Fingern, da der römische Abakus in Vergessenheit geraten war. Zahlen galten wie in der Antike weiterhin als Menge von Einheiten, Eins wurde also nicht als Zahl angesehen. Berechnet wurde unter anderem das Osterdatum, eine Ausnahme zum sonst kaum vorhandenen wissenschaftlichen Schaffen und das im zunehmend christlichen Europa immer mehr von Interesse war. Umfangreicher wurde die europäische Wissenschaft jedoch erst wieder durch den Einfluss von Ländern unter arabischer Herrschaft. (vgl. Hein 2010 und Wußing 2008)

Das arabische Volk bestand vor dem sechsten Jahrhundert nach Beginn unserer Zeitrechnung hauptsächlich aus Nomaden-Stämmen, die zwischen den Wüsten der arabischen Halbinsel fruchtbare Weideplätze suchten. Die Stämme waren auf Grund des geringen Nahrungsangebotes untereinander verfeindet. Dies änderte sich jedoch als der islamische Prophet Muhammed die Lehre des Islam zu verbreiten begann (durch die Auswanderung Muhammeds 622 nach Medina begann die islamische Zeitrechnung), denn diese neue Religion verlangte Zusammenhalt der gesamten religiösen Gemeinschaft. Dadurch wurde der Weg zu einem geeinten Reich, das sich gegen seine politischen Nachbarn (Persien und das byzantische Reich) behaupten konnte, geebnet. (vgl. Menninger 1979)

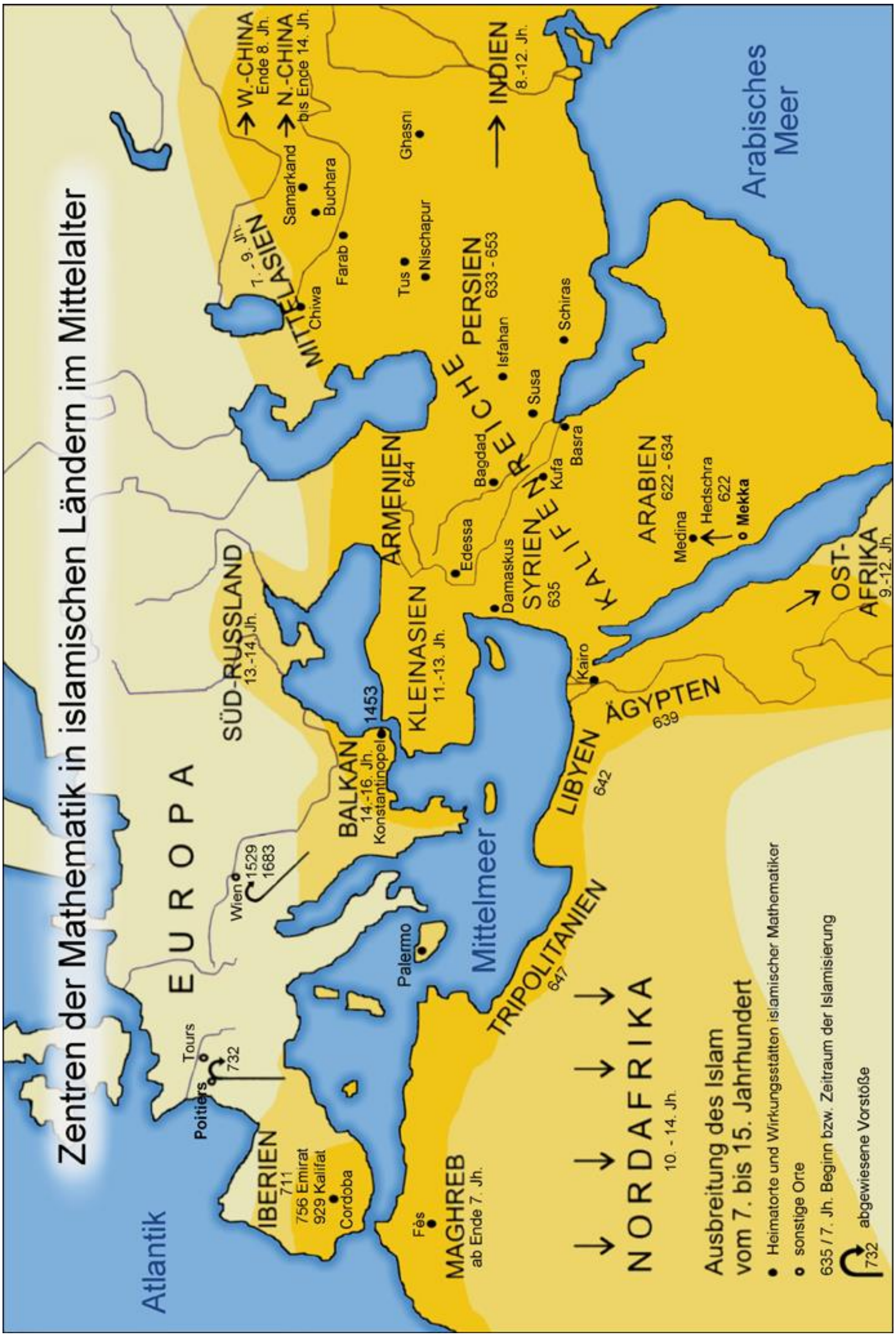


Abbildung 3.4.2 a: Länder des Islam im Mittelalter (Wußing 2008, Seite 221)

Die Araber eroberten sodann, im siebenten und darauffolgenden Jahrhundert des Mittelalters, erfolgreich fast das ganze Gebiet, das in Abbildung 3.4.2 a ockerfarben markiert ist, und erhielten dadurch viele unterschiedliche kulturelle Anregungen für die islamische Wissenschaft. Dabei besaßen die Araber zu Beginn ihres ausgedehnten Reiches noch keine adäquate Zahlschrift um dieses verwalten zu können. Sie hatten die Angewohnheit ihre Zahlen auszuschreiben. Dies taten sie auch in der Verwaltung ihres neuen Reiches, wobei sie in Griechenland und Persien zusätzlich die griechischen Buchstabenziffern benutzten (selbst als sie die griechische Sprache und somit auch Schrift verboten, erlaubten und benutzten sie die griechische Zahlschrift weiterhin). Inspiriert durch die griechischen Buchstabenziffern entwickelten die Araber eine eigene Buchstaben-Zahlschrift, die jedoch im Gegensatz zur griechischen Zahlschrift linksläufig (mit der größten Zehnerpotenz beginnend) geschrieben wurde. (vgl. Haarmann 2008 und Menninger 1979)

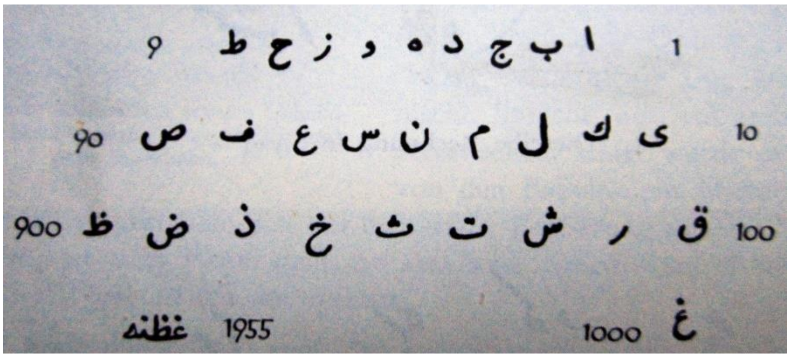


Abbildung 3.4.2 b: Arabische Buchstabenziffern einzeln und am Zahlenbeispiel 1 955 (Menninger 1979, Seite 84)

Bereits im achten Jahrhundert (laut Blum (2007) erst um 825) kam das indische Stellensystem in das arabische Reich und wurde von den dort ansässigen Gelehrten (auch in seiner Ziffernanordnung, die, der in Abbildung 3.4.2 b gezeigten arabischen Buchstabenschrift, entgegengesetzt war) übernommen, da sie die Leistungsfähigkeit dieses Dezimalsystems erkannten. In den zwei darauffolgenden Jahrhunderten wurden dann Einrichtungen geschaffen um wissenschaftliche Texte aus Indien, dem alten Griechenland und Persien zu übersetzen. Unter anderem ließ ein Kalif das „Haus der Weisheit“ bauen, eine Institution um den regen Austausch von Wissenschaftlern aus verschiedenen Kulturen zu fördern. (vgl. Menninger 1979 und Wußing 2008)

Auch auf der von Arabern eroberten iberischen Halbinsel (heutiges Spanien und Portugal) wurden Institutionen (unter anderem in Córdoba und Toledo) zur wissenschaftlichen Übersetzung und Forschung gegründet, in denen islamische, jüdische und christliche Gelehrte friedlich und erfolgreich zusammenarbeiteten (diese Zeit der Zusammenarbeit wird auch „goldenes iberisches Zeitalter“ genannt, wobei es daneben immer wieder kriegerische Auseinandersetzungen zum Zweck der Rückeroberung der iberischen Halbinsel gab). So kam unter anderem antikes griechisches Wissen wieder nach (Südwest-)Europa. Haarmann (2008) schreibt dazu: „Kurios, aber wahr: Die ‚arabische‘ Mathematik der Europäer basiert auf grundlegenden Werken in lateinische[1] Übersetzungen von arabischen Versionen griechischer Originale.“ (Seite 118). Dabei ist zu bemerken, dass im ostarabischen Reich ein viel höheres wissenschaftliches Niveau erreicht wurde als in den europäischen, besetzten Gebieten. (vgl. Blum 2007 und Haarmann 2008)

[1] der Grammatikfehler wurde von Haarmann (2008) übernommen

Die Mathematik der Länder des Islam erreichte ihren Höhepunkt im zehnten bis zwölften Jahrhundert. Zu ihren zahlreichen Übersetzungen fügten sie erläuternde und zum Teil weiterführende Bemerkungen an. Unter anderem schrieb der Gelehrte al-Hwarizmi um 800 ein Buch über das Rechnen mit indischen Zahlen mit dem Titel „al-Kitab al-muhtasar fi hisab *al-ǧabr* wa-l-muqabala“, was mit „Ein kurz gefasstes Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen“ (Wußing 2008, Seite 239) übersetzt werden kann. Der arabische Einfluss auf das Abendland wird unter anderem hier deutlich: Die mathematischen Begriffe „Algorithmus“ und „Algebra“ haben sich aus dem Namen des Autors (al-Hwarizmi) und aus dem Wort „Ergänzen“, *al-ǧabr*, aus dem Titel des erwähnten Werkes, entwickelt. (vgl. Gericke 1984 und Hein 2010)

Ein wesentlicher Teil der mathematischen Errungenschaften der Länder des Islam war das Sammeln, Übersetzen und Erklären des Wissens unterschiedlicher Kulturen. Sie gingen strukturiert vor, was sich ebenfalls in der Verwendung von Begriffen abzeichnete. So verwendeten sie konsequent und einheitlich das Wort Ding für Unbekannte, die wir heute in den meisten Fällen mit „x“ benennen würden. Eine weitere große Errungenschaft war das Rechnen mit Dezimalbrüchen um etwa 1400 (vergleichbar mit der Vorgehensweise in China), wovon al-Kasi, der Dezimalbrüche im arabischen Raum einführte, eventuell aus chinesischen Quellen erfahren hatte. (vgl. Gericke 1984, Hein 2010 und Wußing 2008)

Der große Forschungsdrang der Gelehrten aus Ländern unter arabischer Herrschaft wurde jedoch zum Teil gebremst. Entweder wurde er von jeweils Herrschenden unterbunden oder durch die islamische Religion eingeschränkt, die nur Wissenschaft zuließ, die dem Islam von Nutzen war (wie beispielsweise die Erforschung der Trigonometrie um die *Quibla*, die Ausrichtung nach Mekka, besser bestimmen zu können, da diese die vorgeschriebene Gebetsrichtung war und immer noch ist). (vgl. Blum 2007 und Hein 2010)

Trotz der (zumindest temporären) Zugehörigkeit von Sizilien und der iberischen Halbinsel zum arabischen Reich war der Weg des Wissens und der indischen (oder auch arabisch-indischen) Ziffern nach (Zentral-)Europa weder ein leichter noch ein schneller. Zum einen war die Wissenschaft im westarabischen Reich im Vergleich zum restlichen Reich nicht so fortschrittlich und zum anderen wurde das Wissen und vor allem das neue Zahlensystem großflächig abgeblockt. Trotz allem hatten die süditalienischen Insel und die spanisch-portugiesischen Halbinsel eine wichtige Rolle als Übermittler des neuen Zahlensystems inne. (vgl. Blum 2007 und Hein 2010)

In Europa herrschte lange Zeit die Ansicht, es gäbe nichts mehr zu forschen und das Quadrivium sei das höchste Maß an Wissen sowie Bildung, das man erreichen könnte. Erst um die Jahrtausendwende, unter anderem durch Gerbert von Aurillac, wurde diese Einstellung überwunden. Gerbert von Aurillac reiste viel und lernte dadurch, vermutlich in Spanien, die arabisch-indischen Ziffern kennen. Er bemühte sich, diese praktische Zahlschrift weiter in Europa zu verbreiten, doch selbst seine vier-jährige Amtszeit als Papst half ihm nicht bei diesen Bemühungen. (vgl. Blum 2007 und Hein 2010)

Dennoch hatte Gerbert von Aurillac eine wichtige Rolle auf lange Sicht bei der Verbreitung der indischen Ziffern. Er erfand unter anderem den Klosterabakus, eine Modifizierung des römischen beziehungsweise griechischen Rechenbrettes, auf den statt herkömmlichen

Rechensteinchen mit arabisch-indischen Ziffern beschriftete Rechensteine, wiederum *apices* genannt (gleich den römischen Rechensteinchen), gelegt wurden. Auch die Beschriftung des Klosterabakus wich ein wenig von jener der antiken Rechenbretter ab. In Abbildung 3.4.2 c wird ein solcher Abakus gezeigt und in Abbildung 3.4.2 d, wie auf diesem Zahlen dargestellt wurden. Gerechnet wurde analog zum antiken Abakus, hingegen mit der Erschwernis, dass Zwischenschritte der Bündelung und Ergänzung im Kopf gerechnet werden mussten. (vgl. Blum 2007 und Haarmann 2008)

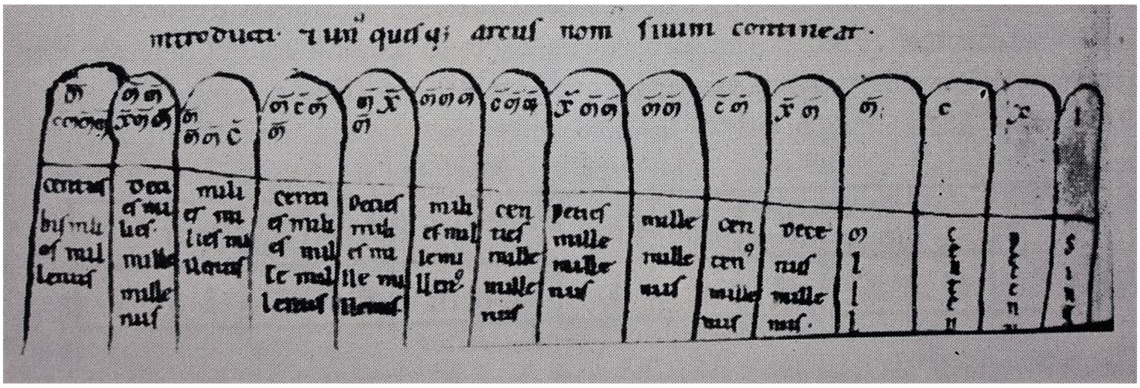


Abbildung 3.4.2 c: „Frühmittelalterlicher Klosterabakus aus einer Handschrift des 12. Jahrhunderts" (Menninger 1979, Seite 133)

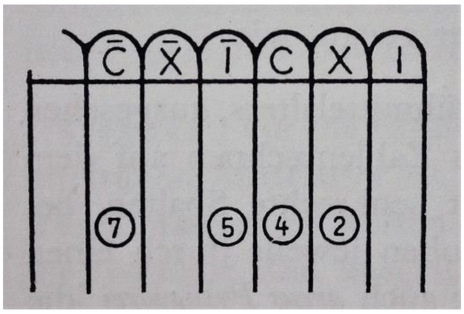


Abbildung 3.4.2 d: Symbolische Darstellung der Zahl 705 420 am Klosterabakus (Menninger 1979, Seite 134)

Obwohl, wie in Abbildung 3.4.2 d zu sehen ist, die Ziffer 0 auch durch eine Leerstelle angezeigt werden konnte, hatte Gerbert von Aurillac ebenfalls einen beschrifteten Rechenstein dafür eingeführt. Jedoch kam dieser bis ins zwölfte Jahrhundert nicht in Verwendung, da er zur Zahlendarstellung nicht notwendig war und die Null in der christlich-religiösen Kultur nicht akzeptiert, wenn nicht sogar gefürchtet wurde (da das Nichts etwas Unvorstellbares war, das mit Unheil in Verbindung gebracht wurde). Durch die Übersetzung von al-Hwarizmis Buch über das schriftliche Rechnen mit indischen Zahlen wurde die Null dann mit der Zeit auch mehr und mehr in Europa benutzt. (vgl. Haarmann 2008 und Wußing 2008)

Neben der Verbreitung der arabisch-indischen Ziffern, stiftete der Klosterabakus auch Verwirrung: Da die beschrifteten apices beliebig verdrehbar waren und Zahlen oft direkt vom Abakus auf das Papier übertragen wurden, entstanden unterschiedliche Ziffern, die zwar auf Rotation der selben Ziffern-Darstellung basierten, jedoch durch häufiges Abschreiben nur mehr schwer erkennbar waren. Es dauerte bis ins 16te Jahrhundert, bis die Ziffern in Europa vereinheitlicht wurden. Seit dem haben sich nur mehr die Ziffern „4" und „7" wesentlich verändert (vgl. mit Abbildung 3.4.2 e). (vgl. Haarmann 2008)

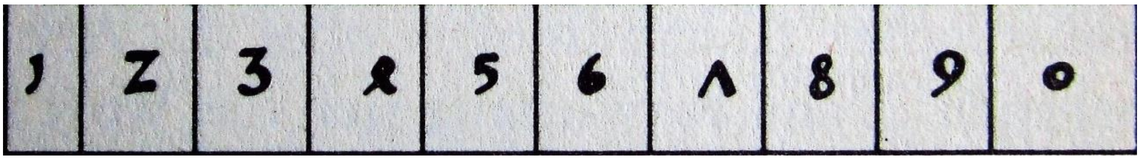


Abbildung 3.4.2 e: Die zehn Ziffern in Europa im 16. Jahrhundert (Ifrah 1986, Seite 535)

Es dauerte mehrere Jahrhunderte bis das indische Zahlensystem in ganz Europa akzeptiert und verwendet wurde (dies geschah erst im 17ten Jahrhundert). Davor mühte sich unter anderem noch Fibonacci Anfang des 13ten Jahrhunderts ab, das dezimale Positionssystem und die damit verbundenen Rechenmethoden weiter zu verbreiten (Fibonacci schrieb außerdem 1228 als erster einen Bruchstrich). Doch sein Erfolg blieb beschränkt. 1299 wurden zum Beispiel in Florenz die arabisch-indischen Ziffern gesetzlich in der Buchhaltung verboten. Es folgten bis in das 16te Jahrhundert weitere Verbote der arabisch-indischen Zahlen. Als Grund dafür wurde das zu leicht mögliche Manipulieren der dezimalen Ziffernschrift (durch Anfügen einer weiteren Ziffer im Nachhinein) genannt, was jedoch sicherlich nicht der einzige Grund war. (vgl. Blum 2007 und Haarmann 2008)

Um das Unterkapitel über Zahlen im Mittelalter abzuschließen, wird eines der bekanntesten Beispiele aus der mittelalterlichen europäischen Unterhaltungsmathematik (nach der Jahrtausendwende) gegeben:
„Ein Mann musste einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf über einen Fluss bringen und konnte nur ein Schiff finden, das nicht mehr als zwei Gegenstände tragen konnte. Es war ihm aber vorgeschrieben, dass er sie alle unverletzt hinüberbringen sollte. Sage, wer es kann, wie er sie alle unverletzt hinüberbringen konnte.“ (Hein 2010, Seite 75)

3.4.3 Zahlengeschichte ab dem 15ten Jahrhundert

Renaissance um 1400-1630 n. Chr.	Mitte 15. Jahrhundert: Indische Zahlen setzen sich großflächig in Europa durch; Buchdruck mit beweglichen Buchstaben wird erfunden 1492: Das letzte maurische Kalifat auf der iberischen Halbinsel, Granada, geht unter (Ende der Reconquista, d.h. Rückeroberung Spaniens durch die Christen von den Arabern); Kolumbus „entdeckt“ Amerika 16. Jahrhundert: negative Zahlen setzen sich in Europa durch; Adam Ries verfasst Bücher über das schriftliche (indische) Rechnen und das Rechen mit Abakus; Simon Stevin führt Dezimalbrüche in Europa ein 1582: Der Gregorianische Kalender wird in allen katholischen Ländern eingeführt 1591: Vieta verwendet als erster Variablen zum Rechnen 1617: Das Komma wird für Dezimalzahlen von Napier eingeführt 1618: Der Dreißigjährige Krieg beginnt

	um 1623: Es gibt die erste Rechenmaschine für Additionen
Aufklärung Mitte 17.-18. Jahrhundert	1679: Leibniz propagiert das Binärsystem 1680: Indische Zahlen setzen sich ganzheitlich in Europa durch 1700: Russland führt den Julianischen Kalender ein 1789: Französische Revolution
seit 19. Jahrhundert	19. Jahrhundert: Industrialisierung kommt auf; Komplexe Zahlen werden dank Gauß verständlich 1914-1918: Erster Weltkrieg 1918: Russland führt den Gregorianischen Kalender ein 1938-1945: Zweiter Weltkrieg 1941: Die erste digitale elektromechanische Rechenmaschine ist funktionstüchtig etwa ab 1980: Computer werden in der Arbeitswelt und auch privat zunehmend wichtiger und weiter verbreitet

Tabelle 3.4.3 a: Chronologische Kurzübersicht über europäische Geschichte nach dem Mittelalter (vgl. Blum 2007, Wußing 2008 und Wußing 2009)

Die Renaissance, im Französischen Wiedergeburt bedeutend, ist die Bezeichnung für eine Zeit, der erneuten Entfaltung von Kunst, Kultur und Wissenschaft. Keine 100 Jahre nach Beginn dieser Epoche setzte sich, unter anderem da der Buchdruck vereinfacht und Papier günstiger wurde (davor wurde großteils auf Papyrus geschrieben), die arabisch-indische Zahlschrift schließlich in Europa durch, jedoch nicht überall. Ende des 15ten Jahrhunderts verbot beispielsweise der Frankfurter Bürgermeister seinen Buchhaltern die Verwendung der indischen Ziffernschrift und selbst Ende des 16ten Jahrhunderts wurde Kaufleuten in Antwerpen noch verordnet römische Zahlen für ihre Rechnungen zu benutzen. Eine endgültige Durchsetzung der indischen Ziffernschrift kann laut Blum (2007) erst 1680 verzeichnet werden. (vgl. Blum 2007 und Haarmann 2008)

Die ersten Rechenbücher, die in Deutschland gegen Ende des 15ten und um den Anfang des 16ten Jahrhunderts erschienen, behandelten noch beide Zahlensysteme, das römische und das indische. Einer der Autoren, Adam Ries, empfahl beispielsweise, nach der Vorstellung der Rechenmethoden beider Zahlensysteme, das Rechnen mit der indischen Ziffernschrift durchzuführen und die Ergebnisse mit den römischen Zahlen festzuhalten. In der Renaissance wurden außerdem negative Zahlen und Dezimalbrüche beziehungsweise etwas später auch Dezimalzahlen mit Verwendung eines Kommas populär und erstmals wurde mit Variablen gerechnet. (vgl. Haarmann 2008 und Wußing 2008)

Nach seinem beschwerlichen und langwierigen Weg nach Europa blieb das indische Ziffernsystem bis heute erhalten und ist, nicht nur in Europa, sondern auf der ganzen Welt das meistbenutzte. Selbst die alten Rechenmethoden werden heute noch kaum verändert angewandt. Im Gegensatz zur Zahlendarstellung hat sich der Zahlenbegriff noch weiterentwickelt. (vgl. Haarmann 2008 und Menninger 1979)

So wurden neben den, seit der Antike bekannten, natürlichen und rationalen (Bruch-)Zahlen die reellen und die komplexen Zahlen eingeführt. Während irrationale Zahlen (ein Bestandteil der reellen Zahlen) den altgriechischen Mathematikern und Mathematikerinnen als inkommensurable Größen bekannt waren, und laut Wußing (2008) die Gelehrten im Mittleren und Nahen Osten diese bereits kannten, wurde mit komplexen Zahlen erst ab dem 18ten Jahrhundert vermehrt gerechnet und erst im 19ten Jahrhundert wurden sie verständlich definiert. (vgl. Arens, Busam, Hettlich, Karpfinger & Stachel 2013,Wußing 2008 und Wußing 2009)

Für eine genauere Ausführung aller Zahlenarten sei auf Arens et al. (2013) und Wußing (2009) verwiesen.

Neben den genannten Erkenntnissen war die Mathematik und Wissenschaft der Neuzeit generell sehr fortschrittlich und innovativ. Zur Zeit der Aufklärung entwickelte sich vor allem die Mathematik der Bewegung, wie Differential- und Integralrechnung, und das neue Themengebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik wurde begründet. Des Weiteren verbreitete der deutsche Mathematiker Leibniz das binäre Zahlensystem. (vgl. Blum 2007, Wußing 2008 und Wußing 2009)

Wie das indische oder das jüngste sumerische Zahlensystem ist auch das binäre ein (unbenanntes) Positionssystem, mit dem Unterschied, dass es statt zehn oder 60 Zahlzeichen nur zwei hat: „0“ und „1“. Geschrieben wird es mit der höchsten Stelle beginnend von links nach rechts und jede Stelle gibt die Anzahl einer Zweier-Potenz an. Die Zahl **10010110** ist beispielsweise gleichbedeutend mit der dezimalen Zahl **150**, denn:

$$10010110 = 1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 128 + 16 + 4 + 2 = 150$$

Jede binäre Zahl kann so im Dezimalsystem angegeben werden und umgekehrt kann jede Zahl im Binärsystem dargestellt werden. Das Rechnen im Binärsystem funktioniert analog zum Rechnen in anderen Positionssystemen, mit dem großen Vorteil, dass man sich für die Multiplikation nur ein sehr kurzes Einmaleins merken muss:

0x0 = 0
0x1 = 0
1x0 = 0 und
1x1 = 1.

Ein Nachteil der binären Zahlendarstellung ist hingegen die Länge der Zahlen im Vergleich zur Darstellung im dezimalen Positionssystem. Die große Wichtigkeit, die das binäre System heute, unter anderem als Basis von Computern, einnimmt, war damals noch nicht bekannt.
(vgl. Blum 2007 und Haarmann 2008)

Die Entwicklung der ersten Rechenmaschinen geht auf das 16te Jahrhundert zurück, als ein französische Uhrmacher die erste Maschine zum Addieren baute. Zu Beginn der Aufklärung bemühten sich Leibniz und Pascal um Rechenmaschinen, dabei skizzierte Leibniz eine, die mit binärem System funktionieren sollte, die jedoch erst 1936 von Zuse gebaut wurde. Große Bedeutung gewannen diese damaligen Rechenhilfen noch nicht, erst im nachfolgenden

Jahrhundert kam es zur Weiterentwicklung und praktischen Verwendung solcher mechanischen Rechenmaschinen. Vielfach und vermehrt wurden noch Rechenbretter benutzt (das russische Kugelrechenbrett wird in manchen abgelegenen Gebieten sogar heute noch zum Teil benutzt). (vgl. Blum 2007 und Wußing 2009)

Das 19te Jahrhundert brachte dann, im Laufe der aufkommenden Industrialisierung, die Möglichkeit auch Rechenmaschinen in großen Mengen zu produzieren, welche dadurch in öffentlichen Bereichen, wie der Verwaltung, fortwährend in Verwendung kamen. (vgl. Wußing 2009)

Kurz vor Beginn des 20ten Jahrhunderts erfand ein Franzose die ersten Maschinen, die direkt multiplizieren konnten und in Amerika entwickelte Hollerith das intelligente System der Lochkarten. Diese sogenannten Hollerithmaschinen boten eine gewaltige Erleichterung in der Stadtverwaltung und blieben noch bis Mitte des Folgejahrhunderts in Gebrauch. (vgl. Wußing 2009)

Die zunehmende Industrialisierung stärkte außerdem die Schulung praktischen Wissens, unter anderem durch die Einführung von Ingenieurschulen, während auf der anderen Seite auch die abstrakte Mathematik näher erforscht wurde. Trotz der Einschränkung mancher Gelehrter durch ihren Glauben (Kronecker meinte beispielsweise „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk“ (Blum 2007, Seite 147) und war der Meinung, alles Wahre könne in endlich vielen Schritten gezeigt werden) wurden auch Begriffe wie das Unendliche in dieser Zeit definiert. (vgl. Blum 2007 und Wußing 2009)

Auch das darauffolgende Jahrhundert steckte voller Forschungsdrang und Erfindergeist. 1941 konstruierte Zuse die von Leibniz skizzierte Maschine, eine programmgesteuerte Rechenanlage, die vollautomatisch funktionierte. Zwei Jahre darauf stellt unter anderem Turing die erste elektronische Rechenmaschine fertig (eine Entwicklung, deren Verwirklichung für Kriegszwecke im zweiten Weltkrieg ermöglicht wurde). (vgl. Wußing 2009)

Die Weiterentwicklung elektronischer Rechenmaschinen, sowie Computer für höhere Zwecke und mit immer größeren Rechengeschwindigkeiten blieb und ist bis heute im Gange. Im 21ten Jahrhundert haben Zahlen auch in der Unterhaltung vermehrt Eingang gefunden: Seit 2004, als das erste *Sudoku* in Europa verbreitet wurde, kann man in fast jeder Zeitung solche japanischen Zahlenrätsel finden. (vgl. Wußing 2009)

3			2					1
		2				7		
	6			7	9		5	
		7	1		6			8
		8				9		
6			9		8	1		
	9		5	6			4	
		6				2		
4					1			5

Abbildung 3.4.3 a: Ein Sudoku: In jeder Spalte, Zeile und jedem 3x3-Quadrat sollen die Ziffern 1-9 genau einmal vorkommen ([Link 10]*)*

Seit dem Mittelalter hat Europa eine führende Rolle in der internationalen Forschung der Mathematik, hat diese jedoch (nach Blum (2007)) durch die verstärkte Emigration im zweiten Weltkrieg ausgezeichneter Wisschenaftler und Wissenschaftlerinnen an die Vereinigten Staaten von Amerika abgegeben. (vgl. Blum 2007)

4 Zusammenfassende und abschließende Bemerkungen

In den vorangegangenen Kapiteln wurde ein Einblick in verschiedene Zahlendarstellungen und Zahlensysteme gegeben (jedoch bei weitem nicht in alle, da dies den Rahmen dieser Arbeit gesprengt hätte). Während der erste (schriftliche) Zahlengebrauch mehrere 100 000 Jahre zurückliegt, entstanden die ersten komplexen Zahlensysteme vor etwa 5 000 bis 7 000 Jahren. (vgl. Haarmann 2008)

Solche Zahlensysteme entwickelten sich erst durch das Sesshaftwerden der Völker. Die Nahrungsgewinnung wurde durch Kultivierung des Landes und Arbeitsteilung innerhalb der Gemeinschaft vereinfacht und ermöglichte einen Wohlstand, der für manche Mitglieder der Gesellschaft mehr Zeit für geistige Aktivitäten schuf. Des Weiteren verlangten die sozialen Strukturen eine Verwaltung um optimal zu funktionieren. (vgl. Blum 2007)

Die Verwaltung motivierte den Gebrauch einer Schrift und Zahlschrift (beziehungsweise eines Knotensystems auf Schnüren), war jedoch nicht die einzige Motivation für einen Zahlengebrauch. Während Zahlen Buchhaltern halfen wirtschaftliche Prozesse festzuhalten, verwendeten Schamanen und Priester Zahlen für mystische Deutungen. An dieser Stelle sei unter anderem an die chinesische Wahrsagung und den rituellen Kalender der Maya erinnert. (vgl. Gericke 1984, Haarmann 2008, Ifrah 1986 und Menninger 1979)

Zahlensysteme und auch die Zahlsprache gingen häufig aus dem Zählen mit Hilfe von Körperteilen hervor. Oft wurden die zehn Finger und in mehreren Fällen ebenfalls die zehn Zehen zum Zählen zur Hilfe genommen. Diese Hilfsmittel spiegelten sich dann in vielen Fällen in den erfundenen Zahlensystemen wieder: Zehner- und Zwanzigersysteme treten besonders häufig in der Kulturgeschichte auf. (vgl Ifrah 1986 und Menninger 1979)

Interessanterweise wurde die Struktur anderer Hilfsmittel, wie jene der Rechenbretter, erst spät in den Zahlschriften eingebracht. Im revolutionären dezimalen Positionssystem aus Indien wurde die Struktur des Rechenbrettes übernommen, mit der Folge, dass dieses Zahlensystem heute weltweit verbreitet ist (über Rechenhilfen der Maya ist nichts bekannt, ebenso kaum etwas über sumerische Rechenbretter). Dabei hatte vor allem die Verwendung der Null eine Schlüsselrolle. (vgl. Ifrah 1986 und Wußing 2008)

Des Weiteren kann bemerkt werden, dass Zahlsprache und Zahlschrift nicht immer demselben Prinzip folgten und folgen. Beispielsweise entsprach die germanische Zahlsprache einem dezimalen benannten Positionssystem (mit unregelmäßigen Ausnahmen der Zahlen elf bis 99) und dennoch wurden lange die römischen gereihten Ziffern verwendet. Erst durch die Einführung der arabisch-indischen Zahlen passten geschriebene Zahlen zu den gesprochenen (abgesehen von den bereits erwähnten Ausnahmen). (vgl. Menninger 1979)

Auch Zahlschrift und Schreibschrift müssen nicht zwingend identisch sein. Es ist sogar so, dass nur in wenigen Kulturen die Schreibschrift gleich der Zahlschrift ist. Abgesehen von der altsumerischen, chinesischen und altägyptischen Kultur, gibt es in allen weiteren Kulturen von der sonstigen Schrift abweichende Zahlensymbole, sodass Zahlen sowohl mit Zahlzeichen als auch in der jeweiligen Schrift ausgeschrieben werden können (auf Deutsch kann beispielsweise „32“, aber auch „Zweiunddreißig“ geschrieben werden). Wie an dem deutschen Beispiel gesehen wird, kann eine Zahlschrift durch eigene Zahlzeichen wesentlich verkürzt werden. (vgl. Menninger 1979)

Eine Verkürzung durch eigene Zahlzeichen schafft ebenfalls eine Erleichterung beim schriftlichen Rechnen. Außerdem wird das schriftliche Rechnen (vor allem das Multiplizieren und Dividieren) durch die Verwendung eines Positionssystems bedeutend vereinfacht. Vor der Erfindung des indischen Positionssystems hatten es nur die Maya und die sumerische beziehungsweise babylonische Kultur geschafft ebenfalls ein Positionssystem zu entwickeln. (vgl. Ifrah 1986)

Einige hundert Jahre später wurde unter anderem das Binärsystem entwickelt, ein Positionssystem, das vor allem in den letzten 100 Jahren an Bedeutung gewonnen hat, da es heute Grundlage jedes Computers und programmgesteuerten elektronischen Gerätes ist. Neben dieser Errungenschaft hat sich auch die Begrifflichkeit der Zahl verändert. Während in der Antike eine Zahl als Menge von Einheiten angesehen wurde, hat sich der Zahlbegriff mit der Zeit ausgedehnt. Heute wird zwischen verschiedenen Zahlarten unterschieden; dabei werden Zahlen, die der antiken Definition entsprechen, als natürliche Zahlen (eventuell ohne eins) klassifiziert. (vgl. Blum 2007 und Wußing 2009)

Abschließend ist es ebenfalls interessant, die Motivation für mathematische Forschung zu betrachten. In vielen Perioden wurde die Mathematik unter anderem von religiösen Motiven angetrieben, wie beispielsweise die Vermessung von Opferplätzen in Indien oder die Berechnung der Quibla in Ländern des Islam, (zum Teil jedoch auch gebremst, wie in Europa zu Beginn des Mittelalters). Ansonsten entwickelte sie sich auf Grund einer Vielzahl praktischer Problemstellungen, und wurde später ebenfalls um ihrer selbst willen erforscht (erstmals im babylonischen Mesopotamien und kurz darauf im antiken Griechenland). Die Entwicklung der Mathematik stand jedenfalls in engem Kontakt mit den zugrundeliegenden kulturellen Gegebenheiten. (vgl. Blum 2007, Ifrah 1986 und Wußing 2008)

In diesem Sinne werden daher in dieser Arbeit neben der historischen Entwicklung der Zahlen einige Ausschnitte internationaler Kulturgeschichte betrachtet. (vgl. Menninger 1979)

Literaturverzeichnis

Arens, T., Busam, R., Hettlich, F., Karpfinger, C. und Stachel, H. (2013). *Grundwissen Mathematikstudium. Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen*. Springer-Verlag: Berlin Heidelberg.

Beck, C. H. (2011). *Das Reich der Azteken. Geschichte und Kultur.* C.H.Beck oHG: München.

Becker, C., Eusemann, B., Geißler, K., Hess, J., Siebeck, H., Schlitt, S. und Wiegand, R. (2011). *Was jeder wissen muss. 100 000 Tatsachen zur Allgemeinbildung.* Duden: Mannheim.

Blum, W. (2007). *Schnellkurs Mathematik*. DuMont: Köln.

Fettweis, E. (2016). Rechenmethoden aus fremdartigen Kulturen vergangener Zeiten und der Jetztzeit. *Schweizer Schule, 1953* (8), 253-257. doi: 10.5169/seals-532044.

Gericke, H. (1984). *Mathematik in Antike und Orient*. Springer-Verlag: Berlin Heidelberg New York Tokyo.

Grube, N. (Hrsg.). (2006). *Maya. Gottkönige im Regenwald*. Könemann: Köln.

Haarmann, H. (2008). *Weltgeschichte der Zahlen. C.H.* Beck: München.

Hein, W. (2010). *Die Mathematik im Mittelalter: von Abakus bis Zahlenspiel.* WBG: Darmstadt.

Ifrah, G. (1986). *Universalgeschichte der Zahlen.* Campus Verlag: New York.

Martzloff, J. (1997). *A history of chinese mathematic*s. Springer: Berlin Heidelberg.

Menninger, K. (1979). *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl.* Vandenhoeck und Ruprecht: Göttingen.

Morris, N. (2003). *Mayas Azteken Inkas*. Tessloff: Nürnberg.

Neurohr, A. (2010). *Morphologische Strukturanalyse des Codex Dresden. Analytische und synthetische Methoden für ein erweitertes Verständnis einer Handschrift der Maya aus der Zeit vor ihrem Kontakt mit den Europäern.* Bonn: Friedrich-Wilhelms-Universität, Philosophische Fakultät.

Schröder, T. (Hrsg.). (2006). *Pan-amerikanische Skizzen. Mit Fahrrad, Bahn, Schiff und Auto von Alaska nach Feuerland*. Books on Demand GmbH: Nordstedt.

Wußing, H. (2008). *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise. I: Von den Anfängen bis Leibzig und Newton.* Springer-Verlag: Berlin Heidelberg.

Wußing, H. (2009). *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 2. Von Euler bis zur Gegenwart.* Springer-Verlag: Berlin Heidelberg.

Internetquellen

[Link 1]: http://www.faszination2012.com/seiten/literaturseiten/mathekapitel.pdf, Zugriff am 24.11.2016

[Link 2]: http://wikinger.org/wikinger/, Zugriff am 27.10.2016

[Link 3]: http://www.mathezentrale.de/maya/maya3.htm, Zugriff am 21.11.2016

[Link 4]: http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/numerator-rechnen-wie-die-azteken-a-545363.html, Zugriff am 29.11.2016

[Link 5]: http://sciencev1.orf.at/news/151206.html, Zugriff am 30.11.2016

[Link 6]: https://educationinjapan.wordpress.com/of-methods-philosophies/saluting-the-soroban-j-abacus/the-invention-of-the-abacus-or-soroban/, Zugriff am 31.01.2017

[Link 7]: http://www.spasslernen.de/geschichte/ges2.htm, Zugriff am 27.02.2017

[Link 8]: https://segu-geschichte.de/wp-content/uploads/2016/09/ZeittafelGeschichte.pdf, Zugriff am 01.03.2017

[Link 9]: http://www.opera-platonis.de/dedekind/Dedekind_Was_sind_2.pdf, Zugriff am 10.03.2017

[Link 10]: http://hahnconsultinggroup.com/Photos/sudoku-free-printable, Zugriff am 11.03.2017