



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology

Unterschrift der Betreuerin

DIPLOMARBEIT

THALES, PYTHAGORAS UND ARCHIMEDES – Ein Einblick in die antike Mathematik

Ausgeführt am Institut für
Analysis und Scientific Computing der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof.Mag.rer.nat.Dr.rer.nat. Gabriela Schranz-Kirlinger

durch
Katharina Kausel
Witthauergasse 22/7, 1180 Wien

11. Mai 2017

Unterschrift der Studentin

VORWORT

Bei dieser Arbeit war es mir schon bei der Themenfindung ein besonderes Anliegen meine beiden Fächer Latein und Mathematik in irgendeiner Weise zu verknüpfen, da ich beide Themengebiete überaus interessant finde. Also habe ich beschlossen die antike Mathematik bzw. drei berühmte Mathematiker der Antike, Thales, Pythagoras, und Archimedes, näher zu beleuchten.

Es hat mir viel Spaß bereitet mit alten Büchern und Quellen zu arbeiten, weswegen ich zum Beispiel versucht habe die Lebensläufe der drei behandelten Mathematiker beinahe ausschließlich mit Hilfe von lateinischen oder altgriechischen Quellen zusammenzustellen, deren Verfasser weit vor unserer Zeit gelebt haben.

Auch im mathematischen Teil war es mir ein Anliegen zu zeigen, wie die Mathematik damals tatsächlich ausgesehen hat, weshalb ich mich zum Beispiel an die Originalnotation gehalten habe, was die Beweise in den Augen mancher vielleicht verkompliziert. Ich möchte dem Leser und der Leserin das Gefühl geben in die Vergangenheit reisen zu können und in den alten Aufzeichnungen zu blättern, mit dem Unterschied, dass es dieses Mal besser möglich ist das Gelesene auch zu verstehen, da es mit Hilfe von selbst erstellten Graphiken und Erklärungen aufbereitet wurde.

Es wird in dieser Arbeit jedoch nicht nur auf die antike Mathematik ein besonderes Augenmerk gelegt, sondern auch die noch ältere Mathematik der Ägypter und Babylonier beleuchtet und versucht herauszufinden, was bereits vor der griechischen Mathematik existierte und worauf diese Mathematik aufgebaut wurde. Hier hoffe ich, dass es mir gelungen ist, den einen oder anderen Leser bzw. die eine oder andere Leserin vielleicht ein wenig zu verblüffen.

Wichtig ist es mir zu betonen, dass sich meine Arbeit nicht nur an Mathematiker und Mathematikerinnen richtet, sondern an alle Interessierten, weshalb bei den mathematischen Teilen versucht wurde sorgfältige Erklärungen hinzuzufügen und keine Zwischenschritte auszulassen.

Weiters richtet sich diese Arbeit nicht an diejenigen, die zum Beispiel den schnellsten oder einfachsten Beweis des Satzes des Pythagoras suchen, sondern an alle Menschen, die sich dafür interessieren, die antike Mathematik und deren Persönlichkeiten besser kennenzulernen und zu verstehen. Auch wenn das bedeutet einen komplizierteren und längeren Beweis hinzunehmen mit einer von unserer abweichenden Notation. Als Beweise wurden immer diejenigen ausgewählt, die der jeweilige Mathematiker selbst erstellt hat oder erstellt haben könnte oder einer von einer anderen antiken Persönlichkeit, z.B.: Euklid, der uns bis heute erhalten worden ist.

Ich hoffe mit dieser Arbeit einen Einblick in die antike Mathematik zu geben, da sie der Grundstock unserer gesamten heute existierenden Mathematik ist und schon aus diesem Grund hochinteressant und enorm wichtig.

DANKSAGUNG

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei Frau Univ.-Prof. Dr. Schranz-Kirlinger bedanken, die meine Diplomarbeit betreut und mir durch diese nicht immer einfache Zeit geholfen hat. Ich danke Ihnen für die schnellen Rückmeldungen und die Verbesserungsvorschläge, die sie mir gegeben haben. Ich habe mich die ganze Zeit hindurch gut betreut und unterstützt gefühlt und würde jederzeit wieder eine Arbeit bei Ihnen schreiben.

Ein weiterer großer Dank geht an meinen Vater, Wilfried Kausel, an den ich mich immer wenden konnte, wenn ich Probleme hatte die teilweise komplizierten Rechenschritte bzw. die Sprache der antiken Mathematiker nachzuvollziehen. Nicht nur einmal sind wir zusammen an einem Tisch gesessen, haben die Hände über dem Kopf zusammengeschlagen und überlegt, was uns zum Beispiel die Babylonier mit diesen kryptischen Formulierungen und Zahlen sagen wollen.

Außerdem danken möchte ich meiner Mutter, Andrea Kausel, meinem Bruder, Emanuel Kausel, meinem Freund, Abdul Kaya und meinen Freundinnen Franziska Wiedmann, Yvonne Poul und Charlotte Brey. Danke, dass ihr immer für mich da seid und mich in allem, was ich mir vornehme, unterstützt. Danke, dass ihr zuhört und mir immer mit guten Ratschlägen zur Seite steht.

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	2
Danksagung	4
I. Einführung.....	7
1. Mathematik im antiken Griechenland.....	7
Die altgriechische Zahlenschrift.....	8
2. Die ungewöhnliche Notation der griechischen Mathematiker	10
3. Wichtige Quellen für die vorliegende Arbeit	11
Ägyptische und Babylonische Quellen	11
Euklid.....	13
4. Zeittafel.....	15
II. Thales von Milet.....	17
1. Leben und Umfeld	17
2. Werk	22
Die Sätze des Thales.....	22
Die „thaletische Grundfigur“	26
Beweise.....	27
Weitere Sätze.....	30
3. Vorgeschichtliche Quellen: „Satz des Thales“	31
Ägypten.....	31
Babylonien.....	31

III.	Pythagoras von Samos.....	38
1.	Leben und Umfeld	38
	Pythagoras Lehre und die Pythagoreer	43
2.	Werk.....	47
	Der „Satz des Pythagoras“	47
3.	Vorgeschichtliche Quellen: „Satz des Pythagoras“	62
	Ägypten.....	63
	Babylonien.....	64
IV.	Archimedes von Syrakus	70
1.	Leben und Umfeld	70
2.	Werk.....	77
	Die Kreismessung	82
3.	Vorgeschichtliche Quellen: Umfang und Fläche des Kreises, Annäherungen an die Zahl π	97
	Ägypten.....	97
	Babylonien.....	98
	Griechenland.....	99
	Literaturverzeichnis.....	101
	Onlineressourcen	104
	Abbildungsverzeichnis	106

I. EINFÜHRUNG

1. Mathematik im antiken Griechenland

Bereits in der Odysee, einem Epos, das vom Dichter Homer¹ vermutlich einige Zeit vor Thales Geburt geschrieben wurde, kommt vor, dass die Griechen das Zählen und auch das Rechnen beherrschten. Allerdings hatte die damalige Mathematik noch nichts mit unserer heutigen Wissenschaft zu tun, sondern wurde nur für praktische Zwecke benutzt. Mit Hilfe der Mathematik konnten vorrangig Geldgeschäfte abgeschlossen und manchmal auch militärische Fragen geklärt werden, weshalb sie zu dieser Zeit vorrangig von Kaufleuten, Steuereintreibern oder Händlern beherrscht wurde.² Thales von Milet, der in der vorliegenden Arbeit in *Kapitel II* behandelt wird, war der erste Mathematiker, der versuchte die damalige Mathematik in eine wissenschaftliche Form zu bringen und somit den Grundstein für unsere heutige Mathematik legte.³

Weiters war die Mathematik keine Wissenschaft, die man ausschließlich betrieb, sondern sie war immer mit anderen Wissenschaften verknüpft, so zum Beispiel mit Mechanik und Astronomie, aber auch mit weniger naheliegenden Bereichen wie Architektur oder Philosophie bzw. Religion^{4,5} Sie galt sogar bis zur hellenistischen (= alexandrinschen) Periode⁶ eher als „*Teilgebiet der Philosophie*“ (Wussing, 1965, S. 76) und zum Beispiel Thales oder Pythagoras hätten sich selbst vermutlich nicht als Mathematiker, sondern als reine Philosophen bezeichnet.⁷

Da Papier ein sehr teures Gut war, rechneten die Griechen mit Hilfe eines Rechenbretts, eines sogenannten *Abakus*, bzw. eines Tisches, in den Linien gezogen waren. Darauf

¹ Homer lebte vermutlich im achten oder neunten Jahrhundert vor Christus und ist der Verfasser von zwei sehr bekannten Epen, nämlich der Odysee und der Ilias. (<https://www.britannica.com/>)

² (Wussing, 1965, S. 58 und 62)

³ (Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*, 1956, S. 146)

⁴ So zum Beispiel bei den Pythagoreern und ihrer Glaubengrundlage: „Alles ist Zahl“. Nachzulesen in der vorliegenden Arbeit in *Kapitel III, 1.*

⁵ (Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*, 1956, S. 17)

⁶ ca. 300 - 150 v. Chr. (Scriba & Schreiber, 2002, S. 26)

⁷ (Wussing, 1965, S. 76)

wurden lose Rechensteinchen, die *Psephoi*, gelegt. Die Steinchen, die in die unterste Reihe gelegt wurden, hatten den Wert 1, die Steinchen der darüber liegenden Reihe den Wert 10 usw. Mit Hilfe dieses Brettes konnten die Griechen auch schwierigere Rechnungen mit mehrstelligen Zahlen in kurzer Zeit lösen.⁸ Außerdem gibt es Quellen, die davon berichten, dass man auch die eigenen Finger zur Hilfe nahm.⁹

Die Sprache, in der die Sätze und Beweise formuliert wurden, klingt für jemanden, der sich noch nie mit der altgriechischen Mathematik beschäftigt hat, sehr eigenartig und erinnert eher an das Gerichtswesen. Die damaligen Mathematiker hatten es nicht leicht ihre Leser und Leserinnen von der Richtigkeit eines Beweises oder Schrittes innerhalb eines Beweises zu überzeugen, da diese Art der Mathematik neu war und nicht ohne Skepsis betrachtet wurde. Um zu überzeugen, argumentierten und zerlegten die Mathematiker alles bis ins kleinste Detail und bauten ihre Beweise in etwa so auf wie eine Verteidigungsrede vor Gericht, was in der vorliegenden Arbeit vor allem bei Euklids Beweisen auffällt.¹⁰

Die altgriechische Zahlenschrift

Jeder, der sich ein wenig mit Mathematik beschäftigt, kennt die immer noch erhaltenen griechischen Buchstaben, mit denen zum Beispiel heutzutage noch die Winkel bezeichnet werden. Wie jedoch sahen die altgriechischen Zahlzeichen aus? In der frühesten Zeit verwendeten die Griechen eine Zahlenschrift, die stark an die späteren römischen Ziffern erinnert und folgendermaßen aussah:¹¹

⁸ (Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*, 1956, S. 77f.)

⁹ (Wussing, 1965, S. 58)

¹⁰ (Lurje, 1948, S. 21)

¹¹ (Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*, 1956, S. 75)

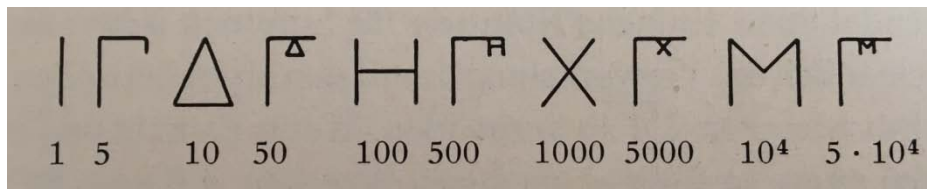


Abbildung 1: (Van der Waerden, Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, 1956, S. 75)

Die meisten dieser verwendeten Zeichen waren die Anfangsbuchstaben der zu beschreibenden Zahlen: So heißt zum Beispiel fünf auf altgriechisch *pente* = Πεντε, zehn heißt *deka* = Δεκα oder tausend *xilioi* = χιλιοι.¹²

Später wurde diese Zahlenschrift durch eine andere ersetzt, bei der die Buchstaben des griechischen Alphabets auch als Zahlen verwendet wurden.

1 – 9	α, β, γ, δ, ε, ς, ζ, η, θ	(6 = ς = Vau)
10 – 90	ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ϗ	(90 = ϗ = Koppa)
100 – 900	ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, Ϙ	(900 = Ϙ = Sampi)
1000 – 9000	α, β, etc.	(Strich links unten)

Abbildung 2: (Van der Waerden, Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, 1956, S. 75)

Da das griechische Alphabet jedoch nur aus vierundzwanzig Schriftzeichen besteht, aber siebenundzwanzig für die Zahlendarstellung benötigt werden, wurden die drei Schriftzeichen Vau, Koppa und Sampi, ergänzt.¹³

Um Zahlen von Buchstaben bzw. Wörtern unterscheiden zu können, fügte man entweder einen waagrechten Strich über, oder ein Apostroph am Ende der Zahl hinzu.¹⁴

¹² (<https://woerterbuch-altgriechisch-latein.com/>)

¹³ (Herrmann, 2014, S. 10f.)

2. Die ungewöhnliche Notation der griechischen Mathematiker

Da sich die Notation der verwendeten Originalquellen in vielerlei Hinsicht von der heutigen unterscheidet, werden hier ein paar Beispiele angeführt, die helfen das Leseverständnis zu erhöhen und der Autorin dieser Arbeit aufgefallen sind:

- ❖ Strecken werden mit den Großbuchstaben ihrer jeweiligen Endpunkte bezeichnet und wie Vektoren betrachtet, was bedeutet, dass die jeweilige Richtung bei der Bezeichnung eine Rolle spielt.
- ❖ Quadrate und Rechtecke werden meistens mit zwei schräg gegenüberliegenden Eckpunkten bezeichnet. Zum Beispiel: Rechteck AC .
- ❖ Bei der Dreiecksbeschriftung werden wie heutzutage üblich Großbuchstaben verwendet, die gegen den Uhrzeigersinn beschriftet werden. Allerdings wird die Spitze des Dreiecks meist mit A und nicht mit C beschriftet, was zur Folge hat, dass bei rechtwinkligen Dreiecken der rechte Winkel meist am Eckpunkt A ist.
- ❖ Die Dreiecks- bzw. Rechteckseiten, usw. werden nicht mit Kleinbuchstaben bezeichnet, sondern wie Strecken. Auch hier spielt für die Beschriftung wiederum die Richtung eine wichtige Rolle.
- ❖ Die Winkel werden meist nicht mit griechischen Buchstaben bezeichnet, sondern durch die drei Eckpunkte angegeben, die sie eingrenzen: $\alpha = \sphericalangle BAC$.
- ❖ Ein Kreis wird öfter durch vier auf ihm liegende Punkte beschrieben. Zum Beispiel: Kreis $ABCD$.

¹⁴ (Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*, 1956, S. 75)

3. Wichtige Quellen für die vorliegende Arbeit

Ägyptische und Babylonische Quellen

Im Laufe dieser Arbeit wird vor allem in den *Kapiteln „Vorgeschichtliche Quellen“* immer wieder auf die ägyptische und babylonische Mathematik eingegangen, da den Griechen die Mathematik dieser beiden Völker bekannt war und sie diese vermutlich als Grundlage nahmen, auf der sie aufbauen konnten. Um es den Lesern und Leserinnen einfacher zu machen, folgt hier eine kurze Beschreibung der Quellen, aus denen die heutigen Erkenntnisse über die damalige Mathematik in Ägypten und Babylonien stammen.

Die Erkenntnisse über die frühe ägyptische Mathematik erhalten wir vorrangig aus zwei Papyri aus der Zeit des mittleren Reiches (2040-1794¹⁵), die von ägyptischen Beamten, den sogenannten Schreibern, verfasst wurden. Einige Aufgaben des Standes der Schreiber waren zum Beispiel die Steuern einzutreiben, die Nahrung zu verteilen oder die Rechtsprechung auszuüben. Sie übernahmen alle anfallenden Verwaltungsaufgaben und mussten daher nicht nur schreiben, sondern unbedingt auch rechnen können. Beide Papyri beinhalten daher vorrangig Rechnungen zu alltäglichen Problemen der Schreiber, an Hand derer man erkennen kann, wie fortschrittlich ihre Mathematik bereits war.

Die älteste Quelle ist der Moskauer Papyrus, der aus dem Jahre 1850 vor Chr. stammt und in Moskau im Museum der schönen Künste aufbewahrt wird. Außerdem wichtig ist der etwas jüngere Rhind-Papyrus, benannt nach einem niederländischen Archäologen, A. H. Rhind, der ihn 1858 gekauft hatte. Dieser befindet sich momentan im Britischen Museum in London. Insgesamt gibt es etwas mehr als zehn solcher Papyri mit mathematischen Berechnungen, am wichtigsten sind jedoch die beiden genannten.¹⁶

Auch die altbabylonische Mathematik kann rekonstruiert werden, da teilweise reichhaltigere Quellen vorhanden sind, als in Ägypten. Statt Papyri, die über einen längeren Zeitraum schwierig aufzubewahren sind, wurden in Mesopotamien Tontafeln verwendet.

¹⁵ (Wußing, 2008, S. 104)

¹⁶ (Wußing, 2008, S. 113f.)

Die meisten Funde sind aus der Zeit des altbabylonischen Reiches (ca. 1900 - ca. 1600 v.Chr.), es gibt jedoch auch weitere, jüngere Tontafeln, auf denen bereits komplexere Mathematik zu finden ist, wie zum Beispiel ein Verfahren, um Quadratwurzeln berechnen zu können. Anhand der verschiedenen Beispiele kann man rekonstruieren, dass auch in Babylonien Mathematik eine Wissenschaft des täglichen Lebens war und fast nur in der Praxis, z.B.: in der Wirtschaft, im Handel oder im Bauwesen angewendet wurde.¹⁷ Im Gegensatz zur ägyptischen Mathematik kann man jedoch an manchen Stellen eine Entwicklung der Mathematik hin zur selbständigen Wissenschaft beobachten, die nicht ausschließlich der Praxis diene.¹⁸

Dass die griechische und hellenistische Mathematik zumindest mit der babylonischen Mathematik stark verknüpft war und auf ihr aufbaute, erkennt man immer wieder an verschiedenen Beispielen, die natürlich nicht bewiesen werden können:

So hat sich vielleicht Hippokrates von Chios um 440 vor Christus an den Babyloniern orientiert, als er, während er versuchte das Problem der Quadratur des Kreises zu lösen, seine „Möndchen¹⁹“ konstruierte. Solche nicht durch gerade Linien begrenzte Figuren wurden nämlich auch schon im alten Babylon bei Flächenberechnungen einbezogen. Natürlich verwendet Hippokrates nicht dieselben Möndchen wie die Babylonier, es ist jedoch nicht abwegig, dass er sich von der altbabylonischen Mathematik inspirieren ließ. Weiters verwendet zum Beispiel der griechische Mathematiker Heron von Alexandria um ca. 100 nach Christus einen Wert für π ($\pi = 3\frac{1}{8}$), den man bereits in den altbabylonischen Schriften findet.²⁰ Es gibt noch weitere Anhaltspunkte, auch im Bereich der Algebra, die als Zeichen dafür gewertet werden können, dass die Griechen Zugriff auf die altbabylonische Mathematik hatten und immer wieder auf sie zurückgriffen bzw. auf sie aufbauten, diese können jedoch auf Grund der Begrenztheit der Arbeit nicht alle behandelt werden.

¹⁷ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 15)

¹⁸ (Wussing, 1965, S. 42f.)

¹⁹ Figuren mit krummlinig begrenzten Flächen, die sich jedoch im Gegensatz zum Kreis quadrieren lassen.

²⁰ (Wussing, 1965, S. 43)

Euklid



Abbildung 3: Euklid Bild (<http://scihi.org/>)

Abbildung 4: Euklid Statue (<http://mathground.net/>)

Beschäftigt man sich mit der antiken Mathematik, so stellt man schnell fest, dass es sehr schwierig ist Originalquellen zu finden, da die meisten Werke der antiken Mathematiker verloren gegangen sind. Die ersten und somit auch die ältesten vollständig erhaltenen Abschriften eines Werks sind diejenigen der Elemente von Euklid.²¹

Dies ist der Grund, weshalb genau dieser Schriftsteller für die vorliegende Arbeit so wichtig ist und weswegen in diesem Kapitel ein kleiner Überblick über ihn gegeben wird. Konnte nämlich zu einem Problem eines Mathematikers kein Beweis gefunden werden, der von ihm selbst stammt oder stammen könnte, so wurde der Beweis aus Euklids Elementen verwendet.

Da Archimedes, der ca. 287 – 212 v. Chr.²² gelebt hat, in einem seiner Werke Euklid zitiert²³, ist klar, dass Euklid entweder gleichzeitig, vermutlich aber eher ein wenig frü-

²¹ (Gericke, 1984, S. 70)

²² (Scriba & Schreiber, 2002, S. 67)

her als Archimedes gelebt hat. Es wird daher angenommen, dass er zu der Zeit lebte, als die athenische Periode von der alexandrinischen abgelöst wurde, also „um 300 [v. Chr.] herum“.²⁴ Euklid war vermutlich Lehrer der Mathematik in Alexandrien und galt eher als freundlicher und bescheidener Mensch. Auch seine Ehrlichkeit war eine Eigenschaft, die hochgelobt wurde.²⁵ In seinem Hauptwerk „Die Elemente“ sammelte Euklid die gesamte Mathematik, die vor seiner Zeit bereits existierte und brachte sie in eine Ordnung, bei der alles aufeinander aufbaute. Laut Proklos, einem griechischen Philosoph und Mathematiker, der von 410-485 n. Christus gelebt und einen Kommentar zum ersten Buch von Euklids Elementen geschrieben hat, fügte Euklid auch selbst Beweise hinzu.²⁷ Dies ist aber in der Wissenschaft umstritten und kann nicht bewiesen werden.

Fakt ist, dass Euklid kein schöpferisches Genie war und nicht durch seine Mathematik berühmt wurde, sondern weil er ein hervorragender Didaktiker war.²⁸ Seine Elemente bestehen aus 13 Büchern, sind streng wissenschaftlich und deduktiv aufgebaut und ohne jeglichen Praxisbezug formuliert.²⁹ Vor allem, da „die Elemente“ bis weit über die Antike hinaus als Schulbuch verwendet wurden,

„so ist natürlich die absolute Trockenheit des Stiles, die sture Aufeinanderfolge von Definitionen, Satz und Beweis, das Fehlen von Motivationen und Beispielen zu bemängeln.“ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 52)

Dies könnte auch dazu geführt haben, dass das Unterrichtsfach Mathematik bis in die heutige Zeit bei den Schülern und Schülerinnen nicht so beliebt ist.³⁰

²³ Archimedes, über Kugel und Zylinder, 1, Prop. 2. laut (Van der Waerden, Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, 1956, S. 322)

²⁴ (Van der Waerden, Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, 1956, S. 322)

²⁵ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 49)

²⁶ (Van der Waerden, Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, 1956, S. 322)

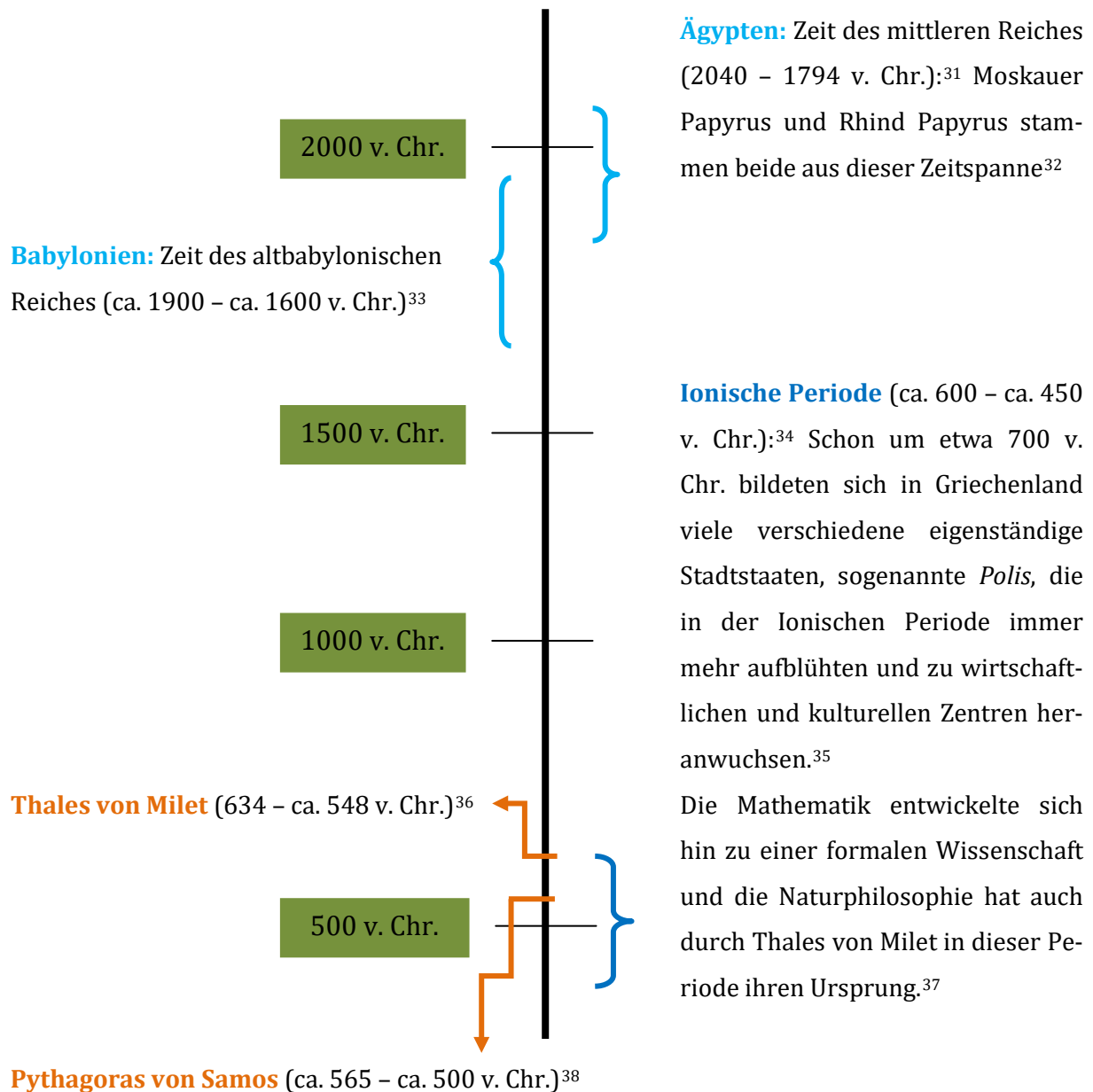
²⁷ (Proklus, 1945, S. 9 und Deckblatt)

²⁸ (Van der Waerden, Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, 1956, S. 322f.)

²⁹ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 49)

³⁰ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 52)

4. Zeittafel



³¹ (Wussing, 1965, S. 104)

³² (Wußing, 2008, S. 113f.)

³³ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 15)

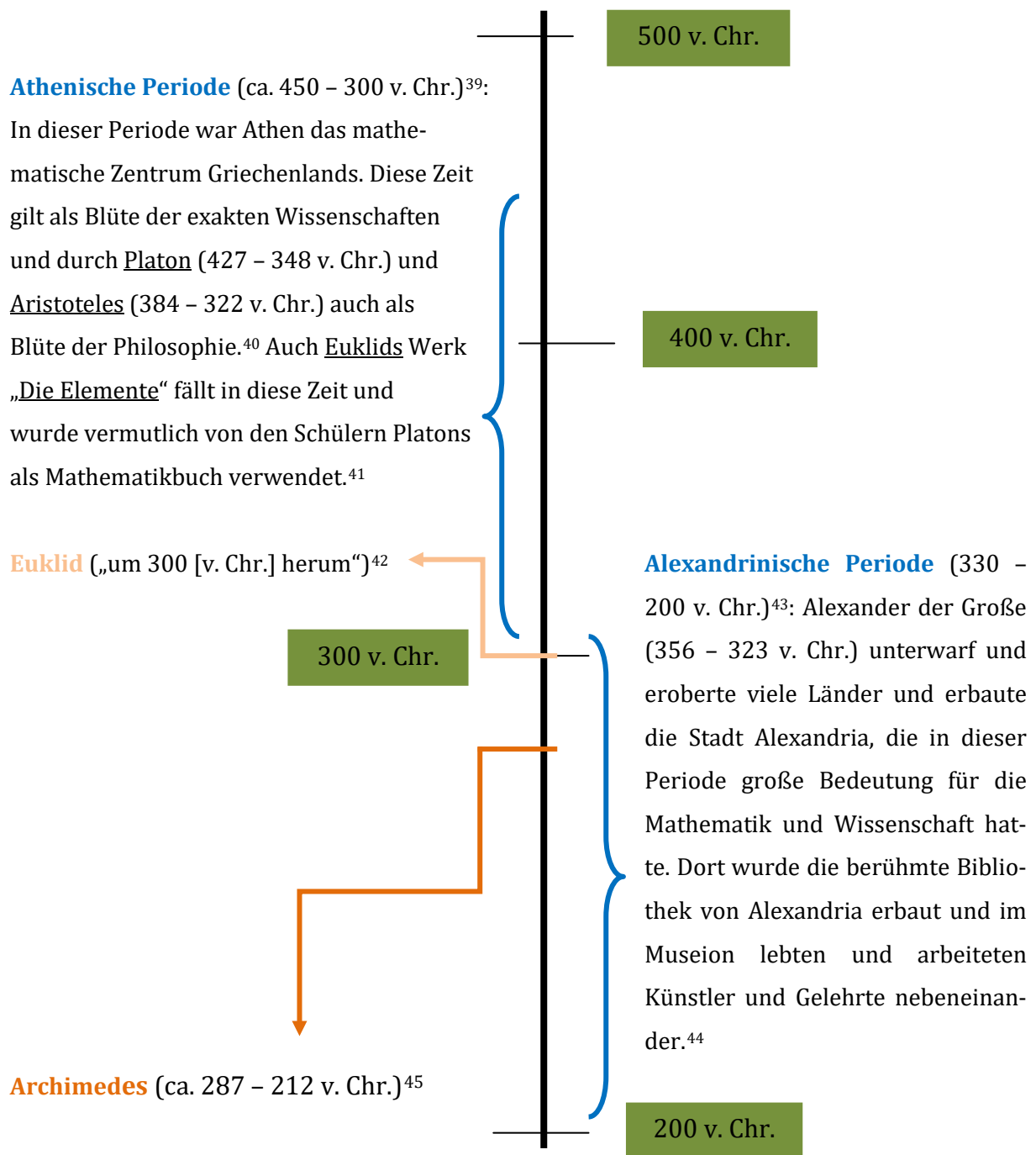
³⁴ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 27)

³⁵ (Herrmann, 2014, S. 10)

³⁶ (Laertius, 1998, S. 52) unter Berücksichtigung von (Gemelli Marciano, 2007, online-Ausg., 2014, S. 28)

³⁷ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 27)

³⁸ (Strathern, Pythagoras & sein Satz, 1999, S. 17 und 61f.)



³⁹ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 38)

⁴⁰ (Van der Waerden, Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, 1956, S. 244f.)

⁴¹ (Van der Waerden, Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, 1956, S. 323)

⁴² (Van der Waerden, Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, 1956, S. 322)

⁴³ (Van der Waerden, Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, 1956, S. 331)

⁴⁴ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 65)

⁴⁵ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 67)

II. THALES VON MILET

1. Leben und Umfeld

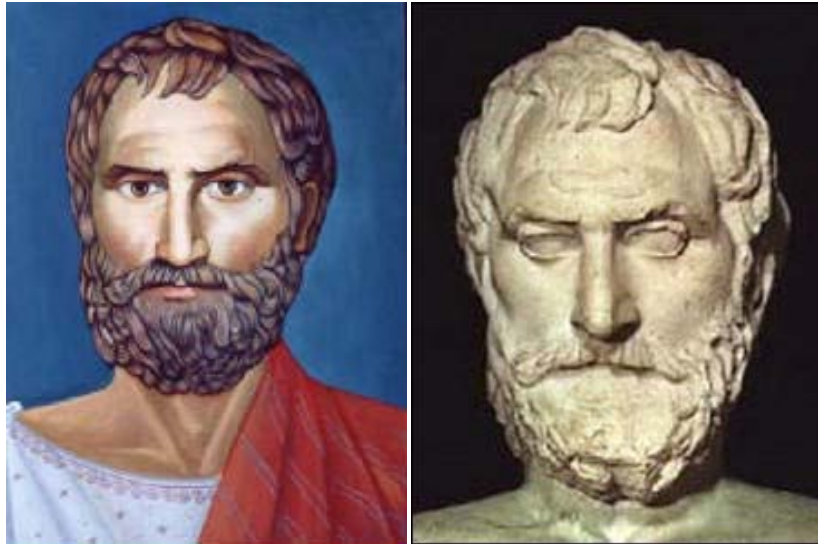


Abbildung 5: Thales Bild (<http://greekaphrodite.weebly.com/>)

Abbildung 6: Thales Statue (<http://www.iep.utm.edu/Bild>)

Über das Leben von Thales, wie auch über viele andere griechische Persönlichkeiten dieser Zeit, ist nur wenig überliefert. Die einträglichste antike Quelle, wenn man etwas über Thales wissen möchte, ist Diogenes Laertius, der Autor einer Biographie über griechische Philosophen im 3. Jahrhundert nach Christus⁴⁶. Dieser schreibt, dass die meisten Autoren seiner Quellen der Auffassung sind, dass Thales aus Milet stammte, einer antiken Stadt an der türkischen Ägais, die sich zu einer führenden Handelsmacht entwickelte und als Ort der abendländischen Philosophie galt.⁴⁷ Dort soll er in eine vornehme und angesehene Familie hineingeboren worden sein.⁴⁸

⁴⁶ (<http://www.iep.utm.edu/>)

⁴⁷ (<http://www.bodrumpages.com/>)

⁴⁸ (Laertius, 1998, S. 46)

Eine weitere Theorie, die zum Beispiel von Herodot vertreten wird, sagt, dass Thales aus einer bedeutenden phönizischen Familie stammte und später das Bürgerrecht in Milet erhielt.⁴⁹ Er soll der Sohn des Examyas und der Kleobulina gewesen sein, die laut Platon von Kadmos, dem König von Theben und Bruder der von Zeus entführten Europa, und seinem Vater Agenor, einem phönizischen König,⁵⁰ abstammen. Thales kommt also jedenfalls aus einer hoch angesehenen Familie.⁵¹

Diogenes Laertius schreibt weiters, dass Apollodor in seinen verloren gegangenen Chronika angegeben hat, dass Thales im ersten Jahr der 35. Olympiade geboren wurde, was dem Jahr 640 vor Chr. entspricht. Er soll 78 Jahre alt geworden und in der 58. Olympiade gestorben sein, die in den Jahren 548-545 vor Chr. stattgefunden hat.⁵² Rechnet man dies nach, so erkennt man, dass diese Aussagen nicht zusammenpassen, da Thales bei diesen Lebensdaten statt 78 über 90 Jahre alt geworden wäre. Erklärt werden kann dieser Fehler zum Beispiel dadurch, dass man bei der Überlieferung dieser Schrift die sehr ähnlich aussehenden Zeichen für die Zahlen Fünf (Ε ς) und Neun (Θ ϑ)⁵³ verwechselte. Demzufolge wurde Thales im ersten Jahr der 39. Olympiade geboren, also im Jahr 634 vor Christus.⁵⁴ Gestorben sein soll er altersbedingt, während er einem Sportwettkampf beiwohnte und ihm die Hitze und der Durst zu schaffen machte.⁵⁵ Auf seinem Grabstein soll geschrieben gewesen sein:

„Schau dieses kleine Grab, wo der große Thales beerdigt; Bis zum Himmel hinaufreicht seiner Weisheit Ruhm.“ (Laertius, 1998, S. 53)

Bezüglich seines Familienstandes ist man sich auch in den älteren Quellen schon uneinig. Laut Herakleides beschreibt sich Thales selbst als Einzelgänger, andere Autoren meinen, dass er verheiratet war und einen Sohn namens Kybisthos hatte. Weitere sind

⁴⁹ (Herodot, 1995, S. 157)

⁵⁰ (<http://www.sagen.at/>)

⁵¹ (Laertius, 1998, S. 46)

⁵² (Laertius, 1998, S. 52)

⁵³ Beide in den Text eingefügten Bilder sind aus dem Text: (Gemelli Marciano, 2007, online-Ausg., 2014, S. 28)

⁵⁴ (Gemelli Marciano, 2007, online-Ausg., 2014, S. 28)

⁵⁵ (Laertius, 1998, S. 53)

der Meinung, dass Thales unverheiratet war und den Sohn seiner Schwester adoptierte.⁵⁶

„Auf die Frage, warum er keine Kinder zeuge, habe er geantwortet: „Aus Liebe zu ihnen.“ Seiner ihn zur Heirat drängenden Mutter soll er zunächst gesagt haben: „Es ist noch nicht Zeit“, und als sie ihm später wieder zusetzte: „Es ist nicht mehr Zeit“.“ (Laertius, 1998, S. 47)

Thales von Milet war nicht nur Mathematiker, er galt auch als einer der sieben Weisen und beschäftigte sich als einer der Ersten mit Naturphilosophie.⁵⁷ Aristoteles nennt ihn sogar den „*Urheber dieser Art Philosophie*“ (Aristoteles, Metaphysik, 1984, S. 24) und schreibt, dass für Thales das Wasser der Anfang alles Seienden und aller Dinge war, also alles aus dem Wasser entsteht und auch wieder im Wasser untergeht. Deswegen glaubte er auch daran, dass die Erde auf dem Wasser schwimmt.⁵⁸

Obwohl sich diese These als falsch herausstellte, wusste Thales viel über die Vorgänge in der Natur und sagte sogar eine Sonnenfinsternis voraus: Im sechsten Jahrhundert vor Christus herrschte Krieg zwischen den Lydern und den Medern, der sechs Jahre andauerte und erst beendet wurde, als sich mitten in der Schlacht der Mond vor die Sonne schob und der Tag zur Nacht wurde. Genau diese Sonnenfinsternis, die auf den 28. Mai im Jahre 585 vor Chr. datiert wird, hatte Thales den Ioniern vorausgesagt und sogar das Jahr genannt, in dem sie stattfinden würde.⁵⁹

Thales wird nachgesagt, dass er sich so sehr für Astronomie interessierte, dass er manchmal alles andere vergaß und so wird von ihm in einem von Platons Dialogen, nämlich Theätet, folgende Geschichte erzählt:⁶⁰

⁵⁶ (Laertius, 1998, S. 47)

⁵⁷ (Laertius, 1998, S. 46)

⁵⁸ (Aristoteles, Metaphysik, 1984, S. 24f.)

⁵⁹ (Herodot, 1995, S. 71)

⁶⁰ (Platon, 1981, S. 107)

„Als er einmal, um die Sterne zu betrachten, nach oben schaute und dabei in einen Brunnen fiel, soll ihn eine schlagfertige und tüchtige thrakische Magd mit den Worten verspottet haben, daß er zwar darauf aus sei zu wissen, was am Himmel vor sich gehe, ihm aber verborgen bleibe, was in seiner Nähe und vor seinen Füßen liege.“ (Platon, 1981, S. 107)

In Wahrheit war Thales jedoch keinesfalls weltfremd oder zerstreut, stattdessen aber bewandert in Politik und ausgestattet mit kaufmännischem Talent. So wurde er von den einflussreichsten Männern in politischen Themen um Rat gefragt, der oft auch befolgt wurde und sich in weiterer Hinsicht als glänzende Hilfestellung erwies.⁶¹

So habe er zum Beispiel auf dessen Bitte König Kroisos geholfen sein Heer über den Fluss zu bringen, als dieser gegen die Perser vorrückte. Thales ließ oberhalb des Lagers einen halbmondförmigen Graben ausheben und teilte so den Fluss in zwei kleinere Ströme, die links und rechts des Lagers vorbeiflossen. Der Fluss war dadurch viel seichter und weniger reißend und konnte von den Soldaten überquert werden.⁶²

Von einem Beispiel für seine finanzielle Begabung und sein ökonomisches Denken, berichtet Aristoteles in seiner Schrift Politik:

Als Thales vorgeworfen wurde, dass er arm und die Philosophie ein brotloses Gewerbe und deswegen unnütz sei, soll er demonstriert haben, wie leicht es ist reich zu werden. Mit Hilfe seines großen astronomischen und mathematischen Wissens erkannte er, dass sich dieses Jahr eine große Olivenernte ankündigte und er begann noch in der kalten Jahreszeit mit seinen geringen Mitteln Anzahlungen für sämtliche Ölpresen im Umkreis zu tätigen. Da zu dieser Zeit niemand Interesse an Ölpresen hatte, schaffte er es, sich mit geringem Kostenaufwand eine Monopolstellung zu sichern.

Als es so weit war und die Oliven geerntet wurden, war die Nachfrage gewaltig und Thales konnte die Ölpresen für viel mehr Geld und zu seinen Bedingungen weitervermie-

⁶¹ (Laertius, 1998, S. 47)

⁶² (Herodot, 1995, S. 71)

ten. So gelang es ihm in kürzester Zeit einen immensen Reichtum anzuhäufen und er bewies seinem Widersacher ohne viele Worte, dass es für einen Philosophen leicht war zu Geld zu kommen, wenn dieser es wünsche. Dies sei aber nicht das, worauf es einem Philosophen ankomme.⁶³

Bekannt ist Thales heutzutage jedoch vor allem durch den sogenannten „Satz des Thales“ auf dem Gebiet der Mathematik und seinen Ausspruch „Erkenne dich selbst“ im Bereich der Philosophie.⁶⁴

⁶³ (Aristoteles, Politik, 1991, S. 29)

⁶⁴ (Laertius, 1998, S. 53)

2. Werk

Wer etwas über Thales mathematische Erkenntnisse wissen möchte, für den empfiehlt es sich, sich mit Sekundärquellen zu beschäftigen, weil Thales selbst laut vieler antiker Autoren⁶⁵ nichts Schriftliches⁶⁶ hinterlassen hat.⁶⁷

Proklos nennt in seinem Kommentar zum ersten Buch von Euklids Elementen auch immer wieder Euklids mathematische Quellen.⁶⁸ Euklid selbst, dem in der vorliegenden Arbeit ein kleiner Abschnitt in *Kapitel I* gewidmet ist, hat in seinem Hauptwerk „Die Elemente“, das eines der wichtigsten Werke der Antike im Bereich der Mathematik, vor allem aber der Geometrie darstellt, versucht einen Überblick über die gesammelte, bereits vorhandene Mathematik zu geben.⁶⁹ Anhand von Proklos Kommentar wissen wir zumindest teilweise, von welchen Mathematikern er welche Teile übernommen hat bzw. was Euklid selbst verfasst oder hinzugefügt hat.

Proklos erwähnt an mehreren Stellen auch den Namen Thales als Quelle für einzelne mathematische Sätze oder Definitionen:

Die Sätze des Thales

Definition 1: „Ein Durchmesser des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten vom Kreisumfang begrenzte Strecke; eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren.“ (Euklid, 2015, S. 1f., 17. Definition)

⁶⁵ Es wird hier bewusst auf die weibliche Form verzichtet, da alle verwendeten Quellen männlich sind. Diogenes Laertius schreibt nur von einer weiblichen Schriftstellerin, die über Thales berichtet haben soll: Pamphile. Von ihr sind allerdings keine Aussagen bezüglich Thales Schriften erhalten bzw. bekannt.

⁶⁶ Andere Schriftsteller meinen, er hätte zwei Schriften verfasst: „Über Solstitien“ = „Über die Sonnenwende“ (lat.: solstitium, i. n. = die Sonnenwende) und „Über Äquinoktien“ = „Über die Tagundnachtgleiche“ (lat.: aequus = gleich; nox, noctis, f. = Nacht) (Laertius, 1998, S. 46)

⁶⁷ (Laertius, 1998, S. 46)

⁶⁸ (Proklus, 1945, S. 9)

⁶⁹ (Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*, 1956, S. 321)

Proklos schreibt in seinem Kommentar:

„Dass nun der Kreis durch den Durchmesser halbiert wird, soll zuerst der berühmte Thales nachgewiesen haben; ...“ (Proklus, 1945, S. 275)

Laut Proklos soll Thales diese Behauptung also nicht nur eingeführt, sondern auch bewiesen haben, was bedeutet, dass seine Mathematik bereits als Wissenschaft anzusehen ist, die einen logischen Aufbau hat. Es gibt zwar Stimmen, die meinen, dass mit dem Ausdruck „nachweisen“ nicht beweisen gemeint sein kann und dass Thales seine Sätze und Definitionen empirisch, also durch Beobachtungen und Erfahrungen, gewonnen haben muss. Weil er die antike Mathematik begründete und quasi „der erste antike Mathematiker“ war, so konnte es ihm nicht möglich gewesen sein, sowohl diese empirischen Entdeckungen gemacht zu haben, die zur damaligen Zeit ganz neu gewesen sein mussten, als auch gleichzeitig logisch aufgebaute Mathematik inklusive Beweisen zu betreiben.⁷⁰

Hier kann allerdings entgegengehalten werden, dass Thales sich nicht alle Sätze neu überlegen musste, sondern es bereits mathematisches Material von den Ägyptern, vor allem aber den Babyloniern gab, auf dem er aufbauen konnte. Auf diese den Griechen bekannte und durch Reisen auch erlernte Mathematik wird jeweils im *Kapitel „Vorgeschichtliche Quellen“* eingegangen.

Thales konnte sich also vorrangig damit beschäftigen, die praktische Mathematik, die in anderen Ländern bereits verwendet wurde und die er kannte, in eine wissenschaftliche Form zu bringen und logisch aufzubauen, so wie sie auch heute noch existiert. In diesem Bereich kann Thales wahrlich als Pionier bezeichnet werden.⁷¹

Betrachtet man also Thales Beitrag zur Mathematik und die altgriechische Mathematik, insbesondere die Geometrie zu seiner Zeit generell, so kann man sagen:

⁷⁰ (Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*, 1956, S. 146)

⁷¹ (Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*, 1956, S. 146)

„Das Material, aus dem sich die griechische Geometrie aufbaute, war nicht neu: die Bausteine konnte man aus der alten Kultur hervorgraben; aber der Stil, in dem das Gebäude errichtet wurde, war neu und zeugt von dem klaren Denken der Griechen, dem Denken, das keine dunklen Stellen, keinen Schatten eines Zweifels an der Richtigkeit der erworbenen Einsichten bestehen lassen will.“
(Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*, 1956, S. 148)

Satz 2: *„Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie (= Basiswinkel) einander gleich; auch müssen die bei Verlängerung der gleichen Strecken unter der Grundlinie entstehenden Winkel einander gleich sein.“* (Euklid, 2015, S. 6: 5. Proposition, 2. Theorem)

Dies ist der sogenannte Basiswinkelsatz bei gleichschenkligen Dreiecken⁷², der heutzutage vereinfacht folgendermaßen formuliert wird: In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß.⁷³

Proklos kommentiert dieses Theorem folgendermaßen:

„Heil dem alten Thales, dem Entdecker vieler anderer und besonders dieses Theorems! Denn man sagt, er habe als erster erkannt und ausgesprochen, dass in jedem gleichschenkeligen Dreieck die Basiswinkel gleich sind, habe aber in altertümlicher Sprache für „gleich“ die Bezeichnung „ähnlich“ gebraucht.“
(Proklus, 1945, S. 341)

Thales soll aber nicht nur diesen Satz, sondern noch davor auch den Begriff des Winkels eingeführt und etabliert haben, als er nämlich zwei Geraden miteinander geschnitten hat.⁷⁴

⁷² (Proklus, 1945, S. 512)

⁷³ (<http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/>)

Satz 3: „Zwei gerade Linien (= Geraden) bilden, wenn sie einander schneiden, Scheitelwinkel, die einander gleich sind.“ (Euklid, 2015, S. 12: 15. Proposition, 8. Theorem)

„Es <das Theorem> wurde, wie Eudemos berichtet, von Thales zuerst entdeckt, des wissenschaftlichen Beweises aber vom Verfasser der „Elemente“ für wert erachtet.“ (Proklus, 1945, S. 374)

Dies bedeutet, dass Thales dieses Theorem zwar entdeckt hatte, jedoch vermutlich nicht bewiesen, weshalb Euklid in seinen Elementen einen eigenen Beweis angefügt hat. Proklos weist auch darauf hin, dass ein aussagekräftiger Beweis dieses Satzes immens wichtig, ja unbedingt notwendig sei, was darauf hindeutet, dass dieser oftmals fehlte und der Satz an sich als selbstverständlich hingenommen wurde.⁷⁵

Satz 4: „Der Peripheriewinkel⁷⁶ im Halbkreis ist ein rechter.“ (Becker, 1957, S. 38)

Dieser Satz wird heute sogar als „**Satz des Thales**“ bezeichnet.

Diogenes Laertius schreibt in seinem Werk:

„Nach Pamphile⁷⁷ hat er Geometrie von den Ägyptern gelernt, zuerst das rechtwinklige Dreieck des Kreises gezeichnet und einen Stier geopfert.“ (Laertius, 1998, S. 47)

⁷⁴ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 33)

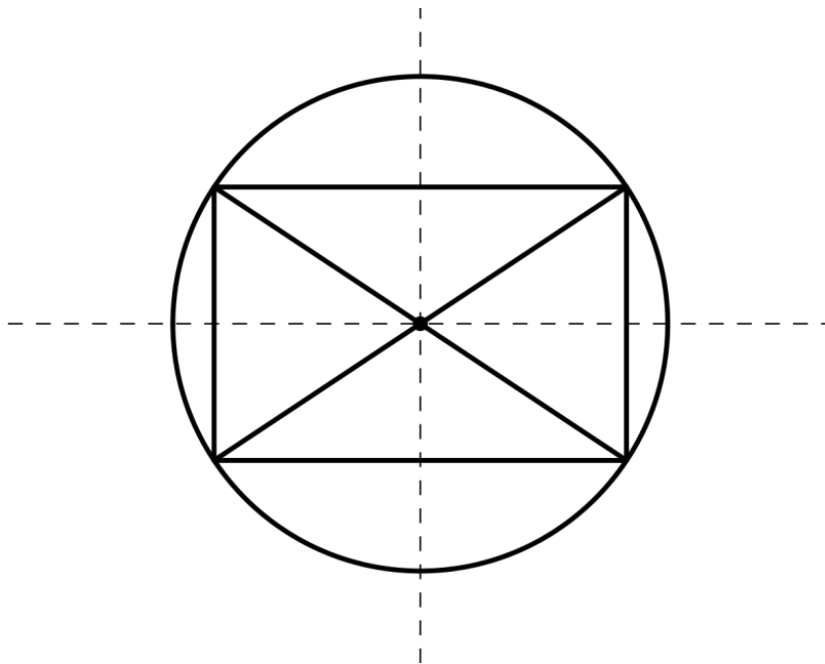
⁷⁵ (Proklus, 1945, S. 374 und 513)

⁷⁶ Peripherie eines Kreises bedeutet Rand eines Kreises bzw. Umfangslinie. Der Peripheriewinkel ist daher jeweils der Winkel, dessen Spitze auf dem Rand des Kreises liegt.

⁷⁷ Pamphile war eine Schriftstellerin im 1. Jahrhundert nach Christus. (Gericke, 1984, S. 75) & (Scriba & Schreiber, 2002, S. 32)

Die „thaletische Grundfigur“

Alle vier oben genannten Sätze bzw. Definitionen lassen sich mit Hilfe einer Figur zeigen, die gelegentlich passenderweise auch als „**thaletische Grundfigur**“ bezeichnet wird:⁷⁸



Die Thaletische Grundfigur könnte auch in der Antike bereits existiert haben, da sie nur aus Elementen besteht, die man zu den ältesten der Geometrie zählt:

Punkte, gerade Linien und der Kreis.⁷⁹

Abbildung 7: Die „thaletische Grundfigur“ (Becker, 1957, S. 38)

Es ist also nicht vollkommen abwegig, dass Thales diese Figur kannte und mit ihrer Hilfe seine Sätze erklärte, weshalb das auch in dieser Arbeit so gemacht wird.⁸⁰

Im Folgenden wird eine Idee gegeben, wie diese Figur konstruiert werden konnte:

⁷⁸ (Becker, 1957, S. 37)

⁷⁹ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 32f.)

⁸⁰ (Wußing, 2008, S. 71)

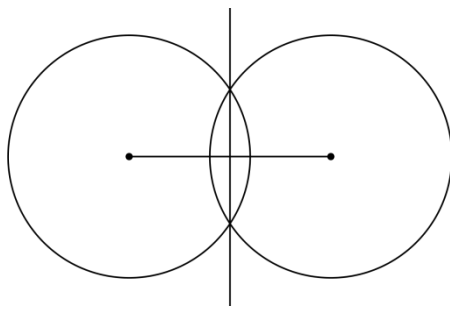


Abbildung 8: (Scriba & Schreiber, 2002, S. 33)

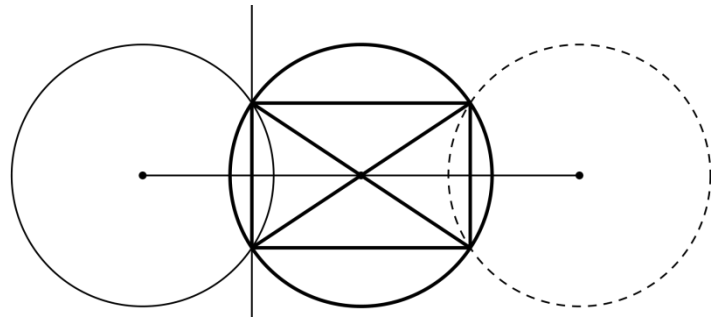


Abbildung 9

Man geht von einer gegebenen Strecke aus, deren Endpunkte jeweils die Mittelpunkte für zwei Kreise mit gleichem Radius sind, die sich überlappen. Durch die Schnittpunkte beider Kreise wird eine Gerade gelegt, von der das Teilstück zwischen den Schnittpunkten bereits eine Seite des Rechtecks der thaletischen Grundfigur ist.

Trägt man nun die anfangs gegebene Strecke noch einmal auf und konstruiert einen weiteren Kreis mit demselben Radius wie bei den beiden vorherigen und dem Eckpunkt der neu angefügten Strecke als Mittelpunkt, so muss man nur noch alle Schnittpunkte der drei Kreise verbinden und erhält so die thaletische Figur.⁸¹

Beweise

- 1) „Ein Durchmesser des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten vom Kreisumfang begrenzte Strecke; eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren.“ (Euklid, 2015, S. 1f.: 17. Definiton)

Die Entfernung der Strecke vom Mittelpunkt des Kreises zur Peripherie ist immer die gleiche. Faltet man also einen Kreis entlang einer beliebigen Geraden durch den Mittelpunkt (=Durchmesser), so erhält man zwei deckungsgleiche Halbkreise.

⁸¹ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 33)

Wäre dies nicht so, und eine Kreishälfte würde die andere überlappen, so wäre der Abstand zwischen Mittelpunkt und Peripherie nicht überall gleich, was der Definition des Kreises widerspricht.⁸²

- 2) „Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie (= Basiswinkel) einander gleich; auch müssen die bei Verlängerung der gleichen Strecken unter der Grundlinie entstehenden Winkel einander gleich sein.“ (Euklid, 2015, S. 6: 5. Proposition, 2. Theorem)

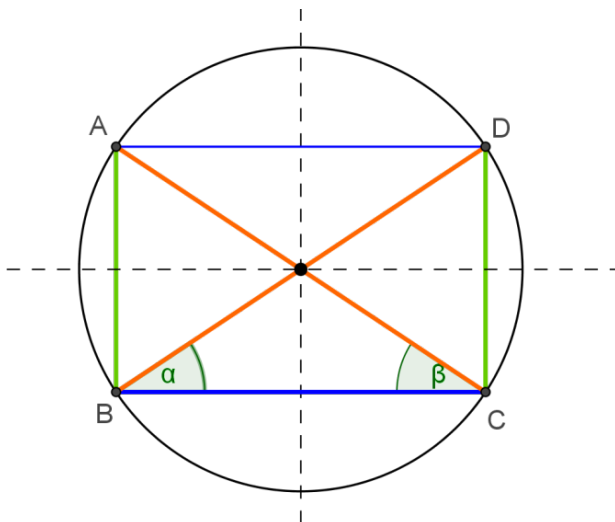


Abbildung 10

Auf Grund der Konstruktion kann man bereits erkennen, dass das Rechteck eine symmetrische Figur ist, bei der gilt $AB = DC$, $AD = BC$ und $AC = DB$.

Betrachtet man die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BCD$ so erkennt man, dass alle einander entsprechenden Dreiecksseiten gleich sind und somit auch die Winkel gleich sein müssen.

Der Winkel $\angle DBC = \alpha$ ist also gleich groß wie der Winkel $\angle ACB = \beta$ und somit gilt: $\alpha = \beta$.⁸³

⁸² (Proklus, 1945, S. 275f.)

⁸³ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 34)

- 3) „Zwei gerade Linien (= Geraden) bilden, wenn sie einander schneiden, Scheitelwinkel, die einander gleich sind.“ (Euklid, 2015, S. 12: 15. Proposition, 8. Theorem)

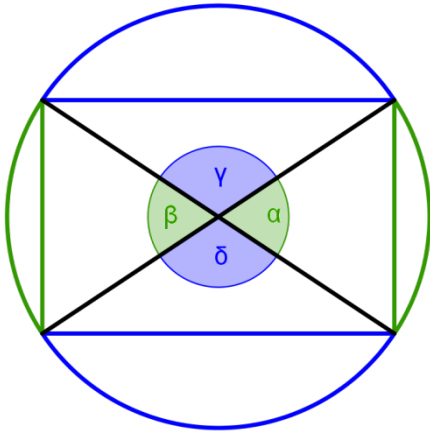


Abbildung 11

Betrachtet man die Scheitelwinkel α und β bzw. γ und δ der Figur, so kann man anhand logischer Schlüsse erkennen, dass diese jeweils gleich sind.

Der Gedankengang dazu lautet: Die Scheitelwinkel sind jeweils gleich der zugehörigen Kreisbögen und diese sind wiederum zueinander gleich, weil die beiden Rechteckseiten, die sie begrenzen, gleich sind. Dass diese wiederum gleich sind, folgt bereits aus der Konstruktion der Figur.

Es gilt also: $\alpha = \beta$ und $\gamma = \delta$.⁸⁴

- 4) „Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter.“ (Becker, 1957, S. 38)

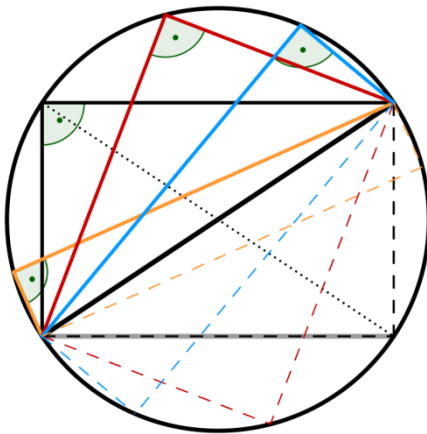


Abbildung 12

Betrachtet man die thaletische Grundfigur, dann sieht man, dass zu beiden Seiten eines Durchmessers ein halbes Rechteck (= Dreieck) liegt, das einen rechtwinkligen Peripheriewinkel besitzt.

Da das Seitenverhältnis des Rechtecks im Kreis beliebig gewählt werden kann, gilt dieser Satz im Halbkreis für jeden beliebigen Peripheriewinkel.⁸⁵

⁸⁴ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 33)

⁸⁵ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 34)

Weitere Sätze

Es gibt noch weitere mathematische Entdeckungen, die vermutlich von Thales stammen, hier jedoch nur kurz aufgezählt werden:

Satz 5: *„Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel zwei Winkeln entsprechend gleich sind und eine Seite einer Seite, nämlich entweder die den gleichen Winkeln anliegenden oder die einem der gleichen Winkel gegenüberliegenden Seiten einander gleich, dann müssen auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten (entsprechend) gleich sein und der letzte Winkel dem letzten Winkel.“* (Euklid, 2015, S. 18: 26. Proposition, 17. Theorem)

Euklid meint damit den sogenannten dritten Kongruenzsatz⁸⁶, auch mit WSW abgekürzt, der heutzutage folgendermaßen beschrieben wird: Zwei Dreiecke sind schon kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei anliegenden Winkeln übereinstimmen.⁸⁷

„Eudemos aber führt in seiner „Geschichte der Geometrie“ diesen Lehrsatz auf Thales zurück. Denn bei der Art und Weise, auf die er die Entfernung der Schiffe auf hoher See bestimmt haben soll, erklärt Eudemos die Heranziehung desselben als unerlässlich“ (Proklus, 1945, S. 409)

Außerdem schreibt Diogenes Laertius, dass Thales die Höhe von Pyramiden berechnen konnte:

„Nach Hieronymus hat er die Höhe der Pyramiden zu jener Zeit gemessen, da auch unsere Schattenlänge der Körpergröße gleich ist.“ (Laertius, 1998, S. 48)

⁸⁶ (Proklus, 1945, S. 514)

⁸⁷ (<http://www.rfwalter.net/>)

3. Vorgeschichtliche Quellen: „Satz des Thales“

Wenn Thales, wie im *Kapitel II, 2* bei *Definition 1* dieser Arbeit bereits erwähnt wurde, die meisten seiner Sätze nicht aus dem Nichts erschaffen, sondern sich bei den „älteren Kulturen“ Wissen angeeignet hat, auf das er dann aufbauen und mit dessen Hilfe er seine systematische Mathematik schaffen konnte, wie sahen dann diese vorgeschichtlichen Quellen aus? Da hier nicht alle Themen behandelt werden können, beschränkt sich dieser Teil der Arbeit auf die vorgeschichtlichen Quellen des sogenannten „Satz des Thales“.

Ägypten

Laut Diogenes Laertius berichtete schon Pamphile darüber, dass Thales in Ägypten war und dort Geometrie studierte⁸⁸. Es ist also durchaus möglich, dass er die Grundgedanken seiner Errungenschaften von dort nach Griechenland gebracht hat. Aus altägyptischen Aufzeichnungen weiß man, dass die Ägypter den Kreis bereits kannten, sogar eine Annäherung für π ⁸⁹ hatten und somit die Kreisfläche berechnen konnten. Sie wussten, dass jeder Kreis einen Durchmesser hat, verwendeten diesen sogar bei ihren Flächenberechnungen und wussten daher vermutlich auch, dass dieser den Kreis in zwei genau gleichgroße Teile teilt.⁹⁰ Den Satz des Thales allerdings sucht man bei den Ägyptern vergeblich.

Babylonien

Im Gegensatz dazu finden sich auf einer altbabylonischen Tontafel gleich zwei Beispiele, anhand derer man erkennen kann, dass die Babylonier bereits mit dem Satz des Thales rechneten und wussten, dass der Peripheriewinkel im Halbkreis ein rechter ist.⁹¹

Beide Beispiele befinden sich auf der Tontafel BM 85194:

⁸⁸ (Laertius, 1998, S. 47)

⁸⁹ $\pi = \frac{256}{81} = 3,16 \dots$ (Gericke, 1984, S. 55) Vergleiche hierzu *Kapitel IV, 3: Vorgeschichtliche Quellen: Umfang und Fläche des Kreises, Annäherungen an die Zahl π*

⁹⁰ (Gericke, 1984, S. 55)

⁹¹ (Neugebauer, Mathematische Keilschrift-Texte, Erster Teil: Texte, 1935, S. 180)

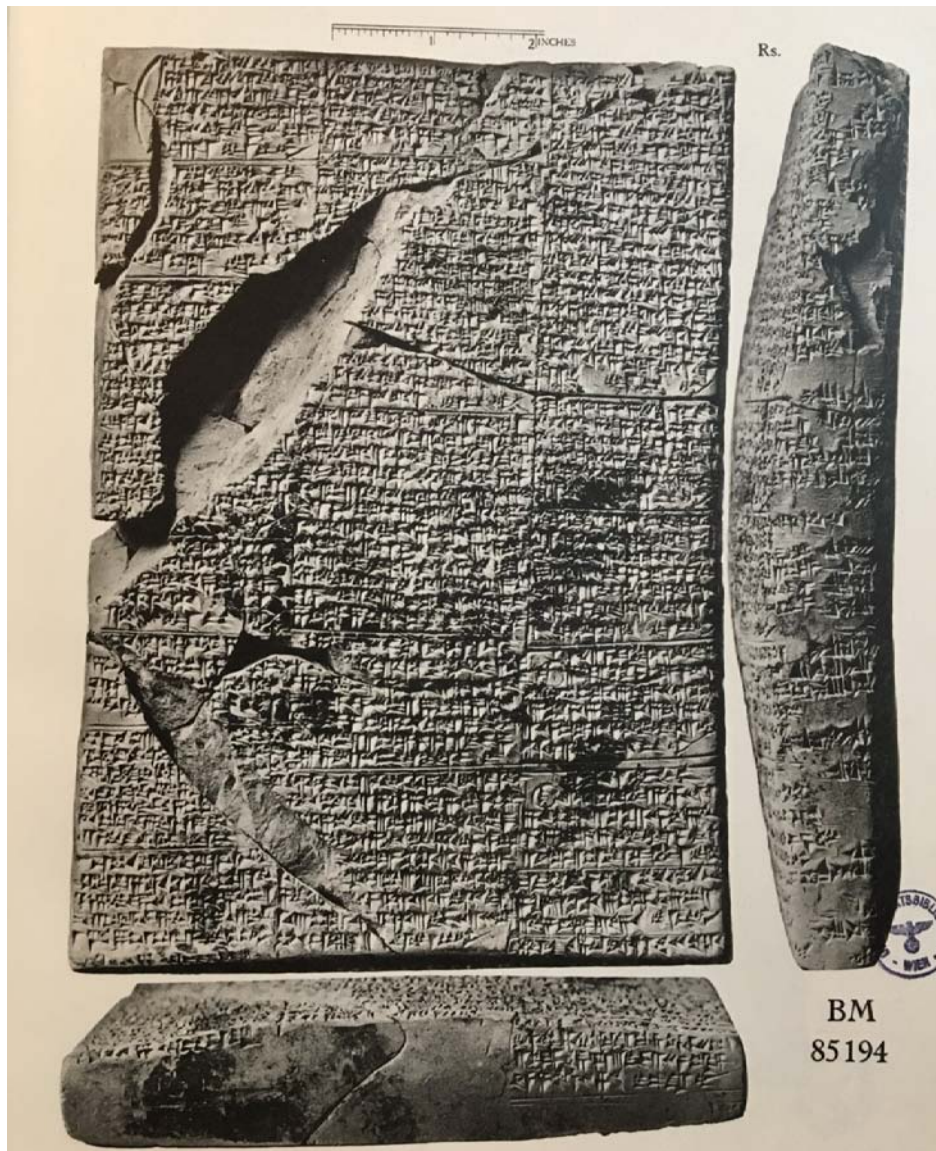


Abbildung 13: BM85194 (Neugebauer, Mathematische Keilschrift-Texte, Zweiter Teil: Register, Glossar, Nachträge, Tafeln, 1935, S. BM 85194, Tafel 6)

Um überhaupt zu verstehen, was auf dieser Tafel zu sehen ist, folgt hier ein kurzer Exkurs in das mathematische System der Babylonier:⁹²

Zu dieser Zeit rechnete man mit einem **Hexagesimalsystem**, das die Basis 60 als Grundlage hatte und es gab nur zwei Schriftzeichen, mit deren Hilfe die Zahlen dargestellt

⁹² Exkurs aus: (Vogel, 1959, S. 16)

wurden: Einen Keil (gleichbedeutend mit dem Zahlenwert 1) und einen Winkelhaken (gleichbedeutend mit dem Zahlenwert 10).

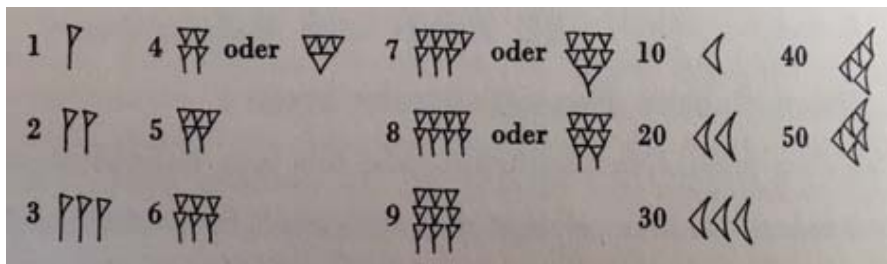
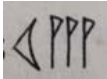


Abbildung 14: (Vogel, 1959, S. 16)

Es wurden maximal fünf Winkelhaken und neun Keile verwendet, was die Zahl 59 darstellt. Danach beginnt die Schreibweise wieder von vorne, es wird also wiederum ein Keil verwendet, der sich von der Zahl 1 nur durch seine Position⁹³ oder durch den Kontext unterscheidet. Dies macht es für heutige Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen sehr schwierig die Keilschrifttexte zu übersetzen, da man teilweise eben nur aus dem

Kontext erkennen kann, ob es sich bei einer Zahl, zum Beispiel dieser⁹⁴:  um 13, $13 * 60$, $13 * 60^n$ oder eventuell sogar $13 * \frac{1}{60}$ handelte, das ebenfalls gleich dargestellt wurde.⁹⁵

Die Tontafel BM 85194, auf der beide nachfolgend behandelten Beispiele gefunden wurden, stammt aus der jüngeren Hamurapizeit, also ungefähr aus 1750 v. Chr.⁹⁶, und besteht aus mehreren Beispielen aus dem Bereich Bautechnik.⁹⁷

⁹³ So wie bei unserem Stellenwertsystem: 1 (bzw. ein Keil) bedeutet die Zahl Eins; 1,40 (Ein Keil und vier Winkelhaken) aber zum Beispiel: $1 * 60 + 40 = 100$. Der Einser steht hier also für die Zahl 60. (Neugebauer, Über vorgriechische Mathematik, 1929, S. 110)

⁹⁴ Diese Abbildung ist aus dem Buch: (Vogel, 1959, S. 16)

⁹⁵ (Vogel, 1959, S. 15f.)

⁹⁶ (<http://www.navigator-allgemeinwissen.de/>)

⁹⁷ (Neugebauer, Mathematische Keilschrift-Texte, Erster Teil: Texte, 1935, S. 164)

„33: 1,0 der Umfang, 2 (ist), was ich herabgestiegen bin. Die Sehne ist was? Du:

34: Du: 2 quadriere, 4 siehst du. 4 von 20,

35: dem Durchmesser, ist entfernt {siehst du} 16 siehst Du. 20, den Durchmesser, quadriere. 6,40 siehst Du.

36: 16 quadriere, 4,16 siehst du. 4,16 mit 6,40 ist entfernt.

37: 2,24 siehst Du. 2,24 (hat) was (als) Quadratwurzel? 12 (ist) die Quadratwurzel.

38: (Dies ist) die Sehne. So ist das Verfahren.“ (Neugebauer, Mathematische Keilschrift-Texte, Erster Teil: Texte, 1935, S. 159)

Was dies nun konkret bedeutet, wird nun mit Hilfe folgender Skizze erklärt:⁹⁹

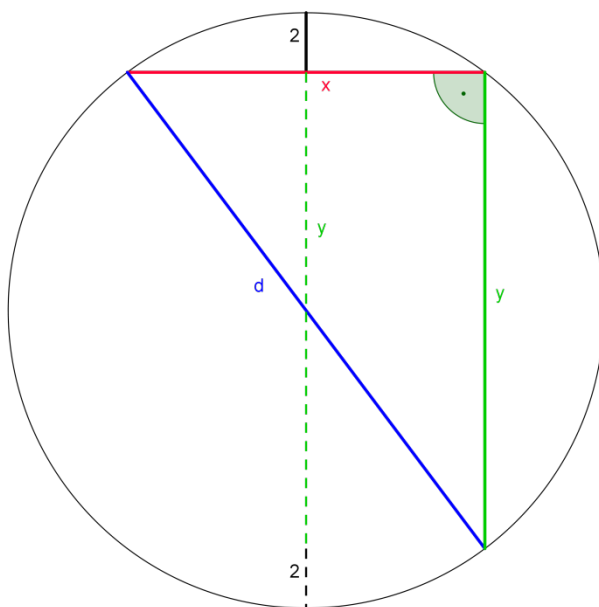


Abbildung 15

Gegeben ist also der Wert des Umfangs: $u = 1,0$ im Hexagesimalsystem, was umgerechnet auf das Dezimalsystem bedeutet: $u = 1 * 60 + 0$ bzw. $u = 60$.

Außerdem ist die Höhe des oberen Kreissegments mit 2 (= 2 im Dezimalsystem, bis zur Zahl 59 unterscheiden sich die beiden Systeme nicht voneinander) angegeben.

Gesucht ist die Länge der **Kreissehne**
x: $x = ?$

⁹⁸ (Neugebauer, Mathematische Keilschrift-Texte, Erster Teil: Texte, 1935, S. 159)

⁹⁹ Die folgenden Erklärungen und auch die Abbildung haben den Inhalt betreffend als Grundlage das Werk: (Neugebauer, Mathematische Keilschrift-Texte, Erster Teil: Texte, 1935, S. 180)

Mit Hilfe der Formel des Kreisdurchmessers: $d = \frac{u}{\pi}$ und dem Wissen, dass die Babylonier mit $\pi = 3$ rechneten¹⁰⁰, ergibt sich für $d = \frac{60}{3} = 20$, womit die erste Seite des in der Skizze bunt eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecks bereits gefunden ist.

Um Seite y auszurechnen, muss nun vom Durchmesser $d = 20$ zweimal die Höhe 2 (= 4) abgezogen werden. Dass man die Zahl 2 quadrieren muss, um auf die Zahl 4 zu kommen, wie es im übersetzten Text steht, ist eine Fehlinterpretation. Gemeint muss eigentlich sein: „2 verdopple, 4 siehst Du“.¹⁰¹

Es gilt also: $y = 16$.

Nun werden sowohl der Durchmesser, als auch die Seite y quadriert:

$$20^2 = 6,40 = 6 * 60 + 40 = 400 \text{ bzw. } 16^2 = 4,16 = 4 * 60 + 16 = 256$$

Und voneinander abgezogen: $6,40 - 4,16 = 2,24$ bzw. $20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144$.

An dieser Stelle wird klar, dass die Babylonier, sowohl den „Satz des Thales“, als auch den „Satz des Pythagoras“ zumindestens in Grundzügen kannten und auch damit rechneten. Sie nehmen hier nämlich an, dass 1) dieses Dreieck ein rechtwinkliges ist („Satz des Thales“) und errechnen die Seite x dann 2) mit Hilfe des Satzes des Pythagoras: $d^2 = x^2 + y^2 \rightarrow d^2 - y^2 = x^2$.

Es gilt also, dass $x^2 = 144 \rightarrow x = 12$.

¹⁰⁰ vgl. auch *Kapitel IV, 3* dieser Arbeit

¹⁰¹ (Neugebauer, Mathematische Keilschrift-Texte, Erster Teil: Texte, 1935, S. 180)

Dasselbe Beispiel existiert noch einmal, nur dass diesmal nach der Höhe des Kreissegments gesucht wird, die im vorigen Beispiel 2 betragen hat:

BM 85194, Rs. 1, Zeile 39-43:¹⁰²

„39: Wenn ich den Umfang 1,0 gekrümmt habe.

40: 12 die Sehne. Was ich herabgestiegen bin (ist was?) Du: 20, den Durchmesser, quadriere.

41: 6,40 siehst Du. 12 quadriere. 2,24 von 6,40 ist entfernt.

42: 4,16 siehst Du. 16 (hat) was (als) Quadratwurzel? 4 (ist) die Quadratwurzel. $\frac{1}{2}$ (von) 4 brich ab.

43: 2 siehst Du. 2 (ist) was Du herabgestiegen bist. Verfahren.“ (Neugebauer, Mathematische Keilschrift-Texte, Erster Teil: Texte, 1935, S. 160)

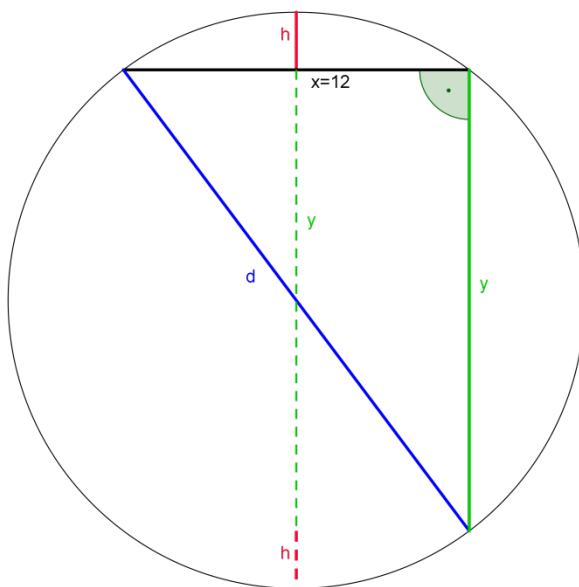


Abbildung 16

Auch bei diesem Beispiel gilt wieder $u = 60$, was für den Durchmesser $d = 20$ bedeutet.

Diesmal wird jedoch statt der Dreiecksseite x , die hier 12 beträgt, die **Höhe des Kreissegments h** gesucht.

¹⁰² Die folgenden Erklärungen und auch die Abbildung haben den Inhalt betreffend als Grundlage das Werk: (Neugebauer, Mathematische Keilschrift-Texte, Erster Teil: Texte, 1935, S. 160 und 180)

Als erster Schritt wird der Durchmesser d quadriert: $d^2 = 6,40 = 6 * 60 + 40 = 400$.
Anschließend die Dreiecksseite x : $12^2 = 2,24 = 2 * 60 + 24 = 144$.

Mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes erhält man y : $d^2 = x^2 + y^2 \rightarrow d^2 - x^2 = y^2$.
Es gilt also: $y^2 = 256 \rightarrow y = 16$. Der Schritt aus 256 die Quadratwurzel zu ziehen wird im übersetzten Text ausgelassen. Da außerdem gilt: $d = y + 2 * h \rightarrow 2 * h = d - y \rightarrow 2 * h = 20 - 16 = 4$

Dass man von der Zahl 16 die Quadratwurzel ziehen muss, um auf die Zahl 4 zu kommen, wie es im übersetzten Text steht, ist eine Fehlinterpretation. Gemeint muss eigentlich sein: „20 von 16 ist entfernt, 4 siehst Du“.¹⁰³

Eine weitere Erklärung könnte sein, dass sich das Ziehen der Quadratwurzel im Originaltext eigentlich auf $\sqrt{265} = 16$ bezieht, was in der Übersetzung ausgelassen wurde und nicht auf $\sqrt{16} = 4$.

Als letzten Schritt berechne h : $2 * h = 4 \rightarrow h = 2$.

¹⁰³ (Neugebauer, Mathematische Keilschrift-Texte, Erster Teil: Texte, 1935, S. 180)

III. PYTHAGORAS VON SAMOS

1. Leben und Umfeld

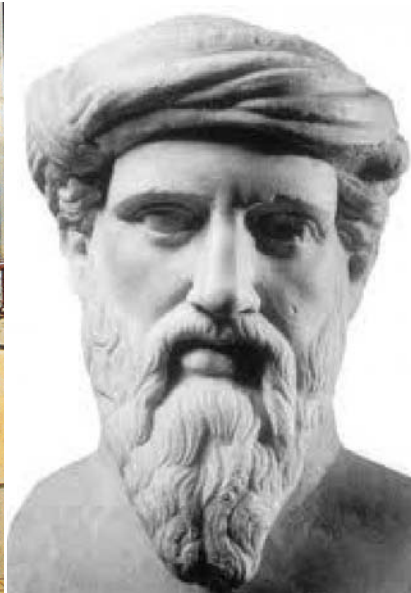


Abbildung 17: Pythagoras Bild (<http://www.hermes-press.com/>)

Abbildung 18: Pythagoras Statue (<http://totallyhistory.com/>)

Pythagoras wurde um das Jahr 565 v. Chr. geboren¹⁰⁴, wobei das nur eine ungefähre Schätzung ist und man oftmals auch andere Zahlen findet. Dies kommt daher, dass man bei den meisten antiken Autoren kein genaues Geburtsjahr oder gar Datum findet, sondern dieses aus anderen Daten errechnen muss¹⁰⁵.

Genauer beschrieben hingegen wird seine Familiengeschichte und so ist sich der Großteil der antiken Schriftsteller, wie zum Beispiel Herodot, der nur wenige Jahre nach Pythagoras Tod geboren wurde, einig, dass Pythagoras der Sohn eines gewissen

¹⁰⁴ (Strathern, Pythagoras & sein Satz, 1999, S. 17)

¹⁰⁵ zum Beispiel schreibt Diodoros, dass Pythagoras zur Zeit, als ein gewisser Therikles das hohe Amt des Archon in Athen bekleidete, bereits bekannt und in aller Munde war. (Diodoros, 1993, S. 565) Da man weiß, dass Therikles dieses Amt 533/532 v. Chr. innehatte, kann man die Zeit, in der Pythagoras gelebt haben muss bereits eingrenzen. (Diodoros, 1993, S. 621) Je mehr Informationen man erhält, desto genauer werden die Angaben.

Mnesarchos war¹⁰⁶, einem Graveur aus Samos¹⁰⁷. Pausanias weiß sogar Genaueres über seine Abstammung, er schreibt, dass Pythagoras in vierter Generation von Hippasos abstammte, der nach Samos auswanderte, als die Stämme der Dorer über seine eigentliche Heimat herzogen. Er war also der Urenkel des Hippasos, Enkel eines gewissen Euphron und Sohn des oben erwähnten Mnesarchos.¹⁰⁸ Wie bei vielen antiken Berühmtheiten, besonders aus den Jahrhunderten vor Christi Geburt, gibt es jedoch nicht nur eine Theorie über die genaueren Verwandtschaftsverhältnisse. Iamblichos, ein Autor aus dem 3. Jahrhundert nach Christus, der Pythagoras Leben und Wirken ein ganzes Buch gewidmet hat, ist der Meinung, dass Pythagoras aus der Familie des Ankaios stammte, dem Gründer von Samos, der von Zeus abstammen soll. Auch er nennt wieder Mnemarchos als Vater, erwähnt aber auch Pythagoras Mutter Pythias.¹⁰⁹ Er schreibt weiters, dass es Autoren gab, die in Pythagoras einen Sohn des Gottes Apollon sahen und dass diese Meinung weiter verbreitet war, als man denken würde. Er selbst glaubt jedoch nicht daran, meint aber, dass zumindestens Pythagoras Seele unter dem Schutz und der Führung des Gottes gestanden hat, da er ein so weiser Mann war.¹¹⁰

Klar herauslesen kann man aus diesen Zeugnissen, dass die Heimatstadt des Pythagoras die griechische Insel Samos war, die in der östlichen Ägäis, in der Nähe der heutigen Türkei, liegt.¹¹¹ Außerdem schien er ein Mann gewesen zu sein, den viele bewunderten, wenn seine Vorfahren oder sogar er selbst mit den Göttern in Verbindung gebracht wurden.

Zur Zeit Pythagoras war Samos eine der reichsten Inseln im Ägäischen Meer und eine große Handelsmacht und die Griechen waren Eroberer, die ihre Herrschaft immer mehr ausdehnten. Mit Thales von Milet und seinen Schülern hatte zirka 20 Jahre vor Pythagoras Geburt die Philosophenära begonnen, steckte jedoch noch in den Kinderschuhen.¹¹² Als Pythagoras ein gewisses Alter erreicht hatte, ließ sein Vater Mnesarchos ihm die bes-

¹⁰⁶ (Herodot, 1995, S. 573)

¹⁰⁷ (Laertius, 1998, S. 371)

¹⁰⁸ (Pausanias, 1986, S. 201)

¹⁰⁹ (Iamblichos, 1963, S. 17, 19)

¹¹⁰ (Iamblichos, 1963, S. 19, 21)

¹¹¹ (Strathern, Pythagoras & sein Satz, 1999, S. 17)

¹¹² (Strathern, Pythagoras & sein Satz, 1999, S. 17f.)

te Bildung zukommen und schickte ihn zu den besten Lehrern. Ein Lehrer soll Pherekydes von Syros gewesen sein, den er so schätzte, dass er ihn, als er hörte dass es ihm schlecht gehe, bis zum Tod gepflegt hat.¹¹³ Pherekydes soll auch dafür verantwortlich gewesen sein ihm einige der verrückteren religiösen Ideen Pythagoras Lehre betreffend eingeredet zu haben¹¹⁴, von denen später berichtet wird. Die naturwissenschaftlichen Kenntnisse soll Pythagoras in Milet entweder bei Thales selbst oder bei einem seiner Schüler¹¹⁵ erhalten haben, zu denen er sich laut Iamblichos mit ungefähr achtzehn Jahren begab, als ersichtlich wurde, dass sich in seiner Heimatstadt Samos eine Tyrannis¹¹⁶ anbahnte.¹¹⁷

Pythagoras unternahm auch noch weitere Reisen, unter anderem nach Ägypten, um sein Wissen zu vertiefen. Diogenes Laertius schreibt, dass er Ägyptisch gelernt hat und sich in alle Mysterien einführen ließ, die ihm die Priester und sogar Magier dort beibringen konnten.¹¹⁸ Außerdem hatte er einen unbändigen Wissensdurst, besuchte so viele religiöse Stätten wie möglich und ließ kein Gespräch aus, in der Hoffnung ein immer größeres Wissen zu erlangen. Dort soll er 22 Jahre lang geblieben sein bis er gefangengenommen wurde und nach Babylon¹¹⁹ kam, wo er wiederum 12 Jahre blieb und alles aufsog, was man ihm an Kultur und Wissen beibrachte.¹²⁰

Vermutlich kehrte er danach nach Samos zurück, es gibt jedoch andere Quellen, die davon berichten, dass er womöglich noch weiter in den Orient reiste und in Persien und Indien weitere Lehren kennenlernte.¹²¹ Zu dieser Zeit hatte sich Polykrates schon längst als Herrscher und Tyrann durchgesetzt und sich einen Namen als großer Bauherr geschaffen. Natürlich sollte auch die kulturelle Seite nicht zu kurz kommen, weshalb er bekannte Künstler und Denker zu sich an den Hof holte. Auch Pythagoras wurde einer

¹¹³ (Diodoros, 1993, S. 565f.)

¹¹⁴ (Strathern, Pythagoras & sein Satz, 1999, S. 20)

¹¹⁵ vermutlich bei Anaximander, einem Naturphilosoph

¹¹⁶ die Tyrannis des Polykrates

¹¹⁷ (Iamblichos, 1963, S. 25)

¹¹⁸ (Laertius, 1998, S. 371)

¹¹⁹ heutiger Irak (Strathern, Pythagoras & sein Satz, 1999, S. 25)

¹²⁰ (Iamblichos, 1963, S. 29, 31)

¹²¹ (Strathern, Pythagoras & sein Satz, 1999, S. 27)

von ihnen und war vermutlich auch politisch aktiv, bis er sich mit dem Tyrannen überwarf und verbannt wurde.¹²²

Die meiste Zeit seines restlichen Lebens verbrachte er in Kroton, einer Stadt in Unteritalien, die heute Crotona heißt. Dort wurde er zu dem Lehrer, religiösen Führer und Philosophen, als der er bis heute bekannt ist, verbreitete seine Lehren und hatte bald eine große Anhängerschaft, die man Pythagoreer nannte.¹²³

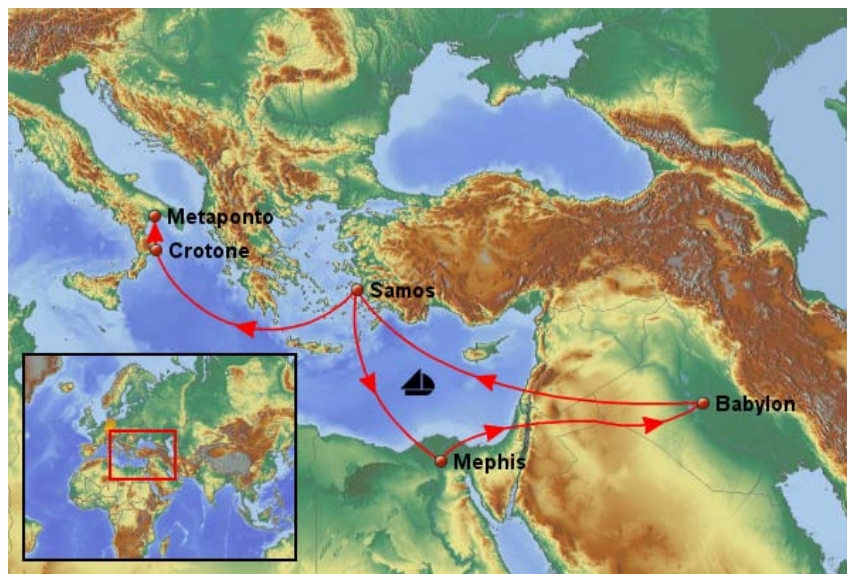


Abbildung 19: Pythagoras Reise (<https://www.stepmap.de/>),

geboren in Samos → dann reiste er nach Milet (fehlt auf der Karte) → nach Ägypten → Babylon → in Kroton gründete er die Pythagoreer → er starb in Metapont

Er heiratete eine Frau namens Theano, die vermutlich seine Schülerin war und hatte zumindest eine Tochter, die Damo hieß, und einen Sohn namens Telauges.¹²⁴ Nach einiger Zeit in Kroton begann er sich immer mehr in eine Art religiösen Sektenführer zu verwandeln. So soll er zum Beispiel nur weiße Kleidung getragen und hinter einem wei-

¹²² (Strathern, Pythagoras & sein Satz, 1999, S. 29f.)

¹²³ (Strathern, Pythagoras & sein Satz, 1999, S. 32)

¹²⁴ (Laertius, 1998, S. 385f.)

ßen Vorhang mit seinen Anhängern gesprochen haben. Nur die Gelehrteren unter ihnen bekamen ihn zu Gesicht.¹²⁵

Pythagoras ging seinen Schülern und Schülerinnen¹²⁶ immer mit gutem Beispiel voran und so beschreibt zum Beispiel Diogenes Laertius ihn folgendermaßen:

„Niemand wurde er beim Verrichten seiner Notdurft, beim Liebesakt oder betrunken gesehen. Er hat nie gelacht und nicht mit Witzen oder schlüpfrigen Anekdoten angegeben. Im Zorn bestrafte er keinen Sklaven und keine Freien.“
(Laertius, 1998, S. 377f.)

Über seinen Tod gibt es verschiedene Geschichten, Fakt ist, dass der Pythagoreismus nicht nur Fans, sondern auch Gegner hatte. Die einen sahen die Pythagoreer als eine eventuelle Gefahr für das derzeitige aristokratische System an und wollten einen Umschwung zur Demokratie in jedem Fall verhindern. Andere fanden sie hatten zu hohe Moralvorstellungen. Die damaligen Herrscher in Süditalien schürten die Stimmung so weit, dass Pythagoras um ca. 500 v. Chr. mit seinen Anhängern aus Kroton fliehen musste. Metapontion, eine griechische Kolonie, wurde ihre neue Heimat, in der Pythagoras auch verstarb.¹²⁷ Einige Quellen erzählen davon, dass Pythagoras Haus in Brand gesteckt wurde, während er sich gerade mit Bekannten darin aufhielt. In einer anderen Geschichte floh Pythagoras in einen Tempel der Musen und verstarb dort, nachdem er 40 Tage gefastet hatte. Eine weitere Geschichte besagt, dass er und 40 seiner Anhänger auf der Flucht von Gegnern eingeholt und ermordet wurden, weil sie aus religiösen Gründen nicht durch ein Bohnenfeld gehen wollten. Laut Diogenes Laertius starb Pythagoras im stattlichen Alter von 80 Jahren, ja er erzählt sogar von Autoren, die sein Alter auf 90 schätzten.¹²⁸ Dies ist vermutlich übertrieben, da man zur damaligen Zeit im Mittel ca. 35 Jahre alt wurde.¹²⁹

¹²⁵ (Iamblichos, 1963, S. 153, 79)

¹²⁶ Es waren auch Frauen zugelassen. (siehe nächstes Kapitel „**die Seele wandert**“)

¹²⁷ (Strathern, Pythagoras & sein Satz, 1999, S. 61f.)

¹²⁸ (Laertius, 1998, S. 384-386)

¹²⁹ (Strathern, Pythagoras & sein Satz, 1999, S. 62)

Pythagoras Lehre und die Pythagoreer

Pythagoras Lehre war vor allem am Beginn seines Schaffens sehr populär und so gab es viele, die sich ihm und den Pythagoreern anschließen wollten. Pythagoras wollte nur Mitglieder, die die Sache ernst nahmen und bereit waren alles dafür zu geben und so prüfte er jeden einzelnen, bevor er aufgenommen wurde. Laut Iamblichos versuchte er die Beziehung zu den Eltern und Freunden zu ergründen, um daraus etwas über den Charakter zu erfahren. Er fand heraus, was sie den ganzen Tag machten, worüber sie sich freuten oder was sie traurig machte und er betrachtete den Körper, um durch all das auf die Seele schließen zu können. Hatte man diesen Test bestanden, so mussten die Bewerber fünf ganze Jahre schweigen, um so ihre Selbstbeherrschung zu demonstrieren. Dabei studierten sie Pythagoras Lehre, wobei sie seine Vorträge wie oben beschrieben nur hinter einem weißen Vorhang hörten und ihn selbst in diesen Jahren nie zu Gesicht bekamen.¹³⁰ Hatten sie sich als würdig erwiesen, wurden sie in den inneren Kreis aufgenommen, wohnten gemeinsam mit den anderen Schülern und Schülerinnen in einem Gemeinschaftshaus und durften ihn nun auch sehen. Sie wurden zu einem Pythagoreer, für den es viele Regeln zu befolgen galt, von denen einige noch heute wertvoll sind und Bestandteil jeder Erziehung sind bzw. sein sollten und wiederum andere für uns wie verrücktes Geschwätz klingen:

„Teile deinen Besitz“: Alle, die zum Pythagoreer wurden und ins Gemeinschaftshaus zogen, gaben damit auch ihren persönlichen Besitz auf, der automatisch zum Besitz aller wurde.¹³¹ Sie waren eine Gemeinschaft und teilten alles wie unter Brüdern. Dies traf nicht nur auf diejenigen zu, mit denen sie befreundet waren, sondern auf alle, mit denen sie die Lehre verband.¹³² Wurden sie abgewiesen, so bekamen sie ihren Besitz doppelt zurück, wurden jedoch anschließend behandelt als wären sie tot.¹³³

¹³⁰ (Iamblichos, 1963, S. 78f.)

¹³¹ (Laertius, 1998, S. 374)

¹³² (Diodoros, 1993, S. 566)

¹³³ (Iamblichos, 1963, S. 79f.)

„Trainiere dein Gedächtnis“: Es galt als wichtig sein Gedächtnis zu trainieren und so machten die Pythagoreer jeden Tag Übungen, um sich möglichst viel merken zu können. Sie standen erst auf, nachdem sie sich ganz genau erzählt hatten, was sie am Tag davor getan hatten. Wenn mehr Zeit zur Verfügung stand erzählten sie sich auch von vorgestern, vorgestern oder der letzten Woche, wobei jede Tat von der Früh bis zum späten Abend aufgezählt wurde.¹³⁴

„Weniger ist mehr“: Die Pythagoreer achteten sehr auf eine einfache Lebensführung, wie Diogenes Laertius schreibt: *„denn Üppigkeit ruiniere sowohl das Vermögen, als auch den Körper der Menschen. Die meisten Krankheiten gingen ja, wie er behauptete, auf Verdauungsstörungen zurück und eben diese hätten ihre Ursache in üppiger Lebensweise.“* (Diodoros, 1993, S. 568)

Viele Mitglieder tranken daher überhaupt nur Wasser und manche aßen sogar nur Ungekochtes.¹³⁵ Auch Alkohol, der als besonders schädlich galt, durfte nur in Maßen getrunken werden und jeder Exzess wurde verurteilt.¹³⁶ Um sich in Selbstbeherrschung zu üben, war es auch Brauch sich einen Tisch wie für ein Gastmahl mit den tollsten Speisen und Getränken decken zu lassen, nur um ihn dann eine Zeitlang zu betrachten und alles wieder wegräumen zu lassen.¹³⁷

„Die Seele wandert“: Pythagoras glaubte an die sogenannte Seelenwanderung, an ein Leben nach dem Tod, wobei die Seele dabei in höhere oder auch niedrigere Lebewesen wanderte, je nachdem, wie vorbildhaft man sein Leben geführt hatte. Man konnte in einem früheren Leben also eine Frau, ein Tier oder gar eine Pflanze gewesen sein und musste daher alle Lebewesen mit Achtung behandeln. Deswegen gab es bei den Pythagoreern auch Schülerinnen, konnte es doch möglich sein in einem früheren oder nächsten Leben selbst im Körper einer Frau zu leben¹³⁸. Außerdem war Pythagoras auch gegen Fleischkonsum und das Töten oder Quälen von Tieren, da auch in diesen eine be-

¹³⁴ (Diodoros, 1993, S. 567)

¹³⁵ (Diodoros, 1993, S. 568)

¹³⁶ (Laertius, 1998, S. 347)

¹³⁷ (Diodoros, 1993, S. 567)

¹³⁸ (Strathern, Pythagoras & sein Satz, 1999, S. 54)

freundete Seele leben konnte.¹³⁹ Einmal soll er gesehen haben, wie ein fremder Hund ausgepeitscht wurde und er bat den Besitzer sofort aufzuhören, weil er sich sicher war im Bellen des Hundes die Stimme eines verstorbenen Freundes wiedererkannt zu haben.¹⁴⁰ Pythagoras selbst konnte sich übrigens an alle vorherigen Leben erinnern.¹⁴¹

„Freundschaft ist das höchste Gut“: Pythagoras lehrte mit allen Freundschaft zu schließen, so auch mit den Göttern, indem man sie verehrt, mit dem Körper, indem man ihm nichts schlechtes zuführt und auf ihn achtet und natürlich Freundschaft mit allen Menschen. Freundschaft und Achtung sollte zwischen Ehepaaren und Familien herrschen, genauso wie auch zwischen einem Herrn und seinem Sklaven. Man sollte versuchen die Streitlust aus solchen Beziehungen zu verbannen und sich mit gegenseitigem Respekt zu behandeln.¹⁴² Man sollte auf keinen Fall etwas sagen oder tun, wenn man gerade wütend ist, sondern immer erst abwarten bis der Zorn verbraucht ist und erst dann handeln.

„Alles ist Zahl“: Dies war der Grundsatz der Pythagoreer, da sie überzeugt waren, dass alles aus Zahlen bestehe. Wie kann man sich das nun vorstellen? Es existiert eine von den Pythagoreern sogenannte Einheit, etwas Göttliches, aus dieser entsteht eine unbestimmte Zweiheit, vermischt man diese beiden erhält man die Zahlen. Aus den Zahlen entstehen dann die Punkte, aus diesen die Striche und später die verschiedenen Flächen. Irgendwann entsteht daraus der Kosmos in Form einer Kugel, der eine Seele hat und vernünftig ist. Innerhalb dieser Kugel befindet sich die Erde, die ebenfalls kugelförmig ist und bewohnt. Sonne, Mond und Sterne sind Götter und Verwandte der Menschen.¹⁴³ So entsteht auch der Mensch und die anderen Lebewesen und alles hat als Grundlage diese Einheit und Zweiheit bzw. die Zahlen. Diese Weltentstehungstheorie ist in Wahrheit natürlich komplexer und geht weit über das hinaus, was in dieser Arbeit behandelt werden kann.¹⁴⁴

¹³⁹ (Laertius, 1998, S. 372, 375)

¹⁴⁰ (Strathern, Pythagoras & sein Satz, 1999, S. 60)

¹⁴¹ (Iamblichos, 1963, S. 69)

¹⁴² (Iamblichos, 1963, S. 223)

¹⁴³ (Laertius, 1998, S. 379f.)

¹⁴⁴ Für genauere Informationen siehe z.B.: (Laertius, 1998, S. 379-381)

„Weitere Verbote“: Pythagoreer durften bestimmte Fische nicht essen wie Meerbarbe, Seebarbe und Schwarzschanz, außerdem kein Herz, keine Gebärmutter und keine Bohnen. Auch ein weißer Hahn war absolut tabu.¹⁴⁵

Weiters war es ihnen verboten etwas von ihrer Lehre preiszugeben, alles war geheimzuhalten und nur für die Pythagoreer bestimmt, wodurch sie sich oft auch den Unmut von Nicht-Mitgliedern zuzogen. Die Pythagoreer versuchten auch zu vermeiden nicht öfter zu schwören oder einen Eid abzulegen, als unbedingt nötig. Wenn sie es aber taten, so musste dieser unbedingt eingehalten werden.

Sexuelle Handlungen sollten nur selten stattfinden und wenn dann eher im Winter als im Sommer, wo man sich den Frauen besser überhaupt nicht nähern sollte. Zu viel körperliche Betätigung in diesem Bereich zieht nämlich Schwäche nach sich und es ist wichtig immer voll bei Verstand zu sein.¹⁴⁶ Trotzdem durfte man seine Frau sexuell auch nicht vernachlässigen.¹⁴⁷ Weiters sollte man seine Frau nicht betrügen, sondern gut für sie sorgen und sie bei sich aufnehmen so wie man es bei einem bzw. einer Schutzflehenden tun würde. Außerdem war es wichtig Kinder zu zeugen, damit diese nach dem Tod der Eltern weiterhin die Götter anbeten könnten.¹⁴⁸

¹⁴⁵ (Laertius, 1998, S. 377)

¹⁴⁶ (Diodoros, 1993, S. 569)

¹⁴⁷ (Laertius, 1998, S. 378)

¹⁴⁸ (Riedweg, 2002, S. 29 und 90)

2. Werk

Pythagoras soll sich abgesehen von der Philosophie mit Medizin, Musik und auch anderen Wissenschaften beschäftigt haben, am wichtigsten war ihm jedoch die Mathematik und besonders die Geometrie.¹⁴⁹ Seine Schüler und Schülerinnen teilte er je nach Talent bzw. je nach Muße in zwei Gruppen ein: die „Mathematiker“ und die „Akusmatiker“. Man sagt, dass die „Akusmatiker“ Pythagoras Lehre befolgten ohne eine Begründung zu brauchen oder nach Beweisen zu suchen, weshalb man so handeln sollte. Meist waren es ältere Männer, die nur wenig Zeit zur Verfügung hatten, weil wichtige Staatsgeschäfte warteten und für die es einfacher war, einfach nur Regeln zu folgen.¹⁵⁰

„Alle jüngeren Leute aber, die noch arbeiten und lernen konnten, unterrichtete er auf dem Wege über wissenschaftliche Beweise.“ (Iamblichos, 1963, S. 95)

Die Mathematiker standen im Diskurs mit Pythagoras und beschäftigten sich viel mit mathematischen Themen, die sie versuchten zu erforschen. Gelang einem der Pythagoreer eine mathematische Entdeckung, so wurde sie meist der Gruppe oder Pythagoras selbst zugeschrieben, weshalb es einige Diskussionen darüber gibt, welche Sätze und Beweise von Pythagoras selbst sind und welche ihm nur zugeschrieben wurden.¹⁵¹ Vor allem umstritten ist dies beim „Satz des Pythagoras“, der in diesem Kapitel behandelt wird.

Der „Satz des Pythagoras“

Satz: *„Am rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.“* (Euklid, 2015, S. 32)

¹⁴⁹ (Laertius, 1998, S. 375)

¹⁵⁰ (Iamblichos, 1963, S. 87f. und 95)

¹⁵¹ (Strathern, Pythagoras & sein Satz, 1999, S. 46)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

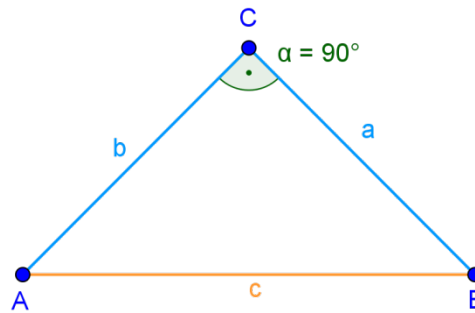


Abbildung 20

Natürlich gibt es eine Vielzahl an Beweisen zum „Satz des Pythagoras“, deren Aufzählung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde und die man in unzähligen Büchern oder im Internet finden kann. In diese Arbeit aufgenommen wurden daher nur diejenigen, die eventuell von Pythagoras selbst oder den Pythagoreern stammen könnten oder aber diejenigen, die von einem weiteren berühmten Mathematiker der Antike, dem in dieser Arbeit ebenfalls ein kleiner Teil gewidmet ist, nämlich Euklid,¹⁵² stammen und in seinem Werk „Die Elemente“ behandelt werden.

Die unten angeführten Beweise gehören sicher nicht zu den einfachsten Beweisen, die es zu diesem Satz gibt, vor allem, da wiederum die originale, teils ungewöhnliche Notation verwendet wird. Es wurde daher Wert darauf gelegt die Originalbeweise durch Anmerkungen, Farben und Skizzen zu ergänzen, um das Lesen einfacher zu gestalten.

Der erste Beweis und die dazugehörigen selbst erstellten Zeichnungen haben, sowohl den Inhalt, als auch die teils ungewöhnliche Notation betreffend, als Grundlage das Originalwerk von Euklids Elementen: (Euklid, 2015, S. 32).

Aus dem Werk von Proklos kann man herauslesen, dass es wohl Euklid selbst war, der vor weit über 2000 Jahren diesen Beweis fertigte. Er lobt Euklid für diesen Beweis und bezeichnet ihn außerdem als den überzeugendsten Beweis dieses Theorems. Euklid muss in diesem Beweis gänzlich auf Proportionslehre und die Sätze der Ähnlichkeit verzichten, da seine Sätze und Beweise in den Elementen aufeinander aufbauen und er nur

¹⁵² um 300 v. Chr. (Heath, 1981, S. 354); Euklid wird im *Kapitel I* dieser Arbeit ein wenig genauer behandelt.

das verwenden kann, was bereits vorher bewiesen wurde. Da Proportionen und Ähnlichkeit erst in späteren Büchern¹⁵³ behandelt werden, Pythagoras Theorem jedoch im ersten Buch vorkommt, musste Euklid einen anderen Weg gehen.¹⁵⁴

Es wird mit Beweis 1 begonnen, da unumstritten ist, dass er von einem antiken Mathematiker stammt und die Überlegungen, wie Pythagoras und seine Anhänger diesen Satz bewiesen haben, von diesem Beweis ausgehen.

Beweis 1: Euklids Beweis aus dem Buch „Die Elemente“, Satz 1.47:

Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei Punkt A , so wird behauptet, dass das Quadrat über der Seite BC flächenmäßig gleich ist wie die Quadrate über den Seiten BA und AC zusammen. Es gilt also:

$$BC^2 = BA^2 + AC^2.$$

Es wird nun ein Quadrat über die Seite BC gezeichnet, das als $BDEC$ bezeichnet wird. Ebenso wird ein Quadrat über die Seite BA , das folgend GB genannt wird, und ein Quadrat über die Seite AC gezeichnet, das als HC bezeichnet wird.

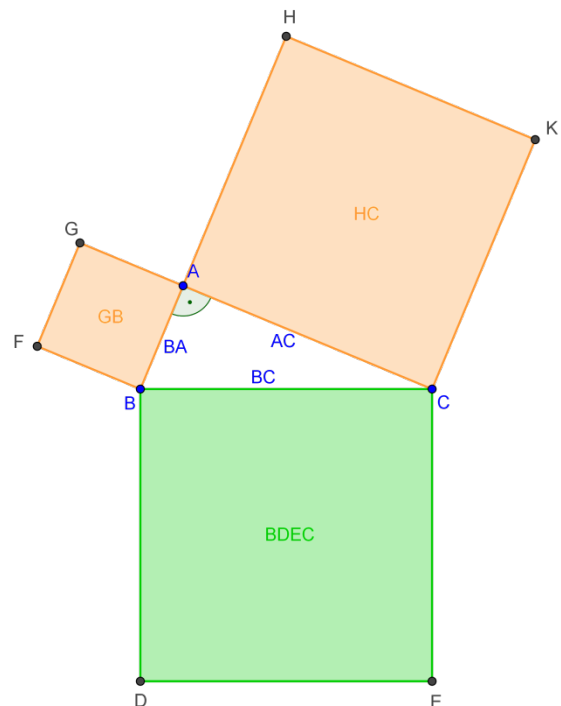


Abbildung 21

¹⁵³ vorrangig in Buch VI

¹⁵⁴ (Proklus, 1945, S. 462f.)

Weiters zeichne man eine Linie AL , die durch den Punkt A geht und parallel zu BD bzw. CE ist, und die Strecken AD und FC ein.

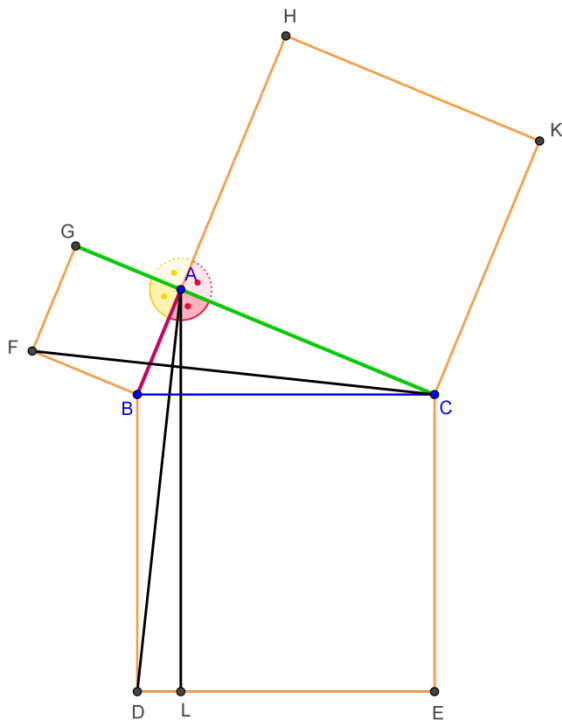


Abbildung 22

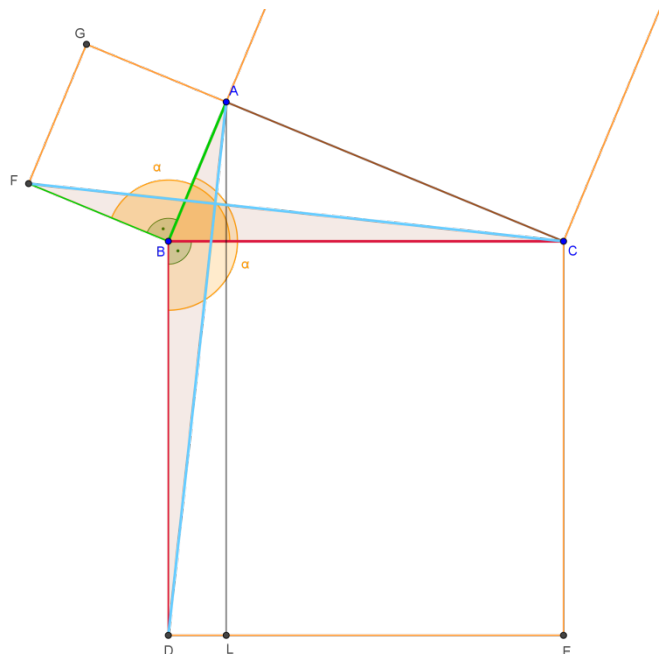
Da beide Winkel $\angle BAC$ und $\angle BAG$ rechtwinklig sind, folgt daraus, dass an der geraden Linie BA im Punkt A die den AG und AC jeweils Nebenwinkel (= supplementäre Winkel) bilden, die zusammen genau 180° ergeben. CA setzt also AG gerade fort. Aus demselben Grund setzt auch BA AH gerade fort.

Dieser Schritt ist für uns heutzutage klar ersichtlich, da die beiden rechten Winkel $\angle BAG$ und $\angle BAC$ zusammen einen gestreckten Winkel (= 180°) bilden und die Strecken GA und AC daher auf derselben Gerade liegen müssen. Zu Euklids Zeit

war dieser Schritt aber anscheinend wichtig und auf oben beschriebene Art zu beweisen, da ihm im Buch Euklids Elemente sogar eine eigene Proposition (I.14) gewidmet wird.

Weiters gilt, dass der Winkel $\angle DBC$ gleich dem Winkel $\angle FBA$ ist, da beide rechte Winkel sind. Fügt man den Winkel $\angle ABC$ zu beiden dazu, dann ist der ganze Winkel $\angle DBA$ dem ganzen Winkel $\angle FBC$ gleich: $\angle DBA = \angle FBC = \alpha$. Weiters gilt, dass $DB = BC$ und außerdem $FB = BA$.

Abbildung 23



Das Dreieck $\triangle ABD$ und das Dreieck $\triangle FBC$ haben also bereits 2 Seiten ($DB = BC$ und $FB = BA$) und den eingeschlossenen Winkel $\angle DBA = \angle FBC = \alpha$ gemeinsam. Somit handelt es sich um kongruente Dreiecke. Es ist also klar, dass auch die jeweiligen Grundlinien gleich sein müssen: $AD = FC$ und somit auch die beiden Dreiecke gleich sind: $\triangle ABD = \triangle FBC$.

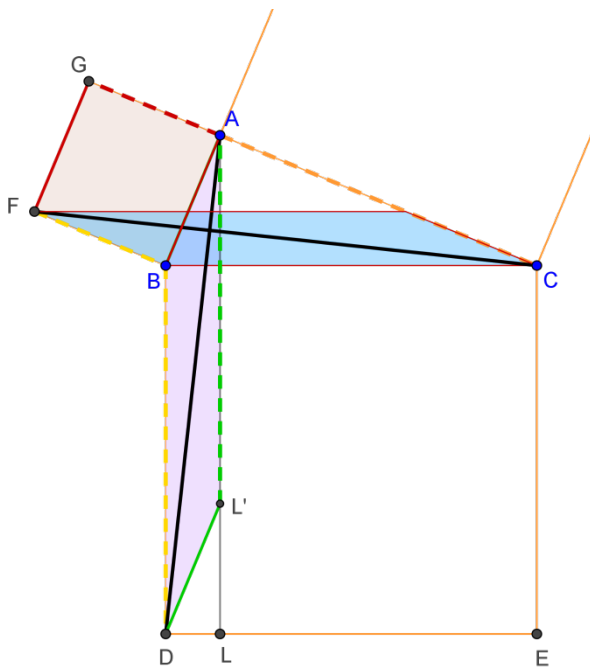


Abbildung 24

Das Parallelogramm BL ¹⁵⁵ (mit den Eckpunkten $ABDL'$) hat dieselbe Fläche wie zweimal das Dreieck $\triangle ABD$, da beide dieselbe Grundlinie BD haben und zwischen den strichlierten Parallelen BD und AL liegen.

Liegen zwei Dreiecke oder zwei Parallelogramme nämlich zwischen denselben zwei Parallelen, so bedeutet dies, dass sie dieselbe Höhe haben. Teilen sie sich dann noch dieselbe Grundlinie, so haben die beiden Dreiecke bzw. Parallelogramme zueinander jeweils exakt dieselbe Fläche, da die Flächenformel des Dreiecks $\frac{\text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}}{2}$ und die Flächenformel des

Parallelogramms $\text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}$ ist.

Außerdem ist das Quadrat GB flächengleich zu zweimal dem Dreieck FBC , da auch diese beiden Figuren wiederum dieselbe Grundlinie FB und dieselbe Höhe haben, da beide zwischen denselben strichlierten Parallelen¹⁵⁶ FB und GC liegen.

¹⁵⁵ Vermutlich bezeichnet Euklid das Parallelogramm, das eigentlich die Eckpunkte $ABDL'$ hat, mit BL , weil es zum Rechteck $ABDL$ (in der alten Notation BL genannt) vollkommen flächengleich ist

¹⁵⁶ Rechteck und Quadrat sind Spezialfälle des Parallelogramms.

Da gilt, dass: $\Delta FBC = \Delta ABD$ und sowohl Parallelogramm BL , als auch Quadrat GB flächenmäßig genauso groß sind wie $2 * \Delta FBC$ bzw. $2 * \Delta ABD$, so gilt auch, dass Parallelogramm BL flächenmäßig so groß ist wie Quadrat GB . Und weil das Parallelogramm BL flächengleich zu dem Rechteck BL ist, so gilt auch, dass:

$$\text{Rechteck } BL = \text{Quadrat } GB.$$

Der Beweis, dass

$\text{Rechteck } CL = \text{Quadrat } HC$, funktioniert ähnlich, wenn man statt der Strecken AD und FC die Strecken AE und BK einzeichnet.

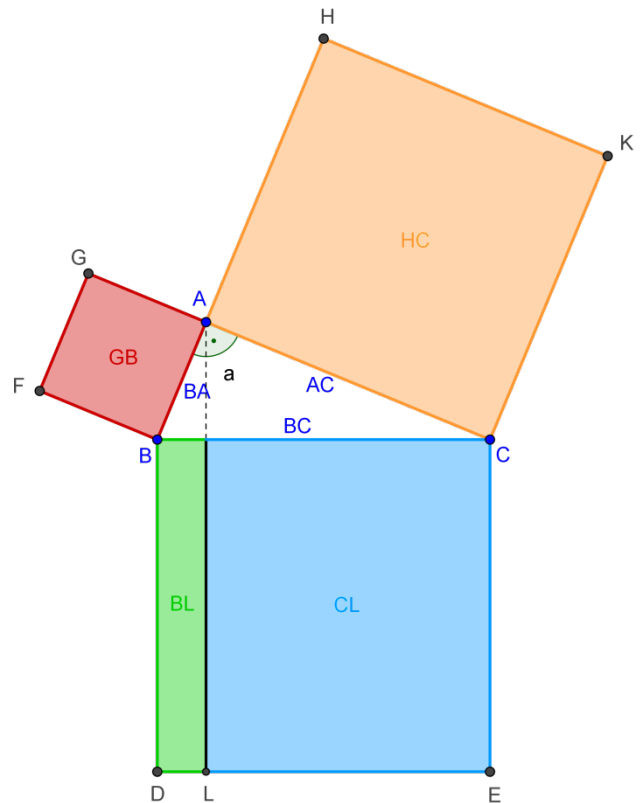


Abbildung 25

Hat man das bewiesen, ist klar ersichtlich, dass das ganze Quadrat $BDEC$, das aus den beiden Rechtecken BL und CL besteht, flächengleich zu den beiden Quadraten $GB + HC$ ist.

Weil das Quadrat $BDEC$ über der Seite BC gezeichnet wird und die Quadrate GB und HC über den Seiten BA und AC , so kann man auch sagen, dass das Quadrat über der Seite BC den Quadraten über den Seiten BA und AC zusammen gleich ist, also

$$BC^2 = BA^2 + AC^2.$$

q.e.d.

Wie haben nun Pythagoras selbst bzw. die Pythagoreer diesen Satz bewiesen?

Dadurch, dass Proklos Euklids obigen Beweis so sehr gelobt hat, ist anzunehmen, dass er in seiner Art neu gewesen sein muss. Es hat also davor vermutlich keinen anderen gleichartigen Beweis gegeben, weshalb anzunehmen ist, dass Pythagoras seinen Satz mit Hilfe von Proportionen bewiesen hat, auch wenn die Proportionenlehre der Pythagoreer unvollkommen war, da sie nur auf kommensurable (=messbare) Größen anwendbar war. Hätte es nämlich bereits einen Beweis ohne Proportionen von Pythagoras gegeben, so hätte Euklid sich keinen neuen überlegen müssen, sondern einfach den bestehenden in sein erstes Buch einfügen können, wie er das bei vielen anderen nicht selbst erstellten Beweisen getan hat.¹⁵⁷

Es wird vermutet, dass es drei verschiedene Möglichkeiten gibt, wie der Beweis von Pythagoras ausgesehen haben könnte:

Alle drei Beweise und die dazugehörigen selbst erstellten Zeichnungen haben, sowohl den Inhalt, als auch die teils ungewöhnliche Notation betreffend, als Grundlage das Werk von Sir Thomas Heath, A history of greek mathematics: (Heath, 1981, S. 148f.)

Beweis 2: Pythagoras Beweis mit Hilfe von Proportionen: Möglichkeit No. 1

Sei ABC ein Dreieck mit einem rechten Winkel bei Punkt A und einer Strecke AD , die normal auf BC steht und durch A geht, so sind die beiden Dreiecke $\triangle DBA$ und $\triangle DAC$ **ähnlich** zum Grunddreieck $\triangle ABC$.

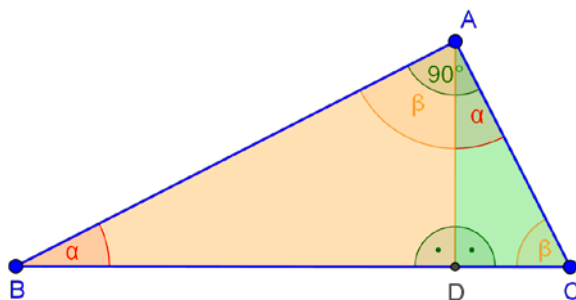


Abbildung 26

¹⁵⁷ (Heath, 1981, S. 147f.)

Da dies vielleicht nicht für jede und jeden gleich ersichtlich ist, folgt hier eine kurze Überlegung: Im Grunddreieck gibt es die Winkel α , β und einen rechten Winkel, das heißt es gilt: $\alpha + \beta = 90^\circ$. Das Dreieck $\triangle DBA$ teilt sich α mit dem Grunddreieck und besitzt außerdem auch einen *rechten Winkel*. Da die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° beträgt, muss der fehlende Winkel genau gleich groß sein wie β im Grunddreieck. Da sich das Dreieck $\triangle DAC$ mit dem Grunddreieck den Winkel β teilt und wiederum einen *rechten Winkel* besitzt, muss der fehlende Winkel gleich sein wie α im Grunddreieck. Alle drei Dreiecke besitzen also dieselben Winkel und sind daher **ähnlich** zueinander:

$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \sim \triangle ABC.$$

Geht man nun von folgenden Proportionen aus, die in diesem Dreieck gelten:

$$BC : BA = AB : BD \quad (\text{Hypotenuse : Kathete an } \alpha \text{ (im großen Dreieck } \triangle ABC) = \text{Hypotenuse : Kathete an } \alpha \text{ (im orangenen Dreieck } \triangle DBA))$$

und formt diese um, so erhält man $BA^2 = BD * BC$:

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BD} \rightarrow \frac{BC * BA * BD}{BA} = \frac{BA * BA * BD}{BD} \rightarrow BC * BD = BA * BA \rightarrow BC * BD = BA^2.$$

Genauso ergibt sich so $AC^2 = CD * BC$, geht man von den Proportionen $BC : AC = AC : DC$ (Hypotenuse : Kathete an β (im großen Dreieck $\triangle ABC$) = Hypotenuse : Kathete an β (im grünen Dreieck $\triangle DAC$) aus:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC} \rightarrow \frac{BC * AC * DC}{AC} = \frac{AC * AC * DC}{DC} \rightarrow BC * DC = AC * AC \rightarrow BC * DC = AC^2. \text{ }^{158}$$

Wir erhalten also: $BA^2 = BD * BC$ und $AC^2 = CD * BC$.

¹⁵⁸ Euklid hat dies auf andere Art auch im Satz VI.4 und 17 bewiesen.

Mit Hilfe von Addition und Umformungen

$$\left. \begin{array}{l} BA^2 = BD * BC \\ AC^2 = CD * BC \end{array} \right\} +$$

$BA^2 + AC^2 = BD * BC + CD * BC \rightarrow BA^2 + AC^2 = BC * (BD + CD)$, weil $BD + CD = BC$
folgt daraus $BA^2 + AC^2 = BC * BC = BC^2$.

folgt daraus also:

$$BA^2 + AC^2 = BC^2.$$

q.e.d.

Beweis 3: Pythagoras Beweis mit Hilfe von Proportionen: Möglichkeit No. 2

Wir gehen wie bereits im vorigen Beweis wieder von folgendem Dreieck aus, wobei die Dreiecke $\triangle DBA$, $\triangle DAC$ und $\triangle ABC$ jeweils wieder zueinander ähnlich sind.

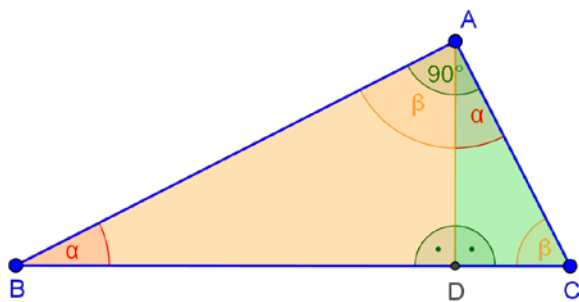


Abbildung 27

So kann man beobachten, dass in diesen ähnlichen Dreiecken die entsprechenden Seiten gegenüber des rechten Winkels (= **Hypothenusen**) jeweils BA (im gelben Dreieck $\triangle DBA$), AC (im grünen Dreieck $\triangle DAC$) und BC (im blauen Dreieck $\triangle ABC$) sind.

Die Dreiecke stehen daher im doppelten (= quadratischen) Verhältnis dieser Seiten, ebenso die Quadrate über ihnen.

Dieser Satz bedarf einer genaueren Aufschlüsselung:

Betrachtet man die Seiten der drei ähnlichen Dreiecke, so gelten folgende Proportionen:

$$\begin{aligned} BA : AC : BC \text{ (Hypothenusen)} &= BD : AD : AB \text{ (Katheten Winkel } \alpha) = \\ &= AD : CD : AC \text{ (Katheten Winkel } \beta) \end{aligned}$$

Mit Dreiecken sind die Dreiecksflächen gemeint, die im rechtwinkligen Dreieck gebildet werden, indem man die Seiten, die den rechten Winkel einschließen, multipliziert und in die Hälfte teilt. Diese sollen im quadratischen Verhältnis zu den Hypothenusen stehen. Es gilt also folgendes:

$$\frac{BD * AD}{2} : \frac{AD * CD}{2} : \frac{AB * AC}{2} = (BA : AC : BC)^2$$

Außerdem soll dasselbe für die Quadrate über den Hypothenusen der ähnlichen Dreiecke gelten:

$$AB * AB : AC * AC : BC * BC = (BA : AC : BC)^2.$$

Zwei der Dreiecke, $\triangle DBA$ und $\triangle DAC$, ergeben gemeinsam das dritte Dreieck $\triangle ABC$ und daher gilt: $\triangle DBA + \triangle DAC = \triangle ABC$, also $\frac{BD*AD}{2} + \frac{AD*CD}{2} = \frac{AB*AC}{2}$.

Da für die Quadrate über den Hypothenusen dieselben Verhältnisse gelten wie für die Dreiecke, so gilt daher auch: $AB * AB + AC * AC = BC * BC$,

$$\text{also } AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

q.e.d.

Beweis 4: Pythagoras Beweis mit Hilfe von Proportionen: Möglichkeit No. 3

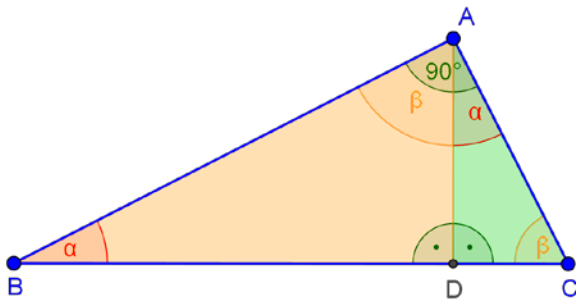


Abbildung 28

Weil die Dreiecke $\triangle DBA$ und $\triangle ABC$ ähnlich sind, so gilt, wenn man die Katheten an α und die jeweiligen Hypotenusen betrachtet:
 $BD : AB = AB : BC$.

Die drei Strecken BD , AB und BC sind also proportional und stehen in einem bestimmten Verhältnis zueinander.

Daher stehen auch ihre Quadrate in diesem Verhältnis: $BD^2 : AB^2 = AB^2 : BC^2$.

Außerdem kann daraus noch gefolgert werden, dass:

$$(I) \quad AB^2 : BC^2 = BD^2 : AB^2 = BD : BC, \text{ weil:}$$

$$\begin{aligned} \text{Aus } \frac{BD}{AB} &= \frac{AB}{BC} \text{ folgt durch Erweitern mit beiden Nennern } BD * BC = AB^2. \left(\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC} \rightarrow \right. \\ \left. \frac{BD * AB * BC}{AB} &= \frac{AB * AB * BC}{BC} \rightarrow BD * BC = AB^2 \right) \end{aligned}$$

Setzt man dies in die linke Seite des Verhältnisses der Quadrate ein:

$$\frac{BD^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{BC^2} \rightarrow \frac{BD^2}{BD * BC} = \frac{AB^2}{BC^2} \rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AB^2}{BC^2} \rightarrow AB^2 : BC^2 = BD : BC.$$

Betrachtet man stattdessen die Katheten an β und die jeweiligen Hypotenusen der ähnlichen Dreiecke $\triangle DAC$ und $\triangle ABC$, so gilt folgendes Verhältnis:

$CD : AC = AC : BC$ und weiters $CD^2 : AC^2 = AC^2 : BC^2$.

Auch hier kann genau wie bei (I) wieder gefolgert werden, dass

$$(II) \quad AC^2 : BC^2 = CD^2 : AC^2 = CD : BC.$$

Aus (I) $AB^2 : BC^2 = BD : BC$ und (II) $AC^2 : BC^2 = CD : BC$ folgt durch Addition:

$$(BA^2 + AC^2) : BC^2 = (BD + DC) : BC \quad \text{und, weil } BD + DC = BC \rightarrow (BA^2 + AC^2) : BC^2 = BC : BC \rightarrow \frac{(BA^2 + AC^2)}{BC^2} = \frac{BC}{BC} \rightarrow \frac{(BA^2 + AC^2)}{BC^2} = 1$$

$$\rightarrow BA^2 + AC^2 = BC^2$$

q.e.d.

Sollte obiger Beweis 4 tatsächlich Pythagoras Beweis gewesen sein, so hat Euklid vermutlich seine Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras für beliebig geradlinige Flächen, die sich ebenfalls im Buch „Die Elemente“ (Buch VI., § 31) befindet, auf diesem aufgebaut. Euklids Beweis, dass dies für alle geradlinigen Flächen gilt und nicht nur für Quadrate, wird nämlich vollkommen unabhängig von seinem Beweis im ersten Buch geführt, obwohl das genauso leicht möglich gewesen wäre.¹⁵⁹ Stattdessen führt er diesen Beweis anders, zum Beispiel, weil es bereits einen Beweis mit Proportionen gab, auf den Euklid noch leichter aufbauen konnte.¹⁶⁰

Der Vollständigkeit halber wird dieser Satz und Beweis hier ebenfalls angeführt. Euklid verwendet in seinem Beweis der Einfachheit halber bei der Skizze Rechtecke über den Dreiecksseiten, der Beweis funktioniert allerdings für alle (geradlinigen) Figuren.

¹⁵⁹ Verknüpft man 1,47 mit VI, 22 erhält man einen Beweis für die Verallgemeinerung auf Basis seines eigenen Beweises.

¹⁶⁰ (Heath, 1981, S. 147f.)

Dieser Beweis und die dazugehörigen selbst erstellten Zeichnungen haben, sowohl den Inhalt, als auch die teils ungewöhnliche Notation betreffend, als Grundlage das Originalwerk von Euklids Elementen: (Euklid, 2015, S. 138f.).

Beweis 5: Die Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras von Euklid aus dem Buch „Die Elemente“, Satz 6.31:

„Im rechtwinkligen Dreieck ist eine (geradlinige) Figur über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den ähnlichen, über den den rechten Winkel umfassenden Seiten ähnlich gezeichneten Figuren zusammen gleich.“ (Euklid, 2015, S. 138)

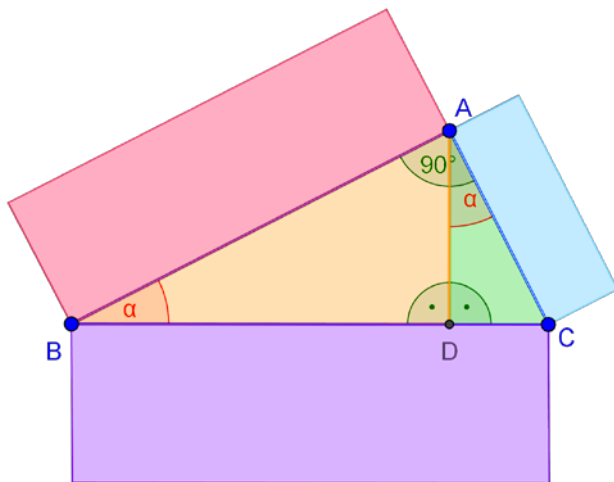


Abbildung 29

Sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei Eckpunkt A und dem Lot AD , das normal auf BC steht und durch A geht, so wird behauptet, dass eine Figur über der Seite BC , den dazu ähnlich gezeichneten Figuren über den Seiten BA und AC zusammen gleich ist.

Die Dreiecke $\triangle ABD$, $\triangle ADC$ und das große Dreieck $\triangle ABC$ sind wie oben bereits gezeigt **ähnlich** zu einander.

Da $\triangle ABC \sim \triangle ABD$ ist, gilt: $CB : BA = AB : BD$. Hier stehen drei Strecken in Proportion: 1. CB , 2. BA und 3. BD . Es gilt dann:¹⁶¹ Die Figur über der ersten Seite verhält sich zu der ähnlich gezeichneten Figur über der zweiten Seite genauso wie die erste Strecke zur dritten. Übersetzt bedeutet das: $\text{Figur über } CB : \text{Figur über } BA = CB : BD$.

¹⁶¹ Auf diesen Beweis, der von Euklid im VI. Buch der Elemente, in Proposition 20 geführt wird, kann im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht eingegangen werden.

Da aber auch $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ ist, gilt: $BC : CA = AC : CD$. Hier stehen wiederum drei Strecken in Proportion: 1. BC , 2. CA und 3. CD .

Ebenso gilt hier: Die Figur über der ersten Seite verhält sich zu der ähnlich gezeichneten Figur über der zweiten Seite genauso wie die erste Strecke zur dritten. Übersetzt bedeutet das: $\text{Figur über } CB : \text{Figur über } CA = BC : CD$.

Aus (I) $\text{Figur über } CB : \text{Figur über } BA = CB : BD$

und (II) $\text{Figur über } CB : \text{Figur über } CA = BC : CD$

folgt daher auch: $\text{Figur über } CB : (\text{Figur über } BA + \text{Figur über } CA) = BC : (BD + DC)$.

Weiters gilt aber auch: $BC = BD + DC$, was für die Figuren bedeutet, dass:

$\text{Figur über } CB = \text{Figur über } BA + \text{Figur über } CA$.

q.e.d.

Eine weitere Möglichkeit, wie Pythagoras den Beweis geführt haben könnte, wenn er keine Proportionen dafür zur Hilfe genommen hat, ist ebenfalls angeführt.

Dieser Beweis und die dazugehörigen selbst erstellten Zeichnungen haben, sowohl den Inhalt, als auch die teils ungewöhnliche Notation betreffend, als Grundlage das Werk von Sir Thomas Heath, A history of greek mathematics: (Heath, 1981, S. 149).

Beweis 6: Pythagoras Beweis ohne Proportionen: Pythagoras geht dabei von einer besonderen Figur¹⁶² aus, die später auch bei Euklid in 2.4 zu finden ist:

¹⁶² Diese Zeichnung ist gleichzeitig ein schöner geometrischer Beweis für den Binomischen Lehrsatz: $(a + b)^2 = a^2 + 2 * a * b + b^2$.

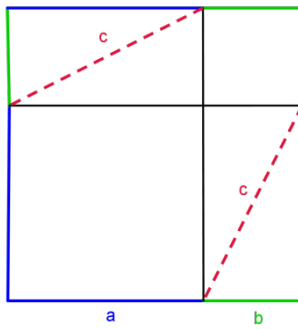


Abbildung 30

Ein Quadrat, bestehend aus den Seitenlängen $a + b$, das sich in zwei kleinere Quadrate, eines mit den Seitenlängen a und eines mit den Seitenlängen b , zerlegen lässt.

Weiters besteht es aus zwei Ergänzungsrechtecken, jeweils gebildet mit den Seitenlängen a und b .

Nun teilt man beide Ergänzungsrechtecke in zwei gleich große Dreiecke und nennt diese Teilungsstrecke bzw. Hypotenuse c der Dreiecke. Ordnet man diese Dreiecke entlang des Umfangs an, so erhält man in der Mitte ein Quadrat der Seitenlänge c und kann eigentlich bereits anhand der Zeichnung erkennen, dass $a^2 + b^2 = c^2$:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 4 * \frac{a*b}{2} \quad \text{bzw.} \quad (a + b)^2 = c^2 + 4 * \frac{a*b}{2} \quad \rightarrow \quad a^2 + b^2 + 4 * \frac{a*b}{2} = c^2 + 4 * \frac{a*b}{2}$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

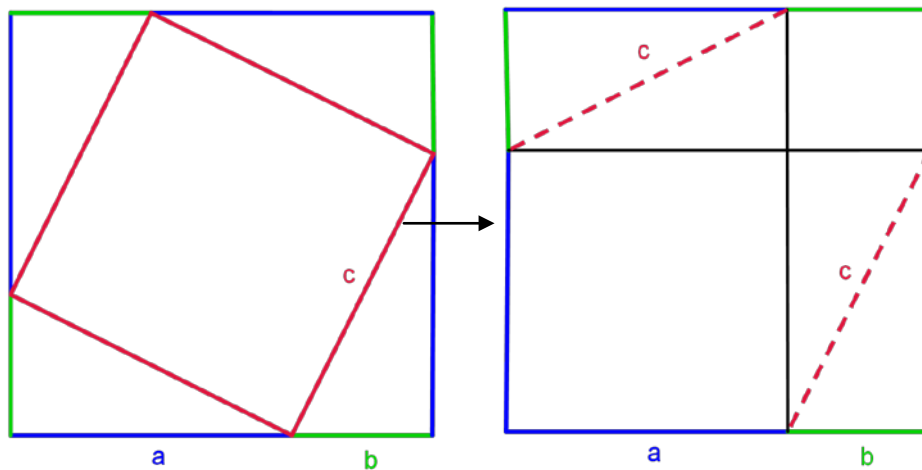


Abbildung 31

Abbildung 32

q.e.d.

3. Vorgeschichtliche Quellen: „Satz des Pythagoras“

Woher hatten Pythagoras und die Pythagoreer nun dieses mathematische Wissen? Haben sie dies als Erste entdeckt oder gab es die Grundlagen dafür bereits? Um diese Fragen zu beantworten, müssen wir uns wieder den Ägyptern und den Babyloniern zuwenden, die sich schon in frühester Zeit sehr mit Mathematik beschäftigten, wenn auch meistens mit Alltagsmathematik, die sie benötigten, um das tägliche Leben besser zu meistern.¹⁶³

Mehrere antike Schriftsteller, so auch Iamblichos schreiben, dass Pythagoras viele Reisen unternommen hat und dabei versuchte alles über die Kulturen, Geheimnisse und das Wissen fremder Länder zu erlernen. So soll Pythagoras auch in Ägypten und Babylonien gewesen sein¹⁶⁴:

„Zweiundzwanzig Jahre weilte er so in Ägypten in den allerheiligsten Gemächern bei Sternkunde und Geometrie und empfang...die Einweihung in alle Göttermysterien, bis ihn die Krieger des Kambyses gefangennahmen und nach Babylon führten. Dort verkehrte er mit den Magiern, die an ihm dasselbe Wohlgefallen fanden wie er an ihnen. Er ward genau unterrichtet in allem, was ihnen heilig war, erlernte die Götterverehrung in aller Vollkommenheit und gelangte bei ihnen in der Zahlenlehre, in der Musik und in den übrigen Wissenschaften ans höchste Ziel.“ (Iamblichos, 1963, S. 29 und 31)

Obwohl bei näherer Betrachtung nicht alle Details von Pythagoras Reisen zutreffen und geschichtlich belegt werden können, von denen Iamblichos erzählt, so sind sich doch die meisten Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen, auf die sich diese Arbeit stützt, einig, dass Pythagoras in Ägypten und Babylon gewesen sei. Es ist also keinesfalls abwegig, ja sogar wahrscheinlich, dass er dort viel über die verschiedenen Wissenschaften wie zum Beispiel Mathematik und Astronomie gelernt hat, noch dazu, wo die pythagore-

¹⁶³ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 15) und (Wussing, 1965, S. 42f.)

¹⁶⁴ (Iamblichos, 1963, S. 29 und 31)

ische Mathematik der babylonischen sehr ähnlich scheint.¹⁶⁵ Worauf also könnte Pythagoras den „Satz des Pythagoras“ aufgebaut haben?

Ägypten

Schon im alten Ägypten kannte man Dreiecke mit rechtem Winkel und verwendete diese um das fruchtbare Gebiet entlang des Nilufers zu vermessen und abzustecken. Für diese Tätigkeit gab es eine eigene Berufsbezeichnung, nämlich die des Seilspanners. Ein solcher Seilspanner verwendete dazu ein langes Seil, das er mit Hilfe von Knoten in zwölf gleich lange Seilstrecken teilte, indem er in gleichem Abstand dreizehn Knoten machte und den ersten Knoten mit dem dreizehnten Knoten verband. Danach wurde das Seil mit Hilfe von Pflöcken, die in die Erde gesteckt wurden, gespannt und zu folgendem Dreieck geformt:¹⁶⁶

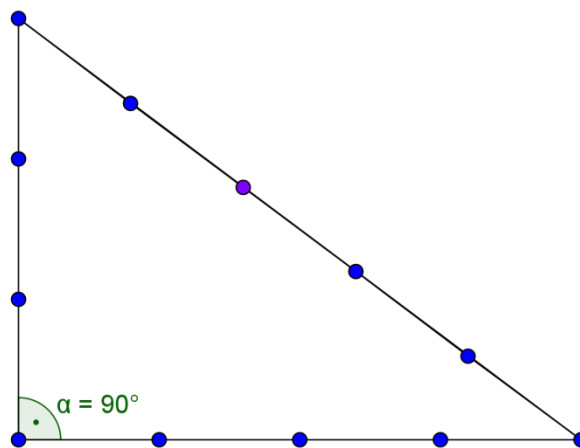


Abbildung 33: altägyptische Seilkonstruktion zum Vermessen von Flächen entlang des Nils (Lehmann S.49)

¹⁶⁵ (Van der Waerden, Die Pythagoreer: Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft, 1979, S. 37 und 40)

Dass dieses Dreieck beim vierten Knoten, nämlich dort wo die Dreiecksseite, die sich aus drei Seilstücken und die, die sich aus vier Seilstrecken zusammensetzt, treffen, einen rechten Winkel hatte, war damals zumindest bei diesem Berufsstand bereits bekannt.

Diese Art einen rechten Winkel zu erzeugen wurde auch beim Bau von Pyramiden und Tempeln verwendet und die Arbeit der Seilspanner glich einem zeremoniellen Akt.¹⁶⁷

Dieses Dreieck hat die Zahlen 3, 4 und 5 als Seitenlängen, die die ersten ganzzahligen Längen bzw. das erste ganzzahlige Zahlentripel ist, das die pythagoreische Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$ erfüllt.

Babylonien

Anfang des 19. Jahrhunderts wurde sogar eine altbabylonische Tontafel gefunden, auf der auch weitere ganzzahlige Zahlentripel aufgeführt waren, die diese Gleichung erfüllten. So zum Beispiel die Tontafel Nr. 332 der „Plimton- Sammlung“, die in der Bibliothek der Columbia Universität in New York zu finden ist und aus einer Zeit zwischen 1900 – 1600 vor Christus stammt.¹⁶⁸ Diese Tafel war bis zur Übersetzung durch einen Spezialisten der altbabylonischen Mathematik unlesbar, da sie noch in der für diese Zeit typischen Keilschrift formuliert ist.¹⁶⁹

¹⁶⁷ (Lehmann, 1994, S. 49)

¹⁶⁸ (Lehmann, 1994, S. 79 und 96)

¹⁶⁹ (Vogel, 1959, S. 37)



Abbildung 34: Abbildung der Tontafel Plimpton 322 (Vogel, S.38)

Darauf zu sehen ist eine Tabelle, mit Hilfe derer man die verschiedenen ganzzahligen Längen der Dreiecksseiten – insgesamt sind es 15 Zahlentripel – ablesen kann, die die pythagoreische Gleichung erfüllen. Kurt Vogel hat im Buch *Vorgriechische Mathematik*, Teil II: Die Mathematik der Babylonier eine Übersetzung dieser Tabelle erstellt¹⁷⁰, wobei er fehlende oder beschädigte Stellen bestmöglich ergänzt¹⁷¹ hat.

Außerdem enthält das Original in Keilschrift auch einige Rechen- bzw. Schreibfehler, die in der unten stehenden Tabelle ausgebessert sind. Die Seiten des Dreiecks werden in dieser Tabelle mit a , b und d bezeichnet, wobei b für Breite und d für Diagonale (= Hypotenuse) steht¹⁷². Da die Spalte der Dreiecksseiten a auf der Originaltafel fehlt und erst im Nachhinein ergänzt wurde, könnte es genauso gut sein, dass diese Seite mit h für Höhe bezeichnet wurde.¹⁷³ Da sich dieser Teil der Arbeit jedoch auf die Übersetzung von Herrn Dr. Vogel bezieht, wird seine Beschriftung a beibehalten.

¹⁷⁰ Die folgenden Erklärungen und die dazugehörigen Tabellen haben, vom Inhalt her, als Grundlage das Werk von Prof. Dr. Kurt Vogel: (Vogel, 1959, S. 37-39)

¹⁷¹ So wurde zum Beispiel die Spalte der Längen der Kathete a ergänzt, die im Original leider nicht vollständig erhalten sind. (Vogel, 1959, S. 38)

¹⁷² (Gericke, 1984, S. 34)

¹⁷³ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 20)

Die altbabylonische Tontafel besteht aus insgesamt 17 Zeilen, wobei zwei Zeilen die Überschrift darstellen und die restlichen 15 die verschiedenen Zahlentripel sind. Dies wird in der untenstehenden Tabelle mit Zeile bzw. Nummer ausgedrückt.

Zeile	$\frac{b^2}{a^2}$	b = Breite	d = Diagonale	Nummer (Zahlentripel)	a
3	[59,0,]15	1,59	2,49	1	2,0
4	[56,56,]58,14,50,6,15	56,7	1,20,25	2	57,36
5	[55,7,]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3	1,20,0
6	53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4	3,45,0
7	48,54,1,40	1,5	1,37	5	1,12
8	47,6,41,40	5,19	8,1	6	6,0
9	43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7	45,0
10	41,33,45,14,3,45	13,19	20,49	8	16,0
11	38,33,36,36	8,11	12,49	9	10,0
12	35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10	1,48,0
13	33,45	45	1,15	11	1,0
14	29,21,54,2,15	27,59	48,49	12	40,0
15	27,0,3,45	2,41	4,49	13	4,0
16	25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14	45,0
17	23,13,46,4[0]	28	53	15	45

Wie oben bereits erwähnt, ist diese Tabelle im **Hexagesimalsystem** erstellt worden und muss nun noch in das **Dezimalsystem** gebracht werden, mit dem heutzutage gerechnet wird und das als Basis die Zahl 10 hat.

Überträgt man nun das erste Tripel b , d , a der Tabelle ins Dezimalsystem, so wird aus:

Dreiecksseite b : $1,59 \rightarrow 60 + 59 = 119$

Dreiecksseite d : $2,49 \rightarrow 2 * 60 + 49 = 169$

Dreiecksseite a : $2,0 \rightarrow 2 * 60 = 120$.

Und dieses Tripel erfüllt die pythagoreische Gleichung: $120^2 + 119^2 = 28561 = 169^2$.

Fährt man damit fort, erhält man alle 15 ganzzahligen Zahlentripel, derer die Babylonier mächtig waren:

	A	b	D		a	b	d
1	120	119	169	9	600	481	769
2	3456	3367	4825	10	6480	4961	8161
3	4800	4601	6649	11	60	45	75
4	13500	12709	18541	12	2400	1679	2929
5	72	65	97	13	240	161	289
6	360	319	481	14	2700	1771	3229
7	2700	2291	3541	15	45	28	53
8	960	799	1249				

Wie die Babylonier auf diese Zahlen gekommen sind, ist umstritten, nähere Informationen findet man zum Beispiel bei: (Vogel, 1959, S. 39-41).

Ob die Babylonier den „Satz des Pythagoras“ bereits kannten, kann nicht eindeutig beantwortet werden, da die Babylonische Mathematik noch nicht ausreichend erforscht wurde und daher noch zu wenig über sie bekannt ist.¹⁷⁴

Es steht aber fest, dass die Ägypter, vor allem aber die Babylonier, schon einiges über den „Satz des Pythagoras“ wussten und man daher keinesfalls sagen kann, dass Pythagoras ihn komplett alleine entdeckt hat. Seine Innovation war jedoch aus einer gut funktionierenden Rechenvorschrift einen allgemein gültigen Satz zu erstellen und ihn zu beweisen.¹⁷⁵ Eine deduktive Mathematik in der Form, wie sie im antiken Griechenland ab Thales praktiziert wurde, gab es im alten Babylonien nämlich noch nicht.¹⁷⁶

In späteren mathematischen Aufgaben der Babylonier spielt der „Satz des Pythagoras“, wie wir ihn heute kennen und anwenden, allerdings bereits eine Rolle. Dieses Beispiel wurde auf einer weiteren Tontafel (BM 34568,12) aus der Zeit der Seleukiden (um 250 v. Chr.)¹⁷⁷ gefunden:

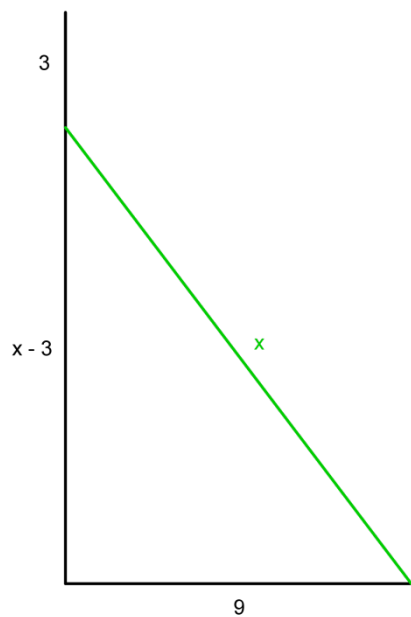
„Es sei ein Rohr zuerst senkrecht an eine Mauer gelehnt, dann wird die Spitze um 3 Ellen gesenkt, so dass sich der Fuß des Rohres um 9 Ellen von der Mauer entfernt.“ (Lehmann, 1994, S. 113)

¹⁷⁴ (Hoyrup & Damerov, 2001, S. 219)

¹⁷⁵ (Gericke, 1984, S. 33)

¹⁷⁶ (Hoyrup & Damerov, 2001, S. 303)

¹⁷⁷ (Lehmann, 1994, S. 113)



Nimmt man die Länge des Rohres als x an, so erhält man:

$$x^2 = 9^2 + (x - 3)^2 \rightarrow x^2 = 81 + x^2 - 6x + 9$$

$$\rightarrow 6x = 89 \rightarrow x \approx 15.^{178}$$

Abbildung 35: erstellt anhand (Lehmann, 1994, S. 113)

Dieses Beispiel kann man auf ähnliche Art, aber mit anderen Zahlen, auch auf anderen altbabylonischen Tontafeln (z.B.: BM 85196,9) finden. Dort ist jedoch die Höhe des Rohres angegeben und stattdessen die Entfernung des Fußes von der Mauer, die hier 9 ist, gesucht.¹⁷⁹

¹⁷⁸ (Vogel, 1959, S. 67)

¹⁷⁹ (Gericke, 1984, S. 33)

IV. ARCHIMEDES VON SYRAKUS

1. Leben und Umfeld

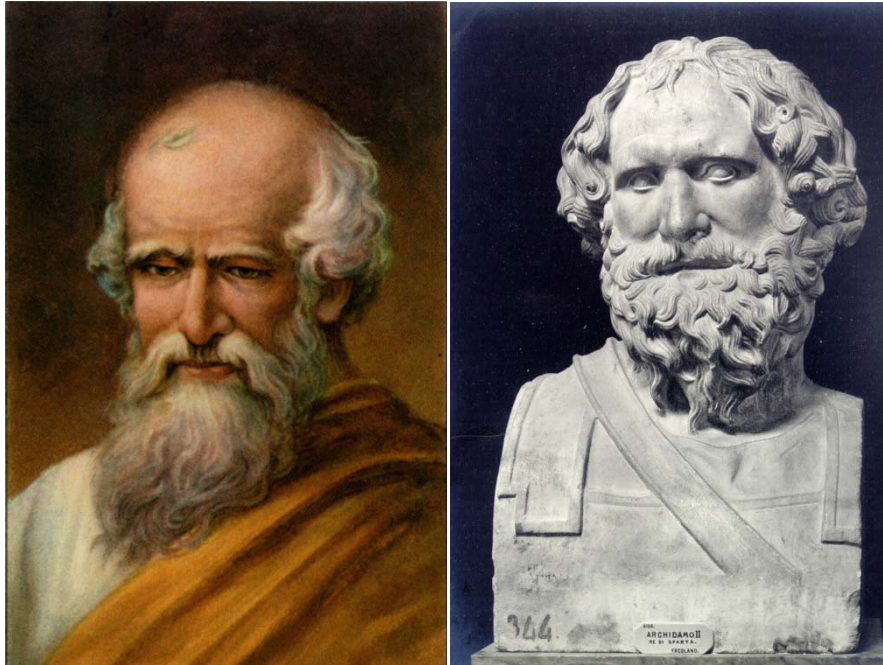


Abbildung 36: Bild Archimedes: (<http://www.math.nyu.edu/Bild>)

Abbildung 37: Statue Archimedes: (<http://3.bp.blogspot.com/>)

Um Archimedes Leben ranken sich zahlreiche Mythen und Geschichten, die auch in der antiken Literatur in den verschiedensten Ausführungen und bei mehreren Autoren erzählt werden. Sucht man allerdings handfeste Fakten über ihn – wie z.B. sein Geburtsdatum – so sucht man vergebens. Eine ungefähre Vorstellung bekommt man, wenn man sich die Problematik rückwärts vor Augen führt: Mehrere antike Historiker, wie unter anderem Plutarch, berichten von Archimedes Tod, der auf das Jahr 212 v.Chr. datiert wird. Johannes Tzetzes, ein byzantinischer Gelehrter, schreibt in seinem Werk Chiliades, dass Archimedes 75 Jahre alt gewesen sei¹⁸⁰, als er starb. Man kann sich also ausrechnen, dass er im Jahre 287 v. Chr. geboren worden sein muss.¹⁸¹ Da Tzetzes jedoch als ein

¹⁸⁰ (<https://archive.org/>)

¹⁸¹ (Kagan, 1955, S. 15)

Schriftsteller gilt, der relativ wenig Belege seines Wissens angibt, sondern eher aus dem Gedächtnis zitiert und wahrscheinlich selbst keine Bibliothek, also keine Nachschlagewerke hatte, ist seine Altersangabe umstritten. Eine ältere und vielleicht sicherere Quelle ist vermutlich Heron, der zumindest beschreibt, dass Archimedes und Eratosthenes (geboren 276 v. Chr.) Zeitgenossen waren. Diese These wird von Proklos unterstützt, der in seinem Kommentar zum ersten Buch der Elemente von Euklid schreibt, dass Archimedes vor dem ersten Ptolemaios (gestorben ungefähr 283 v. Chr.) lebte und im gleichen Alter wie Eratosthenes war.¹⁸² Archimedes könnte also genauso gut ein paar Jahre später geboren worden und nicht ganz so alt geworden sein.

Über seine Familie ist wenig bekannt, jedoch erwähnt Archimedes seinen Vater im Buch die Sandzahl¹⁸³ in einem Nebensatz und gibt uns die Information, dass dieser Phidias hieß und Astronom war. Er schreibt, dass sein Vater dachte der Durchmesser der Sonne sei etwa 12 Mal so groß wie der Durchmesser des Mondes – wohingegen Archimedes diesen als etwa 30 mal so groß annahm – was voraussichtlich ein Hinweis darauf ist, dass sich schon Archimedes Vater mit Mathematik beschäftigt hat und demnach vermutlich sehr gebildet war. Einen weiteren Hinweis über Archimedes nähere Familienverhältnisse gibt Plutarch, indem er beschreibt, dass Archimedes und Hieron (gemeint ist Hieron II, der damalige König von Syrakus¹⁸⁴), befreundet, ja mehr noch, verwandt gewesen seien.¹⁸⁵ Da dies in manchen Werken der Sekundärliteratur jedoch in Zweifel gezogen wird¹⁸⁶, kann man sich auch damit begnügen zu behaupten, dass sich die beiden ihr Leben lang sehr nahe standen, was auch dadurch belegt wird, dass sie in mehreren Anekdoten gemeinsam vorkommen. So erzählt zum Beispiel Plutarch von einem Briefwechsel zwischen Hieron und Archimedes, in dem dieser schreibt, dass er mit einer gegebenen Kraft eine gegebene Last bewegen könne. So würde er zum Beispiel, gäbe es noch eine weitere Erde, auf sie hinübersteigen und von dort aus unsere Erde in Bewegung setzen. Hieron wollte dafür natürlich einen Beweis sehen und verlangte zu zeigen, wie Archimedes einen großen Körper mit einer kleinen Kraft bewegen konnte. Archime-

¹⁸² (Schneider, 1979, S. 3)

¹⁸³ (Archimedes, 1983, S. 350)

¹⁸⁴ (Schneider, 1979, S. 4)

¹⁸⁵ (Plutarch, 1955, S. 318)

¹⁸⁶ (Schneider, 1979, S. 5)

des ließ einen königlichen Dreimaster an Land ziehen, beladen und bemannen und zog ihn dann selbst sitzend und mit einer Hand zu sich heran, indem er ganz sanft am Ende eines Flaschenzuges zog.¹⁸⁷

Weiters existiert eine Geschichte, in der Vitruv beschreibt, dass Hieron einen goldenen Kranz anfertigen ließ, um ihn den Göttern für gerade erlangte Siege zu opfern. Obwohl der Kranz genau das richtige Gewicht hatte, wurde dem Schmied vorgeworfen Gold weggenommen und es durch Silber ersetzt zu haben. Hieron war erbost, wusste jedoch nicht wie er dem Dieb auf die Schliche kommen könnte und bat Archimedes um Hilfe. Die Lösung¹⁸⁸ fiel ihm wie aus dem Nichts in der Badestube ein, als er gerade überhaupt nicht daran dachte. Er sprang aus der Badewanne, lief nackt aus dem Haus und rief laut „Heureka, Heureka“ („ich habs gefunden, ich habs gefunden!“).¹⁸⁹

Auch wenn diese beiden Anekdoten vermutlich die Wahrheit ein wenig überzeichnen, ist in den meisten Geschichten doch zumindest ein Körnchen Wahrheit versteckt und so kann man annehmen, dass Archimedes seinem König Hieron mit Rat und Tat zur Seite stand. So auch bei der Verteidigung von Syrakus, auf die später noch eingegangen wird.

Wie hat Archimedes seine Jugend verbracht? Da sein Vater gebildet war, kann man vermuten, dass ihm auch Archimedes Ausbildung am Herzen lag. Da es aber keine Quellen gibt, dass sich Archimedes viel mit der Philosophie oder den schönen Künsten beschäftigte, auf die bei den wohlhabenderen Familien das Hauptaugenmerk der Erziehung gelegt wurde, kann man annehmen, dass seine Familie eher zum Mittelstand als zur Oberschicht der Gesellschaft zählte. Mathematik wurde nur soweit gelehrt, wie es nötig war, um die Philosophie besser zu verstehen, eine richtige Ausbildung in diesem Fach erhielten eher Kinder von z.B.: Handwerkern. Diese lernten diese Wissenschaft dafür von

¹⁸⁷ (Plutarch, 1955, S. 318)

¹⁸⁸ Archimedes bemerkte als er sich in die Wanne gleiten ließ, dass ebenso viel Wasser aus der Wanne floss, wie er von seinem Körper eintauchte. Er fertigte zwei Klumpen an, einen aus Gold und einen aus Silber, die exakt dasselbe Gewicht wie der Kranz hatten und legte sie nacheinander in ein randvoll mit Wasser gefülltes Gefäß. Als er sie wieder herausnahm, maß er ab, wie viel Wasser sie verdrängt hatten. Als letztes machte er dasselbe mit dem Kranz des Königs und erkannte so, dass dieser nicht aus purem Gold bestehen konnte, da er weniger Wasser verdrängte, als der Klumpen Gold derselben Größe.

¹⁸⁹ (Vitruv, 1991, S. 407ff)

Kindheit an und beherrschten sie oft meisterlich. Archimedes wurde zu einem solchen Meister der Mathematik, da er offensichtlich auf diese Weise erzogen wurde und außerdem eine Menge Talent besaß.¹⁹⁰ So ist es auch nicht weiter verwunderlich, dass er als junger Mann nach Alexandria reiste, das zum damaligen Zeitpunkt als die neue¹⁹¹ Hochburg in den Bereichen Astronomie, Mathematik, Philologie und Medizin galt.¹⁹² Archimedes verbrachte vermutlich eine längere Zeit dort, ja studierte offenbar sogar bei den Nachfolgern Euklids.¹⁹³

Als er nach einiger Zeit wieder nach Hause zurückkam, begann er sich mit vollem Einsatz und bis ins späte Alter hinein der Mathematik zu widmen. Plutarch gibt uns einen Einblick, welche Anekdoten schon damals um Archimedes und seinen Arbeitseifer kursierten:

„dass er im Banne einer ihm wesenseigenen, stets in ihm wirksamen Verzauberung sogar das Essen vergaß, jede Körperpflege unterließ, und wenn er mit Gewalt dazu gebracht wurde, sich zu salben und zu baden, geometrische Figuren auf die Kohlenbecken malte, und wenn sein Körper gesalbt war, mit dem Finger Linien darauf zog, ganz erfüllt vom reinen Entzücken und wahrhaft von seiner Muse besessen.“ (Plutarch, 1955, S. 322)

Plutarch erklärt dazu, dass dies für ihn durchaus glaubhaft erscheint, betrachtet man die Brillanz seiner Mathematik. Klar ist jedenfalls, dass Archimedes zu dieser Zeit vor allem auf dem Gebiet der Mathematik, aber auch im Bereich der Technik und im Ingenieurwesen viel geforscht und Außergewöhnliches vollbracht hat, was auch die antiken Quellen bezeugen. Er hat seine Erkenntnisse schriftlich in mehreren Büchern festgehalten, von denen ein großer Teil bis heute erhalten werden konnte und auf die im nächsten Kapitel genauer eingegangen wird.

¹⁹⁰ (Lurje, 1948, S. 11)

¹⁹¹ Und damit in diesen Bereichen Athen ablöste, das zweite bedeutende Bildungszentrum, das vor allem als die Hochburg der Philosophie und der schönen Künste bekannt war.

¹⁹² (Lurje, 1948, S. 11f)

¹⁹³ (Kagan, 1955, S. 15)

Ein weiterer wichtiger Teil seines Lebens, auf den in den meisten Büchern über Archimedes das Hauptaugenmerk gelegt wird, sind die Anekdoten bezüglich der Belagerung bzw. Verteidigung von Syrakus, Archimedes Heimatstadt, in der er geboren war und den Großteil seines Lebens verbracht hatte. Im Laufe der punischen Kriege, in denen die Großmächte Rom und Karthago gegeneinander kämpften, um ihr Reich erweitern zu können, wurde vor allem Sizilien für beide Seiten zu einer strategisch sehr wichtigen und deshalb stark umkämpften Insel. Im zweiten punischen Krieg im Jahre 214 v. Chr. belagerte der römische Feldherr Marcellus die Stadt Syrakus und Archimedes, obwohl bereits um die 70 Jahre alt, wurde gebeten die Stadt zu verteidigen.¹⁹⁴

Plutarch beschreibt zum Beispiel, dass die römischen Soldaten vom Wasser und vom Land aus gleichzeitig angriffen und bei allen Einwohnern Syrakus ob dieser Machtdemonstration nur noch Angst und Schrecken herrschte, bis Archimedes mit seinen Maschinen zu spielen begann. Die Rede war von Wurfgeschossen, Kränen, die schwere Lasten auf die Feinde niederwarfen oder die Schiffe am Bug fassten, hochhoben und senkrecht wieder ins Meer stürzten.¹⁹⁵ Polybios beschreibt, dass Archimedes Maschinen für jede Schußweite anfertigen ließ, damit die Syrakusier ihre Feinde sowohl aus der Ferne beschießen, als sich auch der Bodentruppen annahmen konnten, die sich in der Nähe der Stadtmauer befanden.¹⁹⁶

Archimedes Übermacht war so groß, dass es schien, als würde er einzig und alleine die Stadt verteidigen:

„Tatsächlich waren alle anderen Syrakusier nur die Glieder und Werkzeuge der Erfindungskraft des Archimedes und sie die eine Seele, die alles bewegte und lenkte, da alle anderen Waffen ungenützt ruhten und nur der seinigen die Stadt sich damals bediente für ihre Verteidigung und Sicherheit.“ (Plutarch, 1955, S. 321)

¹⁹⁴ (Strathern, Archimedes und der Hebel, 1999, S. 71)

¹⁹⁵ (Plutarch, 1955, S. 319)

¹⁹⁶ (Polybios, 1961, S. 607)

Marcellus sah ein, dass ein offener Kampf hier nicht zum Sieg führen konnte und änderte seine Taktik, indem er versuchte die Stadt auszuhungern. Am Ende ging er als Sieger dieser Belagerung hervor und nahm Syrakus ein, bestand aber auch darauf Archimedes um jeden Preis am Leben zu lassen, da er an der außerordentlichen Klugheit dieses Mannes Gefallen gefunden hatte.¹⁹⁷



Abbildung 38 - Herculaneum Mosaik: Sterbeszene Archimedes

(<http://www.math.nyu.edu/Mosaik>)

Wieso Archimedes dann doch getötet wurde, darüber herrscht auch bei den antiken Autoren Uneinigkeit.

Valerius Maximus beschreibt, dass im Zuge der Eroberung ein römischer Soldat in sein Haus eindrang, um nach Beute zu suchen und ihn nach sei-

nem Namen fragte. Archimedes jedoch war gerade leidenschaftlich in ein mathematisches Problem vertieft, hielt die Hände schützend über seine

Zeichnungen im Sand und rief: „Ich bitte dich, bring ihn nicht in Unordnung!“. Da er den Befehl missachtete, wurde er vom Soldaten umgebracht.¹⁹⁸

Bei Plutarch lassen sich gleich mehrere Versionen dieser Geschichte finden, die sich teilweise wenig, teilweise sehr stark von Valerius Maximus Version unterscheiden. So trat zum Beispiel auch hier ein Soldat ein und befahl Archimedes zu Marcellus mitzukommen. Dieser weigerte sich aber ihm zu folgen bevor er nicht die Aufgabe gelöst und zum Beweis geführt habe. Abweichender ist zum Beispiel die Version, dass Archimedes mit verschiedenen astronomischen Geräten auf dem Weg zu Marcellus war und Soldaten glaubten, er wolle Gold stehlen und ihn umbrachten.¹⁹⁹ Es heißt, dass Marcellus sehr betroffen über den Tod des Gelehrten war, als er von dessen gewaltsamen Ende hörte²⁰⁰ und dass er die Angehörigen des Archimedes suchen ließ, um ihnen besondere Ehren zu

¹⁹⁷ (Maximus, 1991, S. 237)

¹⁹⁸ (Maximus, 1991, S. 239)

¹⁹⁹ (Plutarch, 1955, S. 325)

²⁰⁰ (Cicero, Sämtliche Reden, 1970, S. 220)

erweisen, woraus man annehmen kann, dass er wahrscheinlich verheiratet war. Weiters ließ er auf sein Grab einen Zylinder mit eingeschriebener Kugel einmeißeln, wie es Archimedes Wunsch war.²⁰¹

Eine ungefähre Beschreibung von Archimedes Grab und somit eine Bestätigung dieser Legende erhalten wir dank Cicero, der in einem seiner Werke erzählt, wie er zirka 130 Jahre später, in seiner Zeit als Quästor, auf dieses gestoßen sei. Er beschreibt eine kleine Säule, auf deren Spitze eine Kugel und ein Zylinder eingraviert worden war.²⁰²

Archimedes hatte also ein langes und interessantes Leben, war einerseits Astronom, bei den antiken Schriftstellern jedoch noch angesehener als Erfinder und Hersteller verschiedenster Kriegsmaschinen, mit denen er den Feinden haushoch überlegen war²⁰³, andererseits wurde und wird er bis heute noch als brillanter Mathematiker verehrt, dem fast zweitausend Jahre lang keiner das Wasser reichen konnte.²⁰⁴

²⁰¹ (Strathern, Archimedes und der Hebel, 1999, S. 74)

²⁰² (Cicero, Gespräche in Tusculum, 1970, S. 365f)

²⁰³ (Livius, 1986, S. 89)

²⁰⁴ (Strathern, Archimedes und der Hebel, 1999, S. 32)

2. Werk

Die Werke von Archimedes waren bei weitem schwieriger zu verstehen, als z.B. die Elemente des Euklid, weshalb sie natürlich auch viel weniger gelesen wurden. Euklids Buch wurde, wie bereits in *Kapitel I* erwähnt, teilweise sogar als Schulbuch verwendet und so erschienen vor allem die späteren Auflagen hundert- bzw. tausendfach. Von Archimedes Schriften existierten nur drei Handschriften, anhand derer sein Werk vervielfältigt wurde und es wurden nur wenige Exemplare herausgegeben.²⁰⁵ Deshalb ist es nicht weiter verwunderlich, dass nicht mehr alle seine Abhandlungen existieren. Einige seiner Schriften sind verloren gegangen, von manchen kennt man nur noch den Namen und wiederum andere sind nur auf Arabisch überliefert.²⁰⁶

In diesem Kapitel wird ein kurzer Überblick über die Schriften gegeben, die vollständig oder zumindest teilweise vorhanden sind.²⁰⁷ Bei all seinen Werken hält sich Archimedes strikt an die Struktur, die Euklid in den Elementen vorgegeben hat. Erst gibt er Definitionen an oder stellt Postulate auf, danach folgen Sätze bzw. Theoreme und am Schluss folgt der Beweis, der jeweils auf den vorigen Beweisen aufbaut.²⁰⁸

1) Über die Kugel und den Zylinder:

Hierin beweist Archimedes zum Beispiel, dass die Oberfläche jeder Kugel genau viermal so groß ist wie die Fläche ihres größten Kreises. Außerdem stellt er Theorien für den Inhalt des Kugelsegments, des Kugelsektors und auch für den Inhalt der gesamten Kugel auf, indem er zum Beispiel sagt, dass der Inhalt der Kugel genauso groß ist wie das Produkt der Oberfläche und des dritten Teils des Radius.²⁰⁹ Archimedes geht hier auch auf das Verhältnis zwischen Kugel und Zylinder ein und zeigt, dass ein Zylinder, dessen Grundfläche gleich ist wie der größte Kreis der Kugel und dessen Höhe gleich dem

²⁰⁵ (Kagan, 1955, S. 16)

²⁰⁶ (Wussing, 1965, S. 130)

²⁰⁷ anhand der Quelle (Archimedes, 1983)

²⁰⁸ (Strathern, Archimedes und der Hebel, 1999, S. 34)

²⁰⁹ (Archimedes, 1983, S. 75)

Durchmesser der Kugel ist, sowohl dem Inhalt, als auch der Oberfläche nach $1\frac{1}{2}$ Mal so groß ist wie die Kugel.²¹⁰

2) Über die Kreismessung:

Hier findet Archimedes zum Beispiel eine Formel für die Fläche des Kreises, indem er sie mit Hilfe eines eingeschriebenen und eines umgeschriebenen Polygon annähert oder auch für den Umfang eines Kreises, indem er das Verhältnis von Kreisumfang zu seinem Durchmesser angibt und dabei auf eine recht genaue Annäherung der Zahl π kommt. Leider ist dieses Werk nicht mehr vollständig erhalten, es gilt jedoch als Meisterwerk, mit einer der besten geometrischen Beweisführungen.²¹¹ Da sich ein Teil der vorliegenden Arbeit näher mit dieser Schrift beschäftigt, wird an dieser Stelle nicht genauer darauf eingegangen.

3) Über Paraboloid, Hyperboloid und Ellipsoid:

In diesem Werk geht es um die drei Kegelschnitte, Ellipse, Parabel und Hyperbel und die Körper, die entstehen, wenn man diese Schnitte um die eigene Achse dreht. Archimedes zeigt, wie man das Volumen solcher Figuren berechnen kann und stellt auch Annahmen zu Inhalten beliebiger Segmente dieser Boloide auf.²¹²

4) Über Spiralen:

In dieser Abhandlung geht es um die Archimedische Spirale, eine geometrische, nicht platonische Form²¹³, deren Flächeninhalt er berechnete und mit deren Hilfe er zwei der drei unlösbaren Probleme der Antike²¹⁴ lösen konnte. Er schaffte es, einen Winkel in drei gleichgroße Teile zu teilen und ein Quadrat zu konstruieren, das mit einem Kreis den gleichen Umfang hatte, indem er die Archimedische Spirale oder Segmente davon

²¹⁰ (Archimedes, 1983, S. 77)

²¹¹ (Strathern, Archimedes und der Hebel, 1999, S. 39)

²¹² (Strathern, Archimedes und der Hebel, 1999, S. 43)

²¹³ platonische Form: eine ideale Form, die nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden konnten (Strathern, Archimedes und der Hebel, 1999, S. 42)

²¹⁴ 1. Winkeldreiteilung, 2. Würfelverdopplung, 3. Quadratur des Kreises

klug einsetzte. Da die Spirale jedoch eine „mechanische“ Figur ist und nicht nur mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, ist dies natürlich keine Lösung der „klassischen Geometrie“ und somit bleiben alle drei Probleme der Antike weiterhin ungelöst.²¹⁵

5) Vom Gleichgewicht ebener Flächen:

Archimedes bestimmt und berechnet in diesem Werk die Schwerpunkte verschiedener zweidimensionaler, also ebener Flächen wie zum Beispiel für Parallelogramme, Dreiecke und Parabelsegmente. Außerdem beschreibt er das zentrale Prinzip der Hebel, das besagt, dass sich zwei Körper genau dann im Gleichgewicht befinden, wenn ihr Masseverhältnis umgekehrt proportional zu ihrer Entfernung vom Stützpunkt des Hebels ist. Es kann sein, dass Teile hiervon früheren Mathematikern bereits bekannt waren, man kann jedoch sagen, dass der Großteil und vor allem die theoretische Basis für die Berechnungen Archimedes Werk sind. Dieses Werk wird außerdem als Grundstein für die theoretische Mechanik gesehen.²¹⁶

6) Über die Sandzahl

Hier versucht Archimedes eine Methode zu entwickeln, mit deren Hilfe man sehr große Zahlen darstellen kann, indem er sich folgende Aufgabe überlegt: Die meisten Menschen denken entweder, dass die Zahl der Sandkörner auf dieser Erde unendlich ist oder aber so groß, dass man keine größere Zahl finden könne, als diese. Noch weniger können sie sich vorstellen, dass eine Zahl existiert, die so groß ist wie die Anzahl der Sandkörner, die in eine vollkommen mit Sand ausgefüllte Kugel passen, die so groß ist wie unsere Erde. Archimedes möchte zeigen, dass es etliche solcher Zahlen gibt, ja sogar noch größere, zum Beispiel die Anzahl an Sandkörnern in einer vollkommen mit Sand ausgefüllten Kugel, die so groß ist, wie das gesamte Universum.²¹⁷

7) Über die Quadratur der Parabel:

²¹⁵ (Strathern, Archimedes und der Hebel, 1999, S. 48ff.)

²¹⁶ (Strathern, Archimedes und der Hebel, 1999, S. 34f.)

²¹⁷ (Archimedes, 1983, S. 349)

In diesem Werk versucht Archimedes das Problem zu lösen, die Fläche eines Segments auszurechnen, das durch eine gerade Linie und eine Parabel begrenzt ist. Er stellt daraufhin die Vermutung auf, dass die Fläche dieses Segments um ein Drittel größer ist, als die des Dreiecks, das mit ihm die gleiche Grundlinie und Höhe hat und beweist diese.²¹⁸

8) Über schwimmende Körper:

In dieser Schrift finden sich wichtige Erkenntnisse im Bereich der Hydrostatik und der heutigen Aerostatik, weswegen sie als eine der wichtigsten Schriften von Archimedes gilt. So beweist er in diesem Werk Sätze, wie z.B., dass ein Körper, der leichter als die Flüssigkeit ist, in der er liegt, nicht ganz untertaucht, sondern sich immer ein Teil von ihm über der Wasseroberfläche befindet oder dass ein solcher Körper, wird er gewaltsam eingetaucht, mit einer Kraft wieder nach oben gedrückt wird, die gleich groß ist wie der Unterschied zwischen dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit und der des Körpers.²¹⁹

Archimedes hat natürlich nicht nur theoretische Abhandlungen geschrieben, sondern diese auch praktisch angewendet. Er war in der Antike vor allem so beliebt wegen seines technischen Erfindungsreichtums und den Geräten, die er entwickelte und bauen ließ, zum Beispiel für die Verteidigung von Syrakus wie im vorherigen Kapitel erwähnt. Außerdem erfand er z. B.: eine Schraube, die wie eine Wasserpumpe funktionierte und noch heute im Nildelta verwendet wird.²²⁰

Trotzdem gibt es von Archimedes keinerlei Aufzeichnungen über diese praktischen Anwendungen, was vielleicht damit zusammenhängt, dass laut Plutarch der berühmte griechische Philosoph Platon davon überzeugt war, dass man die reine Mathematik vernichten würde, sollte sie aus dem reinen Denken hinabgleiten und sich mit den niedrigen, handwerklichen Wissenschaften verbinden. So wurde die Mechanik schon lange vor Ar-

²¹⁸ (Strathern, Archimedes und der Hebel, 1999, S. 51)

²¹⁹ (Kagan, 1955, S. 32f.)

²²⁰ (Strathern, Archimedes und der Hebel, 1999, S. 29f.)

chimedes zu einer bloßen militärischen Hilfstätigkeit degradiert und aus der Mathematik verbannt.²²¹ Über Archimedes schreibt Plutarch:

„daß er es verschmäht hat, über dasjenige, was ihm den Namen und Ruf einer schon nicht mehr menschlichen, sondern göttlichen Einsicht verschafft hat, irgendeine Aufzeichnung zu hinterlassen, sondern er sah die Beschäftigung mit der Mechanik und überhaupt jegliche Wissenschaft, die es mit der praktischen Anwendung zu tun hatte, für niedrig und gemein an und setzte seinen Ehrgeiz einzig an das, dem das Schöne und Hohe, unvermischt mit allem dem Zwange Unterworfenen, eigen ist...“ (Plutarch, 1955, S. 321f.)

Dass dies nicht ganz der Wahrheit entsprechen kann, wird klar, wenn man die Widmung seines Werkes „Die Quadratur der Parabel“ liest, in der er schreibt, dass er einen bestimmten Beweis zuerst mit den Methoden der Mechanik gefunden habe und erst später mit den Methoden der Geometrie.²²² Den Beweis dafür, dass sich Archimedes dieser Methode öfter bediente und dass er mit Hilfe der Mechanik teilweise sogar erst in der Lage war Sätze zu finden, die er später mit der reinen Mathematik beweisen konnte, gibt es seit 1906, als ein weiteres Werk Archimedes gefunden wurde:²²³

9) Die Methodenlehre:

Dieses Werk Archimedes wird auch „Die Methode der mechanisch herleitbaren Sätze“ genannt, in dem er über einige heuristische, mechanische Überlegungen schreibt und klar sagt, dass diese Methode oftmals sehr nützlich sein kann, um Theoreme zu beweisen. Es ist jedenfalls leichter etwas geometrisch zu beweisen, wenn man durch die Mechanik, für die man keine so strenge Beweiskraft benötigt, bereits Vorkenntnisse von dieser Sache erlangen konnte. Weiters gibt er zu Beweise oftmals selbst erst auf diese Weise gefunden zu haben, bevor er sie auf geometrische Art bewies.²²⁴

²²¹ (Plutarch, 1955, S. 318)

²²² (Archimedes, 1983, S. 153)

²²³ (Wussing, 1965, S. 130)

²²⁴ (Wussing, 1965, S. 131)

Er nimmt also jedenfalls diese Methoden zur Hilfe und gibt dies auch offen zu, in seinen anderen veröffentlichten Werken (siehe 1-8) finden sich jedoch nur noch die geometrischen Beweise.

Zusammenfassend kann man sagen, dass Archimedes seine wissenschaftliche Leistung auf jeden Fall in seinen theoretischen Schriften und den geometrischen Beweisen sah und die Erkenntnisse im Bereich der Mechanik, mit denen er Geld und Prestige erlangen konnte bzw. die ihm als Hilfe für seine Beweise dienten, eher nebensächlich für ihn waren.²²⁵

Die Kreismessung

Archimedes beweist in seinem Buch Die Kreismessung Sätze zu Fläche und Umfang des Kreises, indem er die sogenannte Exhaustionsmethode oder auch Ausschöpfungsmethode in ihrer elementarsten Form anwendet, die auch als Urbild der Integralrechnung bezeichnet wird. In der Antike wurden Flächenberechnungen so gemeistert, dass man die verschiedensten Figuren bzw. Vielecke in mehrere Dreiecke unterteilte, deren Fläche gemessen werden konnte. Dies ist jedoch unmöglich, sobald es sich wie bei einem Kreis um eine von einer gekrümmten Linie begrenzte Fläche handelt. Hierfür benötigt Archimedes die Exhaustionsmethode, die bereits vor ihm existierte, die er jedoch stark vertieft und erweitert hat.²²⁶ Bei dieser Methode schreibt man einem Kreis einerseits ein Vieleck ein, von dem man weiß, dass z.B.: seine Fläche kleiner ist als die des Kreises und andererseits ein Vieleck um, dessen Fläche jedenfalls größer ist und erhält somit zwei Werte, zwischen denen die exakte Fläche des Kreises liegen muss. Je größer die Anzahl n der Ecken des Vielecks gewählt wird, desto geringer wird der Fehler und desto genauer kann die Fläche des Kreises bestimmt werden. Man betrachtet also im Grunde zwei Reihen mit veränderlichen Größen, die sich beide immer mehr demselben Grenzwert, z.B.: der exakten Fläche des Kreises, annähern, so dass ihre Differenz so klein wie möglich

²²⁵ (Strathern, Archimedes und der Hebel, 1999, S. 31)

²²⁶ (Kagan, 1955, S. 24)

wird.²²⁷ Archimedes errechnete so nicht nur angenäherte Werte als Ergebnis, sondern konnte auch die zulässigen Fehlergrenzen bestimmen.²²⁸

Fläche eines Kreises

Die folgenden Sätze und Beweise sowie die Abbildungen haben, sowohl den Inhalt, als auch die teils ungewöhnliche Notation betreffend, als Grundlage das Originalwerk von Archimedes, hier übersetzt von Rudio, im Anhang von: (Archimedes, 1983, S. 367-377).

Archimedes berechnet im ersten Satz der Kreismessung geometrisch die **Fläche eines Kreises**, indem er zeigt, dass diese gleich der Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen eine, den rechten Winkel einschließende, Seite gleich lang ist wie der Radius des Kreises und dessen andere, den rechten Winkel einschließende Seite (=Basis), gleich lang ist wie der Umfang des Kreises. Wie konnte Archimedes so ein Dreieck zeichnen? Eine Lösung wäre den Umfang des Kreises mit einer Schnur zu messen und diese Länge dann bei der Konstruktion des Dreiecks abzutragen. Archimedes formuliert dies folgendermaßen:

Satz I: „Jeder Kreis ist einem rechtwinkligen Dreiecke inhaltsgleich, insofern der Radius gleich der einen der den rechten Winkel einschließenden Seiten, der Umfang aber gleich der Basis ist.“ (Archimedes, 1983, S. 369)

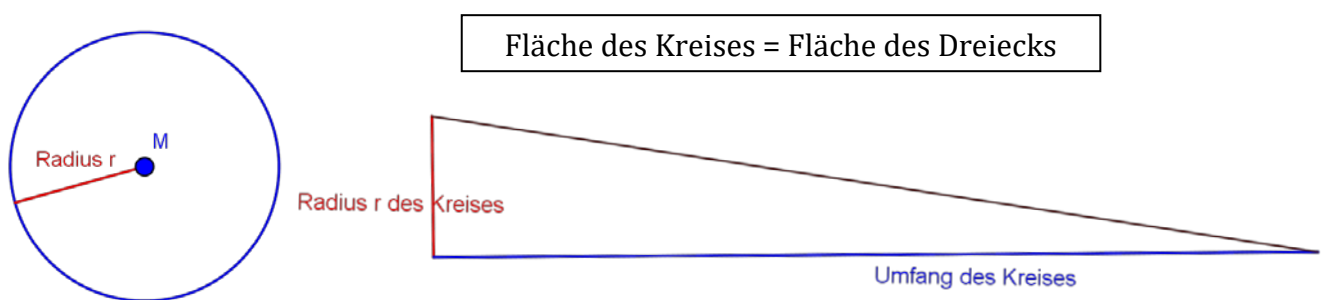


Abbildung 39

²²⁷ (Lurje, 1948, S. 89)

²²⁸ (Kagan, 1955, S. 22)

Beweis:

Kreis $ABCD$ ist **flächengleich** zu Dreieck E : Sowohl die Aussage, dass die Fläche des Kreises **größer**, als auch dass sie **kleiner** ist, als die Fläche des Dreiecks, werden zum Widerspruch geführt:

1) Wir nehmen an, dass die Fläche des Kreises **größer** ist, als die des Dreiecks:

In den Kreis $ABCD$ wird ein Quadrat AC eingeschrieben, anschließend werden die übriggebliebenen Kreisbögen halbiert, sodass ein 8-Eck entsteht, das von der Fläche her bereits größer und dem Kreis ähnlicher ist, als das Quadrat. Wiederum werden die übriggebliebenen Kreisbögen halbiert und zwar so lange bis die Summe der Segmente, die dem Vieleck auf den Kreis fehlen, kleiner sind, als das, um was der Kreis größer ist, als das Dreieck. (siehe Annahme 1) Dies bedeutet, dass nicht mehr nur die Fläche des Kreises, sondern auch die des Vielecks größer ist als die Fläche des Dreiecks.

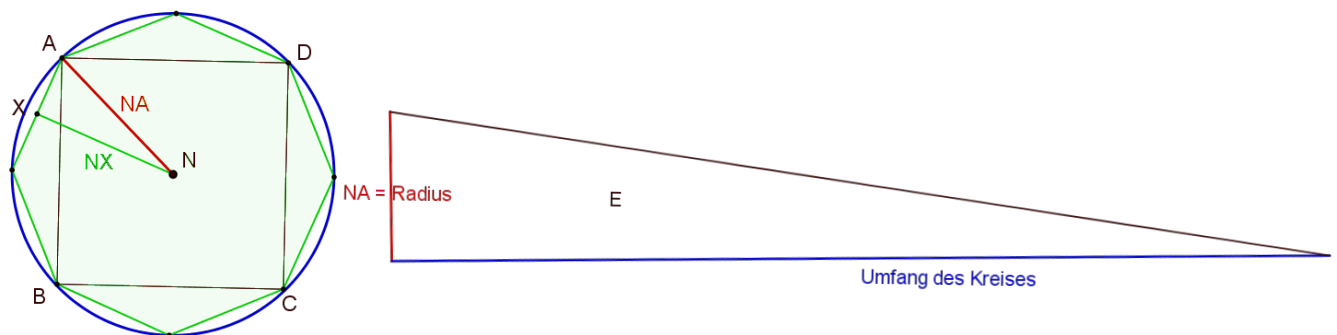


Abbildung 40

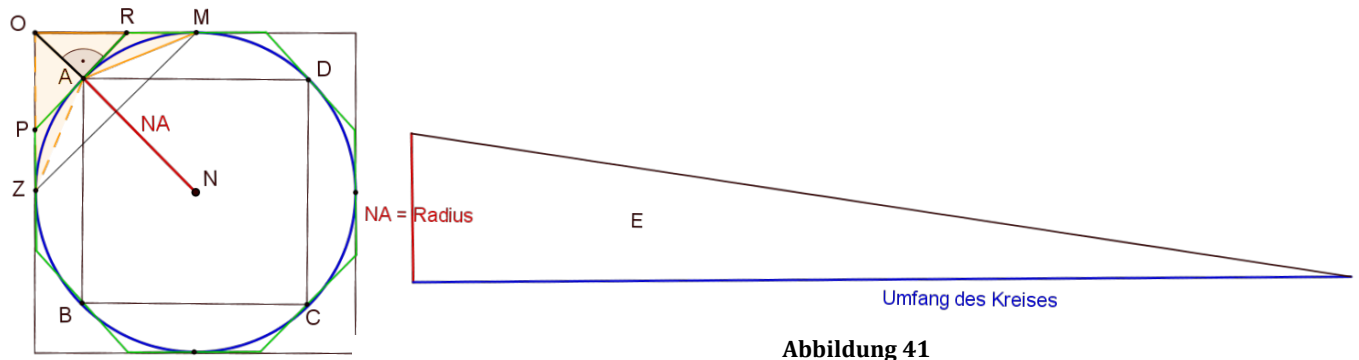
Da aber $NX < NA$ und der *Umfang des Polygons* $<$ *Umfang des Kreises*, das Dreieck aber als 1. Kathete NA und als Basis den *Umfang des Kreises* hat, so ist die Fläche des Vielecks jedenfalls kleiner als die Fläche des Dreiecks.

→ Widerspruch



2) Wir nehmen an, dass die Fläche des Kreises **kleiner** ist, als die des Dreiecks:

Um den Kreis $ABCD$ wird ein Quadrat umgeschrieben, anschließend werden die Kreisbögen, die in den Ecken des Quadrats liegen, halbiert und an diese Punkte Tangenten gelegt, sodass ein 8-Eck entsteht, das von der Fläche her bereits kleiner und dem Kreis ähnlicher ist, als das Quadrat.



Man betrachte nun die Winkel:

Es ist sofort erkenntlich, dass $\angle OAR$ ein rechter Winkel ist. Betrachtet man den „Satz des Pythagoras“ $OR^2 = AR^2 + OA^2$, ist sofort klar, dass $OR > AR$ und $OR > OA$ ist. Da auf Grund der Symmetrie $MR = AR$ gilt, ist somit gezeigt, dass auch $OR > MR$ ist.

Archimedes folgert wie selbstverständlich daraus, dass das Dreieck $\triangle ROP$ größer ist, als die Hälfte der Figur $OZAM$ (= Dreieck $\triangle OAM$). Da dies jedoch nicht für jeden sofort ersichtlich ist, folgt hier ein kurzer Beweis²²⁹:

²²⁹ Dieser zum besseren Verständnis dienende Hilfsbeweis wurde von der Verfasserin erstellt.

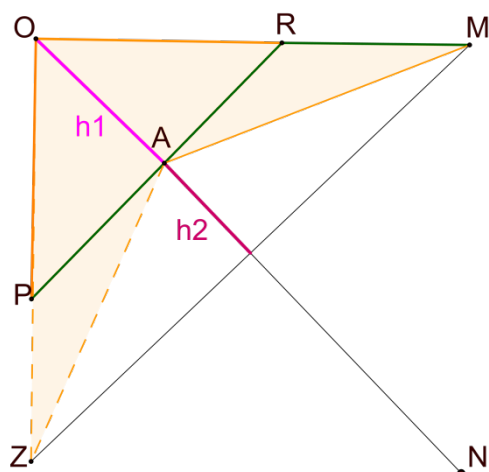


Abbildung 42

Da das Dreieck $\triangle OAR$ sowohl im Dreieck $\triangle ROP$, als auch im Dreieck $\triangle OAM$ enthalten ist, reicht es zu zeigen, dass das Dreieck $\triangle OAP$ größer ist, als das Dreieck $\triangle ARM$.

Betrachtet man das Verhältnis der Höhe h_1 des Dreiecks $\triangle OAP$ auf die Seite PA und die Höhe h_2 des Dreiecks $\triangle ARM$ auf die Seite AR , so sieht man, dass auf Grund des Strahlensatzes folgendes gilt: $OP (= OR) : RM = h_1 : h_2$.

Da schon bewiesen wurde, dass OR größer ist als RM , so muss auch h_1 größer sein, als h_2 . Die Fläche eines Dreiecks ist $\frac{\text{Grundfläche} \times \text{Höhe}}{2}$, da die beiden Grundflächen AP und AR jedoch ident sind, h_1 aber größer als h_2 , so ist bewiesen, dass die Fläche des Dreiecks $\triangle OPA$ und damit des Dreiecks $\triangle ROP$ größer ist.

Nun wiederholt man den Teilungsprozess der Kreisbögen (aus einem umschriebenen 8-Eck wird ein 16-Eck usw.) und zwar so lange bis die Summe der Segmente des Vielecks, die den Kreis überlappen, insgesamt kleiner ist, als das, um was das Dreieck größer ist, als der Kreis. (siehe Ann. 2) Dies bedeutet, dass nicht mehr nur die Fläche des Kreises, sondern auch die des Vielecks kleiner ist als die Fläche des Dreiecks.

Dies führt zum sofortigen Widerspruch, da das Vieleck größer als das Dreieck sein muss, da dieses als 1. Kathete **NA** und als Basis den *Umfang des Kreises* hat, der *Umfang des umgeschriebenen Polygons* aber größer ist, als der *Umfang des Kreises*.



Aus 1) und 2) folgt daher, dass der Kreis und das Dreieck jedenfalls flächengleich sein müssen.

q.e.d.

In dem darauf folgenden Satz II beweist Archimedes, dass sich der Kreis zum Quadrat seines Durchmessers so verhält wie 11 zu 14. In seinem Beweis verwendet er bereits Satz III, der besagt, dass der Umfang des Kreises dreimal so groß ist wie sein Durchmesser und ein bisschen weniger als ein Siebentel von diesem (Satz und Beweis s.u.) und sieht ihn als bewiesen an, weshalb man darauf schließen kann, dass in seinem Originalwerk die Reihenfolge von Satz II und III vertauscht waren. Da das Augenmerk dieses Kapitels auf Umfang und Fläche des Kreises liegt, bzw. auf Archimedes Schätzung der Zahl π , wird hier nicht näher auf Satz II eingegangen, sondern gleich mit Satz III fortgesetzt:

Umfang des Kreises:

Satz III: „Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so groß als der Durchmesser und noch um etwas größer, nämlich um weniger als ein Siebentel, aber um mehr als zehn Einundsiebenzigstel des Durchmessers.“ (Archimedes, 1983, S. 371)

Beweis:

- 1) Bestimmen der **oberen** Grenze des Kreisumfangs:

Gegeben sei ein Kreis mit dem Durchmesser AC , dem Mittelpunkt E und der Berührungslinie CLB (= Tangente an den Kreis), wobei der $\angle BEC$ genau ein Drittel eines Rechten sein soll, also 30 Grad.

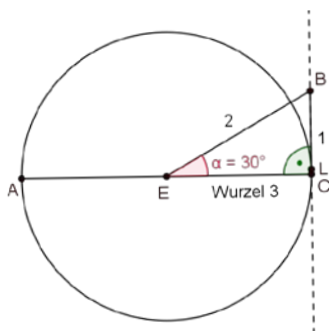


Abbildung 43

In einem solchen Dreieck mit $\alpha = 30^\circ$ verhalten sich die Seiten wie $1 : 2$ (BC zu EB) bzw. wie $1 : \sqrt{3}$ (BC zu EC).²³⁰

Archimedes war die genaue Zahl für $\sqrt{3}$ nicht bekannt

²³⁰ Für Archimedes war dieses Verhältnis geometrisch schnell sichtbar: Er musste das Dreieck nur an der Strecke EC spiegeln und erhielt somit ein gleichseitiges Dreieck, dessen Strecke BB' durch EC genau in der Hälfte geteilt wurde. Mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes konnte er sich die dritte Seite ausrechnen.

und so errechnete er sich Näherungswerte, die rational waren und kleinstmögliche Nenner besaßen: $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$. Wie er auf diese Werte gekommen ist, lässt sich leider nicht mehr rekonstruieren, eine Vermutung legt nahe, dass diese Näherungen Glieder der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{3}$ sind und Archimedes die Lösungen mit Hilfe dieser erhalten hat.²³¹ Es muss daher einfach akzeptiert werden, dass Archimedes für dieses Dreieck folgende Aussagen tätigt:

(1) EB verhält sich zu BC wie 306 zu 153 ($EB : BC = 306 : 153 = 2 : 1$)

(2) EC verhält sich zu CB (nahezu)(weil $\sqrt{3}$ ja größer ist als der Bruch $\frac{265}{153}$) wie 265 zu 153 ($EC : CB > 265 : 153 = \sqrt{3} : 1$)

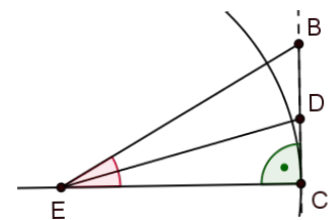


Abbildung 44

Teilt man den $\angle BEC$ mit der Strecke ED in die Hälfte, so verhält sich dann $BE : EC$ wie $BD : DC$.

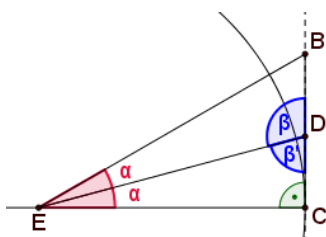


Abbildung 45

Da dies nicht unbedingt sofort ersichtlich ist, folgt hier ein kurzer Beweis²³²: Sei der $\angle BED = \angle DEC = \alpha$, der $\angle BDE = \beta$ und der $\angle DCE = 180^\circ - \beta = \beta'$. Es gilt $\frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{BE}{\sin \beta}$ und außerdem $\frac{DC}{\sin \alpha} = \frac{EC}{\sin \beta'}$, woraus folgt²³³: $\frac{BD}{DC} = \frac{BE \cdot \sin(180 - \beta)}{EC \cdot \sin \beta} = \frac{BE}{EC}$ ($\sin(180 - \beta) = \sin \beta$).

Aus $\frac{BE}{EC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BE}{EC} + \frac{EC}{EC} = \frac{BD}{DC} + \frac{DC}{DC} \Rightarrow \frac{BE + EC}{EC} = \frac{BD + DC}{DC} \Rightarrow \frac{BE + EC}{EC} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{BE + EC}{BC} = \frac{EC}{DC}$ (mal EC , dividiert durch BC) $\Rightarrow BE + EC : BC = EC : CD$.²³⁴

Da $\frac{BE + EC}{BC} > \frac{306 + 265}{153} = \frac{571}{153}$, folgt daraus, dass auch

²³¹ (Schneider, 1979, S. 145)

²³² Dieser zum besseren Verständnis dienende Hilfsbeweis wurde von der Verfasserin erstellt.

²³³ aus $\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC}$ und weiters $\frac{BD \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha \cdot DC} = \frac{BE \cdot \sin \beta'}{\sin \beta \cdot EC}$

²³⁴ (Lurje, 1948, S. 147)

$$(3) CE : CD > 571 : 153.$$

Archimedes folgert daraus, dass sich die Quadrate von ED und DC folgendermaßen verhalten: $ED^2 : DC^2 > 349450 : 23409$. Hier die dazugehörige Erklärung:

Es gilt im Dreieck $\triangle ECD$ der pythagoreische Lehrsatz mit: $ED^2 = DC^2 + EC^2 \rightarrow \frac{ED^2}{DC^2} = 1 + \frac{EC^2}{DC^2}$.

Setzt man (3) ein, gilt: $\frac{ED^2}{DC^2} > 1 + \frac{571^2}{153^2} = \frac{153^2 + 571^2}{153^2} = \frac{349450}{23409} \rightarrow ED^2 : DC^2 > 349450 : 23409$

Demnach verhalten sich ihre Längen nahezu wie: $ED : DC > 591\frac{1}{8} : 153$.

Archimedes zieht hier die Quadratwurzel aus 349450, es ist jedoch nicht bekannt, auf welche Weise er eine beinahe korrekte Lösung erziehen konnte.²³⁵ Fakt ist jedoch, dass ein System dahinter stehen musste, da er dies im Laufe des weiteren Beweises immer wieder mit verschiedenen, ähnlich großen Zahlen macht.

Auf die gleiche Weise wie oben erklärt, teilt Archimedes den Winkel immer wieder in die Hälfte und errechnet sich dabei folgende Werte:

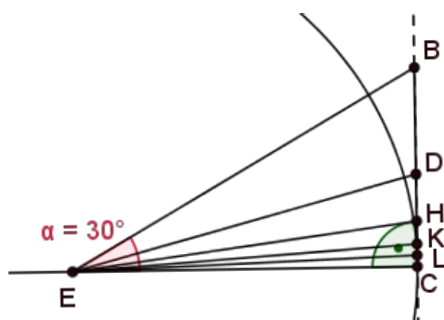


Abbildung 46

$\angle DEC$ wird geteilt durch die Strecke EH :

$EC : CH > 1162\frac{1}{8} : 153$, woraus folgt dass $HE : HC > 1172\frac{1}{8} : 153$

$\angle HEC$ wird geteilt durch die Strecke EK :

$EC : CK > 2334\frac{1}{4} : 153$, woraus folgt dass $EK : CK > 2339\frac{1}{8} : 153$

²³⁵ (Lurje, 1948, S. 148)

$\angle KEC$ wird geteilt durch die Strecke $LE : EC : LC > 4673\frac{1}{2} : 153$

Der Anfangswinkel $\angle BEC$ ist 30° und daher der dritte Teil eines rechten Winkels. Da dieser vier Mal genau in die Hälfte geteilt wurde, so ist der Winkel $\angle LEC$ der 48. Teil eines rechten Winkels. Spiegelt man den Winkel $\angle LEC$ an der Strecke EC , erhält man den deckungsgleichen Winkel $\angle CEM$.

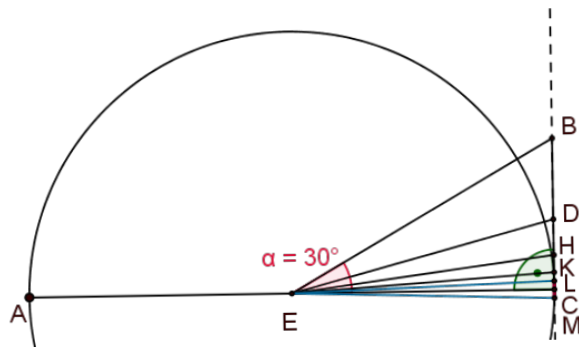


Abbildung 47

Der Winkel $\angle LEM$ ist somit der 24. Teil eines rechten Winkels und die Linie LM ist eine der insgesamt 96 Seiten des des Kreises umgeschriebenen Vielecks.

Da $EC : CL > 4673\frac{1}{2} : 153$ und weiters AC genau das Doppelte von EC bzw. LM genau das doppelte von LC ist, so verhält sich auch

$AC : LM > 4673\frac{1}{2} : 153$. Und da LM eine der 96-Seiten des Vielecks ist, so gilt außerdem, dass der Durchmesser des Kreises AC zum gesamten Umfang des Vielecks ein größeres Verhältnis hat, als $4673\frac{1}{2}$ zu $153 * 96 = 14688$.

Die Zahl 14688 ist außerdem das Dreifache von $4673\frac{1}{2}$ (also des Durchmessers), vermehrt um $667\frac{1}{2}$, was weniger ist, als $\frac{1}{7}$ von $4673\frac{1}{2}$.

Man kann also sagen, dass der Umfang des umgeschriebenen Polygons kleiner ist, als drei Mal der Durchmesser plus $\frac{1}{7}$ desselben. Da das Polygon dem Kreis **umgeschrieben** ist, ist der Umfang des Kreises also mit Sicherheit kleiner als der des Vielecks.

Man kann also daher folgern, dass der Umfang des Kreises jedenfalls kleiner ist, als drei Mal sein Durchmesser vermehrt um ein Siebentel desselben. Archimedes hat so also eine **obere** Schranke für den Umfang des Kreises gefunden.

2) Bestimmen der **unteren** Grenze des Kreisumfangs:

Gegeben sei ein Kreis mit dem Durchmesser AC und dem Mittelpunkt E , wobei der $\sphericalangle BAC$ genau ein Drittel eines Rechten sein soll, also 30 Grad.

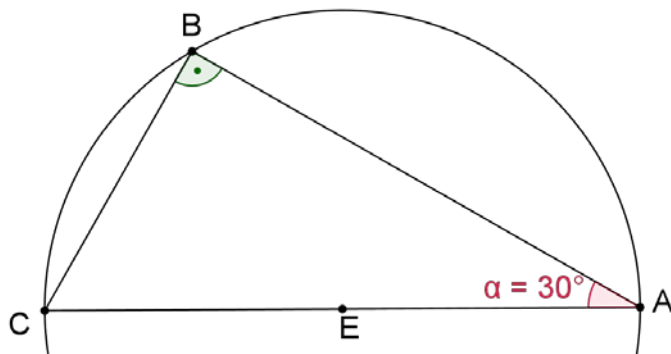


Abbildung 48

Auch in diesem Dreieck gilt $\alpha = 30^\circ$ und die Seiten verhalten sich wie 1 : 2 ($CB : AC$) bzw. wie $1 : \sqrt{3}$ ($BC : AB$). Bei diesem Teil des Beweises verwendet Archimedes jedoch den oberen Näherungswert für $\sqrt{3}$:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} \text{ und tätigt folgende Aussagen:}$$

$$(1) AB : BC < 1351 : 780 = \sqrt{3} : 1$$

$$(2) AC : CB = 1560 : 780 = 2 : 1$$

Teilt man den $\sphericalangle BAC$ nun mit der Strecke AD in die Hälfte, so verhalten sich die Winkel folgendermaßen zu einander:

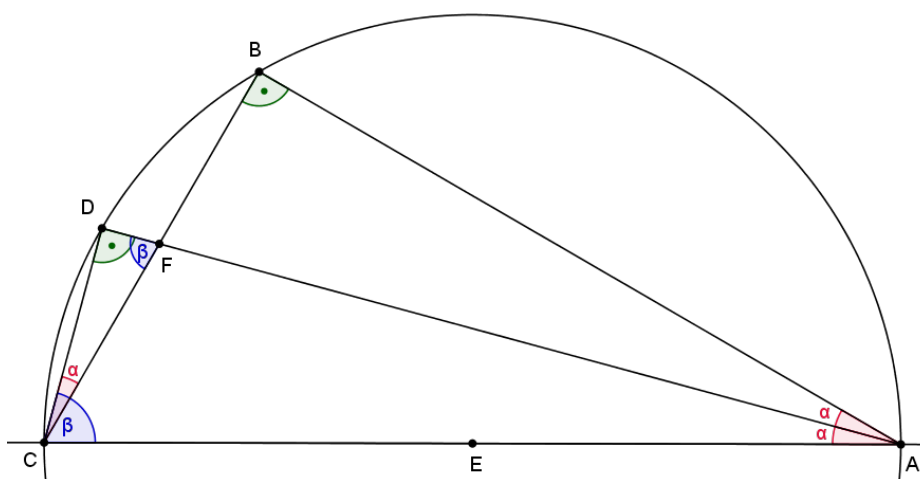


Abbildung 49

Da gilt: $\angle BAD = \angle DCB = \angle DAC$, gilt außerdem: $\angle DCB = \angle DAC$. Beide Dreiecke teilen sich den rechten Winkel $\angle ADC$. Daher gilt weiters, dass auch die dritten Winkel gleich sind: $\angle DFC = \angle ACD$. Es ist also klar, dass die beiden Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle CDF$ winkeligleich sind.

Dies bedeutet, dass sich – betrachtet man die beiden Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle CDF$ – die Seiten der beiden Dreiecke folgendermaßen zueinander verhalten:

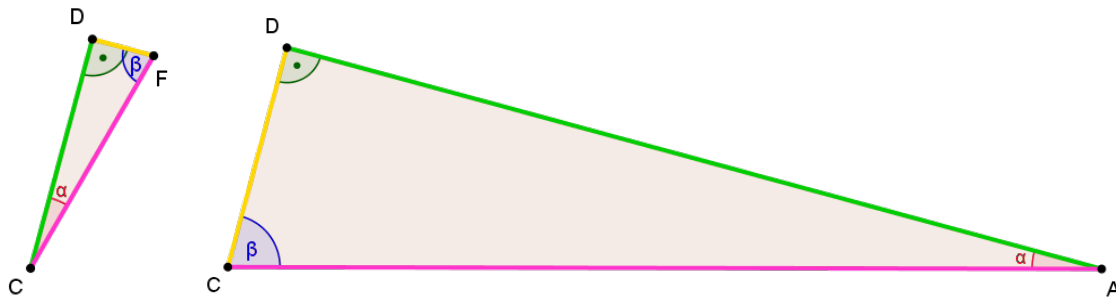


Abbildung 50

AD verhält sich zu CD genauso, wie sich CD zu DF verhält und auch AC zu CF .

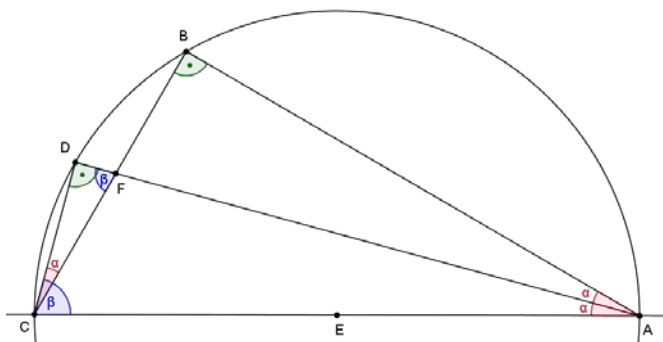


Abbildung 51

Und so wie sich $AC : CF$ verhält, so verhält sich auch $AB : BF$, außerdem $(CA + AB) : (BF + FC)$ und dadurch: $(CA + AB) : BC$.

Und wie sich $(CA + AB) : BC$ verhalten, so verhält sich auch $AD : DC$.

Betrachtet man die Annahmen

(1) $AB : BC < 1351 : 780 = \sqrt{3} : 1$ und

(2) $AC : CB = 1560 : 780 = 2 : 1$

so ergibt sich daraus, dass $(CA + AB):BC < (1560 + 1351) : 780 = 2911 : 780$ und somit auch, dass

$$(3) AD : DC < 2911 : 780.$$

Archimedes folgert daraus sofort, dass das Verhältnis von $AC : CD < 3013\frac{3}{4} : 780$ ist. Dies folgt wie schon im ersten Teil des Beweises aus folgenden Gedankengängen:

Die Quadrate von AD und DC verhalten sich folgendermaßen:

$$AD^2 : DC^2 < 8473921 : 608400.$$

Es gilt im Dreieck ACD der pythagoreische Lehrsatz mit:

$$AC^2 = DC^2 + AD^2 \rightarrow \frac{AC^2}{DC^2} = 1 + \frac{AD^2}{DC^2}.$$

Setzt man (3) ein, gilt:

$$\frac{AC^2}{DC^2} < 1 + \frac{2911^2}{780^2} = \frac{780^2 + 2911^2}{780^2} = \frac{9082321}{608400} \rightarrow AC^2 : DC^2 < 9082321 : 608400$$

Demnach verhalten sich ihre Längen nahezu wie: $AC : DC < 3013\frac{3}{4} : 780$.

Auch hier ist nicht klar, wie Archimedes auf eine so genaue Berechnung der Wurzel von 9082321 kommt.

Auf die gleiche Weise wie oben erklärt, teilt Archimedes den Winkel immer wieder in die Hälfte und errechnet dabei folgende Werte:

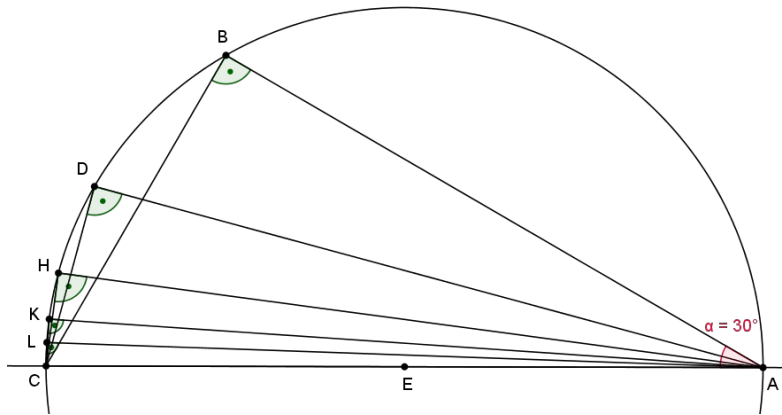


Abbildung 52

$\angle CAD$ wird geteilt durch die Strecke AH :

$$AH : HC < 5924 \frac{3}{4} : 780 = 1823 : 240 (* \frac{4}{13}), \text{ woraus folgt dass } AC : CH < 1838 \frac{9}{11} : 240.$$

$\angle HAC$ wird geteilt durch die Strecke KA :

$$AK : KC < 3661 \frac{9}{11} : 240 = 1007 : 66 (* \frac{11}{40}), \text{ woraus folgt dass } AC : CK < 1009 \frac{1}{9} : 66.$$

$\angle KAC$ wird geteilt durch die Strecke LA :

$$AL : LC < 2016 \frac{1}{6} : 66, \text{ woraus folgt, dass } AC : CL < 2017 \frac{1}{4} : 66.$$

Da die Linie CL eine der insgesamt 96 Seiten des dem Kreis eingeschriebenen Vielecks ist und AC der Durchmesser des Kreises, so gilt auch, dass der Durchmesser des Kreises AC zum gesamten Umfang des Vielecks ein kleineres Verhältnis hat, als $2017 \frac{1}{4}$ zu $66 * 96 = 6336$.

Umgekehrt formuliert ist also der Umfang zum Durchmesser AC vom Verhältnis her größer als 6336 zu $2017\frac{1}{4}$.

Die Zahl 6336 ist außerdem das Dreifache von $2017\frac{1}{4}$ (also des Durchmessers), vermehrt um $284\frac{1}{4}$, was mehr ist, als $\frac{10}{71}$ von $2017\frac{1}{4}$.

Man kann also sagen, dass der Umfang des eingeschriebenen Polygons größer ist, als drei Mal der Durchmesser plus $\frac{10}{71}$ desselben. Da das Polygon dem Kreis **eingeschrieben** ist, ist der Umfang des Kreises also mit Sicherheit größer als der des Vielecks.

Man kann daher folgern, dass der Umfang des Kreises jedenfalls größer ist, als drei Mal sein Durchmesser vermehrt um zehn Einundsiebzigstel desselben. Archimedes hat auf diesem Weg auch eine **untere** Schranke für den Umfang des Kreises gefunden.

Somit ist bewiesen, dass der Umfang des Kreises dreimal so groß ist wie sein Durchmesser und noch um etwas größer, nämlich um weniger als $\frac{1}{7}$, aber um mehr als $\frac{10}{71}$ desselben.

$$(3\frac{1}{7} * d > \text{Umfang des Kreises} > 3\frac{10}{71} * d)$$

q.e.d.

Betrachtet man die allgemein gültige Formel des Umfangs eines Kreises: $U = \pi * d$, sieht man, dass Archimedes mit $3\frac{1}{7}$ ($= 3,14285714$) $> \pi^{236} > 3\frac{10}{71}$ ($= 3,14084507$) bereits eine überragend gute Annäherung für π gefunden hat.

Die untere Schranke $\pi = \frac{22}{7}$ wird auch als archimedisches Wert bezeichnet.²³⁷

Archimedes hätte sogar noch genauere Schranken für π berechnen können, wenn er die Seiten des Vielecks noch einmal verdoppelt hätte²³⁸. Deshalb ist es nicht weiter verwunderlich, dass Heron schreibt, dass Archimedes in einer seiner Schriften eine noch genauere Näherung für π angab:

$$\frac{211875}{67441} (= 3,141634911) < \pi < \frac{197888}{62351} (= 3,173774278).^{239}$$

Diese Ungleichung ist jedoch offensichtlich fehlerhaft, da der genaue Wert von π nicht zwischen den oben genannten Grenzen liegt und die obere Schranke viel ungenauer ist, als $3\frac{1}{7}$. Dieser Fehler entstand vermutlich beim Kopieren des Werkes.²⁴⁰

²³⁶ $\pi = 3,141592654 \dots$

²³⁷ (Kagan, 1955, S. 22)

²³⁸ Bei seinen Berechnungen (n=96) liegt die Fehlerquote bei $3\frac{1}{7} - 3\frac{10}{71} = \frac{1}{497} \cong 0,002$. (Lurje, 1948, S. 149)

²³⁹ (Wussing, 1965, S. 137f.)

²⁴⁰ (Keyser & Irby-Massie, 2002, S. 27)

3. Vorgeschichtliche Quellen: Umfang und Fläche des Kreises, Annäherungen an die Zahl π

Natürlich gab es auch schon lange vor Archimedes Annäherungen an die Zahl π bzw. Berechnungen zu Fläche oder Umfang des Kreises, so zum Beispiel wiederum in Ägypten und Babylonien. In diesem Kapitel wird versucht eine zeitlich geordnete Aufzählung der Annäherungen zu schaffen, die bereits vor derjenigen des Archimedes existierten und die ihm bekannt gewesen sein könnten.

Ägypten

Im Papyrus Rhind findet sich zum Beispiel folgende Aufgabe (Nr. 50): „*Beispiel der Berechnung eines runden Feldes vom (Durchmesser) 9ht [ein Längenmaß²⁴¹]. Was ist der Betrag seiner Fläche? Nimm $\frac{1}{9}$ von ihm (dem Durchmesser) weg. Der Rest ist 8. Multipliziere 8 mal 8. Es wird 64.*“ (Gericke, 1984, S. 55)

Hier bekommt man eine Anleitung wie man die Fläche eines Kreises berechnen kann: $(d - \frac{d}{9})^2$. Nach Umformung dieser Flächenformel und unter Berücksichtigung, dass $d = 2 * r$, erhält man folgende Formel: $A = \frac{256}{81} * r^2$.²⁴² Nach der allgemeingültigen Flächenformel eines Kreises: $A = \pi * r^2$ hatten die Ägypter also folgende Näherung für π : $\pi = \frac{256}{81} = 3,16049383$.²⁴³ Wieso die Ägypter jedoch genau $\frac{1}{9}$ des Durchmessers abgezogen haben, mit dem die beste Annäherung an π erzielt werden kann und nicht etwa ein bisschen mehr oder weniger, kann nur gemutmaß²⁴⁴ werden.²⁴⁵

Auch in der Aufgabe Nr. 48 des Rhind Papyrus wird diese Formel verwendet, um das Volumen eines zylindrischen Kornspeichers zu berechnen: $V = (d - \frac{d}{9})^2 * h$.

²⁴¹ (Wußing, 2008, S. 119)

²⁴² $(d - \frac{d}{9})^2 = ((1 - \frac{1}{9}) * d)^2 = (\frac{8}{9} * d)^2 = (\frac{8}{9} * 2r)^2 = (\frac{16}{9} * r)^2 = \frac{256}{81} * r^2$.

²⁴³ (Gericke, 1984, S. 55)

²⁴⁴ für genauere Aufzeichnungen vgl. (Gericke, 1984, S. 55-58)

²⁴⁵ (Wußing, 2008, S. 119)

Die Ägypter hatten aber noch einen anderen Lösungsweg die Fläche eines Kreises zu berechnen und zwar indem sie diese durch ein (nicht regelmäßiges) Achteck annäherten.

Sie schrieben diesem Achteck ein Quadrat um mit der Seitenlänge d (= Durchmesser des Kreises) und zwar genauso, dass sich mit Hilfe eines Gitternetzes neun Teilquadrate ergaben. Die Flächenformel für das Achteck ist dann: $A = d^2 - 4 * \frac{d^2}{2*9}$.²⁴⁶

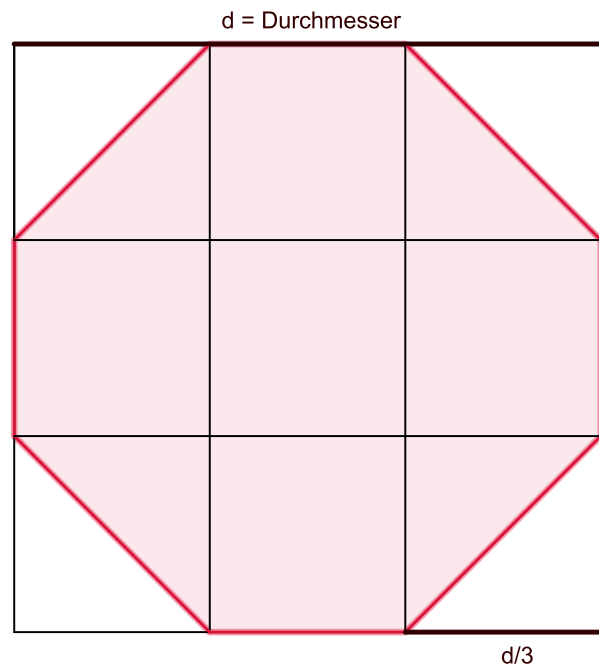


Abbildung 53 - Bild selbst erstellt anhand (Lehmann, 1994, S. 49)

Babylonien

Lange nicht so genau war die Annäherung für π in Babylonien, wo ein vollkommen anderes Verfahren als in Ägypten angewendet wurde und die Fläche des Kreises über seinen Umfang berechnet wurde: $A = \frac{u^2}{12}$, wobei für den Umfang der 3-fache Durchmesser angenommen wurde. Somit ergibt sich folgende Annäherung für π : $A = \frac{(3*d)^2}{12} = \frac{(3*2r)^2}{12} = \frac{(6*r)^2}{12} = \frac{36*r^2}{12} = 3 * r^2$.²⁴⁷

Weitere Quellen besagen, dass es aber auch in der babylonischen Mathematik, abgesehen von der gängigsten Annäherung für π durch die Zahl Drei, genauere Annäherungen gegeben hat. So zum Beispiel der Wert $3\frac{1}{8} = 3,125$, der entstanden sein soll, als sich die Babylonier mit 5, 6 und 7-seitigen Polygonen beschäftigten.²⁴⁸

²⁴⁶ (Lehmann, 1994, S. 48f.)

²⁴⁷ (Scriba & Schreiber, 2002, S. 17)

²⁴⁸ (Wussing, 1965, S. 43)

Griechenland

Im alten Griechenland begann man sich Ende des 5. Jahrhunderts vor Christus mehr mit dem Kreis zu beschäftigen, als das Problem der Quadratur des Kreises immer populärer wurde. Einer der ersten Griechen war Anaxagoras von Klazomenai, ein Naturphilosoph, der wegen Gottlosigkeit angeklagt wurde und sich im Gefängnis mit diesem Thema zu beschäftigen begann. Seine Bemühungen blieben jedoch eher ergebnislos und sind daher nicht weiter erwähnenswert.

Weit interessanter sind hier die Erkenntnisse von Antiphon um 430 v.Chr.²⁴⁹, der dem Kreis ein Polygon wie zum Beispiel ein Dreieck oder ein Viereck einschrieb, und dann die Kreisbögen halbierte, um ein Polygon mit der doppelten Seitenanzahl zu erhalten. Würde er immer weiter mit dieser Technik fortfahren, so glaubte er irgendwann ein Polygon zu erhalten, das sich mit dem Kreis decken würde und er mit Hilfe des Polygons in der Lage wäre den Kreis in ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt zu verwandeln. Antiphon versucht also den Kreis „auszuschöpfen“ und legt mit dieser Überlegung den Grundstein der Exhaustionsmethode.²⁵⁰

Ein weiterer wichtiger Mathematiker in Griechenland, der sich vor Archimedes mit der Exhaustionsmethode beschäftigte und diese revolutionierte war Bryson aus Heraklea, der um 450 vor Christus lebte. Er schrieb dem Kreis nicht nur ein Polygon ein, sondern auch eines um und erhielt so nicht nur eine untere Grenze für π , sondern auch eine obere Grenze.²⁵¹

²⁴⁹ (Wußing, 2008, S. 505)

²⁵⁰ (Van der Waerden, Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, 1956, S. 214ff.)

²⁵¹ (Heath, 1981, S. 223f.)

Archimedes selbst schreibt diese Methode Eudoxos von Knidos zu, der um 400 vor Christus geboren wurde und der auf diese Weise einer Pyramide Prismen einschrieb und sie so immer mehr ausfüllte.²⁵²

Man erkennt also, dass Archimedes nicht der Urheber der Exhaustionsmethode war, er wusste diese aber kunstvoll anzuwenden, stellte mit ihrer Hilfe erste wirkliche Berechnungen an und lieferte Beweise, das Verhältnis von Kreisumfang und -durchmesser, also der Zahl π , betreffend.²⁵³

Außerdem war er der Erste, der nicht nur angenäherte Werte als Ergebnis annahm, sondern auch die zulässigen Fehlergrenzen bestimmen konnte.²⁵⁴ In den Elementen des Euklid wird die Exhaustionsmethode in Buch XII zwar vorgestellt, jedoch nicht einmal der Versuch gemacht, mit ihrer Hilfe die Zahl π einzugrenzen.²⁵⁵

²⁵² (Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*, 1956, S. 307f.)

²⁵³ (Becker, 1957, S. 100)

²⁵⁴ (Kagan, 1955, S. 22)

²⁵⁵ (Wussing, 1965, S. 137)

LITERATURVERZEICHNIS

Archimedes. (1983). *Werke; im Anh.: Kreismessung, übers. von Rudio, F., Des Archimedes Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen, übers. von Heidberg, J. L.* (A. Czwalina, Übers.) Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Aristoteles. (1984). *Metaphysik.* (F. F. Schwarz, Hrsg., & F. F. Schwarz, Übers.) Stuttgart: Philipp Reclam Jun.

Aristoteles. (1991). *Politik* (Bd. I). (E. Schütrumpf, Übers.) Berlin: Akademie.

Becker, O. (1957). *Das mathematische Denken der Antike.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Cicero, M. T. (1970). *Gespräche in Tusculum* (2. Ausg.). (O. Gigon, Hrsg.) München: Heimeran.

Cicero, M. T. (1970). *Sämtliche Reden* (Bd. II). (M. Fuhrmann, Übers.) Zürich: Artemis.

Diodoros. (1993). *Griechische Weltgeschichte* (Bd. Teil 2). (O. Veh, Übers.) Stuttgart: Anton Hiersemann.

Euklid. (2015). *Die Elemente, Bücher I-XIII* (4. Ausg.). (C. Thaer, Übers.) Haan-Gruiten: Europa-Lehrmittel.

Gemelli Marciano, L. M. (2007, online-Ausg., 2014). *Die Vorsokratiker : griechisch - lateinisch - deutsch. 1. Thales, Anaximander, Anaximenes, Pythagoras und die Pythagoreer, Xenophanes, Heraklit.* Düsseldorf: Artemis & Winkler.

Gericke, H. (1984). *Mathematik in Antike und Orient.* Berlin; Heidelberg; New York; Tokio: Springer.

Heath, T. S. (1981). *A history of Greek mathematics, Volume I: From Thales to Euclid* (2. Ausg.). New York: Dover Publications.

Herodot. (1995). *Historien* (Bd. 1). (J. Feix, Hrsg.) Zürich: Artemis & Winkler.

Herrmann, D. (2014). *Die antike Mathematik: Eine Geschichte der griechischen Mathematik, ihrer Probleme und Lösungen.* Heidelberg: Springer.

Hoyrup, J., & Damerov, P. (Hrsg.). (2001). *Changing views on ancient near eastern mathematics: From a Workshop Jointly Organized by Altorientalisches Seminar, Seminar*

für Vorderasiatische Altertumskunde (Freie Universität Berlin), Max Planck Institute for Human Development and Education (Berlin). Berlin: Dietrich Reimer.

Iamblichos. (1963). *Pythagoras, Legende Lehre Lebensgestaltung*. (M. v. Albrecht, Übers.) Zürich: Artemis.

Kagan, W. F. (1955). *Archimedes: Sein Leben und sein Werk*. Leipzig: Fachbuch.

Keyser, P. T., & Irby-Massie, G. L. (2002). *Greek science of the hellenistic era*. London & New York: Routledge.

Laertius, D. (1998). *Leben und Lehre der Philosophen, orig.: Vitae philosophorum*. (F. Jürß, Hrsg., & F. Jürß, Übers.) Stuttgart: Philipp Reclam Jun.

Lehmann, J. (1994). *So rechneten Ägypter und Babylonier*. Leipzig: Urania.

Livius, T. (1986). *Römische Geschichte* (2 Ausg., Bde. XXIV-XXVI). (J. Feix, Hrsg.) München und Zürich: Artemis.

Lurje, S. J. (1948). *Archimedes*. Wien: "Neues Österreich".

Maximus, V. (1991). *Facta et dicta memorabilia / Denkwürdige Taten und Worte*. (U. Blank-Sangmeister, Hrsg., & U. Blank-Sangmeister, Übers.) Stuttgart: Philipp Reclam Jun.

Neugebauer, O. (1935). *Mathematische Keilschrift-Texte, Erster Teil: Texte* (Bd. 3). Berlin: Springer.

Neugebauer, O. (1935). *Mathematische Keilschrift-Texte, Zweiter Teil: Register, Glossar, Nachträge, Tafeln* (Bd. 3). Berlin: Springer.

Neugebauer, O. (Dezember 1929). Über vorgriechische Mathematik. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 7, S. 107-124.

Pausanias. (1986). *Reisen in Griechenland* (Bd. 1). (F. Eckstein, Hrsg., & E. Meyer, Übers.) Zürich und München: Artemis.

Platon. (1981). *Theätet*. (E. Martens, Hrsg., & E. Martens, Übers.) Stuttgart: Philipp Reclam Jun.

Plutarch. (1955). *Grosse Griechen und Römer* (Bd. III). (K. Ziegler, Übers.) Zürich und Stuttgart: Artemis.

Polybios. (1961). *Geschichte* (Bd. I). (H. Drexler, Übers.) Zürich und Stuttgart: Artemis.

Proklus, D. (1945). *Euklid-Kommentar*. Halle: Deutsche Akademie der Naturforscher.

Riedweg, C. (2002). *Pythagoras: Leben, Lehre, Nachwirkung*. München: C.H.Beck.

Schneider, I. (1979). *Archimedes: Ingenieur, Naturwissenschaftler und Mathematiker*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Scriba, C. J., & Schreiber, P. (2002). *5000 Jahre Geometrie: Geschichte Kulturen Menschen* (2. Ausg.). Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris; Tokio: Springer.

Strathern, P. (1999). *Archimedes und der Hebel*. Frankfurt am Main: Fischer.

Strathern, P. (1999). *Pythagoras & sein Satz*. (X. Osthelder, Übers.) Frankfurt am Main: Fischer.

Van der Waerden, B. L. (1979). *Die Pythagoreer: Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft*. Zürich und München: Artemis.

Van der Waerden, B. L. (1956). *Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*. (H. Habicht, Übers.) Basel und Stuttgart: Birkhäuser.

Vitruv. (1991). *Zehn Bücher über Architektur* (5. Ausg.). (C. Fensterbusch, Übers.) Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Vogel, K. (1959). *Vorgriechische Mathematik II: Die Mathematik der Babylonier*. Hannover und Paderborn: Hermann Schroedel.

Wußing, H. (2008). *6000 Jahre Mathematik: Eine kulturgeschichtliche Zeitreise - 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton*. Berlin; Heidelberg: Springer.

Wussing, H. (1965). *Mathematik in der Antike, Mathematik in der Periode der Sklavenhaltergesellschaft* (2. Ausg.). Leipzig: B.G.Teubner.

ONLINERESSOURCEN

http://3.bp.blogspot.com/_Lu0JxT9wu9Y/TUBFN8-3GQI/AAAAAAAAACeg/xjVerx1T2U8/s1600/Archimedes.gif.jpeg Abgerufen am 14. März 2017 von

<http://greekaphrodite.weebly.com/uploads/1/6/9/1/16911922/7420185.jpg> Abgerufen am 14. März 2017 von

<http://mathground.net/wp-content/uploads/2014/07/Euclid-of-alexandria-prover-of-math.jpg> Abgerufen am 14. März 2017 von

<http://scihi.org/wp-content/uploads/2015/01/Euklid.jpg> Abgerufen am 14. März 2017 von

<http://totallyhistory.com/wp-content/uploads/2013/07/Pythagoras.jpg> Abgerufen am 14. März 2017 von

<http://www.bodrumpages.com/deutsch/Milet.html> Abgerufen am 14. April 2017 von

http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/vhb/geometrie/dreiecke/beweise/drset_baswi.html Abgerufen am 6. April 2017 von

<http://www.hermes-press.com/Pythagoras-Knapp.gif> Abgerufen am 14. März 2017 von

<http://www.iep.utm.edu/dioglaer/> Abgerufen am 10. April 2017 von

<http://www.iep.utm.edu/wp-content/media/thales.jpg> Abgerufen am 14. März 2017 von

http://www.math.nyu.edu/~crrorres/Archimedes/Pictures/Chocolate_Card/Chocolate_card_600dpi.jpg Abgerufen am 14. März 2017 von

<http://www.math.nyu.edu/~crrorres/Archimedes/Death/DeathMosaicBlack.jpg> Abgerufen am 14. April 2017 von

<http://www.navigator-allgemeinwissen.de/>.....Abgerufen am 14. April 2017 von
<http://www.navigator-allgemeinwissen.de/die-wichtigsten-fragen-und-antworten-zur-weltgeschichte/fruehe-hochkulturen-3000-bis-700-vchr/mesopotamien/babylonier/2164-was-sind-babylon-das-babylonische-reich-und-wer-war-hammurabi.html>

<http://www.rfwalter.net/>.....Abgerufen am 6. April 2017 von
<http://www.rfwalter.net/geo/ks.htm>

<http://www.sagen.at/>.....Abgerufen am 17. April 2017 von
http://www.sagen.at/texte/sagen/sagen_klassisches_altertum/gustav_schwab/teil_1/kadmos.html

<https://archive.org/>.....Abgerufen am 14. April 2017 von
<https://archive.org/stream/TzetzesCHILIADES/Chiliades#page/n39/mode/2up>

<https://woerterbuch-altgriechisch-latein.com/>.....Abgerufen am 25. April 2017 von
<https://woerterbuch-altgriechisch-latein.com/>

<https://www.britannica.com/>.....Abgerufen am 27. April 2017 von
<https://www.britannica.com/biography/Homer-Greek-poet>

<https://www.stepmap.de/>.....Abgerufen am 14. März 2017 von
<https://www.stepmap.de/landkarte/pythagoras-1266785.png>

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Alle Bilder des Abbildungsverzeichnisses, bei denen keine Quelle angegeben ist, wurden von der Autorin der vorliegenden Arbeit erstellt. Die Werke, die zur Erstellung als Vorbild dienten, sind im Fließtext oder in einer Fußnote angegeben.

Abbildung 1: (Van der Waerden, Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, 1956, S. 75).....	9
Abbildung 2: (Van der Waerden, Erwachende Wissenschaft: ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, 1956, S. 75).....	9
Abbildung 3: Euklid Bild (http://scihi.org/)	13
Abbildung 4: Euklid Statue (http://mathground.net/)	13
Abbildung 5: Thales Bild (http://greekaphrodite.weebly.com/)	17
Abbildung 6: Thales Statue (http://www.iep.utm.edu/Bild)	17
Abbildung 7: Die „thaletische Grundfigur“ (Becker, 1957, S. 38)	26
Abbildung 8: (Scriba & Schreiber, 2002, S. 33) Abbildung 9.....	27
Abbildung 10	28
Abbildung 11	29
Abbildung 12	29
Abbildung 13: BM85194 (Neugebauer, Mathematische Keilschrift-Texte, Zweiter Teil: Register, Glossar, Nachträge, Tafeln, 1935, S. BM 85194, Tafel 6).....	32
Abbildung 14: (Vogel, 1959, S. 16)	33
Abbildung 15	34
Abbildung 16	36
Abbildung 17: Pythagoras Bild (http://www.hermes-press.com/).....	38

Abbildung 18: Pythagoras Statue (http://totallyhistory.com/)	38
Abbildung 19: Pythagoras Reise (https://www.stepmap.de/),.....	41
Abbildung 20	48
Abbildung 21	49
Abbildung 22	50
Abbildung 23	50
Abbildung 24	51
Abbildung 25	52
Abbildung 26	53
Abbildung 27	55
Abbildung 28	57
Abbildung 29	59
Abbildung 31	61
Abbildung 32	61
Abbildung 30	61
Abbildung 33: altägyptische Seilkonstruktion zum Vermessen von Flächen entlang des Nils (Lehmann S.49).....	63
Abbildung 34: Abbildung der Tontafel Plimpton 322 (Vogel, S.38)	65
Abbildung 35: erstellt anhand (Lehmann, 1994, S. 113)	69
Abbildung 36: Bild Archimedes: (http://www.math.nyu.edu/Bild).....	70
Abbildung 37: Statue Archimedes: (http://3.bp.blogspot.com/).....	70
Abbildung 38 - Herculaneum Mosaik: Sterbeszene Archimedes.....	75

Abbildung 39	83
Abbildung 40	84
Abbildung 41	85
Abbildung 42	86
Abbildung 43	87
Abbildung 44	88
Abbildung 45	88
Abbildung 46	89
Abbildung 47	90
Abbildung 49	91
Abbildung 48	91
Abbildung 50	92
Abbildung 51	92
Abbildung 52	94
Abbildung 53 - Bild selbst erstellt anhand (Lehmann, 1994, S. 49)	98

Katharina Kausel, Witthauergasse 22/7, 1180 Wien

„Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst habe, dass ich die verwendeten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben habe und dass ich die Stellen der Arbeit – einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen –, die anderen Werken oder dem Internet im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.“

Wien, 11.05.2017
