



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

# DIPLOMARBEIT

## Effekte der Automatisierung auf Wirtschaftswachstum und Lohnentwicklung

Ausgeführt am Institut für  
Stochastik und Wirtschaftsmathematik  
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von  
Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Alexia Fürnkranz-Prskawetz  
und  
Univ.Prof. Mag. Mag. Dr. Klaus Prettnner

durch

CLEMENS LANKISCH  
Julius Raabgasse 2  
2381 Laab im Walde

Wien, 16. Mai 2017



# Abstract

Neue technologische Entwicklungen ermöglichen die Automatisierung von Bereichen, in denen bisher noch Arbeitskräfte benötigt wurden. In dieser Arbeit werden die Auswirkungen der Automatisierung auf Wirtschaftswachstum und Löhne untersucht. Dazu werden verschiedene Wachstumsmodelle betrachtet: (1) Ein Solow-Modell von Prettnner (2016); (2) ein Ramsey-Modell von Steigum (2011); (3) eine Erweiterung des Modells von Prettnner (2016); (4) ein OLG-Modell. In allen Modellen kommen “Roboter” als zweite Kapitalart vor. In (3) und (4) werden zusätzlich zwei verschiedene Skill-Gruppen eingeführt, die mit “skilled” bzw. “unskilled worker” bezeichnet werden. Die Modelle (1) bis (3) zeigen, dass Roboter langanhaltendes Wirtschaftswachstum auslösen können. Das mögliche Wachstum hängt unter anderem negativ von der Bevölkerungswachstumsrate und positiv von der Effizienz von Robotern ab. In (4) wird allerdings gezeigt, dass durch Automatisierung kein Wachstum zustande kommen kann. Mit den Modellen (3) und (4) wird gezeigt, dass Roboter besonders für “unskilled worker” problematisch sind, während “skilled worker” sogar profitieren können. Roboter erklären nicht nur den Anstieg der “skill premium”, sondern auch weshalb die Reallöhne von schlechter ausgebildeten Arbeitern in den letzten Jahrzehnten gesunken sind.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abstract</b>	<b>i</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Solow-Modell mit Robotern</b>	<b>5</b>
2.1 Annahmen . . . . .	5
2.2 Das Modell . . . . .	6
2.3 Zusammenfassung . . . . .	9
<b>3 Ramsey-Modell mit Robotern</b>	<b>11</b>
3.1 Annahmen . . . . .	11
3.2 Das Modell . . . . .	11
3.2.1 Produktionssektor . . . . .	11
3.2.2 Haushalte . . . . .	14
3.3 Optimales Kontrollproblem . . . . .	14
3.3.1 Perfekte Substitution $\gamma = 1$ . . . . .	15
3.3.2 Imperfekte Substitution $\gamma < 1$ . . . . .	18
3.4 Zusammenfassung . . . . .	19
<b>4 Solow-Modell mit Robotern und zwei Skill-Gruppen</b>	<b>21</b>
4.1 Annahmen . . . . .	21
4.2 Das Modell . . . . .	22
4.3 Steady States und Balanced Growth Paths . . . . .	23
4.3.1 Steady States . . . . .	23
4.3.2 Balanced Growth Path . . . . .	27
4.4 Roboter und Löhne . . . . .	29
4.5 Simulationen und numerische Ergebnisse . . . . .	32
4.6 Zusammenfassung . . . . .	44

<b>5</b>	<b>OLG Modell mit Robotern und zwei Skill-Gruppen</b>	<b>45</b>
5.1	Annahmen . . . . .	45
5.2	Das Modell . . . . .	46
5.2.1	Haushalte . . . . .	46
5.2.2	Produktionssektor . . . . .	47
5.3	Steady States und Wachstum . . . . .	48
5.3.1	Steady State . . . . .	48
5.3.2	Wachstum . . . . .	50
5.4	Roboter und Löhne . . . . .	51
5.5	Simulationen und numerische Ergebnisse . . . . .	51
5.6	Zusammenfassung . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Fazit</b>	<b>59</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>62</b>





# Kapitel 1

## Einleitung

Automatisierung, Roboter oder Industrie 4.0 sind nur einige Schlagworte, die fallen, wenn es um den Arbeitsmarkt und dessen Zukunft geht. In diesem Zusammenhang wird die Frage gestellt, ob und wie weit Maschinen menschliche Arbeitskraft in Zukunft ersetzen bzw. überflüssig machen können und wie stark die Löhne darunter leiden werden. Optimistischer gesehen kann man aber auch fragen, ob darin nicht auch Chancen liegen. In Benzell et. al. (2015) wird die folgende Frage gestellt:

“Will human replacement [...] deliver an economic utopia with smart machines satisfying our every material need? Or will leave us earning too little to purchase the products our smart machines can make?” (Benzell et. al., 2015, Seite 3)

Die Frage wird von den Autoren damit beantwortet, dass der Prozess auf jeden Fall von den richtigen politischen Maßnahmen begleitet werden muss.

Je nach Schätzungen sind es sogar über 50 Prozent der Jobs, die von mittelfristiger Automatisierung betroffen wären (Frey und Osborne, 2013 oder Manyika et. al., 2017). Tatsächlich gibt es einige technologische Neuerungen, die genau dazu führen: Autofirmen oder auch Google und Uber testen selbstfahrende Autos, die ohne menschlichen Fahrer auskommen sollen. Amazon entwickelt Drohnen, die in Zukunft Pakete liefern sollen und in Dubai wurden in diesem Jahr sogar Taxi-Drohnen getestet. In Fast-Food Restaurants kann nicht mehr nur an der Kassa bestellt werden, sondern auch über einen Automaten. Zusätzlich werden auch teilweise Burger von Automaten hergestellt.

Laut Frey und Osborne (2013), die in ihrer Studie verschiedene Berufe in Risikogruppen einteilen, sind 47 Prozent der Arbeiter einem hohen Risiko ausgesetzt, automatisiert zu werden. So könnten bald unter anderem LKW-Fahren oder medizinische Diagnosen von Robotern gemacht werden. Die Autoren betonen aber, dass es sich nicht um die Anzahl der tatsächlich substituierten Arbeitsplätze handelt. Vielmehr handelt es sich um die technologische Möglichkeit, die ausgedrückt wird. Bevor eine Automatisierung durch-

geführt wird, müssen auch noch andere Faktoren berücksichtigt werden, z.B. Kosten und Politik.

Die Studie von Frey und Osborne (2013) wurde von Arnzt, Gregory und Zierahn (2016) kritisiert, da das Risiko zu hoch geschätzt worden sei. Bei dem Ansatz wird nicht zwischen verschiedenen Tasks unterschieden - selbst bei Berufsgruppen, die hohem Risiko ausgesetzt sind, könnten oft nicht alle Tätigkeiten von Robotern übernommen werden, weshalb nicht alle Arbeitsplätze dieses Berufs betroffen wären. In ihrem Papier kommen Arnzt, Gregory und Zierahn zu dem Ergebnis, dass in der OECD durchschnittlich 9 Prozent betroffen wären - in Österreich 12. Außerdem würden durch neue Technologien auch neue Jobs geschaffen werden.

Dennoch gibt es auch weitere Studien, die das Potenzial für Automatisierung in der Größenordnung von Frey und Osborne sehen. In ihrem Report kommen Manyika et. al. (2017) zu dem Schluss, dass in den Vereinigten Staaten insgesamt bis zu 51 Prozent aller Tasks durch Roboter ersetzt werden können. Auch wenn nicht alle Jobs abgeschafft werden, so können in 60 Prozent der heutigen Berufe mindestens 30 Prozent automatisiert werden. Sie weisen aber auch darauf hin, dass Roboter zu einem weltweit höheren Wirtschaftswachstum führen können.

Ebenfalls zu einem deutlich negativen Ergebnis für Beschäftigungsquote und Löhne kommen Acemoglu und Restrepo (2017). In einem Modell ohne Handel sinkt die Beschäftigungsquote mit jedem zusätzlichem Roboter pro 1000 Arbeiter um 0.37 Prozentpunkte, die Löhne um 0.73 Prozent. In einem Modell mit Handel sind die Werte etwas geringer, da durch einen Anstieg der Roboter mehr exportiert wird.

Die Automatisierung bringt aber nicht nur negative Effekte mit sich. Prettner (2016) und Steigum (2011) zeigen auf, dass dadurch Potenzial für langfristiges positives Wirtschaftswachstum geschaffen wird. Allerdings kommt es auch dabei zu einem Sinken des Anteils des Arbeitseinkommens (vgl. Prettner, 2016).

Ein weiterer positiver Effekt wird in einem Artikel des Economist (Economist, 2017a) gezeigt. Dieser berichtet davon, dass Adidas eine Schuhfabrik in Deutschland baut, in der fast alles automatisiert ist. Da aber nicht alle Schritte von Robotern ausgeführt werden, entstehen dort neue Jobs in einer Branche, in der bisher die Produktion in Billiglohnländern ausgelagert wurde. Der Grund für die neue Fabrik liegt aber nicht nur in der Einsparung von Lohnkosten, sondern auch in der Verkürzung der Lieferkette.

Auch wenn sich die Studien in der Höhe des Automatisierungspotenzials unterscheiden, so sind sich alle Autoren einig, dass besonders schlecht ausgebildete Arbeitskräfte zu den Verlierern zählen werden. Es sollen in Zukunft vor allem "einfache" Tätigkeiten von

Roboter übernommen werden, womit jene Arbeiter von möglichen Lohnsenkungen oder Arbeitslosigkeit stärker betroffen wären. Dies führe zu einem weiteren Ansteigen der Einkommensunterschiede und muss von politischen Maßnahmen begleitet werden.

Deswegen wird in dieser Arbeit der Fokus auf Modelle gelegt, die zwischen gut und schlecht ausgebildeten Arbeitskräften unterscheiden. Diese werden im Folgenden als “skilled” bzw. “unskilled worker” bezeichnet. In den Modellen werden außerdem zwei verschiedene Arten von Kapital betrachtet (vgl. DeCanio, 2016, Prettner, 2016 oder Steigum, 2011): Die erste Art ist “(herkömmliches physisches) Kapital” oder auch “Maschinen”. Dieses erhöht immer die Produktivität aller Arbeiter und kann Menschen nur bedingt substituieren. Die andere stellt Automatisierungskapital dar, das sich dadurch auszeichnet, dass es teilweise ein perfektes Substitut für Arbeitskräfte ist und diese ersetzen kann. Es wird in der Arbeit durchgängig mit “Roboter” bezeichnet, obwohl es in der Realität die verschiedensten Formen von Kapital geben kann, welche Arbeit substituieren (vgl. Acemoglu und Restrepo, 2017, welche z.B. “Software und andere Maschinen” erwähnen). In der Realität ist die Grenze zwischen diesen Arten nicht immer ganz eindeutig und schwimmt oft. Auch “normale” Maschinen können den Einsatz von Arbeitskraft reduzieren und es gibt auch Roboter, die eben nicht ohne menschliche Arbeitskraft auskommen. Obwohl deswegen auch weitere Unterscheidungen möglich wären, werden hier zur Vereinfachung nur diese zwei Formen betrachtet.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: In Kapitel 2 wird das Modell von Prettner (2016) kurz besprochen, in dem Roboter in ein Solow-Modell eingeführt werden und in Kapitel 3 jenes von Steigum (2011), in dem ein Ramsey-Modell mit Robotern betrachtet wird. In Kapitel 4 wird das erste Modell erweitert, sodass zwischen “skilled” und “unskilled worker” unterschieden wird. Es wird angenommen, dass Roboter ein perfektes Substitut für “unskilled worker” sind, aber nur ein imperfektes für “skilled worker”. Das stellt natürlich eine Vereinfachung dar, spiegelt aber die Tatsache wieder, dass vor allem schlechter ausgebildete Arbeiter durch Automatisierung ersetzt werden. In Kapitel 5 folgt ein OLG-Modell mit Robotern sowie “skilled” und “unskilled worker”. Die Annahmen an die Substituierbarkeit sind dabei wie in Kapitel 4. Diese zwei Modelle liefern unter anderem eine Erklärung dafür, dass die Löhne der “unskilled worker” im Vergleich mit jenen der “skilled worker” in den letzten Jahrzehnten gesunken sind. Insbesondere können sie auch zeigen, dass durch die Einführung von Automatisierung diese Löhne auch real sinken, was z.B. mit dem “Canonical Model” aus Acemoglu und Autor (2012) bzw. Goldin und Katz (2009) nicht erklärt werden kann. In Kapitel 6 folgt ein Vergleich der verschiedenen Modelle und eine Zusammenfassung.



# Kapitel 2

## Solow-Modell mit Robotern

### 2.1 Annahmen

Das folgende Modell basiert auf Prettner (2016) und ist ein guter Ausgangspunkt für weitere Überlegungen. Es gibt verschiedene Produktionsfaktoren, die benötigt werden, um den aggregierten Output herzustellen. Wie im ursprünglichen Solow-Modell existieren Arbeitskraft und “herkömmliches” physisches Kapital. Zusätzlich wird hier Automatisierung in Form von “Robotern” eingeführt. Diese könnten zwar auch als physisches Kapital angesehen werden, allerdings haben diese andere Eigenschaften, weswegen die Unterscheidung überhaupt notwendig wird:

Maschinen erhöhen immer die Produktivität von Menschen, können diese aber nur imperfekt ersetzen. Roboter sind perfekte Substitute und verringern immer die Notwendigkeit menschlicher Arbeitskraft. Diese Annahme ist in der Realität nicht immer ganz erfüllt, da es einerseits Tätigkeiten gibt, die von Menschen besser ausgeführt werden können und andererseits solche, die von Robotern um ein Vielfaches effizienter durchgeführt werden können (vgl. Steigum, 2011). Dennoch ist es sinnvoll mit Robotern eine zweite Art von Kapital einzuführen, die sich mathematisch durch eine höhere Substitutionselastizität mit Arbeitskraft unterscheidet.

Da vom klassischen Solow-Modell ausgegangen wird, handelt es sich nicht um ein mikrofundiertes Modell. Das Verhalten der Haushalte wird nicht modelliert und es wird ausschließlich der aggregierte Produktionssektor betrachtet, bei dem es sich um einen vollständigen Wettbewerbsmarkt handeln soll. Die Sparquote ist damit ein exogener Parameter.

## 2.2 Das Modell

Der aggregierte Produktionssektor und der Gesamtoutput werden durch folgende Produktionsfunktion dargestellt, wobei die oft im Solow-Modell verwendete Cobb-Douglas Funktion um den neuen Produktionsfaktor erweitert wird und somit zu einer geschachtelten CES-Funktion wird:

$$Y(t) = A(t)[L(t) + P(t)]^{1-\alpha}K(t)^\alpha, \quad (2.1)$$

wobei  $Y(t)$  den Gesamtoutput,  $L(t)$  das aggregierte Arbeitsangebot,  $K(t)$  das physische Kapital und  $P(t)$  die Roboter beschreibt. Roboter bilden gemeinsam mit dem Arbeitsangebot einen zusammengesetzten Produktionsfaktor für die Cobb-Douglas Funktion. Aufgrund des linearen Zusammenhangs sind Arbeitskräfte und Roboter perfekte Substitute. Maschinen können Roboter und Arbeiter imperfekt substituieren. Bei  $\alpha$  handelt es sich um die Produktionselastizität des Kapital, bei  $1 - \alpha$  um jene des zusammengesetzten Produktionsfaktors. Die einzelnen Produktionselastizitäten der Arbeitskraft und Roboter sind dadurch kleiner  $1 - \alpha$ .  $A(t)$  ist der technologische Fortschritt und wird im Folgenden auf 1 normiert. Dadurch sollen exogene Wachstumseffekte, die nur auf Annahmen bezüglich der zeitlichen Entwicklung von  $A(t)$  basieren, ausgeschlossen werden.

Von der Produktion  $Y(t)$  wird der Anteil  $s$  gespart, wobei es, wie bei der Erweiterung des Solow-Modells mit Humankapital (vgl. Mankiw, Romer und Weil, 1992), auch hier zwei Investitionsmöglichkeiten gibt - herkömmliches Kapital und Roboter. Der Anteil, der in ersteres fließt, wird mit  $s_M$  bezeichnet und ist ein exogener Parameter. Die Dynamik wird durch die folgenden zwei Differentialgleichungen beschrieben:

$$\dot{K}(t) = s_M s Y(t) - \delta K(t) = s_M s [L(t) + P(t)]^{1-\alpha} K(t)^\alpha - \delta K(t) \quad (2.2)$$

$$\dot{P}(t) = (1 - s_M) s Y(t) - \delta P(t) = (1 - s_M) s [L(t) + P(t)]^{1-\alpha} K(t)^\alpha - \delta P(t) \quad (2.3)$$

Für beide Arten von Kapital wird für die theoretischen Ergebnisse der gleiche Abschreibungsparameter  $\delta$  angenommen, was sicherlich eine Vereinfachung darstellt. Prettnner (2016) führt danach allerdings Simulationen durch, die zeigen, dass auch mit verschiedenen Parametern  $\delta_K$  und  $\delta_P$  die wesentlichen Ergebnisse erhalten bleiben.

Die Bevölkerung  $L(t)$  wächst mit Rate  $n$ , ist also nicht konstant. Deswegen ist es sinnvoll die Pro-Kopf Variablen zu betrachten, die mit dem jeweiligen Kleinbuchstaben bezeich-

net werden. Die Dynamik dieser Variablen lautet:

$$\dot{k}(t) = s_M s [1 + p(t)]^{1-\alpha} k(t)^\alpha - (\delta + n)k(t) \quad (2.4)$$

$$\dot{p}(t) = (1 - s_M) s [1 + p(t)]^{1-\alpha} k(t)^\alpha - (\delta + n)p(t) \quad (2.5)$$

Indem die Gleichungen durch  $k(t)$  bzw.  $p(t)$  dividiert werden, erhält man die Wachstumsraten der Pro-Kopf Variablen für Kapital und Roboter  $g_k(t) = \dot{k}(t)/k(t)$  und  $g_p(t) = \dot{p}(t)/p(t)$ :

$$g_k = s_M s \left[ \frac{1 + p(t)}{k(t)} \right]^{1-\alpha} - (\delta + n) \quad (2.6)$$

$$g_p = (1 - s_M) s \left[ \frac{1 + p(t)}{p(t)} \right]^{1-\alpha} \left[ \frac{k(t)}{p(t)} \right]^\alpha - (\delta + n) \quad (2.7)$$

Prettner (2016) zeigt, dass durch die Entwicklung von Robotern und Investition in diese das Pro-Kopf Wachstum langfristig positiv sein kann. Im Gegensatz zum herkömmlichen Solow-Modell ist dieses Wachstum nicht durch technologischen Fortschritt bedingt, der in diesem Modell nicht auftritt.

Da hier vor allem das langfristige Verhalten der Ökonomie von Interesse ist, wird nach Steady States und “Balanced Growth Paths” gesucht. Bei ersterem sind die Variablen konstant, bei zweiterem wachsen sie mit konstanter Rate. Neben dem trivialen Fall, in dem  $K = 0$  und  $P = 0$  gelten und das System für alle Zeit im Ursprung bleibt, gibt es in dem Modell genau zwei Möglichkeiten, die nicht gemeinsam auftreten können:

1. Es kommt zu einem Balanced Growth Path mit positiven Wachstum, wobei die Pro-Kopf Variablen alle mit der Rate  $g$  wachsen und

$$g = s \cdot s_M^\alpha (1 - s_M)^{1-\alpha} - \delta - n. \quad (2.8)$$

Insbesondere wachsen Output, physisches Kapital und Roboter (pro Arbeiter) mit der gleichen Rate. Wäre  $g$  aufgrund der Parametrisierung des Modells negativ, so tritt nicht das negative Wachstum, sondern der folgende zweite Fall auf:

2. Die Pro-Kopf Variablen sind konstant und wachsen nicht, die aggregierten Variablen wachsen daher mit der Rate des Bevölkerungswachstums  $n$ .

Gezeigt wird das durch Ableiten und Null setzen der Gleichungen (2.6) und (2.7), da die Wachstumsraten konstant sein sollen. Daraus folgt die Existenz eines Balanced Growth Paths mit

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{p}(t)}{1+p(t)} \approx \frac{\dot{p}(t)}{p(t)},$$

wobei die letzte Approximation nur für “große” Werte von  $p$  gültig ist. Daraus folgt, dass die beiden Variablen auf dem Balanced Growth Path mit der gleichen Rate wachsen. Benötigt wird das Verhältnis der beiden Kapitalarten, welches als  $\xi := p(t)/k(t)$  definiert wird, und die beiden Approximationen  $\xi \approx (1+p)/k$  und  $(1+p)/p \approx 1$ . Damit folgt durch Einsetzen von  $\xi$  in die Gleichungen (2.6), (2.7) und durch Gleichsetzen dieser beiden Gleichungen, dass

$$\xi = \frac{1 - s_M}{s_M}$$

Durch Einsetzen in eine der beiden Wachstumsraten folgt dann letztendlich die obige Gleichung (2.8) für die Wachstumsrate, die damit positiv sein kann. Betont werden muss, dass für die Gültigkeit dieser Rate Approximationen benötigt wurden, die nur für “große” Werte von  $p$  erfüllt sind. Kommt es in Gleichung (2.8) zu einer negativen Wachstumsrate, so sind diese Approximationen und damit Gleichung (2.8) selbst nicht mehr länger gültig. Die beiden Kapitalarten nähern sich dann einem Steady State an, in dem die Pro-Kopf Variablen konstant sind.

Laut Prettnner (2016) kann für durchaus plausible Parameterwerte der Balanced Growth Path eintreten, sodass es zu einem positiven Wirtschaftswachstum kommen kann. Für diesen Fall gelten dann folgende Ergebnisse:

1. Das Wirtschaftswachstum sinkt bei einer ceteris paribus Erhöhung des Bevölkerungswachstums.
2. Die Wachstumsrate steigt mit  $s_M$ , solange dieses größer als die Produktionselastizität von Kapital  $\alpha$  ist.
3. Der Anteil der Wirtschaft, der durch Arbeitskraft zustande kommt (=“labor share”), nimmt mit einer höheren Zahl an Robotern ab.

Der erste Punkt ist sofort in Gleichung (2.8) zu sehen, da  $g$  negativ von  $n$  abhängt. Der

zweite Punkt wird durch Ableiten der Wachstumsrate nach  $s_M$  gezeigt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial s_M} &= s s_M^{\alpha-1} (1 - s_M)^{-\alpha} [\alpha(1 - s_M) - s_M(1 - \alpha)] \\ &= s s_M^{\alpha-1} (1 - s_M)^{-\alpha} (\alpha - s_M)\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Gültigkeit des zweiten Punktes. Für den dritten wird der Lohn berechnet, der mit der Grenzproduktivität von Arbeit übereinstimmt:

$$w(t) = \frac{\partial Y}{\partial L} = (1 - \alpha) \frac{Y(t)}{L(t) + P(t)}$$

Damit folgt für den Anteil des Outputs, der durch Arbeitskraft  $wL/Y$  entsteht:

$$\frac{w(t) \cdot L(t)}{Y(t)} = (1 - \alpha) \frac{L(t)}{L(t) + P(t)}$$

Daraus ist leicht zu sehen, dass der Anteil mit wachsender Zahl an Robotern  $P(t)$  immer kleiner wird, womit auch der dritte Punkt gezeigt ist.

## 2.3 Zusammenfassung

Die Erweiterung des Solow-Modells durch Roboter zeigt, dass Automatisierung zu langfristigem Wirtschaftswachstum führen kann. Dies wird allerdings von einem Sinken des Arbeitseinkommens begleitet. Das Modell kann laut Prettnner (2016) 14 Prozent des Rückgangs im Arbeitseinkommen in den letzten Jahrzehnten erklären. Es wird gefolgert (wie auch von andere Autoren), dass besonders Kapitaleigentümer die Gewinner bzw. Arbeiter die Verlierer sind.



# Kapitel 3

## Ramsey-Modell mit Robotern

### 3.1 Annahmen

In diesem Kapitel wird ein Modell von Steigum (2011) vorgestellt. Auch hier werden Roboter in ein Wachstumsmodell eingeführt. Der größte Unterschied zum vorherigen Kapitel besteht darin, dass es sich um ein mikrofundiertes Modell handelt - die Sparquote ist nicht als exogener Parameter festgelegt, sondern stammt aus der Lösung eines Nutzenmaximierungsproblems der Haushalte. Der Produktionssektor ist wieder ein vollständiger Wettbewerbsmarkt und wird ähnlich wie vorher modelliert. Die Möglichkeit zur Substitution zwischen Robotern und Menschen muss nicht unbedingt perfekt sein, sondern kann über einen Parameter gesteuert werden. Zusätzlich wird durch die Annahme einer No-Arbitrage-Condition die Dynamik des Modells mit nur einer Differentialgleichung beschrieben, obwohl es wieder zwei Sparformen gibt.

### 3.2 Das Modell

#### 3.2.1 Produktionssektor

Zunächst werden einige Annahmen getroffen, die ökonomisch sinnvoll sind. Für eine Produktionsfunktion mit physischem Kapital  $K$ , Robotern  $P$  und Arbeitskraft  $L$  soll gelten, dass

1. alle Grenzprodukte positiv sind und eine ceteris paribus Erhöhung eines Faktors immer zu höherem Output führt.
2. eine Erhöhung des physischen Kapitals die Grenzproduktivität von Menschen und Robotern erhöht bzw. eine Erhöhung von Menschen und Robotern die Grenzproduktivität des physischen Kapitals erhöht.

3. durch eine Erhöhung von Robotern die Grenzproduktivität von Arbeitskraft sinkt und umgekehrt.

Die folgende Produktionsfunktion erfüllt diese Annahmen und lautet, nachdem zur besseren Übersicht der Zeitindex weggelassen wurde:

$$Y = AK^\alpha [(1 - \beta)L^\gamma + \beta(\epsilon P)^\gamma]^{\frac{1-\alpha}{\gamma}} \quad (3.1)$$

$A$  bezeichnet den technologischen Fortschritt,  $K$  physisches Kapital,  $P$  Roboter und  $L$  das Arbeitsangebot<sup>1</sup>. Diese letzten zwei Faktoren werden durch eine CES-Produktionsfunktion verknüpft. Wichtig für diese Art von Funktion ist der Parameter  $\gamma$ , der angibt, wie gut die zwei Güter substituierbar sind. Es soll  $0 \leq \gamma \leq 1$  gelten. Gilt  $\gamma = 1$  sind sie perfekt substituierbar und für kleineres  $\gamma$  nur imperfekt. Bei  $\epsilon$  und  $\beta$  handelt es sich um Gewichte bzw. Parameter, die angeben, wie wichtig der Faktor für die Produktion ist. Es wird  $\beta = \mu/(1-\alpha)$  gesetzt, wobei mit  $\mu \in (0, 1-\alpha)$  gilt, dass beide Gewichte  $\beta$  und  $1-\beta$  zwischen 0 und 1 liegen. Im Gegensatz zu Prettner (2016) wird also nicht nur der Fall der perfekten Substitution betrachtet, sondern eine allgemeinere Form der Produktionsfunktion. Das gesamte Ergebnis dieser CES-Funktion bildet einen zusammengesetzten Produktionsfaktor und wird mit physischem Kapital zu einer Cobb-Douglas Funktion kombiniert.

Die Produktion wird in Pro-Kopf Output umgerechnet:

$$y = Ak^\alpha [(1 - \beta) + \beta(\epsilon p)^\gamma]^{\frac{1-\alpha}{\gamma}} \quad (3.2)$$

Da im Produktionssektor vollständiger Wettbewerb herrscht, sollen alle Produktionsfaktoren mit ihrem jeweiligen Grenzprodukt entlohnt werden. Außerdem wird angenommen, dass die sogenannte No-Arbitrage-Condition erfüllt ist. Diese besagt, dass die Zinssätze für physisches Kapital und Roboter gleich sind. Wäre dies nicht der Fall und wäre zum Beispiel der Zinssatz für Maschinen höher, so würden optimierende Haushalte stärker in Maschinen investieren. Durch die gestiegene Nachfrage nach Maschinen sinkt deren Zinssatz und durch die gesunkene Nachfrage nach Robotern steigt ihrer so lange bis beide gleich sind. Die Zinssätze bzw. Grenzprodukte lauten:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha Ak^{\alpha-1} [(1 - \beta) + \beta(\epsilon p)^\gamma]^{\frac{1-\alpha}{\gamma}} = \alpha \frac{y}{k} \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>Die Variablen haben in dieser Arbeit teilweise andere Bezeichnungen als in Steigum (2011). So werden dort beispielsweise Roboter mit  $K_R$  bezeichnet. Die Notation wurde geändert, um sie in dieser Arbeit für alle Modelle einheitlich zu gestalten.

$$\frac{\partial Y}{\partial P} = Ak^\alpha(1-\alpha) [(1-\beta) + \beta(\epsilon p)^\gamma]^{\frac{1-\alpha}{\gamma}-1} \beta(\epsilon p)^{\gamma-1} \epsilon \quad (3.4)$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ableitungen folgt, dass  $k$  als Funktion von  $p$  dargestellt werden kann:

$$k = \frac{\alpha}{(1-\alpha)\beta\epsilon} \frac{(1-\beta) + \beta(\epsilon p)^\gamma}{(\epsilon p)^{\gamma-1}} \quad (3.5)$$

Dadurch kann das gesamte Pro-Kopf Kapital  $x := k + p$  als Funktion von  $p$  beschrieben werden:

$$\begin{aligned} x &= p + k \\ &= p + \frac{\alpha}{(1-\alpha)\beta\epsilon} \frac{(1-\beta) + \beta(\epsilon p)^\gamma}{(\epsilon p)^{\gamma-1}} \\ &= p + \frac{\alpha}{\mu} (\beta p + (1-\beta)\epsilon^{-\gamma} p^{1-\gamma}) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} p + \frac{\alpha}{\mu} \frac{1-\alpha-\mu}{1-\alpha} \epsilon^{-\gamma} p^{1-\gamma} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dadurch kommt das System im Gegensatz zum vorherigen Modell mit nur einer Differentialgleichung aus, sodass im folgenden meist nur von Kapital die Rede ist und nicht mehr explizit zwischen Maschinen und Robotern unterschieden wird. Wächst das gesamte Kapital, so ist wegen Gleichung (3.5) klar, dass beide Arten von Kapital wachsen. Die Dynamik wird durch

$$\dot{x} = (r(x) - n)x - c + w(x) \quad (3.7)$$

beschrieben. Das gesamte Einkommen, welches aus Arbeit und Erträgen durch Maschinen und Roboter stammt und nicht konsumiert wird, wird in Kapital investiert. Der Term  $-nx$  repräsentiert den sogenannten “capital dilution effect”. Dieser besagt, dass bei positiven Bevölkerungswachstum die Pro-Kopf Ausstattung an Kapital abnimmt, wenn nicht ausreichend gegengesteuert und investiert wird. Zu beachten ist, dass der Zinssatz  $r(x)$  und auch der Lohn  $w(x)$  im Allgemeinen vom Kapital  $x$  abhängen. Denn für den Nettozinssatz  $r$  gilt  $\partial Y/\partial K = r + \delta$ , da langfristig keine Profite existieren. Einsetzen von  $k$  aus der No-Arbitrage-Condition (3.5) in die Gleichung für den Zinssatz (3.3) ergibt:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha \frac{y}{k} = r + \delta = A\alpha \left( \frac{\alpha}{(1-\alpha)\beta\epsilon} \right)^{\alpha-1} \left( \frac{(1-\beta) + \beta(\epsilon p)^\gamma}{(\epsilon p)^{\gamma-1}} \right)^{\alpha-1} [(1-\beta) + \beta(\epsilon p)^\gamma]^{\frac{1-\alpha}{\gamma}}$$

$$= A\alpha^\alpha(\mu\epsilon)^{1-\alpha} \left( \frac{\mu}{1-\alpha} + \frac{1-\alpha-\mu}{1-\alpha}(\epsilon p)^{-\gamma} \right)^{\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma}} \quad (3.8)$$

Für den Lohn gilt  $w = \partial Y / \partial L$ , also

$$\begin{aligned} w &= AK^\alpha \frac{1-\alpha}{\gamma} [(1-\beta)L^\gamma + \beta(\epsilon P)^\gamma]^{-\frac{1-\alpha}{\gamma}-1} (1-\beta)\gamma L^{\gamma-1} \\ &= A(1-\alpha-\mu)k^\alpha [(1-\beta) + \beta(\epsilon p)^\gamma]^{\frac{1-\alpha}{\gamma}-1} \\ &= A(1-\alpha-\mu)\alpha^\alpha(\mu\epsilon)^{-\alpha} [(1-\beta) + \beta(\epsilon p)^\gamma]^{\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma}} (\epsilon p)^{(1-\gamma)\alpha} \\ &= A(1-\alpha-\mu)\alpha^\alpha(\mu\epsilon)^{-\alpha} (\epsilon p)^{1-\gamma} (\beta + (1-\beta)(\epsilon p)^{-\gamma})^{\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.2.2 Haushalte

Die Individuen bzw. Haushalte wachsen mit Rate  $n$ . Es handelt sich um homogene Haushalte, die sich alle gleich verhalten. Sie leisten einen fixen Beitrag auf dem Arbeitsmarkt für den sie den Lohn  $w$  bekommen. Sie müssen entscheiden, wann wie viel konsumiert bzw. gespart wird. Ihr Verhalten wird durch die Nutzenfunktion

$$U_0 = \int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-(\rho-n)t} dt, \quad (3.10)$$

modelliert, was eine CRRA-Nutzenfunktion darstellt (=constant relative risk aversion).  $\theta$  gibt das Maß der Risikoaversion an und soll zwischen 0 und 1 sein. Je größer  $\theta$  ist, desto mehr sind die Haushalte an Konsumglättung interessiert.  $\rho$  beschreibt die Zeitpräferenzrate. Je größer diese ist, desto mehr wird die Zukunft abdiskontiert. Da die Individuen auch den zukünftigen Nutzen ihrer Kinder berücksichtigen, wird zukünftiger Nutzen mit der Bevölkerungswachstumsrate  $n$  gewichtet.  $c(t)$  stellt den Konsum zum Zeitpunkt  $t$  dar.

Die so modellierten Haushalte versuchen ihren Gesamtnutzen unter Einhaltung einer Budgetrestriktion zu maximieren, weshalb im folgenden ein dynamisches Optimierungsproblem zu lösen ist.

## 3.3 Optimales Kontrollproblem

Durch die Lösung des Nutzenmaximierungsproblems wird der optimale Konsum und damit auch die optimale Ersparnis festgelegt. Obwohl es in diesem Modell zwei Sparformen

gibt, wird wegen Gleichung (3.6) nur eine Differentialgleichung benötigt. Das Optimierungsproblem wird hier zunächst formuliert, gelöst wird es in den folgenden Kapiteln:

$$\max_{c(\cdot)} \int_0^{\infty} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-(\rho-n)t} dt \quad (3.11)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\dot{x} = (r-n)x - c + w \quad (3.12)$$

$$x(0) = x_0 \quad (3.13)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x e^{-(r-n)t} = 0, \quad (3.14)$$

wobei bei allen Gleichungen zur besseren Übersicht der Zeitindex weggelassen wurde. Die erste Nebenbedingung beschreibt die Dynamik des Kapitalstocks, die zweite dessen Anfangsausstattung und die dritte die Transversalitätsbedingung. Beim Lösen des Problems ist zu beachten, dass der Zinssatz  $r$  und der Lohn  $w$  (im Allgemeinen) im Gleichgewicht, wenn auch die Produzentenseite berücksichtigt wird, vom Kapital abhängen. Die optimierenden Haushalte nehmen diese als gegeben an, da sie Preisnehmer sind und als einzelne keine Marktmacht haben. Mathematisch bedeutet das, dass bei der Kozustandsgleichung, in der die partielle Ableitung der Hamiltonfunktion nach dem Zustand  $x$  vorkommt, Zinssatz und Lohn als fix und somit von  $x$  unabhängig angesehen werden. Zuerst wird das Problem für den Fall der perfekten Substitution gelöst, danach für den allgemeinen, in dem Substitution nur imperfekt möglich ist.

### 3.3.1 Perfekte Substitution $\gamma = 1$

In diesem Fall hängen der Zinssatz und der Lohn nicht vom aktuellen Kapitalstock, sondern nur von den exogenen Parametern des Modells ab. Aus den Gleichungen (3.8) und (3.9) folgt:

$$r = A\alpha^\alpha (\mu\epsilon)^{1-\alpha} - \delta \quad (3.15)$$

$$w = A(1 - \alpha - \mu)\alpha^\alpha (\mu\epsilon)^{-\alpha} \quad (3.16)$$

Damit das Integral in Gleichung (3.11) endlich ist, wird angenommen, dass  $\rho > n$  und  $(r - \rho)/\theta < r - n$ .

Die Momentanwert-Hamiltonfunktion lautet (nachdem der Zeitparameter der Einfach-

heit halber weggelassen wurde)

$$\mathcal{H}(c, x, \lambda) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda[(r-n)x - c + w], \quad (3.17)$$

wobei  $\lambda$  die Kozustandsvariable oder der Schattenpreis des Kapitals ist.

Die optimale Kontrolle maximiert in jedem Zeitpunkt die Hamiltonfunktion. Um das Maximum zu berechnen, reicht die First-Order-Condition aus, da die Hamiltonfunktion konkav in  $c$  ist. Aus dieser folgt, dass  $\lambda = c^{-\theta}$  und weiter  $\dot{\lambda} = -\theta c^{-\theta-1} \dot{c}$ . Setzt man dies in die Gleichung für den Kozustand ein, so erhält man die klassische Euler-Gleichung:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r - \rho}{\theta} =: g \quad (3.18)$$

Diese gibt die Wachstumsrate des optimalen Konsumpfades an, ist identisch mit jener des ursprünglichen Ramsey-Modells und kann wie folgt interpretiert werden:

- Je höher der Zinssatz  $r$  ist, desto stärker wächst der Konsum im Laufe der Zeit. Individuen werden aufgrund des hohen Zinssatzes anfangs eher weniger konsumieren und in Kapital investieren, damit später mehr konsumiert werden kann.
- Je höher die Zeitpräferenzrate  $\rho$  ist, desto weniger wächst der Konsum oder er sinkt sogar. Da Individuen mehr Wert auf die Gegenwart legen, ist der Konsum anfangs höher. Es wird allerdings weniger investiert, sodass später weniger konsumiert werden kann.
- Je höher das Maß der Risikoaversion  $\theta$  ist, desto wichtiger ist für Individuen die Konsumglättung. Der absolute Wert der Wachstumsrate wird somit kleiner.

Nimmt man nun an, dass  $r > \rho$ , so kommt es in diesem Modell zu Wachstum des Konsums (und - wie gezeigt wird - auch des Kapitals). Da  $r$  nur von exogenen Parametern abhängt, liegt das nur an der Parametrisierung des Modells. Im Folgenden wird angenommen, dass die Ungleichung  $r > \rho$  tatsächlich gilt.

Aus der Transversalitätsbedingung folgt, dass der gesamte auf heute abdiskontierte Konsum gleich der Summe aller auf heute abdiskontierter Löhne und des Anfangskapitals  $x_0$  sein muss:

$$\int_0^{\infty} c(t) \cdot e^{-(r-n)t} dt = x_0 + \int_0^{\infty} w(t) \cdot e^{-(r-n)t} dt$$

Daraus folgt, dass

$$c_0 = (r - n - g) \left[ x_0 + \frac{w}{r - n} \right] \quad \text{und} \quad c(t) = c_0 e^{gt} \quad (3.19)$$

und weiter für das Pro-Kopf Kapital

$$\dot{x} = (r - n)x - (r - n - g) \left[ x_0 + \frac{w}{r - n} \right] e^{gt} + w. \quad (3.20)$$

Um die Lösung dieser Differentialgleichung zu berechnen wird eine Lösung des homogenen Teils und eine partikuläre Lösung des inhomogenen Teils benötigt. Die homogene Lösung lautet  $x_h(t) = B e^{(r-n)t}$ , wobei  $B$  ein beliebiger Parameter ist und später so gewählt werden muss, dass auch die Anfangsbedingung erfüllt ist. Die partikuläre Lösung erhält man mit Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned} x_{inh}(t) &= e^{(r-n)t} \cdot \int_0^t [-(r - n - g) \left( x_0 + \frac{w}{r - n} \right) e^{gs} + w] e^{-(r-n)s} ds \\ x_{inh}(t) &= x_0 (e^{gt} - e^{(r-n)t}) + \frac{w}{r - n} (e^{gt} - 1) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Damit ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = B e^{(r-n)t} + x_0 (e^{gt} - e^{(r-n)t}) + \frac{w}{r - n} (e^{gt} - 1) \quad (3.22)$$

Damit die Anfangsbedingung bei  $t = 0$  erfüllt ist, folgt  $B = 1$  und somit:

$$x(t) = \left( x_0 + \frac{w}{r - n} \right) e^{gt} - \frac{w}{r - n} \quad (3.23)$$

Für die Wachstumsrate des Kapitals gilt somit

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{g \left( x_0 + \frac{w}{r-n} \right) e^{gt}}{\left( x_0 + \frac{w}{r-n} \right) e^{gt} - \frac{w}{r-n}} = \frac{g}{1 - \frac{\frac{w}{r-n}}{x_0 + \frac{w}{r-n}} e^{-gt}}, \quad (3.24)$$

was für  $t \rightarrow \infty$  gegen die Wachstumsrate des Konsums  $g$  konvergiert.

Für den Pro-Kopf Output  $y$  gilt die Darstellung

$$y = (r + \delta)x + w. \quad (3.25)$$

Sie drückt aus, dass der Output dafür verwendet wird, um die Löhne, Zinsen und Abschreibungen zu bezahlen. Aus dieser Gleichung folgt analog, dass auch die Wachstumsrate des Outputs gegen  $g$  konvergiert.

Damit gilt im Fall der perfekten Substitution zwischen Arbeitern und Robotern, dass es zu positivem Wachstum des Outputs, des Kapitals und des Konsums kommt, sofern der Zinssatz  $r$  größer als die Zeitpräferenzrate  $\rho$  ist. Da der Zinssatz nur von exogenen Parametern abhängt und auch  $\rho$  exogen ist, hängt dies, wie bei Prettner (2016), alleine von der Parametrisierung des Modells ab.

Steigum (2011) zeigt außerdem, dass in einem einfacheren Modell ohne Mikrofundierung mit einer konstanten Sparrate eine positive Wachstumsrate vorkommen kann, was konsistent mit dem vorherigen Modell von Prettner (2016) ist.

### 3.3.2 Imperfekte Substitution $\gamma < 1$

Im Fall der imperfekten Substitution sind laut Steigum (2011) die folgenden drei verschiedene Fälle möglich:

1. Es existiert ein Steady State mit konstanten Pro-Kopf Variablen.
2. Die Pro-Kopf Variablen erreichen einen “Balanced Growth path”, auf dem die Wachstumsraten annähernd konstant und positiv sind.
3. Die Pro-Kopf Variablen wachsen, wobei die Wachstumsraten gegen 0 gehen. Es handelt sich aber nicht um einen Steady State, da die Variablen noch minimal steigen.

Wichtig ist hier, dass der Zinssatz  $r$  und der Lohn  $w$  vom Kapital  $x$  abhängen. Der Zinssatz sinkt mit steigendem Kapital und aus Gleichung (3.8) folgt:

$$r_\gamma := \lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = A\alpha^\alpha \epsilon^{1-\alpha} (1-\alpha)^{-\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma}} \mu^{\frac{1-\alpha}{\gamma}} - \delta \quad (3.26)$$

Dieser approximative Zinssatz ist wichtig für für die Fallunterscheidung.

#### 1. Fall: $r_\gamma < \rho$ :

Analoge Optimierung wie im Fall der perfekten Substitution führt zu einer analogen Euler-Gleichung, nur hängt der Zinssatz diesmal vom Kapital ab:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r(x) - \rho}{\theta} \quad (3.27)$$

Da der Zinssatz streng monoton fallend in  $x$  ist, sowie  $\lim_{x \rightarrow 0} r(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) < \rho$ , existiert nach dem Zwischenwertsatz ein eindeutiger Kapitalstock  $x^*$  mit  $\dot{c} = 0$ . Aus Gleichung (3.7) folgt sofort die Existenz eines dazugehörigen positiven Konsums, bei dem  $\dot{x} = 0$  und sich das System in einer Ruhelage befindet:

$$c^* = (r(x^*) - n)x^* + w(x^*) \quad (3.28)$$

2. Fall:  $r_\gamma > \rho$ :

Da die Wachstumsrate des Konsums aus (3.27) immer positiv ist, wächst der Konsum immerzu. Die Rate konvergiert gegen die folgende Rate  $g$ , weil  $r(x)$  gegen  $r_\gamma$  konvergiert:

$$g := \frac{r_\gamma - \rho}{\theta} > 0 \quad (3.29)$$

Wie im Fall der perfekten Substitution lässt sich zeigen, dass auch der Kapitalstock  $x$  und der Pro-Kopf Output  $y$  approximativ mit der Rate  $g$  wachsen.

3. Fall:  $r_\gamma = \rho$ :

Dieser Fall ist ähnlich zum vorherigen. Der Konsum wächst auch hier ständig, die Wachstumsrate konvergiert aber gegen 0 und das Wachstum wird immer kleiner.

Welcher Fall eintreten wird, hängt hier wiederum von den exogenen Parametern des Modells ab. Dazu gehören neben dem technologischen Level auch die Effizienz von Robotern und deren Abschreibungsrate. Wenn Roboter effizient genug sind, wird es zu Wachstum kommen, das nur durch den Einsatz von Robotern bedingt ist.

## 3.4 Zusammenfassung

Steigum (2011) zeigt, dass es auch im Ramsey-Modell zu Wachstum kommen kann. Dafür ist die Annahme der perfekten Substitution zwischen Arbeitern und Robotern nicht unbedingt notwendig. Es muss jedoch die Effizienz der Roboter hoch genug und die Abschreibungsrate nicht zu groß sein. Selbst wenn der Wachstumspfad noch nicht erreicht wäre, könnte dies etwa durch die Entwicklung von besseren Robotern möglich werden.



# Kapitel 4

## Solow-Modell mit Robotern und zwei Skill-Gruppen

### 4.1 Annahmen

Ausgangspunkt für dieses Modell ist das um Roboter erweiterte Solow-Modell aus Prettnner (2016), welches hier im Rahmen dieser Arbeit weiter entwickelt wurde. Zusätzlich zu Robotern, wird in dem Modell die Bevölkerung in zwei Gruppen eingeteilt. Diese werden im Folgenden mit “skilled” bzw. “unskilled worker” bezeichnet. Schlechter ausgebildete Arbeiter sollen durch Roboter besser substituiert werden als besser ausgebildete Arbeiter. Konkret wird im Modell angenommen, dass Roboter und “unskilled worker” perfekte Substitute sind. Roboter und “skilled worker” sind hingegen nur imperfekte Substitute. Der genaue Grad ihrer Substituierbarkeit ist über einen exogenen Modellparameter steuerbar.

In der Realität gibt es Arbeiten, die leichter von Robotern durchgeführt werden können als andere und manche gar nicht. Die Annahme von nur zwei Skill-Gruppen stellt natürlich eine Vereinfachung dar. Nicht berücksichtigt wird auch die Möglichkeit in seine Bildung bzw. Humankapital zu investieren, wodurch es z.B. möglich wäre, von einem schlecht ausgebildeten Arbeiter zu einem besser ausgebildeten aufzusteigen. Trotzdem gibt es hier im Modell nur diese zwei Arten von Arbeitern, da es als guter Anfangspunkt für weitere Analysen angesehen wird und eine komplexere Analyse den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

## 4.2 Das Modell

Um die obigen Annahmen zu erreichen, wird die Produktionsfunktion aus Kapitel 2 zu folgender geändert:

$$Y(t) = A(t) \left( [(1 - \beta)L_s(t)^\gamma + \beta(P(t) + L_u(t))^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{(1-\alpha)} K(t)^\alpha \quad (4.1)$$

Im Gegensatz zum klassischen Solow-Modell wurde der Produktionsfaktor Arbeitskraft durch einen neuen ersetzt, der sich aus “skilled worker”  $L_s(t)$ , “unskilled worker”  $L_u(t)$  und Robotern  $P(t)$  zusammensetzt. Durch die Art, wie sich der neue Produktionsfaktor zusammensetzt, entsteht eine dreifach geschachtelte (“nested”) CES-Funktion:

1. Die lineare Zusammensetzung  $P(t) + L_u(t)$  im Inneren ist ein Spezialfall der CES-Funktion, bei der beide Güter perfekte Substitute sind. Diese bildet einen Produktionsfaktor in der nächsten Ebene.
2. Die nächste Ebene setzt sich aus der vorherigen und  $L_s(t)$  zusammen, die wiederum durch eine CES-Funktion mit dem Parameter  $\gamma$  verbunden werden.
3. Die gesamte vorherige Stufe bildet nun einen Produktionsfaktor, der gemeinsam mit physischem Kapital zu einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion, ein weiterer Spezialfall der CES-Funktion, zusammengesetzt wird.

Entscheidend für die Substitutionsmöglichkeiten von Robotern und “skilled worker” ist der Parameter  $\gamma$ , der zwischen 0 und 1 sein soll. Dadurch handelt es sich um Substitute und keine Komplemente. Für den Spezialfall  $\gamma = 1$  ist die Substitutionselastizität unendlich. Dann sind Roboter und “skilled worker” perfekt substituierbar.

Der Parameter  $\beta$  gibt an, wie effektiv “skilled” bzw. “unskilled worker” (und Roboter) eingesetzt werden können. Auch  $\beta$  soll zwischen 0 und 1 liegen. Je kleiner es ist, desto effektiver sind “skilled worker” im Vergleich zu “unskilled worker”. Es ist auch möglich den Parameter wegzulassen - in diesem Fall hätten beide Arten von Arbeitern die gleiche Effizienz. Das Modell führt in beiden Fällen - mit und ohne  $\beta$  - zu ähnlichen Ergebnissen. Zusätzlich könnte aber auch noch ein weiterer Parameter verwendet werden, damit “unskilled worker” und Roboter verschiedene Effizienzen haben. Das wird zur Vereinfachung hier aber nicht gemacht.

Wie in Prettnner (2016) wird auch hier von technologischem Fortschritt abstrahiert und  $A \equiv 1$  gesetzt. Die Gesamtbevölkerung wächst wieder mit Rate  $n$ . Es wird zur Vereinfachung angenommen, dass die Anteile von “skilled” bzw. “unskilled worker” an der

Bevölkerung konstant und somit exogene Variablen sind.

Die Dynamik wird wieder durch die folgenden zwei Differentialgleichungen beschrieben:

$$\dot{K}(t) = s_M s Y(t) - \delta K(t) \quad (4.2)$$

$$\dot{P}(t) = (1 - s_M) s Y(t) - \delta P(t) \quad (4.3)$$

Als nächstes werden die Pro-Kopf Variablen betrachtet und auch die Dynamik in diesen angegeben. Dafür wird  $\tilde{L}(t) := L_s(t) + L_u(t)$  definiert und alle absoluten Variablen durch  $\tilde{L}(t)$  dividiert. Die konstanten Anteile der “skilled” bzw. “unskilled worker” an der Gesamtbevölkerung werden mit  $l_s$  und  $l_u$  bezeichnet. Der Pro-Kopf Output ist durch

$$y(t) = [(1 - \beta)l_s^\gamma + \beta(p(t) + l_u)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)} k(t)^\alpha \quad (4.4)$$

gegeben, die Dynamik lautet

$$\dot{k}(t) = s_m s [(1 - \beta)l_s^\gamma + \beta(p(t) + l_u)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)} k(t)^\alpha - (\delta + n)k(t) \quad (4.5)$$

$$\dot{p}(t) = (1 - s_m) s [(1 - \beta)l_s^\gamma + \beta(p(t) + l_u)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)} k(t)^\alpha - (\delta + n)p(t) \quad (4.6)$$

und die Wachstumsraten der Pro-Kopf Variablen sind durch

$$g_k = s_m s [(1 - \beta)l_s^\gamma + \beta(p + l_u)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)} k^{\alpha-1} - (\delta + n) \quad (4.7)$$

$$g_p = (1 - s_m) s [(1 - \beta)l_s^\gamma + \beta(p + l_u)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)} k^\alpha p^{-1} - (\delta + n) \quad (4.8)$$

gegeben.

## 4.3 Steady States und Balanced Growth Paths

### 4.3.1 Steady States

Wie im ursprünglichen Modell werden auch hier Steady States und Balanced Growth Paths berechnet<sup>1</sup>.

Eine Ruhelage des Systems liegt trivialerweise bei  $(k, p) = (0, 0)$ . Ist die Ökonomie ohne physischem Kapital (und auch ohne Roboter) ausgestattet, so kann nicht produziert werden. Demnach kann auch nicht gespart und in Maschinen investiert werden, weswegen

<sup>1</sup>Im folgenden Abschnitt wird der Zeitindex bei allen Variablen zu Gunsten der Übersicht weggelassen.

die Ökonomie für alle Zeit im Ursprung bleibt. Dabei handelt es sich allerdings nur um einen Spezialfall, der nicht weiter beachtet wird.

Es kann auf den Koordinatenachsen keine weitere Ruhelage geben:

- Für  $k = 0$  und  $p > 0$  folgt, da ohne Kapital wiederum nicht produziert und investiert werden kann, dass alleine durch die Abschreibung die Anzahl Roboter beständig abnimmt. Das System konvergiert gegen die obige Ruhelage.
- Für  $k > 0$  und  $p = 0$  ist der Output positiv, da Roboter nicht notwendig für die Produktion sind. Aus Gleichung (4.6) folgt, dass  $\dot{p} > 0$  ist, womit keine Ruhelage vorliegen kann.

Weitaus interessanter sind mögliche Steady States mit positivem physischem Kapital und positiver Anzahl an Robotern. Um eine Ruhelage zu bestimmen, werden die Gleichungen (4.5) und (4.6) Null gesetzt. Es folgt dann sofort, dass  $\delta + n > 0$  gelten muss, da sonst  $\dot{k} = 0$  nicht gelten kann. Im folgenden Abschnitt wird davon ausgegangen, dass dies erfüllt ist. Aus Gleichung (4.5) erhält man die ( $\dot{k} = 0$ ) - Linie im  $(k, p)$ -Raum, die

$$k_1 := \left( \frac{s_m s}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} [(1-\beta)l_s^\gamma + \beta(p+l_u)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (4.9)$$

lautet. Aus Gleichung (4.6) erhält man die ( $\dot{p} = 0$ ) - Linie:

$$k_2 := \left( \frac{\delta + n}{(1-s_m)s} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left( \frac{p}{[(1-\beta)l_s^\gamma + \beta(p+l_u)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (4.10)$$

Mögliche Ruhelagen erhält man durch Gleichsetzen der beiden Linien:

$$k_1 \stackrel{!}{=} k_2 \iff \dots \quad (4.11)$$

$$\iff \frac{1-\beta}{\beta} l_s^\gamma + (p+l_u)^\gamma \stackrel{!}{=} \left( \frac{(\delta+n)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\underbrace{\beta^{\frac{1}{\gamma}}(1-s_m)s(s_m s)^{\frac{1}{1-\alpha}}}_{=:c}} \right)^\gamma p^\gamma \quad (4.12)$$

$$\iff \frac{1-\beta}{\beta} l_s^\gamma + (p+l_u)^\gamma - c^\gamma p^\gamma \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.13)$$

Für  $c \leq 1$  kann diese Gleichung nicht erfüllt sein. Um das zu sehen wird die Funktion  $f(p) := p^\gamma$  definiert, welche streng monoton steigend ist. Deswegen ist  $(p+l_u)^\gamma > p^\gamma$

und somit

$$\frac{1-\beta}{\beta}l_s^\gamma + (p+l_u)^\gamma - c^\gamma p^\gamma > \frac{1-\beta}{\beta}l_s^\gamma > 0 \quad (4.14)$$

Die letzte Ungleichung setzt hier voraus, dass  $l_s > 0$  und  $\beta \neq 1$  gelten. Auch wenn eine der Bedingungen nicht gelten würde, könnte eine Ruhelage ausgeschlossen werden.

Für den Fall  $c > 1$  definieren wir  $F(p) := \frac{1-\beta}{\beta}l_s^\gamma + (p+l_u)^\gamma - c^\gamma p^\gamma$ . Diese Funktion ist streng monoton fallend. Daraus folgt, dass  $F$  höchstens eine Nullstelle hat und somit höchstens eine Ruhelage existiert. Es gilt außerdem, dass  $F(0) > 0$  und mit Hilfe des Satzes von l'Hopital kann man zeigen, dass  $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) < 0$  gilt. Damit folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es für den Fall  $c > 1$  eine Nullstelle geben muss. Damit gibt es eine eindeutige Ruhelage mit  $k, p > 0$ .

Für diese Ruhelage gelten folgende Aussagen:

1. Da die Pro-Kopf Variablen konstant sind, folgt, dass die absoluten Variablen mit der Rate des Bevölkerungswachstums  $n$  steigen.
2. Dieses Ergebnis ist mit jenem aus Prettnner (2016) konsistent: Lässt man  $\beta$ , den Parameter für die unterschiedliche Effizienz der Arbeiter weg, so ist  $c > 1$  äquivalent zum Fall einer negativen Wachstumsrate in Gleichung (2.8), bei dem das Wachstum der Ökonomie aber nicht negativ ist, sondern stattdessen ein Steady State vorliegt und die absoluten Variablen mit der Rate  $n$  wachsen.

Im Folgenden wird gezeigt, dass diese Ruhelage asymptotisch stabil ist, wofür das Differentialgleichungssystem bei der Ruhelage linearisiert wird:

$$D := \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} & \frac{\partial \dot{k}}{\partial p} \\ \frac{\partial \dot{p}}{\partial k} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\begin{aligned} d_{11} &= s_m s [(1-\beta)l_s^\gamma + \beta(p(t)+l_u)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)} \alpha k(t)^{\alpha-1} - (\delta + n) \\ d_{12} &= s_m s [(1-\beta)l_s^\gamma + \beta(p(t)+l_u)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)-1} (1-\alpha)k(t)^\alpha \beta (p(t)+l_u)^{\gamma-1} \\ d_{21} &= (1-s_m)s [(1-\beta)l_s^\gamma + \beta(p(t)+l_u)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)} \alpha k(t)^{\alpha-1} \\ d_{22} &= (1-s_m)s [(1-\beta)l_s^\gamma + \beta(p(t)+l_u)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)-1} (1-\alpha)k(t)^\alpha \beta (p(t)+l_u)^{\gamma-1} - (\delta + n) \end{aligned}$$

Damit die Ruhelage asymptotisch stabil ist, müssen die beiden Eigenwerte der Matrix einen negativen Realteil aufweisen. Diese erhält man durch Nullsetzen des charakteris-

tischen Polynoms  $\det(D - \lambda I)$ :

$$\begin{aligned}
& \left( s_m s [(1 - \beta) l_s^\gamma + \beta(p(t) + l_u)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)} \alpha k(t)^{\alpha-1} - (\delta + n) - \lambda \right) \\
& \left( (1 - s_m) s [(1 - \beta) l_s^\gamma + \beta(p(t) + l_u)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)-1} (1 - \alpha) k(t)^\alpha \beta(p(t) + l_u)^{\gamma-1} - (\delta + n) - \lambda \right) \\
& - \left( s_m s [(1 - \beta) l_s^\gamma + \beta(p(t) + l_u)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)-1} (1 - \alpha) k(t)^\alpha \beta(p(t) + l_u)^{\gamma-1} \right) \\
& \left( (1 - s_m) s [(1 - \beta) l_s^\gamma + \beta(p(t) + l_u)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)} \alpha k(t)^{\alpha-1} \right) \\
& = \lambda^2 + \\
& \lambda \underbrace{\left[ 2(\delta + n) - s_m s [\dots]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)} \alpha k(t)^{\alpha-1} - (1 - s_m) s [\dots]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)-1} (1 - \alpha) k(t)^\alpha \beta(p(t) + l_u)^{\gamma-1} \right]}_{=p_\lambda} \\
& + \underbrace{(\delta + n)^2}_{=q_\lambda} \\
& \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Wegen  $\alpha, \beta \leq 1$ ,  $k, p > 0$  und  $\dot{k}, \dot{p} = 0$  folgt,

$$\begin{aligned}
& - s_m s [\dots]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)} \alpha k(t)^{\alpha-1} + (\delta + n) = \\
& = k^{-1} \left( - s_m s [\dots]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)} \alpha k(t)^\alpha + (\delta + n) k \right) \\
& > k^{-1} \left( - s_m s [\dots]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)} k(t)^\alpha + (\delta + n) k \right) = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& - (1 - s_m) s [\dots]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)-1} (1 - \alpha) k(t)^\alpha \beta(p(t) + l_u)^{\gamma-1} + (\delta + n) = \\
& = (p + l_u)^{-1} \left( - (1 - s_m) s [\dots]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)} k(t)^\alpha \underbrace{\frac{(1 - \alpha) \beta (p + l_u)^\gamma}{(1 - \beta l_s^\gamma + \beta (p + l_u)^\gamma)}}_{<1} + (\delta + n) \underbrace{(p + l_u)}_{>p} \right) \\
& > (p + l_u)^{-1} \left( - (1 - s_m) s [\dots]^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)} k(t)^\alpha + (\delta + n) p = 0 \right).
\end{aligned}$$

Somit sind  $p_\lambda > 0$  und auch  $q_\lambda > 0$ . Deswegen gilt für die Eigenwerte,  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ ,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p_\lambda}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p_\lambda}{2}\right)^2 - q_\lambda},$$

dass  $Re(\lambda_1), Re(\lambda_2) < 0$ . Die Ruhelage ist also, sofern sie existiert, ohne weitere Annahmen an die Parameter asympotisch stabil.

### 4.3.2 Balanced Growth Path

Auf einem Balanced Growth Path sollen die Wachstumsraten konstant sein. Dort soll also  $\dot{g}_k = \dot{g}_p = 0$  gelten, wodurch diese berechnet werden können. Ableiten und Nullsetzen ergibt für Gleichung (4.7)

$$\frac{\beta(p + l_u)^\gamma}{(1 - \beta)l_s^\gamma + \beta(p + l_u)^\gamma} \frac{\dot{p}}{p + l_u} = \frac{\dot{k}}{k}, \quad (4.15)$$

und für Gleichung (4.8) mit der Verwendung von obigem

$$\frac{\beta(p + l_u)^\gamma}{(1 - \beta)l_s^\gamma + \beta(p + l_u)^\gamma} \frac{\dot{p}}{p + l_u} = \frac{\dot{p}}{p}. \quad (4.16)$$

Das ist natürlich erfüllt, wenn  $\dot{p} = \dot{k} = 0$ , was einem Steady State entspricht und oben bereits behandelt wurde.

Durch Approximationen, ähnlich zu jenen aus Prettnner (2016), ist es möglich einen (approximativen) Balanced Growth Path zu finden. Für “große” Werte von  $p$  (wenn  $\lim_{p \rightarrow \infty}$  betrachtet wird) gilt wegen der Regel von l’Hopital, da die Anteile  $l_s$  und  $l_u$  als konstant angenommen werden, dass  $\beta(p + l_u)^\gamma \approx (1 - \beta)l_s^\gamma + \beta(p + l_u)^\gamma$  und  $p \approx p + l_u$ . Damit sind die obigen Gleichungen annähernd erfüllt und man kann auch hier von einem Balanced Growth Path sprechen. Die beiden Wachstumsraten sind  $g_k = g_p =: g$ . Durch Gleichsetzen von (4.7) und (4.8) erhält man mit der Approximation  $(1 - \beta)l_s^\gamma + \beta(p + l_u)^\gamma \approx \beta(p + l_u)^\gamma \approx \beta p^\gamma$  die Wachstumsrate

$$g = \beta^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)} \cdot s \cdot s_m^\alpha (1 - s_m)^{1-\alpha} - (\delta + n). \quad (4.17)$$

Es folgt, dass auch der Pro-Kopf Output mit der Rate  $g$  wächst, da aus Gleichung (4.4) folgt, dass

$$\ln(y) = \frac{1}{\gamma}(1 - \alpha) \cdot \ln((1 - \beta)l_s^\gamma + \beta(p(t) + l_u)^\gamma) + \alpha \cdot \ln(k) \quad (4.18)$$

$$\approx \frac{1}{\gamma}(1 - \alpha) \cdot \ln(\beta p^\gamma) + \alpha \cdot \ln(k) \quad (4.19)$$

$$g_y = (1 - \alpha)g_p + \alpha g_k = g \quad (4.20)$$

Nicht nur der Steady State, sondern auch der BGP bleibt wie bei Prettnner (2016) erhalten. Die Wachstumsrate ist, bis auf den Effizienzparameter  $\beta$  und dessen Exponenten, die gleiche. Lässt man  $\beta$  und  $1 - \beta$  weg und setzt beide Effizienzparameter auf 1, so

stimmt die Wachstumsrate genau mit jener aus Prettner (2016) überein. Ansonsten ist sie aber kleiner, da  $\beta$  zwischen 0 und 1 liegt und der positive Term deswegen durch die Multiplikation mit  $\beta^{\frac{1}{\gamma}(1-\alpha)}$  kleiner wird. Dieser Term und das Wirtschaftswachstum werden umso größer, je größer  $\beta$  und  $\gamma$  sind (da beide zwischen 0 und 1 liegen). Das führt zu dem folgenden Resultat, das auch ökonomisch sinnvoll ist: Das Wachstum hängt neben den Zusammenhängen aus Prettner (2016) auch positiv von

- $\beta$  ab. Denn die treibende Kraft hinter dem Wachstum sind die Roboter. Steigt dieser Parameter so sind diese effizienter und so ist prinzipiell ein höheres Wachstum möglich.
- $\gamma$  ab. Durch einen Anstieg von diesem können Roboter besser “skilled worker” substituieren und somit den Gesamtoutput weiter erhöhen. Das wiederum führt zu mehr Ersparnis und weiteren Investitionen in Roboter.

Wichtig für den Wachstumspfad sind die oben durchgeführten Approximationen, die nur für große Werte von  $p$  zulässig sind. Das ist mathematisch leicht zu sehen, macht aber auch ökonomisch Sinn: Für das Aufkommen des Wachstums ist es wichtig, dass der Produktionsfaktor Roboter deutlich größer und wichtiger ist, als die anderen Produktionsfaktoren. Roboter übernehmen dann den größten Teil der Produktion und wenn diese sehr hoch ist, kann immer weiter in neue Roboter investiert werden, womit es zu einem langanhaltenden Wachstum kommen kann.

Wäre die Wachstumsrate negativ, so würde die Anzahl an Robotern und Kapital soweit sinken, dass diese Approximationen nicht länger gültig sind. Da die Wachstumsrate  $g$  genau dann negativ ist, wenn der Parameter  $c$  größer 1 ist, kommt es in diesem Fall nicht zu einem Steady State mit einer konstanten negativen Wachstumsrate. Stattdessen tritt die vorher berechnete stabile Ruhelage auf.

Es kann also auch in diesem Modell zu beständigem Wirtschaftswachstum kommen, was für die Ökonomie natürlich besser ist, als wenn es zu einem Steady State kommt. Das hängt ausschließlich von der Spezifikation des Modells ab. Laut Prettner (2016) und den in seiner Arbeit verwendeten Parameter ist es plausibel, dass die Ökonomie wächst. Im numerischen Teil wird überprüft, ob das auch mit dem zusätzlichen Parameter  $\beta$  in der Wachstumsrate gilt, da das potenzielle Wachstum dadurch schwieriger erreicht wird und kleiner ausfällt.

## 4.4 Roboter und Löhne

In diesem Kapitel wird der Einfluss von Robotern auf die Löhne von Arbeitern untersucht. Da angenommen wird, dass im Produktionssektor vollständiger Wettbewerb herrscht, werden die Produktionsfaktoren mit dem jeweiligen Grenzprodukt entlohnt. Die Löhne ergeben sich durch

$$w_s(t) = (1 - \alpha)Y(t) \frac{(1 - \beta)L_s(t)^\gamma}{(1 - \beta)L_s(t)^\gamma + \beta(P(t) + L_u(t))^\gamma} \frac{1}{L_s(t)} \quad (4.21)$$

$$w_u(t) = (1 - \alpha)Y(t) \frac{\beta(P(t) + L_u(t))^\gamma}{(1 - \beta)L_s(t)^\gamma + \beta(P(t) + L_u(t))^\gamma} \frac{1}{P(t) + L_u(t)}, \quad (4.22)$$

wobei  $w_s(t)$  bzw.  $w_u(t)$  den Lohn der “skilled” bzw. “unskilled worker” bezeichnet. Je höher die Produktionselastizität des zusammengesetzten Faktors Arbeitskraft  $1 - \alpha$  (bzw. je kleiner  $\alpha$ ) ist, desto höher sind beide Löhne. Das liegt daran, dass die Produktion dann arbeitsintensiver ist.

Der Zinssatz für Investitionen in physisches Kapital ist

$$r_K(t) = \alpha Y(t) \frac{1}{K(t)} - \delta \quad (4.23)$$

und jener für Roboter beträgt  $r_P(t) = w_u(t) - \delta$ .

Die Effekte einer ceteris paribus Erhöhung von Robotern auf die Löhne werden mit den partiellen Ableitungen untersucht - zuerst jene für die Löhne der “skilled worker”:

$$\frac{\partial w_s}{\partial P} = (1 - \alpha)Y \frac{(1 - \beta)L_s^\gamma \beta(P + L_u)^\gamma}{L_s} \frac{1}{(1 - \beta)L_s^\gamma + \beta(P + L_u)^\gamma} [1 - \alpha - \gamma] \quad (4.24)$$

$$= \begin{cases} \geq 0 & \text{für } 1 - \alpha \geq \gamma \\ < 0 & \text{für } 1 - \alpha < \gamma \end{cases} \quad (4.25)$$

Der Einfluss von Robotern auf die Löhne der “skilled worker” hängt also von fast allen exogenen Parametern und endogenen Variablen ab. Ob dieser positiv oder negativ ist, liegt alleine an zwei Faktoren:

1. Der Möglichkeit zur Substitution von “skilled worker” mit Robotern, also  $\gamma$ .
2. Der Produktionselastizität von Arbeitskraft, also  $1 - \alpha$ .

Um den Effekt ökonomisch zu interpretieren, kann er in zwei gegensätzliche Teile zerlegt werden. Durch mehr Roboter kommt es einerseits zu einer Produktivitätssteigerung, an-

dererseits sind Arbeiter nicht mehr so wichtig, da ihre Arbeit teilweise von Robotern übernommen wird. Je nachdem welcher dieser beiden Effekte überwiegt, ist der Gesamteffekt positiv oder negativ.

Je höher  $\gamma$  ist, desto besser kann substituiert werden. Dadurch können Roboter die Aufgaben der “skilled worker” besser übernehmen, wodurch diese weniger benötigt werden, was zu einem Sinken des Lohns führt. Ist  $\gamma$  niedriger, so ist die Wirkung von Robotern auf “skilled worker” eher wie jene von physischem Kapital. In diesem Fall ist ein “skilled worker”, der mit einer höheren Anzahl an Robotern ausgestattet ist, selber produktiver und sein Lohn steigt.

Je größer  $1 - \alpha$  ist, desto eher führt eine steigende Anzahl von Robotern zu höherem Output. Dies führt dazu, dass auch die Löhne der “skilled worker” steigen, da der Lohn auch vom Output abhängt, wie in (4.21) zu sehen ist.

Wenn also  $1 - \alpha \geq \gamma$  gilt, so übersteigt der Produktivitätsanstieg durch Roboter den Substitutionseffekt und insgesamt steigen die Löhne der “skilled worker”.

Für die Löhne der “unskilled worker” gilt:

$$\frac{\partial w_u}{\partial P} = (1 - \alpha) Y \frac{\beta (P + L_u)^\gamma [(1 - \alpha - \gamma) \beta (P + L_u)^\gamma - (1 - \gamma) ((1 - \beta) L_s^\gamma + \beta (P + L_u)^\gamma)]}{(P + L_u)^2 ((1 - \beta) L_s^\gamma + \beta (P + L_u)^\gamma)^2} \quad (4.26)$$

Diese Ableitung ist immer kleiner als Null. Somit haben Roboter immer einen negativen Einfluss auf die Löhne der “unskilled worker”. Der Grund dafür ist die Annahme der perfekten Substitution zwischen diesen beiden Produktionsfaktoren.

Im Fall, in dem  $w_s$  durch eine ceteris paribus Erhöhung von Robotern steigt, ist damit klar, dass der Effekt für “unskilled worker” schlechter ist. Während ihr Lohn sinkt, steigt jener der “skilled worker” sogar, womit sie deutlich schlechter gestellt sind.

Auch im anderen Fall, also wenn beide Löhne sinken, gilt, dass “unskilled worker” stärker betroffen sind, wenn der Maßstab nicht der absolute Effekt, sondern der prozentuelle ist. Wenn die Löhne der “skilled worker” sehr viel höher sind, als die der unskilled, ist es möglich, dass ihr Lohn stärker sinkt. Man könnte dann aber auch annehmen, dass sie das Sinken ihres Lohns besser verkraften können. Deshalb ist es sinnvoll den prozentuellen Effekt zu betrachten. Dieser wird durch die Elastizität der Löhne nach

Robotern ausgedrückt:

$$\epsilon_{w_i,P} := \frac{\partial w_i}{\partial P} \cdot \frac{P}{w_i}, \quad i = s, u \quad (4.27)$$

Diese Elastizität gibt an, um wie viel Prozent der jeweilige Lohn steigt (bzw. sinkt), wenn die Anzahl der Roboter um ein Prozent steigt. Die Elastizitäten für die Löhne sind

$$\begin{aligned} \epsilon_{w_s,P} &= \frac{(P + L_u)^{\gamma-1}}{((1 - \beta)L_s^\gamma + \beta(P + L_u)^\gamma)^2} \cdot \beta[1 - \alpha - \gamma]P \\ \epsilon_{w_u,P} &= \frac{(P + L_u)^{-1}}{((1 - \beta)L_s^\gamma + \beta(P + L_u)^\gamma)^2} \\ &\quad \cdot [(1 - \alpha - \gamma)\beta(P + L_u)^\gamma - (1 - \gamma)((1 - \beta)L_s^\gamma + \beta(P + L_u)^\gamma)] P. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\epsilon_{w_s,P} - \epsilon_{w_u,P} = \frac{(P + L_u)^{-1}}{((1 - \beta)L_s^\gamma + \beta(P + L_u)^\gamma)^2} (1 - \gamma) ((1 - \beta)L_s^\gamma + \beta(P + L_u)^\gamma) P > 0 \quad (4.28)$$

und weiter  $\epsilon_{w_s,P} > \epsilon_{w_u,P}$ . Damit gilt tatsächlich für beide Fälle, dass “unskilled worker” stärker unter der Einführung von Robotern leiden als “skilled worker”, da ihr Lohn stärker sinkt.

Man könnte als Maßstab auch die sogenannte Skill Premium  $w_s/w_u$  verwenden, die als Verhältnis der Löhne der “skilled worker” zu jenen der “unskilled worker” definiert wird.

$$\frac{w_s}{w_u} = \frac{1 - \beta}{\beta} \left( \frac{P + L_u}{L_s} \right)^{1-\gamma} \quad (4.29)$$

Da der Exponent  $1 - \gamma$  größer als Null ist, ist zu sehen, dass die Skill Premium positiv von der Anzahl der Roboter abhängt. Daraus folgt, dass das Lohngefälle mit der Anzahl der Roboter wächst und “unskilled worker” schlechter gestellt sind.

Zu beachten ist allerdings, dass es sich bei obigen Überlegungen um eine ceteris paribus Veränderung handelt, bei der nur Roboter steigen. Befindet sich das System auf dem Wachstumspfad und steigt deswegen zusätzlich auch herkömmliches Kapital, kommt es dadurch zu einer weiteren Produktivitätssteigerung<sup>2</sup>. Das kann dazu führen, dass auch die Löhne der “unskilled worker” steigen - wenn auch in geringerem Ausmaß. Auch dann kommt es zu einem Anstieg der Skill Premium und die schlechter ausgebildeten Arbeiter gehören zu den Verlierern.

<sup>2</sup>Die Auswirkungen von physischem Kapital sind wie im “normalen” Solow-Modell mit Cobb-Douglas Produktionsfunktion: Mehr Kapital führt immer zu einer höheren Produktivität der Arbeiter.

Es kommt außerdem, wie bei Prettner (2016), zu einem Sinken des Anteil des Arbeitseinkommens (=labor share). Denn sowohl der Anteil der skilled, als auch jener der “unskilled worker”s sinken durch eine Erhöhung durch  $P$ . Dadurch wird der Produktionsfaktor Arbeit unwichtiger, wodurch das Gefälle zwischen Kapitaleigentümern und Arbeitskräften wächst.

## 4.5 Simulationen und numerische Ergebnisse

Die anfängliche Parametrisierung des Modells ist in Tabelle 4.1 zu finden. Wenn es bei den Abbildungen nicht anders vermerkt ist, wurden dafür diese Werte verwendet.  $\alpha$  und  $n$  wurden aus Prettner (2016) übernommen. Für diese Parameter gibt es auch in anderer Literatur ähnliche Werte.  $s_M$  wurde ebenfalls daran angelehnt. Dort ist allerdings vermerkt, dass es dafür kaum zuverlässige Daten gibt und der Parameter wird variiert.  $\delta$  wird dort aufgeteilt in einen Parameter für Maschinen,  $\delta_K$ , und einen für Roboter,  $\delta_P$ . Hier wird der Einfachheit halber zunächst ein Wert verwendet.  $s$  stammt aus Daten der Weltbank (weltweit, 2015).

Besonders wichtig ist die Wahl der beiden Parameter  $\beta$  und  $\gamma$ . Da  $\beta$  gleichzeitig die Effizienz der “unskilled worker” und der Roboter darstellt, ist es schwierig geeignete Werte zu schätzen. Logisch erscheint, dass “skilled worker” effizienter als “unskilled worker” sind, jedoch können Roboter eine höhere Effizienz haben. Deswegen wird zunächst ein Wert von 0.6 gewählt. Ist die Effizienz der Roboter zu niedrig, kommt es nicht zu Wachstum.

Durch  $\gamma$  ist die Substitutionselastizität  $\sigma := 1/(1 - \gamma)$  zwischen “skilled” und “unskilled worker” bzw. Robotern bestimmt. Laut Acemoglu und Autor (2010) liegen die meisten Schätzer für die Substitutionselastizität für “skilled” und “unskilled worker” zwischen 1.4 und 2, es wurde aber beispielsweise auch schon 2.8 oder höher geschätzt. In DeCario (2016) wurden mehrere Schätzungen für jene zwischen Robotern und Arbeitskräften durchgeführt, die ungefähr bei 2 liegen. Dort ist aber keine Unterscheidung zwischen “skilled” und “unskilled worker” inkludiert. Es wird für  $\gamma$  zunächst der Wert 0.5 angenommen, was einer Substitutionselastizität von 2 entspricht. Da die zugrunde liegenden Schätzungen aber immer nur zwei Variablen gleichzeitig berücksichtigt haben und auch teils zu verschiedenen Ergebnissen kommen, wird der Wert auch variiert.

Für  $l_s$ , den Anteil der “skilled worker”, wurde 0.25 angenommen, er wird aber in verschiedenen Szenarien variiert.

Tabelle 4.1: Parameter der Simulation

Parameter	Wert	Anmerkung
$s$	0.25	Sparrate
$s_M$	0.7	Anteil, der in Maschinen investiert wird
$\alpha$	0.33	Produktionselastizität von Kapital
$\beta$	0.6	Effizienzparameter für Roboter und “unskilled worker”
$\gamma$	0.5	Parameter der CES-Funktion für Substitutionsfähigkeit
$\delta_K$	0.05	Abschreibungsrate von Maschinen
$\delta_P$	0.05	Abschreibungsrate von Robotern
$n$	0.009	Geburtenrate
$l_s$	0.25	Anteil der “skilled worker”
$l_u$	0.75	Anteil der “unskilled worker”
$p(0)$	164/10000	Startwert für Roboter
$k(0)$	1	Startwert für Maschinen

### Veränderungen von $s_M$

Um die Dynamik besser zu verstehen, werden verschiedene Phasenportraits in der  $(k, p)$ -Ebene dargestellt. Hier gibt es im wesentlichen zwei verschiedene Formen - den Steady State und den Balanced Growth Path.

In den Phasenportraits werden die Pfeile, die den Fluss darstellen, auf eine einheitliche Länge normiert, da sonst die Dynamik nicht so gut sichtbar wäre. Zusätzlich werden auch einige Trajektorien eingezeichnet, die sich durch verschiedene Anfangswerte unterscheiden. Der jeweilige Startpunkt ist durch den Kreis gekennzeichnet, der Endpunkt, wenn er im Plot zu sehen ist, durch ein Quadrat.

In Abbildung 4.1 ist das Phasenportrait zu den Werten aus Tabelle 4.1 zu sehen. Es kommt nicht zu nachhaltigem Wachstum, sondern der Steady State tritt ein. Alle Trajektorien nähern sich von verschiedenen Startwerten diesem an, wodurch zu sehen ist, dass er asymptotisch stabil ist.

Abbildung 4.2 zeigt das Phasenportrait für ein Sinken des Anteils auf  $s_M = 0.55$ , weshalb nun mehr in Roboter investiert wird. Durch diese kommt es zu Wachstum, wobei auch hier zu sehen ist, dass sich alle Trajektorien annähern und der Pfad nach einiger Zeit nicht stark vom Anfangswert abhängt.

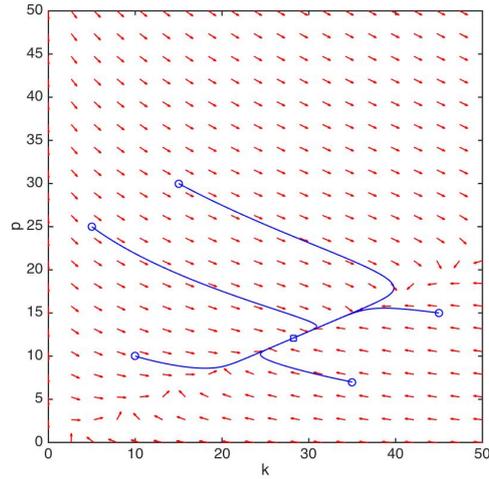


Abbildung 4.1: Werte aus Tabelle 4.1. Der Steady State liegt ungefähr bei  $k = 28$ ,  $p = 12$ .

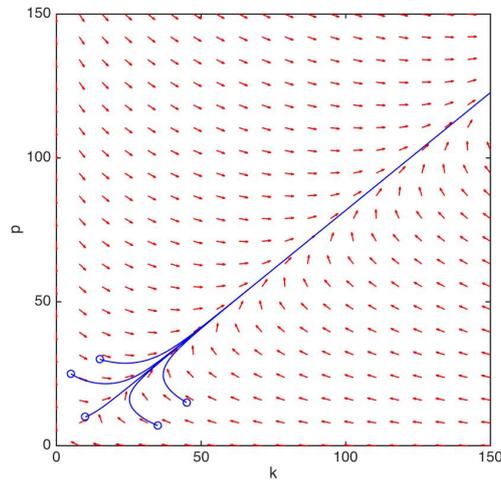


Abbildung 4.2: Im Vergleich zu oben wird  $s_M = 0.55$  gesetzt. Es kommt bereits zu Wachstum.

Abbildung 4.3 zeigt das Verhalten für ein Sinken des Anteils auf  $s_M = 0.45$ . Es wird nun noch mehr in Roboter investiert, die das Wachstum voran treiben. Der Wachstumspfad ist nun steiler, was widerspiegelt, dass mehr Roboter existieren.

Phasendiagramme für beide Fälle können nicht nur durch variieren des Parameters  $s_M$  erzeugt werden. Genauso können auch die anderen Variablen aus Gleichung (4.17) verändert werden.

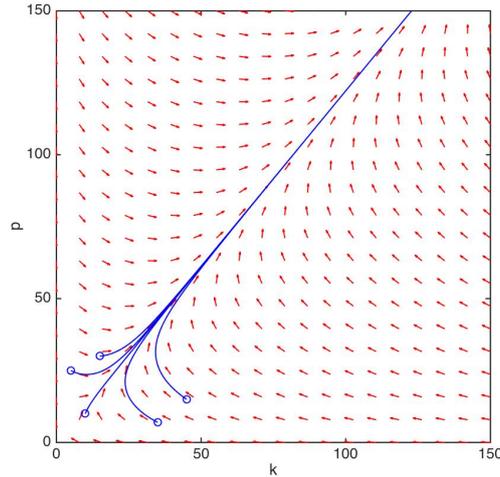


Abbildung 4.3: Im Vergleich zu oben wird  $s_M = 0.45$  gesetzt. Auch hier kommt es zu Wachstum

Als nächstes werden die verschiedenen Variablen im Zeitverlauf für die verschiedenen Fälle geplottet. In Abbildung 4.4 ist zu sehen, dass die Variablen auch über lange Zeit wachsen können, wenn es einen Steady State gibt. Diesem nähert sich das System dementsprechend langsam an. Bei  $t = 100$  ist beispielsweise die Wachstumsrate des Pro-Kopf Outputs  $g_y$  noch immer stark positiv, obwohl sich das System dem Steady State annähert

Bei Abbildung 4.5 bleibt das Wachstum vorhanden. Das ist an der konvexen Form der Funktionen erkennbar.

Bei beiden Abbildungen ist jeweils in den unteren zwei Graphiken zu sehen, dass die Löhne der “skilled worker” viel stärker steigen, als jene der “unskilled worker”, die in Abbildung 4.5 sogar sinken. Die Skill Premium steigt im Fall des Steady States von 1.2 im Laufe von 100 Jahren auf fast 3. Für den Fall des Wachstums steigt sie sogar noch stärker an. Im analytischen Teil wurde gezeigt, dass die Löhne der “unskilled worker” mit steigendem  $p$  abnehmen. Hier steigt im Laufe der Zeit zwar  $p$ , es steigt allerdings auch  $k$ . Das hat immer einen positiven Effekt auf die Löhne, wodurch diese in Abbildung 4.4 wachsen.

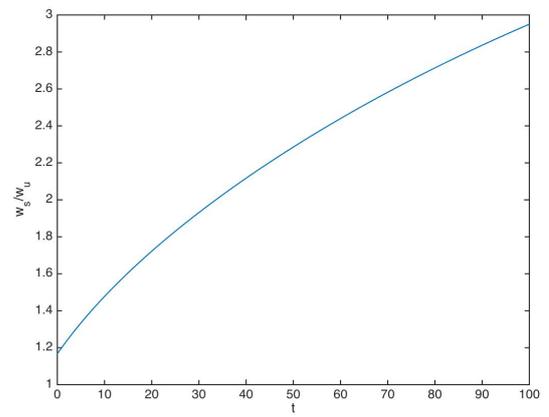
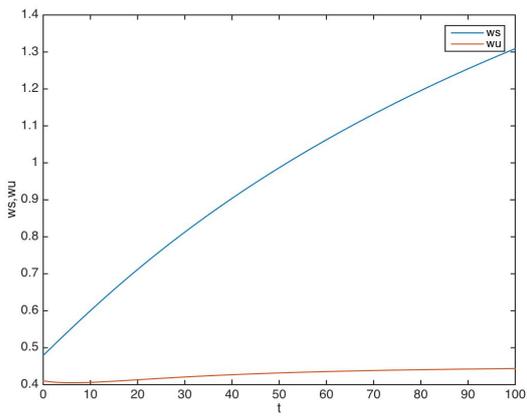
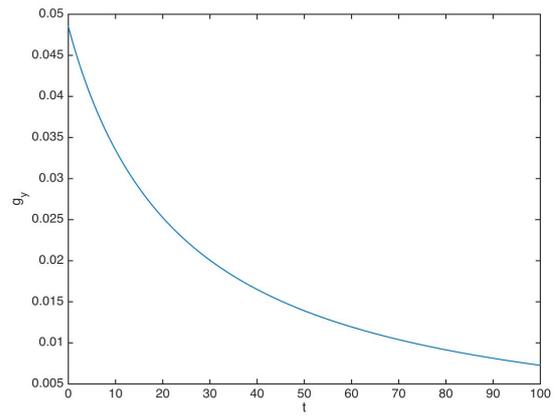
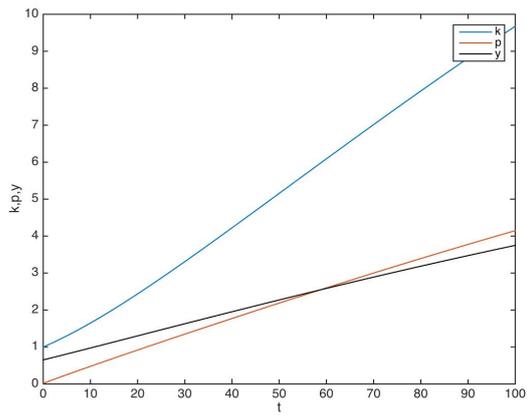


Abbildung 4.4: Plots für die Werte aus Tabelle 4.1.

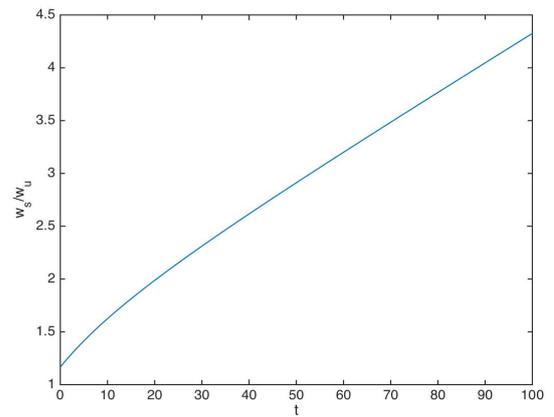
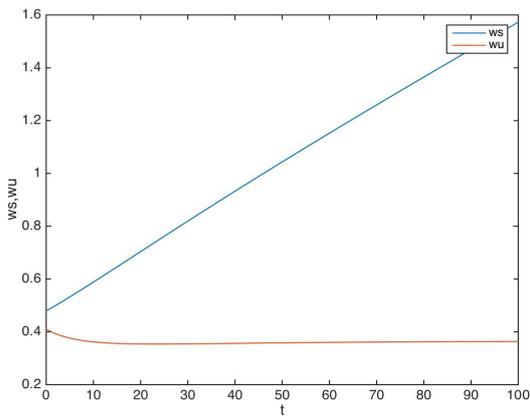
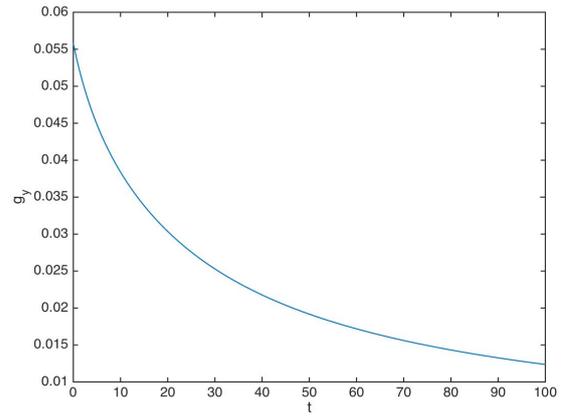
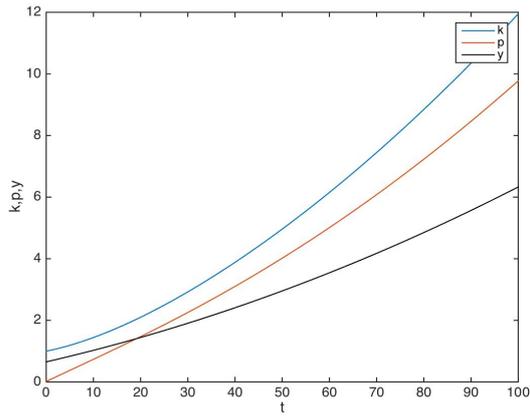


Abbildung 4.5: Balanced Growth Path für  $s_M = 0.55$

## Veränderungen von $\beta$ und $\gamma$

Ganz entscheidend für ein mögliches Wachstum der Ökonomie sind die Effizienz der Roboter  $\beta$  und deren Substitutionsfähigkeiten, die durch  $\gamma$  bestimmt werden. Die Abbildung 4.6 zeigt in Abhängigkeit von  $\beta$  und  $\gamma$ , ob es zu einem Steady State oder Balanced Growth Path kommt. Für Parameterkombinationen im weißen Bereich tritt der Steady State ein, für jene im blauen kommt es zu Wachstum. Es ist zu sehen, dass nur wenn Roboter entsprechend effizient sind und auch “skilled worker” gut substituieren können, es zu Wachstum kommen wird.

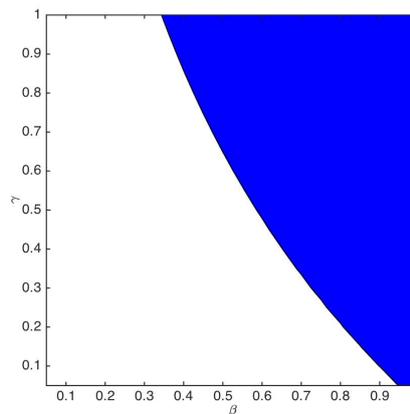


Abbildung 4.6: Steady State (weiß) oder Wachstumspfad (blau) in Abhängigkeit der Parameter  $\beta$  und  $\gamma$ .

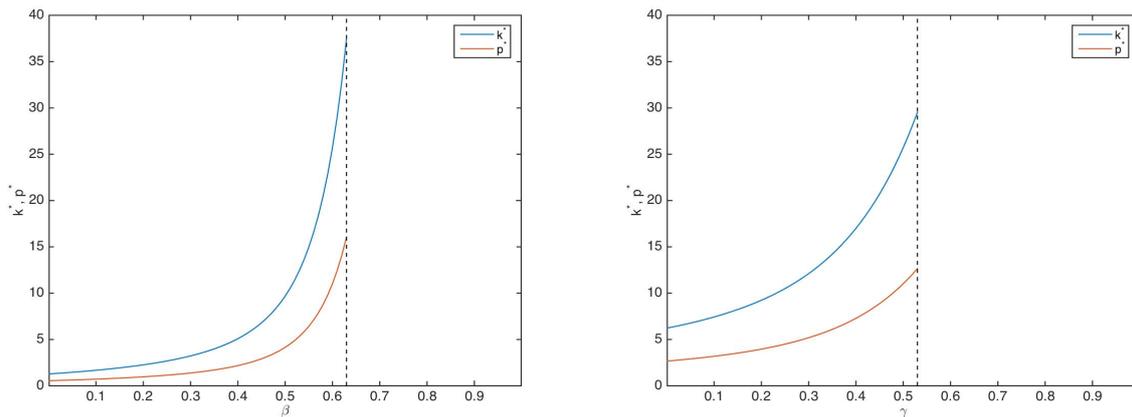


Abbildung 4.7: Rechts ist  $\gamma = 0.5$  und  $\beta \in (0, 1)$ . Links ist  $\beta = 0.6$  und  $\gamma \in (0, 1)$ ,

Bei Abbildung 4.7 handelt es sich um Bifurkationsdiagramme. Dabei wird jeweils  $\beta$  oder  $\gamma$  variiert. Wenn es für entsprechenden Wert des Parameters zu einem Steady State kommt, wird dieser eingezeichnet. Mit besserer Effizienz und auch besserer Substituierbarkeit steigen Kapital und Roboter im Gleichgewicht. Ab dem Bifurkationspunkt, der durch die senkrechte schwarz gestrichelte Linie eingezeichnet ist, kommt es nicht mehr zu einem Steady State, sondern zu einem Balanced Growth Path. Deswegen können ab hier auch keine Gleichgewichtswerte mehr eingezeichnet werden. Für die Effizienz ist der Bifurkationspunkt etwa bei  $\beta = 0.64$ , für die Substitutionsmöglichkeiten bei  $\gamma = 0.54$ .

### Veränderungen von $l_s$ und $l_u$

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie sich die Löhne und die Skill Premium verändern, wenn sich die Anteile der “skilled” bzw. “unskilled worker” verändern. Alle Werte, bis auf  $l_s$ , sind wie in Tabelle 4.1. In Abbildung 4.8 wird für verschiedene - aber feste -  $l_s$  gezeigt, wie sich die Skill Premium im Lauf von 30 Jahren entwickelt. Logisch ist, dass sie für einen höheren Anteil an “skilled worker” niedriger ist. Unabhängig vom Anteil steigt die Skill Premium aber an, da während der 30 Jahre die Zahl der Roboter wächst und die “unskilled worker” immer schlechter gestellt sind.

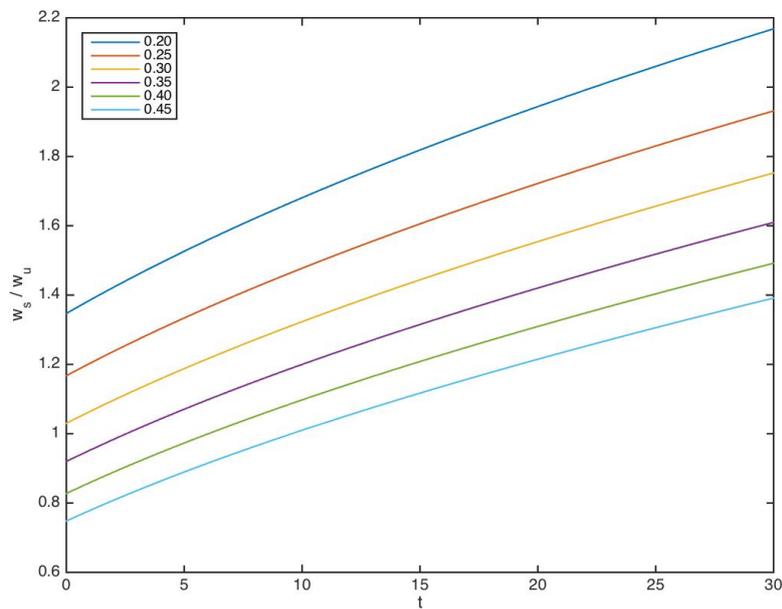


Abbildung 4.8: Skill Premium für verschiedene (feste) Werte von  $l_s$ .

In Abbildung 4.9 wird folgendes Szenario betrachtet: Der Anteil der “skilled worker”

beginnt bei  $l_s(0) = 0.20$ . Im Laufe von 30 Jahren steigt er aber linear bis zu einem vorgegebenen Endwert an, der zwischen 0.2 und 0.45 liegt. Bleibt der Anteil der “skilled worker” konstant, so steigt die Skill Premium in 30 Jahren von 1.35 auf über 2.1. Wächst der Anteil auf 30 Prozent, so steigt sie immer noch auf über 1.7. Der Grund für die steigende Skill Premium im Modell ist, dass während dieser Zeit auch die Anzahl der Roboter beständig zunimmt. Dadurch steigt einerseits die Produktivität der “skilled worker” stetig. Andererseits nimmt die Grenzproduktivität der “unskilled worker” mit steigendem  $p$  immer weiter ab, d.h. deren Löhne sinken, da sie perfekt substituiert werden können. Der Anstieg der Automatisierung könnte also auch ein Grund dafür sein, warum die Skill Premium in den letzten Jahrzehnten immer weiter gestiegen ist, obwohl der Anteil der besser ausgebildeten Arbeitskräfte ebenfalls gestiegen ist.

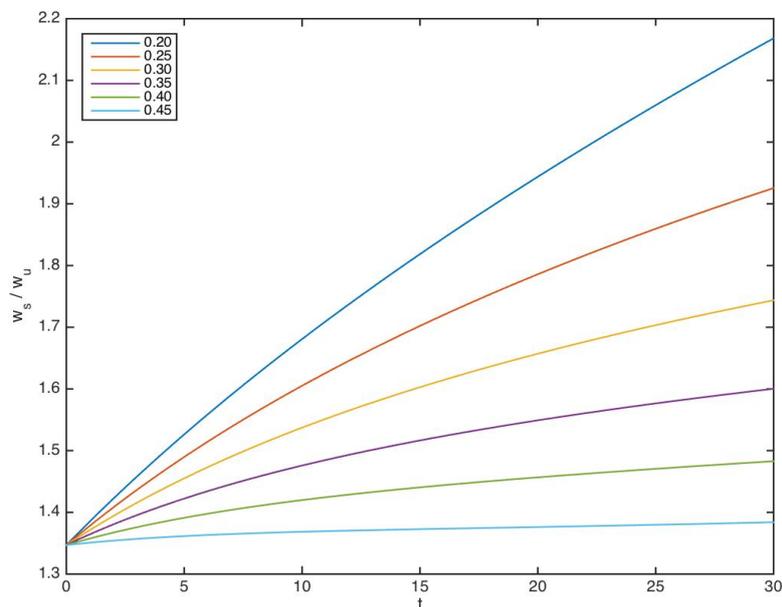


Abbildung 4.9: Skill Premium für einen Anstieg von  $l_s$  im Lauf von 30 Jahren auf  $l_s^{max}$ .

### Veränderungen der Bevölkerungswachstumsrate $n$

Wenn die Bevölkerungswachstumsrate  $n$  steigt, kommt es wie im normalen Solow-Modell zu kleineren Gleichgewichtswerten für  $k$  und  $p$ . Interessant sind aber die Möglichkeiten, die entstehen, wenn  $n$  sinkt. In Abbildung 4.10 werden für  $n \in (0.005, 0.02)$  die Steady State Werte geplottet. Es ist zu sehen, dass diese umso höher werden, je kleiner das Bevölkerungswachstum ist.

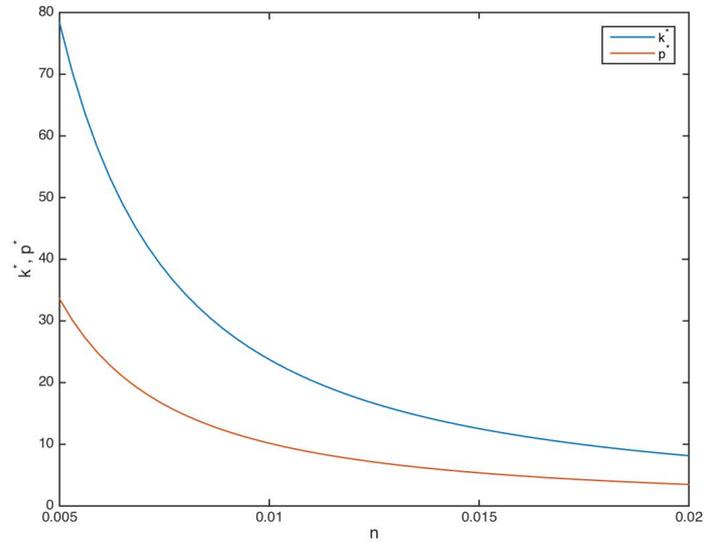


Abbildung 4.10:  $n$  zwischen 0.005 und 0.02

In Abbildung 4.11 ist das Phasenportrait für  $n = 0$  zu sehen. Im Gegensatz zu Abbildung 4.1 kommt es hier zu einem Balanced Growth Path. Der Bifurkationspunkt für  $n$  liegt etwa bei 0.00034. Wenn das Bevölkerungswachstum also noch weiter abnimmt, kann es auch zu Wachstum durch Roboter kommen. Es erscheint auch plausibel, dass vermehrt Roboter eingesetzt werden, wenn zu wenige Arbeitskräfte verfügbar sind. Umgekehrt könnte ein zu hohes Bevölkerungswachstum die Entwicklung von Robotern verhindern, da sie dann nicht so dringend benötigt werden.

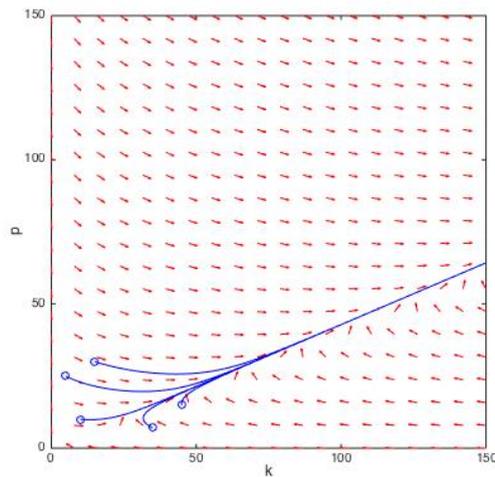


Abbildung 4.11: Phasenportrait für  $n = 0$ .

### Verschiedene Abschreibungsraten $\delta_K, \delta_P$

Man kann analog zu Prettner (2016) verschiedene Abschreibungsraten für Kapital und Roboter verwenden. Die Werte werden von dort übernommen, sodass  $\delta_K = 0.05$  und  $\delta_P = 0.1313$  gilt.

In Abbildung 4.12 ist zu sehen, dass die Steady State Werte für  $k$  und  $p$  deutlich geringer ausfallen. Durch die schnellere Abschreibung von Robotern wird  $\dot{p}$  im Vergleich zu vorher kleiner, d.h. die Pfeile zeigen stärker nach unten.

Abbildungen 4.13 und 4.14 zeigen, dass durch die höhere Abschreibungsrate der Roboter, das Wachstum aus 4.2 und 4.3 nicht mehr möglich ist. Nicht einmal durch sehr hohe Investitionen in Roboter kann dieses erreicht werden. Ähnliches würde man auch mit einer einheitlichen Abschreibungsrate beobachten, wenn diese zu hoch ist.

Damit es trotzdem zu Wachstum kommt, müsste neben dem Anstieg der Abschreibung z.B. auch die Effizienz von Robotern oder deren Fähigkeit zur Substitution von “skilled worker” zunehmen.

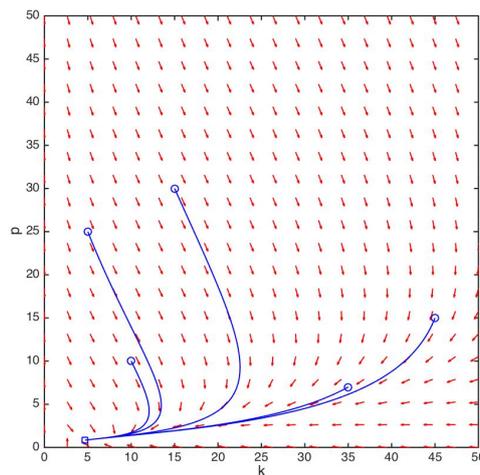


Abbildung 4.12: Der Steady State tritt auf. Er liegt ungefähr bei  $k = 4.7$  und  $p = 0.8$ .

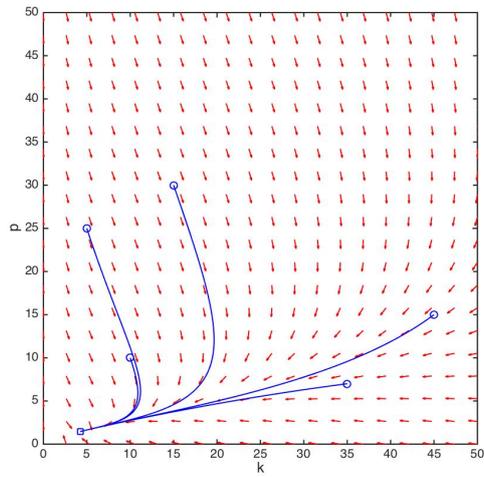


Abbildung 4.13:  $s_M = 0.55$ . Steady State liegt bei ungefähr  $k = 4.2$  und  $p = 1.5$ .

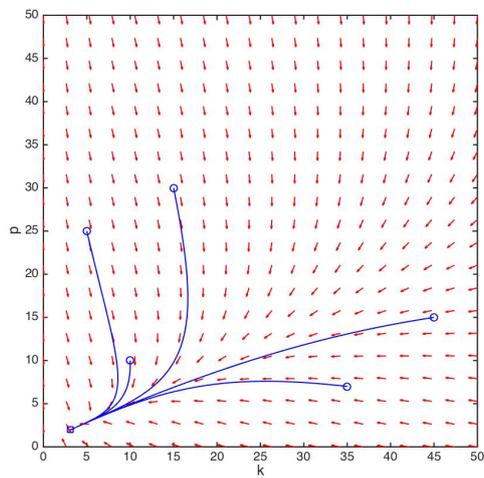


Abbildung 4.14:  $s_M = 0.40$ . Steady State liegt bei ungefähr  $k = 3.1$  und  $p = 2.0$ .

## 4.6 Zusammenfassung

Das Modell ist konsistent mit den Ergebnissen aus Prettner (2016). Auch hier kommt es entweder zu einem Steady State oder einem BGP. Die Bedingung für das ausbalancierte Wachstum ist - bis auf den neuen Faktor für die Effizienz und die Substitutionselastizität - die gleiche. Das Wachstum tritt eher ein, wenn die Roboter effizienter sind und sie Arbeitskraft besser substituieren können oder ihre Abschreibungsrate kleiner wird. Auch wenn das heute noch nicht der Fall wäre, könnte es durch eine weitere Verbesserungen zu Wachstum kommen, welches ausschließlich durch Roboter induziert ist.

Die Annahme, dass “unskilled worker” im Gegensatz zu “skilled worker” perfekt substituiert werden können, führt dazu, dass diese besonders von der Automatisierung betroffen sind. Ihre Löhne sinken stärker als die der besser Ausgebildeten (deren Löhne sogar steigen können, wenn der Produktivitätsanstieg den Substitutionseffekt überkompensiert) und die Skill Premium steigt. Diese Modellierung kann auch das Sinken ihrer Reallöhne erklären, wie es etwa in den letzten 30 Jahren zu beobachten war. In verschiedenen Szenarien wurde gezeigt, dass durch eine wachsende Anzahl an Robotern die Skill Premium steigt, wenn der Anteil der besser ausgebildeten Arbeitskräfte ansteigt, obwohl das als *ceteris paribus* Veränderung zu einem Sinken dieser führen würde.

Es ist in Simulationen zu sehen, dass Roboter möglicherweise eher eingesetzt werden, wenn das Bevölkerungswachstum zu niedrig ist. In diesem Fall könnten Roboter eine Chance darstellen, die nicht nur fehlende Arbeitskräfte ersetzt, sondern auch zu Wachstum führt.

Die Verwendung einer zweiten Abschreibungsrate verändert wie bei Prettner (2016) die wesentlichen Ergebnisse nicht. Wenn die Rate für Roboter aber zu hoch ist, wird durch Automatisierung induziertes Wachstum unwahrscheinlicher.

## Kapitel 5

# OLG Modell mit Robotern und zwei Skill-Gruppen

### 5.1 Annahmen

In diesem Kapitel wird ein OLG-Modell betrachtet, in welches ebenfalls Roboter eingeführt werden. Es gibt wieder zwei verschiedene Arten von Arbeitskräften, die wie oben mit “skilled” und “unskilled worker” bezeichnet werden. Bezüglich der Substitutionsmöglichkeit zwischen Robotern und Arbeitskräften gelten die gleichen Annahmen wie im Modell aus Kapitel 4: “Unskilled worker” sind perfekt substituierbar, “skilled worker” imperfekt. Weiters wird wieder angenommen, dass der Anteil der “skilled” bzw. “unskilled worker” an der Gesamtbevölkerung konstant ist. Eine andere interessante Möglichkeit wäre wiederum, dass Arbeiter in Humankapital bzw. Bildung investieren können und dadurch zu einem “skilled worker” aufsteigen können. Dies wird jedoch nicht betrachtet, da es den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

Die Individuen leben zwei Zeitperioden lang. Sie arbeiten nur in der ersten Periode und wollen in beiden Perioden konsumieren. Den Lohn, den sie für ihre Arbeit bekommen, können sie direkt für Konsum in der ersten Periode ausgeben oder in Kapital anlegen bzw. sparen und mit den Erträgen den Konsum in der zweiten Periode finanzieren. Wie in den bisherigen Modellen gibt es zwei verschiedene Formen der Investition: Herkömmliches physisches Kapital und Roboter. Da es auch hier optimierende Haushalte gibt, wird wie im Modell von Steigum (2011) angenommen, dass die No-Arbitrage-Condition erfüllt ist, d.h. die Erträge bzw. Zinssätze für physisches Kapital und Roboter sollen gleich sein. Außerdem gilt für beide Sparformen, dass das vorhandene Kapital beim Übergang in die nächste Periode komplett abgeschrieben wird. Da das Leben nur in zwei Perioden eingeteilt wird und deren Dauer somit recht hoch ist, ist diese Annahme

durchaus sinnvoll und auch üblich.

## 5.2 Das Modell

### 5.2.1 Haushalte

Das Verhalten der Individuen wird durch die Nutzenfunktion

$$u_t = \ln(c_{1,t}) + \theta \ln(R_{t+1}s_t) \quad (5.1)$$

modelliert.  $c_{1,t}$  bezeichnet den Konsum der Generation  $t$  in ihrer ersten Periode,  $\theta \in (0, 1)$  den Zeitpräferenzfaktor, der angibt wie stark die Zukunft abdiskontiert wird,  $R_{t+1}$  die Bruttoertragsrate der Ersparnis  $s_t$ . Für den Konsum in der zweiten Periode folgt damit  $c_{2,t+1} = R_{t+1}s_t$ . Individuen können keine Schulden machen und müssen die Budgetrestriktion, welche durch

$$w_t = c_{1,t} + s_t \quad (5.2)$$

gegeben ist, einhalten. Die Individuen maximieren ihren Nutzen aus (5.1) unter Einhaltung der Nebenbedingung (5.2). Diese Nutzenmaximierung ist unabhängig davon, ob es sich um "skilled" oder "unskilled worker" handelt. Da sie verschiedene Löhne erhalten, werden sie dennoch ein unterschiedliches Nutzenniveau erreichen. Weil aber Individuen Preisnehmer sind und ihren Lohn als gegeben ansehen, muss das Problem nur einmal gelöst werden und zu Gunsten einer höheren Übersicht werden Indizes für die verschiedenen Arten von Arbeitern vorerst weggelassen.

Durch Lösen mittels Lagrange-Funktion erhält man den optimalen Pro-Kopf Konsum und die optimale Pro-Kopf Ersparnis:

$$c_{1,t} = \frac{w_t}{1 + \theta} \quad (5.3)$$

$$s_t = \frac{\theta w_t}{1 + \theta} \quad (5.4)$$

Die Bevölkerung wächst mit Rate  $n$ , d.h.

$$N_{t+1} = N_t(1 + n). \quad (5.5)$$

Die Anteile der “skilled” bzw. “unskilled worker” an der Bevölkerung sollen konstant bleiben, d.h.

$$\frac{L_{s,t}}{N_t} = l_s \quad \text{und} \quad \frac{L_{u,t}}{N_t} = l_u, \quad (5.6)$$

wobei  $L_{s,t}$  die Anzahl der “skilled worker” der Generation  $t$  und  $L_{u,t}$  jene der “unskilled” beschreibt. Ab sofort bezeichnet der erste Index für alle Variablen, die sich für die Klassen “skilled” und “unskilled” unterscheiden (z.B. Anzahl und Löhne), die Art der Arbeitsklasse und der zweite die Generation.

## 5.2.2 Produktionssektor

Die aggregierte Produktion wird durch die gleiche Produktionsfunktion wie im Modell aus Kapitel 4 beschrieben:

$$Y_t = A_t [(1 - \beta)L_{s,t}^\gamma + \beta(P_t + L_{u,t})^\gamma]^{\frac{1-\alpha}{\gamma}} K_t^\alpha \quad (5.7)$$

Das technologische Niveau  $A_t$  wird wieder auf 1 normiert, damit exogene Wachstumseffekte keine Rolle spielen.

Da Firmen im Produktionssektor ihren Profit maximieren und es sich dabei um einen vollständigen Wettbewerbsmarkt handelt, werden alle Produktionsfaktoren mit dem jeweiligen Grenzprodukt entlohnt und es existieren keine Profite, d.h. es gilt wie vorher

$$w_{s,t} = \frac{\partial Y_t}{\partial L_{s,t}} = (1 - \alpha)Y_t \cdot \frac{(1 - \beta)L_{s,t}^{\gamma-1}}{(1 - \beta)L_{s,t}^\gamma + \beta(P_t + L_{u,t})^\gamma} \quad (5.8)$$

$$w_{u,t} = R_{t+1}^P = \frac{\partial Y_t}{\partial L_{u,t}} = \frac{\partial Y_t}{\partial P_t} = (1 - \alpha)Y_t \cdot \frac{\beta(P_t + L_{u,t})^{\gamma-1}}{(1 - \beta)L_{s,t}^\gamma + \beta(P_t + L_{u,t})^\gamma} \quad (5.9)$$

$$R_{t+1}^K = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha \frac{Y_t}{K_t} \quad (5.10)$$

$$Y_t = w_{s,t}L_{s,t} + w_{u,t}L_{u,t} + R_{t+1}^K K_t + R_{t+1}^P P_t, \quad (5.11)$$

wobei  $R_{t+1}^K$  die Ertragsrate von Maschinen und  $R_{t+1}^P$  jene von Robotern ist. Zusätzlich können die Löhne und Zinsen in Pro-Kopf Variablen ausgedrückt werden. Dabei werden aggregierte Größen durch die jeweilige Pro-Kopf Größe ersetzt.

Da angenommen wird, dass die No-Arbitrage-Condition erfüllt ist und die beiden Zinssätze

gleichgesetzt werden können, folgt eine Darstellung des Kapitals  $K_t$  als Funktion der Roboter  $P_t$ :

$$K_t = \frac{\alpha}{(1-\alpha)\beta} \frac{(1-\beta)L_{s,t}^\gamma + \beta(P_t + L_{u,t})^\gamma}{\beta(P_t + L_{u,t})^{\gamma-1}} \quad \text{bzw.} \quad (5.12)$$

$$k_t = \frac{\alpha}{(1-\alpha)\beta} \frac{(1-\beta)l_s^\gamma + \beta(p_t + l_u)^\gamma}{\beta(p_t + l_u)^{\gamma-1}} \quad (5.13)$$

Es muss allerdings beachtet werden, dass die No-Arbitrage-Condition nicht für alle Parameterkonstellationen erfüllt sein kann. Besonders für einen niedrigen Bestand an Kapital und Robotern kann der Fall auftreten, dass der Zinssatz für Kapital größer ist als jener für Roboter. Genauer gilt, dass der Zinssatz für Kapital immer höher ist, wenn

$$k_t < \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1-\beta}{\beta} l_s^\gamma l_u^{1-\gamma} + l_u. \quad (5.14)$$

Das liegt daran, dass  $\lim_{K_t \rightarrow 0} \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \infty$ , aber  $\lim_{P_t \rightarrow 0} \frac{\partial Y_t}{\partial P_t} < \infty$  bzw. dass  $K_t$  die Inada-Bedingungen erfüllt,  $P_t$  aber nicht. Da aufgrund der Annahme einer Cobb-Douglas Produktionsfunktion ohne Kapital nicht produziert werden kann, Roboter aber durch Arbeitskräfte substituiert werden können und nicht unbedingt notwendig sind, wird in einer Ökonomie mit geringer Ersparnis nur in Kapital investiert. Erst wenn mehr gespart wird, kommt es zu Investitionen in Roboter. Da nicht in Roboter investiert wird, wenn Ungleichung (5.14) gilt, ist zu sehen, dass eher in Roboter investiert wird, wenn die rechte Seite kleiner wird und die Ungleichung nicht mehr erfüllt ist. Das ist unter anderem dann der Fall, wenn  $\alpha$  abnimmt oder  $\beta$  zunimmt, d.h. wenn der Arbeitsprozess nicht so kapitalintensiv ist oder die Effizienz von Robotern zunimmt.

## 5.3 Steady States und Wachstum

### 5.3.1 Steady State

Wichtig für Steady States und potenzielles Wachstum im Modell ist die Ersparnis, welche aus der Optimierung der Haushalte folgt. Dadurch und durch die No-Arbitrage-Condition sind die Investitionen in Kapital und Roboter bestimmt. So setzt sich der gesamte Stock an Kapital und Robotern der Periode  $t+1$ , welcher mit  $S_{t+1}$  bezeichnet

wird, aus den Ersparnissen der vorherigen Periode zusammen, d.h.

$$S_{t+1} = K_{t+1} + P_{t+1} = s_{s,t}L_{s,t} + s_{u,t}L_{u,t}, \quad (5.15)$$

wobei sich die jeweilige Ersparnis nur aufgrund der verschiedenen Löhne unterscheidet. Der Anteil am Lohn ist für “skilled” und “unskilled worker” jeweils  $\theta/(1+\theta)$ . Der Kapitalstock der vorigen Periode  $S_t$  ist nicht mehr vorhanden, da er komplett abgeschrieben wird.

Gleichung (5.15) kann in Ausstattung pro Arbeitskraft umgerechnet werden, wobei wichtig ist, dass das Kapital von  $N_t$  Personen gespart wurde, aber auf  $N_{t+1}$  aufgeteilt wird:

$$s_{t+1} = \frac{S_{t+1}}{N_{t+1}} = k_{t+1} + p_{t+1} = s_{s,t} \frac{l_s}{1+n} + s_{u,t} \frac{l_u}{1+n} \quad (5.16)$$

Unter Annahme der No-Arbitrage-Condition folgt durch Einsetzen der Ersparnis aus (5.4), der Löhne aus (5.8) und (5.9) und des Pro-Kopf Kapitals aus (5.13):

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= \underbrace{\frac{\theta}{1+\theta} \frac{1-\alpha}{1+n} \left( \frac{\alpha}{(1-\alpha)\beta} \right)^\alpha}_{=:c} (l_u + p_t)^{(1-\gamma)\alpha} [(1-\beta)l_s^\gamma + \beta(p_t + l_u)^\gamma]^{\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma}} \\ &\quad \cdot \left[ (1-\beta)l_s^\gamma + \beta(p_t + l_u)^\gamma \frac{l_u}{l_u + p_t} \right] \\ &= c(l_u + p_t)^{(1-\gamma)\alpha-1} [(1-\beta)l_s^\gamma + \beta(p_t + l_u)^\gamma]^{\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma}} [(l_u + p_t)(1-\beta)l_s^\gamma + l_u\beta(p_t + l_u)^\gamma] \end{aligned} \quad (5.17)$$

Es gilt aber auch  $s_{t+1} = k_{t+1} + p_{t+1}$  und wieder durch Einsetzen des Pro-Kopf Kapitals aus (5.13) folgt:

$$s_{t+1} = p_{t+1} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)\beta} \frac{(1-\beta)l_s^\gamma + \beta(p_{t+1} + l_u)^\gamma}{\beta(p_{t+1} + l_u)^{\gamma-1}} \quad (5.18)$$

Durch Gleichsetzen von (5.17) und (5.18) erhält man eine implizite Gleichung für die Anzahl der Roboter pro Arbeitskraft in  $t+1$  in Abhängigkeit der Anzahl aus  $t$ . Ein möglicher Steady State in dem  $p_t$  und  $k_t$  konstant gleich  $p^*$  und  $k^*$  sind, ist durch die folgende Gleichung implizit gegeben:

$$\begin{aligned} p^* + k^* &= p_{t+1} + k_{t+1} \\ &= p^* + \frac{\alpha}{(1-\alpha)\beta} \frac{(1-\beta)l_s^\gamma + \beta(p^* + l_u)^\gamma}{\beta(p^* + l_u)^{\gamma-1}} \\ &\stackrel{!}{=} c(l_u + p^*)^{(1-\gamma)\alpha-1} [(1-\beta)l_s^\gamma + \beta(p^* + l_u)^\gamma]^{\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma}} \\ &\quad \cdot [(l_u + p^*)(1-\beta)l_s^\gamma + l_u\beta(p^* + l_u)^\gamma] = s^* \end{aligned}$$

Dabei handelt es sich um die Gleichung für einen Steady State, bei dem die No-Arbitrage-Condition erfüllt ist. Alternativ könnte es auch einen geben, in dem nur in Kapital investiert wird, da der Zinssatz dafür immer höher ist. Dieser ist durch

$$k^* = \left( \frac{1 - \alpha}{1 + n} \frac{\theta}{1 + \theta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} [(1 - \beta)l_s^\gamma + \beta l_u^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (5.19)$$

gegeben. Allerdings kann je nach Parametrisierung des Modells nur einer der beiden Steady States auftreten.

### 5.3.2 Wachstum

Im Folgenden wird gezeigt, dass hier im Unterschied zu den vorherigen Modellen kein unbegrenztes Wachstum durch Roboter existieren kann und damit auch kein Balanced Growth Path mit einer konstanten positiven Wachstumsrate vorliegen kann.

Wenn nur in Kapital investiert wird, kommt es auf jeden Fall zu dem Steady State aus Gleichung (5.19) und damit nicht zu Wachstum. Unter Verwendung der No-Arbitrage-Condition wird gezeigt, dass die Bruttowachstumsrate des Kapitalstocks  $\frac{p_{t+1} + k_{t+1}}{p_t + k_t}$  mit steigendem Kapital (oder mit  $p_t \rightarrow \infty$  und damit auch  $k_t \rightarrow \infty$ ) gegen 0 geht. Das bedeutet, dass es eine Größe für  $p_t$  gibt, ab der die Wachstumsrate kleiner 1 ist und der Kapitalstock damit abnimmt.

Um  $\frac{p_{t+1} + k_{t+1}}{p_t + k_t}$  nach oben abzuschätzen, werden folgende Ungleichungen benötigt:

$$\begin{aligned} p_t + k_t &= p_t + \frac{\alpha}{(1 - \alpha)\beta} \frac{(1 - \beta)l_s^\gamma + \beta(p_t + l_u)^\gamma}{\beta(p_t + l_u)^{\gamma-1}} \\ &> \frac{\alpha}{(1 - \alpha)\beta} \frac{\beta(p_t + l_u)^\gamma}{\beta(p_t + l_u)^{\gamma-1}} \\ &= \frac{\alpha}{(1 - \alpha)\beta} (l_u + p_t) \end{aligned}$$

Für den folgenden Term, der in  $p_{t+1} + k_{t+1}$  vorkommt, gilt:

$$\begin{aligned} [(1 - \beta)l_s^\gamma + \beta(p_t + l_u)^\gamma]^{\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma}} &\leq 2^{\frac{1}{\gamma}-1} \left[ (1 - \beta)^{\frac{1}{\gamma}} l_s + \beta^{\frac{1}{\gamma}} (p_t + l_u) \right]^{(1-\alpha)(1-\gamma)} \\ &\leq 2^{\frac{1}{\gamma}-1} \left[ (1 - \beta)^{\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma}} l_s^{(1-\alpha)(1-\gamma)} + \beta^{\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma}} (p_t + l_u)^{(1-\alpha)(1-\gamma)} \right] \end{aligned}$$

Wichtig für die Abschätzung ist die Ungleichung  $x^q + y^q \leq (x + y)^q \leq 2^{q-1}(x^q + y^q)$  für  $x, y \geq 0$  und  $q \in [1, +\infty]$  und die Tatsache, dass mit  $\gamma \in (0, 1)$  folgt, dass  $1/\gamma \in [1, +\infty]$ . Im ersten Schritt wird  $x := (1 - \beta)l_s^\gamma$ ,  $y := \beta(p_t + l_u)^\gamma$  und  $q := \frac{1}{\gamma}$  gesetzt. Für den zweiten Teil wird die Subadditivität der Funktion  $f(x) := x^{(1-\alpha)(1-\gamma)}$  benötigt, die durch

die Konkavität und die Tatsache, dass diese Funktion nichtnegativ ist, impliziert wird. Subadditivität bedeutet, dass  $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ . Für die obige Abschätzung wird dann  $x := (1 - \beta)^{\frac{1}{\gamma}} l_s$  und  $y := \beta^{\frac{1}{\gamma}} (p_t + l_u)$  gesetzt. Insgesamt folgt mit  $\tilde{c} := \frac{c(1-\alpha)\beta}{\alpha}$ :

$$\begin{aligned} \frac{p_{t+1} + k_{t+1}}{p_t + k_t} &\leq \tilde{c} (l_u + p_t)^{(1-\gamma)\alpha-2} [(1-\beta)l_s^\gamma + \beta(p_t + l_u)^\gamma]^{\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma}} [(l_u + p_t)(1-\beta)l_s^\gamma + l_u\beta(p_t + l_u)^\gamma] \\ &\leq \tilde{c} (l_u + p_t)^{(1-\gamma)\alpha-2} 2^{\frac{1}{\gamma}-1} \left[ (1-\beta)^{\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma}} l_s^{(1-\alpha)(1-\gamma)} + \beta^{\frac{(1-\alpha)(1-\gamma)}{\gamma}} (p_t + l_u)^{(1-\alpha)(1-\gamma)} \right] \\ &\quad \cdot [(l_u + p_t)(1-\beta)l_s^\gamma + l_u\beta(p_t + l_u)^\gamma] \\ &= c_1 (l_u + p_t)^{(1-\gamma)\alpha-1} + c_2 (l_u + p_t)^{(1-\gamma)\alpha+\gamma-2} + c_3 (l_u + p_t)^{(1-\gamma)-1} + c_4 (l_u + p_t)^{(1-\gamma)+\gamma-2} \end{aligned}$$

Mit  $c_1, \dots, c_4$  werden dabei die von  $p_t$  unabhängigen Konstanten bezeichnet, die im letzten Schritt auftreten. Da alle Exponenten auf der rechten Seite negativ sind, geht der Ausdruck mit  $p_t \rightarrow \infty$  gegen 0. Somit geht auch  $\frac{p_{t+1} + k_{t+1}}{p_t + k_t}$  gegen 0, womit der Kapitalstock nicht beständig wachsen kann.

Dieses Ergebnis ist mit Gasteiger und Prettnner (2017) konsistent. Dort wird gezeigt, dass in OLG-Modellen mit Robotern ohne zusätzliche Annahmen kein Wachstum möglich ist. Der Grund dafür liegt laut den Autoren darin, dass beim OLG-Modell nur ein Teil des Lohneinkommens gespart wird und nicht wie bei anderen Modellen auch ein Teil des Kapitaleinkommens. Durch die Einführung von Robotern sinken die Löhne und die Ersparnis geht zurück.

## 5.4 Roboter und Löhne

Dass es nicht zu Wachstum kommen kann, ändert nichts an den Implikationen von Robotern für die Löhne. Da die Produktionsfunktion die gleiche wie im vorherigen Modell ist, bleiben diese alle gültig: Roboter führen in jedem Fall zu einem Anstieg der Skill Premium. Die Löhne der “unskilled worker” sinken durch einen Anstieg von Robotern. Jene der “skilled worker” können ansteigen oder auch sinken. Auf jeden Fall sind “unskilled worker” stärker betroffen und schlechter gestellt.

## 5.5 Simulationen und numerische Ergebnisse

Im Gegensatz zum Modell aus Kapitel 4 gibt es hier keine Möglichkeit für einen Wachstumspfad. Damit muss nicht zwischen Steady State und Balanced Growth Path unterschieden werden. Trotzdem gibt es bei Variationen der Parameter auch Veränderungen

der endogenen Variablen (Kapital, Roboter und Löhne), die in diesem Abschnitt untersucht werden. Es werden zunächst wieder Standardwerte für die verschiedenen Parameter angenommen, die in Tabelle 5.1 zu sehen sind. Neu ist nur der Zeitpräferenzfaktor  $\theta$ , der auf 0.9 gesetzt wurde. Die Anfangswerte der beiden Kapitalarten  $k(0)$  und  $p(0)$  wurde der Einfachheit halber auf 0.1 gesetzt. Für  $\alpha$  werden zwei verschiedene Werte verwendet, da erst mit einem niedrigeren Wert in Roboter investiert wird.

Tabelle 5.1: Parameter der Simulation

Parameter	Wert	Anmerkung
$s$	0.25	Sparrate
$\alpha$	0.33 bzw. 0.1	Produktionselastizität von Kapital
$\beta$	0.6	Effizienzparameter für Roboter und “unskilled worker”
$\gamma$	0.5	Parameter der CES Funktion für Substitutionsfähigkeit
$n$	0.009	Geburtenrate
$l_s$	0.25	Anteil der “skilled worker”
$l_u$	0.75	Anteil der “unskilled worker”
$\theta$	0.90	Zeitpräferenzfaktor
$k(0)$	0.1	Anfangswert für Kapital
$p(0)$	0.1	Anfangswert für Roboter

In Abbildung 5.1 wird der Verlauf von  $k$  und  $p$  für die Standardwerte mit  $\alpha = 0.33$  gezeigt. Es ist zu sehen, dass sich unter diesen Bedingungen die Investition in Roboter nicht lohnt. Das liegt daran, dass nur wenig produziert und gespart werden kann. Für die geringe Menge an Ersparnis ist der Zinssatz für Kapital immer höher als für Roboter. Ohne ersteres kann nicht produziert werden, zweitens können aber durch Arbeitskraft substituiert werden.

Es kann beobachtet werden, dass der Steady State sehr schnell erreicht wird. Deswegen macht es im OLG-Modell weniger Sinn die Veränderungen von Löhnen bzw. der Skill Premium zu betrachten. Es gelten zwar die selben Gleichungen für Löhne und Skill Premium, die Effekte sind aber nicht so gut zu sehen, da das Gleichgewicht sofort erreicht wird und sich dann nichts mehr ändert. Um das zu demonstrieren werden in Abbildung 5.2 die Löhne geplottet. Es ist zu sehen, dass die Löhne der “unskilled worker” von der nullten auf die erste Periode steigen und die der “skilled” sinken. Das liegt daran, dass anfangs Roboter existieren, später aber nicht mehr.

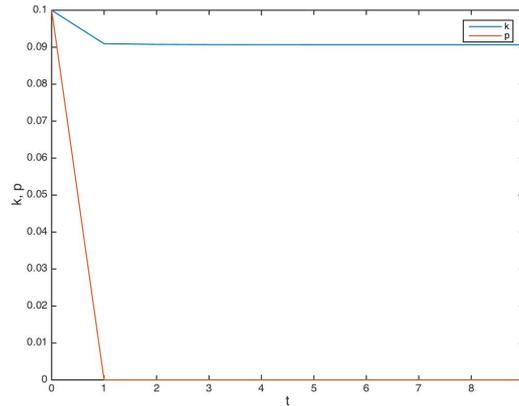


Abbildung 5.1: Plot für die Standardwerte. Es wird auf Roboter verzichtet und nur in Kapital investiert.

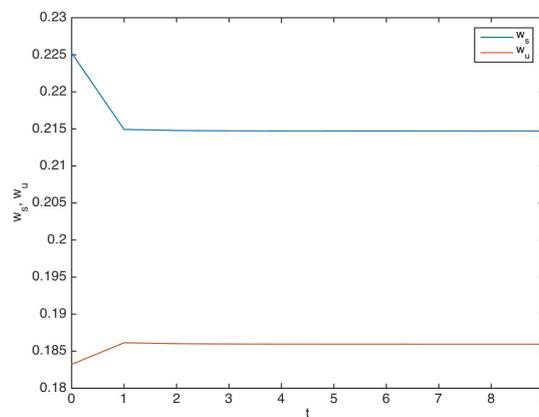


Abbildung 5.2: Plot für die Standardwerte. Nachdem der Steady State sofort erreicht wird, sind danach keine Veränderungen zu sehen.

### Veränderungen von $\alpha$

Es kommt erst zu Investitionen in Roboter, wenn herkömmliche Maschinen unwichtiger und ineffizienter werden, d.h. wenn die Produktionselastizität von Kapital  $\alpha$  sinkt. Dadurch werden Roboter (und auch Menschen) effizienter und bedeutender für die Produktion. Es kommt zu einem Anstieg von deren Anteil an der Produktion. In Abbildung 5.3 sind die Gleichgewichtswerte für Kapital und Roboter für alle Werte  $\alpha \in (0, 1)$  gezeigt. Es sind zwei Beobachtungen zu sehen:

- Mit steigendem  $\alpha$  nimmt der Gleichgewichtswert für Roboter ab, da diese unwichtiger werden und der für Kapital zu. Ab dem Bifurkationspunkt von etwa  $\alpha = 0.147$

wird nicht mehr in Roboter investiert, da sie zu ineffizient sind. Es wird dann nur mehr in Kapital investiert.

- Wächst  $\alpha$  über den Bifurkationspunkt hinaus, sinkt der Steady State Wert für Kapital, obwohl dessen Bedeutung für die Produktion zunimmt. Das scheint zunächst kontraintuitiv, passt aber gut zum Ergebnis von Gasteiger und Prettnner (2017): Im Gegensatz zum Solow- und Ramsey-Modell wird im OLG-Modell nur ein Teil des Lohns investiert und es gibt keine Erträge aus Maschinen oder Robotern, die wiederum angelegt werden können. Ein größeres  $\alpha$  bedeutet auch, dass Arbeitskräfte unwichtiger werden. Dadurch sinkt der Lohn und es kann weniger gespart werden, wodurch der Kapitalstock abnimmt.

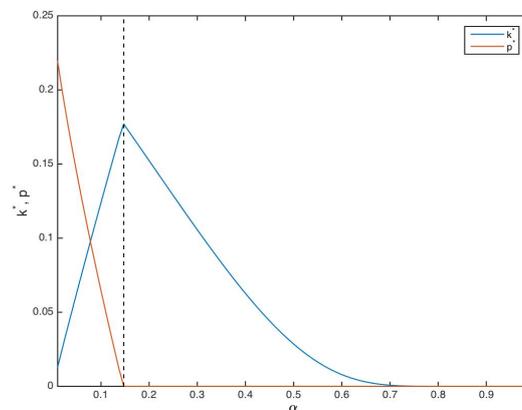


Abbildung 5.3: Bifurkationsdiagramm für  $\alpha \in (0, 1)$ .

### Veränderungen von $\beta$ und $\gamma$

Hier werden Bifurkationsdiagramme für die Effizienz von Robotern  $\beta$  und die Substitutionsfähigkeit  $\gamma$  gezeichnet. Für den Parameter  $\alpha = 0.33$  werden zwei Diagramme gezeichnet, ebenso für  $\alpha = 0.10$ .

In Abbildung 5.4 kommt es weder durch die Variation von  $\beta$  noch von  $\gamma$  zu Investitionen in Roboter. Die Ökonomie produziert dafür nicht genug. In diesem Stadium ist Kapital immer attraktiver als Roboter. Man sieht, dass eine Erhöhung von  $\beta$  oder  $\gamma$  zu mehr Kapital führt. Das liegt daran, dass mehr Leute “unskilled worker” sind. Steigt  $\beta$ , so wächst auch die durchschnittliche Produktion und damit die durchschnittliche Ersparnis. Es ist zwar unwahrscheinlich, dass dieser Parameter so hoch wird, dennoch werden die Möglichkeiten dafür gezeigt. Auch durch eine Erhöhung von  $\gamma$  kann mehr produziert

und gespart werden, da “unskilled worker”, von denen mehr vorhanden sind, “skilled worker” besser substituieren können.

Wie in Abbildung 5.5 zu sehen ist, wird für niedrigeres  $\alpha = 0.10$  auch ab einer bestimmten Effizienz von Robotern in diese investiert. Ab dem Bifurkationspunkt von ungefähr 0.377 nehmen die Investitionen in Roboter für steigendes  $\beta$  stetig zu und jene für Maschinen ab. Mit wachsendem  $\gamma$ , also wenn Roboter besser substituieren können, nehmen ebenfalls die Investitionen in Roboter zu.

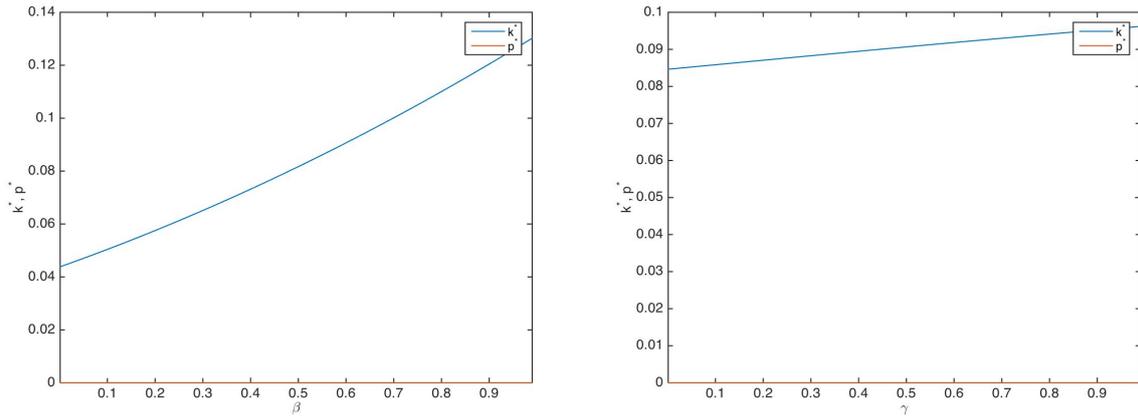


Abbildung 5.4: Links wird  $\beta$  variiert, rechts  $\gamma$ ,  $\alpha = 0.33$ .

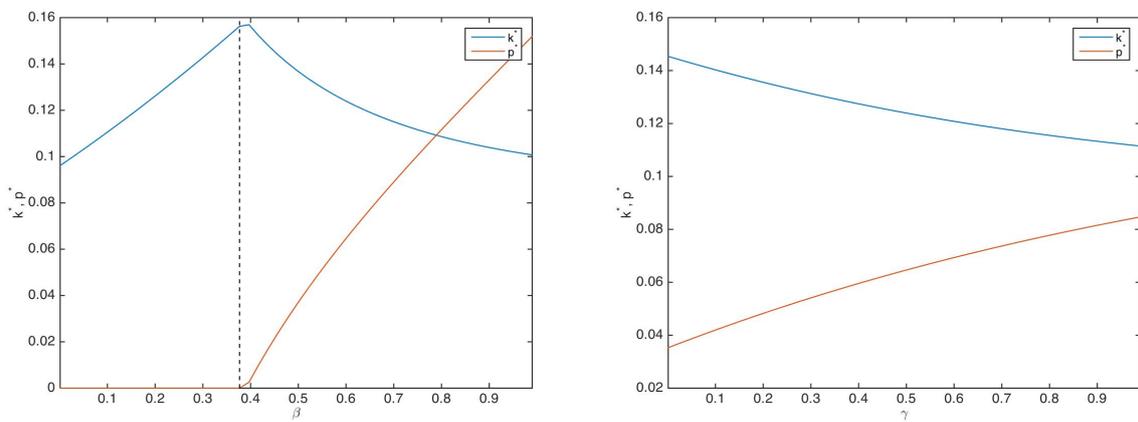


Abbildung 5.5: Links wird  $\beta$  variiert, rechts  $\gamma$ ,  $\alpha = 0.1$

## Veränderung von $\theta$

In Abbildung 5.6 wird der Zeitpräferenzfaktor  $\theta$  variiert. Dabei ist im linken Bild  $\alpha = 0.33$ , weswegen nur in Kapital investiert wird. Wird mehr Gewicht auf die Zukunft gelegt, steigt der Kapitalstock. Rechts gilt  $\alpha = 0.1$ . Ist  $\theta$  zu klein, so ist die Gesamtersparnis klein und fließt zur Gänze in Maschinen. Für eine niedrige Ersparnis ist der Zinssatz für Kapital immer höher als für Roboter. Mit steigendem  $\theta$  steigt auch die Ersparnis, sodass ab dem Bifurkationspunkt  $\theta = 0.397$  auch in Roboter investiert wird.

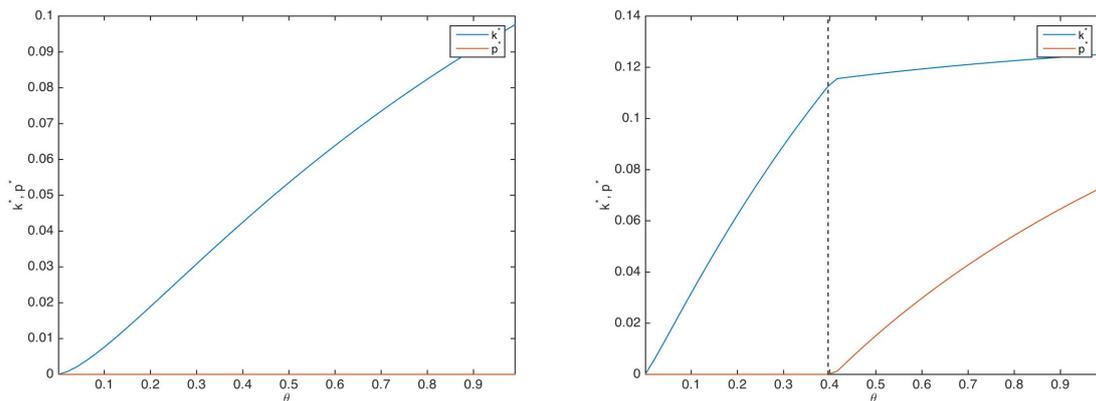


Abbildung 5.6: Bifurkationsdiagramme für  $\theta$ . Links für  $\alpha = 0.33$ , rechts für  $\alpha = 0.1$ .

## Veränderungen von $n$ , $l_s$ und $l_u$

Durch Ansteigen der Bevölkerungswachstumsrate  $n$  sinken immer die Steady State Werte für Kapital, wie in Abbildung 5.7 zu sehen ist. Genau das gleiche wäre auch im Fall mit Robotern zu sehen. Im Gegensatz zu Kapitel 4 gibt es keinen Bifurkationspunkt. Werden die Anteile der “skilled” bzw. “unskilled worker”  $l_s$  und  $l_u$  verändert, so sind die Ergebnisse folgendermaßen “verzerrt”: Da  $l_u$  etwas produktiver sind (aufgrund der Annahme, dass sie die gleiche Effizienz wie Roboter haben und diese höher sein soll), sinkt der Pro-Kopf Kapitalstock und deswegen auch die Produktion, wenn der Anteil an “skilled worker” zu hoch wird. Dies ist sicherlich etwas unrealistisch und könnte mit verschiedenen Effizienzen für “unskilled worker” und Roboter verbessert werden. In diesem Fall müsste ähnlich wie bei Steigung (2011) ein zusätzlicher Parameter eingeführt werden, mit dem Roboter in der Produktionsfunktion multipliziert werden. Zur Vereinfachung wird hier (und auch im Modell aus Kapitel 4) darauf verzichtet. Für die wichtigen qualitativen Effekte ist ausschließlich die Effizienz der Roboter wichtig und nicht jene

der “unskilled worker”.

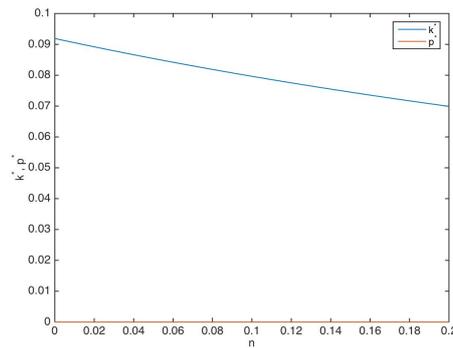


Abbildung 5.7: Bifurkationsdiagramm für  $n \in (0, 0.2)$ .

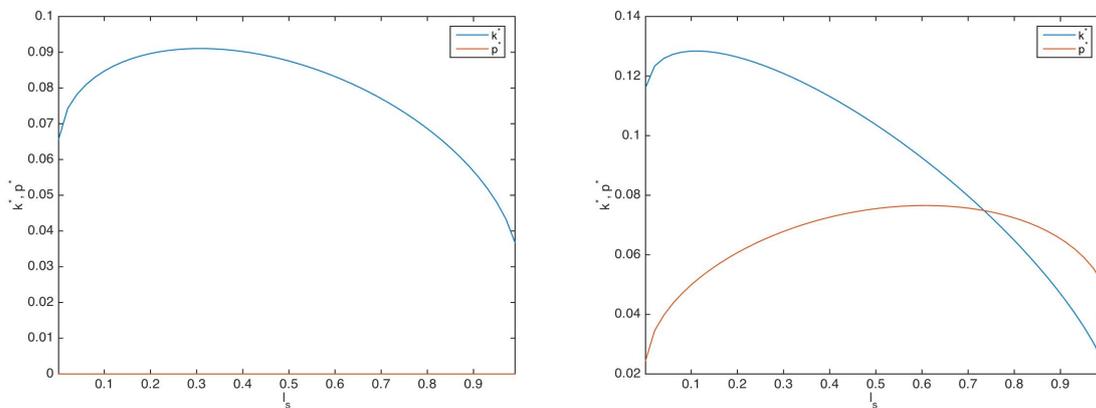


Abbildung 5.8: Links für  $\alpha = 0.33$ , rechts für  $\alpha = 0.1$ .

## 5.6 Zusammenfassung

In diesem OLG-Modell kann es zu keinem Wachstum durch Roboter kommen, was auch in Gasteiger und Prettnner (2017) zu sehen ist. In diesem Rahmen ist es auch sehr unwahrscheinlich, dass überhaupt in Roboter investiert wird. Der Zinssatz für Kapital ist oft höher, sodass nur dieses als Sparform verwendet wird. Das liegt daran, dass Kapital  $K$  für die Produktion dringender benötigt wird als Roboter  $P$ , da diese perfekt substituiert werden können. Erst wenn  $\alpha$  und damit die Bedeutung von herkömmlichen Maschinen, die auch menschliche Arbeitskraft benötigen, sinken, können mit Robotern die gleichen Erträge erzielt werden. Erst dann wird auch in Roboter investiert.



# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Fazit

In dieser Arbeit wurden ökonomische Wachstumsmodelle betrachtet, in welche Automatisierung in Form von Robotern eingeführt wurde. Dabei wurden drei Klassen von Modellen betrachtet - das Solow-, Ramsey und OLG-Modell. In allen betrachteten Modellen wurde der technologische Fortschritt als konstant angenommen. Ziel dieser Arbeit war es die Frage zu beantworten, was die positiven bzw. negativen Aspekte von Robotern und zunehmender Automatisierung sind. Positiv könnten die Auswirkungen auf das Wirtschaftswachstum sein, negativ die Effekte auf die Löhne.

In Kapitel 2 (Prettner, 2016), Kapitel 3 (Steigum, 2011) und Kapitel 4 können Roboter zu Wachstum führen. Dieses wird nicht durch technologischen Fortschritt ausgelöst, sondern ausschließlich durch Automatisierung. Dafür ist es notwendig, dass die Effizienz von Robotern entsprechend hoch im Vergleich zur Abschreibungsrate ist. Auch eine hohe Sparquote und ein niedriges Bevölkerungswachstum sind für Wachstum nützlich. Selbst wenn diese Rahmenbedingungen heute noch nicht gegeben sind, so ist es prinzipiell möglich, sie zu erreichen (vgl. Prettner, 2016 und Steigum, 2011). Es ist durchaus plausibel, dass die Effizienz von Robotern im Lauf der Zeit nicht konstant ist, sondern durch weitere Verbesserungen ansteigt. Auch der positive Einfluss einer geringen oder negativen Bevölkerungswachstumsrate erscheint sinnvoll, da dann verschiedene Tasks von Robotern übernommen werden müssen und diese wichtiger werden. Dabei ist es in der Realität nicht unbedingt notwendig, dass die Gesamtbevölkerung sinkt. Diese könnte durchaus konstant oder wachsend sein, wenn sie mit einer Alterung der Gesellschaft und niedrigen Geburtenraten verbunden ist. Auch dann kann es zu fehlendem Arbeitsangebot kommen, sodass Roboter wichtiger werden, weil sie dieses ersetzen können.

Im Gegensatz dazu ist im OLG-Modell aus Kapitel 5 und auch in Gasteiger und Prettner (2017) zu sehen, dass kein Wachstum möglich ist. Unabhängig davon, wie gut Roboter

arbeiten und auch “skilled worker” substituieren können, wird es zu keinem Wachstum kommen. Das ist ein bedeutender qualitativer Unterschied zu den anderen Modellen. Hängt dieses Ergebnis so stark von der gewählten Modellklasse ab, so muss die Frage gestellt werden, ob es in der Realität tatsächlich zu Wachstum kommt (und warum dies durch ein OLG-Modell nicht beschrieben werden kann) oder ob dieses Wachstum unrealistisch ist und die stetigen Wachstumsmodelle die Effekte von Robotern überschätzen. Die Frage, warum es im OLG-Modell nicht zu Wachstum kommt, lässt sich einfacher beantworten: Es wird in diesem Modell nur ein Teil des Lohns gespart und es gibt keine Möglichkeit Erträge aus Maschinen wieder in Maschinen anzulegen (siehe Gasteiger und Prettnner, 2017). In Kapitel 5 ist zu sehen, dass die Wachstumsrate für eine hohe Ausstattung an Kapital und Robotern gegen 0 geht. Selbst wenn es zu einer extrem hohen Ausstattung dieser Produktionsfaktoren kommen würde, so würden die Löhne dadurch so weit sinken, dass damit auch die Investitionen in der nächsten Periode sinken würden. Zusammen mit der 100 prozentigen Abschreibung von einer Periode in die nächste, führt dies dann zu einem Sinken des Kapitals.

Bei den stetigen Modellen aus Kapitel 2 bis 4 kann es zwar zu Wachstum kommen, aber es ist zu hinterfragen, ob das auch realistisch ist. Möglicherweise ist die Effizienz oder die Sparquote (noch) nicht hoch genug. Möglicherweise ist es hier aber sogar sinnvoll, exponentielles Wachstum für Maschinen und Roboter explizit auszuschließen oder zumindest zu erschweren. Durch natürliche Ressourcenbeschränkungen ist es nicht möglich, dass Roboter und Maschinen immer weiter wachsen. Würde man hier steigende Rohstoffkosten, die durch die weiter gehende Ausbeutung der benötigten Ressourcen entstehen, berücksichtigen oder auch den möglichen Disnutzen, der durch höhere Umweltbelastungen zustande kommt, so würde auch in den stetigen Modellen unter Umständen kein Wachstum mehr auftreten.

Die Auswirkungen auf die Löhne lassen sich leichter analysieren, da die Ergebnisse der einzelnen Kapitel ähnlich sind. Die Einteilung in “skilled” und “unskilled worker” bringt interessante Ergebnisse mit sich. In Kapitel 4 ist zu sehen, dass durch die Einführung von Robotern, die “unskilled worker” besser substituieren können als “skilled worker”, die Lohnschere zwischen diesen Gruppen weiter aufgehen kann. Die Löhne der “unskilled worker” sinken aber nicht nur relativ, d.h. im Vergleich zu jenen der “skilled worker”. Sie können auch absolut sinken, wie es laut Acemoglu und Autor (2012) auch in Daten zu beobachten war. Das ist im “Canonical Model” aus deren Papier bzw. aus Goldin und Katz (2009) nicht möglich. Dort steigen die Löhne beider Gruppen, aber jene der besser

ausgebildeten in einem höheren Ausmaß. In Acemoglu und Autor (2012) wird auch ein Modell mit drei Skill-Gruppen vorgestellt, in dem es zu einem Sinken des Reallohns für eine der Gruppen kommen kann. Das Modell aus Kapitel 4 dieser Arbeit stellt einen alternativen Ansatz dar, um den Anstieg der Skill Premium und auch das Sinken der Löhne der “unskilled worker” zu erklären.

Die größer werdende Lohnungleichheit kann in der Realität nur verhindert werden, wenn auch die “unskilled worker” mehr in ihre Ausbildung investieren und sie Tätigkeiten ausführen, die nicht so leicht zu substituieren sind. In diesem Kontext wäre es sicherlich auch sinnvoll, die Modelle dahin gehend zu erweitern, dass auch in Ausbildung bzw. Humankapital investiert werden kann.

In Kapitel 2 (Prettner, 2016) ist zu sehen, dass aber auch der Anteil des Arbeitseinkommens (=“labor share”) sinkt. Das bedeutet, dass auch das Gefälle zwischen Kapitaleigentümern und Arbeitern steigt. Hier werden in der Literatur mehrere Möglichkeiten genannt, die diesen Effekt verkleinern könnten: Steuern auf Roboter und Umverteilung sind eine Variante. Mit dem Steueraufkommen könnten vor allem die Verlierer entschädigt werden. Eine andere Variante ist, einen möglichst großen Teil der Bevölkerung zu Kapitaleigentümern zu machen (vgl. Economist, 2017b).

Insgesamt lässt sich sagen, dass die qualitativen Effekte der Automatisierung mit diesen Modellen gut beschrieben werden können. Auf jeden Fall führt Automatisierung zu einer Vergrößerung des Einkommensgefälles zwischen verschiedenen Bildungsschichten, wenn sie nicht von Maßnahmen, wie verstärkte Investitionen in Bildung, begleitet werden. Sie bringt möglicherweise aber auch positive Effekte mit sich, zu denen etwa verstärktes Wirtschaftswachstum zählen.



# Literaturverzeichnis

- [1] Acemoglu D. and Autor, D. (2010). Skills, Tasks and Technologies: Implications for Employment and Earnings. *NBER Working Paper Series*.
- [2] Acemoglu D. and Autor, D. (2012). What Does Human Capital Do? A Review of Goldin and Katz's The Race between Education and Technology. *Journal of Economic Literature* 50:2, 426-463.
- [3] Acemoglu, D. and Restrepo, P. (2017). Robots and Jobs: Evidence from US Labor Markets. *NBER Working Paper Series*.
- [4] Arntz, M. , Gregory, T. and Zierahn, U. (2016). The Risk of Automation for Jobs in OECD Countries: A Comparative Analysis. *OECD Social, Employment and Migration Working Papers (189)*.
- [5] Benzell, S. G. , Kotlikoff, L. J. , LaGarda, G. and Sachs J. D. (2015). Robots Are Us: Some Economics of Human Replacement. *NBER Working Paper Series*.
- [6] DeCanio, S. (2016). Robots and humans - complements or substitutes? *Journal of Macroeconomics* 49, 280 - 291.
- [7] Frey, C. B. and Osborne, M. A. (2013). The Future of Employment: How Susceptible are Jobs to Computerisation? available at [http://www.oxfordmartin.ox.ac.uk/downloads/academic/The\\_Future\\_of\\_Employment.pdf](http://www.oxfordmartin.ox.ac.uk/downloads/academic/The_Future_of_Employment.pdf)
- [8] Gasteiger, E. and Prettnner, K. (2017). On the possibility of automation-induced stagnation. *Hohenheim Discussion Papers in Business, Economics and Social Sciences. Discussion Paper 07-2017*.
- [9] Mankiw, G. , Romer, D. and Weil, D. (1992). A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*.
- [10] Goldin, C. and Katz, L. F. (2009). The Race Between Education and Technology. *Harvard University Press*.

- [11] Manyika, J. , Chui, M. , Miremadi, M. , Bughin, J. ,George, K. , Willmott, P. and Dewhurst, M. (2017). A Future that works: Automation, Employment, and Productivity. *McKinsey Global Institute*.
- [12] Prettner, K. (2016). The implications of automation for economic growth and the labor share. *Hohenheim Discussion Papers in Business, Economics and Social Sciences. Discussion Paper 18-2016*.
- [13] Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics* 70, 65 - 94.
- [14] Steigum, E. (2011). Robotics and Growth. *Frontiers of Economics and Globalization Volume 11: Economic Growth and Development. Emerald Group*.
- [15] The Economist (2017). Adidas's high-tech factory brings production back to Germany. Making trainers with robots and 3D printers. *The Economist, Jan 14th 2017*.
- [16] The Economist (2017). Why taxing robots is not a good idea. Bill Gate's proposal is revealing about the challenge automation poses. *The Economist, Feb 25th 2017*.
- [17] World Bank (2015). World Bank national accounts data. available at <http://data.worldbank.org/indicator/NY.GNS.ICTR.ZS>