TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
VIENNA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

DIPLOMARBEIT

„Geschichte der Geometrie - vom Mittelalter bis 1798“

Unter besonderer Berücksichtigung der Konstruktiven Geometrie

Ausgeführt am

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von

Ao. Univ.-Prof. Dr. Hellmuth STACHEL

durch

Benjamin DALLINGER
2120 Wolkersdorf, Am Stiegl 1/5/5

Wolkersdorf, 3. Mai 2006

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei all jenen Menschen bedanken, die mich während meines Studiums begleitet und unterstützt haben.

Bei der Suche nach einem Diplomarbeitsthema wandte ich mich an Univ.-Prof. Dr. Stachel, der mit meinem Vorschlag, eine geschichtliche Arbeit zu schreiben, einverstanden war, mir in Folge bei der engeren Themenauswahl und Gestaltung der Diplomarbeit freie Hand ließ und bei Fragen mit nützlichen Ideen diese Diplomarbeit betreut hat, wofür ich ihm meinen Dank aussprechen möchte.

Außerdem möchte ich mich bei meinen Eltern Johann und Hermine für die Unterstützung und den Rückhalt während meiner Studienzeit bedanken und dafür, dass sie mir diesen Ausbildungsweg ermöglicht haben. Meiner Schwester Isabella danke ich ebenfalls für die angenehme Atmosphäre in der gemeinsamen Studentenwohnung und auch für ihr offenes Ohr, wenn das ein oder andere Problem mich beschäftigte.

Zuletzt möchte ich meiner Freundin Anna besonderen Dank aussprechen, die mich fast die gesamte Studienzeit hindurch begleitet hat und mit mir durch alle Höhen und Tiefen gegangen ist. Durch ihre lebensfrohe Art hat sie mir geholfen, schwierige Situationen nicht trübselig zu betrachten, sondern immer wieder frohen Mutes einen neuen Tag zu begehen.

Benjamin Dallinger

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird die Geschichte der Geometrie in chronologischer Abfolge auszugsweise dargestellt, es werden spezielle Teilaspekte der Geometrie - vor allem der Konstruktiven Geometrie - näher beleuchtet, um dem Leser einen Überblick über die Entwicklungen zu geben. Die Betrachtungen beschränken sich auf die Errungenschaften unseres Kulturkreises, ohne dabei die außereuropäischen Leistungen schmälern zu wollen. Doch auf Grund der gebotenen Kürze der Arbeit, unzureichenden Quellenlage und geringen Anzahl literarischer Werke zu diesen Entwicklungen beschränkt sich diese Arbeit auf die innereuropäischen Aspekte der Geschichte der Geometrie.
Die Geschichte der Geometrie ist ein Teilgebiet der Geschichte der Mathematik, das jedoch allzu oft stiefmütterlich behandelt wird. Es ist natürlich nicht leicht, den Inhalt und das Wesen der Mathematik in Kürze zu definieren. Jedoch gehört zu einer wissenschaftlichen Betrachtung neben formalen Erklärungen, Strukturbegriffen oder Begriffen der Logik auch eine Betrachtung der historischen Entwicklungen. „Viel schwerer ist es aber, innerhalb eines als gegeben angenommenen Mathematikverständnisses zu erklären, was Geometrie ist und was folglich zu ihrer Geschichte gehört. Die jeweils herrschenden Ansichten sowohl über den Gegenstand der Geometrie als auch über ihre Stellung und Bedeutung innerhalb der Mathematik haben sich im Laufe der Zeit mehrfach geändert[1]."
In dieser Arbeit wird versucht, an Hand der ausgewählten geometrischen Entwicklungen jene Probleme zu thematisieren.

Im ersten Kapitel meiner Arbeit findet der Leser Dokumente, die die ersten Fortschritte der Geometrie im Mittelalter belegen sollen. Da im europäischen Raum in dieser Zeit noch nicht von einer wissenschaftlichen Behandlung dieses Teilgebietes der Mathematik gesprochen werden kann, genügt es, sich im Wesentlichen auf folgende Dokumente zu beschränken: einen Bauplan des Klosters St. Gallen, das Skizzenbuch von Villard d'Honnecourt und vier Bauhüttenbücher des Hochmittelalters.

Die Errungenschaften der Renaissancezeit werden im zweiten Kapitel thematisiert. Neben den Neuerungen in der Astronomie, welche zugleich Entwicklungen der (sphärischen) Trigonometrie zur Folge haben, entsteht ein völlig neuer Zweig der Geometrie - die Kartographie. Sie steht in engem Zusammenhang mit den Entdeckungsreisen und Christoph Kolumbus' Entdeckung Amerikas 1492.

[1]P. Schreiber, C.J. Scriba. 5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen Menschen. (Berlin/Heidelberg, 2001) S. 1

Im Mittelpunkt der Betrachtungen zu dieser Zeit steht natürlich das Universalgenie, der Künstler Albrecht Dürer. Er verkörpert den typischen Forscher der Renaissancezeit - nicht die Bildungselite, sondern Künstler, Ingenieure, Handwerker, Nautiker, Kaufleute, Ärzte und Juristen sind es, die die Neuerungen der Mathematik und Geometrie stark vorantreiben. So kommt es erstmals zu wissenschaftlich seriösen Betrachtungen der Perspektive oder des Grund-Aufrissverfahrens.

Das letzte Kapitel beleuchtet zwei wichtige Teilaspekte der Geometrie, einerseits den Zusammenhang von Geometrie und Algebra und der damit verbundenen Einführung des Koordinatensystems, andererseits die Entstehungsgeschichte der Darstellenden Geometrie vor Gaspard Monge. Die zwei wichtigsten Persönlichkeiten, die das Koordinatensystem zur algebraischen Betrachtung geometrischer Probleme (und umgekehrt) eingeführt haben, sind Fermat und Descartes, weshalb vorrangig und genauer auf ihre Werke eingegangen wird.
Die Entwicklung der Darstellenden Geometrie, wie wir sie heute kennen, geht im Wesentlichen auf Monge zurück. Gerade aus diesem Grund möchte ich die Vorgeschichte und früheren Errungenschaften der Darstellenden Geometrie näher betrachten.

Sollten einige Aspekte dieser Arbeit zu wenig detailliert erscheinen oder zu wenig in die Tiefe gehen, mag das auch daran liegen, dass viele Primärquellen auf Grund des hohen Alters (bzw. materiellen Wertes) für mich nicht zugänglich waren. Bei näherer Betrachtung erwiesen sich auch so manche Werke der Sekundärliteratur als widersprüchlich, was die Arbeit erheblich erschwerte.
In der vorliegenden Diplomarbeit sind zahlreiche Abbildungen eingebunden worden, die den theoretischen Text mit praktischen Beispielen aus Kunst, Alltag oder originalen Forschungsschriften visuell unterstützen sollen.

Inhaltsverzeichnis

1 Mittelalter

Für die Entwicklungen der Geometrie im Mittelalter möchte ich hier nur die Entwicklungen in Europa ab dem Beginn der Völkerwanderung (375 - 568) bis zum Beginn der Renaissance (1492) betrachten. Wenn ich hier in Folge das Mittelalter unmittelbar nach dem Ende der griechisch-römischen Epoche betrachte, „so liegt dem die sicherlich nicht unproblematische Entscheidung zugrunde, den arabisch-islamischen, ebenfalls von der hellenistischen Antike ausgehenden Strang der Kultur- und Wissenschaftsentwicklung im Rahmen dieser Arbeit außer Acht zu lassen, weil er im Verhältnis zum christlichen doch vornehmlich nur als Überlieferer antiker Geistesgüter auf die geschichtlichen Umstände Europas eingewirkt hat[1].“ Natürlich gab es auch im asiatischen Raum bedeutende Entwicklungen, dabei sind vor allem die Länder China, Japan und Indien zu nennen. Genauer auf diese Entwicklungen einzugehen, würde aber den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen.
Wichtige Einflüsse auf die Entwicklung der Mathematik und auch Geometrie des Mittelalters kamen aus der griechisch-hellenistischen und der islamischen Welt. Dieses antike Wissen wurde vom untergehenden Weströmischen Reich an das Mittelalter weitergegeben.

1.1 Frühes Mittelalter

Das wichtigste Werk für die Geometrie des frühen Mittelalters war die „Artes liberales“ (dt. Fassung: „Sieben Freien Künste“), wobei die sieben Wissenschaften sich aufgliedern lassen in:

- Grammatik
- Rhetorik
- Dialektik
- Arithmetik

[1] J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 82

- Geometrie
- Astronomie
- Musik

Einige Teile dieses Werkes stützen sich auf Aussagen von Platon und Pythagoras. Im Gegensatz zum Mittelalter wird in diesem Werk noch zwischen Geometrie und Astronomie unterschieden, die Geometrie wird als Wissenschaft der unbewegten Größe betrachtet, im Gegensatz zur Astronomie, die sich mit Bewegungen beschäftigt. Der geometrische Teil der „Artes liberales“ behandelt abzählbare, rationale und irrationale Größen in der Ebene bzw. körperliche Figuren. Es wird aber keine Figur konkret betrachtet und was viel mehr verwundert, es wird kein einziges Axiom Euklids auch nur erwähnt.

Trotzdem beginnt sich die Geometrie in Europa erst mit der Auseinandersetzung mit den „Vier Elementen“ Euklids zu entwickeln. Eine frühe wichtige Abschrift aus dem Jahre 1200 ist seit dem Ende des 18. Jhs. in Besitz der Lüneburger Ratsbibliothek. Diese Ausgabe enthält aber keinerlei Beweise, sondern nur die meisten Definitionen, Postulate und Axiome (Abb. 1.1).

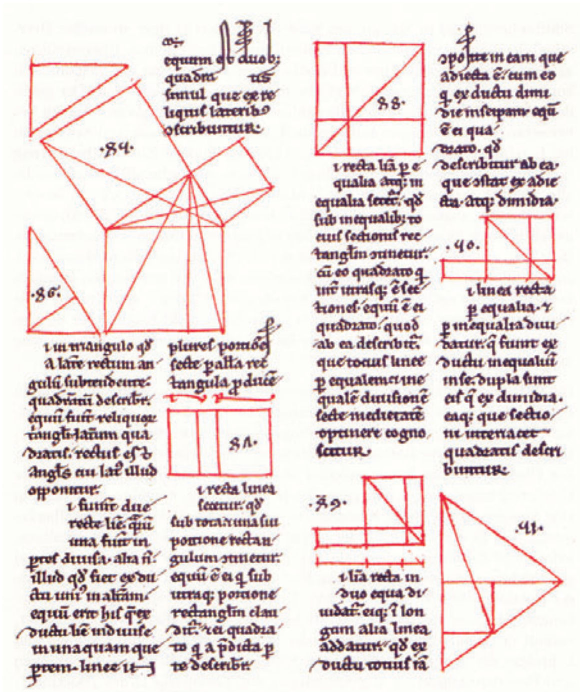


Abbildung 1.1: Euklid-Handschrift aus Lüneburg

1.1.1 Das erste Zeugnis des Konstruktiven Zeichnens in Mitteleuropa

Die Klöster spielten im Laufe der Zeit die wohl wichtigste Rolle bei der Übermittlung und Einführung kultureller Vermögen von der Agrikultur über das Handwerk bis hin zu den Kulturtechniken, zu denen u.a. ethisch-religiöse Menschenbildung, Sozialverhalten und

auch die Wissenschaft zählen.
So ist es kein Zufall, dass „das älteste Beweisstück für die Verwendung der zeichnerischen Disziplin in Mitteleuropa ein Dokument [ist], das die Konzeption einer kompletten Klosteranlage im Grundriss wiedergibt[2] (Abb. 1.2).“

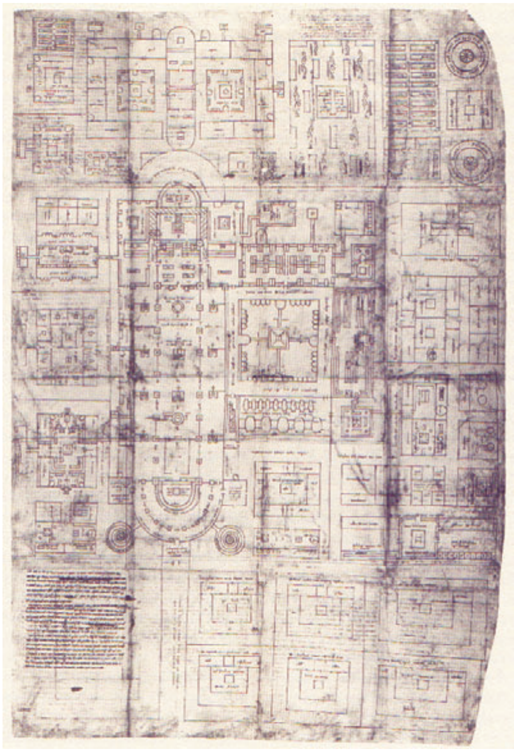


Abbildung 1.2: Grundrissplan vom Kloster St. Gallen

Nebenstehende Abbildung zeigt einen Grundrissplan des um 800 in Stein erbauten Klosters St. Gallen. Die in der Stiftsbibliothek aufbewahrte älteste Konstruktionszeichnung ist eine um 820 entstandene Kopie des originalen Bauplanes.

Dieser gut erhaltene Plan auf Pergament zeigt den Grundriss des karolingischen Benediktinerklosters von St. Gallen, das kurz nach 800 erbaut wurde und soll vom „Benediktinermönch Gerung[3]“ stammen. Das Kloster aus massivem Stein erbaut, gilt als *das* Vorbild für das - sich von nun an ausbreitende - Klosterbauwesen nördlich der Alpen und der Plan somit als Musterlösung für weitere Bauten. Die Primitivität und das einfache Schema der Zeichnung entsprechen heutzutage sicher bei weitem nicht dem Standard einer Bauvorlage, jedoch erfüllt sie wohl die Funktion eines mustergültigen Werkplanes. Man kann davon ausgehen, dass es zusätzliche Detailpläne gegeben hat, dass diese aber nach Vollendung des Bauwerkes kaum mehr Musterwert besaßen und somit nicht aufbewahrenswert erschienen. Wie zu dieser Zeit durchwegs üblich, wurde wohl das kostbare Pergament für andere Schriften oder Zeichnungen wiederverwendet. Ein weiterer Hinweis,

[2] J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 82
[3] F. J. Obenrauch. Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie. (Brünn, 1897) S. 176

dass es sich bei dieser Zeichnung um einen Plan mit mustergültigem Charakter handelt, ergibt sich daraus, dass nur die wichtigsten Abmessungen eingetragen worden sind und das Kloster an einigen Stellen stark abweichend von dieser Zeichnung gebaut wurde.
Ausgehend von diesem Sakralbau, entwickelte sich eine rege Bautätigkeit seitens der Kirche, die eine der bedeutendsten Bauschöpfungen der Menschheit hervorbrachte, die gotischen Dome. Mit den konstruktiven Kühnheiten reiften die zukunftsträchtigen zeichnerischen Raumkonstruktionen heran. „Vor dem Hintergrund hellenistisch-antiker Wertvorstellungen zeigt sich das herausragendste Merkmal der christlich-klösterlichen Gemeinschaft darin, dass in antikem Wissen und Denken gebildete Kopfarbeiter mit Priesterstatus zusammen mit frommen Handwerkern brüderlich unter einem Dach leben, produzieren, lernen und lehren für den materiellen und ideellen Aufbau einer umfassenden Zivilisation[4].“

1.2 Hochmittelalter

Bei der vielfältigen Pflege und Vermittlung aller kulturellen Bereiche durch das Klosterschulwesen nahmen die Geometriekonstruktionen und das Bauplanzeichnen insofern eine Sonderstellung ein, als dass sie für den Großteil der Absolventen bedeutungslos waren. Das Zeichnen war nur im Bauwesen von Bedeutung, vor allem für Fachkräfte des Steinbaus mit Schwerpunkt im Kirchenbau. Da sich im Hochmittelalter vorrangig nur Steinmetze ihres Berufes wegen mit der Zeichendisziplin auseinandersetzen mussten, hing die Entwicklung des konstruktiven Zeichnens von den Entwicklungen im Bauwesen und dessen Schulwesen ab. So mündete der frühmittelalterliche Kirchenbau in eine erste epochale Entwicklungsstufe - die Romanik, in der hohes Geschick der Steinbearbeitung und -geometrie für den Gewölbebau von Nöten war (Abb. 1.3).
Im Zuge dieser Entwicklungen von enormen Baumassen und konstruktiven Erschwernissen hinsichtlich der Bauweise wurde es notwendig, dass sich alle Beteiligten ausschließlich der großen Aufgabe des Dombaus widmeten. Dies war den Klosterbrüdern jedoch - ob ihrer vielseitigen Aufgaben im Klosteralltag - nicht mehr möglich, und so mussten sich die Baukollektive der Klöster lösen und sich auf die weltliche Aufgabe des Bauens sakraler Gebäude konzentrieren. „Am Ende dieser Ablösung stehen die berühmten Dombauhütten, die im Laufe dreier Jahrhunderte nicht nur die weltgeschichtlich einmaligen Gesamtkunstwerke der Kathedralen hervorgebracht haben, sondern zugleich die zeichnerischen Konstruktionslösungen, mittels derer allein die komplexe Struktur dieser steinernen

[4] J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 84

Abbildung 1.3: Romanisches Kreuzgewölbe der Krypta des Speyerer Doms (11. Jh.)

Monumente realisierbar wurde[5].“
Die Vollendung der Dome beanspruchte die Arbeit von mehreren Generationen, der Innenraum wurde jedoch immer so schnell als möglich fertiggestellt, um raschest möglich den Kirchenbetrieb aufnehmen zu können. Die restlichen Bauabschnitte wurden gut gesichert und möglichst abgeschottet über lange Zeit vollendet, was ständige Änderungen von der Erstplanung zuließ. Es wurden zum Teil sehr gewagte Gewölbekonstruktionen entworfen, die mitunter auf Grund verlorengegangener Pläne (von einer zur nächsten Generation) auch einstürzten. Solche Ruinen wurden in der Regel abgerissen. Der Arbeitsplatz eines Steinmetzes, der zu den bestbezahlten Handwerkern des Mittelalters zählte, dürfte wie in Abb. 1.4 dargestellt, ausgesehen haben.
So klein diese Bauhütte wirken mag, so wenig soll man die Arbeitskraft und die dadurch ausgelösten Sekundärwirtschaftsströme unterschätzen. Während der wichtigsten drei Jahrhunderte des Hochmittelalters zwischen 1200 und 1500 gab es in Europa unzählige Baustellen, deren Gesamtbauvolumen von keiner vorangehenden Epoche - und auch danach nicht so bald wieder - erreicht worden ist. Allein in Frankreich sind in diesem Zeitraum ungefähr 80 Kathedralen und über 500 Pfarr-, Stifts- und Klosterkirchen errichtet worden. Neben der Kirche wurden während des Hochmittelalters aber auch Herrscher,

[5] J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 92

Abbildung 1.4: Steinmetzhütte am Bau der Abteikirche Vezelay, Frankreich. Solche lediglich durch ein Dach wettergeschützten Arbeitsplätze benutzen Bildhauer noch heute.

Feudalherren und das aufkommende Bürgertum zu wichtigen Auftraggebern des Baugewerbes. Die Konstruktionszeichnungen der Kirchenbaupläne wurden auf Grund der langen Bauzeiten in den Dombauverwaltungen und Archiven aufbewahrt und sind uns deshalb bis heute erhalten geblieben, im Gegensatz zu den Plänen weltlicher Bauvorhaben. Die größte noch existierende Architekturzeichnung des Mittelalters ist der über 500 Jahre alte Turmfassadenriss des Kölner Doms, der wegen der 152 m hohen Kirchtürme eine Länge von über vier Metern misst (Abb. 1.5 bzw. 1.6).
Im Laufe der Zeit entwickeln sich diese Detailzeichnungen immer weiter und so entstand eine neue Art der Plandarstellung mit großer Zukunft: „Indem hier die längs und quer miteinander vernetzten inneren Wandelemente des Doms mit ihrer Höhenausdehnung abgebildet sind, müssen die zur Planebene quer verlaufenden Wandverbindungen durchschnitten werden. Daraus entwickelt sich langsam der dem Grundriss zugeordnete Aufriss als Vertikalschnitt durch das ganze Gebäude[6].“

1.2.1 Villard d'Honnecourt

Der wichtigste Beitrag zur angewandten Geometrie des Mittelalters stammt von den Handwerkern - den Baumeistern, Steinmetzen und Zimmerleuten. Der Tradition entsprechend wurde das Wissen leider (aus heutiger Sicht) nur mündlich von Baumeister zu

[6] J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 101

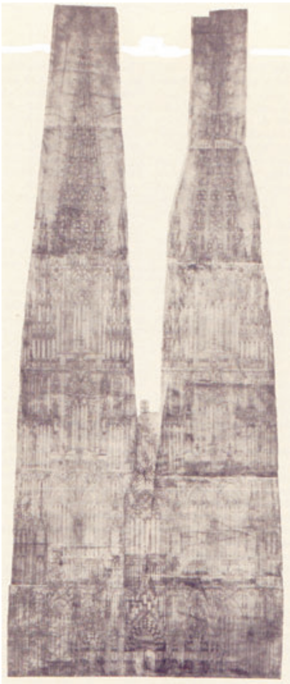


Abbildung 1.5: Der größte und bedeutendste mittelalterliche Bauriss ist mit 4,20 m Länge der Turmfassadenplan des Kölner Doms.

Abbildung 1.6: Detailplan vom Südturm Obergeschoss des Kölner Doms. Interessant ist, wie an zwei Stellen (im Druck schraffiert) die senkrecht zur Planebene verlaufenden Verbindungsbauteile geschnitten sind.

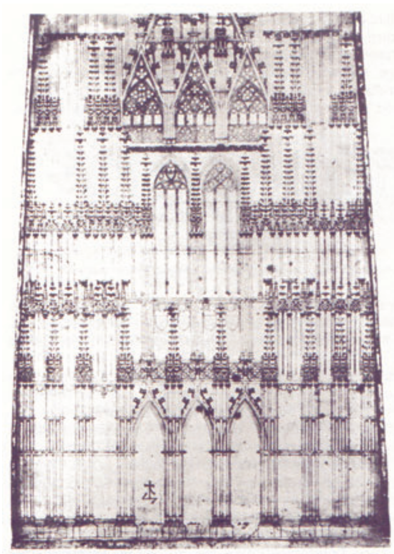


Abbildung 1.7: Hier zum Vergleich der Aufriss des Turmes des Wiener Stephansdomes.

Baumeister weitergegeben. Aus diesem Grund gibt es aus dieser Zeit keine nennenswerten Quellen, die uns Auskunft über das geometrische Wissen geben könnten.
Einzig und allein das Skizzenbuch von Villard d'Honnecourt gibt uns Hinweise über den damaligen Wissensstand und stellt somit ein unbeschreiblich wichtiges Zeitzeugnis dar. Der aus Picardie stammende Baumeister hat bei seinen unzähligen Reisen durch Frankreich, Schweiz und Ungarn Details bekannter Kathedralen des 13. Jhs. auf insgesamt 63 Blättern festgehalten. Sein Skizzenbuch enthält also Bauzeichnungen, Plastik- und Maschinendarstellungen, figürliche Kompositionen und Abbildungen der Steinmetzkunst. Leider sind zu den insgesamt 325 Federzeichnungen keinerlei Erklärungen angefügt, da die Konstruktionskenntnisse mündlich weitergegeben worden sind (Abb. 1.8 - Abb. 1.11).

Abbildung 1.8: Villard d'Honnecourt: Kirchenfenster der frühgotischen Kathedrale von Lausanne (1275)

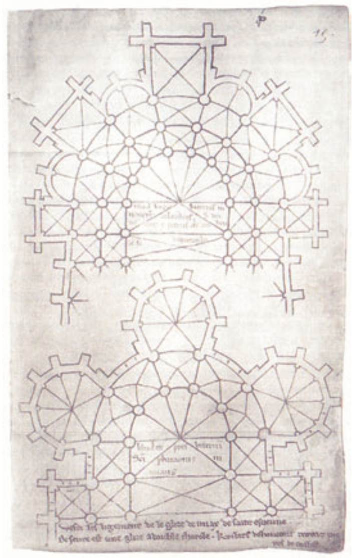


Abbildung 1.9: Villard d'Honnecourt: Risse der Gewölberippen zweier Kirchen

1.2.2 Die Bauhüttenbücher

Neben dem zuvor erwähnten Skizzenbuch, gibt es für das Hochmittelalter nur noch die vier Bauhüttenbücher als schriftliche Quellen zur angewandten Geometrie. Sie wurden etwa 250 Jahre später in Süddeutschland verfasst. Drei dieser vier frühen Druckwerke (!) stammen von Matthäus Roriczer, nämlich das „Büchlein von der fialen Gerechtigkeit", das „Wimpergbüchlein" und die „Geometria deutsch". Das „Fialenbüchlein" wurde von Hanns Schuttermayer herausgegeben.

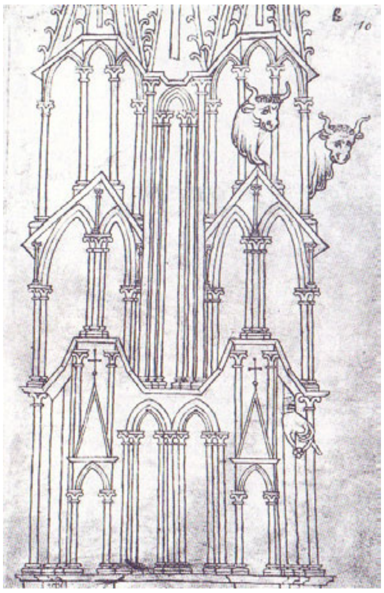


Abbildung 1.10: Villard d'Honnecourt: Turmfront in Laon

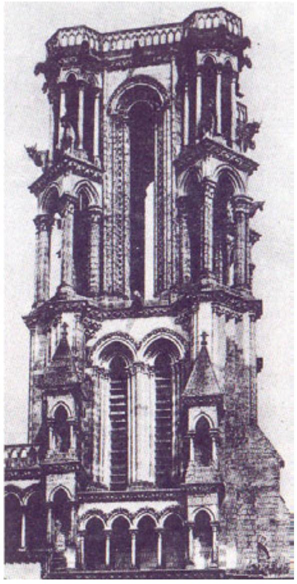


Abbildung 1.11: Zum Vergleich ein Foto des Kirchturms von Laon

Zur Erklärung der Titel sei angemerkt, dass „Fialen (auch Violen genannt) kleine Ziertürmchen zur Bekrönung von Strebepfeilern und Flankierung von Wimpergen, den gotischen Ziergiebeln (Wimperg, ursprünglich wintperge = vor dem Wind bergend: Schutzgiebeln) sind [...] Gerechtigkeit meint in diesem Zusammenhang den sachgerechten Entwurf der Zeichnungen oder Risse, nach denen die Steinmetzen zu arbeiten haben[7].“ Diese vier Bücher sind nicht nur von Bedeutung für die Geometrie des Mittelalters, sondern auch bedeutend aus „druckhistorischer“ Sicht, da sie aus den ersten Jahrzehnten des Buchdruckes stammen und somit seltene Inkunabeln (Wiegedruck) sind. Es handelt sich dabei um kleine Schriften, das „Büchlein von der fialen Gerechtigkeit“ umfasst 16 Blätter, die „Geometria deutsch“ gar nur sechs, wovon die letzten drei Blätter eine Anweisung zur Konstruktion von Wimpergen beinhalten.
Die Familie Roriczer hatte in drei Generationen vier Dombaumeister in Regensburg hervorgebracht, wobei der jüngste - Matthäus Roriczer - die drei Bücher in einer eigenen Druckwerkstätte herausgegeben hatte. Sein Vater war u.a. auch Gutachter beim Bau des Wiener Stephansdomes bzw. der Münchner Frauenkirche. Sowohl Roriczer, als auch Schuttermayer (von dessen Büchlein nur mehr eine einzige Ausgabe existiert) beriefen sich bei ihren Ausführungen auf die Baumeisterfamilie Parler, die von großer Bedeutung gewesen sein muss.

[7]P. Schreiber, C.J. Scriba. 5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen Menschen. (Berlin/Heidelberg, 2001) S.209 ff.

Ausgangspunkt der Fialenkonstruktion ist bei beiden Autoren die sog. „Vierung über Ort“ (Abb. 1.12 & Abb. 1.13). In ein als Grundriss dienendes Quadrat wird durch Verbinden der Seitenmitten ein zweites gesetzt, wonach dieser Prozess mehrmals wiederholt wird. Durch Drehung jedes zweiten Quadrates um das Zentrum um 45° entsteht eine Folge ineinandergeschachtelter Quadrate mit parallelen Seiten. Zwei aufeinanderfolgende Quadrate haben also das Seitenverhältnis $1 : \frac{\sqrt{2}}{2}$; sie bilden die höhergelegenen Querschnitte der spitz zulaufenden Fialentürmchen, die in genau festgelegten Abständen von der Grundfläche der Reihe nach zu übertragen sind. Nachdem so der Leib der Fiale entworfen wurde, beschreibt Roriczer die Konstruktion des Risen (Helm, Spitzdach) und anschließend den Entwurf der Verzierungen (Blumen, Laubwerk).

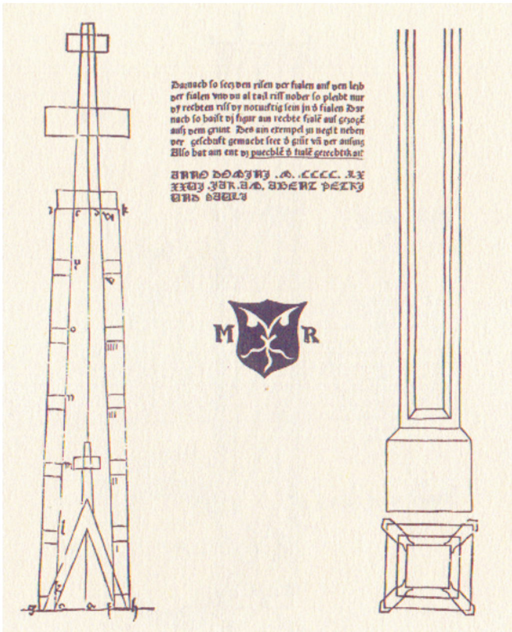


Abbildung 1.12: Roriczers Fialenkonstruktion

Nebenstehende Figur zeigt Grund- und Aufrisszeichnungen zur Darstellung der Proportionen einer gotischen Fiale, hier eines Strebepfeiler-Türmchens, von Matthäus Roriczer. Er gehörte mit seinen Regensburger Steinmetzen einer städtischen Zunft und nicht dem Dachverband der deutschen Bauhütten an. Somit war er auch nicht deren Geheimhaltungsstatuten unterworfen.

Rezepturartig wird der Steinmetz angewiesen, mit dem Zirkel bestimmte Strecken abzugreifen und auf das Werkstück zu übertragen.
Neben der Vierung über Ort, einem Konstruktionsprinzip, das schon bei Platon, Vitruv und Villard zu finden ist, und der Halbierung von Strecken, verwendet Roriczer auch die Drittelung von Strecken. Außerdem bezeichnet er konsequent alle Punkte für eine Konstruktion mit Buchstaben, erst am Ende radiert er diese mitsamt den Hilfslinien aus: „Danach setze den Riesen der Fiale auf den Leib der Fiale und beseitige alle Teilstriche [Hilfslinien], so bleiben nur die rechten Linien, die für die Fiale notwendig sind. Danach heißt die Figur eine rechte [d.h. eine richtig, gerecht konstruierte] Fiale, ausgezogen aus

Eine Seite aus Schuttermayers Fialenbüchlein. Sie zeigt das gleiche Proportionsfindungsprinzip (untere Reihe), das Roriczer beschrieben hat, wobei hier noch die Fiale über einem Wimperg, dem Ziergiebel über gotischen Fenstern und Portalen, hinzukommt.

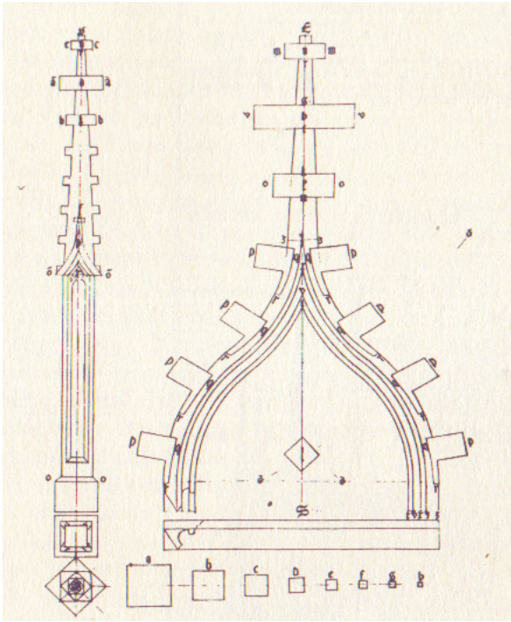


Abbildung 1.13: Auszug aus Schuttermayers Fialenbüchlein

dem Grund[riß]. Ein Beispiel dafür neben der Schrift, und zwar der Grund- und Aufriß. Also hat ein Ende das Büchlein der Fialen Gerechtigkeit. Anno Domini M.CCC.LXXXVJ Jar. Am Abend Petrj Und Paulj[8].“

Um nochmals die Bedeutung der vier Bauhüttenbücher hervorzuheben, möchte ich auf die systematische Verwendung von Buchstaben zur Bezeichnung von Punkten und auf die Verwendung der Begriffe „Grundriss“ bzw. „Aufriss“ hinweisen. Weiters ist bemerkenswert, dass alle Konstruktionen ohne Berechnungen durchführbar sind und alle Maße vom Ausgangsquadrat abgeleitet werden. Ein wesentlicher Vorteil dieses Verfahrens liegt in der Nachvollziehbarkeit der Konstruktionen auch über mehrere Generationen hinweg, da die Bauzeit der Dome und Kathedralen sehr lange war. So konnten Steinmetze die Arbeit ihrer Vorgänger fortsetzen, ohne genaue Maßangaben auf den Plänen zu benötigen. Die Bauhüttenbücher dokumentieren erstmals eine wichtige Facette der mittelalterlichen Baukunst, „indem an einem sehr einfachen Bauteil geklärt wird, wie die unübertroffene Harmonie aller Teile des so komplexen Formenzusammenspiels am gotischen Dom ’rational’ zustande gekommen ist[9].“

Roriczers „Geometria deutsch“ ist das erste gedruckte deutschsprachige Geometriebuch

[8]P. Schreiber, C.J. Scriba. 5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen Menschen. (Berlin/Heidelberg, 2001) S.213

[9]J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 108 ff.

und enthält nützliche Kapitel, wie die Konstruktion des rechten Winkels, eines regelmäßigen Fünf-, Sieben- und Achtecks oder das Auffinden des „verlorenen“ Mittelpunktes eines Kreises.
Das Besondere an der Fünfeckkonstruktion ist, dass sie mit fester Zirkelöffnung vorgenommen wird (wie auch später bei Dürer). Sehr einfach ist auch die Siebeneckskonstruktion: In einem Kreis vom Radius r wird eine Sehne gleicher Länge gelegt (also die Seite eines regelmäßigen Sechsecks), sodann ein Radius gezeichnet, der diese Sehne in der Mitte trifft. Das Stück zwischen Kreiszentrum und Sehnenmitte soll dann siebenmal am Kreisumfang abgetragen werden, also die Seite des regelmäßigen Siebenecks darstellen. Roriczer wusste damals noch nicht, dass es keine mit Zirkel und Lineal exakt ausführbare Siebeneckskonstruktion gibt.

Zum Abschluss dieses Kapitels sei nochmals ein Rückblick in die Antike gestattet. Die von Roriczer verwendete Konstruktion des rechten Winkels geht bereits auf Proklos zurück, die Achteckskonstruktion stammt von Heron. Die Bauhüttenbücher stehen aber dennoch in starkem Gegensatz zu den Überlegungen aus der Antike, da keine Beweise verlangt waren bzw. durchgeführt wurden. Darin liegt ein bedeutender Unterschied zur Renaissance (nicht umsonst bedeutet dieser Begriff „Wiedergeburt“ der Antike). Die Mathematiker und Künstler der Renaissance sind bemüht, zumindest ansatzweise eine Begründung zu ihren Ausführungen und Theorien zu geben. Unumstrittenes Meisterwerk aus dieser nachfolgenden Zeit ist Dürers „Unterweisung der Meßkunst“, von nun an wird versucht, Wissenschaft und Praxis miteinander zu vereinen und so ein wissenschaftliches Fundament zu schaffen.

2 Renaissance

Zwei wesentliche Merkmale prägen die Entwicklungen der Geometrie in der Renaissancezeit. Einerseits werden durch den stärkeren Praxisbezug neue Anwendungsgebiete erschlossen, andererseits stehen bei diesen Errungenschaften die Praktiker mehr denn je vor den Gelehrten jener Zeit. Ingenieure, Künstler, Handwerker, Nautiker, Kaufleute, Ärzte und Juristen treiben die Neuerungen der Mathematik und Geometrie stark voran. Dies ist in dieser Form einzigartig in der Geschichte der Mathematik.

Weiters wurden die Entwicklungen in der Renaissance durch das philosophisch bedingte Interesse an antiken Kulturen und somit auch dem Wiederentdecken der altgriechischen Sprache stark beeinflusst. Alte Quellen wurden wieder interessant für die Gelehrten und der Untergang des byzantinischen Reiches (1453 - Eroberung Konstantinopels) brachte viele griechische Forscher nach Europa (v.a. Italien). Außerdem ermöglichte der Buchdruck von nun an einer viel größeren Zahl von Interessierten den Zugang zu wissenschaftlicher Literatur bzw. Quellen. So verwundert es nicht, dass die „Elemente“ einer der ersten Bestseller in den ersten Jahren des Buchdruckes wurde (Abb. 2.1).

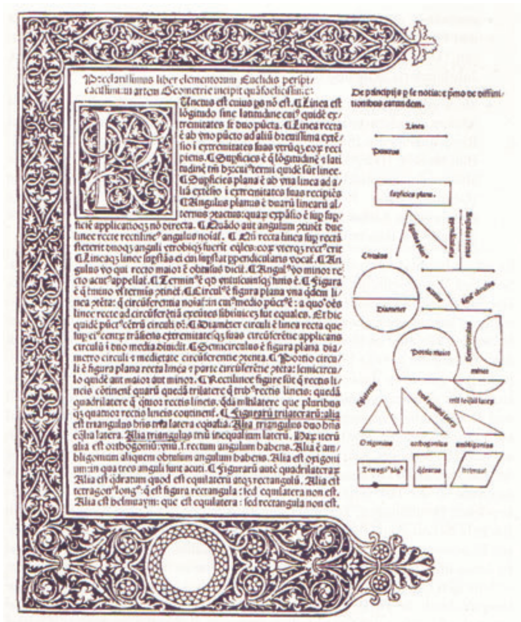


Abbildung 2.1: Titelblatt der ersten Druckausgabe der „Elemente“ von Euklid, Venedig 1482

Man darf nicht vergessen, dass antike Mathematik im Wesentlichen Geometrie beinhaltete. Es mag nun einleuchten, dass es in der Renaissance viel leichter sein sollte, Fortschritte gegenüber der Antike in der Arithmetik, Algebra oder numerischen Mathematik zu erzielen. Nichts desto trotz wandten viele Mathematiker der Renaissance viel Energie dafür auf, das Wissen und Niveau der Antike überhaupt erst wieder zu erreichen. Auf Grund vieler neuer Anforderungen aus der Praxis der Geometrie wurden viele neue Lösungen und Ansätze gefunden, sodass man zu Recht behaupten kann, die Renaissance sei eine „der fruchtbarsten Perioden in der historischen Entwicklung der Geometrie[1]“ gewesen.

2.1 Astronomie, Geodäsie und Kartographie

2.1.1 Astronomie und Trigonometrie

Die Bedeutung der Astronomie in der Entwicklung der Mathematik bis zum Ende des 18. Jhs. darf nicht unterschätzt werden, war sie doch stets eine der stärksten Triebfedern für die Beschäftigung und Weiterentwicklung der Mathematik und somit auch der Geometrie. Mathematisch betrachtet ist Astronomie die Geometrie der Bewegungsabläufe am Himmel auf eine gedachte Kugel projiziert. Auf Grund des hohen Stellenwertes der Astronomie und der eng damit verknüpften Trigonometrie, konnte sich die Trigonometrie erst ab Mitte des 16. Jhs. als eigenständiger Zweig der Mathematik etablieren. Andererseits konnte sich nur so die sphärische Trigonometrie lange Zeit neben der ebenen Trigonometrie entwickeln und halten.
Eine Schwierigkeit der damalige Zeit war, dass sich z.B. die zahlreich verbreiteten Sinustafeln nicht - wie heute üblich - auf den Einheitskreis bezogen. Regiomontanus' „Fünf Bücher über beliebige Dreiecke“ beinhalten u.a. den Cosinussatz der sphärischen Geometrie in einer für uns etwas schwer lesbaren Form:
$sinvers\,A : (sinvers\,a - sinvers\,(b - c)) = sintotus^2 : sin\,b \cdot sin\,c$ (Abb. 2.2)
Dem entspricht in heutiger Schreibweise: $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \cos \alpha$
Ich möchte an dieser Stelle nicht genauer auf die Geschichte der Trigonometrie eingehen, sondern statt dessen eine Abbildung anfügen, die die Einflüsse der Wissenschaftler auf darauffolgende Generationen zeigen soll, einen sog. Stammbaum europäischer Trigonometrie (Abb. 2.3).

2.1.2 Kartographie

Zwischen 1615 und 1617 führte Snellius zwischen Alkmaar und Bergen op Zoom (ca. 130 km längs desselben Meridians) die erste Gradmessung mittels Triangulation durch. Das bemerkenswert genaue Ergebnis veröffentlichte er in seinem Hauptwerk „Eratosthenes Ba-

[1] P. Schreiber, C.J. Scriba. 5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen Menschen. (Berlin/Heidelberg, 2001) S.223

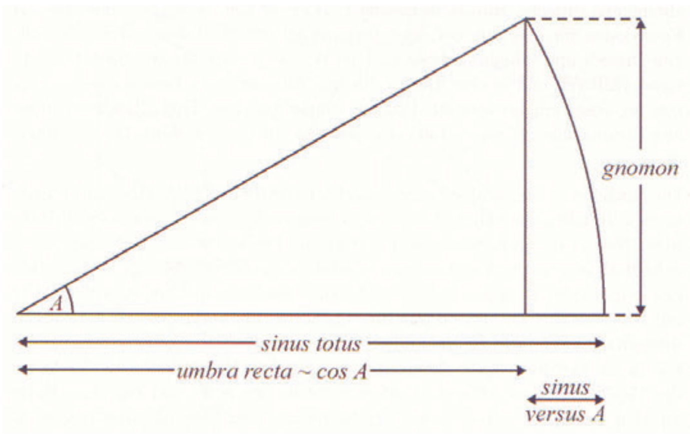


Abbildung 2.2: Skizze zu Regiomontanus' Kosinussatz

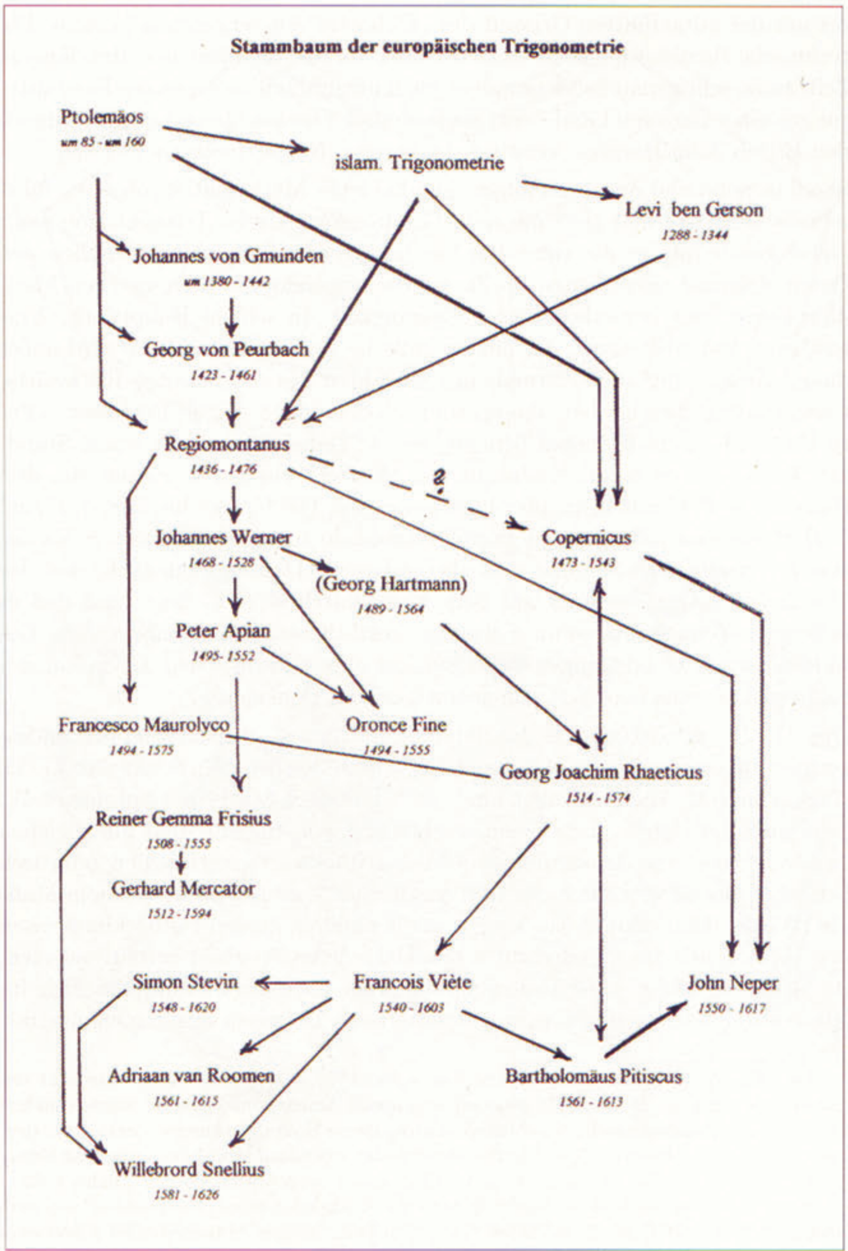


Abbildung 2.3: Stammbaum der europäischen Trigonometrie

tavus“ (übersetzt: Der niederländische Eratosthenes). Er beschreibt darin auch ein bei der Vermessung verwendetes Verfahren: das Rückwärtseinschneiden, welches viel später nach Laurent Pothenot (Paris, 18. Jh.) benannt wird.
Bei diesem Verfahren werden von einem Standort S, der zu ermitteln ist, die Winkel zwischen je zwei von drei bekannten Punkten A, B, C gemessen. Die Kreise durch o.B.d.A. S, A, B und S, B, C erhält man mittels der Peripheriewinkel und der gesuchte Standort S ergibt sich als der von B verschiedene Restschnittpunkt beider Kreise. Es bleibt zu beachten, dass dieses Verfahren versagt, wenn S auf dem Kreis A, B, C liegt, ferner, dass es beliebig ungenauer wird, je näher S an diesem „gefährlichen Kreis“ liegt. So trivial diese Überlegung scheinen mag, sosehr zeugt sie von der neuen Art geometrisch zu denken.
Im 17. Jh. beteiligen sich Größen wie Kepler, Schickard, Cassini und Ricci an Landvermessungen und der Erstellung von Karten und Modellen, um die Erde zu beschreiben. So entwickelt sich mit dem Aufschwung der Astronomie, Geographie und Geodäsie ein neues Anwendungsgebiet der Geometrie - die Kartographie. Die dabei wichtige Abbildungsmethode der stereographischen Projektion wurde zwar bereits in der Antike mathematisch korrekt entwickelt, aber erst Johannes Werner hatte die Idee, die stereographische Projektion auch für die Erstellung von Karten zu verwenden[2]. Die bekannten Weltkarten des Ptolemaios wurden „nur“ als Teile von Kegelprojektionen erstellt (diese Karten stellten aber nur den damals bekannten Teil der Welt dar - Abb. 2.4 & Abb. 2.5).

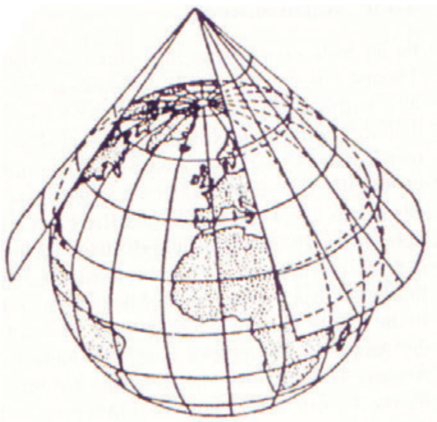


Abbildung 2.4: Prinzip der Kegelprojektion des Ptolemaios

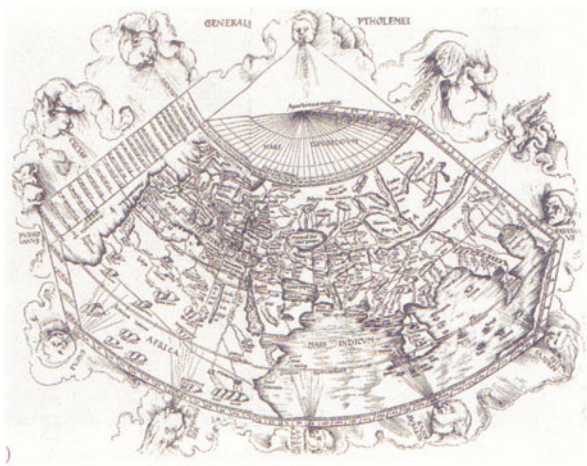


Abbildung 2.5: Weltkarte der bewohnten Welt in Kegelprojektion (Straßburg 1513), rekonstruiert nach den Längen- und Breitenangaben des Ptolemaios

[2]Die kreistreue stereographische Projektion wurde bis zu diesem Zeitpunkt u.a. für Astrolabien oder mechanisch angetriebene Zifferblätter astronomischer Uhren verwendet.

Während die Karten des Mittelalters eher einen symbolischen Charakter hatten, um die Weltvorstellung der katholischen Kirche zu untermauern, war ab nun eine seriös wissenschaftliche Betrachtung gefragt. Dennoch waren Begriffe wie flächentreue oder winkeltreue Abbildung noch nicht Gegenstand der Forschung, vielmehr beschäftigte man sich in der zweiten Hälfte des 16. Jhs. mit orthographischer und stereographischer Projektion. So entwickelte der kaiserliche Hofastronom Johann Stöberer in Wien ein flächentreues Bild der Kugeloberfläche, das wegen seiner herzförmigen Gestalt vielfach reproduziert wurde (Abb. 2.6).

Abbildung 2.6: Herzförmige Weltkarte nach dem Prinzip von Stöberer und Werner

Ausgehend von einem längentreuen Bild NS eines „Nullmeridians“ werden die Breitenkreise nach beiden Seiten längentreu auf konzentrischen Kreisbögen um das Bild N des Nordpols abgetragen, sodass sich die markante Herzform als Ort der Endpunkte dieser Kreisbögen und zugleich als Doppelbild des 180°-Meridians ergibt. Man kann heute nicht mehr feststellen, ob Stöberer bereits die heuristische[3] Überlegung angestellt hat, dass man auf diese Weise mittels der Längentreue am Nullmeridian und auf den dort abgetragenen Breitenkreisen ein flächentreues Bild der Kugel erhalten konnte. Dieses Abbildungsverfahren wurde von eingangs erwähntem Werner ausgearbeitet.
Stöberer entwickelte aber auch noch eine andere Methode, eine Karte einer Halbkugel der Erde zu erstellen. Er projizierte eine Halbkugel parallel auf eine Tangentialebene. Eine solche Karte wurde 1515 unter Mithilfe von Albrecht Dürer im Auftrag des Kaisers Maximilian erstellt (Abb. 2.7).
Andere kartographische Abbildungen dieser Zeit sind:

- der mittelabstandstreue Azimutalentwurf von Cusanus und Snellius. Bei diesem Entwurf werden „die Meridiane in von N ausgehende Strahlen und die Breitenkreise in

[3] Mittel, um folgende Hypothese exakt zu bestätigen, gab es ohnedies erst im 19.Jh.

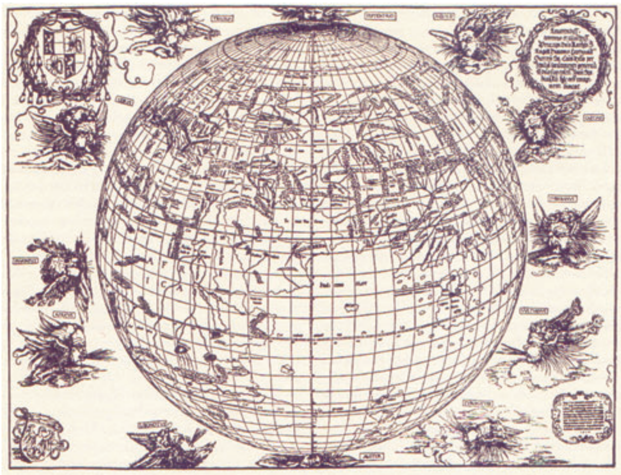


Abbildung 2.7: Weltkarte nach Stöberer und Dürer

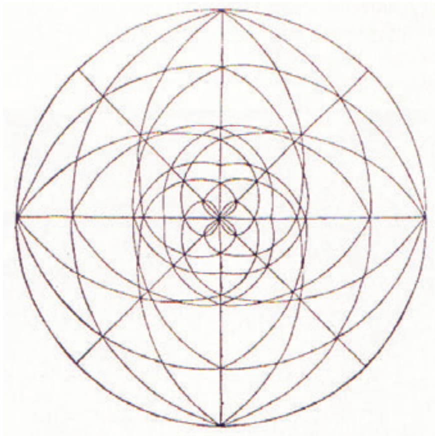


Abbildung 2.8: Loxodromen-Diagramm von Nunez (1537)

konzentrische Kreise der Karte so abgebildet, dass ihr Radius gleich der im Bogenmaß gemessenen Poldistanz ist. (Der Name des Verfahrens bedeutet also, dass alle Punkte in ihrer wahren Entfernung vom Nordpol = Kartenmittelpunkt abgebildet werden)[4]."

- der zuerst „von Mercator benutzte, später nach Sanson und Flamsteed benannte Entwurf, bei dem die Breitenkreise in abstandstreue parallele Strecken und die Meridiane so abgebildet werden, dass sich Flächentreue ergibt[5]."

Der soeben genannte Mercator (bürgerlich Gerhard Kremer) war der Meister der Kartographie der Renaissancezeit. Schon vor ihm hatte sich der portugiesische Mathematiker Nunez 1537 mit den für die Nautik so wichtigen Kurven konstanten Kurses (später Loxodromen genannt) beschäftigt. Er erforschte also jene Kurven, die dadurch definiert sind, dass sie alle Meridiane unter einem festen Winkel schneiden und konnte sogar durch näherungsweise Konstruktion (unter der Verwendung von nur acht Meridianen und der Approximation durch Kreisbögen jeweils bis zum nächsten Meridian) zeigen, dass diese von ihm „curvas dos rombos" genannten Kurven, sich spiralförmig beiden Polen nähern, ohne diese jemals zu erreichen (Abb. 2.8).
Zur weiteren Entwicklung: 1541 fertigte Mercator einen Globus an, der diese Loxodrome bereits trug. 1568 erstellte er die erste Weltkarte, auf der Kurven als Geraden abgebildet

[4] P. Schreiber, C.J. Scriba. 5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen Menschen. (Berlin/Heidelberg, 2001) S.239

[5] P. Schreiber, C.J. Scriba. 5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen Menschen. (Berlin/Heidelberg, 2001) S.239

worden waren - dies war die Geburtsstunde der Mercatorprojektion. Weite Verbreitung fand diese erst nach dessen Tod, als 1595 ein Weltatlas gedruckt wurde. Lange Zeit wurde gerätselt, wie Mercator diese Karte wohl zustande gebracht hatte, da „einerseits das exakte Gesetz, nach dem die Abstände der Breitenkreisbilder vom Äquator mit wachsender Breite ins Unendliche wachsen müssen, erst durch Lösen einer Infinitesimalgleichung gefunden werden kann und andererseits die Mercatorprojektion, bei der die Kugeloberfläche (außer den beiden Polen) auf einen tangential an den Äquator gelegten und anschließend abgewickelten Zylinder unendlicher Höhe abgebildet wird, sich auf keine Weise als 'Projektion' erklären lässt[6]." Heute vermutet man auf Grund des früheren Erscheinens des Globus', dass er die darauf punktweise konstruierten Loxodrome „intuitiv" approximierend auf die Karte übertragen hatte.
In Folge dieser Mercatorprojektion beschäftigten sich viele Forscher mit Kartenprojektionen. Ein damals eher unbekannter englischer Mathematiker, Thomas Harriot, bewies um 1600 vermutlich als erster die Winkeltreue der stereographischen Projektion und folgerte, dass Loxodromen bei stereographischer Projektion auf die Äquatorebene die Bilder aller Breitenkreise unter konstantem Winkel schneiden und somit auf logarithmische Spiralen um den Pol abgebildet werden müssen.

Die Mercatorprojektion

Mercator geht von einem nach oben und unten unbegrenzten Zylinder mit Erddurchmesser aus, in dem die Erdkugel positioniert ist (Abb. 2.9). Die Kugeloberflächenpunkte werden vom Kugelmittelpunkt auf den inneren Zylindermantel projiziert. Wenn man in Folge den Zylindermantel längs einer Erzeugenden aufschneidet, erhält man ein rechtwinkeliges Kartennetz. Die Abstände zwischen den Meridianen bleiben dabei zwar gleich, aber die zwischen den Breitenkreisen verändern sich. Die Gestalt der Erde auf dieser Karte verändert sich so stark zum Nord- bzw. Südpol hin, dass Mercator empirisch bestimmte Korrekturen angab. Bei der Mercator-Projektion handelt es sich um eine konforme, aber flächenverzerrende Abbildung (was erst später mittels der Differentialgeometrie nachgewiesen werden kann). „Die Metrik $d = a \cdot ln\, tan\frac{\Phi}{2} + 45°$ zur Messung des Abstandes von Breitenkreis Φ und Äquator fand 1599 der englische Navigator E. Wright[7]."

[6] P. Schreiber, C.J. Scriba. 5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen Menschen. (Berlin/Heidelberg, 2001) S.241
[7] K. Mainzer. Geschichte der Geometrie. (Mannheim/Wien/Zürich, 1980) S. 85

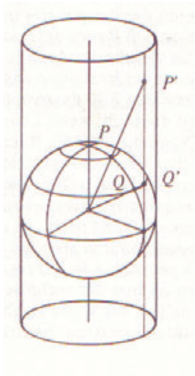


Abbildung 2.9: Mercatorprojektion

2.2 Kunst und Geometrie - Abbildungsmethoden

Unter all den Künstlern der Renaissance gibt es einige, die sich auch für Mathematik und Geometrie interessiert haben, u.a. Paolo Uccello, Wenzel Jamnitzer, Leonardo da Vinci oder Albrecht Dürer, wobei letzterer objektiv betrachtet das größte mathematische Wissen und Verständnis der Künstler dieser Zeit hatte. Die wohl eher symbolträchtigen Darstellungen des Mittelalters wandelten sich unter Führung der soeben genannten Persönlichkeiten hin zu einer realitätsnahen Kunstform, deren Errungenschaften nicht hoch genug bewertet werden können. Zwangsläufig führte das Streben nach Realismus zur Entwicklung der Zentralperspektive, aber auch andere wichtige Teilgebiete der Geometrie wurden sehr gut erforscht:

- vereinzelte Beispiele unter Anwendung des Grund-Aufrissverfahrens, welches erst viel später allgemein zur Lösung räumlich-konstruktiver Probleme behandelt wurde
- geometrische Konstruktionen und Näherungen bei der Lösung geometrischer Aufgaben, die nur mittels Zirkel und Lineal lösbar sind
- Entdeckung neuer geometrischer Formen (Flächen, Körper, Kurven)
- Studium ebener Parkette und Ornamente
- reguläre und halbreguläre Polyeder (meist unter ästhetischem Gesichtspunkt zu betrachten)
- Versuch, Schönheit und Harmonie in mathematischen Gesetzen oder Zahlenverhältnissen auszudrücken (Goldener Schnitt)
- Fachterminologie in der eigenen Landessprache wurde entwickelt (nicht mehr Latein)

Alle soeben genannten Punkte wurden sowohl von Albrecht Dürer, als auch von Leonardo da Vinci bearbeitet, mit dem großen Unterschied, dass von letzterem kaum zusammenhängende Schriften erhalten sind, was auch daran liegt, dass da Vinci (Abb. 2.10) kaum etwas publiziert hatte.
Von Dürers drei großen theoretischen Schriften sind bis in die heutige Zeit viele Nachdrucke erstellt worden, die uns an seinem Schaffen heute noch in klarer Weise teilhaben lassen.

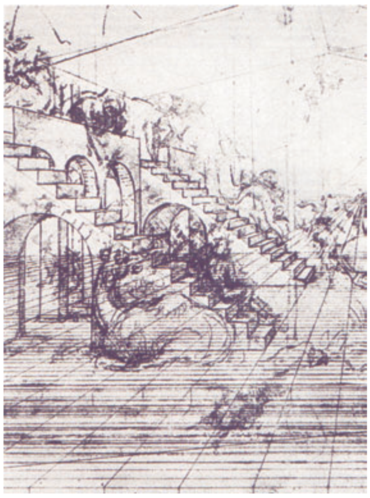


Abbildung 2.10: Leonardo da Vinci: Skizze zum Bild „Anbetung der drei Könige“

2.2.1 Perspektive

Bereits in der Antike sollen Gemälde entstanden sein, die perspektivische Züge tragen. Folgendes Beispiel soll zeigen, dass jedoch noch keine korrekte Theorie in dieser Zeit entwickelt wurde.

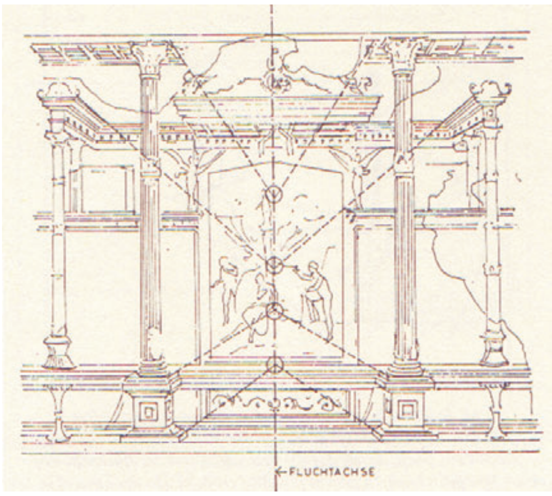


Abbildung 2.11: Untersuchung der Fluchtachsenperspektive eines römischen Wandgemäldes

Bei der Untersuchung der Fluchtachsenperspektive des Wandgemäldes aus der Villa Livia auf dem Palatin in Rom, stellt sich heraus, dass die „subjektive“ Abweichung von der wissenschaftlich korrekten Konstruktion von Vorteil für die Betrachtung eines so großen Bildes ist. Zur Erfassung der oberen Bildteile muss man nämlich den Kopf heben, wobei sich für das Auge ein perspektivischer Bezugsrahmen ergibt, der mit der richtigen Bildkonstruktion des Zentralfluchtpunktes weniger übereinstimmt als mit der eines höher gelegenen Fluchtachsenpunktes.

In Abb. 2.11 fluchten nicht alle in die Raumtiefe gehenden Horizontalparallelen zu einem einzigen Fluchtpunkt, sondern getrennt nach gemeinsamer Höhenlage zu verschiedenen Fluchtpunkten, die entsprechend senkrecht übereinander auf der sog. „Fluchtachse“ liegen. Wissenschaftlich betrachtet ist das falsch, da alle Linien in einen Punkt fluchten müssten, jedoch der optische Eindruck verbessert sich durch die in der Antike angewandte Methode.

Angeblich soll der Architekt der Florentiner Domkuppel, Filippo Brunelleschi, um ca. 1400 eine Methode entwickelt haben, um aus dem Grund- bzw. Aufriss eines Gebäudes punktweise eine perspektivisch korrekte Ansicht desselben zu erhalten. Später wurde dieses Verfahren „Durchschnittsmethode“ (Abb. 2.12) genannt, was damit begründet wird, dass bei dieser Methode der Grund-Aufriss um den angenommenen Augpunkt und die angenommene Bildebene ergänzt wird, um dann den Durchschnitt des Sehkegels mit der Bildebene zu bestimmen. Es ist eines der ersten Mehrbilderverfahren und eignet sich, grundlegende Gesetze der Perspektive anschaulich und mathematisch korrekt herzuleiten, aber die punktweise Konstruktion eines Objektes erweist sich als sehr aufwändig. Da von Brunelleschi keine schriftlichen Aufzeichnungen dieser Methode erhalten geblieben sind, ist die Zuschreibung heute noch strittig.

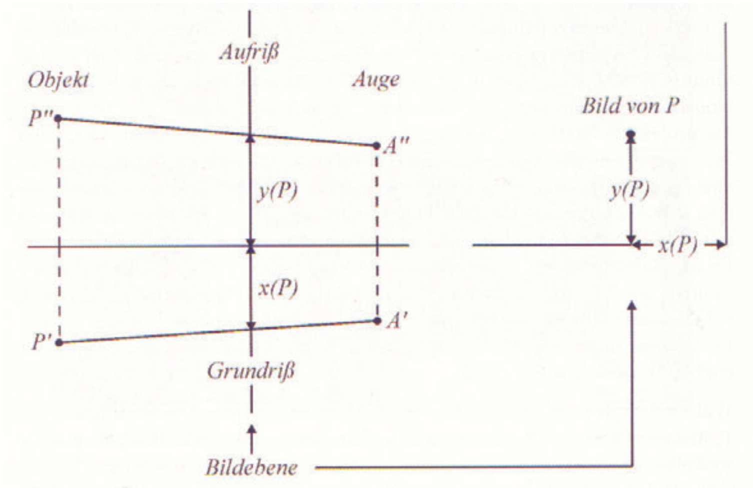


Abbildung 2.12: Schematische Darstellung der Durchschnittsmethode

Schon vor Brunelleschi interessierten sich Künstler, wie z.B. der Maler Giotto, für eine korrekte wirklichkeitstreue Darstellung des Raumes, um sich von der flächigen Bildauffassung des Mittelalters loszulösen. Man kam aber über eine intuitive, augenscheinlich korrekte Darstellung nicht hinweg, da jegliche Vorstellung einer Fluchtstruktur des Bildraumes bzw. Gesetzmäßigkeiten bezüglich der sich perspektivisch verkürzenden Raumtiefen fehlten. Man kann Brunelleschi wohl zuschreiben, dass er den Übergang von Euklids Sehkegel zu einer Sehpyramide (für geradlinig begrenzte Figuren) schuf. So „brachte er wahrscheinlich in einer apparativen Anordnung, wie sie von seinem Schüler Alberti zu einem perspektivischen Meßgerät weiterentwickelt wurde, [die Sehpyramide] derart mit einer vertikal stehenden Bildebene zum Schnitt, dass die von der optischen Achse des an der Spitze eines Stabes festgehaltenen Auges gebildeten Visierlinien zu den Punkten des Gegenstandes das perspektivische Bild punktweise dort zeichnen, wo sie die Vertikalebene durchstoßen[8]“ (Abb. 2.13).

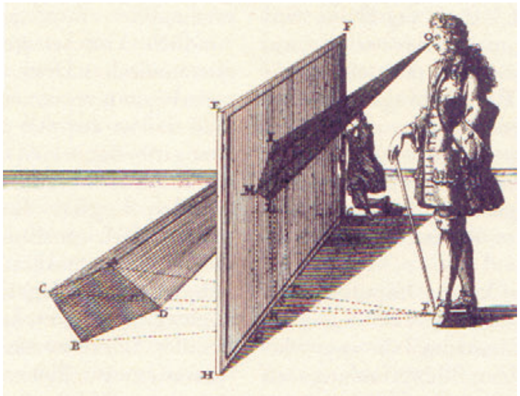


Abbildung 2.13: Sehpyramide

Dieser Stich zur Erklärung der perspektivischen Abbildungsmethode stammt aus dem Jahr 1713. Mit dem Auge O werden die Punkte $ABCD$ des Vierecks anvisiert. Dort, wo die Sehstrahlen auf die Bildtafel $HIFG$ auftreffen, wird die Figur in den Punkten Vi perspektivisch abgebildet.

Abbildung 2.14: Visiermethoden

Diese Darstellung aus dem 15. Jh. zeigt Visiermethoden der Geodäten und Astronomen. Mit Hilfe verschiedener Instrumente werden Seh- und Visierstrahlen erzeugt, die die Seile aus den Anfängen der Landmessung ersetzen. Im Architektenmilieu spricht man heute noch lieber von Visierlinien als von Projektionsstrahlen.

Diese Anordnung ist heute noch das Modell der Abbildungssituation einer Zentralperspektive. Zur Realisierung der Projektionsstrahlen wandte Brunelleschi die ihm als Baumeister bekannte praktische Visiermethode der Feldmesser an (Abb. 2.14).
Außerdem soll Brunelleschi ein Gerät entwickelt haben, das ausschließlich dazu diente, ein Auge des Betrachters seiner Perspektiven zwangsläufig in die einzig korrekte Stellung zum Bild zu bringen (Abb 2.15).
Die Entwicklungen der Frührenaissance im deutschen Sprachraum beschäftigten sich vorrangig mit der Mechanisierung des aufwändigen Konstruktionsherganges, wie folgende Abbildungen illustrieren sollen. Maler verwendeten ein Quadratnetz, mit dessen Hilfe die zu malende Ansicht in kleine Teile zerlegt wurde, um folglich die Gesamtansicht leichter

[8]J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 127

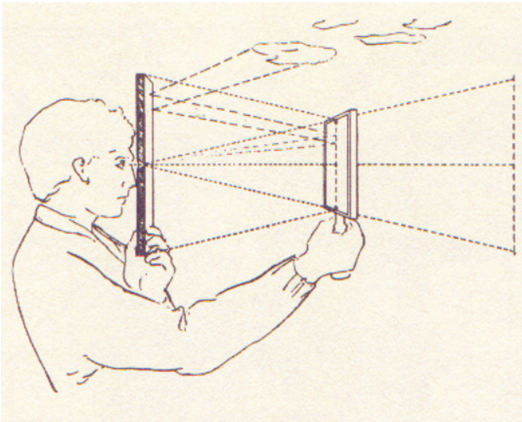


Abbildung 2.15: Schema des perspektivischen Betrachtungsgerätes von Brunelleschi

Das Bild hat an der Stelle des Zentralfluchtpunktes ein Loch, durch das der Betrachter von der Rückseite auf einen Spiegel schaut, in dem er das Bild erblickt. Da der Spiegel in der Distanz, mit der die Perspektive konstruiert worden ist, gehalten wird, ist das Auge in der optisch einzig richtigen Position fixiert (Abb 2.15).

auf einem Bild darstellen zu können. „Das Netz wurde dazu in feine durchsichtige Schleier eingewebt, welche der Maler zwischen seinem Auge und dem zu malenden Gegenstand aufspannte. Später benutzte man Netze aus Fäden bzw. Glasscheiben, wobei die Netze aufgemalt bzw. eingeritzt waren[9].“
So beschreibt Dürer den Arbeitsablauf (Abb. 2.17) wie folgt:
„Durch drei Fäden magst du ein jedes Ding, das du damit erreichen kannst, in ein Gemälde bringen, auf eine Tafel zu verzeichnen. Dem thue also.
Bist du in einem Saal, so schlage eine große Nadel mit einem weiten Öhr, die dazu gemacht ist, in eine Wand, vor ein Auge. Ziehe dadurch einen starken Faden und hänge unten ein Bleigewicht daran. Danach setze einen Tisch oder eine Tafel so weit von dem Nadelöhr, darinn der Faden ist, als du willst. Darauf stelle einen aufrechten Rahmen fest, zwerchs gegen das Nadelöhr, hoch oder nieder, auf welche Seite du willst. Der Rahmen habe ein Thürlein, das man auf und zu thun kann. Dieses Thürlein sei deine Tafel, darauf du malen willst. Danach nagele zwei Fäden, die ebenso lang sind als der aufrechte Rahmen lang und breit ist, oben und mitten in den Rahmen und den anderen auf einer Seite auch mitten in den Rahmen, und lasse sie hängen. Danach mache einen eisernen langen Stift, der zuvorderst an der Spitze ein Nadelöhr habe. Darein fädele den langen Faden, der durch das Nadelöhr an der Wand gezogen ist, und fahre mit der Nadel und dem langen Faden durch den Rahmen hinaus, und gib sie einem Anderen in die Hand. Du aber warte der beiden anderen Fäden, die am Rahmen hängen. Nun gebrauche dies also.
Lege eine Laute oder was dir sonst gefällt, so fern von dem Rahmen als du willst, nur dass sie unverrückt bleibe, so lange du ihrer bedarfst. Lasse deine Gesellen die Nadel mit dem

[9]F. Kaderávek. Geometrie und Kunst in früherer Zeit. (Prag, 1935) S. 58

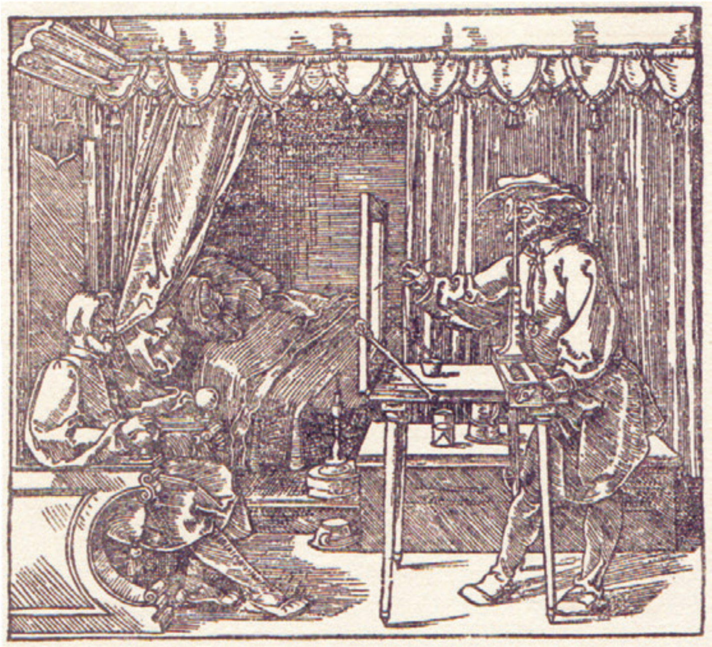


Abbildung 2.16: Ein wesentliches Element in dieser Abbildung ist der verstellbare Stab zur Fixierung des Augpunktes.

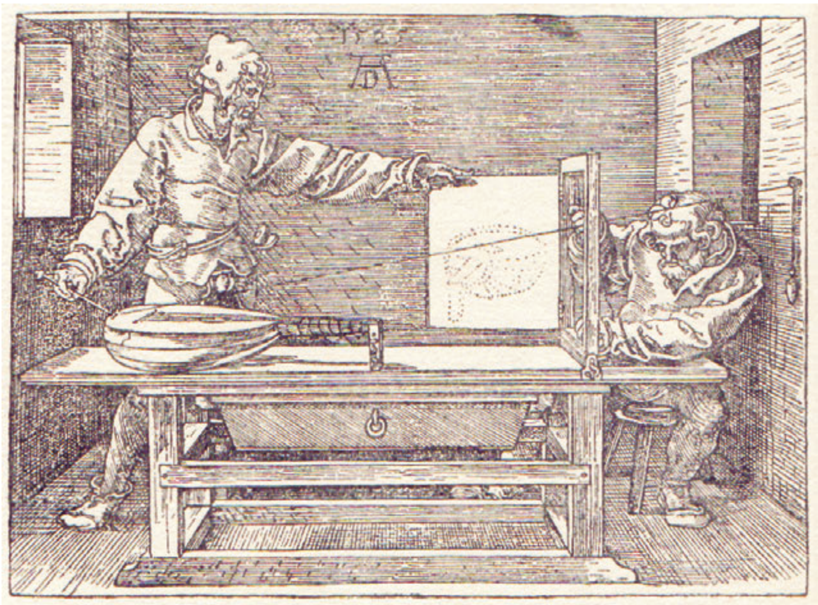


Abbildung 2.17: Eine umständliche Methode, die Bildpunkte mittels ihrer „Koordinaten“ zu bestimmen.

Faden hinausstrecken auf die nötigsten Punkte der Laute. Und so oft er auf einem still hält und den langen Faden streckt, so schlage allweg die zwei Fäden am Rahmen kreuzweis gestreckt an den langen Faden, klebe sie an beiden Seiten mit Wachs an den Rahmen und heiße deinen Gesellen seinen langen Faden nachlassen. Danach schlage das Thürlein zu und zeichne denselben Punkt, wo die Fäden kreuzweise übereinandergehen auf die Tafel. Danach thue das Thürlein wieder auf und thue mit einem anderen Punkte abermals so, bis daß du die ganze Laute gar an die Tafel punctirst. Dann ziehe alle Punkte, die von der Laute auf der Tafel geworden sind, mit Linien zusammen, so siehst du, was daraus wird. Also magst du andere Dinge auch abzeichnen[10]."

Natürlich versuchte man auch, der Durchschnittsmethode Gesetzmäßigkeiten abzugewinnen, um die Konstruktion perspektivischer Bilder zu erleichtern. In weiterer Folge beschäftigten sich die Künstler und Gelehrten mit der Frage, welche Parameter eines Bildes unter welchen Bedingungen frei wählbar seien bzw. wie aus einem korrekt perspektivisch erstellten Bild der Betrachterstandpunkt (=Augpunkt) zu rekonstruieren sei. Die Rekonstruktion des Augpunktes wurde 1605 ansatzweise von Simon Stevin in seinem Lehrbuch zur Perspektive („Van de deursichtighe") diskutiert, aber erst von Lambert im 18. Jh. vollständig bearbeitet. Vor allem italienische Künstler befassten sich mit der Perspektive, weshalb Künstler aus ganz Europa nach Italien reisten, um diese „Kunst zu erlernen".

Das einfachste Beispiel war der sog. „pavimento", ein schachbrettartig gemusterter Fußboden mit einer zum vorderen Bildrand parallelen Kante, die sich (wenn korrekt konstruiert) zum Bildhintergrund hin verkleinerte und für die weitere approximative Bildkonstruktion als hilfreich erwies.

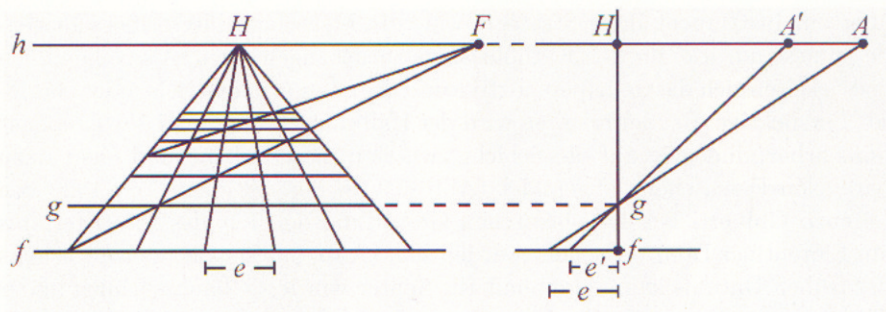


Abbildung 2.18: Pavimento-Methode

Bei der Pavimento-Methode (Abb. 2.18) wird der Horizont h parallel zur unteren Bild-

[10] A. Dürer. Unterweisung der Messung ... (München, 1908) S. 181 ff.

kante f gewählt und der Hauptpunkt H auf h fixiert das Lot, auf dem der Augpunkt A liegen muss. Die Wahl des Abstandes zwischen f und der ersten Fugenreihe g beeinflusst die Augdistanz $d = HA$, wie in der Seitenansicht zu sehen ist. Gleichzeitig legt die Augdistanz den Fluchtpunkt F der Diagonalrichtung fest und ermöglicht somit die Konstruktion aller weiteren Fugenreihen.
Mit der Zeit entwickelten die Künstler auch die Konstruktion eines nicht zur Bildfront parallelen Pavimentos und folglich die projektive Skalierung beliebig geneigter Geraden (Abb. 2.19).

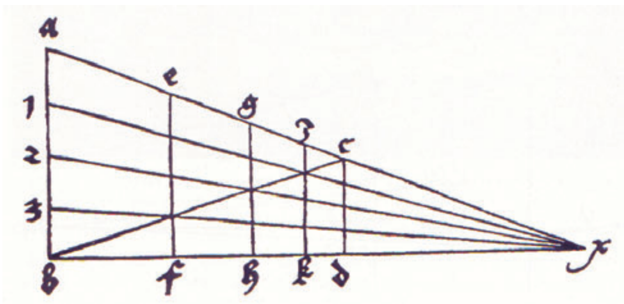


Abbildung 2.19: Konstruktion einer projektiven Skala nach Dürer

So bildeten sich Begriffe wie Horizont, Fluchtpunkt, Hauptpunkt, etc. aber natürlich noch nicht mit der strengen eindeutigen Definition, wie wir sie heute kennen. So identifizierte man z.B. den Augpunkt (Ort des Betrachterauges) mit dem Hauptpunkt (Lotfußpunkt vom Augpunkt auf die Bildebene). Nichts desto trotz wurde die perspektivische Darstellungsweise sehr gut weiterentwickelt, vor allem von den Jesuiten und das aus driftigem Grund, denn diese versuchten mittels der für ungebildete Bürger und einfache Leute überwältigenden Sinneseindrücke eben diese wieder für die katholische Kirche zu gewinnen. In dieser Phase wurde die Reliefperspektive entwickelt.

Reliefperspektive

Bei dieser Methode wird der Halbraum hinter einer Frontebene (=Spurebene) umkehrbar eindeutig auf die Schicht zwischen dieser Ebene und einer dazu parallelen Fluchtebene abgebildet. Dieses Prinzip soll bereits 1420 von Lorenz Ghiberti bei der plastischen Ausgestaltung des Baptisteriums am Florentiner Dom (Abb. 2.20) verwendet worden sein, dies erscheint aber ob des frühen Datums eher unwahrscheinlich und würde dem damaligen Wissensstand nicht entsprechen. Das Werk dokumentiert jedoch das frühe Interesse an naturalistischen Darstellungen.

Abbildung 2.20: Eines der zehn Felder am Baptisterium des Florentiner Domes.

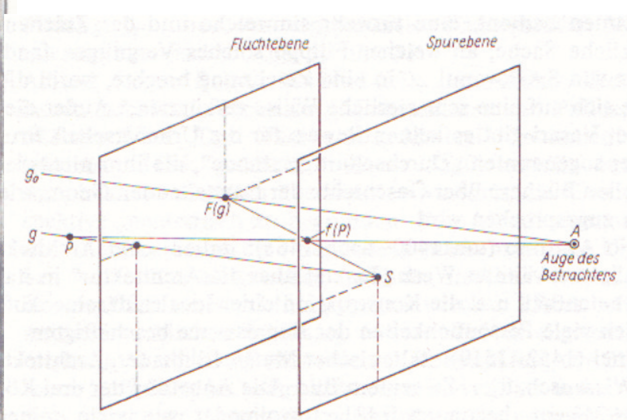


Abbildung 2.21: Reliefperspektive

Die Reliefperspektive ist eine zentralperspektivische Abbildung eines von der sog. Spurebene begrenzten Halbraumes auf den von dieser Spurebene und einer dazu parallelen Fluchtebene begrenzten Teil dieses Halbraumes (Abb. 2.21). Die Spurebene teilt den Raum in zwei Halbräume, wobei sich in einem von diesen der Augpunkt A des Betrachters befindet. Ist g eine beliebige im Punkt S der Spurebene beginnende Halbgerade des anderen Halbraumes, so schneidet die Parallele g_0 zu g durch A die Fluchtebene im Fluchtpunkt $F(g)$ der Geraden g, d.h. dem Bild des unendlich fernen Punktes von g. Die Parallelen Geraden g und g_0 spannen eine Ebene auf. Jedem Punkt P auf g wird der Schnittpunkt $f(P)$ der Geraden PA mit der Strecke $SF(g)$ zugeordnet. Dadurch ist die Halbgerade g umkehrbar eindeutig auf die Strecke $SF(g)$ und der gesamte Halbraum umkehrbar eindeutig auf die „Schicht" zwischen Flucht- und Spurebene abgebildet. Eine mathematische Theorie zur Reliefperspektive entstand jedoch erst im 19.Jh. im Rahmen der projektiven Geometrie. Abbildung 2.22 zeigt Grundbeispiele zur Reliefperspektive, die in dieser Zeit üblicherweise behandelt und gezeichnet wurden.

Neben der Reliefperspektive wurde die sog. anamorphoretische Perspektive zu dieser Zeit entwickelt. Es handelt sich hierbei um ein perspektivisch korrektes, gewöhnliches Abbildungsverfahren, bei dem ein extremer Betrachterstandpunkt eingenommen wird. Nur

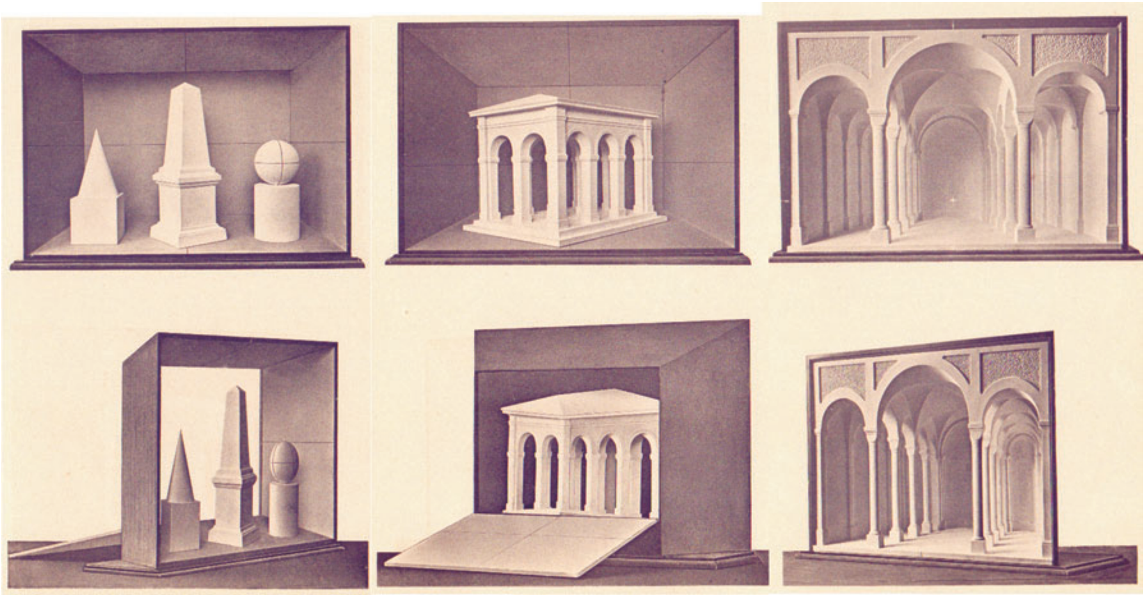


Abbildung 2.22: Beispiele zur Reliefperspektive: Typische Körper, Bogenhalle, Romanische Basilika

wenn man diesen Standpunkt findet, kann man den Inhalt des sonst chaotisch wirkenden Bildes erfassen. Das Hauptwerk zu dieser „curiosen Perspective“ stammt vom französischen Franziskaner J. F. Niceron (1638).

Die Frontalperspektive

Das erste Gemälde, das nachweislich aufgrund einer echten Perspektivenkonstruktion entstanden ist, ist das Dreifaltigkeitsfresko von Masaccio (1401 - 1428). Man geht davon aus, dass Brunelleschi - wieder einmal - der Konstrukteur des perspektivischen Bildgerüstes ist, welches vor ca. 20 Jahren bei Restaurierungsarbeiten freigelegt worden ist (Abb. 2.23). Die Entwicklung der später so genannten „Frontalperspektive“ beherrschte in ganz Italien die perspektivischen Forschungen des 15. Jhs. Die Frontalperspektive verminderte den konstruktiven Aufwand in den Hilfstafeln von Grund- und Aufriss und ist relativ einfach, da im Normalfall rechtwinkeliger Gebäude eine Bauwerksseite immer para-llel zur Bildebene liegt, während die andere dazu senkrecht steht, sodass die zur Bildebene parallelen Mauern zu sich selbst parallel abgebildet werden, also nicht fluchten (Abb. 2.24).
Der erste, der die Frontalperspektive systematisch und logisch korrekt erfasste, war Leon Battista Alberti, ein Schüler Brunelleschis. Im Gegensatz zu seinem Lehrmeister hatte Alberti eine profunde universitäre Ausbildung genossen und schrieb seine wissenschaftlichen Betrachtungen in Florenz in toskanischer Landessprache oder in Latein. So wird er zu

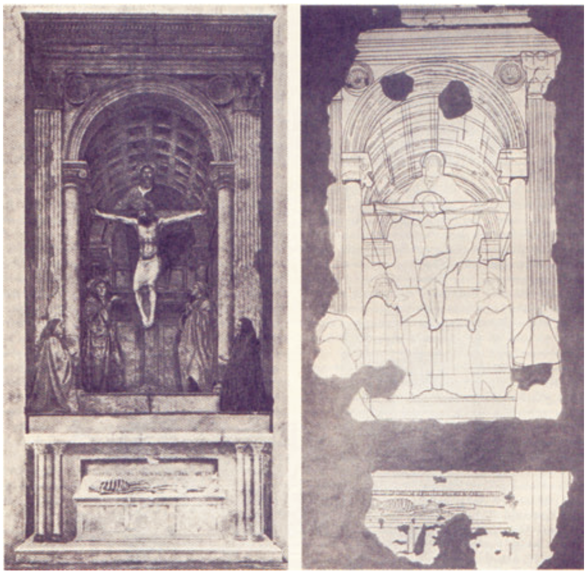


Abbildung 2.23: Dreifaltigkeitsfresco von Masaccio (1401 - 1428) in Florenz

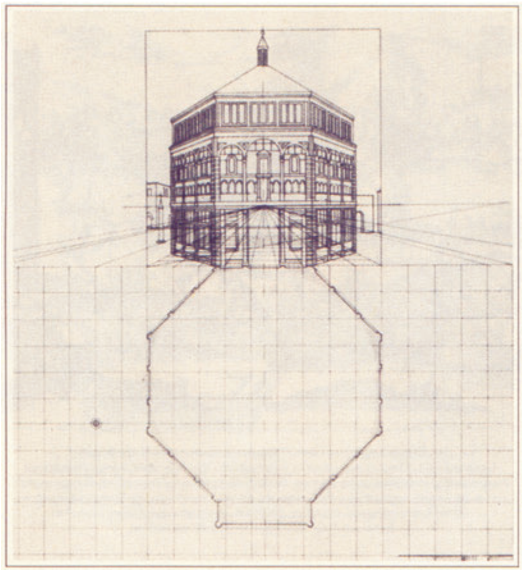


Abbildung 2.24: Frontalperspektive nach Brunelleschi

einem wichtigen Brückenbauer beider Sprachen (bezüglich der Terminologie) und somit auch zwischen den Handwerkern und Gelehrten. In seinem Werk „De pictura“ beschreibt er Grundkonstruktionen, die er mit Brunelleschi entwickelt hat und u.a. auch den bereits erwähnten Visierapparat, der mit Hilfe dieser Beschreibung rekonstruiert werden konnte (Abb. 2.15). Alberti ist sich des Umstandes bewusst, dass der Inhalt seines Lehrbuches zu wünschen übrig lässt und ersucht um Verständnis seitens des Lesers ob der “Neuheit des Gegenstandes und der [daraus resultierenden] gebotenen Kürze der Behandlung[11].“
Piero della Francesca, ein Schüler Albertis, arbeitete viele Jahrzehnte lang an einer praktischen und theoretischen Zusammenfassung aller perspektivischen Forschungsergebnisse der Florentiner Schule. So brachte er während seines letzten Lebensjahrzehnts in den Jahren 1484 bis 1487 das bedeutende Traktat „De prospectiva pingendi“ heraus, das als Grundlagenwerk der Frontalperspektive gilt, in dem die Möglichkeiten der frontalen Abbildung der für die Architektur wichtigsten Grundformen sowie deren verschiedenste Lagen in Bezug zur Bildebene weitgehend angeführt sind.
„Der Ausgang seiner Konstruktionen ist das frontal fluchtende Quadrat mit den Diagonalen, das schon bei den Tiefenverkürzungen für regelmäßige Intervalle bei Brunelleschi und Alberti bildet. Erst Pieros logisch-systematischer Verstand fand heraus, dass die ’topologischen’ Nachbarschaftsbeziehungen der Diagonalpunkte eines Rasters nach ihrer perspektivischen Verzerrung durch Fluchtung und Verkürzung nicht nur bei den regelmäßigen

[11] J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 136

Teilungen eines Quadratrasters erhalten bleiben, sondern, dass diese perspektivische Abbildungsgesetzmäßigkeit für jede mögliche Folge von Intervallen gilt. Damit stand eine universelle Methode für die bei Architekten 'Tiefenteilung' genannte Verkürzungskonstruktion zur Verfügung und zugleich war das Prinzip der Frontalperspektive auf die Lösung so gut wie aller Architektur-Abbildungsprobleme erweitert. Beliebig vieleckige Figuren oder Raumgebilde konnten nun perspektivisch abgebildet werden, auch wenn bei ihnen keine frontale Lage zur Bildebene vorlag oder gar nicht möglich war.

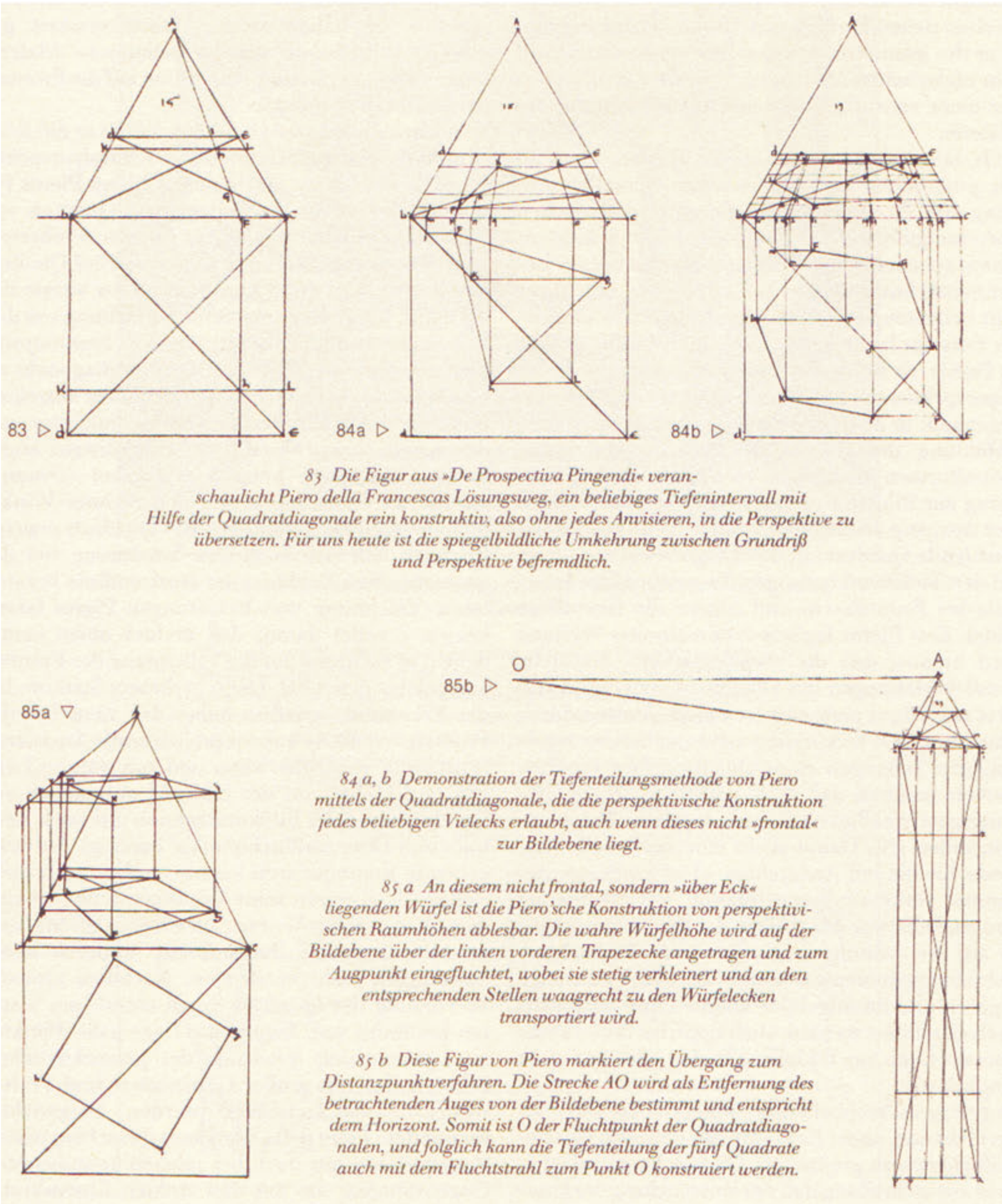


Abbildung 2.25: Frontalperspektive

So gelang es, rechtwinkelige Gegenstände, wie etwa ein Gebäude, 'über Eck' mit den frontalen Gesetzmäßigkeiten zu projizieren. Diesem Umstand ist es wohl zuzuschreiben, dass der Entwicklung der komplizierten Perspektive mit zwei oder mehreren Hauptfluchtpunkten, der sogenannten Eckperspektive, in Italien keine Aufmerksamkeit geschenkt wurde und sich die italienische Malerei lange Zeit in der Raumkomposition auf die Frontalperspektive beschränkte[12]."
Pieros Werk gilt als ein Meilenstein auf dem Weg des Konstruktiven Zeichnens zur exakten Wissenschaft und ferner als das erste logisch-systematisch aufgebaute Werk seit den antiken Werken von Euklid bis Ptolemäus.

2.2.2 Das Grund-Aufrissverfahren entsteht - ein Verdienst Dürers?

Für die Zeit des Mittelalters lässt sich auf Grund der äußerst schlechten Quellenlage keine Entwicklung eines Grund-Aufrissverfahrens nachvollziehen, die wenigen unkommentierten Aufzeichnungen der Steinmetze lassen keine seriösen Nachforschungen zu. In der Renaissance hingegen lassen sich die Fortschritte heute noch gut nachvollziehen.
Das Grund-Aufrissverfahren wurde bereits 1475 ausgezeichnet von Piero della Francesca behandelt (in seinem unveröffentlichten Werk „Prospettiva pingendi"). Dürer konnte zwar in der Erforschung der Zentralperspektive wissenschaftlich nicht weit vordringen, er machte nur viele Vorschläge zur mechanischen Konstruktion zentralperspektivischer Bilder, wie wir seinen Stichen entnehmen können (Abb. 2.16 & Abb. 2.17). Doch was das Zweibilderverfahren anbelangt, muss man Dürer zweifellos große Kenntnis und Perfektion auf diesem Gebiet zusprechen. Auf diesem Gebiet der Abbildungsverfahren kann man ihn ohne weiteres mit Monge vergleichen, ein einfaches Beispiel soll dies illustrieren. So konnte Dürer bereits zu einem gegebenen Würfel samt punktförmiger Lichtquelle in Grund- und Aufriss exakt den richtigen Schattenwurf zeichnen (Abb. 2.26).
Man nimmt heutzutage an, dass Dürer „als erster die berühmten klassischen Polyeder aus Grund-Aufriss-Abbildungen konstruiert hat[13]." Abbildung 2.27 zeigt eines von Dürers Risskonstruktionen der fünf regulären Polyeder, hier das zwanzigflächige Ikosaeder mitsamt der Oberflächenabwicklung, dem sog. „Schnittmuster". Zu Dürers Zeit gab es noch keine Unterscheidung von sichtbaren und unsichtbaren Kanten, die heute mittels vollen und strichlierten Linien kenntlich gemacht wird.
In seinen „Vier Büchern von menschlicher Proportion" wendet er das Zweibilderverfahren vielseitig an, um z.B. aus der Frontansicht eines Kopfes und dem gedrehten Grund- bzw.

[12] J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 139
[13] J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 115

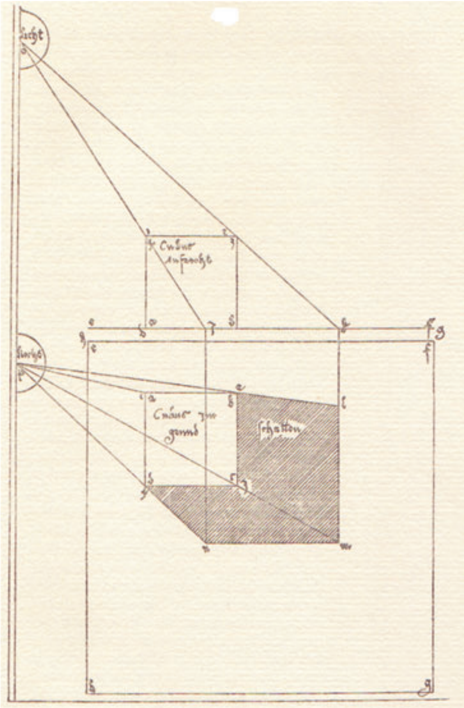


Abbildung 2.26: Schatten eines Würfels nach Dürer

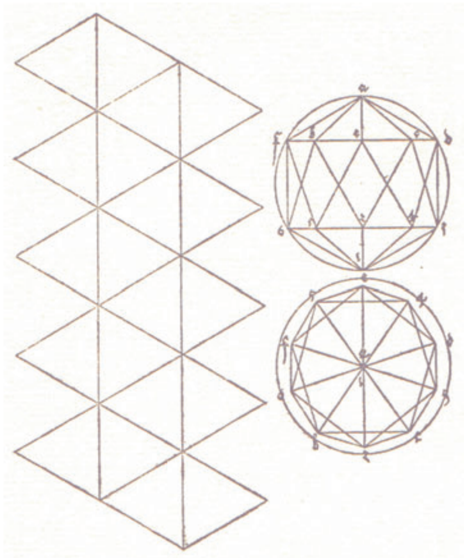


Abbildung 2.27: Ikosaeder nach Dürer

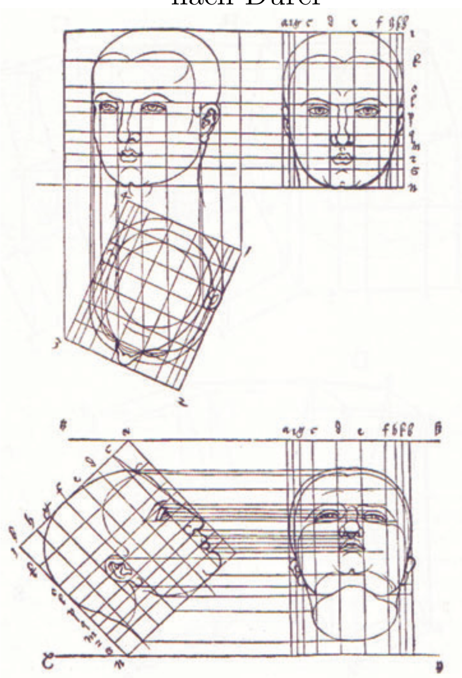


Abbildung 2.28: Anwendung zugeordneter Normalrisse zur Konstruktion verschiedener Ansichten eines Kopfes

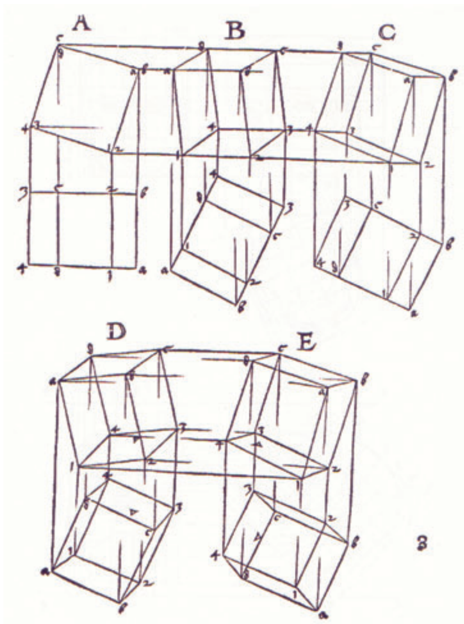


Abbildung 2.29: Schrittweise Konstruktion von Grund- und Aufriss eines Würfels in allgemeiner Lage

Seitenriss das geneigte Gesicht zu konstruieren (Abb. 2.28).
Weiters findet man schon bei Dürer ein Verfahren, einen Körper zunächst in sehr einfacher Lage im Grund- bzw. Aufriss darzustellen und diesen dann schrittweise in immer allgemeinere Lagen zu drehen (Abb. 2.29).

Eine interessante Frage, die sich an dieser Stelle aufdrängt, ist jene nach den Quellen, auf die Dürer zurückgreifen konnte. So bezieht sich Dürer selbst immer wieder auf die „steynmetzen“. In seinem „drytbüchlein von den Corperlichen dingen“ (= dritter Abschnitt seiner 'Underweysung'), das vorwiegend Architekturelemente zeigt, behandelt er eine solche Steinmetzanwendung der Schraube an einer gewundenen Säule mit „zweyen, dreyen oder vier gengen“ (Abb. 2.30).

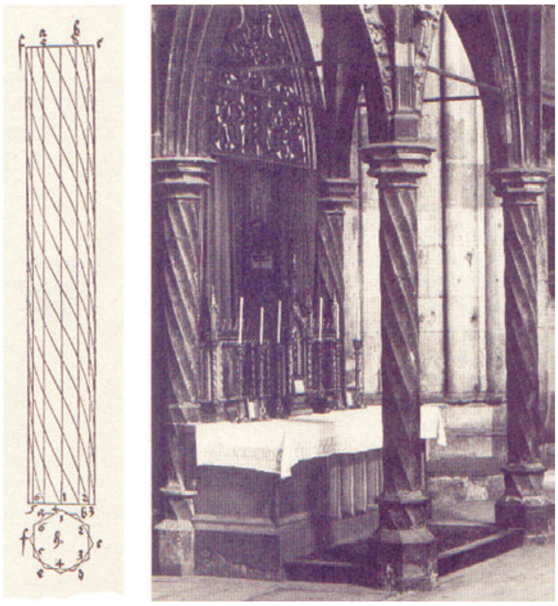


Abbildung 2.30: Grund- und Aufriss einer gewendelten Säule von Dürer. Solche Wendelsäulen finden sich z.B. am Alberturaltar des Regensburger Domes.

Dürer hat also offenbar Einsicht in die zeichnerischen und handwerklichen Konstruktionen der Steinmetze, obwohl er als Maler eigentlich nicht Zugang zum Zunftgeheimnis der Steinmetze haben sollte. Man muss annehmen, dass er während der Lehrzeit als Goldschmied (wie übrigens auch Leonardo da Vinci) in seiner Heimatstadt Nürnberg Kontakte zu der dort ansässigen Bauhütte knüpfen konnte.
Schon aus dem Titel „Underweysung“ geht hervor, dass er seinen eigenständigen Anteil an diesem Werk nicht sehr hoch einschätzt. So schreibt er in seiner „Vorred“: „...durch Albrecht Dürer zusamen getzogen, vnd zu nutz aller kunstliebhabenden mit zu gehörigen figuren, in truck gebracht...[14]“ Doch gerade in diesem „Zusammenziehen“ liegt der große Verdienst Dürers, seine Wahl und Ausführungen der Zeichenbeispiele suchen davor und auch längere Zeit danach noch seines Gleichen.

[14]A. Dürer. Unterweisung der Messung ... (München, 1908) S. 13

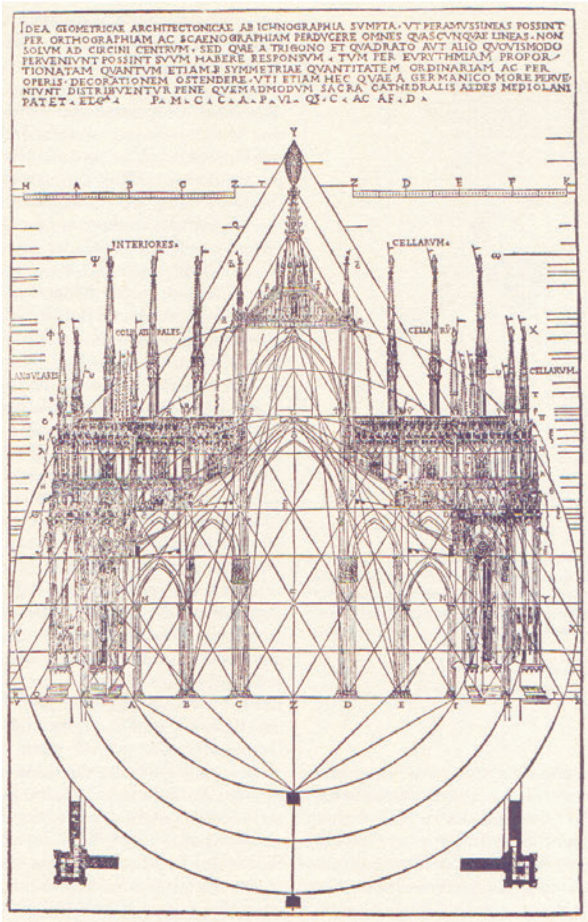


Abbildung 2.31: Proportionsfindungsprinzip von Cesariano

Der italienische Baumeister Cesare Cesariano veröffentlichte noch zu Dürers Lebzeiten ein Proportionsfindungsprinzip[a] anhand einer Fassade des Mailänder Doms (Abb. 2.31).

[a]Vgl. mit der „Vierung über Ort“ bei der Fialenkonstruktion in den Bauhüttenbüchern.

„Hier boten offensichtlich die magisch-kosmischen Assoziationen, die seit den Pythagoreern über Platon bis noch zu Kepler von den regulären Figuren ausgingen und in den fünf regulären Polyedern kumulieren, einen spirituellen Rahmen, mit dem der transzendenten Bedeutung des sakralen Bauwerks ein als angemessen empfundener Ausdruck verliehen werden konnte[15].“ Die Proportionen der antiken Tempel sind offenbar in der Renaissance mit Erfolg analysiert und rezipiert worden. Im Vergleich zur Entwicklung der Grund-Aufrissmethode spielt die Proportionsgeometrie jedoch eine viel kleinere Rolle. So bleibt nur noch das Hüttenbuch von Wolfgang Rixner (1445 - 1515) zu erwähnen, um die Quellenlage jener Zeit bezüglich des Grund-Aufrissverfahrens zu vervollständigen.
Um die Frage nach der Rolle Dürers in der Entwicklung des Grund-Aufrissverfahrens abzurunden, sei erwähnt, dass allein die Zeichenkonstruktionen in seiner „ 'Underweysung'

[15]J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 109

den Rang des ersten protowissenschaftlichen Traktats der Konstruktiven und Darstellenden Geometrie[16]“ haben. In der Zeit nach Monge wird sein Wirken allzu oft unterschätzt, da seine intuitiv-pragmatische Vorgangsweise den Mathematikern zu wenig analytisch und systematisch erscheint. Leonardo Olschki analysiert hingegen völlig richtig: „Er [Dürer] nimmt darin auf, was die Werkstattüberlieferung an wertvollen und nützlichen Lehren besaß, und ergänzt sie mit dem gelehrten Material, welches er sich im Verkehr mit Pirckheimer und seinen Freunden aneignen konnte. Dem Anschein nach entstand aus diesen verschiedenen Elementen ein Flickwerk; in Wirklichkeit vollzog sich dadurch die fruchtbare Berührung von Praxis und Wissenschaft, die dem Werk auch außerhalb der Kreise der Laien, für welche es geschrieben wurde, die Lebensberechtigung gab und seinen Ruhm begründete[17].“

Gewölbegeometrie

An dieser Stelle soll auch noch die Gewölbegeometrie erwähnt werden, vor allem „Das Dresdner Skizzenbuch der Gewölbeprojektion“. Der Buchdeckel trägt die Initialen W. G., es handelt sich dabei um einen Meister, der von 1560 bis 1572 gewirkt haben soll. In diesem Werk wird u.a. die Rippengewölbegeometrie behandelt, wobei sich das Konstruktionsprinzip heute nicht mehr eindeutig nachvollziehen lässt.
Die Spitzbögen erscheinen in ihrer wahren geometrischen Gestalt im Aufriss, nachdem ihre senkrecht zum Grundriss liegenden Bogenebenen zur Aufrisstafel parallel gedreht worden sind. Hier ist also die Grund-Aufrissmethode mit einer Paralleldrehmethode vermischt (Abb 2.32).

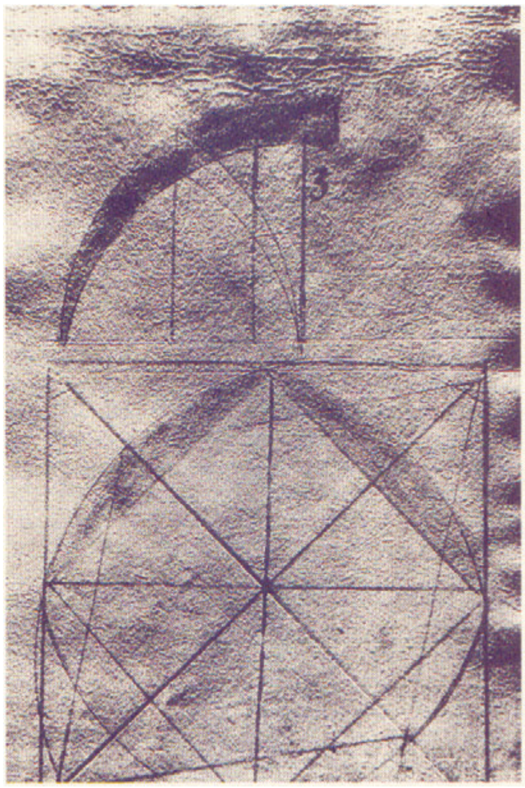
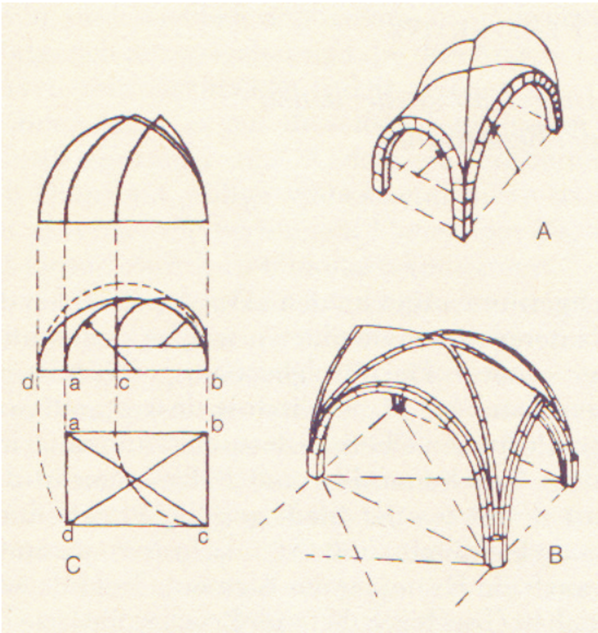


Abbildung 2.32: Ermittlung der kreisförmigen Bögen von Rippengewölben

[16] J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 115
[17] L. S. Olschki. Die Literatur der Technik und der angewandten Wissenschaften vom Mittelalter bis zur Renaissance - Band I. (Leipzig/Florenz/Rom/Genf, 1919) S. 425

Damals durchwegs übliche Konstruktionsweisen sind bei Sellenriek[18] beschrieben, der das Prinzip u.a. an Hand eines gotischen Spitzgewölbes über einem rechteckigen Grundriss erklärt (Abb 2.33).



A) Romanische Überwölbung eines rechteckigen Joches mit gestelzter, d. h. überhöhter Bogenbasis über der kürzeren Spannweite. Diese unterschiedlichen Höhen der Bogenkämpfer (Basis) sind ästhetisch unbefriedigend.

B) Frühgotische Lösung des Kämpferproblems mittels Spitzbögen nur über der Schmalseite des Joches, wodurch sich gleiche Kämpferhöhen ergeben.

Abbildung 2.33: Gewölbegeometrie

C) Schema der Ermittlung der Bögen desselben Gewölbes B) über Grund- und Aufriss. Der untere Aufriss zeigt das Problem: Alle Bögen sind parallel zur Aufrissebene gedreht, die Höhe der Kreisbögen beträgt jeweils die Hälfte ihrer Spannweite. Da die Scheitel aller Bögen eines Gewölbes auf gleicher Höhe liegen müssen, kann man nur die Kämpferlinien in unterschiedlicher Höhe anordnen, z. B. Kämpfer über *bc* höher als der über dem Diagonalbogen über *bd*. Vor der Gotik wurden die größeren Bögen z.T. elliptisch ausgeführt, sodass für alle gleiche Kämpferhöhen entstanden. Der obere Aufriss zeigt die gotische Lösung des Problems gleicher Kämpferhöhen mittels mehr oder weniger steiler Spitzbögen aus unterschiedlichen Kreissegmenten.

„Unzweifelhaft handelt es sich hier immer um Grund-Aufriss-Beziehungen, auch wenn es um spezifische Varianten der Gewölbeermittlung geht. Daraus lässt sich der Schluss ableiten, dass die verschiedenen Anwendungen der Grund-und-Aufriss-Beziehungen, die Dürer so beispielhaft vorgeführt hat, mehr oder weniger direkt von der Reißbodenpraxis der Steinmetzmeister entstammen. Des weiteren muss der Schluss erlaubt sein, dass die Monumental-Architektur der römischen Antike nur über rudimentäre Ansätze von Grund-

[18] J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 113

Aufriss-Beziehungen verfügt haben kann, weil sie anderenfalls auch einen Weg von den massigen und biederen Tonnengewölben zu leichteren und anspruchsvollen Rippenkonstruktionen gefunden haben würde[19].“

Mechanische Erzeugung

Trotz der Entwicklungen jener Zeit, konnten sich nicht alle die Kenntnisse einer exakten Konstruktion von Grund- bzw. Aufriss aneignen. Wo also die geometrischen Kenntnisse nicht ausreichten, wurde ein dreidimensionales Modell des abzubildenden Körpers in ein Gerät eingelegt, welches uns in einer Darstellung von H. Lencker (1567) überliefert ist (Abb. 2.34).

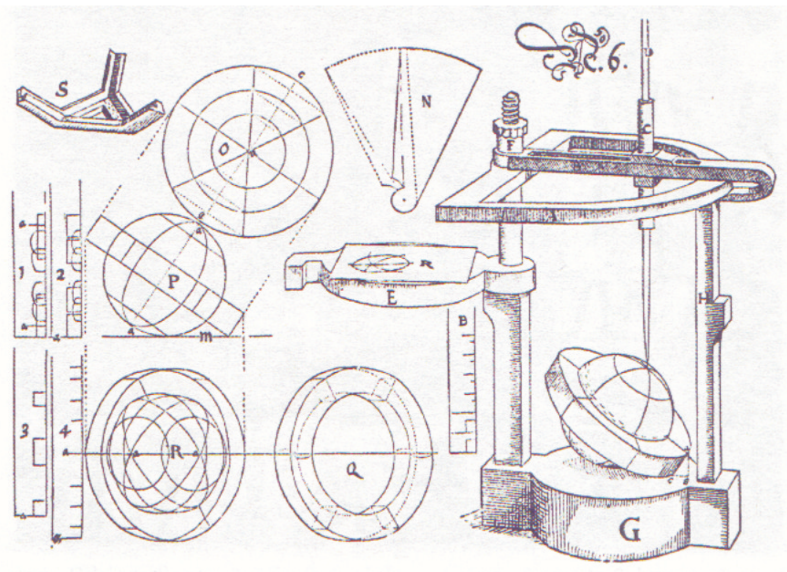


Abbildung 2.34: Gerät zur mechanischen Konstruktion des Grundrisses von Objekten

„Der wesentlichste Teil des Gerätes ist die Nadel D, die sich in horizontaler und vertikaler Richtung bewegen lässt und mit einem Maßstab auf ihrem Schaft versehen ist. Zunächst wurde die Nadelspitze auf einen bestimmten Punkt des Körpers geführt und auf dem Schaft die Höhe dieses Punktes über der Grundplatte abgelesen. Dann wurde sie wieder hochgezogen, der Tisch E mit dem Zeichenblatt R herumgeschwenkt und die Nadel auf dieses Papier geführt. So war ein Punkt des Grundrisses samt der entsprechenden Höhe über der Grundebene bestimmt. Auf diese mühsame Weise ließ sich der Grundriss Punkt für Punkt erzeugen[20].“

[19] J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 111
[20] F. Kaderávek. Geometrie und Kunst in früherer Zeit. (Prag, 1935) S. 21

Kurvendarstellung

Im ersten Buch Dürers „Underweysung“ sind viele bekannte und neue Konstruktionsprinzipien ebener und räumlicher Kurven dargestellt, darunter befinden sich u.a. die Muschellinie, Spinnenlinie (Epizykloide), archimedische Spirale oder ionische Schnecke (durch knickfreies Zusammensetzten immer größer werdender Kreisbögen). Auf die Terminologie dieser Zeit werde in an anderer Stelle noch genauer eingehen. Dürer geht bei seinen Ausführungen sowohl auf die punktweise Konstruktion als auch auf die mechanische Erzeugung von Kurven ein. In diesem Buch hat Dürer auch einen Irrtum festgehalten, der noch Jahrhunderte später zu Diskussionen anregen sollte.

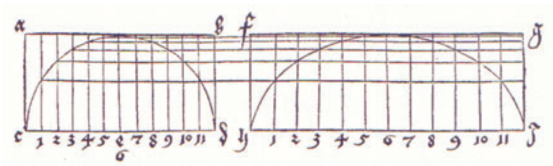


Abbildung 2.35: Dürers Konstruktion der Ellipse aus dem Kreis

Er kannte zwar bereits die Erzeugung von Ellipsen als affine Streckung bzw. Stauchung von Kreisen (Abb. 2.35), konstruierte aber auch im regulären Zweibilderverfahren punktweise den ebenen Schnitt eines geraden Kreiskegels (Abb. 2.36).

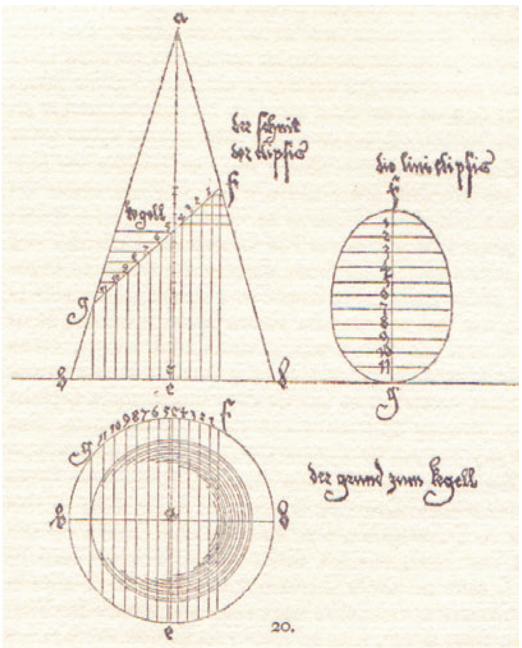


Abbildung 2.36: Dürers Ellipsenkonstruktion aus dem Kegel

Er bezeichnet diese Schnittkurve als „Eilini“, ohne zu wissen, dass es sich dabei um denselben Kurventyp handelt, also eine Ellipse. Er erklärt die eiförmige Gestalt mit dem kleineren oberen Durchmesser des Kegels im Vergleich zum unteren Durchmesser. Weiters argumentiert er, dass die Eilinie aus diesem Grund nur eine Symmetrieachse haben kann und somit wie ein Ei aussehen muss. Dürers Leistungen sollen an dieser Stelle aber nicht geschmälert werden, da er auf dieselbe Weise auch Parabel und Hyperbel konstruiert hat und somit „ganz zufällig“ am Kegel zeigt, wie Kurven als ebener Schnitt eines Körper zu erzeugen sind.
Dürer war wohl der erste, der mit seiner Abhandlung über die Kegelschnitte einen bis dahin ausschließlich mathematischen Gegenstand erfolgreich als geometrisches Grund-Aufrissproblem behandelte und es schaffte, alle drei Kegelschnittkurven rein zeichenkonstruktiv darzustellen.
Sogesehen kann man Dürer als bemerkenswerten Vorläufer von Monge nennen, und beide hatten sie gemeinsam, sich auch mit dem Militärbauwesen zu beschäftigen. Es ist wohl kaum bekannt, dass Dürer auch ein genialer Kriegsbaumeister war, was in der neueren Literatur auch nicht erwähnt wird. Er entwarf in seinem eher unbekannten Werk „Etliche underricht zu befestigung der Stett, Schloss und Flecken“ (Nürnberg, 1527) Festungspläne, die bereits die „Grundzüge enthalten, aus denen sich die deutsche Befestigungsart des XIX. Jahrhundertes entwickelt hat. Dürers Werk ist geradezu bahnbrechend in der Geschichte der Festungskriege geworden, da in demselben zumeist die großen Grundgedanken ausgesprochen sind, welche als unerlässlich bei der Anlage und Vertheidigung eines befestigten Platzes in Geltung blieben, so vielfache Abänderungen im Einzelnen die Fortschritte der Bewaffnung auch hervorbrachten[21].“ Dürers polygonaler von Gräben umrandeter Grundriss einer befestigten Wehranlage war zudem bombensicher gebaut. Vor allem in Mailand und Padua wurde diese von Dürer entworfene Bauweise geschätzt und in die Praxis umgesetzt.

2.3 Terminologie

Ich möchte mich bei der Betrachtung der Entwicklung einer Fachsprache der Geometrie auf den deutschsprachigen Raum beschränken und kann mich so im Wesentlichen auf Dürers „Underweysung“ stützen, da die wichtigsten Begriffe von ihm entwickelt oder gesammelt wurden.

[21]F. J. Obenrauch. Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie. (Brünn, 1897) S. 198 ff.

richtscheyt	Lineal
brenlini	Parabel
gabellini	Hyperbel
zirckel lini	Kreis
runde ebene	Kreisfläche
gefierte Ebene oder fierung	Quadrat
ortstrich	Diagonale
zwerchlini	waagrechte Strecke
barlini	Parallele

Abbildung 2.37: Fachtermini: Althochdeutsch → Deutsch

Viel wichtiger als die Begriffe scheint der Umstand zu sein, dass sich Dürers Konstruktionsanweisungen auch heute noch gut lesen lassen und verständlich sind. Dies zeugt von einer klaren Sprache und Ausdrucksweise, was für wissenschaftliche Darstellungen dieser Zeit keineswegs selbstverständlich ist. Folgendes Beispiel[22], wie man zu gegebenem Kreis exakt die Kante des eingeschriebenen Fünfecks bzw. Zehnecks und zugleich näherungsweise die des Siebenecks erhält, soll vorherige Aussage untermauern.

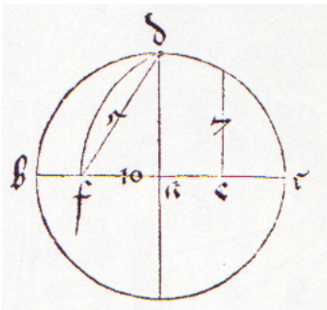


Abbildung 2.38: Dürers Originalzeichnung zur Konstruktion des 5-, 7- und 10-ecks

„Nun ist von nötten ein fünfeck zumachen / in ein zirckelryß / dem thue also / Reiß auß einem Centrum .a. ein zirckelryß / und zeuch ein zwerchlini durch das Centrum .a. und da sie zu beden seyten die zirckellini durchschneidet / da setz .b.c. Darnach zeuch durch das Centrum .a. ein aufrechte lini zu gleychen wincklen [d.h. sie bildet mit der schon gezogenen Waagerechten gleiche Nebenwinkel, ist also senkrecht auf ihr] / und wo sy eben die zirckellini durchschneydet / do setz ein .d. [Jetzt fehlt die Anweisung, zunächst *e* als Mittelpunkt der Strecke *ac* zu konstruieren, was sich aber aus der beigefügten Zeichnung ergibt] Darnach reiß ein gerade lini e.d. und nym ein zirckel / setz in mit dem ein fuß in

[22] Ich verwende im folgenden auch die damals übliche Textgliederung.

den punckt .e. den andern in das .d. und reiß von .d. herab auf die zwerchlini .b.c. wo sie die durchschneidt da setz ein .f. und reiß .f.d. gerad zusamen / dise lenge .f.d. ist ein seiten eins fünfteyls [d.h. die Kante des eingeschriebenen Fünfecks] / das ecket im zirckel herum dryt / so ist .f.a. ein seyten eins zehenecks / [Bis hier ist die Konstruktion exakt und stammt aus dem Almagest des Ptolemaios] Darnach teyl .a.c. mit einem punckten .e. in zwey gleiche teyl [Offenbar ist hier die Reihenfolge des Textes verdorben worden, das kann aber am Setzer liegen] / so du dann auß dem punckten .e. mit einer aufrechten lini ueber sich ferst / bis an die zirckellini / so hast du ein sibenteil des zirckels Mechanice / [d.h. diese Strecke ist nur näherungsweise die Kante des Siebenecks] / wie ich das unden hab aufgeryssen[23]. [Die Strecken sind in der zugehörigen Zeichnung mit 5 bzw. 10 bzw. 7 beschriftet, womit Mißverständnissen weiter vorgebeugt wird]“

Es mag zwar das häufige Verwenden von „/“ oder die mangelhafte Kontinuität bei der Rechtschreibung ins Auge stechen und auf mangelnde Bildung schließen lassen, doch dies ist auf die noch nicht eindeutig festgelegten Rechtschreib- bzw. Grammatikregeln dieser Zeit zurückzuführen.

Dürers „Underweysung“ wurde bereits 1532 ins Lateinische übersetzt und erfuhr in Folge zahlreiche Auflagen. Einige Zeitgenossen versuchten sein Werk zu kopieren, wie z.B. Hieronymus Rodler. Diese erreichten aber nie sein Niveau und waren oftmals von Fehlern durchsäht (Abb. 2.39).

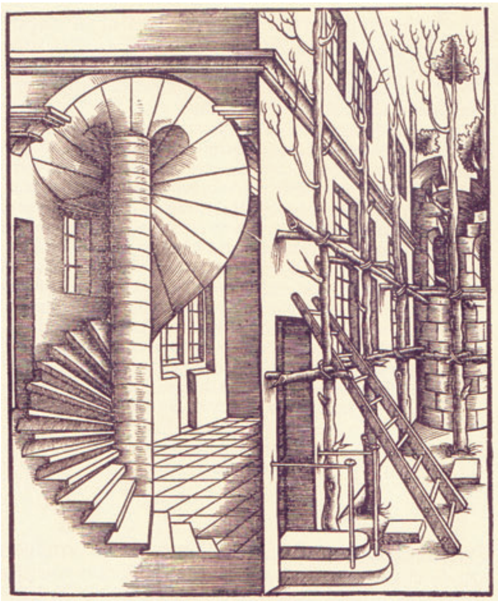


Abbildung 2.39: Fehlerhafte Darstellung einer Wendeltreppe von H. Rodler (1531)

[23] A. Dürer. Unterweisung der Messung ... (München, 1908) S. 58

Zum Abschluss dieses Kapitels möchte ich ein Beispiel bringen, in dem Rodler beschreibt, wie man eine Landschaft malen soll:
„Und so du Landschafften durch eyn fenster abconterfecten willt / und uff eyn papier oder sunst bringen willt: So laß dir eyn rame machen (wie vor gemelt) die die grösse des fensters begreiff / die theyl mit dem zirckel inn gerade oder ungerade theyl (deins gefallens) ab / un sovil theyl du in der ramen hest / also vil theyl mach uff das papier. Wie sich nun die Landschafften mit iren bergen / schlösseren / stätten / felsen unnd dälern / durch das gitter erzeygen / also inn denselbigen gleichen theylunge deins papiers / soltu es auch malen. Doch soltu aber / die weil du an der landschafften abmalest / dein seß nit verrucken / noch den kopff hin und heerwerffen / oder dan hieher dan dorthin drehen / sunder dich in eynem gleichen und steten seß halten / den kopff gleich zuberg erhebend. Und so du / weß du verzeychnen oder reissen willt / inn sin gefasset hast / gleich undersich sehen / und inn das papir an das ende / da du es an seinem gleichen platz funden hast / malen / dann wider andern vermercken / und abmalen / on diß alles mit ungwencktem haubt / nit uff die seiten / mit strackem gesicht thun.
Damitt will ich diesem büchlin ende und beschluß geben ungezweifelt / welcher sich darin etwas üben und brauchen wirt / sol dem künstner und herfürbringer / dessen danckbar sein / unbehendern begriff / dan auß anderen vorgeruckten büchern / davon haben und empfahen[24].“

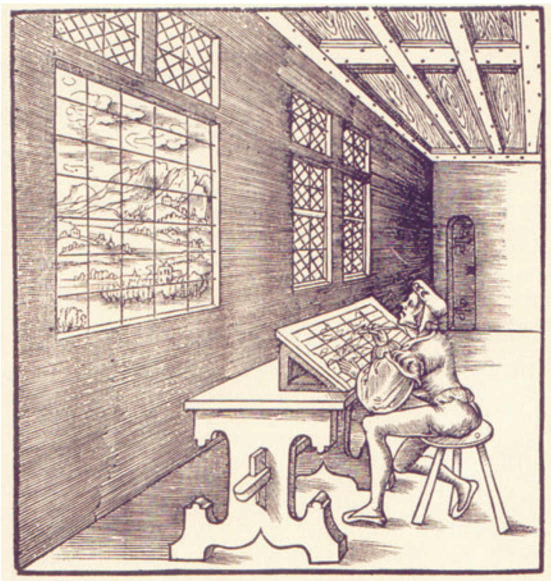
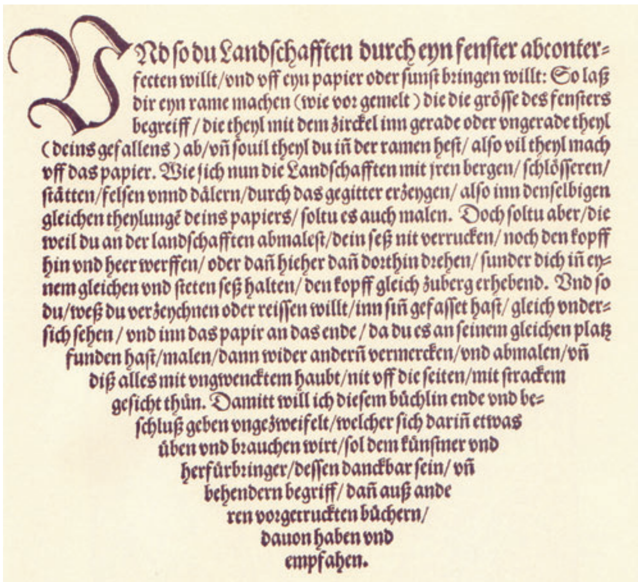


Abbildung 2.40: H. Rodler: Wie man eine Landschaft malen soll.



Vnd ſo du Landſchafften durch eyn fenſter abconter-
fecten willt/vnd vff eyn papier oder ſunſt bringen willt: So laß
dir eyn rame machen (wie vor gemelt) die die gröſſe des fenſters
begreiff / die theyl mit dem zirckel inn gerade oder vngerade theyl
(deins gefallens) ab/vñ ſouil theyl du iñ der ramen heſt/ alſo vil theyl mach
vff das papier. Wie ſich nun die Landſchafften mit jren bergen/ ſchlöſſeren/
ſtätten/felſen vnnd dälern/durch das gegitter erzeygen/ alſo inn denſelbigen
gleichen theylungẽ deins papiers/ ſoltu es auch malen. Doch ſoltu aber/die
weil du an der landſchafften abmaleſt/dein ſeß nit verrucken/ noch den kopff
hin vnd heer werffen/ oder dañ hieher dañ dorthin drehen/ ſunder dich iñ ey-
nem gleichen vnd ſteten ſeß halten/ den kopff gleich zuberg erhebend. Vnd ſo
du/weß du verzeychnen oder reiſſen willt/inn ſiñ gefaſſet haſt/ gleich vnder-
ſich ſehen / vnd inn das papir an das ende / da du es an ſeinem gleichen platz
funden haſt/malen/dann wider anderñ vermercken/vnd abmalen/vñ
diß alles mit vngwencktem haubt/nit vff die ſeiten/mit ſtrackem
geſicht thůn. Damitt will ich dieſem bůchlin ende vnd be-
ſchluß geben vngezweifelt/welcher ſich dariñ etwas
üben vnd brauchen wirt/ſol dem künſtner vnd
herfürbringer/deſſen danckbar ſein/ vñ
behendern begriff/ dañ auß ande
ren vorgetruckten bůchern/
dauon haben vnd
empfahen.

Abbildung 2.41: Originaltext zu Abb. 2.40

[24]H. Rodler. Eyn schön nützlich büchlin und underweisung der kunst des Messens mit dem Zirckel, Richtscheidt oder Linial. [Nachdruck der Ausgabe Simmern 1531] (Graz, 1970) S. 88 ff.

3 17. und 18. Jahrhundert

Dieser Zeitraum wird in der Kunstgeschichte auch Barockzeit genannt; wie auch in der vorherigen Periode haben sich auch in dieser Zeit viele wesentliche Neuerungen entwickelt und zum heutigen Verständnis und Wissen über die Geometrie geführt. Die Gruppe der Gelehrten des 17. und 18. Jhs. ist leicht zu überblicken und sofern es sich heute noch nachvollziehen lässt, standen diese auch in teils engem Kontakt zueinander. Ihre Briefwechsel, Artikel in Fachzeitschriften und Teilnahme an Kongressen lassen uns heute noch an dieser regen Forschungstätigkeit teilhaben. Viele dieser Forscher gelten zudem als Naturphilosophen, da auch die philosophischen Strömungen dieser Zeit auf sie ihren Einfluss gehabt haben. Das wachsende Interesse an der Physik hat auch die Geometrie in entscheidender Weise beeinflusst, da z.B. Grundaufgaben der Analysis sich mit geometrischen Inhalten beschäftigten: Kurvenbegriff, Fläche, Körper, Tangente, Tangentialebene, Evolute und Evolvente, die Krümmungsberechnung, Bogenlänge, Flächen- und Rauminhalt sind einige Schlagworte dieser Forschungsinhalte. Kaum ein Wissenschaftler dieser Zeit spezialisierte sich auf ein Teilgebiet der Geometrie, vielmehr brachte diese Zeit hervorragende „Allrounder“ hervor, die sich vor allem für praktische Anwendungen und naturwissenschaftliche Belange interessierten.

3.1 Geometrie und Algebra - das Koordinatensystem wird eingeführt

Die Einführung eines Koordinatensystems bringt zwei entscheidende Vorteile mit sich:

- geometrische Probleme werden algebraisch behandelbar
- geometrische Prozesse sind rechnerisch simulierbar

Ferner ist zu bedenken, dass „die heute für uns so selbstverständliche Verbindung zwischen einer unter Umständen sehr abstrakten funktionalen Beziehung (z.B. zwischen ökonomischen, naturwissenschaftlichen oder technischen Größen) und dem (zwei- oder auch dreidimensionalen) graphischen Bild der betreffenden Funktion eine Frucht dieser 'inversen Anwendung' der Koordinatenmethode ist[1].“ Es ist relativ eindeutig feststellbar, dass die Koordinatenmethode auf René Descartes und Pierre Fermat zurückzuführen ist, sie entwickelten diese zeitgleich und wahrscheinlich unabhängig voneinander.

3.1.1 Grundlagen

An dieser Stelle möchte ich in aller Kürze den Wissensstand und die Ergebnisse bis Fermat und Descartes darstellen. In der Antike wurden nur relativ wenige spezielle Kurven betrachtet, wie z.B. Kegelschnitte bzw. auch andere ebene Schnitte räumlicher Figuren. Schon bei den Griechen war es üblich, sich nicht nur mit der Konstruktion zu begnügen, sondern die jeweilige Kurvendefinition in eine äquivalente Bedingung zu transformieren, um die Zugehörigkeit eines Punktes P zu solch einer Kurve durch algebraische (im weiterem Sinne) Beziehungen zwischen variablen und festen Größen auszudrücken. Weiters wurden Grundaufgaben gelöst und Sätze bewiesen. Trotz der dürftigen Quellenlage ist heute davon auszugehen, dass bereits in der Antike ebene Aufgaben mittels zweier und räumliche Aufgaben mittels dreier Variablen dargestellt wurden. „Die antike geometrische Algebra war aber dadurch beschränkt, dass Multiplikation von Größen - modern gesprochen - als geometrisch realisiertes kartesisches Produkt aufgefasst wurde, wodurch

- Gleichungen mit der Homogenitätsforderung belastet waren: Alle Summanden müssten von gleicher Dimension sein. (Sind also a, b, c, x Strecken, so ist $ax^2 + bx + c = 0$ sinnlos, weil ax^2 ein Volumen, bx eine Fläche und c eine Strecke ist.)
- die Dimension höchstens räumlich sein konnte, also $ax^2y = bxy^2$ sinnlos, obwohl der Homogenitätsforderung genügend. Diese Bedingung war lediglich durch die Möglichkeit, algebraische Bedingungen in Form von Proportionen zu formulieren, etwas gemildert. Man konnte also mit maximal räumlichen Größen a, b, c, d (wobei a, d von gleicher Dimension, b, c von gleicher Dimension sind) die eventuell aus Dimensionsgründen unsinnige Gleichung $ab = cd$ durch die sinnvolle Proportion $a : d = c : b$ ausdrücken. Zusätzliche Bedingungen ergaben sich dadurch, dass
- Größen grundsätzlich positiv waren
- es keine algebraische Symbolik gab, vielmehr jede algebraische Identität und jede

[1] P. Schreiber, C.J. Scriba. 5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen Menschen. (Berlin/Heidelberg, 2001) S.300

algebraische Umformung durch schwerfällige geometrische Betrachtungen gerechtfertigt werden musste[2].“

Erst viele Jahrhunderte später haben sich Größen wie Kepler, Galilei, Torricelli, Cavalieri und Viviani mit Geometrie und deren algebraischer Erfassung auseinandergesetzt. Doch widmeten sie sich in überwiegender Weise der Messung und Erfassung geometrischer Größen, führten aber diese Ergebnisse nur mangelhaft mit dem algebraischen Wissensstand ihrer Zeit zusammen. Nun zu Beginn des 16. Jhs. hatte die Algebra die Grundvoraussetzungen geschaffen, die es Descartes und Fermat ermöglichen sollten, die Koordinatenmethode zu entwickeln.

3.1.2 Fermat und Descartes

Fermats Beitrag zur Entwicklung der Geometrie mag zwar leichter erfassbar sein als jener von Descartes, ist aber trotzdem fundamentaler in seiner Bedeutung. Er beschreibt in seiner kleinen Schrift „loci plani“ die Koordinaten eines variablen Punktes mit den Variablen x und y, diese beziehen sich zumeist auf ein rechtwinkliges, jedoch immer ein affines Achsensystem. In diesem Werk betrachtet er nur Gleichungen, die flächenhafte Größen beschreiben, also beispielsweise $ax+by=cd$ (Geradengleichung) oder $x^2+y^2=r^2$ (spezielle Kegelschnittsgleichung). Für seine Betrachtungen benützt er Notationen, die von Vieta stammen, wie große Vokale für Variablen, große Konsonanten für feste Größen (Parameter) und untersucht folglich systematisch alle sich ergebenden algebraischen Möglichkeiten. Somit kommt er über die antiken Beschränkungen „Homogenität“ und „algebraische Dimension ≤ 3“ nicht hinweg, seine Verwendung von Gleichungen als Ausgangspunkt seiner Forschungen bedeuten aber in Folge, dass

- jede sinnvolle algebraische Gleichung zwischen x und y eine Punktmenge in der Ebene beschreibt - bezüglich kartesischer (oder auch anderer) Koordinaten. Von dieser Gleichung ausgehend kann man die Punktmenge auf ihre geometrischen Eigenschaften hin untersuchen, gänzlich unabhängig davon, ob diese mechanisch oder punktweise erzeugt wird. Mit diesem Gedankensprung gegenüber der Antike erweitert sich die zu betrachtende Kurvenmenge enorm und vor allem werden anstatt einzelner Kurven von nun an gesamte algebraische Klassen von Kurven erschlossen.

- Kurven nun also in algebraische Klassen einzuteilen sind und Fermats Ergebnis, auf welches er stolz war, lautet: „Die Klasse der geometrisch als Kegelschnitte definierten

[2]P. Schreiber, C.J. Scriba. 5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen Menschen. (Berlin/Heidelberg, 2001) S.301 ff.

> Kurven ist identisch mit der algebraisch definierten Klasse der Kurven von höchstens zweitem Grad[3]“

Mit dieser Aussage machte Fermat den Weg frei, die Idee zu entwickeln, die unendliche Fülle der algebraischen Kurven eines bestimmten Grades durch geometrische Transformationen auf eine oder endlich viele „Normalformen“ zu reduzieren.
Solch klare Aussagen wie jene von Fermat finden wir bei Descartes nicht, dessen Beiträge schwerer zu analysieren sind. Dennoch ist sein Wirken und vor allem dessen Auswirkungen hoch einzuschätzen, da er die Zusammenhänge zwischen Algebra und Geometrie endlich von den alten Auffassungen der Antike bezüglich der Homogenität und algebraischen Dimension ≤ 3 befreit. Sein Gedankengang dürfte folgendermaßen gelautet haben:
„Indem man eine feste Strecke e als Einheit wählt, kann man jedes Rechteck ab flächengleich in ein Rechteck ce verwandeln und die Strecke c als Repräsentant der Größe ab benutzen. Da dieser Kunstgriff sich beliebig wiederholen lässt, kann man das Produkt von beliebig vielen Streckengrößen auf eine Strecke heruntertransformieren. Alle Gleichungen werden im Prinzip homogene Gleichungen zwischen Strecken[4].“
Man kann heute aber nicht mehr nachvollziehen, inwieweit Descartes wusste, dass die Auszeichnung einer Einheitsstrecke einen Isomorphismus zwischen Strecken und deren Maßzahlen herstellt, welcher dem heutigen Zugang zur Koordinatenmethode normalerweise zugrunde liegt. Die soeben genannten Errungenschaften Descartes' findet man sowohl in seinem 1628 erschienen Werk „Regulae ad directionem ingenii“, als auch im späteren Werk „Géométrie“.
Seine Klassifikation der Kurven ist anders als jene von Fermat. Descartes betrachtet Kurven, die durch eine einzige Bewegung erzeugt werden (wie z.B. Kreis oder Gerade) als den einfachsten Kurventyp. Kurven der Klasse $n+1$ entstehen, indem man Kurven der Klasse n als Konstruktionsmittel zulässt. Beispielsweise erzeugt er Kurven zweiter Klasse als Orte von Schnittpunkten von Geraden, die sich jeweils gleichförmig auf Kurven erster Klasse bewegen. Das eigentliche Problem solch eines Klassifikationsversuches liegt darin, dass man durch geeignete Koppelungsmechanismen mehrere solche aufeinander abgestimmte Bewegungen erzeugen muss. Descartes demonstriert seine Vorgehensweise an der graphischen Auflösung der Gleichung $x^3 = px + q$ durch den Schnitt der Parabel $x^2 = y$ mit dem Kreis $x^2 + y^2 = qx + (p+1)y$, d.h. geometrisch ist die positive („wahre“) Wurzel der kubischen Gleichung durch den Punkt F folgender Konstruktion mit Kreismittelpunkt E,

[3] P. Schreiber, C.J. Scriba. 5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen Menschen. (Berlin/Heidelberg, 2001) S.304.
[4] P. Schreiber, C.J. Scriba. 5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen Menschen. (Berlin/Heidelberg, 2001) S.304

$AC = \frac{1}{2}$, $CD = \frac{p}{2}$, $ED = \frac{q}{2}$ bestimmt (Abb. 3.1).

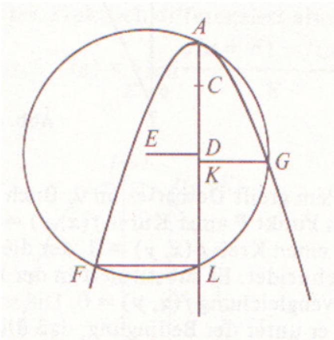


Abbildung 3.1: Schnitt Kreis - Parabel

Beispiele von Descartes

Im ersten der drei Bücher von Descartes' „Géométrie" führt er algebraische Größen, Operationen und auch deren geometrische Deutung ein. Im Gegensatz zur früheren Interpretation des Produktes zweier Variablen als Fläche bzw. des Produktes dreier Variablen als Körper, schlägt Descartes vor, x^2 als vierte Proportionale von $1 : x = x : x^2$ aufzufassen (also als Streckengröße). Nimmt man die Proportionenlehre zu Hilfe, bedeutet $a \cdot b = x \cdot 1$ dasselbe wie $x : a = b : 1$. Interpretiert man in weiterer Folge 1 als Einheitsstrecke, so erhält man unter Voraussetzung der Theorie ähnlicher Dreiecke einen beweisbaren geometrischen Satz bei der in Abb. 3.2 angegebenen Interpretation von a und b. Für die Division $c : a = x : 1$ fand Descartes einen analogen geometrischen Satz (Abb. 3.3).

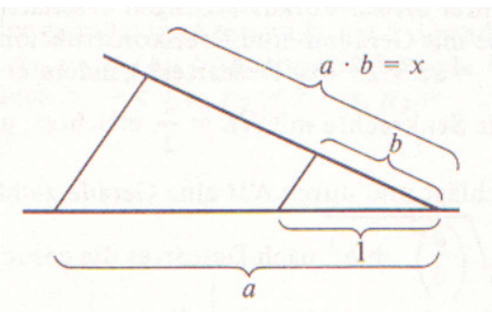


Abbildung 3.2:

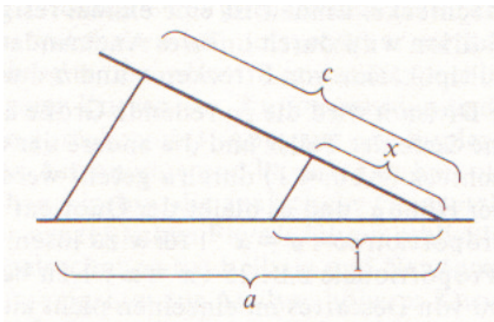


Abbildung 3.3:

Das Lösen der Quadratwurzel $x^2 = a \cdot 1$ interpretiert Descartes geometrisch durch den Höhensatz rechtwinkeliger Dreiecke (Abb. 3.4). „Wenn a gegeben, so füge man die Einheitsstrecke 1 hinzu. Für $1 + a$ konstruiere man den Mittelpunkt M und schlage mit $\frac{1+a}{2}$

einen Kreis um M. Dann errichte man das Lot in D. Der Schnittpunkt C des Lotes mit dem Halbkreis über AB liefert nach Thales ein rechtwinkeliges Dreieck, für dessen Höhe x nach dem Höhensatz gilt $x = a \cdot 1$.[5]"

□

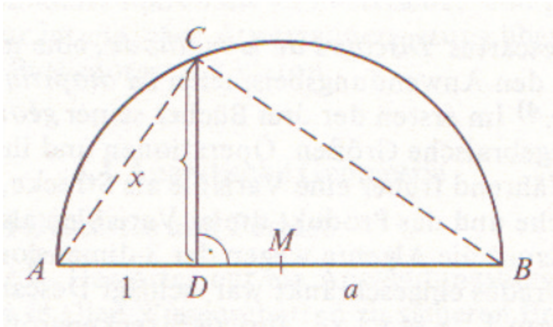


Abbildung 3.4:

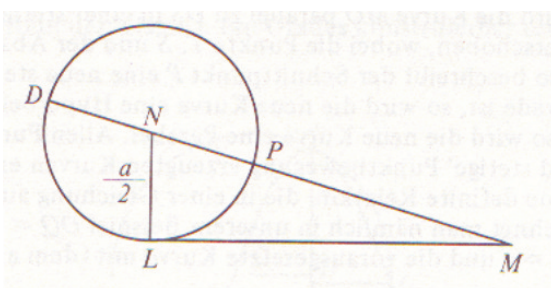


Abbildung 3.5:

So beschäftigt sich Descartes im ersten Buch der „Géométrie" mit Problemen, die mit Zirkel und Lineal lösbar sind. „Die Gleichung $z^2 = az + b^2$ löst Descartes, indem er eine Strecke $LM = b$ zieht, in L die Senkrechte mit $NL = \frac{a}{2}$ errichtet, um N den Kreis mit Radius $\frac{a}{2}$ schlägt und durch NM eine Gerade zieht. Dann ist $z = DM = \frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + b^2}$ nach Descartes die gesuchte Lösung. Als 'falsche' (negative) Wurzel vernachlässigt er die Lösung $z = PM = -\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + b^2}$ (Abb. 3.5).[6]"

Das folgende Beispiel soll zeigen, dass Descartes sich bereits mit der kinematischen Erzeugung von Kurven auseinandergesetzt hat. Er fasste im Gegensatz zu Platon und anderen antiken Gelehrten diese Art der Kurvenerzeugung als völlig gleichberechtigt mit der algebraischen Erzeugung auf. „Als Beispiel sei eine Kurve OM mit einem Kurvenpunkt M und ein Punkt Q in der Kurvenebene (nicht auf OM liegend) vorausgesetzt (Abb. 3.6). Man verlängere die Strecke OQ über Q hinaus bis zu einem Punkt S und errichte in S senkrecht die Strecke TS. Der Schnittpunkt der Strecke TQ mit der Kurve MO sei P. Wird die Kurve MO parallel zu OS in einer stetigen Translationsbewegung verschoben, wobei die Punkte T, S und der Abstand QO festbleiben sollen, so beschreibt der Schnittpunkt P eine neue stetige Kurve. Falls MO eine Gerade ist, so wird die neue Kurve eine Hyperbel, falls MO eine Parabel ist, so wird die neue Kurve eine Parabel. Allen Punkten einer durch 'reguläre und stetige' Punktbewegung erzeugten Kurven entspricht nach Descartes eine definite Relation, die in einer Gleichung ausgedrückt werden kann.

[5] K. Mainzer. Geschichte der Geometrie. (Mannheim/Wien/Zürich, 1980) S. 94
[6] K. Mainzer. Geschichte der Geometrie. (Mannheim/Wien/Zürich, 1980) S. 94

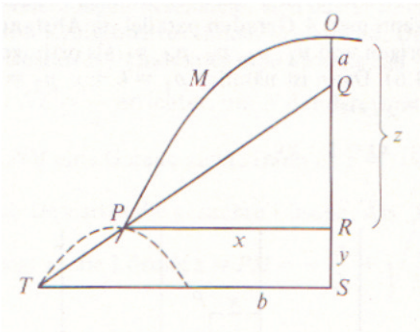


Abbildung 3.6:

Bezeichnet man nämlich in diesem Beispiel $OQ = a$, $ST = b$, $PR = x$, $RS = y$, $OR = z$ und die vorausgesetzte Kurve mit $z = f(x)$[7], so gilt die Proportion $\frac{z-a}{x} = \frac{z-a+y}{b}$, also $f(x) = \frac{xy+ab-ax}{b-x}$. Ist nun $z = f(x)$ linear, so ist der Ort P, also die neue Kurve von 2. Grad. Ist $z = f(x)$ von 2. Grad, dann ist die neue Kurve von drittem oder viertem Grad, usw.[8]“

Hier finden wir also Descartes’ Idee wieder, die durch stetige und reguläre Punktbewegung erzeugten Kurven in eine Hierarchie algebraischer Kurven zu klassifizieren.

3.1.3 Auswirkungen

Viele Mathematiker jener Zeit erkannten relativ schnell die richtungsweisende Bedeutung der Schriften von Fermat und Descartes, wie z.B. die Brüder Jacob und Johann Bernoulli (prägten den Begriff der „cartesischen Koordinaten“), John Wallis (verwendete erstmals auch negative Koordinaten) und Newton. Seine Verdienste um die Entwicklung der Koordinatenmethode waren sehr groß, stehen aber in der Bewertung oft hinter seinen Verdiensten um die Analysis und der Physik zurück. In Folge möchte ich seine Errungenschaften auflisten:

1. Benützung ebener und räumlicher kartesischer Koordinaten in der heute üblichen Weise (d.h. völlige Gleichstellung der Wertigkeit positiver und negativer Koordinaten)

2. Benützung von Polarkoordinaten und Umrechnung zu/von kartesischen Koordinaten

[7] Dieser Ausdruck ist allerdings erst seit Euler üblich.

[8] K. Mainzer. Geschichte der Geometrie. (Mannheim/Wien/Zürich, 1980) S. 96

3. Auffassung der Koordinaten in Abhängigkeit von der Zeit t, d.h. $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Eine Kurvengleichung entsteht, indem man t als proportional zu x annimmt oder t aus den Gleichungen $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ eliminiert.

4. Verwendung der Kurvenklassifikation von Fermat. Newton zählt z.B. 72 Typen von Kurven dritten Grades, sechs Fälle wurden von ihm (obwohl bekannt) übergangen und erst im 18. Jh. „wiederentdeckt".

5. Graphische Darstellung der Sachverhalte. Die soeben genannte Klassifikation Kurven dritten Grades gleicht einem Bilderatlas. Newton geht von der allgemeinsten Form des Polynoms dritten Grades in x und y aus und zeigt zunächst, dass man durch geeignete Transformation des Koordinatensystems (!) auf eine der vier Formen

$$
\begin{aligned}
xy^2 + ey &= ax^3 + bx^2 + cx + d, \\
xy &= ax^3 + bx^2 + cx + d, \\
y^2 &= ax^3 + bx^2 + cx + d, \\
y &= ax^3 + bx^2 + cx + d,
\end{aligned}
$$

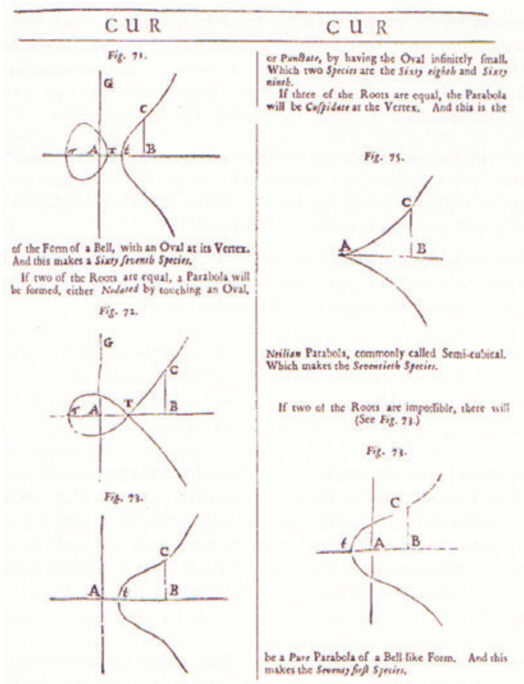


Abbildung 3.7: Die fünf Formen von kubischen Kurven vom Typ III

kommen kann, die durch weitere Koordinatentransformationen auf die 72 aufgelisteten Typen führen. Im dritten Fall bekommt er je nachdem, ob die rechte Seite drei verschiedene Nullstellen, eine doppelte und eine einfache, eine dreifache oder nur eine reelle Nullstelle hat, die fünf obigen Formen, da im Fall der doppelten Nullstelle a_1 und einfachen Nullstelle a_2 noch zu unterscheiden ist, ob $a_1 < a_2$ oder $a_2 < a_1$ ist.

Infolge Newtons Schriften beschäftigten sich viele weitere Mathematiker mit diesem Teilgebiet der Geometrie, wie z.B. in Schottland James Stirling und Colin MacLaurin, der feststellte, dass eine Kurve n-ten Grades durch $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte gegeben ist, oder dass im allgemeinen eine Kurve n-ter und eine Kurve m-ter Ordnung $n \cdot m$ Punkte gemeinsam haben. Er wunderte sich aber, dass zwei verschiedene Kurven dritter Ordnung neun Schnittpunkte liefern, wohingegen die erste Regel besagt, dass eine Kurve dritter Ordnung durch neun Punkte eindeutig bestimmt ist, was zur Folge haben sollte, dass beide Kurven identisch sein sollten (später Cramersches Paradoxon genannt). Erst J. Plücker löste das Problem unabhängiger Punktsysteme.
Das 1748 erschienene Werk „Introductio in analysin infinitorum“ von Euler stellt einen weiteren Meilenstein in der analytischen Geometrie dar. Euler verwertete das Wissen von Descartes und Newton und entwickelte deren Wissen weiter. Seine Fortschritte lassen sich folgendermaßen gliedern:

- Theorie der krummen Linien
- Gleichung einer Kurve
- Untersuchung und Klassifikation der Kegelschnitte aus ihren Gleichungen ohne Verwendung der Differentialrechnung
- Klassifikation der Kurven dritter Ordnung in 16 Arten und Herstellung der Beziehung zu Newtons Klassifikation
- Klassifikation der Kurven vierter Ordnung (Euler zählt 146 Arten auf)
- algebraische Behandlung von Tangenten, Normalen, Krümmung, Wendepunkt, Spitzen, mehrfacher Punkte, ...
- Bestimmung von Kurven mit gegebenen Eigenschaften
- Allgemeine Theorie der Körper und ihrer Oberfläche (sofern algebraisch beschreibbar)
- Beschreibung einer jeden (!) Fläche durch eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen
- Flächenklassifikation nach dem Grad ihrer Ordnung und Aufzählung der sechs Arten von Flächen zweiter Ordnung (die von uns heute noch verwendeten Begriffe wie Quadrik, ein- bzw. zweischaliges Hyperboloid, parabolisches Hyperboloid ist auf Euler zurückzuführen)

- Beschreibung einer Raumkurve als Durchschnitt zweier Flächen und deren Darstellung durch eine Gleichung
- Normalen und Tangentialebenen der Flächen zweiter Ordnung wiederum ohne Verwendung der Differentialrechnung

Beispiel von Euler

In einem Anhang der „Introductio“ geht Euler auf die dreidimensionale Raumgeometrie ein. Er versucht dabei analog an seine Vorgehensweise in der zweidimensionalen Geometrie anzuschließen. Zuerst unterscheidet er also algebraische von transzendenten Flächen. Folglich formuliert er ähnlich zur ebenen Kurventheorie die erste Theorie über Translationen und Rotationen von Achsen in drei Dimensionen:
$x = x' \cos\delta + y' \sin\delta \cos\eta - z' \sin\delta \sin\eta - c$
$y = -x' \sin\delta + y' \cos\delta \cos\eta - z' \cos\delta \sin\eta - d$
$z = y' \sin\eta + z' \cos\eta$
Folgende Abbildung zeigt den einfacheren zweidimensionalen Fall:
$x = x' \cos\delta - y' \sin\delta + c$
$y = x' \sin\delta + y' \cos\delta + d$

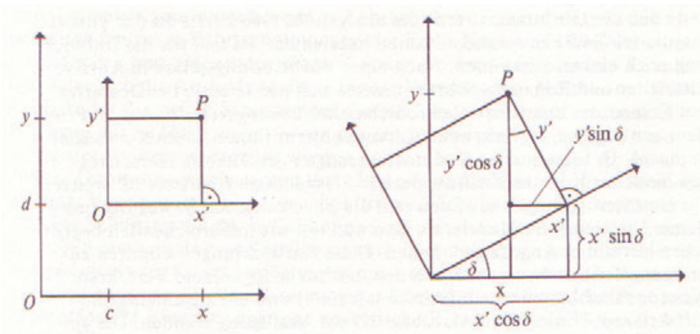


Abbildung 3.8: Koordinatentransformation nach Euler

3.2 Darstellende Geometrie - schon vor Monge?

Im Laufe des 17. und 18. Jhs. wurde die Entwicklung der Perspektive bzw. des Mehrbilderverfahrens immer wissenschaftlicher betrieben. Das bis 1789 absolutistisch regierte Frankreich hatte auf Grund militärischer Bestrebungen großen Anteil und auch Interesse daran, die Abbildungsmethoden der Geometrie bis hin zur Perfektion zu entwickeln. Grundvoraussetzung dafür war die Gründung von Akademien und Hochschulen, die Theorie und

Praxis zusammenführen sollten. Wichtige Persönlichkeiten für diesen Entwicklungsprozess waren Mersenne, Descartes, Pascal, Roberval, Desargues, Mallet, Bosse und Laurent de La Hire, auf dessen Sohn Philippe die Zweikreismethode zur punktweisen Konstruktion von Ellipsen zurückgeht (Abb. 3.9).

All diese Wissenschaftler fanden an den Akademien und Hochschulen beste Voraussetzungen für Forschung und Lehre, wie sie an anderen Universitäten Europas erst Jahrzehnte später geschaffen wurden, aber dennoch nie die Qualität wie in Frankreich erreichten.

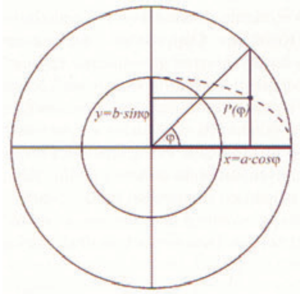


Abbildung 3.9: Ellipsenkonstruktion nach de La Hire

Desargues und Pascal

Der Architekt und Ingenieur Desargues veröffentlichte 1636 seine erste Schrift über die Perspektive. Da er als Architekt im 17. Jh. auch Sonnenuhren konstruieren musste, beschäftigte er sich mit dem Modell, dass sich die Sonne auf einer Kreisbahn bewegt und der Schatten des Gnomons auf der Ebene der Sonnenuhr folglich einen Kegelschnitt beschreibt. Drei Jahre später publizierte Desargues „Brouillon proiect...“ (zu Deutsch: Erster Entwurf der Beschreibung der Ereignisse beim Zusammentreffen eines Kegels mit einer Ebene). Diese in einer Auflage von nur 50 Stück gedruckte Publikation war lange Zeit vergessen und verschollen, ehe sie 1845 wiederentdeckt wurde[9] und gilt heutzutage als „Geburtsurkunde der projektiven Geometrie[10].“ Desargues beginnt seine Ausführungen in diesem Werk mit der Feststellung, dass alle Geraden und Ebenen in jeder Richtung unendlich ausgedehnt sind. Weiters erkennt er die Analogie zwischen dem Büschel aller Geraden durch einen Punkt und einer Schar aller untereinander parallelen Geraden (er ordnet diesen Scharen richtigerweise einem unendlich fernen Schnittpunkt zu). Er kommt

[9]Dieses 1845 von Chasles aufgefundene Exemplar war eine 1679 von Philippe de La Hire angefertigte Abschrift. Die Mühe der Abschreibens deutet auf die Wertschätzung, aber auch darauf hin, dass schon de La Hire kein gedrucktes Exemplar der so seltenen Schrift mehr erhalten konnte. 1950 tauchte ein Originalexemplar auf.

[10]P. Schreiber, C.J. Scriba. 5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen Menschen. (Berlin/Heidelberg, 2001) S.323

sogar zu dem Schluss, dass ein Kreiszylinder der Spezialfall eines Kreiskegels mit unendlich ferner Spitze ist. Ferner vollzieht er in seinen Überlegungen den wichtigen Übergang vom einfachen Kegel zum Doppelkegel und versucht, möglichst viele allen Kegelschnitten gemeinsame Eigenschaften aus ihrer Erzeugung als zentralperspektivisches Bild eines Kreises abzuleiten. Vor dem Hintergrund dieser Überlegungen, beschäftigt er sich analog zu den eigentlichen und uneigentlichen Geradenbüscheln mit eigentlichen und uneigentlichen Ebenenbüscheln, betrachtet die Zwischen- und Trennungsrelation für drei oder vier kollineare Punkte und stellt dabei fest, dass die Trennungsrelation bei Zentralprojektionen erhalten bleibt. Desargues beschäftigt sich auch mit dem Spezialfall sich harmonisch trennender Punktepaare, entwickelt das vollständige Vierseit, konstruiert den vierten harmonischen Punkt zu drei gegebenen Punkten und schließt seine Ausführungen mit der Theorie der Polarität von Punkt und Gerade am Kegelschnitt ab.
Desargues' ungewohnte Denkweise und seine neu eingeführten Begriffe und Namen führten zu einer heftigen Ablehnung seiner Schriften im Kreise seiner Berufskollegen. Nur zwei Zeitgenossen hielten zu ihm und seinen Ausführungen, einerseits der erst sechzehnjährige Pascal und andererseits sein Illustrator Abraham Bosse, der 1643 eine allgemeinverständliche, zeitgemäße Ausgabe der Schriften Desargues' über die Sonnenuhren und Steinschnitte bzw. 1648 eine erweiterte Auflage der „Perspektive" publizierte, in deren Anhang erstmals der Satz von Desargues über die Äquivalenz von Zentralperspektivität und Achsenperspektivität veröffentlicht wurde. Desargues selbst war sehr verbittert über seine Zeitgenossen und veröffentlichte nach 1640 kein weiteres Werk.

a) allgemeiner Fall: Dreiecke ABC und $A'B'C'$ haben ein Perspektivitätszentrum genau dann, wenn die Schnitte P, Q, R der jeweils zugeordneten Seiten auf einer gemeinsamen Geraden, der Perspektivitätsachse a, liegen. Dabei kann b) das Zentrum Z auch unendlich fern sein, c) einer der Schnittpunkte auf der Achse ins Unendliche abwandern, d.h. die betreffenden Dreiecksseiten werden zur Achse und damit auch untereinander parallel. d) Wird noch ein zweites Paar von Dreiecksseiten bei zentralperpektiver Lage parallel, so enthält die Achse a zwei unendlich ferne Punkte, daher muß auch der dritte Schnittpunkt unendlich fern sein. e) zeigt, daß zugleich auch das Zentrum unendlich fern werden kann.

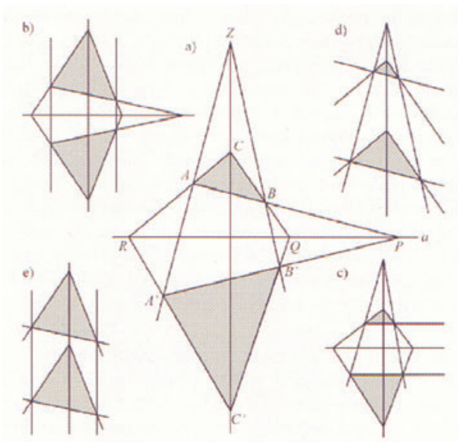
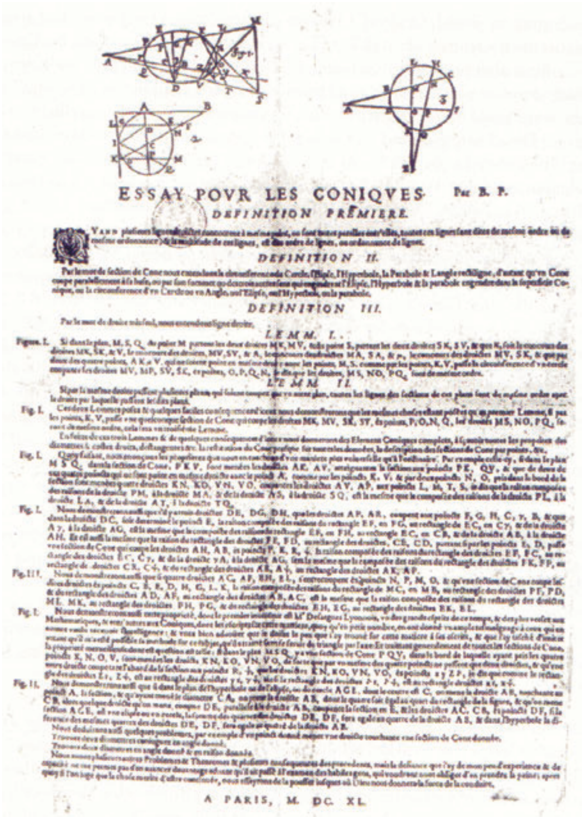


Abbildung 3.10: Satz von Desargues

Die „Desarguessche Figur" oder „Konfiguration" a) kann auf mehrere Weisen gedeutet werden: z.B. ist p Perspektivitätszentrum der Dreiecke $AA'R$ und $BB'Q$. Die Gerade ZCC' übernimmt dann die Funktion der Perspektivitätsachse. Man sieht nun, daß b) und c) den gleichen Spezialfall darstellen. Man denke sich eine der Figuren um 90° gedreht.

Wie bereits zuvor erwähnt, interessierte sich Pascal sehr für die Schriften von Desargues. Der erst sechzehnjährige Pascal veröffentlichte 1640 seine erste Abhandlung über Kegelschnitte, die bereits den Satz von Pascal enthielt, jedoch ohne Beweis. In dieser Publikation (Abb. 3.11) fasst er bereits zwei sich kreuzende (auch mit unendlichem Schnittpunkt, also parallele) Geraden als einen Kegelschnitt auf. Der Satz von Pascal lautet in heutiger Zeit wie folgt:

„Liegen sechs paarweise verschiedene Punkte 1, ..., 6 abwechselnd auf zwei verschiedenen Geraden, so sind die Schnittpunkte ([12][45]), ([23][56) und ([34][16]) kollinear[11]*.“*



ESSAY POUR LES CONIQVES. Par B. P.

DEFINITION PREMIERE.

DEFINITION II.

DEFINITION III.

LEMME I.

LEMME II.

A PARIS, M. DC. XL.

Abbildung 3.11: Die erste Textseite von Pascals „Essay pour les coniques“ enthält links oben eine Teilfigur zum Satz von Pascal

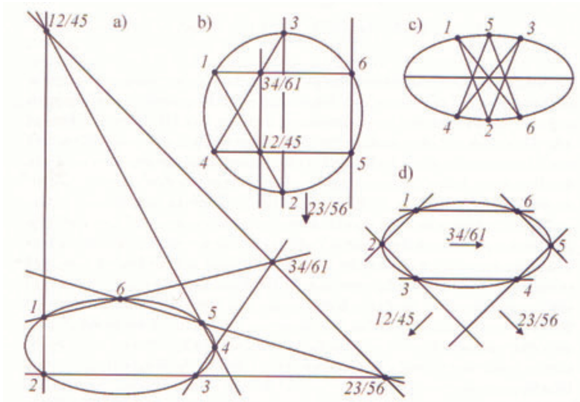


Abbildung 3.12: Satz von Pascal: a) allgemeiner Fall, b) - d) verschiedene Spezialfälle

In Abbildung 3.12 sind auch einige Spezialfälle aufgezeichnet, die zugleich zeigen sollen, dass die Reihenfolge der Punkte auf einem Kegelschnitt keine Rolle spielt. Es wird vermutet, dass Pascal seinen Satz durch Transformation eines elementaren Anfangsfalles am Kreis mittels Zentralprojektion in andere Konfigurationen gefunden hat, da Kolli-

[11]H. Stachel. Projektive Geometrie. (Wien, 2003) S. 28

nearitäten bei Zentralprojektion erhalten bleiben. Seine Schrift, die ausdrücklich auf Desargues Bezug nimmt, deutet bereits viele Beispiele über Kegelschnittsaufgaben wie die punktweise Konstruktion aus fünf gegebenen Punkten an. Pascal hat wohl viele weitere Jahre an diesen Aufgaben gearbeitet, aber leider nie publiziert, und somit gelten diese Schriften heute als verloren. Mersenne berichtet, dass Pascal über 400 Folgerungen aus seinem Satz gezogen haben soll, Leibnitz hat das Manuskript ebenfalls gesehen und davon berichtet.

3.2.1 Die Mehrbilderverfahren entwickeln sich

Nicht nur in Frankreich wurde die Entwicklung und Mathematisierung der Perspektive vorangetrieben, wobei niemals eine genaue Differenzierung zwischen der Zentralperspektive, der Parallelprojektion, einem Grenzfall der Zentralperspektive, und anderen Mehrbilderverfahren gemacht wurde. In der Barockzeit wurde vor allem die Reliefperspektive zum Vortäuschen räumlicher Tiefe und illusionistische Malerei sehr populär (Abb. 3.13 & Abb. 3.14).

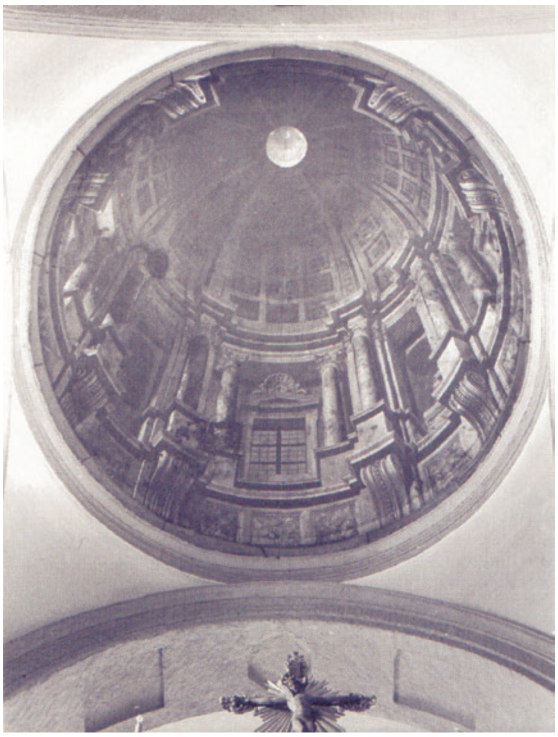


Abbildung 3.13: „Scheinkuppel“ der Kirche di Badia in Arezzo

Abbildung 3.14: Wandbild in der barocken Kirche Saint-Roch in Paris

In dieser Entwicklungsphase entsteht 1715 eine Schrift zur Perspektive von Brook Taylor, der hauptsächlich aus der Analysis wegen seiner Taylorreihenentwicklung von Funktionen bekannt ist. Er verwendete wohl als erster zur Repräsentation von Geraden und Ebenen deren Spuren und beschäftigte sich ausgiebig mit der Rekonstruktion des Betrachterstandpunktes perspektiv korrekter Bilder. Weitaus beliebter und verbreiteter ist eine Neubearbeitung dieses Werkes von Joshua Kirby (London 1754), welches durch das Titelblatt des berühmten Graphikers William Hogarth „unsterblich[12]" geworden ist, obwohl darin einige Fehler vorkommen.

Abbildung 3.15: Titelblatt von W. Hogarth zu J. Kirbys 'Dr. Brook Taylor's Perspective Made Easy' (1754). Wer Zeichnungen ohne Kenntnis der Perspektive macht, wird für solche Absurditäten verantwortlich sein, wie sie in diesem Frontispiz gezeigt werden. [Übersetzung der Bildunterschrift]

[12] P. Schreiber, C.J. Scriba. 5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen Menschen. (Berlin/Heidelberg, 2001) S.328

Lamberts „Schriften zur Perspektive“

In Deutschland beschäftigt sich 1752 Lambert mit der Perspektive und entwickelt dabei den sogenannten „Perspektograph“ mit dem man einen Grundriss mechanisch in seine zentralperspektivische Ansicht verwandeln kann (Abb. 3.16).

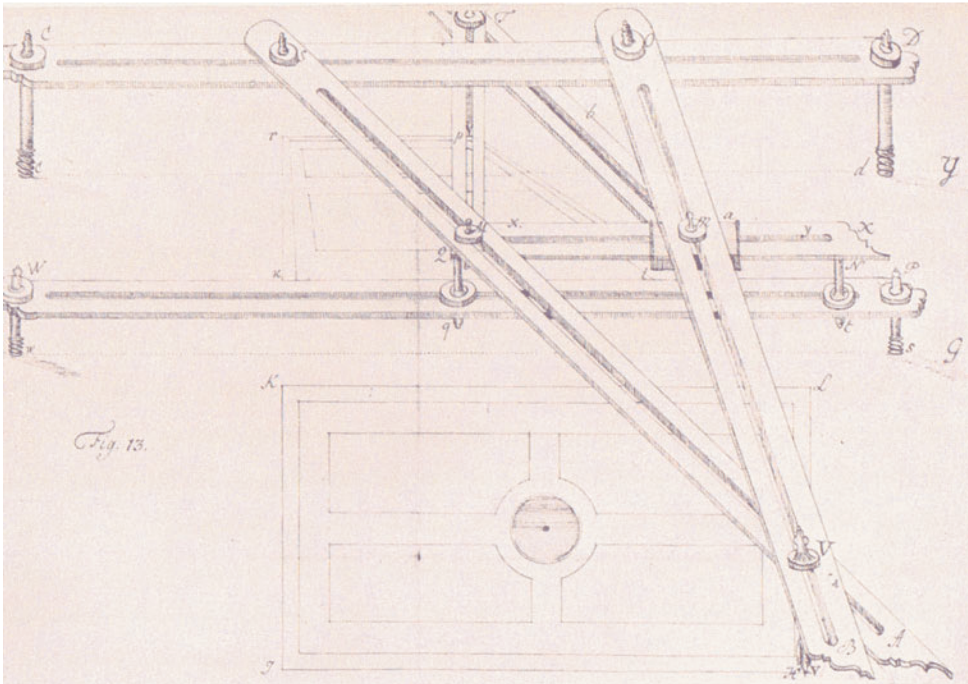


Abbildung 3.16: Lamberts Perspektograph

1759 erscheint die „Freye Perspective“, in der es um die Erstellung eines zentralperspektiven Bildes ohne Benutzung von Grund- und Aufriss geht. Lambert verdeutlicht in dieser Schrift seine Auffassung der Zeichenebene als ein Modell des dreidimensionalen Raumes, indem man ein Bild des räumlichen kartesischen Dreibeines vorgibt. Er folgert richtig, dass jede gedanklich im Raum durchzuführende Konstruktion eine entsprechende Konstruktion in der Bildebene zur Folge hat. Erst Monge führt diesen Gedankengang weiter zur Vollendung, indem er ihn mit dem Mehrbilderverfahren kombiniert. Lambert fasst das räumliche Ziehen einer Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt in der Bildebene als Verbindung des Bildpunktes des gegebenen Punktes mit dem Fluchtpunkt der gegebenen Geraden auf und ermöglicht so einen Zugang zur projektiven Geometrie, denn bei einer zentralperspektiven Abbildung haben auch parallele Geraden einen gemeinsamen eigentlichen Schnittpunkt, d.h. der eigentlich nur gedachte unendlich ferne Punkt wird in einen im Endlichen gelegenen Punkt transformiert, womit sich das Parallelenziehen zum natürlichen Grenzfall des Verbindens wandelt.

Lamberts Absicht, die ihn und seine Forschungen antreibt, ist die Aufgabe einen „Gegenstand unmittelbar aus seinen bekannten Winkel- und Längenmaßen perspektiv zu zeichnen, [dies ist] nicht viel weniger leicht, als es sonst im Grund- und Aufriss geschieht. Er gibt hierzu die einfachsten Konstruktionsregeln unter Anwendung der Benennung 'Teilungspunkt' und fügt perspektive Maßstäbe zu, deren einer, abweichend von dem von Desargues und von anderen angegebenen Proportionsmaßstabe, die reciproken Werte von Abständen abzugreifen, deren anderer noch mit dem Cosinus der Neigungswinkel zu multipliciren gestattet[13]." Lambert untersucht weiters die Veränderungen eines Bildes bei einer Variation des Augpunktes, bestimmt die schiefe Parallelprojektion eines Würfels „nach dem Verfahren der Perspektive unter Annahme von unendlich kleinen Maßen des Würfels[14]" und er beschäftigt sich intensivst mit der Rekonstruktion des Augpunktes bei gegebener perspektiver Abbildung. Lambert betrachtet außerdem:

- Spiegelbilder
- Schatten
- Reflexwirkungen durch ebene und krumme Flächen
- Theaterperspektive
- ...

Von der Kavalierperspektive zur Kotierten Projektion

Ab 1600 entwickelte sich im Bereich des Festungsbauwesens die sog. Kavalierperspektive[15]. Es wird dabei nicht wie in der heutigen Zeit von einem maßtreuen Aufrissbild, an das z.B. 45° geneigte verkürzte Bilder der Tiefenlinien anschließen, ausgegangen, sondern von einem maßtreuen Grundrissbild, von dem die Bilder der senkrechten Linien ausgingen (Abb. 3.17).

Die Entwicklung dieser Darstellungsmethode hat ihre Wurzeln in der Artillerie, da Festungsanlagen so gestaltet werden mussten, dass das gesamte umgebende Gelände einer Festung klar einzusehen war, aber andererseits von keinem umgebenden Geländepunkt aus in die Festung hineingesehen werden konnte. Überzeugte Vertreter des Festungsbauwesens sprachen sich klar und deutlich für die Weiterentwicklung der Kavalierperspektive

[13]Ch. Wiener. Lehrbuch der Darstellenden Geometrie - Erster Band. (Leipzig, 1884) S. 21
[14]Ch. Wiener. Lehrbuch der Darstellenden Geometrie - Erster Band. (Leipzig, 1884) S. 21
[15]Dem damaligen Sprachgebrauch folgend, sind Kavaliere die vorspringenden Teile einer Festung.

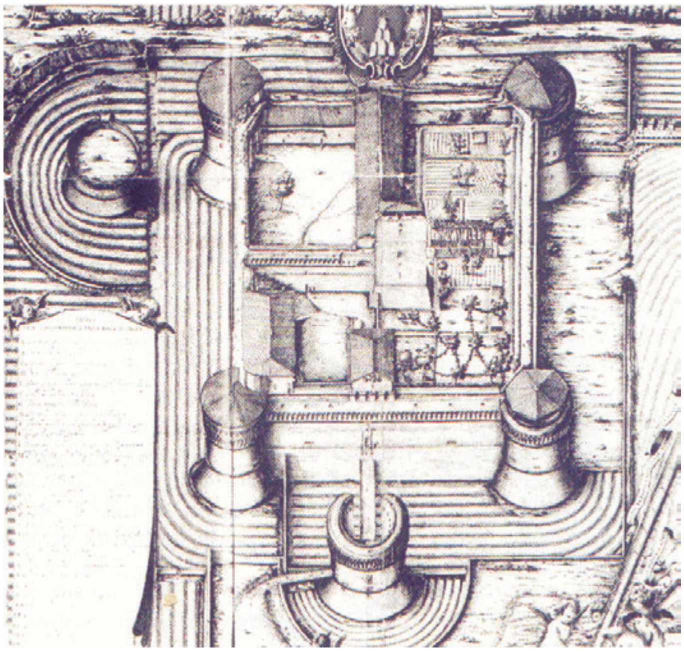


Abbildung 3.17: Festung Rocca (Italien) in Kavalierperspektive

aus, da man aus perspektivischen Bildern nicht so einfach die wahren Maße und Entfernungen entnehmen konnte.
Das Militär hatte auch einen bedeutenden Anteil an der Entwicklung einer anderen Abbildungsmethode - der kotierten Projektion. Für das Militär wurden immer genauere Karten von immer größerer Bedeutung und somit auch eine Beschreibung des Geländes mittels Höhen- und Tiefenlinien. Es verwundert nicht, dass Karten mit Tiefenlinien (Isobathen) früher auftraten als Karten mit Höhenlinien (Isohypsen), da die Lotung von Gewässertiefen weitaus einfacher ist als die Bestimmung von Geländehöhen. Die erste Isohypsenkarte stammt von Du Carla (1771) und zeigt eine „imaginäre Insel", um das Prinzip dieser Abbildungsmethode zu erklären. Erst 20 Jahre später wurde die erste „richtige" Karte (von Frankreich - welches Land sonst?) mit Höhenlinien veröffentlicht. Zum Vergleich dazu: Die erste Isobathenkarte stammt aus dem Jahr 1697 und zeigt die Maasmündung. Ein weiteres frühes Beispiel ist eine Karte vom Ärmelkanal (1737).
So wurden unter strenger Leitung v.a. in Frankreich hervorragende Militäringenieure wie Lazare Carnot oder Gaspard Monge ausgebildet.

3.2.2 „Die Stereotomie“ von Frézier

Vorbemerkungen

Neben dem Militärwesen gab es auch noch andere Zweige, die die Entwicklungen in der angewandten Geometrie vorantrieben - vor allem jedoch die Steinschnittkunst. Da die Gewinnung und Bearbeitung von Naturstein im 17. und 18. Jh. nach wie vor sehr teuer und aufwändig war, musste vor der Weiterverarbeitung zu Gewölben, Fensterlaibungen, Wendeltreppen, usw. die Form eines jeden einzelnen Steines genau bestimmt werden. Wie im Kapitel über das Mittelalter bereits erwähnt, wurden diese geometrischen Kenntnisse in den Bauhütten von Generation zu Generation mündlich weitergegeben. Nur selten gab es Konstruktionszeichnungen mit Hilfslinien, jedoch ohne schriftliche Erklärungen, bestenfalls fand sich ein Hinweis, dass „jeder Kundige daraus den Hergang entnehmen könne und weitläufige Erklärungen die Sache nur verwirren würden[16].“
Mit dem Beginn des 17. Jhs. zeigt sich jedoch auf diesem Gebiet eine *deutliche* Abkehr von der traditionellen Planauffassung der Bauhüttenmeister. Papier konnte von nun an günstig und in großen Mengen hergestellt werden, genauere Messgeräte und präzisere Zeichengeräte wirkten im Fortschritt des Konstruktiven Zeichnens mit. Bis zu dieser Zeit waren Wasser- und Windräder die einzigen Konstruktionen des beginnenden Maschinenbauwesens, das sich mit der Erfindung der Dampfmaschine (1768) von der Architektur abspalten konnte. Die Wasser- bzw. Windräder stellen jedoch bereits ziemlich komplexe Bewegungsapparate dar und erforderten vom Ingenieur ein fundiertes Wissen über mathematische Mechanik. Entsprechend dieser Anforderung entwickelten die Mühlenbauer „das erste eigenständige Maschinenbauzeichnen auf der Basis des Grund- und Aufriss-Verfahrens bereits in der Verbindung mit der Vertikalschnittmethode (Abb. 3.18), womit endgültig die Sackgasse der perspektivischen Maschinendarstellungen des ausgehenden Mittelalters überwunden ist[17].“
Im Jahre 1718 fertigte L. C. Sturm das folgende „Horizontalmühlrad“ (Abb. 3.19) an, welches wie eine moderne Wasserturbine anmutet und als eines der ersten Maschinenbauzeichnungen gelten kann und somit Symbolcharakter für eine sich von nun an entwickelnde Wissenschaft hat.
Als dann der Ingenieur James Watt seine rotierende Dampfmaschine plante, konnte er auf ein brauchbares Maschinenzeichnen zurückgreifen, das die für seine Erfindung erforderli-

[16] P. Schreiber, C.J. Scriba. 5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen Menschen. (Berlin/Heidelberg, 2001) S.336

[17] J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 157 ff.

che geometrische Exaktheit bieten konnte. Mit der Erfindung der Dampfmaschine setzte ein Entwicklungsprozess auf dem Gebiet des Maschinenzeichnens ein, der sehr rasch in eine wissenschaftlichen Bahn gelenkt wurde.

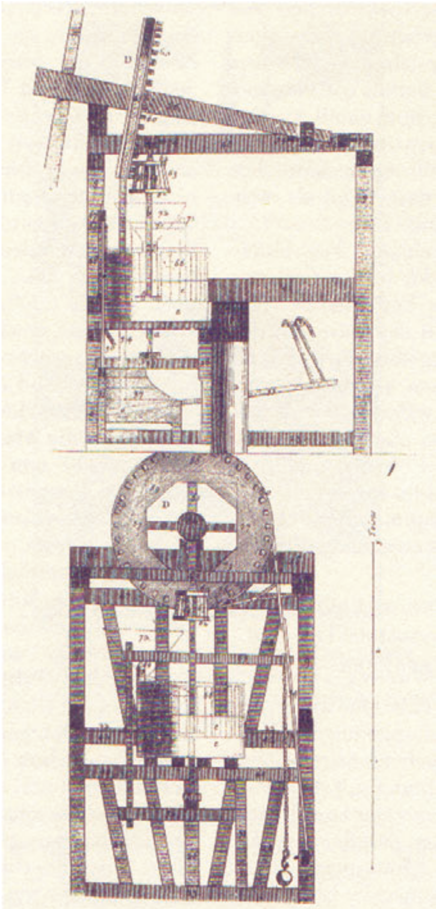


Abbildung 3.18: Plan einer Bockwindmühle von de La Hire (1702)

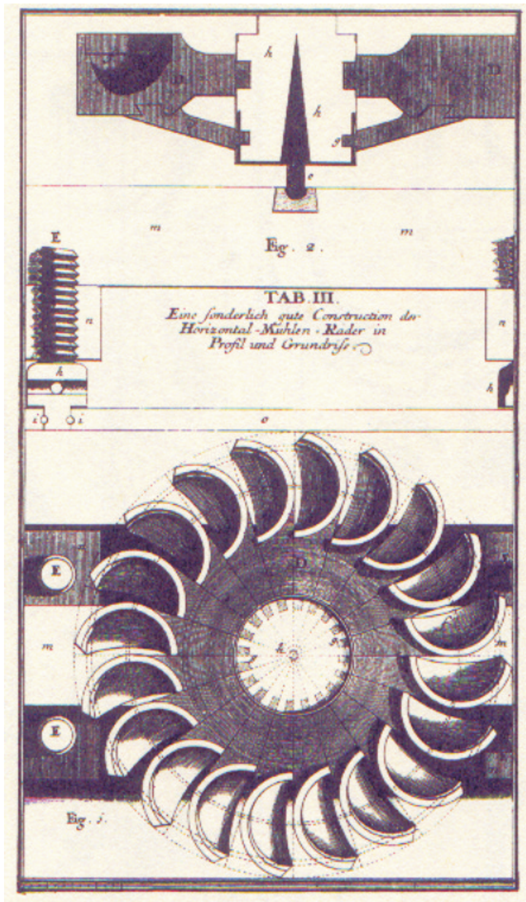


Abbildung 3.19: Wasserturbine im Grundriss bzw. Profilschnitt von L. C. Sturm (1718)

Das Werk von Amédée-Francois Frézier

Wie viele andere französische Geometer jener Zeit auch, war Frézier ein Berufsoffizier nobler Herkunft, der als Mitglied des französischen „Corps de génie“ die Funktion eines Bauingenieurs ausübte. Erst das 1737/39 erschienene dreibändige Werk „Éléments de Stereotomie à l'usage de l'architecture pour la coupe des pierres“ des Militäringenieurs Amédée-Francois Frézier gibt uns Einblick in die jahrhundertelange Entwicklung der Steinschnittkunst, besser gesagt gibt sie den Stand seiner Zeit wieder. Der erste Band behandelt die Theorie, die folgenden zwei die Anwendungen. Frézier verwendet klare eindeutige Definitionen, formuliert allgemeine Regeln und beweist all seine Behauptungen.

Er behandelt in seinem Werk hauptsächlich gekrümmte Flächen im dreidimensionalen Raum und dabei vorrangig jene, die mittels mechanischer Schleifvorgänge erzeugt werden können - also Regelflächen, wie sie im heutigen Sprachgebrauch lauten (Abb. 3.20).

Er betrachtet dabei bewegte Geraden, die längs zweier Kurven geführt werden (auch mit unterschiedlicher Geschwindigkeit). Bei der Ermittlung der Schnittkurve zweier Flächen geht er sehr allgemein vor, interessiert sich aber auch für die Ausbreitung abwickelbarer Flächen in die Ebene und die Bestimmung des Schnittwinkels zweier Flächen.

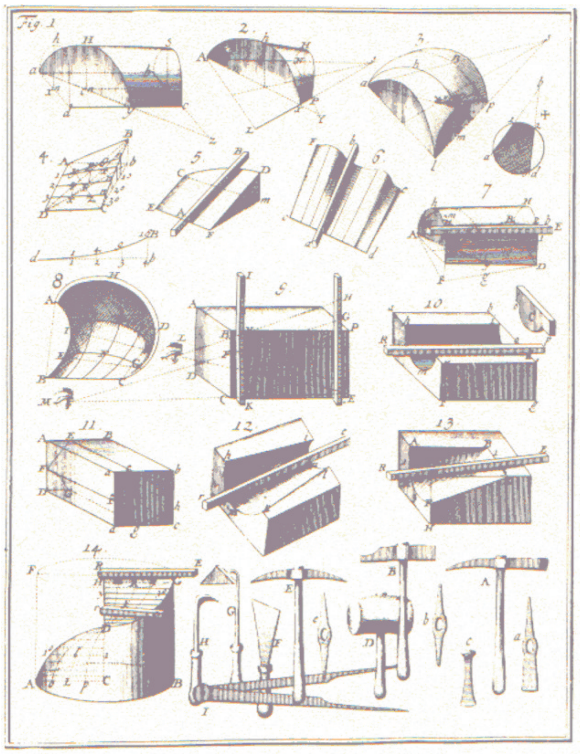


Abbildung 3.20: Regelflächen nach Frézier

Bevor Frézier jedoch „sein umfangreiches, dreibändiges Werk über das Grund-Aufriss-Verfahren als letzte Stufe der reinen Wissenschaftlichkeit ausarbeitete und veröffentlichte, hatte er sowohl die vorhergehende Steinschnittliteratur wie [auch] die junge mathematische Disziplin der analytischen und Infinitesimalgeometrie von Desargues an intensiv studiert, was seine mathematischen Ableitungen belegen[18].“ Die Überarbeitung aller Theorien und Praktiken bezüglich der Steinschnitttechniken bedeutete eine immense Arbeitsleistung, wenn auch seine Theorie nicht so anspruchsvoll wie jene von Desargues ist, jedoch dafür umso verständlicher für die Allgemeinheit. Die Zeichenkonstruktionen betreffend kann man getrost behaupten, dass er der erste ist, der die von Dürer gesetzten Maßstäbe überschreitet. Da Frézier sich aber vorrangig auf die Lösung konkreter Aufgabenstellungen der Steinmetzkunst konzentrierte, schaffte er es - im Gegensatz zu Monge - nicht, auf allgemein wissenschaftlichem Niveau zu argumentieren und umfassendere Ergebnisse zu präsentieren. Das hatte zur Folge, dass er „nach dem Theoriewerk zu viel

[18] J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 158

Kraft und Fleiß in zwei weitere Bände mir jeweils weiteren 500 Seiten Text und Hunderten von Strichen investierte. Weniger wäre hier mehr gewesen. Wie seine Theorie trotz ihrer Fortschritte vor den letzten Abstraktionen und Konsequenzen stehen bleibt, veranschaulicht bereits sein neuer Begriff, unter dem er das Gebiet zusammenfasst: Anstelle von Steinschnitt bildet er den griechischen Kunstausdruck 'Stereotomie' im Sinne von Festkörperschnitt[19].“ Im Gegensatz zu Monge schafft es Frézier nicht, die Wissenschaft der Darstellenden Geometrie für *alle* geometrisch-räumlichen Probleme zu erfassen und die Ergebnisse dann auch für *alle* wissenschaftlichen und industriellen Bereiche aufzubereiten.

Doch nun zurück zu Fréziers Werk: In seinem ersten Band beschreibt er allgemeinverständlich und so klar wie es noch keiner zuvor gemacht hat die Projektionsmethode als Bilderzeugungsmethode für Grund- und Aufriss. Er beschränkt sich in seinen Ausführungen auf ausschließlich senkrecht auf die Bildebene auftreffende Parallelstrahlen, d.h. auf die Orthogonalprojektion (Abb. 3.21).

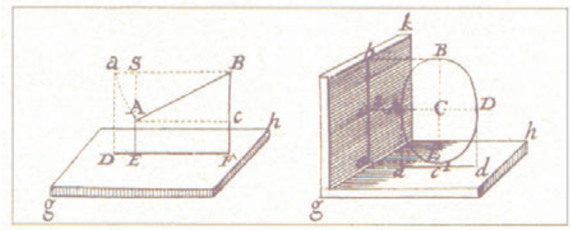


Abbildung 3.21: Orthogonalprojektion nach Frézier

„Dabei gelingt ihm eine hilfreiche Vergleichsvorstellung vom Projektionsvorgang, die sich auf uralte Menschheitserfahrungen bezieht und gegenüber der exakteren Strahlenbeziehung zum Licht auch den mehr anschaulich Veranlagten leicht eingehen muss: Man solle sich vorstellen, wie feinste Tintentröpfchen von den Punkten des abzubildenden Körpers auf eine Tafel herabfallen und diesen somit nachzeichnen. Des weiteren erklärt er, wenn auch nicht logisch-analytisch erschöpfend, erstmals, weshalb zur vollständigen Wiedergabe der Geometrie eines Körpers in der Zeichenebene mindestens zwei Projektionen notwendig sind, also Grund- *und* Aufriss. Da nämlich in der horizontalen Grundebene nur waagrechte Maße (von Breite und Tiefe) abbildbar seien, müsse man für die Wiedergabe der Höhenausdehnungen den Körper noch einmal, dann aber in einem Vertikalplan, projizieren. Die folglich rechtwinklige Zuordnung der beiden Bildtafeln während der zwei Projektionen wird ebenfalls in einer kleinen Parallelperspektive demonstriert[20].“

[19] J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 158
[20] J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 159

Ein weiterer wichtiger Teil in Theorieband ist Fréziers Abhandlung der Gewölbeformen und -zusammensetzungen als Zylinder-, Kugel- oder Kegelschnitte bzw. als Durchdringungen gleicher oder verschiedener Rotationskörper.

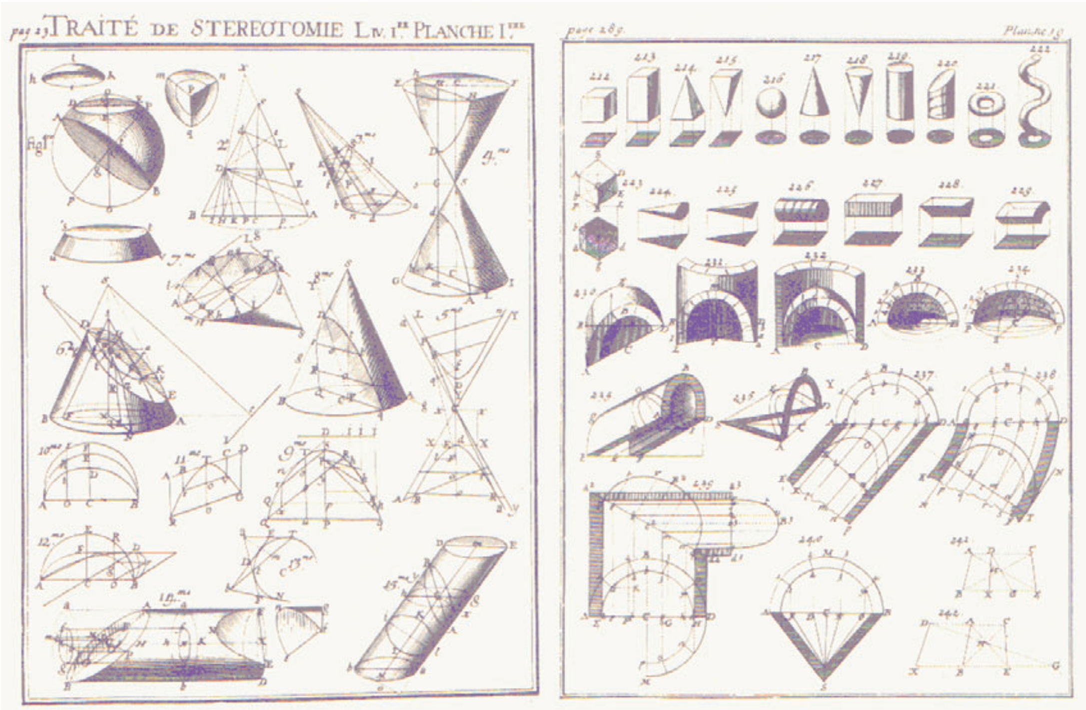


Abbildung 3.22: Frézier leitet die Gewölbeformen von den Rotationskörpern ab, die er in offensichtlich konstruierten Parallelperspektiven darstellt, ohne deren projektive Entstehung selbst zum Gegenstand seiner Untersuchungen zu machen.

„*Hätte er noch den Schritt getan, die grundsätzlichen Fälle der Schnittkurven und Durchdringungslinien in Grund-Aufriss-Konstruktionen allgemeingültig zu erzeugen, so wäre er damit Monge zuvorgekommen*[21].“

[21] J. Sellenriek. Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. (München, 1987) S. 161

Um die Darstellung der Entwicklung der Geometrie im 18. Jh. abzurunden, würden nur noch die Errungenschaften von **Gaspard Monge** fehlen, dem Begründer der darstellenden Geometrie, wie wir sie heute noch kennen. Die Bedeutung Monges für die darstellende Geometrie geht auf seine klare Aussage zurück, in der er die (doppelte) Aufgabe der darstellenden Geometrie beschreibt:

> „Erstens soll sie die Methoden liefern, um auf einem Zeichenblatte, welches also nur zwei Dimensionen, Länge und Breite hat, alle Raumgebilde, welche deren drei, nämlich Länge, Breite und Höhe haben, *abzubilden*, vorausgesetzt, dass diese Gebilde streng definirt werden können.
> Zweitens soll sie das Verfahren lehren, um aus einer genauen Zeichnung die Gestalt der Raumgebilde [zu] *erkennen* und alle Sätze, welche aus der Gestalt und der gegenseitigen Lage der Raumgebilde folgen, ableiten zu können[22]."

Mit diesem Zitat möchte ich auch schließen, da weitere Ausführungen zu Monge einer eigenen wissenschaftlichen Arbeit bedürften.

[22] G. Monge. Darstellende Geometrie [Nachdruck]. (Leipzig, 1900) S. 1

Literaturverzeichnis

[1] BURMESTER, L. *Grundzüge der Reliefperspektive.* (Leipzig, 1883).

[2] DÜRER, ALBRECHT. *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit in Linien, Ebenen und ganzen Körpern.* [Nachdruck von Hans Thoma] (München, 1908).

[3] FRÉZIER, AMÉDÉE-FRANCOIS. *Éléments de Stereotomie à l'usage de l'Architecture pour la coupé des pierres.* (Paris, 1780).

[4] GRAEFE, RAINER [ED]. *Zur Geschichte des Konstruierens.* (Stuttgart, 1989).

[5] KADERÁVEK, FRANTISEK. *Geometrie und Kunst in früherer Zeit.* (Prag, 1935).

[6] KAMKE, WOLFGANG. *Die Verwendung verschiedener Dreiecke und der Quadratur bei der Gestaltung mittelalterlicher Kirchen.* (Stuttgart, 2002).

[7] LAMBERT, JOHANN HEINRICH. *Schriften zur Perspektive.* (Berlin, 1943).

[8] MAINZER, KLAUS. *Geschichte der Geometrie.* (Mannheim/Wien/Zürich, 1980).

[9] MONGE, GASPARD. *Darstellende Geometrie.* [Nachdruck von Robert Haussner] (Leipzig, 1900).

[10] OBENRAUCH, FERDINAND. *Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie.* (Brünn, 1897).

[11] OLSCHKI, L. S. *Die Literatur der Technik und der angewandten Wissenschaften vom Mittelalter bis zur Renaissance - Band I.* (Leipzig/Florenz/Rom/Genf, 1919).

[12] RITTERS, VOLKER. *Verborgene Geometrie.* (Sauerlach, 1995).

[13] RODLER, HIERONYMUS. *Eyn schön nützlich büchlin und underweisung der kunst des Messens mit dem Zirckel, Richtscheidt oder Linial.* [Nachdruck der Ausgabe Simmern 1531] (Graz, 1970).

[14] SCRIBA, CHRISTOPH & SCHREIBER, PETER. *5000 Jahre Geometrie.* (Berlin/Heidelberg, 2001).

[15] SELLENRIEK, JÖRG. *Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens.* (München, 1987).

[16] STACHEL, HELLMUTH. *Projektive Geometrie.* [Arbeitsskriptum zur Vorlesung] (Wien, 2003).

[17] WIENER, CHRISTIAN. *Lehrbuch der Darstellenden Geometrie. Band I.* (Leipzig, 1884).

Abbildungsverzeichnis