Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Philosophische Aspekte im Mathematikunterricht

Ausgeführt am Institut für
Analysis and Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Frau ao.Univ.Prof. Mag. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger

durch

Noemi Müller

Porzellangasse 52/4
1090 Wien
noemi_sophie@hotmail.com

Wien, am 24.11.2015

____
Noemi Müller

„Viele von denen, die die Gelegenheit hatten, etwas mehr über Mathematik zu erfahren, verwechseln sie mit der Arithmetik und halten sie für eine trockene Wissenschaft. Tatsächlich ist Mathematik aber eine Wissenschaft, die sehr viel Fantasie erfordert.“

Sofia Kowalewskaja

Inhaltsverzeichnis

1 Anliegen 1

2 Einleitung 2

2.1 Aufbau der Arbeit 3

3 Legitimierung 4

4 Didaktische Grundlagen 7

4.1 Was bedeutet philosophieren? 7

4.1.1 Exkurs: Philosophie lernen vs. Philosophieren lernen 8

4.2 Diskutieren – Lesen – Schreiben 9

4.2.1 Philosophische Diskussion 9

4.2.2 Philosophische Texte 11

4.2.3 Extra oder Lernstoff (Überprüfung und Bewertung) 11

5 Erster Aspekt: Persönlichkeiten 13

5.1 Thales von Milet 13

5.2 René Descartes 15

5.3 Gottfried Wilhelm Leibniz 17

5.4 Pythagoras und die Pythagoreer 19

5.4.1 Die Schule 19

5.4.2 Alles entspricht der Zahl 20

5.4.3 Punktmengen 23

5.5 Umsetzung im Unterricht 24

6 Zweiter Aspekt: Was sind Zahlen? 26

6.1 Verschiedene Ansichten 27

6.1.1 Pythagoreer 27

6.1.2 Euklid 27

6.1.3 Gottfried Wilhelm Leibniz 27

6.1.4 Isaac Newton 29

6.1.5 George Berkeley 30

6.1.6 John Stuart Mill 31

6.2 Gottlob Frege 32

6.2.1 Russellsches Paradoxon 35

6.3 Umsetzung im Unterricht 37

7 Dritter Aspekt: Unendlichkeit 39
7.1 Facetten der Unendlichkeit 39
7.2 aktual vs. potenziell unendlich 40
7.3 Verschiedene Sichtweisen 42
7.3.1 Aristoteles 42
7.3.2 René Descartes 42
7.3.3 Georg Cantor 43
7.3.4 Bernard Bolzano 44
7.3.5 Richard Dedekind 45
7.4 Zenons Paradoxien 46
7.4.1 Achill und die Schildkröte 47
7.5 Kurzer Abriss wichtiger Entwicklungen 47
7.5.1 Infinitesimalrechnung 47
7.5.2 Limes 51
7.5.3 Kontinuumhypothese 52
7.5.4 Non-Standard Analysis 52
7.6 Umsetzung im Unterricht 53
8 weitere Fragestellungen und Anregungen 57
8.1 Gegenstand der Mathematik – Was ist Mathematik? 57
8.2 Platonische Körper 58
8.3 Identität – (Un-)Gleichungen 59
8.4 Logik 60
9 Abschliessende Anmerkungen 62
10 Danksagungen 63
11 Literaturverzeichnis 64
Anhang 69

1 ANLIEGEN

Viele Schüler_innen erleben Mathematik in der Schule als eine lebensferne, in sich abgeschlossene und hauptsächlich zum Selbstzweck betriebene Wissenschaft. Selten verstehen sie, wozu Mathematik genötigt wird oder warum sie Dinge lernen müssen, die sie vermeintlich nicht gebrauchen können. Als Lösung für dieses Problem wird in der andauernden Bildungsdebatte mehr Anwendungsorientierung gefordert.

Dies ist sicherlich ein sehr guter Ansatz, um Schüler_innen die Mathematik näher zu bringen. Meiner Meinung nach löst dieser die bestehenden Probleme jedoch nicht vollständig. Am (falschen) Bild einer abgeschlossenen, „vom Himmel gefallenen" Wissenschaft wird dadurch kaum gerüttelt.

Meine Fächerkombination, Mathematik und Psychologie & Philosophie, ermöglichte mir einen neuen Blickwinkel, der sich meines Erachtens auch im Schulunterricht umsetzen lässt. Die geschichtliche Verwobenheit von Mathematik und Philosophie bietet auch heute noch zahlreiche Verbindungen und Berührungspunkte. Nutzt man diese, kann sich den Schülern_innen ein neues Bild der Mathematik eröffnen. Zusätzlich bietet sich so die Möglichkeit, die philosophisch-argumentativen Kompetenzen der Lernenden zu fördern.

In meiner Arbeit möchte ich mich daher damit auseinandersetzen, wie man solche Verbindungen und Berührungspunkte in den Mathematikunterricht einbauen kann. Exemplarisch sollen die drei Aspekte „Persönlichkeiten", „Was sind Zahlen?" und die „Unendlichkeit" für den Unterricht aufgearbeitet werden. So soll das nötige Wissen den Lehrern_innen zur Verfügung gestellt werden und die exemplarischen Aspekte als Anregung dienen.

Dies geschieht allerdings in dem Bewusstsein, dass eine umfangreiche Umsetzung unter den derzeitigen Gegebenheiten im Unterricht kaum möglich ist. Eine intensive Auseinandersetzung mit der Beziehung von Mathematik und Philosophie kann wohl nur in einem Freifach/Wahlpflichtfach stattfinden.

2 EINLEITUNG

„Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true."[1] – Bertrand Russell

Warum sollte man Philosophie und Mathematik im Unterricht verbinden? Auf den ersten Blick haben diese beiden Wissenschaften wenig gemeinsam. Die eine aus dem Bereich der Geisteswissenschaften, die andere aus den Formal- und Naturwissenschaften; die eine reflektiert, die andere hantiert oft mit Zahlen. Wie lässt sich hier überhaupt ein Zusammenhang herstellen?

Diese Sichtweise ist eigentlich sehr jung. Bis in die Neuzeit galt die Philosophie als die Universalwissenschaft. Erst langsam lösten sich damals die Einzelwissenschaften von der Mutter aller Wissenschaften ab und wurden eigenständig. So wurde etwa die Psychologie erst im 19. Jahrhundert eine eigene Disziplin.[2]

Am einfachsten ist diese lange und enge Verbindung an der großen Anzahl an Persönlichkeiten ersichtlich, die in beiden Gebieten tätig waren. Man denke an das antike Griechenland, wo es schwer fällt Philosophie und Mathematik überhaupt voneinander abzugrenzen, oder an Namen wie Leibniz, Descartes u.a., die jede_r Studienanfänger_in der Philosophie wie der Mathematik schon einmal gehört hat.

Doch die Nähe der beiden Wissenschaften zeigt sich nicht nur darin, dass sich zahlreiche Personen in beiden Bereichen engagiert haben. Auch inhaltlich stehen sie sich sehr nahe, brauchen sich bei manchen Themen sogar gegenseitig. So ist etwa die Frage nach dem Gegenstand der Mathematik bereits eine philosophische, wie auch das Zitat von Bertrand Russel darlegt.

[1] Russell, 1959, Chapter 5
[2] vgl. van Ackeren, Kobusch, Müller, 2011, S. 129

2.1 AUFBAU DER ARBEIT

Nach Beleuchtung der Legitimierung des Anliegens, in der vor allem der Lehrplan betrachtet wird, erfolgt eine kurze Einführung in die Didaktik der Philosophie. Anschließend folgen die drei Hauptkapitel, in denen je ein Aspekt der Verbindung von Philosophie und Mathematik genauer betrachtet wird und Vorschläge für die Umsetzung im Unterricht angeboten werden. Im Anschluss werden zusätzlich vier weitere Aspekte kurz dargestellt.

Im Anhang findet sich zu jedem der drei näher betrachteten Aspekte je ein exemplarisches Arbeitsblatt. Zudem werden erwähnte Persönlichkeiten und Unterrichtsmethoden erläutert. Neben einer Literaturempfehlung wurde auch ein Glossar erstellt, das vor allem philosophische Begriffe, die nicht als bekannt vorausgesetzt werden, erläutert.

3 LEGITIMIERUNG[3]

Das Anliegen der Verbindung von Mathematik und Philosophie lässt sich nicht nur durch ihre geschichtliche Verbundenheit und die Nähe der beiden Wissenschaften begründen. Vor allem im allgemeinen Teil des Lehrplanes finden sich diverse Grundlagen für diese Forderung. Auch die Kompetenzorientierung und der Lehrplan für Mathematik bieten Anlässe.

Im allgemeinen Teil des Lehrplanes findet sich der Bildungsbereich Sprache und Kommunikation, der folgendermaßen ausgeführt wird:

„Ausdrucks-, Denk-, Kommunikations- und Handlungsfähigkeit sind in hohem Maße von der Sprachkompetenz abhängig. [...] Die Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Sozialisationsbedingungen ermöglicht die Einsicht, dass Weltsicht und Denkstrukturen in besonderer Weise sprachlich und kulturell geprägt sind.“[4]

Die sprachliche Kompetenz, über Mathematik und mathematische Sachverhalte sprechen zu können, wird auch bei der neuen standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung gefordert. Dies bedeutet jedoch nicht bloß Rechenvorgänge in Worte zu fassen. Primär bedarf es eines fundierten Verständnisses der Grundbegriffe der Mathematik. Soll darüber hinaus vermittelt werden, dass unsere spezifische Sprache Auswirkungen auf unsere Weltsicht hat, stellen sich etwa Fragen wie: „Könnte die Mathematik anders aussehen?“, „Welche Auswirkungen hätte ein anderes Zahlenverständnis?“, o.Ä. Durch das Einbinden der Philosophie lässt sich dieser Bildungsbereich sicherlich nicht vollkommen erfüllen, es kann allerdings einen wichtigen Beitrag leisten.

Der Bildungsbereich Kreativität und Gestaltung verstärkt diesen Eindruck:

„Daraus sollen sich Impulse für das Denken in Alternativen, für die Relativierung eigener Standpunkte, [...] ergeben.“[5]

Alternativen in Erwägung zu ziehen (auch nicht existierende, etwa durch Gedankenexperimente) und seinen eigenen Standpunkt in Frage zu stellen und zu reflektieren

---

[3] vgl. BMBF, 2004a; Haenisch, 1999; Wild, Möller, 2015;

[4] BMBF, 2004a, S. 3

[5] ebd., S. 4

sind zutiefst philosophische Methoden. Der fachspezifische Lehrplan für Mathematik unterstreicht dies noch einmal:

„Kritisch-argumentatives Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, Hinterfragen, Ausloten von Grenzen und Begründen zu tun haben; [...]“[6]

Zudem fordert der Allgemeine Teil des Lehrplans eine Herstellung von Bezügen zur Lebenswelt. Denkt man an so manche_n Philosophen_in scheint diese Forderung im Zusammenhang mit Philosophie abwegig. Doch große Teile der Philosophie beschäftigen sich mit allen Lebensfragen, die uns begegnen. Und manch philosophische Frage aus der Mathematik begegnet uns auf natürlichem Wege (d.h. ohne dass sie uns eine Lehrperson vorsetzt). „Wozu brauchen wir Mathematik?“ – diese Frage bekommt wohl jede_r, der_die Mathematik unterrichtet, von den Schülern_innen zu hören. Sicherlich kann man dann zahlreiche Bereiche des Lebens anführen, wo sie gebraucht wird. Doch eigentlich verschiebt man dabei das Problem nur. Die eigentliche Frage lautet: „Ist die Mathematik etwas ‚Erfundenes’ oder etwas ‚Natürliches’?“. Könnten wir auch ohne Mathematik leben?

Die Vernetzung und Einbindung von erworbenem Wissen in einen größeren Kontext wird auch von der Lernpsychologie und der Didaktik immer wieder gefordert. So widmet Hans Haenisch ein Merkmal des erfolgreichen Unterrichts der Vernetzung:

„In erfolgreichem Unterricht hat fächerübergreifendes Arbeiten einen hohen Stellenwert, werden die Lernstoffe vertikal vernetzt. Die ganzheitliche und interdisziplinäre Organisation des Lernens in solchen Settings führt die Lernenden an vernetztes Denken heran und begünstigt den Aufbau kumulativen Wissens. Fächerübergreifender Unterricht kann sich dabei sehr gut auch aus dem jeweiligen Fach heraus entwickeln.“[7]

Aus dem Bereich der Informationsverarbeitung ist bekannt, dass das Vernetzen von Wissen wichtig für das Abspeichern im Langzeitgedächtnis ist. Durch Elaborieren werden neue Informationen mit bereits vorhandenen (diese können auch erst kürzlich entstanden sein) verbunden und somit leichter abgespeichert. Das Gelernte in

[6] BMBF, 2004b, S. 1
[7] Haenisch, 1999, S. 6

einen größeren Kontext zu stellen und fächerübergreifenden Unterricht zu gestalten, ist also eine wichtige Form des Lernens.

Philosophieren als Unterrichtsprinzip[8]

Das Philosophieren mit Kindern und Jugendlichen im Unterricht entwickelt sich seit den 1990er Jahren im deutschsprachigen Raum. Vertreter_innen betonen dabei den positiven Einfluss, den das Philosophieren auf zahlreiche Entwicklungsbereiche hat. Unter anderem ist es einem komplexeren Welt- und Wirklichkeitsverständnis förderlich, trägt zu einem differenzierten Umgang mit Vielfalt bei und stärkt die Gesprächsfähigkeit. Philosophieren schult die argumentativen Fähigkeiten, das kritische, logische Denken und fördert so eine selbstkritische Einstellung. Dies ist nur ein kleiner Ausschnitt daraus, welche Auswirkungen das Philosophieren mit Schülern_innen haben kann.

Insgesamt zeigt sich, dass der Wunsch nach einer Verbindung von Mathematik und Philosophie im Unterricht nicht aus der Luft gegriffen ist. Im Gegenteil kann die Einbindung von philosophischen Aspekten und des Philosophierens in den Mathematikunterricht nicht nur die allgemeinen, fächerübergreifenden Kompetenzen der Schüler_innen stärken, sondern ihnen auch zu einem breiteren Verständnis der Mathematik verhelfen.

[8] vgl. Meerwaldt, 2011; Auzinger, 2010;

4 DIDAKTISCHE GRUNDLAGEN

In den Fachdidaktiken von Philosophie und Mathematik finden sich zwar vereinzelt Anregungen zur Philosophie im Mathematikunterricht, explizite Forschungen existieren jedoch noch nicht. Da sich diese Arbeit speziell an Mathematiklehrende richtet und man nicht voraussetzen kann, dass diese mit Philosophiedidaktik vertraut sind, wird in dieser Arbeit soweit darauf eingegangen, wie für die Umsetzung im Unterricht notwendig erscheint.

In diesem Kapitel wird nur ein grober Überblick gegeben. Anhand der noch folgenden Aspekte werden an späterer Stelle auch konkrete Überlegungen angestellt, wie die Umsetzung im Unterricht erfolgen kann. Nun gilt es vor allem zwei wichtige Fragen zu klären:

- Was bedeutet „philosophieren"?
- Welche Hauptmethoden kennt die Philosophie-Fachdidaktik?

4.1 WAS BEDEUTET PHILOSOPHIEREN?

Was wie eine einfache Frage aussieht, erweist sich selbst als philosophisches Problem, auf das es keine allgemeingültige Antwort gibt. Bestimmte Motive und Begriffe, wie das Argumentieren, Nachdenken oder Reflektieren tauchen jedoch immer wieder auf. So schreibt etwa Thomas Nagel:

„Man philosophiert einzig, indem man fragt, argumentiert, bestimmte Gedanken ausprobiert und mögliche Argumente gegen sie erwägt, und darüber nachdenkt, wie unsere Begriffe wirklich beschaffen sind."[9]

Philosophieren ist eine bestimmte Art zu denken und zu argumentieren. Reflexion, Begriffsanalyse und die Beschäftigung mit dem Grundlegenden sind dabei charakteristisch.

Was bedeutet jedoch Philosophie im Unterricht?

[9] Nagel, 2012, S. 8

4.1.1 Exkurs: Philosophie lernen vs. Philosophieren lernen

Schon Immanuel Kant und Georg Wilhelm Friedrich Hegel waren sich uneins, wie man Philosophie lehren kann. Anders als in der Mathematik gibt es keine spezifischen Inhalte oder Methoden der Philosophie. Kant argumentierte, dass man nur philosophieren lernen könne, denn:

„Um also auch Philosophie zu lernen, müßte allererst eine wirklich vorhanden sein. Man müßte ein Buch vorzeigen und sagen können: sehet, hier ist Weisheit und zuverlässige Einsicht; lernet es verstehen und fassen, bauet künftighin darauf, so seid ihr Philosophen."[10]

Hegel entgegnete ihm, wie man *„ohne Inhalt philosophieren lernen soll"*[11] und plädiert also dafür, Philosophie zu lernen.

Beide Argumentationen sind stark; welche ist also die geeignete für den Einsatz im Mathematikunterricht?

In dieser Arbeit werden konkrete Themen für den Unterricht vorgestellt, es geht um eine inhaltliche Auseinandersetzung mit Philosophie und mit Philosophen_innen. Dennoch sollen hier den Schülern_innen keine philosophischen Positionen vorgelegt werden, die sie wiederum auswendig lernen können oder müssen.

Im Idealfall sollten die Schüler_innen im Unterricht an ausgewählten Fragen philosophieren lernen. Natürlich ist es keineswegs die (primäre) Aufgabe des Mathematikunterrichts, den Schülern_innen das Philosophieren beizubringen. Dennoch scheint es unerlässlich, die Lernenden aktiv an die philosophischen Aspekte heranzuführen, um das Potential dieses Blickwinkels voll auszuschöpfen.

[10] Meyer, 2010, S. 73

[11] Meyer, 2010, S. 75

4.2 Diskutieren – Lesen – Schreiben[12]

Die Grundlage für die Philosophie-Fachdidaktik ist die Untergliederung in die drei Bereiche Diskutieren, Lesen und Schreiben. Diese sind allerdings nicht als strikt getrennt anzusehen, sondern lassen sich in vielfältiger Weise miteinander verbinden und kombinieren.

Am besten in den Mathematikunterricht integrierbar erscheint das Diskutieren. Denn unter gewissen Voraussetzungen bedarf eine Diskussion wenig Aufwand zur Umsetzung. Außerdem fördert sie die Kompetenz des Redens über Mathematik und mathematische Inhalte und weicht damit nicht so sehr vom Lehrinhalt ab. Vor allem das Schreiben erfordert viel Zeit und Vorbereitung, sowohl auf Seiten der Lehrenden wie der Schüler_innen. Trotzdem sollte keiner der Bereiche von vornherein ausgeschlossen werden, auch wenn wir uns besonders auf das Diskutieren konzentrieren werden.

4.2.1 Philosophische Diskussion

Für eine erfolgreiche (philosophische) Diskussion im Unterricht sind allem voran folgende Punkte zu beachten:

- offene Fragestellung
- Gleichberechtigung aller Beteiligten und respektvoller Umgang
- Zurückhaltung der Lehrperson
- Festhalten der Ergebnisse

Am schwierigsten erweist sich oft die Auswahl der Fragestellung und die Aufgabe, die Schüler_innen zur Teilnahme an der Diskussion zu motivieren.

Die Frage, wie man Schüler_innen am besten zum Diskutieren im Unterricht bewegen kann, ist eine schwierige und nicht allgemeingültig beantwortbare. Wenn die Klasse noch keine Erfahrung mit Diskussionen hat, sollte man mit einer Fragestellung anfangen, die möglichst nahe am Leben der Schüler_innen ist (eher „Wozu Mathematik?“ als „Was ist die Unendlichkeit?“). Manchmal hilft es auch, nicht im Plenum

---

[12] vgl. Pfister, 2014, S. 35ff

sondern in Kleingruppen zu diskutieren. Hier trauen sich viele Jugendliche eher etwas zu sagen, weil das Publikum kleiner ist, außerdem kann man auf die Aussagen der anderen direkter reagieren. Eine weitere Möglichkeit, die Teilnahme an Diskussionen zu fördern, stellt die Vorbereitung dar. Wenn die Klasse Zeit hat, Informationen zum Thema mit Hilfe des Internets oder mit (Schul-)Büchern vorzubereiten, sich einen Überblick zu verschaffen und eventuell auch eine Meinung zu bilden, kann dies zu einer größeren Beteiligung an der Diskussion führen.

Eine passende Fragestellung für eine Diskussion zu finden, ist ebenfalls keine einfache Aufgabe, denn es gibt leider keinen Katalog philosophischer Fragen. Natürlich kann es sein, dass sich Diskussionsfragen direkt aus dem Unterricht heraus generieren. Plant man eine Diskussion, sollte man sich darauf allerdings nicht verlassen. Wichtig ist, dass sich das ausgewählte Thema überhaupt zur Diskussion eignet, dass es eine gewisse Offenheit besitzt. Damit ist gemeint, dass es verschiedene legitime Sichtweisen und Positionen gibt und keine absolute Antwort, die man etwa durch kurze Internetrecherche finden könnte. Überspitzt gesagt heißt das, dass man nicht diskutieren sollte „Wieviel ist 2+2?“ sondern eher „Was sind Zahlen?“.

Die Gleichberechtigung aller Beteiligten und ein respektvoller Umgang miteinander sollte eine Selbstverständlichkeit sein. Dennoch schadet es nicht, klare Regeln für Diskussionen innerhalb der Klasse zu erarbeiten. Vor allem bei Diskussions-Unerfahrenen braucht es einen Lernprozess, wie man mit anderen Meinungen (die man selbst vielleicht für vollkommen falsch hält) umgeht. Die Zurückhaltung der Lehrenden stellt für manchen Persönlichkeitstyp eine Herausforderung dar. Doch sie ist wichtig, schließlich sollen die Schüler_innen diskutieren und aktiv sein. Der_die Lehrer_in sollte sich möglichst darauf beschränken, inhaltlich Falsches auszubessern und darauf zu achten, dass die Diskussion die Fragestellung im Auge behält und nicht abdriftet.

Das Festhalten der Ergebnisse schließlich ist aus verschiedenen Gründen sinnvoll. Einerseits kann eine laufende Visualisierung (z.B. Festhalten von Stichpunkten an der Tafel) helfen, dass sich die Diskussion nicht verläuft. Andererseits sollte die Diskussion ja nicht lediglich einer Kompetenzförderung (im Sinne vom Kennenlernen der Methode „Diskutieren“) dienen, sondern auch inhaltlich die Schüler_innen weiterbringen. Damit dieser Zugewinn nicht sofort wieder verloren geht, sollten die wichtigsten Punkte in irgendeiner Form schriftlich festgehalten werden.

4.2.2 Philosophische Texte

Das Lesen philosophischer Texte ist sicherlich der direkteste Zugang zu den Ansichten und Positionen einzelner Philosophen_innen. Die Schwierigkeit besteht hier allerdings in der Auswahl geeigneter Texte, denn viele Autoren_innen sind selbst für Philosophiestudenten_innen eine große Herausforderung. Will man also mit Originaltexten arbeiten, sollte man auf die Komplexität achten und jedenfalls genügend Zeit zum Besprechen der gewählten Textstelle einplanen. Darüber hinaus sind Texte von englischsprachigen Philosophen_innen empfehlenswert, da diese sprachlich meist wesentlich einfacher sind.

Das Produzieren eigener Texte ist eine sehr gute Möglichkeit, vor allem das argumentative Arbeiten zu fördern. Die Bandbreite der Textformen, vom Kommentar bis zum Essay, ist dabei sehr groß. Hier stellt sich im Kontext des Mathematikunterrichts primär die Frage, worauf man mit dieser Aufgabenstellung hinaus will. An sich gibt es jedoch nichts, was a priori gegen den Einsatz dieser Methode auch im Mathematikunterricht spricht.

4.2.3 Extra oder Lernstoff (Überprüfung und Bewertung)

Die Frage, die sich zum Abschluss dieses Kapitels noch stellt, ist, ob das Philosophieren ein „nettes Extra“, eine Abwechslung vom traditionellen Mathematikunterricht darstellt oder ob die Arbeit an den philosophischen Aspekten auch überprüft und bewertet werden soll.

Pauschal lässt sich das nicht beantworten, da es auch auf das Ausmaß und die Art ankommt, in der die philosophischen Aspekte tatsächlich in den Unterricht mitaufgenommen werden. Dies schließt auch die Frage mit ein, wie überprüft werden soll. Diskussionen bieten andere Grundlagen als das Produzieren von Texten, ebenso kommt es stark auf die ausgewählten Themen an. Dennoch kann klar eine Empfehlung für eine Überprüfung und Bewertung ausgesprochen werden. Schließlich handelt es sich um fachrelevante Inhalte, die das Verständnis der Mathematik fördern sollen. Außerdem kann dies sowohl für schwache als auch für interessierte Schüler_innen eine Chance darstellen. Denn dieser Zugang zur Mathematik ist ein vollkommen neuer und anderer, was besonders für schwache Schüler_innen eine Möglichkeit erschließt, auf andere Weise (natürlich in eingeschränktem Maße) zu positiven Noten/Bewertungen zu kommen.

5 ERSTER ASPEKT: PERSÖNLICHKEITEN

Wie bereits erwähnt hat die lange gemeinsame Geschichte von Mathematik und Philosophie dazu beigetragen, dass es unzählige Persönlichkeiten gibt, die in beiden Gebieten wichtige Beiträge geleistet haben. Viele dieser großen Namen werden auch den Schülern_innen in ihrer Schullaufbahn in beiden Unterrichtsgegenständen begegnen. Darüberhinaus gäbe es noch einige mehr, die sich in diesem Zusammenhang anbieten würden. In diesem Kapitel werden ausgewählte Persönlichkeiten behandelt. Zudem wird ein Schwerpunkt auf Pythagoras von Samos gelegt, da dieser mit seiner Lehre eine nahezu einzigartige Stellung einnimmt.

5.1 THALES VON MILET[13]

„Es wird erzählt, mein Theodoros, daß Thales, als er astronomische Beobachtungen anstellte und dabei nach oben blickte, in einen Brunnen gefallen sei und daß eine witzige, reizende thrakische Magd ihn verspottet habe: Er strenge sich an, die Dinge im Himmel zu erkennen, von dem aber, was ihm vor Augen und vor Füßen liege, habe er keine Ahnung.“[14]

Dies ist wohl eine der bekanntesten Anekdoten über Thales von Milet. Sie wird auch gerne gegen Philosophen_innen im Allgemeinen eingesetzt, um zu zeigen, wie fern sie oft der Realität sind.

Thales (ca. 625-547 v. Chr.) war einer der Sieben Weisen und wird von Aristoteles als Urheber der Philosophie und Begründer der naturwissenschaftlichen Erklärungsweise bezeichnet. Über sein Leben gibt es einige Anekdoten, doch wenig historisch Belegtes.

Durch seinen neuen Erklärungsansatz trug Thales wesentlich zur Entmythologisierung bei. Der Philosoph benannte einen Urstoff (arché), das Wasser, aus dem alle anderen Stoffe entstanden. Diese Vorgehensweise des Benennens eines Urstoffes

[13] vgl. Mansfeld, 2008, S. 39ff; Masek, 2011, S. 26ff

[14] Mansfeld, 2008, R4=DK11 A9

und der Erklärung der Entstehung aller anderen Elemente aus diesem ist für zahlreiche Vorsokratiker typisch. Thales' Theorie zufolge schwimmt die Erde auch auf dem Wasser, wodurch er unter anderem das Auftreten von Erdbeben zu erklären versucht:

„Er behauptet nämlich, die Erdscheibe werde vom Wasser gestützt und fahre wie ein Schiff. Wenn die Leute sagen, sie erbebe, schwanke sie infolge einer Bewegung des Wassers."[15]

Durch sein Verständnis einer gesetzmäßigen Kausalität der Natur schafft Thales auch andere Phänomene zu erklären und zu berechnen. So berechnete er etwa die Höhe der Pyramiden durch ihren Schattenwurf. Als geistige Pionierleistung kann seine Vorhersage der Sonnenfinsternis 585 v. Chr. angesehen werden. Mit Hilfe der babylonischen Tabellen und einer Portion Glück extrapolierte er die verfügbaren Daten und zeigte so, dass solche Phänomene keineswegs der Willkür der Götter unterliegen.

Thales nutzte orientalisches Wissen, gilt für die Griechen als Begründer der Astronomie, „bewies" zahlreiche elementare mathematische Sätze (z.B. den Satz des Thales) und nutzte Modelle für Planungen. So leistete er viel für die Mathematik als autonome Wissenschaft.

Seine ersten naturwissenschaftlichen Erklärungen mögen unbefriedigend bleiben, dennoch waren sie ein wichtiger Schritt zur Errichtung der Philosophie wie der Naturwissenschaft. Thales blieb jedoch kein reiner Materialist. Wenn er auch die Mythen über die Götter zu widerlegen suchte, so bezeichnet er doch etwa den Magnetismus als göttliche Kraft:

„Thales glaubte, daß alles von Göttern voll sei."[16] *„Nach der Überlieferung zu urteilen hat es den Anschein, daß auch Thales die Seele als Bewegungsursache betrachtet hat; er behauptete jedenfalls, der Magnetstein habe, weil er das Eisen bewege, eine Seele."*[17]

---

[15] Mansfeld, 2008, R12=DK11 A15
[16] Mansfeld, 2008, R14=DK11 A22
[17] Mansfeld, 2008, R15=DK11 A22

Damit zeigt sich Thales animistische Weltsicht. Thales war Naturforscher und Philosoph, der über die Grenzen der Anschauung hinaus vorzustoßen versuchte und damit zurecht als zentral für die heutige Philosophie (und die Mathematik) angesehen werden kann.

5.2 RENÉ DESCARTES[18]

Descartes war ein französischer Mathematiker und Philosoph, der von 1596 – 1650 lebte und als wichtiger Vertreter des Rationalismus auch als Vater der modernen Philosophie gilt. Sein Werk ist so umfangreich, dass im Folgenden nur die wichtigsten Hauptgedanken kurz dargestellt werden sollen.

In seinem Hauptwerk „Meditationen über die Erste Philosophie" strebt der Philosoph ein unumstößliches Fundament der Erkenntnis an. Zu diesem will er durch den methodischen Zweifel gelangen. Das bedeutet, Descartes verwirft zunächst alles, woran sich zweifeln lässt (so gering dieser Zweifel auch sein mag). So gelangt er zur berühmten Formel: cogito ergo sum – ich denke also bin ich. Denn die Tatsache, dass er zweifelt (dass er also denkt) lässt sich nicht bezweifeln. Von diesem Punkt aus baut er alles wieder auf.

Descartes schafft darin auch den Dualismus zwischen res cogitans (Seele, Verstand) und res extensa (Körper) und damit das seither die Philosophie beschäftigende Leib-Seele-Problem. Denn handelt es sich tatsächlich um zwei getrennte Substanzen (eine denkende und eine ausgedehnte), entsteht die Schwierigkeit, wie diese in einen Wirkungszusammenhang zu bringen sind.

Sein Beitrag zur Mathematik ist ebenso groß wie zur Philosophie und kann deshalb auch nur angerissen werden. Descartes hat wesentlich zur Verbindung von Algebra und Geometrie und somit zur Entwicklung der analytischen Geometrie beigetragen. Ihm ist nicht nur das kartesische Koordinatensystem zu verdanken, sondern auch

[18] vgl. Rehfus, 2012a, S. 47ff; Bedürftig, Murawski, 2012, S. 47ff; Descartes, 2010;

zahlreiche Symbole, wie etwa das Gleichheits- oder das Wurzelzeichen, die er in die Mathematik einführte.

Descartes setzte sich zudem für eine mathesis universalis, eine universelle analytische und mathematische Wissenschaft, ein. Seiner Ansicht nach sollte die gesamte Natur geometrisch und mechanisch betrachtet werden.

Zur Methodologie trug er ebenfalls wesentlich bei. So sollte die Untersuchung der Methode immer der Untersuchung des Gegenstandes vorausgehen. Ein Kriterium für Gewissheit und Sicherheit ist die Klarheit und Prägnanz der Begriffe und Ideen. In seiner „Abhandlung über die Methode“ stellt er vier Regeln auf für die Sicherheit seiner wissenschaftlichen Arbeit:

„Die erste Regel war, niemals eine Sache für wahr anzunehmen, ohne sie als solche genau zu kennen; d.h. sorgfältig alle Uebereilung und Vorurtheile zu vermeiden und nichts in mein Wissen aufzunehmen, als was sich so klar und deutlich darbot, dass ich keinen Anlass hatte, es in Zweifel zu ziehen.

Die zweite war, jede zu untersuchende Frage in so viel einfachere, als möglich und zur besseren Beantwortung erforderlich war, aufzulösen.

Die dritte war, in meinem Gedankengang die Ordnung festzuhalten, dass ich mit den einfachsten und leichtesten Gegenständen begann und nur nach und nach zur Untersuchung der verwickelten aufstieg, und eine gleiche Ordnung auch in den Dingen selbst anzunehmen, selbst wenn auch das Eine nicht von Natur dem Anderen vorausgeht.

Endlich viertens, Alles vollständig zu überzählen und im Allgemeinen zu überschauen, um mich gegen jedes Uebersehen zu sichern.“[19]

Diese vier Regeln können folgendermaßen vereinfacht dargestellt werden:

1. Es ist nur das wahr, was nicht (auch nicht im Geringsten) bezweifelt werden kann.
2. Eine Fragestellung/ein Problem soll in kleine Schritte, die einfacher beantwortet werden können, unterteilt werden.

[19] Descartes, 1870, 2. Abschnitt

3. Es soll vom Leichten zum Schwierigen vorgegangen werden.
4. Es soll darauf geachtet werden, dass man nichts übersieht (den Überblick nicht verliert).

5.3 GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ[20]

Der deutsche Philosoph und Universalgelehrte Leibniz, der von 1646-1716 lebte, war ebenso wie Descartes ein Vertreter des Rationalismus. In seiner Schrift „Monadologie“ entwickelte er seine bekannte Lehre der Monaden (Einheiten). Monaden sind seiner Ansicht nach die wahren Atome der Natur, ohne Ausdehnung, Gestalt und Teilbarkeit. Sie bauen alle Substanz auf.

Darüber hinaus entwickelt er auch seine Unterscheidung von Vernunft- und Tatsachenwahrheiten, die einen interessanten Beitrag zum Diskurs des Rationalismus und Empirismus darstellt. Diese stritten schon seit geraumer Zeit darum, ob Wissen durch vernünftiges Denken (also ausschließlich im Verstand, Rationalismus) oder durch Erfahrung (Empirismus) erworben wird.

Als Vernunftwahrheiten bezeichnet Leibniz Wahrheiten, die unser Verstand aus eingeborenen Ideen ableitet. Sie gelten notwendig und ewig. Notwendig, da sie über moralische und physische Gewissheit hinausgehen, also metaphysische Gewissheit haben, und ewig, da sie letztlich ihren Ort bei Gott haben. Wahrheiten, die logische, metaphysische oder geometrische Notwendigkeit besitzen, sind unter den Vernunftwahrheiten einzuordnen.

Als Tatsachenwahrheiten bezeichnet Leibniz Wahrheiten, die wir durch Erfahrung oder Beobachtung gewinnen. Diese Wahrheiten sind zufällig bzw. kontingent. Alle partikulären oder individuellen Wahrheiten sowie gemischte Schlüsse (aus Beobachtungen und notwendigen Sätzen) sind Tatsachenwahrheiten. Ein Beispiel wäre „es regnet in Salzburg“. Die Unterscheidung von Vernunft- und Tatsachenwahrheiten ist jedoch nicht immer so einfach. Zudem hat Leibniz der Erörterung der Tatsachen-

[20] vgl. Rehfus, 2012a, S. 69ff; Schüssler, 1992; Buckingham et al., 2011, S. 134ff; Bedürftig, Murawski, 2012, S. 53ff; Peiffer, Dahan-Dalmedico, 1994;

wahrheiten eher geringen Raum eingeräumt. Dies könnte darauf zurückzuführen sein, dass sie in der Kontroverse mit John Locke (Empirismus) nur eine untergeordnete Rolle spielen.

Im Bereich der Mathematik hat Leibniz unter anderem wesentlich zur Entwicklung der Differential- und Integralrechnung beigetragen. Weiters nimmt er eine wichtige Stellung in der Formalisierung ein. Leibniz hatte die Vision einer universellen, streng symbolischen Sprache (characteristica universalis), die alle Streitigkeiten beseitigen sollte. Für das Zeichensystem stellte er folgende Bedingungen auf:

„(1) Es sollte eine eindeutige und umkehrbare Zuordnung zwischen den Zeichen des Systems und den Gedanken (im weitesten Sinne) bestehen.

(2) Die Zeichen sollten so ausgewählt sein, dass Gedanken, die eine Zerlegung in Komponenten besitzen, Zerlegungen im Zeichensystem entsprächen.

(3) Es sollte ein System von Regeln zur Manipulation der Zeichen so entwickelt werden, dass, sofern ein Gedanke M_1 Folgerung eines Gedankens M_2 ist, auch im Zeichensystem das ‚Bild' von M_1 Folgerung des ‚Bildes' M_2 ist.“[21]

Solch ein Zeichensystem konnte schlussendlich nicht verwirklicht werden, findet aber in der heutigen Logik eine partielle Umsetzung.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass Leibniz sowohl in der Philosophie als auch in der Mathematik (und zahlreichen weiteren Gebieten) umfangreiche und wertvolle Arbeit geleistet hat, die hier nur angerissen werden konnte.

[21] Bedürftig, Murawski, 2012, S. 54f

5.4 PYTHAGORAS UND DIE PYTHAGOREER[22]

Meist spricht man nur von Pythagoras, was ist jedoch eine starke Vereinfachung ist. Es ist nämlich kaum möglich zwischen den Arbeiten von Pythagoras und seinen Schülern_innen zu unterscheiden.

5.4.1 Die Schule

Pythagoras von Samos gründete die Schule im 6. Jahrhundert v. Chr. in Unteritalien. Sie bestand auch nach seinem Tod weiter bis sie sich etwa Ende des 4. Jahrhunderts v. Chr. als Organisation auflöste. Die Pythagoreer standen in der Tradition der Vorsokratiker und wurden vor allem durch die Lehren Anaximanders (ebenfalls ein einflussreicher Vorsokratiker) beeinflusst.

Dabei ähnelte die Schule eher einem Geheimbund, in dem Pythagoras wie ein Guru verehrt wurde. Es gab Aufnahmekriterien, Essens- sowie Kleidungsvorschriften und die Lehren unterlagen der Geheimhaltung. Wie sie dennoch an die Öffentlichkeit gelangten, ist unklar. Die wichtigsten Quellen sind Aristoteles und der Pythagoreer Philolaos, der das Schweigegebot mit der Veröffentlichung eines Buches brach.

Die kultischen Vorschriften sollten die Reinhaltung der Seele gewährleisten. Diese war nach der Lehre der Pythagoreer unsterblich und ging nach dem Tod auf andere Lebewesen (Menschen, Tiere, Pflanzen) über – sie vertraten also eine Form der Reinkarnation. Neben rituellen Vorschriften, wie das Verbot, Fleisch, Bohnen und diverse andere Nahrungsmittel zu verzehren, oder das Gebot, beim Anziehen der Schuhe mit dem rechten Fuß zu beginnen, gab es auch moralische Regeln, wie etwa Treue gegenüber der Ehefrau, Loyalität gegenüber anderen Pythagoreern oder das Erteilen von Ratschlägen als heilig anzusehen.

Nicht zuletzt durch ihr langes Bestehen und ihr späteres Zersplittern (die Pythagoreer waren immer wieder auf Grund von Aufständen gezwungen zu fliehen) gab es verschiedene Richtungen innerhalb des Bundes. So soll sich eine Gruppe eher der Theorie und eine andere eher der Praxis zugewandt haben.

[22] vgl. Mansfeld, 2008, S. 98 ff; Masek, 2011, S. 45 ff; Buckingham et al., 2011, S. 26 ff

5.4.2 Alles entspricht der Zahl

„Da nun im Mathematischen die Zahlen der Natur nach das erste sind und sie, statt in Feuer, Erde und Wasser, eben in den Zahlen viele Übereinstimmungen mit den seienden und werdenden Dingen zu erkennen glaubten [...] da nun die gesamte Natur ihnen in allen übrigen Hinsichten den Zahlen nachgebildet zu sein schien und die Zahlen das erste seien in der gesamten Natur, nahmen sie an, die Elemente der Zahlen seinen die Elemente aller seienden Dinge, und die ganze Welt sei, wie erwähnt, Harmonie und Zahl."[23]

Aristoteles beschreibt hier den zentralen Punkt der pythagoreischen Lehre. Wie viele andere Vorsokratiker auch, waren die Pythagoreer auf der Suche nach einem Urstoff, aus dem alles hervorging. Sie machten mit der Zahl als Urstoff jedoch einen sehr ungewöhnlichen Vorschlag. Eine wichtige Stellung nehmen dabei die Zahlenverhältnisse ein, aus denen sie ein Gesetz der Harmonie ableiteten. Zahlenverhältnisse finden sich überall in der Welt, z.B. in der Musik. Die Intervalle der Tonleiter lassen sich als Längenverhältnisse schwingender Saiten ausdrücken:

- Oktave 2:1
- Quinte 3:2
- Quarte: 4:3

Solche ganzzahligen Verhältnisse gibt es laut ihrer These im gesamten Kosmos (weitere Beispiele wären unter anderem die zahlreichen Längenverhältnisse in den Maßen des menschlichen Körpers). So sei alles einer universalen Ordnung bzw. Harmonie unterworfen.

„Alles ist Zahl" gilt gleich in mehrfacher Weise:

„Offenbar betrachten sie die Zahlen als Prinzip, und zwar zum einen als Stoff für die seienden Dinge, zum anderen als Bestimmtheiten und Zustände. Als Elemente der Zahl betrachten sie das Gerade und das Ungerade, während die Eins aus beiden sei (sie sei ja sowohl gerade als auch ungerade). Aus der Eins entstehe die Zahl, und die ganze Welt bestehe, so behaupten sie, aus Zahlen."[24]

---

[23] Mansfeld, 2008, R31=DK 58 B4, B5
[24] Mansfeld, 2008, R31=DK 58 B4, B5

So ordnen die Pythagoreer bestimmten Zahlen auch moralische Qualitäten zu, wie etwa der Eins die Seele oder der Vier die Gerechtigkeit (da sie aus zwei gleichen Faktoren – 2 mal 2 – zusammengesetzt ist).

Eine weitere wichtige (sogar magische) Zahl ist die Zehn.

Tetraktys (Zehnzahl)

Tetraktys bedeutet eigentlich so viel wie „Vierzahl“, denn es geht um die Summe der ersten vier Zahlen, die bekanntlich 10 ergibt. Ihre Sonderstellung verdankt sie nicht zuletzt diesem Aufbau als Summe. Die ersten vier Zahlen haben selbst auch besondere Bedeutungen:

Eins: der Punkt, aus dem alles entstand

Zwei: die Linie

Drei: die Ebene

Vier: ein fester Körper

Die Tetraktys kann auch über Punktmengen veranschaulicht werden, wodurch eine weitere Besonderheit hervortritt:

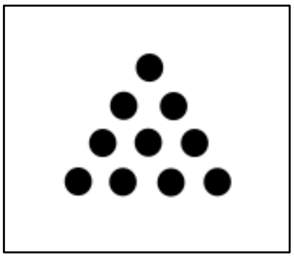


Abbildung 1 Tetraktys

Ordnet man wie in Abbildung 1 die Darstellung von 1, 2, 3, 4 untereinander an, so ergibt sich ein gleichseitiges Dreieck. Die Tetraktys war so wichtig, dass Mitglieder der Schule sogar einen Eid auf sie leisten mussten.

Neben ihrem besonderen Aufbau wurden ihr noch allerlei wichtige Eigenschaften zugesprochen. Über sie wird berichtet:

„Man muss die Leistungen und das Wesen der Zahl nach der Kraft bemessen, die in der Zehnzahl liegt. Denn groß und vollkommen vollendet und alles bewirkend und

göttlichen und himmlischen sowie menschlichen Lebens Anfang sowie Anteil nehmende Führerin ist die Kraft der Zahl und der Zehn. Denn ohne diese [Kraft] ist alles unbegrenzt und undeutlich und unklar.“[25]

Zahlen wurden also keineswegs mathematisch nüchtern betrachtet. Sie wurden als Anfang allen Lebens angesehen, verehrt, sogar angebetet.

Satz des Pythagoras

Der Satz des Pythagoras ist wohl die berühmteste Errungenschaft der Schule und zugleich höchstwahrscheinlich gar nicht ihr Verdienst. Schon die Ägypter erkannten, dass Dreiecke mit einem Seitenverhältnis von 3:4:5 stets einen rechten Winkel enthalten. Ob die allgemeine Formulierung des Satzes auf Pythagoras und seine Schüler_innen zurückzuführen ist, bleibt ungewiss. Sicher ist, dass sie zumindest den Spezialfall beweisen konnten.

Grundlagenkrise[26]

Der Glaube, alles ließe sich durch Zahlen und Zahlenverhältnisse beschreiben und dass der Kosmos durch Zahlen aufgebaut sei, erfuhr durch die Entdeckung der Inkommensurabilität eine starke Erschütterung. Angeblich wurde die Inkommensurabilität, also die Existenz von irrationalen Zahlen, ausgerechnet am Pentagramm, dem Ordenszeichen der Pythagoreer, entdeckt. Durch Wechselwegnahme (Euklidischer Algorithmus) erkannte laut Überlieferung Hippasos von Metapont, dass Seite und Diagonale im regelmäßigen Fünfeck keinen gemeinsamen Teiler besitzen.

Als Konsequenz wandten sich die Pythagoreer verstärkt der Geometrie zu und versuchten ihre Entdeckung zu verheimlichen.

[25] Mansfeld, 2008, R28=DK 44 B11
[26] vgl. Schubert, 2007, S. 136; Schupp, 2013, S. 75ff;

5.4.3 Punktmengen

Die Pythagoreer verwendeten Punktmengen, wie z.B. in Abbildung 1, um Zahlen zu veranschaulichen. In diesem Sinne sind die Punktmengen zwar Zahlen, aber Zahlen sind nicht nur Punktmengen. Diese Veranschaulichung funktionierte deshalb auch so gut, da sie sich ausschließlich auf die natürlichen Zahlen beschränkten.

Neben der Tetraktys lassen sich auch andere Zahlen als solche Figuren darstellen. So kann man etwa alle geraden Zahlen (außer der Primzahl 2) als Quadrat oder Rechteck anordnen.

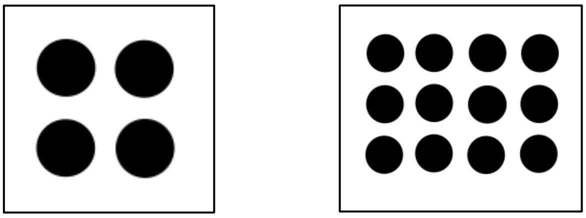


Abbildung 2 Die geraden Zahlen 4 und 12 als Quadrat bzw. Rechteck

Ordnet man die ungeraden Zahlen in ihrer Reihenfolge in einem rechten Winkel um die Eins an, so erhält man immer Quadrate.

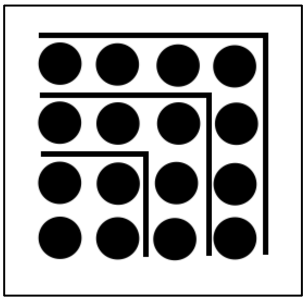


Abbildung 3 Anordnung der ungeraden Zahlen 3, 5, 7 um die Einheit

Am Beispiel des 4x4-Quadrats sieht man auch das Problem der Inkommensurabilität. Um die Diagonale zu berechnen, bildet man die Summe der Quadrate von 4 und 4 (Satz von Pythagoras); dies ergibt 32. Nun lässt sich aber kein Quadrat aus 32 diskreten Einheiten aufbauen, denn $\sqrt{32}$ ist irrational. Diese Erkenntnis gefährdete, wie schon erwähnt, die gesamte Lehre der Pythagoreer.

5.5 UMSETZUNG IM UNTERRICHT

Die Verbindung von Mathematik und Philosophie über die Persönlichkeiten kann im Mathematikunterricht sehr unterschiedlich eingebracht werden.

Die Minimalvariante stellt der Einbau von einigen Daten und Informationen in den **Lehrer_innenvortrag** dar. Das heißt, dass die Lehrperson zum Beispiel während der Einführung zum Satz des Pythagoras auch etwas zur Schule und Lehre erzählt. Diese Variante kann zwar sehr spannend für Schüler_innen sein, jedoch werden sie wohl von den meisten als unwichtige Zusatzinformationen bewertet werden und somit schnell wieder vergessen. Für das Ziel, den Schülern_innen die enge Verwandtschaft von Mathematik und Philosophie näher zu bringen, wird diese Variante also eher weniger leisten.

Eine weitere Möglichkeit stellen **Referate** dar. Die Persönlichkeiten eignen sich sehr gut diese Methode, da die Recherche nicht zu aufwändig ist. Zudem lassen sich die Kurzreferate gut in den Unterricht einbinden, da zahlreiche Namen von Philosophen sowieso im Unterricht auftauchen (vgl. Thales, Pythagoras, Descartes). Durch Referate können die Recherche- und Präsentationskompetenz der Schüler_innen gestärkt werden. Durch die Erarbeitung der Referate erhalten die Lernenden mehr Bezug zu den Personen, zugleich wird das Wissen vernetzt, somit kann der neue Lernstoff besser abgespeichert werden.

Für eine **Diskussion** im Unterricht bieten sich zumindest zwei Möglichkeiten an. Einerseits können die Persönlichkeiten als Anlass genommen werden über die Verwandtschaft von Philosophie und Mathematik zu diskutieren. Hierfür könnten die Schüler_innen als Hausübung recherchieren. Im Unterricht werden ihre Ergebnisse dann zusammengetragen, um anschließend etwa die Frage zu beleuchten, inwieweit die Verbindung wichtig oder gewinnbringend für die beiden Fachgebiete ist oder inwieweit diese Verbindung in der heutigen Zeit noch Relevanz hat. Solch eine Diskussion eignet sich jedoch vor allem für die (11. oder) 12. Schulstufe, da sie ein gewisses Verständnis für beide Fächer voraussetzt.

Die andere Möglichkeit zur Diskussion (oder Beleuchtung) ist die Frage der Urheberschaft. Diese stellt sich etwa bei Pythagoras (Satz des Pythagoras), aber auch bei anderen mathematischen Leistungen (vgl. Cardano). Eine Fragestellung könnte etwa lauten: Sollte der Satz von Pythagoras in Satz der Pythagoreer umbenannt werden?

Aufwändigere Möglichkeiten der Umsetzung bilden die Einbindung in einen Stationenbetrieb oder in die Experten_innenmethode.

So kann ein **Stationenbetrieb** zum Satz des Pythagoras auch Stationen zu den Punktmengen und zur Schule der Pythagoreer enthalten. Ein Stationenbetrieb mit philosophischer Einbindung ist aber auch zum Funktionenbegriff möglich (Leibniz). Zwei Beispiele für mögliche Stationen zum Thema Satz des Pythagoras finden sich im Anhang.

Die **Experten_innenmethode** eignet sich natürlich ebenfalls um Themen wie den Satz des Pythagoras oder den Funktionenbegriff aufzubereiten. Die Einbindung der Persönlichkeiten kann hier durch eine eigene Gruppe stattfinden. Im Rahmen der Erarbeitung des Funktionenbegriffs kann sich etwa eine Gruppe mit Leibniz und seinem Beitrag zu diesem beschäftigen.

Eine weitere Möglichkeit die Experten_innenmethode einzusetzen ist, sie explizit auf das Thema Persönlichkeiten aus Mathematik und Philosophie oder die Verbindung der beiden Gegenstände anzuwenden. Hierfür können sich verschiedene Gruppen mit unterschiedlichen Philosophen, ihren Lehren und ihrer Bedeutung in den beiden Fächern auseinandersetzen.

Die letzteren Möglichkeiten zeigen den Schülern_innen das Naheverhältnis von Mathematik und Philosophie sicher deutlicher auf. Allerdings sind sie im Gegenzug auch aufwändiger und zeitintensiver, sowohl in der Vorbereitung als auch in der Umsetzung im Unterricht.

6 ZWEITER ASPEKT: WAS SIND ZAHLEN?[27]

Wir lernen zu zählen, zu rechnen, Zahlen in Formeln und Gleichungen einzusetzen – doch was sind Zahlen überhaupt? Diese Frage taucht möglicherweise in unserem Lernprozess auf, die Mathematik (vor allem der Unterricht) spart sie aber gerne aus. Verständlich, gibt es doch eigentlich keine eindeutige Antwort darauf. Zahlen wurden und werden oft als ahistorischer, universaler Grundbegriff aufgefasst. Das heißt nur die Auswahl, sprachliche Ausprägung und das Niveau werden als psychologisch, soziologisch und historisch beeinflussbar angesehen. Dies sind jedoch für die Mathematik eher uninteressante Gebiete.

Im Laufe der Geschichte haben sich zahlreiche Philosophen_innen und Mathematiker_innen mit dieser Frage auseinandergesetzt. Viele mögliche Antworten wurden gegeben, keine war wirklich befriedigend. Gewinnbringend war die Beschäftigung mit dieser Frage jedoch immer. Durch die Suche nach einer Antwort wurden wichtige Fortschritte in der Mathematik erreicht und völlig neue Themenkomplexe eröffnet.

Betrachtet wurden vor allem die natürlichen Zahlen. Denn schon eine Definition der Eins gestaltet sich als so schwierig, dass die Beschränkung auf diese Sinn ergibt.

In diesem Kapitel werden zunächst einige Erklärungsversuche verschiedener Autoren besprochen. Das Hauptaugenmerk wird auf Gottlob Frege gelegt, der dieser Frage so systematisch und ausführlich wie kaum ein anderer nachgegangen ist und dessen Werk ein wichtiges Problem aufwarf.

[27] vgl. Bedürftig, Murawski, 2012;

6.1 Verschiedene Ansichten

6.1.1 Pythagoreer[28]

„Offenbar betrachten sie die Zahlen als Prinzip, und zwar zum einen als Stoff für die seienden Dinge, zum anderen als Bestimmtheiten und Zustände. Als Elemente der Zahl betrachten sie das Gerade und das Ungerade, während die Eins aus beiden sei (sie sei ja sowohl gerade als auch ungerade). Aus der Eins entstehe die Zahl, und die ganze Welt bestehe, so behaupten sie, aus Zahlen."[29]

Wie bereits im vorausgehenden Kapitel ausgeführt, betrachteten die Pythagoreer Zahlen als etwas Göttliches. Sie waren der Ansicht, dass der gesamte Kosmos durch Zahlen aufgebaut ist und sprachen dabei der Eins einerseits und der Zehn andererseits eine besondere Stellung zu.

6.1.2 Euklid[30]

Euklid definiert die Zahl in seinem Werk „Die Elemente" kurz und bündig:

„Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge"[31] *„Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird"*[32]

Es ist ersichtlich, dass sich bereits eine beträchtliche Entwicklung seit den Pythagoreern vollzogen hat. Die Zahl hat ihre Mystik verloren.

6.1.3 Gottfried Wilhelm Leibniz[33]

In seinem Werk „Neue Abhandlung über den menschlichen Verstand", das in einem Dialog zwischen Theophilus (der die Position von Leibniz vertritt) und Philalethes (der die Position von John Locke vertritt) verfasst ist, beschäftigt sich Leibniz auch mit der Frage, was Zahlen sind.

---

[28] vgl. Mansfeld, 2008, S. 98ff
[29] Mansfeld, 2008, R31=DK 58 B4, B5
[30] vgl. Euklid, 1991, VII. Buch
[31] Euklid, 1991, S. 141 = VII 2.
[32] Euklid, 1991, S. 141 = VII 1.
[33] Vgl. Leibniz, 1904, S. 130-132 = 2. XVI §4-6; Baumann, 1869;

„Theophilus. [...] Auch gilt jene Definition, daß die Zahl eine Menge Einheiten ist, nur für die ganzen. [...]

§ 5. Philalethes. Wenn man die Vorstellung der Einheit wiederholt und zu einer Einheit eine andere fügt, so machen wir daraus eine Kollektivvorstellung, welche wir zwei nennen. Und wer dies tun und immer eins weiter bis zur letzten Kollektivvorstellung gehen kann, welcher er einen besonderen Namen gibt, kann zählen, solange es eine Folge von Namen gibt, und er Gedächtnis genug hat um dieselbe zu behalten.

Theophilus. Auf diese Art allein wird man nicht weit kommen. Denn das Gedächtnis würde zu sehr beschwert werden, wenn man für jede Zuzählung einer neuen Einheit einen ganz neuen Namen behalten müßte. Daher ist eine gewisse Ordnung und eine bestimmte Wiederholung in diesen Namen nötig, indem man einer bestimmten Progression gemäß wieder von neuem anfängt.“[34]

Leibniz führt weiter aus, dass „die Zahl etwas ganz Allgemeines (universalissimum) und zur Metaphysik gehörig“[35] ist. Zudem sei sie eine angeborene Idee. Wie das erste Zitat bereits zeigt, baut auch er die natürlichen Zahlen durch die Einheit auf, wobei er anmerkt, dass es für die Namensgebung eine Ordnung braucht, um das Gedächtnis nicht zu überlasten. Diesen sukzessiven Aufbau der Zahlen sieht er dabei als Definition an:

„Drei ist soviel wie 2 und 1, - das ist nur die Definition des Terminus 3; denn die einfachsten Definitionen der Zahlen werden auf diese Weise gebildet: 2 ist 1 und 1, 4 ist 3 und 1, usf. Allerdings ist dabei eine verschwiegene Behauptung, nämlich, dass diese Vorstellungen möglich sind; und dies wird hier intuitiv erkannt, so dass man sagen kann, eine intuitive Erkenntniss ist in den Definitionen begriffen, sobald sich ihre Möglichkeit sofort zeigt. 1 und 1 macht 2, dies ist nicht eigentlich ein Urtheil, sondern die Definition von 2, obgleich dies von Wahrem und Einleuchtendem daran ist, dass es die Definition einer möglichen Sache ist;

[...]

[34] Leibniz, 1904, 2. XVI. §4-5
[35] Baumann, 1869, S. 2f

Es ist keine unmittelbare Wahrheit, dass 2 und 2 = 4 sind; vorausgesetzt, dass 4 bezeichnet 3 und 1. Man kann sie beweisen und zwar so:

Definitionen

1) *2 ist 1 und 1.*
2) *3 ist 2 und 1.*
3) *4 ist 3 und 1.*

Axiom: gleiche Dinge an die Stelle gesetzt, bleibt Gleiches.

Beweis:

2 u. 2 ist 2 u. 1 u. 1 (nach Def. 1);

2 u. 1 u. 1 ist 3 u. 1 (nach Def. 2);

3 u. 1 ist 4 (nach 3).

Also (nach dem Axiom) ist 2 und 2 = 4.“[36]

Leibniz definiert also die Zahlen, in dem er immer eine Eins hinzufügt. Eine Zahl wird also über ihren Vorgänger definiert.

6.1.4 Isaac Newton[37]

Isaac Newton führt die Zahlen in seiner Definition zwar auch auf die Einheit zurück, charakterisiert sie jedoch als Verhältnis von Größen, in der eine Größe als Einheit gesetzt wird:

„Unter Zahl verstehen wir nicht so sehr eine Menge von Einheiten, als das abstracte Verhältniss einer jeden Grösse (quantitas) zu einer anderen Quantität derselben Art, welche als Einheit genommen wird (pro unitate habetur). Sie ist dreifach: ganze Zahl, gebrochene, taube (surdus); ganz ist die, welche (quem) die Einheit misst; gebrochen die, welche ein vielfacher Theil der Einheit misst; taub die, welche der Einheit incommensurabel ist.“[38]

[36] Baumann, 1869, S. 38ff
[37] vgl. Baumann, 1868
[38] Baumann, 1868, S. 475f

6.1.5 George Berkeley[39]

Der Empirist George Berkeley sah die Beschäftigung mit Mathematik kritisch. Seiner Ansicht nach gibt es keine abstrakten Ideen. Wir können zwar einzelne Farben erkennen, doch uns keine Vorstellung von der abstrakten Idee der Farbe im Allgemeinen machen. Daher bewertet er große Teile der Mathematik als unsinnig und die Beschäftigung mit ihr als unnütz.

Dennoch setzt auch er sich mit der Frage, was Zahlen sind, in seinem Hauptwerk „Abhandlungen über die Prinzipien der menschlichen Erkenntnis“ auseinander:

„Dass die Zahl durchaus ein Product des Geistes sei, auch wenn zugegeben würde, dass die anderen Qualitäten ausserhalb des Geistes existiren, wird einem Jeden einleuchten, der bedenkt, dass das nämliche Ding eine verschiedene Zahlbezeichnung erhält, wenn der Geist es in verschiedenen Beziehungen betrachtet. [...] Die Zahl ist so augenscheinlich relativ und von dem menschlichen Verstande abhängig, dass es kaum zu denken ist, dass irgend Jemand ihr eine absolute Existenz ausserhalb des Geistes zuschreiben könne. Wir sagen Ein Buch, Eine Seite, Eine Linie; diese alle sind gleich sehr Einheiten, obschon einige derselben mehrere der anderen enthalten. Und in jedem Betracht ist es klar, dass die Einheit sich auf eine besondere Combination von Ideen bezieht, welche der Geist willkürlich zusammenstellt.“[40]

Die Zahl ist also nur eine Sammlung von Einheiten, die wiederrum relativ ist. Je nachdem, was man betrachtet, was man zählt, erhält man ein Buch mit vielen Seiten oder auch eine Seite mit vielen Zeilen. Das heißt, es gibt Berkeleys Ansicht nach weder die Zahl noch die Einheit. Diese haben nicht nur keine physische Entsprechung oder überhaupt eine externe Existenz, sie können auch nicht allgemein definiert werden.

In seinem Buch „Versuch über eine neue Theorie des Sehens“ fasst Berkeley seine Ansicht folgendermaßen zusammen:

„Doch für eine genaue Erklärung dieser Sache muß man in Betracht ziehen, daß die Zahl – auch wenn sie von manchen zu den primären Qualitäten gerechnet werden

[39] vgl. Berkeley, 1869; Berkeley, 1987; Vorländer, 1903, §19
[40] Berkeley, 1869, XII

mag – nichts Bestimmtes und Feststehendes ist, das wirklich in den Dingen selbst existiert. Sie ist ganz und gar eine Schöpfung des Geistes, der entweder eine einzelne Vorstellung oder irgendeine Kombination von Vorstellungen betrachtet, ihr einen einzigen Namen gibt und sie so als eine Einheit gelten läßt. [...] Was auch immer der Geist als ‚eines' betrachtet, das ist also eine Einheit. Jede Vorstellungskombination wird vom Geist als ein einziges Ding betrachtet und als Zeichen dafür mit einem einzigen Namen markiert. Nun ist dieses Benennen und Kombinieren von Vorstellungen vollkommen willkürlich und wird vom Geist so ausgeführt, wie es die Erfahrung als äußerst passend zeigt. Ohne sie wären unsere Vorstellungen niemals in so verschiedene voneinander getrennte Kombinationen zusammengefaßt worden, wie sie es jetzt sind."[41]

6.1.6 John Stuart Mill[42]

Der Empirist John Stuart Mill sieht den Ursprung von Zahlen in der Realität. Zahlen sind für ihn physikalische Eigenschaften von Anhäufungen von Dingen:

„Was wird also durch den Namen einer Zahl mitbezeichnet? Natürlich eine Eigenschaft, die der Agglomeration, der Anhäufung von Dingen angehört, welche wir mit dem Namen benennen; und diese Eigenschaft ist die charakteristische Weise, in welcher die Anhäufung zusammengesetzt ist oder in Theile getrennt werden kann. Wir wollen suchen, dies durch einige Erklärungen deutlicher zu machen.

Wenn wir eine Sammlung von Gegenständen zwei, drei oder vier nennen, so sind es keine zwei, drei oder vier im Abstracten, es sind zwei, drei oder vier Dinge von einer besondern Art, es sind Steine, Pferde, Zolle, Pfunde Gewicht. Der Name einer Zahl mitbezeichnet die Art und Weise, in welcher einzelne Gegenstände einer besondern Art zusammengebracht werden müssen, um das besondere Aggregat hervorzubringen."[43]

[41] Berkeley, 1987, S. 63f
[42] vgl. Mill, 1868, §5
[43] Mill, 1868, §5

Mill betrachtet also immer die Anzahl von bestimmten Dingen, etwa Kieselsteinen. Für kleine Zahlen ist dies schnell nachvollziehbar, fünf Kieselsteine kann man sich gut vorstellen. Für größere Zahlen muss man die Erzeugungsweise betrachten. Das heißt, wenn man 100 Steine hat, unterteilt man diese in 10 Haufen mit jeweils 10 Steinen. So gelangt man nach Ansicht von Mill zu großen Zahlen.

6.2 Gottlob Frege[44]

Der Mathematiker und Philosoph Gottlob Frege lebte von 1848-1925 in Deutschland. Sein Lebenswerk, die gesamte Mathematik auf die Logik (Logizismus) zurückzuführen und ihr somit ein sicheres Fundament zu geben, kann als gescheitert betrachtet werden, da sie sich im Rahmen der klassischen Mengenlehre vollzieht. Dennoch war sein Werk von großer Bedeutung für die analytische Philosophie und den linguistic turn.

In seinem Hauptwerk „Die Grundlagen der Arithmetik" stellt Frege zunächst drei Grundsätze für seine Untersuchung auf:

- Die Trennung von Psychologie und Logik
- Das Kontextprinzip
- Die Unterscheidung von Begriff und Gegenstand

Die Trennung von Psychologie und Logik scheint uns heute eine Selbstverständlichkeit. Im 19. Jhd. wurde ein Urteil oft als eine Verbindung von Vorstellungen betrachtet, was jedoch eigene Schwierigkeiten mit sich bringen kann. Frege möchte jedoch die Vorstellung von Zahlen nicht mit Zahlen gleichsetzen, ebenso wenig wie man die Vorstellung von Helium mit Helium gleichsetzen würde.

Das Kontextprinzip besagt, dass die Bedeutung von Wörtern im Satzzusammenhang untersucht wird. Das heißt, Freges Untersuchung des Zahlbegriffes setzt bei der Analyse arithmetischer Sätze an. Diese Priorität der Untersuchung der Verwendung ist später zentral für den linguistic turn.

[44] vgl. Rehfus, 2012b, S. 96ff; Frege, 2011; von Kutschera, 1989;

Laut Frege sind Begriffe prädikativ, während Gegenstände das nicht sind. Er erläutert dies an einem Beispiel:

„Im Satze ‚der Morgenstern ist die Venus' haben wir zwei Eigennamen ‚Morgenstern' und ‚Venus' für denselben Gegenstand. In dem Satze ‚der Morgenstern ist ein Planet' haben wir einen Eigennamen: ‚der Morgenstern' und ein Begriffswort: ‚ein Planet'. Sprachlich zwar ist nichts geschehen, als daß ‚die Venus' ersetzt ist durch ‚ein Planet'; aber sachlich ist die Beziehung eine ganz andere geworden."[45]

Das heißt, Gegenstände bezeichnen wir meist mit Eigennamen, während wir Begriffen einen unbestimmten Artikel voranstellen. Zudem hat das „ist" in den beiden Sätzen eine unterschiedliche Funktion. Im ersten Fall wird es wie ein Gleichheitszeichen verwendet, während es im zweiten Fall den Morgenstern unter den Begriff des Planeten ordnet.

Nach der Festlegung dieser Grundsätze widmet Frege sich seiner Untersuchung. Er analysiert hierfür Sätze, in denen Zahlen, genauer genommen Anzahlen, vorkommen. Vor allem Identitätsaussagen („die Anzahl F ist gleich der Anzahl G") erweisen sich hier als zentral.

In der Auseinandersetzung mit zahlreichen Philosophen stellt Frege zuerst fest, was Zahlen alles nicht sind. Sie sind weder von Dingen abstrahiert noch etwas Physikalisches. Ebenso sind sie nichts Subjektives, also keine Vorstellung. Die Ausdrücke „Vielheit", „Menge" und „Mehrheit" sind für die Erklärung zu unbestimmt, die Eigenschaften „Abgegrenztheit", „Ungeteiltheit" und „Unzerlegbarkeit" eignen sich zur Bestimmung von „Eins" (Einheit) ebenso wenig. Da es so scheint, als benötige man für die Einheit sowohl die Eigenschaft der Gleichheit als auch der Unterscheidbarkeit (einerseits muss in gewisser Hinsicht Gleichheit der Einheiten bestehen, andererseits muss man sie eindeutig unterscheiden können), schlägt Frege vor, die „Eins" klar von der „Einheit" zu unterscheiden. Die „Eins" ist als Eigenname eines Plurals unfähig, Zahlen sind also nicht als Zusammenfassung von Einsen zu betrachten.

[45] Frege, 2008, S. 49

Zudem ist ihm die Selbstständigkeit der Zahlen wichtig:

„Die Selbständigkeit, die ich für die Zahl in Anspruch nehme, soll nicht bedeuten, daß ein Zahlwort außer dem Zusammenhang eines Satzes etwas bezeichne, sondern ich will damit nur dessen Gebrauch als Prädikat oder Attribut ausschließen, wodurch seine Bedeutung etwas verändert wird."[46]

Sprachlich gebrauchen wir Zahlen zwar oft attributiv, aber etwa der Satz „die Anzahl der Jupitermonde ist vier" entspricht einer Gleichung, in der wir die Zahl Vier mit der Anzahl der Jupitermonde gleichsetzen.

So gelangt Frege schließlich zu seiner Definition:

„Die Anzahl, welche dem Begriff F zukommt, ist der Umfang des Begriffes ‚gleichzahlig dem Begriffe F'."[47]

Anders ausgedrückt könnte man sagen, dass die Anzahl eine Menge von gleichmächtigen Mengen ist: man fasst einfach alle Paare oder alle Tripel usw. zusammen. Anzahlen sind demnach Gegenstände. Gleichzahlig bedeutet dabei, dass man die unter die Begriffe fallenden Gegenstände einander eindeutig zuordnen kann, dass es also eine bijektive Zuordnung gibt. Frege definiert die Gleichzahligkeit als Äquivalenzrelation.

Null, Eins, Nachfolger

Im Anschluss gibt Frege noch die Definitionen für die Null, die Eins und den Nachfolger einer beliebigen Zahl an. Somit charakterisiert er die gesamten natürlichen Zahlen.

Für die Null benötigt Frege einen Begriff, unter den kein Gegenstand fällt. Seine Definition lautet wie folgt:

„0 ist die Anzahl, welche dem Begriffe ‚sich selbst ungleich' zukommt."[48]

[46] Frege, 2011, S. 93 = §60
[47] Frege, 2011, S. 100 = §68
[48] Frege, 2011, S. 107 = §74

Der Autor betont jedoch, dass man jeden beliebigen Begriff wählen könne, unter den kein Gegenstand fällt. Zudem sei der inhärente Widerspruch des Begriffes „sich selbst ungleich" kein Problem, solange man nicht voraussetzt, dass etwas unter diesen Begriff fällt.

Seine Definition des Nachfolgers lautet:

„Es gibt einen Begriff F und einen unter ihn fallenden Gegenstand x der Art, daß die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, n ist, und daß die Anzahl, welche dem Begriff ‚unter F fallend, aber nicht gleich x' zukommt m ist."[49]

Somit ist folgt n unmittelbar auf m. Daraus ergibt sich für die Eins:

„1 ist die Anzahl, welche dem Begriffe ‚gleich 0' zukommt"[50]

6.2.1 Russellsches Paradoxon

Bertrand Russell beschäftigte sich intensiv mit Freges Werk. Dabei stieß er jedoch auf ein Problem, das heute unter dem Namen Russellsches Paradoxon bekannt ist:

„Und ich frage mich nun, ob diese Klasse (also die Klasse sämtlicher Klassen, die sich nicht selbst als Element enthalten) sich selbst als Element enthält oder nicht. Wenn man annimmt, daß sie sich selbst als Element enthält, muß sie natürlich der Definition der Klasse entsprechen, nach der sie sich nicht selbst als Element enthalten darf. Und wenn man annimmt, daß sie sich nicht selbst als Element enthält, entspricht das genau der gegebenen Definition, d.h. sie gehört zu den Klassen, die sich nicht selbst als Element enthalten, und muß sich folglich selbst als Element enthalten. Aus beiden Annahmen folgt also zwingend das genaue Gegenteil der Annahme; und wie wir uns auch drehen und wenden, wir kommen aus diesem Widerspruch nicht heraus."[51]

Russell und Frege standen im Briefwechsel und so berichtete Russell ihm auch von seiner Entdeckung. Frege antwortete darauf:

[49] Frege, 2011, S. 110 = §76
[50] Frege, 2011, S. 111 = §77
[51] Russell, 1973, S. 77

„Ihre Entdeckung des Widerspruchs hat mich auf's Höchste überrascht und, fast möchte ich sagen, bestürzt, weil dadurch der Grund, auf dem ich die Arithmetik sich aufzubauen dachte, in's Wanken geräth."[52]

Die Antinomie, die zuvor auch schon von Georg Cantor entdeckt worden war, zeigte, dass die Grundprinzipien der klassischen Mengenlehre nicht länger haltbar waren. Frege stand vor dem Problem, dass er die Verschiedenheit der Anzahlen nun nicht mehr beweisen konnte. Russell schlug vor, die Typentheorie auszuweiten. Frege merkte an, dass man so eine Mannigfaltigkeit von Gegenständen und Funktionen erhalte würde, die das Aufstellen eines vollständigen Systems von logischen Gesetzen sehr erschweren würde. So wären die Zahlen etwa uneigentliche Gegenstände. Russells Vorschlag überzeugte Frege also nicht. Er sah sich vielmehr von der Sprache irregeführt. Wie sollte eine klare Definition gefunden werden, wenn Zahlwörter scheinbar Gegenstände bezeichnen, während das Wort „Zahl" an sich vermeintlich ein Begriff ist. In einem seiner letzten Entwürfe bezeichnet Frege die Arbeit der Philosophen als einen Kampf mit der Sprache.

Nach seinen gescheiterten Versuchen, die Probleme in seiner logischen Begründung der Arithmetik zu lösen, wandte sich auch Frege gegen Ende seines Lebens verstärkt der Geometrie zu und kam zu der Ansicht, die ganze Mathematik sei eigentlich Geometrie.

[52] Bibliotheca Augustana, 2010

6.3 UMSETZUNG IM UNTERRICHT

Für die neue standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik wurde ein Kompetenzkatalog erarbeitet. Als Grundkompetenz aus der Algebra wird angegeben: *„AG 1.1: Wissen über die Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ verständig einsetzen können“*[53].

Legt man diese Grundkompetenz weiter aus als wahrscheinlich beabsichtigt, lässt sich die Frage, was Zahlen überhaupt sind, kaum vermeiden. Zudem ist diese Frage auch für Schüler_innen naheliegend und benötigt nicht unbedingt spezielle Vorkenntnisse. So eignet sich diese Fragestellung hervorragend zum Philosophieren im Mathematikunterricht. Darum sollte auch das Hauptaugenmerk darauf gelegt werden, dass die Schüler_innen selbst darüber nachdenken und ihre eigenen Vorstellungen reflektieren.

Grundsätzlich kann die Thematik in jeder Jahrgangsstufe aufgegriffen werden. Die Auseinandersetzung mit den Ansichten der Mathematiker_innen und Philosophen_innen (oder zumindest einigen davon) stellt für die Unterstufe jedoch wahrscheinlich eine zu große Herausforderung dar.

Für die Umsetzung bieten sich zahlreiche Möglichkeiten an. Dabei sollte allerdings wenn möglich an geeigneter Stelle immer eine Diskussion angestrebt werden. So wird nicht nur die Kommunikationsfähigkeit der Schüler_innen geschult, sie werden auch mit verschiedenen Vorstellungen und Ansichten konfrontiert. Dabei eröffnet sich zudem oft ein neues Verständnis im Gespräch.

Die erste Umsetzungsmöglichkeit stellt eine freie (im Sinne von Text- bzw. Philosophen_innen-unabhängige) **Diskussion** dar. Diese kann durch **Fragestellungen** wie „Gibt es Zahlen nur in unserem Kopf?“ oder „Sind Zahlen willkürlich?“ angeregt werden. Es kann aber auch ein **Brainstorming** bzw. eine **Mind-Map** zu der Fragestellung erstellt werden.

Sollen die Ansichten von Mathematikern_innen und Philosophen_innen eingebracht werden, gibt es auch hier verschiedene Wege.

---

[53] Bifie, 2013, S. 7

Die Schüler_innen können etwa als Hausübung (im Internet) **recherchieren**. Die Ergebnisse können dann zusammengefasst und im Plenum oder in Gruppen diskutiert werden. Zu beachten ist, dass eine reine Google-Suche nicht sehr ergiebig ist bzw. nicht die gewünschten Ergebnisse liefert. Daher sollte die Lehrperson den Schülern_innen eventuell eine Liste mit möglichen Quellen oder auch Suchbegriffen für die Recherche zur Verfügung stellen.

Die Recherche kann aber auch für **Kurzreferate** genutzt werden. So können verschiedene Ansichten ausgewählt werden, die von den Schülern_innen in Referaten ausgearbeitet werden sollen. Im Anschluss an das Referat kann im Plenum die vorliegende Idee diskutiert werden. Hierbei sollte bei der Auswahl der Philosophen_innen, über die referiert werden soll, darauf Acht gegeben werden, dass einerseits deren Auseinandersetzung mit der Thematik ausführlich genug war und andererseits für die Schüler_innen verständlich ist.

Die Fragestellung kann aber auch für Gruppenarbeiten aufgearbeitet werden.

Die **Experten_innenmethode** eignet sich auch hier. Für die unterschiedlichen Gruppen können unterschiedliche Definitionen der Zahl herangezogen werden.

Ein **Museumsrundgang** kann auf zwei Weisen verwendet werden. Zum einen können Gruppen unterschiedliche Ansichten bzw. Definitionen auf Plakaten ausarbeiten. Diese Plakate können dann durch einen Museumsrundgang zusammengeführt werden. Zum anderen kann die Lehrperson auch (möglichst kurze) Zitate vorbereiten. Die Schüler_innen lesen sich alle Zitate durch und wählen eines aus, bei dem sie stehen bleiben. Dort können sie dann zuerst in einer Kleingruppe über das spezielle Zitat diskutieren. Diese können anschließend in eine Plenumsdiskussion übergeführt werden.

7 DRITTER ASPEKT: UNENDLICHKEIT[54]

„If any philosopher had been asked for a definition of infinity, he might have produced some unintelligible rigmarole, but he would certainly not have been able to give a definition that had any meaning at all."[55] – Bertrand Russell

7.1 FACETTEN DER UNENDLICHKEIT

Die Geschichte der Beschäftigung mit der Unendlichkeit geht mindestens bis ins antiken Griechenland zurück. Die Notation und Verwendung des Begriffes der Unendlichkeit haben sich seitdem stark verändert.

Zudem hat die Auseinandersetzung mit ihr zahlreiche Facetten. Man findet die Unendlichkeit in den Zahlen, aber auch in Raum und Zeit. In der Mengenlehre, der Geometrie, aber auch bei Folgen, der Differential- und der Integralrechnung stößt man auf sie.

Einerseits begegnet man der Unendlichkeit also vielerorts, andererseits ist eine einfache Definition kaum möglich, da an der Unendlichkeit mehr hängt, als man auf den ersten Blick vielleicht erahnt. Diesem gewaltigen Umfang kann man wohl nicht gerecht werden, weder in der Schule noch in dieser Arbeit.

Aus dem Duden[56]

Das Wort „unendlich" findet sich bereits im Mittel- und Althochdeutschen. „Unendelich" aus dem Mittelhochdeutschen bedeutete „endlos, unvollendet, unnütz, schlecht"; das althochdeutsche „unentilīh" entspricht „unbegrenzt". Heute findet man im Wörterbuch meist folgende Bedeutung: „ein sehr großes, unabsehbares, unbegrenzt scheinendes Ausmaß besitzend; endlos".

[54] vgl. Bedürftig, Murawski, 2012, S. 146ff; Zellini, 2010;
[55] Russell, 1959, S. 85
[56] vgl. Duden, 2015

Während sich die Bedeutung des Grenzen- bzw. Endlosen über die Zeit erhalten hat, findet man die negative Konnotation aus dem Mittelhochdeutschen heute kaum mehr.

7.2 AKTUAL VS. POTENZIELL UNENDLICH

Im Ringen um den Begriff der Unendlichkeit soll zunächst die Unterscheidung der aktualen und der potenziellen Unendlichkeit getroffen werden.

Das Wörterbuch der Logik definiert die aktuale Unendlichkeit folgendermaßen:

"Begriff der abgeschlossenen Unendlichkeit, d. h. einer Unendlichkeit, deren sämtliche Elemente gegeben sind, von der Nichtabgeschlossenheit des Bildungsprozesses einer unendlichen Menge wird dabei abstrahiert. [...] Bei der a.n U. wird mit unendlichen Gesamtheiten, z. B. Mengen, wie mit endlichen Gesamtheiten operiert, deren Elemente alle gleichsam irgendwie fixiert werden können, z. B. mit Hilfe einer abgeschlossenen Liste ihrer Elemente. Es werden dabei alle Gesetze der formalen Logik, einschließlich dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten verwendet, dessen Anwendung auf unendliche Gesamtheiten von den Anhängern der konstruktiven Logik und Mathematik abgelehnt wird."[57]

Eigenschaften wie Abgeschlossenheit und vollkommene Bestimmbarkeit scheinen zunächst nicht vereinbar mit dem Begriff der Unendlichkeit. Daher verwundert es nicht, dass die Existenz einer aktualen Unendlichkeit von vielen Mathematikern_innen und Philosophen_innen geleugnet wurde und wird.

Die potenzielle Unendlichkeit wird wie folgt definiert:

"[E]ine unendliche Menge von Möglichkeiten, von denen jede einzelne wie auch jede endliche Anzahl von ihnen realisierbar ist, die aber alle zusammen nicht realisierbar sind. Die p. U. ist eine werdende, sich entfaltende aber nicht abgeschlossene Unendlichkeit, da sie kein letztes, abschließendes Element hat. Als Beispiel für eine Realisie-

[57] Kondakow, 1978, S. 493f

rung des Begriffs p. U. kann man die unendliche Reihe der natürlichen Zahlen 0, l, 2,..., n,... anführen, die durch aufeinanderfolgendes Hinzufügen der Eins zu der im vorausgehenden Schritt erhaltenen Zahl gewonnen wird. Die Null ist dabei die Ausgangszahl. Bei der Bildung der p. U. wird der reale Prozeß stark idealisiert. Die Ergebnisse der von dieser Abstraktion ausgehenden Theorien werden bei der Lösung praktischer Aufgaben erfolgreich angewendet."[58]

Während das aktuale Unendliche also eine abgeschlossene Menge/ein Gegenstand ist, mit dem man konkret arbeiten kann, ist die potenzielle Unendlichkeit ein Prozess. Während man bei der aktualen Unendlichkeit alle Elemente als gegeben voraussetzt, gesteht man bei der potenziellen Unendlichkeit ein, dass man eben nicht bis ins Unendliche zählen kann.

Diese Definitionen sollten eher als Richtung verstanden werden. Im Laufe der Geschichte hat sich das Verständnis von aktualer und potenzieller Unendlichkeit gewandelt und verschiedene Philosophen_innen legen die Unterscheidung verschieden aus. So existiert seit dem Mittelalter etwa auch die Unterscheidung zwischen kategorematischer und synkategorematischer Unendlichkeit. Viele setzen die beiden Unterscheidungen gleich. Jedoch finden sich auch Definitionen, die eine Verschiebung erkennen lassen. So fehlt dem synkategorematischen Unendlichen oft die eigentliche Potenzialität, d.h. die Möglichkeit der Realisierung (im Gegensatz zur Unmöglichkeit). Der offene Charakter des synkategorematisch Unendlichen ergibt sich daraus, dass es zu jeder endlichen Menge stets eine größere gibt. Das kategorematische Unendliche wird dann meist als etwas Größeres als jede mögliche existierende endliche Menge beschrieben.

[58] Kondakow, 1978, S. 494

7.3 VERSCHIEDENE SICHTWEISEN

7.3.1 Aristoteles

Aristoteles steht, wie die meisten seiner Zeit, dem Unendlichen kritisch gegenüber. Das griechische Wort Apeiron übersetzt sich wörtlich in „ohne Grenzen". Die Unendlichkeit bedeutete also den Verlust von Grenzen und Maß, was heute eher unserem Begriff vom Chaos entsprechen würde.

So schreibt Aristoteles über das Unbegrenzte:

„Es findet sich nun, daß das Gegentheil das Unbegrenzte ist von dem, was man sonst sagt. Nicht nämlich was nichts außer sich, sondern was stets etwas außer sich hat, dieses ist das Unbegrenzte."[59]

Da man immer noch ein Stück weiter gehen kann, hat das Unendliche immer noch etwas außer sich. Daher kommt er auch zu dem Schluss, dass durch diese Unerschöpflichkeit das Unendliche nie in seiner Gesamtheit betrachtet werden kann. Er schließt ein aktual Unendliches also entschieden aus.

Weiters charakterisiert Aristoteles das Unendliche:

„Denn alles ist entweder Anfang oder hat einen Anfang. Das Unbegrenzte aber hat keinen Anfang, denn sonst hätte es eine Grenze. Auch ist es unentstanden und unvergänglich, indem es Anfang ist. Denn was entstanden ist, muß ein Endziel nehmen, und ein Ende hat aller Untergang."[60]

Da es keinen Anfang hat (sonst hätte es ja eine Grenze) muss das Unendliche nach Aristoteles' Ansicht selbst Anfang sein. Daher ist es auch unentstanden, denn was entsteht, muss auch vergehen, damit hätte es jedoch wieder eine Grenze (das Ende).

7.3.2 René Descartes

Wie zahlreiche andere Philosophen_innen, verband auch Descartes das Unendliche mit Gott. Für ihn existiert das aktual Unendliche durch bzw. in Gott. In seiner Dritten Meditation schreibt Descartes:

[59] Aristoteles, 1829, Buch 3.6
[60] Aristoteles, 1829, Buch 3.4

„Auch darf ich nicht etwa glauben, ich erfaßte das Unendliche statt durch eine [material] wahre Vorstellung nur durch Negation des Endlichen, ähnlich wie ich die Ruhe und die Finsternis durch Negation der Bewegung und des Lichtes erfasse. Ich erkenne vielmehr ganz klar, daß die unendliche Substanz mehr Realität enthält als die endliche; daß mithin in gewissem Sinne die Vorstellung des Unendlichen der des Endlichen, d.h. die Vorstellung Gottes der des Ich vorausgeht. Wie könnte ich denn wissen, daß ich zweifle, daß ich begehre, d.h., daß mir etwas fehlt und daß ich unvollkommen bin, wenn in mir nicht die Vorstellung eines vollkommeneren Seienden wäre? Denn ich bemerke meine Mängel, indem ich mich mit ihm vergleiche."[61]

„Gott aber fasse ich in der Weise als ein aktual Unendliches auf, daß seiner Vollkommenheit nichts hinzugefügt werden kann."[62]

Das Unendliche, das er mit Gott verbindet, ist eine angeborene Idee, mit der wir uns vergleichen und unsere Unvollkommenheit erkennen. Außerhalb seiner Gottesvorstellung hat er das aktuale Unendliche allerdings nicht verteidigt. Zu diesem Zwecke trifft er die Unterscheidung zwischen Unbegrenzt und Unendlich. Seiner Ansicht nach kann die Unendlichkeit nur auf Gott angewandt werden; Zahlen, Räume, alles, was unter bestimmter Betrachtung kein Ende hat, nennt er unbegrenzt.

7.3.3 Georg Cantor[63]

Der Mathematiker Georg Cantor unterscheidet zwischen einem Uneigentlich-unendlichen und einem Eigentlich-unendlichen. Diese Unterscheidung entspricht in etwa der Unterscheidung von aktualer und potenzieller Unendlichkeit. In seinem Aufsatz „Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten" schreibt Cantor:

„In der ersteren Form, als Uneigentlich-Unendliches, stellt es sich als ein veränderliches Endliches dar; in der andern Form, wo ich es Eigentlich-unendliches nenne, tritt es als ein durchaus bestimmtes Unendliches auf."[64]

---

[61] Descartes, 2012, S. 121ff = 3.24
[62] Descartes, 2012, S. 125 = 3.27
[63] vgl. Cantor, 1932, S. 139ff
[64] Cantor, 1932, S. 166

Das Eigentlich-unendliche (bzw. aktual Unendliche) sieht Cantor vor allem in der Geometrie und Funktionentheorie.

Über das Uneigentlich-unendliche führt Cantor weiter aus:

„Das Uneigentlich-unendliche ist oft von neueren Philosophen ‚schlechtes' Unendliche genannt worden, meines Erachtens mit Unrecht, da es sich in der Mathematik und in den Naturwissenschaften als ein sehr gutes, höchst brauchbares Instrument bewährt hat. Die unendlichkleinen Größen sind meines Wissens bisher überhaupt nur in der Form des Uneigentlich-unendlichen zum Nutzen ausgebildet und sind als solches aller jener Verschiedenheiten, Modifikationen und Beziehungen fähig, welche in der Infinitesimalanalysis sowohl wie in der Funktionentheorie gebraucht werden und zum Ausdruck kommen, um dort die reiche Fülle der analytischen Wahrheiten zu begründen. Dagegen müßten alle Versuche, dieses Unendlichkleine gewaltsam zu einem eigentlichen Unendlichkleinen zu machen, als zwecklos endlich aufgegeben werden. Wenn anders überhaupt eigentlich-unendlichkleine Größen existieren, d.h. definierbar sind, so stehen sie sicherlich in keinem unmittelbaren Zusammenhange mit den gewöhnlichen, unendlich klein werdenden Größen."[65]

Cantor sieht also beide Unendlichkeiten durchaus positiv. Das Uneigentlich-unendliche kann man dabei mit dem potenziell Unendlichen gleichsetzen, also der Unendlichkeit, in der man immer weiter fortschreiten kann; das Eigentlich-Unendliche kann mit dem aktualen Unendlichen gleichgesetzt werden, also der bestimmten Unendlichkeit.

7.3.4 Bernard Bolzano[66]

Der Mathematiker und Philosoph Bernard Bolzano vertrat die Ansicht, das Unendliche sei bestimmbar:

„Wir sagen, daß eine Sache bestimmt oder bestimmbar sey, wenn ihr aus je zwei einander widersprechenden Beschaffenheiten (b und Nicht b) nur Eine zukommt. Nach dem bekannten Grundsatze der allseitigen Bestimmbarkeit aller Dinge muß nun jeder

[65] Cantor, 1932, S. 172

[66] vgl. Bolzano, 1837, §87; Bedürftig, Murawski, 2012, S. 65ff;

Gegenstand, von welcher Art er immer sey, in dieser Bedeutung des Wortes bestimmt seyn, [...]. Von dieser allgemeinen Regel macht nun auch selbst das unendliche Ding keine Ausnahme;“[67]

Anschließend an diese Feststellung arbeitet Bolzano diverse Vorstellungen über das Unendliche durch. Er erklärt, die Ansicht, die Unendlichkeit sei das, was nicht vermehrt werden könne, sei falsch. Ebenso sei eine unendliche Menge nicht größer als jede mögliche, denn so wäre sie unmöglich.

Die Auffassung eines Unbegrenzten weist er genauso zurück:

„Am Besten thaten also wohl Jene, die sich an das Wort selbst haltend, die unendliche Menge für eine solche erklärten, welche kein Ende hat. [...]

Dieß muß man aber freilich nicht so auslegen, als ob die Menge selbst keine Grenze haben dürfte, um unendlich zu heißen. Denn die unendliche Menge der Punkte z.B., welche in der begrenzten Geraden ab liegen, ist ja doch auch begrenzt; indem die Punkte, die außerhalb a und b liegen, nicht zu derselben gehören. Wir müssen sonach jenes ‚kein Ende haben' in einer eigenen Bedeutung nehmen; es etwa so verstehen, daß man bei einer versuchten Abzählung einer unendlichen Menge nie an ein Ende kommt;“[68]

Bolzano beschäftigte sich auch intensiv mit den Paradoxien der Unendlichkeit. Er schlug dabei allerdings einen neuen Weg ein, indem er die Paradoxien nicht als Problem, sondern also die bestimmende Eigenschaft ansah, die endliche von unendlichen Mengen unterscheidet.

7.3.5 Richard Dedekind[69]

Richard Dedekind betrachtete unendliche Mengen als selbstverständlich. In seinem Werk „Was sind und was sollen die Zahlen?“ definiert er die unendliche Menge mithilfe einer scheinbar paradoxen Eigenschaft:

---

[67] Bolzano, 1837, S. 411 = §87
[68] Bolzano, 1837, S. 413 = §87
[69] vgl. Bedürftig, Murawski, 2012, S. 74ff;

„Ein System S heißt unendlich, wenn es einem echten Teile seiner selbst ähnlich ist (32); im entgegengesetzten Falle heißt S ein endliches System.“[70]

Anders ausgedrückt ist eine Menge unendlich, wenn sie zu einer echten Teilmenge gleichmächtig ist. Diese Definition wird auch heute noch gebraucht.

7.4 Zenons Paradoxien[71]

Über das Leben von Zenon von Elea ist wenig bekannt. Er gilt als Schüler des Parmenides und laut Platon war es Zenons Anliegen, mit seinen Paradoxien Parmenides Einheitslehre zu stärken.

Vor allem das Paradox von Achill und der Schildkröte verlieh Zenon nachhaltige Berühmtheit. Die Paradoxien beschäftigen Philosophen_innen und Mathematiker_innen bis heute und stehen in Zusammenhang mit zahlreichen wichtigen Entwicklungen der Mathematik.

Obwohl dies in den Fragmenten nicht explizit auftaucht, scheint Zenon die Unmöglichkeit, kognitiv-konsistente Aussagen über Erfahrungstatsachen zu machen, aufzeigen zu wollen. Dabei verfeinert er in seinen Paradoxien einerseits die schon von Parmenides angewandte Beweismethode der Reductio ad absurdum (indirekter Beweis) und entwickelt selbst den Regressus in infinitum (vermeintliche Lösung enthält erneut das Problem, Rückgang ins Unendliche).

Man weiß von vier Bewegungsparadoxien, Paradoxien des Ortes, der akustischen Wahrnehmung und zwei Paradoxien der Vielheit. Am bekanntesten und besten überliefert sind die Bewegungsparadoxien. Im Folgenden soll das Hauptaugenmerk auf dem zweiten Bewegungsparadox (bekannt unter „Achill und die Schildkröte“) gelegt werden.

---

[70] Dedekind, 1961, §5
[71] vgl. Mansfeld, 2007, S. 8ff

7.4.1 Achill und die Schildkröte

Das zweite Bewegungsparadoxon von Zenon handelt von einer Verfolgungsjagd zwischen dem Langsamsten (das gerne mit einer Schildkröte gleichgesetzt wird) und dem Schnellsten (das oft mit Achill, dem schnellsten Läufer der Dichtung, verbunden wird). In dem Rennen hat die Schildkröte einen Vorsprung, den Achill einholen muss.

„Das Langsamste [‚die Schildkröte'] wird in seinem Lauf nie vom Schnellsten eingeholt werden. Denn es ist notwendig, daß das Verfolgende vorher dort ankommt, wo das Fliehende eben weggegangen ist, so daß notwendig das Langsamste immer wieder einen gewissen Vorsprung hat. [...] [I]n beiden Argumenten ergibt sich, daß das Ziel nicht erreicht wird, wenn die ausgedehnte Strecke in einer bestimmten Weise geteilt wird;“[72]

Zenon argumentiert sein Urteil, dass Achill die Schildkröte nie einholen wird, damit, dass zu dem Zeitpunkt, an dem Achill den Punkt der Schildkröte erreicht, die Schildkröte diesen bereits wieder verlassen hat. Der Vorsprung wird zwar immer kleiner (unendlich klein), dennoch wird Achill die Schildkröte nie einholen. Dies widerspricht natürlich unserer Erfahrung.

Mit Hilfe des Grenzwertbegriffes kann dieser Widerspruch aufgelöst werden.

7.5 Kurzer Abriss wichtiger Entwicklungen

7.5.1 Infinitesimalrechnung[73]

Auch wenn bereits viel Vorarbeit im Bereich der Infinitesimalrechnung seit der Antike geschehen ist, häufen sich vor allem im 17. Jahrhundert die Untersuchungen zu diesem Thema. Kein Zufall, erfordert doch vor allem die Beschäftigung mit der Bewegung den Begriff der Momentangeschwindigkeit.

[72] Mansfeld, 2007, R21=DK 29 A 26

[73] vgl. Peiffer, Dahan-Dalmedico, 1994;

Zur Systematisierung trugen vor allem Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz bei. Sie beschäftigten sich unabhängig voneinander mit der Infinitesimalrechnung und erzielten wichtige Fortschritte.

Newtons Fluxionsmethode

Newton führt für seine Methode die Zeit als universelle Variable ein. Er stellt sich mathematische Größen durch kontinuierlichen Zuwachs erzeugt und die Geschwindigkeit der Bewegung, die er Fluxionen nennt, vor.

Newton definiert die Begriffe Fluenten und Fluxionen folgendermaßen:

„Ich nenne diejenigen Größen fließende Größen oder einfach Fluenten, die ich graduell und unbestimmt vergrößert betrachte; ich werde diese durch die letzten Buchstaben des Alphabets v, x, y und z wiedergeben. [...] Durch die gleichen letzten Buchstaben, versehen mit einem Punkt: $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{z}$, stelle ich die Geschwindigkeiten dar, durch die die Fluenten von der sie hervorbringenden Bewegung vergrößert werden. Folglich kann man diese Fluxionen nennen.“[74]

Somit definiert sich das Grundproblem der Differential- und Integralrechnung für Newton wie folgt:

„Ist die Beziehung zwischen den Fluenten gegeben, so sucht man die Beziehung zwischen den Fluxionen. Und umgekehrt.“[75]

So wird nach Newtons Methode aus der Gleichung $y = x^n$ folgende Gleichung:

$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n$.

o bezeichnet dabei ein unendlich kleines Intervall der Zeit und $\dot{x}o$ sowie $\dot{y}o$ folglich die unendlich kleinen Zuwächse von x und y. Durch die Anwendung der binomischen Formel und die Vernachlässigung der Terme mit unendlich kleinen Größen am Ende gelangt Newton schließlich zu folgender Gleichung:

$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$.

[74] Peiffer, Dahan-Dalmedico, 1994, S. 203f
[75] Peiffer, Dahan-Dalmedico, 1994, S. 204

Um das Unendlichkleine zu vermeiden führt Newton später die Methode der ersten und letzten Verhältnisse ein. Das erste Verhältnis bezeichnet dabei das Verhältnis der Änderung von x zu derjenigen von y; das Verhältnis von 1 zu nx^{n-1} im Beispiel (also zu dem, was man heute als Ableitung bezeichnet) nennt Newton das letzte Verhältnis der verschwindenden Änderungen.

In Abbildung 4 erkennt man die Parallelen zwischen der Fluxionsmethode von Newton und der heutigen Differentialrechnung.

7. Die Fluxionsmethode und die Differentialrechnung

Die Parallele zwischen der Fluxionsmethode Newtons und der Differentialrechnung wird hier am Beispiel der Funktion $f : x \mapsto x^n$ dargelegt.

Newton	**Differentialrechnung**
$y = x^n$	$y = f(x)$
x verändert sich und wird zu $x + o$.	Ist h ein Zuwachs der Variablen x, so ist $f(x+h)$ der neue Funktionswert.
$y = x^n$ wird zu $(x+o)^n =$ $x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \ldots$ nach dem binomischen Lehrsatz.	Die Änderung der Funktion f ist $f(x+h) - f(x)$.
Der Zuwachs o von x verhält sich zum Zuwachs $nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \ldots$ von y wie 1 zu $nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}onx^{n-1} + \ldots$	Der Differenzenquotient ist $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
Verschwinden die Zuwächse, so wird ihr Verhältnis gleich $1 : nx^{n-1}$.	$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$.

Abbildung 4 Fluxionsmethode. Quelle: Peiffer, Dahan-Dalmedico, 1994, S. 207

Leibnizens Methode

Leibniz führt das Tangentenproblem auf die Untersuchung des Dreiecks, das von einem unendlich kleinen Teil der Tangente sowie den entsprechenden Parallelen von x- und y-Achse gebildet wird. Dies entspricht dem Dreieck CDE (grünes Dreieck) der Abbildung 5. Das Dreieck ist durch die Ähnlichkeit zum Dreieck ABC (blaues Dreieck) vollständig bestimmt. Das heißt, dass auch wenn dx und dy beliebig klein werden, ihr

Verhältnis einen endlichen Wert besitzt. Leibniz definiert somit das Differential dy durch folgende Gleichung:

$dy : dx = y : Subtangente$[76]

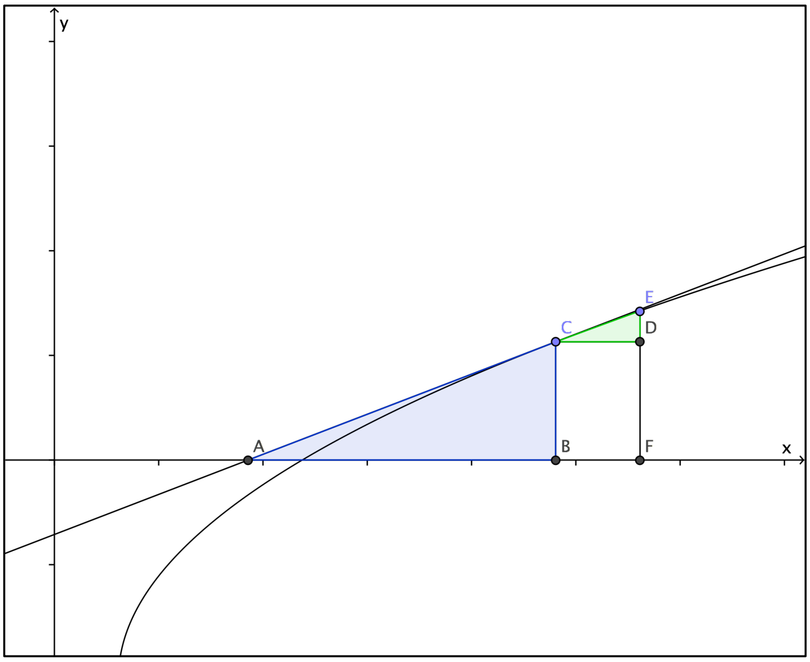


Abbildung 5 Charakteristisches Dreieck

Leibniz führte jedoch nicht nur die heute geläufige Notation für die Differential- und Integralrechnung ein. Er gab ebenfalls bereits die Differentiationsregeln für Summe, Produkt, Potenz, Logarithmus- und Exponentialfunktion an.

Die Einfachheit seiner Methode überzeugte, verschleierte zugleich jedoch die unendlich kleinen Größen, die sich auch bei Leibniz finden und mit denen auch er immer wieder haderte.

Leibniz operierte einerseits mit der Idee der Unvergleichbarkeit. Diese besagt, dass Punkte, Geraden und Flächen immer inkomparabel sind, d.h. zu einer Geraden nichts hinzukommt, wenn man ihr einen Punkt anfügt. Andererseits ist Leibniz' Definition einer Tangente als Gerade durch unendlich nahe beieinanderliegende Punkte nicht überzeugend.

[76] die Subtangente entspricht in Abbildung 5 AB

So gelingt es weder Newton noch Leibniz die Differentialrechnung auf eine solide Grundlage zu stellen. Es bedurfte viel Anstrengung zahlreicher weiterer namhafter Mathematiker, wie etwa Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange und Karl Weierstraß, sowie einer strengen Definition des Grenzwertbegriffes, um dies zu erreichen.

7.5.2 Limes[77]

Der Grenzwertbegriff spielt in vielen Bereichen eine zentrale Rolle. Dennoch wurde er erst im 19. Jahrhundert durch den Mathematiker Augustin-Louis Cauchy streng definiert. In seinem Werk „Cours d'analyse algébrique" findet sich seine berühmt gewordene Definition:

„Wenn sich die Werte, die man ein und derselben Variablen nacheinander gibt, unbeschränkt einem festen Wert nähern, so daß die Differenz schließlich beliebig klein wird, heißt dieser letztere Grenzwert der anderen Werte."[78]

Dies entspricht der heutigen Definition[79] des Grenzwertes einer Folge:

$$Sei\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ eine\ Folge.a\ hei\text{ß}t\ Grenzwert\ der\ Folge: \Leftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon$$

Die Festlegung des Grenzwertbegriffes war nicht nur für die Weiterentwicklung der Differential- und Integralrichtung wichtig. Erst mit Hilfe des Grenzwertes können die Paradoxien von Zenon aufgelöst werden.

[77] vgl. Peiffer, Dahan-Dalmedico, 1994;

[78] Peiffer, Dahan-Dalmedico, 1994, S. 218

[79] Anm.: Diese Definition gilt in normierten Räumen, z.B. in $\mathbb{R}$. Eine allgemeinere Formulierung lautet: a heißt Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn in jeder Umgebung von a fast alle Glieder der Folge liegen.

7.5.3 Kontinuumhypothese[80]

Cantor bewies, dass es abzählbare und überabzählbare Mengen gibt, d.h., dass es unterschiedlich große Unendlichkeiten gibt. Das Kontinuumproblem stellt die Frage, ob die beiden Mächtigkeiten c der reellen Zahlen (überabzählbar) und $\aleph_0$ der natürlichen Zahlen (abzählbar) unmittelbare Nachfolger sind (bzgl. der Ordnungsrelation ≤).

„[D]iese Frage wird genauer spezielle K. genannt. Das allgemeine K. ist die Frage, ob für jede transfinite Mächtigkeit m die Mächtigkeit 2^m, d.h. die Mächtigkeit der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M der Mächtigkeit m, unmittelbarer Nachfolger von m ist.“[81]

Einfacher ausgedrückt kann man sagen, dass die (spezielle) Kontinuumhypothese die Frage aufwirft, ob es eine unendliche große Menge gibt, deren Mächtigkeit zwischen abzählbar und überabzählbar liegt, die also größer als die Menge der natürlichen Zahlen ist, jedoch kleiner als die Menge der reellen Zahlen.

David Hilbert führte 1900 dieses Problem als erstes seiner 23 damals noch ungelösten Probleme an. Kurt Gödel (im positiven Fall) und Paul Cohen (im negativen Fall) konnten zeigen, dass die allgemeine Kontinuumshypothese unabhängig von den Axiomen der Mengenlehre ist.

7.5.4 Non-Standard Analysis[82]

Die Geschichte der Non-Standard Analysis beginnt schon bei den Griechen. Ihr Anliegen ist ein Modell der Analysis, in der die infinitesimalen Größen wohldefinierte Objekte und nicht mehr bloße Hilfsmittel sind. Die Konstruktion solch eines Modells gelang in den 1960er Jahren dem Mathematiker Abraham Robinson. Sein angeordneter Körper $^*\mathbb{R}$ umfasst die reellen Zahlen, die infinitesimalen und unendlich großen Elemente und ist für die reelle Analysis verwendbar.

---

[80] vgl. Kondakow, 1978;
[81] Kondakow, 1978, S. 261
[82] vgl. Landers, Rogge, 1994; Sonar, 2011, S. 607ff;

Definition von endlich, unendlich, infinitesimal

Sei $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in {}^{*}\mathbb{R}$.

(i) $\bar{\alpha}\ ist\ endlich\ oder\ finit\ :\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: |\bar{\alpha}| \leq n$;

(ii) $\bar{\alpha}\ ist\ unendlich\ :\Leftrightarrow |\bar{\alpha}| \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\bar{\alpha}\ ist\ infinitesimal\ :\Leftrightarrow |\bar{\alpha}| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(vi) $\bar{\alpha}\ ist\ unendlich\ nahe\ bei\ \bar{\beta}, oder\ \bar{\alpha}\ ist\ infinitesimal\ benachbart\ zu\ \bar{\beta}$,
$in\ Zeichen\ \bar{\alpha} \approx \bar{\beta}\ :\Leftrightarrow\ \bar{\alpha} - \bar{\beta}\ ist\ infinitesimal$;

Mithilfe dieser nun wohldefinierten Größen können Dinge wie Grenzwert, Differential etc. neu definiert werden. Somit liegt ein neuer Ansatz zum Aufbau der Analysis vor. Mit den unendlich kleinen bzw. infinitesimalen Größen, die Leibniz und Newton noch Kopfschmerzen bereitet hatten, kann nun operiert werden. Anwendung findet die Nichtstandard Analysis ebenfalls in der Stochastik und der Topologie.

7.6 UMSETZUNG IM UNTERRICHT

Auch für die Thematik „Unendlichkeit“ bieten sich zahlreiche Möglichkeiten der Einbindung in den Unterricht an. Die in den vorherigen Kapiteln besprochenen Methoden können auch hier zum Einsatz gebracht werden.

So kann im Rahmen eines **Stationenbetrieb**s z.B. zum Thema Differentialrechnung eine Auseinandersetzung mit der Unendlichkeit stattfinden. Es können Stationen zur Geschichte der Infinitesimalrechnung und zur Non-Standard Analysis vorbereitet werden.

In einer **Diskussion** im Plenum oder in Gruppen können die Schüler_innen ihr Verständnis des Unendlichen reflektieren. Zur Anregung einer Diskussion eignen sich auch die zahlreichen Paradoxa der Unendlichkeit sehr gut. Hier sei neben denen von Zenon auch auf andere wie etwa Hilberts Hotel verwiesen.

Hilberts Hotel[83]

Das von David Hilbert entwickelte Paradox des „Hotel Unendlichkeit“ ist ein anschauliches Beispiel für die Einführung in die Eigenarten des Unendlichen. Die übliche Formulierung lautet:

„Stellen wir uns nun das größte Hotel überhaupt vor, das Hotel Unendlichkeit, in dem es eine unendliche Anzahl Zimmer gibt, die allesamt belegt sind. Nehmen wir an, ein Gast der an der Rezeption nach einem Zimmer fragt, wird vom Portier die freundliche Antwort erhalten: »Tut mir leid, wir sind eigentlich voll besetzt, aber wir können Ihnen ohne weiteres ein Zimmer geben.

Doch was wird der Portier unternehmen können, um den neuen Gast unterzubringen?

In das letzte Zimmer kann der Portier den neu angekommenen Gast nicht ziehen lassen, da es im Hotel Unendlichkeit kein letztes Zimmer gibt. Weiterhin sind alle Zimmer – wir erinnern uns an die Aussage des Portiers – belegt. Um dennoch ein Zimmer für den einzelnen Gast zur Verfügung stellen zu können, sagt Hilbert dem Portier er soll einen Umzug aller Gäste in deren jeweilige Nebenzimmer veranlassen. Der Portier verlegt also den Gast von Zimmer 0 in Zimmer 1, denjenigen von Zimmer 1 in Zimmer 2, den von Zimmer 2 in Zimmer 3 und so weiter. Folglich kann der neue Gast in das gerade frei gewordene Zimmer 0 einziehen.

Im Schema sieht die Operation folgendermaßen aus:

Gast aus Zimmer 0 → Zimmer 1

Gast aus Zimmer 1 → Zimmer 2

Gast aus Zimmer 2 → Zimmer 3

... → ...

neuer Gast → Zimmer 0

Allgemein lässt sich sagen, dass für jeden der Gäste ein Umzug von Zimmer n in das Zimmer n+1 ansteht. Die Formel für die Zimmernummerzuteilung lautet also:

[83] vgl. Rausch, 2010;

$n \rightarrow n+1$ n: Zimmernummer“[84]

Das Paradox kann anschließend noch mit der Ankunft von (abzählbar) unendlich vielen neuen Gästen ausgeweitet werden.

Die Paradoxa eignen sich aber auch gut für **Referate** oder **Gruppenarbeiten**. Mit ihrer Hilfe können Eigenschaften der Unendlichkeit beleuchtet werden.

Doch nicht nur Mathematiker_innen und Philosophen_innen zebrachen sich im Laufe der Geschichte den Kopf über die Unendlichkeit. Auch in der **Kunst und Literatur** findet eine Auseinandersetzung mit ihr statt. Daher können auch solche Beiträge als Anregung zur intensiveren Arbeit am Begriff der Unendlichkeit genutzt werden.

Ein Beispiel ist das Zitat aus „Das Restaurant am Ende des Universums“ von Douglas Adams:

„Der Reiseführer Per Anhalter durch die Galaxis bietet folgende Definition des Wortes >Unendlich<.

Unendlich: Größer als das Allergrößte und dann noch ein bißchen mehr. Also, noch viel größer als das; wirklich wahnsinnig kolossal, eine absolut phantastisch lange, »echt, Mann, das ist riesig«-Zeit. Unendlich ist einfach so groß, daß im Vergleich dazu das Großsein selber richtig mickerig aussieht. Gigantisch multipliziert mit kolossal multipliziert mit überwältigend riesig, das ist ungefähr die Vorstellung, die wir hier begreiflich zu machen versuchen.“[85]

Ein weiteres Beispiel ist M. C. Escher. Seine unmöglichen Figuren bieten ebenso eine Möglichkeit die Unendlichkeit zu diskutieren. Wie in Abbildung 4 erzeugen seine Bilder oft das Gefühl einer Endlosigkeit.

[84] Rausch, 2010, 5.1
[85] Adams, 1985, Kapitel 19

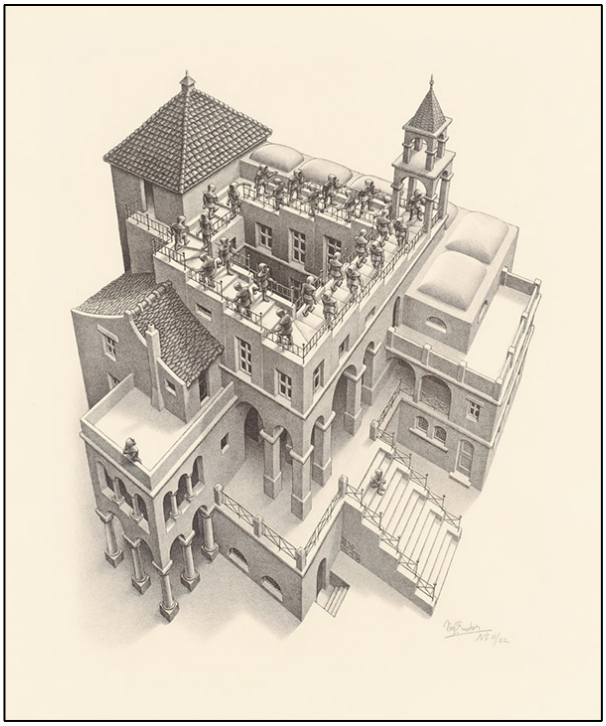


Abbildung 6 Escher - Ascending and Descending.
Quelle: http://www.mcescher.com/gallery/most-popular/ascending-and-descending/

Die **Begriffsanalyse** lässt sich zur Erarbeitung des Unendlichkeitsbegriffes ebenfalls gut anwenden. Diese kann auf unterschiedliche Weise durchgeführt werden. Die Schüler_innen können z.B. eine Mind-Map erstellen, den Begriff im Kontext von unterschiedlichen Sätzen analysieren oder eine deduktive Leiter erstellen. Ein beispielhaftes Arbeitsblatt findet sich im Anhang.[86]

[86] vgl. ZUM-Wiki, 2008;

8 WEITERE FRAGESTELLUNGEN UND ANREGUNGEN

Die in den vergangenen drei Kapiteln besprochenen Aspekte sind nur eine kleine Auswahl aus einem großen Spektrum an Möglichkeiten. Selbst wenn man versuchen möchte, möglichst nahe am üblichen Schulstoff zu bleiben, eignen sich noch zahlreiche weitere Themen und Fragestellungen. Im Folgenden sollen exemplarisch einige weitere Aspekte angesprochen werden.

8.1 GEGENSTAND DER MATHEMATIK – WAS IST MATHEMATIK?[87]

Die meisten Wissenschaften können die Frage nach ihrem Gegenstand einfach beantworten. Mineralogie ist etwa die Lehre der Mineralien, Biologie ist die Lehre vom Leben, usw. Für die Mathematik gestaltet sich die Beantwortung der Frage schwieriger. Im Laufe ihrer Geschichte gab es zahlreiche Vorschläge. Am nachhaltigsten hat sich die Ansicht, sie sei die Lehre von den Zahlen, gehalten. Nicht zuletzt, weil die Arithmetik lange und von vielen als Fundamentaldisziplin der Mathematik angesehen wurde. Andere Vorschläge charakterisierten die Mathematik als Wissenschaft von Größen oder der Lehre vom Unendlichen. Aber auch sie konnten nicht überzeugen. Wieder andere versuchten, den Gegenstand der Mathematik mit dem der Logik gleichzusetzen (Logizismus), was das Problem nur verschiebt, vertraten die Ansicht, dass die Gegenstände der Mathematik nur als von uns gedachte existieren oder bezeichneten die Mathematik als Lehre von den Formalismen oder den Strukturen.

Sie alle haben gemeinsam, dass sie einen Gegenstand nennen, aber ohne etwas über diesen auszusagen. Daher wird nach wie vor nach einer Antwort gesucht.

Die übergeordnete Frage, was Mathematik überhaupt sei, schließt nicht nur die Frage nach dem Gegenstand, sondern auch nach der Tätigkeit der Mathematiker_innen ein. Auch sie kann derzeit nicht (zufriedenstellend) beantwortet werden.

[87] vgl. Thiel, 1995, S. 8ff;

8.2 PLATONISCHE KÖRPER[88]

Die fünf regulären Körper (unter der Voraussetzung der Gleichberechtigung der Ecken die einzigen), besser bekannt als platonische Körper, wurden von Platon nicht allein unter mathematischen Gesichtspunkten betrachtet. Er verband die Körper mit seiner Kosmologie und vertritt somit eine Form des Atomismus.

Die fünf Körper verteilt er wie folgt:

„Da es aber noch eine fünfte Art der Zusammensetzung von entsprechender Eigenschaft gibt, so bediente sich Gott dieser vielmehr für das Weltganze, als er diesem seinen Bilderschmuck gab. [...] Der Erde nun haben wir die Gestalt des Kubus zuzuteilen, denn unter allen vier ist sie am unbeweglichsten und der bildsamste aller Körper; am meisten aber kommt eine solche Beschaffenheit notwendig demjenigen zu, welches die festesten und sichersten Grundlagen hat, [...]; dem Wasser ferner geben wir von den noch übrigen die am schwersten, dem Feuer dagegen die am leichtesten bewegliche, und der Luft die mittlere, und den kleinsten jener Elementarkörper dem Feuer, den größten hingegen dem Wasser, und wieder den mittleren der Luft, und endlich den spitzigsten dem Feuer, den, welcher in bezug hierauf die zweite Stelle einnimmt, der Luft, und den, welcher die dritte, dem Wasser. [...] Und so setzen wir denn aller Wahrscheinlichkeit nach mit Recht unter den Körpern, die sich uns gebildet haben, denjenigen, welcher die Gestalt der Pyramide hat, als Urbestandteil und Samen des Feuers, und den, welcher sich uns als der zweite ergab, haben wir als den der Luft, und den dritten als den des Wassers anzusehen. Alle diese Körper muß man sich aber in dieser ihrer Eigenschaft so klein denken, daß jeder einzelne von jeder Gattung wegen seiner Kleinheit von uns nicht wahrgenommen werden kann, und daß vielmehr, wenn viele von ihnen zusammengehäuft sind, nur ihre Massen von uns erblickt werden;“[89]

[88] vgl. Böhme, Böhme, 2010; Platon, 1940;
[89] Platon, 1940, S. 140f

Seine Verteilung entspricht folgender Tabelle:

Tabelle 1 Platonische Körper

Feuer	Tetraeder	4 gleichseitige Dreiecke
Luft	Oktaeder	8 gleichseitige Dreiecke
Wasser	Ikosaeder	20 gleichseitige Dreiecke
Erde	Würfel	6 Quadrate
Weltall	Dodekaeder	12 regelmäßige Fünfecke

Die platonischen Körper sind ein weiteres Beispiel (vgl. Pythagoreer), wie vor allem in der Antike Mathematik und Weltanschauung bzw. die Erklärung der Welt ineinander flossen.

8.3 IDENTITÄT – (UN-)GLEICHUNGEN[90]

Eine Definition des Wortes „Identität" oder auch der „Gleichheit" gestaltet sich nicht minder schwierig als die Definition der Zahl oder der Unendlichkeit. In der Schule lernt man diverse Regeln für den Umgang mit dem „=". Doch was genau sagt man damit aus? Kann man eine Gleichheit von A = B überhaupt annehmen? Kann man Morgen- und Abendstern gleichsetzen, da sie beide die Venus sind? Eine bekannte Problemstellung in diesem Zusammenhang ist das „Schiff des Theseus".

Schiff des Theseus[91]

Die Grundfrage dieses bekannten Problems lautet: Wenn Theseus jede Planke seines Schiffes austauschen lässt, ist es dann noch dasselbe Schiff?

Meist wird die Geschichte folgendermaßen erzählt:

„Theseus bringt sein Schiff auf die Werft, wo ein paar Planken ersetzt werden. Bei der nächsten Reparatur werden wieder einige der alten Teile ersetzt. Nach und nach

[90] vgl. Fraissler, 2015; Waibl, Rainer, 2008;
[91] vgl. Eberhardt, 2009;

werden bei Reparaturen alle Teile ersetzt, und der Werfteigner, der die alten Teile alle behalten hat, beschließt, daraus wieder Theseus' Schiff zusammenzusetzen. Das gelingt. Nun gibt es zwei Schiffe: das, welches Theseus benutzt, welches nach und nach aus dem alten entstanden ist, und das des Werfteigners, welches aus allen Originalteilen von Theseus' ursprünglichem Schiff besteht. Welches ist das echte Schiff des Theseus?"[92]

Meist ist es anschaulicher, sich vorzustellen, dass in Dock A die Planken ausgetauscht werden (bei jenem Schiff, das Theseus benutzt) und in Dock B die alten Planken wieder aufgebaut werden.

Es gibt (mindestens) vier Lösungsvorschläge:

1. Keines ist das Schiff des Theseus.
2. Beide sind die Schiffe des Theseus.
3. Das Schiff in Dock A ist das Schiff des Theseus.
4. Das Schiff in Dock B ist das Schiff des Theseus.

Die ersten beiden Möglichkeiten sind logisch falsch und können somit ausgeschlossen werden.

8.4 Logik[93]

Die Logik war lange Zeit ein fester Bestandteil der Philosophie. Aber auch die Mathematik kommt seit jeher nicht ohne sie aus. Somit ist die Logik ein wichtiges Verbindungsglied der beiden Wissenschaften.

Als Begründer der Logik gilt Aristoteles. Aufbauend auf Arbeiten zahlreicher Vorgänger entdeckt er wichtige Gesetze der Logik und entwickelt eine geschlossene Lehre. Unzertrennbar mit seinem Namen verbunden ist der Syllogismus. Ein berühmtes Beispiel der Syllogistik ist folgendes:

[92] Eberhardt, 2009, 1. Szenario
[93] vgl. Bedürftig, Murawski, 2012; Kondakow, 1978;

P1: Alle Menschen sind sterblich.

P2: Sokrates ist ein Mensch.

S: Sokrates ist sterblich.

Der Schluss (S) wird aus den beiden Prämissen (P1 und P2) gezogen. Sind die beiden Prämissen wahr, so ist es auch der Schluss.

Aristoteles schreibt in seiner Topik:

„Der Schluss ist nun eine Rede, bei welcher Einiges vorausgesetzt wird und dann daraus etwas davon Verschiedenes sich mit Nothwendigkeit vermittelst jener Vordersätze ergiebt."[94]

Hier ist bereits ersichtlich, dass in der Logik die Form gegenüber dem Inhalt vorrangig ist. D.h., ein Schluss kann richtig sein, obwohl die Prämissen an sich falsch sind.

Im weiteren Verlauf der Geschichte haben unter anderem Leibniz (mit seinem bereits erwähnten Versuch einer characteristica universalis), George Boole und Augustus De Morgan (Anfänge der mathematischen Logik), sowie Frege (durch seinen Versuch der Rückführung der Mathematik auf die Logik, wie auch seiner Formalisierung in seiner Begriffsschrift) wichtige Beiträge zur heutigen Logik geliefert.

Was ist Wahrheit?

Im Zusammenhang mit der Logik kann man sich auch mit der Wahrheitsfrage beschäftigen. Sie ist ein wichtiger Bestandteil der Erkenntnistheorie und beschäftigt die Philosophie seit den Anfängen.

Was ist Wahrheit? Können wir die Wahrheit erkennen? Wie gelangen wir zur Wahrheit?

[94] Aristoteles, 1882, Buch 1.1

9 ABSCHLIESSENDE ANMERKUNGEN

„There is a crisis in contemporary mathematics, and anybody who has not noticed it is being willfully blind. The crisis is due to our neglect of philosophical issues. [Die gegenwärtige Mathematik steckt in einer Krise, und jeder, der das nicht bemerkt hat, ist willentlich blind. Die Krise ergibt sich daraus, dass wir das Philosophische vernachlässigen.]"[95] – Errett Bishop

In den vorangegangenen Kapiteln hat sich gezeigt, dass die Verbindungen von Mathematik und Philosophie zahlreich und nach wie vor relevant sind. Die Philosophie lässt sich sowohl methodisch als auch inhaltlich auf verschiedenste Weisen in den Mathematikunterricht einbauen.

Diese Arbeit verbleibt dabei unvermeidlich an der Oberfläche. Weder die vorgestellten Themen, noch die Fülle an Themen-Möglichkeiten wurden annähernd ausgeschöpft. Schon mit einem einzigen Aspekt ließe sich problemlos ein gesamtes Unterrichtsjahr füllen. Das Anliegen besteht darin, den Schülern_innen eine neue Perspektive auf die Mathematik zu ermöglichen.

Seit langer Zeit versucht der Mathematikunterricht vom sogenannten Kochrezeptlernen (bzw. diesem Image) loszukommen. Die Kompetenzorientierung will unter anderem wieder mehr Gewicht auf das Verständnis und den verständigen Einsatz der Grundbegriffe legen. Vor allem in diesem Bereich kann sich das Einbeziehen der Philosophie als wertvoll erweisen. Denn die Grundbegriffe der Mathematik lassen sich manchmal schwer fassen. Bei einigen von ihnen ringen Mathematiker_innen und Philosophen_innen seit Jahrhunderten oder gar Jahrtausenden um eine klare Definition (wie auch in den vorangegangenen Kapiteln gezeigt wurde).

Mit dem Einsatz der Philosophie im Mathematikunterricht bietet sich den Schülern_innen nicht nur ein breiteres (neues) Bild der Mathematik. Die Philosophie und das Philosophieren können auch zu einem besseren Verständnis beitragen.

[95] Bishop, 1975, S. 507

10 DANKSAGUNGEN

Ich möchte mich von ganzem Herzen bei meiner Betreuerin Prof. Schranz-Kirlinger bedanken. Von Anfang an haben Sie eine Begeisterung für das Thema, das doch sehr ungewöhnlich ist, gezeigt, die ich nie erwartet hatte. Zudem konnte ich mich jederzeit an Sie wenden. Sie haben sich intensiv mit der Arbeit auseinandergesetzt, umfangreiche Rückmeldungen gegeben und mir gleichzeitig viel Freiraum gelassen. Mir ist vollkommen bewusst, wie einzigartig so eine Betreuung ist.

Großen Dank schulde ich auch meiner Familie. Meine Eltern, Wolfgang und Heidi Müller, haben mich auf meinem gesamten Bildungsweg unterstützt. Ihr habt mir ermöglicht, mich auf mein Studium zu konzentrieren, ohne jeglichen Stress. Jederzeit habt ihr euch meine Sorgen angehört und seid mir in den Höhen und Tiefen meines Weges beigestanden. Zudem möchte ich mich bei meiner Oma Traudi Müller und meiner Tante Edith Wutka bedanken, deren Unterstützung eine große Hilfe war.

Mein Dank gilt auch meiner Studienkollegin Claudia Toker, die nicht unwesentlich zur Themenstellung dieser Arbeit beigetragen hat. Das Zusammentreffen mit dir hat mein Studium nachhaltig verändert. Vielen Dank für den Austausch, das gemeinsame Lernen, die unvergesslichen Erfahrungen.

Es gibt noch viele weitere Personen, die mich durch mein Studium begleitet haben und denen ich ebenso dankbar bin. All diese Leute haben mich unterstützt und mein Weg wäre ohne sie wohl ganz anders verlaufen. Vielen Dank!

11 LITERATURVERZEICHNIS

Adams, D.: Das Restaurant am Ende des Universums. München: Rogner & Bernhard, **1985**.

Aristoteles: Physik. **1829**. http://www.zeno.org/nid/20009148590, zugegriffen am 21.08.2015.

Aristoteles: Topik. **1882**. http://www.zeno.org/nid/20009147322, zugegriffen am 25.08.2015.

Auzinger, K.: ‚Philosophieren mit Kindern' als Unterrichtsprinzip. **2010**. http://www.oezbf.at/cms/tl_files/Forschung/Masterthesen,%20Bakkalaureatsarbeiten/Auzinger_Karin_endversion.pdf, zugegriffen am 27.08.2015.

Baumann, J.: Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie nach ihrem ganzen Einfluss dargestellt und beurtheilt. Band 1. Berlin: G. Reimer, **1868**.

Baumann, J.: Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie nach ihrem ganzen Einfluss dargestellt und beurtheilt. Band 2. Berlin: G. Reimer, **1869**.

Bedürftig, T., **Murawski**, R.: Philosophie der Mathematik. Berlin: Walter de Gruyter, **2012**.

Berkeley, G.: Abhandlung über die Principien der menschlichen Erkenntnis. **1869**. http://www.zeno.org/nid/20009159118, zugegriffen am 10.08.2015.

Berkeley, G.: Versuch über eine neue Theorie des Sehens. Hamburg: Meiner Verlag, **1987**.

Bibliotheca Augustana: Gottlob Frege. Briefwechsel mit Bertrand Russell. **2010**. http://www.hs-augsburg.de/~harsch/germanica/Chronologie/19Jh/Frege/fre_brif.html, zugegriffen am 05.08.2015.

Bishop, E.: The Crisis in Contemporary Mathematics. In: Historia Mathematica (2). Amsterdam: Elsevier, **1975**.

Bolzano, B.: Wissenschaftslehre. (Band 1). Sulzbach: Seidel Verlag, **1837**.

Böhme, G., **Böhme**, H.: Feuer, Wasser, Erde, Luft. München: Beck, **2010**.

Buckingham, W., **Burnham**, D., **Hill**, C., **King**, P., **Marenbon**, J., **Weeks**, M.: Das Philosophie-Buch. London: Dorling Kindersley Limited, **2011**.

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (Bifie): Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. **2013**. https://www.bifie.at/node/1442, zugegriffen am 15.08.2015.

Bundesministerium für Bildung und Frauen (BMBF): Allgemeiner Lehrplan für die AHS. **2004a**.
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/11668_11668.pdf?4dzgm2, zugegriffen am 14.12.2014.

Bundesministerium für Bildung und Frauen (BMBF): Lehrplan Mathematik für die AHS-Oberstufe. **2004b**.
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2, zugegriffen am 14.12.2014.

Cantor, G.: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Berlin: Springer, **1932**.

Dedekind, R.: Was sind und was sollen die Zahlen?. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, **1961**.

Descartes, R.: Abhandlung über die Methode, richtig zu denken und Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen. **1870**. http://www.zeno.org/nid/20009160981, zugegriffen am 16.08.2015.

Descartes, R.: Meditationen über die Erste Philosophie. (lat./de.). Stuttgart: Reclam, **2010**.

Duden: unendlich. **2015**. http://www.duden.de/rechtschreibung/unendlich, zugegriffen am 24.08.2015.

Eberhardt, J.: Schiff des Theseus. **2009**. http://www.jg-eberhardt.de/philo_exp/ex_schiff_des_theseus.html, zugegriffen am 21.09.2015.

Euklid: Die Elemente. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, **1991**.

Frege, G.: Die Grundlagen der Arithmetik. Stuttgart: Reclam, **2011**.

Frege, G.: Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, **2008**.

Fraissler, H.: Was ist Identität?. **2015**. http://stv-philosophie.at/was-ist-identitaet/, zugegriffen am 25.08.2015.

Haenisch, H.: Merkmale erfolgreichen Unterrichts. **1999**. http://www.sqa.at/pluginfile.php/1805/course/section/932/merkmaleerfolgreichenunterrichts.pdf, zugegriffen am 27.08.2015.

Kondakow, N.: Wörterbuch der Logik. Berlin: deb, **1978**.

Landers, D., **Rogge**, L.: Nichtstandard Analysis. Heidelberg: Springer Verlag, **1994**.

Leibniz, G.: Neue Abhandlung über den menschlichen Verstand. **1904**. http://www.zeno.org/nid/20009205314, zugegriffen am 14.08.2015.

Mansfeld, J. (Hrsg.): Die Vorsokratiker I. Stuttgart: Reclam, **2008**.

Mansfeld, J. (Hrsg.): Die Vorsokratiker II. Stuttgart: Reclam, **2007**.

Masek, M.: Geschichte der antiken Philosophie. Wien: Facultas, **2011**.

Meerwaldt, D.: Philosophieren als Unterrichtsprinzip im Mathematikunterricht. In: Helmerich, M., Lengnink, K., Nickel, G., Rathgeb, M. (Hrsg.): Mathematik Verstehen. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag, **2011**.

Meyer, K. (Hrsg.): Texte zur Philosophie der Didaktik. Stuttgart: Reclam, **2010**.

Mill, J.: System der deduktiven und induktiven Logik. **1868**. http://www.zeno.org/nid/20009226567, zugegriffen am 06.08.2015.

Nagel, T.: Was bedeutet das alles? Eine ganz kurze Einführung in die Philosophie. Reclam, **2012**.

Peiffer, J., **Dahan-Dalmedico**, A.: Wege und Irrwege – Eine Geschichte der Mathematik. Basel: Birkhäuser Verlag, **1994**.

Pfister, J.: Fachdidaktik Philosophie (2. Auflage). Bern: Haupt, **2014**.

Platon: Timaios. **1940**. http://www.zeno.org/nid/20009262717, zugegriffen am 24.08.2015.

Rausch, D.: Hilberts Hotel. **2010**. http://www.mathematik.uni-marburg.de/~bschwarz/Sem_09W_files/10%20Daniel%20Rausch%20-%20Hilberts%20Hotel.pdf, zugegriffen am 21.09.2015.

Rehfus, W. (Hrsg.): Geschichte der Philosophie II: 16.-18. Jahrhundert. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, **2012a**.

Rehfus, W. (Hrsg.): Geschichte der Philosophie III: 19. Jahrhundert. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, **2012b**.

Russell, B.: Mysticism and Logic and other Essays. London: George Allen & Unwin LTD, **1959**.

Russell, B.: Philosophie. Die Entwicklung meines Denkens. München: Nymphenburger Verlagshandlung, **1973**.

Schubert, G.: Die Kunst des Scheiterns. Münster: LIT Verlag, **2007**.

Schüssler, W.: Leibniz' Auffassung des menschlichen Verstandes (intellectus). Berlin: Walter de Gruyter, **1992**.

Schupp, F.: Geschichte der Philosophie. Band 1 Antike. Hamburg: Meiner Verlag, **2013**.

Sonar, T.: 3000 Jahre Analysis. Heidelberg: Springer Verlag, **2011**.

Thiel, C.: Philosophie und Mathematik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, **1995**.

van Ackeren, M., **Kobusch**, T., **Müller**, J. (Hrsg.): Warum noch Philosophie?: historische, systematische und gesellschaftliche Positionen. Berlin: Walter de Gruyter, **2011**.

von Kutschera, F.: Gottlob Frege. Eine Einführung in sein Werk. Berlin: Walter de Gruyter, **1989**.

Vorländer, K.: Geschichte der Philosophie. **1903**. http://www.textlog.de/vorl_philosophie.html, zugegriffen am 10.08.2015.

Waibl, E., **Rainer**, F.: Basiswissen Philosophie in 1000 Fragen und Antworten. Wien: Facultas, **2008**.

Wild, E., **Möller**, J.: Pädagogische Psychologie. Heidelberg: Springer Verlag, **2015**.

Zellini, P.: Eine kurze Geschichte der Unendlichkeit. München: Verlag C. H. Beck, **2010**.

ZUM-Wiki: Begriffsanalyse. **2008**. http://wikis.zum.de/zum/Begriffsanalyse, zugegriffen am 26.08.2015.

ANHANG

1. Kurzer Überblick der erwähnten Persönlichkeiten
2. Kurzer Überblick über die erwähnten Unterrichtsmethoden
3. Glossar
4. Literaturempfehlung und nützliche Links
5. Beispiel Stationenbetrieb: Satz des Pythagoras
6. Beispiel Experten_innenrunde: Was sind Zahlen?
7. Beispiel Begriffsanalyse: unendlich

KURZER ÜBERBLICK ERWÄHNTER PERSÖNLICHKEITEN

Im Folgenden finden sich kurze Biografien (mit ausgewählten Daten) der Philosophen und Mathematiker, die in der vorliegenden Arbeit erwähnt, aber nicht näher ausgeführt wurden.

Aristoteles

Aristoteles (ca. 384-322 v. Chr.) ist der berühmteste Schüler Platons. Er wandte sich von dessen Philosophie ab und erarbeitete ein eigenständiges, sehr umfangreiches Werk. Zu seinen berühmtesten Werken zählen etwa seine „Nikomachische Ethik", „Metaphysik" und die „Politik".

Im Bereich der Ethik beschäftigte sich Aristoteles (wie damals üblich) mit der Frage nach dem guten Leben. Seine Antwort war die Mesotes-Lehre. Der goldene Mittelweg (das relative Mittel, dass seiner Meinung nach für alle Tugenden existiert) bildet die Grundlage für ein sittliches Leben, das zur Glückseligkeit führen soll.

Im Bereich der Ontologie stellt Aristoteles seine Ursachenlehre auf. In der Auseinandersetzung mit der Frage nach dem Urstoff (arché) bei den Vorsokratikern unterscheidet Aristoteles vier Klassen von Ursachen: Materialursache, Formursache, Wirkursache, Zweckursache. Eine Sache gilt für ihn als vollständig bestimmt, wenn man die vier Ursachen kennt.

Im Bereich der Politik setzt sich Aristoteles mit der Frage nach der besten Verfassung auseinander. Dabei unterscheidet er die Verfassungen zuerst danach, ob eine einzige Person, mehrere der viele regieren: Monarchie, Aristokratie, Politie. Jede dieser Verfassungen kann jedoch entarten: Tyrannis, Oligarchie, Demokratie. Aristoteles favorisiert ein Mischverhältnis zwischen Aristokratie und Politie.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das umfangreiche (und gut erhaltene) Werk von Aristoteles bis heute für viele Bereichen prägend ist.

George Berkeley

George Berkeley lebte von 1685-1753 und war anglikanischer Bischof. Als Philosoph kritisierte er die Grundlagen der Mathematik und Naturwissenschaften seiner Zeit. In seinem Hauptwerk „Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge“ stellt er seine These auf, dass alles, was existiert, entweder Geist oder Idee sein muss. Denn das Sein besteht darin, wahrgenommen zu werden, wahrzunehmen oder etwas zu wollen. Den Geist charakterisiert er als aktiv, während die Ideen einen passiven Charakter haben. Damit vertritt er einen Immaterialismus und Idealismus. Zuzuordnen ist er dem Empirismus, d.h., Berkeley vertritt die Ansicht, dass alle Geistesinhalte aus der Erfahrung stammen.

Bernard Bolzano

Der Theologe, Philosoph und Mathematiker Bernard Bolzano lebte von 1781-1848 in Prag. Mathematisch war er vor allem im Bereich der Analysis aktiv. So lieferte er etwa die erste „reine“ Definition der Stetigkeit von Funktionen. Im Bereich der Philosophie setzte er sich stark für die Trennung psychologischer und logischer Elemente (vgl. Gottlob Frege) ein. Wichtige Werke umfassen seine „Wissenschaftslehre“ sowie die „Paradoxien des Unendlichen“, in denen er sich intensiv mit der Unendlichkeit und dessen (scheinbaren) Widersprüchen auseinandersetzt.

Georg Cantor

Der deutsche Mathematiker Georg Cantor (1845-1918) kann als Vater der heutigen Mengenlehre betrachtet werden. Er festigte nicht nur den Begriff der Menge, sondern führte auch die Kardinal- und Ordinalzahlen ein. Zudem lieferte Cantor wichtige Beiträge zum Begriff der Unendlichkeit.

Richard Dedekind

Der deutsche Mathematiker Richard Dedekind (1831-1916) ist einer der Begründer der modernen Algebra. Er arbeitete im Bereich der Gruppentheorie, Ringtheorie sowie der algebraischen Zahlentheorie. Seine Arbeiten bildeten eine wichtige Grundlage für die Analysis sowie für die Arithmetik. Zudem war er ein Vertreter der mathematischen Strömung, die sich der systematischen Klärung der Grundbegriffe der Mathematik verschrieb (wie auch Karl Weierstraß und Georg Cantor).

Euklid

Der griechische Mathematiker Euklid (ca. 365-300 v.Chr.) fasste in seinem berühmten Werk „Die Elemente" die altgriechische Mathematik zusammen. Sein Werk besteht aus 13 Büchern, die sich mit der ebenen Geometrie (Buch I-IV, VI), der eudoxischen Größen- und Proportionenlehre (Buch V), der Arithmetik und Zahlentheorie (Buch VII-IX), der geometrischen Algebra mit Inkommensurablen (Buch X) und der Raumgeometrie (Buch XI-XIII) auseinandersetzen. Euklid stellt dabei jedem Buch zuerst die nötigen Definitionen, Axiome und Postulate voran, aus denen er anschließend die Sätze ableitet. Daher ist sein Werk nicht nur inhaltlich, sondern auch für die Methodologie der Mathematik von großer Bedeutung (obwohl es aus heutiger Sicht viele Lücken aufweist). „Die Elemente" wurden lange Zeit als Lehrbuch gebraucht und galten als Maßstab und Paradigma bis ins 19. Jahrhundert.

Georg W. F. Hegel

Der deutsche Philosoph Georg W. F. Hegel (1770-1831), ein wichtiger Vertreter des deutschen Idealismus, versuchte die Philosophie zu systematisieren. Mit seinem Werk „Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundrisse“ erhebt er den Anspruch, die Philosophie in ihrem vollen systematischen Umfang darzustellen. Das Werk gliedert sich in drei Teile: die Logik, die Naturphilosophie und die Philosophie des Geistes.

Im Laufe der Zeit setzten sich zahlreiche Strömungen und Philosophen_innen mit Hegel auseinander. Es gab starke Gegenbewegungen, aber auch zahlreiche Sympathisanten_innen.

Immanuel Kant

Der deutsche Philosoph Immanuel Kant (1724-1804) ist wohl einer der bedeutendsten Philosophen und Denker der Aufklärung. In seinem Werk versuchte er den Streit zwischen Empirismus und Rationalismus beizulegen. Seine Hauptwerke umfassen die Kritik der reinen Vernunft, die Kritik der praktischen Vernunft und die Kritik der Urteilskraft.

In diesen Werken finden sich unter anderem die Kant'schen Fragen, die als Grundfragen der Philosophie angesehen werden:

- Was kann ich wissen?
- Was soll ich tun?
- Was darf ich hoffen?
- Was ist der Mensch?

Berühmt ist er vor allem für seinen Kategorischen Imperativ aus dem Bereich der Ethik:

„Der kategorische Imperativ ist also nur ein einziger und zwar dieser: handle nur nach derjenigen Maxime, durch die du zugleich wollen kannst, daß sie ein allgemeines Gesetz werde.“

John Stuart Mill

Der Empirist John Stuart Mill (1806-1873) legte seine sensualistische Theorie der Relativität des Wissens vor, nach der alle Aussagen über Dinge und Eigenschaften in Aussagen über Sinneseindrücke und deren Auftreten übersetzbar sind. Uns sind ausschließlich Sinneseindrücke direkt zugänglich, daher kann es nur Wissen von Phänomenen im Sinne von Sinneseindrücken geben. Alles Wissen beruht auf Erfahrung. Zudem betrachtet er nur induktive Schlüsse als wirkliche Schlüsse, da nur sie zu neuem Wissen führen und Induktion ihren Ausgang immer in der Erfahrung nimmt.

Isaac Newton

Der Wissenschaftler Isaac Newton (1642-1727) ist wohl am besten bekannt für seine Entdeckung der Gravitation. Mit seinem Werk „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" wirkte er wesentlich an der Entwicklung der modernen Physik mit. Im Bereich der Mathematik hat er unter anderem wichtige Beiträge zur Infinitesimalrechnung geliefert. Sein Wirkungsbereich erstreckt sich aber auch auf die Optik und Astronomie.

Platon

Platon (ca. 428-347 v.Chr.) ist einer der Schüler von Sokrates und auch eine der wichtigsten Quellen für dessen Lehren (obwohl wir heute wissen, dass Platons Darstellung von Sokrates wohl nicht immer realitätsgetreu war). Platon begründete selbst eine Schule, die Akademie.

Platon ist unter anderem für seine Gleichnisse berühmt. Mit dem Höhlengleichnis veranschaulicht er nicht nur seine Ideenlehre (auf die hier nicht näher eingegangen wird), das Gleichnis kann auch zum Verständnis der Philosophie und der Wichtigkeit von Bildung herangezogen werden. Das Gedankenexperiment handelt von gefesselten Menschen in einer Höhle. Sie sehen ihr Leben lang nur Schatten, die durch ein hinter ihnen brennendes Feuer und Menschen, die daran Gegenstände vorbeitragen, erzeugt werden. Sie halten dies für die Wirklichkeit bzw. Wahrheit. Eines Tages wird einer befreit und macht sich auf den Weg aus der Höhle. Zuerst bereitet ihm das Licht (des Feuers und später der Sonne) Schmerzen, der Weg ist beschwerlich, doch die Außenwelt (die Wirklichkeit bzw. Wahrheit) ist schön. Als er zurückkehrt um den anderen davon zu berichten, glaubt ihm niemand.

Platons Werk ist umfangreich und sein Einfluss reicht bis heute.

Bertrand Russell

Der Mathematiker Bertrand Russel (1872-1970) ist auch als Philosoph, Logiker, Essayist und Gesellschaftskritiker bekannt. In seiner langen Karriere hat Russell wichtige Beiträge zu einer großen Bandbreite an Themen beigesteuert. In seinem Werk „Principia Mathematica", das er gemeinsam mit Alfred North Whitehead schrieb, entwickelte er seine Typentheorie. Ebenfalls in diesem Werk verteidigt er den Logizismus, also dass die Mathematik auf die Logik zurückführbar sei. Im Bereich der Philosophie war Russell vor allem in der analytischen Philosophie (Sprachphilosophie) und der politischen Philosophie aktiv.

Quelle

Bedürftig, T., **Murawski**, R.: Philosophie der Mathematik. Berlin: Walter de Gruyter, **2012**.

Kant, I.: Grundlegung zur Metaphysik der Sitten. **2006**.
http://www.korpora.org/Kant/aa04/421.html, zugegriffen am 22.09.2015.

Masek, M.: Geschichte der antiken Philosophie. Wien: Facultas, **2011**.

Rehfus, W. (Hrsg.): Geschichte der Philosophie II: 16.-18. Jahrhundert. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, **2012a**.

Rehfus, W. (Hrsg.): Geschichte der Philosophie III: 19. Jahrhundert. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, **2012b**.

Stanford Encyclopedia of Philosophy: Bertrand Russell. **2015**.

http://plato.stanford.edu/entries/russell/#RWL, zugegriffen am 24.09.2015.

Stanford Encyclopedia of Philosophy: Isaac Newton. **2015**.

http://plato.stanford.edu/entries/newton/, zugegriffen am 24.09.2015.

Kurzer Überblick über die erwähnten Unterrichtsmethoden

Im Folgenden werden die angesprochenen Unterrichtsmethoden, die nicht näher ausgeführt wurden, kurz beschrieben. Die Methoden Diskussion, Referate und Mind-Map werden nicht näher ausgeführt, da diese entweder bereits in der Arbeit beschrieben wurden oder als bekannt vorausgesetzt werden.

Begriffsanalyse

Es gibt zahlreiche verschiedene Möglichkeiten, Begriffe zu analysieren, unter anderem:

- Modellfälle, unstrittige Paradebeispiele sammeln: Dabei werden charakteristische Merkmale eines Begriffes herausgestellt.
- Wortfelduntersuchung: Suche nach Begriffen (Substantive, Adjektive, Verben), die dir zum Begriff „Sinn“ einfallen. Welche Begriffe des Wortfeldes sind miteinander verwandt und können als Modellfälle dienen, welche sind konträr und passen demzufolge nicht dazu, wo lassen sich Ober- und Unterbegriffe unterscheiden? (Clusterbildung)
- Deduktive Leiter: Veranschauliche den Begriff „Sinn“, indem du mit dem Einfachen beginnst und die Bedeutung schrittweise nach folgendem Schema aufbaust (Beispiel):
    1. Stufe – abstrakter Begriff, Hypothese, Behauptung: Glück
    2. Stufe – Konkretion: Menschen können glücklich sein.
    3. Stufe – Beispiel: Ich war auch schon mal glücklich.
    4. Stufe – Detail eines Beispiels: bei einem spontanen Picknick mit Freunden mitten im Winter.
- Bilden von Sätzen, in denen der zu analysierende Begriff im Kontext auftritt. Dadurch wird er in einen konkreten Zusammenhang gestellt.
- Synonyme finden
- Strukturskizzen, Karikaturen, Allegorien: Sie dienen als Modellfälle und stellen wesentliche Bedeutungen der Begriffe heraus, außerdem werden durch sie die Begriffe vereinfacht.
- Etymologische Untersuchung, Wortherkunft

- Antonyme, kontradiktorische und korrelierende Begriffe, um auszuloten, welche Bereiche der zu analysierende Begriff nicht abdeckt
- Beschäftigung mit Grenzfällen, möglicherweise auch erdachte oder konstruierte Fälle
- Erfinden neuer Begriffe, um nicht in festgefahrenen bzw. alltagssprachlich besetzten Strukturen/Begriffen neue philosophische Probleme besprechen zu müssen.
- Begriffliche Netzwerke: z.B. Mind-Map

Experten_innenmethode/Experten_innenrunde/Expertenpuzzle/Gruppenpuzzle

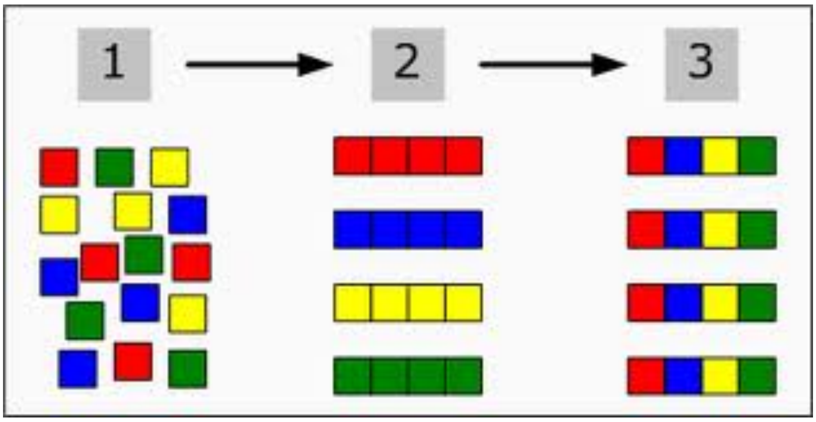


Abbildung 1 Quelle: http://www.heraeus-bildungsstiftung.de/wp-content/uploads/2010/07/Dharavi-neu-abgespeckt-13-12-2010.pdf

Diese Methode eignet sich gut für Unterrichtsinhalte, die sich in etwa drei bis fünf voneinander unabhängige Teilbereiche gliedern lassen. Die Klasse wird in so viele Experten_innengruppen geteilt, wie es Teilbereiche gibt. Jede Experten_innengruppe erhält einen Arbeitsauftrag zu ihrem Teilbereich (jede_r Schüler_in erhält ein eigenes Arbeitsblatt). Der Ablauf erfolgt folgendermaßen (vgl. Abbildung 1):

1. Jedes Mitglied der Experten_innengruppe erarbeitet den Arbeitsauftrag zunächst allein in Einzelarbeit.
2. Anschließend können auftretende Fragen und Probleme innerhalb der Gruppe besprochen und gelöst werden. Durch die Besprechung in der Gruppe wird jede_r Schüler_in somit zum_r Experten_in für diese Fragestellung. Es wird gemeinsam besprochen, was die wichtigsten Punkte sind, die später den restlichen Schülern_innen mitgeteilt werden sollen.

3. Danach erfolgt eine neue Gruppenbildung in Mixgruppen, wobei in jeder Mixgruppe jeweils ein_e Experte_in von jeder Aufgabenstellung vorhanden sein muss. Die Experten_innen erläutern ihr Themengebiet den anderen Gruppenmitgliedern und geben damit ihr Wissen weiter, sodass zum Schluss alle Gruppenmitglieder über alle Aufgabenstellungen und Lösungen Bescheid wissen.

Museumsrundgang

Methode 1:

Die Schüler_innen erarbeiten in Gruppen ein Thema. Ergebnis der Gruppenarbeit ist ein (Lern-)Plakat.

Diese Plakate werden im Klassenzimmer an verschiedenen Stellen platziert. Für den Museumsrundgang werden dann in etwa gleich große Gruppen gebildet, in denen sich je ein_e Experte_in für jedes Plakat befindet.

Die einzelnen Gruppen starten gleichzeitig vor den verschiedenen Plakaten. Es erklären jeweils jene Schüler_innen, die an der Erstellung eines Plakates mitgearbeitet haben, den anderen Schülern_innen in der Gruppe das Plakat. Rückfragen und Diskussionen sind erwünscht. Nach einem vereinbarten Zeichen der Lehrkraft gehen die Gruppen im Uhrzeigersinn zum nächsten Plakat.

Methode 2:

Im Klassenzimmer werden Zitate und/oder Bilder an verschiedenen Stellen platziert. Die Schüler_innen bekommen Zeit, sich frei durch den Raum zu bewegen und sich die Aushänge durchzulesen/anzusehen. Anschließend wählen sie ein Zitat/ein Bild aus und bleiben dort stehen. Finden sich mehrere Schüler_innen zusammen, können sie über den Inhalt diskutieren. Zum Abschluss nehmen die Schüler_innen im Plenum zu ihrer Auswahl Stellung.

Stationenbetrieb/Stationenlauf/Stationenlernen

Der Stationenbetrieb ist eine Form des offenen Unterrichts und besonders gut zur Individualisierung geeignet. Die Schüler_innen arbeiten an mehreren, möglichst voneinander unabhängigen Stationen, die verschiedenste Materialien und Aufgabenstellungen zur Verfügung stellen; üblich sind Pflicht- und Wahlpflichtstationen (zum Beispiel von zwei Stationen muss eine gewählt werden) oder Wahlstationen. Die Schüler_innen können Zeitaufwand, Reihenfolge der Bearbeitung und Sozialform selbst bestimmen.

Variante 1 – nach Themengruppen

An verschiedenen Orten (Tischen) werden die Stationen nach Themengruppen (A, B, C ...) geordnet vorbereitet; das Unterrichtsmaterial wird aufgelegt.

Die Schüler_innen wählen eine Station aus und nehmen die Unterlagen zur Bearbeitung auf den eigenen Platz mit. Sobald die Aufgabe gelöst wurde, wird das Material zur Station zurückgelegt. Die Schüler_innen können die Lösungen selbst kontrollieren, dazu liegen die Lösungsblätter an einem vereinbarten Ort auf.

Variante 2 – nach Stationen

Alle Stationen werden auf Tischen im Klassenzimmer verteilt aufgelegt, d. h. Station 1 auf einem eigenen Tisch usw. Die Schüler_innen wählen eine Station aus, bearbeiten den Arbeitsauftrag an Ort und Stelle und gehen dann zur nächsten Station. Die Lösungen können selbst kontrolliert werden, die Lösungsblätter liegen an einem vereinbarten Ort auf.

Es ist zielführend, mit den Schülern_innen vorweg folgende Fragen zu klären:

- Wo liegen die Unterlagen?
- Was darf an den Platz mitgenommen werden?
- Welche Regeln gelten beim Arbeiten?
- Was soll im Heft festgehalten werden?
- Was ist vorzuweisen?
- Wie ist der Laufzettel auszufüllen?

Quelle

BMBF: Methodenpool. **2015**. http://mb.bmukk.gv.at/methodenpool.html, zugegriffen am 22.09.2015.

ZUM-Wiki: Begriffsanalyse. **2008**. http://wikis.zum.de/zum/Begriffsanalyse, zugegriffen am 26.08.2015.

Glossar

Analytische Philosophie, Sprachanalytische Philosophie: entstand im 20. Jhd. und ist gekennzeichnet durch die Zurückweisung der Metaphysik und die Hinwendung zur Sprache. Sie betreibt einerseits eine genaue Analyse der normalen (alltäglichen) Sprache und andererseits die Aufwertung der formalen Sprache. (vgl. linguistic turn)

Animistische Weltsicht, Animismus: Glaube an die Beseeltheit der Natur und all ihrer Erscheinungen

Empirismus: gr. empeiría = Empfindung, Sinn; Grundthese ist, dass alles Wissen in Erfahrung gründet. Der Mensch kommt als tabula rasa (leere Tafel, ohne angeborene Ideen) auf die Welt, denn der Empirismus vertritt die Ansicht: Es ist nichts im Verstand, was nicht vorher in den Sinnen war. Diese Richtung steht im Gegensatz zum Rationalismus.

Erkenntnistheorie: ist ein Teilgebiet der Philosophie und untersucht die Bedingungen und Grenzen der menschlichen Erkenntnis.

linguistic turn, sprachphilosophische Wende: bezeichnet die Hinwendung der Philosophie zur Sprache als grundlegendes Werkzeug der philosophischen Untersuchung, da (ihrer Ansicht nach) philosophische Probleme als sprachliche Probleme reformuliert werden können. Über die Klärung der Sprache soll eine Klärung der Gedanken erreicht werden. Die Entwicklung von künstlichen (formalen) Sprachen wurde gefördert; zudem wurde die Analyse der normalen Sprache gestärkt. Ein wichtiger Vertreter war Ludwig Wittgenstein.

Logizismus: Auffassung, dass die Mathematik eine logische Disziplin sei und demzufolge mathematische Wahrheiten auf logische reduzierbar seien.

Rationalismus: lat. ratio =Vernunft; der Rationalismus stellt das vernunftmäßige Denken in den Mittelpunkt. Als Erkenntnisquelle hat das Denken Vorrang gegenüber der Erfahrung. Der Rationalismus wertet den Erkenntniswert der Erfahrung ab und geht davon aus, dass es angeborene Ideen gibt. Er steht im Gegensatz zum Empirismus.

Sieben Weisen: sind eine Gruppe von griechischen Personen des öffentlichen Lebens, deren Leben und Wirken später als besonders vorbildhaft galt. Die Listen nennen teilweise unterschiedliche Namen und so kennt man bis zu 22 Persönlichkeiten, die zu den Sieben Weisen gezählt werden. Die Liste Platons lautet:

- Thales von Milet (Kaufmann, Mathematiker und Naturphilosoph)
- Bias (Herrscher von Priene)
- Solon von Athen (Dichter, Philosoph und verdienter Politiker)
- Pittakos von Mytilene (Herrscher von Lesbos)
- Kleobulos von Lindos (Herrscher von Rhodos)
- Myson von Chenai
- Chilon von Sparta (Mitglied des obersten Kontrollorgans des Ephorats).

Syllogismus: ist eine von Aristoteles entwickelte Methode des logischen Schließens. Dabei wird aus zwei Urteilen/Aussagen (Prämissen) auf ein drittes (Konklusion) geschlossen.

P1 (Obersatz): Alle Menschen (=Mittelbegriff) sind sterblich (=Prädikat).

P2 (Untersatz): Alle Österreicher_innen (=Subjekt) sind Menschen (=Mittelbegriff).

K (Schlusssatz): Alle Österreicher_innen (=Subjekt) sind sterblich (=Prädikat).

Typentheorie: Um die sogenannte Russellsche Antinomie zu vermeiden, hat Bertrand Russell vorgeschlagen, die Mengen in einer Typhierarchie anzuordnen. Man beginnt mit einer Menge von Urelementen (Grundelementen, individuals), die die Mengen der Stufe 0 bilden. Die Stufe 1 enthält diejenigen Mengen, die Elemente der Stufe 0 enthalten. Die Stufe 2 enthält diejenigen Mengen, die Elemente der Stufe 1 enthalten. Und so weiter.

Vorsokratiker: gelten als der Anfang der Philosophie. Im Allgemeinen bezeichnet der Ausdruck die Vorgänger Sokrates (der oft als Wendepunkt der Philosophie gesehen wird). Allerdings befinden sich unter ihnen auch Zeitgenossen von ihm. Ihre Lehren zeichnen sich darin aus, zur Entmythologisierung beizutragen, indem sie etwa nach dem Urstoff des Kosmos suchen.

Quelle

GlossarWiki: Typentheorie. **2015**. http://glossar.hs-augsburg.de/Typentheorie, zugegriffen am 22.09.2015.

Lahmer, K.: Kernbereiche Philosophie. Wien: Verlag E. Dorner, **2007**.

Mansfeld, J. (Hrsg.): Die Vorsokratiker I. Stuttgart: Reclam, **2008**.

uni-protokolle.de: Sieben Weisen von Griechenland. **2004**. http://www.uni-protokolle.de/Lexikon/Sieben_Weise_von_Griechenland.html, zugegriffen am 21.09.2015.

Waibl, E., **Rainer**, F.: Basiswissen Philosophie in 1000 Fragen und Antworten. Wien: Facultas, **2008**.

Literaturempfehlung und nützliche Links

Im Folgenden finden sich einige Bücher, Artikel und Links, die sich im Laufe der Erarbeitung der vorliegenden Diplomarbeit als besonders nützlich bzw. brauchbar für den Unterricht herausgestellt haben.

Bedürftig, T., **Murawski**, R.: Philosophie der Mathematik. Berlin: Walter de Gruyter, **2012**.

Buckingham, W., **Burnham**, D., **Hill**, C., **King**, P., **Marenbon**, J., **Weeks**, M.: Das Philosophie-Buch. London: Dorling Kindersley Limited, **2011**.

Clegg, B., **Pugh**, O.: Unendlichkeit. Ein Sachcomic. Überlingen: TibiaPress Verlag, **2013**.

Kompaktes Wörterbuch des Unendlichen: http://unendliches.net/

Pfister, J.: Fachdidaktik Philosophie (2. Auflage). Bern: Haupt, **2014**.

Robinson, D., **Groves**, J.: Philosophie. Ein Sachcomic. Überlingen: TibiaPress Verlag, **2013**.

ZUM-Wiki: offene Plattform für Lehrinhalte und Lernprozesse:
http://wikis.zum.de/zum/Hauptseite

Alles entspricht der Zahl

Freiwillig, Einzelarbeit

Die Pythagoreer sprachen den Zahlen viele Eigenschaften zu und waren überzeugt, dass alles Seiende durch Zahlen aufgebaut ist. In der Musik bestätigte sich ihre Überzeugung. Sie fanden heraus, dass sich die Intervalle der Tonleiter als Längenverhältnisse einer schwingenden Saite angeben lassen (Oktave 1:2, Quinte 2:3, Quarte 3:4). Doch sie ordneten ihnen auch andere Eigenschaften zu. So stand die Eins für die Seele oder die Vier für Gerechtigkeit (2x2 – gleich mal gleich). Die Zehn (genannt Tetraktys) verehrten sie, da sie ihrer Meinung nach vollkommen vollendet und göttlich ist.

Aufgabe

Viele der angeführten Aussagen klingen heute lächerlich. Andererseits wird vieles in unserem Leben durch Mathematik bestimmt. Computer, Kreditkarten, Wetterberichte, etc. – überall wird Mathematik benötigt. Kannst du dem Gedanken „Alles entspricht der Zahl" etwas abgewinnen? Schreibe einen kurzen Kommentar (ca. ½-1 Seite), beziehe Stellung und begründe deine Meinung.

Material

Ev. Zitate (z.B. DK44 B11; DK58 B4, B5; etc.), Heft/Zettel

Die Pythagoreer

Freiwillig, Einzel- oder Gruppenarbeit

Pythagoras gründete in Kroton (Süditalien) eine Schule, die oft auch als Geheimbund bezeichnet wurde. Die Pythagoreer beschäftigten sich nicht nur mit Mathematik, sondern auch mit der Philosophie, Astronomie und anderen Gegenständen. Dabei fällt es heute schwer zu trennen, welche Erkenntnisse und Ideen von Pythagoras selbst und welche von seinen Schülern_innen stammen.

Aufgabe

Recherchiere im Internet/in den zur Verfügung stehenden Büchern und Kopien über die Schule der Pythagoreer. Gestalte anschließend eine übersichtliche A4-Seite mit den Informationen, die dir am wichtigsten bzw. interessantesten erscheinen.

Material

Computer/Bücher/Kopien, Heft/Zettel

Euklid

Definition

Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge (Elemente, VII. Buch)

Arbeitsauftrag

1. Lies dir das kurze Zitat von Euklid durch.
2. Besprecht die Ansicht Euklids in der Gruppe.
3. Wie lässt sich seine Definition zusammenfassen?
4. Wo liegen eurer Meinung nach Schwierigkeiten?

Gottfried Wilhelm Leibniz

Definition

Drei ist soviel wie 2 und 1, - das ist nur die Definition des Terminus 3; denn die einfachsten Definitionen der Zahlen werden auf diese Weise gebildet: 2 ist 1 und 1, 4 ist 3 und 1, usf. (nach Baumann)

Arbeitsauftrag

1. Lies dir das kurze Zitat von Leibniz durch.
2. Besprecht die Ansicht von Leibniz in der Gruppe.
3. Wie lässt sich seine Definition zusammenfassen?
4. Wo liegen eurer Meinung nach Schwierigkeiten?

Isaac Newton

Definition

Unter Zahl verstehen wir nicht so sehr eine Menge von Einheiten, als das abstrakte Verhältnis einer jeden Größe zu einer anderen Quantität derselben Art, welche als Einheit genommen wird. (nach Baumann)

Arbeitsauftrag

1. Lies dir das kurze Zitat von Newton durch.
2. Besprecht die Ansicht Newtons in der Gruppe.
3. Wie lässt sich seine Definition zusammenfassen?
4. Wo liegen eurer Meinung nach Schwierigkeiten?

George Berkeley

Definition

Die Zahl ist so augenscheinlich relativ und von dem menschlichen Verstande abhängig, dass es kaum zu denken ist, dass irgendjemand ihr eine absolute Existenz außerhalb des Geistes zuschreiben könne. Wir sagen Ein Buch, Eine Seite, Eine Linie; diese alle sind gleich sehr Einheiten, obschon einige derselben mehrere der anderen enthalten. Und in jedem Betracht ist es klar, dass die Einheit sich auf eine besondere Kombination von Ideen bezieht, welche der Geist willkürlich zusammenstellt. (Abhandlung über die Principien der menschlichen Erkenntnis, XII)

Arbeitsauftrag

1. Lies dir das kurze Zitat von Berkeley durch.
2. Besprecht die Ansicht Berkeleys in der Gruppe.
3. Wie lässt sich seine Definition zusammenfassen?
4. Wo liegen eurer Meinung nach Schwierigkeiten?

John Stuart Mill

Definition

Was wird also durch den Namen einer Zahl mitbezeichnet? Natürlich eine Eigenschaft, die der Agglomeration[1], der Anhäufung von Dingen angehört, welche wir mit dem Namen benennen; und diese Eigenschaft ist die charakteristische Weise, in welcher die Anhäufung zusammengesetzt ist oder in Teile getrennt werden kann.

Wenn wir eine Sammlung von Gegenständen zwei, drei oder vier nennen, so sind es keine zwei, drei oder vier im Abstrakten, es sind zwei, drei oder vier Dinge von einer besondern Art, es sind Steine, Pferde, Zolle, Pfunde Gewicht. (System der deduktiven und induktiven Logik, §5)

Arbeitsauftrag

1. Lies dir das kurze Zitat von Mill durch.
2. Besprecht die Ansicht Mills in der Gruppe.
3. Wie lässt sich seine Definition zusammenfassen?
4. Wo liegen eurer Meinung nach Schwierigkeiten?

[1] Anhäufung

Arbeitsblatt

Verschiedene Definitionen der Zahl

Euklid

Definition:

Schwierigkeiten:

Gottfried Wilhelm Leibniz

Definition:

Schwierigkeiten:

Isaac Newton

Definition:

Schwierigkeiten:

George Berkeley

Definition:

Schwierigkeiten:

John Stuart Mill

Definition:

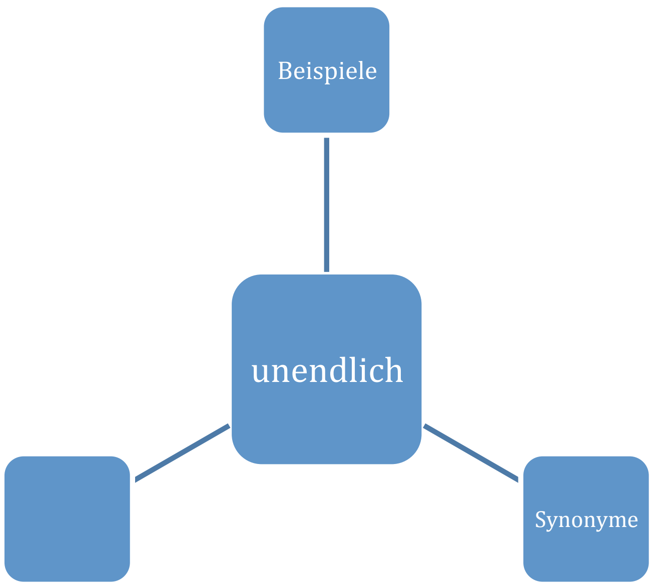
Schwierigkeiten:

Begriffsanalyse

Oft verwenden wir Begriffe ohne ihre Bedeutung genau angeben zu können. Im Folgenden soll der Begriff „unendlich“ daher genauer betrachtet und analysiert werden. Bearbeitet die folgenden Aufgaben in Gruppen. Die Ergebnisse werden anschließend im Plenum besprochen.

1. Mind-Map

Legt eine Mind-Map für den Begriff „unendlich“ an. Schreibt alles auf, was euch dazu einfällt und versucht eure Gedanken zu organisieren. Ihr könnt die vorliegende Mind-Map beliebig erweitern oder eine eigene anlegen.



2. Beispielsätze

Der Inhalt von Begriffen kann oftmals erst im Kontext seiner Anwendung richtig gedeutet werden. Sucht beispielhafte Sätze, in denen „unendlich“ vorkommt. Was soll der Begriff im konkreten Zusammenhang aussagen?

3. Unterschiede

Sucht nach Begriffen, die eine ähnliche Bedeutung haben wie „unendlich“. Wo liegt der Unterschied zwischen den Begriffen? Wie verschiebt sich ihre Bedeutung?