

DIPLOMARBEIT

Modellierung der Steifigkeit und der Stabilität von Wellpappe

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung
des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs
unter der Leitung von

Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr. Thomas Daxner
Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr. Franz G. Rammerstorfer

Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik (E317)

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

Thomas Flatscher
0025279
Neuwaldeggerstraße 18–18a
1170 Wien.

Wien, im Januar 2007

für meinen Bruder Peter
für Oma und Opa

Wenn wir sterben, wird die Seele frei.

Nach Heraklit

Danksagung

Ich möchte mich herzlich bei Herrn Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr. Thomas Daxner bedanken, der mit wertvollen Anregungen und mit seiner Bereitschaft zur Diskussion entscheidend zum Erfolg der Diplomarbeit beigetragen hat. Außerdem bin ich Herrn Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr. Franz G. Rammerstorfer zu Dank verpflichtet, dessen reicher Erfahrungsschatz und beeindruckend tiefgründiges Fachwissen die Zielrichtung und damit die Qualität meiner Diplomarbeit positiv beeinflusst haben. Meinen Betreuern sei auch für das erschöpfende Korrekturlesen ein Dank ausgesprochen. Außerdem möchte ich dem ILSB, das mir das Softwarepaket UCTOOL zur Verfügung gestellt hat, und Herrn Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr. Dieter H. Pahr, der immer Zeit gefunden hat, diesbezüglich gestellte Fragen zu beantworten, danken.

Ganz besonders möchte ich meiner Familie danken, ohne deren Unterstützung mein Studium nicht möglich und ohne deren Geduld diese Arbeit nicht zustande gekommen wäre. Ich bedanke mich auch bei meiner Freundin Isabella Nigg, die mir stets motivierende Worte zu sagen wusste.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Wellpappe, im Besonderen mit der effektiven Steifigkeit und den beulkritischen Belastungen. Darüber hinaus wird im Sinne des Leichtbaus ein Methode entwickelt, um Wellpappe im Hinblick auf möglichst geringes Flächengewicht zu optimieren.

Die zu erfüllenden Nebenbedingungen stellen im Zuge der Optimierung Mindestwerte für die kritische Last bezüglich lokalen Stabilitätsverlusts bei Druckbelastung in Richtung CD¹ und für die Biegesteifigkeit bei Biegung um MD sicher. Die Optimierung erfolgt über einen semi-analytischen und einen rein numerischen Zugang.

Der semi-analytische Zugang folgt dem Gedanken der „primitiven“ Optimierung², Deckschichten und Welle werden getrennt betrachtet. Die beulkritischen Spannungen werden dabei über modifizierte Gleichungen des elastischen Beulens isotroper Platten bestimmt. Im Gegensatz dazu wird beim numerischen Zugang die Last, die zur lokalen Instabilität führt, über Anfangsstabilitätsanalysen mit dem FE-Solver ABAQUS berechnet. Dabei kommen Einheitszellen-Modelle zum Einsatz, an deren Rändern periodische Randbedingungen angeschrieben werden müssen. Mit den Einheitszellen-Modellen wird außerdem die effektive Steifigkeit von Wellpappe ermittelt. Bei der numerischen Optimierung wird der orthotrope Charakter von Papier berücksichtigt, materielles Versagen wird auch hier ausgeschlossen.

Das Ziel der Optimierung wird erreicht, das Flächengewicht kann im Vergleich zu einer handelsüblichen Wellpappe um mehr als 15% reduziert werden, wobei die kritische Drucklast und die Biegesteifigkeit unverändert bleiben. Die druckbelastete, optimierte Struktur zeigt simultanes Beulen der Deckschichten und der Welle.

Um eine Beziehung zwischen den über Anfangsstabilitätsanalysen berechneten beulkritischen Belastungen im Sinne der Meso-Instabilitäten (d.h. lokales Beulen) und der maximalen Tragfähigkeit der Wellpappe im Sinne einer Makro-Stabilitätsgrenze (d.h. globaler Stabilitätsverlust) herzustellen, werden nichtlineare Untersuchungen mit einem Modell eines Plattenstreifens durchgeführt. Die Belastung der Platte erfolgt dabei durch eine Druckkraft in Richtung CD, die Randbedingungen der Platte werden als periodische Randbedingungen in Richtung MD und als eingespannte, frei drehbare Plattenenden bei den Begrenzungen in Richtung CD definiert. Über geometrisch nichtlineare, statische und dynamische Simulationen werden Last-Verschiebungskurven berechnet und der Übergang vom lokalen zum globalen elastischen Beulen analysiert. Durch die Konzentration des wellenförmigen Beulmusters auf eine in der Mitte der Platte liegende Halbwelle (Lokalisierung) ergibt sich das beobachtete *Snapback*-Verhalten. Die nichtlinearen Untersuchungen zeigen, dass bei optimierten Strukturen nach dem Erreichen der aus der entsprechenden Anfangsstabilitätsanalyse erhaltenen kritischen Last die Belastung bis zum Versagen nicht in dem Maße gesteigert werden kann, wie das bei den nicht optimierten Strukturen und bei gleichen absoluten Amplituden der geometrischen Imperfektion der Fall ist.

¹Die Richtung in der Membranebene normal zur Wellenerzeugenden wird mit MD (*Machine-Direction*) und die Richtung parallel zur Wellenerzeugenden mit CD (*Cross-Direction*) bezeichnet.

²„Primitives“ Optimieren bedeutet, dass mehrere Versagensarten gleichzeitig erreicht werden.

Abstract

The presented thesis deals with the characterisation of the mechanical behaviour of corrugated board with an emphasis on the homogenized stiffness and the buckling behaviour. Furthermore, a technique for the optimisation of corrugated board with respect to the weight per unit of plate area is developed.

The optimisation constraints ensure buckling stability in terms of enforcing lower limits for the critical membrane-load in the direction CD³ concerning local instabilities and for a necessary bending stiffness about the MD axis. The optimisation is carried out by semi-analytical and numerical approaches.

The semi-analytical procedure utilises the idea of „primitive“ optimization⁴, where the liners and the flute are analysed separately with respect to their buckling behaviour. The buckling loads are calculated using equations of the elastic buckling of isotropic plates which are applied directly to the liners and in a modified version to the flute. The semi-analytical approach uses linear eigenvalue buckling predictions available in the FE code ABAQUS to determine the critical membrane load. To this end, unit cell models with periodic boundary conditions are created. In addition, the unit cell models allow for a prediction of the homogenised stiffness of corrugated board. In the numerical approach the orthotropic behaviour of paper is taken into account, whereas material failure is neglected.

The optimisation is successful, the weight per unit of plate area is reduced considerably (more than 15%) compared to a specific type of commercial corrugated board while the buckling load and the bending stiffness are preserved. For the optimal configuration, that was found with the numerical approach, the liners and the fluting buckle simultaneously when loaded under compression in the CD direction. This can be seen as an *a posteriori* verification of the assumptions made in the semi-analytical optimisation scheme.

Geometrically non-linear simulations are performed for gaining a relationship between the critical buckling load with respect to meso-instabilities (i.e., local buckling) calculated by an eigenvalue buckling prediction and the limit load related to macro-instabilities (i.e., global buckling). In these dynamic and static simulations a finite plate is used, which is constrained between rigid, freely rotating end plates and subjected to a compressive membrane force in the CD direction. The boundary conditions in the MD direction are assumed to be periodic. Load-displacement curves are predicted and the transition from local buckling to global buckling is observed. Due to the localisation of the wavelike buckling mode in a single, central fold, the so-called snap-back phenomenon occurs. The non-linear simulations indicate that the reserve against failure after reaching the buckling membrane-load as calculated by a linear buckling analysis is smaller for the optimized structure as compared to the initial design, provided that the same magnitude for the geometrical imperfections is used. This imperfection sensitivity has to be taken into account in the design of corrugated board for practical use.

³The in-plane direction, that is perpendicular to the generatrix of the flute, is called MD (Machine-Direction), the direction parallel to the generatrix is called CD (Cross-Direction) in the context of corrugated board.

⁴„Primitive“ optimization implies, that several collapse modes are reached simultaneously.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Werkstoff Wellpappe / Motivation	1
1.2	Aufgabenstellung	3
1.3	Methodik	3
1.4	Literatur-Überblick	4
2	Modellbildung	7
2.1	Einheitszelle	7
2.1.1	Flute-Modell Typ 1	8
2.1.2	Flute-Modell Typ 2	9
2.1.3	Flute-Modell Typ 3	10
2.2	Finite Platte	11
2.3	Materialgesetz	12
2.4	Diskretisierung	14
2.5	Elementtypen	16
2.6	Analysemöglichkeiten mit ABAQUS	18
3	Homogenisierung	19
3.1	Theorie der Einheitszelle	19
3.2	Analytisch berechnete Biegesteifigkeit B_1 von Wellpappe	23
3.3	Effektive Steifigkeit von Wellpappe	25
4	Anfangsstabilitäts-Analyse	28
4.1	Stabilitätsverlust von Gleichgewichtslagen	28
4.2	Anfangsstabilitäts-Analyse mit ABAQUS	29
4.3	Länge der Einheitszelle	31
4.4	Lokales Beulen bei allgemeiner Belastung	39
5	Optimierung	43
5.1	Globale Optimierung	43
5.2	Problem-Formulierung	44

5.3	Semi-Analytische Optimierung	46
5.4	Numerische Optimierung	54
6	Nichtlineare Stabilitätsanalyse	66
6.1	Statische nichtlineare Analyse	66
6.2	Dynamische nichtlineare Analyse	69
6.2.1	Implizite direkte Integration	70
6.2.2	Explizite direkte Integration	70
6.3	Materialdämpfung	71
6.4	Snap-Back	72
6.5	Ergebnisse	75
7	Programmaufbau	82
8	Zusammenfassung	87
	Literatur	90

1 Einleitung

1.1 Werkstoff Wellpappe / Motivation

Die moderne Wirtschaft kommt nicht ohne Verpackungen aus, die Gründe dafür sind so vielfältig wie die Verpackungsmöglichkeiten selbst. Eine wichtige Anforderung an Verpackungen besteht darin, das verpackte Gut vor Umwelteinflüssen zu schützen und den Transport zu ermöglichen bzw. zumindest zu erleichtern, und ihn dabei gleichzeitig wirtschaftlicher zu machen. Die Verpackung muss dazu leicht und trotzdem widerstandsfähig sein. Wellpappe verfügt über diese wesentlichen Eigenschaften und ist daher als weit verbreitetes Verpackungsmaterial Gegenstand dieser Arbeit. Wellpappe bietet neben einem günstigen Verhältnis von Tragfähigkeit zu Gewicht weitere Vorteile gegenüber ihren Alternativen. So kann Wellpappe wieder verwertet werden, was aus ökologischer Sicht äußerst wertvoll ist. Weiters ist Wellpappe bedruckbar, wodurch die Aufmerksamkeit potentieller Käufer erregt werden kann; aus logistischer Sicht ist die Stapelfähigkeit von (Falt-)Kisten aus Wellpappe von Interesse.

Man unterscheidet mehrere Formen von Wellpappe. Eine bekannte Form ist die einwellige Wellpappe (*single-wall corrugated board*, vgl. Abbildung 1.1(b)). Sie besteht aus einem wellenförmigen Kern (*Flute*) und zwei geraden Deckschichten (*Liner*), die jeweils an den Scheiteln der Wellen verklebt werden.

Die einfachste Form und gewissermaßen der Ausgangspunkt für alle anderen Aufbauten ist die einseitige Rollenwellpappe (*single face corrugated board*), vgl. Abbildung 1.1(a). Sie besteht aus einer wellenförmigen und einer geraden Lage. Für anspruchsvolle Aufgaben der Verpackung stehen auch zweiwellige (*twin-wall corrugated board*, vgl. Abbildung 1.1(c)) bzw. dreiwellige Wellpappen (*triple-wall corrugated board*, vgl. Abbildung 1.1(d)) zur Verfügung.

Die Produktion von Wellpappe erfolgt in sogenannten Wellpappeanlagen (WPA oder auch *Corrugater*). Dabei wird zuerst das Material der späteren Welle mit Wärme und Dampf behandelt und durch zahnradartige Riffelwalzen geführt, wodurch die wellenförmige Struktur entsteht, vgl. Abbildung 1.2. Danach werden die Scheitel einer Seite der Welle mit Leim bestrichen und im *Single-Facer* mit einer Deckschicht vereinigt. Im *Double-Backer* wird auf ähnliche Weise die zweite Deckschicht angebracht. Erst dann wird die Wellpappe auf eines der herkömmlichen Wellpappenformate zugeschnitten.

Um einen negativen Einfluss von Feuchtigkeit auf die Wellpappe zu unterbinden, wird sie häufig imprägniert. Dabei kann die Beschichtung über sogenannte heiße (z.B. mit Paraffin) oder kalte Verfahren (z.B. mit Lacken) erfolgen [9].

Nach den Gegebenheiten im Produktionsprozess werden auch die strukturellen Richtungen von Wellpappe bezeichnet. Die Richtung, die in der Fertigungsstraße der Laufrichtung entspricht, wird mit MD (*Machine-Direction*) und die Richtung der Wellenerzeugenden mit CD (*Cross-Direction*) bezeichnet. Die transversale Richtung soll mit TD (*Transverse Direction*) bezeichnet werden, vgl. Abbildung 1.1.

Es gibt zahlreiche Wellpappenrohapiere, denen ein großer Anteil an wieder verwertetem

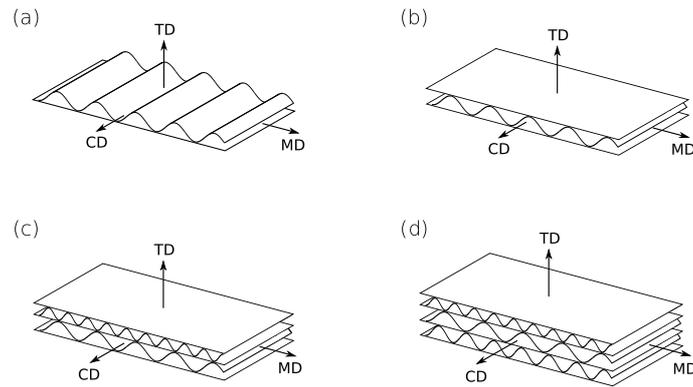


Abbildung 1.1: Formen von Wellpappe: einseitige Rollenwellpappe (a), einwellige (b), zweiwellige (c) und dreiwellige (d) Wellpappe. Richtungen MD, CD und TD.

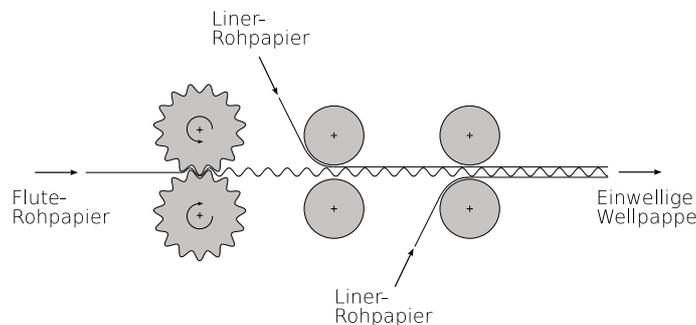


Abbildung 1.2: Prinzip der Produktion von Wellpappe.

Papier gemeinsam ist. Der notwendige Frischfaseranteil (Primärfaseranteil), der aus Holz gewonnen werden muss, liegt knapp über 20%. Das restliche Material kann aus Altfasern, d.h. aus Altpapier, gewonnen werden. Bei besonders beanspruchter Wellpappe kann der Frischfaseranteil erhöht werden, vgl. [9].

Die charakteristischen Querschnitts-Abmessungen von Wellpappe werden klassifiziert und je nach Ausprägung häufig mit den Buchstaben A, B, C, E oder F gekennzeichnet. Die Einteilung bezieht sich dabei auf die Wellenteilung (entspricht der Wellenlänge) und auf die Wellenhöhe [9].

Wellpappe ist ein gebräuchlicher Werkstoff zur Herstellung von Faltkisten und Schachteln. Dabei erleichtert ein internationaler Standard – der FEFCO-Code – den Informationsaustausch. Ein sehr häufig verwendeter Typ von Faltkisten wird mit „RSC“ (*Regular Slotted Container*) bezeichnet, dieser Art von Faltkisten wird der FEFCO-Code 0201 zugewiesen, [17]. In Faltkisten ist die Wellpappe so ausgerichtet, dass die Richtung der Wellenerzeugenden (CD) in den Seitenwänden der Stapelrichtung entspricht.

1.2 Aufgabenstellung

Im Zuge dieser Arbeit soll Wellpappe charakterisiert werden. Besonderes Augenmerk soll dabei auf die effektive Steifigkeit einer Platte aus Wellpappe und auf das Verhalten im Bereich der Stabilitätsgrenze und nach dem Stabilitätsverlust gelegt werden. Mit den gewonnenen Erkenntnissen soll Wellpappe optimiert werden.

Es darf im Allgemeinen linear elastisches, isotropes bzw. orthotropes Materialverhalten der Schichten und eine perfekte Bindung zwischen Kern und Deckschichten angenommen werden. Materielles Versagen darf ausgeschlossen werden.

1.3 Methodik

Der Schwerpunkt der Arbeit liegt in der Anwendung der Finite-Elemente-Methode (FEM). Es wird eine Finite-Elemente-Modell von Wellpappe erstellt, um damit die mechanischen Eigenschaften von Wellpappe untersuchen zu können. Dabei kommt zum einen ein Einheitszellenmodell und zum anderen ein Modell einer finiten Platte zum Einsatz.

Nachstehende Software(pakete) werden verwendet:

- ABAQUS/CAE 6.5-3 als Pre- u. Postprozessor,
- ABAQUS/Standard 6.5-3 als FE-Solver,
- UCTOOL (V21) zum Erstellen der periodischen Randbedingungen,
- UCTOOL (V21) zur Berechnung der effektiven Steifigkeit,
- Mathematica 5.2 für analytische Berechnungen.

Lineare Analysen werden vorwiegend mit dem Modell einer Einheitszelle durchgeführt. Die erforderlichen periodischen Randbedingungen werden mit dem am ILSB⁵ entwickelten Softwarepaket UCTOOL generiert. Das Programm UCTOOL dient auch zur Berechnung der effektiven Steifigkeit der Platte.

Des Weiteren wird eine Möglichkeit geschaffen, Anfangsstabilitätsanalysen im Bezug auf lokales Beulen bei beliebiger Belastung durchzuführen. Bei allen Untersuchungen sind Parameter-Studien (z.B. für eine gezielte Variation der Abmessungen) leicht durchzuführen. Zuletzt wird ein Methode entwickelt, um Wellpappe im Hinblick auf möglichst geringes Flächengewicht bei Rücksicht auf Nebenbedingungen zu optimieren. Auf Grund des hohen Automatisierungsbedarfs wird die Steuerung der Simulationen mit in Python verfassten Skripten verwirklicht.

Bei nichtlinearen Analysen kommt ausschließlich ein FE-Modell einer finiten Platte zum Einsatz. Dabei werden der Übergang vom lokalen zum globalen (elastischen) Beulen und das Nachbeulverhalten untersucht.

⁵Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik, TU-Wien.

Mit Mathematica werden alle analytischen Berechnungen durchgeführt. Diese werden sowohl zur Kontrolle von numerisch berechneten Größen (z.B. des Flächenträgheitsmoments der sinusförmigen Welle (elliptisches Integral 2. Art)) als auch für eigenständige Berechnungen (vgl. den Ansatz zur semi-analytischen Optimierung in Kapitel 5.3) herangezogen.

1.4 Literatur-Überblick

Wellpappe ist nicht nur aus wissenschaftlicher, sondern auch – da es sich um ein Massenprodukt handelt – aus ökonomischer Sicht ein interessanter Werkstoff. Dementsprechend sind viele Forschungsarbeiten veröffentlicht worden, wobei die Finite-Elemente Methode breite Anwendung findet. Z.B. in [11] wird eine mögliche FE-Modellierung von Wellpappe mit Schalenelementen beschrieben. Dabei werden nichtlineares Materialverhalten und auch Nichtlinearität auf Grund großer Deformationen berücksichtigt. Die Belastung erfolgt in [11] sowohl in der Membranebene als auch in transversaler Richtung. Die nötigen Materialkenngrößen werden durch Experimente mit den Rohpapieren ermittelt. Die Verbindung zwischen Welle und Deckschicht wird über gemeinsame Knoten bzw. mittels Multipoint-Constraints modelliert. Die sich dadurch ergebenden Unterschiede erweisen sich als klein.

Den Einfluss der Klebeverbindungen zwischen Welle und Deckschichten versucht [33] zu klären. Dabei werden Eigenwert-Beulanalysen bei Druckbelastung in der Membranebene durchgeführt. Die Verbindungsstellen werden mit dreilagigen Schalenelementen modelliert.

Auch in [2] werden FE-Simulationen zur Untersuchung von Wellpappe herangezogen. Hier wird ein Modell einer Rechteck-Platte aus Wellpappe bei Druckbelastung und einfacher Lagerung der Ränder analysiert. Gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen konnte auch hier gezeigt werden.

Deckschichten von Wellpappe sind in sich häufig zweilagig aufgebaut [9]. Die Versagensmechanismen in einer zweilagigen, äußeren Deckschicht während der Faltenbildung sind in [12] untersucht. Die Belastung entspricht einer Kombination aus Biegung und Zug, das eigentlich orthotrope Materialverhalten von Papier wird durch ein isotropes Materialgesetz ersetzt. Materialversagen durch Faserbruch bzw. durch eine aufbrechende Verbindung zwischen den Fasern und durch Delamination innerhalb der zweilagigen Deckschicht werden als die dominanten Fehlermechanismen identifiziert.

In [24] wird ein Versagenskriterium zur Berechnung der kritischen Spannungen in den Deckschichten bei Belastung in der Membranebene entwickelt, das sowohl materielles und strukturelles Versagen (lokales Beulen der Deckschichten) berücksichtigt. Die damit berechneten kritischen Spannungen stimmen besser mit experimentell ermittelten Vergleichswerten überein als jene kritische Spannungen, die allein mit einem quadratischen Versagenskriterium berechnet wurden. Das beschriebene Versagenskriterium ist neben anderen umfangreichen Arbeiten in [22] enthalten.

Das Verhalten von Wellpappe bei Belastung in transversaler Richtung (normal zu den Deckschichten) wird in [14] untersucht. Dabei zeigt sich, dass unterschiedliche Beulmoden eingeleitet werden können. Die Systemantwort weist Durchschlagsverhalten auf, zunehmender Selbstkontakt führt schließlich zu einer fast vollständigen Verdichtung der Well-

pappe. Diesbezügliche numerische Untersuchungen sowie Ergebnisse aus Experimenten sind in [14] zu finden.

Zahlreiche Forschungsarbeiten wurden auch auf dem Gebiet der Homogenisierung von Sandwich-Konfigurationen veröffentlicht. So werden z.B. in [7] verschiedene periodische Kernstrukturen von Platten untersucht und die Membransteifigkeiten und die Biegesteifigkeiten mit Hilfe der Finite Elemente Methode (FEM) berechnet.

Die Schubsteifigkeit in transversaler Richtung darf bei der Berechnung der effektiven Steifigkeit und bei der Untersuchung der Stabilität von Wellpappe-Platten nicht vernachlässigt werden [21]. In [21] wird ein theoretisches Modell zur Bestimmung des effektiven Schubmoduls $G_{\text{MD-TD}}$ entwickelt. Ein oberer Grenzwert dafür ergibt sich mit der Annahme starrer Deckschichten, der Einfluss von Deckschichtdeformationen durch elastisches Deckschichtmaterial wurde quantifiziert und als nicht vernachlässigbar identifiziert. Der effektive Schubmodul $G_{\text{MD-TD}}$ ist stark von der Geometrie der Welle abhängig und bei wellenförmigen Kernen im Allgemeinen kleiner als der effektive Schubmodul $G_{\text{CD-TD}}$. Der Vergleich der berechneten Schubmoduli mit experimentell ermittelten Vergleichswerten zeigt, dass die analytischen Berechnungen zu große Werte liefern. Der Grund dafür könnte nach [20] darin liegen, dass für die analytische Berechnung der Schubmoduli Materialkenngrößen verwendet werden, die vor der Umformung des Wellenmaterials zur Welle gemessen wurden. Eine mögliche Schädigung des Wellen-Materials durch den Produktionsprozess wird damit nicht berücksichtigt.

Eine Möglichkeit, den Einfluss von transversalen Schubdeformationen in der Beulspannung von orthotropen Platten zu berücksichtigen, ist in [19] demonstriert. Dabei wird Druckbelastung in der Membranebene und gelenkige Lagerung aller Ränder angenommen. Die analytischen Ergebnisse werden mit kritischen Lasten aus FE-Analysen verglichen, die Werte stimmen gut überein. Beim Vergleich mit experimentell ermittelten Beullasten zeigen sich größere Abweichungen, was vermutlich z.T. an der schwierigen experimentellen Bestimmung von Beullasten und z.T. am nichtlinearen Materialverhalten des Papiers liegt [19].

In [16] sind nichtlineare FE-Analysen orthotroper Wellpappe-Platten bei Druckbelastung in der Membranebene zu finden. Dabei wurde der wellenförmige Kern durch ein äquivalentes homogenes Material ersetzt und u.a. der Einfluss von Imperfektionen (bezüglich globaler Auslenkung) und der Schubsteifigkeit des Kerns auf die Beullast untersucht. Wie andere Platten ist auch Wellpappe hinsichtlich globalen Plattenbeulens nicht imperfektionsempfindlich, was für anfängliche Auslenkungen bis zu Werten im Bereich der Plattendicke gezeigt werden konnte. Unterschreitet die Schubsteifigkeit einen Grenzwert, so ist ein deutlicher Abfall der Beullast die Folge [16].

Der Einfluss von transversalen Schubdeformationen auf die kritische Last bezüglich globalen Stabilitätsverlusts wird auch in [18] verdeutlicht. Auftretende Unterschiede zwischen analytisch berechneten und gemessenen Last-Verschiebungskurven bei großen globalen Auslenkungen werden dadurch erklärt, dass nichtlineares Materialverhalten und lokales Beulen der Deckschichten unberücksichtigt geblieben sind.

In praktischen Anwendungen wird die Belastung in der Membranebene von Wellpappe

häufig biaxialen Charakter aufweisen. Dementsprechend analysiert [28] einen axial gedrückten, auf Verdrillung und Außendruck belasteten Wellpappe-Zylinder, wobei die Wellenerzeugenden parallel zur Zylinderachse ausgerichtet sind. Mit den Ergebnissen konnten Grenzwertkurven der maximal ertragbaren Lasten für verschiedene Belastungskombinationen erstellt werden.

[4] beschäftigt sich mit der effektiven Steifigkeit von Wellpappe, wobei auch hier die Methode der Finiten Elemente zum Einsatz kommt. Die Modellierung der lokalen Geometrie erfolgt mit orthotropen Schalenelementen. Um ein Schalenelement mit den mechanischen Eigenschaften von Wellpappe zu entwickeln, wird über einen energetischen Ansatz ein Zusammenhang zwischen der durch statische Kondensation reduzierten Steifigkeitsmatrix einer FE-Analyse und der effektiven Steifigkeitsmatrix eines Plattenabschnittes hergestellt [4].

Wellpappe wird u.a. dazu verwendet, leichte, billige und doch widerstandsfähige Schachteln und Faltkisten zu produzieren. Dementsprechend ist es nahe liegend, dass Berechnungsmethoden für den Entwurf von Produkten aus Wellpappe von Interesse sind. Zu den semi-empirischen Modellen zur Auslegung von Wellpappe zählt auch die Formel nach McKee [15].

Um detailliertere Aussagen über die Tragfähigkeit von Wellpappe und den daraus hergestellten Kisten machen zu können, findet auch hier die FEM breite Anwendung.

In [5] werden zu Beginn die mechanischen Eigenschaften von Wellpappenrohropapieren charakterisiert. Mit den gemessenen Materialkenngrößen wird ein detailliertes FE-Modell einer symmetrischen, einwelligen Wellpappe erzeugt. Durch Homogenisierung wird ein FE-Element erzeugt, das dieselben effektiven Steifigkeiten wie die modellierte Wellpappe besitzt. Mit diesem Element wiederum wird die Tragfähigkeit von Faltkisten bei einer Belastung, wie sie z.B. beim Stapeln von Kisten entsteht, untersucht. Dabei ist sowohl das anfängliche lokale Beulen, als auch die maximal ertragbare Last von Interesse. Zwischen den letzten beiden kritischen Lasten kann innerhalb der gemachten Versuche ein Zusammenhang beobachtet werden. Alle numerischen Ergebnisse werden in [5] über die Simulation standardisierter Test (ECT (*Edge Compression Test*) bzw. BCT (*Box Compression Test*)) mit Ergebnissen aus Experimenten verglichen.

Ein ähnlicher Zugang ist auch in [17] zu finden.

Wellpappe ist im Gebrauch häufig schwankenden Umweltbedingungen ausgesetzt, wobei besonders Feuchtigkeit die Tragfähigkeit und das Langzeitverhalten (vgl. Kriechen) von Wellpappe beeinflussen kann. Quellen, die sich mit dem Einfluss von Feuchtigkeit und dem Langzeitverhalten beschäftigen, können [10] entnommen werden. Dort ist auch eine detailliertere Zusammenfassung von Fachliteratur, die sich mit Wellpappe beschäftigt, zu finden.

2 Modellbildung

2.1 Einheitszelle

Wellpappe ist fein strukturiert, so ist z.B. die Wellenlänge klein im Vergleich zu den in der Praxis verwendeten Plattenabmessungen. Ein FE-Modell einer Platte müsste daher aus sehr vielen Elementen bestehen, um die Struktur genügend genau auflösen zu können. Der Rechenaufwand wäre sehr groß. Die Methode der Einheitszelle (Unit-Cell-Theorie) löst dieses Problem: Damit muss nur eine Periode der Welle und auch nur ein relativ kleiner Ausschnitt in CD-Richtung (siehe Abbildung 1.1) modelliert werden. An den Knoten der Begrenzungsflächen der Einheitszelle werden periodische Randbedingungen angeschrieben, wodurch das Verhalten einer infiniten Platte simuliert werden kann. Die Randbedingungen wurden innerhalb dieser Arbeit mit dem am Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik entwickelten Softwarepaket „UCTOOL“ erstellt. Näheres zum Thema Einheitszelle ist in Kapitel 3 zu finden, für Details siehe [25].

Das Modell der Wellpappe besteht aus Schalenelementen, wobei sich Deckschicht und Kern im Bereich der Klebestelle Knoten teilen. Bei Modellen mit konventionellen Schalenelementen definieren die Knoten eine Referenzebene, die nach den Standardeinstellungen die Mittelebene der Schale bildet. Würde dies Einstellung beibehalten, gäbe es im Bereich der Verbindung zwischen Welle und Kern auf Grund der einfachen Modellgeometrie Materialüberschneidungen. Um das zu verhindern, wurde bei der Definition der Deckschicht-Schalen ein „Offset“ verwendet. Die ABAQUS-Option `OFFSET`⁶ bewirkt eine Verschiebung der Schalenmittelebene aus der Referenzebene. In Abbildung 2.1 ist die reale Geometrie der Modellgeometrie gegenübergestellt.

Anmerkung: Es wurde zu Beginn der Arbeiten überlegt, die Mittelebenen der Deckschichten als Referenzebenen zu benutzen. Die Verbindung zwischen Deckschicht und Kern könnte dann mittels sogenannter „Multipoint-Constraints“ verwirklicht werden: Bei Multipoint-Constraints werden ABAQUS-intern Freiheitsgrade der betroffenen Knoten eliminiert, wodurch auf diese keine weiteren Zwangsbedingungen angewendet werden dürfen. Liegen derartige Knoten auf Begrenzungsflächen der Einheitszelle, würde das im Zusammenhang mit den von UCTOOL erstellen „Equation-Constraints“ zu Problemen führen.

Wie Abmessungen im Folgenden bezeichnet werden, ist ebenfalls in Abbildung 2.1 ersichtlich. Es sind b_{uc} die Breite und h_{uc} die Höhe der Einheitszelle, b_{wl} ist die Wellenlänge der Welle. t_L bezeichnet die Dicke der Deckschicht (Liner) und t_F die Dicke des Kerns (Flute). b_b entspricht der Breite der Klebefläche und b_{hsin} der halben Wellenlänge ohne Berücksichtigung der Klebefläche. h_o kennzeichnet die erforderliche Verschiebung der Referenzebene aus der Schalenmittelebene bei Deckschicht-Schalen. Die Ausdehnung der Einheitszelle in 1-Richtung (CD) wird als Länge der Einheitszelle mit l_{uc} bezeichnet.

Die Verbindung zwischen Deckschicht und Kern wurde – wie bereits erwähnt – mit einer Klebefläche der Breite b_b modelliert. Die Breite b_b wird über den dimensionslosen

⁶ABAQUS/CAE unterstützt die Option `OFFSET` nicht, bietet aber die Möglichkeit, Befehle direkt in das erzeugte Inputfile einzufügen. So wurde hier die gesamte Schalendefinition, inklusive der `OFFSET`-Option und der Definition der Materialorientierung (`*ORIENTATION`) ins Inputfile eingefügt.

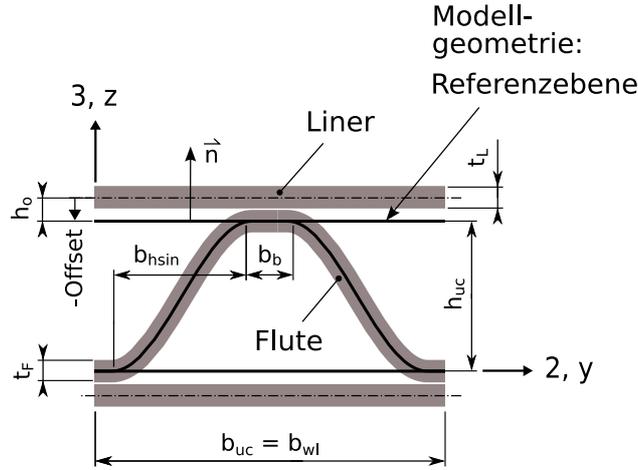


Abbildung 2.1: Geometrie des Modells neben der schematischen Darstellung von herkömmlicher Wellpappe. h_o kennzeichnet die erforderliche Verschiebung der Referenzebene aus der Schalenmittelebene bei Deckschicht-Schalen; die positive Richtung wird über die Schalennormale \vec{n} definiert.

Parameter β_b angegeben, für den gilt:

$$\beta_b = \frac{b_b}{b_{wl}}. \quad (2.1)$$

Der Parameter β_b kann Werte im Bereich von $0 \leq \beta_b \leq 0.5$ annehmen. Aus Gründen der Einfachheit wurde meist $\beta_b = 0$ gewählt.

Die Geometrie von Wellpappe wurde auf mehrere Arten abgebildet, wobei sich die Modelle nur durch die Form des wellenförmigen Kerns unterscheiden. Beim ersten Modell (Flute-Modell 1) ist der Kern sinusförmig ausgeführt, beim zweiten Modell wird das schwach gekrümmte Stück um den Wendepunkt der Sinuskurve durch eine gerade Strecke ersetzt. Das dritte Modell unterscheidet sich deutlicher von den beiden vorhergehenden; hier setzt sich der Kern aus kreisförmigen Rundungen und geraden Zwischenstücken zusammen.

2.1.1 Flute-Modell Typ 1

In Abbildung 2.2 ist eine perspektivische Darstellung des Einheitszellenmodells und eine schematische Darstellung des Querschnitts jeweils für das Flute-Modell Typ 1 zu sehen.

Die Welle ist bei dieser Modellierung sinusförmig ausgeführt. Es wäre nahe liegend, den Sinus mit einem Spline anzunähern und diesen anschließend zu vernetzen. Splines werden in ABAQUS/CAE ungleichmäßig diskretisiert, d.h. bei Betrachtung der so vernetzten Welle in 1-Richtung fallen die Knoten nicht genau in einem Punkt zusammen. Vielmehr ist eine unregelmäßige Streuung zu erkennen. Diese Abweichungen hindern UCTOOL daran, Knoten als zusammengehörig zu erkennen und es wird somit keine Kopplung definiert. Es blieb nichts anderes übrig als den Sinus als Abfolge von kurzen Strecken (Strecken-zug) zu modellieren, wobei die Länge einer Strecke der Elementgröße entspricht. Bei der

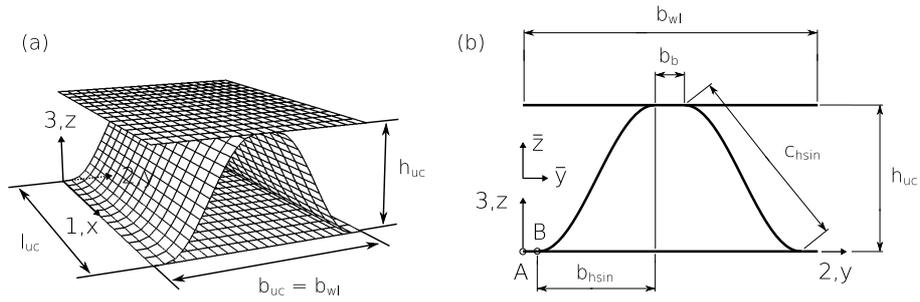


Abbildung 2.2: Einheitszellenmodell mit Flute-Modell Typ 1: $b_{uc} = b_{wl}$, $b_{wl}/h_{uc} = 2$, $\beta_b = 0.1$; Links: Perspektivische Ansicht, $\delta_{23} = 0.075$, $\delta_1 = 2.0$; Rechts: Darstellung des Querschnitts.

Verwendung von bilinear interpolierten Elementen ist diese Art der Modellierung ohnehin unumgänglich. Bei biquadratischen Elementen wäre ein vernetzter Spline der Modellierung mit einem Streckenzug auf jeden Fall vorzuziehen.

2.1.2 Flute-Modell Typ 2

In Abbildung 2.3 ist eine perspektivische Darstellung des Einheitszellenmodells und eine schematische Darstellung des Querschnitts jeweils für das Flute-Modell Typ 2 zu sehen.

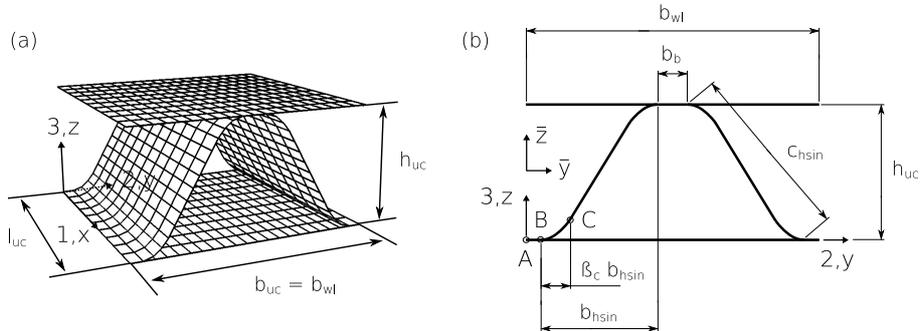


Abbildung 2.3: Einheitszellenmodell mit Flute-Modell Typ 2: $b_{uc} = b_{wl}$, $b_{wl}/h_{uc} = 2$, $\beta_b = 0.1$, $\beta_c = 0.25$; Links: Perspektivische Ansicht, $\delta_{23} = 0.075$, $\delta_1 = 2.0$; Rechts: Darstellung des Querschnitts.

Beim Flute-Modell 2 werden die gekrümmten Teile der Welle analog zu Flute-Modell 1 modelliert, der Sinus wird allerdings von einem geraden Stück unterbrochen. Der Anteil des geraden Stücks an der halben Wellenlänge ohne Klebefläche b_{hsinn} wird über die dimensionslose Größe β_c angegeben. Mit β_c ergibt sich eine auf die 2-Achse projizierte Länge des geraden Zwischenstückes von $b_{hsinn} (1 - 2\beta_c)$, vgl. Abbildung 2.3.

β_c kann Werte im Bereich von $0 \leq \beta_c \leq 0.5$ annehmen. Bei $\beta_c = 0.5$ bleibt der Sinus im Vergleich zum Flute-Modell Typ 1 unverändert, bei $\beta_c = 0$ geht die Krümmung der Welle verloren und es entsteht eine fachwerksähnlicher Kern.

2.1.3 Flute-Modell Typ 3

In Abbildung 2.4 ist eine perspektivische Darstellung des Einheitszellenmodells und eine schematische Darstellung des Querschnitts jeweils für das Flute-Modell Typ 3 zu sehen.

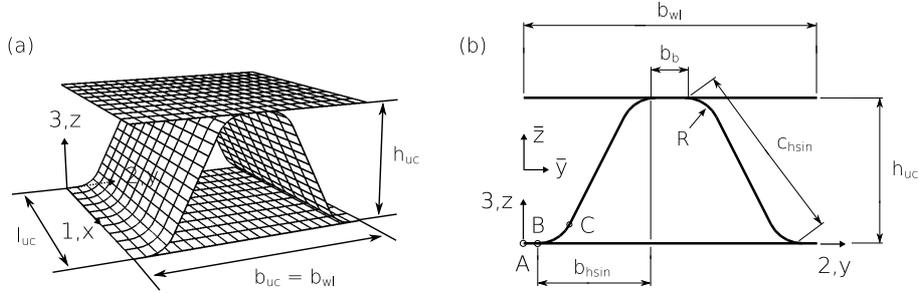


Abbildung 2.4: Einheitszellenmodell mit Flute-Modell Typ 3: $b_{uc} = b_{wl}$, $b_{wl}/h_{uc} = 2$, $\beta_b = 0.1$, $\beta_r = 0.3$; Links: Perspektivische Ansicht, $\delta_{23} = 0.075$, $\delta_1 = 2.0$; Rechts: Darstellung des Querschnitts.

Bei diesem Modell muss neben b_{wl} , h_{uc} , l_{uc} , t_L , t_F und β_b noch der Radius der Rundungen angegeben werden. Dies geschieht mit dem dimensionslosen Parameter β_r , für ihn gilt:

$$\beta_r = \frac{R}{b_{hsin}}. \quad (2.2)$$

Der Parameter β_r kann Werte im Bereich von $0 \leq \beta_r \leq 0.5$ annehmen. $\beta_r = 0$ führt wieder auf eine fachwerksähnliche Kernstruktur, bei $\beta_r = 0.5$ entsprechen die gekrümmten Teile der Welle s-förmig angeordneten Viertelzylindern.

Bei passender Wahl der Größen β_b und β_c bzw. β_r degeneriert die Welle zu den in Abbildung 2.5 dargestellten Formen. Auf diese wird hier nicht näher eingegangen. Für allgemeine Information über Platten mit fachwerksähnlichen Kernaufbau siehe z.B. [29]. Eine detaillierte Analyse der Versagensmechanismen von Sandwich-Platten mit prismatischen Kernen und eine darauf aufbauende Optimierung ist in [35] zu finden.

Um das Problem der Optimierung auch semi-analytisch lösen zu können, siehe Kapitel 5.3, wird ein Modell des Kerns ohne Deckschichten benötigt. Dieser Umstand wurde bei der Modellgenerierung berücksichtigt.

Anmerkung: Die Software UCTOOL benötigt bei eben-periodischen Problemen eine spezielle Lage der Koordinatenachsen. Die 1- und die 2-Achse müssen die Richtungen in der Ebene definieren, die 3-Achse muss der transversalen Richtung entsprechen. In ABAQUS/CAE wurde die Geometrie mit der Funktion EXTRUDE erstellt. Dafür muss vorher eine Skizze des erzeugenden Querschnitts konstruiert werden. Nach den Standardeinstellungen wird die erste Skizze immer in der 1-2-Ebene gezeichnet, passend für das UCTOOL wäre aber die 2-3-Ebene. Um diese Voreinstellung zu umgehen, musste ein Hilfskörper gezeichnet werden. Erst dann konnte die Skizzen-Ebene beliebig gewählt werden. Nach dem Extrudieren wurde der überflüssige Körper wieder gelöscht.

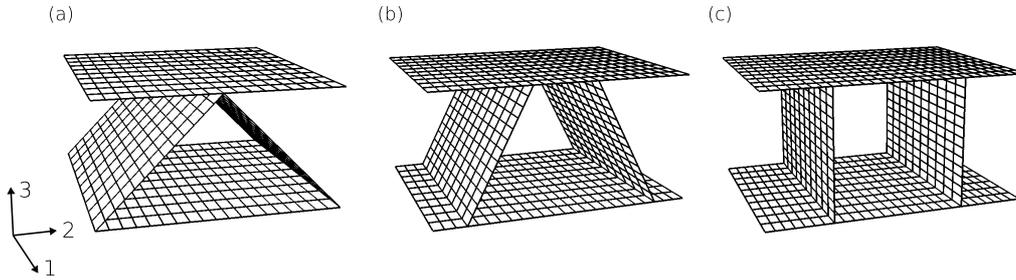


Abbildung 2.5: Mögliche Formen einer degenerierten Welle.
 $\beta_b = 0$ (a), $\beta_b = 0.25$ (b) und $\beta_b = 0.5$ (c);
 $\beta_c = 0.5$ mit Flute-Modell Typ 2 oder $\beta_r = 0$ mit Flute-Modell Typ 1.

2.2 Finite Platte

Wird nach dem Auftreten von lokalen Beulen die Belastung weiter gesteigert, so wird die Platte schließlich global Beulen und im Zuge des Versagens eine dominierende Falte ausbilden (Lokalisierung der Deformationen). In diesem Bereich der Systemantwort verliert die Deformationsfigur ihre ursprüngliche Periodizität. Deshalb wurden alle nichtlinearen Untersuchungen mit Modellen von finiten Platten durchgeführt. Die Geometrie entsprach dabei der des Einheitszellenmodells, lediglich die Ausdehnung in 1-Richtung wurde deutlich größer gewählt, $l = 60$ mm.

Abbildung 2.6 zeigt ein Modell der finiten Platte. Zum Erstellen der Randbedingungen wurde nicht mehr UCTOOL verwendet, für die Ausdehnung in Breiten-Richtung (MD bzw. 2-Richtung) wurden trotzdem wieder einfache, periodische Randbedingungen formuliert. Dabei wurde eine Kopplung der Freiheitsgrade der Knoten bei $0 < x < l$ und $y = 0$ mit den Knoten bei $0 < x < l$ und $y = b$ definiert: Es gilt somit für die Freiheitsgrade u_i der Begrenzungsflächen in 2-Richtung:

$$\begin{aligned}
 u_i(x, y = 0, z) &= u_i(x, y = b, z) & i = 1, 2, \dots, 6 \\
 & & 0 < x < l \\
 & & z = 0 \vee z = h
 \end{aligned}$$

Es wurde nur eine Periode der Welle modelliert ($b = b_{wl}$), mit den verwendeten Randbedingungen wird eine in MD-Richtung unendlich ausgedehnte Platte angenommen.

Für die Randbedingungen bei $x = 0$ und $x = l$ wurde eine Einspannung bezüglich einer starren, um die 2-Achse frei drehbaren Platte angenommen. Die Drehachse der Lagerung bei $x = l$ wurde zudem als in 1-Richtung frei verschieblich modelliert.

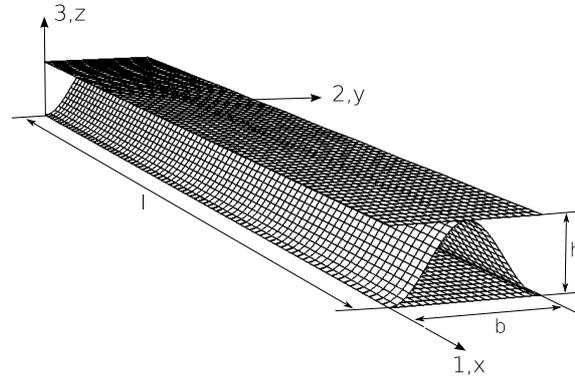


Abbildung 2.6: Modell der Finiten Platte. Abmessungen der isotropen Konfiguration (vgl. Tabelle 2.1), $l = 50$ mm; Flute-Modell Typ 1, $b = b_{w1}$, $b_b = 0$, $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$.

2.3 Materialgesetz

Papier besitzt im Allgemeinen orthotropes Materialverhalten. Außerdem werden bei der Produktion von einwelliger Wellpappe z.T. drei verschiedene Papiersorten verwendet, wodurch die drei Komponenten der einwelligen Wellpappe aus unterschiedlichen Werkstoffen bestehen.

Das orthotrope Papier ist in der Wellpappe so ausgerichtet, dass die Haupt-Richtung mit dem größeren E-Modul mit MD (2-Richtung), die Haupt-Richtung mit dem kleineren E-Modul mit CD (1-Richtung) zusammen fällt. Letztere Aussage gilt nicht nur für die Deckschichten, sondern auch für die Welle, wenn man sich die Richtungen der Materialorientierung auf die 1-2-Ebene projiziert vorstellt. Die beschriebene Anordnung könnte sich auf Grund des Herstellungsprozesses ergeben. Andererseits wird dadurch die strukturell benachteiligte Richtung bezüglich der Materialorientierung bevorzugt und so die Biegesteifigkeit bei Biegung um die 1-Achse erhöht. Die Eigenschaften der Wellpappe sind damit etwas weniger richtungsabhängig.

Es bestand natürlich das Interesse, ein möglichst realitätsnahes Modell der Wellpappe zu untersuchen. Deshalb wurden aus [28] Abmessungen und die dazugehörigen orthotropen Materialkenngrößen einer Wellpappe entnommen. Aus Gründen der Einfachheit wurde die Anisotropie nicht immer berücksichtigt, stattdessen kamen im Zuge dieser Arbeit zwei unterschiedliche Material-Modelle zum Einsatz:

Beim einfacheren Modell wurden für Deckschichten und Kern dieselben isotropen Materialkenngrößen verwendet. Außerdem wurde die Wellpappe symmetrisch modelliert, d.h. die Dicken der Deckschichten waren identisch. Um das Modell vollständig festzulegen, fehlen noch Abmessungen. Sie wurden wie bereits erwähnt nach [28] gewählt, hier wurden

$b_{wl} = 7.2 \text{ mm}$	
$h_{uc} = 3.6 \text{ mm}$	
$t_L = 0.2 \text{ mm}$	$E = 8000 \text{ MPa}$
$t_F = 0.2 \text{ mm}$	$\nu = 0.3$
$\beta_b = 0.0$	

Tabelle 2.1: Isotrope Konfiguration: Abmessungen und Definition des isotropen Materialverhaltens der Schichten.

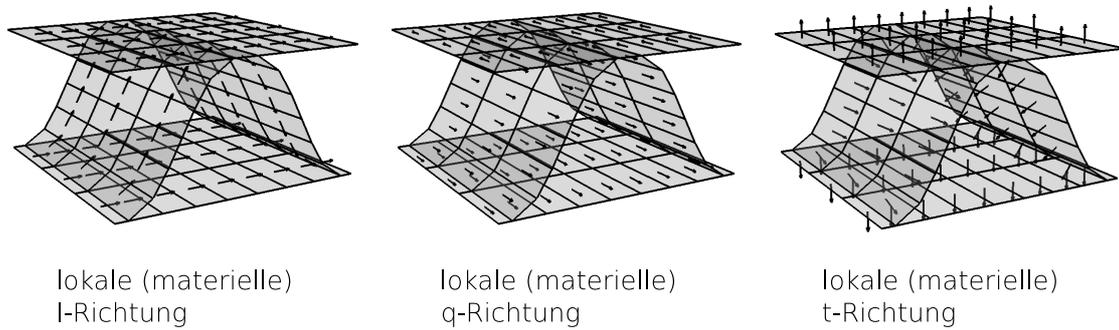


Abbildung 2.7: Lokale Koordinatensysteme zur Definition der Materialorientierung.

sie allerdings in gerundeter Form übernommen. Alle für das einfache Modell verwendete Größen sind in Tabelle 2.1 angegeben. Diese Ausprägung des Wellpappe-Modells wird in den Folgekapiteln als „isotrope Konfiguration“ bezeichnet.

Beim zweiten Modell, das der realen Wellpappe besser entspricht, wurde in den einzelnen Schichten tatsächlich orthotropes Materialverhalten definiert. Die beiden Deckschichten wurden allerdings so modelliert, dass sie sich weder in Bezug auf das Materialverhalten noch in Bezug auf die Lagendicke unterscheiden.

Für die Modellierung des orthotropen Materialverhaltens waren lokale Koordinatensysteme nötig, deren Ausrichtung in Abbildung 2.7 zu sehen ist.

Für das Modell mit orthotropem Materialverhalten der Schichten wurden die Abmessungen aus [28] in exakter Form entnommen und sind zusammen mit den Materialkenngrößen in Tabelle 2.2 angegeben. Diese Ausprägung des Wellpappe-Modells wird in den Folgekapiteln als „orthotrope Konfiguration“ bezeichnet.

Für die Gewichtsbestimmung (im Zuge der Optimierung) und für dynamische Analysen wurde die Dichte benötigt. Das Papier der Deckschichten (orthotrope Konfiguration) besitzt ein Flächengewicht von 186 g/m^2 [28]; das entspricht einer Dichte von rund $\rho = 805 \text{ kg/m}^3$. Diese Dichte wurde bei jeder Materialdefinition verwendet.

		Liner	Flute	
$b_{wl} = 7.2$ mm	E_l	8220	5270	MPa
$h_{uc} = 3.6$ mm	E_q	3010	2260	MPa
$t_L = 0.231$ mm	ν_{lq}	0.17	0.17	-
$t_F = 0.252$ mm	G_{lq}	1920	1340	MPa
$\beta_b = 0.0$	G_{lt}	45	45	MPa
	G_{qt}	45	45	MPa

Tabelle 2.2: Orthotrope Konfiguration: Abmessungen und Definition des orthotropen Materialverhaltens der Schichten gemäß [28]. *Anmerkung:* Die Richtungen l , q und t beziehen sich auf die lokalen Koordinatensysteme nach Abbildung 2.7. Die Schubmoduli G_{lt} und G_{qt} werden in ABAQUS je nach Schalenelementtyp zur Modellierung von transversalen Schubdeformationen in den Schalen benötigt [1].

Die Modellierung erfolgte nicht im SI-System, sondern im (N-mm-s)-System. Um Einheitenkonsistenz zu erreichen, musste die Dichte in t/mm^3 angegeben werden. Dies kann z.B. mittels Einheitengleichung zum 2. Newtonschen Gesetz gezeigt werden:

$$[F] = [m] [a] = [\rho] [V] [a]$$

$$\text{N} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \frac{\text{t mm}}{\text{s}^2} = [\rho] \text{mm}^3 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

Daraus folgt:

$$[\rho] = \frac{\text{t}}{\text{mm}^3}.$$

Um die verschiedenen Materialien definieren zu können, wurden in ABAQUS/CAE sogenannte „Sets“ (Elementgruppen) eingeführt: Set-Liner, Set-Flute und Set-Bonding. Set-Liner besteht aus den Deckschichten, Set-Flute enthält den Kern. Sollte eine Klebefläche modelliert werden ($\beta_b > 0$), so war diese weder im Set-Liner noch im Set-Flute, sondern im Set-Bonding enthalten. Für Set-Liner und Set-Flute wurde ein homogener Schalenquerschnitt definiert, für Set-Bonding – das aus Deckschicht- und Kernmaterial besteht – wurde ein lagenförmiger Aufbau (*COMPOSITE) nötig.

2.4 Diskretisierung

Bei Parametervariationen oder bei der Suche nach dem Optimum kann sich die Geometrie u.U. deutlich ändern. Das Netz soll dabei so generiert werden, dass möglichst Ergebnisse erzielt werden, die unabhängig von allen absoluten Abmessungen sind.

Es wurde überlegt, die Netzfeinheit in Abhängigkeit von der maximalen Krümmung des Sinus

$$\kappa_{\max} = \frac{2\pi^2 h_{uc}}{(b_{wl} - 2b_b)^2}$$

zu bestimmen. Die Idee wurde aber verworfen, da das Netz bei einem kleinem Verhältnis b_{wl}/h_{uc} schnell extrem fein und umgekehrt bei einem großem Verhältnis sehr grob würde.

Auch die Idee einer kontinuierlichen Netzverfeinerung zu den Klebeflächen hin wurde zu Gunsten der folgenden, einfacheren Methode verworfen.

Anzugeben sind die bezogene Elementgröße δ_{23} und der Faktor δ_1 . Die bezogene Elementgröße δ_{23} ist definiert als

$$\delta_{23} = \frac{d_{23}}{c_{\text{hsin}}}, \quad (2.3)$$

darin ist d_{23} der Abstand zweier Knoten auf Kanten in der 23-Ebene und es gilt außerdem (vgl. Abbildung 2.2):

$$c_{\text{hsin}} = \sqrt{b_{\text{hsin}}^2 + h_{\text{uc}}^2}, \quad (2.4)$$

$$b_{\text{hsin}} = \frac{b_{\text{wl}} - 2b_{\text{b}}}{2} = \frac{b_{\text{wl}}(1 - 2\beta_{\text{b}})}{2}. \quad (2.5)$$

Zuletzt wurde die Definition von β_{b} nach Gleichung (2.1) verwendet. Die so errechnete Elementgröße d_{23} wird im Allgemeinen nicht ein ganzzahliger Teil der zu vernetzenden Strecken sein. Deshalb wurde sie jeweils verringert, bis Deckschicht und Welle vernetzt werden konnten.

Der Abstand zwischen zwei Knoten in 1-Richtung ergibt sich aus

$$d_1 = \delta_1 d_{23}. \quad (2.6)$$

Auch diese Größe wurde automatisch verringert, bis die Elementgröße d_1 ein ganzzahliger Bruchteil der Einheitszellenlänge l_{uc} war.

Es stellt sich nun die Frage, wie δ_{23} und δ_1 gewählt werden müssen, um ausreichend genaue Ergebnisse zu erzielen. Darüber gibt Abbildung 2.8 Aufschluss. Darin ist die bezüglich lokalen Stabilitätsverlusts kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ (kritische Membranschnittkraft als Druck in 1-Richtung, 1.Eigenwert) über der bezogenen Elementgröße δ_{23} mit δ_1 als Parameter aufgetragen. Die Parametervariation wurde einmal mit $b_{\text{uc}} = b_{\text{wl}} = 7.2 \text{ mm}$, $h_{\text{uc}} = 3.6 \text{ mm}$ (Abbildung 2.8 links) und ein zweites Mal mit $b_{\text{uc}} = b_{\text{wl}} = h_{\text{uc}} = 5.4 \text{ mm}$ (Abbildung 2.8 rechts) durchgeführt.

Anmerkung: Für die übrigen Parameter wurde die isotrope Konfiguration (vgl. Tabelle 2.1) und Flute-Modell Typ 1 gewählt. Die Kurven wurden mit Einheitszellenlängen von $l_{\text{uc}} = l_{\text{uc}}^{(\text{min})} = 9.73 \text{ mm}$ bei $b_{\text{wl}}/h_{\text{uc}} = 2$ bzw. von $l_{\text{uc}} = l_{\text{uc}}^{(\text{min})} = 8.27 \text{ mm}$ bei $b_{\text{wl}}/h_{\text{uc}} = 1$ aufgenommen. Diese beiden Werte ergeben sich, wenn jeweils mit $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$ nach dem Minimum der kritischen Schnittkraft $|N_{11}^*|$ (1.Eigenwert) in Abhängigkeit von der Länge der Einheitszelle l_{uc} gesucht wird, vgl. Kapitel 4.3.

Bei einem kleineren Verhältnis $b_{\text{wl}}/h_{\text{uc}}$ ist auf Grund der größeren Krümmung für qualitativ gleichwertige Ergebnisse offensichtlich ein feineres Netz nötig. Geht δ_{23} gegen Null, so nähern sich die dargestellten Verläufe Geraden an; diese könnten bis zur Elementgröße $\delta_{23} = 0$ extrapoliert werden. Es lässt sich in Abbildung 2.8 ablesen, dass mit den Einstellungen

$$\begin{array}{c} \delta_{23} = 0.075 \\ \delta_1 = 2.0 \end{array}$$

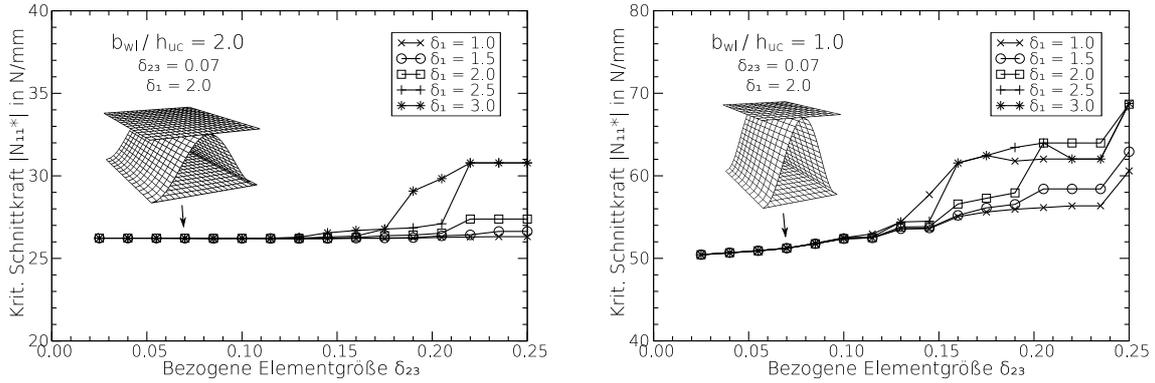


Abbildung 2.8: Kritische Membranschnittkraft N_{11}^* als Linien-Drucklast in N/mm über der bezogenen Elementgröße δ_{23} ; Parameter: Elementgröße δ_1 . Biquadratische Elemente (S8R); Links: $b_{uc} = b_{wl} = 7.2$ mm, $h_{uc} = 3.6$ mm, $t_L = t_F = 0.2$ mm, $l_{uc} = l_{uc}^{(\min)} = 8.27$ mm; Rechts: $b_{uc} = b_{wl} = h_{uc} = 5.4$ mm, $t_L = t_F = 0.2$ mm, $l_{uc} = l_{uc}^{(\min)} = 9.73$ mm.

die kritische Last (bezüglich lokalen Beulens auf Grund von Druck in 1-Richtung) ausreichend genau berechnet wird. Sie werden für die folgenden Untersuchungen verwendet.

2.5 Elementtypen

Für das Modell der Wellpappe wurden konventionelle Schalenelemente verwendet. Diese stehen in ABAQUS sowohl mit bilinearer als auch mit biquadratischer Interpolation zur Verfügung. Sie können bei statischen und dynamischen Analysen eingesetzt werden, zudem können mit ihnen auch große Rotationen simuliert werden. Es sind allerdings nicht alle konventionellen Schalenelemente für große Verzerrungen geeignet, vgl. [1].

In ABAQUS gibt es konventionelle Schalenelemente für „dünne“ Schalen (vgl. Kirchhoff-Hypothese) und für „dicke“ Schalen (vgl. Theorie dicker Schalen [1]). Weiters stehen Mehrzweck-Schalenelemente zur Verfügung, die unabhängig von der Schalendicke eingesetzt werden können. Elemente für dicke Schalen sind laut [1] zu bevorzugen, falls die Schubsteifigkeit in transversaler Richtung wichtig oder quadratische Interpolation gewünscht ist. In der Regel sollten Schalenelemente für dicke Schalen verwendet werden, falls $t/d > 1/15$ gilt; t ist dabei die Schalendicke und d die Elementgröße (in der Membranebene). Laut [1] erlauben Mehrzweckelemente Schub-Deformationen in transversaler Richtung, Elemente für dünne Schalen dagegen vernachlässigen die Schubnachgiebigkeit in transversaler Richtung.

Zudem gibt es Schalen-Elemente mit fünf oder sechs Freiheitsgraden pro Knoten. Elemente mit nur fünf Freiheitsgraden (drei Translationen, zwei Rotationen in der Membranebene) können sehr effizient sein, sind aber nur bei dünnen Schalen und kleinen Verzerrungen einsetzbar. Der Nachteil von sechs Freiheitsgraden pro Knoten liegt darin, dass bei kontinuierlich gekrümmten Flächen nur zwei Freiheitsgrade der Rotation mit einer Steifigkeit beaufschlagt sind. Der freie Freiheitsgrad erzeugt eine Singularität, die mit einer künstli-

chen Steifigkeit verhindert werden muss.

Die Berechnung der Element-Steifigkeitsmatrix kann in ABAQUS für viele Elemente mit „reduzierte Integration“ (R) erfolgen. Es wird dabei die Integrationsordnung vermindert, indem die Anzahl an Integrations-Stützstellen reduziert wird. Reduzierte Integration benötigt im Allgemeinen weniger Rechenzeit, verhindert in vielen Fällen „Locking“ (unnatürliche Versteifung) und liefert zudem unter gewissen Voraussetzungen (z.B. ohne Biegung in der Referenzebene) genauere Ergebnisse, vgl. [1]. Reduzierte Integration kann zu „Nullenergie-Modes“ führen.

Für alle lineare Analysen wurden konventionelle Schalenelemente (S) für dicke Schalen mit der Kennzeichnung S8R verwendet. Die „8“ weist auf biquadratische Interpolation hin, das „R“ steht für reduzierte Integration. Dieser Elementtyp ist nur für kleine Verzerrungen zulässig, bei linearen Untersuchungen ist diese Voraussetzung erfüllt. Das Element S8R verfügt über sechs Freiheitsgrade pro Knoten.

Bei der durchgeführten Untersuchung des Nachbeulverhaltens (nichtlineare Analyse) wurden Schalenelemente vom Typ S4R für dicke und dünne Schalen verwendet. Es handelt sich dabei um bilinear interpolierte Elemente, die ebenfalls sechs Freiheitsgrade pro Knoten besitzen. Auch hier kam wieder reduzierte Integration zum Einsatz. Der Vorteil der Elemente S4R gegenüber den Elementen S8R liegt darin begründet, dass mit ihnen neben den beliebig großen Rotationen auch (eventuell auftretende) große Membranverzerrungen simuliert werden dürfen [1].

2.6 Analysemöglichkeiten mit ABAQUS

ABAQUS bietet eine Vielzahl von statischen und dynamischen Analysemöglichkeiten. Die in dieser Arbeit verwendeten Methoden sollen kurz beschrieben werden; Details sind in den jeweiligen Kapiteln bzw. in [1] zu finden.

Spielen Trägheitseffekte keine Rolle, so kommen im Allgemeinen statische Analysen zum Einsatz. Dazu zählen u.a. herkömmliche statische Analysen, wobei mit diesen sowohl lineare als auch nichtlineare Systemantworten simuliert werden können. Das nichtlineare Verhalten kann auf Grund nichtlinearer Geometrie, nichtlinearen Materialverhaltens oder nichtlinearer Randbedingungen (z.B. Kontakt/Reibung) entstehen. Im Zuge dieser Arbeit wird Nichtlinearität ausschließlich bezüglich der Geometrie berücksichtigt. Darunter sind jene Effekte zu verstehen, die auf großen Deformationen beruhen (große Verschiebungen und große Rotationen, die auch zu großen Verzerrungen führen können).

Weiters sind Anfangsstabilitätsanalysen verfügbar. Sie dienen zur Abschätzung der kritischen Last, bei der Stabilitätsverlust des Gleichgewichtszustands eintritt, vgl. Kapitel 4.

Bei geometrisch nichtlinearen Untersuchungen sind eventuell Gleichgewichtsverzweigungen (Beulen, Knicken,...) oder Durchschlagpunkte von Interesse. Es können auch Gleichgewichtszustände auf instabilen Nachbeulpfaden gefunden werden, wenn die Last nicht vorgeschrieben, sondern als Teil der Lösung angesehen wird. Speziell bei proportionaler Belastung bietet das Verfahren nach Riks viele Vorteile. Mit ihm kann das instabile, geometrisch nichtlineare Versagen und das Nachbeulverhalten einer Struktur untersucht werden, indem Gleichgewichtslagen während der instabilen Phase der Systemantwort ermittelt werden, vgl. Kapitel 6. Alternativ kann Instabilität dynamisch behandelt werden, d.h. Trägheitseffekte werden berücksichtigt.

3 Homogenisierung

3.1 Theorie der Einheitszelle

Im Folgenden soll ein infinites, periodisches Medium betrachtet werden. Um Aussagen über den Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen in derartigen Medien machen zu können, genügt es, das periodische Nahfeld zu analysieren. Dazu wird gedanklich ein periodischer Ausschnitt aus dem Medium entnommen und ausschließlich diese Einheitszelle untersucht. Durch die eingeschränkte Betrachtung geht unter Beachtung gewisser Voraussetzungen hinsichtlich der Längenskalen und der makroskopischen Spannungsgradienten bezüglich der idealisierten, unendlich ausgedehnten Struktur keine Information verloren [25]. Bei der Wahl der Form und der Größe der Einheitszelle muss einerseits auf die Periodizität der Geometrie und des Materials der Struktur geachtet werden, andererseits muss auch die Periodizität der Systemantwort – d.h. die Periodizität der Deformationen – berücksichtigt werden.

Die hier angewandte Methode der Homogenisierung basiert auf dem Konzept der makroskopischen Freiheitsgrade. Der makroskopische Deformationszustand ist dabei über die Verschiebungen der sogenannten Master-Knoten der Einheitszelle vollständig bestimmt [25]. Diese Master-Knoten und ihre Verschiebungen repräsentieren den homogenisierten Deformationszustand, indem sie auf geeignete Weise dem lokalen, mikroskopischen Deformationszustand überlagert werden.

Die Periodizität eines Mediums kann über unabhängige Vektoren $\tilde{\mathbf{p}}^{(k)}$ charakterisiert werden. Bei eben-periodischen Problemen genügen zur Beschreibung zwei derartige Vektoren, $\tilde{\mathbf{p}}^{(A)}$ und $\tilde{\mathbf{p}}^{(B)}$ [25]. Diese sind in Abbildung 3.1 zusammen mit einer allgemeinen Einheitszelle (Grundfläche in Form eines Parallelogramms, Versatz der Kanten 0–A und B–C $d_2 \neq 0$) und den dazugehörigen Master-Knoten abgebildet. Innerhalb dieser Arbeit wurde eine Einheitszelle ohne Versatz ($d_2 = 0$) verwendet.

Die Vektoren der Periodizität werden in einer verallgemeinerten Periodizitäts-Matrix $\tilde{\mathbf{P}}$ zusammengefasst:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}^{(A)}, & \tilde{\mathbf{p}}^{(B)} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Die geometrischen und mechanischen Eigenschaften $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ an der Stelle $\tilde{\mathbf{x}}$ bleiben unverändert, wenn man sich entlang des Vektors $\tilde{\mathbf{t}}$ bewegt:

$$\tilde{\mathbf{t}} = m^{(A)} \tilde{\mathbf{p}}^{(A)} + m^{(B)} \tilde{\mathbf{p}}^{(B)},$$

mit $m^{(A)}, m^{(B)} \in \mathbb{Z}$; d.h. es gilt:

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathcal{F}(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{t}}).$$

Damit müssen die Geometrie und die Werkstoffeigenschaften nur in einem kleinem Volumen V , dem Volumen der Einheitszelle, definiert werden, um das gesamte Medium zu beschreiben. So sind auch die Spannungen und die Verzerrungen im gesamten Medium bekannt, wenn die Spannungen und die Verzerrungen im Volumen V bekannt sind [25].

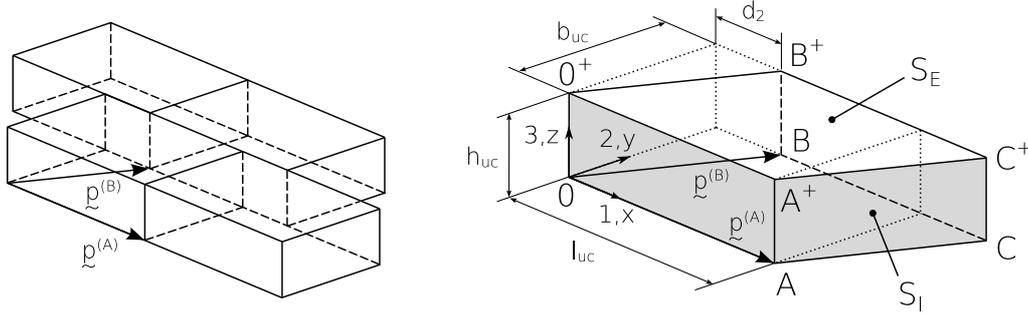


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der Einheitszelle für ein eben-periodisches Medium. Links: Die Einheitszelle entspricht einem periodischen Ausschnitt aus dem eben-periodischen Medium; Rechts: Allgemeine Einheitszelle mit einer Grundfläche in Form eines Parallelogramms, $d_2 \neq 0$. Master-Knoten A , A^+ , B , B^+ , 0 und 0^+ .

Durch Aneinanderreihen der Einheitszellen entsteht ein Modell des zu untersuchenden Mediums. Die Begrenzungsflächen S der in Abbildung 3.1 dargestellten eben-periodischen Einheitszelle kann dabei in S_I und S_E aufgeteilt werden. S_I (*internal*) ergibt sich durch Herausschneiden der Einheitszelle aus dem infiniten Medium und steht mit den benachbarten Einheitszellen in Kontakt, S_E (*external*) entspricht dagegen einer freien Oberfläche.

Im idealisierten Medium muss der lokale Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ beim Schritt von einem zum nächsten periodischen Ausschnitt kontinuierlich sein. Dieses Durchqueren entspricht einem Sprung von einer Seite des Ausschnittes auf die gegenüberliegende Seite.

Mit dem FE-Modell der Einheitszelle kann im Allgemeinen nur exakte Periodizität der Verschiebungen erreicht werden. Damit können die Einheitszellen aneinander gereiht werden, ohne dass sich Überschneidungen oder Lücken ergeben. Um diese Bedingungen zu erfüllen, sind passende Randbedingungen nötig [25].

Ziel der Homogenisierung ist die Bestimmung eines globalen Materialgesetzes. Im Zuge der klassischen Laminattheorie geschieht dies mit Hilfe der effektiven Schalen-Steifigkeitsmatrix; mit ihr kann der Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und den globalen Verzerrungen und Krümmungsänderungen des verschmierten Mediums wie folgt angeschrieben werden [34]:

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{n}} \\ \underline{\underline{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}^{(h)} & \underline{\underline{B}}^{(h)} \\ \underline{\underline{B}}^{(h)} & \underline{\underline{D}}^{(h)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{\bar{\epsilon}}} \\ -\underline{\underline{\bar{\kappa}}} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Dabei sind die Schnittkräfte und Schnittmomente in

$$\underline{\underline{n}} = \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{m}} = \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix}$$

und die globalen Verzerrungen und Krümmungsänderungen in

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11} \\ \mathcal{E}_{22} \\ 2 \mathcal{E}_{12} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\chi}} = \begin{pmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ 2 \chi_{12} \end{pmatrix}$$

zusammengefasst.

$\mathbf{A}^{(h)} = (A_{ij}^{(h)})$ in Gleichung (3.2) repräsentiert die Matrix der MembranstEIFigkeiten, $\mathbf{D}^{(h)} = (D_{ij}^{(h)})$ die Matrix der BiegestEIFigkeiten und $\mathbf{B}^{(h)} = (B_{ij}^{(h)})$ die Matrix der KopelstEIFigkeiten. Bei $\mathbf{B}^{(h)} \neq \mathbf{0}$ werden Schnittkräfte mit Krümmungsänderungen bzw. Schnittmomente mit globalen Verzerrungen gekoppelt. Dann kann z.B. eine Zugkraft eine Verwindung des Mediums verursachen.

Um die Homogenisierung mit der Methode der finiten Elemente durchführen zu können, müssen die in Gleichung (3.2) vorkommenden Größen mit Knotenkräften und Knotenpunktverschiebungen in Zusammenhang gebracht werden.

Die Knoten auf der inneren Begrenzungsfläche S_1 dürfen sich im Zuge der Deformation nur derart verschieben, dass die Einheitszellen wie im undeformierten auch im deformierten Zustand lückenlos und ohne Überschneidungen aneinander gereiht werden können. Dazu sind passende periodische Randbedingungen aufzubringen. Diese Randbedingungen koppeln die Verschiebungen der Knoten einer Begrenzungsfläche mit den Verschiebungen der Knoten der jeweils gegenüberliegenden Begrenzungsfläche der Einheitszelle. Sie lassen sich für eine Einheitszelle nach Abbildung 3.1 wie folgt anschreiben [25]:

$\forall y \in [0, b_{\text{uc}}]$ und $\forall z \in [0, h_{\text{uc}}]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(l_{\text{uc}} + d_2 y/b_{\text{uc}}, y, z) - \mathbf{u}(d_2 y/b_{\text{uc}}, y, z) &= \begin{pmatrix} u_1^{\text{A}} - u_1^0 \\ u_2^{\text{A}} - u_2^0 \\ u_3^{\text{A}} - u_3^0 \end{pmatrix} + \dots \\ &+ \begin{pmatrix} z/h_{\text{uc}} \left((u_1^{\text{A}+} - u_1^{\text{A}}) - (u_1^{0+} - u_1^0) \right) \\ z/h_{\text{uc}} \left((u_2^{\text{A}+} - u_2^{\text{A}}) - (u_2^{0+} - u_2^0) \right) \\ -y/h_{\text{uc}} \left((u_2^{\text{A}+} - u_2^{\text{A}}) - (u_2^{0+} - u_2^0) + d_2/b_{\text{uc}} \left((u_1^{\text{A}+} - u_1^{\text{A}}) - (u_1^{0+} - u_1^0) \right) \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\forall x \in [0, l_{\text{uc}}]$ und $\forall z \in [0, h_{\text{uc}}]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x + d_2, b_{\text{uc}}, z) - \mathbf{u}(x, 0, z) &= \dots \\ &= \begin{pmatrix} u_1^{\text{B}} - u_1^0 \\ u_2^{\text{B}} - u_2^0 \\ u_3^{\text{B}} - u_3^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z/h_{\text{uc}} \left((u_1^{\text{B}+} - u_1^{\text{B}}) - (u_1^{0+} - u_1^0) \right) \\ z/h_{\text{uc}} \left((u_2^{\text{B}+} - u_2^{\text{B}}) - (u_2^{0+} - u_2^0) \right) \\ -x/h_{\text{uc}} \left((u_1^{\text{B}+} - u_1^{\text{B}}) - (u_1^{0+} - u_1^0) \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit den obigen Randbedingungen ist der makroskopische Verzerrungszustand über die Verschiebungen der Master-Knoten der Einheitszelle vollständig bestimmt [25]. Es können nun die charakteristischen Verschiebungen $U_i, V_i, i = 1, 2, 3$, die charakteristischen Rotationen $R_i, S_i, i = 1, 2, 3$ und die Verdrillung T der Einheitszelle eingeführt werden. Diese Größen sind nur von den Verschiebungen der Master-Knoten abhängig.

Auf Grund der Kopplung aller Freiheitsgrade der Knoten auf den inneren Begrenzungsflächen mit den Verschiebungen der Master-Knoten können alle verteilten Lasten über passende Punktlasten in den Master-Knoten eingeleitet werden. Mit FEM können dann die Verschiebungen der Master-Knoten berechnet werden. Sind die Verschiebungen der Master-Knoten bekannt, so können mit ihnen über die charakteristischen Verschiebungen U_i, V_i und Rotationen R_i, S_i und über die Verdrillung T schlussendlich die gesuchten globalen Verzerrungen und Krümmungsänderungen berechnet werden. Für detaillierte Ausführungen sei auf [25, 26] verwiesen.

Der skizzierte Weg lässt sich bei makroskopisch spannungskontrollierter Belastung wie folgt anschreiben: Aus den vorgegebenen Schnittgrößen können die Kräfte an den Master-Knoten berechnet werden, die über die Matrizen $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ und $\Delta \underline{\underline{\mathbf{F}}}$ bestimmt sind [26]:

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \frac{V}{h_{\text{uc}}} \underline{\underline{\mathbf{N}}} (\underline{\underline{\mathbf{P}}}^{\text{T}})^{-1}, \quad (3.3)$$

$$\Delta \underline{\underline{\mathbf{F}}} = \frac{V}{(h_{\text{uc}})^2} \underline{\underline{\mathbf{M}}} (\underline{\underline{\mathbf{P}}}^{\text{T}})^{-1}. \quad (3.4)$$

In den letzten beiden Gleichungen ist V das Volumen der Einheitszelle und $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ die verallgemeinerte Matrix der Periodizität, die die Geometrie der Einheitszelle beinhaltet, vgl. Gleichung (3.1). Weiters enthalten die Matrizen $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ die homogenisierten Schnittgrößen:

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}.$$

Über numerische Simulation können dann die Verschiebungen der Master-Knoten berechnet werden. Damit ist die Matrix der verallgemeinerten Verschiebungen $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ und die Matrix der verallgemeinerten Rotation $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ bekannt. Mit diesen und den folgenden Zusammenhängen können die gesuchten globalen Verzerrungen und Krümmungsänderungen berechnet werden [26]:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\mathbf{U}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} + (\underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1})^{\text{T}} \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{\text{T}} \right), \quad (3.5)$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\mathbf{R}}} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} + (\underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1})^{\text{T}} \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{\text{T}} \right), \quad (3.6)$$

Die globalen Verzerrungen und Krümmungsänderungen sind dabei in den Matrizen $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ und $\underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}$ enthalten:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}} = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} \\ \chi_{21} & \chi_{22} \end{pmatrix}.$$

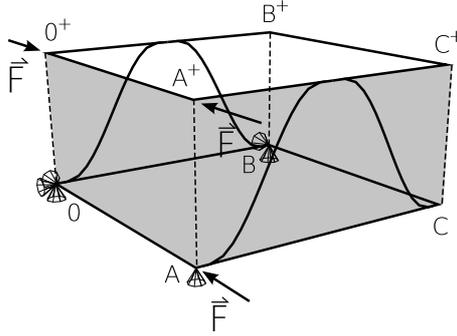


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung der Einheitszelle für die eben-periodische Wellpappe. Versatz $d_2 = 0$. Master-Knoten A, A⁺, B, B⁺, 0 und 0⁺. $|\vec{F}| = |N_{11}| b_{uc}/2$.

Anmerkung: Die charakteristischen Größen U_3 , V_3 , R_3 , S_3 und T , die mit der Geometrie der Einheitszelle und den Verschiebungen der Master-Knoten bestimmt werden können, sind in obigen Gleichungen nicht enthalten. Nichtsdestoweniger sind sie für die Bestimmung der effektiven Steifigkeit nötig.

Anmerkung: Den sechs unabhängigen Schnittgrößen (N_{11}, N_{22}, N_{12}) ⁷ und (M_{11}, M_{22}, M_{12}) ⁸ stehen zwölf Kräfte an den Master-Knoten A, A⁺, B, B⁺, 0 und 0⁺ gegenüber. Für Eindeutigkeit werden damit noch sechs Gleichgewichtsbeziehungen herangezogen [25].

Bei der innerhalb dieser Arbeit häufig untersuchten Druckbelastung in 1-Richtung müssen an den Master-Knoten die in Abbildung 3.2 dargestellten Kräfte \vec{F} mit dem Betrag $|\vec{F}| = |N_{11}| b_{uc}/2$ aufgebracht werden. Dort sind ebenfalls die notwendigen Randbedingungen zur Vermeidung von Starrkörperbewegungen zu sehen. Diese werden im Gegensatz zu den periodischen Randbedingungen nicht vom Programm UCTOOL erstellt.

3.2 Analytisch berechnete Biegesteifigkeit B1 von Wellpappe

Bei einem homogenen, orthotropen Plattenelement mit der Dicke h gilt für die Biegesteifigkeit B_1 bei Biegung um die 2-Achse allgemein

$$B_1 = E_1^{(\text{mod})} I_{22}^{(\text{rel})} = \frac{E_1}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \frac{h^3}{12}, \quad (3.7)$$

wobei $E_1^{(\text{mod})}$ den E-Modul in 1-Richtung mit und E_1 den E-Modul in 1-Richtung ohne Berücksichtigung der Querkontraktionsbehinderung bezeichnet. $I_{22}^{(\text{rel})}$ entspricht dem Flächenträgheitsmoment pro Einheit der Plattenbreite. ν_{12} bzw. ν_{21} kennzeichnen die entsprechenden Querkontraktionszahlen, zwischen ihnen besteht im orthotropen Fall der Zusammenhang $\nu_{12} E_2 = \nu_{21} E_1$, wobei E_2 der E-Modul in 2-Richtung ist.

⁷Membrankräfte je Längeneinheit;

⁸Biege- und Drillmomente je Längeneinheit;

Die Biegesteifigkeit B_1 der Wellpappe bei Biegung um die 2-Achse kann näherungsweise wie folgt berechnet werden:

$$B_1 = E_{1,L}^{(\text{mod})} \frac{2I_{22,L}}{b_{wl}} + E_{1,F}^{(\text{mod})} \frac{I_{22,F}}{b_{wl}}. \quad (3.8)$$

In Gleichung (3.8) sind $E_{1,L}^{(\text{mod})}$ und $E_{1,F}^{(\text{mod})}$ die modifizierten Elastizitätsmoduli der Deckschichten und des Kerns in 1-Richtung. In den Deckschichten muss die Plattenwirkung, die sich in einer Behinderung der Querkontraktion und einer damit verbundenen Versteifung widerspiegelt, berücksichtigt werden. Für den E-Modul der Deckschichten in 1-Richtung gilt somit bei der isotropen Konfiguration

$$E_{1,L}^{(\text{mod})} = E \frac{1}{1 - \nu^2} \quad (3.9)$$

und bei der orthotropen Konfiguration

$$E_{1,L}^{(\text{mod})} = E_{1,L} \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}. \quad (3.10)$$

In der Welle ist die Querkontraktion nicht in dem Maße behindert, es gilt daher im isotropen bzw. im orthotropen Fall:

$$E_{1,F}^{(\text{mod})} = E \quad \text{bzw.} \quad E_{1,F}^{(\text{mod})} = E_{1,F}. \quad (3.11)$$

Weiters bezeichnet $I_{22,L}$ in Gleichung (3.8) das Flächenträgheitsmoment einer Deckschicht und $I_{22,F}$ das Flächenträgheitsmoment der Welle. Die Flächenträgheitsmomente $I_{22,L}$ und $I_{22,F}$ in Gleichung (3.8) sind jeweils für eine Wellenlänge b_{wl} bezüglich einer zur 2-Achse parallelen und durch den Schwerpunkt des Querschnitts gelegten Achse zu bestimmen. Sie lassen sich für Flute-Modell Typ 1 mit $\beta_b = 0$ und mit h_o als dem Offset der Deckschichten (vgl. Abbildung 2.1) wie folgt berechnen:

$$I_{22,L} = \frac{b_{wl} t_L^3}{12} + b_{wl} t_L \left(\frac{h_{uc}}{2} + h_o \right)^2, \quad (3.12)$$

$$I_{22,F} = \int_0^{b_{wl}} \left(\frac{(t_F^{(\text{eq})})^3}{12} + t_F^{(\text{eq})} f_F^2 \right) d\bar{y}. \quad (3.13)$$

In der Gleichung (3.13) entspricht $t_F^{(\text{eq})}$ der Höhe eines zur 3-Richtung (z - bzw. \bar{z} -Richtung) parallelen Querschnitts-Elementes der Welle, vgl. Abbildung 3.3. Die äquivalente Dicke $t_F^{(\text{eq})}$ kann nach geometrischen Überlegungen (ähnliche Dreiecke) wie folgt berechnet werden:

$$t_F^{(\text{eq})} = t \sqrt{1 + (f'_F)^2}, \quad (3.14)$$

wobei

$$f'_F = \frac{df_F}{d\bar{y}}, \quad f_F = -\frac{h_{uc}}{2} \cos \left(\frac{2\pi}{b_{wl}} \bar{y} \right) \quad (3.15)$$

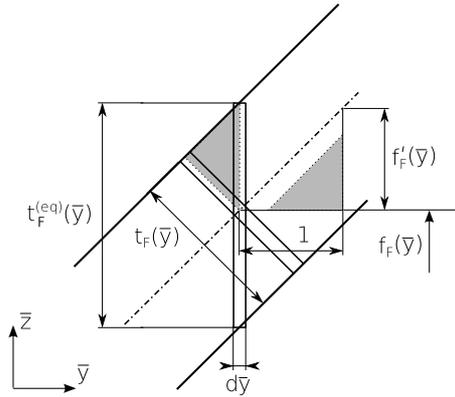


Abbildung 3.3: Dicke $t_F^{(eq)}$ eines zur 3-Richtung (z - bzw. \bar{z} -Richtung) parallelen Querschnitts-Elementes der Welle. Die Lage des \bar{y} - \bar{z} -Koordinatensystems ist in Abbildung 2.2 zu sehen.

gilt. Die Lage des in Gleichung (3.13) verwendeten \bar{y} - \bar{z} -Koordinatensystems ist in Abbildung 2.2 zu sehen.

Die Gleichung (3.13) führt auf ein Elliptisches Integral 2. Art und kann mit Mathematica gelöst werden.

Anmerkung: Bei Flute-Modell Typ 1 und Typ 2 wird die sinusförmige Welle im Zuge der Diskretisierung durch einen Streckenzug ersetzt (vgl. Kapitel 2). Es sei bemerkt, dass bei numerischen Untersuchungen mit ABAQUS in Gleichung (3.2) nicht das Flächenträgheitsmoment der Sinuskurve nach Gleichung 3.13, sondern das Flächenträgheitsmoment des Streckenzuges für $I_{22,F}$ verwendet wurde.

3.3 Effektive Steifigkeit von Wellpappe

Um die effektive Steifigkeitsmatrix von Wellpappe berechnen zu können, müssen periodische Randbedingungen auf die Knoten der Ränder des FE-Einheitszellenmodells aufgebracht werden. Dazu wurde hier die Software UCTOOL verwendet. UCTOOL liest die Knotendefinitionen des ABAQUS-Inputfiles ein und legt die in Form von „Equation-Constraints“ definierten Randbedingungen in einem File mit der Endung `.bcs` ab.

Mit dem so definierten FE-Modell der Einheitszelle müssen sechs unabhängige Lastfälle simuliert werden. Diese waren hier:

- Zugbelastung in 1-Richtung ($N_{11} = 1 \text{ N/mm}$),
- Zugbelastung in 2-Richtung ($N_{22} = 1 \text{ N/mm}$),
- Schubbelastung in der Membranebene ($N_{12} = 1 \text{ N/mm}$),
- Biegebelastung um die 2-Achse ($M_{11} = 1 \text{ Nmm/mm}$),
- Biegebelastung um die 1-Achse ($M_{22} = 1 \text{ Nmm/mm}$),

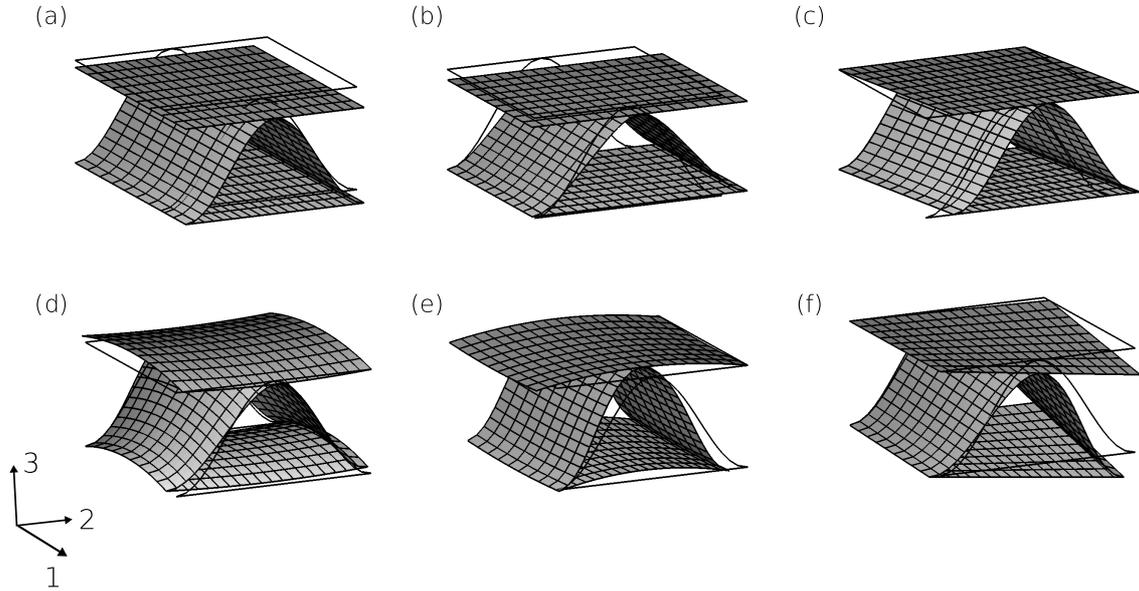


Abbildung 3.4: Deformierte Einheitszelle bei Zugbelastung in 1-Richtung (a), bei Zugbelastung in 2-Richtung (b), bei Schubbelastung in der Membranebene (c), bei Biegebelastung um die 2-Achse (d), bei Biegebelastung um die 1-Achse (e) und bei Belastung auf Verdrillung (f); Umriss der undeformierten Einheitszelle. Isotrope Konfiguration, Abmessungen und Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.1, Flute-Modell Typ 1, $b_{uc} = b_{w1}$, $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2$.

- Belastung auf Verdrillung ($M_{12} = 1 \text{ Nmm/mm}$).

Die entsprechenden Einheitszellenmodelle sind im deformierten Zustand in Abbildung 3.4 zu sehen. Dabei wurden die Abmessungen und das Materialverhalten der Schichten entsprechend der isotropen Konfiguration (vgl. Tabelle 2.1) verwendet.

Um schlussendlich die effektive Steifigkeitsmatrix angeben zu können, muss UCTOOL nach der Simulation mit ABAQUS nochmals gestartet werden. Es werden dann die Verschiebungen der Master-Knoten eingelesen und mit den in Kapitel 3.1 angegebenen Gleichungen die Steifigkeitsmatrix berechnet.

Für die isotrope Konfiguration der Wellpappe ergab sich folgende Steifigkeitsmatrix des verschmierten Mediums:

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(h)} & \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(h)} \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(h)} & \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(h)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5854.4 & 1055.8 & \approx 0 & & & \\ 1055.8 & 3519.4 & \approx 0 & & & \approx \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \approx 0 & \approx 0 & 1651.3 & & & \\ & & & 17283.0 & 4224.5 & \approx 0 \\ & \approx \underline{\underline{\mathbf{0}}} & & 4224.4 & 14081.5 & \approx 0 \\ & & & \approx 0 & \approx 0 & 4936.6 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix der Koppelsteifigkeiten wird hier mit $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(h)} \approx \underline{\underline{\mathbf{0}}}$ angegeben. Tatsächlich sind die

Werte nicht exakt Null, viele sind aber sehr klein ($\leq 10^{-10}$). Der größte Eintrag von $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(h)}$ ist $B_{33}^{(h)} = 1.28 \text{ Nmm}$. Die Biegesteifigkeit bei Biegung um die 2-Achse ergab sich gemäß Gleichung (3.8) analytisch⁹ zu $B_1 = 17277.1 \text{ Nmm}$, was mit dem durch Homogenisierung erhaltenen Ergebnis $B_1^{(h)} = D_{11}^{(h)} = 17283.0 \text{ Nmm}$ sehr gut übereinstimmt.

Bei $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(h)} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$ entkoppelt sich das Gleichungssystem (3.2) und es können zwei getrennte Gleichungen angeschrieben werden:

$$\underline{\underline{\mathbf{n}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(h)} \underline{\underline{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{m}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(h)} (-\underline{\underline{\bar{\boldsymbol{\kappa}}}}).$$

Auch die effektive Steifigkeit der Welle (ohne Deckschichten) wurde bestimmt. Dabei wurden alle für den Kern notwendigen Größen entsprechend der isotropen Konfiguration gewählt:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(h)} = \begin{pmatrix} 2337.9 & 0.87 & \approx 0 \\ 0.87 & 2.91 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & 421.9 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(h)} = \begin{pmatrix} 3205.4 & 1.20 & \approx 0 \\ 1.20 & 4.01 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & 2.99 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix der Koppelsteifigkeiten gilt auch hier: $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(h)} \approx \underline{\underline{\mathbf{0}}}$. Wie zu erwarten, ist die Steifigkeit $A_{22}^{(h)}$ bei Zug in 2-Richtung (MD) sehr klein. Selbiges gilt für die Biegesteifigkeit $B_2^{(h)} = D_{22}^{(h)}$ (Biegung um die 1-Achse) und die Steifigkeit $D_{33}^{(h)}$ gegenüber Verdrillung. Die gemäß Gleichung (3.8) analytisch ermittelte Biegesteifigkeit bei Biegung um die 2-Achse ist hier: $B_1 = 3199.4 \text{ Nmm}$.

Weiters wurde noch die ABD-Matrix der Standard-Wellpappe mit orthotropem Materialverhalten der Schichten berechnet. Dementsprechend wurden für diese Untersuchung die Abmessungen und das Materialverhalten der Schichten gemäß der orthotropen Konfiguration (vgl. Tabelle 2.2) benützt:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(h)} = \begin{pmatrix} 2237.6 & 239.0 & \approx 0 \\ 239.0 & 3838.3 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & 1090.4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(h)} = \begin{pmatrix} 7005.6 & 996.5 & \approx 0 \\ 996.5 & 16007.2 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & 3584.8 \end{pmatrix}.$$

Der größte Wert von $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(h)}$ ist hier $B_{33}^{(h)} = 31.2 \text{ Nmm}$. Überraschend ist, dass die Biegesteifigkeit $B_2^{(h)} = D_{22}^{(h)}$ bei Biegung um die 1-Achse die Biegesteifigkeit $B_1^{(h)} = D_{11}^{(h)}$ bei Biegung um die 2-Achse übersteigt. Der Grund dafür ist in der Ausrichtung des Materials zu finden (vgl. Kapitel 2). Auch hier stimmt das durch Homogenisieren erhaltene Ergebnis ausgezeichnet mit dem analytischen Wert überein: $B_1 = 7002.8 \text{ Nmm}$ im Vergleich zu $B_1^{(h)} = 7005.6 \text{ Nmm}$.

Bei allen Ergebnissen sind an den gleichen Stellen der drei Steifigkeitsmatrizen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(h)}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(h)}$ und $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(h)}$ Werte zu finden, die sich deutlich von Null unterscheiden. Neben den Einträgen in den Hauptdiagonalen sind nur die Größen $A_{12}^{(h)} = A_{21}^{(h)}$ und $D_{12}^{(h)} = D_{21}^{(h)}$ von Bedeutung. Diese werden auf Grund der Querkontraktion erhalten.

⁹Die analytischen Vergleichswerte beziehen sich im Folgenden auf die vernetzte Struktur, die eigentlich sinusförmige Welle wird also durch einen Streckenzug ersetzt.

4 Anfangsstabilitäts-Analyse

4.1 Stabilitätsverlust von Gleichgewichtslagen

Gleichgewichtslagen können stabil oder instabil sein. Gleichgewichtslagen werden als stabil bezeichnet, wenn die durch eine beliebige Anfangsstörung verursachten Abweichungen von dieser Lage beliebig klein bleiben, falls nur die Anfangsstörung genügend klein gewählt wird [27] (Stabilität im Sinne von Ljapunow).

Speziell bei konservativen Systemen kann ein Gleichgewichtszustand als instabil bezeichnet werden, wenn bei gleicher aufgebrachtter Belastung zumindest eine benachbarte Gleichgewichtslage existiert (Stabilität im Sinne von Euler).

Das Instabilwerden einer Gleichgewichtslage wird als Stabilitätsverlust bezeichnet. Es können die folgenden Arten des Stabilitätsverlusts unterschieden werden [34]:

- Gleichgewichtsverzweigungen,
- Durchschlagen,
- Erreichen der plastischen Traglast,
- Flatter-Instabilität.

Mit der Annahme von elastischem Materialverhalten kann Stabilitätsverlust durch Erreichen der plastischen Traglast ausgeschlossen werden. Diese Form des Stabilitätsverlusts kann z.B. beim exzentrisch gedrückten Stab aus elastisch-plastischem Werkstoff auftreten [27]. Wird außerdem ein konservatives System vorausgesetzt, so ist auch keine Flatter-Instabilität zu erwarten. Sind Folgelasten im System vorhanden, muss die Möglichkeit einer Flatter-Instabilität im Auge behalten werden, vgl. [8].

Durchschlagen tritt bei schwach gewölbten Konstruktionen auf, ein berühmter Vertreter ist das v.Mises-Fachwerk. Das Beulen von Platten und das Knicken von Stäben entspricht dem Stabilitätsverlust durch Gleichgewichtsverzweigung. Eine detaillierte Betrachtung ist z.B. in [3] zu finden.

Treten Verzweigungspunkte auf, so sind Kenntnisse über das Nachbeulverhalten wesentlich für die Beurteilung der Imperfektionsempfindlichkeit. Liegt imperfektionsempfindliches Verhalten vor, dann kann die reale kritische Last bereits bei unerwartet kleiner Belastung erreicht werden. So besitzt z.B. die perfekte Kreiszyinderschale instabiles Nachbeulverhalten und ist damit einer starken Imperfektionsempfindlichkeit unterworfen. Im Gegensatz dazu weisen Platten und Stäbe stabiles Nachbeulverhalten auf und sind dementsprechend in der Regel nicht imperfektionsempfindlich.

Bei Sandwichplatten können u.a. die folgenden Arten des Stabilitätsverlusts auftreten [34, 29]:

- Globales Beulen, d.h. die Sandwich-Platte beult als Platte,

- Schubbeulen,
- Langwelliges, symmetrisches Beulen der Deckschichten,
- Kurzwelliges Beulen der Deckschichten (Knittern),
- Lokales Beulen der Deckschichten als Plattenelemente,
- Lokale Instabilitäten der Kernstruktur.

Knittern der Deckschichten (*Wrinkling*) tritt vor allem bei homogenem Kernmaterial mit niedriger Dichte (die transversale Steifigkeit des Kerns spielt eine entscheidende Rolle) auf. Für den hier untersuchten gewellten Kern, aber auch bei Honigwabenkernen, tritt diese Instabilitätsform in der Regel nicht auf.

In den folgenden Kapiteln wird die Wellpappe vorwiegend auf Druck in Richtung der Wellenerzeugenden belastet. Dabei kann lokales Beulen der Deckschichten, lokales Beulen des Kerns und globales Beulen als Platte beobachtet werden. Beim lokalen Beulen der Deckschichten beulen die Plattenstreifen beinahe so, als ob sie an den Kontaktstellen mit der Welle eingespannt wären. Bei der lokalen Instabilität des Kerns liegen ähnliche Verhältnisse vor, hier wirkt allerdings die Krümmung zusätzlich stabilisierend. Beim globalen Beulen der Platte stellt sich die Frage, ob die Verwendung des Einheitszellenmodells und die damit verbundenen Randbedingungen noch als sinnvoll zu erachten sind, vgl. Kapitel 6.

4.2 Anfangsstabilitäts-Analyse mit ABAQUS

Nach dem statischen Stabilitätskriterium befindet sich ein System an der Stabilitätsgrenze, und damit im kritischen Zustand m^* , wenn die Bedingung

$${}^{m^*}\underline{\underline{\mathbf{K}}} \delta \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (4.1)$$

mit einem nichttrivialen Vektor $\delta \underline{\mathbf{u}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ erfüllt ist. Bei proportionaler Belastung ist die Tangentensteifigkeitsmatrix ${}^m\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ des Systems (nichtlinear) abhängig von dem Laststeigerungsfaktor ${}^m\lambda$ und kann wie folgt aufgespalten werden:

$${}^m\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{EL}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{U}}({}^m\lambda) + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{G}}({}^m\lambda) \quad (4.2)$$

$$= {}^0\underline{\underline{\mathbf{K}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{NL}}({}^m\lambda). \quad (4.3)$$

In den Gleichungen (4.2) und (4.3) sind die folgenden Steifigkeitsmatrizen enthalten:

- $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{EL}}$ bezeichnet die konstante, lineare elastische Steifigkeitsmatrix;
- $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{U}}$ bezeichnet die Anfangsverschiebungs-Steifigkeitsmatrix;
- $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{G}}$ bezeichnet die Anfangsspannungs-Steifigkeitsmatrix;
- ${}^0\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ enthält nur Steifigkeitsanteile, die vom aktuellen Spannungs-, Verzerrungs- bzw. Verschiebungszustand unabhängig sind;

- $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{NL}}$ enthält jene Steifigkeitsanteile, die vom aktuellen Verschiebungszustand abhängig sind.

Aus der Gleichung (4.1) können Eigenwertprobleme abgeleitet werden, die – je nachdem welche Steifigkeitsanteile berücksichtigt werden – sogenannte klassische bzw. lineare Anfangsstabilitätsanalysen ermöglichen.

Bei der klassischen Anfangsstabilitätsanalyse wird das Eigenwertproblem

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}} \end{smallmatrix} + \lambda^* \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{G}}^{(\text{lin})} \right) \delta \underline{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (4.4)$$

bei der linearen Anfangsstabilitätsanalyse wird das Eigenwertproblem

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}} \end{smallmatrix} + \lambda^* \left(\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{G}}^{(\text{lin})} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{U}}^{(\text{lin})} \right) \right) \delta \underline{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (4.5)$$

zur Berechnung des kritischen Laststeigerungsfaktors λ^* herangezogen. Die enthaltenen Steifigkeitsmatrizen $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{G}}^{(\text{lin})}$ und $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{U}}^{(\text{lin})}$ werden nur in Abhängigkeit von Verschiebungen, die in einer linearen Analyse ermittelten werden, berechnet und werden demgemäß mit der Hochstellung (lin) gekennzeichnet.

Bei klassischen Anfangsstabilitätsanalysen fließt in das Eigenwertproblem der Vorbeuldeformationszustand nicht mit ein. Weder klassische noch lineare Anfangsstabilitätsanalysen benötigen eine nichtlineare Vorbeulanalyse [8]. Für zahlreiche Stabilitätsprobleme ist es völlig ausreichend, die Vorbeuldeformationen nur im Zuge des (linear) berechneten Vorbeulspannungszustands zu berücksichtigen. Im Besonderen trifft dies auf steife Systeme zu, die die Lasten verstärkt über Axial- bzw. Membranspannungen tragen und sich daher vor dem Beulen nur wenig deformieren.

Die Gefahr einer klassischen bzw. einer linearen Anfangsstabilitätsanalyse liegt darin, dass eine möglicherweise ausgeprägte Nichtlinearität nicht berücksichtigt wird. Dies kann die Abschätzung der kritischen Last entscheidend verschlechtern. Oftmals kann trotz nichtlinearen Verhaltens vor dem Beulen der Beulmode prinzipiell abgeschätzt werden. Dies gilt nicht mehr, wenn ein Modewechsel auftritt: d.h. der anfänglich kritische Mode wird im Zuge der Vorbeuldeformation von einem anderen – plötzlich „kritischeren“ – Mode abgelöst. In diesem Fall ist weder die kritische Last noch die Beulfigur mit einer Anfangsstabilitätsanalyse zuverlässig zu bestimmen.

ABAQUS bietet die Möglichkeit, als Ausgangszustand für eine Anfangsstabilitätsanalyse eine bereits belastete Struktur zu verwenden. Dies geschieht über einen der Anfangsstabilitätsanalyse vorangestellten Analyseschritt und den darin definierten Vorlasten $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_0$. Wird in diesem Analyseschritt Nichtlinearität auf Grund von nichtlinearer Geometrie berücksichtigt, so wird für den Ausgangszustand der Anfangsstabilitätsanalyse die bereits deformierte Struktur herangezogen. Die Vorlasten werden damit sowohl bezüglich der veränderten Steifigkeit als auch bezüglich der veränderten Geometrie berücksichtigt. Handelt es sich hingegen bei der Untersuchung vor der Anfangsstabilitätsanalyse um einen linearen Analyseschritt, so geht die Vorlast $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_0$ nur in die System-Steifigkeit ein. Als geometrischer Ausgangszustand dient dann die undeformierte Struktur.

Bei der Anfangsstabilitätsanalyse selbst muss in ABAQUS eine Referenzlast $\underline{\underline{P}}_{\text{ref}}$ definiert werden. Die kritischen Beullasten ergeben sich dann mit den Vorlasten $\underline{\underline{P}}_0$ zu

$$\underline{\underline{P}}_i^* = \underline{\underline{P}}_0 + \lambda_i \underline{\underline{P}}_{\text{ref}}. \quad (4.6)$$

Darin sind λ_i die Eigenwerte, die in ABAQUS aus dem Eigenwertproblem

$$(\underline{\underline{K}}_0 + \lambda_i \underline{\underline{K}}_\Delta) \delta \underline{\underline{u}}_i = 0 \quad (4.7)$$

berechnet werden.

$\underline{\underline{K}}_0$ ist dabei die Steifigkeitsmatrix des Ausgangszustandes, wobei in ihr der Einfluss der Vorlast $\underline{\underline{P}}_0$ bereits berücksichtigt ist. $\underline{\underline{K}}_\Delta$ beinhaltet die Anfangsspannungs- und Laststeifigkeitsmatrix zur Referenzlast $\underline{\underline{P}}_{\text{ref}}$. Schlussendlich sind $\delta \underline{\underline{u}}_i$ die Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_i , die zusammen mit den Interpolationsfunktionen der Verschiebungen die Beulfiguren repräsentieren.

Für die Anfangsstabilitätsanalyse der Wellpappe wurde keine Vorlast eingeführt. Sie hätten die positive Eigenschaft, dass die Anzahl der nötigen Iterationen für die Berechnung der Beullast vermindert würde. Der hohe Grad an Automatisierung, der z.B. im Zuge des Optimierungsproblems (vgl. Kapitel 5) nötig ist, macht eine passende Wahl der Vorlast schwierig.

Die Berechnung der Eigenwerte erfolgte über die Subspace-Iterations-Methode, nähere Information dazu ist z.B. in [1] zu finden.

Innerhalb dieser Arbeit wurde die Beullast meist für Druckbelastung in 1-Richtung (Membrandruck) berechnet. Die Referenzlast $\underline{\underline{P}}_{\text{ref}}$ wurde dabei so gewählt, dass sich bei $\lambda = 1$ eine Schnittkraft von $N_{11} = N_{11,\text{ref}} = -1 \text{ N/mm}$ ergibt. Mit dem ersten Eigenwert kann die kritische Schnittkraft zu $|N_{11}^*| = \lambda_1 |N_{11,\text{ref}}| = \lambda_1 1 \text{ N/mm}$ berechnet werden.

Die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ wird im Folgenden häufig zu berechnen sein. Dafür muss der erste Eigenwert λ_1 des Eigenwertproblems (4.7) für einen Satz von Eingangsgrößen (meist Geometriedaten) berechnet werden. Bei gleich bleibendem Materialverhalten lässt sich für das Flute-Modell Typ 1 der 1. Eigenwert anschreiben als:

$$\lambda_1 = f_{\lambda_1}(b_{\text{wl}}, h_{\text{uc}}, l_{\text{uc}}, t_{\text{L}}, t_{\text{F}}, \beta_{\text{b}}) \quad (4.8)$$

Der obige Ausdruck enthält die Länge l_{uc} der Einheitszelle. Mit dem Modell der Einheitszelle soll das Verhalten einer infiniten Platte simuliert werden. Die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ (und damit λ_1) darf nicht von l_{uc} abhängen. Die Länge der Einheitszelle bedarf daher einer gesonderten Betrachtung.

In den folgenden Kapiteln bezieht sich die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ – falls nicht anders gekennzeichnet – auf den ersten Eigenwert λ_1 , der bei Belastung durch Druck in 1-Richtung erhalten wird.

4.3 Länge der Einheitszelle

Wie bereits in Kapitel 2 besprochen, wird für lineare Untersuchungen ein Einheitszellenmodell der Wellpappe verwendet. Dies hat zur Folge, dass sich bei Druckbelastung in

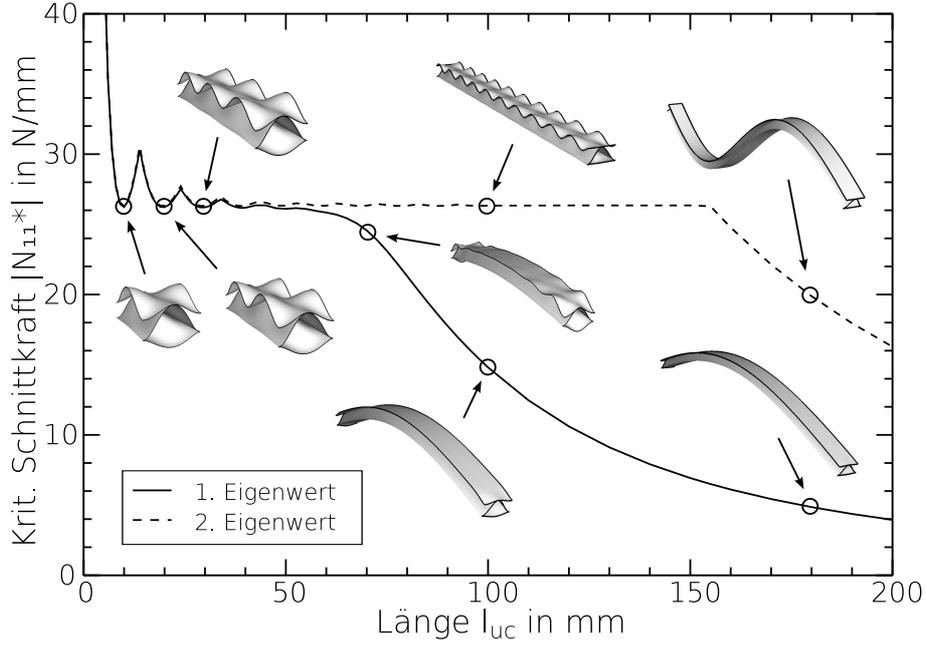


Abbildung 4.1: Aus dem 1. und 2. Eigenwert berechnete kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ in N/mm über der Einheitszellenlänge l_{uc} in mm. Abmessungen und Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.1 (isotrope Konfiguration); biquadratische Elemente (S8R), $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$.

1-Richtung eine Beulfigur einstellen muss, deren Wellenlänge in 1-Richtung einem ganzzahligen Teil der Einheitszellenlänge l_{uc} entspricht. Dieser Umstand geht nicht mit den Gegebenheiten bei einer unendlich langen Platte konform. Dort wird die Beulfigur nicht von den Rändern beeinflusst. Der Zwang, eine bestimmte Beulfigur einnehmen zu müssen, wirkt sich mit einem beliebig gewählten l_{uc} auf die berechneten Eigenwerte λ_i aus; sie werden hin zu größeren Werten verschoben. In Abbildung 4.1 ist die aus den ersten beiden Eigenwerten berechnete kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ über der Einheitszellenlänge l_{uc} aufgetragen.

In Abbildung 4.1 ist bei $l_{uc} = l_{uc}^{(\min)} \approx 10$ mm ein lokales Minimum des dargestellten Verlaufes zu sehen. Bei diesem Minimum ist die Länge der Einheitszelle gerade so groß wie die Wellenlänge (in 1-Richtung) der lokalen Beulfigur, die sich für das lokale Beulen einer infiniten Platte ergeben würde. Das zweite Minimum ist bei $l_{uc} = l_{uc}^{(\min)} \approx 20$ mm zu finden. Hier sind entlang der Einheitszellenlänge bereits zwei Wellenlängen der gesuchten lokalen Beulfigur enthalten, usw.

Um die kritische Schnittkraft bezüglich lokalen Beulens einer unendlich langen Platte mit dem Modell der Einheitszelle berechnen zu können, muss λ in Abhängigkeit von l_{uc} minimiert werden. Da alle anderen Größen konstant gehalten werden können, ergibt sich das eindimensionale Minimierungsproblem

$$\lambda_1^{(\min)} = \lambda_1(l_{uc}^{(\min)}) = \min(\lambda_1(l_{uc})).$$

Mit dem Algorithmus nach Brent können eindimensionale Minimierungsprobleme effizient gelöst werden [32]. Es wurden damit lediglich rund acht bis zehn Berechnungen von λ_1 benötigt, um das erste Minimum innerhalb der vorgegebenen Genauigkeit zu finden.

Der Algorithmus nach Brent kombiniert zwei Lösungsmethoden für eindimensionale Minimierungsprobleme: die Methode des Goldenen Schnitts (*Golden Section Search*) und die Minimierungsmethode durch parabolische Interpolation (*Inverse Parabolic Interpolation*), vgl. [32].

Die Methode des Goldenen Schnitts ist äußerst robust, benötigt allerdings relativ viele Funktionsauswertungen. Dagegen konvergiert die Methode der parabolischen Interpolation schnell. Sie stellt allerdings Anforderungen an die Funktion, so ist z.B. Stetigkeit der Funktion bis zur zweiten Ableitung Voraussetzung für einen effektiven Einsatz.

Der klassische Algorithmus nach Brent benötigt zum Start eine Eingrenzung (*Bracket*) des Minimums mit einem Tripel (a, b, c) für das $a < b < c$ und $f(b) < f(a) \wedge f(b) < f(c)$ gilt. SciPy stellt eine besondere Implementierung von Brent („fminbound“) zur Verfügung, die lediglich die Angabe eines Intervalls $[x_1, x_2]$ benötigt, wobei für das gesuchte Minimum $x^{(\min)}$ der Funktion $f(x)$ gelten muss: $x_1 < x^{(\min)} < x_2$. Die strenge Eingrenzung mit dem Tripel $a < b < c$ wird intern erzeugt.

Bei einem Modell mit Deckschichten haben sich als Grenzen für das Intervall $[(l_{uc})_1, (l_{uc})_2]$ folgende Werte als günstige Eingrenzung des ersten Minimums erwiesen:

$$(l_{uc})_1 = 0.05 \min [(b_{wl} - b_b), c_{hsin}]$$

$$(l_{uc})_2 = 2.5 \max [(b_{wl} - b_b), c_{hsin}]$$

Bei einem Modell des Kerns ohne Deckschichten wurden die folgenden Grenzen verwendet:

$$(l_{uc})_1 = 0.05 c_{hsin}$$

$$(l_{uc})_2 = 2.5 c_{hsin}$$

Die Basis des Algorithmus nach Brent bildet die Methode des Goldenen Schnitts, vgl. [32]. Sie basiert auf der schrittweisen Unterteilung des Intervalls, in dem das gesuchte (lokale) Minimum enthalten ist. Es sei angenommen, dass für einen ersten Teilungspunkt bei b des Intervalls $[a, c]$ die Bedingung $f(b) < f(a)$ und $f(b) < f(c)$ erfüllt sei. Das Teilungsverhältnis wird als

$$\frac{b - a}{c - a} = \varepsilon$$

definiert. Die nächste Funktionsauswertung soll bei x im Intervall $[b, c]$ erfolgen. Das entsprechende Teilungsverhältnis wird mit

$$\frac{x - b}{c - a} = \eta$$

bezeichnet. Ist $f(b) > f(x)$, so liegt das Minimum in $[b, c]$; ist dagegen $f(b) < f(x)$, so wird das Intervall $[a, x]$ das Minimum enthalten. Es ist von vornherein nicht bekannt, welches

Intervall das Minimum enthalten wird. Die Lage des Punktes x ist somit bestmöglich, wenn die entstehenden Intervalle $[b, c]$ und $[a, x]$ gleich groß sind. Aus $x - a = c - b$ folgt:

$$\varepsilon + \eta = 1 - \varepsilon.$$

Damit ist die bestmögliche Wahl von η mit

$$\eta = 1 - 2\varepsilon \tag{4.9}$$

bestimmt. Unbekannt ist noch das Teilungsverhältnis ε der ersten Unterteilung. η wurde bestmöglich gewählt; dies soll auch für ε gelten, wodurch Selbstähnlichkeit gefordert wird:

$$\frac{b - a}{c - a} = \frac{x - b}{c - b}.$$

Mit den Definitionen der Teilungsverhältnisse ergibt sich daraus

$$\varepsilon = \frac{\eta}{1 - \varepsilon}. \tag{4.10}$$

Mit Gleichung (4.10) und (4.9) lässt sich eine quadratische Gleichung für ε anschreiben:

$$\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 1 = 0.$$

Diese kann leicht gelöst werden und es folgt schließlich¹⁰:

$$\varepsilon = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.38197\dots \tag{4.11}$$

Das Intervall verkleinert sich somit je Schritt um den Faktor $1 - \varepsilon = 0.61803\dots$, dafür ist jeweils nur eine Funktionsauswertung nötig. Dieses Teilungsverhältnis entspricht dem Goldenen Schnitt, daher auch der Name.

Um die Geschwindigkeit der Konvergenz zu erhöhen, ist im Brent-Algorithmus eine zweite Methode integriert, vgl. [32]. Sie basiert auf der Interpolation dreier Funktionswerte durch eine Parabel (2. Hauptlage). Als Stützstellen werden jene drei Punkte verwendet, zu denen die (bis jetzt) niedrigsten Funktionswerte gehören. Das Minimum dieser Parabel lässt sich leicht berechnen, dort wird die Funktion erneut ausgewertet. Dadurch ergibt sich ein neuer Punkt, der – mit zwei der drei von vorhin – für den nächsten Interpolations-Schritt verwendet wird, vgl. Abbildung 4.2.

Der Erfolg eines Schrittes wird über die Veränderung des niedrigsten Funktionswerts vor und nach der neuen Funktionsauswertung gemessen. Hat sich der niedrigste Funktionswert innerhalb eines Schrittes um weniger als die Hälfte des entsprechenden Wertes aus dem vorletzten Schritt verringert, so scheint Konvergenz sichergestellt zu sein. Als Vergleich wird nicht der letzte Schritt herangezogen, um vorschnelles (kostspieliges) Umschalten auf die Methode des Goldenen Schnitts zu verhindern.

¹⁰Die Forderung $\eta > 0$ ergibt zusammen mit Gleichung (4.9) die Einschränkung $\varepsilon < 0.5$, wodurch die zweite Wurzel ausgeschlossen werden kann.

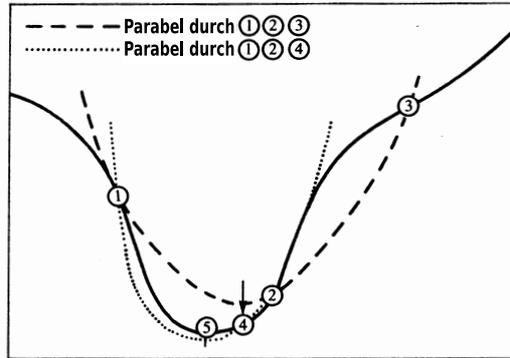


Abbildung 4.2: Suche nach dem Minimum einer Funktion durch Interpolation mittels einer Parabel (2. Hauptlage), vgl. [32]. 1. Schritt: Durch die Punkte ①, ② und ③ der Funktion wird eine Parabel gelegt. An der Stelle des Minimums der Parabel wird die Funktion erneut ausgewertet, es ergibt sich Punkt ④. 2. Schritt: Durch die Punkte ①, ② und ④ wird eine weitere Parabel gelegt, ihr berechnete Minimum liegt bereits sehr nahe am Minimum der Funktion, vgl. ⑤.

	Isotrop	Orthotrop	
$ N_{11}^* $	26.21	11.15	N/mm
$l_{uc}^{(\min)}$	9.73	7.93	mm

Tabelle 4.1: Bei $l_{uc} = l_{uc}^{(\min)}$ gefundene Minima des 1.Eigenwerts und die damit berechneten kritischen Schnittkräfte $|N_{11}^*| = \lambda_1 |N_{11, \text{ref}}| = \lambda_1$ 1 N/mm. Abmessungen und isotropes Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.1 (isotrope Konfiguration), Abmessungen und orthotropes Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.2 (orthotrope Konfiguration); biquadratische Elemente (S8R), $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$.

Es muss jedenfalls auf die Methode des Goldenen Schnitts umgeschaltet werden, wenn z.B. die drei Stützstellen kollinear sind oder wenn das Minimum der Parabel nicht im betrachteten Intervall zu liegen kommt.

In Abbildung 4.3 ist der Ablauf einer Suche nach dem Minimum dargestellt. Jedes „+“-Symbol kennzeichnet eine Funktionsauswertung¹¹.

Der Algorithmus wurde auf die beiden Wellpappe-Konfigurationen (Abmessungen und Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.1 für die Wellpappe aus isotropem und nach Tabelle 2.2 für die Wellpappe aus orthotropem Material) angewandt. Die bei $l_{uc} = l_{uc}^{(\min)}$ gefundenen Minima sind in Tabelle 4.1 angeführt. Es wurde dabei die Beziehung $|N_{11}^*| = \lambda_1 |N_{11, \text{ref}}| = \lambda_1$ 1 N/mm benützt.

Ein Einheitszellenmodell mit $b_{uc} = b_{wl}$ liefert bei manchen Wellpappe-Konfigurationen

¹¹Das Python-Skript `CBrunUCT.py` ermöglicht die Suche nach dem Minimum eines Eigenwerts. Es startet für jede Funktionsauswertung das Skript `CBrunSAL.py`, das für einen Satz von Parametern (einschließlich l_{uc}) die lokale Beullast ermittelt. Für Details siehe Kapitel 7.

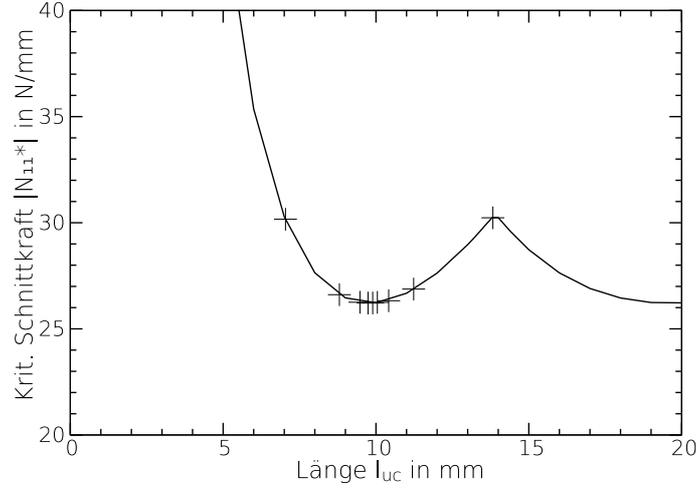


Abbildung 4.3: Suche nach dem ersten Minimum von $\lambda = \lambda(l_{uc})$ mit dem Algorithmus nach Brent; $|N_{11}^*| = \lambda_1 |N_{11, \text{ref}}| = \lambda_1 1 \text{ N/mm}$. Jede Funktionsauswertung ist mit einem „+“-Symbol gekennzeichnet; Abmessungen und Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.1 (isotrope Konfiguration); biquadratische Elemente (S8R), $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$; Konvergenzkriterium des Algorithmus: $l_{\text{tol}} = 0.05$.

	$b_{uc} = b_{wl}$	$b_{uc} = 2b_{wl}$	
$ N_{11}^* $	26.21	22.76	N/mm
$l_{uc}^{(\min)}$	9.73	11.37	mm

Tabelle 4.2: Bei $l_{uc} = l_{uc}^{(\min)}$ gefundene Minima des 1.Eigenwertes und die damit berechneten kritischen Schnittkräfte $|N_{11}^*| = \lambda_1 |N_{11, \text{ref}}| = \lambda_1 1 \text{ N/mm}$. $b_{uc} = b_{wl}$ bzw. $b_{uc} = 2b_{wl}$, Abmessungen und Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.1 (isotrope Konfiguration), biquadratische Elemente (S8R), $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$.

nicht exakt die selben kritischen Schnittkräfte wie ein Modell mit $b_{uc} = 2b_{wl}$. Dies ist z.B. bei der isotropen Konfiguration mit den Abmessungen nach Tabelle 2.1 der Fall. Die Grund dafür wird mit Abbildung 4.4 verständlich. Dort sind die Beulfiguren (1. Eigenwert) der isotropen Konfiguration mit $b_{uc} = b_{wl}$ (links) bzw. mit $b_{uc} = 2b_{wl}$ (rechts) bei Druckbelastung in 1-Richtung dargestellt.

Mit dem schmäleren Einheitszellen-Modell ($b_{uc} = b_{wl}$) kann sich die Beulfigur, die mit dem breiteren Modell ($b_{uc} = 2b_{wl}$) erhalten wird, auf Grund der vorgeschriebenen Periodizität nicht einstellen: Die Periode der Deformation (in 2-Richtung) wäre hier größer als die Periode der Geometrie der Einheitszelle. Damit werden mit der schmäleren Einheitszelle Beulmoden unterdrückt, wodurch die berechneten Eigenwerte hin zu höheren Werten verschoben werden. Dieser Umstand spiegelt sich auch in den in Tabelle 4.2 angeführten Ergebnissen wider. Dort sind die kritischen Schnittkräfte (1. Eigenwert) eingetragen, die für die Wellpappe aus isotropem Material mit unterschiedlich breiten Einheitszellen berechnet wurden.

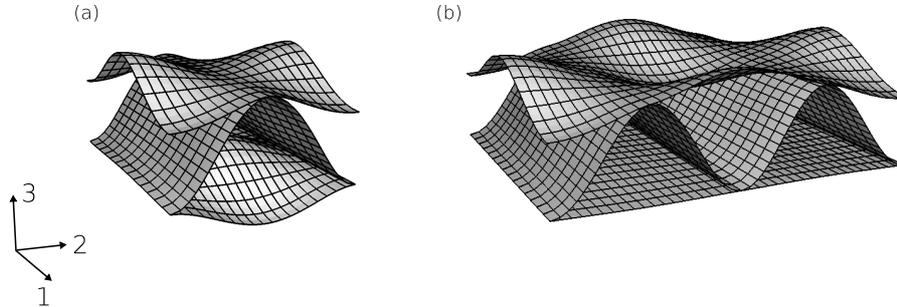


Abbildung 4.4: Beulfigur (1. Eigenwert) des Einheitszellenmodells bei Druckbelastung in 1-Richtung. Flute-Modell Typ 1 mit $b_{uc} = b_{wl}$ (a) bzw. $b_{uc} = 2b_{wl}$ (b); Abmessungen und isotropes Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.1; biquadratische Elemente (S8R), $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$.

Die beschriebene Abweichung hätte natürlich auch einen Einfluss auf die in Abbildung 4.1 dargestellten Verläufe der kritischen Schnittkräfte. Beulmoden, wie in Abbildung 4.4(b) dargestellt, treten nicht bei jeder Wellpappen-Geometrie auf, was später noch gezeigt wird. Außerdem würde eine Einheitszelle mit der Breite $b_{uc} = 2b_{wl}$ einen deutlich höheren Rechenaufwand verursachen, wodurch die im nächsten Kapitel diskutierte Optimierung zusätzlich erschwert würde. Daher wird in den folgenden Untersuchungen weiterhin ein Modell mit der Breite $b_{uc} = b_{wl}$ verwendet.

Je mehr Perioden der Beulfigur in der Länge l_{uc} der Einheitszelle enthalten sind, desto besser stimmt bei großer, aber beliebig gewählter Länge l_{uc} die mit der Einheitszelle berechnete kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ mit der entsprechenden kritischen Schnittkraft einer infiniten Platte überein. Der girlandenförmige Verlauf von λ über l_{uc} nähert sich bei größer werdender Einheitszellenlänge einer horizontalen Geraden an. Unterbrochen wird der Trend von der Tatsache, dass ab einer gewissen Größe l_{uc} der Übergang vom lokalen zum globalen Beulen erfolgt; vgl. Abbildung 4.1. Dabei ist ein Übergangsbereich zu beobachten, in dem gekoppeltes Beulen, d.h. sowohl lokales (bevorzugt an den Rändern) als auch globales Beulen, beobachtet werden kann.

Aufgrund der periodischen Randbedingungen, die im Einheitszellenmodell zum Einsatz kommen, ist die Untersuchung von globalem Plattenbeulen mit einem Einheitszellenmodell nicht realitätsnah. Es sollte dazu besser ein Modell einer finiten Platte verwendet werden; vgl. spätere nichtlineare Analysen. Trotzdem werden die mit dem Einheitszellenmodell berechneten kritischen Schnittkräfte bei globalem Beulen mit einer analytischen Abschätzung verglichen. Als einfache Vergleichsmodell dienen der Euler-Knickstab und der orthotrope Plattenstab:

- Euler-Knickstab, vgl. z.B. [27]:
Dabei wird die Einheitszelle als Stab mit der Länge $l = l_{uc}$ angesehen. Es soll

für die Deckschichten und für die Welle aus isotropem Material $E_L = E_F = E$ gelten. Mit dem Flächenträgheitsmoment I_{22} des Einheitszellenquerschnitts kann ohne Berücksichtigung der Schubnachgiebigkeit die Knicklast P^* berechnet werden, wobei für die Knicklänge $l_k = l$ angenommen wird. Dies entspricht einer gelenkigen Lagerung der Stabenden.

$$P^* = \frac{\pi^2 E I}{l_k^2} = \frac{\pi^2 E I_{22}}{l^2}. \quad (4.12)$$

Mit Gleichung (4.12) und $b = b_{w1}$ ergibt sich eine kritische Schnittkraft nach Euler von

$$|N_{11}^*| = \frac{\pi^2 E I_{22}}{l^2 b}. \quad (4.13)$$

Für die isotrope Konfiguration gilt: $E I_{22}/b = 16010.1 \text{ Nmm}$.

- Orthotroper Plattenstab, vgl. [37]:
Es gilt für die kritische Schnittkraft einer längsdruckbelasteten, allseits gelenkig gelagerten orthotropen Platte der Länge $l = l_{uc}$ folgender Ausdruck:

$$|N_{11}^*| = \bar{k} \frac{\pi^2 B_1}{l^2}. \quad (4.14)$$

Darin bezeichnet \bar{k} den Druckbeulbeiwert und B_1 die Biegesteifigkeit der Platte bei Biegung um die 2-Achse. Ist das wirksame Seitenverhältnis α_w

$$\alpha_w = \frac{l}{b} \sqrt[4]{\frac{B_2}{B_1}}$$

sehr klein, so kann der Einfluss der seitlichen Ränder vernachlässigt und ein Druckbeulbeiwert von $\bar{k} = 1$ angenommen werden. Diese Annahme macht aus der Platte einen orthotropen Plattenstab.

Die Biegesteifigkeit B_1 der Platte aus Wellpappe kann entweder näherungsweise analytisch oder für die verschmierte Platte numerisch mit dem Programm UCTOOL berechnet werden: Der analytische Zugang wurde bereits in Kapitel 3.2 behandelt, es ergab sich damit für die isotrope Konfiguration nach Tabelle 2.1 eine Biegesteifigkeit bei Biegung um die 2-Achse von $B_1 = 17277.1 \text{ Nmm}$.

Mit der Software UCTOOL können die effektiven Steifigkeiten der Platte berechnet werden. Die Biegesteifigkeit $B_1^{(h)}$ der homogenisierten Platte kann somit direkt aus der Matrix der effektiven Steifigkeiten entnommen werden. Es gilt

$$B_1^{(h)} = D_{11}^{(h)}, \quad (4.15)$$

wobei $D_{11}^{(h)}$ der entsprechende Eintrag in der 3×3 -Matrix der Biegesteifigkeiten $\underline{\underline{D}}^{(h)} = (D_{ij}^{(h)})$ ist, vgl. [37, Seite 165].

Mit den Abmessungen und dem Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.1 (isotrope Konfiguration) erhält man $B_1^{(h)} = D_{11}^{(h)} = 17283.0 \text{ Nmm}$.

Die kritischen Schnittkräfte nach Gleichung (4.13) und nach Gleichung (4.14) sind in Abbildung 4.5 neben der mit dem Einheitszellenmodell berechneten kritischen Schnittkraft eingetragen.

Die kritische Schnittkraft des Euler-Stabes ist erwartungsgemäß kleiner als die mit den Plattenmodellen berechneten Schnittkräfte. Der Grund dafür ist in der in Gleichung (4.13) nicht berücksichtigten Querkontraktionsbehinderung zu suchen.

Für große Modelllängen stimmen die mit Gleichung (4.14) erhaltenen kritischen Schnittkräfte mit den numerischen Ergebnissen sehr gut überein, bei kleiner werdenden Modelllänge nimmt die Abweichung zwischen den Verläufen zu. Der Grund dafür könnte zum einen darin liegen, dass sich in diesem Bereich die periodischen Randbedingungen des Einheitszellenmodells bemerkbar machen. Andererseits wird das globale Beulen in diesem Bereich u.U. von transversalen Schubdeformationen beeinflusst, in Gleichung 4.14 sind diese allerdings nicht berücksichtigt. Diese Vernachlässigung verliert bei größer werdender Modelllänge ihre Bedeutung.

Anmerkung: Auch das Programm UCTOOL ist (zur Zeit) nicht in der Lage, transversale Schubsteifigkeiten zu berechnen. Diese können bei globalem Beulen oder auch bei Querkraftbiegung durchaus eine Rolle spielen.

Anmerkung: Bei bekanntem effektiven Schubmodul $G_{13}^{(K)}$ des Kerns könnte die endliche Schubsteifigkeit der Kerns z.B. in der kritischen Last des Knickstabes berücksichtigt werden. Dabei wird die Gleichung (4.12) für P^* modifiziert; man erhält die Knicklast \hat{P}^* unter Berücksichtigung der Schubnachgiebigkeit des Kerns näherungsweise aus folgender Gleichung, vgl. [34]:

$$\frac{1}{\hat{P}^*} = \frac{1}{P^*} + \frac{1}{G_{13}^{(K)} b h},$$

wobei b und h die Breite und die Höhe des Kerns bezeichnen.

4.4 Lokales Beulen bei allgemeiner Belastung

Innerhalb dieser Arbeit interessiert meist die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ bei Belastung durch Druck in 1-Richtung. Beispielhaft sollen aber auch die Beulfiguren (lokales Beulen) gezeigt werden, die bei anderen Belastungsarten auftreten.

Folgende sechs Lastfälle wurden untersucht:

- Druckbelastung in 1-Richtung ($N_{11, \text{ref}} = -1 \text{ N/mm}$),
- Druckbelastung in 2-Richtung ($N_{22, \text{ref}} = -1 \text{ N/mm}$),
- Schubbelastung in der Membran-Ebene ($N_{12, \text{ref}} = 1 \text{ N/mm}$),
- Biegebelastung um die 2-Achse ($M_{11, \text{ref}} = 1 \text{ Nmm/mm}$),
- Biegebelastung um die 1-Achse ($M_{22, \text{ref}} = 1 \text{ Nmm/mm}$),
- Belastung auf Verdrillung ($M_{12, \text{ref}} = 1 \text{ Nmm/mm}$).

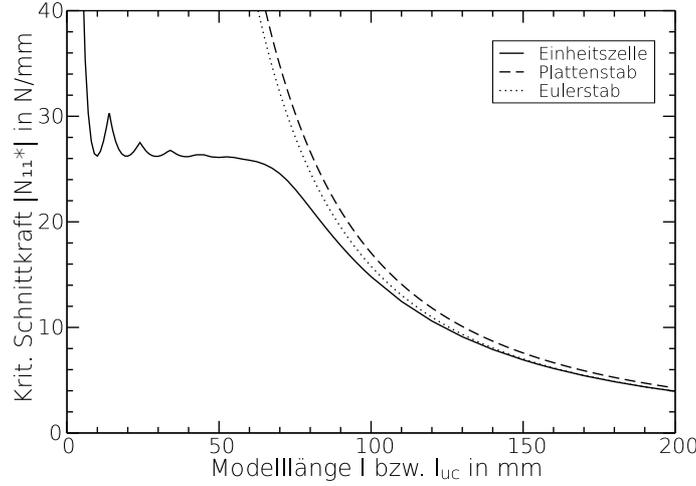


Abbildung 4.5: Kritische Membran-Schnittkraft N_{11}^* als Druck in N/mm über der Modelllänge l_{uc} bzw. l in mm. Numerisches Ergebnis mit dem Modell der Einheitszelle, Analytisches Ergebnis für den Euler-Knickstab (vgl. Gleichung (4.13)) und für den Plattenstab (vgl. Gleichung (4.14)); Abmessungen und Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.1 (isotrope Konfiguration), Flute-Modell Typ 1, biquadratische Elemente (S8R), $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$.

Die erhaltenen Beulfiguren (1. Eigenwert) sind in Abbildung 4.6 zu sehen. Die Simulationen wurden mit dem Einheitszellenmodell durchgeführt, dabei wurden die Abmessungen und das Materialverhalten der Schichten entsprechend der isotropen Konfiguration gewählt. Die Länge der Einheitszelle wurde mit $l_{uc} = 10$ mm konstant gehalten.

Die kritischen Schnittkräfte können bei einigen Lastfällen nicht ohne genauere Betrachtung angegeben werden: Bei Druckbelastung in 1-Richtung ist die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ von der Länge der Einheitszelle l_{uc} abhängig, wie schon im Kapitel 4.3 ausführlich gezeigt wurde. Bei Druckbelastung in 2-Richtung ist für den in Abbildung 4.6(b) dargestellten Beulmode keine Abhängigkeit der kritischen Last von der Länge der Einheitszelle l_{uc} vorhanden. Sie hat sich bei der isotropen Konfiguration zu $|N_{22}^*| = 9.11$ N/mm ergeben.

Für das kritische Schnittmoment $|M_{11}^*|$ bei Biegung um die 2-Achse sind die Gegebenheiten ähnlich wie bei der kritischen Schnittkraft $|N_{11}^*|$. Um einen Einfluss der Einheitszellenlänge l_{uc} auf das Ergebnis zu berücksichtigen, muss der Eigenwert λ_1 wieder in Abhängigkeit von der Länge l_{uc} minimiert werden. Für die isotrope Konfiguration ergab sich so das kritische Schnittmoment zu $|M_{11}^*| = \lambda_1 |M_{11,ref}| = 38.21$ Nmm/mm bei $l_{uc}^{(min)} = 9.81$ mm.

Das kritische Schnittmoment $|M_{22}^*|$ bei Belastung auf Biegung um die 1-Achse kann für den in Abbildung 4.6(e) dargestellten Beulmode wiederum ohne Minimierung angegeben werden; es errechnete sich für die isotrope Konfiguration (vgl. Tabelle 2.1) zu $|M_{22}^*| = 18.25$ Nmm/mm.

Bei Schubbelastung in der Membranebene verlangt die Periodizität der Beulfigur eine Einheitszelle mit einer Grundfläche (Begrenzungsfläche in der 1-2-Ebene) in Form eines Parallelogramms. Der Versatz d_2 der Kanten 0–A und B–C ist in Abbildung 3.1 dargestellt,

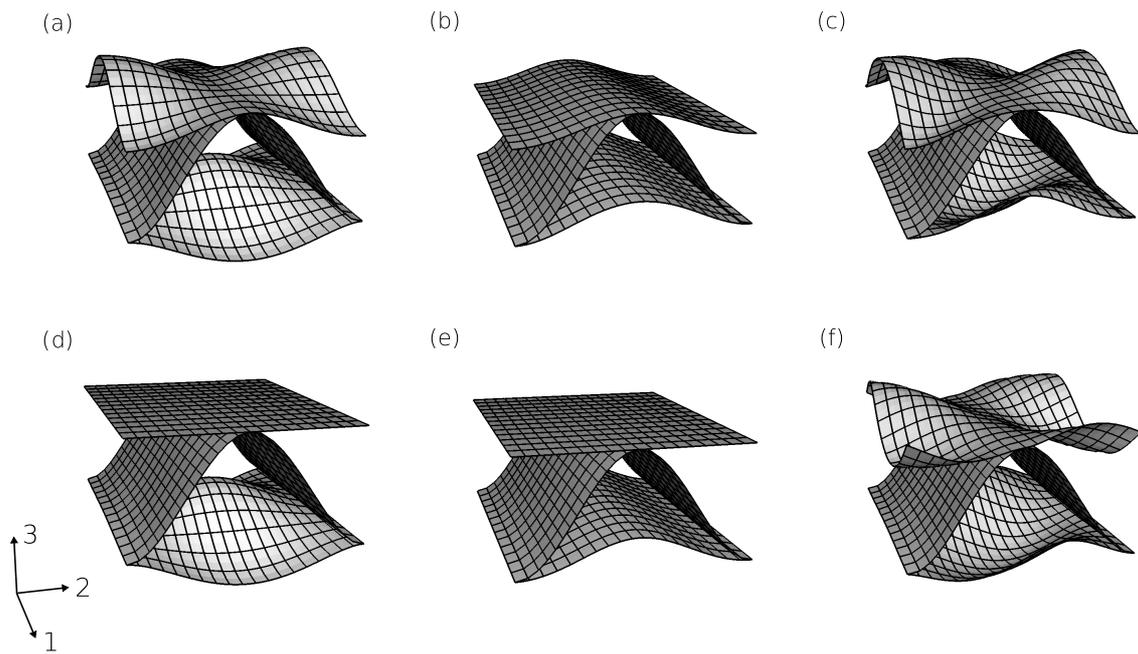


Abbildung 4.6: Lokales Beulen von Wellpappe, simuliert mit einem Einheitszellenmodell. Beulfigur zum 1. Eigenwert bei Druckbelastung in 1-Richtung (a), bei Druckbelastung in 2-Richtung (b), bei Schubbelastung in der Membranebene (c), bei Biegebelastung um die 2-Achse (d), bei Biegebelastung um die 1-Achse (e) und bei Belastung auf Verdrillung (f). Abmessungen und Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.1 (isotrope Konfiguration), $b_{uc} = b_{wl}$, $l_{uc} = 10$ mm, Flute-Modell Typ 1, biquadratische Elemente (S8R), $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$.

für ihn muss hier gelten: $d_2 \neq 0$. Um die kritische Schnittkraft $|N_{12}^*|$ zu bestimmen, muss der Eigenwert einerseits in Abhängigkeit von der Länge l_{uc} der Einheitszelle und andererseits in Abhängigkeit vom Versatz d_2 minimiert werden, vgl. [36]. Der Grund dafür kann wie folgt plausibel gemacht werden:

Bei Druckbelastung in 1-Richtung ergibt sich eine Beulfigur nach Abbildung 4.6(a). Reiht man mehrere (deformierte) Einheitszellen aneinander und verbindet gedanklich die höchsten Punkte der Beulfigur, so ergibt sich eine Gerade, die zur 2-Achse parallel ist. Diese Gerade soll im Folgenden als „Wellenberg“ bezeichnet werden. Selbiges kann mit den tiefsten Punkten gemacht werden; die entsprechende Linie ist bei Druckbelastung in 1-Richtung natürlich ebenfalls zur 2-Achse parallel und wird im Folgenden „Wellental“ genannt. Bei Belastung durch Druck in 1-Richtung wird wie erwähnt der Eigenwert λ_1 in Abhängigkeit von der Länge l_{uc} der Einheitszelle minimiert. Eine Veränderung von l_{uc} bewirkt dabei eine Veränderung des Normalabstandes p zwischen zwei benachbarten Wellenbergen bzw. zwischen zwei benachbarten Wellentälern der Beulfigur.

Bei Schubbelastung sind die Wellentäler und -berge der Beulfigur nicht mehr zu einer Koordinaten-Achse parallel, sondern verlaufen – falls die Einheitszelle klein genug¹² ist – parallel zu einer Diagonale (in der 1-2-Ebene) der Einheitszelle, der Winkel den sie mit der 2-Achse einschließen soll mit α bezeichnet werden. Bei einer Einheitszelle ohne Versatz ($d_2 = 0$) bestimmt damit die Länge l_{uc} den Normalabstand p und den Winkel α . Die Parameter p und α der Beulfigur müssen aber unabhängig voneinander sein. Das führt dazu, dass eine rechtwinklige Wellpappen-Einheitszelle mit nur einem freien Parameter l_{uc} nicht mehr ausreichend ist.

Ist die Beulfigur einer Sandwich-Platte mit homogenem Kern im Wesentlichen durch die beiden Parameter p und α bestimmt, so kann dort die verlangte Unabhängigkeit zwischen den Parametern p und α erreicht werden, indem nicht nur die Länge l_{uc} , sondern auch die Breite b_{uc} der Einheitszelle variiert wird. Der gesuchte Eigenwert muss in Abhängigkeit von l_{uc} und b_{uc} minimiert werden, vgl. [36]. Bei der Wellpappe ist die Einheitszellenbreite allerdings über die Wellenlänge des Kerns vorgegeben und kann nicht frei gewählt werden. Deshalb muss der Versatz d_2 eingeführt werden. Damit kann mit den beiden unabhängigen Parametern l_{uc} und d_2 jede beliebige Kombination aus Normalabstand p und Winkel α erhalten werden.

Für Details zur Periodizität der Beulfigur, die sich bei allgemeiner Belastung (Druck und Schub in der Membranebene) in den Deckschichten von Wellpappe einstellt, sei auf [23] verwiesen. Darin wird das lokale Beulen von Wellpappe-Deckschichten untersucht, wobei die Deckschichten als orthotrope Platten mit paralleler Linienunterstützung angesehen werden. Die Arbeit enthält sowohl analytische als auch numerische Untersuchungen.

Bei Belastung auf Verdrehung sind die Gegebenheiten noch komplexer, da die Wellenberge und -täler der beiden Deckschichten nicht mehr parallel sind, vgl. Abbildung 4.6(f).

Im Zuge dieser Arbeit wurde weder die kritische Schnittkraft $|N_{12}^*|$ noch das kritische Schnittmoment $|M_{12}^*|$ explizit berechnet.

¹²Dies ist der Fall, wenn nur eine Wellenlänge der Beulfigur in der Länge l_{uc} der Einheitszelle enthalten ist, vgl. Abbildung 4.6(e).

5 Optimierung

5.1 Globale Optimierung

Ein globales Optimierungsproblem kann allgemein formuliert werden als:

$$\min (F(\underline{x})), \quad \underline{x} \in S. \quad (5.1)$$

Die Zielfunktion $F(\underline{x})$ sei stetig und $S \subset \mathbb{R}^N$ sei ein kompakter Raum¹³. Unter diesen Voraussetzungen existiert ein optimaler (hier im Sinne von minimaler¹⁴) Funktionswert

$$F^{(\min)} = \min (F(\underline{x})), \quad \underline{x} \in S. \quad (5.2)$$

Damit ist die Menge $S^{(\min)}$

$$S^{(\min)} = \{\underline{x} \in S : F(\underline{x}) = F^{(\min)}\} \quad (5.3)$$

nicht leer, vgl. [6].

Es im Allgemeinen kein Algorithmus in der Lage, das Problem nach Gleichung (5.1) in begrenzter Zeit zu lösen; d.h. um einen Punkt der Menge $S^{(\min)}$ zu finden, werden unendlich viele Schritte benötigt. Ein allgemeines (globales) Optimierungs-Problem wird deshalb als gelöst betrachtet, wenn ein Punkt der Menge S_ϵ gefunden werden konnte, wobei S_ϵ beschrieben wird als:

$$S_\epsilon = \{\underline{x} \in S : F(\underline{x}) \leq F^{(\min)} + \epsilon\} \quad \text{mit} \quad \epsilon > 0. \quad (5.4)$$

Bei der Behandlung derartiger Probleme wird häufig auf stochastische Methoden zurückgegriffen. Bei der hier betrachteten Gruppe dieser Verfahren ist das berechnete Ergebnis selbst eine Zufallsvariable. Das Ziel einer jeden stochastischen Methode ist, dass die Wahrscheinlichkeit, einen Punkt aus S_ϵ zu finden, gegen 1 geht, wenn der Rechenaufwand gegen unendlich anwächst, vgl. [6].

Wichtige Vertreter der stochastischen Methoden sind die sogenannten 2-Phasen Methoden (*Two-phase Methods*). Bei ihnen kann eine globale und eine lokale Phase unterschieden werden. In der globalen Phase wird an zufällig ausgewählten Punkten die Funktion ausgewertet, in der lokalen Phase werden die ausgewählten Punkte manipuliert. Dies geschieht in der Regel über einen Algorithmus zur lokalen Optimierung, um damit einen Kandidaten für das globale Optimum zu bestimmen, vgl. [6].

Die einfachste Methode der 2-Phasen-Methoden ist die *Pure-Random-Search*-Methode (PRS). Dabei werden in S gleichverteilte Punkte ausgewählt, an denen anschließend die Funktion ausgewertet wird. Der Punkt mit dem kleinsten Funktionswert wird solange im

¹³Kompakte Mengen sind abgeschlossen und beschränkt; d.h. das Intervall $[0, 1]$ als Teilmenge von \mathbb{R} ist eine kompakte Menge. Bei den Teilmengen $]0, 1[$ und $[0, \infty[$ von \mathbb{R} handelt es sich nicht um kompakte Mengen.

¹⁴Ein Maximierungsproblem kann leicht in ein Minimierungsproblem umgewandelt werden, wenn $F(\underline{x}) = -\bar{F}(\underline{x})$ gesetzt wird.

Auge behalten, bis ein Punkt mit einem noch kleineren Funktionswert gefunden wird. Diese Methode verfügt über keine lokale Phase.

Im Gegensatz dazu arbeiten die *Multistart*-Algorithmen auch in der lokalen Phase. Ausgehend von gleichverteilten Startwerten werden die dazu nächstgelegenen lokalen Minima gesucht. Jedes lokale Minimum stellt einen Kandidaten für das globale Minimum dar. Das Problem dieser Methoden ist, dass jedes lokale Minimum in der Regel mehrmals gefunden wird, d.h. es existiert zu jedem lokalen Minimum ein Einzugsgebiet (*region of attraction*, vgl. [6]). Wird in diesem Gebiet die lokale Optimierung gestartet, so wird immer das selbe lokale Minimum erhalten.

Idealerweise sollte in jedem Einzugsgebiet die lokale Optimierung nur einmal angewendet werden. Auf diesem Gedanken bauen sogenannte *Clustering*-Methoden auf: Beginnend mit gleichverteilten Punkten werden Gruppen von „nahen“ Punkten zusammenfasst, die lokale Optimierung wird in jeder Gruppe nur einmal ausgeführt.

Zu den 2-Phasen-Methoden zählt außerdem noch die *Multi-Level-Single-Linkage*-Methode (MLSL), die die Vorteile von *Multistart*-Methoden und *Clustering*-Methoden zu kombinieren versucht. Für detaillierte Angaben sei auf [6] verwiesen.

5.2 Problem-Formulierung

Wie bereits eingangs erwähnt worden ist, sollte eine „optimale“ Wellpappenkonfiguration bestimmt werden. „Optimal“ ist dabei wie folgt zu verstehen: Für gewisse Mindestanforderungen an die Wellpappe (Nebenbedingungen) soll das Gewicht pro Plattenfläche minimiert werden. In jener Literatur, die sich mit „*Constrained Global Optimization*“ beschäftigt, sind Lösungsmethoden für derartige Probleme zu finden.

Hier wurden zwei Nebenbedingungen definiert: Es sollten vorgegebene Werte für die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ und für die Biegesteifigkeit B_1 nicht unterschritten werden.

Die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ entspricht einer Membranschnittkraft (Linien-Drucklast) in 1-Richtung, wobei sich „kritisch“ auf lokales Beulen der Deckschichten und/oder der Welle bezieht. $|N_{11}^*|$ soll einen vorgeschriebenen Wert $|N_{11,0}^*|$ nicht unterschreiten, damit lässt sich die erste Nebenbedingung formulieren als:

$$|N_{11}^*| \geq |N_{11,0}^*|. \quad (5.5)$$

Die Biegesteifigkeit B_1 wurde immer (sowohl bei der semi-analytischen als auch bei der numerischen Optimierung) analytisch berechnet. Auf die Berechnung der Biegesteifigkeit $B_1^{(h)}$ der homogenisierten Platte mit UCTOOL wurde verzichtet; bei numerischen Simulationen wäre dies im Zuge der Berechnung der effektiven Steifigkeit (vgl. ABD-Matrix, $B_1^{(h)} = D_{11}$) möglich gewesen, hätte aber zusätzlichen Rechenaufwand bedeutet.

Wie die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ soll auch die Biegesteifigkeit B_1 einen vorgeschriebenen Wert $B_{1,0}$ nicht unterschreiten. Dadurch wird nicht nur die Biegesteifigkeit bei Biegung um die 2-Achse, sondern auch die in Bezug auf globales Beulen kritische Last (in 1-Richtung) nach unten hin begrenzt.

Die zweite Nebenbedingung lässt sich formulieren als:

$$B_1 \geq B_{1,0}, \quad (5.6)$$

wobei B_1 wie in Kapitel 3.2 angegeben berechnet wurde.

Zur Formulierung der eigentlichen Zielfunktion wurde das Flächengewicht der Platte verwendet. Sowohl für die Deckschichten als auch für die Welle wurde die gleiche Dichte ρ angenommen, das Gewicht pro Plattenfläche ist somit direkt proportional zur bezogenen Querschnittsfläche A , die wie folgt definiert ist:

$$A = \frac{L_L t_L + L_F t_F}{b_{wl}}. \quad (5.7)$$

Darin sind $L_L = 2b_{wl}$ die gesamte Lauflänge (vgl. Produktionsprozess) an benötigtem Deckschichtmaterial und L_F die Lauflänge an benötigtem Wellenmaterial pro Wellenlänge b_{wl} . L_F wurde bei Flute-Modell Typ 1 und Typ 2 wieder für den Streckenzug berechnet. Die Suche nach dem kleinstmöglichen Flächengewicht der Wellpappe lässt sich anschreiben als:

$$A^{(\min)} = \min(A). \quad (5.8)$$

Um sinnvolle Werte für $|N_{11,0}^*|$ und $B_{1,0}$ zu erhalten, wurde der Literatur eine typische Wellpappengeometrie entnommen, vgl. [28]. Diese Abmessungen wurden verwendet, um einerseits in gerundeter Form zusammen mit isotropem Materialverhalten der Schichten (isotrope Konfiguration, vgl. Tabelle 2.1) und andererseits in nicht gerundeter Form zusammen mit orthotropem Materialverhalten der Schichten (orthotrope Konfiguration, vgl. Tabelle 2.2) die Größen $|N_{11}^*|$ und B_1 zu berechnen. Diese Werte wurden dann als die Grenzwerte der Nebenbedingungen $|N_{11,0}^*|$ und $B_{1,0}$ definiert und sind in Tabelle 5.1 angegeben. Die Nebenbedingungen stellen somit sicher, dass im Zuge der Optimierung die kritische Drucklast in 1-Richtung (CD) und die Biegesteifigkeit bei Biegung um die 2-Richtung (MD) im Vergleich zur herkömmlichen Wellpappe nicht kleiner werden.

	Isotrop	Orthotrop	
$ N_{11,0}^* $	26.21	11.15	N/mm
$B_{1,0}$	17277.1	7002.8	Nmm
A	0.6922	0.8302	mm

Tabelle 5.1: Grenzwerte der Nebenbedingungen bei isotropem und orthotropem Materialverhalten der Schichten. In der 3. Zeile ist außerdem die bezogene Querschnittsfläche A angegeben. Die eingetragenen Größen wurden mit der isotropen Konfiguration (vgl. Tabelle 2.1) bzw. mit der orthotropen Konfiguration (vgl. Tabelle 2.2) berechnet. Flute-Modell Typ 1, $\delta_{23} = 0.075$, $\delta_1 = 2.0$.

Bei der semi-analytischen Optimierung wurde ausschließlich isotropes Materialverhalten der Schichten angenommen. Damit waren dort nur die Nebenbedingungen der ersten Spalte von Tabelle 5.1 von Interesse.

Einige der oben beschriebenen Größen können natürlich auch für die tatsächlich sinusförmige Welle berechnet werden. Die so bestimmten Werte sollen im Folgenden mit „exakt“

	Näherung	Exakt	
$B_{1,0}$	17277.1	17319.3	Nmm
$I_{22,L}$	11.530	11.530	mm ⁴
$I_{22,F}$	2.879	2.918	mm ⁴
A	0.6922	0.6927	mm
L_L	14.400	14.400	mm
L_F	10.519	10.539	mm

Tabelle 5.2: Vergleich charakteristischer Größen der durch einen Streckenzug ersetzten Welle (Näherung) und der tatsächlich sinusförmigen Welle (Exakt). Flute-Modell Typ 1, Abmessungen nach Tabelle 2.1 (isotrope Konfiguration), $\delta_{23} = 0.075$.

bezeichnet werden. Die Werte, die mit einem Streckenzug als Welle berechnet wurden, stellen eine Näherung dar. Die wichtigsten Größen sind mit Abmessungen nach Tabelle 2.1 (isotrope Konfiguration, $\delta_{23} = 0.075$) sowohl näherungsweise als auch exakt berechnet worden und in Tabelle 5.2 zu sehen.

5.3 Semi-Analytische Optimierung

Betrachtet man die lokale Beulfigur bei Belastung in 1-Richtung (Druck), so stellt man fest, dass im Allgemeinen entweder der Kern oder die Deckschichten beulen. Nur in Ausnahmefällen beulen Kern und Deckschichten gleichzeitig, und selbst dann beeinflussen sich die Beulfiguren gegenseitig nur wenig, d.h. die Klebefläche (bzw. die Klebelinie bei $\beta_b = 0$) bleibt annähernd unverformt. Diese Eigenschaft kann für eine Voro Optimierung verwendet werden, indem Kern und Deckschicht unabhängig von einander betrachtet werden.

Beulen der Deckschicht ist analytisch beherrschbar. Bei längsdruckbelasteten Platten aus isotropem Material errechnet sich die elastische Beulspannung (Plattenbeulen) zu

$$\sigma^* = k E \left(\frac{t}{b} \right)^2. \quad (5.9)$$

Darin bezeichnet t die Plattendicke, b die Breite der Platte, E den E-Modul und k den Beulfaktor, der wie folgt definiert ist:

$$k = \frac{\kappa \pi^2}{12(1 - \nu^2)}.$$

κ hängt wiederum von den Halbwellenzahlen der Beulfigur, von den Randbedingungen, vom Längen-Breitenverhältnis der Platte und von der Belastungsart ab, vgl [34].

Für den beulenden Teil der Deckschicht kann mit E_L als dem E-Modul der isotropen Deckschicht Gleichung (5.9) angeschrieben werden als

$$\sigma_{11,L}^* = k E_L \left(\frac{t_L}{b_{wl} - b_b} \right)^2. \quad (5.10)$$

Der Beulfaktor k kann nicht ohne Annahmen über den auftretenden Beulmode bestimmt werden. Bei einer Beulfigur, wie sie in Abbildung 4.4(a) zu sehen ist, hat sich im Vergleich zu den numerischen Ergebnissen eine als Einspannung modellierte Randbedingung der Längsseiten bewährt. Tritt dagegen eine Beulfigur nach 4.4(b) auf, so wäre eine gelenkige Lagerung der Ränder die bessere, wenn auch konservative Wahl.

Der Großteil der numerischen Untersuchungen – und so auch die numerische Optimierung – wurden mit Einheitszellenmodellen der Breite $b_{uc} = b_{wl}$ durchgeführt. Diese Modelle unterdrücken die bei manchen Wellpappe-Konfigurationen auftretenden Beulmoden nach Abbildung 4.4(b), sparen allerdings viel Rechenzeit. Demgemäß wurde der Beulfaktor k für die semi-analytische Optimierung auch entsprechend einer Einspannung berechnet: Mit $\nu = 0.3$ ergibt sich für eine sehr lange, links- und rechtsseitig eingespannte Platte $k = 6.4$, vgl. [34].

Nach Gleichung (5.10) ergab sich mit $k = 6.4$, $t_F = 0.5$ mm (es beulen sicher nur die Deckschichten) und den übrigen Abmessungen nach Tabelle 2.1 (isotrope Konfiguration) eine kritische Spannung von $\sigma_{11,L}^* = 39.51$ N/mm². Die bezogene Querschnittsfläche errechnete sich zu $A = 1.1319$ mm, womit eine kritische Schnittkraft von $|N_{11}^*| = \sigma_{11,L}^* A = 44.72$ N/mm ermittelt werden konnte. Mit einem Einheitszellenmodell der Breite $b_{uc} = b_{wl}$ wurde für die gleiche Konfiguration eine kritische Schnittkraft von $|N_{11}^*| = 46.47$ N/mm numerisch berechnet (vgl. Tabelle 5.5). Das analytisch berechnete Ergebnis unterscheidet sich damit von dem numerisch berechneten Ergebnis um weniger als 4%.

Die kritische Spannung der druckbelasteten Welle ist analytisch bedeutend schwieriger zu erfassen. Daher wurde eine anderer Zugang nötig: Mit einem FE-Modell der Welle wurden für verschiedene Abmessungen die kritischen Beulspannungen bei Druckbelastung in 1-Richtung ermittelt. Die numerisch berechneten Datenpunkte sollten durch eine Näherungsfunktion (siehe später) bestmöglich approximiert werden. Die erhaltene Funktion diente dem Optimierungsalgorithmus zur Berechnung der kritischen Spannung in der Welle. Damit wird auch die Bezeichnung „semi-analytisch“ verständlich: Die Berechnung der kritischen Schnittkraft basiert nicht auf einer Simulation mit ABAQUS, die Näherungsfunktion, die die kritische Spannung in der Welle liefert, wurde aber über numerische Simulation erhalten.

Dieser Ansatz enthält drei wesentliche Fehlerquellen:

- Deckschicht und Kern werden unabhängig voneinander betrachten, obwohl die Beulfiguren interagieren.
- Die Berechnung der kritischen Spannung der Deckschicht nach Gleichung (5.10) wird nicht exakt mit den numerischen Ergebnissen übereinstimmen.
- Die kritische Spannung des Kerns ist auf Grund der Abweichung der Näherungsfunktion von den Datenpunkten ebenfalls fehlerbehaftet.

Um die Anzahl der nötigen Simulationen für die Datenaufnahme möglichst gering zu halten, wurden die vier bestimmenden Geometrieparameter b_{wl} , h_{uc} , t_F und β_b durch zwei dimensionslose Parameter ersetzt. Dazu wurde zum einen $\beta_b = 0$ angenommen, zum

anderen wurden die beiden Geometrieparameter b_{wl} und h_{uc} mittels t_F in dimensionsloser Form dargestellt. Ist $\beta_b = 0$, so enthalten b_{wl} und b_{hsin} (vgl. Gleichung (2.5)) die selbe Information, b_{hsin} hat sich aber als praktischer erwiesen und wird im Folgenden anstatt b_{wl} verwendet. Die beiden so entstehenden dimensionslosen Kenngrößen wurden neben einem weiteren Parameter, dem isotropen Elastizitäts-Modul E_F der Welle, gezielt variiert und Daten der folgenden Form aufgenommen:

$$\sigma_{11,F}^* = f_\sigma(p_1, p_2, p_3). \quad (5.11)$$

Darin sind die Parameter p_i definiert als

$$p_1 = \frac{b_{hsin}}{t_F}, \quad p_2 = \frac{h_{uc}}{t_F}, \quad p_3 = E_F. \quad (5.12)$$

Es wurden 83 Datenpunkte im Bereich von $5 \leq p_1 \leq 50$ und $10 \leq p_2 \leq 100$ aufgenommen. p_3 wurde einmal mit 6000 und einmal mit 8000 gewählt¹⁵.

Die Parameterstudie funktioniert für $\beta_b = 0$ und Flute-Modell Typ 1 in der Nähe der Standardabmessungen ausgezeichnet, d.h. die Beulfigur der Welle ist im Wesentlichen unabhängig davon, ob im Modell Deckschichten enthalten sind oder nicht. Bei $\beta_b \neq 0$ oder auch bei weit von den Standardkonfigurationen entfernten Abmessungen und besonders bei Flute-Modell Typ 3 gibt es allerdings Beulmoden der Welle, die beim Kern eines Modells mit Deckschichten nicht zu beobachten und daher für diese Untersuchung irrelevant sind. In Abbildung 5.1(a) ist diesbezüglich ein unsymmetrischer Beulmode zum 1. Eigenwert der Welle abgebildet, der bei einem Modell mit Deckschicht nicht zum 1. Eigenwert erhalten wird.

Diese unerwünschten Moden treten zudem immer an verschiedenen Positionen auf, d.h. einmal zum ersten, einmal zum dritten Eigenwert, usw. Dieses Problem wurde gelöst, indem das Daten auslesende Skript Verschiebungen charakteristischer Knoten miteinander vergleicht und so den passenden (symmetrischen) Beulmode sucht.

Obwohl dies eine Parametervariation von β_b möglich macht, wurde darauf verzichtet. Stattdessen wurde angenommen, dass – für genügend kleine Werte von β_b – $\sigma_{11,F}^*$ unabhängig von β_b ist.

Beim Modell der Welle (keine Deckschichten) sind nicht alle Eckpunkte der Einheitszelle „mit Material besetzt“. In diesen Punkten werden deshalb vom UCTOOL Punktmassen eingeführt, die zusätzliche Freiheitsgrade besitzen und numerische Schwierigkeiten verursachen. Um einen Abbruch der Simulation zu vermeiden, wurden zusätzliche Randbedingungen definiert. Die Richtigkeit der Ergebnisse wurde über die effektive Steifigkeit überprüft, indem die ABD-Matrix einmal mit sehr weichen Deckschichten und „korrekten“ Randbedingungen und einmal ohne Deckschichten und modifizierten Randbedingungen berechnet wurde. Die Ergebnisse stimmten für genügend weiche Deckschichten ausreichend genau überein. Die Eigenwerte konnten so nicht miteinander verglichen werden, da mit einer so weichen Deckschicht nur diese beult (zumindest bei den ersten Eigenwerten). Ohne diese modifizierten Randbedingungen tritt zum ersten Eigenwert ein Beulmode der Welle auf, der dem Biegedrillknicken von Biegeträgern ähnlich sieht, vgl. Abbildung 5.1(b).

¹⁵Das Python-Skript `CBrunPS.py` ermöglicht derartige Parametervariationen, vgl. Kapitel 7.

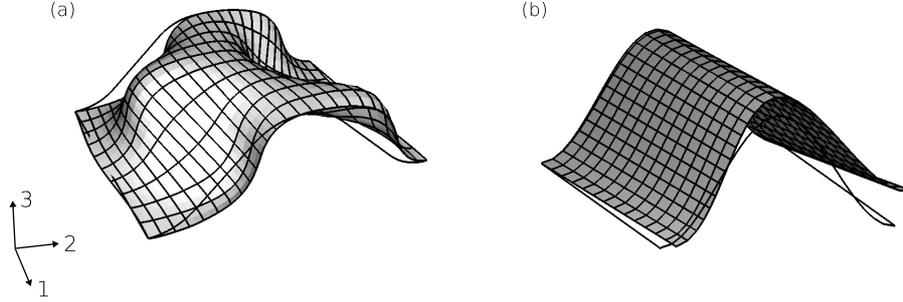


Abbildung 5.1: (a): Beulmode der Welle zum 1. Eigenwert bei Flute-Modell Typ 3, $b_{w1}=7.2$ mm, $h_{uc} = 3.6$ mm, $t_L = 0.2$ mm, $t_F = 0.2$ mm, $l_{uc} = 10$ mm, $\beta_r = 0.45$, $\beta_b = 0$; isotropes Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.1, biquadratische Elemente (S8R), $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$. (b): Beulmode des Kerns zum 1. Eigenwert ohne den zusätzlichen Randbedingungen. Abmessungen und Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.1 (isotrope Konfiguration), $l_{uc} = 10$ mm, Flute-Modell Typ 1, biquadratische Elemente (S8R), $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$.

Es wurde versucht, die Datenpunkte durch eine möglichst einfach aufgebaute Funktion anzunähern. Es hat sich gezeigt, dass ausgehend von der Gleichung für die kritische Spannung einer druckbelasteten Platte (vgl. Gleichung (5.9)) eine empirische Formel gefunden werden kann. Dabei wurde die Breite b der Platte durch eine äquivalente Breite b_{eq} ersetzt. Wäre die Welle nicht gekrümmt, sondern stattdessen wie ein Fachwerk aufgebaut, so wäre $b_{eq} = c_{hsin}$ mit c_{hsin} nach Gleichung (2.4) exakt. Da die Krümmung aber eine wesentliche Rolle spielt, wurde f_b – eine Korrekturfunktion zu c_{hsin} – eingeführt. Es soll also $b_{eq} = c_{hsin} f_b$ gelten. Für die Korrekturfunktion f_b wurde angenommen, dass sie nur vom Verhältnis b_{hsin}/h_{uc} und somit nur vom Verhältnis p_1/p_2 abhängt, also $f_b = f_b(p_1/p_2)$ gilt.

Die Plattendicke t in Gleichung (5.9) wurde durch t_F ersetzt und blieb ansonsten unverändert. Der E-Modul E entsprach dem Parameter p_3 , somit musste nur noch der Beulfaktor k angepasst werden. Er sollte von einer Funktion der Form $k = f_k(p_1, p_2)$ beschrieben werden. Alles zusammen ergibt eine Funktion der folgenden Form:

$$\sigma_{11,F}^* = f_k p_3 \left(\frac{t_F}{b_{eq}} \right)^2 = f_k p_3 \left(\frac{t_F}{c_{hsin} f_b} \right)^2 = f_k p_3 \left(\frac{1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2} f_b} \right)^2, \quad (5.13)$$

mit c_{hsin} nach Gleichung (2.4). Es wurde folgender Ansatz gemacht:

$$f_k = k_0 + k_{11} p_1 + k_{12} p_1^2 + k_{21} p_2 + k_{22} p_2^2, \quad (5.14)$$

$$f_b = 1 + c_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{0.5} + c_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \quad (5.15)$$

Mit Mathematica wurden die unbekannt sieben Koeffizienten bestimmen, wobei die Funktion `FindFit` verwendet wurde. Die errechneten Werte sind in Tabelle 5.3 angeführt.

$c_1 = -3.5304 \times 10^{-1}$
$c_2 = +1.1765 \times 10^{-1}$
$k_0 = +4.3727 \times 10^{-0}$
$k_{11} = -2.3886 \times 10^{-2}$
$k_{12} = +1.1588 \times 10^{-3}$
$k_{21} = +1.5300 \times 10^{-2}$
$k_{22} = -6.8287 \times 10^{-5}$

Tabelle 5.3: Mit der Mathematica-Funktion FindFit berechnete Koeffizienten der Gleichungen (5.13), (5.14) und (5.15).

Die Funktion f_k nimmt für die aufgenommenen Datenpunkte Werte zwischen 4.40 und 6.92 an, der Wertebereich der Funktion f_b liegt zwischen 0.74 und 0.93. f_b hat ein Minimum bei $p_1/p_2 = 2.25$ und nimmt dort den Wert 0.74 an, bei $p_1/p_2 = 1$ nimmt f_b den Wert 0.76 an.

Die mittlere kritische Spannung der aufgenommenen $n = 83$ Datenpunkte liegt bei rund 16 N/mm^2 . Mit obigen Koeffizienten ergibt sich für die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung

$$R = 0.50 \text{ N/mm}^2.$$

Sie wurde wie folgt berechnet:

$$R = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\text{num}(\sigma_{11,F}^*)_i - \text{sch}(\sigma_{11,F}^*)_i)^2}.$$

Darin bezeichnet $\text{num}(\sigma_{11,F}^*)_i$ beim Datenpunkt i numerisch berechnete Werte und $\text{sch}(\sigma_{11,F}^*)_i$ nach obiger Ableitung geschätzte Werte.

Aus den Gleichungen (5.13), (5.14) und (5.15), den Definitionen der Parameter nach Gleichung (5.12) und den Koeffizienten nach Tabelle 5.3 wurde eine Gleichung der Form

$$\sigma_{11,F}^* = \bar{f}_\sigma(b_{wl}, h_{uc}, t_F, \beta_b, E_F) \quad \text{bei} \quad \beta_b = 0 \quad (5.16)$$

erhalten. Sie dient als Näherung für die kritische Spannung des druckbelasteten Kerns. Für kleine Werte von β_b gilt auch näherungsweise:

$$\sigma_{11,F}^* \approx \bar{f}_\sigma(b_{wl}, h_{uc}, t_F, \beta_b, E_F) \quad \text{bei} \quad \beta_b \ll 1. \quad (5.17)$$

Mit der Gleichung (5.10) für die kritische Spannung in der Deckschicht und mit Gleichung (5.16) bzw. (5.17) für die kritische Spannung in der Welle kann zusammen mit der bezogenen Querschnittsfläche A die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ berechnet werden:

$$|N_{11}^*| = \min(\sigma_{11,L}^*, \sigma_{11,F}^*) A. \quad (5.18)$$

Mit der Voraussetzung $E_F = E_L = E$ kann für die optimale Wellpappe angenommen werden:

$$\sigma_{11,L}^* = \sigma_{11,F}^*. \quad (5.19)$$

Dieser Zugang wird als „primitive“ Optimierung bezeichnet. *Anmerkung:* „Primitives“ Optimieren bedeutet, dass mehrere Versagensarten gleichzeitig erreicht werden. Die so optimierten Strukturen weisen allerdings eine erhöhte Imperfektionsempfindlichkeit auf. Dementsprechend werden Ergebnisse einer „primitiven“ Optimierung eher nur als Anfangs-Design für eine robustere quasi-optimierte Auslegung herangezogen.

Schlussendlich ergab sich für isotropes Materialverhalten der Schichten folgender Satz von Gleichungen:

$$A^{(\min)} = \min(A) \quad (5.20a)$$

$$\sigma_{11,L}^* \geq |N_{11,0}^*| / A^{(\min)} \quad (5.20b)$$

$$\sigma_{11,F}^* \geq |N_{11,0}^*| / A^{(\min)} \quad (5.20c)$$

$$B_1 \geq B_{1,0} \quad (5.20d)$$

$$b_{wl}, h_{uc}, t_L, t_F > 0 \quad (5.20e)$$

$$\beta_b \geq 0 \quad (5.20f)$$

Dieses System kann mit der Mathematica-Funktion „NMinimize“ gelöst werden. NMinimize stellt die Methoden NelderMead, DifferentialEvolution, SimulatedAnnealing und RandomSearch zur Verfügung. Hier wurden die Methoden NelderMead – eine Implementierung der Downhill-Simplex-Methode – und DifferentialEvolution – ein genetischer Algorithmus (GA) – verwendet.

Die Downhill-Simplex-Methode¹⁶ geht auf Nelder und Mead zurück [32]. Es handelt sich dabei um einen Algorithmus der im Gegensatz zu vielen anderen keinen Subalgorithmus für eindimensionale Minimierungsprobleme erfordert. Des weiteren werden nur Funktionsauswertungen, nicht aber Ableitungen benötigt. Der Algorithmus ist im Allgemeinen sehr robust, kann u.U. aber sehr langsam konvergieren.

Der Grundgedanke des Algorithmus nach Nelder und Mead ist weniger von mathematischer als von geometrischer Natur. Ausgangspunkt ist das Simplex, eine geometrische Figur, die sich im N -dimensionalen Raum aus $N + 1$ Punkten, deren Verbindungslinien, den damit aufgespannten Flächen, usw. zusammensetzt. Im 2-dimensionalen Raum ist das Simplex ein Dreieck, im 3-dimensionalen Raum ein Tetraeder. In jedem Schritt werden die Funktionswerte der Funktion in N Variablen bei den $N + 1$ Eckpunkten des Simplex miteinander verglichen. Der Punkt mit dem höchsten Funktionswert wird durch Kontraktion, Expansion, Spiegelung oder einer Kombinationen davon modifiziert. Im Falle des Tetraeders ist dies leicht nachvollziehbar; z.B. wird der Punkt mit dem höchsten Funktionswert um die ihm gegenüberliegende Fläche gespiegelt. Dadurch sollte der Funktionswert des neuen Punktes verringert worden sein und ein neuer Modifikations-Schritt kann beginnen. Im Laufe der Modifikation des Simplex muss darauf geachtet werden, dass

¹⁶Nicht zu verwechseln mit der Simplex Methode für lineare Optimierung.

$b_{wl} = 5.03 \text{ mm}$
$h_{uc} = 4.23 \text{ mm}$
$t_L = 0.150 \text{ mm}$
$t_F = 0.136 \text{ mm}$
$\beta_b = 0$
$ N_{11}^* = 26.21 \text{ N/mm}$
$B_1 = 17277.1 \text{ Nmm}$
$A^{(\min)} = 0.5752 \text{ mm}$

Tabelle 5.4: Die mit Mathematica aus Gleichungssatz (5.20) bei $\beta_b = 0$ berechneten Abmessungen. Im zweiten Teil der Tabelle sind die Werte der über die Nebenbedingungen eingeschränkten Größen und der Wert der Zielfunktion im Optimum angegeben.

das Simplex nicht degeneriert. Nach ausreichend vielen Modifikationen kann ausgehend von einem Start-Simplex das (zumindest lokale) Minimum gefunden werden.

Genetische Algorithmen sind Optimierungsverfahren, die die biologische Evolution zum Vorbild haben. Sie basieren auf folgendem Grundgedanken: Zu Beginn werden Lösungskandidaten (Individuen) „zufällig“ generiert, alle zusammen bilden die Population der ersten Generation. Die Eigenschaften eines jeden Individuums werden getestet und bewertet. Je nach Tauglichkeit (Fitness) werden Kandidaten ausgewählt, aus denen durch Kombination und Mutation neue (bessere) Lösungskandidaten gebildet werden. Diese stellen die Population einer neuen Generation dar und die zweite Iteration beginnt, usw.

`NMinimize` bietet die Möglichkeit, die zufällig gewählten Startwerte mit der Option `RandomSeed` zu beeinflussen. Damit können mehrere Lösungen erzeugt werden und die Sicherheit, wirklich ein globales Minimum gefunden zu haben, steigt.

Es wurden mit dem Gleichungssatz (5.20), den Grenzwerten der Nebenbedingungen nach Tabelle 5.1 (1. Spalte) und $\beta_b = 0$ für mehrere Startwerte Lösungen erzeugt, wobei die Methoden `NelderMead` und `DifferentialEvolution` verwendet wurden. Das Ergebnis blieb immer das selbe und ist in Tabelle 5.4 zu sehen.

Die drei Parameter nehmen mit den optimierten Abmessungen die Werte $p_1 = 18.5$, $p_2 = 31.1$ und $p_3 = 8000$ an und liegen somit innerhalb des Datenbereichs, der zur Erzeugung der Näherungsfunktion (5.16) verwendet wurde.

Zum Abschluss sollen die Funktionen (5.10) und (5.16) im Hinblick auf Gültigkeit überprüft werden: Dies geschieht für die Standardabmessungen nach Tabelle 2.1 (isotrope Konfiguration), für die Standardabmessungen, wobei aber $t_F = 0.5$ bzw. $t_L = 0.5$ gesetzt wird und für das semi-analytisch berechnete Optimum. Die Modifikation der Kern- bzw. Deckschichtdicke bewirkt, dass jeweils nur die andere Komponente beult.

Die semi-analytisch berechneten kritischen Schnittkräfte $|N_{11}^*|$ sind neben den numerischen Ergebnissen in Tabelle 5.5 eingetragen (in N/mm).

	Semi-Analytisch	Numerisch
Standardabmessungen	27.37	26.21
wie oben, allerdings $t_F = 0.5$	44.72	46.47
wie oben, allerdings $t_L = 0.5$	124.8	137.3
Semi-analytisches Optimum	26.21	24.02

Tabelle 5.5: In Abhängigkeit von den Abmessungen bei isotropem Materialverhalten der Schichten semi-analytisch bzw. numerisch ($b_{uc} = b_{wl}$, $\delta_{23} = 0.075$, $\delta_1 = 2$, Flute-Modell Typ 1) berechnete kritische Schnittkräfte $|N_{11}^*|$ in N/mm.

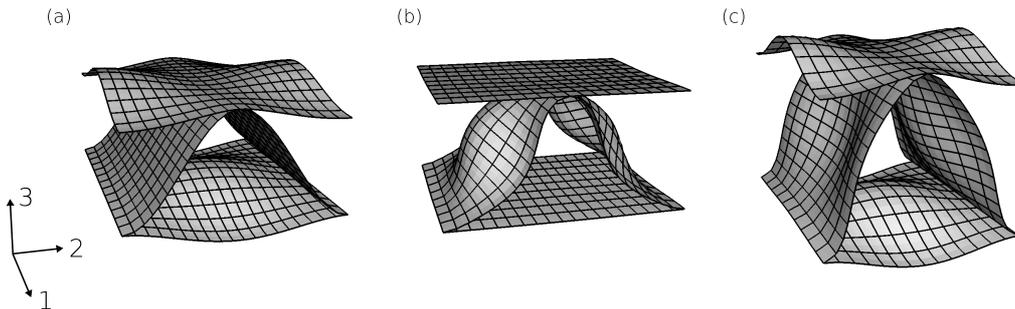


Abbildung 5.2: Lokales Beulen, simuliert mit Einheitszellen-Modellen von Wellpappe mit $t_F = 0.5$ mm (a) bzw. mit $t_L = 0.5$ mm (b) und von semi-analytisch optimierter Wellpappe (c) bei Druckbelastung in 1-Richtung. Alle übrigen Größen nach Tabelle 2.1 (isotrope Konfiguration), biquadratische Elemente (S8R), $\delta_{23} = 0.075$, $\delta_1 = 2$.

Die numerischen Ergebnisse in Tabelle 5.5 stimmen mit den semi-analytisch berechneten Werten gut überein, bei dem Modell mit den sehr steifen Deckschichten ist eine Abweichung von rund 9% (bezogen auf das numerische Ergebnis) zu erkennen. Für das semi-analytische Ergebnis wurden die Welle und die Deckschichten getrennt betrachtet, das numerische Ergebnis berücksichtigt die verstärkende Wirkung der Deckschichten, wodurch hier die Beullast einen höheren Wert annimmt.

Eine ähnlich große Abweichung ist im Bereich des Optimums zu erkennen. Mit den analytisch optimierten Abmessungen ergibt sich mit ABAQUS eine kritische Schnittkraft von $|N_{11}^*| = 24.02$ N/mm anstatt der geforderten $|N_{11}^*| = 26.21$ N/mm. Der Grund für die Abweichung dürfte darin liegen, dass hier sowohl Deckschichten als auch Welle beulen. Die Beulfiguren interagieren dabei, was die kritische Schnittkraft im Vergleich zur getrennten Betrachtung verringert.

Die entsprechenden Einheitszellen-Modelle sind im deformierten Zustand in Abbildung 5.2 dargestellt.

Weiters wurden die Gleichungen (5.20) mit $\beta_b \geq 0$ gelöst. Um eine zu große Klebefläche zu vermeiden, wurde zusätzlich $\beta_b \leq 0.2$ eingeführt. Unabhängig von der Lösungsmethode und vom Startwert ergaben sich die in Tabelle 5.6 dargestellten Abmessungen.

$b_{wl} = 5.86 \text{ mm}$
$h_{uc} = 4.20 \text{ mm}$
$t_L = 0.143 \text{ mm}$
$t_F = 0.133 \text{ mm}$
$\beta_b = 0.2$
$ N_{11}^* = 26.21 \text{ N/mm}$
$B_1 = 17277.1 \text{ Nmm}$
$A^{(\min)} = 0.5518 \text{ mm}$

Tabelle 5.6: Die mit Mathematica aus Gleichungssatz (5.20) bei $0 \leq \beta_b \leq 0.2$ berechneten Abmessungen. Im zweiten Teil der Tabelle sind die Werte der über die Nebenbedingungen eingeschränkten Größen und der Wert der Zielfunktion im Optimum angegeben.

Mit den Abmessungen aus Tabelle 5.6 nehmen die Parameter die Werte $p_1 = 13.2$, $p_2 = 31.5$ und $p_3 = 8000$ an und liegen somit noch im Bereich der aufgenommenen Datenpunkte.

Im nächsten Kapitel wird ein Optimierungsalgorithmus entwickelt, der – basierend auf der Berechnung der kritischen Drucklast mit ABAQUS – ein Optimum sucht. Dabei wird die Rechenzeit die Möglichkeiten stark einschränken. Hier liegt der große Vorteil des semi-analytischen Ergebnisses. Es ist einerseits eine gute Näherung für das wahrscheinlich globale Optimum, andererseits ist die benötigte Rechenzeit wesentlich kleiner. Das semi-analytisch berechnete Optimum kann außerdem als Startwert für die numerische Optimierung dienen.

5.4 Numerische Optimierung

Die Bezeichnung „numerisch“ bezieht sich auf die Art, wie die für den Optimierungsalgorithmus benötigten Berechnungen der kritischen Schnittkraft $|N_{11}^*|$ durchgeführt wurden. Sie wurden hier – im Gegensatz zur semi-analytischen Optimierung – mit ABAQUS numerisch berechnet, wobei für jeden Satz von Eingangsgrößen (Abmessungen, ...) das Minimum des Eigenwerts in Abhängigkeit von der Einheitszellenlänge l_{uc} bestimmt werden musste, vgl. Kapitel 4.3. Jede Berechnung von $|N_{11}^*|$ bedurfte somit rund acht bis zehn Simulationen mit dem Einheitszellenmodell. Die Diskretisierung wurde wie üblich mit $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2$ gewählt. Die Biegesteifigkeit B_1 wurde hier wie vorhin analytisch berechnet.

Die Suche nach dem globalen Minimum gestaltete sich als schwierig, nicht zuletzt auf Grund der Nebenbedingungen. Die Idee, die Zielfunktion zu visualisieren und damit einen Überblick über die Gegebenheiten zu erlangen, scheiterte zum einen an der Dimension des Problems; zum anderen ist die Zielfunktion allein nicht aussagekräftig, da auch Nebenbedingungen zu berücksichtigen sind.

Bei der Optimierung wurde wie folgt vorgegangen. Zuerst wurde eine Möglichkeit geschaf-

fen, ausgehend von einem Startwert das nächstgelegene lokale Minimum der Zielfunktion unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen zu bestimmen. Würden für ausreichend viele, genügend weit auseinander liegende Startwerte nur wenige lokale Minima gefunden, so könnte das globale Optimierungsproblem als gelöst im Sinne von [6] (vgl. Kapitel 5.1) betrachtet werden.

Bei der Suche nach lokalen Minima wurde vorerst versucht, selbst einen Optimierungsalgorithmus zu implementieren. Dabei wurde von der Methode nach Powell ausgegangen. Diese eignet sich für das hier betrachtete Problem gut, da dem Algorithmus keine Gradienten der Funktion (wie auch bei Nelder-Mead) zugeführt werden müssen. Im Gegensatz dazu benützen die Gruppen der Konjugierten-Gradienten-Verfahren (z.B. Fletcher-Reeves) und der Quasi-Newton-Verfahren (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno BFGS) die ersten Ableitungen. Die beiden Letzteren und auch die Methode nach Powell benötigen einen Subalgorithmus, der eindimensionale Minimierungsprobleme löst.

Um ein lokales Minimum einer Funktion in einer Variablen zu finden, stehen ausgereifte Methoden zur Verfügung, vgl. Kapitel 4.3. Diese können auch bei der Behandlung einer Funktion $F(\mathbf{x})$ in N Variablen zum Einsatz kommen, wenn man sich ausgehend von einem Punkt \mathbf{x}_0 entlang einer Richtung \mathbf{u}_i bewegt. Das gefundene Minimum kann als Ausgangspunkt für eine neues eindimensionales Minimierungsproblem entlang einer anderen Richtung dienen. Es ist nahe liegend, dies fortzusetzen und sich so dem Minimum der Funktion $F(\mathbf{x})$ schrittweise zu nähern. Es stellt sich die Frage, welche Richtungen \mathbf{u}_i verwendet werden sollen, um mit möglichst schnell das Minimum zu erreichen.

Die auf diesem Grundgedanken basierenden Verfahren (*Direction Set Methods*) unterscheiden sich darin, wie diese Richtungen bestimmt werden. Die Methode nach Powell geht von dem Konzept der konjugierten Richtungen aus; dieses soll im Folgenden näher betrachtet werden [32]:

Es sei eine quadratische Funktion¹⁷

$$F(\mathbf{x}) = c - \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (5.21)$$

angenommen, wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ und \mathbf{A} eine symmetrische Matrix sein soll. Nun wird ausgehend von dem Punkt \mathbf{x}_0 entlang der Richtung \mathbf{u}_1 minimiert; das Minimum soll mit \mathbf{x}_1 bezeichnet werden. Im Minimum \mathbf{x}_1 steht der Gradient von $F(\mathbf{x})$ normal auf \mathbf{u}_1 . Es stellt sich die Frage, wie sich der Gradient verändert, wenn ausgehend von \mathbf{x}_1 entlang einer zweiten Richtung \mathbf{u}_2 minimiert wird. Der Gradient von $F(\mathbf{x})$ berechnet sich allgemein zu

$$\text{grad}F = -\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{x},$$

vgl. [13, 32]. Mit der Transformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + s\mathbf{u}_2$$

ergibt sich für den Gradienten

$$\text{grad}F|_{\mathbf{x}} = -\mathbf{b} + \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + s\mathbf{u}_2) = \text{grad}F|_{\mathbf{x}_1} + s\mathbf{A}\mathbf{u}_2.$$

¹⁷Das Symbol „ \cdot “ kennzeichnet ein Skalarprodukt zweier Spalten-Vektoren.

Die Änderung des Gradienten ist $s_{\approx} \mathbf{A} \mathbf{u}_2$. Die Suche nach dem Minimum entlang von \mathbf{u}_2 soll die vorherige Minimierung nicht „stören“, d.h. die Änderung des Gradienten soll weiterhin auf \mathbf{u}_1 normal stehen. Es folgt damit als Bedingung für die konjugierten Richtungen \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_2 :

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{A} \mathbf{u}_2 = 0 \quad (5.22)$$

Das Ziel liegt darin, N konjugierte Richtungen der quadratischen Funktion F in N Variablen zu bestimmen. Damit wären lediglich N eindimensionale Minimierungsaufgaben zu lösen, um das Minimum exakt zu bestimmen. Ist dagegen F keine quadratische Funktion, so würde das Minimum bei mehrmaliger Iteration über die N Richtungen quadratisch konvergieren.

Bei der Methode nach Powell (*Powell's Quadratically Convergent Method*) werden diese konjugierten Richtungen schrittweise bestimmt. Bei einer Funktion in Form von Gleichung (5.21) sind dafür N Iterationen über den Basisalgorithmus nötig. Dem entsprechen $N(N+1)$ eindimensionale Minimierungsaufgaben, vgl. [32].

In der Regel wird die Zielfunktion keine quadratische Funktion sein, Gleichung (5.21) kann aber als Approximation der Zielfunktion verstanden werden, es steigt lediglich die Anzahl der nötigen Iterationen.

Bei der beschriebenen Vorgehensweise wurden keine Nebenbedingungen berücksichtigt. Deshalb wurden sie mit einem einfachen Ansatz in die Zielfunktion integriert. Der Ansatz lässt sich allgemein wie folgt formulieren, vgl. [13]: Ausgehend von dem Minimierungsproblem

$$\min (F(\mathbf{x})) \quad (5.23)$$

mit der Zielfunktion $F(\mathbf{x})$ und den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) &= 0, & i &= 1, \dots, l \\ h_j(\mathbf{x}) &\leq 0, & j &= 1, \dots, k \end{aligned}$$

wird ein neues Minimierungsproblem angeschrieben:

$$\min(\hat{F}(\mathbf{x})) = \min(F(\mathbf{x}) + \mu P(\mathbf{x})).$$

Darin bezeichnet μ einen zu wählenden Multiplikator und $P(\mathbf{x})$ die Straffunktionen, die wie folgt aufgebaut sind:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^l (g_i(\mathbf{x}))^2 + \sum_{j=1}^k (\max [h_j(\mathbf{x}), 0])^2 \quad (5.24)$$

Ohne Nebenbedingungen funktionierte der implementierte Algorithmus ausgezeichnet. Sollten Nebenbedingungen berücksichtigt werden, gestaltete sich die Wahl des Multiplikators μ als schwierig.

Daher wurde auf einen Algorithmus mit dem Namen „COBYLA“ zurückgegriffen. Dieser ursprünglich in FORTRAN programmierte Algorithmus steht in der Python-Bibliothek

„SciPy“ zur Verfügung. COBYLA ist ein Akronym für *Constrained Optimization by Linear Approximation*.

COBYLA bietet die Möglichkeit, Nebenbedingungen anzugeben. Dabei können nicht nur die Nebenbedingungen, sondern auch die Zielfunktion über nichtlineare Funktionen definiert werden. COBYLA hat sich im Zusammenhang mit ABAQUS bewährt, da der Algorithmus nur Funktionsauswertungen – also Berechnungen der kritischen Schnittkraft $|N_{11}^*|$ – benötigt. Schwierigkeiten kann es mit Parametern (z.B. Abmessungen) geben, die über Nebenbedingungen der Form $c_p > 0$ positiv gehalten werden müssen, da Nebenbedingungen im Laufe der Iteration nicht exakt eingehalten werden. Außerdem konvergiert COBYLA – z.B. im Vergleich zur Methode der konjugierten Richtungen – z.T. relativ langsam.

In den folgenden Ausführungen soll ein Minimierungsproblem

$$\min (F(\boldsymbol{x})), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N, \quad (5.25)$$

mit P Nebenbedingungen der Form

$$c_p(\boldsymbol{x}) \geq 0, \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (5.26)$$

betrachtet werden. Dem Algorithmus COBYLA liegt dabei folgendes Prinzip zu Grunde [31]: Ähnlich wie der Algorithmus nach Nelder und Mead basiert auch COBYLA auf der schrittweisen Manipulation der Form einer speziellen geometrischen Figur. Diese Figur wird als „Simplex“ bezeichnet. Das Simplex über die Eckpunkte \boldsymbol{v}_n , $n = 1, 2, \dots, N + 1$, definiert wird. Bei vielen Simplex-Methoden wird der Ort der neuen Funktionsauswertung nur in Abhängigkeit von den Punkten \boldsymbol{v}_n , $n = 1, 2, \dots, N + 1$ und dem Punkt \boldsymbol{v}_m gewählt. \boldsymbol{v}_m stellt dabei den Punkt mit dem größten Funktionswert dar, d.h. es gilt $F(\boldsymbol{v}_m) \geq F(\boldsymbol{v}_n)$, $n = 1, 2, \dots, N + 1$, vgl. [31]. Im Gegensatz dazu benützt COBYLA auch die bekannten Funktionswerte $F(\boldsymbol{v}_n)$, um den Ort der neuen Funktionsauswertung zu bestimmen. Die betrachtete Funktion F muss dabei glatt sein und wird durch eine lineare Funktion $\Phi(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ approximiert, wobei die Interpolation über

$$\Phi(\boldsymbol{v}_n) = F(\boldsymbol{v}_n), \quad n = 1, 2, \dots, N + 1$$

festgelegt ist. Der Gradient $\text{grad}\Phi$ kann dazu verwendet werden, um die Funktionswerte weiter zu reduzieren [31]. In ähnlicher Weise wie F werden auch die P Nebenbedingungen in der Form nach Gleichung (5.26) durch lineare Funktionen $\gamma_p(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ approximiert. Deren Koeffizienten sind über

$$\gamma_p(\boldsymbol{v}_n) = c_p(\boldsymbol{v}_n), \quad n = 1, 2, \dots, N + 1$$

zu bestimmen. Die Nebenbedingungen können dann als

$$\gamma_p(\boldsymbol{x}) \geq 0, \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (5.27)$$

angeschrieben werden.

COBYLA ist ein iterativer Algorithmus, d.h. innerhalb jeder Iteration $k = 1, 2, \dots$ wird die obige Approximation durchgeführt. Weiters gibt es für jedes k einen ausgezeichneten Punkt

\mathbf{x}_k der Eckpunkte \mathbf{v}_n , $n = 1, 2, \dots, N+1$. Für ihn gilt $F(\mathbf{x}_k) \leq F(\mathbf{v}_n)$, $n = 1, 2, \dots, N+1$, falls keine Nebenbedingungen vorhanden sind. Sind Nebenbedingungen definiert worden, so wird F in der letzten Ungleichung (ähnlich wie vorhin) durch $\widehat{F}(\mathbf{x})$ ersetzt, damit eine Verletzung der Nebenbedingung berücksichtigt werden kann:

$$\widehat{F}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \max [0, \max [-c_p(\mathbf{x}) : p = 1, 2, \dots, P]] \mu.$$

Jede Iteration berechnet einen neuen Punkt \mathbf{v}_{N+2} ; dies erfolgt entweder über einen „Minimierungs-Schritt“ oder über einen „Simplex-Schritt“. Am neuen Punkt wird die Funktion F und auch die Gleichungen der Nebenbedingungen ausgewertet. Anschließend muss ein Punkt aus \mathbf{v}_n , $n = 1, 2, \dots, N+2$ entfernt werden, und ein neuer Iterationsschritt kann gestartet werden.

Ein „Minimierungs-Schritt“ macht sich $\Phi(\mathbf{x})$ zu Nutze. \mathbf{v}_{N+2} wird als der Vektor \mathbf{x} gewählt, der $\phi(\mathbf{x})$ unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen nach Gleichung (5.27) minimiert. Im Allgemeinen können für das lineare Minimierungs-Problem bei $P < N$ keine beschränkten Lösungen gefunden werden. Des Weiteren ist auf Grund der linearen Approximation eine zu große Entfernung vom Simplex – also ein großer Abstand $\|\mathbf{v}_{N+2} - \mathbf{x}_k\|$ – nicht erwünscht. Deshalb wird zusätzlich die Bedingung $\|\mathbf{v}_{N+2} - \mathbf{x}_k\| \leq \rho_k$ eingeführt (vgl. *trust-region-Algorithmen*), mit $\rho_k > 0$. ρ_k wird im Laufe der Iteration verkleinert. Sind mehrere Lösungen des linearen Minimierungs-Problems gefunden worden, so wird die Lösung, die $\|\mathbf{v}_{N+2} - \mathbf{x}_k\|$ minimiert, verwendet.

In manchen Fällen ist das Ergebnis des „Minimierungs-Schrittes“ nicht akzeptabel, z.B. bei einem zu kleinen Abstand $\|\mathbf{v}_{N+2} - \mathbf{x}_k\|$. Dann wird ein „Simplex-Schritt“ für die Berechnung von \mathbf{v}_{N+2} herangezogen.

Wird \mathbf{v}_{N+2} über einen Minimierungs-Schritt berechnet und ist $\|\mathbf{v}_{N+2} - \mathbf{x}_k\|$ nicht zu klein für eine neue Funktionsauswertung, so kann trotzdem $F(\mathbf{v}_{N+2}) \geq F(\mathbf{x}_k)$ (keine Nebenbedingungen berücksichtigt) eintreten. Damit ist die Approximation $\Phi(\mathbf{v}_{N+2}) \approx F(\mathbf{v}_{N+2})$ offensichtlich ungültig, wofür es zwei mögliche Gründe geben kann:

Zum einen kann trotz einer brauchbaren Approximation Φ der Punkt \mathbf{v}_{N+2} zu weit vom Simplex entfernt sein, wodurch sich die Nichtlinearität von F bemerkbar macht. Dies kann mit einer Reduktion von ρ_k verhindert werden. Zum anderen kann die Ursache in der Form des Simplex liegen, das für die Approximation verwendet wurde. Ist z.B. für einen Eckpunkt \mathbf{v}_n der Abstand $\|\mathbf{v}_n - \mathbf{x}_k\|$ deutlich größer als ρ_k oder ist das Simplex beinahe degeneriert, so wird die lineare Approximation unbrauchbar. Dadurch wird die Berechnung eines besser geeigneten Simplex über einen Simplex-Schritt erforderlich, der im Wesentlichen unabhängig von Φ abläuft.

Zusammenfassend gilt, dass Simplex-Schritte im Allgemeinen eingesetzt werden, um das Degenerieren des Simplex zu verhindern.

Die Größe des Simplex wird im Zuge der Iteration über den Parameter Δ_k gesteuert. Δ_1 muss vom Benutzer angegeben werden und beeinflusst damit den Abstand zwischen den ersten Funktionsauswertungen vom ebenfalls anzugebenden Startwert. Als Abbruchbedingung muss ein Δ_* vorgegeben werden. Die Iteration wird beendet, wenn Δ_k den Wert Δ_*

erreicht. Wie die Reduktion von Δ_k und ρ_k ([30] setzt $\rho_k = \Delta_k$)¹⁸ im Laufe der Iteration erfolgt, ist [30, 31] zu entnehmen. Dort sind auch Details zu den Simplex-Schritten und über die Wahl des zu entfernenden Punktes aus \mathbf{v}_n , $n = 1, 2, \dots, N+2$ zu finden. Entscheidend für den Erfolg des Algorithmus ist auch die Wahl des Parameters μ , diesbezüglich sei ebenfalls auf [30, 31] verwiesen.

COBYLA wurde vor der eigentlichen Anwendung mit einer einfachen, analytischen Zielfunktion $A = A(b_{\text{wl}}, h_{\text{uc}}, t_{\text{L}}, t_{\text{F}})$ getestet:

$$A = (b_{\text{wl}} - 7.2)^2 + (h_{\text{uc}} - 3.6)^2 + (t_{\text{L}} - 0.2)^2 + (t_{\text{F}} - 0.2)^2.$$

Das offensichtliche Minimum obiger Funktion wurde mit rund 100 Funktionsauswertungen gefunden, wobei relativ weit entfernte Startwerte verwendet wurden.

Wurde zusätzlich eine Nebenbedingung eingeführt,

$$A = (b_{\text{wl}} - 7.2)^2 + (h_{\text{uc}} - 3.6)^2 + (t_{\text{L}} - 0.2)^2 + (t_{\text{F}} - 0.2)^2$$

$$b_{\text{wl}} \geq 10,$$

so wurde das erwartete Ergebnis trotzdem problemlos erhalten. Es waren wieder rund hundert Funktionsauswertungen nötig.

Mit COBYLA konnte nun das Modell der Wellpappe optimiert werden, wobei folgendes Gleichungssystem verwendet wurde, welches im Wesentlichen dem Gleichungssystem (5.20) entspricht:

$$A^{(\min)} = \min(A) \tag{5.28a}$$

$$|N_{11}| = \lambda_1 |N_{11, \text{ref}}| \geq |N_{11,0}^*| \tag{5.28b}$$

$$B_1 \geq B_{1,0} \tag{5.28c}$$

$$b_{\text{wl}}, h_{\text{uc}}, t_{\text{L}}, t_{\text{F}} \geq \varepsilon \tag{5.28d}$$

$$\beta_{\text{b}} \geq 0 \tag{5.28e}$$

Alle Nebenbedingungen mussten in Form von Gleichung (5.26) definiert werden; deshalb wurde in Gleichung (5.28d) nicht 0, sondern ein sehr kleiner Werte ε verwendet.

Zu Beginn wurde die Wellpappe mit isotropem Materialverhalten der Schichten optimiert. Dazu wurden die Grenzwerte der Nebenbedingungen $|N_{11,0}^*|$ und $B_{1,0}$ nach Tabelle 5.1 (1. Spalte) verwendet. Als Startwert wurde vorerst die Abmessungen der isotropen Konfiguration nach Tabelle 2.1 benützt.

In Tabelle 5.7 sind in der mit „1.“ gekennzeichneten Zeile der benützte Startwert (links) und das damit berechnete Minimum mit dem dortigen Wert der Zielfunktion $A^{(\min)}$ (rechts) zu sehen.

Die optimierte Struktur besitzt eine kritische Schnittkraft von $|N_{11}^*| = 26.205$ und Biegesteifigkeit von $B_1 = 17278.9$. Diese Werte entsprechen beinahe exakt den über Nebenbedingungen vorgeschriebenen Mindestwerten, vgl. Tabelle 5.1.

¹⁸Für Effizienz wäre z.B. bei quadratischen Zielfunktionen (vgl. die später verwendete Testfunktion) $\rho_k > \Delta_k$ nötig, vgl. [31].

	b_{wl}	h_{uc}	t_L	t_F	\rightarrow	b_{wl}	h_{uc}	t_L	t_F	$A^{(\min)}$
1.	7.20	3.60	0.200	0.200	\rightarrow	4.99	4.15	0.158	0.134	0.5856
2.	5.03	4.23	0.150	0.136	\rightarrow	4.83	4.20	0.152	0.136	0.5851

Tabelle 5.7: In Abhängigkeit von den Startwerten (links) mit COBYLA berechnete lokale Optima (rechts). Zusätzlich sind die Werte der Zielfunktion $A^{(\min)}$ für die optimierten Strukturen angegeben. 1. Startwert: isotrope Konfiguration nach Tabelle 2.1, 2. Startwert: semi-analytisch berechnetes Optimum; $\beta_b = 0$, Nebenbedingungen nach Tabelle 5.1, isotropes Materialverhalten der Schichten, Flute-Model 1, $b_{uc} = b_{wl}$, $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$.

Für die Suche nach dem (lokalen) Minimum waren 109 Berechnungen der kritischen Schnittkraft nötig.

Es bot sich an, das Ergebnis der semi-analytischen Optimierung als Startwert zu verwenden. Da sich der Startwert im Bereich des vermuteten Optimums befindet, wurde der Startwert Δ_1 von COBYLA klein gewählt.

Das gefundene Minimum ist neben dem Startwert in der mit „2.“ gekennzeichneten Zeile von Tabelle 5.7 zu sehen. Es wurden lediglich 43 Berechnungen der kritischen Schnittkraft benötigt, die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ und die Biegesteifigkeit B_1 der optimierten Struktur entsprechen erneut genau den vorgeschriebenen Mindestwerten. Das semi-analytische Ergebnis erwies sich als sehr guter Startwert, was sich auch in der kürzeren Rechenzeit widerspiegelte.

Die mit den zwei verschiedenen Startwerten gefundenen Minima liegen sehr nahe beieinander: die Abmessungen unterscheiden sich um weniger als 4%, die Flächengewichte sind beinahe identisch. Die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ und die Biegesteifigkeit B_1 der beiden optimierten Strukturen entsprechen genau den in den Nebenbedingungen definierten Mindestwerten. Es ist noch unbekannt, ob in etwas größerer Entfernung ein eventuell kleineres Minimum existiert. Entscheidendes Ergebnis ist, dass sich das Flächengewicht im Vergleich zur herkömmlichen Wellpappe (isotrope Konfiguration nach Tabelle 2.1) um 15.5% verringert hat; das Flächengewicht war dort $A = 0.6922$. Es sei noch einmal verdeutlicht, dass im Zuge der Optimierung die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ und die Biegesteifigkeit B_1 unverändert geblieben sind. Dadurch besitzt die optimierte Wellpappe bezüglich $|N_{11}^*|$ und B_1 die selben mechanischen Eigenschaften wie die isotrope (Ausgangs-)Konfiguration.

Die berechneten (lokalen) Minima unterscheiden sich wie erwähnt nur wenig voneinander. Ein ähnliches Phänomen kann auch bei der semi-analytischen Betrachtung mit Mathematica beobachtet werden, wenn der Gleichungssatz (5.20) etwas modifiziert wird: In Kapitel 5.4 wurde die Annahme

$$\sigma_{11,L}^* = \sigma_{11,F}^* \quad (5.29)$$

benützt, woraus die zwei Gleichungen (5.20b) und (5.20c) abgeleitet werden konnten. Bei der Optimierung von Wellpappe mit COBYLA und ABAQUS ist die Bedingung (5.29) in der Regel nicht erfüllt, erst im Bereich des lokalen Minimums beulen Deckschichten und

	b_{wl}	h_{uc}	t_L	t_F	$A^{(\min)}$
1.	4.84	4.28	0.144	0.137	0.5756
2.	5.23	4.17	0.156	0.135	0.5756
3.	5.29	4.16	0.158	0.135	0.5759
4.	5.40	4.13	0.161	0.135	0.5766
5.	6.45	3.87	0.190	0.132	0.5922

Tabelle 5.8: Fünf ausgewählte, mit Mathematica und dem Gleichungssystem (5.31) berechnete Abmessungen. Außerdem ist der Wert der Zielfunktion $A^{(\min)}$ im jeweiligen lokalen Optimum angegeben.

Kern. Beult nur eine Komponente, dann kann dies modellhaft mit der Gleichung

$$\sigma_{11}^* = \min[\sigma_{11,L}^*, \sigma_{11,F}^*] \quad (5.30)$$

beschrieben werden. Damit geht Information (über die nicht kritische Komponente) verloren. Es wurde nun mit Mathematica das Gleichungssystem

$$A^{(\min)} = \min(A) \quad (5.31a)$$

$$\sigma_{11}^* = \min[\sigma_{11,L}^*, \sigma_{11,F}^*] = |N_{11,0}^*| / A^{(\min)} \quad (5.31b)$$

$$B_1 \geq B_{1,0} \quad (5.31c)$$

$$b_{wl}, h_{uc}, t_L, t_F > 0 \quad (5.31d)$$

$$\beta_b = 0 \quad (5.31e)$$

gelöst. Mit `RandomSeed` wurden bis zu 50 Lösungen produziert, wobei auch verschiedene Lösungsmethoden versucht wurden. Und trotzdem entsprach innerhalb einer Berechnung kein Minimum exakt dem anderen, was den Gegebenheiten bei der numerischen Optimierung mit COBYLA sehr ähnelt. Beispielhaft sind in Tabelle 5.8 fünf ausgewählte Lösungen, die mit Mathematica für das Gleichungssystem (5.31) erhalten wurden, angegeben.

Nun wurde die Forderung $\beta_b = 0$ fallengelassen, allerdings sollte wie bei der semi-analytischen Berechnung die Breite der Klebefläche mit $\beta_b \leq 0.2$ begrenzt sein. Als Startwerte wurden die Abmessungen der isotropen Standard-Konfiguration nach Tabelle 2.1 und die entsprechende, semi-analytisch optimierte Struktur verwendet. Mit 99 bzw. 59 Berechnungen der kritischen Schnittkraft wurden die in Tabelle 5.9 angeführten Ergebnisse erhalten.

Erneut stimmen die numerisch optimierten Abmessungen verhältnismäßig gut mit den semi-analytisch berechneten Werten überein, die bezogene Breite der Klebefläche läuft auch hier an die Grenze $\beta_b \leq 0.2$. Gegenüber dem Flächengewicht einer herkömmlichen Wellpappe mit den Abmessungen Tabelle 2.1 (isotrope Konfiguration) konnte das bezogene Gewicht um 19.1% reduziert werden, im Vergleich zur optimierten Struktur mit $\beta_b = 0$ konnte eine 4.3%ige Gewichtsersparnis erreicht werden.

	b_{wl}	h_{uc}	t_L	t_F	β_b	\rightarrow	b_{wl}	h_{uc}	t_L	t_F	β_b	$A^{(\min)}$
1.	7.20	3.60	0.200	0.200	0.0	\rightarrow	6.07	4.09	0.155	0.131	0.2	0.5606
2.	5.86	4.20	0.143	0.133	0.2	\rightarrow	5.96	4.12	0.152	0.132	0.2	0.5599

Tabelle 5.9: In Abhängigkeit von den Startwerten (links) mit COBYLA berechnete lokale Optima (rechts). Zusätzlich sind die Werte der Zielfunktion $A^{(\min)}$ für die optimierten Strukturen angegeben. 1. Startwert: mit $\beta_b = 0$ optimierte Struktur, 2. Startwert: isotrope Konfiguration nach Tabelle 2.1; $0 \leq \beta_b \leq 0.2$, Nebenbedingungen nach Tabelle 5.1, isotropes Materialverhalten der Schichten, Flute-Model 1, $b_{uc} = b_{wl}$, $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$.

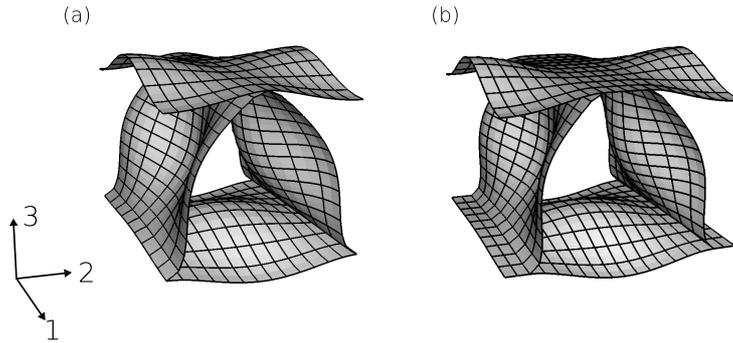


Abbildung 5.3: Mit Einheitszellen-Modellen berechnete Beulfiguren der mit $\beta_b = 0$ (a) bzw. mit $0 \leq \beta_b \leq 0.2$ (b) optimierten Wellpappe. Isotropes Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.1, biquadratische Elemente (S8R), $\delta_{23} = 0.075$, $\delta_1 = 2$.

In Abbildung 5.3 sind die numerisch berechneten Optima der Wellpappe mit isotropem Materialverhalten der Schichten sowohl für $\beta_b = 0$ als auch für $0 \leq \beta_b \leq 0.2$ zusehen. Es ist deutlich zu erkennen, dass sowohl die Welle als auch die Deckschichten lokal beulen.

Auch die Wellpappe mit orthotropem Materialverhalten der Schichten wurde optimiert. Entsprechend dem Vorgehen bei isotropem Materialverhalten der Schichten wurden auch hier die Grenzwerte der Nebenbedingungen $|N_{11,0}^*|$ und $B_{1,0}$ nach Tabelle 5.1 (2. Spalte) gewählt.

Als Startwert wurde die Abmessungen der orthotropen Konfiguration nach Tabelle 2.2 verwendet; das damit gefundene Minimum ist neben dem Startwert in Tabelle 5.10 dokumentiert.

Das ursprüngliche Flächengewicht von $A = 0.8302$ mm konnte auf $A^{(\min)} = 0.6795$ reduziert werden; das entspricht einer Gewichtsersparnis von 18.2%. Dabei sind wieder die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ und die Biegesteifigkeit B_1 unverändert geblieben.

Um ein von obiger Lösung entferntes (lokales) Optimum ausschließen zu können, wurden weitere 16 Startwerte untersucht. Sie wurden aus den 16 möglichen Kombinationen der

b_{wl}	h_{uc}	t_L	t_F	\rightarrow	b_{wl}	h_{uc}	t_L	t_F	$A^{(\min)}$
7.20	3.60	0.231	0.252	\rightarrow	5.05	4.04	0.208	0.136	0.6795

Tabelle 5.10: In Abhängigkeit vom Startwert (links) mit COBYLA berechnetes lokales Optimum (rechts). Zusätzlich ist der Wert der Zielfunktion $A^{(\min)}$ für die optimierte Struktur angegeben. Startwert: orthotrope Konfiguration nach Tabelle 2.2; $\beta_b = 0$, Nebenbedingungen nach Tabelle 5.1, orthotropes Materialverhalten der Schichten, Flute-Model 1, $b_{uc} = b_{wl}$, $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$.

Extremwerte der als zulässig angenommenen Parameterbereiche erhalten.

$$\begin{aligned}
2.50 &\leq b_{wl} \leq 10.0 \\
2.00 &\leq h_{uc} \leq 8.0 \\
0.140 &\leq t_L \leq 0.310 \\
0.090 &\leq t_F \leq 0.210
\end{aligned}$$

Die Startwerte und die damit berechneten Minima sind in Tabelle 5.11 – geordnet nach steigendem Flächengewicht – angegeben.

Bei den 16 Startpunkten wurden im Schnitt 111 Berechnungen von $|N_{11}^*|$ benötigt. Damit waren für die 16 Startwerte 1780 Berechnungen der kritischen Schnittkraft nötig. Da jede Schnittkraftberechnung eine Minimierung in Abhängigkeit von der Einheitszellenlänge benötigt und dafür rund neun Simulationen anfallen, mussten von ABAQUS insgesamt rund 16000 Jobs abgearbeitet werden.

Die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$ und die Biegesteifigkeit B_1 aller optimierten Strukturen entsprechen genau den in den Nebenbedingungen definierten Mindestwerten. Lediglich bei einem Startwert konnte das lokale Minimum nicht innerhalb der vorgegebenen Genauigkeit gefunden werden. Es ist außerdem nicht möglich, ein Minimum mit Sicherheit als das globale Minimum zu identifizieren.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass der Optimierungsalgorithmus gut funktioniert. Es wurden allerdings unerwartet viele lokale Minima gefunden, was auch mit Mathematica und dem Gleichungssatz (5.31) beobachtet werden konnte. Dies dürfte am System selbst und den dazugehörigen Nebenbedingungen liegen. Das semi-analytische Ergebnis wurde bestätigt. Dadurch wird erneut der Vorteil der semi-analytischen Betrachtung deutlich: Sie benötigt viel weniger Rechenzeit und liefert trotzdem eine gute Abschätzung des wahrscheinlich globalen Optimums. Das primäre Ziel, das Flächengewicht zu reduzieren, wurde erreicht. Mehr als 15% konnten im Vergleich zu den Ausgangskonfigurationen eingespart werden.

Die numerische Optimierung wurde mit Einheitszellenmodellen der Breite $b_{uc} = b_{wl}$ durchgeführt. Damit wird indirekt die Annahme getroffen, dass Beulmoden, deren Wellenlängen in Richtung MD größer sind als die Wellenlänge b_{wl} des Kerns (vgl. Abbildung 4.4(b)), nicht auftreten. Diese Annahme soll nun bestätigt werden, indem der Beulmode der optimierten Struktur mit orthotropem Materialverhalten der Schichten (die Abmessungen sind in der 1. Zeile von Tabelle 5.11 zu finden) mit einem Einheitszellenmodell der Breite $b_{uc} = 2b_{wl}$

	b_{wl}	h_{uc}	t_L	t_F	\rightarrow	b_{wl}	h_{uc}	t_L	t_F	$A^{(\min)}$
1.	10.0	8.00	0.140	0.210	\rightarrow	4.82	4.13	0.195	0.141	0.6794
2.	10.0	8.00	0.310	0.090	\rightarrow	5.05	4.03	0.209	0.135	0.6797
3.	10.0	8.00	0.140	0.090	\rightarrow	4.57	4.24	0.182	0.146	0.6819
4.	2.50	2.00	0.140	0.210	\rightarrow	4.48	4.19	0.189	0.140	0.6832
5.	2.50	8.00	0.310	0.210	\rightarrow	4.41	4.24	0.182	0.144	0.6836
6.	2.50	8.00	0.140	0.090	\rightarrow	4.09	4.38	0.166	0.149	0.6915
7.	2.50	8.00	0.310	0.090	\rightarrow	4.23	4.17	0.191	0.137	0.6918
8.	2.50	8.00	0.140	0.210	\rightarrow	4.06	4.43	0.160	0.152	0.6933
9.	10.0	8.00	0.310	0.210	\rightarrow	5.82	3.75	0.246	0.120	0.6940
10.	10.0	2.00	0.140	0.090	\rightarrow	6.14	3.71	0.251	0.122	0.7002
11.	10.0	2.00	0.140	0.210	\rightarrow	6.06	3.83	0.227	0.156	0.7135
12.	10.0	2.00	0.310	0.210	\rightarrow	6.68	3.65	0.254	0.139	0.7208
13.	2.50	2.00	0.310	0.210	\rightarrow	3.79	3.88	0.225	0.119	0.7286
14.	2.50	2.00	0.310	0.090	\rightarrow	3.70	3.83	0.231	0.116	0.7366
15.	10.0	2.00	0.310	0.090	\rightarrow	7.56	3.24	0.325	0.097	0.7821
16.	2.50	2.00	0.140	0.090	\rightarrow	-	-	-	-	-

Tabelle 5.11: In Abhängigkeit von den Startwerten (links) mit COBYLA berechnete lokale Optima (rechts). Zusätzlich sind die Werte der Zielfunktion $A^{(\min)}$ für die optimierten Strukturen angegeben. 16 weit auseinander liegende Startwerte; $\beta_b = 0$, Nebenbedingungen nach Tabelle 5.1, orthotropes Materialverhalten der Schichten, Flute-Model 1, $b_{uc} = b_{wl}$, $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$.

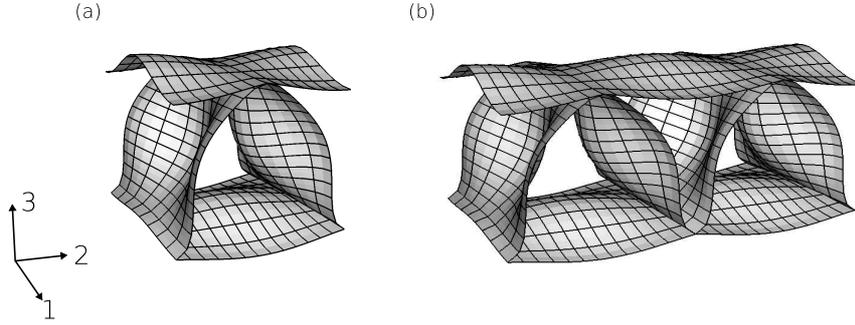


Abbildung 5.4: Beulfigur (1. Eigenwert) des Einheitszellenmodells bei Druckbelastung in 1-Richtung. Flute-Modell Typ 1 mit $b_{uc} = b_{wl}$ (a) bzw. $b_{uc} = 2b_{wl}$ (b); Abmessungen nach Tabelle 5.11 (lokales Optimum der 1. Zeile) und orthotropes Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.2; biquadratische Elemente (S8R), $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$.

simuliert wird. In Abbildung 5.4 sind die entsprechenden Beulfiguren (1. Eigenwert) mit $b_{uc} = b_{wl}$ (a) bzw. mit $b_{uc} = 2b_{wl}$ (b) bei Druckbelastung in 1-Richtung dargestellt. Mit den abgebildeten Beulfiguren wird deutlich, dass (zumindest bei der optimierten Struktur) die Voraussetzung bezüglich der Form der auftretenden Beulmoden tatsächlich erfüllt ist. Die beiden Simulationen mit den unterschiedlich breiten Einheitszellenmodellen lieferten dieselben Werte für die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*|$.

Zum Abschluss soll – ähnlich wie in Kapitel 3.3 – die effektive Steifigkeitsmatrix der numerisch optimierten Wellpappe angegeben werden. Für die mit isotropem Materialverhalten der Schichten optimierte Struktur (die entsprechenden Abmessungen sind in der 2. Zeile von Tabelle 5.7 zu finden) ergab sich folgende Steifigkeitsmatrix:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(h)} = \begin{pmatrix} 4921.9 & 804.5 & \approx 0 \\ 804.5 & 2681.8 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & 1141.8 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(h)} = \begin{pmatrix} 17284.8 & 4051.6 & \approx 0 \\ 4051.6 & 13505.3 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & 4742.8 \end{pmatrix}.$$

Der betragsmäßig größte Eintrag von $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(h)}$ ist $B_{33}^{(h)} = -0.10 \text{ Nmm}$. Man erkennt, dass die geforderte Biegesteifigkeit B_1 im Vergleich zur isotropen Standard-Konfiguration unverändert geblieben ist, alle übrigen Einträge sind im Zuge der Optimierung geringfügig kleiner geworden.

Es fehlt noch die effektive Steifigkeitsmatrix der numerisch optimierten Wellpappe mit orthotropem Materialverhalten der Schichten (Abmessungen nach Tabelle 5.10). Sie ergab sich zu:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(h)} = \begin{pmatrix} 1863.1 & 215.2 & \approx 0 \\ 215.2 & 3456.4 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & 892.5 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{(h)} = \begin{pmatrix} 7032.03 & 1034.6 & \approx 0 \\ 1034.6 & 16619.0 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & 3841.5 \end{pmatrix}.$$

Wie im isotropen Fall wurde auch hier die Biegesteifigkeit B_1 konstant gehalten.

6 Nichtlineare Stabilitätsanalyse

Bei Stabilitätsverlust durch Durchschlagen geht die Tragfähigkeit des Systems verloren. Dementsprechend ist das Durchschlagsverhalten einer Struktur von Interesse. Um Durchschlagen simulieren zu können, muss allerdings auf nichtlineare FE-Analysen zurückgegriffen werden, wobei mehrere Methoden zur Verfügung stehen: Umfangreiche Anwendungsmöglichkeiten bietet eine dynamische Betrachtung des Systems, die Simulation kann dabei kraft- oder verschiebungsgesteuert durchgeführt werden. In statischen Analysen können instabile Gleichgewichtslagen mit dem Riks-Algorithmus (oder einem ähnlichen Bogenlängenverfahren) gefunden werden.

6.1 Statische nichtlineare Analyse

Soll die Last-Verschiebungskurve eines Systems über einen vorhandenen Durchschlagspunkt hinaus ermittelt werden, kann nicht auf herkömmliche iterative FE-Algorithmen für statische Probleme mit Lastinkrementierung zurückgegriffen werden. Für derartige Aufgabenstellungen haben sich Bogenlängen-Verfahren bewährt; dazu zählt auch der Algorithmus nach Riks-Wempner bzw. dessen Modifikation nach Ramm [8].

Voraussetzung ist im Allgemeinen eine proportionale Belastung, d.h. nur ein Parameter – der Laststeigerungsfaktor λ zur Referenzlast \mathbf{P}_{ref} – steuert die Belastung. Der Vektor der unbekanntenen Verschiebungen \mathbf{u} wird um den Laststeigerungsfaktor λ erweitert, wodurch der verallgemeinerte Verschiebungsvektor \mathbf{v} erhalten wird, vgl. [8]:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Der Grundgedanke beruht darauf, eine Zwangsbedingung für das Inkrement des verallgemeinerten Verschiebungsvektors

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \lambda \end{pmatrix}$$

einzuführen. Die Zwangsbedingung kann z.B. als

$$\Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} = ds^2 \tag{6.1}$$

formuliert werden¹⁹, was auf eine nichtlineare Gleichung (Hyperkugelgleichung) führt. ds wird innerhalb eines Inkrements konstant gehalten.

Die Modifikation des Riks-Wempner-Algorithmus nach Ramm ersetzt die nichtlineare Zwangsbedingung (6.1) durch einen linearen Ausdruck (Hyperebenen-Bedingung) [8]:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}^{(i+1)} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}^{(1)} \tag{6.2}$$

¹⁹Dabei repräsentiert „ \cdot “ das Skalarprodukt.

Der verallgemeinerte Tangentenvektor $\underline{\tilde{t}}$ lässt sich anschreiben als:

$$\underline{\tilde{t}} = \begin{pmatrix} \Delta \underline{\tilde{u}}^{(1)} \\ \Delta \lambda^{(1)} \end{pmatrix} = \Delta \underline{\tilde{v}}^{(1)} \quad (6.3)$$

In den Gleichungen (6.2) und (6.3) kennzeichnet der hochgestellte Klammerausdruck den Iterationsschritt. Der verallgemeinerte Tangentenvektor $\underline{\tilde{t}}$ steht normal auf die innerhalb eines Lastinkrements betrachtete Hyperebene. Er wird während der Iteration ($i + 1$) konstant gehalten.

Das Lastinkrement ist nun neben den Verschiebungskrementen Teil der Lösung und wird den Erfordernissen des Inkrements angepasst. Es muss eine andere Größe als die Last das Fortschreiten der Lösung beschreiben. Dafür kommt die Bogenlänge der Last-Verschiebungskurve (statischer Gleichgewichtspfad im Last-Verschiebungsraum) zum Einsatz. Ob der Gleichgewichtspfad instabil oder stabil ist, spielt keine Rolle.

Schlussendlich gilt für die Belastung in Form des Vektors der verallgemeinerten äußeren Knotenkräfte $\underline{\tilde{P}}$:

$$\underline{\tilde{P}} = \underline{\tilde{P}}_0 + \lambda(\underline{\tilde{P}}_{\text{ref}} - \underline{\tilde{P}}_0).$$

Darin ist λ der Laststeigerungsfaktor, $\underline{\tilde{P}}_{\text{ref}}$ die Referenzlast und $\underline{\tilde{P}}_0$ eine konstante Last, die hier zu Null gesetzt wurde.

Durchschlagsprobleme bereiten mit dem modifizierten Riks-Algorithmus (im Folgenden mit Riks bezeichnet) keine Schwierigkeiten, da sie über eine glatte Last-Verschiebungskurve verfügen. Bei Systemen mit Verzweigungspunkten ist diese Eigenschaft nicht mehr gegeben. Um trotzdem mit dem Riks-Algorithmus das Nachbeulverhalten untersuchen zu können, muss das perfekte System mit (kleinen) Imperfektionen (meist in Bezug auf die undeformierte Geometrie) versehen werden. Diese führen das Verzweigungsproblem über in ein Problem mit kontinuierlicher Systemantwort: Aus einem Verzweigungsproblem mit stabilem Nachbeulverhalten wird ein Spannungsproblem (monoton wachsende Last-Verschiebungskurve), aus einem Verzweigungsproblem mit instabilem Nachbeulverhalten wird ein Durchschlagsproblem.

Mit dem Riks-Algorithmus kann sowohl geometrisch nichtlineares Verhalten vor dem Beulen, als auch stabiles und instabiles Nachbeulverhalten untersucht werden.

Die Imperfektionen können im Hinblick auf Geometrie, Belastung oder Randbedingungen aufgebracht werden. Meist – und so auch hier – wird allerdings die Geometrie modifiziert. Bei unbekannter Imperfektion erweist sich meist eine Linearkombination von Beulmoden zu den niedrigsten Eigenwerten als gute Wahl. Die benötigten Beulfiguren können mit einer Anfangsstabilitätsanalyse berechnet werden.

Wie die geometrische Imperfektion dem perfekten System aufgeschlagen wird, kann folgendem Zusammenhang entnommen werden, vgl. [8]:

$$\widehat{\underline{\tilde{X}}} = \underline{\tilde{X}} + \kappa_i t (\underline{\phi}_i)_{\text{trans}}.$$

Darin sind $\underline{\tilde{X}}$ die Knotenpunktskoordinaten der perfekten und $\widehat{\underline{\tilde{X}}}$ der imperfekten Geometrie. Die Größe t ist nach einer typischen Abmessung der Geometrie, so zum Beispiel

$\kappa_1 t = 2 \times 10^{-2} \text{ mm}$
$\kappa_2 t = 4 \times 10^{-3} \text{ mm}$
$\kappa_3 t = 8 \times 10^{-4} \text{ mm}$

Tabelle 6.1: Amplituden $\kappa_i t$ der Beulfiguren zu den Eigenwerten i , die als Linearkombination für die geometrische Imperfektion verwendet wurden. Bei der isotropen Konfiguration (vgl. Tabelle 2.1) gilt für die Schalendicke $t = 0.2 \text{ mm}$.

der Schalendicke, zu wählen. κ_i ist der dimensionslose Imperfektionsparameter zum i -ten Beulmode. Der Vektor $(\phi_i)_{\text{trans}}$ enthält die translatorischen Komponenten der Eigenvektoren ϕ_i . Die Eigenvektoren ϕ_i , die zusammen mit den Interpolationsfunktionen der Verschiebungen die Beulfiguren beschreiben, sind so skaliert, dass

$$\max |(\phi_i)_{\text{trans}}| = 1$$

gilt.

In der Regel stellt der Beulmode zum niedrigsten Eigenwert bei kleinen Imperfektionsamplituden die kritischste Imperfektion dar. Systeme mit nahe beieinander liegenden Eigenwerten neigen zu erhöhter Imperfektionsempfindlichkeit, vgl. [1]. Liegt imperfektionsempfindliches Verhalten vor, so kann die Imperfektion die Systemantwort entscheidend beeinflussen, d.h. Versagen kann schon bei unerwartet kleinen Lasten eintreten. Bei derartigen Systemen stellt der erste Mode unter Umständen nicht mehr die kritischste Imperfektion dar und es sollte daher eine Linearkombination der Beulmoden zu den ersten Eigenwerten als Imperfektion verwendet werden.

Um die Imperfektionsempfindlichkeit quantifizieren zu können, müsste ein Diagramm der Form $\lambda^* = \lambda^*(\kappa)$ erstellt werden. Darin bezeichnet λ^* den kritischen Laststeigerungsfaktor, der beim Maximum der Last-Verschiebungskurve abgelesen werden kann; der Laststeigerungsfaktor λ^* wird über dem Imperfektionsparameter κ aufgetragen, wodurch der Einfluss der Imperfektionsamplitude auf die Tragfähigkeit des Systems deutlich wird.

Auf die Imperfektionsempfindlichkeit von Wellpappe wurde nicht näher eingegangen, nur beispielhaft wurde die Größe der Imperfektion variiert, vgl. Abbildung 6.6.

Für alle nichtlinearen Untersuchungen wurde eine geometrische Imperfektion verwendet, die sich aus den ersten drei Moden einer vorher durchgeführten Anfangsstabilitätsanalyse zusammensetzt. Die gewählten Amplituden sind in Tabelle 6.1 angegeben. Laut [1] sollte die Amplitude der Imperfektion die Größenordnung von einigen Prozent einer charakteristischen Abmessung (z.B. Schalendicke) haben. Die Schalendicke ist hier oft $2 \times 10^{-1} \text{ mm}$, 10% davon sind $2 \times 10^{-2} \text{ mm}$.

Der Riks-Algorithmus von ABAQUS verfügt über eine automatische Schrittweitensteuerung. Diese wurde benützt; es musste daher zusätzlich zur Abbruchbedingung eine Anfangsschrittweite (entspricht einer Bogenlänge) angegeben werden. Weiters besteht die Möglichkeit, eine maximal und eine minimal zulässige Schrittweite zu definieren.

Für die gemachten Simulationen wurde die Anfangsschrittweite in der Größenordnung

von rund einem Prozent der Gesamtbogenlänge gewählt. Als Abbruchkriterium wurde ein festgelegter Wert der Verschiebung des Punktes P, der sich im Zentrum des Querschnitts beim frei verschieblichen Plattenende befindet, benützt. Sobald die Verschiebung des beschriebenen Punktes P in 1-Richtung den definierten Grenzwert erreicht hat, sollte die Simulation abgebrochen werden. Bei den meisten Simulationen wurde diese Abbruchbedingung nicht wirksam, da der Algorithmus schon früher automatisch beendet wurde: An numerisch schwierig zu überwindenden Stellen wurde nämlich entweder die minimal erlaubte Schrittweite oder die maximal erlaubte Anzahl an Schrittweitenverkleinerungen erreicht. Der Algorithmus wird in diesen Fällen mit einer Fehlermeldung abgebrochen.

Es ist nur teilweise gelungen, dieses Problem zu lösen. Dabei spielten sowohl die Wahl der Anfangsschrittweite (falls die Schwierigkeit nicht weit vom Ausgangszustand entfernt lag) als auch die Begrenzungen der Schrittweite nach oben und unten eine Rolle. Es hat sich gezeigt, dass eine kleine Schrittweite nicht unbedingt von Vorteil sein muss. Wird zum Beispiel eine sehr kleine Mindestschrittweite verwendet, steigt die Anzahl der Inkremente und die Rechenzeit im Bereich der Schwierigkeiten stark an, der „kritische“ Bereich kann aber trotzdem nicht überwunden werden. Bemerkenswert ist außerdem, dass zum Teil selbst die Netzfeinheit für das Überwinden der kritischen Stellen entscheidend war.

Anmerkung: Um einen frühzeitigen Abbruch der Simulation zu verhindern, wurde auch versucht, die Parameter der Schrittweitensteuerung zu verändern. So wurde z.B. die Konvergenzkontrolle der Iteration manipuliert bzw. sogar deaktiviert. Die so erhaltenen Ergebnisse waren allerdings unbrauchbar.

6.2 Dynamische nichtlineare Analyse

Sollen Trägheitseffekte berücksichtigt werden, so muss eine dynamische Analyse des Problems erfolgen. Dabei können zwei unterschiedliche Verfahrensgruppen zum Einsatz kommen: Methoden mit direkter Zeitintegration oder indirekte Methoden. Zur zweiten Gruppe zählen die für lineare Probleme bevorzugten modale Methoden, die auf den Schwingungsmoden des linearen Systemes basieren. Sie verursachen – im Vergleich zur direkten Integration der Bewegungsgleichungen – im Allgemeinen weniger Rechenaufwand. Es wird die Bewegungsgleichung nämlich derart transformiert, dass sich (bei ungedämpften Systemen bzw. bei modaler Dämpfung) das Differential-Gleichungssystem vollständig entkoppelt.

Wird deutlich nichtlineares Systemverhalten erwartet, sollte direkte Integration zum Einsatz kommen. Direkte Integration kann explizit oder implizit erfolgen. Sie werden mit „direkt“ bezeichnet, da die Bewegungsgleichung ohne vorherige Umformung numerisch integriert wird. Explizit bedeutet, dass der Vektor der unbekanntenen Verschiebungen ${}^{t+\Delta t}\underline{u}$ explizit aus der Bewegungsgleichung zur Zeit t berechnet wird. Dagegen wird bei impliziter direkter Integration die Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ verwendet, um ${}^{t+\Delta t}\underline{u}$ zu bestimmen.

ABAQUS/Standard benützt direkte implizite Integration, ABAQUS/Explicit direkte explizite Integration der Bewegungsgleichung über der Zeit.

6.2.1 Implizite direkte Integration

ABAQUS/Standard verwendet für die implizite Integration einen Algorithmus nach Hilber-Hughes-Taylor. Dabei handelt es sich um eine Erweiterung der Trapezregel. Vorteil ist die unbedingte numerische Stabilität (zumindest für lineare Systeme), d.h. die Inkrementgröße kann ausschließlich nach Gesichtspunkten der zu erzielenden Genauigkeit bestimmt werden. Entscheidender Nachteil ist der gegenüber expliziten Methoden im Allgemeinen höhere Rechenaufwand.

Für die im Zuge dieser Arbeit durchgeführten dynamischen Simulationen wurde eine automatische Schrittweitensteuerung verwendet, die die Inkrementgröße Δt über den betragsmäßig größten Eintrag ${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{R}$ in einem beim halben Zeitschritt definierten Residuum ${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{R}$ („half-step residual“) steuert. Ist der Eintrag ${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{R}$ klein im Vergleich zur Amplitude P einer typischen Kraft des Problems, deutet das auf eine hohe Genauigkeit hin und die Schrittweite kann erhöht werden. Umgekehrtes gilt bei einem großem ${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{R}$.

Es muss eine Toleranz für ${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{R}$ angegeben werden; das erfolgt im Vergleich zur Amplitude P einer typischen Kraft des Problems. Bei elastischem Materialverhalten und leichter Dämpfung wird in [1] ${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{R} \approx 0.1P$ für sehr genaue, ${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{R} \approx 1.0P$ für mittlere und ${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{R} \approx 10P$ für niedrige Genauigkeit empfohlen. Hier wurde eine Toleranz in der Größenordnung von 100 N verwendet, was ${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{R} \approx 0.5P$ entspricht.

Weiters muss der Zeitrahmen T der Untersuchung definiert werden, in welchem die Kräfte (bei kraftgesteuerter Simulation) bzw. die Verschiebungen (bei verschiebungsgesteuerter Simulation) auf das System aufgebracht werden. Für den Zeitrahmen wurde hier $T = 1$ s gewählt. Diese Wahl hat sich bewährt, da im Vergleich zur statischen Berechnung mit dem Riks-Algorithmus keine Abweichungen zu erkennen sind. Weiters muss noch eine Anfangsschrittweite – also die Größe des ersten Zeitinkrementes – angegeben werden. Die Anfangsschrittweite für dynamische Analysen wurde $\Delta t_{\text{init}} = 0.01$ s gewählt. ABAQUS/Standard bietet bei dynamischen Analysen ebenfalls die Möglichkeit, eine maximale und eine minimale erlaubte Schrittweite zu definieren. Auch wenn das implizite Integrationsschema für lineare Probleme unbedingst stabil im numerischen Sinne ist, sollte die Zeitschrittweite nach oben zumindest mit $\Delta t < T_p/10$ begrenzt sein, wobei T_p die Schwingungsdauer der höchsten für das Systemverhalten als relevant erachteten Eigenschwingungsform bezeichnet [1].

6.2.2 Explizite direkte Integration

Bei der expliziten Integration muss kein großes gekoppeltes Gleichungssystem gelöst werden, der Vektor der Verschiebungen ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ kann explizit berechnet werden. Liegt die Massenmatrix in Diagonalfom (*lumped massmatrix*) vor und ist keine Dämpfung vorhanden bzw. ist die Dämpfungsmatrix ebenfalls nur in der Hauptdiagonalen besetzt, dann wird das volle Potential expliziter Integration deutlich. Es entkoppelt sich das Gleichungssystem; und da weder eine globale Massenmatrix noch eine globale Steifigkeitsmatrix benötigt wird, können alle Operationen auf Elementebene abgearbeitet werden.

Explizite Integrationsmethoden mit zentralen Differenzen benötigen im Allgemeinen weniger Rechenaufwand. Oftmals wesentlicher Nachteil ist, dass keine unbedingte numerische Stabilität vorliegt, d.h. es kann bei zu großen Schrittweiten eine Divergenz zum tatsächlichen Zeitverlauf auftreten. Die kritische Zeitschrittweite Δt_{krit} steht in unmittelbarem Zusammenhang mit der Zeit, die eine Spannungswelle zum Durchqueren eines Elementes benötigt (vgl. Courant-Bedingung). Kleine Elemente und/oder hohe Materialsteifigkeiten benötigen daher relativ kleine Zeitschrittweiten.

Im ungedämpften Fall lautet die Courantbedingung:

$$\Delta t < \Delta t_{\text{krit}} = \frac{2}{\omega_{\text{max}}}.$$

Darin ist ω_{max} die größte Eigenfrequenz des Systems. Im nichtlinearen Fall – z.B. bei großen Deformationen – wird sich diese laufend ändern. Als Abschätzung wird häufig $\Delta t_{\text{krit}} \approx \frac{d_{\text{min}}}{c_d}$ verwendet, wobei c_d die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Störung (Schallgeschwindigkeit) und d_{min} den kleinsten Knotenabstand zwischen Knoten im Modell bezeichnet. Die kleinste der elementweise ermittelten kritischen Zeitschrittweiten kann für eine automatische Schrittweitensteuerung verwendet werden.

Bei Schalen ist der kleinste Knotenabstand in der Membranebene ausschlaggebend, wird allerdings auch eine transversale Schubsteifigkeit definiert, so kann diese ebenfalls die kritische Zeitschrittweite beeinflussen. Eine praktische Abschätzung für c_d unter der Voraussetzung von isotropem Materialverhalten ist für Kontinuumselemente $c_d = \sqrt{E/\rho}$, mit E als dem Elastizitätsmodul und ρ als der Dichte.

Bei expliziten dynamischen Analysen sind für numerische Stabilität häufig sehr kleine Zeitschrittweiten nötig. Das macht eine Kontrolle der Lösung auf Genauigkeit z.T. überflüssig und wird nach den Standardeinstellungen – im Gegensatz zu ABAQUS/Standard – nicht durchgeführt. Auf Grund der kleinen Zeitschrittweiten ist explizite direkte Integration besonders vorteilhaft, falls eine kleine Zeitspanne im Vergleich zum kritischen Zeitinkrement oder ein System (auch quasistatisch) mit starker Nichtlinearität simuliert werden soll. Des Weiteren eignen sich große Probleme eher für explizite Integration, da hier der Rechenaufwand lediglich linear mit der Größe der Problems anwächst.

Für die innerhalb dieser Arbeit gemachten Simulationen wären bei expliziter Integration Zeitschrittweiten kleiner als $\Delta t_{\text{krit}} \approx 1.0 \times 10^{-7}$ s nötig gewesen. Dieser Wert wurde ohne Materialdämpfung ($\alpha_{\text{R}} = 0$, $\beta_{\text{R}} = 0$) und einem groben Netz berechnet. Für dasselbe Netz ergab sich mit Materialdämpfung die kritische Zeitschrittweite sogar zu $\Delta t_{\text{krit}} \approx 1.0 \times 10^{-9}$ s. Auf Grund der sehr kleinen kritischen Zeitschrittweite Δt_{krit} wurde auf Simulationen mit expliziter Integration verzichtet.

6.3 Materialdämpfung

Es hat sich als vorteilhaft erwiesen, bei der Materialdefinition eine viskose Dämpfung einzuführen. Sie kann als Rayleigh-Dämpfung formuliert werden:

$$\underline{\underline{C}} = \alpha_{\text{R}} \underline{\underline{M}} + \beta_{\text{R}} \underline{\underline{K}} \quad (6.4)$$

Darin ist α_R der massenproportionale und β_R der steifigkeitsproportionale Anteil der Dämpfung. Die beiden Parameter α_R und β_R können mit Daten aus Experimenten bestimmt werden, ansonsten muss auf Erfahrungswerte zurückgegriffen werden.

Zu jeder Eigenfrequenz w_i lässt sich mit den Dämpfungsfaktoren α_R und β_R der modale Dämpfungsparameter ζ_i bestimmen:

$$\zeta_i = \frac{\alpha_R}{2 w_i} + \frac{\beta_R w_i}{2} \quad (6.5)$$

Man erkennt aus Gleichung (6.5), dass bei kleinen Frequenzen α_R und bei hohen Frequenzen β_R dominiert. ζ_i entspricht dem Anteil an der kritischen Dämpfung²⁰ (vgl. Lehr'sches Dämpfungsmaß).

Die Materialdämpfung wurde vorerst mit $\alpha_R = 2 \text{ s}^{-1}$ und $\beta_R = 0 \text{ s}$ gewählt. Es war damit deutlich zu erkennen, dass hochfrequente Schwingungen ungenügend schnell abgeklungen sind. Daher wurde für die Dämpfungsparameter – um die hochfrequenten Schwingungen zu dämpfen – $\alpha_R = 0 \text{ s}^{-1}$ und $\beta_R = 1.0 \times 10^{-5} \text{ s}$ gesetzt, was eine deutliche Verbesserung im Hinblick auf die benötigte Rechenzeit gegenüber jener für das ungedämpfte System mit sich gebracht hat.

Neben der Materialdämpfung kann bei dynamischen Analysen eine numerische Dämpfung hilfreich sein. Hier wurde die Standardeinstellung $\alpha_{\text{Num}} = -0.05$ beibehalten, was einer leichten numerischen Dämpfung entspricht. Diese Einstellung beeinflusst nach [1] das Ergebnis nicht, bietet aber gerade genug Dämpfung, um die automatische Zeitschrittsteuerung zu erleichtern.

6.4 Snap-Back

Die Systemantwort wird im Folgenden häufig in Form von Last-Verschiebungskurven charakterisiert. Im Last-Verschiebungsdiagramm wird die Last über der Verschiebung eines speziellen Punktes aufgetragen. Bei den durchgeführten Simulationen zeigte sich ein „Snap-Back“ genanntes Phänomen. Um Snap-Back zu veranschaulichen, soll hier das in [3] erläuterte Beispiel skizziert werden.

Als Demonstrationsbeispiel für Stabilitätsverlust durch Durchschlagen dient in der Literatur häufig das v.Mises-Fachwerk, vgl. [34]. Das aus zwei Stäben bestehende System erreicht bei ausreichender Laststeigerung den Durchschlagspunkt (Maximum im Last-Verschiebungsdiagramm) und schlägt anschließend durch. Dabei sei angenommen, dass die Biegesteifigkeit der Stäbe groß genug ist, um Stabknicken zu verhindern. Beim Durchschlagen handelt es sich um einen dynamischen Vorgang, der dazugehörige statische Gleichgewichtspfad ist vom oberen bis zum unteren Durchschlagspunkt instabil. Beim v.Mises-Fachwerk stellt sich nach dem Durchschlagen ein entferntes, stabiles Gleichgewicht ein. Das gilt nicht für alle Durchschlagsprobleme.

²⁰Für einen Einmassenschwinger – bestehend aus einem schwingenden Körper mit der Masse m und einer Feder mit der Steifigkeit k – ist diese bekanntlich $c_{\text{krit}} = 2\sqrt{k m}$.

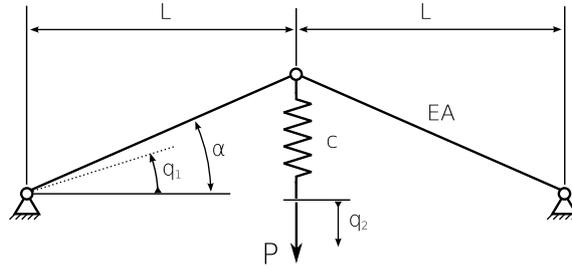


Abbildung 6.1: Um eine („in Serie“ geschaltete) Steifigkeit c erweitertes v.Mises-Fachwerk, vgl [3].

Um mit dem v.Mises-Fachwerk ein Snap-Back-Verhalten beobachten zu können, wird das Fachwerk um eine Feder mit der Steifigkeit c erweitert, die zwischen Kraftangriffspunkt und Fachwerk geschaltet wird, vgl. Abbildung 6.1.

Die zwei Freiheitsgrade sollen mit q_1 und q_2 bezeichnet werden, der Abstand zwischen den Auflagern beträgt $2L$, die Stäbe schließen im unbelasteten Zustand mit der Verbindungslinie der Auflagern den Winkel α ein. Mit der Stabeigenschaft EA und der Voraussetzung $\alpha \ll 1$ ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen dem Freiheitsgrad q_1 und der Kraft P :

$$P = EA (\alpha^2 - q_1^2) q_1 \quad (6.6)$$

Es kann eine Beziehung zwischen der Kraft P und der Verschiebung des Kraftangriffspunktes q_2 erhalten werden, wenn mit der Bedingung für Gleichgewicht an der Feder

$$P - c (q_2 - L (\alpha - q_1)) = 0$$

q_1 aus Gleichung (6.6) eliminiert wird. Es folgt:

$$P = EA \left[\alpha^2 - \left(\alpha - \frac{q_2}{L} + \frac{P}{cL} \right)^2 \right] \left(\alpha - \frac{q_2}{L} + \frac{P}{cL} \right) \quad (6.7)$$

Der in Gleichung (6.7) enthaltene Zusammenhang $P(q_2)$ lässt sich konstruieren, wenn das Fachwerk als System mit zwei unabhängigen, in Serie geschalteten Steifigkeiten angesehen wird. Für konstant gehaltene Größen EA , α und L kann eine Last-Verschiebungskurve der Stäbe (P über $L(\alpha - q_1)$) und eine weitere Last-Verschiebungskurve der Feder (P über der Federdehnung $q_2 - L(\alpha - q_1)$) ermittelt werden. Sie sind in Abbildung 6.2 zu sehen. Aus diesen beiden kann die Verschiebung des Kraftangriffspunktes q_2 ermittelt werden, indem die Einzelverschiebungen bei einer festgehaltenen Kraft P addiert werden (Strecken a und b in Abbildung 6.2).

Damit wird auch der Einfluss der Federsteifigkeit c deutlich: Sie vergrößert im Bereich $P > 0$ die Verschiebungen q_2 , der Schnittpunkt der Kurve mit der Abszisse bei $q_1 = 0$ bleibt dagegen unverändert. Das führt bei genügend kleiner Federsteifigkeit c (Strecke b wird mit fallender Steifigkeit c länger) zu einem Snap-Back, d.h. die Verschiebung des Kraftangriffspunktes ändert zu Beginn des Snap-Backs ihre Richtung und nimmt ab.

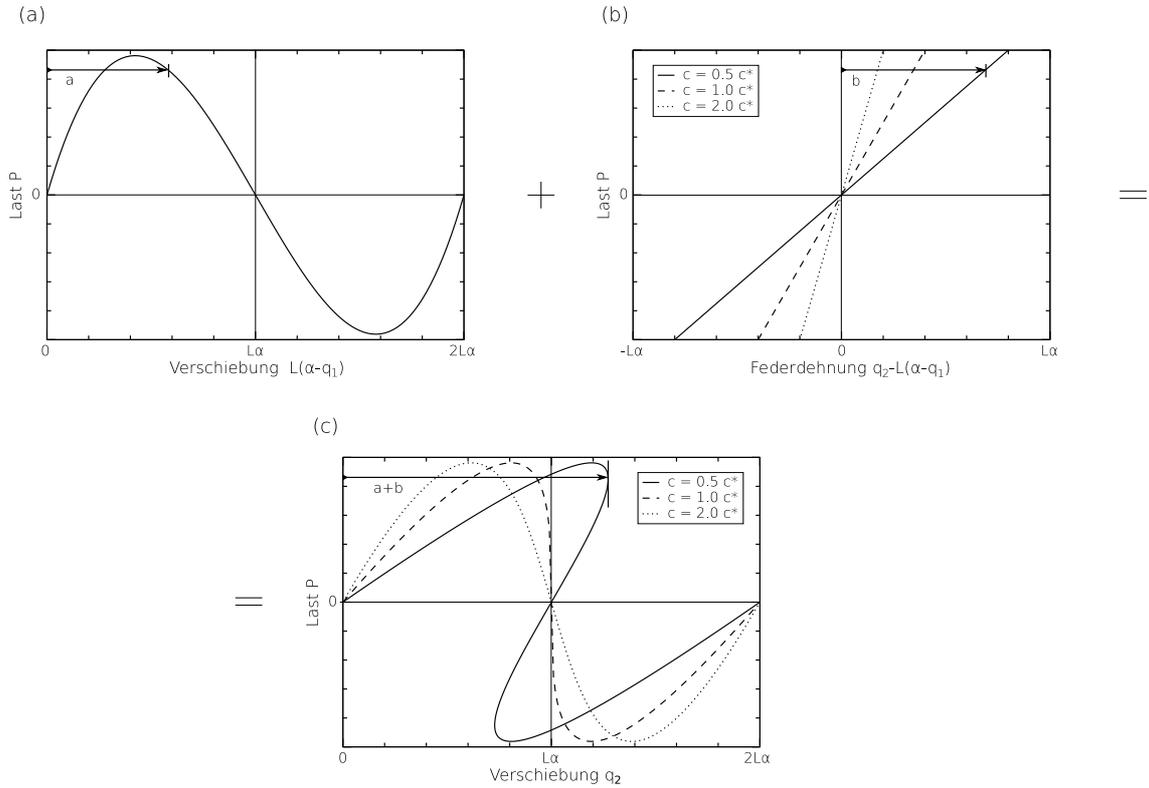


Abbildung 6.2: Konstruktion der Last-Verschiebungskurve für das nach [3] modifizierte v.Mises-Fachwerk. Last-Verschiebungskurve für das v.Mises-Fachwerk ohne Feder (a); Last-Verschiebungskurve der Feder (b); aus den Last-Verschiebungskurven der Teilsysteme konstruierte Last-Verschiebungskurve des Gesamtsystems (c).

Es stellt sich die Frage, ab welcher Federsteifigkeit $c = c^*$ ein Snap-Back auftritt. Die Grenzfedersteifigkeit c^* ergibt sich aus der Forderung einer vertikalen Tangente an die Last-Verschiebungskurve bei $q_1 = 0$, also

$$\left. \frac{\partial q_2}{\partial P} \right|_{q_1=0} = 0$$

woraus nach [3]

$$c^* = \alpha \frac{EA}{L}$$

folgt.

In Abbildung 6.2 sind die Last-Verschiebungskurven der Teilsysteme und des Gesamtsystems für $c = 0.5 c^*$, $c = 1.0 c^*$ und $c = 2.0 c^*$ dargestellt.

Snap-Back ist aus akademischer Sicht ein interessantes Phänomen. In praktischen Anwendungen ist es kaum von Bedeutung, da es nach dem Verlust der Tragfähigkeit der Struktur auftritt. Selbst wenn sich nach dem Durchschlagen wieder ein stabiles Gleichgewicht einstellt, so wird dieses in der Regel erst nach großen Deformationen erreicht.

6.5 Ergebnisse

Alle nichtlinearen Analysen wurden mit dem Modell einer finiten Platte der Länge $l = 60$ mm durchgeführt. Vorerst wurde Wellpappe mit isotropem Materialverhalten der Schichten untersucht, die Querschnitts-Abmessungen entsprachen denen einer herkömmlichen Wellpappe (isotrope Konfiguration, vgl. Tabelle 2.1).

Bei den nichtlinearen Analysen waren große Deformationen zu erwarten, die unter Umständen zu großen Verzerrungen führen können. Um dem letzteren Umstand vorzubeugen, wurden bilineare Elemente (S4R) verwendet, mit denen neben den großen Rotationen auch endliche Membranverzerrungen simuliert werden dürfen²¹. Die Diskretisierungsfeinheit wurde wie bei den linearen Analysen mit $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2$ gewählt. Die Dämpfungsparameter waren $\alpha_R = 0 \text{ s}^{-1}$ und $\beta_R = 1 \times 10^{-5} \text{ s}$.

Im Zuge der nichtlinearen Untersuchungen wurden dynamische und statische Simulationen durchgeführt. Bei den dynamischen Simulationen kam sowohl Kraftsteuerung als auch Verschiebungssteuerung zum Einsatz. Bei den verschiebungsgesteuerten dynamischen Analysen wurden auch die Last-Verschiebungskurven bei Entlastung der Struktur aufgenommen.

Im Folgenden wird eine dynamische verschiebungsgesteuerte Simulation mit „Dynamisch/DC“ (displacement-controlled) und eine dynamische kraftgesteuerte Simulation mit „Dynamisch/FC“ (force-controlled) bezeichnet. Neben diesen beiden erfolgt meist noch eine statische Simulation mit dem Riks-Algorithmus, diese wird mit „Statisch/Riks“ bezeichnet.

Die mit allen drei Simulationsvarianten bestimmten Last-Verschiebungskurven sind für die isotrope Konfiguration in Abbildung 6.3 dargestellt. Dabei ist der Druck auf die Platte als Membranschnittkraft in 1-Richtung über dem Betrag der Verschiebung u_1 des Punktes P, der sich im Zentrum des Querschnitts beim frei verschieblichen Plattenende befindet, aufgetragen.

Die statische Simulation mit dem Bogenlängenverfahren brach kurz vor dem Maximum im Last-Verschiebungsverlauf ab. In diesem Bereich ist auf Grund der bevorstehenden Instabilität das Gleichungssystem schlecht konditioniert, was zu den numerischen Schwierigkeiten geführt haben könnte. Bemerkenswert sind die zwischen den Punkten ① und ② auftretenden Modewechsel von 10 auf 14 Halbwellen über der Plattenlänge. Diese könnten ebenfalls den Abbruch der statischen Simulation verursacht haben.

Als Ersatz für die fehlende Last-Verschiebungskurve aus der statischen Simulation ist der statische Gleichgewichtspfad punktiert in Abbildung 6.3 skizziert. Entlang dieses Pfades ist die Geschichte der Deformation dokumentiert, vgl. dazu die Zustände ① bis ⑤. Im instabilen Bereich des statischen Gleichgewichtspfades ist ein ausgeprägtes Snap-Back zu beobachten. Zwischen den Punkten ② und ④ konzentrieren sich alle Deformationen auf eine Falte, die sich ca. in der Mitte der Platte ausbildet (Lokalisierung). Es wird in der anschließenden Simulation näher darauf eingegangen.

²¹Tatsächlich lagen die während der Faltenbildung auftretenden maximalen Hauptverzerrungen in der Membranebene in der Größenordnung von $\epsilon_{\log} \approx 0.15$ (logarithmisches Verzerrungsmaß).

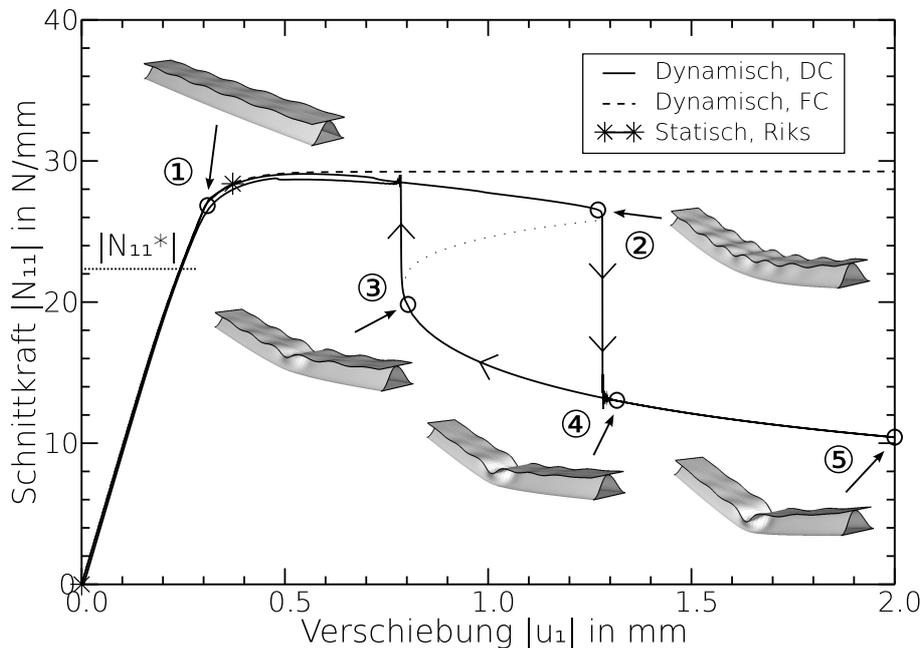


Abbildung 6.3: Membran-Schnittkraft N_{11} als Linien-Drucklast in N/mm über dem Betrag der Verschiebung u_1 des Punktes P in mm. Simulationen: Dynamisch/DC, Dynamisch/FC und Statisch/Riks; Abmessungen und Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.1 (isotrope Konfiguration), $l = 60$ mm; Flute-Modell Typ 1, Imperfektion nach Tabelle 6.1, bilineare Elemente (S4R), $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$, $\beta_R = 1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $|N_{11}^*| = 22.36 \text{ N/mm}$.

Nach dem Erreichen der kritischen Schnittkraft $|N_{11}^*|$ aus einer Anfangsstabilitätsanalyse kann – auf Grund des anfänglich stabilen Nachbeulverhaltens – die Belastung bis zum Versagen der Platte um rund 30% gesteigert werden. $|N_{11}^*|$ liegt bei 22.36 N/mm und ist in Abbildung 6.3 eingetragen.

Weiters wurde die optimierte Wellpappe mit isotropem Materialverhalten der Schichten untersucht. Die verwendeten Abmessungen sind in Tabelle 5.7 (lokales Optimum der 2. Zeile) zu finden. Es wurden wieder dynamische (DC und FC) Simulationen und eine statische Simulation durchgeführt. Die entsprechenden Last-Verschiebungskurven sind in Abbildung 6.4 zu sehen.

Im Vergleich zu $|N_{11}^*|$ aus einer Anfangsstabilitätsanalyse ist hier nur mehr eine rund 20%ige Laststeigerung bis zum Versagen möglich. Es gilt $|N_{11}^*| = 23.93 \text{ N/mm}$, der Wert ist erneut in Abbildung 6.4 eingetragen.

Die Optimierung (vgl. Kapitel 5) wurde mit dem Einheitszellenmodell durchgeführt, wobei Nebenbedingungen zu erfüllen waren. Eine Nebenbedingung stellte im isotropen Fall eine kritische Schnittkraft von mindestens $|N_{11,0}^*| = 26.21 \text{ N/mm}$ sicher. Es wurde für die hier untersuchte finite Platte die optimierten Abmessungen verwendet, die Randbedingungen sind allerdings nicht mehr dieselben, was die unterschiedlichen Beullasten aus den Anfangsstabilitätsanalysen erklärt.

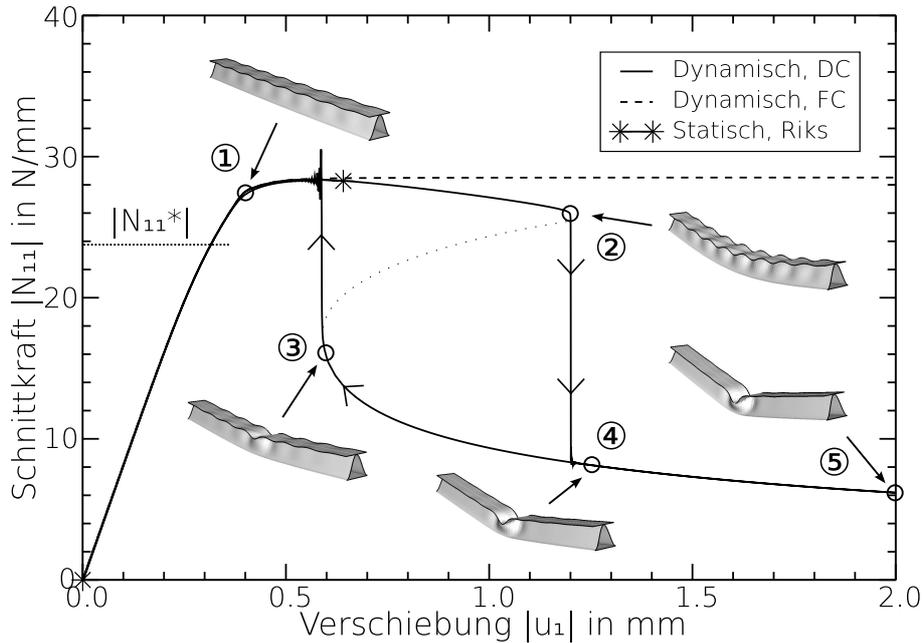


Abbildung 6.4: Membran-Schnittkraft N_{11} als Linien-Drucklast in N/mm über dem Betrag der Verschiebung u_1 des Punktes P in mm. Simulationen: Dynamisch/DC, Dynamisch/FC und Statisch/Riks; optimierte Wellpappe, Abmessungen nach Tabelle 5.7 (lokales Optimum der 2. Zeile), $l = 60$ mm, isotropes Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.1; Flute-Modell Typ 1, Imperfektion nach Tabelle 6.1, bilineare Elemente (S4R), $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$, $\beta_R = 1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $|N_{11}^*| = 23.93 \text{ N/mm}$.

Die statische Simulation mit Riks brach hier kurz nach dem Maximum der Last-Verschiebungskurve ab, wofür wieder die selben Umstände wie vorhin verantwortlich sein könnten. Die deformierte Struktur ist entlang des skizzierten statischen Gleichgewichtspfades (Zuständen ① bis ⑤) in Abbildung 6.4 dargestellt. Um den Ablauf der Deformation zu verdeutlichen, ist die deformierte Platte bei Ansicht normal auf die 1-3-Ebene zu den Punkten ①, ②, ③ und ⑤ in Abbildung 6.5 zu sehen. In den Bildern ① bis ③ von Abbildung 6.5 wurden die Verschiebungen um den Faktor 2.5 vergrößert. Lediglich Bild ⑤ zeigt die tatsächlich berechnete Verformung maßstabsgetreu.

Bei Punkt ① sind die beiden Deckschichten bereits (symmetrisch) ausgebeult, im Gegensatz zu den Standardabmessungen ist hier die Welle ebenfalls gebeult. Global ist die Platte aber noch eben, was sich bis Punkt ② ändert. Dort ist die Platte schon global gebeult, wodurch sich die außen liegende Deckschicht wieder geglättet und das Beulmuster der innen liegenden Deckschicht verstärkt hat. Kurz nach ② beginnt das Snap-Back. In diesem Bereich beginnt sich das wellenförmige Beulmuster der innen liegenden Deckschicht auf eine in der Mitte der Platte liegende Halbwelle zu konzentrieren. Alle anderen Beulen der Deckschicht verkleinern sich zu Gunsten dieser einen Halbwelle. Die globale Auslenkung der Platte wird dadurch etwas kleiner und die Ausdehnung der Platte in 1-Richtung nimmt etwas zu, vgl ③. Im Folgenden wird die dominierende Halbwelle größer und bildet eine Falte, die in ihrer Wirkung einem Gelenk entspricht. In den übrigen Bereichen der Deck-

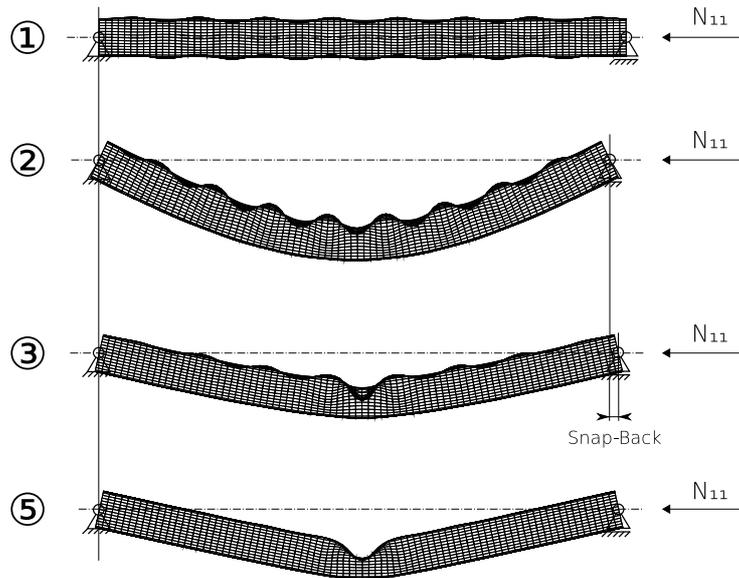


Abbildung 6.5: Verformungsgeschichte zu Abbildung 6.4; Skalierungsfaktor der Verformung: 2.5 : 1 für die Zustände ①, ② und ③, bzw. 1 : 1 für Zustand ⑤.

schicht verschwindet das Beulmuster, vgl. ⑤. Das Gleichgewicht bleibt dabei instabil, d.h. die Platte kann in 1-Richtung keine gesteigerte Last aufnehmen.

Wie bereits erwähnt worden ist, interessiert häufig die Imperfektionsempfindlichkeit. Hier wurde für die optimierte (isotrope) Wellpappe beispielhaft die Amplitude der Imperfektion variiert. Die in den übrigen Simulationen verwendete Imperfektion setzt sich aus den Beulfiguren zu den drei kleinsten Eigenwerten zusammen, dabei wurden Amplituden nach Tabelle 6.1 verwendet. Die für die Untersuchung der Imperfektionsempfindlichkeit verwendeten absoluten Amplituden $\kappa_i t$ der Imperfektionen sind in der Legende zu Abbildung 6.6 eingetragen. Dort sind ebenfalls die damit bestimmten Last-Verschiebungskurven bei dynamischer/FC Simulation zu finden. Die stärkste Imperfektion besitzt eine Amplitude, die in der Größenordnung der Schalendicke liegt. Mit ihr verringert sich das Maximum im Last-Verschiebungsdiagramm gegenüber der kleinsten Imperfektion um rund 9%. Die kleinste Imperfektion entspricht rund einem Prozent der Schalendicke und liefert die selben maximal ertragbaren Lasten wie die für die übrigen Untersuchungen verwendete Imperfektion, die im Bereich von zehn Prozent der Schalendicke liegt.

Es sei bemerkt, dass die verwendete Imperfektion nur Beulfiguren enthält, die durch lokales Beulen entstanden sind. Es wurde keine globale Auslenkung der Platte berücksichtigt.

Bei der druckbelasteten finiten Platte liegen die ersten Eigenwerte aus einer Anfangsstabilitätsanalyse sehr nahe beieinander. Der erste Eigenwert errechnete sich zu $\lambda_1 = 23.93$, der 10. Eigenwert zu $\lambda_{10} = 24.84$ und der 20. Eigenwert zu $\lambda_{20} = 27.21$ und der 30. Eigenwert zu $\lambda_{30} = 30.54$. Die Beulfigur zum 30. Eigenwert beinhaltet immer noch keine globale Deformation. Der erste Eigenwert λ_1 ist in Abbildung 6.6 eingetragen, es gilt

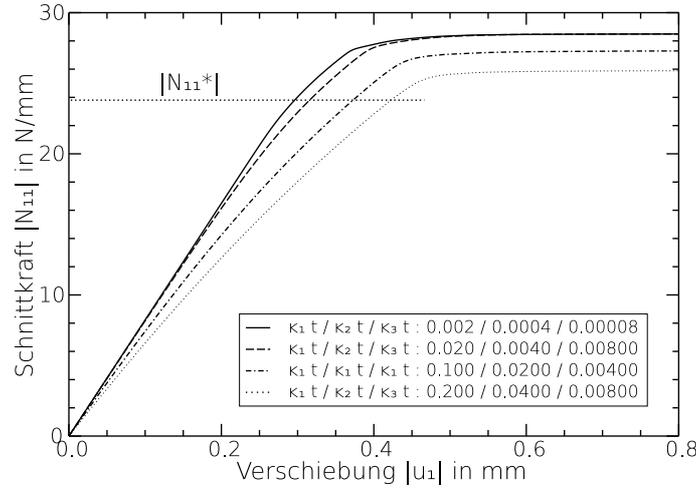


Abbildung 6.6: Membran-Schnittkraft N_{11} als Linien-Drucklast in N/mm über dem Betrag der Verschiebung u_1 des Punktes P in mm; Parameter: Amplitude der Imperfektion. Simulation: Dynamisch/FC; optimierte Wellpappe, Abmessungen nach Tabelle 5.7 (lokales Optimum der 2. Zeile, $t_L = 0.152$ mm, $t_F = 0.136$ mm), $l = 60$ mm, isotropes Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.1; Flute-Modell Typ 1, bilineare Elemente (S4R), $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$, $\beta_R = 1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $|N_{11}^*| = 23.93 \text{ N/mm}$.

nämlich für die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*| = \lambda_1 |N_{11, \text{ref}}| = \lambda_1 1 \text{ N/mm} = 23.93 \text{ N/mm}$.

Im Folgenden werden die Ergebnisse für Wellpappe mit orthotropem Materialverhalten der Schichten präsentiert. Die Abmessungen wurden der orthotropen Konfiguration entsprechend gewählt; alle nötigen Angaben zu Geometrie und Materialverhalten der Schichten sind in Tabelle 2.2 zu finden. Last-Verschiebungskurven aus dynamischer/DC, dynamischer/FC und statischer Simulation sind in Abbildung 6.7 zu sehen. Die Feinheit der Diskretisierung dient dort als Parameter ($\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2$ bzw. $\delta_{23} = 0.150$ und $\delta_1 = 2$). Die Materialdämpfung wurde auf $\beta_R = 2 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ erhöht.

Die Last-Verschiebungskurven aus dynamischer/DC Simulation sind nach dem Maximum von der Diskretisierungsfineinheit abhängig. Es wurden zum einen für die beiden Diskretisierungen unterschiedliche Last-Verschiebungskurven erhalten, zum anderen bildet sich bei beiden Diskretisierungen die Falte gewissermaßen „ruckartig“ aus. Bei den vorangegangenen dynamischen/DC Simulationen war im Last-Verschiebungsverlauf ein plötzlicher Abfall der Last zu sehen. In diesem Bereich hatte sich das Beulmuster (lokales Beulen) zu Gunsten einer zentral liegenden Falte zurückgebildet, vgl. Abbildung 6.4. Im Gegensatz dazu ist hier dieser Vorgang nicht bei einer festgehaltenen Verschiebung $|u_1|$ zu beobachten. Die globale Auslenkung der Platte nimmt stockend zu.

Die statischen Simulationen brachen im Vergleich zu vorhin erst etwas später ab, die erhaltene Last-Verschiebungskurve ist ebenfalls von der Diskretisierung abhängig, folgt aber exakt der Last-Verschiebungskurve aus der entsprechenden dynamischen/DC Simulation. Mit der größeren Diskretisierung kann sogar ein kleines Snap-Back beobachtet werden.

Es ist in Abbildung 6.7 zu sehen, dass bei den durchgeführten Simulationen das Maxi-

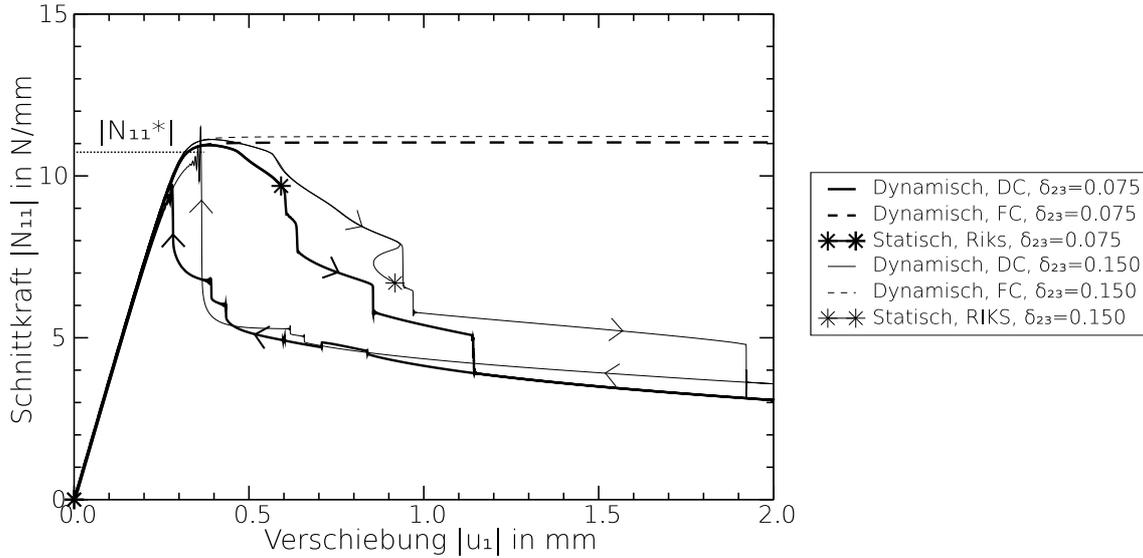


Abbildung 6.7: Membran-Schnittkraft N_{11} als Linien-Drucklast in N/mm über dem Betrag der Verschiebung u_1 des Punktes P in mm, Diskretisierungsfeinheit als Parameter. Simulationen: Dynamisch/DC, Dynamisch/FC und Statisch/Riks; Abmessungen und Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.2 (orthotrope Konfiguration), $l = 60$ mm; Flute-Modell Typ 1, Imperfektion nach Tabelle 6.1, bilineare Elemente (S4R), $\beta_R = 2 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $|N_{11}^*| = 10.78 \text{ N/mm}$.

imum im Last-Verschiebungsdiagramm im Wesentlichen unverändert bleibt. Damit wurde die wesentliche Information – nämlich die Schnittkraft, die zu einem Verlust der Tragfähigkeit führt – mit allen Simulationsarten und unabhängig von der Diskretisierungsfeinheit erhalten.

Die kritische Schnittkraft $|N_{11}^*| = 10.78 \text{ N/mm}$ (aus einer Anfangsstabilitätsanalyse mit $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$) liegt sehr nahe beim Maximum der Last-Verschiebungskurve liegt, die Last kann gegenüber der Anfangsstabilitätsanalyse nur mehr um 2% gesteigert werden. Die Abschätzung der kritischen Last mit einer Anfangsstabilitätsanalyse ist hier nicht als konservativ anzusehen.

Zuletzt wurde noch die nichtlineare Systemantwort der optimierten, anisotropen Wellpappe untersucht. Die relevanten Abmessungen sind in Tabelle 5.10 zu finden. Die Kenngrößen zur Beschreibung des Materialverhaltens der Schichten sind in Tabelle 2.2 zusammengefasst. Die simulierten Last-Verschiebungskurven sind in Abbildung 6.8 zu sehen. Dort ist ebenfalls der Verlauf der Deformation dokumentiert, vgl. die Zustände ① bis ③.

Die Verläufe der Last-Verschiebungskurven müssen nach dem Maximum abermals kritisch betrachtet werden. Der Riks-Algorithmus bestätigt allerdings das Ergebnis der dynamischen Simulationen. Erstaunlich ist, dass die kritische Last $|N_{11}^*| = 11.10 \text{ N/mm}$ aus einer Anfangsstabilitätsanalyse die tatsächliche Tragfähigkeit um rund 7% übersteigt. Obwohl für die letzte Simulation die gleichen (absoluten) Amplituden der Imperfektion verwendet wurden wie bei den übrigen nichtlinearen Simulationen (vgl. Tabelle 6.1), lässt das Ergebnis unmittelbar einen Einfluss der Imperfektion auf die Systemantwort vermuten. Eine

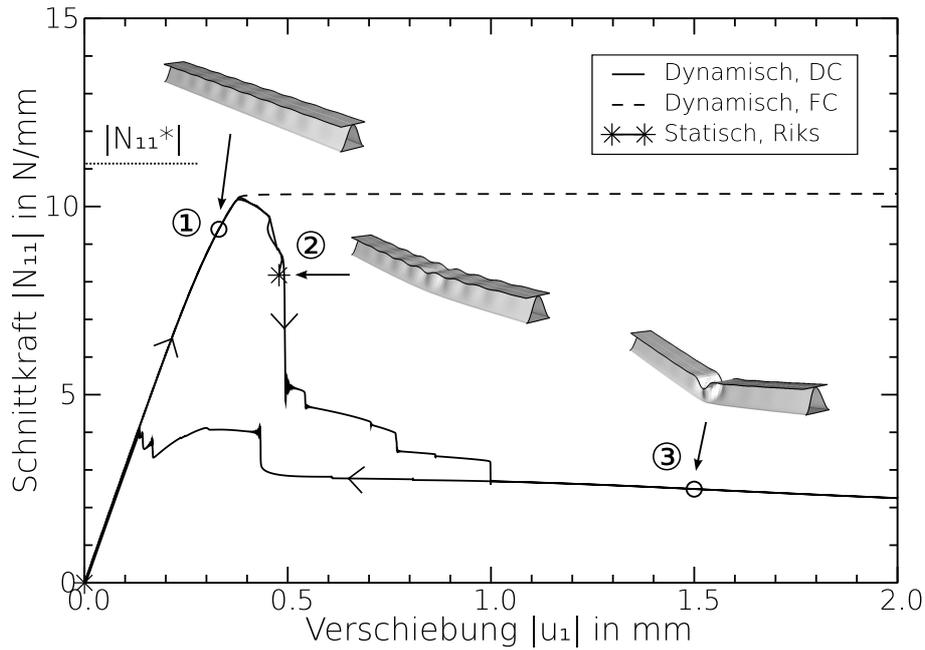


Abbildung 6.8: Membran-Schnittkraft N_{11} als Linien-Drucklast in N/mm über dem Betrag der Verschiebung u_1 des Punktes P in mm, Simulationen: Statisch/Riks; optimierte Wellpappe, Abmessungen nach Tabelle 5.10, $l = 60$ mm, orthotropes Materialverhalten der Schichten nach Tabelle 2.2; Flute-Modell Typ 1, Imperfektion nach Tabelle 6.1, bilineare Elemente (S4R), $\delta_{23} = 0.075$ und $\delta_1 = 2.0$, $\beta_R = 2 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $|N_{11}^*| = 11.10 \text{ N/mm}$.

weitere nichtlineare Simulation mit einer – im Vergleich zu den Werten in Tabelle 6.1 – um den Faktor 10 verringerten (absoluten) Amplitude der Imperfektion zeigt, dass tatsächlich die maximal ertragbare Last durch die Imperfektion deutlich verringert wurde. Mit der kleineren Imperfektion liegt das Maximum der Last-Verschiebungskurve bei 11.15 N/mm.

Die nichtlinearen Untersuchungen haben gezeigt, dass bei optimierten Strukturen sowohl im isotropen als auch im orthotropen Fall nach dem Erreichen der aus der entsprechenden Anfangsstabilitätsanalyse erhaltenen kritischen Last die Belastung bis zum Versagen nicht in dem Maße gesteigert werden kann, wie das bei nicht optimierten Strukturen und bei gleichen absoluten Amplituden der geometrischen Imperfektion der Fall ist. Bei der optimierten Struktur mit orthotropem Materialverhalten der Schichten ist mit der gewählten Imperfektion die maximal ertragbare Last sogar geringer als jene Verzweigungslast, die mit einer linearen Analyse am perfekten System berechnet wurde.

7 Programmaufbau

Die in Kapitel 1.2 definierten Aufgabenstellungen, die mit dem Einheitszellenmodell und durch lineare Analysen zu lösen sind, erfordern einen hohen Grad an Automatisierung. Es sind dabei mehrere Simulationen mit ABAQUS nötig. Um den Simulationsablauf zu steuern, werden in Python-Code verfasste Skript-Dateien verwendet.

Die Skriptsprache Python erwies sich als äußerst praktisch, da ABAQUS/CAE in Python-Code erstellte Skript-Dateien einlesen und die darin enthaltenen Anweisungen abarbeiten kann. Die Skript-Dateien müssen dazu in der Syntax von ABAQUS/CAE verfasst werden. Hier trifft dies nur auf das Skript `CBcreateIPF.py` zu.

Größen, die nicht vom ausführenden Algorithmus beeinflusst werden – so zum Beispiel Materialdaten oder Einstellungen bezüglich der Modellgeometrie – müssen vom Benutzer definiert werden. Diese Daten können geschlossen im Textfile `CBdata.txt` angegeben werden. Die Skript-Dateien lesen aus besagtem Textfile die benötigte Information aus, können dort aber auch berechnete Werte abspeichern²². Jede Zeile des Datenfiles besteht im Allgemeinen aus einem Schlüsselwort, dem dazugehörigen Parameter und einem erklärenden Kommentar. Die Trennung zwischen den drei Bereichen erfolgt durch Leerzeichen, der Kommentar darf Leerzeichen enthalten. Ausnahmen stellen die Zeilen zur Definition einer Parameter-Studie und die Zeilen zur Ausgabe der berechneten Eigenwerte und kritischen Spannungen dar. Das Datenfile `CBdata.txt` beinhaltet Angaben²³ zu folgenden Bereichen:

- Definition der Modell-Geometrie,
- Definition der Materialeigenschaften,
- Angaben zur Diskretisierung,
- Angaben zur Belastung der Einheitszelle,
- Angaben für Anfangsstabilitätsanalysen,
- Angaben für Parameterstudien,
- Angaben für den Optimierungsalgorithmus,
- Ausgabe von berechneten Größen.

Im File `CBdata.txt` können auch Schalter gesetzt werden, die den grundsätzliche Ablauf der Analyse steuern. Die Schlüsselwörter der Schalter und die dazugehörigen Parameter sollen im Folgenden kurz präsentiert werden:

²² Alle Prozeduren zum Datenaus- und Einlesen werden vom Modul `CBreadandwrite.py` zur Verfügung gestellt.

²³ Alle dimensionsbehafteten Angaben erfolgen im (N-mm-s)-System.

ANALYSE-MODUS

LBP (*linear buckling prediction*) für eine Anfangsstabilitätsanalyse, **ABD** für die Berechnung der effektiven Steifigkeit (ABD-Matrix) und **STAT** für eine (lineare) statische Analyse.

MATERIALMODELL

ISO für isotropes Materialverhalten der Schichten, **ANISO** für orthotropes Materialverhalten der Schichten;

DECKSCHICHT

ON für ein Modell der Wellpappe (mit Deckschicht), **OFF** für ein Modell des Kerns ohne Deckschicht;

FLUTE-MODELL

1 für Flute-Modell Typ 1, **2** für Flute-Modell Typ 2, **3** für Flute-Modell Typ 3;

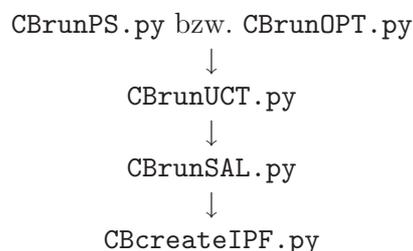
AUTOMATISCHE-MODESUCHE

ON für die automatische Suche nach dem niedrigsten Eigenwert mit einem symmetrischen Beulmode; wenn **OFF** gesetzt wird, muss der Index des interessierenden Eigenwerts über das Schlüsselwort **BETRACHTETER-EIGENWERT** definiert werden;

ELEMENTCODE

S4R für bilinear interpolierte Schalenelemente, ABAQUS-Elementcode: S4R; **S8R** für biquadratisch interpolierte Schalenelemente, ABAQUS-Elementcode: S8R;

Die Python-Skript-Dateien sind hierarchisch aufgebaut. Im einfachsten Fall, d.h. für einen einfachen Simulationsdurchlauf, wird das Skript `CBrunSAL.py` ausgeführt, in dem die in Abbildung 7.1 skizzierte Abfolge von Programmaufrufen definiert ist. Wird hingegen eine Optimierung mit dem Skript `CBrunOPT.py` oder eine Parameter-Studie mit `CBrunPS.py` gestartet, muss die Beullast häufig berechnet werden, wobei diese nicht von der Länge l_{uc} der Einheitszelle abhängen darf, vgl. Kapitel 4.3. Deshalb muss bei jeder Berechnung der kritischen Schnittkraft $|N_{11}^*|^{24}$ der Eigenwert λ_1 in Abhängigkeit von der Einheitszelllänge l_{uc} minimiert werden. Diese Aufgabe erfüllt das Skript `CBrunUCT.py`. Die einzelnen Simulationen darin werden wiederum vom Skript `CBrunSAL.py` erledigt. Im Anschluss sind alle wesentlichen Skript-Dateien hierarchisch geordnet angegeben.



²⁴ $|N_{11}^*| = \lambda_1 |N_{11, \text{ref}}| = \lambda_1 1 \text{ N/mm}$

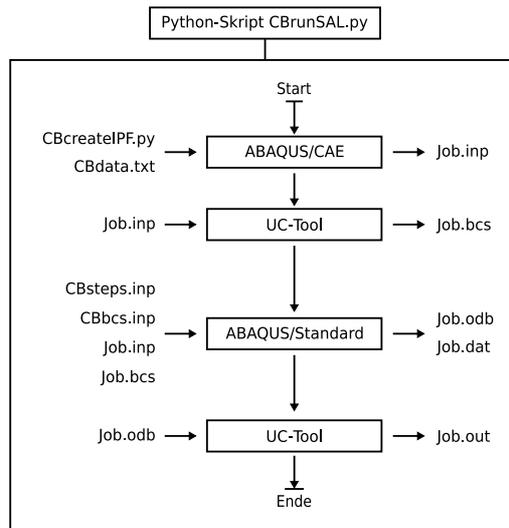


Abbildung 7.1: Ablauf einer einzelnen Simulation, gesteuert von dem Skript CBrunSAL.py.

- CBrunPS.py ermöglicht eine Parametervariation.
- CBrunOPT.py steuert die Optimierung.
- CBrunUCT.py minimiert den Eigenwert in Abhängigkeit von der Einheitszellenlänge. Dieses Skript kann z.B. bei Parameter-Studien auch übersprungen werden.
- CBrunSAL.py führt eine einzelne Simulation durch; die Art der Simulation kann im Textfile CBdata.txt definiert werden.
- CcreateIPF.py wird in ABAQUS/CAE aufgerufen und erstellt zusammen mit den Eingangsgrößen aus dem File CBdata.txt das Modell und generiert das Inputfile Job.inp.

Weiters wird noch das Modul CBreadandwrite.py benötigt, das Prozeduren zur Datenein- u. Auslese bereitstellt.

Der Ablauf einer einzelnen Simulation sieht wie folgt aus, vgl. dazu Abbildung 7.1: Zu Beginn wird ABAQUS/CAE mit dem Skript CcreateIPF.py aufgerufen. Es wird dabei das Inputfile Job.inp generiert, wobei die Angaben und Einstellungen im Textfile CBdata.txt berücksichtigt werden.

Es ist u.U. effektiver, gleich bleibende Teile des Inputfiles von Hand zu erstellen und dem von ABAQUS/CAE generierten Inputfile hinzuzufügen. Auf diese Weise werden die Definitionen der gleich bleibenden Randbedingungen (*BOUNDARY) im File CBbcs.inp und Definitionen der gleich bleibenden Analyseschritte (*STEP) im File CBsteps.inp abgespeichert. Bei veränderlichen Step-Definitionen wird das File CBsteps.inp vom Skript

CBcreateIPF.py erstellt. Die beiden Teile CBsteps.inp und CBbcs.inp werden an das Ende des Inputfiles Job.inp angefügt.

Um die periodischen Randbedingungen zu generieren, wird das Inputfile Job.inp vom UCTOOL eingelesen. UCTOOL benötigt dabei nur die Knotendefinitionen. Die Randbedingungen in Form von linearen Gleichungen in den Knotenfreiheitsgraden (*EQUATION) werden im File Job.bcs abgelegt.

ABAQUS/CAE bietet die Möglichkeit, manuell Befehlszeilen in der Syntax von ABAQUS in das Inputfile einzufügen. Es kann damit z.B. an einer gewünschten Stelle der Befehl *INCLUDE benutzt werden. Dieses Schlüsselwort verlangt als Parameter den Namen des Files, das später von ABAQUS/ Standard an Stelle des Befehles eingefügt wird. Auf diese Weise wird das vom UCTOOL erstellte File Job.bcs in das Inputfile aufgenommen.

Ein von ABAQUS/CAE erstelltes Inputfile weist stets die Einteilung:

```
*PART
:
*END PART
*ASSEMBLY
:
  *INSTANCE
  :
  *END INSTANCE
:
*END ASSEMBLY
```

auf. Wird das gesamte Modell mit ABAQUS/CAE erstellt, bereitet diese Einteilung keine Schwierigkeiten. Hier wird aber ein Teil des Inputfiles mit UCTOOL erzeugt. Die beiden Teile müssen anschließend zusammengefügt werden, was durch obige Gliederung erschwert wird. Da es sich bei dem Modell der Wellpappe nicht um eine Zusammenstellung mehrerer Komponenten handelt, sind die oben erwähnten Zeilen des Inputfiles überflüssig und werden deshalb mit einem kleinen Python-Skript entfernt.

Damit das Modell und die Analyseschritte vollständig definiert sind, benötigt ABAQUS/-Standard die Files

- Job.inp,
- Job.bcs,
- CBbcs.inp und
- CBsteps.inp.

Nach der Simulation enthalten im Allgemeinen das Outputfile *Job.odt* (Beulmoden) und das Ergebnisfile *Job.dat* (Eigenwerte) die gewünschten Resultate. Für die Berechnung der effektiven Steifigkeit (ABD-Matrix) muss UCTOOL nochmals gestartet werden. Aus dem Inhalt von *Job.odt* kann dann das effektive Verhalten der Platte berechnet werden. Damit ist ein einzelner Simulationsdurchlauf beendet.

Bei den nichtlinearen Analysen besteht ein geringerer Automatisierungsbedarf. Es sei an dieser Stelle lediglich erwähnt, dass jeder nichtlinearen Simulation eine Anfangsstabilitätsanalyse vorangestellt werden muss, um die benötigten Imperfektionen zu ermitteln.

8 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Wellpappe, im Besonderen mit der effektiven Steifigkeit und den beulkritischen Belastungen. Dabei stand nicht der Werkstoff Papier, sondern vielmehr die aus Sicht des Leichtbaus interessante Struktur der Wellpappe im Vordergrund.

Der Großteil der gestellten Aufgaben wurde mit Hilfe der Finite Elemente Methode (FEM) gelöst, wobei der FE-Solver ABAQUS zur Verfügung stand. Um die mechanischen Eigenschaften von Wellpappe untersuchen zu können, wurden FE-Modelle generiert, wobei ein Einheitszellenmodell und ein Modell eines Plattenstreifens verwendet wurden. Die nötigen Querschnittsabmessungen und die Materialkonstanten wurden der Literatur entnommen. Z.T. wurde der orthotrope Charakter von Papier berücksichtigt, ansonsten wurde isotropes, linear elastisches Materialverhalten modelliert.

Lineare Analysen wurden vorwiegend mit dem Modell der Einheitszelle durchgeführt. Die erforderlichen periodischen Randbedingungen wurden mit dem am ILSB²⁵ entwickelten Softwarepaket UCTOOL generiert. Das Programm UCTOOL diente auch – nach der Simulation von jeweils sechs unabhängigen Lastfällen mit ABAQUS – zur Berechnung der effektiven Steifigkeit der Wellpappe als Platte. Der Vergleich mit der analytisch berechneten Biegesteifigkeit bei Biegung um MD²⁶ zeigte ausgezeichnete Übereinstimmung. Auch die effektive Steifigkeit der Welle ohne Deckschichten wurde bestimmt.

Des Weiteren wurde eine Möglichkeit geschaffen, Anfangsstabilitätsanalysen im Bezug auf lokales Beulen bei beliebiger Belastung durchzuführen. Um kritische Schnittgrößen angeben zu können, musste bei Druck in Richtung CD und bei Biegung um MD der Eigenwert in Abhängigkeit von der Ausdehnung der Einheitszelle in Richtung CD minimiert werden. Dies wurde mit Hilfe des Algorithmus nach Brent erledigt. Bei Schubbelastung in der Membranebene und bei Belastung auf Verdrillung sind die Verhältnisse anspruchsvoller, hier wurden keine kritischen Werte angegeben. Schubbelastung in transversaler Richtung wurde nicht untersucht. Die beschriebenen Anfangsstabilitätsanalysen wurden auch für die spätere Optimierung benötigt. Bei allen Untersuchungen waren Parameter-Studien (z.B. für eine gezielte Variation der Abmessungen) durchzuführen.

Im Sinne des Leichtbaus wurde ein Methode entwickelt, um Wellpappe im Hinblick auf möglichst geringes Flächengewicht bei Rücksicht auf Nebenbedingungen zu optimieren. Die zu erfüllenden Nebenbedingungen stellten im Zuge der Optimierung Mindestwerte für die kritische Last bezüglich lokalen Stabilitätsverlusts bei Druckbelastung in Richtung CD und für die Biegesteifigkeit bei Biegung um MD sicher. Die Grenzwerte entsprachen der kritischen Last und der Biegesteifigkeit, die für eine herkömmliche Wellpappe berechnet wurden.

Die Optimierung erfolgte durch einen semi-analytischen und einen rein numerischen Zu-

²⁵Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik, TU-Wien.

²⁶Die Richtung in der Membranebene parallel zu Wellenerzeugenden wird bei Wellpappe entsprechend dem Produktionsprozess mit MD (*Machine Direction*) und die Richtung normal dazu mit CD (*Cross Direction*) bezeichnet.

gang. Die beiden unterscheiden sich im verwendeten Optimierungsalgorithmus einerseits, und in der Methode zur Berechnung der kritischen Last andererseits. Die Biegesteifigkeit – und natürlich auch das Flächengewicht – wurde bei beiden Ansätzen analytisch berechnet.

Der semi-analytische Zugang folgt der Idee der „primitiven“ Optimierung; es wurden die beiden Komponenten der Wellpappe hinsichtlich kritischer Spannungszustände getrennt betrachtet und angenommen, dass im Optimum die Welle und die Deckschichten gleichzeitig beulen. Die kritische Spannung bezüglich lokalen Beulens in den Deckschichten ist über elastisches Plattenbeulen zu berechnen, die sinusförmig angenommene Welle bedurfte einer ausführlicheren Betrachtung. Dabei wurde ein FE-Modell der Welle erzeugt, dessen dimensionslose Kenngrößen der Geometrie variiert und für jede Ausprägung die kritischen Spannungen mit ABAQUS berechnet. Mit den aufgenommenen Daten wurde eine Funktion entwickelt, mit der schlussendlich die kritischen Spannungen in der Welle in Abhängigkeit von der Wellen-Geometrie berechnet werden konnten. Damit war man in der Lage, sowohl die Zielfunktion als auch die Nebenbedingungen über analytische Funktionen zu definieren und die Optimierung konnte mit Mathematica durchgeführt werden. Der große Vorteil dieser Methode liegt darin, dass die ausgereiften Optimierungs-Algorithmen (z.B. genetische Algorithmen) von Mathematica verwendet werden konnten. Diese bieten die Möglichkeit, Einfluss auf die Startwerte zu nehmen und mehrere Lösungen zu erzeugen, wodurch die Sicherheit, ein globales Optimum berechnet zu haben, wesentlich steigt. Im Übrigen benötigt die semi-analytische Methode viel weniger Rechenzeit; sie wurde allerdings nur für isotropes Materialverhalten der Schichten entwickelt.

Die Bezeichnung „numerische Optimierung“ bezieht sich auf die Art, wie die für den Optimierungs-Algorithmus benötigten Berechnungen der kritischen Last durchgeführt wurden. Sie wurden hier mit ABAQUS numerisch berechnet, wobei jedes Mal das Minimum des Eigenwerts in Abhängigkeit von der Ausdehnung der Einheitszelle in Richtung CD bestimmt werden musste. Die numerische Optimierung benützte den in der Python-Bibliothek „SciPy“ enthaltenen Algorithmus COBYLA. Das Akronym COBYLA steht für *Constrained Optimization by Linear Approximation* und beschreibt gleichzeitig das Grundprinzip des Algorithmus.

Bei der numerischen Optimierung wurden viele, sehr nahe beieinander liegende lokale Minima gefunden, wodurch hier kein Minimum mit Sicherheit als das globale Minimum identifiziert werden konnte. Das selbe Phänomen konnte auch mit der semi-analytischen Methode und einem modifizierten Gleichungssystem, das die Gegebenheiten des numerischen Modelles berücksichtigt, beobachtet werden.

Die Ergebnisse der semi-analytischen Optimierung stimmen mit den Ergebnissen der numerischen Optimierung gut überein, vor allem stellen sie aber einen ausgezeichneten Startwert für die numerische Optimierung dar.

Das Ziel der Optimierung wurde erreicht, das Flächengewicht konnte gegenüber handelsüblicher Wellpappe um mehr als 15% reduziert werden, ohne dass die kritische Last und die Biegesteifigkeit sich verringert hätten. Im Optimum beulen die Deckschichten und die Welle bei Druckbelastung in Richtung CD simultan, was bei dem semi-analytischen Zugang vorab angenommen, bei der numerischen Optimierung aber ohne Zutun erhalten

wurde.

Um eine Beziehung zwischen den über Anfangsstabilitätsanalysen berechneten beulkritischen Belastungen im Sinne der Meso-Instabilitäten (d.h. lokales Beulen) und der maximalen Tragfähigkeit der Wellpappe im Sinne einer Makro-Stabilitätsgrenze (d.h. globaler Stabilitätsverlust) herzustellen, wurden nichtlineare Untersuchungen durchgeführt.

Wird nach dem Auftreten von lokalen Beulen die Belastung weiter gesteigert, so beult eine Platte aus Wellpappe global und es bildet sich im Zuge des Versagens eine dominierende Falte (Lokalisierung). In diesem Bereich der Systemantwort verliert die Deformationsfigur ihre ursprüngliche Periodizität. Deshalb wurden alle nichtlinearen Untersuchungen mit einem Modell eines Plattenstreifens durchgeführt. Die Geometrie entsprach dabei der des Einheitszellenmodells, lediglich die Ausdehnung in Richtung CD wurde deutlich größer gewählt ($l = 60 \text{ mm}$). Mit dem Modell der Platte wurde der Übergang vom lokalen zum globalen Beulen und das Nachbeulverhalten untersucht.

Die Belastung der Platte erfolgte durch eine Druckkraft in Richtung CD (bei kraftgesteuerten Simulationen), die Randbedingungen wurden als periodische Randbedingungen in Richtung MD (normal zur Belastungsrichtung) und in Richtung CD als Einspannung bezüglich einer starren, um die MD-Achse frei drehbaren Platte modelliert. Eines der beiden drehbaren Plattenenden wurde (bei kraftgesteuerten Simulationen) zusätzlich als frei verschieblich angenommen.

Die der perfekten Geometrie überlagerten Imperfektionen wurden aus einer vorangestellten Anfangsstabilitätsanalyse erhalten, die Amplituden wurden im Bereich von ca. 10% der Papierdicken gewählt. Bei den durchgeführten geometrisch nichtlinearen, statischen und dynamischen Simulationen wurden stets Last-Verschiebungskurven aufgenommen und es konnte folgender Deformationsverlauf beobachtet werden: Zu Beginn zeigt sich in der Last-Verschiebungskurve ein beinahe linearer Anstieg, in diesem Bereich beulen eine bzw. bei der optimierten Wellpappe beide Komponenten (Welle und Deckschichten) lokal. Die Platte ist noch nicht global ausgelenkt. Wird die Last weiter gesteigert, so wird das Maximum in der Last-Verschiebungskurve überschritten und die Platte beginnt global zu beulen. Dadurch glättet sich auf Grund der globalen Biegung die außen liegende Deckschicht, das Beulmuster der innen liegenden Deckschicht verstärkt sich. In diesem Abschnitt der Last-Verschiebungskurve sind z.T. Modewechsel zu beobachten, d.h. die Anzahl der Halbwellen über der Plattenlänge nimmt zu. Im weiteren Simulationsverlauf zeigen die Last-Verschiebungskurven Snap-Back-Verhalten, dabei konzentriert sich das wellenförmige Beulmuster der innen liegenden Deckschicht auf eine in der Mitte der Platte liegende Halbwelle. Alle anderen Beulen der Deckschicht verkleinern sich zu Gunsten dieser einen Halbwelle. Die globale Auslenkung wird dadurch kleiner und die Ausdehnung der Platte in Belastungsrichtung nimmt etwas zu. Die dominierende Halbwelle wird im Folgenden größer und bildet schließlich eine Falte, die in ihrer Wirkung einem Gelenk entspricht. In den übrigen Bereichen der Deckschicht verschwindet das Beulmuster. Das Gleichgewicht bleibt instabil, d.h. die Platte kann keine Laststeigerung aufnehmen.

Modelle von Wellpappen mit isotropem und orthotropem Materialverhalten der Schichten, mit den Querschnitts-Abmessungen von herkömmlicher Wellpappe und mit den Quer-

schnitts-Abmessungen der entsprechenden optimierten Strukturen wurden mittels nichtlinearer Simulation untersucht.

Die nichtlinearen Untersuchungen haben gezeigt, dass bei optimierten Strukturen sowohl im isotropen als auch im orthotropen Fall nach dem Erreichen der aus der entsprechenden Anfangsstabilitätsanalyse erhaltenen kritischen Last die Belastung bis zum Versagen nicht in dem Maße gesteigert werden kann, wie das bei nicht optimierten Strukturen und bei gleichen absoluten Amplituden der geometrischen Imperfektion der Fall ist. Bei der optimierten Struktur mit orthotropem Materialverhalten der Schichten ist mit der gewählten Imperfektion die maximal ertragbare Last sogar geringer als jene Verzweigungslast, die mit einer linearen Analyse am perfekten System berechnet wurde.

Literatur

- [1] ABAQUS, Inc. *ABAQUS/Standard User's Manual, Version 6.5*. ABAQUS, Inc., Providence, Rhode Island, 2004.
- [2] A. Allansson and B. Svärd. Stability and collapse of corrugated boards; numerical and experimental analysis. Master's dissertation, Lund University, Lund, Sweden, 2001.
- [3] Z. P. Bažant and L. Cedolin. *Stability of Structures*. Dover Publications, Inc., New York, 2003.
- [4] M. E. Biancolini. Evaluation of equivalent stiffness properties of corrugated board. *Compos. Struct.*, 69:322–328, 2004.
- [5] M. E. Biancolini and C. Brutti. Numerical and experimental investigation of the strength of corrugated board packages. *Packaging Technology and Science*, 16:47–60, 2003.
- [6] C. G. E Boender and H. E. Romeijn. Stochastic methods. In R. Horst and P. M. Pardalos, editors, *Handbook of Global Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Niederlande, 1995.
- [7] N. Buannic, P. Cartraud, and T. Quesnel. Homogenization of corrugated core sandwich panels. *Compos. Struct.*, 59:299–312, 2003.
- [8] T. Daxner and F. G. Rammerstorfer. Nichtlineare Finite Elemente Methoden. Vorlesungsbehef, Oktober 2005.
- [9] Forum Wellpappe Austria. www.wellpappe.at.
- [10] S.-L. Gelin. Mechanical and hygroscopic performance and analysis of corrugated board - a literature review. Report 384, KTH Solid Mechanics, Stockholm, Sweden, 2004.
- [11] A. C. Gilchrist, J. C. Suhling, and T. J. Urbanik. Nonlinear finite element modelling of corrugated board. In *Mechanics of Cellulosic Materials*, pages 101–106. ASME, USA, 1999.
- [12] P. Isaksson and R. Hägglund. A mechanical model of damage and delamination in corrugated board during folding. *Eng. Fract. Mech.*, 72:2299–2315, 2005.
- [13] Jaan Kiusalaas. *Numerical Methods in Engineering with Python*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [14] T. J. Lu, C. Chen, and G. Zhu. Compressive behaviour of corrugated board panels. *Compos. Mat.*, 35(23):2098–2126, 2001.
- [15] R. C. McKee, Gander J. W., and J. R. Wachuta. Compression strength formula for corrugated boxes. *Paperboard Packaging*, 48(8):149–159, 1963.

- [16] T. Nordstrand. Parametric study of the post-buckling strength of structural core sandwich panels. *Compos. Struct.*, 30:441–451, 1995.
- [17] T. Nordstrand. *Basic Testing and Strength Design of Corrugated Board and Containers*. PhD thesis, Lund University, Lund, Sweden, February 2003.
- [18] T. Nordstrand. Analysis and testing of corrugated board panels into the post-buckling regime. *Compos. Struct.*, 63(2):189–199, 2004.
- [19] T. Nordstrand. On buckling loads for edge-loaded orthotropic plates including transverse shear. *Compos. Struct.*, 65(1):1–6, 2004.
- [20] T. Nordstrand and Carlsson L. A. Evaluation of transverse shear stiffness of structural core sandwich plates. *Compos. Struct.*, 37:145–153, 1997.
- [21] T. Nordstrand, H. G. Allen, and Carlsson L. A. Transverse shear stiffness of structural core sandwich. *Compos. Struct.*, 27:317–329, 1994.
- [22] U. Nyman. *Continuum Mechanics Modelling of Corrugated Board*. PhD thesis, Lund University, Lund, Sweden, April 2004.
- [23] U. Nyman and P. J. Gustafsson. Local buckling of corrugated board facings. In *Proc. ECCM 99*, München, 1999.
- [24] U. Nyman and P. J. Gustafsson. Material and structural failure criterion of corrugated board facings. *Compos. Struct.*, 50:79–83, 2000.
- [25] D. H. Pahr. Linear and non-linear homogenization using FEM. ILSB-Report, Institut für Struktur-Biomechanik, Wien, 2004.
- [26] D. H. Pahr and F. G. Rammerstorfer. Buckling of honeycomb sandwiches: Periodic finite element considerations. *Tech Science Press*, 1(1):101ff, 2004.
- [27] H. Parkus. *Mechanik der festen Körper*. Springer Verlag, Wien, 1966.
- [28] P. Patel, T. Nordstrand, and L. A. Carlsson. Local buckling and collapse of corrugated board under biaxial stress. *Compos. Struct.*, 39(1–2):93–110, 1997.
- [29] F. J. Plantema. *Sandwich Construction*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.
- [30] M. J. D. Powell. A direct search optimization method that models the objective and constraint functions by linear interpolation. In S. Gomez and J. P. Hennart, editors, *Advances in Optimization and Numerical Analysis*, pages 51–67. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [31] M. J. D. Powell. Direct search algorithms for optimization calculations. *Acta Numerica*, 7, 1998.
- [32] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and Vetterling W. T. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

- [33] A. A. Rahman and S. Abubakr. A finite element investigation of the role of adhesive in the buckling failure of corrugated fiberboard. *Wood and Fiber Science*, 35(3):322–333, 2004.
- [34] F. G. Rammerstorfer. *Repetitorium Leichtbau*. Oldenbourg, Wien, 1992.
- [35] L. Valdevit, J. W. Hutchinson, and A. G. Evans. Structurally optimized sandwich panels with prismatic cores. *Int. J. Sol. Struct.*, 41:5105–5124, 2004.
- [36] W. K. Vonach. *A General Solution to the Wrinkling Problem of Sandwiches*. Number 268 in 18. VDI Verlag, Wien, 2001. Fortschritt-Berichte VDI.
- [37] J. Wiedemann. *Leichtbau 1: Elemente*. Springer, Berlin, 1996.