Unterschrift der Betreuerin

Diplomarbeit

Sofja Kowalewskaja

Eine große russische Mathematikerin

Ausgeführt am Institut für

Analysis und Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von
Ao. Univ. Prof. Mag.rer.nat. Dr.rer.nat. Gabriela Schranz-Kirlinger

durch

Volker Hofbauer
1190 Wien, Boschstraße 45/28

Wien, im Juli 2016

Unterschrift (Student)

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Die vorliegende Diplomarbeit ist mit dem elektronisch übermittelten Textdokument identisch.

Unterschrift

Wien, am 04. Juli 2016

Vorwort

In meiner Schulzeit kam ich erstmals in der siebten Klasse Oberstufe mit der Differentialrechnung in Berührung. Dieses Thema hat mich damals schon sehr fasziniert, wiewohl der Themenkreis sehr anspruchsvoll und damit schwierig war. Aus Interesse besuchte ich in der achten Klasse ein Wahlpflichtfach über Differentialgleichungen. Im sechsten Kapitel der vorliegenden Diplomarbeit (*„Bezug zum AHS Lehrplan“*) habe ich einige Materialien aus dieser Zeit (mit Kommentaren versehen) in diese Arbeit übernommen.

Das erste Mal las ich von **Sofja Kowalewskaja** in einem Fachbuch, das bekannte und weniger bekannte Mathematikerinnen und Mathematiker und deren Lösungen zu Problemstellungen in aller Kürze beschreibt. Die Mathematikerin Sofja Kowalewskaja fesselte mich besonders. Meine Betreuerin erwähnte, dass das Schaffen sämtlicher Wissenschaftlerinnen besonders im 19. Jahrhundert sehr interessant ist; die Beschäftigung mit Sofja Kowalewskaja, ihrem familiären Umfeld und ihrem beruflichen Werdegang weckte meine Neugierde.

Besonders danken möchte ich meiner Betreuerin, Frau Professor Mag. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger, für die hilfreiche Betreuung vor und während meiner Diplomarbeit. Stets konnte ich sie – sogar auch in Ferien, an Wochenenden und auch an Feiertagen – nach Tipps und vor allem um Rat fragen.

Kurzfassung

Meine Diplomarbeit befasst sich allgemein mit der Mathematikerin Sofja Kowalewskaja und mit der Differentialrechnung. Dabei erläutere ich zuerst ausführlich die Biographie dieser genialen russischen Wissenschaftlerin, im Anschluss beschreibe ich ihre wissenschaftlichen Leistungen in der Mathematik, Mechanik, Astronomie und Physik. In diesem Kapitel gehe ich auch kurz auf eine ihrer insgesamt drei Dissertationen ein. Im Zusammenhang mit der Dissertation habe ich kurz die Geschichte der Differentialrechnung angerissen und möchte dem Leser/der Leserin in einem weiteren Kapitel gewöhnliche und partielle Differentialgleichung näherbringen. Im abschließenden Kapitel widme ich mich der Umsetzung dieser Theorie im Schulunterricht – dafür habe ich einige Materialien aus einem Wahlpflichtfach, welches ich in der achten Klasse AHS besuchte, eingefügt.

Inhaltsverzeichnis

1. Biographie Sofja Kowalewskaja

1.1 Kindheit und Jugend

Portrait Sofjas

[1]

Sofja Kowalewskaja (kyrillische Schreibweise: Софья Васильевна Ковалевская) wurde am 3. Januar 1850 nach dem damals in Russland gültigen julianischem Kalender (= 15. Januar 1850 im gregorianischen Kalender) in Moskau geboren und hieß mit Geburtsnamen Sofja Wassiljewna Korwin-Krukowskaja. Sie war die Mittlere von drei Kindern von General Wassili Korwin-Krukowski und der Deutschen Elisabeth Schubert (siehe Stammbaum in [2]). Ihr Vater Wassili wurde im Jahr 1858 in den Adelsstand erhoben, da er mittels Dokumenten beweisen konnte, dass seine Vorfahren polnische Adelige waren.

Da es in westeuropäischen Ländern unüblich war, dass Damen zum männlichen Nachnamen eine zusätzliche Endung anhängen, ließ sie – als sie schon verheiratet war und den Familiennamen Kowalewskaja trug – diese Endung kurzerhand weg und stellte sich überall mit dem Nachnamen *„von Kowalevsky“* vor. Deswegen war sie mit diesem Namen generell bekannter und sie verfasste unter dem Namen *„Sophie v. Kowalevsky“* viele Publikationen, herausragend ist in diesem Zusammenhang natürlich ihre Dissertation über die partiellen Differentialgleichungen zu nennen.

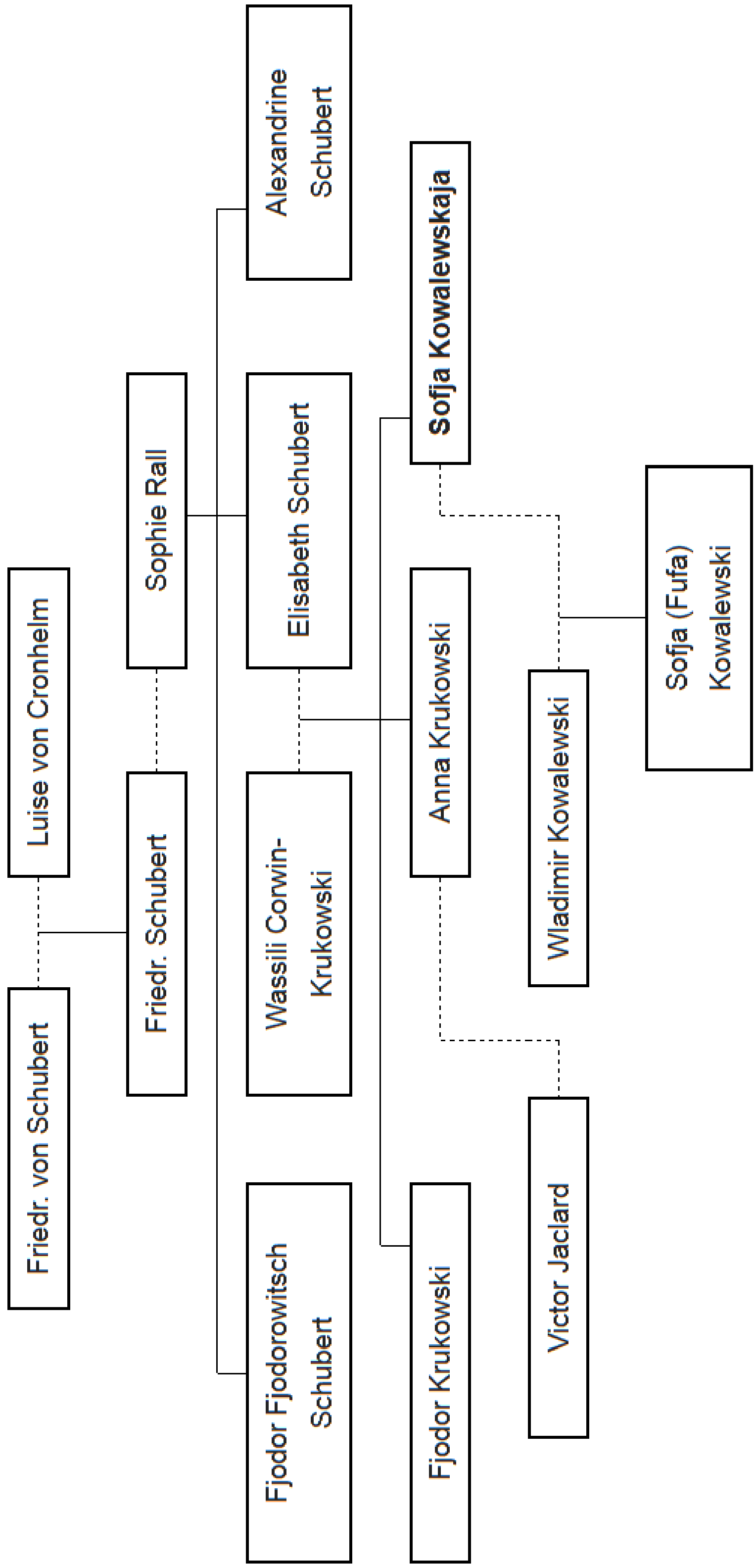
Eine Familiensage beschreibt, dass sie väterlicherseits vom römischen Feldherrn Marcus Valerius Messalius (er lebte ca. 340 v. Chr.) abstamme. Dieser hatte den Beinamen Corvinus erhalten, da ihm ein blinder Rabe (lat. *corvinus*) in einem Zweikampf gegen einen gallischen Heerführer zum Sieg verhalf. Ein weiterer Vorfahre Sofjas und Nachfahre des Feldherrn Marcus Valerius Messalius war der im heutigen rumänischen Gebiet siedelnde Matthias Hunjadi, der unter dem Namen Matthias Corvinus bekannter ist. Einer seiner Töchter heiratete einen Krukowski aus dem damaligen Groß-Polen. Sofja selbst wurde von ihrer Gouvernante immer wieder als lebhaft und wild beschrieben – in späteren Jahren berief sie sich immer wieder darauf, dass sich eine Zigeunerin in den Stammbaum eingeheiratet hätte, von der sie das lebhafte Verhalten geerbt habe.

Bereits in ihrer Kindheit entwickelte die kleine Sofja eine Begeisterung für Mathematik. Diese wurde ihr in die Wiege gelegt, nämlich ihre Verwandtschaft – vorrangig die väterliche Linie – waren Naturwissenschaftler bzw. Offiziere. Sie genoss die Gesellschaft ihres Onkels mütterlicherseits, Fjodor Fjodorowitsch Schubert, der damals als 28-Jähriger einen Sommer lang bei den Krukowskis verweilte. Er hatte ein naturwissenschaftliches Studium absolviert, konnte dadurch Sofja einen tiefen Einblick in diese für sie spannende und faszinierende Welt geben und weckte ihr Interesse dafür. Jeden Tag in diesem Sommer verbrachten beide eine halbe Stunde miteinander, um sich über Korallenriffe und Algen zu unterhalten; Sofja bezeichnete diese Zeitspanne als *„wissenschaftliche Unterhaltung“*. Ihr war dies sehr wichtig, sie wollte sich bei dieser Besprechung durch nichts und niemanden stören lassen. Einmal, als die Nachbarstochter Olga bei einer Unterhaltung dabei war, hat Sofja sie aus Eifersucht in den Oberarm gebissen, da sich Olga ihrer Meinung nach zu sehr einmischte. Ursprünglich hatten beide Mädchen vereinbart, dass Olga mit allen Spielsachen von Sofja spielen darf und sie im Gegensatz dazu mit ihrem Onkel allein ihre tägliche *„wissenschaftliche Unterhaltung“* führen darf.

Auch ihr Onkel väterlicherseits las seit dem Tod dessen Frau viele mathematischen Werke und erzählte Sofja viel darüber, wenn er bei ihr zu Besuch war – auch wenn er fachlich nicht immer auf ihr kindliches Gemüt Rücksicht nahm. Dieser Umstand störte Sofja nicht, sie war immer mit vollem Eifer dabei. Er war es, der ihre Neugierde für die Mathematik schließlich endgültig weckte – deswegen beschäftigte sie sich mit der provisorischen Tapete in ihrem Zimmer.

Als nämlich alle Räume im Haus in Palibino, in dem ihre Familie damals im Jahr 1858 neu einzog, nach dem Umbau neu tapeziert wurden, reichten die Tapetenrollen nicht für das ganze Haus. Sofjas Zimmer wurde daher zur Gänze provisorisch mit Papierzetteln tapeziert. Damals waren Tapeten teuer und außerdem im Handel schwer zu bekommen, wenn man wie die Familie Krukowski am Land wohnte. Deswegen wollte die Familie auf eine passende Gelegenheit warten, den Tapetenbedarf zu ergänzen – das dauerte eben seine Zeit. Diese Papierzettel enthielten ein vollständiges in Druckschrift abgedrucktes Skript einer Mathematikvorlesung über Differential- und Integralrechnung ihres Vaters.

Er studierte in seiner Jugend Mathematik und war – bevor er von der Armee des Zaren in Pension ging und das Gut in Palibino übernahm – Militärmathematiker.



Stammbaum der Familie Schubert

[2]

Zur damaligen Zeit war es üblich, dass Frauen nur in grundlegenden Dingen unterrichtet wurden. So war es auch bei Sofja vorgesehen – sie sollte auf Wunsch ihres Vaters ein „wohlerzogenes Fräulein“ werden. Weil ihr Interesse für Mathematik in Kindestagen durch das Vorlesungsskript und die zahlreichen Unterhaltungen mit beiden Onkeln schon so groß war, erhielt sie – nachdem sie dies bei ihrem Vater erstritten hatte – Privatunterricht in Mathematik. Da sie aufgrund der vielen Formeln, Sätze und Definitionen auf ihrer provisorischen Zimmertapete viele Fragen hatte und sich viel merken konnte, war ihr Fortschritt innerhalb kurzer Zeit so rasant, dass ihr Hauslehrer fachlich nicht mehr mit ihr mithalten konnte. Sie war nämlich von dieser Disziplin schon so sehr fasziniert, dass sie sich zusätzlich in vielen Nächten mit dem durcheinander tapezierten Skript intensiv beschäftigte. Bereits mit 15 Jahren las sie ein Physikbuch des Physikers Pavel Petrovitch Tyrtov (1838 – 1903), der in ihrer Heimat Palibino zufällig ihr Nachbar war. Tyrtov entdeckte ihr Talent erst zwei Jahre später, als sie ihm (mit ihren Worten) den Sinus interpretierte.
Er empfahl, dass sie unbedingt in St. Petersburg von einem Professor ausgebildet werden müsse. Auch diesen Unterricht musste sie sich bei ihrem Vater erstreiten.

Sofjas ältere Schwester Anjuta schloss sich noch in ihren Jugendjahren den *„Nihilisten“*, einer russischen Bewegung junger Leute der 1860er Jahre, an, die *„sich gegen die konservativen Moralvorstellungen der Vätergeneration und die herrschenden verkrusteten politischen Strukturen wandte und sich insbesondere der Aufklärung und Ausbildung der Landbevölkerung und dem Kampf für die Emanzipation und wissenschaftliche Ausbildung der Frauen verschrieben hatte.“* [3] Da die Bindung beider Schwestern sehr groß war und Sofja in Anjuta auch eine Bezugsperson sah, schloss sie sich ebenfalls recht bald dieser Jugendbewegung an.

Da Frauen ein Studium in Russland generell verboten war und Sofja trotzdem unbedingt eine universitäre Ausbildung wollte, blieb ihr nichts Anderes übrig als an einer ausländischen Universität zu inskribieren. Dies war für sie aber schwierig, da Frauen nach den damals in Russland geltenden Gesetzen keinen eigenen Reisepass besitzen durften. Sie waren entweder im Pass ihrer Väter oder Ehemänner eingetragen und durften immer nur gemeinsam mit diesem ausreisen. Deswegen ging sie im Jahr 1868 eine Scheinehe mit Wladimir Kowalewski ein, den sie im Rahmen der nihilistischen Bewegung kennen gelernt hatte. Damit war sie in seinem Pass eingetragen und konnte sich dadurch der Bindung an ihren Vater entledigen. Zusammen mit ihrem Scheinehemann reiste sie schließlich nach Wien, wo sie anfangs sogar Geologie studieren wollte.

1.2 Studienjahre

Als sie im Jahr 1868 in Wien ankam, durfte Sofja die Vorlesungen eines Physikprofessors, nachdem er ihr dies wider Erwarten genehmigt hatte, besuchen. Nach kurzer Zeit gefiel es ihr in Wien nicht mehr und zusätzlich fand sie die Vorlesungen als fachlich nicht überragend. Auch der Lebensunterhalt kam ihr in Wien zu teuer vor, so beschloss sie mit ihrem Mann nach Heidelberg zu ziehen, um an der Ruprecht-Karls-Universität Mathematik zu belegen.

Auch dort konnte sie nicht ohne weiteres inskribieren – sie musste sich erst bei einigen Mathematik- und Physikprofessoren vorstellen, bis sie sich im Sommersemester 1869 insgesamt 18 Vorlesungen – unter anderem Mathematik bei Professor Leo Königsberger (1837 – 1921) und Paul du Bois Reymond (1831 – 1889) und Chemie bei Robert Bunsen (1811 – 1899) – anhören durfte. Insgesamt entsprachen die 18 Vorlesungen einen Zeitbedarf von 22 Wochenstunden, wovon sie insgesamt 16 Stunden mit Mathematik belegte und die restlichen mit Mechanik und Chemie verbrachte. [8]

Wenige Monate darauf wechselte sie abermals die Universität. Sie ging aufgrund einer Empfehlung ihres Lehrers Professor Königsberger von Heidelberg an die Berliner Universität zu Professor Karl Weierstraß (1815 – 1897).

Sie merkte bereits in Wien und dann auch in Heidelberg, dass sie der Skepsis der Männerwelt ausgeliefert war. Alle Professoren nahmen sie nicht ernst, Sofja fand jedoch schnell heraus, dass sie nur durch perfekte Leistung, Fachwissen und Überzeugungskunst in der Wissenschaft bestehen konnte. Dies musste sie bei Karl Weierstraß abermals unter Beweis stellen.

Zur damaligen Zeit war es noch üblich, dass nur aufgrund eines Empfehlungsschreibens ein Studienplatz auf der Universität zugewiesen werden konnte. Mit solch einem Empfehlungsschreiben ausgestattet, ging sie zu Weierstraß, um bei ihm vorzusprechen. Zunächst war auch er ablehnend und dagegen, dass Frauen allgemein studierten. Trotzdem gab er Sofja eine Chance, sich zu beweisen, und prüfte sie durch Aufgabe der Lösung eines schwierigen Problems. Eine Woche später konnte Sofja wider Erwarten den Herrn Professor mit einigen originellen Lösungswegen beeindrucken. Weierstraß versuchte im Gegenzug nun die Universitätsverwaltung zu überzeugen, leider ohne Erfolg. Erst nach Kenntnis der eingegangenen Scheinehe, konnte Sofja Professor Weierstraß bewegen, ihr für insgesamt vier Jahre (mit Unterbrechungen) Privatunterricht zu geben.


ZUR THEORIE
DER
PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE
BEI DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT ZU GÖTTINGEN

VON

SOPHIE v. KOWALEVSKY
GEB. v. CORVIN-KRUKOVSKOY.

BERLIN.
DRUCK VON GEORG REIMER.
1874.

[4]

Im Jahr 1871, also noch während der privaten Unterrichtszeit mit Weierstraß, reiste sie mit ihrem Mann nach Paris, um Schwester Anjuta zu besuchen. Sie war bei einer Kommune beteiligt, die während des Deutsch-Französischen Krieges versuchte, die konservative Pariser Regierung zu revolutionieren. Sofja machte sich einerseits Sorgen um ihre Schwester und wollte sich vergewissern, dass es ihr gut gehe und andererseits wollte sie in der Kommune mithelfen.

Bereits ein Jahr nach ihrer Rückkehr aus Paris begann sie mit Unterstützung von Weierstraß an ihrer Dissertation zu arbeiten. Sie entschied sich gleich drei Arbeiten zu verfassen und vollendeter alle Arbeiten bis 1874 (die drei Dissertationstitel lauten: *„Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen“*, *„Gestalt der Saturnringe“* und *„Über die Anwendung Abelscher Funktionen auf elliptische Funktionen“*). Nach dem deutschen Mathematiker Ernst Schering, der alle ihre Arbeiten begutachtete, hätte schon eine einzige für die Erlangung der Doktorwürde gereicht. Obwohl Weierstraß nach wie vor nicht viel davon hielt, dass Frauen allgemein promovierten, setzte er sich doch dafür ein, dass Sofja dazu eine Möglichkeit bekam. Er überredete 1874 einen seiner ehemaligen Schüler, Lazarus Fuchs (1833 – 1902), der auf der Universität in Göttingen lehrte, dass dieser sich dafür einsetzen möge, damit Sofja ein Abschluss *in absentia* ermöglicht würde. Sofja konnte nur gebrochen Deutsch und hatte zusätzlich überhaupt keine Übung darin, vor einer Menschenmenge zu sprechen. Schließlich konnte sie im August desselben Jahres in Göttingen ihr Studium mit dem Titel *„Dr. phil. summa cum laude“* abschließen. Die Dissertation über die partiellen Differentialgleichungen, die das erst später unter dem Namen *„Cauchy-Kowalewskaja Theorem“* bekannte Theorem von Sofja und dem französischen Mathematiker Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) enthält, wurde im Jahr 1875 in der Zeitschrift *„Journal für reine und angewandte Mathematik“*, (gegründet von August Leopold Crelle (1780 – 1855)) publiziert. Für ihre schüchterne und zurückhaltende Art wurde sie auf der Akademie bewundert.

Wie schon erwähnt war der Weg Sofjas bis hierher (und auch der weitere) nicht einfach; sie musste sich immer wieder der frauenfeindlichen Männerwelt auf den Universitäten stellen. Obwohl sie schüchtern war, schaffte sie es immer durch ihr Wissen, eine positive Stimmung an den Universitäten für sich zu gewinnen.

1.3. Nach dem Studium und Berufstätigkeit

Sofja mit ihrer Tochter Fufa [4]

Unmittelbar nach ihrem Abschluss an der Universität Heidelberg, zog sie mit ihrem Mann wieder nach Russland in ihre Heimatortschaft Palibino, wo sie aufgrund ihres Abschlusses würdig gefeiert wurde. Das Ehepaar zog bald danach nach St. Petersburg und dort erfasste sie sofort das gesellschaftliche Leben. Aber was viele verwunderte, war, dass sie sich überhaupt nicht mehr mit der Mathematik beschäftigte. Sie besuchte vorrangig Gesellschaftsereignisse, sogar Briefe von Weierstraß beantwortete sie bis 1875 nur spärlich und bis 1878 gar nicht. Den einzigen Kontakt zur Mathematik, den sie aufrechterhielt, war der Kontakt zum russischen Mathematiker Pafnuti Lwowitsch Tschebyschef (1821 – 1894). Sie blühte in diesem Zeitraum förmlich auf und bereute sogar, dass sie die nahezu fünf Jahre während ihres Studiums fast wie eine Einsiedlerin lebte. Sie arbeitete wieder vermehrt für die nihilistische Bewegung und beobachtete für die Zeitung *„Nowoe Wremja"* (dt. *„Neue Zeit"*) als Journalistin den sogenannten *„Prozess der 193"*. Dieser Gerichtsverfahren beschäftigte sich mit sämtlichen Mitgliedern studentischer Organisationen Russlands, die im Sommer zuvor – also im Jahr 1874 – das politische System stürzen wollten – alle Mitglieder wurden verurteilt. Dieser Prozess war kein klassisches Rechtsverfahren, eher ein politischer Schauprozess.

Dr. Kowalewskaja schrieb auch andere Artikel für diese neu entstandene Zeitung, wie zum Beispiel je einen Artikel über Solarenergie, über Aspekte der damals möglichen Luftfahrt, über das kurz zuvor entwickelte Telefon und über Gärungsprozesse von Enzymen. In den Jahren 1876 und 1877 verfasste sie auch Theaterkritiken.

Es ist auch bekannt, dass sie allgemein nicht nur für die Mathematik forschte, sondern sich auch für Literatur interessierte. Noch im Jahr 1877 entstand ihr heute leider verschollener Roman *„Privat-Docent"*.

Auch mit ihrem Scheinehemann verstand sie sich in der Zeit nach dem Studium besser, die Scheinehe entwickelte sich sogar zu einer glücklichen Ehe. In ihrem Bekanntenkreis bemerkten viele, dass sie sich weiblicher und unselbstständiger verhielt und ihre alten kämpferischen Tugenden von einst ablegte. Ihr Mann Wladimir wollte im Jahr 1873 in

Odessa im Fachgebiet Paläontologie promovieren; nachdem er sich unmittelbar zuvor und sogar auch während der Abschlussprüfung mit den Prüfern stritt, fiel er bereits während der zweiten von insgesamt drei Fragen durch. Sofja fuhr zu ihm nach Odessa, um ihn zu trösten und vielleicht auch zu besänftigen. Im Jahr 1875 konnte er dann doch noch promovieren.

Sofja gebar am 17. Oktober 1878 eine Tochter, die sie auf den Namen Sofja taufte, allgemein wurde sie „Fufa“ gerufen.

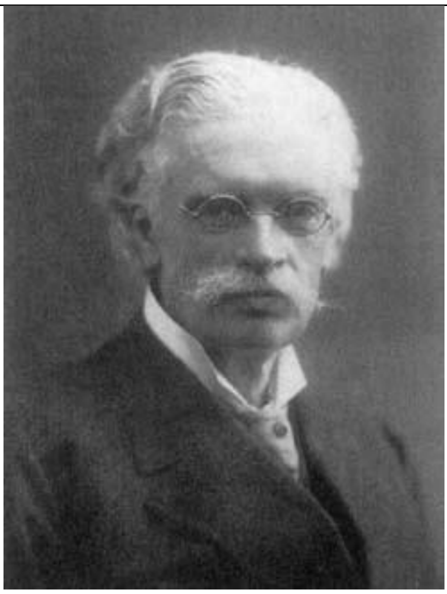
Da sich ihr Mann und sie – Alltagsmathematik und Zahlen zum täglichen Überleben waren für die trotz mathematischen Genies eine große Unbekannte – mit Immobiliengeschäften verspekulierten, mussten sie den Aufenthaltsort verlassen und mit der gemeinsamen Tochter nach Moskau ziehen. Dort besuchte Sofja Kowalewskaja mathematische Kongresse und nahm sogar den Briefverkehr mit ihrem alten Lehrer Weierstraß wieder auf. Ihr Ruhm war nach ihrer Dissertation aufgrund der langen mathematischen Absenz verblasst, dies wollte Sofja verändern und wollte unbedingt wieder im mathematischen Rampenlicht stehen. So empfahl Weierstraß ihr ein mathematisch-physikalisches Problem, dessen Lösung damals von Bedeutung war, zu bearbeiten, eine von ihm noch nicht publizierte Hilfestellung zu diesem Problem ließ er ihr zukommen.

Im Frühjahr 1881 zog sie mit ihrer Tochter und einer Gouvernante nach Berlin, da auch der Neuanfang in Moskau wieder ein finanzielles Desaster war. Ihr Mann verstrickte sich diesmal in Ölgeschäfte der Brüder Ragozin und dadurch ging der Familie endgültig das Geld aus. Sie misstraute anfangs diesen beiden Geschäftsleuten, in dessen Firma Wladimir den Posten des Direktors innehatte. Allerdings konnte sie diese Abneigung nach kurzer Zeit ablegen, in der Hoffnung, sich selbst in dieser Firma verwirklichen zu können – sie erfand sogar eine Beleuchtungsanlage auf Ölbasis, die sie mit Hilfe mathematischer Methoden entwickelte. Aber sie war in dieser Firma nie wirklich beschäftigt. Schließlich trennte sie sich im Frühsommer 1882 auch endgültig von ihrem Ehemann, die Ehe blieb am Papier bestehen.

Die männlich dominierte Mathematikerwelt existierte immer noch, nur mit facheinschlägigen Artikeln und mit Wissen hoffte sie dennoch bestehen zu können; eine Professur war ihr immer noch verwehrt. Deswegen reiste sie zwischendurch auf Anraten von Gösta Mittag-Leffler (1846 – 1927), einem schwedischen Mathematiker und Schüler von Weierstraß, der sie bis zu ihrem Tod begleitete, nach Paris und trug dort eine Arbeit vor. Aufgrund dieser Arbeit wurde sie in die Pariser Mathematik Gesellschaft gewählt, zog sich jedoch trotzdem bald darauf wieder nach Berlin zurück.

Acht Jahre vor ihrem Tod, also 1883, sagt sie wortwörtlich: *„Ich hoffe, daß in fünf Jahren mehr als eine junge Frau in der Lage sein wird, meinen Platz hier zu übernehmen. Ich könnte mich dann beruhigt anderen Dingen zuwenden, zu denen mich meine Zigeuner-Natur drängt.“* [5]

Am 27. April desselben Jahres verübte ihr Mann Wladimir Selbstmord, indem er sich mit einer Flasche Chloroform vergiftete. Der Verlust ihres Mannes traf sie dennoch persönlich so sehr, dass sie in eine fünftägige Ohnmacht fiel. Am sechsten Tag hatte sie wieder der Arbeitseifer gepackt, sie nahm Feder und Papier zur Hand und forschte wieder sehr intensiv. In diesem Zusammenhang meinte sie: *„Ich muß die Mathematik nur berühren, und schon vergesse ich alles andere auf der Welt“* [6]. Auf jeden Fall erreichte sie den damals *„respektablen Status einer Witwe“* [2], ab diesem Zeitpunkt hatte sie bessere Chancen auf eine Anstellung und damit auf eine Professur. Man meinte, dass ihr dieser Status mehr Freiheit ließ, als wenn sie verheiratet oder von vornherein als Unverheiratete alleinstehend gewesen wäre. Noch vor dem Selbstmord ihres Mannes versuchte Gösta Mittag-Leffler, der seit 1. September 1881 Dozent und später Rektor der Stockholmer Universität war, für sie – bis dahin leider erfolglos – eine Stelle an der Universität Stockholm zu bekommen. Dabei führte er teilweise intensive Gespräche mit unter anderem dem Astronomen Hugo Gyldén (1841 – 1896) und dem Psychologen M. Retzius und stieß bei diesen Gesprächen nicht nur auf Unterstützung, sondern ebenso auf Vorurteile Frauen gegenüber. Unmittelbar nach dem Tod ihres Mannes konnte er Sofja eine Stelle als Privatdozentin anbieten, die sie sofort annahm. Diese Stelle wurde zuerst leider nicht entlohnt, doch es bot ihr die Möglichkeit, höhere Mathematik zu lehren. Ihre Tochter weilte zu dieser Zeit mit der Gouvernante in der russischen Heimat und beide fanden Aufnahme bei einer Freundin.



Gösta Mittag-Leffler
[4]

Auf Einladung von Gösta Mittag-Leffler kam sie am Abend des 18. Novembers 1883 nach einer langen Reise in Stockholm an und wurde in Begleitung einer Gesellschafterin und einer Kammerfrau erwartet. Man meinte, dass Sofja begütert wäre und daher standesgemäß mit Dienerinnen Quartier nehmen wird. Allerdings wunderten sich alle Anwesenden bei dem Dinner am Abend umso mehr, dass sie alleine bei zwei älteren Damen in einer einfachen Pension ein Zimmer bezogen hat. Gösta Mittag-Leffler ging an besagtem Abend noch vor Ankunft Sofjas unruhig in seinem Haus von Gast zu Gast, um Freundlichkeit der Mathematikerin bei ihrem Ankommen entgegenzubringen. Sofja äußerte anfangs Gösta Mittag-Leffler gegenüber die Bedenken, dass sie sich noch nicht gut genug auf eine Dozenten-Stelle vorbereitet fühle. In ihrer Biographie erwähnt sie, dass sie nach einiger Zeit 4000 Schwedische Kronen im Jahr verdient hat, später sogar 6000 Kronen, wobei jeweils eine Hälfte der Jahresgage aus Fördertöpfen bezahlt wurde und die andere Hälfte von der Universität. Weiters schreibt sie, dass sie vier Vorlesungen pro Semester hielt – in Blöcken zu je zwei mal zwei Vorlesungen. Insgesamt waren es in ihrer Karriere als Professorin 12. Zuhörer hatte sie kaum mehr als 18, da sie Spezialfragen der Mathematik behandelte [7]. Ihre Antrittsvorlesung, die am 30. Jänner 1884 stattfand, hielt sie über die Theorie linearer Differentialgleichungen, dabei stützte sie sich auf bereits bekannte Tatsachen der Mathematiker Lazarus Fuchs, Jules Tannery (1848 – 1910) und Henri Poincaré (1854 – 1912). Noch kurz vor Beginn ihrer ersten Vorlesung war sie sehr aufgeregt; immerhin hatten sich 12 Zuhörer dafür angemeldet – tatsächlich kamen dann aber 15 bis 16 Interessierte. Ihrer polnischen Freundin berichtete sie später, dass sie mit Schrecken daran gedacht hat, sich den Zuhörern vorstellen zu müssen. Sie überließ es den Zuhörern, ob sie auf Deutsch oder Französisch vortragen solle – die Mehrheit der Zuhörer entschied sich für Deutsch. Ab 1885 beherrschte sie Schwedisch so gut, dass sie auf Schwedisch vortrug. Sie lernte nämlich verhältnismäßig schnell diese Sprache.

In der Zeitung *„Helsingforser Dagblad“* erschien ein kurzer Bericht über Sofja.

Eigentlich hatte sie vorgehabt, noch bis Jahresende zu Weierstraß zu reisen, um sich bei ihm auf ihre Lehrtätigkeit vorzubereiten. Diese Vorbereitungszeit war ihr nicht gegönnt, weil

Gösta Mittag-Leffler bereits eine Vorlesung über Differentialgleichungen für sie angekündigt hatte. Dabei war es der Wunsch, dass sie Erkenntnisse von Poincaré und sich selbst einfließen lassen sollte.

Auch in Stockholm war die Wissenschaft – wie sonst überall auch – männerdominiert. Auch hatte sie einige Feinde; der bekannteste war der Dichter August Strindberg. Er wetterte im Jahre 1884, als sie zur „Professorin der höheren Analysis" für fünf Jahre ernannt wurde, dagegen. Er sagte wortwörtlich: *„Eine Frau als Mathematikprofessor ist eine schädliche und unangenehme Erscheinung, ja, man kann sie sogar ein Scheusal nennen. Die Einladung dieser Frau nach Schweden, das an und für sich männliche Professuren genug hat, die sie an Kenntnissen bei weitem übertreffen, ist nur durch die Höflichkeit der Schweden dem weiblichen Geschlecht gegenüber zu erklären."* [5]

In ihrer Zeit in Stockholm forschte und publizierte sie viele Abhandlungen, es entstand unter anderem eine genauere Formulierung des bekannten Cauchy-Kowalewski-Theorems. Bei diesem Theorem forschten Sofja Kowalewskaja und der französische Mathematiker Augustin-Louis Cauchy unabhängig voneinander.

Zusätzlich wurde sie im Jahr 1884 Mitherausgeberin der mathematischen Fachzeitschrift *„Acta Mathematica"*. Sie ist damit die erste Herausgeberin einer wissenschaftlichen Zeitschrift. Während eines ihrer Heimaturlaube hatte sie von Mittag-Leffler den Auftrag, Beiträge russischer Mathematiker für diese Zeitung anzuwerben; es gelang ihr sehr schnell diesen Auftrag zu erfüllen. Auch, als sie kurz darauf in Berlin und Paris auf Urlaub war, gelang es ihr, weitere Schreiber für Artikel anzuwerben.

Schon zwei Jahre später gelang ihr die Lösung eines Spezialfalles für die Arbeit *„Das Problem der Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt"* [4]. Seitdem hatte sie auch Kontakt mit Joseph Bertrand (1822 – 1900), der bei der Pariser Akademie der Wissenschaften beschäftigt war.

Im selben Jahr hatte sie sogar den Vorsitz der Sektion Mathematik beim naturwissenschaftlichen Kongress in Christiania (heute Oslo) inne.

Am 18.12.1888 erfuhr sie, dass sie den Preis *„Prix Bordin"*, damals eine der höchsten und international renommierten Auszeichnungen in den Naturwissenschaften, für die eben genannte Arbeit an der *„Académie des sciences"* (dt. Pariser Akademie der Wissenschaften) gewann. Die Überreichung fand am 24. Dezember um 13 Uhr im großen Festsaal ebendort in

Paris statt. Bis dahin war sie die erst zweite Frau, die diesen Preis erhielt; vor ihr gelang im Jahr 1816 Sophie Germain (1776 – 1831) diesen Preis für ihre Arbeit über die Elastizität der Metalle zu gewinnen. Zuerst wurde ein Preisgeld von 3000 Franc festgesetzt, aber wegen der Bedeutung der Arbeit wurde dies auf 5000 Franc erhöht. Eine Legende besagt, dass sie ihren Beitrag anonym einsandte, damit sie bessere Chancen hätte, zu gewinnen. Tatsache war aber, dass nicht nur den Juroren und den interessierten Anwesenden von Anfang an bekannt war, dass der Artikel aus ihrer Feder stamme. Durch die Zeitungen erfuhr der ganze europäische Kontinent vom Triumpf Sofjas und es hagelte Einladungen zu Festbanketten und privaten Dîners, die sie jedoch kaum annahm. Viel mehr widmete sie sich wieder der Mathematik.
Die Forschungstätigkeit zum Lösen des Problems über die Rotation eines starren Körpers verbrauchte viel ihrer ohnehin schon knappen Energie. Aus diesem Grund ersuchte sie – den zu diesem Zeitpunkt schon zum Rektor berufenen – Gösta Mittag-Leffler um Freistellung der Lehrtätigkeit bis in den Frühling.

Bereits kurz darauf erweiterte sie diese Arbeit und gewann abermals einen wissenschaftlichen Preis, diesmal waren es 1500 Kronen von der Schwedischen Akademie der Wissenschaften. Diese erweiterte Fassung publizierte sie 1890 in der *„Acta Mathematica“*.

Ende 1887 lernte sie Alfred Nobel (1833 – 1896) kennen, der ihr auch ganz offen den Hof machte – aber sie ging darauf nicht ein. Er vermutete, dass sie ihn wegen Mittag-Leffler abblitzen ließ. Angeblich soll das der Grund sein, weswegen es keinen Nobelpreis für Mathematik gibt. Der wahre Grund ist aber, dass die Mathematik im Gegensatz zur Chemie viel zu abstrakt war und der Nutzen der Mathematik damals noch nicht so erkennbar war, wie heute.

Bevor Sofja nach Stockholm zurückging, wohnte sie noch einige Zeit bei ihrem neuen Freund Maksim Maksimowitsch Kowalewski (1851 – 1916), ein entfernter Verwandter ihres Mannes Wladimir, in Beaulieu, einem kleinen Ort nördlich von Nizza in Südfrankreich. In dieser kurzen Zeit brachte sie all ihre Erkenntnisse für den Fall, dass sie sie publizieren möchte, auf Papier.

Als im Jahr 1889, nach fünf Jahren Professur, ihr befristeter Vertrag in Stockholm auslief, hatte sie vor, in Frankreich und in ihrer Heimat Russland etwas Adäquates zu finden. Sie scheute auch nicht davor zurück, in Frankreich noch einmal zum Doktor der Mathematik promovieren zu müssen. Jedoch redeten ihr Weierstraß und Mittag-Leffler dieses Vorhaben aus, da bei beiden die Befürchtung bestand, dass ihr guter Ruf dadurch einen Schaden bekäme. Mittag-Leffler konnte zudem viele Gegner Sofjas überzeugen, ihr eine Professur auf Lebenszeit zu gewähren. In Frankreich und in Russland, wo sie sich auch um eine Professur bemühte, wurde sie jeweils mit einem Ehrentitel gewürdigt – in Frankreich mit dem *„Officier de l'Instruction publique"* (ein sogenannter Erziehungsbeamter ehrenhalber) und in Russland wurde sie zum *„korrespondierendem Mitglied der Petersburger Akademie der Wissenschaften"* [9] ernannt. Daheim in Russland stellte sie schnell fest, dass ihr Ruhm verblasst war, und ehrgeizig wie sie immer war bat sie Weierstraß abermals um Hilfe. Er überließ ihr prompt eine von ihm geschriebene, aber bis dahin nicht veröffentlichte Arbeit über Lamé Gleichungen – also komplizierte Systeme partieller Differentialgleichungen, die von Gabriel Lamé (1795 – 1870), Claude Louis Marie Henri Navier (1785 – 1836) und Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) beschrieben wurde, zum Veröffentlichen.

Schließlich wurde sie noch im selben Jahr, also 1889, in Stockholm zur ordentlichen Professorin berufen. Damit war sie am Höhepunkt ihrer Karriere angelangt – sie war damit die erste Professorin weltweit. Leider fiel sie in eine depressive Phase und wollte die Mathematik zugunsten einer anderen Tätigkeit abermals aufgeben. Dieses Verhalten war für sie nicht unüblich; immerhin zeigte sich das schon gleich nach Beendigung ihres Studiums. Karl Weierstraß erkannte diese Phase und deren Folgen diesmal rechtzeitig und versuchte sie in Briefen wieder zur Mathematik zu motivieren. Dabei zeigte er die Leistungen auf, die Mathematiker bis dato vollbrachten und welche Auswirkungen dies auf die Zukunft habe. Nach einer kurzen Schaffenspause ging sie wieder nach Stockholm zurück. Dort widmete sie sich neben ihrer Lehrtätigkeit auch wieder vermehrt der Literatur und sogar auch dem Journalismus. In dieser Zeit verfasste sie ihre Memoiren und auch den Roman *„Die Nihilistin"*.

Sie verbrachte die Ferien unmittelbar vor ihrem Tod nicht in Stockholm, sondern bei ihrem Freund Maksim in Beaulieu. Auf der Rückreise nach Stockholm legte sie Zwischenstopps in Paris und Berlin ein. Bereits auf dieser Reise ging es ihr gesundheitlich nicht sehr gut, ihr Zustand verschlechterte sich ständig bis sie noch während der Reise nach Stockholm an einer Lungenentzündung erkrankte. Leider ließ sie sich nichts anmerken, sondern nahm sogar noch gesellschaftliche Termine wahr. Umso schockierter war ihr persönliches Umfeld, als sie am 10. Februar 1891 zeitig in der Früh mit 41 Jahren völlig unerwartet an den Folgen dieser Krankheit verstarb.

Die Nachricht über ihren plötzlichen Tod verbreitete sich in Windeseile. Die gesamte Mathematikerwelt war bestürzt ob dieser unerwarteten Schockmeldung. In Fachzeitschriften wurden viele Nachrufe, verfasst von bekannten Mathematikern und Wegbegleitern, abgedruckt, wie zum Beispiel von Leo Königsberger und Leopold Kronecker.

1.4. Nach ihrem Tod [6]

Unmittelbar nach Sofja Kowalewskajas Tod war sie der Öffentlichkeit präsent, vorrangig natürlich in der Mathematikerwelt. Viele bekannte Personen berichteten über persönliche Erlebnisse mit ihr in Nachrufen. Beispielsweise berichtete Charles Hermite, dass Sofja die einzige war, die das mathematische System der Analysis von Weierstraß komplett verstanden hat – deswegen bat man sie oft, das eine oder andere Werk ihres Mentors zu erklären.

Kowalewskaja besitzt in der heutigen Mathematik-, Physik- und Mechanikwelt leider keinen so hohen Bekanntheitsgrad mehr. Sie hat – im Gegensatz zu Weierstraß und Laplace – keine grundlegenden Sätze und Theoreme, die man schon in Anfangsvorlesungen behandelt, aufgestellt und bewiesen. Im Laufe eines Mathematik- oder Physikstudiums kommt man erst mit ihr in Berührung, wenn man zum Beispiel den Satz von Cauchy-Kowalewskaja oder den Kowalewskaja-Kreisel in höheren Semestern behandelt.

Es ist auch erwähnenswert, dass sie sich selbst keine neuen Probleme stellte und diese bewies, sondern immer Anregungen von Weierstraß holte und diese behandelte. Sie hat auch nicht – wie viele andere Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen – komplette Schriften herausgebracht, sondern nur einzelne Fragmente, weswegen sie auch keine eigene Schule begründen konnte. Jedoch erreichte sie mit einem Einzelwerk – das Cauchy-Kowalewskaja-Theorem – einen relativ hohen Bekanntheitsgrad. Dieses Theorem ist heute noch wichtig für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Sie erreichte wenig später auch mit dem Kowalewskaja-Kreisel Bekanntheit, allerdings werden Problemstellungen solcher Natur mathematisch heute nicht mehr in dieser Art behandelt. Die aktuelle Mathematik interessiert sich viel mehr für allgemeine und universelle Aussagen und nicht mehr für das Bewegungsverhalten eines bestimmten, speziellen Kreisels.

Prof. Dr. Sofja Kowalewskaja trug auch wesentlich dazu bei, die Weierstraß'sche Schule und Funktionentheorie bekannt zu machen und zu verbreiten, was ihr durch ihre Reisetätigkeit gut gelang. Weierstraß selbst veröffentlichte nicht sehr viel, da er auf der Berliner Universität sehr stark in administrative Abläufe eingebunden war. Sie war nicht die einzige Weierstraß-Schülerin, die zu seinem Bekanntheitsgrad beitrug. Leo Königsberger lehrte in Heidelberg, Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921) ging nach Zürich, Lazarus Fuchs war in Göttingen und Gösta Mittag-Leffler zog es in den Norden nach Stockholm. Skripten und Notizen wurden nach Einverständnis von Weierstraß als Vorlesungsgrundlagen übernommen.

Der breiten Öffentlichkeit blieb Sofja jedoch aus verschiedenen Gründen unbekannt. Einerseits beklagte sich Weierstraß darüber, dass sie zu verschlossen wirkte und dass sie nicht das Genie war, auf allen Gebieten etwas Zentrales zu leisten. Andererseits sind aber auch zum Teil einige Quellen verschwunden. Zum Beispiel ist der komplette Briefverkehr zwischen ihr und Charles Hermite (1822 – 1901) verbrannt worden, der Schriftverkehr an Maksim Kowalewski ist der russischen Revolution zum Opfer gefallen und die Briefe, die sie an Weierstraß schickte, hat er eigenhändig unmittelbar nach ihrem Tod verbrannt. Er meinte dazu, dass die Nachwelt sie sowieso durch die mathematischen und literarischen Werke kennen lernen würde. Es wird aber auch vermutet, dass das Erscheinen der Biographie von Anne Charlotte Leffler über Sofja Karl Weierstraß zu diesem Schritt bewogen hat. Er äußerte sich kritisch über das Erscheinen ihrer Biographie unmittelbar nach ihrem Tod.

Sie kannte durch ihre Reisetätigkeit sehr viele Persönlichkeiten und da diese Bekanntschaften und Freunde in Europa verstreut lebten, korrespondierte sie viel postalisch. Und das, obwohl sie sich selbst als schreibfaul bezeichnete.

Kurz nach ihrem Tod veröffentlichte Anne-Charlotte Leffler, eine Schwester von Gösta Mittag-Leffler, ein Erinnerungsbuch über Sofja. Auch wurde der zu Lebzeiten von Sofja als Fragment gebliebene Roman *„Die Nihilistin“* veröffentlicht. Dazu verfasste sie zwei verschiedene Rohfassungen, die beide unvollendet geblieben sind. Diese beiden Rohfassungen wurden im Jahr 1892 zu einer Edition zusammengefügt und veröffentlicht.

Auch wenn sie viele private Probleme und Sorgen hatte, gab sie in der Männerdomäne immer 200 Prozent Leistung, sie war korrespondierendes Mitglied in der Russischen Akademie der Wissenschaften und noch einiges mehr.

Bei genauerer Analyse ihrer Persönlichkeit ist festzustellen, dass sehr viele Widersprüche in ihr stecken: sie war eine begabte Mathematikerin, die Bahnbrechendes beweisen konnte, aber dafür konnte sie nicht mit Geld wirtschaften. Sie war bis zum Tod unentschlossen, ob sie

Dichterin oder Mathematikerin ist. Auch wenn sie eine phänomenal gute Hochschuldozentin war, kam sie leider nicht mit der Erziehung ihrer Tochter Fufa zurecht.

Bereits sechs Jahre nach ihrem Tod (1897) bekamen zirka 100 Professoren in Deutschland einen Fragebogen zugesandt, in dem gefragt wurde, ob sie sich Frauen allgemein als Professorinnen beziehungsweise Dozentinnen vorstellen können. Das Ergebnis fiel zugunsten der Frauen aus; viele konnten sich – allein wegen Sofja und Sophie Germain – Frauen als Hochschulprofessorinnen vorstellen. Auch russische Gelehrte hatten anfangs viele Gegenargumente zu Wissenschaftlerinnen, deswegen fand Sofja keine Anstellung in ihrer Heimat – aber auch das änderte sich allmählich. Als sie sich fachlich durchsetzen konnte, redeten sich einige russische Mathematiker noch darauf aus, dass sie eigentlich nur theoretische Mathematik beherrsche, da diese Mathematiker nur der eigenen praktisch ausgelegten Mathematik vertrauten. Im Laufe der Zeit konnte Sofja auch dieses allgemeine Misstrauen gegen Frauen abstreifen. Sie hatte dann sogar regen Briefkontakt mit Tschebyscheff – er war es, der die Berliner Schule der Mathematik so lobte.

Eines kann man bei Sofja feststellen: Je älter Sofja wurde, umso produktiver wurde sie. Sie hatte in jüngeren Jahren Phasen, in denen sie viel lieber ihr Leben lebte, aber spätestens als ihr Mann starb, widmete sie sich fast ausschließlich der Wissenschaft und schrieb zahlreiche Artikel. Deswegen liegt die Vermutung nahe, dass sie aufgrund der emsigen Beschäftigung auf ihre Gesundheit vergaß und gerade in ihrer Hochblüte verstarb. Ihre Tochter Fufa sah sie in ihrer Stockholmer Zeit nur selten.

Poincare ordnete die Mathematiker in zwei Gruppen: in die „logische Gruppe“ und in die „geometrische Gruppe“, Sofja ordnete er in die erstgenannte ein.

1.5. Namenspatenschaften

Im Jahr 2002 wurde ein Forschungspreis vom deutschen Bundesministerium für Bildung und Forschung ins Leben gerufen, der den Namen *„Sofja Kovalevskaja-Preis"* trägt. Dieser wird nur alle zwei Jahre von der Alexander von Humboldt-Stiftung an erfolgreiche Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler vergeben und ist mit bis zu 1,65 Millionen Euro dotiert. Dabei können Wissenschaftler aller Fachrichtungen ihre Promotion einreichen, sofern ihre Promotion zum Zeitpunkt der Einreichung nicht älter als sechs Jahre ist. (vgl. [30])

Weiters ist Sofja Namensgeberin des Satzes von Cauchy-Kowalewskaja.

Eine Tatsache, die bisher nicht so bekannt ist, ist, dass ein Asteroid am Hauptgürtel, der am 4. September 1972 im Krimobservatorium entdeckt wurde, nach ihr benannt wurde.

Auch ein Gebirge auf der von der Erde abgewandten Seite des Mondes wurde nach Sofja benannt.

Der schwedische Regisseur Lennart Hjulström produzierte im Jahr 1983 den Film „Ein Berg auf der Rückseite des Mondes", der das Leben von Sofja behandelt. [8]

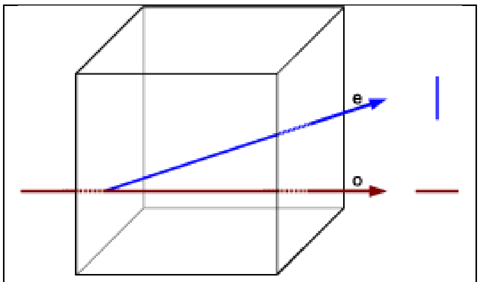
2. Wissenschaftliches Schaffen

2.1. Mathematik

Da Sofja Kowalewskaja hauptsächlich Mathematikerin war, verfasste sie in dieser Wissenschaft die meisten Schriften.

Wie schon im vorherigen Kapitel erwähnt, schrieb sie drei inhaltlich verschiedene Dissertationen, wodurch sie die Doktorwürde an der Universität Heidelberg erreicht hat.

Ein weiteres Themengebiet, mit dem sie sich in ihrer Karriere beschäftigt hat, waren die Lamé- Gleichungen. Dies ist ein kompliziertes System partieller Differentialgleichungen, bei dem es mehrere Lösungen gibt. Eine davon beschreibt, wie sich Lichtwellen in doppelbrechenden Medien ausbreiten. *„Als doppelbrechend werden Strukturen bezeichnet die in der Lage sind einfallende Lichtstrahlen in zwei Teilstrahlen oder Wellenzüge aufzuspalten, von denen jeder linear polarisiert ist und deren Schwingungsebenen senkrecht aufeinander stehen."* [10] Genau dieses Phänomen lässt sich in der Badewanne beobachten, wenn man nach der Seife im Wasser greift. Die Lichtwellen ändern nämlich bei einem Übergang von einem Medium in ein anderes ihre Ausbreitungsrichtung (Brechungsgesetz). Wenn Kalkspat im Wasser enthalten ist, dann werden die Lichtwellen auch in zwei Teilwellen aufgespalten – hier kommt es zu einer Doppelbrechung. Der französische Mathematiker und Physiker Gabriel Lamé (1795 – 1870) beschäftigte sich in der zweiten Auflage seines Werkes „*Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Elasticité des Corps Solides*", welches er 1866 herausgab, mit Lichtwellen. Im Speziellen beschrieb er doppelbrechende Medien, für die er die nach ihm benannten Lamé-Gleichungen entwickelte. Jedoch ließen sich diese Gleichungen nur für einen Spezialfall anwenden. Sofja wollte diesen Spezialfall verallgemeinern. Mit der Hilfe von Weierstraß arbeitete sie etwa eineinhalb Jahre daran; die fertige Arbeit konnte sie 1883 in Odessa bei einem Kongress präsentieren. Unabhängig voneinander lasen Carl Runge (1856 – 1927) und Weierstraß die Arbeit – beide konnten jeweils unabhängig keine Fehler finden. Vito Volterra (1860 – 1940) fand aber unmittelbar nach Sofjas Tod heraus, dass sie



Doppelbrechung in einem Eiswürfel [10]

allerdings eine Hilfsbehauptung fälschlicherweise als richtig angenommen hat. Deswegen schrammte sie knapp an einer formal richtigen Lösung vorbei. Den Fehler bemerkte zu Lebzeiten niemand, da Sofja nur wenige kritische Leser hatte. Es gab auch einen Grund, warum sie diesen einen Fehler nicht selbst bemerkte, sie war – wie sonst auch oft – überstrapaziert und hatte in der Hektik diese Kleinigkeit als wahr angenommen. Dieser Fehler konnte mittlerweile ausgebessert werden. Ihr war es jedoch nicht vergönnt, die Lösung des Problems zu erleben.

Sie bewies unabhängig von Cauchy den *Satz von Cauchy – Kowalewskaja*. Die Besonderheit daran war, dass zuerst Cauchy das Theorem formulierte und Sofja unabhängig davon mit Weierstraß daran arbeitete. Dieser Satz beschreibt die Eindeutigkeit sämtlicher Lösungen einer partiellen Differentialgleichung, also des sogenannten Cauchy Problems, wenn man geeignete Voraussetzungen für die Analytizität wählt.

Der Satz sagt Folgendes aus: [11]

„Der quasilineare Differentialoperator $L(u)$ sei durch eine analytische Funktion bestimmt. Weiters sei S eine analytische Mannigfaltigkeit, die an keinem Punkt $x \in \Gamma$ charakteristisch ist. Dann hat das Cauchyproblem für die Gleichung $L(u) = 0$ in einer Umgebung von Γ eine eindeutige analytische Lösung.“

Um diesen Satz beweisen zu können, muss man sich zuerst mit einer speziellen Form des Cauchy-Problems beschäftigen. Näheres wird im Kapitel **2.6. Dissertation „Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen“ von Sofja Kowalewskaja** erläutert, da dieser Satz in dieser Dissertation enthalten ist.

In ihrer wissenschaftlichen Laufbahn veröffentlichte sie insgesamt zehn facheinschlägige Artikel.

Erwähnenswert sind der Briefverkehr, den sie unter anderem mit den Mathematikern Weierstraß und Mittag-Leffler, die sie mit der Zeit zu ihrem Freundeskreis zählen konnte, führte und der Kontakt mit dem russischen Mathematiker Tschebyscheff.

2.2. Mechanik

Den wohl größten Ruhm in ihrem Leben erreichte sie mit ihren Schriften über die Rotation eines starren Körpers um eine Achse. Sie gewann unerwartet im Jahr 1888 mit dem Artikel *„Das Problem der Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt“* den Preis der französischen Akademie der Wissenschaften (den sogenannten *„Prix Bordin“*). Der französische Mathematiker Emil Heinrich Du Bois-Reymond (1818 – 1896), erwähnte sogar, dass bei den drei Problemstellungen, für die Sofja Kowalewskaja diesen Preis einreichte, zwei von Laplace, Euler, Poisson und Jacobi und die dritte von ihr selbst gelöst wurden, wobei sie für alle drei Probleme die damals modernen und bis dahin bekannten Mittel der Analysis ausreizte. Was bewundernswert daran ist, dass sich Weierstraß mit diesem Thema nur sehr wenig befasste, Vorlesungen hielt er nie darüber. Er beschäftigte sich mit elliptischen Funktionen und merkte, dass diese für die Lösung nicht ausreichten. Er schlug Sofja vor, dass sie sich zu einem späteren Zeitpunkt mit der Lösung spezieller Fälle des Rotationsproblems durch Abelsche Funktionen beschäftigen könne. Es wird vermutet, dass sie sich komplett selbstständig mit diesem Thema befasst hat, da Weierstraß ihr fachlich diesmal keine Unterstützung anbieten konnte. Normalerweise überließ er ihr eine Problemstellung und sie bewies es – aber diesmal dürfte sie aus eigenem Interesse gehandelt haben. Sie interessierte sich schon länger dafür, da das Thema zu diesem Zeitpunkt schon zirka 100 Jahre lang erforscht wurde – aber bis dato mit nicht zufriedenstellenden Ergebnissen.

Sie machte sich auch Gedanken über alternative Ansätze in bereits veröffentlichten Artikeln über Mechanik. Dabei verwendete sie die bereits von Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 – 1851) gezeigten Resultate als Grundlage. Auch die bereits bekannten Erkenntnisse der Mathematiker Leonhard Euler und Joseph-Louis Lagrange halfen ihr enorm weiter.

Euler kann als Begründer der analytischen Kreiseltheorie bezeichnen werden; er verfasste einige Werke über Kreisel, in denen er deren Bewegung untersuchte. Dabei entwickelte er die Bewegungsgleichungen der Newton’schen Mechanik weiter und leitete die seither unter seinem Namen bekannten Differentialgleichungen her, die die Bewegung eines Kreisels abhängig von äußerer Bewegung beschreiben. Weiters löste er auch Spezialfälle, nämlich die Fälle, bei denen auf den Kreisel keine äußeren Kräfte einwirken. Ein bekanntes Beispiel eines solchen „freien Kreisels“ ist die Erde.

Auch Lagrange löste im Zusammenhang mit dem Kreiselproblem einen weiteren Spezialfall. Er berücksichtigte bei symmetrischen Kreiseln auch Gravitationskräfte. Er beschäftigte sich im Unterschied zu Euler auch mit Spielkreiseln.

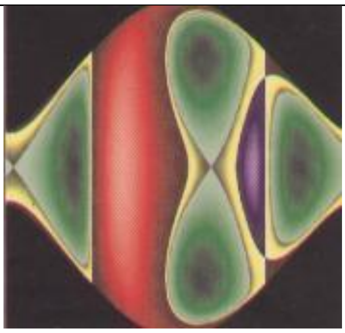
Als neuen Ansatz verwendete Sofja diesmal die Zeit t als Veränderliche. Dadurch gelang ihr das, was in den nächsten 60 Jahren keiner Mathematikerin bzw. keinem Mathematiker gelang – sie fand für diesen Fall das allgemeine Integral. Es konnte in dieser Zeitspanne keine andere Wissenschaftlerin bzw. kein anderer Wissenschaftler einen neuen Fall finden, wo ebenfalls das allgemeine Integral gefunden wurde. Seit den Mathematikern Lagrange und Euler ist in der Wissenschaft ein Stillstand eingetreten, bis zu Sofja Kowalewskaja gab es keine neuen Erkenntnisse. Es änderte sich aber mit ihr; ihre Schriften motivierten viele Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler in der Folge zu weiteren Untersuchungen auf diesen Gebieten.

Für fachunkundige Leserinnen und Leser ist es kaum möglich, diese Fachartikel zu verstehen, man benötigt dafür in jedem Fall Kenntnisse aus der Dynamik. Dabei wird nicht nur die Bewegung eines Massepunktes betrachtet, sondern auch die Bewegung eines starren Körpers. Das Problem der Drehung eines starren Körpers kann in zwei Aspekte aufgeteilt werden:

•) die Verschiebung des Körpers in Bezug auf den unbeweglichen Schwerpunkt dieses Körpers (= Translationsbewegung) und

•) die Bewegung des Schwerpunktes dieses Körpers (= Rotationsbewegung).

Auf diesem Weg kann man die Probleme, die bei der Bewegung eines freien starren Körpers auftreten, in die Bewegung eines starren Körpers mit einem festen Drehpunkt überführen. Bei der Theorie der Kreisel muss man genau auf diese Erkenntnisse zurückgreifen.



Kowalewskaja-Kreisel

[12]

Sie griff diese Problematik auf, als sie noch an den Lamé-Gleichungen arbeitete. Schon in ihrer Studienzeit schwor sie sich, dieses Problem, bei dem bis dahin nur Spezialfälle behandelt wurden, für allgemeine Fälle zu lösen. 1884 erzielte sie erste Teilresultate, bereits zwei Jahre später gelang ihr bei dieser Arbeit der Durchbruch. Sie bewies einen weiteren Fall, in dem Differentialgleichungen lösbar waren, diese wurde als

Kowalewskaja-Fall bekannt. Dadurch entstand der später nach ihr benannte *„Kowalewskaja-Kreisel"* (siehe Grafik [12]).

Speziell im mathematischen und physikalischen Kontext wurde die Kreiseltheorie wegen ihrer Komplexität als „Hohe Schule" bezeichnet. In der Mechanik kommt man dabei mit dem Konzept des „Massepunkts" – auch „Punktmechanik" genannt – aus. In diesem Fall hat man den Körper auf eine einzige physikalische Größe reduziert, wodurch die Bewegungsproblematik vereinfachen konnte. Aber das Konzept des Massepunktes versagt, *„wenn in das zu lösende Bewegungsproblem die genaue Gestalt und Struktur des Körpers oder seine Möglichkeit, die Rotation auszuführen, zentral eingeht"* [6]. Es kann sich der Massepunkt nicht mehr ausdehnen und eine Drehung um sich selbst ist nicht mehr möglich. Das Keplerproblem ist ein Beispiel, dass im Rahmen der Punktmechanik lösbar ist.

<u>2.3. Physik</u> (Vergleiche [13])

Sofja Kowalewskaja verfasste in den Jahren 1884 und 1885 Arbeiten über Strahlenrefraktion in Kristallen (Originaltitel: *„Über die Brechung des Lichtes in kristallinischen Mitteln"* bzw. französisch *„Sur la propagation de la lumiere dans un milieu cristallise"*). Die deutsche Fassung war die detaillierteste dieses Werks, diese hat sie 1885 in der *„Acta Mathematica"* veröffentlicht. Die schwedische und französische Fassung veröffentlichte sie im Jahr zuvor. Weiteres dazu findet sich schon im Kapitel *„2.1 Mathematik"*.

Ferner verfasste sie noch einen Artikel über die Saturnringe, in dem sie die Erkenntnisse von Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) weiterentwickelte (Originaltitel ihres Artikels: *„Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung ueber die Gestalt der Saturnringe"*). Er glaubte, dass die Ringe elliptisch sind, Sofja aber fand heraus, dass die Ringe eiförmig und in eine bestimmte Richtung orientiert sind. Sie beschäftigte sich vorab mit dem Werk *„Méchanique céleste"* (dt. *„Himmelsmechanik"*) von Laplace. Er war damals einer der letzten führenden Mathematiker des 18. Jahrhunderts und beschäftigte sich intensiv mit Planetensystemen. Von Napoleon wurde er gefragt, warum nicht ein einziges Mal das Wort *„Gott"* in den Bänden vorkommt. Als Antwort gab er Napoleon, dass er sich nicht auf Hypothesen stütze. Im Grunde wollte er die Gestalt und Form der Saturnringe theoretisch bestimmen, indem er von bestimmen physikalischen und mathematischen Annahmen ausging. Jedoch konnte sich Sofja mit der Qualität dieser Annahmen und Berechnungen nicht zufriedengeben – sie entwickelte in ihrer Dissertation *„Gestalt der Saturnringe"* eine andere Methode, die dieselben Annahmen von Laplace in beliebiger Genauigkeit widergeben konnte. Der Rechenaufwand wird aber komplizierter, je genauer man rechnet. Womöglich tat auch ihr Großvater mütterlicherseits bezüglich des Themas sein Übriges, denn er war Astronom – es ist also möglich, dass dadurch ihre Begeisterung zusätzlich für dieses Gebiet geweckt wurde.

2.4. Überblick

Ihr Hauptarbeitsgebiet war nicht die mathematische Physik, sondern die Theorie Abelscher Integrale und die Funktionentheorie von Weierstraß. Abelsche Integrale haben nicht die bekannte Form von Integranden, sondern diese sehen wie folgt aus:

$$\int_a^b \varphi\big(x, x(x)\big)dx$$

Hier ist $\varphi(x, y)$ eine beliebig gewählte rationale Funktion von x und y und $y(x)$ eine algebraische Funktion von x.

Nicht nur während der Studienzeit, sondern auch danach erlernte sie viele Techniken theoretischer Analysis und Funktionentheorie, die sie auch erweiterte und vertiefte. Sowohl die mathematische Physik, als auch die Theorie Abelscher Integrale waren anspruchsvolle Problemfelder; hier löste sie Problemstellungen auf kreative Art und Weise.

Viele Probleme hatten einen physikalischen Hintergrund, sie beschäftigte sich allerdings mit den drein mathematischen Problemen dahinter. Durch ihre Mechanikprofessur verdiente sie nur wenig Geld, zusätzlich interessierte sie diese nicht allzu sehr, da sie physikalischer Forschung allgemein nichts abgewinnen konnte.

Auch ist folgendes Detail in ihrer Biographie interessant: Sie veröffentlichte nicht konstant mit Beginn ihres Studiums Artikel und Schriften, sondern in zwei Perioden. Zuerst behandelte sie in ihrer Studienzeit mit Weierstraß Probleme der Analysis, in ihrer zweiten Schreibperiode ab 1881 bis zu ihrem Tod widmete sie sich vermehrt der Mechanik und mathematischen Physik, also anwendungsorientierten Gebieten. Ihre Freundin Elizaveta Fedorovna Litvinova (1845 – 1919) ist der Meinung, dass zwischen diesen beiden Schaffensperioden ein Zusammenhang besteht. Diese Verbindung beruht darauf, dass sie immer die erlernten theoretischen Techniken von Weierstraß verwendete.

2.5. Themenüberblick über ihre Vorlesungen (aus [6])

•) Theorie partieller Differentialgleichungen (Herbst 1884)

•) Theorie Algebraischer Funktionen nach Weierstraß (Frühjahr 1885)

•) Elementare Algebra (Frühjahr 1885)

•) Theorie Abelscher Funktionen nach Weierstraß (Herbst 1885 – Frühjahr 1887)

•) Theorie der Potentialfunktionen (Frühjahr 1886)

•) Theorie der Bewegung eines starren Körpers (Herbst 1886 und Frühjahr 1887)

•) Durch Differentialgleichungen definierte Kurven nach Poincaré (Herbst 1887 und Frühjahr 1888)

•) Theorie der Theta-Funktionen nach Weierstraß (Frühjahr 1888)

•) Anwendungen der Theorie elliptischer Funktionen (Herbst 1888)

•) Theorie elliptischer Funktionen nach Weierstraß (Herbst 1889)

•) Theorie partieller Differentialgleichungen (Frühjahr 1890)

•) Anwendungen analytischer Methoden auf die Theorie der ganzen Zahlen (Herbst 1890)

2.6. Dissertation „*Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen*" von Sofja Kowalewskaja (vergleiche [28])

Sofja Kowalewskaja hat im Laufe ihres Lebens viel geforscht und auch dementsprechend insgesamt zehn Artikel beziehungsweise Arbeiten publiziert. Ich konzentriere mich auf eines ihrer wissenschaftlichen Werke, nämlich auf die in der Kapitelüberschrift genannte Dissertation. Diese veröffentlichte sie nicht unter der russischen weiblichen Version ihres Namens Sofja Kowalewskaja, sondern unter der in Westeuropa gebräuchlicheren Variante *Sophie v. Kowalevsky*. Unter diesem Namen war sie in der Mathematikwelt bekannt.

Diese Dissertation wurde kurz nach der Einreichung zur Erlangung der Doktorwürde schon komplett in einer Fachzeitschrift mit dem Titel *„Journal für die reine und angewandte Mathematik"* abgedruckt. Gerade für eine junge Mathematikerin wie sie es damals war bedeute es etwas Besonderes – noch dazu als Frau – in einer Fachzeitschrift wissenschaftliches zu veröffentlichen und es galt dies als Auszeichnung für Mathematikerinnen und Mathematiker in einer der bedeutendsten Fachjournale zu publizieren.

Ihre Dissertation umfasst nur 32 Seiten, ist jedoch ein Werk, das in aller Kürze das Thema erschöpfend und lösungsorientiert abhandelt. Sie beschreibt in der Arbeit partielle Differentialgleichungen mit Anwendungen in der Physik. Zum Beispiel kann man Differentialgleichungen für die Temperatur aufstellen, bei der diese von folgenden vier Variablen abhängen: Höhe, Zeit, Länge und Ausdehnung. Sie konnte sagen, dass es bei einer gegebenen partiellen Differentialgleichung unter bestimmten Voraussetzungen nur eine einzige Lösung gibt.

In der Einleitung erwähnt sie, auf welche Sätze sie zurückgreift und welche Vorkenntnisse man genau für die weiteren Kapitel benötigt. Und weiters legt sie sich auch eine Notation fest, damit man im weiteren Verlauf der Arbeit leichter folgen kann. Diese Hinweise füllen die ersten Seiten. Sie begründet in diesem Abschnitt auch, warum sie sich nur auf Abelsche Integrale erster Art beschränkt. Nämlich, Weierstraß hatte zuvor bewiesen, *„dass zu jedem Abelschen Integral, welches sich auf ein elliptisches reduzieren läßt und dessen Variablen* x, y *die Gleichung* $F(x, y) = 0$ *erfüllen, ein Abelsches Integral erster Art existiert, welches ebenfalls* $F(x, y) = 0$ *erfüllt und sich auf ein elliptisches Integral reduzieren läßt.“* [6]. Das Entartungsproblem reduziert sich dabei *„auf die Frage, ob zu* $F(x, y) = 0$ *assoziierte, auf elliptische Integrale reduzierbare Abelsche Integrale erster Art exisieren.“* [6]

Weierstraß hatte diese Problemstellung vorab schon mit Linearkombinationen unabhängiger Abelscher Integrale erster Art untersucht. Er reduzierte diese Integrale auf ein elliptisches Integral. Daraus folgert er, dass es Integrale, die zu den Thetafunktionen assoziiert werden, geben muss, die sich auf ein Produkt zweier Thetafunktionen faktorisieren lassen. Sofja nahm sich weitaus schwierigerer Problemstellungen an, sie baute auf den Erkenntnissen von Weierstraß auf und ihr Ergebnis enthielt *„Abelsche Integrale dritten Ranges und Periodentransformationen zweiten Grades“* [6]. Ihre Erkenntnisse beschäftigten sich damit, dass sie diese Abelsche Integrale dritten Ranges *„in ein weitaus handlicheres notwendiges und hinreichendes Entartungskriterium algebraisch-geometrischer Natur“* [6] umwandelte. In ihrer weiteren Arbeit beschäftigte sie sich mit weiteren Spezialfällen.

Wie schon eingangs erwähnt, enthält die Dissertation auch das erst später unter dem Namen bekannt gewordene *„Cauchy – Kowalewskaja Theorem“*. Cauchy hatte schon im Jahr 1842 untersucht, ob Lösungen für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen existieren und er widmete sich besonders dem Anfangswertproblem, welche er in einer fünfteiligen Publikation veröffentlichte. Dies inspirierte Weierstraß, deswegen forschte er unabhängig von Cauchy an ähnlichen Problemen. Sofja überzeugte ihn mit einem Gegenbeispiel schon während seiner Forschungstätigkeit, dass es eine elegantere Art gibt, seine Beweisführung zu vereinfachen. Sie zeigte, dass das Cauchy-Problem immer lösbar ist, wenn man die genannten Voraussetzungen beachtet.

Allerdings wussten Weierstraß und Sofja nichts davon, dass Cauchy die gleichen Ergebnisse in anderer Form schon publiziert hatte. Deswegen erhielt dieses Theorem später den Namen *„Cauchy – Kowalewskaja Theorem"*. Jedoch sagt der französische Mathematiker Henri Poincaré (1854 – 1912), dass Sofja erst dieses Theorem auf seine heutige, endgültige Form gebracht hat. Auch Hermite meint, dass sie darüber das letzte Wort gesprochen hat und ihr Theorem der Ausgangspunkt aller zukünftigen Untersuchungen sei.

2.7. Übersicht über ihre wissenschaftlichen Arbeiten (aus [14])

In diesem Kapitel werden in den ersten drei Titeln die Dissertationen in ihren Original-Langtiteln und alle weiteren wissenschaftlichen Artikel, die Sofja publizierte, aufgelistet:

•) Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen (1874), Inaugural-Dissertation bei der philosophischen Fakultät zu Göttingen

•) Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchungen über die Gestalt der Saturnringe (1874)

•) Über die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'scher Integrale 3. Ranges auf elliptische Integrale (1874), abgedruckt in der „Acta Mathematica", Juli 1884, Volume 4

•) Über die Berechnung des Lichtes in crystallinischen Mitteln. (1883)

•) Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé. (1884)

•) Om ljusets fortplanting uti ett kristalliniskt medium. (1884)

•) Sur le problème de la rotation d'un corps solideautour d'un point fixe. (1889)

•) Sur une propriété du système d'équations differentielles qui definit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. (1890)

•) Memoire sur un cas prticulier du problème de la rotation d'un corps pesant autour d'ur point fixe, où l'intégrations'effectue à l'aide de fonctions ultraellitiques du temps. (1890)

•) Sur un théorème de M. Bruns. (1891)

2.8. Überblick über ihre literarischen Werke

Sofja schrieb während ihres Lebens einige literarische Werke – verhältnismäßig viele vor allem in ihren letzten sechs Lebensjahren. Die meisten sind leider unvollständig geblieben, ihre *„Kindheitserinnerungen"* sind jedoch fertig geworden. Zu Lebzeiten waren ihre literarischen Werke allgemein von wenig Interesse – sie waren charakteristisch inkonsistent und die Erzählstruktur war zu naiv. Sie sprach besonders politische Themen an, ganz besonders das Bildungssystem, den Feminismus, Kommunismus und auch die Rebellion gegen Traditionen. Sie wollte damit ein politisches Statement hinterlassen. Ein weiteres Werk, das sie vollendete, war eine Biographie über die Person George Eliot (Titel: *„Memories of George Eliot"*), dahinter steckte eigentlich die Autorin Mary Anne Evans (1819 – 1880). Damals durften Frauen in Großbritannien noch nicht schreiben, deswegen legte sie sich dieses Pseudonym zu. Weiters verfasste sie auch noch zwei Artikel über Armenspitäler in Paris.

Nach Sofjas Tod sind nicht nur Nachrufe über sie erschienen, sondern es wurden auch viele Artikel über ihr Leben, ihre Persönlichkeit und ihre Arbeit als Wissenschaftlerin und auch als Autorin literarischer Texte geschrieben.

Weitere literarische Werke von Sofja Kowalewskaja:

•) Privat-Docent (1877 vollendet; heute leider verschollen)

•) Die Nihilistin (Roman erschienen im Verlag „Wiener Mode", Wien, Leipzig, Berlin, Stuttgart, März 1896, dt. Übersetzung von Louise Flachs-Fokschaneanu)

•) etliche Theaterkritiken und naturwissenschaftliche für die Zeitung *„Nowoe Wremja"* (dt. *„Neue Zeit"*)

3. Differentialrechnung

<u>3.1. Geschichte</u> (vgl. [15])

Den Begriff „Differentialrechnung“ gibt es noch nicht so lange wie die Mathematik selbst; die Theorie dieser neuen Berechnungsmethode entstand durch die beiden Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) und Isaac Newton (1643 – 1727) in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts.

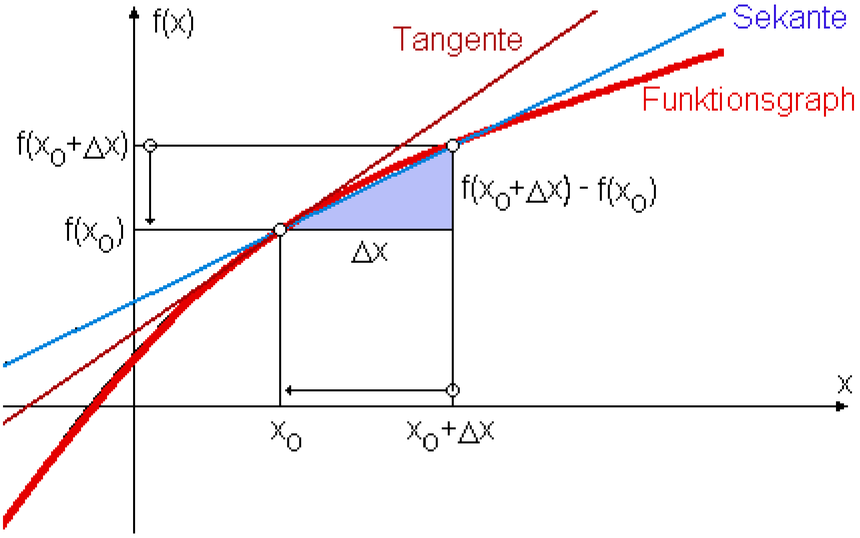
Wie bei so vielen anderen Kapiteln und Themen der Mathematik geht diesem Begriff eine lange Entstehungsgeschichte voraus. Ursprünge findet man im „Tangentenproblem“, das schon seit der Antike bekannt ist. Man versuchte *„die Tangente an eine Kurve durch ihre Sekante über einem endlichen […], aber beliebig kleinen Intervall zu approximieren“* [15]. Das Problem war allerdings, dass man noch nicht mit sehr kleinen (bzw. unendlich kleinen/infiniten) Intervallen rechnen konnte.

Wenn man nach den Anfängen der „Differentialrechnung“ sucht, stößt man auf den französischen Mathematiker Pierre de Fermat (1607 – 1665). Er entwickelte algebraische Methoden für die Berechnung der Extremstellen von algebraischen Termen. Die Begriffe „Grenzübergang“ und „Ableitung“ wurden in seinen Berechnungen noch nicht explizit erwähnt.

René Descartes (1596 – 1650) betrachtete einige Jahre später einen zu Fermat ähnlichen algebraischen Lösungsweg. Dabei legt er eine Kurve an einen Kreis und diese Kurve schneidet den Kreis in zwei sehr nahe nebeneinanderliegenden Punkten. Mit diesem Ansatz konnte er die Tangentensteigung spezieller Kurven berechnen.

Gegen Ende des 17. Jahrhunderts entwickelten Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton praktisch zeitgleich und unabhängig voneinander, aber mit unterschiedlichem Zugang und Rechenweg, die Infinitesimalrechnung. Beide haben jeweils eine eigene Technik entwickelt mit der sie Differentiale und Integrale berechnen konnten – Leibniz erklärte die Lösung geometrisch über das Tangentenproblem und Newton schlug den physikalischen Weg über den Geschwindigkeitsbegriff ein. Leibniz legte an eine Kurve unendlich viele Sekanten. Die daraus entstandene Kurve definierte er als ein Unendlicheck und nahm an, dass die Tangente an der Stelle, an welcher sie die Kurve berührt, in eine winzig kleine Strecke geteilt wird.

Damit entstand unterhalb dieses unendlich kleinen Tangentenabschnitts das sogenannte Steigungsdreieck (siehe Abbildung [16]). Es wird durch die Differenzen der Funktionenwerte und Argumente bestimmt.



Steigungsdreieck im Intervall $[x_0;\ x_0 + \Delta x]$

Abbildung [16]

Isaac Newton löste dasselbe Problem mit dem Geschwindigkeitsbegriff. Er betrachtete Kurven als eine Bewegung und nicht als eine Aneinanderreihung unendlich vieler Punkte bzw. unendlich vieler unendlich kleiner Strecken. Er sah dies als fließende Größe und interessierte sich für die Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitintervall, also maß er die momentane Geschwindigkeit dieser Größe. Da die Größe mit einer bestimmten Geschwindigkeit unterwegs war, konnte er die zurückgelegte Strecke der Größe bestimmen – analog dazu konnte er bei gegebener Länge die Geschwindigkeit berechnen.

Der Begriff „Differential“ ist damit noch nicht entstanden, aber Guillaume François Antoine Marquis de L’Hospital (1661 – 1704) – er war unter dem Namen de L’Hospital bekannter – konnte die bereits vorhandenen Erkenntnisse zusammentragen. Er war als französischer Adeliger vermögend und genoss von Kindesbeinen an Privatunterricht beim Schweizer Mathematiker Johann Bernoulli (1667 – 1748). Im Jahr 1696 veröffentlichte de L’Hospital das erste Lehrbuch über Differentialrechnung, das sämtliche Schriften und Forschungsergebnisse im Bereich der Analysis seines Lehrers Johann Bernoulli enthält.

Die heute bekannte Exaktheit der Differentialrechnung entwickelte sich erst Anfang des 19. Jahrhunderts, als Augustin-Louis Cauchy den Grenzwert (= Limes) und die Sekantensteigung definierte. Diese Definition von Cauchy wurde verfeinert – Karl Weierstraß veröffentlichte gegen Ende des 19. Jahrhundert die heute übliche und bekannte Definition des Limes oder Grenzwert.

3.2. Stetigkeit, Ableitungsregeln und Grenzwert

In diesem Kapitel werden der Begriff Stetigkeit, sämtliche Ableitungsregeln und der Begriff Grenzwert behandelt.

Der Begriff *stetig* ist ein in der Analysis wichtiger Begriff, der ob seiner kurzen Definition eine große Aussagekraft und weitreichende Folgen hat.

Eine einfache, anschauliche Definition besagt folgendes (siehe [36]):

„Eine Funktion f(x) heißt dann in einem Intervall [a;b] stetig, wenn man den dazugehörigen Graphen von einem Intervallpunkt bis zum anderen zeichnen kann, ohne den Stift dabei absetzen zu müssen.“

Eine andere Definition der Stetigkeit, die man im Studium hört, ist die folgenden $\varepsilon - \delta$ Definition [20]:

Sei f eine Funktion mit $f: D \rightarrow W$. f ist stetig, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \colon \forall x \in D \text{ mit } (|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Differenzierbarkeit ist folgendermaßen mit dem Begriff „Stetigkeit“ verbunden: *„Jede Funktion f, die in x_0 differenzierbar ist, ist in x_0 auch stetig“*. [17] Die Umkehrung – nämlich, dass jede stetige Funktion auch differenzierbar ist – gilt nicht.

Beweis dieses Satzes:

BEWEIS. Sei

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0).$$

Da $f'(x_0)$ existiert, gilt $\lim_{x \to x_0} r(x) = 0$ also insbesondere $\lim_{x \to x_0} r(x)(x - x_0) = 0$. Natürlich gilt $\lim_{x \to x_0} c(x - x_0) = 0$. Daher gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0)$.

[17]

Falls f' eine stetige Funktion von f ist *„heißt f stetig differenzierbar."* [17]

Die Steigung einer Tangente an der Stelle x_0 erhält man, indem man eine Funktion an dieser Stelle ableitet bzw. differenziert.

Leonhard Euler (1707 – 1783) untersuchte – nachdem die Erkenntnisse von Leibniz und Newton schon lange bekannt waren – Funktionen und entwickelte sämtliche heute bekannten Ableitungsregeln (vgl. dazu Kapitel *„3.2. Stetigkeit, Ableitungsregeln und Grenzwert"*).

Es gelten folgende Ableitungsregeln für differenzierbare Funktionen:

Satz 2.1. *Seien f, g differenzierbar in x_0, $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) $cf,\ f+g,\ fg$ *sind differenzierbar in* x_0, $\frac{f}{g}$ *falls* $g(x_0) \neq 0$.

(ii) $(cf)' = cf'$

(iii) $(f+g)' = f' + g'$

(iv) $(fg)' = f'g + fg'$

(v) $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

(vi) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

[17]

Die Regel (ii) ist die Konstantenregel, (iii) die Summenregel, (iv) die Produktregel und (vi) und (v) bezeichnet man als Quotientenregel.

Die Grenzwerte wurden, wie schon oben erwähnt, von Cauchy entwickelt und Weierstraß verfeinert. Den Grenzwert einer Folge $a_n = \frac{5n^2+17n+19}{n^2+3n+7}$ bestimmt man, indem man durch die höchste vorkommende Potenz durchdividiert – alle anderen Variablen gehen gegen 0.

z.B.:

$$\lim_{n\to 0} \frac{\frac{5n^2}{n^2} + \frac{17n}{n^2} + \frac{19}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} + \frac{7}{n^2}} = \frac{5}{1} = 5$$

Für mehrere Folgen bzw. Funktionen, für die man einen Grenzwert berechnen muss, gelten folgende Grenzwertsätze (vgl. [17]):

Existiert $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$, dann gilt:

(i) $\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = a \pm b$

(ii) $\lim_{x \to x_0} (cf)(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x) = ca \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$

(iii) $\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = ab$

(iv) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b} \quad falls\ der\ Nenner\ \neq\ 0\ ist.$

Beweise:

(ii) $$\lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x).$$

(iii)

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Beweis von (iv):

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x)\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} g(x_0) \longrightarrow$$
$$\underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)\, g'(x_0) + f'(x_0)\, g(x_0).$$

(Denn $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, Satz 1.5, verwende auch IV, Satz 5.15.)

Beweis von (v):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{-1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)$$
$$= \frac{-1}{g(x_0)^2}\, g'(x_0)$$

(Argumente analog wie oben.)

Beweis von (vi): $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{f \cdot g'}{g^2} = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$

[17]

3.3. Differenzierbare und nicht differenzierbare Funktionen

Dieses Kapitel gibt einen Überblick differenzierbarer und nicht differenzierbarer Funktionen und die dafür nötigen Voraussetzungen.

3.3.1. Differenzierbare Funktionen (vgl. [18])

Es gibt unendlich viele differenzierbare Funktionen. Aus den Ableitungsregeln folgt, dass folgende Funktionen differenzierbar sind:

(i) Polynomfunktionen,

(ii) *„Summen, Produkte und Quotienten von differenzierbaren Funktionen“* [18], wo sie definiert sind,

(iii) mehrere differenzierbare Funktionen in verketteter Form.

(iv) *„Die Umkehrfunktion f^{-1} einer bijektiven differenzierbaren Funktion f […] ist genau dann an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar ist, wenn $f'(x_0) \neq 0$ ist“*. [18]

Eine Funktion ist dann differenzierbar und hat einen Grenzwert, wenn folgende Definition zutrifft:

„f heißt an der Stelle x differenzierbar, wenn es eine reelle Zahl c mit folgender Eigenschaft gibt:

Für jede Folge $(x_1, x_2, \ldots)$ reeller Zahlen $x_n \in J$, wobei $J \in \mathbb{R}$ (Anm. d. Verf.), die gegen x konvergiert, gilt:

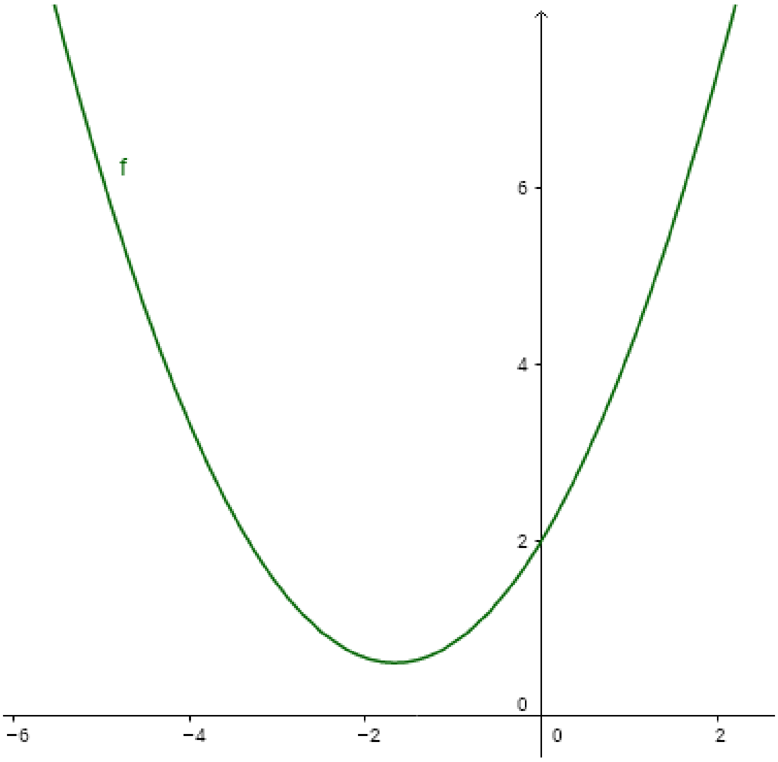
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = c$$

Wir nennen c die Ableitung von f an der Stelle x und bezeichnen sie mit $f'(x)$“ [19]

Dazu gibt es eine äquivalente Formel, wobei für $h = x - x_0$ gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

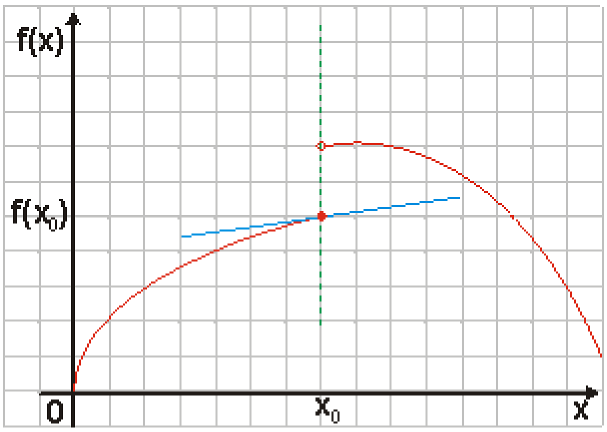
Um den Grenzwert einer Funktion an der Stelle x_0 berechnen zu können, muss die Funktion in einer Umgebung von x zumindest stetig sein und darf an keiner Stelle in diesem Intervall einen Knick haben (siehe Abschnitt 3.2.2).



Beispiel einer stetigen Funktion: $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{5x}{3} + 2$

[22]

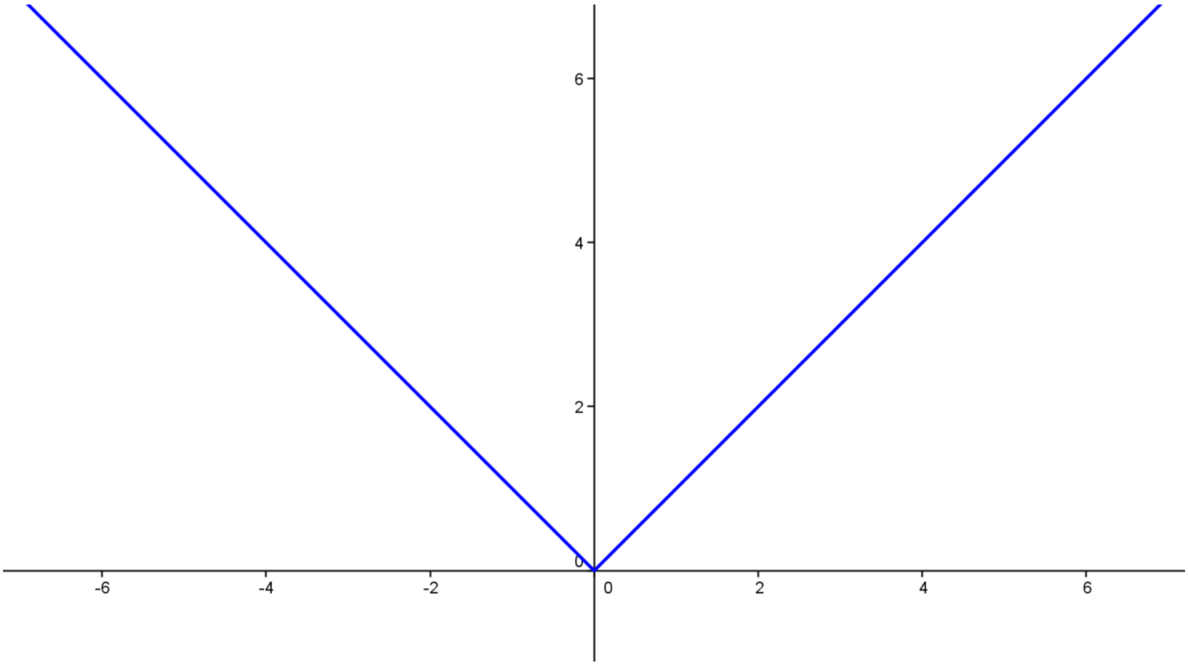
3.3.2. Nicht differenzierbare Funktionen



[21]

Diese Funktion ist an der Stelle x_0 nicht stetig. Ein links- und rechtsseitiger Grenzwert ist an dieser Stelle berechenbar, aber die Funktion ist an x_0 nicht differenzierbar. Ansonsten ist die Funktion differenzierbar.

Eine bekannte Funktion, die überall, aber nicht in 0 differenzierbar ist, ist die Betragsfunktion: $f(x) = |x|$



Die Betragsfunktion [22]

Für diese Funktion existiert an der Stelle 0 kein Differentialquotient. Sie ist in 0 nicht differenzierbar. Ebenso kann man an dieser Stelle unendlich viele Geraden anlegen, die alle Tangenten von $f(x)$ sind.

Die erste Ableitung dieser Funktion ist die Signumfunktion – auch Treppenfunktion genannt – (siehe nächste Grafik), diese ist bei 0 nicht stetig.

Wenn man den Differentialquotienten der Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle 0 berechnen möchte, muss man 2 Fälle betrachten, einerseits den Fall $x > 0$ und andererseits $x < 0$.

Für $x > 0$ berechnet man den rechtsseitigen Differenzenquotienten wie folgt (in diesem Fall gilt: $f(x) = x$):

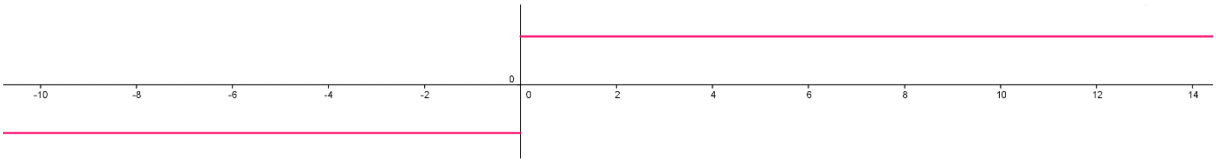
$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

Analog der linksseitige Differenzenquotient für $x < 0$ (in diesem Fall gilt: $f(x) = -x$):

$$\lim_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\nearrow 0}\frac{-x-0}{x-0} = -1$$

Da der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert nicht übereinstimmen, gibt es für diese Funktion keinen Grenzwert. Die Signum Funktion ist wie folgt definiert:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & wenn\ x > 0 \\ 0 & wenn\ x = 0 \\ -1 & wenn\ x < 0 \end{cases}$$

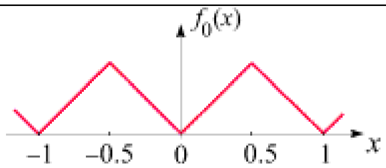


Das ist die erste Ableitung von $f(x) = |x|$

[22]

Die zweite Ableitung der Funktion $f(x) = |x|$ ist 0.

Nicht differenzierbar sind auch die verschiedenen Varianten der Sägezahnfunktion, die zu den Betragsfunktionen zählen.

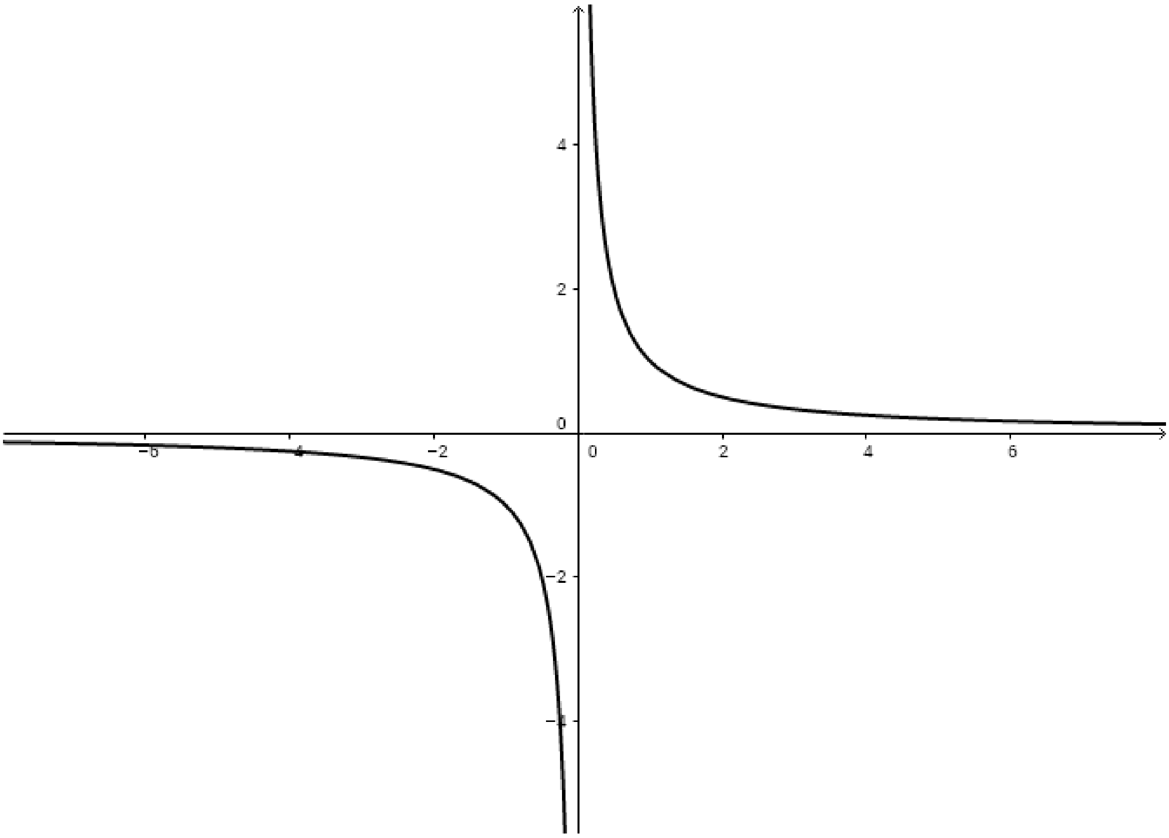


[36]

Eine weitere Funktion, die in 0 nicht definiert ist, ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$

Wir betrachten folgende Funktion:

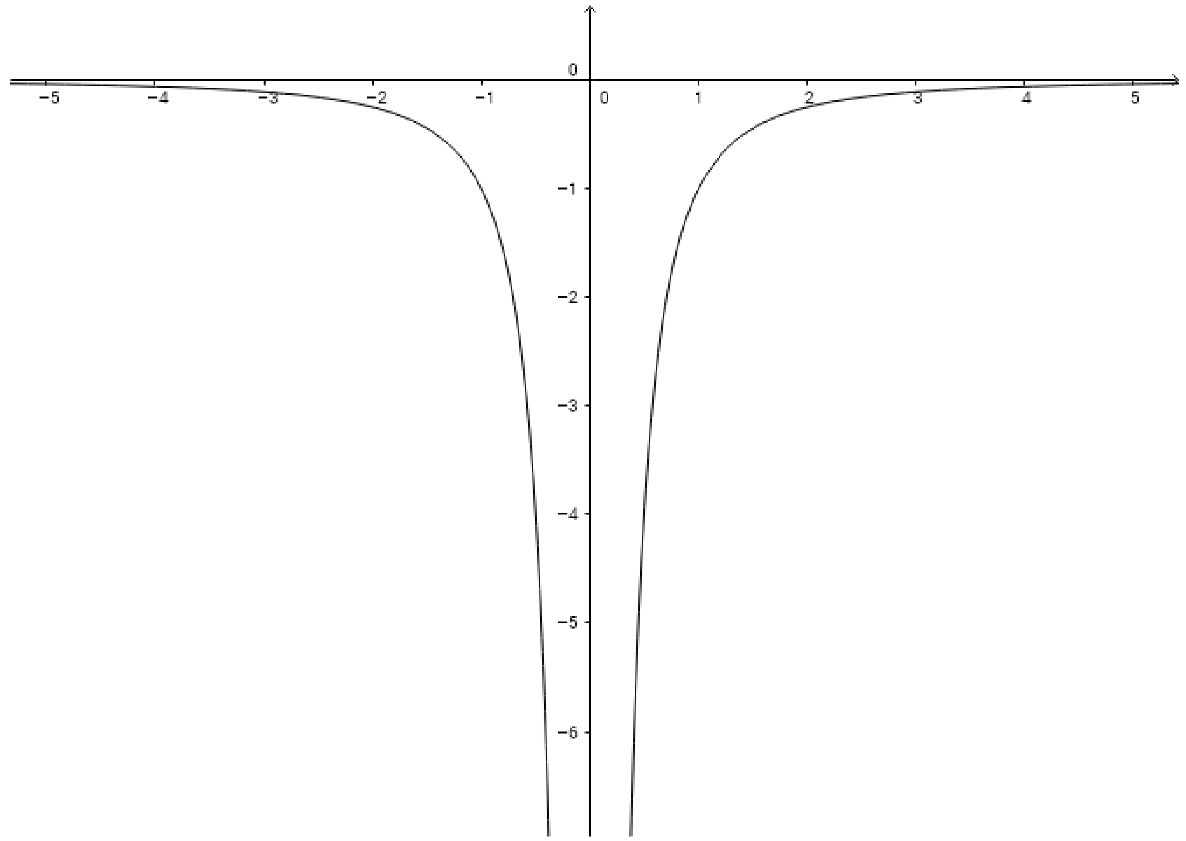
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & f\text{ür } 0 < x \leq 0 \\ 0 & f\text{ür } x = 0 \end{cases}$$



[22]

Für die Ableitung gilt: Die Funktion ist nicht stetig differenzierbar.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 \ \ wenn\ x = 0 \\ -\dfrac{1}{x^2}\ sonst \end{cases}$$



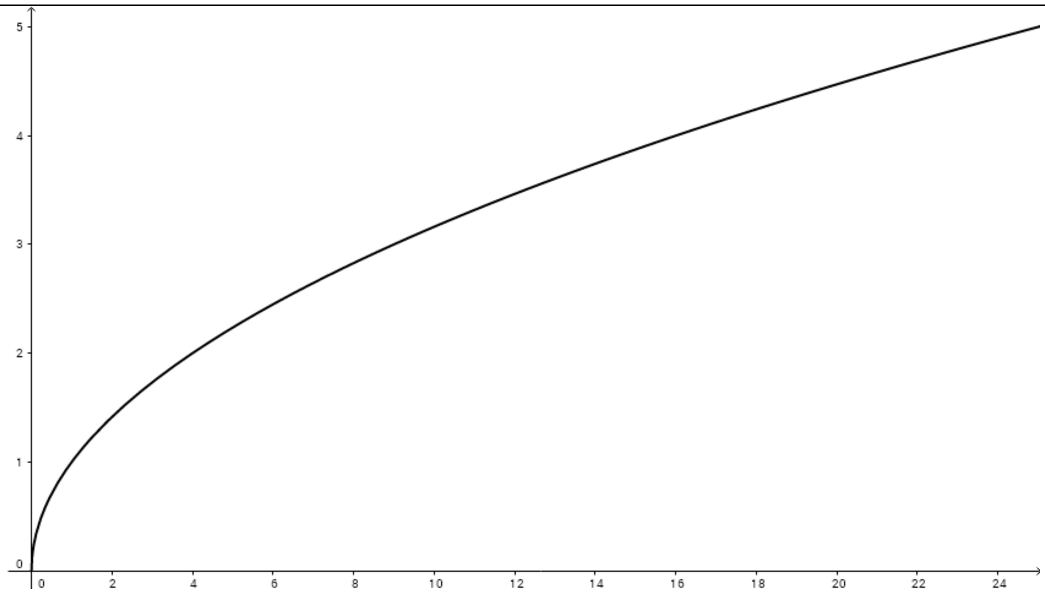
[22]

Eine weitere Funktion, die an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar ist, ist die Wurzelfunktion

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

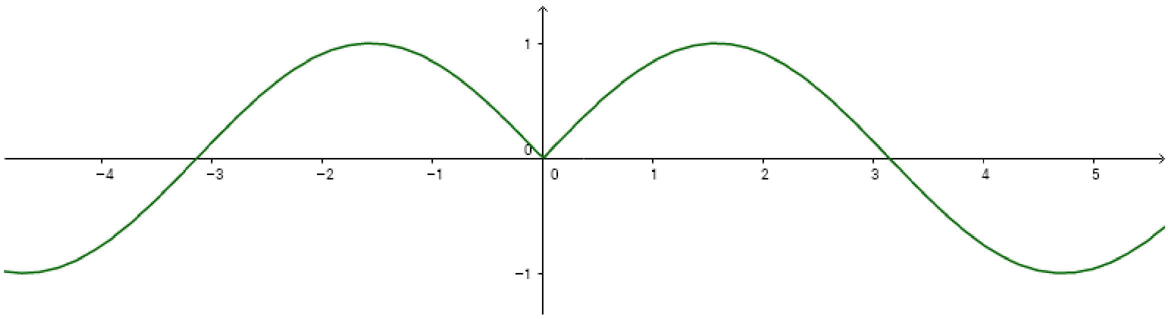
Der Differenzenquotient konvergiert für $x \to 0$ gegen unendlich.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad f\text{ür } f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$$



[22] – Die Wurzelfunktion

Die folgende Funktion $f(x) = sin\,|x|$ ist ebenfalls in 0 nicht differenzierbar:



[22]

Beweis: (vgl. [23])

Man kann dies über den links- und rechtsseitigen Differenzenquotienten beweisen:

Für den linksseitigen Differenzenquotienten ergibt sich Folgendes:

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin(-x)-0}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin(-x)}{x}=\frac{-\cos(x)}{1}=-1$$

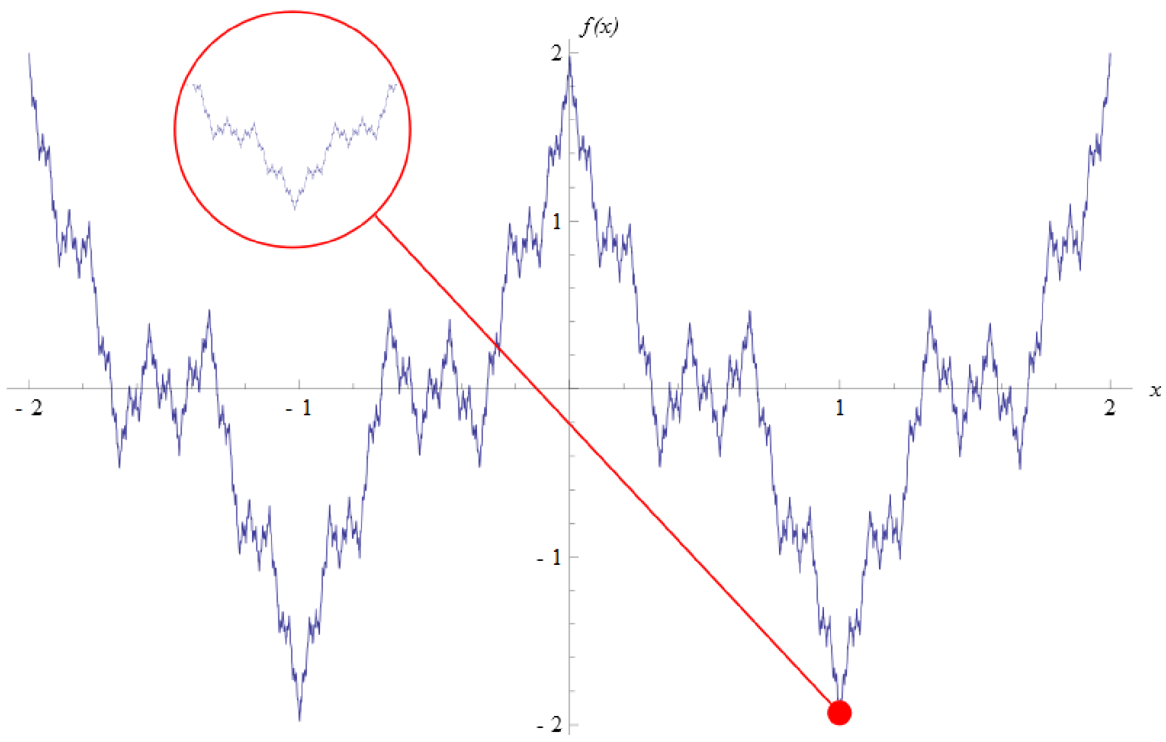
Allerdings ergibt der rechtsseitige Differenzenquotient etwas Anderes:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(x)-0}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0+}(\cos(x))=1$$

Durch diese Ungleichheit des links- und rechtsseitigen Differenzenquotienten ergibt sich, dass diese Funktion in 0 nicht differenzierbar ist.

Eine Funktion, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist, ist die nach ihrem Entdecker benannte *Weierstraß-Funktion*:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k\sin(2^k x)}{3k}$$



Der Graph der Weierstraß-Funktion

[24]

3.4. Differentialrechnung in der Schule (vgl. [35])

Die Differentialrechnung findet in der Schule Anwendung bei den Kurvendiskussionen, welche in der siebten Klasse AHS unterrichtet werden. Damit kann man Eigenschaften einer Funktion berechnen, wie z.B. Nullstellen, Extremwerte in Form von Hoch- und Tiefpunkt, Wendepunkte, Wendetangenten und Krümmungsverhalten.

Aus einer gegebenen Funktion kann man, indem man die Funktion Null setzt, die Nullstellen bestimmen. Die Ergebnisse sind die *x*-Koordinaten dieser Punkte – die *y*-Koordinaten sind von vornherein Null, da die Nullstellen Schnittpunkte der Funktion mit der *x*-Achse sind.

Für die Extremwerte leitet man die ursprüngliche Funktion einmal ab, diese wird ebenfalls Null gesetzt, um die *x*-Koordinaten dieser Punkte errechnen zu können. Die *y*-Koordinaten errechnet man, indem man die jeweiligen *x*- Koordinaten in die ursprüngliche Funktion einsetzt. Die zweite Ableitung ermöglicht die Entscheidung, ob ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt. Die eben errechneten *x*-Koordinaten der Extrempunkte setzt man in die zweite Ableitung der Funktion ein und vergleicht folgende zwei Fälle: Ist das Ergebnis größer Null, dann liegt ein Tiefpunkt vor; ist es kleiner Null, ist dieser Extrempunkt ein Hochpunkt. Mit der eben errechneten zweiten Ableitung bestimmt man die Wendepunkte. Dazu setzt man die zweite Ableitung Null und die Ergebnisse sind die *x*-Werte der Wendepunkte – diese setzt man in die gegebene Funktion ein, um die dazugehörigen *y*-Koordinaten zu erhalten.

Man setzt deswegen die errechneten *x*- Koordinaten immer in die gegebene Funktion ein, da jeder Punkt, den man sich auf diese Art errechnet, auf der Funktion liegen muss.

Der Monotoniebereich ist über die erste Ableitung bestimmbar. Es gilt: Sind in einem Intervall die Funktionswerte $f'(x) > 0$, dann ist die Funktion f in diesem Bereich monoton steigend. Andernfalls ist f monoton fallend.

Beliebte Aufgaben sind Umkehraufgaben: gegeben seien eine Ableitung und weitere Eigenschaften einer Funktion – gesucht ist die ursprüngliche Funktion.

Ein weiteres Anwendungsgebiet der Differentialrechnung in der Schulmathematik sind die Extremwertaufgaben. Das Ziel dieser Aufgaben ist es, ein Optimum aus gegebenen Funktion zu berechnen. Bekannte Beispiele sind Kostenminimierung bei gleichzeitiger Gewinnmaximierung oder Flächenmaximierung eines Grundstückes bei gegebener Gesamtlänge eines Zaunes.

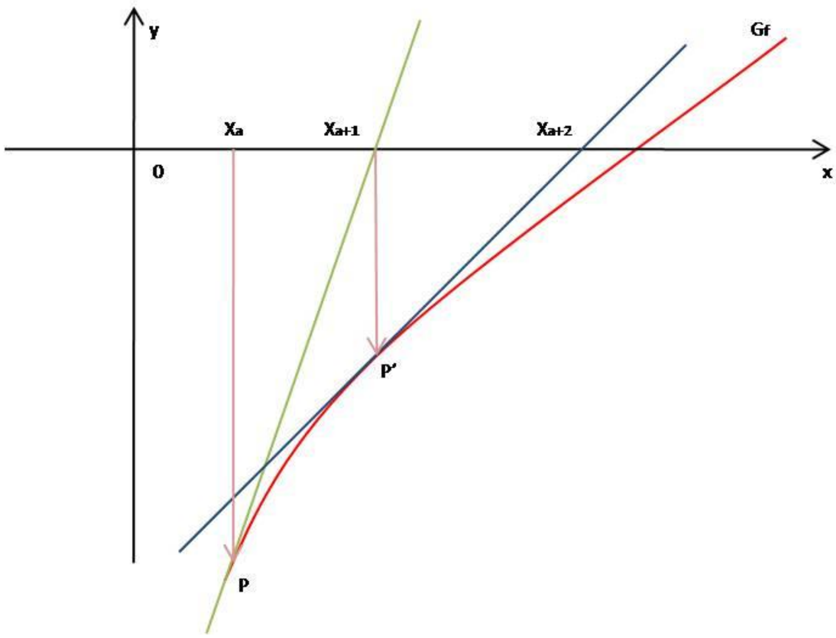
Isaac Newton hat schon im Jahr 1666 herausgefunden, dass man Bewegungsabläufe mit Differentialrechnung beschreiben kann – seine Erkenntnisse sind mit physikalischen Bewegungsabläufen verknüpft (näheres dazu am Beginn dieses Kapitels).

Er entwickelte das nach ihm benannte Newton-Verfahren – das ist ein heute durchaus gängiges und übliches Verfahren, nichtlineare Gleichungen und Gleichungssysteme durch Näherungen zu lösen. Für den Fall, dass die Gleichung nur eine Variable hat, kann man näherungsweise die Nullstellen einer stetig differenzierbaren Funktion vom Typ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ berechnen. Dies geschieht mittels Iterationverfahren solange, bis man eine bestimmte Genauigkeit erzielt hat. Dieses Verfahren läuft folgendermaßen ab: Es wird an einem Punkt, der auf der Funktion liegt, eine Tangente angelegt, die die x-Achse schneidet. An diesem Schnittpunkt sucht man die Funktion und legt an dieser Stelle abermals eine Tangente an. Das geschieht solange, bis sich keine Tangenten mehr anlegen lassen – dann hat man die Nullstelle näherungsweise graphisch bestimmt. Das Verfahren kann natürlich auch im höherdimensionalen angewendet werden.

Für dieses Iterationsverfahren bedient man sich folgender Formel:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

wobei $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ die Änderung von einem Folgenglied auf das nächste ist.



[38]

4. Differentialgleichungen

4.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist eine Gleichung, bei der die „Unbekannte“ eine Funktion $y(x)$ einer Variablen x ist und auch Ableitungen dieser Funktion vorkommen. Gewöhnliche Differentialgleichungen werden in der Biologie, Chemie, Physik und vielen anderen Anwendungen zur Beschreibung von Vorgängen oder zeitlich veränderlichen Zuständen verwendet. Dabei wird das Änderungsverhalten verschiedener Größen in einer bestimmten Zeitspanne beziehungsweise zwischen zwei Zeitpunkten betrachtet.
Bereits Galileo Galilei erkannte im Jahr 1590 bei seinen Fallversuchen am schiefen Turm von Pisa, dass die Zeitspanne, in der ein Körper zu Boden fällt, mit dem Gewicht desselben Körpers zusammenhängt. Je schwerer der Körper ist, desto höher ist die Fallgeschwindigkeit und umso stärker schlägt dieser auf dem Boden auf. Aus diesen Erkenntnissen war es ihm möglich, die ersten Differentialgleichungen über gleichmäßig beschleunigte Bewegungen aufzustellen.

Isaac Newton betrachtete Bewegungen mit Reibung. Dazu stellte er fest, dass die Reibung entweder zum Betrag oder sogar zum Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Aus diesem Grund musste er sich Gedanken über den Formalismus machen und änderte die damals gebräuchliche Notation in die heute bekannte.

Der Franzose Augustin Louis Cauchy vereinheitlichte im 19. Jahrhundert – nachdem das Integral, der Grenzwertbegriff und die Ableitung schon exakt definiert waren – die gewöhnlichen Differentialgleichungen und machte sie damit allen anderen Wissenschaften zugänglich.

Gottfried Wilhelm Leibniz legte wenig später folgende Schreibweise fest:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Ein Beispiel einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\big(x, y(x)\big),$$

wobei f eine gegebene Funktion ist.

Das System (siehe [37]):

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{dy^n}{dx^n}\right) = 0$$

wobei f eine stetige Funktion von $\Omega \to \mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^{n+1}$ ist. An der höchsten vorkommenden Ableitung – hier n – erkennt man, dass wir ein implizites Differentialgleichungssystem n-ter Ordnung mit m verschiedenen Gleichungen vorliegen haben.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

wird als eine Differentialgleichung zweiter Ordnung bezeichnet.

Im Folgenden werden kurz auf die Lotka-Volterra-Gleichungen vorgestellt, welche zwei nicht lineare gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung sind. Dieses Modell wurde unabhängig voneinander von Alfred J. Lotka (1880 – 1949), einem österreichischen Auswanderer, der in den USA Chemiker, Versicherungsmathematiker und Demograf war, im Jahr 1925, und von Vito Volterra (1860 – 1940), einem italienischen Mathematiker und Physiker, im Jahr 1926 aufgestellt. Diese Gleichungen wurden mit dem Ziel erstellt, ein Räuber-Beute Modell zu veranschaulichen.

$$x' = \frac{dx}{dt} = x(e_1 - \gamma_1 y)$$

und

$$y' = \frac{dy}{dt} = -y(e_2 - \gamma_2 x)$$

wobei gilt:

$x(t)$	Anzahl der Beutetiere zu einem bestimmten Zeitpunkt t
$y(t)$	Anzahl der Räuber zu einem bestimmten Zeitpunkt t
$e_1 > 0$	Regeneration der Beutetiere ohne äußere Einflüsse
$e_2 > 0$	Sterberate der Jäger (unter der Bedingung, dass alle möglichen Beutetiere ausgestorben sind)
γ_1	Sterberate der Beutelebewesen, die vom Räuber abhängig ist
γ_2	Rate, die angibt, wie stark sich die Räuber pro Beutelebewesen regenerieren

Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen sind nur mit gegebenen Anfangswerten oder Randwerten eindeutig.

Zuerst betrachten wir das Anfangswertproblem erster Ordnung, danach den allgemeinen Fall *k-ter* Ordnung (siehe [25]):
In der ersten Ordnung besteht dieses Problem aus einer Gleichung $y'(t) = f(t, y(t))$ mit seiner Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$, wobei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ der Anfangswert und $t_0 \in \mathbb{R}$ ein Zeitpunkt ist.
Liegt ein System von Differentialgleichungen vom Grad k vor, werden k Anfangsbedingungen benötigt.

Ein Anfangswertproblem *k-ter* Ordnung lässt sich auf ein Anfangswertproblem 1. Ordnung umschreiben.

Anfangswertprobleme sind numerisch mit Einschrittverfahren und Mehrschrittverfahren lösbar.

Hängt die gesuchte Funktion $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ von mehreren Variablen ab, erhält man partielle Differentialgleichungen.

Der Satz von Peano (Giuseppe Peano; 1858 – 1932) und den Satz von Picard-Lindelöf (zeitgleich von Émile Picard [1856 – 1941] und Ernst Leonard Lindelöf [1870 – 1946] aufgestellt) gibt Bedingungen an, unter denen eine Differentialgleichung erster Ordnung mit einer Anfangsbedingung eine Lösung existiert und die eindeutig ist.

Der Satz von Peano und der Satz von Picard-Lindelöf sind zwei grundlegende Sätze der gewöhnlichen Differentialrechnung. Das Ziel des Existenzsatzes von Peano ist es zumindest eine Lösung des Anfangswertproblems nachzuweisen. Im Gegensatz dazu zeigt man im Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswertproblem unter Berücksichtigung bestimmter Voraussetzungen genau eine Lösung besitzt.

Differentialgleichungen höherer Ordnung kann man auf Gleichungen erster Ordnung reduzieren. Man geht folgendermaßen vor: (sinngemäß übernommen: [31])

Setze

$$\begin{gathered} y_1 \coloneqq y \\ y_2 \coloneqq y_1' \\ y_3 \coloneqq y_2' \\ \ldots \\ y_n \coloneqq y_{n-1}' \end{gathered}$$

Betrachtet man die explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung, dann ergibt sich für y folgender Ausdruck:

$$y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$$

Sei (siehe [32]):

$$(1 + y^2)y''' = y' + x$$

Dies können wir in Differentialgleichungen erster Ordnung umschreiben. Daraus ergibt sich folgende, zu obiger Differentialgleichung äquivalenter Umformung:

$$\left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \dfrac{y' + x}{1 + y^2} \end{pmatrix} \right\}$$

Im nächsten Umformungsschritt kann ich $y, y' und\ y''$ als drei voneinander verschiedene Funktionen auffassen:

$$\left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \dfrac{y_2 + x}{1 + y_1^2} \end{pmatrix} \right\}$$

Ein einfaches Beispiel einer Differentialgleichung stammt aus der Physik und beschreibt den radioaktiven Zerfall:

Es gilt, *„dass bei einer Menge instabiler Atome die Anzahl der zerfallenden Atome von der gesamten Anzahl N der vorhandenen Atome proportional abhängt."* [31]

$$\dot{N} \sim N$$

Jakob Bernoulli (1654 – 1705) entwickelte die nach ihm benannte *Bernoullische Differentialgleichung* (siehe [37]). Diese Differentialgleichung der Form

$$y' + f(x)y + \varphi(x)y^n = 0 \qquad (n \neq 1)$$

ist auf eine lineare Gleichung zurückführbar.

Dazu ist eine Umformung nötig, um im Anschluss eine Substitution durchführen zu können:

$$y^{-n}y' + f(x)y^{1-n} + \varphi(x) = 0$$

Vor dem finalen Schritt ist eine Substitution mit $v = y^{1-n}$ notwendig. Daraus folgt die lineare Gleichung

$$\frac{1}{1-n}v' + v * f(x) + \varphi(x) = 0.$$

1788 hat Joseph Louis Lagrange in der Physik die Lagrange Formulierung eingeführt. Es handelt sich hierbei um eine Formulierung in der klassischen Mechanik, die ebenfalls in beschleunigten Bezugssystemen (= Systeme, bei denen sich Körper ungeradlinig bewegen) gültig ist. Es gibt zwei verschiedene Arten von Lagrange-Gleichungen, nämlich die Lagrange-Gleichungen *erster* und *zweiter* Art, wobei die zweite Art ist gebräuchlicher ist.

Allgemein hat die Lagrange Differentialgleichung die Form [37]

$$x + yf(y') + \varphi(y') = 0$$

<u>4.2. Partielle Differentialgleichungen</u>

Auch die partiellen Differentialgleichungen werden nach einigen Kriterien eingeteilt, wobei es erhebliche Unterschiede in der Lösbarkeit gibt. Die partiellen Differentialgleichungen treten – genauso wie die gewöhnlichen Differentialgleichungen – in vielen Anwendungen auf. Im Allgemeinen sind partielle Differentialgleichungen niedriger Ordnung leichter zu lösen, als die höherer Ordnung.

Es gibt folgende Arten von partiellen Differentialgleichungen:

„lineare partielle Differentialgleichung", *„semilineare Differentialgleichung"*, *„quasilineare partielle Differentialgleichung"* und *„nichtlineare partielle Differentialgleichung"*.

Eine lineare partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung, bei der die gesuchte Funktion, sowie alle vorkommenden Ableitungen, linear sind.

Eine sehr wichtige Differentialgleichung ist die Wärmeleitungsgleichung, die die Ausbreitung von Wärme in einem homogenen oder inhomogenen Medium beschreibt.

Die homogene Gleichung erster Ordnung – wenn man keine Einflüsse miteinbezieht – lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{x},t) - a\Delta u(\vec{x},t) = 0$$

Wenn aber beispielsweise eine zusätzliche Wärmequelle vorhanden ist, gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{x},t) - a\Delta u(\vec{x},t) = f(\vec{x},t)$$

Eine allgemeine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung mit zwei Variablen sieht wie folgt aus:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + f(x,y)u(x,y) = 0$$

Eine *„[…] partielle Differentialgleichung der Ordnung k für eine Funktion $u(x)$ in D“* [26] sieht folgendermaßen aus:

$$F\left(x, u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_{n+1}}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n^k}\right) = 0$$

Auch das Black-Scholes-Modell aus der Finanzwirtschaft wird durch eine partielle Differentialgleichung (genauer: die Black-Scholes Differentialgleichung – siehe [27]) beschrieben. Dabei erfüllt die Funktion $F(S,t)$ (wobei S der aktuelle Aktienkurs ist und t die Zeit) des Derivats die Differentialgleichung des Black-Scholes-Modells

$$\frac{\partial}{\partial t}F(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2}F(S,t) - rF(S,t) + bS\frac{\partial}{\partial S}F(S,t) = 0 \quad wobei\ t \leq T.$$

5. Bezug zum AHS Lehrplan

Im aktuellen Lehrplan ist die Differentialrechnung in der siebten Klasse AHS angesiedelt. Kurz vor der Matura wird die Differentialrechnung wiederholt, es wird nichts Neues mehr durchgenommen.

Durch die neue Zentralmatura in Mathematik, die seit dem Schuljahr 2014/15 flächendeckend in Österreich durchgeführt wird, kann man sich nicht mehr nur auf das Kennenlernen verschiedener Funktionen unterschiedlicher Schwierigkeitsgrade konzentrieren und mit der Berechnung ebendieser beschäftigen. Berechnungen, wie sie noch vor sechs Jahren üblich waren, werden heute vielfach aus Zeitmangel vom Regelunterricht in Wahlpflichfächer ausgelagert.

Die Zentralmatura gibt es seit dem Schuljahr 2014/15 flächendeckend in ganz Österreich – die AHS machte den Anfang, sämtliche BHS Schulen – da die Oberstufe fünf Jahre dauert – maturieren erst im Schuljahr 2015/16 das erste Mal flächendeckend zentral. Für beide Schultypen gibt es jeweils dieselben zentral vorgegebenen Maturaangaben – das Schema ist aber bei allen Schultypen gleich, nämlich es gibt einen Teil 1 (= Grundkompetenzteil) und einen Teil 2 (= Rechenaufgaben).

Bei Teil 1 muss jede Schülerin und jeder Schüler Grundwissen und Grundfertigkeiten nachweisen können – konkret müssen z.B. sämtliche Fachbegriffe zu ihren Definitionen zugeordnet werden können, Ableitungen zu einer gegebenen Funktion können ebenfalls gefragt werden, und so weiter. Eigenständiges rechnen ist hier nicht gefragt. Inhaltlich gefragt wird jedenfalls der Oberstufenstoff. Diese Aufgaben sind einfach, es ist aber sehr genaues Lesen und Arbeiten gefragt, da dies größtenteils Multiple-Choice-Fragen sind. Dieser Teil enthielt beim Haupttermin des Schuljahres 2015/16 24 Beispiele.

Teil 2 entspricht im eigentlichen Sinne dem Vorgängermodell der Zentralmatura: Die Angabe ist ebenfalls zentral vorgegeben, jedoch ist man hier nicht an einen fixen Lösungsweg gebunden. In diesem Teil bekommt der Schüler bzw. die Schülerin Rechenaufgaben im offenen Fragenformat gestellt – diese sind nicht mehr so umfangreich, wie vor der Umstellung im Schuljahr 2014/15.

Wie ich schon in der Einleitung erwähnt habe, habe ich in der achten Klasse ein Wahlpflichtfach über gewöhnliche Differentialgleichungen besucht. Als Teilnahmevoraussetzung war damals vorgeschrieben, Schülerin bzw. Schüler einer achten Klasse zu sein. Dieses Wahlpflichtfach verstand sich als Erweiterung des bisher in der siebten Klasse erlernten Stoffs über Differentialrechnung. Dabei hielt sich mein damaliger Professor fachlich an ein Skriptum der Universität Wien, das für die Vorlesung *„Mathematik und Statistik für Molekularbiologen“* verfasst wurde. Die drei Hausübungen, die zu erledigen waren, waren ebenfalls auf diesem Niveau. Im Folgenden habe ich sämtliche Angabeblätter eingefügt, die damals im Rahmen der Hausübungen zu lösen waren:

Differentialgleichungen - Übungsblatt 1

Löse die folgenden separierbaren Differentialgleichungen zur jeweils gegebenen Randbedingung:

a) $y' = -\dfrac{2x}{y},\ y(0) = 2$

b) $y' = (x-3)y,\ y(0) = 3$

c) $y' = e^{-y},\ y(1) = 0$

d) $y' = \dfrac{1}{y},\ y(1) = \pi$

e) $y' = -\dfrac{x^2}{y^2},\ y(0) = 3$

Löse folgende inhomogenen linearen Differentialgleichungen sowohl allgemein als auch zu den angegebenen Randbedingungen:

a) $y' + y = x,\ y(0) = 2$

b) $y' + 3xy = 5x,\ y(0) = 2$

c) $y' + y\sin x = \sin x,\ y(0) = 0$

[29]

Differentialgleichungen - Übungsblatt 2

Löse die folgenden Differentialgleichungen allgemein und, falls angegeben, zu den entsprechenden Randbedingungen.

a) $y'' + 5y' + 6y = 0$

b) $y'' - 2y' + 2y = 0$

c) $y'' - 6y' + 9y = 0$

d) $y'' + 2y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1$

e) $y'' - 2y' + 5y = -x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2$

Verwende bei e) zum Auffinden der Partikulärlösung den Ansatz $y_P = ax + b$ und bestimme die Parameter a und b durch Einsetzen von y_P in die gegebene Differentialgleichung.

[29]

Übungsblatt 3 (exakte Differentialgleichungen)

1. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{x}{1+y^2} + \frac{y(1-x^2)}{(1+y^2)^2} y' = 0$$

Zeige, dass die Differentialgleichung exakt ist und bestimme die allgemeine Lösung.

2. Wie 1. für

$$(x^2 + y^2 - 1)x + (x^2 + y^2 + 1)yy' = 0$$

3. Wie 1. für

$$-\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} y' = 0$$

4. Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$1 + xy = (x^2 + x^3y)y',\ x > 0$$

Ermittle dazu einen integrierenden Faktor mit einem möglichst einfachen Ansatz $\mu=\mu(x)$ oder $\mu=\mu(y)$.

[29]

Meiner Meinung nach kann man auch über die von mir beschriebene Dissertation von Sofja Kowalewskaja ein Wahlpflichtfach halten. Aber aufgrund des Schwierigkeitsgrades ist es notwendig, dies über mindestens zwei Semester anzulegen. Aber bevor man dazu kommt die Dissertation selbst zu betrachten, ist es notwendig noch einiges an Stoff als Wiederholung und Vorbereitung durchzunehmen. Da die Differentialrechnung erst in der siebten Klasse behandelt wird, ist es sinnvoll nur Achtklässlerinnen und Achtklässler an diesem Wahlpflichtfach teilnehmen zu lassen. Auch wenn einiges wiederholt und neu dazugelernt wird, wird man ohne Vorkenntnisse fachlich nicht weit kommen. Nach der umfassenden Wiederholung des Stoffs empfiehlt sich ein Einstieg in gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Erst danach würde ich empfehlen die Dissertation schülergerecht aufbereitet durchzunehmen.

Im Regelunterricht kann man die auf den Seiten 35, 43 und 44 gezeigten Beweise von Herrn Professor Mag. Dr. Harald Rindler keinesfalls in dieser Form bringen. Das einzige, was ich an das aktuell verwendete Schulbuch anpassen würde, wäre die Notation – Herr Professor Rindler schrieb dieses Skriptum vor zirka 30 Jahren noch mit der Schreibmaschine.

Was sich ebenfalls noch empfehlen würde, wäre ein fächerübergreifendes Wahlpflichtfach über ein Semester in den Fächern Mathematik und Geschichte. In Mathematik könnte man konkret die Forschungen und wissenschaftlichen Leistungen von bedeutenden Mathematikerinnen des 19. und 20. Jahrhunderts z.B. von Sofja Kowalewskaja, durcharbeiten, während in Geschichte der Weg der Frauen – ebenfalls am Beispiel von Sofja Kowalewskaja – an die Universität beleuchtet werden könnte. Hier können auch schon Schülerinnen und Schüler aller Oberstufenklasse teilnehmen.

6. Schlussgedanken

Sofja Kowalewskaja nahm im 19. Jahrhundert eine Vorreiterrolle ein. Es war damals durchaus üblich, dass Frauen in dieser Zeit nur das Notwendigste lernen durften und von den Familien in Sachen Bildung kaum unterstützt wurden. Der Erwerb von höherer Bildung, wie an höheren Schulen und Universitäten gelehrt wurden, war Frauen damals gänzlich verboten. Aber Sofja Kowalewskaja wollte unbedingt aus diesem Schema ausbrechen und unternahm dafür alles Mögliche, um sich ihren Traum zu erfüllen. Deswegen stellte sie schon in ihrer Kindheit ihren beiden Onkeln viele Fragen und ließ sich auch viel erzählen. Ihre Eltern wussten nicht, dass sie sich zusätzlich zu den Unterhaltungen mit der provisorischen Tapete in ihrem Zimmer in der Nacht beschäftigte. Sie schloss sich noch als Jugendliche in ihrer Heimat einer Bewegung an, die das alte Schema aufbrechen wollte.

Jedoch waren die oben erwähnten Probleme noch nicht gelöst, als sie endlich im Ausland studieren konnte. Dieses wurde von ihren Eltern gerade noch toleriert aber dass sie unbedingt eine wissenschaftliche Stelle anstrebte, stieß lange auf Widerstand und auf Kritik nicht nur innerhalb der Familie. Trotzdem wollte es Sofja Kowalewskaja allen unbedingt beweisen, dass Frauen allgemein auch zur Wissenschaft beitragen können und nicht nur den Haushaltspflichten nachkommen können. Sie kämpfte sehr lange für eine Dozentur, die sie schließlich in Stockholm bekam nachdem ihr Mann starb.

Im Zusammenhang mit ihrer Biographie beleuchte ich ihre wissenschaftlichen Leistungen und gehe im Anschluss kurz auf Differentialgleichungen ein. Auch einen Bezug zur Schule mit Materialien aus einem Wahlpflichtfach habe ich einfließen lassen.

Sofja Kowalewskaja hat gemeinsam mit Sophie Germain für viele nachfolgende Frauengenerationen den Weg in die Wissenschaft geebnet, vor allem in die technischen Wissenschaften. Heute ist es selbstverständlich, dass Frauen technische Studien ergreifen, Professuren übernehmen oder an der Spitze eines Unternehmens stehen. In den letzten Jahren werden mit eigenen Kampagnen und Infotagen dafür geworben, besonders Schülerinnen technischen Studien näherbringen. [35]

Als ich mich durch die Literatur durcharbeitete, entdeckte ich viele Informationen über die Person Sofja Kowalewskaja, die in manchen Details widersprüchlich waren. In jedem dieser Fälle war es eine spannende Recherche. Die vielen Informationen, die ich während der Erstellung dieser Arbeit sammelte, rissen mich immer wieder mit und motivierten mich, mehr herauszufinden. Ich stieß sogar auf einen Film mit dem Titel *„Ein Berg auf der dunklen Seite des Mondes“* (Originaltitel: *„Berget på månens baksida“*), der im Jahr 1983 unter der Regie von Lennart Hjulström gedreht wurde und das Leben von Sofja Kowalewskaja behandelt.

Ich habe mich mit der Dissertation *„Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen“* ebenfalls auseinandergesetzt, aber eine genauere Betrachtung als in Kapitel *„2.6. Dissertation „Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen“ von Sofja Kowalewskaja“* dargelegt würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Da Sofja Kowalewskaja nicht nur in vielen mathematischen Richtungen, sondern auch in der Mechanik und der Physik forschte, hat sie keine eigene Schule hervorgebracht. Auch, dass sie von Weierstraß ausschließlich schwierige Fragestellungen zu unterschiedlichen Bereichen bekam und sie sich selbst höherer Mathematik annahm, ist heute nicht sehr bekannt.

Abschließend möchte ich erwähnen, dass ich unzählige spannende Stunden mit dieser Arbeit verbracht habe. Auch einige Nachtschichten und viel Kaffee haben mir geholfen, zügig bei diesem spannenden Thema voranzukommen.

7. Quellenverzeichnis

[1]
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f6/Sofja_Wassiljewna_Kowalewskaja_1.jpg, 16.11.2015

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Sofja_Wassiljewna_Kowalewskaja, 16.11.2015

der Stammbaum in obiger wurde von mir erweitert und finde sich hier wieder: https://de.wikipedia.org/wiki/Benutzer:Benny225/Sofja_Stammbaum, 19.04.2016

[3] http://www.cordula-tollmien.de/sofjakurzbio.html, 20.11.2015, 2. Absatz

[4] http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~steuding/sofia.pdf, 29.03.2016

[5] http://www.emma.de/artikel/sonja-kowalewskaja-das-geniale-scheusal-263846, 29.03.2016

[6] Wilderich Tuschmann, Peter Hawig: „Sofia Kowalewskaja – Ein Leben für Mathematik und Emanzipation“, Verlag: Birkhäuser Verlag, Erscheinungsjahr: 1993

[7] vgl.: http://www.cordula-tollmien.de/pdf/kowalewskajaautobiografischeskizze.pdf, Seite 8, 29.03.2016

[8] Anja Ungersböck, „Die Frau in der Mathematik im 18. und 19. Jahrhundert, am Beispiel von Sophie Germain und Sofja Kowalewski“, BG/BRG Neunkirchen, verfasst im Schuljahr 2015/16

[9] Cordula Tollmien: „Fürstin der Wissenschaft – Die Lebensgeschichte der Sofja Kowalewskaja“, S. 163, Verlag: Beltz Verlag, Erscheinungsjahr: 1995

[10]
https://www.univie.ac.at/mikroskopie/1_grundlagen/optik/wellenoptik/7_doppelbrechung.htm
23.3.2016

[11] https://homepage.univie.ac.at/christian.schmeiser/allpdg.pdf, 01.12.2015

[12] http://www.cordula-tollmien.de/grafik/sofjakreisel.JPG, 07.12.2015

[13] J. L. Geronimus, Sofja Wassiljewna Kowalewskaja und Iwan Wsewolodowitsch Meschtscherski, entnommen aus dem Sammelwerk: *„Skizzen über die Arbeiten hervorragender russischer Persönlichkeiten der Mechanik“*, S. 11 aus dem Teil Kowalewskaja, Verlag: VEB Verlag Technik Berlin, Erscheinungsjahr: 1954

[14] Sofya Kovalevskaya: „A russian Childhood“, Verlag: Springer Verlag, Erscheinungsjahr: 1978

[15] https://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung, 23.11.2015

[16] http://www.mathe-online.at/materialien/michael.kurzemann/files/Kap1.Einf./tangentenproblem.png, 23.11.2015

[17] *„Analysis Skriptum zur Einführung in die Analysis und zu Analysis 1 (teilweise)“*, Universität Wien, 2012, Autor: Univ. Prof. Dr. Harald Rindler, Kapitel *„Differentiation“*

[18] https://de.wikipedia.org/wiki/Differenzierbarkeit#Beispiele_f.C3.BCr_differenzierbare_Funktionen, 25.11.2015

[19] http://www.mathe-online.at/mathint/diff2/i.html, 29.12.2015

[20] siehe: http://massmatics.de/merkzettel/index.php#!192:Stetigkeit_Epsilon-Delta_Kriterium, 24.6.2016

[21] siehe: http://www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/Ableitung/Pics/Diff01_2.gif, 22.06.2016

[22] mit GeoGebra selbst erstellte Grafik (www.geogebra.org)

[23] http://www.matheplanet.com/default3.html?call=viewtopic.php?topic=119419&ref=https%3A%2F%2Fwww.google.at, 29.03.2016

[24] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/WeierstrassFunction.svg, 24.11.2015

[25] https://de.wikipedia.org/wiki/Anfangswertproblem, 21.12.2015

[26] http://download.springer.com/static/pdf/104/bok%253A978-3-8348-9684-1.pdf?originUrl=http%3A%2F%2Flink.springer.com%2Fbook%2F10.1007%2F978-3-8348-

9684-1&token2=exp=1448566948~acl=%2Fstatic%2Fpdf%2F104%2Fbok%25253A978-3-8348-9684-1.pdf%3ForiginUrl%3Dhttp%253A%252F%252Flink.springer.com%252Fbook%252F10.1007%252F978-3-8348-9684-1*~hmac=e4d2846439e9c99e6a93912a8a869603679cfb7ad01e1394449e3cea5fb2eb22, Kapitel *„4.1.1 Partielle Differentialgleichungen beliebiger Ordnung“*, Seite 173, 11.05.2016

[27] http://fedc.wiwi.hu-berlin.de/xplore/ebooks/html/sfm/sfmframe56.html, 05.12.2015

[28] http://wwwuser.gwdg.de/~subtypo3/gdz/pdf/PPN511794347/PPN511794347___LOG_0001.pdf, Dissertation Sofja Kowalewskaja, 11.05.2016

[29] Wahlmodul „Gewöhnliche Differentialgleichungen und ihre Anwendungen“, WS 2009/10, am BRG19 – Wien, Krottenbachstraße 9-11 gehalten

[30] siehe: https://www.humboldt-foundation.de/web/kovalevskaja-preis.html

[31] siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Gew%C3%B6hnliche_Differentialgleichung#Reduktion_von_Gleichungen_h.C3.B6herer_Ordnung_auf_Systeme_erster_Ordnung, 27.05.2016

[32] siehe: https://www.youtube.com/watch?v=0uBbTW3RzP4, 02.06.2016

[33] vgl.: http://www.mathe-online.at/mathint/anwdiff/i.html, 23.06.2016

[34] siehe: http://www.mathe-online.at/mathint/diff2/grafiken/f0.gif, 26.6.2016

[35] siehe: https://www.tuwien.ac.at/en/services/gender_studies/genderfair/schuelerinnen/fit_tage/, 27.06.2016

[36] siehe: http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/diff_int_01_02.htm, 29.06.2016

[37] *„Theorie der Differentialgleichungen, Vorlesungen aus dem Gesamtgebiet der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen“*, Autor: Ludwig Bieberbach, 3. Auflage, Verlag: Julius Springer, 1930

[38] siehe: http://de.bettermarks.com/wp-content/uploads/explanation/newton-verfahren_0.jpg, 30.6.2016