
Unterschrift des Betreuers



DIPLOMARBEIT

Cichoń-Diagramm und Martin'sches Axiom

Ausgeführt am Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Martin Goldstern

durch
Victoria Fiedler
Stratzingerstraße 44
3500 Krems

Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
Danksagung	7
1 Ergebnisse auf den reellen Zahlen	9
1.1 Borel-Codes	9
1.2 Random- und Cohen-Reals	13
2 Cichoń-Diagramm	21
2.1 $\mathcal{M} \preceq_T \mathcal{N}$	27
2.2 Dominierende und beschränkte Kardinalität	34
3 Forcing	41
3.1 Random-Forcing	41
3.2 Cohen-Forcing	42
3.3 Amoeba-Forcing	44
3.4 Hechler-Forcing	46
3.5 Kofinalität des Marczewski-Ideals	49
Index	53

Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns vor allem mit dem Ideal der Nullmengen $\mathcal{N}$ beziehungsweise dem Ideal der mageren Mengen $\mathcal{M}$ auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Es wird angenommen, dass sich der Leser mit den Grundlagen von Forcing beschäftigt hat.

Zuerst werden wir die Borelmengen modulo Nullmengen beziehungsweise mageren Mengen in einem transitiven Modell M von ZFC betrachten und zu jedem Filter G eine eindeutige reelle Zahl x_G finden, sodass die generische Erweiterung von M bezüglich G das selbe ergibt wie die generische Erweiterung von M bezüglich x_G . Diese Zahlen werden wir als Random- beziehungsweise Cohen-Reals bezeichnen.

Für ein Ideal $\mathcal{I}$ gibt es vier wesentliche Kardinalitäten, mit denen wir uns hier beschäftigen werden. Die Kardinalität $\text{add}(\mathcal{I})$ gibt uns an, wie viele Elemente aus dem Ideal wir vereinigen müssen, um ein Element außerhalb des Ideals zu erhalten. $\text{cov}(\mathcal{I})$ gibt an, wie viele Elemente aus dem Ideal von Nöten sind, um den ganzen Raum zu überdecken. $\text{non}(\mathcal{I})$ ist die kleinste Kardinalität einer Menge außerhalb des Ideals. $\text{cof}(\mathcal{I})$ ist die kleinste Mächtigkeit einer Basis von dem Ideal mit Elementen von $\mathcal{I}$. Zwei weitere wichtige Kardinalitäten sind die beschränkte Kardinalität $\mathfrak{b}$ und die dominierende Kardinalität $\mathfrak{d}$. $\mathfrak{b}$ ist die Kardinalität der kleinsten unbeschränkten Familie in ω^ω und $\mathfrak{d}$ ist die Kardinalität der kleinsten dominierenden Familie in ω^ω . Mit diesen Definitionen werden wir uns diesen Kardinalitäten von den Idealen der Nullmengen beziehungsweise mageren Mengen von $\mathbb{R}$ und den Relationen zwischen ihnen widmen. Dies wird in der Form des Cichoń-Diagramms behandelt:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \text{cov}(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \text{non}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{cof}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{cof}(\mathcal{N}) & \longrightarrow & 2^{\aleph_0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & \mathfrak{b} & \longrightarrow & \mathfrak{d} & & & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 \aleph_1 & \longrightarrow & \text{add}(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \text{add}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{cov}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{non}(\mathcal{N}) & &
 \end{array}$$

Kapitel 1 gibt uns zuerst eine Möglichkeit, die Borelmengen als Funktionen in ω^ω zu codieren (auch Borel-Codes genannt). Des Weiteren werden wir die Absolutheit von bestimmten Aussagen zeigen, die wir im Laufe des Kapitels brauchen werden. Im Rest des Kapitels widmen wir uns der Algebra der Borelmengen modulo dem Ideal der Borelnullmenge, beziehungsweise dem Ideal der mageren Borelmengen und des Beweises

der eindeutigen Existenz der Random- beziehungsweise Cohen-Reals zu einem Filter G . Außerdem werden wir die Menge aller Random- beziehungsweise Cohen-Reals genauer beschreiben.

In Kapitel 2 werden wir das Cichoń-Diagramm beweisen. Dafür werden Tukey-Funktion von großer Wichtigkeit sein. Tukey-Funktionen sind Funktionen von partiellen Ordnungen, sodass das Urbild von beschränkten Mengen wieder beschränkt ist. Die Aufgabe von Abschnitt 2.1 ist, eine Tukey-Funktion von den mageren Mengen in die Nullmengen zu konstruieren. In Abschnitt 2.2 werden wir die Kardinalitäten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$ als Kardinalitäten von dem σ -Ideal $\mathcal{K}$ der σ -kompakten Teilmengen von ω^ω darstellen und mit $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ können wir somit die nötigen Schlussfolgerungen für den Beweis des Cichoń-Diagramms ziehen.

In Kapitel 3 widmen wir uns dem Martin'schen Axiom von verschiedensten Forcing-Notions und welche Auswirkungen sie auf das Cichoń-Diagramm haben.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Betreuer Professor Martin Goldstern bedanken. Er ermutigte mich und half mir bei der Auswahl und Vorbereitung dieses Themas. Ich danke ihm, dass er immer Zeit gefunden hat, meine etwaige Fragen zu beantworten. Ohne seine Hilfe hätte ich so manche Problemlösung nicht so schnell gefunden.

1 Ergebnisse auf den reellen Zahlen

1.1 Borel-Codes

Die folgenden Aussagen richten sich nach Jech [2007].

Jede Borelmenge von reellen Zahlen kann man in weniger als ω_1 Schritten aus offenen Intervallen durch Komplementbildung beziehungsweise abzählbarer Vereinigung erhalten. Dieses Verfahren kann man durch eine Funktion in $c \in \omega^\omega$ codieren, wie genau, werden wir uns jetzt widmen.

Wir werden die Menge BC von *Borel-Codes* definieren und jedem $c \in \text{BC}$ eine eindeutige Borelmenge A_c zuordnen. Der Borel-Code c gibt nicht nur an, zu welchem A_c er gehört, sondern auch wie man A_c aus einer Basis von offenen Mengen gewinnt.

Seien nun $I_1, I_2, \dots, I_k, \dots$ eine rekursive Aufzählung von offenen Intervallen mit rationalen Endpunkten (d.h. die Aufzählung der Paare von Endpunkten ist rekursiv). Für jedes $c \in \omega^\omega$ (wobei ω^ω der Baire-Raum ist) seien

$$u(c) \text{ und } v_i(c) \quad (i \in \mathbb{N}) \quad (1.1)$$

Elemente von ω^ω definiert wie folgt: Falls $d = u(c)$, dann sei $d(n) = c(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $d = v_i(c)$, dann sei $d(n) = c(\Gamma(i, n) + 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (wobei Γ die kanonische Bijektion zwischen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ ist).

Für $0 < \alpha < \omega_1$ definieren wir die Mengen $\Sigma_\alpha^0 \subseteq \omega^\omega$ und $\Pi_\alpha^0 \subseteq \omega^\omega$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} c \in \Sigma_1^0 & \quad \text{falls } c(0) > 1; \\ c \in \Pi_\alpha^0 & \quad \text{falls } c \in \Sigma_\beta^0 \cup \Pi_\beta^0 \text{ für ein } \beta < \alpha \\ & \quad \text{oder } c(0) = 0 \text{ und } u(c) \in \Sigma_\alpha^0; \\ c \in \Sigma_\alpha^0 \ (\alpha > 1) & \quad \text{falls } c \in \Sigma_\beta^0 \cup \Pi_\beta^0 \text{ für ein } \beta < \alpha \\ & \quad \text{oder } c(0) = 1 \text{ und } v_i(c) \in \bigcup_{\beta < \alpha} (\Sigma_\beta^0 \cup \Pi_\beta^0), \ \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Falls $c \in \Sigma_\alpha^0$ (bzw. $c \in \Pi_\alpha^0$), nennen wir c einen Σ_α^0 -Code (bzw. einen Π_α^0 -Code). BC, die Menge aller Borel-Codes, ist nun:

$$\text{BC} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha^0 = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Pi_\alpha^0$$

Für ein $c \in \text{BC}$ definieren wir nun eine zugehörige Borelmenge A_c folgendermaßen (wir sagen c kodiert A_c):

$$\begin{aligned} \text{falls } c \in \Sigma_1^0 & \quad \text{dann } A_c = \bigcup \{I_n : c(n) = 1\}; \\ \text{falls } c \in \Pi_\alpha^0 \text{ und } c(0) = 0 & \quad \text{dann } A_c = \mathbb{R} \setminus A_{u(c)}; \\ \text{falls } c \in \Sigma_\alpha^0 \text{ und } c(0) = 1 & \quad \text{dann } A_c = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_{v_i(c)}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Wir erinnern an die Definitionen von Σ_1^0 , als die Kollektion aller offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ und Π_1^0 als die Kollektion aller abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$. Weiters sind folgende Mengen definiert:

$$\Sigma_\alpha^0 = \left\{ \bigcup_{n \in \omega} A_n : \forall n \exists \beta < \alpha \ A_n \in \Pi_\beta^0 \right\} \text{ und } \Pi_\alpha^0 = \{ \mathbb{R} \setminus A : A \in \Sigma_\alpha^0 \}$$

Wir erwähnen, dass die Mengen in Σ_2^0 auch F_σ Mengen und die Mengen in Π_2^0 auch G_δ Mengen genannt werden.

Die Menge aller Borel-Mengen ist nun $\bigcup_{\alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha^0 = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Pi_\alpha^0$, denn wir wissen die Menge aller Borel-Mengen ist laut Definition die kleinste σ -Algebra, die sowohl die offenen, als auch abgeschlossenen Mengen beinhaltet. Unsere Menge $\bigcup_{\alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha^0 = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Pi_\alpha^0$ beinhaltet nun offensichtlich alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen. Sie ist auch offensichtlich eine σ -Algebra und muss somit auch alle Borel-Mengen beinhalten. Des Weiteren sieht man mittels Induktion nach $\alpha < \omega_1$, dass jedes Element aus Σ_α^0 beziehungsweise aus Π_α^0 eine Borelmenge ist. Somit ist $\bigcup_{\alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha^0 = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Pi_\alpha^0$ nun die Menge aller Borel-Mengen.

Es ist offensichtlich, dass für jedes $\alpha > 0$ gilt: Falls $c \in \Sigma_\alpha^0$ (bzw. falls $c \in \Pi_\alpha^0$), dann $A_c \in \Sigma_\alpha^0$ (bzw. $A_c \in \Pi_\alpha^0$). Umgekehrt gilt, falls B eine Σ_α^0 Menge (bzw. eine Π_α^0 Menge) ist, dann existiert ein $c \in \Sigma_\alpha^0$ (bzw. $c \in \Pi_\alpha^0$) sodass $B = A_c$. Das kann man leicht mit Induktion über α zeigen, indem man folgendes verwendet. Wenn $c_i \in \bigcup_{\beta < \alpha} \Pi_\beta^0$ für $i \in \omega$, dann gibt es ein $c \in \Sigma_\alpha^0$ mit $c_i = v_i(c)$ für alle $i \in \omega$.

Somit erhalten wir, dass $\{A_c : c \in \text{BC}\}$ die Kollektion aller Borelmengen ist.

Definition 1.1.1. *nach Kechris [2012]*

Eine Menge A heißt *analytisch*, falls sie ein stetiges Bild einer Borel-Menge ist.

Eine Menge A heißt *ko-analytisch*, falls sie das Komplement einer analytischen Menge ist.

Σ_1^1 bezeichnet die Klasse der analytischen Mengen und Π_1^1 die Klasse der ko-analytischen Mengen.

Lemma 1.1.2. *Jech [2007] Lemma 25.44*

Die Menge BC aller Borel-Codes ist Π_1^1 .

Beweis. Wir betrachten die folgende Relation E auf ω^ω :

$$\begin{aligned} x E y \quad \text{genau dann, wenn} \quad & y(0) = 0 \text{ und } x = u(y) \\ & \text{oder } y(0) = 1 \text{ und } x = v_i(y) \text{ f\"ur ein } i \in \omega \end{aligned} \quad (1.4)$$

Die Relation E ist arithmetisch. $y \in \Sigma_1^0$ genau dann, wenn y E -minimal (d.h. $\text{ext}_E(y) = \emptyset$) ist. Wir definieren die Funktion $\tilde{\rho} : \text{BC} \rightarrow \omega_1 \times \{0, 1\}$ folgendermaßen: Sei $c \in \text{BC}$, wobei c das erste Mal in Σ_α^0 vorkommt, dann setzen wir $\tilde{\rho}(c) = (\alpha, 0)$. Falls c zum ersten Mal in Π_α^0 vorkommt, dann setzen wir $\tilde{\rho}(c) = (\alpha, 1)$. $\omega_1 \times \{0, 1\}$ bildet bezüglich der Lexikographischen Ordnung eine Wohlordnung. Des Weiteren gilt: Wenn $x E y$, dann gilt $\tilde{\rho}(x) < \tilde{\rho}(y)$.

Falls $y \in \Pi_\alpha^0$ und $x E y$, dann gilt $x \in \Sigma_\alpha^0$. Falls $y \in \Sigma_\alpha^0$ (für $\alpha > 1$) und $x E y$, dann gilt $x \in \bigcup_{\beta < \alpha} (\Sigma_\beta^0 \cup \Pi_\beta^0)$.

Wir behaupten, dass Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} y \in \text{BC} \quad &\leftrightarrow \quad E \text{ ist wohlfundiert unterhalb von } y \\ &\leftrightarrow \quad \text{es gibt keine } \langle z_0, z_1, \dots, z_n, \dots \rangle \text{ sodass } z_0 = y \\ &\quad \text{und } \forall n (z_{n+1} E z_n) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Wegen unserer an (1.4) anschließenden Bemerkung kann es keine unendliche Folge $z_0 = y$, $z_1 E z_0$, $z_2 E z_1$ etc. geben. Umgekehrt, falls E wohlfundiert unterhalb von y ist, sei ρ die Rangfunktion von E auf $\text{ext}_E(y)$. Durch Induktion nach $\rho(y)$ kann man sehen, dass jedes $x \in \text{ext}_E(y)$ ein Borel-Code ist und schließlich dass y selbst ein Borel-Code ist.

Somit erhalten wir schlussendlich, dass (1.5) eine Π_1^1 -Definition von BC ist. $\square$

Satz 1.1.3. *von Shoenfield*

Sei M eine transitives Modell von ZFC, dann ist jede Π_0^1 -Formel absolut.

Lemma 1.1.4. *Jech [2007] Lemma 25.45*

Die Eigenschaften $A_c \subseteq A_d$, $A_c = A_d$ und $A_c = \emptyset$ sind Π_1^1 -Eigenschaften von Borel-Codes.

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass es Eigenschaften $P, Q \subseteq \mathbb{R} \times \omega^\omega$ gibt mit $P \in \Pi_1^1$ und $Q \in \Sigma_1^1$, sodass für jedes $c \in \text{BC}$ gilt:

$$a \in A_c \quad \leftrightarrow \quad (a, c) \in P \quad \leftrightarrow \quad (a, c) \in Q \quad (1.6)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
A_c \subseteq A_d &\leftrightarrow c, d \in \text{BC} \wedge \forall a((a, c) \in Q \rightarrow (a, d) \in P), \\
A_c = A_d &\leftrightarrow c, d \in \text{BC} \wedge A_c \subseteq A_d \wedge A_d \subseteq A_c, \\
A_c = \emptyset &\leftrightarrow c \in \text{BC} \wedge \forall a(a, c) \notin Q.
\end{aligned}$$

Um P und Q zu finden, sei nun $x \in \omega^\omega$ fixiert. Sei T die kleinste Menge $T \subseteq \omega^\omega$, sodass:

$$x \in T, \text{ und falls } y \in T \text{ und } z E y, \text{ dann } z \in T. \quad (1.7)$$

Die Menge T ist abzählbar. Weiters halten wir ein a fest. Sei $h : T \rightarrow \{0, 1\}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften: Für alle $y \in T$,

$$\begin{aligned}
&\text{falls } y(0) > 1, \quad \text{dann } h(y) = 1 \quad \text{genau dann, wenn} \\
&\quad \text{für ein } n, \ y(n) = 1 \text{ und } a \in I_n; \\
&\text{falls } y(0) = 0, \quad \text{dann } h(y) = 1 \quad \text{genau dann, wenn } h(u(y)) = 0; \\
&\text{falls } y(0) = 1, \quad \text{dann } h(y) = 1 \quad \text{genau dann, wenn für ein } i, h(v_i(y)) = 1.
\end{aligned} \quad (1.8(a))$$

Wir bemerken, dass falls x ein Borel-Code ist, dann gibt es eine eindeutige kleinste abzählbare Menge $T \subseteq \omega^\omega$ mit der Eigenschaft (1.7) und eine eindeutige Funktion h mit der Eigenschaft (1.8(a)). Weiters erhalten wir für jedes $y \in T$: $h(y) = 1$ genau dann, wenn $a \in A_y$. Somit sei nun:

$$\begin{aligned}
(a, x) \in P &\leftrightarrow (\forall \text{ abzählbares } T \subseteq \omega^\omega)(\forall h : T \rightarrow \{0, 1\}) \\
&\quad \text{falls (1.7) und (1.8(a)) dann } h(x) = 1
\end{aligned} \quad (1.9)$$

und:

$$\begin{aligned}
(a, x) \in Q &\leftrightarrow (\exists \text{ abzählbares } T \subseteq \omega^\omega)(\exists h : T \rightarrow \{0, 1\}) \\
&\quad (1.7) \wedge (1.8(a)) \wedge h(x) = 1
\end{aligned} \quad (1.10)$$

Somit ist klar für $c \in \text{BC}$, dass $a \in A_c$ genau dann, wenn $(a, c) \in P$ genau dann, wenn $(a, c) \in Q$.

Es ist leicht nachzuweisen, dass man (1.9) in einer Π_1^1 -Art und (1.10) in einer Σ_1^1 -Art anschreiben kann. $\square$

Wir werden nun zeigen, dass bestimmte Eigenschaften von Borel-Codes absolut sind für transitive Modelle von ZF+DC. Sei M ein transitives Modell von ZF+DC und $c \in \omega^\omega$ ist in M , dann gilt, da die Menge BC Π_1^1 ist, dass c ein Borel-Code ist genau dann, wenn $M \models$ „ c ist ein Borel-Code“. Aus Lemma 1.1.4. erhalten wir, dass die Eigenschaften $A_c \subseteq A_d$, $A_c = A_d$ und $A_c = \emptyset$ alle Π_1^1 sind und somit absolut: $A_c = A_d$ gilt genau dann, wenn $A_c^M = A_d^M$ gilt, etc., wobei A_c^M hier die Borelmenge in M bezeichnet, die durch c kodiert ist. Weiters folgt, da $a \in A_c$ in Π_1^1 liegt, dass $A_c^M = A_c \cap M$ für jeden Borel-Code $c \in M$.

Lemma 1.1.5. *Jech [2007] Lemma 25.46*

Die folgenden Eigenschaften sind alle absolut für transitive Modelle M von $\text{ZF}+\text{DC}$:

$$\begin{aligned} A_e &= A_c \cup A_d, & A_e &= A_c \cap A_d, \\ A_e &= \mathbb{R} \setminus A_c, & A_e &= A_c \triangle A_d, & A_e &= \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{c_n} \end{aligned}$$

(Wir nehmen an, dass die Codes c , d , e , sowie $\langle c_n : n \in \omega \rangle$ in M liegen.)

Wir sagen, dass die Operationen $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\triangle$, $\bigcup_{n=0}^{\infty}$ auf Borelmengen mit Codes in M absolut sind für M .

Beweis. Sei $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ eine Folge von Borel-Codes in M ist, dann sei $c \in \omega^\omega$ so, dass $c(0) = 1$ und $v_i(c) = c_i$ für alle $i \in \omega$. Offensichtlich ist c ein Borel-Code, $c \in M$, und c kodiert (sowohl im Universum als auch in M) die Borelmenge $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_{c_n}$.

Somit erhalten wir für einen beliebigen Borel-Code $e \in M$

$$A_e^M = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{c_n}^M \leftrightarrow A_e^M = A_c^M \leftrightarrow A_e = A_c \leftrightarrow A_e = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{c_n}$$

wegen der Absolutheit von $A_e = A_c$ für M . Somit ist nun $A_e = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{c_n}$ absolut.

Analog kann man zeigen, dass $\mathbb{R} \setminus A_c$ absolut ist. Den Rest des Lemmas kann man einfach zeigen, indem man verwendet, dass die Operationen $\cap$ und $\triangle$ leicht durch $\cup$ und $\setminus$ definiert werden können. $\square$

1.2 Random- und Cohen-Reals

Die folgenden Aussagen richten sich nach Jech [2007].

Wir setzen voraus, dass sich der Leser mit den Grundlagen von Forcing auskennt und erinnern hier nur kurz an nützliche Definitionen und Notationen.

Definition 1.2.1.

Ein *Filter* auf einer nichtleeren Menge X ist eine Kollektion F von Teilmengen von X , sodass folgende Eigenschaften gelten:

- (i) $X \in F$ und $\emptyset \notin F$
- (ii) Falls $A \in F$ und $B \in F$ gelten, dann gilt auch $A \cap B \in F$.
- (iii) Falls $A \subset B \subset X$ und $A \in F$, dann gilt auch $B \in F$

Ein *Ideal* auf einer nichtleeren Menge X ist eine Kollektion F von Teilmengen von X , sodass folgende Eigenschaften gelten:

- (i) $\emptyset \in F$ und $X \notin F$
- (ii) Falls $A \in F$ und $B \in F$ gelten, dann gilt auch $A \cup B \in F$.
- (iii) Falls $A \subset B \subset X$ und $B \in F$, dann gilt auch $A \in F$

Ein Filter U auf einer Menge X ist ein *Ultrafilter*, falls für jedes $A \subseteq X$ gilt:

$$A \in U \text{ oder } X \setminus A \in U$$

Definition 1.2.2.

Sei $(P, \leq)$ eine nichtleere partielle Ordnung über einem transitiven Modell. Wir sagen $(P, \leq)$ ist eine Forcing-Notion. Wir sagen q ist stärker als p , falls $q \leq p$ gilt. Seien $p, q \in P$, dann sagen wir p und q sind *kompatibel*, falls es ein r gibt mit $r \leq p$ und $r \leq q$ (i.Z. $p \not\perp q$). Wenn p und q nicht kompatibel sind, nennen wir sie auch *inkompatibel* (i.Z. $p \perp q$). Eine Menge $W \subseteq P$ heißt *Antikette*, falls ihre Elemente paarweise inkompatibel sind. Eine Menge $D \subseteq P$ heißt *dicht* in P , falls es für jedes $p \in P$ ein $q \in D$ gibt mit $q \leq p$.

Definition 1.2.3.

Sei $(P, \leq)$ eine partielle Ordnung, wir nennen eine Menge $F \subseteq P$ einen Filter auf P , falls folgende Eigenschaften gelten:

- (i) F ist nicht leer.
- (ii) Wenn $q \leq p$ und $q \in F$ gelten, dann gilt auch $p \in F$.
- (iii) Wenn $p, q \in F$ gilt, dann gibt es ein $r \in F$ mit $r \leq p$ und $r \leq q$.

Defintion 1.2.4.

Sei $(P, \leq)$ eine partielle Ordnung über einem transitiven Modell M . Wir nennen $G \subseteq P$ einen *M -generischen Filter* (oder *M -generisch* bzw. *generisch über M*), falls folgende Eigenschaften gelten:

- (i) G ist ein Filter auf P .
- (ii) Falls D dicht in P ist und $D \in M$, dann gilt $G \cap D \neq \emptyset$.

Sei $\mathcal{D}$ eine beliebige Kollektion von Mengen, wir sagen $G \subseteq P$ ist ein $\mathcal{D}$ -generischer Filter auf P , falls G ein Filter ist und $G \cap D \neq \emptyset$ gilt für jede dichte Teilmenge von P , die in $\mathcal{D}$ enthalten ist.

Man erhält eine äquivalente Definition zu Generizität, indem man statt dichten Teilmengen maximale Antiketten betrachtet.

Satz 1.2.5. *Jech [2007] Theorem 14.5*

Sei M ein transitives Modell von ZFC und $(P, \leq)$ eine Forcing-Notion (nichtleere partielle Ordnung) in M . Falls $G \subseteq P$ generisch ist über P , dann gibt es ein transitives Modell $M[G]$, sodass folgende Aussagen erfüllt sind:

- (i) $M[G]$ ist ein Modell von ZFC.
- (ii) $M \subseteq M[G]$ und $G \in M[G]$.
- (iii) $\text{Ord}^{M[G]} = \text{Ord}^M$.
- (iv) Sei N ein transitives Modell von ZF, sodass $M \subseteq N$ und $G \in N$ gilt, dann gilt $M[G] \subseteq N$.

Das Modell $M[G]$ nennen wir *generische Erweiterung* von M .

Analog bezeichnet $M[x]$ das kleinste transitive Modell von ZFC, sodass $M \subseteq M[x]$ und $x \in M[x]$ gilt, falls es dieses Modell gibt.

Definition 1.2.6.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nirgends dicht*, falls das Innere vom Abschluss von A leer ist.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *mager*, falls sie eine abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist.

Definition 1.2.7.

Wir betrachten generische Erweiterungen durch Verwendung der Algebra von Borelmengen modulo dem Ideal der Lebesgue-Nullmengen beziehungsweise dem Ideal der mageren Mengen.

Sei $\mathcal{B}$ die σ -Algebra der Borelmengen reeller Zahlen und seien $\mathcal{I}_{\mathcal{N}}$ und $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}$ folgende σ -Ideale:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathcal{N}} &= \{B \in \mathcal{B} : \mu(B) = 0\} \\ \mathcal{I}_{\mathcal{M}} &= \{B \in \mathcal{B} : B \text{ ist mager}\}\end{aligned}$$

Weiteres definieren wir:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\mathcal{N}} &= \mathcal{B}/\mathcal{I}_{\mathcal{N}} = \{[B]_{\mathcal{N}} : B \in \mathcal{B}\} \\ \mathcal{B}_{\mathcal{M}} &= \mathcal{B}/\mathcal{I}_{\mathcal{M}} = \{[B]_{\mathcal{M}} : B \in \mathcal{B}\}\end{aligned}$$

wobei $[B]_{\mathcal{N}}$ und $[B]_{\mathcal{M}}$ die Äquivalenzklassen modulo $\mathcal{I}_{\mathcal{N}}$ beziehungsweise $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}$ bezeichnen.

$\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ und $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ sind beides vollständige Boolesche Algebren. Für Borelmengen B_n , $n \in \omega$ gilt bezüglich $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ beziehungsweise $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$:

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} [B_n] = \left[\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \right]$$

Wir merken hier an, dass diese Gleichheit für überabzählbar viele B_α im Allgemeinen nicht mehr stimmt.

Außerdem gilt $-[B] = [\mathbb{R} \setminus B]$.

Sei M ein transitives Modell von ZF+DC. Wir betrachten Borelmengen in M . Mit $\mathcal{B}^M$ bezeichnen wir die Kollektion aller Borelmengen in M und $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}^M$ beziehungsweise $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}^M$ wie oben.

Sei B^M eine Borelmenge in M , B^M hat einen Borel-Code $c \in M$, $B^M = A_c^M$. Weiters betrachten wir B , die Borelmenge im Universum, kodiert mit c . Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von $c \in \text{BC}^M$, denn falls $A_c^M = A_d^M$, dann $A_c = A_d$. Weiters erinnern wir daran, dass $B^M = B \cap M$, $\forall B^M \in \mathcal{B}^M$.

Im Folgenden schreiben wir B statt B^M , falls klar ist, in welchem Modell wir agieren.

Lemma 1.2.8. *Jech [2007] Lemma 26.1*

Für alle transitiven Modelle von ZF+DC sind die Eigenschaften „ A_c ist eine Nullmenge“ und „ A_c ist mager“ absolut.

Beweis. Sei M ein transitives Modell von ZF+DC. Mit μ bezeichnen wir das Lebesgue-maß.

Zuerst behaupten wir: Wenn $c \in M$ ein Σ_1^0 -Code ist, dann gilt $\mu^M(A_c^M) = \mu(A_c)$. Um das zu zeigen, seien $k_0, k_1, \dots, k_n, \dots$ alle $k \in \mathbb{N}$ mit $c(k) = 1$. Somit gilt $A_c = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_{k_n}$, wobei I_{k_n} offene Intervalle mit rationalen Endpunkten sind.

Für jedes n sei $X_n = I_{k_n} \setminus (I_{k_0} \cup \dots \cup I_{k_{n-1}})$. Somit erhalten wir, dass $A_c = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ und $\mu(A_c) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_n)$ absolut sind. Also folgt $\mu^M(A_c^M) = \mu(A_c)$.

Ähnlich argumentiert erhalten wir, dass wenn $c \in M$ ein Π_1^0 -Code ist: $\mu^M(A_c^M) = \mu(A_c)$. Weiters behaupten wir: Wenn $c \in M$ ein Π_1^0 -Code ist, dann gilt: (A_c nirgends dicht genau dann, wenn $M \models$ „ A_c ist nirgends dicht“). Das folgt aus $d = u(c) \in \Sigma_1^0$ und man kann leicht zeigen (mit Hilfe von rationalen Intervallen), dass „ A_d ist dicht“ absolut ist.

Um das zu zeigen, seien $k_0, k_1, \dots, k_n, \dots$ alle $k \in \mathbb{N}$ mit $d(k) = 1$, dann gilt $A_d = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_{k_n}$, wobei $I_{k_n} = (p_n, q_n)$ wieder offene Intervalle mit rationalen Endpunkten sind.

Die Aussage, dass A_d dicht ist, kann man auch so formulieren.

$$\forall r \in \mathbb{Q} \forall s \in \mathbb{Q} (r < s \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \exists t \in \mathbb{Q} (p_n < t < q_n \wedge r < t < s))$$

Diese Aussage ist nun offensichtlich absolut für transitive Modelle von ZF+DC.

Nun können wir das Lemma beweisen. Zuerst wenden wir uns der Aussage „ A_c ist eine Nullmenge“ zu. Wir verwenden folgende Eigenschaften des Lebesguemaßes:

1. X ist eine Nullmenge genau dann, wenn $\forall n \in \mathbb{N}$ eine offene Menge $G \supseteq X$ mit $\mu(G) \leq 1/n$ existiert.
2. $\mu(X) > 0$ genau dann, wenn es eine abgeschlossene Menge $F \subseteq X$ gibt mit $\mu(F) > 0$

Falls gilt $M \models$ „ A_c ist eine Nullmenge“, dann erfüllt M :

$$\forall n \exists e (e \in \Sigma_1^0 \text{ und } A_e \supseteq A_c \text{ und } \mu(A_e) \leq 1/n) \quad (1.11)$$

Da der Teil (...) von (1.11) absolut ist, wird offensichtlich (1.11) in V erfüllt und somit ist A_c eine Nullmenge.

Falls $M \models \text{„}A_c \text{ ist keine Nullmenge“}$, dann erfüllt M :

$$\exists e(e \in \mathbf{II}_1^0 \text{ und } A_e \subseteq A_c \text{ und } \mu(A_e) > 0) \quad (1.12)$$

Wieder haben wir, dass der Teil (...) absolut ist. Somit wird (1.12) in V erfüllt und daraus folgt, dass A_c keine Nullmenge ist.

Schlussendlich betrachten wir die Aussage „ A_c ist mager“. Falls $M \models \text{„}A_c \text{ ist mager“}$, dann erfüllt M :

$$\exists c_n \in \mathbf{II}_1^0, n = 0, 1, \dots \text{ sodass jedes } A_{c_n} \text{ nirgends dicht ist, und } A_c \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{c_n} \quad (1.13)$$

Dann gilt (1.13) in V und somit ist A_c mager.

Eine Borelmenge B ist nicht mager genau dann, wenn es eine nichtleere offene Menge G gibt, sodass $B \triangle G$ mager ist. Somit gilt, wenn $M \models \text{„}A_c \text{ nicht mager“}$, dann erfüllt M :

$$\exists d \exists e(d \in \mathbf{\Sigma}_1^0 \text{ und } A_d \neq \emptyset \text{ und } A_e = A_c \triangle A_d \text{ und } A_e \text{ ist mager}) \quad (1.14)$$

(1.14) gilt in V und somit ist A_c nicht mager. $\square$

Lemma 1.2.9. *Jech [2007] Lemma 26.2*

- (i) Sei G ein M -generischer Ultrafilter auf $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}^M$, dann gibt es eine eindeutige reelle Zahl x_G , sodass für alle $B^M \in \mathcal{B}^M$ gilt:

$$x_G \in B \leftrightarrow [B^M]_{\mathcal{N}} \in G \quad (1.15)$$

Die Formel (1.15) bestimmt G und somit gilt $M[G] = M[x_G]$.

- (ii) Sei G ein M -generischer Ultrafilter auf $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}^M$, dann gibt es eine eindeutige reelle Zahl x_G , sodass für alle $B^M \in \mathcal{B}^M$ gilt:

$$x_G \in B \leftrightarrow [B^M]_{\mathcal{M}} \in G \quad (1.16)$$

Die Formel (1.16) bestimmt G und somit gilt $M[G] = M[x_G]$.

Beweis. Der Beweis funktioniert sowohl für (i), als auch für (ii). $[B^M]$ bezeichnet $[B^M]_{\mathcal{N}}$ im Fall (i) beziehungsweise $[B^M]_{\mathcal{M}}$ im Fall (ii).

Zuerst zeigen wir, dass es höchstens eine reelle Zahl x gibt, die folgendes erfüllt:

$$x \in B \leftrightarrow [B^M] \in G \quad (\forall B^M \in \mathcal{B}^M) \quad (1.17)$$

Falls x (1.17) erfüllt, dann ist x in jedem B enthalten, sodass $[B^M] \in G$. Wir nehmen an, $x < y$ seien zwei reelle Zahlen, die beide (1.17) erfüllen. Sei nun r eine rationale Zahl,

sodass $x < r < y$ und definiere A als das Intervall $A := (r, \infty) = \{z \in \mathbb{R} : z > r\}$. Da G ein Ultrafilter ist, muss entweder $[A^M] \in G$ oder $[(\mathbb{R} \setminus A)^M] \in G$ gelten. Da aber sowohl $x \notin A$ als auch $y \notin \mathbb{R} \setminus A$, erhalten wir, dass wegen (1.17) sowohl $[A^M] \notin G$, als auch $[(\mathbb{R} \setminus A)^M] \notin G$ gilt. Somit erhalten wir einen Widerspruch, was zeigt, dass es höchstens eine reelle Zahl geben kann, die (1.17) erfüllt.

Nun müssen wir noch zeigen, dass es eine reelle Zahl x gibt, die (1.17) erfüllt. Dazu setzen wir:

$$x = \sup\{r : r \in \mathbb{Q}, [(r, \infty)^M] \in G\} \quad (1.18)$$

Zuerst müssen wir zeigen, dass es ein r gibt, sodass $[(r, \infty)^M] \notin G$. Dafür betrachten wir die Menge $\{[(n, n+1)^M] : n \in \mathbb{Z}\}$, diese bildet eine maximale Antikette. Wegen der Generizität von G muss es nun ein $n \in \mathbb{Z}$ geben, sodass $[(n, n+1)^M] \in G$. Da G ein Filter ist, muss nun gelten, dass $[(n+1, \infty)^M] \notin G$.

Somit existiert nun das Supremum in (1.18). Außerdem gilt $x \notin M$, wegen der Generizität von G . Um das zu zeigen, nehmen wir an, dass $x \in M$. Seien nun $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (als Folgen in M enthalten) zwei positive Nullfolgen, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x - \epsilon_n \in \mathbb{Q}$ und $x + \delta_n \in \mathbb{Q}$. Die Menge

$$\begin{aligned} A = & \{[(-\infty, x - \epsilon_0)^M]\} \cup \{[(x - \epsilon_n, x - \epsilon_{n+1})^M] : n \in \mathbb{N}\} \cup \\ & \cup \{[(x + \delta_{n+1}, x + \delta_n)^M] : n \in \mathbb{N}\} \cup \{[(x + \delta_0, \infty)^M]\} \end{aligned}$$

bildet nun eine maximale Antikette und es gilt $A \in M$. Wegen der Generizität von G muss $A \cap G \neq \emptyset$ gelten. Da $x = \sup\{r : r \in \mathbb{Q}, [(r, \infty)^M] \in G\}$ gilt $[(x + \delta_0, \infty)^M] \notin G$ und $[(x + \delta_{n+1}, x + \delta_n)^M] \notin G$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $[(-\infty, x - \epsilon_0)^M] \in G$ oder es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $[(x - \epsilon_n, x - \epsilon_{n+1})^M] \in G$. Daraus folgt, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $[(-\infty, x - \epsilon_n)^M] \in G$. Da G ein Ultrafilter ist erhalten wir nun, dass $[(x - \epsilon_n, \infty)^M] \notin G$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann müsste aber $x = \sup\{r : r \in \mathbb{Q}, [(r, \infty)^M] \in G\} \leq x - \epsilon_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gelten, was aber ein Widerspruch ist und somit erhalten wir nun $x \notin M$.

Wir behaupten, dass dieses x nun (1.17) erfüllt. Durch Induktion auf Borel-Codes in M zeigen wir, dass für jedes $c \in \text{BC}^M$ gilt:

$$x \in A_c \leftrightarrow [A_c^M] \in G \quad (1.19)$$

Zuerst betrachten wir Σ_1^0 -Codes (in M) und beginnen mit diesen $c \in \Sigma_1^0 \cap M$, die die rationale Intervalle kodieren, d.h. dass $c(n) = 1$ für genau ein n gilt. Dann kodiert c das Intervall I_n^M . Sei $I_n^M = (p, q)^M$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} x \in A_c & \quad \text{genau dann, wenn} \quad p < x < q \\ & \quad \text{genau dann, wenn} \quad p < \sup\{r : [(r, \infty)]^M \in G\} < q \\ & \quad \text{genau dann, wenn} \quad [(p, \infty)^M] \in G \text{ und } [(q, \infty)^M] \notin G \\ & \quad \text{genau dann, wenn} \quad [(p, q)^M] \in G \\ & \quad \text{genau dann, wenn} \quad [A_c^M] \in G \end{aligned}$$

Sei nun $c \in \Sigma_1^0 \cap M$ beliebig, dann ist $A_c^M = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_{k_n}^M$, wobei $\{k_n : n = 0, 1, \dots\}$ die Menge $\{k : c(k) = 1\}$ ist. Nun erhalten wir:

$$\begin{aligned}
x \in A_c & \quad \text{genau dann, wenn} \quad x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} I_{k_n} & \quad \text{genau dann, wenn} \quad \exists n (x \in I_{k_n}) \\
& \quad \text{genau dann, wenn} \quad \exists n ([I_{k_n}^M] \in G) & \quad \text{genau dann, wenn} \quad \sum_{n=0}^{\infty} [I_{k_n}^M] \in G \\
& \quad \text{genau dann, wenn} \quad \left[\bigcup_{n=0}^{\infty} I_{k_n}^M \right] \in G & \quad \text{genau dann, wenn} \quad [A_c^M] \in G
\end{aligned}$$

Sei nun $\alpha < \omega_1^M$ und $c \in \Pi_\alpha^0 \cap M$, weiteres nehmen wir an, dass (1.19) erfüllt ist für alle $c \in \Sigma_\alpha^0 \cap M$. Wir können annehmen, dass $c(0) = 0$, dann gilt $u(c) \in \Sigma_\alpha^0 \cap M$ und $A_{u(c)}^M = (\mathbb{R} \setminus A_c)^M$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
x \in A_c & \quad \text{genau dann, wenn} \quad x \notin A_{u(c)} \\
& \quad \text{genau dann, wenn} \quad [A_{u(c)}^M] \notin G & \quad \text{genau dann, wenn} \quad [A_c^M] \in G
\end{aligned}$$

Zuletzt erfolgt der Induktionsschritt von Σ_α^0 in ähnlicher Art wie der Fall für $c \in \Sigma_1^0$. Somit gilt (1.19) für jedes $c \in \text{BC}^M$.

Somit ist x die eindeutige reelle Zahl, die (1.15) im Fall von $\mathcal{B}_N^M$ beziehungsweise (1.16) im Fall von $\mathcal{B}_M^M$ erfüllt. $\square$

Definition 1.2.10.

Sei x eine reelle Zahl. Falls gilt, dass $x = x_G$ für ein $G \subseteq \mathcal{B}_N$, welches generisch ist über M , dann nennen wir x *random* über M . Falls gilt, dass $x = x_G$ für ein $G \subseteq \mathcal{B}_M$, welches generisch ist über M , dann nennen wir x *Cohen* über M .

Lemma 1.2.11. Jech [2007] Lemma 26.4

Eine reelle Zahl ist genau dann random über M , falls sie zu keiner Borelmenge kodiert in M mit Maß 0 gehört.

Eine reelle Zahl ist genau dann ein Cohen über M , wenn sie zu keiner mageren Borelmenge kodiert in M gehört.

Wir bezeichnen mit $R(M)$ beziehungsweise $C(M)$ die Mengen aller Random-Reals beziehungsweise aller Cohen-Reals über M . Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
R(M) &= R \setminus \bigcup \{A_c : c \in \text{BC}^M \text{ und } A_c \text{ ist eine Nullmenge}\} \\
C(M) &= R \setminus \bigcup \{A_c : c \in \text{BC}^M \text{ und } A_c \text{ ist mager}\}
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Wir erinnern daran, dass wegen Lemma 1.2.8. A_c^M genau dann eine Nullmenge in M ist, wenn A_c eine Nullmenge in V ist.

Beweis. Für die „ $\subseteq$ “-Richtung sei x random über M und sei G ein M -generischer Ultrafilter auf $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}^M$, sodass $x = x_G$. Falls A_c^M eine Nullmenge ist, dann gilt $[A_c^M] \notin G$, weil G ein Ultrafilter ist. Aus (1.15) folgt $x \notin A_c$. Ähnlich zeigt man die „ $\subseteq$ “-Richtung für den Fall, dass x Cohen ist über M .

Für die „ $\supseteq$ “-Richtung sei x so, dass $x \notin A_c$, falls A_c^M eine Nullmenge ist (und $c \in M$). Zuerst sehen wir, dass wenn $[A_c^M] = [A_d^M]$, dann ist $A_c^M \triangle A_d^M$ eine Nullmenge und somit ist auch $A_c \triangle A_d$ eine Nullmenge. Daraus folgt, dass x genau dann in A_c liegt, wenn x in A_d liegt. Definiere nun:

$$G = \{[A_c^M] : x \in A_c\} \quad (1.21)$$

Es ist leicht zu zeigen, dass G ein Filter auf $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}^M$ ist:

Falls $[A_c^M] \in G$ und $[A_d^M] \in G$, dann gilt $x \in A_c \cap A_d$ und somit folgt $[A_c^M \cap A_d^M] \in G$. Falls $[A_c^M] \in G$ und $[A_c^M] \leq [A_d^M]$, dann folgt $x \in A_c$. Da $A_c^M \setminus A_d^M$ eine Nullmenge ist, ist auch $A_c \setminus A_d$ eine Nullmenge. Deshalb gilt wegen $x \notin A_c \setminus A_d$ und $x \in A_c$, dass $x \in A_d$ gelten muss und somit $[A_d^M] \in G$.

Somit haben wir gezeigt, dass G ein Filter ist. Jetzt müssen wir noch zeigen, dass G M -generisch ist. Da $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}^M$ die abzählbare Kettenbedingung (CCC) erfüllt, reicht es zu zeigen, dass falls wir ein $\{A_{c_n}^M : n \in \omega\} \in M$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} [A_{c_n}^M] \in G$, dann gibt es ein $n \in \omega$, sodass $[A_{c_n}^M] \in G$. Das folgt aus:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [A_{c_n}^M] = \left[\bigcup_{n=0}^{\infty} A_{c_n}^M \right] = \left[\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_{c_n} \right)^M \right] \in G \leftrightarrow x \in \bigcup A_{c_n}$$

Somit gibt es ein $n \in \omega$ mit $x \in A_{c_n}$ und somit $[A_{c_n}^M] \in G$.

Zuletzt müssen wir noch zeigen, dass $x = x_G$. Das folgt aus (1.21), wegen der Generizität von G .

Den Beweis kann man analog für Cohen-Reals führen. □

2 Cichoń-Diagramm

In diesem Kapitel widmen wir uns Aussagen über Kardinalkoeffizienten der Ideale $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ der reellen Zahlen. Als Ergebnis werden wir das folgende sogenannte *Cichoń-Diagramm* erhalten, wobei Pfeile ein $\leq$ symbolisieren. Wir orientieren uns an Bartoszyński and Judah [1995].

Wenn wir von Idealen reden, meinen wir echte Ideale von Teilmengen von $\mathbb{R}$, die zumindest alle Singletons und somit alle endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ beinhalten, falls nicht anders spezifiziert.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \text{cov}(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \text{non}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{cof}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{cof}(\mathcal{N}) & \longrightarrow & 2^{\aleph_0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & \mathfrak{b} & \longrightarrow & \mathfrak{d} & & & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 \aleph_1 & \longrightarrow & \text{add}(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \text{add}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{cov}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{non}(\mathcal{N}) & &
 \end{array}$$

Definition 2.0.1.

Sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{I}$ ein Ideal von Teilmengen von X , dann definieren wir die folgenden Kardinalkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
 \text{add}(\mathcal{I}) &= \min \{ |\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \text{ und } \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \notin \mathcal{I} \} \\
 \text{cov}(\mathcal{I}) &= \min \{ |\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \text{ und } \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X \} \\
 \text{non}(\mathcal{I}) &= \min \{ |Y| : Y \subseteq X \text{ und } Y \notin \mathcal{I} \} \\
 \text{cof}(\mathcal{I}) &= \min \{ |\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{I} \text{ und } \forall A \in \mathcal{I} \exists B \in \mathcal{B} A \subseteq B \}
 \end{aligned}$$

Wir können diese Koeffizienten als Spezialfall einer allgemeineren Definition ansehen.

Definition 2.0.2.

Seien $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ zwei Ideale. Wir definieren:

$$\begin{aligned}
 \text{add}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) &= \min \{ |\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \text{ und } \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \notin \mathcal{J} \} \\
 \text{cof}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) &= \min \{ |\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{J} \text{ und } \forall A \in \mathcal{I} \exists B \in \mathcal{B} A \subseteq B \}
 \end{aligned}$$

Nun gilt für jedes Ideal $\mathcal{I}$ von Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{add}(\mathcal{I}) &= \text{add}(\mathcal{I}, \mathcal{I}), & \text{cof}(\mathcal{I}) &= \text{cof}(\mathcal{I}, \mathcal{I}) \\ \text{non}(\mathcal{I}) &= \text{add}([\mathbb{R}]^{<\aleph_0}, \mathcal{I}), & \text{cov}(\mathcal{I}) &= \text{cof}([\mathbb{R}]^{<\aleph_0}, \mathcal{I}) \end{aligned}$$

Wobei $[\mathbb{R}]^{<\aleph_0}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist.

Beweis. Die Aussagen $\text{add}(\mathcal{I}) = \text{add}(\mathcal{I}, \mathcal{I})$ und $\text{cof}(\mathcal{I}) = \text{cof}(\mathcal{I}, \mathcal{I})$ sind offensichtlich. Nun wollen wir $\text{non}(\mathcal{I}) = \text{add}([\mathbb{R}]^{<\aleph_0}, \mathcal{I})$ zeigen. D.h. wir wollen zeigen, dass:

$$\min \{|Y| : Y \subseteq \mathbb{R} \text{ und } Y \notin \mathcal{I}\} = \min \left\{ |\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq [\mathbb{R}]^{<\aleph_0} \text{ und } \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \notin \mathcal{I} \right\}$$

Dafür sei zuerst $Y \subseteq \mathbb{R}$ mit $Y \notin \mathcal{I}$, dann erfüllt die Menge $\mathcal{A} := \{\{x\} : x \in Y\}$:

$$\mathcal{A} \subseteq [\mathbb{R}]^{<\aleph_0} \text{ und } \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = Y \notin \mathcal{I} \text{ und } |\mathcal{A}| = |Y|$$

Somit haben wir die „ $\geq$ “-Richtung gezeigt.

Für die „ $\leq$ “-Richtung sei nun ein $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \subseteq [\mathbb{R}]^{<\aleph_0}$ und $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \notin \mathcal{I}$ gegeben. Nun definieren wir $Y := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Es gilt $Y \subseteq \mathbb{R}$ und $Y \notin \mathcal{I}$. Da $|\mathcal{A}| > \aleph_0$ und $|A| < \aleph_0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt, erhalten wir, dass $|\mathcal{A}| = |\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A| = |Y|$. Somit haben wir nun insgesamt: $\text{non}(\mathcal{I}) = \text{add}([\mathbb{R}]^{<\aleph_0}, \mathcal{I})$

Nun wollen wir $\text{cov}(\mathcal{I}) = \text{cof}([\mathbb{R}]^{<\aleph_0}, \mathcal{I})$ zeigen. D.h. wir wollen zeigen, dass:

$$\min \left\{ |\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \text{ und } \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \mathbb{R} \right\} = \min \left\{ |\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{I} \text{ und } \forall A \in [\mathbb{R}]^{<\aleph_0} \exists B \in \mathcal{B} A \subseteq B \right\}$$

Zuerst sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ mit $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \mathbb{R}$. Dann definieren wir:

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B : \mathcal{C} \in [\mathcal{A}]^{<\aleph_0} \right\}$$

Da $\mathcal{I}$ als Ideal bezüglich endlicher Vereinigung abgeschlossen ist und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ gilt, gilt auch $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$. Weiters gilt $\forall A \in [\mathbb{R}]^{<\aleph_0} \exists B \in \mathcal{B} A \subseteq B$, denn sei $A \in [\mathbb{R}]^{<\aleph_0}$ gegeben, dann gibt es wegen $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \mathbb{R}$ endlich viele $A_i \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq \bigcup A_i$ und außerdem ist $\bigcup A_i \in \mathcal{B}$. Weiteres gilt $|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}|$, womit wir nun die „ $\geq$ “-Richtung gezeigt haben.

Für die „ $\leq$ “-Richtung sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ mit $\forall A \in [\mathbb{R}]^{<\aleph_0} \exists B \in \mathcal{B} A \subseteq B$. Nun definieren wir $\mathcal{A} := \mathcal{B}$ und erhalten $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ und $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \mathbb{R}$. $\square$

Definition 2.0.3.

Für $f, g \in \omega^\omega$ definieren wir, $f \leq^* g$, wenn $f(n) \leq g(n)$ für alle $n \in \omega$ bis auf endlich

viele gilt.

Weiteres definieren wir die Kardinalzahlen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$ wie folgend:

$$\begin{aligned}\mathfrak{b} &= \min \{ |F| : F \subseteq \omega^\omega \text{ und } \forall g \in \omega^\omega \exists f \in F f \not\leq^* g \} \\ \mathfrak{d} &= \min \{ |F| : F \subseteq \omega^\omega \text{ und } \forall g \in \omega^\omega \exists f \in F g \leq^* f \}\end{aligned}$$

D.h. $\mathfrak{b}$ ist die Kardinalität der kleinsten unbeschränkten Familie in ω^ω und $\mathfrak{d}$ ist die Kardinalität der kleinsten dominierenden Familie in ω^ω .

Definition 2.0.4.

Sei $(P, \leq)$ eine partielle Ordnung. Eine Menge $D \subseteq P$ heißt *kofinal*, falls es für jedes $x \in P$ ein $d \in D$ gibt mit $x \leq d$.

Wir definieren die Kofinalität von P folgendermaßen:

$$\text{cf}(P) := \min \{ |D| : D \subseteq P, D \text{ kofinal} \}$$

Als Spezialfall erhalten wir nun die folgende Definition.

Definition 2.0.5.

Sei κ eine Kardinalzahl, dann definieren wir

$$\text{cf}(\kappa) := \min \{ \beta : \kappa = \bigcup_{\alpha < \beta} \kappa_\alpha \text{ und } \kappa_\alpha < \kappa \forall \alpha < \beta \}$$

Lemma 2.0.6.

Es gilt $\aleph_1 \leq \text{add}(\mathcal{N})$ und $\text{cof}(\mathcal{N}) \leq 2^{\aleph_0}$.

Allgemeiner gilt $\aleph_1 \leq \text{add}(\mathcal{I})$ für jedes σ -Ideal $\mathcal{I}$ von Teilmengen von X .

Beweis. Sei $\kappa < \omega_1$ und $A_\alpha \in \mathcal{I}$ für $\alpha < \kappa$, dann gilt $\bigcup_{\alpha < \kappa} A_\alpha \in \mathcal{I}$. Daraus folgt leicht $\aleph_1 \leq \text{add}(\mathcal{I})$.

Um $\text{cof}(\mathcal{N}) \leq 2^{\aleph_0}$ zu zeigen, finden wir eine Basis der Nullmengen in $\mathbb{R}$ mit Kardinalität $2^{\aleph_0}$. Dafür betrachten wir die Menge aller Borelnullmengen. Da es zu jeder Borelmenge einen Borelcode gibt, gibt es maximal $2^{\aleph_0}$ viele Borelmengen. Weiters sind die Singletons Borelnullmengen. Da es genau $2^{\aleph_0}$ viele Singletons bezüglich $\mathbb{R}$ gibt, ist die Kardinalität der Borelnullmengen mindestens $2^{\aleph_0}$. Insgesamt gilt nun, dass die Kardinalität der Borelnullmengen genau $2^{\aleph_0}$ ist. Jetzt muss man sich nur noch überlegen, dass die Borelnullmengen eine Basis von $\mathcal{N}$ bilden. Sei $A \in \mathcal{N}$ beliebig, dann gibt es offene Mengen U_n mit $n \in \omega$, sodass gilt:

$$A \subseteq U_n \text{ und } \mu(U_n) < \frac{1}{n}$$

Sei $B := \bigcap_{n \in \omega} U_n$. Dann gilt $A \subseteq B$ und $\mu(B) = 0$. Somit haben wir eine Borelnullmenge B gefunden, die A überdeckt. $\square$

Lemma 2.0.7. *Bartoszyński and Judah [1995] Lemma 2.1.4*

Für beliebige Ideale $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ von Teilmengen von $\mathbb{R}$ gilt:

- (i) $\text{add}(\mathcal{I}), \text{add}(\mathcal{J}) \leq \text{add}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \leq \text{cov}(\mathcal{I}), \text{non}(\mathcal{J}),$
- (ii) $\text{cov}(\mathcal{J}), \text{non}(\mathcal{I}) \leq \text{cof}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \leq \text{cof}(\mathcal{J}), \text{cof}(\mathcal{I}),$
- (iii) $\text{cf}(\text{cof}(\mathcal{I}, \mathcal{J})) \geq \text{add}(\mathcal{I}),$
- (iv) $\text{cf}(\text{add}(\mathcal{I}, \mathcal{J})) \geq \text{add}(\mathcal{J})$

Beweis. Zuerst beobachtet man, dass für Ideale $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_2$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{add}(\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_1) &\geq \text{add}(\mathcal{I}_2, \mathcal{J}_1) \\ \text{add}(\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_1) &\leq \text{add}(\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_2) \\ \text{cof}(\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_1) &\leq \text{cof}(\mathcal{I}_2, \mathcal{J}_1) \\ \text{cof}(\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_1) &\geq \text{cof}(\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_2) \end{aligned}$$

(i) Wegen $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ und $[\mathbb{R}]^{<\aleph_0} \subseteq \mathcal{I}$ erhalten wir:

$$\text{add}(\mathcal{I}) = \text{add}(\mathcal{I}, \mathcal{I}) \leq \text{add}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \leq \text{add}([\mathbb{R}]^{<\aleph_0}, \mathcal{J}) = \text{non}(\mathcal{J})$$

und

$$\text{add}(\mathcal{J}) = \text{add}(\mathcal{J}, \mathcal{J}) \leq \text{add}(\mathcal{I}, \mathcal{J})$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass:

$$\min \left\{ |\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \text{ und } \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \notin \mathcal{J} \right\} \leq \min \left\{ |\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \text{ und } \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \mathbb{R} \right\}$$

Haben wir nun ein $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ mit $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \mathbb{R}$ gegeben, dann gilt offensichtlich $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \mathbb{R} \notin \mathcal{J}$, womit $\text{add}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \leq \text{cov}(\mathcal{I})$ gezeigt ist.

(ii) Wegen $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ und $[\mathbb{R}]^{<\aleph_0} \subseteq \mathcal{I}$ erhalten wir:

$$\text{cov}(\mathcal{J}) = \text{cof}([\mathbb{R}]^{<\aleph_0}, \mathcal{J}) \leq \text{cof}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \leq \text{cof}(\mathcal{J}, \mathcal{J}) = \text{cof}(\mathcal{J})$$

und

$$\text{cof}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \leq \text{cof}(\mathcal{I}, \mathcal{I}) = \text{cof}(\mathcal{I})$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass:

$$\min \{ |Y| : Y \subseteq \mathbb{R} \text{ und } Y \notin \mathcal{I} \} \leq \min \{ |\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{J} \text{ und } \forall A \in \mathcal{I} \exists B \in \mathcal{B} A \subseteq B \}$$

Dafür sei nun ein $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}$ mit $\forall A \in \mathcal{I} \exists B \in \mathcal{B} A \subseteq B$ gegeben. Da $\mathcal{J}$ ein echtes Ideal ist, können wir für jedes $B \in \mathcal{B}$ ein $x_B \in \mathbb{R} \setminus B$ definieren. Die Menge $Y := \{x_B : B \in \mathcal{B}\}$

erfüllt nun $|Y| \leq |\mathcal{B}|$ und laut Definition existiert kein $B \in \mathcal{B}$ mit $Y \subseteq B$ und somit muss $Y \notin \mathcal{I}$ gelten. Damit erhalten wir $\text{non}(\mathcal{I}) \leq \text{cof}(\mathcal{I}, \mathcal{J})$.

(iii) Sei nun $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}$ eine Basis von $\mathcal{I}$, d.h. $\forall A \in \mathcal{I} \exists B \in \mathcal{B} A \subseteq B$ von minimaler Kardinalität. Wir nehmen an, dass $\text{cf}(|\mathcal{B}|) < \text{add}(\mathcal{I})$. Weiters sei nun $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha < \kappa} \mathcal{B}_\alpha$ mit $|\mathcal{B}_\alpha| < |\mathcal{B}|$ und $\kappa < \text{add}(\mathcal{I})$. Da wir $\mathcal{B}$ mit minimaler Kardinalität gewählt haben, gibt es nun für jedes $\alpha < \kappa$ ein $A_\alpha \in \mathcal{I}$, sodass für jedes $B \in \mathcal{B}_\alpha$ gilt, dass $A_\alpha \not\subseteq B$. Nun definieren wir uns ein $A := \bigcup_{\alpha < \kappa} A_\alpha$. Wegen $\kappa < \text{add}(\mathcal{I})$ gilt $A \in \mathcal{I}$, aber da A von keinem Element aus $\mathcal{B}$ überdeckt werden kann, erhalten wir einen Widerspruch.

(iv) Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ mit $|\mathcal{A}| = \text{add}(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ und $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \notin \mathcal{J}$. Wir nehmen an, dass $\text{cf}(|\mathcal{A}|) = \kappa < \text{add}(\mathcal{J})$. Somit können wir $\mathcal{A}$ so anschreiben: $\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha < \kappa} \mathcal{A}_\alpha$ mit $|\mathcal{A}_\alpha| < |\mathcal{A}|$. Da $\mathcal{A}$ mit minimaler Kardinalität gewählt wurde und $|\mathcal{A}_\alpha| < |\mathcal{A}|$, erhalten wir $\bigcup_{A \in \mathcal{A}_\alpha} A \in \mathcal{J}$. Weiters folgt jetzt wegen $\kappa < \text{add}(\mathcal{J})$, die Beziehung $\bigcup_{\alpha < \kappa} \bigcup_{A \in \mathcal{A}_\alpha} A \in \mathcal{J}$, was zu einem Widerspruch führt. $\square$

Lemma 2.0.8.

Es gelten folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \text{add}(\mathcal{N}) &\leq \text{cov}(\mathcal{N}) \leq \text{cof}(\mathcal{N}) \\ \text{add}(\mathcal{N}) &\leq \text{non}(\mathcal{N}) \leq \text{cof}(\mathcal{N}) \\ \text{add}(\mathcal{M}) &\leq \text{cov}(\mathcal{M}) \leq \text{cof}(\mathcal{M}) \\ \text{add}(\mathcal{M}) &\leq \text{non}(\mathcal{M}) \leq \text{cof}(\mathcal{M}) \end{aligned}$$

Beweis. Das folgt direkt aus Lemma 2.0.7.. Wir werden es hier für $\mathcal{N}$ zeigen, für $\mathcal{M}$ folgt es analog.

Mit $\mathcal{I} = \mathcal{N}$, $\mathcal{J} = \mathcal{N}$ gilt wegen Lemma 2.0.7. Punkt i:

$$\begin{aligned} \text{add}(\mathcal{N}) &\leq \text{cov}(\mathcal{N}) \\ \text{add}(\mathcal{N}) &\leq \text{non}(\mathcal{N}) \end{aligned}$$

Weiters folgt aus Lemma 2.0.7. Punkt ii:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathcal{N}) &\leq \text{cof}(\mathcal{N}) \\ \text{non}(\mathcal{N}) &\leq \text{cof}(\mathcal{N}) \end{aligned}$$

$\square$

Lemma 2.0.9. Bartoszyński and Judah [1995] Lemma 2.1.6

Es gibt Mengen $A \in \mathcal{N}$ und $B \in \mathcal{M}$ mit $\mathbb{R} = A \cup B$.

Beweis. Sei $\langle q_n : n \in \omega \rangle$ eine Aufzählung der rationalen Zahlen. Nun definieren wir für $n \in \omega$:

$$U_m = \bigcup_{n > m} \left(q_n - \frac{1}{2^n}, q_n + \frac{1}{2^n} \right)$$

Die Mengen U_m sind nun offensichtlich offen und dicht in $\mathbb{R}$ und es gilt $\mu(U_m) \leq 2^{1-m}$. Nun definieren wir $A := \bigcap_{m \in \omega} U_m$ und $B := \mathbb{R} \setminus A$. Es gilt $A \in \mathcal{N}$ und $B \in \mathcal{M}$ und $\mathbb{R} = A \cup B$. $\square$

Lemma 2.0.10. *Bartoszyński and Judah [1995] Theorem 2.1.7*
 $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \text{non}(\mathcal{N})$ und $\text{cov}(\mathcal{N}) \leq \text{non}(\mathcal{M})$.

Beweis. Sei nun $A \in \mathcal{N}$ und $B \in \mathcal{M}$ mit $\mathbb{R} = A \cup B$ gegeben, deren Existenz wir in Lemma 2.0.9. gezeigt haben.

Um die erste Ungleichung zu zeigen, betrachten wir eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ mit $X \notin \mathcal{N}$ und $|X| = \text{non}(\mathcal{N})$. Wir behaupten, dass gilt: $X + B = \bigcup_{x \in X} (x + B) = \mathbb{R}$. Dann folgt wegen $x + B \in \mathcal{M}$ für alle $x \in x$, dass:

$$\mathcal{A} := \{x + B : x \in X\} \subseteq \mathcal{M} \text{ und } |\mathcal{A}| \leq |X|$$

Somit erhalten wir $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \text{non}(\mathcal{N})$

Nun müssen wir noch die Behauptung $X + B = \bigcup_{x \in X} (x + B) = \mathbb{R}$ zeigen. Falls es ein $z \in \mathbb{R} \setminus (X + B)$ gibt, dann folgt $(z - X) \cap B = \emptyset$. Aus $\mathbb{R} = A \cup B$ folgt nun, dass $(z - X) \subseteq A \in \mathcal{N}$, also $(z - X) \in \mathcal{N}$ und damit auch $X \in \mathcal{N}$ gilt.

Die zweite Ungleichung kann man analog zeigen. $\square$

Definition 2.0.11.

Seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ partielle Ordnungen. Wir nennen eine Funktion $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ eine *Tukey-Funktion*, falls für jede in $\mathcal{Q}$ beschränkte Menge $X \subseteq \mathcal{Q}$, die Menge $f^{-1}(X)$ in $\mathcal{P}$ beschränkt ist.

Wir sagen $\mathcal{P} \preceq_T \mathcal{Q}$, falls es eine Tukey-Funktion $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ gibt und, dass $\mathcal{P} \equiv_T \mathcal{Q}$, falls $\mathcal{P} \preceq_T \mathcal{Q}$ und $\mathcal{Q} \preceq_T \mathcal{P}$.

Haben wir eine Tukey-Funktion $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ gegeben, so können wir eine duale Funktion $f^* : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$ wie folgt definieren:

$f^*(q)$ ist ein beliebiges Element $p \in \mathcal{P}$ mit:

$$\forall x \in \mathcal{P} \ (f(x) \leq q \rightarrow x \leq p) \tag{2.1}$$

Die Funktion f^* ist wohldefiniert in dem Sinne, dass für jedes $q \in \mathcal{Q}$ die Menge aller Elemente $p \in \mathcal{P}$ mit der Eigenschaft (2.1) nicht leer ist.

Außerdem gilt: Seien $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ und $f^* : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$ Funktionen, sodass für jedes $p \in \mathcal{P}$ und $q \in \mathcal{Q}$ folgendes gilt:

$$(f(p) \leq q \rightarrow p \leq f^*(q)) \quad (2.2)$$

Dann ist $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ eine Tukey-Funktion.

Lemma 2.0.12. *Bartoszyński and Judah [1995] Lemma 2.1.2*

Seien $(\mathcal{I}, \subseteq)$ und $(\mathcal{J}, \subseteq)$ zwei Ideale. Falls $\mathcal{I} \preceq_T \mathcal{J}$, dann gilt:

$$\text{add}(\mathcal{I}) \geq \text{add}(\mathcal{J}) \text{ und } \text{cof}(\mathcal{I}) \leq \text{cof}(\mathcal{J})$$

Beweis. Sei $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$ eine Tukey-Funktion.

Sei nun $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ eine Familie mit $|\mathcal{A}| < \text{add}(\mathcal{J})$. Da für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt, dass $f(A) \in \mathcal{J}$ gilt und $|\mathcal{A}| < \text{add}(\mathcal{J})$, gibt es ein $B \in \mathcal{J}$ mit $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} f(A) = B$. Für $A \in \mathcal{A}$ gilt, dass $f(A) \subseteq B$ und somit $A \subseteq f^*(B)$. Damit erhalten wir, dass $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subseteq f^*(B) \in \mathcal{I}$ gilt und somit $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{I}$. Daraus folgt insgesamt: $\text{add}(\mathcal{I}) \geq \text{add}(\mathcal{J})$.

Sei nun $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}$ mit $\forall A \in \mathcal{J} \exists B \in \mathcal{B} A \subseteq B$ gegeben. Wir definieren nun die Menge $\mathcal{A} := \{f^*(B) : B \in \mathcal{B}\} \subseteq \mathcal{I}$. Sei $A \in \mathcal{I}$ beliebig, dann gilt $f(A) \in \mathcal{J}$ und somit gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $f(A) \subseteq B$. Nun gilt wegen der Definition der dualen Funktion $A \subseteq f^*(B)$. Daraus folgt insgesamt: $\text{cof}(\mathcal{I}) \leq \text{cof}(\mathcal{J})$. $\square$

2.1 $\mathcal{M} \preceq_T \mathcal{N}$

Nun befassen wir uns mit dem Beweis des folgenden Satzes.

Satz 2.1.1. *Bartoszyński and Judah [1995] Lemma 2.3.1*

$\mathcal{M} \preceq_T \mathcal{N}$

Definition 2.1.2.

Sei $H \in \omega^\omega$ eine wachsende Funktion mit $\sum_{n=1}^{\infty} 1/H(n) < \infty$. Wir definieren:

$$\mathcal{C}_H := \left\{ S \in ([\omega]^{<\omega})^\omega : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S(n)|}{H(n)} < \infty \right\}$$

$\mathcal{C}$ sei $\mathcal{C}_H$ für $H(n) = n^2$.

Seien $S_1 \in \mathcal{C}_{H_1}$ und $S_2 \in \mathcal{C}_{H_2}$ gegeben. Wir sagen $S_1 \subseteq^* S_2$, falls $S_1(n) \subseteq S_2(n)$ für alle bis auf endlich vielen $n \in \omega$.

Im Folgenden werden wir nun vier Funktionen definieren:

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{C} \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{N} \xrightarrow{\varphi_2^*} \mathcal{C} \xrightarrow{\varphi_1^*} \mathcal{M}$$

mit $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ und $\varphi^* = \varphi_1^* \circ \varphi_2^*$.

$\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ist die gesuchte Tukey-Funktion und $\varphi^* : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ ist ihre duale Funktion.

Lemma 2.1.3. *Bartoszyński and Judah [1995] Lemma 1.3.23*

Sei eine Folge $\{a_n : n \in \omega\} \subseteq (0, 1)$ gegeben. Dann gibt es eine unabhängige Familie $\{A_n : n \in \omega\}$ von Teilmengen von $\mathbb{R}$, sodass $\mu(A_n) = a_n$ für alle $n \in \omega$.

Beweis. Der Einfachheit halber arbeiten wir in 2^ω . Sei $B_n = \{x \in 2^\omega : x(n) = 1\}$. Man sieht leicht, dass diese Familie die erforderliche Eigenschaft für $a_n = 1/2$ besitzt.

Mit Hilfe von Induktion bauen wir für jedes n eine Folge von natürlichen Zahlen $\{k_m^n : m \in \omega\}$, sodass:

$$\prod_{m \in \omega} \left(1 - \frac{1}{2^{k_m^n}}\right) = 1 - a_n$$

Sei nun $\{I_m^n : n, m \in \omega\}$ eine Familie von paarweise disjunkten Teilmengen von ω , sodass $|I_m^n| = k_m^n$ ist. Für jedes $n \in \omega$ sei

$$A_n = 2^\omega \setminus \bigcap_{m \in \omega} \left(2^\omega \setminus \bigcap_{j \in I_m^n} B_j\right)$$

Man kann leicht zeigen, dass diese Familie die erforderliche Eigenschaft erfüllt. □

Lemma 2.1.4. *Bartoszyński and Judah [1995] Lemma 2.3.4*

Sei $\langle S_n : n \in \omega \rangle$ eine Folge von Elementen aus $\mathcal{C}$. Dann gibt es ein $S \in \mathcal{C}$, sodass $S_n \subseteq^* S$ für alle $n \in \omega$.

Beweis. Sei $\langle n_k : k \in \omega \rangle$ eine streng monoton wachsende Folge von natürlichen Zahlen. Wir definieren für $n_{k+1} \geq j > n_k$:

$$S(j) = \bigcup_{i \leq k} S_i(j)$$

Man kann leicht sehen, dass $S_n \subseteq^* S$ unabhängig von der Wahl von $\langle n_k : k \in \omega \rangle$ gilt. Weiters gilt $S \in \mathcal{C}$, falls die Folge $\langle n_k : k \in \omega \rangle$ schnell genug wächst. □

Nun können wir die Funktionen φ_2 und φ_2^* beschreiben.

Lemma 2.1.5. *Bartoszyński and Judah [1995] Lemma 2.3.3*

$\mathcal{C} \preceq_T \mathcal{N}$. D.h. es gibt Funktionen $\varphi_2 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{N}$ und $\varphi_2^* : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$, sodass für jedes $S \in \mathcal{C}$ und jedes $G \in \mathcal{N}$ gilt:

$$\varphi_2(S) \subseteq G \quad \longrightarrow \quad S \subseteq^* \varphi_2^*(G)$$

Beweis. Wir arbeiten im Cantor-Raum 2^ω versehen mit dem Standardproduktmaß μ . Mit Hilfe von Lemma 2.1.3. können wir eine μ -unabhängige Folge von offenen Mengen $\{G_{i,j} : i, j \in \omega\}$ fixieren, sodass $\mu(G_{i,j}) = i^{-2}$ für $i, j \in \omega$. Mit μ -unabhängig meinen wir hier, dass $\mu(G_{i_1,j_1} \cap G_{i_2,j_2}) = \mu(G_{i_1,j_1}) \cdot \mu(G_{i_2,j_2})$ gilt, wenn $i_1 \neq i_2$ oder $j_1 \neq j_2$ ist. Für jedes $S \in \mathcal{C}$ definieren wir:

$$\varphi_2(S) = G_S = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{m > n} \bigcup_{k \in S(m)} G_{m,k}$$

Für das Maß $\mu(G_S)$ gilt nun:

$$\mu \left(\bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{m > n} \bigcup_{k \in S(m)} G_{m,k} \right) \leq \mu \left(\bigcup_{m > n} \bigcup_{k \in S(m)} G_{m,k} \right) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \frac{|S(m)|}{m^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Somit ist $\varphi_2(S) = G_S \in \mathcal{N}$ für jedes $S \in \mathcal{C}$.

Nun widmen wir uns der Definition von φ_2^* . Sei $G \in \mathcal{N}$ eine Nullmenge. Dann gibt es für jedes $n \in \omega$ eine offene Menge $U_n \subseteq 2^\omega$ mit $G \subseteq U_n$ und $\mu(U_n) < \frac{1}{n}$. Somit gilt $\mu(2^\omega \setminus U_n) \geq 1 - \frac{1}{n}$. Die Menge $2^\omega \setminus U_n$ ist abgeschlossen und, da 2^ω kompakt ist, auch kompakt. D.h. wir können eine kompakte Menge $K^G \subseteq 2^\omega$ mit positivem Maß finden, sodass $K^G \cap G = \emptyset$ gilt. O.B.d.A. können wir annehmen, dass die Menge K^G zusätzlich noch die folgende Eigenschaft besitzt. Für jede offene Menge $U \subseteq 2^\omega$ gilt:

$$K^G \cap U \neq \emptyset \iff \mu(K^G \cap U) > 0$$

Um das zu zeigen, sei K eine kompakte Menge mit positivem Maß und $K \cap G = \emptyset$, deren Existenz wir gerade gezeigt haben. Sei $\{U_n : n \in \omega\}$ eine Basis von offenen Mengen. Falls für jedes $n \in \omega$

$$K \cap U_n \neq \emptyset \implies \mu(K \cap U_n) > 0$$

gilt sind wir fertig und können $K^G = K$ setzen. Ansonsten definieren wir:

$n_0 = \min\{n \in \omega : U_n \cap K \neq \emptyset \text{ und } \mu(U_n \cap K) = 0\}$. Weiters sei $K_{n_0} = K \setminus (K \cap U_{n_0})$. Diese Menge ist wieder kompakt und es gilt $\mu(K_{n_0}) = \mu(K) - \mu(K \cap U_{n_0}) = \mu(K)$. Induktiv können wir nun $n_{i+1} > n_i$ und K_{n_i} definieren. Nun sei $K^G = \bigcap_{i \in \omega} K_{n_i}$. Diese Menge ist wieder kompakt und für ihr Maß gilt $\mu(K^G) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(K_{n_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(K) = \mu(K) > 0$. Diese Menge erfüllt nun die geforderte Eigenschaft.

Sei nun $\langle U_n : n \in \omega \rangle$ eine Aufzählung von allen Basismengen der offenen Mengen in 2^ω , welche K^G schneiden.

Weiters definieren wir für $n, i \in \omega$:

$$A_{n,i}^G = \{j \in \omega : K^G \cap U_n \cap G_{i,j} = \emptyset\}$$

Aus den vorigen Definitionen und da $G_{i,j}$ μ -unabhängig sind, folgt für alle $n \in \omega$:

$$0 < \mu(K^G \cap U_n) \leq \prod_{i \in \omega} \prod_{j \in A_{n,i}^G} \mu(2^\omega \setminus G_{i,j})$$

Und somit folgt weiters:

$$0 < \prod_{i \in \omega} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right)^{|A_{n,i}^G|}$$

Das ist nun äquivalent zu:

$$\prod_{i \in \omega} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{i^2}\right)^{|A_{n,i}^G|}} < \infty$$

Was wieder äquivalent ist zu:

$$\sum_{i \in \omega} \left(|A_{n,i}^G| \cdot \ln \left(\frac{i^2}{i^2 - 1} \right) \right) < \infty$$

Mit Hilfe der Abschätzung $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x)$ für $x \geq 1$ erhalten wir:

$$\infty > \sum_{i \in \omega} \left(|A_{n,i}^G| \cdot \ln \left(\frac{i^2}{i^2 - 1} \right) \right) \geq \sum_{i \in \omega} \left(|A_{n,i}^G| \cdot \left(1 - \frac{i^2 - 1}{i^2} \right) \right)$$

Und somit insgesamt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|A_{n,i}^G|}{i^2} < \infty \quad \forall n \in \omega$$

Somit gilt $\langle A_{n,i}^G : i \in \omega \rangle \in \mathcal{C}$ für alle $n \in \omega$.

Definiere nun $\varphi_2^*(G) = S_G \in \mathcal{C}$ als ein beliebiges Element $S \in \mathcal{C}$, sodass:

$$\forall n \forall^\infty i \ A_{n,i}^G \subseteq S(i)$$

Die Existenz von so einem S folgt aus Lemma 2.1.4..

Zuletzt müssen wir noch zeigen, dass beide Funktionen die notwendigen Eigenschaften besitzen.

Wir nehmen an, dass $S \in \mathcal{C}$, $G \in \mathcal{N}$ und, dass:

$$\varphi_2(S) = G_S = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{m > n} \bigcup_{k \in S(m)} G_{m,k} \subseteq G$$

Dann folgt:

$$K^G \cap \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{m > n} \bigcup_{k \in S(m)} G_{m,k} = \emptyset$$

Da K^G eine kompakte Menge ist und G_S eine Menge vom Typ G_δ ist, folgt aus dem Satz von Baire, dass es eine offene Basismenge U_n gibt, sodass $K^G \cap U_n \neq \emptyset$ und für ausreichend großes $i_0 \in \omega$ folgendes gilt:

$$(K^G \cap U_n) \cap \bigcup_{m > i_0} \bigcup_{k \in S(m)} G_{m,k} = \emptyset$$

Um das zu zeigen, nehmen wir das Gegenteil an. Wir nehmen an, für jedes $i_0 \in \omega$ und jedes $n \in \omega$ gilt:

$$(K^G \cap U_n) \cap \bigcup_{m > i_0} \bigcup_{k \in S(m)} G_{m,k} \neq \emptyset$$

Da die U_n eine Basis von den offenen Mengen in K^G bilden, erhalten wir, dass die Mengen $A_{i_0} := \bigcup_{m > i_0} \bigcup_{k \in S(m)} G_{m,k}$ dicht in K^G sind. Nun folgt aus dem Satz von Baire, dass die Menge $\bigcap_{i_0 \in \omega} A_{i_0}$ auch dicht in K^G ist und somit gilt:

$$(K^G \cap U_n) \cap \bigcap_{i_0 \in \omega} A_{i_0} \neq \emptyset$$

was einen Widerspruch liefert.

Somit gilt für ausreichend große m :

$$S(m) \subseteq A_{n,m}^G \subseteq S_G(m)$$

Da $G \in \mathcal{N}$ und $S \in \mathcal{C}$ beliebig waren, haben wir das Lemma bewiesen. $\square$

Satz 2.1.6. *von Baire (Kechris [2012] Theorem 8.4 + Proposition 8.1)*

Jeder vollständige metrische Raum ist Baire.

D.h. es gelten die folgenden äquivalenten Aussagen, (wobei X der topologische Raum ist):

1. Jede nichtleere offene Menge in X ist nicht mager.
2. Jede komagere Menge in X ist dicht. (D.h. das Komplement von einer mageren Menge ist dicht.)
3. Der Durchschnitt von abzählbare vielen dichten offenen Mengen in X ist dicht.

Das nächste Lemma gibt uns ein technisches Werkzeug, das wir zur Beschreibung der letzten beiden Funktionen benötigen werden.

Lemma 2.1.7. *Bartoszyński and Judah [1995] Lemma 2.3.5*

Sei $U \subseteq 2^\omega$ eine nichtleere offene Menge und sei $\tilde{n}$ eine natürliche Zahl, dann existiert eine abzählbare Familie $\mathcal{V}$ von offenen Teilmengen von U , sodass folgende Eigenschaften gelten:

- (i) Jede offene dichte Teilmenge von 2^ω ist eine Obermenge von einem Element aus $\mathcal{V}$.
- (ii) Der Schnitt von $\tilde{n}$ Elementen von $\mathcal{V}$ ist nicht leer.

Beweis. Sei $\langle U_n : n \in \omega \rangle$ eine Aufzählung von allen nichtleeren clopen Teilmengen von U , wobei jedes U_n abzählbar unendlich oft vorkommt. Für $k \in \omega$ definieren wir:

$$A_k := \left\{ n > k : U_n \cap \bigcap_{i \in I} U_i \neq \emptyset \ \forall I \subseteq k+1 \text{ mit } \bigcap_{i \in I} U_i \neq \emptyset \right\}$$

Nun setzen wir:

$$\mathcal{V} := \left\{ \bigcup_{i \leq \tilde{n}} U_{m_i} : m_0 \in \omega, m_{i+1} \in A_{m_i} \text{ für } i < \tilde{n} \right\}$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass $\mathcal{V}$ die beiden Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt.

(i) Sei D eine dichte offene Teilmenge von 2^ω .

Sei $k \in \omega$ beliebig. Wir definieren die Menge $\mathcal{I} := \{I \subseteq k+1 : \bigcap_{i \in I} U_i \neq \emptyset\}$. Es gilt offensichtlich $|\mathcal{I}| < \infty$. Sei $I \in \mathcal{I}$ beliebig. Aus der Dichtheit von D folgt, dass $D \cap \bigcap_{i \in I} U_i \neq \emptyset$ gilt. Weiters gilt, da sowohl D als auch $\bigcap_{i \in I} U_i$ offen sind, dass $D \cap \bigcap_{i \in I} U_i$ offen ist. Somit gibt es nun ein $n_I \in \omega$ mit $U_{n_I} \subseteq D \cap \bigcap_{i \in I} U_i$. Nun betrachten wir die Menge $\bigcup_{I \in \mathcal{I}} U_{n_I}$, die als Vereinigung endlich vieler clopen Mengen selbst wieder clopen ist. D.h. es existiert ein $j \in \omega$ mit $U_j = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} U_{n_I}$. Wir können speziell $j > k$ annehmen, da jedes U_n unendlich oft in unserer Aufzählung vorkommt. Es gilt $U_j \subseteq D$. Sei $J \in \mathcal{I}$ beliebig, dann gilt:

$$U_j \cap \bigcap_{i \in J} U_i = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} U_{n_I} \cap \bigcap_{i \in J} U_i \supseteq U_{n_J} \cap \bigcap_{i \in J} U_i \neq \emptyset$$

Somit erhalten wir, dass $A_k \cap \{n \in \omega : U_n \subseteq D\} \neq \emptyset$ gilt für alle $k \in \omega$. Nun definieren wir durch Induktion eine Folge $\{m_i : i \leq \tilde{n}\}$, sodass $U_{m_i} \subseteq D$ und $m_{i+1} \in A_{m_i}$ für $i < \tilde{n}$. Offensichtlich gilt $D \supseteq \bigcup_{i \leq \tilde{n}} U_{m_i} \in \mathcal{V}$.

(ii) Seien $V_1, V_2, \dots, V_{\tilde{n}} \in \mathcal{V}$. Für $j \leq \tilde{n}$ sei $V_j = \bigcup_{i \leq \tilde{n}} U_{m_i^j}$, wobei $m_0^j \in \omega$ und $m_{i+1}^j \in A_{m_i^j}$ für $i < \tilde{n}$ und $j \leq \tilde{n}$. Nun ordnen wir die Mengen V_j so, dass $m_i^i \leq m_i^j$ gilt für $i \leq j \leq \tilde{n}$. Mit Hilfe von Induktion werden wir jetzt zeigen, dass $\bigcap_{j \leq \tilde{n}} V_j \supseteq \bigcap_{j \leq \tilde{n}} U_{m_j^j} \neq \emptyset$ gilt. Man sieht leicht, dass $V_1 \supseteq U_{m_1^1} \neq \emptyset$ gilt. Weiters gilt für $j < k$: $A_j \supseteq A_k$. Außerdem gilt wegen $m_{i+1}^j \in A_{m_i^j}$: $m_n^n \geq m_{n-1}^n \geq m_{n-1}^{n-1}$ und somit induktiv $m_n^n \geq m_i^i$ für $1 \leq i \leq n$. Wir nehmen an, wir haben für $n < \tilde{n}$ schon gezeigt, dass $\bigcap_{j \leq n} V_j \supseteq \bigcap_{j \leq n} U_{m_j^j} \neq \emptyset$ gilt. Wir wissen, dass $m_{n+1}^{n+1} \in A_{m_n^{n+1}} \subseteq A_{m_n^n}$ gilt. Somit folgt wegen $m_n^n \geq m_i^i$ für $1 \leq i \leq n$ und $\bigcap_{j \leq n} V_j \supseteq \bigcap_{j \leq n} U_{m_j^j} \neq \emptyset$, dass $\bigcap_{j \leq n+1} V_j \supseteq \bigcap_{j \leq n+1} U_{m_j^j} \neq \emptyset$ gilt. $\square$

Das nächste Lemma beschreibt uns nun die fehlenden Funktionen φ_1 und φ_1^* .

Lemma 2.1.8.

Sei $(\mathcal{P}, \leq)$ eine partielle Ordnung und $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}$ eine kofinale Menge, dann gilt $\mathcal{P}_0 \equiv_T \mathcal{P}$.

Beweis. Wir betrachten die Funktion $\text{id} : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{P}$, die Identität auf $\mathcal{P}_0$. Da die Menge $\mathcal{P}_0$ kofinal ist, gibt es für jedes $p \in \mathcal{P}$ ein $q \in \mathcal{P}_0$ mit $p \leq q$. Somit können wir uns nun eine Funktion $\text{id}^* : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_0$ definieren, die jedem $p \in \mathcal{P}$ eine beliebige obere Schranke in $\mathcal{P}_0$ zuordnet. Wir behaupten die Funktionen id und id^* sind beides Tukey-Funktionen und zueinander dual.

Dafür sei $p_0 \in \mathcal{P}_0$ und $p \in \mathcal{P}$ beliebig mit $\text{id}(p_0) \leq p$. Somit gilt nun, wegen $p \leq \text{id}^*(p)$: $p_0 = \text{id}(p_0) \leq p \leq \text{id}^*(p)$. Somit ist $\text{id} : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{P}$ ein Tukey-Funktion.

Nun sei $p_0 \in \mathcal{P}_0$ und $p \in \mathcal{P}$ mit $\text{id}^*(p) \leq p_0$. Wegen $p \leq \text{id}^*(p)$ folgt nun: $p \leq \text{id}^*(p) \leq p_0 = \text{id}(p_0)$. Somit ist $\text{id}^* : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_0$ eine Tukey-Funktion. Insgesamt erhalten wir nun $\mathcal{P}_0 \equiv_T \mathcal{P}$. $\square$

Lemma 2.1.9. *Bartoszyński and Judah [1995] Lemma 2.3.6*

$\mathcal{M} \preceq_T \mathcal{C}$. Beziehungsweise anders formuliert: Es gibt Funktionen $\varphi_1 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ und $\varphi_1^* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$, sodass für jede Menge $F \in \mathcal{M}$ und jede Funktion $S \in \mathcal{C}$ gilt:

$$\varphi_1(F) \subseteq^* S \quad \longrightarrow \quad F \subseteq \varphi_1^*(S)$$

Beweis. Für jedes $n \in \omega$ sei $\mathcal{V}_n = \{V_m^n : m \in \omega\}$ die in Lemma 2.1.7. konstruierte Familie für $U = U_n$ und $\tilde{n} = n^2$.

Wegen Lemma 2.1.8. reicht es, wenn wir die Funktion φ_1 nur auf einer Basis von $\mathcal{M}$ betrachten. Wir definieren die φ_1 auf der Standardbasis von $\mathcal{M}$. Sei $F \in \mathcal{M}$ eine magere Menge von Typ F_σ . Wir können F schreiben als Vereinigung einer aufsteigenden Folge von abgeschlossenen nirgends dichten Mengen $\langle F_n : n \in \omega \rangle$.

Nun definieren wir $\varphi_1(F) = S_F \in \omega^\omega \subseteq \mathcal{C}$ als:

$$S_F(n) = \min\{k \in \omega : F_n \cap V_k^n = \emptyset\} \text{ für } n \in \omega$$

Da F_n nirgends dicht und abgeschlossen ist, ist die Menge $D := 2^\omega \setminus F_n$ offen und dicht und laut Lemma 2.1.7. gibt es ein $k \in \omega$ mit $V_k^n \subseteq D$. Also gilt für dieses k : $F_n \cap V_k^n = \emptyset$ und somit ist die obige Definition von $S_F(n)$ korrekt.

Nun definieren wir die Funktion φ_1^* . Sei $S \in \mathcal{C}$ gegeben, dann definieren wir $\varphi_1^*(S) \in \mathcal{M}$ durch:

$$\varphi_1^*(S) = F^S = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{m \geq n} \bigcap_{i \in S(m)} V_i^m$$

Da $|S(m)| \leq m^2$ für alle bis auf endlich viele $m \in \omega$ gilt, erhalten wir durch Lemma 2.1.7. für fast alle m :

$$\emptyset \neq \bigcap_{i \in S(m)} V_i^m \subseteq U_m$$

Somit gilt $F^S \in \mathcal{M}$.

Wir nehmen nun an, dass $\varphi_1(F) = S_F \subseteq^* S$ gilt. D.h. es existiert ein $n_0 \in \omega$, sodass $S_F(m) \in S(m)$ für $m \geq n_0$.

Wir beobachten, dass nun die Mengen

$$\bigcup_{m \geq n} \bigcap_{i \in S(m)} V_i^m \subseteq \bigcup_{m \geq n} \bigcap_{i \in S_F(m)} V_i^m$$

disjunkt zu F_n für $n \geq n_0$ sind.

Somit gilt nun $\varphi_1^*(S) = F^S \supseteq F$, was nun das Lemma beweist. $\square$

Beweis von Lemma 2.1.1. Die Funktion $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ist als Zusammensetzung zweier Tukey-Funktionen wieder eine Tukey-Funktion. $\square$

Satz 2.1.10. *Bartoszyński and Judah [1995] Theorem 2.3.7*
 $\text{add}(\mathcal{N}) \leq \text{add}(\mathcal{M})$ und $\text{cof}(\mathcal{M}) \leq \text{cof}(\mathcal{N})$.

Beweis. Dieser Satz folgt direkt aus Lemma 2.0.12. und Lemma 2.1.1. $\square$

2.2 Dominierende und beschränkte Kardinalität

Nun widmen wir uns den Abschätzungen für $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{b}$.

Dafür sei $\mathcal{K}$ das σ -Ideal generiert durch kompakte Teilmengen von ω^ω .

Lemma 2.2.1. *Bartoszyński and Judah [1995] Lemma 1.2.3*

Sei $K \subseteq \omega^\omega$ eine abgeschlossene Menge, dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) K ist kompakt.
- (ii) Es gibt einen Baum T , sodass die Menge der direkten Nachfolger $\text{succ}_T(t)$ endlich ist für jedes $t \in T$ und mit $K = [T]$.
- (iii) Es gibt ein $f \in \omega^\omega$ mit $K \subseteq \{x \in \omega^\omega : \forall n \in \omega \ x(n) < f(n)\}$.

Beweis. (i)→(ii) Da K abgeschlossen ist, gibt es einen Baum T mit $K = [T]$. Wir nehmen an, es gebe ein $n \in \omega$ mit T_n unendlich. (Wobei T_n das n -te Level des Baums beschreibt.) Dann ist die Menge $\{[s] : s \in T_n\}$ eine offene Überdeckung für K , für die es keine endliche Teilüberdeckung von K gibt. Somit hätten wir einen Widerspruch zur Kompaktheit von K .

(ii)→(iii) Sei T ein Baum mit $[T] = K$ und $|\text{succ}_T(t)| < \infty$ für jedes $t \in T$. Daraus folgt, dass für jedes $n \in \omega$ gilt, dass $|T_n| < \infty$. Somit können wir eine Funktion $f \in \omega^\omega$ folgendermaßen definieren. $f(n) = \max\{s(n) : s \in T_n\} + 1$. Nun gilt offensichtlich für jedes $x \in K$: $x(n) < f(n)$ für jedes $n \in \omega$.

(iii)→(i) Sei $K \subseteq \{x \in \omega^\omega : \forall n \in \omega \ x(n) < f(n)\}$.

Es reicht zu zeigen, dass $C := \{x \in \omega^\omega : \forall n \in \omega \ x(n) < f(n)\}$ kompakt ist, denn dann ist K als abgeschlossene Teilmenge von C kompakt. Für $n \in \omega$ definieren wir die Mengen $X_n := \{i \in \omega : i < f(n)\}$. Da für jedes $n \in \omega$ die Menge X_n endlich ist, ist sie somit auch kompakt. Nun gilt $C = \prod_{n \in \omega} X_n$ ist als Produkt von kompakten Mengen wieder kompakt (Tychonoff). $\square$

Lemma 2.2.2.

Jede kompakte Teilmenge von ω^ω ist nirgends dicht. Speziell gilt $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$.

Beweis. Sei K eine kompakte Teilmenge von ω^ω . Da K abgeschlossen ist, müssen wir nur zeigen, dass K ein leeres Inneres besitzt. D.h. wir müssen für jede offene Basismenge zeigen, dass sie nicht ganz in K liegen kann. Es gibt wegen Lemma 2.2.1. einen Baum T mit $K = [T]$, sodass die Menge der direkten Nachfolger $\text{succ}_T(t)$ endlich ist für jedes $t \in T$. Sei $[s]$ mit $s \in \omega^{<\omega}$ eine beliebige Basismenge. Angenommen es gelte $[s] \subseteq K$, dann müsste aber auch $s \in T$ und $s \frown n \in T$ gelten für jedes $n \in \omega$. Somit hätte s unendlich viele direkte Nachfolger in T , was uns einen Widerspruch liefert. $\square$

Lemma 2.2.3.

$$\mathcal{K} = \{A \subseteq \omega^\omega : \exists f \in \omega^\omega \forall g \in A \ g \leq^* f\}$$

Beweis. Für die $\subseteq$ -Richtung sei C eine σ -kompakte Menge (d.h. $C \in \mathcal{K}$). D.h. es gibt kompakte $C_i \subseteq \omega^\omega$ für $i \in \omega$. Aus Lemma 2.2.1. folgt, dass es für jedes C_i eine Funktion $f_i \in \omega^\omega$ gibt mit: $C_i \subseteq \{x \in \omega^\omega : x(n) < f_i(n) \ \forall n \in \omega\}$. Nun definieren wir eine Funktion $f \in \omega^\omega$ folgendermaßen:

$$f(n) := \max\{f_i(n) : i \leq n\}$$

Sei nun $x \in C$ beliebig, dann gibt es ein $i \in \omega$ mit $x(n) < f_i(n)$ für jedes $n \in \omega$. Da $f_i(n) \leq f(n)$ gilt für jedes $i \leq n$, gilt $x(n) < f(n)$ für alle $n \geq i$. Also erhalten wir insgesamt: $x \leq^* f$.

Für die $\supseteq$ -Richtung sei $f \in \omega^\omega$ und $A \subseteq \{g \in \omega^\omega : g \leq^* f\}$ gegeben. Für $i \in \omega$ definieren wir jetzt folgende Mengen:

$$C_i := \{g \in \omega^\omega : g(i) > f(i) \text{ und } g(n) \leq f(n) \ \forall n > i\}$$

Somit gilt $A \subseteq \bigcup_{i \in \omega} C_i$. Es reicht zu zeigen, dass für jedes $i \in \omega$ gilt: $A_i \in \mathcal{K}$. Das können wir mittels Induktion zeigen, indem wir passende $B_j^i \in \mathcal{K}$ mit $A_i \subseteq \bigcup_{j \in \omega} B_j^i$ finden. Wir definieren:

$$B_j^i = \bigcup_{j \in \omega} \{g \in \omega^\omega : g(i) \leq j \text{ und } g(n) \leq f(n) \ \forall n > i\}$$

Es gilt offensichtlich $A_i \subseteq \bigcup_{j \in \omega} B_j^i$ und mit Hilfe von Induktion kann man leicht sehen, dass $B_j^i \in \mathcal{K}$ gilt. $\square$

Lemma 2.2.4. *Bartoszyński and Judah [1995] Lemma 2.2.1*

Es gelten $\text{add}(\mathcal{K}) = \text{non}(\mathcal{K}) = \mathfrak{b}$ und $\text{cov}(\mathcal{K}) = \text{cof}(\mathcal{K}) = \mathfrak{d}$.

Beweis. Aus Lemma 2.2.3. folgt, dass $X \subseteq \omega^\omega$ genau dann σ -kompakt ist, wenn es eine Funktion $f \in \omega^\omega$ gibt mit $X \subseteq C_f = \{g \in \omega^\omega : g \leq^* f\}$.

Sei nun $F \subseteq \omega^\omega$. Falls F eine dominierende Familie ist, dann ist die Menge $\{C_f : f \in F\}$ eine Basis von $\mathcal{K}$. Somit haben wir $\text{cof}(\mathcal{K}) \leq \mathfrak{d}$. Umgekehrt sei $\bigcup_{f \in F} C_f = \omega^\omega$, dann

ist F eine dominierende Familie und wir erhalten somit $\mathfrak{d} \leq \text{cov}(\mathcal{K})$. Aus Lemma 2.0.7. erhalten wir $\text{cov}(\mathcal{K}) \leq \text{cof}(\mathcal{K})$ und somit insgesamt $\text{cov}(\mathcal{K}) = \text{cof}(\mathcal{K}) = \mathfrak{d}$.

Sei F unbeschränkt in ω^ω , dann gilt $F \notin \mathcal{K}$, womit wir $\text{non}(\mathcal{K}) \leq \mathfrak{b}$ erhalten. Nun sei $\bigcup_{f \in F} C_f \notin \mathcal{K}$, dann ist F unbeschränkt in ω^ω und somit gilt $\mathfrak{b} \leq \text{add}(\mathcal{K})$. Aus Lemma 2.0.7. erhalten wir $\text{add}(\mathcal{K}) \leq \text{non}(\mathcal{K})$ und somit insgesamt $\text{add}(\mathcal{K}) = \text{non}(\mathcal{K}) = \mathfrak{b}$. $\square$

Der nächste Satz gibt uns einen Zusammenhang zwischen σ -kompakten und mageren Teilmengen von ω^ω .

Satz 2.2.5. *Bartoszyński and Judah [1995] Theorem 2.2.2*

$(\omega^\omega, \leq^*) \preceq_T \mathcal{M}$

Beweis. Für $f \in \omega^\omega$ sei $f'(n) = \max\{f(j) : j \leq n\} + 1$ für $n \in \omega$.

Wir definieren die Funktion $\varphi : \omega^\omega \rightarrow \mathcal{M}$ als:

$$\varphi(f) = \{x \in \omega^\omega : x \leq^* f'\}$$

Offensichtlich gilt $\varphi(f) \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$.

Wir werden zeigen, dass es sich bei φ um eine Tukey-Funktion handelt. Dafür definieren wir die Funktion $\varphi^* : \mathcal{M} \rightarrow \omega^\omega$ folgendermaßen: Sei F eine magere Menge von Typ F_σ . Dann gibt es eine Folge von abgeschlossenen nirgends dichten Mengen $\langle F_n : n \in \omega \rangle$, sodass $F = \bigcup_{n \in \omega} F_n$ ist. Durch Induktion definieren wir nun zwei Folgen $\langle k_n : n \in \omega \rangle$ und $\langle s_n : n \in \omega \rangle$. Wobei k_n natürliche Zahlen und s_n endliche Folgen sind. Wir setzen $k_0 = 0$ und nehmen an, dass k_n schon definiert sind. Nun definieren wir

$$s_n = \min\{s \in \omega^{<\omega} : \forall t \in k_n^{\leq k_n} \forall i \leq n [t \cap s] \cap F_i = \emptyset\}$$

(Wobei das Minimum in Hinsicht eine Aufzählung von $\omega^{<\omega}$ mit Ordnungstyp ω geben ist.) Weiters definieren wir

$$k_{n+1} = k_n + |s_n| + \max\{s_n(i) : i \leq |s_n|\} + 1$$

Nun definieren wir $\varphi^*(F) = f_F$, wobei

$$f_F(n) = \max\{s_n(i) : i \leq |s_n|\} \text{ für } n \in \omega$$

Nun müssen wir noch überprüfen, dass $f \leq^* f_F$ gilt, falls $\varphi(f) \subseteq F$.

Dafür nehmen wir an es gilt $f \not\leq^* f_F$. D.h. es gibt eine unendliche Folge $X \subseteq \omega$, sodass $f(n) \geq f_F(n)$ für alle $n \in X$. Jetzt müssen wir ein $x \in \omega^\omega$ finden, sodass $x \in \varphi(f) \setminus F$ gilt.

Sei $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ eine aufsteigende Aufzählung von X . Wir definieren $x \in \omega^\omega$ folgendermaßen:

$$x = \underbrace{0 \smallfrown 0 \smallfrown \dots \smallfrown 0}_{k_{x_1} \text{ mal}} \smallfrown s_{x_1} \underbrace{0 \smallfrown 0 \smallfrown \dots \smallfrown 0}_{k_{x_2} - k_{x_1} - |s_{x_1}| \text{ mal}} \smallfrown s_{x_2} \dots$$

Somit gilt für jedes $i \in \omega$ $x \in [(x \restriction k_{x_i}) \cap s_{x_i}]$ und daraus erhalten wir aus der Definition von s_{x_i} , dass $x \notin F_j$ gilt für $j \leq x_i$. Da die x_i eine streng wachsende Folge bilden, erhalten wir insgesamt: $x \notin F = \bigcup_{n \in \omega} F_n$.

Um zu zeigen, dass $x \in \varphi(f)$ gilt, müssen wir überprüfen, dass $x(n) < f'(n)$ gilt für alle bis auf endlich viele $n \in \omega$. So wie wir x definiert haben, gilt nun für $i \in \omega$: $x(i) = 0$ oder $x(i) = s_{x_j}(l)$ für ein j mit $k_{x_j} \leq i$ und ein $l \leq |s_{x_j}|$. Falls $x(i) = 0$, dann gilt wegen der Definition von f' offensichtlich $x(i) < f'(i)$. Nun betrachten wir den Fall $x(i) = s_{x_j}(l)$. Nun gilt $x(i) \leq f_F(x_j) \leq f(x_j) \leq f'(i)$, wobei die letzte Ungleichung wegen $x_j \leq k_{x_j} \leq i$ gilt.

Somit haben wir insgesamt $x \in \varphi(f) \setminus F$, was den Beweis beendet. $\square$

Der folgende Satz ist eine direkte Folgerung aus dem vorigen Satz und ist von besonderer Wichtigkeit, um die Kardinalitäten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$ abzuschätzen.

Satz 2.2.6. *Bartoszyński and Judah [1995] Theorem 2.2.3*

$\text{add}(\mathcal{K}) = \text{add}(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ und $\text{cof}(\mathcal{K}) = \text{cof}(\mathcal{K}, \mathcal{M})$.

Beweis. Wegen $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ folgt aus Lemma 2.0.7. $\text{add}(\mathcal{K}) \leq \text{add}(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ und $\text{cof}(\mathcal{K}) \geq \text{cof}(\mathcal{K}, \mathcal{M})$.

Nun wollen wir die anderen beiden Ungleichungen zeigen, dafür sei $\{C_\alpha \in \mathcal{K} : \alpha < \text{add}(\mathcal{K})\}$ eine Familie von Elementen von $\mathcal{K}$, sodass $\bigcup_{\alpha < \text{add}(\mathcal{K})} C_\alpha \notin \mathcal{K}$ gilt. Für jedes α finden wir ein $f_\alpha \in \omega^\omega$, sodass $C_\alpha \subseteq \{x \in \omega^\omega : x \leq^* f_\alpha\}$ gilt. Wir behaupten nun, dass die Menge $\bigcup_{\alpha < \text{add}(\mathcal{K})} \varphi(f_\alpha)$ nicht mager ist. Wir erinnern, dass für die Funktion φ aus Satz 2.2.5. gilt: $\varphi(f) \in \mathcal{K}$ für $f \in \omega^\omega$. Wir nehmen an, dass es eine magere Menge F gibt mit $\bigcup_{\alpha < \text{add}(\mathcal{K})} \varphi(f_\alpha) \subseteq F$. Im Beweis von Satz 2.2.5. haben wir gezeigt, dass für $\varphi(f) \subseteq F$ gilt: $f \leq^* \varphi^*(F)$. Somit gilt nun $f_\alpha \leq^* \varphi^*(F)$ für $\alpha < \text{add}(\mathcal{K})$. Daraus folgt

$$\bigcup_{\alpha < \text{add}(\mathcal{K})} C_\alpha \subseteq \{x \in \omega^\omega : x \leq^* \varphi^*(F)\} \in \mathcal{K}$$

was zu einem Widerspruch führt. Somit kann nun die Menge $\bigcup_{\alpha < \text{add}(\mathcal{K})} \varphi(f_\alpha)$ nicht mager sein und wir erhalten $\text{add}(\mathcal{K}) \geq \text{add}(\mathcal{K}, \mathcal{M})$.

Nun wollen wir die zweite Ungleichung zeigen, dafür sei $\{F_\alpha \in \mathcal{M} : \alpha < \text{cof}(\mathcal{K}, \mathcal{M})\}$ eine Familie von mageren Mengen, sodass es für jede Menge $A \in \mathcal{K}$ ein α gibt mit $A \in F_\alpha$. Sei $F = \{\varphi^*(F_\alpha) : \alpha < \text{cof}(\mathcal{K}, \mathcal{M})\}$ zuerst wollen wir zeigen, dass F eine dominierende Familie in ω^ω ist. Dafür sei $g \in \omega^\omega$ beliebig. Laut dem Beweis von Satz 2.2.5. ist $\varphi(g) \in \mathcal{K}$. Somit gibt es nun ein $\alpha < \text{cof}(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ mit $\varphi(g) \subseteq F_\alpha$ und es gilt $g \leq^* \varphi^*(F_\alpha)$. D.h. für alle $g \in \omega^\omega$ gibt es ein $\alpha < \text{cof}(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ mit $g \leq^* \varphi^*(F_\alpha)$ und somit ist F eine dominierende Familie in ω^ω . Nun betrachten wir die Familie

$$\mathcal{B} = \left\{ B_\alpha \in \mathcal{K} : \alpha < \text{cof}(\mathcal{K}, \mathcal{M}) \text{ und } B_\alpha = \{x \in \omega^\omega : x \leq^* \varphi^*(F_\alpha)\} \right\}$$

Wir behaupten $\mathcal{B}$ ist eine Basis von $\mathcal{K}$. Um das zu zeigen, sei $A \in \mathcal{K}$ beliebig, dann gibt es ein $g \in \omega^\omega$ mit $A \subseteq \{x \in \omega^\omega : x \leq^* g\}$ und ein $\alpha < \text{cof}(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ mit $g \leq^* \varphi^*(F_\alpha)$. Somit gilt nun $A \subseteq B_\alpha$, was die Behauptung zeigt. Damit erhalten wir insgesamt $\text{cof}(\mathcal{K}) \leq \text{cof}(\mathcal{K}, \mathcal{M})$. $\square$

Satz 2.2.7.

Es gelten folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \text{add}(\mathcal{M}) &\leq \mathfrak{b} \leq \text{non}(\mathcal{M}) \\ \text{cov}(\mathcal{M}) &\leq \mathfrak{d} \leq \text{cof}(\mathcal{M}) \end{aligned}$$

und

$$\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$$

Beweis. Aus Lemma 2.2.4. und Lemma 2.0.7. folgt $\mathfrak{b} = \text{add}(\mathcal{K}) \leq \text{cov}(\mathcal{K}) = \mathfrak{d}$.
Aus Lemma 2.0.7., Lemma 2.2.4. und Satz 2.2.6. erhalten wir:

$$\text{add}(\mathcal{M}) \leq \text{add}(\mathcal{K}, \mathcal{M}) = \text{add}(\mathcal{K}) = \mathfrak{b} = \text{add}(\mathcal{K}) \leq \text{non}(\mathcal{M})$$

und

$$\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \text{cof}(\mathcal{K}) = \mathfrak{d} = \text{cof}(\mathcal{K}) = \text{cof}(\mathcal{K}, \mathcal{M}) \leq \text{cof}(\mathcal{M})$$

□

Satz 2.2.8.

Es gelten alle Ungleichungen im Cichoń-Diagramm.

Beweis. Das folgt direkt aus den Lemmata 2.0.6., 2.0.8. und 2.0.10. sowie den Sätzen 2.1.10. und 2.2.7.. □

Nun wollen wir die Kardinalitäten $\text{add}(\mathcal{M})$ und $\text{cof}(\mathcal{M})$ noch genauer beschreiben.

Definition 2.2.9.

Seien eine abzählbare dichte Menge $Q = \{q_n : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{R}$ und eine wachsende Funktion $g \in \omega^\omega$ gegeben. Dann definieren wir die Menge

$$Q^g := \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{m \geq n} \left(q_m - \frac{1}{g(m)}, q(m) + \frac{1}{g(m)} \right)$$

Die Menge Q^g ist, wegen des Satzes von Baire, als Durchschnitt von abzählbar vielen dichten offenen Mengen, wieder eine dichte Menge. Außerdem ist Q^g offensichtlich eine G_δ Menge.

Lemma 2.2.10. *Bartoszyński and Judah [1995] Lemma 2.2.7*

Sei F eine abgeschlossene nirgends dichte Menge und Q eine abzählbare dichte Menge, sodass $Q \cap F$ endlich ist, dann gibt es eine Funktion $g^F \in \omega^\omega$, sodass $Q^g \cap F = \emptyset$ gilt für jedes $g \in \omega^\omega$ mit $g^F \leq^* g$.

Beweis. Sei $Q = \{q_n : n \in \omega\}$. Dann gibt es ein n_0 , sodass $q_n \notin F$ gilt für jedes $n \geq n_0$. Wir definieren nun die Funktion g^F folgendermaßen:

$$g^F(n) = \min \left\{ k \in \omega : \left(q_n - \frac{1}{k}, q_n + \frac{1}{k} \right) \cap F = \emptyset \right\} \text{ für } n \geq n_0$$

$g^F(n)$ für $n < n_0$ können wir beliebig definieren. Sei nun ein g mit $g(n) \geq g^F(n)$ für alle $n \geq n_1$ gegeben. Dann gilt offensichtlich für alle $n \geq \max(n_0, n_1)$:

$$F \cap \bigcup_{m \geq n} \left(q_n - \frac{1}{g(m)}, q_n + \frac{1}{g(m)} \right) = \emptyset$$

Somit folgt nun $F \cap Q^g = \emptyset$. □

Lemma 2.2.11. *Bartoszyński and Judah [1995] Lemma 2.2.8*

Sei $\aleph_0 < \kappa < \text{cov}(\mathcal{M})$ und $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ eine Familie von mageren Mengen. Dann gibt es eine abzählbare dichte Menge $Q \subseteq \mathbb{R}$ mit:

$$Q \cap \bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha = \emptyset$$

Beweis. Für $\alpha < \kappa$ definieren wir die Mengen

$$F'_\alpha := F_\alpha + \mathbb{Q} = \{x + q : x \in F_\alpha, q \in \mathbb{Q}\}$$

Die Mengen F'_α sind wieder mager (als abzählbare Vereinigung von mageren Mengen). Somit gibt es wegen $\kappa < \text{cov}(\mathcal{M})$, ein $z \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\alpha < \kappa} F'_\alpha$. Die Menge $Q := z + \mathbb{Q}$ ist nun eine abzählbare dichte Menge. Angenommen es gäbe ein $x \in Q \cap \bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha$, dann gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x = z + q$ und ein $\alpha < \kappa$ mit $x \in F_\alpha$. Somit gilt aber $z = x - q \in F'_\alpha$, was ein Widerspruch zu der Wahl von z war. Somit gilt nun $Q \cap \bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha = \emptyset$. □

Satz 2.2.12. *Bartoszyński and Judah [1995] Theorem 2.2.6*

$\text{add}(\mathcal{M}) = \min(\mathfrak{b}, \text{cov}(\mathcal{M}))$

Beweis. Aus Satz 2.2.8. wissen wir, dass $\text{add}(\mathcal{M}) \leq \min(\mathfrak{b}, \text{cov}(\mathcal{M}))$ gilt. Um die andere Ungleichung zu zeigen, sei $\aleph_0 < \kappa < \min(\mathfrak{b}, \text{cov}(\mathcal{M}))$ beliebig. Sei $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ eine Familie von mageren F_σ Mengen. D.h. für jedes $\alpha < \kappa$ gibt es abgeschlossene nirgends dichte Mengen F_n^α $n \in \omega$ mit $F_\alpha = \bigcup_{n \in \omega} F_n^\alpha$. Nun betrachten wir die Familie $\{F_n^\alpha : n \in \omega, \alpha < \kappa\}$. Es gilt $|\{F_n^\alpha : n \in \omega, \alpha < \kappa\}| = \kappa$. Sei Q die abzählbare dichte Menge aus Lemma 2.2.11.. Mit Hilfe von Lemma 2.2.10. erhalten wir nun Funktionen $g_n^{F_n^\alpha} \in \omega^\omega$ für $\alpha < \kappa$ und $n \in \omega$. Aus $\kappa < \mathfrak{b}$ gibt es nun eine Funktion $g \in \omega^\omega$ mit $g_n^{F_n^\alpha} \leq^* g$ für jedes $\alpha < \kappa$ und jedes $n \in \omega$. Somit gilt nun wegen Lemma 2.2.10.:

$$Q^g \cap \bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha = Q^g \cap \bigcup_{\alpha < \kappa} \bigcup_{n \in \omega} F_n^\alpha = \emptyset$$

Da Q^g eine dichte G_δ Menge ist, ist $\bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha$ als Teilmenge von $\mathbb{R} \setminus Q^g$ eine magere Menge. Somit gilt nun $\text{add}(\mathcal{M}) \leq \min(\mathfrak{b}, \text{cov}(\mathcal{M}))$. □

Satz 2.2.13. *Bartoszyński and Judah [1995] Theorem 2.2.11*
 $\text{cof}(\mathcal{M}) = \max(\text{non}(\mathcal{M}), \mathfrak{d})$

Beweis. Aus Satz 2.2.8. wissen wir, dass $\text{cof}(\mathcal{M}) \geq \max(\text{non}(\mathcal{M}), \mathfrak{d})$ gilt. Um die andere Ungleichung zu zeigen, sei $\max(\text{non}(\mathcal{M}), \mathfrak{d}) = \kappa$. Seien nun $Y = \{y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ eine nicht magere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $F = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ eine dominierende Familie von ω^ω . Für $\alpha < \kappa$ definieren wir die abzählbaren dichten Mengen $Q_\alpha := \mathbb{Q} + y_\alpha$. Sei

$$\mathcal{A} := \{\mathbb{R} \setminus Q_\alpha^{f_\beta} : \alpha, \beta < \kappa\}.$$

Es gilt $|\mathcal{A}| = \kappa$ und wir behaupten, $\mathcal{A}$ ist eine Basis von $\mathcal{M}$. Um das zu zeigen, sei A eine magere F_σ Menge. D.h. es gibt abgeschlossene nirgends dichte Menge A_n , $n \in \omega$ gibt mit $A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$. Für jedes $n \in \omega$ gibt es ein $\alpha < \kappa$ mit $A_n \cap Q_\alpha = \emptyset$. Um das zu zeigen, nehmen wir das Gegenteil an. D.h. wir nehmen an $A_n \cap Q_\alpha \neq \emptyset$ für jedes $\alpha < \kappa$. Dann gibt es für jedes $\alpha < \kappa$ ein $q_\alpha \in \mathbb{Q}$ und ein $a_\alpha \in A_n$ mit $y_\alpha = a_\alpha + q_\alpha$. Wir betrachten die Menge $A'_n = A_n + \mathbb{Q}$. Diese Menge ist als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen mager. Nun gilt aber $Y \subseteq A'_n$, was ein Widerspruch dazu ist, dass Y nicht mager ist. Somit gibt es nun ein $\alpha < \kappa$ mit $A_n \cap Q_\alpha = \emptyset$.

Sind die $g^{A_n} \in \omega^\omega$ die Funktionen aus Lemma 2.2.10.. Wir definieren uns nun die Funktion $g^A \in \omega^\omega$ folgendermaßen:

$$g^A(i) = \max\{g^{A_n}(i) : n \leq i\}$$

Offensichtlich gilt $g^{A_n} \leq^* g^A$ für jedes $n \in \omega$. Da F eine dominierende Familie ist, gibt es ein $\beta < \kappa$ mit $g^A \leq^* f_\beta$. Somit gilt nun, wegen Lemma 2.2.10., $A_n \cap Q_\alpha^{f_\beta} = \emptyset$ für jedes $n \in \omega$ und somit $A = \bigcup_{n \in \omega} A_n \subseteq \mathbb{R} \setminus Q_\alpha^{f_\beta} \in \mathcal{A}$. $\square$

3 Forcing

In diesem Kapitel werden wir das Martin'sche Axiom und verschiedenste Forcings betrachten und ihre Auswirkungen auf das Cichoń-Diagramm. Wir richten uns nach Bartoszyński and Judah [1995].

Definition 3.0.1. *Martin'sche Axiom*

Sei $\mathcal{P}$ eine Kollektion von Forcing-Notions und κ eine Kardinalzahl. Dann definieren wir die folgende Aussage:

$\text{MA}_\kappa(\mathcal{P})$: Für jedes $P \in \mathcal{P}$ und für jede Familie $\mathcal{D}$ von dichten Teilmengen von P mit $|\mathcal{D}| \leq \kappa$ gibt es einen Filter $G \subseteq P$ mit $G \cap D \neq \emptyset \forall D \in \mathcal{D}$.

Spezieller definieren wir das *Martin'sche Axiom*:

$\text{MA}(\mathcal{P})$: $\forall \kappa < 2^{\aleph_0}$ gilt $\text{MA}_\kappa(\mathcal{P})$

Sei P eine Forcing-Notion, wir werden statt $\text{MA}_\kappa(\{P\})$ beziehungsweise $\text{MA}(\{P\})$ der Einfachheit halber $\text{MA}_\kappa(P)$ beziehungsweise $\text{MA}(P)$ schreiben.

3.1 Random-Forcing

Wir betrachten die Menge $\mathcal{B}_\mathcal{N}$ der Borelmengen modulo dem Ideal der Nullmengen, wie in Definition 1.2.7.. Wobei $[A]_\mathcal{N} \leq [B]_\mathcal{N} : \Leftrightarrow A \setminus B \in \mathcal{N}$ definiert ist.

Satz 3.1.1. *Bartoszyński and Judah [1995] Theorem 3.1.8*

Es gilt:

$$\text{MA}(\mathcal{B}_\mathcal{N}) \implies \text{cov}(\mathcal{N}) = 2^{\aleph_0}$$

Beweis. Wir arbeiten in 2^ω . Sei $\mathcal{T} = \{T_n : n \in \omega\}$ eine Familie von paarweise disjunkten abgeschlossenen Mengen von positiven Maßen mit $\mu(\bigcup_{n \in \omega} T_n) = 1$. Dann definieren wir die folgende Menge:

$$D_\mathcal{T} = \{[T]_\mathcal{N} : T \text{ abgeschlossen } \mu(T) > 0 \text{ und } \exists n \ T \subseteq T_n\}$$

Die Menge $D_\mathcal{T}$ ist dicht in $\mathcal{B}_\mathcal{N}$, denn sei ein $[A]_\mathcal{N} \in \mathcal{B}_\mathcal{N}$ mit $\mu(A) > 0$ gegeben. Dann gibt es eine abgeschlossene Menge C mit $\mu(C) > 0$ und $C \subseteq A$. Wegen $\mu(\bigcup_{n \in \omega} T_n) = 1$ findet

man nun ein $n \in \omega$ mit $\mu(T_n \cap C) > 0$. Da $T := T_n \cap C$ wieder abgeschlossen ist, gilt $[T]_{\mathcal{N}} \in D_{\mathcal{T}}$ und $[T]_{\mathcal{N}} \leq [A]_{\mathcal{N}}$.

Sei $\kappa < 2^{\aleph_0}$ und $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ eine Familie von Nullmengen gegeben. Für jedes $\alpha < \kappa$ können wir ein $\mathcal{T}_\alpha$ finden mit $A_\alpha \cap \bigcup_{n \in \omega} T_n^\alpha = \emptyset$. Sei $\mathcal{D} = \{D_{\mathcal{T}_\alpha} : \alpha < \kappa\}$ die Familie der dazugehörigen dichten Mengen. Wegen $\text{MA}(\mathcal{B}_{\mathcal{N}})$ und $\kappa < 2^{\aleph_0}$ gibt es nun einen $\mathcal{D}$ -generischen Ultrafilter, d.h. es gilt $G \cap D_{\mathcal{T}_\alpha} \neq \emptyset$ für jedes $\alpha < \kappa$. Mit Hilfe von Lemma 1.2.9. erhalten wir:

$$G \cap D_{\mathcal{T}_\alpha} \neq \emptyset \iff x_G \in \bigcup_{n \in \omega} T_n^\alpha \quad (3.1)$$

Somit erhalten wir aus $A_\alpha \cap \bigcup_{n \in \omega} T_n^\alpha = \emptyset$, dass $x_G \notin \bigcup_{\alpha < \kappa} A_\alpha$ gilt, d.h. $\bigcup_{\alpha < \kappa} A_\alpha \neq 2^\omega$. Insgesamt erhalten wir nun $\text{cov}(\mathcal{N}) \geq 2^{\aleph_0}$ und wegen Satz 2.2.8. $\text{cov}(\mathcal{N}) = 2^{\aleph_0}$. $\square$

Mit diesen Ergebnissen verändert sich unter der Annahme $\text{MA}(\mathcal{B}_{\mathcal{N}})$ das Cichoń-Diagramm folgendermaßen, (wobei Pfeile $\leq$ und Doppellinien = repräsentieren):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \text{cov}(\mathcal{N}) & \text{=====} & \text{non}(\mathcal{M}) & \text{=====} & \text{cof}(\mathcal{M}) & \text{=====} & \text{cof}(\mathcal{N}) & \text{=====} & 2^{\aleph_0} \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & \mathfrak{b} & \longrightarrow & \mathfrak{d} & & & & \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 \aleph_1 & \longrightarrow & \text{add}(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \text{add}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{cov}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{non}(\mathcal{N})
 \end{array}$$

3.2 Cohen-Forcing

Wir betrachten die Menge $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ der Borelmengen modulo dem Ideal der mageren Mengen wie in Definition 1.2.7.. Wobei $[A]_{\mathcal{M}} \leq [B]_{\mathcal{M}} : \Leftrightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}$ definiert ist.

Lemma 3.2.1. *Kechris [2012] Proposition 8.22*

Sei A eine Borelmenge, dann gibt es eine offene Menge U mit $[A]_{\mathcal{M}} = [U]_{\mathcal{M}}$

Beweis. Sei U eine offene Menge, dann ist die Menge $\overline{U} \setminus U$ abgeschlossen und nirgends dicht und somit auch mager. Sei F eine abgeschlossene Menge, dann ist $F \setminus \text{Int}(F)$ abgeschlossen und nirgends dicht. Somit erhalten wir $[U]_{\mathcal{M}} = [\overline{U}]_{\mathcal{M}}$ und $[F]_{\mathcal{M}} = [\text{Int}(F)]_{\mathcal{M}}$. Somit haben wir die Behauptung für $A \in \Sigma_1^0$ beziehungsweise für $B \in \Pi_1^0$ gezeigt.

Sei $\gamma < \omega_1$. Wir nehmen an, wir haben die Behauptung schon für alle $A \in \Sigma_\alpha^0$ und alle $B \in \Pi_\alpha^0$ mit $\alpha < \gamma$ gezeigt.

Sei $A \in \Sigma_\gamma^0$ beliebig, dann gibt es für jedes $n \in \omega$ ein $\alpha_n < \gamma$ und $B_n \in \Pi_{\alpha_n}^0$ mit

$A = \bigcup_{n \in \omega} B_n$. Für jedes B_n gibt es nun wegen unserer Annahmen eine offene Menge U_n mit $[B_n]_{\mathcal{M}} = [U_n]_{\mathcal{M}}$. Da die Vereinigung abzählbar vieler magerer Mengen wieder mager ist, folgt $[A]_{\mathcal{M}} = [\bigcup_{n \in \omega} U_n]_{\mathcal{M}}$. Die Menge $\bigcup_{n \in \omega} U_n$ ist als Vereinigung abzählbar vieler offener Mengen offen und somit folgt die Behauptung für $A \in \Sigma_{\gamma}^0$.

Sei $B \in \Pi_{\gamma}^0$ beliebig, dann gibt es ein $A \in \Sigma_{\gamma}^0$ mit $B = \mathbb{R} \setminus A$. Wie wir gerade gezeigt haben, gibt es eine offene Menge U mit $[A]_{\mathcal{M}} = [U]_{\mathcal{M}}$. Nun gilt $[\mathbb{R} \setminus A]_{\mathcal{M}} = [\mathbb{R} \setminus U]_{\mathcal{M}} = [\text{Int}(\mathbb{R} \setminus U)]_{\mathcal{M}}$. Somit haben wir die Behauptung für $B \in \Pi_{\gamma}^0$ gezeigt. $\square$

Satz 3.2.2. *Bartoszyński and Judah [1995] Theorem 3.1.8*

Es gilt:

$$\text{MA}(\mathcal{B}_{\mathcal{M}}) \implies \text{cov}(\mathcal{M}) = 2^{\aleph_0}$$

Beweis. Wir arbeiten in 2^{ω} . Sei $U \subseteq 2^{\omega}$ eine offene dichte Menge. Definiere nun die Menge

$$D_U = \{[U']_{\mathcal{M}} : U' \subseteq U, U' \neq \emptyset \text{ ist offen}\}$$

Die Menge D_U ist dicht in $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$. Denn sei $[A]_{\mathcal{M}} \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, dann gibt es wegen Lemma 3.2.1. eine offene Menge $\tilde{U}$ mit $[A]_{\mathcal{M}} = [\tilde{U}]_{\mathcal{M}}$. Da U eine dichte offene Menge ist, ist auch die Menge $U' := U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ offen. Nun gilt $[U']_{\mathcal{M}} \leq [A]_{\mathcal{M}}$. Sei $\aleph_0 \leq \kappa < 2^{\aleph_0}$ und $\{A_{\alpha} : \alpha < \kappa\}$ eine Familie von mageren Mengen gegeben. Für jedes $\alpha < \kappa$ gibt es abgeschlossene nirgends dichte Mengen F_n mit $n \in \omega$ mit $A_{\alpha} \subseteq \bigcup_{n \in \omega} F_n^{\alpha}$. Nun definieren wir die offenen dichten Mengen $U_n^{\alpha} := 2^{\omega} \setminus F_n^{\alpha}$ für $\alpha < \kappa$ und $n \in \omega$. Es gilt $A_{\alpha} \cap \bigcap_{n \in \omega} U_n^{\alpha} = \emptyset$. Nun definieren wir die Familie $\mathcal{D} := \{D_{U_n^{\alpha}} : n \in \omega \text{ und } \alpha < \kappa\}$ von dichten Mengen in $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$. Wegen $\aleph_0 \leq \kappa < 2^{\aleph_0}$ gilt $|\mathcal{D}| \leq \kappa < 2^{\aleph_0}$. Somit gibt es wegen $\text{MA}(\mathcal{B}_{\mathcal{M}})$ einen $\mathcal{D}$ -generischen Ultrafilter, d.h. es gilt $G \cap D_{U_n^{\alpha}} \neq \emptyset$ für alle $n \in \omega$ und $\alpha < \kappa$. Mit Hilfe von Lemma 1.2.9. erhalten wir:

$$G \cap D_{U_n^{\alpha}} \neq \emptyset \iff x_G \in U_n^{\alpha} \quad (3.2)$$

Somit erhalten wir aus $A_{\alpha} \cap \bigcap_{n \in \omega} U_n^{\alpha} = \emptyset$, dass $x_G \notin \bigcup_{\alpha < \kappa} A_{\alpha}$ gilt, d.h. $\bigcup_{\alpha < \kappa} A_{\alpha} \neq 2^{\omega}$. Insgesamt erhalten wir nun $\text{cov}(\mathcal{M}) \geq 2^{\aleph_0}$ und wegen Satz 2.2.8. $\text{cov}(\mathcal{M}) = 2^{\aleph_0}$. $\square$

Mit diesen Ergebnissen verändert sich unter der Annahme $\text{MA}(\mathcal{B}_{\mathcal{M}})$ das Cichoń-Diagramm folgendermaßen, (wobei Pfeile $\leq$ und Doppellinien = repräsentieren):

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{cov}(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \text{non}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{cof}(\mathcal{M}) & \longequal{\quad} & \text{cof}(\mathcal{N}) \longequal{\quad} 2^{\aleph_0} \\
 & \uparrow & \uparrow & & \parallel & & \parallel \\
 & & \mathfrak{b} & \longrightarrow & \mathfrak{d} & & \\
 & & \uparrow & & \parallel & & \parallel \\
 \aleph_1 & \longrightarrow & \text{add}(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \text{add}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \text{cov}(\mathcal{M}) \longequal{\quad} \text{non}(\mathcal{N})
 \end{array}$$

3.3 Amoeba-Forcing

Definition 3.3.1.

Wir definieren die folgende partielle Ordnung $(\mathbb{A}, \leq)$, auch *Amoeba-Forcing* genannt:

$$\mathbb{A} := \left\{ U \subseteq [0, 1] : U \text{ offen, } \mu(U) < \frac{1}{2} \right\}$$

$$U_2 \leq U_1 \iff U_2 \supseteq U_1$$

Definition 3.3.2.

Eine Menge A heißt Tail-Set, falls $A + \mathbb{Q} = A$ gilt.

Lemma 3.3.3. 0-1 Gesetz Bartoszyński and Judah [1995] Lemma 1.2.7

Jedes messbare Tail-Set hat Maß 0 oder 1. $\square$

Satz 3.3.4.

Es gilt:

$$\text{MA}(\mathbb{A}) \implies \text{add}(\mathcal{N}) = 2^{\aleph_0}$$

Beweis. Sei $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$ und $\mathcal{A} = \{A_\alpha \in \mathcal{N} : \alpha < \kappa\}$ eine Familie von Nullmengen. O.B.d.A. können wir annehmen, dass für jedes $\alpha < \kappa$ und $r \in \mathbb{Q}$ gilt: $A_\alpha + r \in \mathcal{A}$. Für jedes $\alpha < \kappa$ und jedes $n \in \omega$ gibt es offene Mengen U_n^α mit $\mu(U_n^\alpha) < \frac{1}{n}$ und $A_\alpha \subseteq U_n^\alpha$. Wir definieren nun folgende Mengen :

$$D_\alpha := \{U \in \mathbb{A} : A_\alpha \subseteq U\}$$

$$E_n := \{U \in \mathbb{A} : \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \mu(U) < \frac{1}{2}\}$$

Diese Mengen sind dicht in $\mathbb{A}$, denn sei $A \in \mathbb{A}$ beliebig, d.h. A ist offen und es gilt $\mu(A) < \frac{1}{2}$. Dann gibt es ein $n \in \omega$ mit $\frac{1}{n} < \frac{1}{2} - \mu(A)$. Somit gilt nun $\mu(A \cup U_n^\alpha) < \frac{1}{2}$ und $A \cup U_n^\alpha$ ist offen. Wegen $A_\alpha \subseteq U_n^\alpha$ gilt nun insgesamt $A \cup U_n^\alpha \in D_\alpha$. D.h wir finden zu jedem $A \in \mathbb{A}$ ein $U \in D_\alpha$ mit $U \leq A$. Somit ist D_α dicht in $\mathbb{A}$.

Nun zeigen wir die Dichtheit von E_n in $\mathbb{A}$. Sei $U \in \mathbb{A}$ beliebig gegeben. Wir definiere uns die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow [\mu(U), 1]$ mit $f(x) = \mu(U \cup (0, x))$. Diese Funktion ist stetig, sie ist sogar Lipschitz-stetig. Denn seien $x_1 \leq x_2$, dann gilt $f(x_2) - f(x_1) \leq x_2 - x_1$.

Aus $f(0) = \mu(U)$ und $f(1) = 1$ und der Stetigkeit von f , gibt es nun wegen dem Zwischenwertsatz, ein $x_0 \in [0, 1]$ mit $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \mu(U \cup (0, x_0)) < \frac{1}{2}$. Die Menge $U \cup (0, x_0)$ ist

offen und liegt somit in E_n und es gilt $U \subseteq U \cup (0, x_0)$. Somit ist E_n dicht in $\mathbb{A}$.
Nun definieren wir die Familie von dichten Mengen:

$$\mathcal{D} := \{D_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \{E_n : n \in \omega\}$$

Wegen $\text{MA}(\mathbb{A})$ gibt es nun einen $\mathcal{D}$ -generischen Filter G . D.h. $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ für jedes $\alpha < \kappa$ und $G \cap E_n \neq \emptyset$ für jedes $n \in \omega$. Da $A_\alpha \subseteq U$ für jedes $U \in D_\alpha$ gilt, erhalten wir:

$$U_G := \bigcup_{U \in G} U \supseteq \bigcup_{\alpha < \kappa} A_\alpha$$

Wie wir jetzt zeigen werden, gilt $\mu(U_G) = \frac{1}{2}$. Sei $n \in \omega$ beliebig. Da G ein $\mathcal{D}$ -generischer Filter ist, gibt es ein $U_n \in G \cap E_n$. Somit gilt für jedes $n \in \omega$:

$$\mu(U_G) \geq \mu(U_n) > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$$

D.h. $\mu(U_G) \geq \frac{1}{2}$.

Um zu zeigen, dass $\mu(U_G) \leq \frac{1}{2}$ gilt, sei $\{B_n : n \in \omega\}$ eine Basis der Topologie auf $[0, 1]$ (z.B. die Intervalle mit rationalen Endpunkten). Wir definieren die Menge

$$K := \{n \in \omega : \exists U \in G, B_n \subseteq U\}$$

Sei $x \in U_G$, dann gibt es ein $U \in G$, sodass $x \in U$ gilt. Da U offen ist, gibt es, da die B_n eine Basis der Topologie bilden, ein $n \in \omega$ mit $x \in B_n \subseteq U$, also speziell gilt auch $n \in K$. Daraus folgt:

$$U_G = \bigcup_{U \in G} U = \bigcup_{n \in K} B_n$$

Nun gilt $\mu(U_G) = \mu(\bigcup_{n \in K} B_n)$. Seien die U_n jene Elemente aus G mit $B_n \subseteq U_n$. Sei $I \subseteq \omega$ mit $|I| < \infty$ beliebig. Da G ein Filter ist, erhalten wir, dass $\mu(\bigcup_{i \in I} U_n) < \frac{1}{2}$ gilt. Somit gilt nun auch: $\mu(\bigcup_{i \in I} B_n) \leq \mu(\bigcup_{i \in I} U_n) < \frac{1}{2}$. Nun gilt $\mu(U_G) = \mu(\bigcup_{n \in K} B_n) \leq \frac{1}{2}$. Insgesamt erhalten wir $\mu(U_G) = \frac{1}{2}$.

Aus $A_\alpha + r \in \mathcal{A}$ und $U_G \supseteq \bigcup_{\alpha < \kappa} A_\alpha$ folgt: $\bigcap_{r \in \mathbb{Q}} (U_G + r) \supseteq \bigcup_{\alpha < \kappa} A_\alpha$. Da die Menge $\bigcap_{r \in \mathbb{Q}} (U_G + r)$ ein Tail-Set ist und $\mu(U_G) = \frac{1}{2}$ gilt, folgt aus Lemma 3.3.3., dass $\mu(\bigcap_{r \in \mathbb{Q}} (U_G + r)) = 0$ gilt und somit auch $\mu(\bigcup_{\alpha < \kappa} A_\alpha) = 0$.

Damit erhalten wir insgesamt $\text{add}(\mathcal{N}) \geq 2^{\aleph_0}$ und aus Satz 2.2.8. folgt somit $\text{add}(\mathcal{N}) = 2^{\aleph_0}$. $\square$

Mit diesen Ergebnissen verändert sich unter der Annahme $\text{MA}(\mathbb{A})$ das Cichoń-Diagramm folgendermaßen, (wobei Pfeile $\leq$ und Doppellinien = repräsentieren):

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{cov}(\mathcal{N}) & \equiv & \text{non}(\mathcal{M}) & \equiv & \text{cof}(\mathcal{M}) & \equiv & \text{cof}(\mathcal{N}) \equiv 2^{\aleph_0} \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
& & \mathfrak{b} & \equiv & \mathfrak{d} & & \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
\aleph_1 \longrightarrow \text{add}(\mathcal{N}) & \equiv & \text{add}(\mathcal{M}) & \equiv & \text{cov}(\mathcal{M}) & \equiv & \text{non}(\mathcal{N})
\end{array}$$

3.4 Hechler-Forcing

Satz 3.4.1.

Wir definieren die folgende partielle Ordnung $(\mathbb{D}, \leq)$ auch *Hechler-Forcing* oder *Dominating-Forcing* genannt:

$$\mathbb{D} := \{(n, f) : n \in \omega, f \in \omega^\omega\}$$

$$\begin{aligned}
(n', f') \leq (n, f) &: \Leftrightarrow n' \geq n, \quad f' \upharpoonright n = f \upharpoonright n \\
&\text{und } \forall i \in \omega \quad f'(i) \geq f(i)
\end{aligned}$$

Satz 3.4.2.

Es gilt:

$$\text{MA}(\mathbb{D}) \implies \mathfrak{b} = 2^{\aleph_0}$$

Beweis. Sei $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$ und $F = \{f_\alpha \in \omega^\omega : \alpha < \kappa\}$ eine Familie von Funktionen gegeben. Wir definieren die folgenden dichten Mengen in $\mathbb{D}$:

$$\begin{aligned}
D_\alpha &:= \{(n, f) : n \in \omega \text{ und } f(i) \geq f_\alpha(i) \quad \forall i > n\} \\
E_m &:= \{(n, f) : n \geq m \text{ und } f \in \omega^\omega\}
\end{aligned}$$

Um die Dichtheit dieser Mengen zu zeigen, sei $(n, f) \in \mathbb{D}$ beliebig. Wir definieren (n', f') folgendermaßen: $n' = \max(n, m)$, $f' \upharpoonright n' = f \upharpoonright n'$ und $f'(i) = \max(f(i), f_\alpha(i))$ für $i \geq n'$. Nun gilt offensichtlich $(n', f') \leq (n, f)$ und $(n', f') \in D_\alpha \cap E_m$. Somit sind die Mengen D_α und E_m dicht in $\mathbb{D}$.

Wir definieren nun die Familie

$$\mathcal{D} := \{D_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \{E_m : m \in \omega\}$$

von dichten Mengen in $\mathbb{D}$. Es gilt $|\mathcal{D}| = \kappa$ und somit folgt, wegen $\text{MA}(\mathbb{D})$, dass es einen $\mathcal{D}$ -generischen Filter G gibt. D.h es gilt $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha < \kappa$ und $G \cap E_m \neq \emptyset$ für alle $m \in \omega$.

Wir wissen, es gilt $f_\alpha \leq^* f$ für jedes $(n, f) \in D_\alpha$ $\alpha < \kappa$. Wir wollen nun eine Funktion $g \in \omega^\omega$ finden, sodass es für jedes $\alpha < \kappa$ ein $(n, f) \in D_\alpha$ gibt mit $f \leq^* g$. Wenn wir so ein g gefunden haben, erhalten wir somit $f_\alpha \leq^* g$ für jedes $\alpha < \kappa$ und somit gilt $\mathfrak{b} \geq 2^{\aleph_0}$. Wir definieren uns die gesuchte Funktion g folgendermaßen:

$$g := \bigcup_{(n,f) \in G} f \upharpoonright n$$

Zuerst müssen wir uns überlegen, dass g wohldefiniert ist. Dafür seien $(n_1, f'_1), (n_2, f'_2) \in G$ beliebig. Da G ein Filter ist, gibt es ein $(n', f') \in G$ mit $(n', f') \leq (n_1, f'_1)$ und $(n', f') \leq (n_2, f'_2)$. O.B.d.A sei $n_1 \leq n_2$, dann folgt somit $n' \geq n_2 \geq n_1$ und $f'_1 \upharpoonright n_1 = f' \upharpoonright n_1 = f'_2 \upharpoonright n_1$. Somit erhalten wir, dass $g \upharpoonright n_1$ wohldefiniert ist.

Nun müssen wir noch zeigen, dass g auf ganz ω definiert ist. Sei $n \in \omega$ beliebig. Da $G \cap E_{n+1} \neq \emptyset$ gilt, gibt es ein $(n+1, f) \in G$. Somit ist $g(n) = f(n)$ definiert.

Zuletzt müssen wir noch zeigen, dass g die Eigenschaft $f \leq^* g$ für alle $(n, f) \in G$ erfüllt, denn dann gibt es für jedes $\alpha < \kappa$, wegen $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$, ein $(n, f) \in G \cap D_\alpha$ mit $f \leq^* g$.

Um das zu zeigen, sei $(n, f) \in G$ beliebig. Für $i \geq n$ gibt es, wegen $G \cap E_{i+1} \neq \emptyset$, ein $(i+1, f'_i) \in G$. Wieder finden wir, da G ein Filter ist, ein $(n', f') \in G$ mit $(n', f') \leq (n, f)$ und $(n', f') \leq (i+1, f'_i)$. Daraus folgt: $n' \geq i+1$ und $g(i) = f'(i) \geq f(i)$. Was die Behauptung zeigt.

Somit gilt $\mathfrak{b} \geq 2^{\aleph_0}$ und aus Satz 2.2.8. folgt insgesamt $\mathfrak{b} = 2^{\aleph_0}$. $\square$

Satz 3.4.3.

Es gilt:

$$\text{MA}(\mathbb{D}) \implies \text{cov}(\mathcal{M}) = 2^{\aleph_0}$$

Beweis. Wir betrachten 2^ω . Sei $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$. Sei $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ eine Familie von o.B.d.A. abgeschlossenen nirgends dichten Teilmengen von 2^ω . Für jedes $\alpha < \kappa$, sei $T_\alpha = \{f \upharpoonright n : f \in A_\alpha, n \in \omega\}$. Da A_α abgeschlossen ist gilt: $A_\alpha = [T_\alpha]$. Weil A_α abgeschlossen und nirgends dicht ist, gilt für jedes $s \in 2^{<\omega}$: $[s] \not\subseteq T_\alpha$. D.h. für jedes $s \in T_\alpha$ gibt es ein $s' \notin T_\alpha$ mit $s' \supseteq s$.

Für $\alpha < \kappa$ und $m \in \omega$ definieren wir nun folgende Teilmengen von $\mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} D_\alpha &:= \{(n, f) : (f \upharpoonright n) \bmod 2 \notin T_\alpha\} \\ E_m &:= \{(n, f) : n \geq m \text{ und } f \in \omega^\omega\} \end{aligned}$$

Wir behaupten, diese Mengen sind dicht in $\mathbb{D}$. Um das zu zeigen, sei $(n_0, f_0) \in \mathbb{D}$ beliebig, dann gilt $(\max(n_0, m), f_0) \leq (n_0, f_0)$ und $(\max(n_0, m), f_0) \in E_m$. Somit ist E_m dicht. Weiteres nehmen wir an $s_0 := (n_0, f_0) \bmod 2 \in T_\alpha$. Dann gibt es ein $s_1 \in 2^\omega$ mit $s_1 \notin T_\alpha$, $s_1 \supseteq s_0$ und $n_1 := |s_1| > n_0$. Nun können wir eine Funktion $f_1 \in \omega^\omega$ finden, sodass

Folgendes gilt: $f_1 \restriction n_0 = f_0 \restriction n_0$, $(f \restriction n_1) \bmod 2 = s_1$ und $f_1 \geq f_0$. Somit gilt $(n_1, f_1) \leq (n_0, f_0)$ und $(n_1, f_1) \in D_\alpha$. Also haben wir die Dichtheit von D_α gezeigt. Nun definieren wir folgende Menge von dichten Mengen in $\mathbb{D}$:

$$\mathcal{D} := \{D_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \{E_m : m \in \omega\}$$

Wegen $|\mathcal{D}| = \kappa$ und $\text{MA}(\mathbb{D})$, gibt es einen $\mathcal{D}$ -generischen Filter G . Wir definieren uns nun folgende Funktion $g \in 2^\omega$:

$$g := \bigcup_{(n,f) \in G} (f \restriction n) \bmod 2$$

Analog zum Beweis von Satz 3.4.2. kann man zeigen, dass die Funktion g wohldefiniert ist.

Für jedes $\alpha < \kappa$ gibt es, weil G ein $\mathcal{D}$ -generischer Filter ist, ein $(n_\alpha, f_\alpha) \in G \cap D_\alpha$. D.h. $f_\alpha \in G$ und $f_\alpha \restriction n_\alpha \notin T_\alpha$ und somit gilt, wegen $g \supseteq f_\alpha \restriction n_\alpha$, $g \notin [T_\alpha] = A_\alpha$.

Also haben wir insgesamt ein $g \in 2^\omega \setminus \bigcup_{\alpha < \kappa} A_\alpha$ gefunden. Somit gilt nun $\text{cov}(\mathcal{M}) \geq 2^{\aleph_0}$ und wegen Satz 2.2.8. insgesamt $\text{cov}(\mathcal{M}) = 2^{\aleph_0}$. $\square$

Satz 3.4.4.

Es gilt:

$$\text{MA}(\mathbb{D}) \implies \text{add}(\mathcal{M}) = 2^{\aleph_0}$$

Beweis. Das folgt direkt aus den Sätzen 2.2.12., 3.4.2. und 3.4.3.. $\square$

Mit diesen Ergebnissen verändert sich unter der Annahme $\text{MA}(\mathbb{D})$ das Cichoń-Diagramm folgendermaßen, (wobei Pfeile $\leq$ und Doppellinien = repräsentieren):

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{cov}(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \text{non}(\mathcal{M}) & \equiv & \text{cof}(\mathcal{M}) & \equiv & \text{cof}(\mathcal{N}) \equiv 2^{\aleph_0} \\
 \uparrow & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & & \mathfrak{b} & \equiv & \mathfrak{d} & & \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \aleph_1 & \longrightarrow & \text{add}(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \text{add}(\mathcal{M}) & \equiv & \text{cov}(\mathcal{M}) \equiv \text{non}(\mathcal{N})
 \end{array}$$

3.5 Kofinalität des Marczewski-Ideals

Definition 3.5.1.

Wir definieren das *Marczewski-Ideal* S^0 folgendermaßen:

$$S^0 := \{X \subseteq 2^\omega : \forall T \subseteq 2^{<\omega} \text{ perfekten Baum } \exists T' \subseteq T \text{ perfekten Baum mit } [T'] \cap X = \emptyset\}$$

S^0 ist ein σ -Ideal auf 2^ω , welches zumindest alle Singletons beinhaltet.

Beweis. Sei $X \in S^0$ und $A \subseteq X$ gegeben. Sei $T \subseteq 2^{<\omega}$ ein perfekter Baum. Da $X \in S^0$ gilt, gibt es einen perfekten Baum $T' \subseteq T$, mit $[T'] \cap X = \emptyset$. Somit gilt aber auch $[T'] \cap A = \emptyset$. Also gilt $A \in S^0$.

Seien $X_1, X_2 \in S^0$ gegeben und sei $T \subseteq 2^{<\omega}$ ein beliebiger perfekter Baum. Da $X_1 \in S^0$ gilt, gibt es einen perfekten Baum $T' \subseteq T$ mit $[T'] \cap X_1 = \emptyset$. Wegen $X_2 \in S^0$ gibt es nun einen perfekten Baum $T'' \subseteq T'$ mit $[T''] \cap X_2 = \emptyset$. Somit gilt nun $[T''] \cap (X_1 \cup X_2) = \emptyset$. Insgesamt erhalten wir, dass $X_1 \cup X_2 \in S^0$ gilt. Damit ist S^0 ein Ideal.

Nun müssen wir noch zeigen, dass es σ -additiv ist. Dafür seien $X_n \in S^0$ für $n \in \omega$ gegeben. Sei $T \subseteq 2^{<\omega}$ ein perfekter Baum. Wir definieren die Menge der Splitknoten von T folgendermaßen:

$$\text{split}(T) = \{s \in T : s \frown 0, s \frown 1 \in T\}$$

Weiteres definieren wir für $n \in \omega$ die folgenden Mengen:

$$\text{split}_n(T) = \{s \in \text{split}(T) : |\{t \in \text{split}(T) : t \subseteq s\}| = n\}$$

Man kann leicht sehen, dass $|\text{split}_n(T)| = 2^n$ gilt. Wir werden nun induktiv einen perfekten Baum $T' \subseteq T$ konstruieren, sodass $[T'] \cap X_n = \emptyset$ für jedes $n \in \omega$ gilt. Wegen $X_0 \in S^0$ gibt es einen perfekten Baum $T_0 \subseteq T$ mit $[T_0] \cap X_0 = \emptyset$. Sei s_0^0 das eindeutige Element aus $\text{split}_0(T_0)$. Wir betrachten nun die folgenden perfekten Bäume $T_{0,0}, T_{0,1} \subseteq T_0$.

$$\begin{aligned} T_{0,0} &= \{t \in T_0 : s_0^0 \frown 0 \subseteq t\} \cup \{t \in T_0 : t \subseteq s_0^0\} \\ T_{0,1} &= \{t \in T_0 : s_0^0 \frown 1 \subseteq t\} \cup \{t \in T_0 : t \subseteq s_0^0\} \end{aligned}$$

Nun gibt es wegen $X_1 \in S^0$ zwei perfekte Bäume $T'_{0,0} \subseteq T_{0,0}$ und $T'_{0,1} \subseteq T_{0,1}$ mit $T'_{0,0} \cap X_1 = \emptyset$ und $T'_{0,1} \cap X_1 = \emptyset$. Nun gilt für $T_1 := T'_{0,0} \cup T'_{0,1}$, dass $T_1 \subseteq T_0$ perfekt ist und $T_1 \cap X_1 = \emptyset$. Außerdem gilt $s_0^0 \frown 0 \in T_1$ und $s_0^0 \frown 1 \in T_1$.

Sei T_n schon definiert, dann betrachten wir $\text{split}_n(T_n) = \{s_i^n : 1 \leq i \leq 2^n\}$. Für $1 \leq i \leq 2^n$ definieren wir:

$$\begin{aligned} T_{n,i,0} &:= \{t \in 2^{<\omega} : t \subseteq s_i^n\} \cup \{t \in 2^{<\omega} : s_i^n \frown 0 \subseteq t\} \\ T_{n,i,1} &:= \{t \in 2^{<\omega} : t \subseteq s_i^n\} \cup \{t \in 2^{<\omega} : s_i^n \frown 1 \subseteq t\} \end{aligned}$$

Diese Bäume sind wieder perfekt. Wegen $X_n \in S^0$ gibt es nun perfekte Bäume $T'_{n,i,0} \subseteq T_{n,i,0}$ und $T'_{n,i,1} \subseteq T_{n,i,1}$ mit $T'_{n,i,0} \cap X_n = \emptyset$ und $T'_{n,i,1} \cap X_n = \emptyset$. Nun definieren wir den perfekten Baum $T_{n+1} \subseteq T_n$ folgendermaßen:

$$T_{n+1} := \bigcup_{i=1}^{2^n} (T'_{n,i,0} \cup T'_{n,i,1})$$

Es gilt $T_{n+1} \cap X_n = \emptyset$ und $s_i^n \frown 0 \in T_{n+1}$ und $s_i^n \frown 1 \in T_{n+1}$ für jedes $1 \leq i \leq 2^n$. Nun können wir $T' := \bigcap_{n \in \omega} T_n$ definieren. Wir sehen, dass $\text{split}(T) = \{s_i^n : n \in \omega, 1 \leq i \leq 2^n\}$ gilt. Für jedes $n \in \omega$ und jedes $1 \leq i \leq 2^n$ gilt: $s_i^n \frown 0 \subseteq s_{2i-1}^{n+1}$ und $s_i^n \frown 1 \subseteq s_{2i}^{n+1}$. Daraus folgt, dass T' ein perfekter Baum ist. Wegen $T' \subseteq T_n$ gilt außerdem für jedes $n \in \omega$, $T' \cap X_n = \emptyset$. D.h. $T' \cap \bigcup_{n \in \omega} X_n = \emptyset$. Insgesamt erhalten wir somit $\bigcup_{n \in \omega} X_n \in S^0$. $\square$

Lemma 3.5.2.

Sei $C \subseteq 2^\omega$ abgeschlossen, dann gilt $|C| \leq \aleph_0$ oder es gibt eine perfekte Menge $P \subseteq 2^\omega$ mit $P \subseteq C$.

Beweis. Für $C \subseteq 2^\omega$ abgeschlossen, definieren wir die Menge K folgendermaßen:

$$K := \{x \in C : \forall n \in \omega \ |B(x, 1 \setminus n) \cap C| > \aleph_0\}$$

Zuerst werden wir zeigen, dass $|C \setminus K| \leq \aleph_0$ gilt. Dafür sei $(B_n : n \in \omega)$ eine abzählbare Basis der Topologie auf 2^ω . Für jedes $y \in C \setminus K$ gibt es ein $n \in \omega$ mit $y \in B_n$ und $|B_n \cap C| \leq \aleph_0$. Somit gilt nun:

$$C \setminus K \subseteq \bigcup \{B_n \cap C : |B_n \cap C| \leq \aleph_0\}$$

Deswegen gilt nun $|C \setminus K| \leq \aleph_0$.

Wir betrachten nun zwei Fälle. Der erste Fall ist, dass $K = \emptyset$. Somit gilt nun $|C| = |C \setminus K| \leq \aleph_0$. Der zweite Fall ist, dass $K \neq \emptyset$ gilt. Nun wollen wir zeigen, dass in diesem Fall K perfekt ist. Sei $x \in K$ beliebig, wir müssen zeigen, dass x nicht isoliert ist in K . Wegen $x \in K$, gilt für jedes $n \in \omega$ $|B(x, 1 \setminus n) \cap C| > \aleph_0$. Da $|C \setminus K| \leq \aleph_0$ gilt, gibt es nun ein $y_n \in K \cap B(x, 1 \setminus n)$. Somit ist x nicht isoliert in K . Da $x \in K$ beliebig war, ist die Menge K perfekt. $\square$

Definition 3.5.3.

Wir definieren das *Sacks-Forcing* $(\mathbb{S}, \subseteq)$ folgendermaßen:

$$\mathbb{S} := \{T \subseteq 2^\omega : T \text{ perfekter Baum}\}$$

Lemma 3.5.4.

Es gibt eine maximale Antikette $(T_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0})$ von $\mathbb{S}$, sodass für jedes $\alpha, \beta < 2^{\aleph_0}$ mit $\alpha \neq \beta$ gilt:

$$[T_\alpha] \cap [T_\beta] = \emptyset$$

Beweis. Sei $\{f_\alpha \in 2^\omega : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ eine Familie paarweise verschiedener Funktionen. Wir definieren die perfekten Bäume $F_\alpha := \{s \in 2^{<\omega} : s(2n) = f_\alpha(n), \forall 0 \leq 2n \leq |s|\}$. Nun gilt $f \in [F_\alpha]$ genau dann, wenn $f(2n) = f_\alpha(n)$ gilt für jedes $n \in \omega$. Da die f_α alle verschieden sind, gilt nun $[F_\alpha] \cap [F_\beta] = \emptyset$ für alle $\alpha, \beta < 2^{\aleph_0}$ mit $\alpha \neq \beta$. Somit ist die Familie $\{F_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ eine Antikette in $\mathbb{S}$, doch diese Antikette ist nicht unbedingt maximal.

Sei $\{P_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ die Familie aller perfekten Bäume. Wir werden eine Menge $S \subseteq 2^{\aleph_0}$ mit $|S| = 2^{\aleph_0}$ finden und uns T_α für $\alpha \in S$ konstruieren, sodass für jedes $0 < \beta < 2^{\aleph_0}$ gilt:

$$(\beta \notin S \leftrightarrow (\exists \gamma \in S \wedge \gamma < \beta \wedge P_\beta \not\subseteq T_\gamma)) \wedge (\beta \in S \leftrightarrow T_\beta \subseteq P_\beta)$$

Zusätzlich werden unsere T_α für $\alpha \in S$ noch erfüllen, dass entweder für jedes $\beta < 2^{\aleph_0}$ $[T_\alpha] \perp [F_\beta]$ gilt, oder es gibt ein $\beta < 2^{\aleph_0}$ mit $[T_\alpha] \subseteq [F_\beta]$.

Wir definieren $0 \in S$ und $T_0 = F_0$. Wir machen nun eine Fallunterscheidung. Im ersten Fall sei ein $\alpha < 2^{\aleph_0}$ gegeben, sodass es ein $\beta \in S$, $\beta < \alpha$ gibt mit $P_\alpha \not\subseteq T_\beta$. Dann definieren wir $\alpha \notin S$. Im zweiten Fall sei $\alpha < 2^{\aleph_0}$ gegeben mit $P_\alpha \perp T_\beta$ für jedes $\beta \in S$, $\beta < \alpha$, dann definieren wir $\alpha \in S$. Es gilt nun für jedes $\beta \in S$, $\beta < \alpha$ $[P_\alpha] \cap [T_\beta]$ ist abgeschlossen und enthält keine perfekte Teilmenge. Somit gilt nun, wegen Lemma 3.5.2., $|[P_\alpha] \cap [T_\beta]| \leq \aleph_0$. Wir definieren uns nun die Menge:

$$X_\alpha := \bigcup_{\substack{\beta \in S, \\ \beta < \alpha}} ([P_\alpha] \cap [T_\beta])$$

Nun gilt offensichtlich $|X_\alpha| \leq |\alpha| \cdot \aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Unterhalb von P_α finden wir $2^{\aleph_0}$ viele disjunkte perfekte Mengen $\{[P_{\alpha,\gamma}] : \gamma < 2^{\aleph_0}\}$ (analog zu den F_α). Somit gibt es nun ein $\gamma^* < 2^{\aleph_0}$ mit $[P_{\alpha,\gamma^*}] \cap X_\alpha = \emptyset$. Wir definieren nun $T'_\alpha := [P_{\alpha,\gamma^*}]$. Aus der Definition von X_α folgt, dass $[T'_\alpha] \cap [T_\beta] = \emptyset$ für jedes $\beta \in S$, $\beta < \alpha$ gilt. Falls $[T'_\alpha] \perp [F_\gamma]$ gilt für jedes $\gamma < 2^{\aleph_0}$, definieren wir $T_\alpha = T'_\alpha$. Ansonsten gibt es ein $\gamma < 2^{\aleph_0}$ und einen perfekten Baum P mit $[T'_\alpha] \cap [F_\gamma] \supseteq [P]$. In diesem Fall definieren wir $T_\alpha = P$.

T_α erfüllt nun die gewünschten Eigenschaften. Die $\{T_\alpha : \alpha \in S\}$ bilden eine Antikette. Da es zu jedem $\beta < 2^{\aleph_0}$ ein $\alpha \in S$, $\alpha < \beta$ mit $[T_\alpha] \not\subseteq [P_\beta]$ gibt, ist diese Antikette sogar maximal.

Nun müssen wir nur noch zeigen, dass $|S| = 2^{\aleph_0}$ gilt. Da $\{T_\alpha : \alpha \in S\}$ eine maximale Antikette in $\mathbb{S}$ ist, gibt es für jedes $\beta < 2^{\aleph_0}$ ein $\alpha \in S$ mit $[F_\beta] \not\subseteq [T_\alpha]$. Somit gilt wegen unserer zusätzlichen Voraussetzung an T_α , dass $[T_\alpha] \subseteq [F_\beta]$ gilt. Da die $[F_\beta]$ eine Antikette bilden, gilt nun wirklich $S = 2^{\aleph_0}$, was unseren Beweis beendet. $\square$

Satz 3.5.5.

Es gilt:

$$\text{cof}(S^0) > 2^{\aleph_0}$$

Beweis. Angenommen, es gebe eine Basis $(B_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0})$ von S^0 . Sei $(T_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0})$ die maximale Antikette von $\mathbb{S}$ aus Lemma 3.5.4.. Sei $\alpha < 2^{\aleph_0}$ beliebig, da $[T_\alpha]$ perfekt ist und somit nicht in S^0 liegt, gilt $[T_\alpha] \not\subseteq B_\alpha$. Für jedes $\alpha < 2^{\aleph_0}$ finden wir somit ein $f_\alpha \in [T_\alpha] \setminus B_\alpha$. Wir definieren nun die Menge $X := \{f_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$. Es gilt offensichtlich $X \not\subseteq B_\alpha$ für jedes $\alpha < 2^{\aleph_0}$. Wir behaupten es gilt $X \in S^0$. Dann hätten wir einen Widerspruch dazu, dass die $(B_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0})$ eine Basis von S^0 sind.

Nun müssen wir nur noch zeigen, dass $X \in S^0$ gilt. Dafür sei $T \subseteq 2^{<\omega}$ ein beliebiger perfekter Baum. Da $(T_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0})$ eine maximale Antikette ist, gibt es ein $\alpha < 2^{\aleph_0}$ und einen perfekten Baum $T' \subseteq 2^{<\omega}$ mit $[T] \cap [T_\alpha] \supseteq [T']$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $f_\alpha \notin [T']$ gilt. Somit erhalten wir, $[T'] \cap X = \emptyset$. Also gilt insgesamt, dass $x \in S^0$ gilt. $\square$

Bemerkung 3.5.6.

Sei $\mathcal{I}$ ein σ -Ideal auf 2^ω , welches zumindest alle Singletons beinhalten. Falls es eine Borel-Basis von $\mathcal{I}$ gibt, dann gilt $\text{cof}(\mathcal{I}) \leq 2^{\aleph_0}$. Aus Satz 3.5.5. kann nun das Marczewski-Ideal S^0 keine Borel-Basis besitzen.

Index

analytisch	10	generische Erweiterung	15
Antikette	14	Ideal	13
Borel-Code	9	inkompatibel	14
Cichoń-Diagramm	21	ko-analytisch	10
Cohen-Real	19	kofinal	23
dicht	14	kompatibel	14
Filter	13	mager	15
generisch	14	Marczewski-Ideal	49
Forcing		Martin'sche Axiom	41
Amoeba	44	nirgends dicht	15
Cohen	42	Random-Real	19
Dominating	46	Tukey-Funktion	26
Hechler	46	Ultrafilter	14
Random	41		
Sacks	50		

Symbole

BC	9	$\text{add}(\mathcal{I}, \mathcal{J})$	21
$\Sigma_\alpha^0 \subseteq \omega^\omega$	9	$\text{cof}(\mathcal{I}, \mathcal{J})$	21
$\Pi_\alpha^0 \subseteq \omega^\omega$	9	$\leq^*$	22
F_σ	10	$\mathfrak{b}$	23
G_δ	10	$\mathfrak{d}$	23
Σ_1^1	10	$\text{cf}(P)$	23
Π_1^1	10	$\text{cf}(\kappa)$	23
$\not\sqsubseteq$	14	$\preceq_T$	26
$\perp$	14	$\equiv_T$	26
$\mathcal{I}_\mathcal{N}$	15	$\mathcal{K}$	34
$\mathcal{I}_\mathcal{M}$	15	Q^g	38
$\mathcal{B}_\mathcal{N}$	15	$\text{MA}_\kappa(\mathcal{P})$	41
$\mathcal{B}_\mathcal{M}$	15	$\text{MA}(\mathcal{P})$	41
$\mathcal{N}$	21	$\mathbb{A}$	44
$\mathcal{M}$	21	$\mathbb{D}$	46
$\text{add}(\mathcal{I})$	21	S^0	49
$\text{cov}(\mathcal{I})$	21	$\text{split}(T)$	49
$\text{non}(\mathcal{I})$	21	$\text{split}_n(T)$	49
$\text{cof}(\mathcal{I})$	21	$\mathbb{S}$	50

Literaturverzeichnis

- T. Bartoszyński and H. Judah. *Set Theory: On the Structure of the Real Line*. Ak Peters Series. Taylor & Francis, 1995. ISBN 9781568810447. URL <https://books.google.at/books?id=Nkzbkj-c83YC>.
- T. Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2007. ISBN 9783540447610. URL <https://books.google.at/books?id=CZb-CAAAQBAJ>.
- A. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. ISBN 9781461241904. URL <https://books.google.at/books?id=WR3SBwAAQBAJ>.