



DIPLOMARBEIT

Auswirkungen eines stochastischen Sterblichkeitsmodells auf das Solvenzkapital unter Solvency II

Ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek

durch

Cornelia Spreitzer
Bräuhausgasse 34/44
1050 Wien

Datum

Unterschrift

Kurzfassung

Zur Sicherstellung der Bedeckung aller Verbindlichkeiten eines Versicherungsunternehmens bei Eintritt eines unvorhergesehenen Ereignisses wird in Europa das Projekt Solvency II eingeführt. Dabei werden die Effekte diverser Risiken berechnet, allerdings wird in dieser Arbeit ausschließlich auf das Langlebigkeitsrisiko und dessen Auswirkungen auf Rentenverträge eingegangen. Die Solvenzkapitalanforderung für Langlebigkeit berechnet sich in der Standardformel über eine prozentuelle Verringerung der Sterblichkeit, wobei der gleichbleibende Faktor über alle Alter als Kritikpunkt angesehen werden kann. Deswegen wird zusätzlich ein stochastischer Ansatz verfolgt, der sowohl das Alter der versicherten Person als auch die Laufzeit des Vertrages miteinbezieht. Besonderes Augenmerk wird auf die Methodik zur Kalkulation dieser Entwicklung der Sterblichkeiten gelegt. Über Monte-Carlo-Simulation wird eine Vielzahl an Pfaden generiert, die zur Bestimmung des Solvenzkapitals über den Value at Risk verwendet werden. Mit beiden Methoden werden die Ergebnisse für eine sofort beginnende und eine aufgeschobene Rente berechnet und damit die Unterschiede zwischen den zwei Ansätzen analysiert. Als Resümee ergibt sich, dass die Struktur des Langlebigkeitsschocks in der Standardformel keine adäquate Einschätzung des Langlebigkeitsrisikos ist und deswegen komplexere Methoden zur Bestimmung der zukünftigen Sterbewahrscheinlichkeiten herangezogen werden müssen.

Abstract

To ensure the coverage of an insurance company's liabilities in case of unforeseen events, the European Union has introduced the Solvency II project. As a part of it the effects of different risks are calculated, with this study focusing on the risk of longevity and its impact on annuity contracts. Using the standard formula, the Solvency Capital Requirement for longevity is determined by the decrease of mortality by a fixed percentage. This constant factor is problematic since no distinction between different ages is made. For that reason a stochastic approach is presented which incorporates the age of the client as well as the duration of the contract. Particular attention has been paid to the methodology for calculating the development of the mortality rates. Using Monte Carlo simulation, a multitude of paths is created in order to compute the Solvency Capital Requirement with the Value at Risk. Both methods are compared and analysed by applying them to an immediate and a deferred annuity. As a result the structure of the longevity shock in the standard formula is not capable of adequately assessing the longevity risk. Therefore, more complex models have to be used for a reasonable calculation of future mortality rates.

Danksagung

Zuallererst bedanke ich mich bei Prof. Friedrich Hubalek für die gewissenhafte Betreuung dieser Diplomarbeit. Danke für die Möglichkeit, dass ich mich mit einem Thema auseinandersetzen durfte, das sich nicht nur in meinem Job widerspiegelt, sondern mir wirklich am Herzen liegt. Danke für die Unterstützung bei diversen Problemen mathematischer und technischer Art, die sich im Zuge der Arbeit aufgetan haben. Danke auch dafür, dass er für meine Vorschläge offen und bei Fragen stets zu erreichen war. Danke für sein Vertrauen und die damit verbundene Möglichkeit, dass ich diese Arbeit so gestalten konnte, wie ich es mir vorgestellt habe.

Ein ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern, die nie an meinen Entscheidungen zweifelten und mich immer meinen eigenen Weg gehen ließen und mir Rückhalt geboten haben. Ohne ihre finanzielle und seelische Unterstützung wäre der Abschluss meines Studiums nicht erreichbar gewesen.

Weiters bedanke ich mich bei allen, die diese Arbeit korrekturgelesen haben. Ein spezieller Dank gilt meinem Freund Dipl.-Ing. Peter Smolek, der mich stets unterstützt und hinter mir steht.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Ein Überblick über Solvency II	3
2.1	Ein kurzer historischer Überblick	4
2.2	Die drei Säulen von Solvency II	5
2.3	Solvenzkapitalanforderung unter Solvency II	11
2.4	Grundlagen zur Berechnung des SCR	15
3	Projektionen der Sterberaten	19
3.1	Grundlagen der Projektionen	20
3.2	Das Lee-Carter Modell	22
3.3	Medium Cohort	24
3.4	Projektionen in dem betrachteten Beispiel	25
4	Das Sterblichkeitsmodell	29
4.1	Das grundlegende Modell	30
4.2	Die Volatilitätsfunktion $\sigma(t, T, x_0)$	32
4.3	Berechnung der Sterblichkeitsverbesserungen	39

5	Die Berechnung des Solvenzkapitals	43
5.1	Das Solvenzkapital für das Beispiel einer sofort beginnenden Rente .	43
5.2	Sensitivitätsanalyse für das Beispiel einer sofort beginnenden Rente	47
5.3	Das Beispiel einer aufgeschobenen Rente	52
6	Zusammenfassung und Ausblick	55
A	R-Code	59
A.1	Projektion der Sterbewahrscheinlichkeiten	59
A.2	Berechnung der Koeffizienten für die Monte-Carlo-Simulation	62
A.3	Berechnung des Solvenzkapitals	64
	Literaturverzeichnis	69
	Abbildungsverzeichnis	73
	Tabellenverzeichnis	75

Kapitel 1

Einleitung

Das Grundwesen einer Versicherung besteht im Risikoausgleich im Kollektiv und in der Zeit. Es wird der im Einzelnen ungewisse, insgesamt jedoch schätzbare Mittelbedarf gedeckt. Vorausgesetzt wird dabei, dass ein Versicherungsunternehmen seinen Verpflichtungen gegenüber den Versicherungsnehmerinnen und Versicherungsnehmern jederzeit nachkommen kann. Zu deren Schutz und um die ausreichende Ausstattung an Kapital und Eigenmittel zu gewährleisten und ein einheitliches Berichtswesen zu etablieren, wurde auf europäischer Ebene das Konzept der Solvabilität eingeführt. Mit Inkrafttreten von Solvency II am 1. Jänner 2016 müssen Versicherungsunternehmen in regelmäßigen Abständen gewisse Kennzahlen an die nationalen Aufsichten liefern. Als eine der wichtigsten Größen gilt die Solvenzkapitalanforderung, die in dieser Arbeit eine bedeutende Rolle spielt. Sie stellt das benötigte Kapital dar, mit dem alle Verluste, die innerhalb des nächsten Jahres auftreten können, mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,5 % abgedeckt werden können. Das Solvency II-Konzept bietet ein vorgefertigtes Formelwerk zur Kalkulation des Solvenzkapitals, die sogenannte Standardformel. Dabei wird zur Berechnung ein modularer Aufbau aus unterschiedlichen Risiken, deren Teilrisiken und Korrelationsmatrizen verwendet. Die Solvenzkapitalanforderung für das Risiko der Langlebigkeit berechnet sich über eine dauerhafte Senkung der Sterbewahrscheinlichkeiten um 25 %. Diese einfache Betrachtungsweise kann, abhängig von der Portfoliozusammensetzung, zu verzerrten Ergebnissen führen, da in der Realität solche Sterblichkeitsverbesserungen nicht für alle Alter prozentuell gleich sein werden. Deswegen wird in dieser Arbeit der alternative Ansatz eines stochastischen Sterb-

lichkeitsmodells verfolgt und anhand dessen untersucht, wie sich die Auswirkungen auf die Höhe des Solvenzkapitals gestalten. Dies geschieht anhand zweier Beispiele, einerseits werden die Ergebnisse für eine sofort beginnende und andererseits für einen aufgeschobene Rente betrachtet.

Nach der Einleitung beschäftigt sich Kapitel 2 mit den Grundlagen zu Solvency II. Es besteht aus einem kurzen historischen Überblick, einer Einführung in das 3-Säulen-System von Solvency II und der Definition und Erklärung des zentralen Begriffes der Solvenzkapitalanforderung. Die für alle Berechnungen benötigte Ausgangssterbewahrscheinlichkeit wird in Kapitel 3 bestimmt. Es wird der Durchschnitt von fünf unterschiedlichen Projektionen kalkuliert, basierend auf einer britischen Rententafel, gewissen Verbesserungsfaktoren und einer jährlichen Mindestverbesserung. Danach wird in Kapitel 4 das stochastische Sterblichkeitsmodell gemäß [Bö10] eingeführt, in dem die zukünftigen Sterberaten mit Hilfe der Ausgangssterbewahrscheinlichkeit und einem stochastischen Faktor berechnet werden. Dieser beruht auf eintrittsalter- und laufzeitabhängigen Volatilitätsfunktionen, die analysiert und grafisch dargestellt wird. Zur Berechnung der Verbesserungsfaktoren ist es notwendig, das Sterblichkeitsmodell zu diskretisieren, was eine Erweiterung des zugrundeliegenden Artikels von Börger [Bö10] ist. Kapitel 5 verwendet die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte, und es wird darauf basierend mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulation das Solvenzkapital über das Risikomaß des Value at Risk kalkuliert. Zudem wird die Solvenzkapitalanforderung für den Langlebigkeitsschock anhand der Standardformel berechnet. Die beiden Methoden und deren Ergebnisse für eine sofort beginnende und eine aufgeschobene Rente werden untersucht und miteinander verglichen. Zum Schluss werden Sensitivitätsanalysen durchgeführt, um die Auswirkung von Veränderungen der Parameter darzustellen. Im Anhang befinden sich relevante Auszüge aus dem erstellten R-Code. Beispielhaft wird die Berechnung der Ausgangssterblichkeit, die Kalkulation der Koeffizienten für den Sterblichkeitsverbesserungsterm sowie die Berechnung des Solvenzkapitals für eine sofort beginnende Rente beschrieben.

Kapitel 2

Ein Überblick über Solvency II

Solvency II ist ein Projekt auf europäischer Ebene, dessen Ziel es in erster Linie ist, den Schutz der Versicherungsnehmerinnen und Versicherungsnehmer zu verbessern und das europäische Versicherungsaufsichtsrecht von Grund auf zu reformieren und zu harmonisieren. Es werden Anforderungen an die Kapitalausstattung und das Risikomanagement gestellt und das Berichtswesen von Versicherungsunternehmen vereinheitlicht. Zusätzlich soll sichergestellt sein, dass Versicherungsunternehmen zukünftige Verpflichtungen aus den Versicherungsgeschäften dauerhaft erfüllen können. Als wichtige Kennzahl dient dazu die Solvenzkapitalanforderung, deren Wert veröffentlicht werden muss. Diese kann auch als Frühwarnsystem für die Aufsichtsbehörden angesehen werden, da diese im Fall eines zu geringen Kapitals sofort intervenieren können. Beauftragt und federführend ist die European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA), die aus dem Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (CEIOPS) hervorgegangen ist und sich aus Vertretern der nationalen Aufsichtsbehörden zusammensetzt. Anwenden müssen Solvency II alle Erst- und Rückversicherungsunternehmen in den 28 Mitgliedstaaten der Europäischen Union und den Staaten des Europäischen Wirtschaftsraums.

Abschnitt 2.1 gibt einen kurzen historischen Überblick über die Entwicklung der Solvabilitätsvorschriften von Solvency II. Die Grundidee basiert auf einem Drei-Säulen-Konzept, welches in Abschnitt 2.2 genauer beschrieben wird. Die erste Säule beschäftigt sich mit quantitativen, die zweite Säule mit qualitativen Anforderungen. Die dritte Säule handelt von Vorschriften zu Marktdisziplin und Transparenz. Aktuarinnen und Aktuar arbeiten größtenteils an Säule eins, die unter anderem die

Erstellung der Bilanz nach Solvency II und die Berechnung der Solvenzkapitalanforderungen und versicherungstechnischen Rückstellungen beinhaltet. Der modulare Aufbau der Standardformel inklusive der einzelnen Risiken und Teilrisiken wird in Abschnitt 2.3 erklärt, während in Abschnitt 2.4 die theoretischen Grundlagen für die in Kapitel 5 durchgeführten Solvenzkapitalberechnungen dargelegt werden. Das gesamte Kapitel basiert hauptsächlich auf Veröffentlichungen der Europäischen Union, wie zum Beispiel der Rahmenrichtlinie 2009/138/EG [EU09] und der Ergänzung dieser Rahmenrichtlinie [EU14], und Veröffentlichungen der Europäischen Aufsichtsbehörde EIOPA, [CEI09a], [CEI09b] und [EIO14]. Im Abschnitt 2.4 wird zum Teil eine Arbeit von Matthias Börger [Bö10] als Grundlage herangezogen.

2.1 Ein kurzer historischer Überblick

Die ersten Vorschriften zu Solvabilität wurden 1973 für Nichtlebensversicherungen und 1979 für Lebensversicherungen eingeführt, siehe [FMA15]. In den 1990er-Jahren wurde auf europäischer Ebene eine Arbeitsgruppe eingesetzt, die europäische Solvabilitätsvorschriften verglichen hat und zu dem Schluss gekommen ist, dass die damals gültigen Eigenmittelvorschriften nicht allen Risiken Rechnung tragen. Da es sich allerdings um eine komplexe Thematik handelt, wurde die Einführung eines neuen Systems zur Definition adäquater Eigenmittelvorschriften beschlossen. In einem ersten Schritt wurden nur die notwendigsten Richtlinien verändert, was unter „Solvency I“ bekannt ist und auf einem Vergleich der Ist-Solvabilität und der Soll-Solvabilität beruht. Als Ergebnis gingen die europäischen Richtlinien 2002/13/EG für die Nichtlebensversicherung und 2002/83/EG für die Lebensversicherung hervor, welche 2003 durch eine Novelle des Versicherungsaufsichtsgesetzes in österreichisches Recht übertragen worden sind. Eine komplette Überarbeitung der Vorschriften, die die angemessene Beurteilung der Solvabilität eines Versicherungsunternehmens sicherstellen, wurde unter dem Namen „Solvency II“ zusammengefasst. Ziel war und ist es, die Regeln für das Risikomanagement zu aktualisieren, eine Orientierung der Kapitalanforderungen an den im Unternehmen vorhandenen Risiken zu gewährleisten und ein einheitliches Berichtswesen zu schaffen.

Die Solvency II-Richtlinie wurde mittels Lamfalussy-Verfahren beschlossen, das ein vierstufiges Rechtssetzungsverfahren darstellt, siehe dazu [BaF14]. Auf Level eins

wird eine Rahmenrichtlinie von der Europäischen Kommission entworfen, die vom Europäischen Parlament und vom Europäischen Rat verabschiedet werden muss. Beispielsweise wurde im Jahr 2009 die für Solvency II grundlegende Rahmenrichtlinie 2009/138/EG beschlossen. Auf der zweiten Stufe werden die Durchführungsrichtlinien von der Europäischen Kommission in Zusammenarbeit mit dem zuständigen Fachausschuss entwickelt. Auf Level drei erarbeitet die EIOPA Leitlinien und Empfehlungen zu Durchführungsverordnungen, zum Beispiel das Consultation Paper 49 [CEI09a] mit Ratschlägen zur Implementierung des lebensversicherungstechnischen Risikos in der Standardformel. Auf der letzten Stufe findet die Überwachung der einheitlichen Umsetzung statt. Eine Änderung der Solvency II-Richtlinie wurde durch die Omnibus II-Richtlinie 2014/51/EU erwirkt, da eine neue europäische Versicherungsaufsichtsbehörde (EIOPA) geschaffen wurde und deren Zuständigkeiten festgehalten werden mussten. Solvency II tritt vollständig mit 1. Jänner 2016 in Kraft, diverse Neuerungen diesbezüglich finden sich im österreichischen Versicherungsaufsichtsgesetz 2016 (VAG 2016).

2.2 Die drei Säulen von Solvency II

Das Solvency II-Konzept ist von der Grundidee her ähnlich den für das Bankenwesen entwickelten Vorschriften Basel III zur Regulierung von Banken und baut auf einem Drei-Säulen-Modell auf. Die erste Säule beschäftigt sich mit den quantitativen Anforderungen, zu denen sowohl eine marktkonsistente Bewertung der Vermögenswerte und Verbindlichkeiten als auch die Berechnung der Mindestkapital- sowie der Solvenzkapitalanforderung zählen. Säule zwei beschreibt qualitative Anforderungen wie unter anderem Mindestvoraussetzungen an das Risikomanagement der Versicherungsunternehmen, ein internes Kontrollsystem, eine Notfallplanung und auch die sogenannten Fit-and-Proper-Anforderungen an Personen in Schlüsselpositionen. In der dritten Säule geht es vorrangig um die Marktdisziplin und Transparenz. Zu deren Sicherung werden Vorschriften definiert, in welchen die Offenlegungspflichten gegenüber der Öffentlichkeit und der Aufsichtsbehörde festgeschrieben sind.

Abbildung 2.1 stellt das Wesen des Konzepts grafisch dar. Im Folgenden werden die grundlegenden Eigenschaften der einzelnen Säulen kurz beschrieben, wobei anzumerken ist, dass in dieser Arbeit nur auf die quantitativen Anforderungen nä-

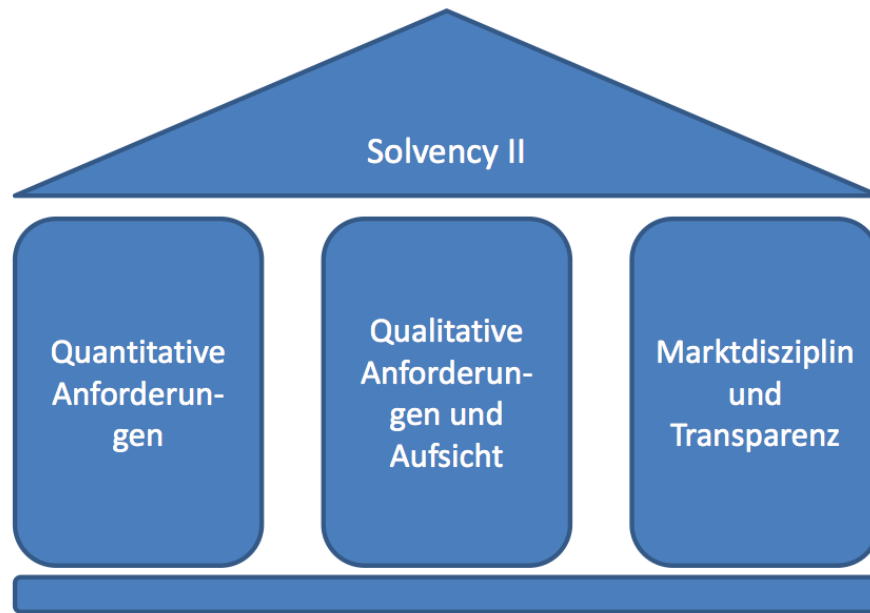


Abbildung 2.1: Übersicht über die drei Säulen von Solvency II

her eingegangen wird. Als Grundlagen werden die Solvency II-Rahmenrichtlinie aus dem Jahr 2009 [EU09] und deren Ergänzung [EU14] verwendet.

Die erste Säule

Die quantitativen Anforderungen des Solvency II-Regimes und die damit erforderliche Eigenmittelausstattung, um als Unternehmen Solvency II-konform solvent zu sein, werden in Säule eins beschrieben. Die genauen Bestimmungen finden sich in [EU09] Kapitel IV Abschnitt 1 zur Bewertung von Vermögenswerten und Verbindlichkeiten, Abschnitt 2 handelt von den Vorschriften für versicherungstechnische Rückstellungen, Abschnitt 3 von Eigenmitteln, Abschnitt 4 von der Solvenzkapitalanforderung und Abschnitt 5 beschreibt die Mindestkapitalanforderung. Vermögenswerte sind laut Artikel 75 mit einem üblichen Marktwert angesetzt, zu dem sie zwischen sachverständigen unabhängigen Geschäftspartnerinnen und Geschäftspartnern getauscht werden könnten.

Auch die Bewertung der versicherungstechnischen Rückstellungen (Technical Provisions) hat unter Solvency II marktkonsistent zu erfolgen. Diese sind laut Artikel 76 Absatz (2) der Rahmenrichtlinie definiert als „aktueller Betrag, den Versi-

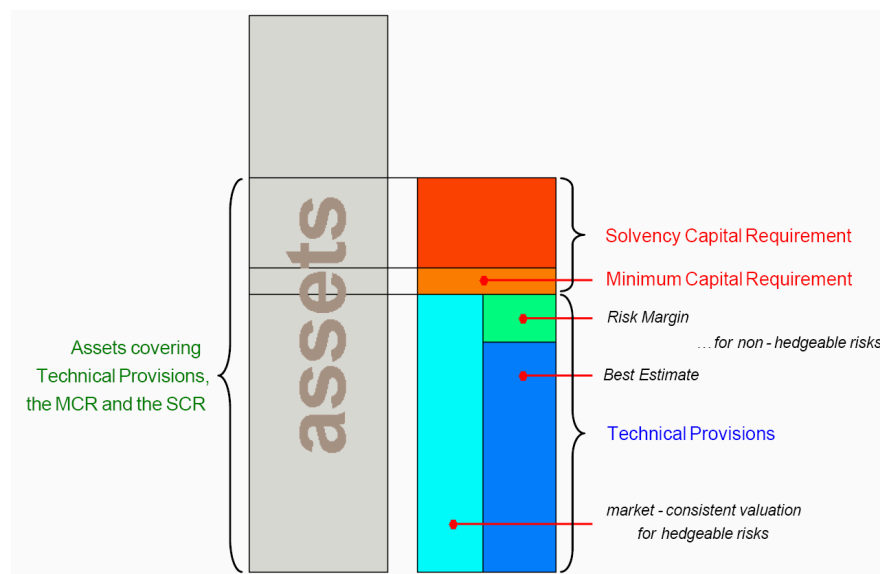


Abbildung 2.2: Bilanz nach Solvency II, Quelle [ISG14]

cherungsunternehmen zahlen müssten, wenn sie ihre Versicherungspflichten unverzüglich auf ein anderes Versicherungsunternehmen übertragen würden“. Berechnet werden die versicherungstechnischen Rückstellungen als Summe eines besten Schätzwertes (Best Estimate) und einer Risikomarge. Der beste Schätzwert muss auf Basis aktueller Daten und realistischer Annahmen bestimmt werden und entspricht dem erwarteten Barwert zukünftiger Zahlungsströme (Cash flows), die Diskontierung erfolgt mit der risikofreien Zinskurve. Die Risikomarge (Risk Margin) ist ein Zuschlag, der jenen Kosten entspricht, welche zur Bereitstellung der erforderlichen Eigenmittel benötigt werden. Der Kapitalkostensatz ist für alle Versicherungsunternehmen gleich hoch. Eine Berechnung des besten Schätzwertes und der Risikomarge ist nicht erforderlich, wenn es sich um Rückstellungen für hedgebare Risiken handelt, welche durch Finanzinstrumente abgesichert und die Zahlungsströme anhand dieser verlässlich abgebildet werden können.

Bei den Kapitalanforderungen sind zwei Regelungen vorgesehen. Die Solvenzkapitalanforderung (SCR) beschreibt das Kapital, mit dem unvorhergesehene Verluste aufgefangen werden können und das ein Versicherungsunternehmen benötigt, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,5 Prozent alle laufenden Verpflichtungen abzudecken. Berechnet wird das SCR über den Value at Risk zu einem Konfidenz-

intervall von 99,5 %. Das zweite Reglement ist die sogenannte Mindestkapitalanforderung (MCR), deren Unterschreitung ein Einschreiten der Aufsicht zur Folge hat. Die Kalkulation erfolgt über den Value at Risk mit einem Konfidenzniveau von 85 % über ein Jahr. Abhängig von der vorhandenen Lizenz, ob es sich um ein Lebens- oder Nichtlebensversicherungsunternehmen handelt, gelten gewisse absolute Untergrenzen, welche in Artikel 129 Absatz (1) d) geregelt sind. Mindest- und Solvenzkapitalanforderung hängen über die Bedingung $25 \% \cdot SCR \leq MCR \leq 45 \% \cdot SCR$ zusammen. Berechnet wird die Kapitalanforderung entweder unter Verwendung der Standardformel, über ein partielles internes Modell oder mittels eines vollkommen vom Unternehmen ausgearbeiteten internen Modells. Im Gegensatz zur Standardformel muss für ein (partielles) internes Modell eine Genehmigung durch die Aufsichtsbehörde erfolgen. Eine genauere Beschreibung der Berechnung der Solvenzkapitalanforderung laut Standardformel findet sich in Kapitel 2.3.

Die zweite Säule

Die zweite Säule betrifft qualitative Anforderungen an ein Governancesystem, welches gemäß Artikel 41 der Solvency II-Rahmenrichtlinie aus dem Jahr 2009 [EU09] in jeder Versicherung einzurichten ist. Dabei dreht sich alles um die geschäftliche Organisation wie zum Beispiel eine transparente Organisationsstruktur, Trennung der Zuständigkeiten, Informationskultur, und das Ziel ist die Errichtung eines wirksamen Risikomanagementsystems. Die schriftlich festgehaltenen Leitlinien des Governancesystems werden von den Aufsichtsbehörden mindestens einmal jährlich überprüft und unterliegen dem sogenannten Proportionalitätsprinzip. Das bedeutet, dass sowohl strengere Anforderungen an Versicherungsunternehmen mit komplexerem Risikoprofil als auch mildere bei einfacherem Risikoprofil gerechtfertigt sind. Die Unternehmen werden dazu verpflichtet, die folgenden Schlüsselfunktionen einzurichten: Risikomanagement-Funktion, Compliance-Funktion, Funktion der internen Revision und Versicherungsmathematische Funktion. Für genauere Information dazu sei auf Artikel 269 bis 272 der Delegierten Verordnung (EU) 2015/35 der Kommission zur Ergänzung der Richtlinie 2009/138 [EU14] verwiesen. Alle Personen, welche das Unternehmen leiten oder Schlüsselaufgaben ausführen, müssen laut den sogenannten Fit-and-Proper-Anforderungen hinreichende fachliche Qualifikation sowie persönliche Zuverlässigkeit aufweisen.

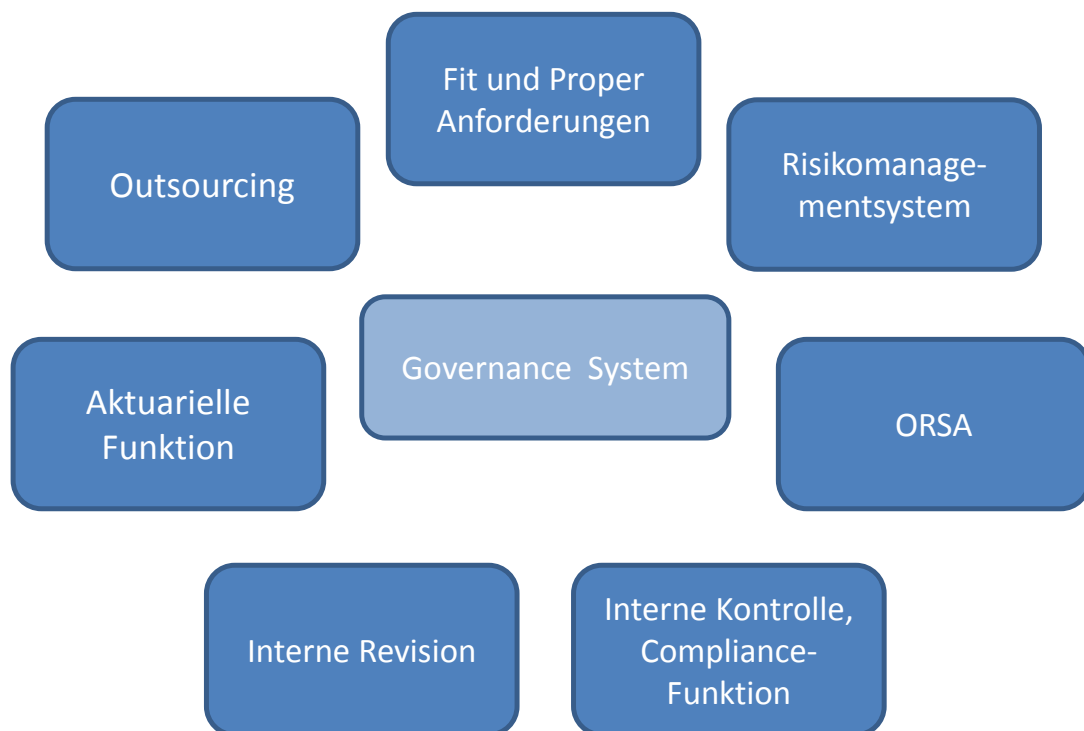


Abbildung 2.3: Überblick über das Governance System nach Solvency II

Jedes Versicherungsunternehmen muss ein wirksames Risikomanagementsystem aufweisen können, um mit Hilfe dessen „die eingegangenen oder potenziellen Risiken kontinuierlich auf Einzelbasis und aggregierter Basis sowie ihre Interdependenzen zu erkennen, zu messen, zu überwachen, zu managen und darüber Bericht zu erstatten“ (siehe Artikel 44 Absatz 1 der Solvency II Rahmenrichtlinie [EU09]). Damit verknüpft ist natürlich das Bestreben, in den einzelnen Versicherungen eine Risikokultur zu entwickeln beziehungsweise diese fortlaufend zu verbessern. Dieses Risikomanagementsystem hat zum einen alle zur Berechnung des Solvenzkapitals einzubeziehenden Risiken abzudecken und zum anderen auch alle Risiken, die dafür nicht vollständig erfasst worden sind. Als Teil dieses Systems hat jedes Versicherungsunternehmen eine unternehmenseigene Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung (ORSA, Own Risk and Solvency Assessment) durchzuführen. Beinhaltend muss diese gemäß Artikel 45 zumindest die Gesamtsolvabilität unter Berücksichtigung des Risikoprofils, der Risikotoleranzschwellen und der Geschäftsstrategie, eine

kontinuierliche Einhaltung der Eigenkapitalanforderungen und der Anforderungen der versicherungsmathematischen Rückstellungen und die Signifikanz der Abweichung des Risikoprofils des Unternehmens von den Annahmen, die der Solvenzkapitalanforderung zugrunde liegen. Versicherungsunternehmen sind somit verpflichtet, kontinuierlich ihr Risikoprofil und den sich daraus ergebenden Kapitalbedarf zu überprüfen, mit dem Ziel, die Kenntnisse über die eigene Risikosituation zu vertiefen. Zusätzlich wird laut Artikel 46 ein wirksames internes Kontrollsystem (IKS) gefordert, welches effiziente Prozesse im Unternehmen sicherstellt und unter anderem Verwaltungs- und Rechnungslegungsverfahren, angemessene Melderegungen und eine Funktion zur Überwachung der Einhaltung der Anforderungen umfasst. Das Outsourcing, also das Auslagern von Tätigkeiten und Funktionen an Drittunternehmen, welches durchaus ökonomisch sinnvoll sein aber diverse Risiken mit sich bringen kann, ist in Artikel 49 geregelt.

Die dritte Säule

Eine Schlüsselrolle im Solvency II-Regime spielt das Meldewesen, das regelt, welche Informationen an die Aufsichtsbehörden beziehungsweise an die Öffentlichkeit weitergegeben werden müssen. Die Berichte an Aufsichten haben sich vor Einführung einer gemeinsamen Richtlinie in Europa betreffend der Häufigkeit und der Detailliertheit sehr unterschieden. Konkretisiert wurden einheitliche Meldeprinzipien erstmals im Consultation Paper 58 „Supervisory Reporting and Public Disclosure Requirements“, siehe [CEI09b].

Jährlich muss an die Öffentlichkeit ein Bericht namens „Solvency Financial and Condition Report“ (SFCR) abgegeben werden, welcher mit der Information aus dem an die Behörden kommunizierten „Report to Supervisors“ (RTS) konsistent sein muss und dessen Informationen nicht irreführend sein dürfen. Sowohl RTS als auch SFCR sind eigenständige Dokumente und sollten einen qualitativen Bericht wie auch sogenannte Quantitativ Reporting Templates (QRT) enthalten. Die QRTs verfügen über ein europaweit ziemlich einheitliches Format und tragen so zu besserer Verständlichkeit, Analysierbarkeit und Vergleichbarkeit bei. Gewisse Kennzahlen zur Finanzlage eines Versicherungsunternehmens (aus den QRT) müssen quartalsweise vorgelegt werden, was viele Versicherer vor ein großes Problem stellen könnte, da zum Beispiel SCR und MCR vier Mal pro Jahr berechnet werden müssen. Die

Offenlegungspflichten der dritten Säule dienen der Förderung von Markttransparenz im europäischen Versicherungsmarkt mittels harmonisierter Meldeinhalte und -formate.

2.3 Solvenzkapitalanforderung unter Solvency II

Die Abkürzung SCR steht für den englischen Begriff Solvency Capital Requirement, zu Deutsch Solvenzkapitalanforderung. Verstanden wird unter dem SCR das erforderliche Kapital eines Versicherungsunternehmens, um im nächsten Jahr einem 200-jährigen Ereignis – einem Extremszenario – zu widerstehen und somit unvorhersehbare Verluste aufzufangen. Neben dem weitgehend vorgegebenen Berechnungsansatz der EIOPA über die sogenannte Standardformel haben Versicherungsunternehmen die Möglichkeit, ein internes oder partielles internes Modell zur Kalkulation der Solvenzkapitalanforderung zu verwenden. Die Wahl, wie das SCR berechnet wird, kann durchaus große Auswirkungen auf die Versicherungsunternehmen haben. Interne Modelle sind sehr aufwändig zu implementieren und stellen Aktuarinnen und Aktuarien vor oftmals komplett neue mathematische Fragestellungen. Jedenfalls unterliegen (partielle) interne Modelle strengen Regelungen und müssen zyklisch validiert und vorher von der jeweils zuständigen nationalen Aufsichtsbehörde genehmigt werden. Grund für die Entscheidung, diesen Berechnungsansatz zu verfolgen, ist zum Beispiel die mögliche Senkung der Kapitalanforderungen und die Steigerung des Unternehmenswertes. Fragwürdig scheint unter anderem die Parametrisierung der unterschiedlichen Stresse im Standardmodell, welche möglicherweise das spezielle Risikoprofil eines Versicherungsunternehmens nicht angemessen abbildet. Die Anforderungen an ein internes Modell und dessen Validierung werden in der Rahmenrichtlinie [EU09] in den Artikeln 112 bis 127 beschrieben.

Genaue Angaben der EIOPA zur Berechnung der Solvenzkapitalanforderung nach der Standardformel und deren Struktur befinden sich in [EIO14]. Es wird ein modularer Ansatz verfolgt, bei dem für alle Untermodule, welche ein spezielles Teilrisiko repräsentieren, eine Kapitalanforderung bestimmt wird. Die Menge aller erhaltenen Kapitalanforderungen wird mittels Korrelationsmatrizen zur Gesamtkapitalanforderung aggregiert. Abbildung (2.4) stellt die einzelnen in der Standardformel berücksichtigten Module und Untermodule grafisch dar.

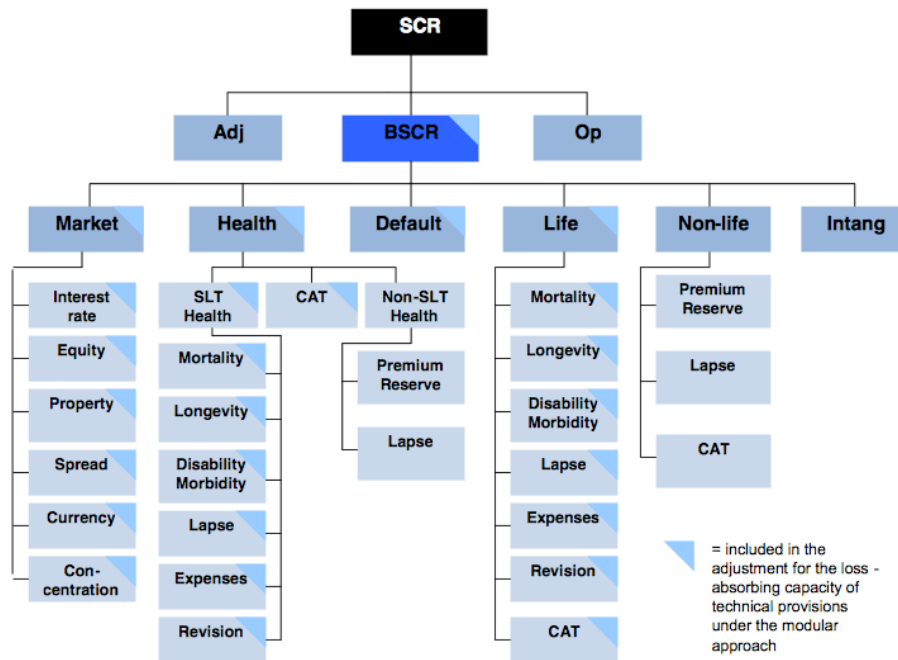


Abbildung 2.4: Zusammensetzung SCR nach Standardformel, aus [EIO14] Seite 6

Gemäß Artikel 103 der Rahmenrichtlinie setzt sich die Solvenzkapitalanforderung zusammen aus der Basissolvvenzkapitalanforderung, der Kapitalanforderung für das operationelle Risiko und einer Anpassung für die Verlustausgleichsfähigkeit der versicherungstechnischen Rückstellungen und latenten Steuern

$$SCR = BSCR + SCR_{Op} - Adj.$$

Unter dem operationellen Risiko versteht man die Gefahr von Verlusten, die auf das Versagen oder die Unangemessenheit von Prozessen, Systemen oder Menschen zurückzuführen sind. Dazu zählen zum Beispiel fehlerhafte interne Prozesse, Verluste aus systembedingten oder externen Vorfällen und Rechtsrisiken.

Zur Berechnung des BSCR werden die sechs folgenden Module der Standardformel benötigt, die sich selbst wiederum aus einigen Untermodulen zusammensetzen und mittels vorgegebenen Korrelationsmatrizen aggregiert werden:

- Marktrisiko,
- Lebensversicherungstechnisches Risiko,

- Nichtlebensversicherungstechnisches Risiko,
- Krankenversicherungstechnisches Risiko,
- Gegenparteiausfallsrisiko und
- Risiko immaterieller Vermögensgegenstände (intangible assets).

Eine genaue Beschreibung, welche Risiken diese Module abzudecken haben, kann der Rahmenrichtlinie [EU09], Artikel 135 entnommen werden. Das Marktrisiko gibt das Risiko wieder, das sich „aus der Höhe oder der Volatilität der Marktpreise von Finanzinstrumenten ergibt, die den Wert der Vermögenswerte und Verbindlichkeiten des Unternehmens beeinflussen“, [EU09] Artikel 135 Absatz (5). Berechnet wird es über Veränderungen der Zinssätze, Aktienkurse, Immobilienpreise und der Wechselkurse. Zusätzlich betrachtet werden das Spread-Risiko, das die Sensitivität der Werte auf Veränderungen in der Höhe des Kredit-Spreads über der risikofreien Zinskurve beinhaltet, und die Marktrisikokonzentration, die auf eine fehlende Diversifikation des Assetportfolios zurückzuführen ist.

Das lebensversicherungstechnische Risiko ergibt sich aus der Gefahr ungünstiger Entwicklungen der unterstellten Rechnungsgrundlagen und setzt sich aus den biometrischen Risiken (Sterblichkeits-, Langlebigkeits-, Invaliditätsrisiko), dem Kostenrisiko, Stornorisiko, Revisionsrisiko und dem Katastrophenrisiko zusammen. Bei den versicherungstechnischen Risiken kommt ein szenarienbasierter Ansatz zu tragen, bei dem eine Projektion zukünftiger Zahlungsströme mit veränderten, geschockten Annahmen benötigt wird. Im Gegensatz dazu werden andere Teilrisiken mit einem faktorbasierten Ansatz kalkuliert, indem zur Erhaltung der Solvenzkapitalanforderung eine relevante Bezugsgröße mit dem passenden Faktor multipliziert wird. Beim Stornorisiko gibt es unterschiedliche Teilrisiken bestehend aus der dauerhaften Erhöhung sowie der dauerhaften Verringerung der Stornoraten und einem Massenstorno im ersten Jahr. Für jeden Versicherungsvertrag wird der maximale Schock aus den drei Szenarien verwendet.

Nach Bestimmung der einzelnen Solvenzkapitalanforderungen für die sieben unterschiedlichen, oben beschriebenen Teilrisiken für das lebensversicherungstechnische Risiko werden diese mit Hilfe der Korrelationsmatrix in Abbildung 2.5 aggregiert.

$i \backslash j$	Sterblich-keit	Langlebig-keit	Invalidität	Kosten	Revision	Storno	Katastro-phen
Sterblich-keit	1	- 0,25	0,25	0,25	0	0	0,25
Langlebig-keit	- 0,25	1	0	0,25	0,25	0,25	0
Invalidität	0,25	0	1	0,5	0	0	0,25
Kosten	0,25	0,25	0,5	1	0,5	0,5	0,25
Revision	0	0,25	0	0,5	1	0	0
Storno	0	0,25	0	0,5	0	1	0,25
Katastro-phen	0,25	0	0,25	0,25	0	0,25	1

Abbildung 2.5: Korrelationsmatrix für das lebensversicherungstechnische Risiko, aus [EU14] Seite 88

giert über

$$SCR_{life} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}.$$

Dabei bezeichnet $Corr_{i,j}$ den Korrelationsparameter für die Untermodule i und j aus Abbildung 2.5. Aufsummiert wird über alle möglichen Kombinationen von i und j , SCR_i und SCR_j stehen für die Kapitalanforderungen für das Teilrisikomodul i beziehungsweise j . Dieses Verfahren wird zur Berechnung des SCR für jedes einzelne Risikomodul mittels der jeweiligen Korrelationsmatrizen angewendet.

Verpflichtungen, die durch Krankheit, Unfall oder Invalidität hervorgerufen werden, unterliegen dem krankenversicherungstechnischen Risiko. Für jeden einzelnen Versicherungsvertrag muss entschieden werden, ob es sich dabei um eine Polizze „nach Art der Leben“ (SLT, similar to life insurance techniques) oder „nach Art der Nichtleben“ (NSLT, similar to non life insurance techniques) handelt. Wird ein Vertrag „nach Art der Leben“ berechnet, unterliegt er denselben Teilrisiken wie ein Lebensversicherungsvertrag. Das Teilrisikomodul für Verträge „nach Art der Nichtleben“ besteht aus dem Stornorisiko und dem Risiko der Prämienrückstellung, zusätzlich wird die Solvenzkapitalanforderung für das Krankenkatastrophenrisiko berechnet. Diese drei Komponenten finden sich auch im nichtlebensversicherungstechnischen Risikomodul wieder.

Das Gegenparteiausfallsrisiko umfasst mögliche Verluste, die durch Verschlechterungen der Bonität oder einen unerwarteten Ausfall von Gegenparteien innerhalb des nächsten Jahres verursacht werden können. Sind die Solvenzkapitalanforderungen aller sechs Risikomodule (lebens-, nichtlebens- und krankenversicherungstechnisches Risiko, Markt- und Gegenparteiausfallsrisiko und Risiko immaterieller Vermögensgegenstände) berechnet, dann ergibt sich die Basissolvenzkapitalanforderung BSC durch Aggregation dieser einzelnen Risikomodule mit Hilfe einer von der EIOPA vorgegebenen Korrelationsmatrix.

2.4 Grundlagen zur Berechnung des SCR

Wie bereits angemerkt wird unter dem SCR das erforderliche Kapital eines Versicherungsunternehmens verstanden, um im nächsten Jahr einem 200-jährigen Ereignis zu widerstehen. Das ist gleichbedeutend mit dem zum Zeitpunkt $t = 0$ benötigten Kapital, mit dem alle Verluste, welche bis $t = 1$ auftreten können, mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,5 % abgedeckt werden können. Dem entspricht gemäß Solvency II-Standardformel die Berechnung des Value at Risk zu einem Konfidenzniveau von 99,5 %. Das vorhandene (oder flüssige) Kapital zum Zeitpunkt t bezeichnet man mit Available Capital (abgekürzt durch AC_t). Es berechnet sich aus der Differenz vom Marktwert der Vermögensgegenstände und dem Marktwert der Verbindlichkeiten zum Zeitpunkt t und ist ein Maß für das Kapital, welches zur Bedeckung von zukünftigen Verlusten zur Verfügung steht.

Der Marktwert der Vermögenswerte (Assets) kann leichter bestimmt werden als der Marktwert der Verbindlichkeiten (zum Beispiel eingebettete Optionen und Garantien). Das passiert nach dem sogenannten Fair Value Prinzip (beizulegender Zeitwert), bei welchem laut IFRS 13, wenn es einen Markt für den Vermögenswert zum Bilanzstichtag gibt, dessen Wert genommen wird oder ansonsten nach einem vergleichswisen Prinzip mit Hilfe von Vergleichswerten für ähnlich beschaffene Vermögenswerte bewertet wird. Der Marktwert der Verbindlichkeiten wird deswegen unter Solvency II approximiert durch die sogenannten technischen Rückstellungen (Technical Provisions), welche sich aus den Best Estimate Liabilities (abgekürzt durch BEL) und einer Risikomarge (Risk Margin, abgekürzt durch RM) zusammensetzen. Die Risikomarge kann verstanden werden als ein Aufschlag auf nicht-hedgebare Ri-

siken. Im Falle eines Konkurses sollte diese groß genug sein, sodass für ein anderes Unternehmen eine Abwicklung des Bestands garantiert wird. Das heißt, die Risikomarge repräsentiert diejenigen Kosten, die ein anderes Versicherungsunternehmen aufbringen müsste, um die Eigenmittelerfordernisse bei Portfolioübernahme zu erfüllen, vergleiche [EU09] Richtlinie 2009/138/EG des Europäischen Parlaments und des Rates betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität II), Artikel 77 (3).

Die Risikomarge kann mit Hilfe des Cost-of-Capital-Ansatzes kalkuliert werden, der in Betracht zieht, dass zur Abwicklung des restlichen Bestands genügend Kapital vorhanden sein muss. Sie wird durch den Barwert der erwarteten Kosten jetziger und zukünftiger SCRs abgeschätzt. Dazu müssen zuerst die Solvenzkapitalanforderungen in die Zukunft projiziert, dann mit der Cost-of-Capital-Rate multipliziert, diskontiert und schlussendlich aufsummiert werden:

$$RM := CoC \cdot \sum_{t \geq 0} SCR_t \cdot v_{t+1}^{t+1}. \quad (2.1)$$

Hier bezeichnet $v_t = 1/(1 + i_t)$ den Diskontierungsfaktor, wobei i_t die jährliche risikofreie Zinsrate zum Zeitpunkt 0 für Maturität t ist. Der Faktor CoC steht für die Cost-of-Capital-Rate (Kapitalkosten), welche 6 % beträgt und den Kapitalkosten eines Unternehmens mit einem BBB-Rating entspricht. Begründet wird dies dadurch, dass das Versicherungsunternehmen auch zukünftig Solvenzkapitalanforderungen erfüllen muss, was allerdings mit Kosten verbunden ist. Die Risikomarge wird dementsprechend in Abhängigkeit der zukünftigen SCRs berechnet. Die Solvenzkapitalerfordernis wird definiert als der 99,5 % Value at Risk (abgekürzt durch VaR) des verfügbaren Kapitals AC über ein Jahr. Das heißt, man sucht den kleinsten Wert x , sodass die Wahrscheinlichkeit, nach dem ersten Jahr noch Kapital verfügbar zu haben, mindestens 99,5 Prozent beträgt. Mathematisch formuliert bedeutet das, man berechnet das minimale x , sodass gilt:

$$P(AC_1 > 0 \mid AC_0 = x) \geq 99,5 \%. \quad (2.2)$$

Diese implizite Definition kann beim Bestimmen des SCR Probleme bereiten, und deshalb wird die folgende Gleichung verwendet, die approximativ das gleiche aus-

drückt, aber praktische Vorteile gegenüber der obigen Definition hat:

$$SCR^{VaR} := \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left(P \left(AC_0 - \frac{AC_1}{1 + i_t} > x \right) \leq 0,005 \right). \quad (2.3)$$

Was daraus ersichtlich wird, ist eine gegenseitige Abhängigkeit von Solvenzkapitalanforderung und verfügbarem Kapital. Das SCR wird berechnet als der Value at Risk des verfügbaren Kapitals und das verfügbare Kapital hängt vom Solvenzkapital über die Risikomarge ab. Zur Lösung des Zirkelbezugs schlägt die Europäische Aufsichtsbehörde für das Versicherungswesen und die betriebliche Altersvorsorge EIOPA im Consultation Paper [CEI09a] Absatz 3.1 vor, dass die Veränderung des Net Asset Value (Vermögenswerte minus Verbindlichkeiten) auf einer Bilanz basieren sollte, welche keine Risikomarge einschließt. Das darf aber lediglich der Fall sein, wenn das Schockszenario auf einer Änderung des Werts des Vermögens minus der Verbindlichkeiten beruht. Dieser Ansatz, dass der Schock der Verbindlichkeiten bei Berechnung des SCR keine Risikomarge beinhalten sollte, beruht auf der Annahme, dass sich die Risikomarge in den Schockszenarien nicht maßgeblich von der des Basiszenarios unterscheidet. Die Änderung des verfügbaren Kapitals zum Zeitpunkt t kann somit durch die Änderung des Net Asset Value zu t approximiert werden:

$$NAV_t := A_t - BEL_t. \quad (2.4)$$

In obiger Gleichung bezeichnet A_t den Marktwert der Vermögenswerte und BEL_t die Best-Estimate-Verbindlichkeiten zum Zeitpunkt t , welche aus Vereinfachungsgründen in dieser Arbeit fortan nur mehr als Verbindlichkeiten bezeichnet werden.

Es wird folgend das Submodul für das Langlebigkeitsrisiko im Solvency II-Standardmodell betrachtet, bei dem die SCR der Module und Submodule zuerst einzeln berechnet und danach mit Hilfe von vordefinierten Korrelationsmatrizen aggregiert werden. Die Solvenzkapitalerfordernis für das Langlebigkeitsrisiko wird wie folgt ermittelt:

$$SCR_{long}^{VaR} := \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left(P \left(NAV_0 - \frac{NAV_1}{1 + i_t} > x \right) \leq 0,005 \right). \quad (2.5)$$

Zur Berechnung werden die Verbindlichkeiten BEL_t all jener Verträge verwendet, die dem Langlebigkeitsrisiko ausgesetzt sind, sowie deren dazugehörige Vermögenswerte A_t . Typischerweise sind das all jene Produkte, bei denen das Versi-

cherungsunternehmen wiederkehrende Zahlungen bis zum Tod der Versicherungsnehmerin beziehungsweise des Versicherungsnehmers garantiert. Dementsprechend führt die steigende Lebenserwartung, was einer Verringerung der Sterblichkeiten entspricht, zu höheren Verbindlichkeiten. In der jetzt gültigen Version des Solvency II-Standardmodells wird das SCR für das Langlebigkeitsrisiko ermittelt als die Änderung im Net Asset Value aufgrund eines Langlebigkeitsschocks zum Zeitpunkt $t = 0$, wobei sich die Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten eines jeden Alters um einen Prozentsatz von 25 % verbessern:

$$SCR_{long}^{shock} := NAV_0 - (NAV_0 | \text{longevity shock}). \quad (2.6)$$

Diese Formel stellt eine Approximation des Solvenzkapitals SCR_{long}^{VaR} von Formel (2.5) dar. Aus den Kommentaren europäischer Versicherungsunternehmen zur QIS4 (Quantitative Impact Study) in [CEI09a] im Jahr 2009 geht hervor, dass aufgrund möglicher Konservativität ein anderer Ansatz als eine einheitliche prozentuelle Verringerung aller Sterberaten erwünscht sei. Vorgeschlagen werden unter anderem eine alters- und versicherungsdauerspezifische Struktur von Langlebigkeit oder eine Verbesserung von einem gewissen Prozentsatz pro Jahr in Bezug auf eine Basissterblichkeit. Angesichts diverser Untersuchungen von historischen Daten und stochastischer Simulationen zukünftiger Sterblichkeitsverbesserungen beziehungsweise aus Gründen der Übersichtlichkeit schlägt die Europäische Aufsichtsbehörde EIOPA vor, weiterhin den 25 %igen Schock beizubehalten.

Da sich diese Arbeit in weiterer Folge ausschließlich mit der Solvenzkapitalanforderung für Langlebigkeitsrisiko beschäftigt, wird deshalb der Einfachheit halber auf den Index *long* verzichtet. Die in diesem Abschnitt angeführten Grundlagen werden in Kapitel 5 verwendet, um die Solvenzkapitalanforderungen für einige Beispiele zu berechnen und zu vergleichen.

Kapitel 3

Projektionen der Sterberaten

Als Grundlage für das in Kapitel 4 betrachtete Sterblichkeitsmodell, welches zur Berechnung des Solvenzkapitals herangezogen wird, verwende ich wie Matthias Börger in [Bö10] einen Durchschnitt mehrerer Projektionen der Sterberaten in die Zukunft. Diese basieren auf den britischen Rententafeln PNMA00 aus dem Jahr 2000 und Daten der Continuous Mortality Investigation (CMI), die unter anderem unterschiedliche Vorhersagen für zukünftige Mortalitätsraten bereitstellt. Im ersten Abschnitt 3.1 werden die Grundlagen zur Berechnung der später verwendeten Basissterbewahrscheinlichkeiten sowie anhand eines kleinen Beispiels, welches dem Benutzerhandbuch für die Projektionen des CMI aus [CMI11] entnommen ist, die Verwendung der vom CMI bereitgestellten Daten erklärt. Die Abschnitte 3.2 und 3.3 beschäftigen sich mit zwei der gängigsten Modelle zur Prognose von Sterblichkeiten, dem Lee-Carter-Modell sowie der Medium-Cohort-Methode. Ebenfalls zu erwähnen gilt es die P-spline-Methode (Penalised Spline), welche kubische Splines – also ein zweidimensionales Modell – an die Sterblichkeitsdaten anpasst. Die Koeffizienten des Modells werden mit Hilfe eines Maximum-Likelihood-Ansatzes in Abhängigkeit einer sogenannten Penalty ausgewählt. Die stellt sicher, dass ein passendes Verhältnis zwischen dem Level an Glattheit und der Güte der Anpassung gegeben ist. Auf diese Art der Methode der Berechnung von Projektionen werde ich nicht weiter eingehen, da sie für meine Betrachtungen nicht weiter von Relevanz ist. Der letzte Abschnitt 3.4 beschäftigt sich mit der von mir durchgeführten Herleitung der später zur Kalkulation der Solvenzkapitalanforderung benötigten Sterblichkeiten, deren Umsetzung im Programm R unter Verwendung des Codes aus A.1 erfolgt.

3.1 Grundlagen der Projektionen

Die CMI (Continuous Mortality Investigation) wird von dem Institute and Faculty of Actuaries, einer der britischen Aktuarvereinigungen, unterstützt. Herzstück dieses Projekts ist, dass von britischen Versicherungen laufend Daten an die CMI gemeldet werden, mit denen die Projektionen der zukünftigen Sterberaten kontinuierlich weiterentwickelt werden können. Das wird wiederum von den Versicherern als Basis für ihre Berechnungen der Best-Estimate-Sterblichkeiten verwendet. Börger arbeitet in seinem Artikel mit dem Durchschnitt der Projektionen fünf großer britischer Versicherungsunternehmen, was genauer von Dave Grimshaw in [Gri07] beschrieben wird. Nachfolgend sind die angewendeten Annahmen der jeweiligen Versicherer für zukünftige Sterblichkeitsverbesserungen angegeben:

- Friends Provident: Durchschnitt von Medium Cohort und Lee-Carter, Verbesserung um mindestens 0,5 %,
- L&G: Durchschnitt von Medium Cohort und Lee-Carter, mindestens 0,8 %,
- Norwich Union: Medium Cohort, Minimumverbesserung 2 %,
- Prudential: Medium Cohort, mindestens 1,25 %,
- Standard Life: Medium Cohort, Verbesserung um mindestens 1,5 %.

Die CMI veröffentlicht regelmäßig die sogenannte Library of Mortality Projections, um britischen Aktuarinnen und Aktuaren eine Referenz für Entwicklungen der Sterberaten zu geben. Darin enthalten sind Verbesserungsfaktoren unterschiedlicher Modellierungsansätze zur Projektion zukünftiger Sterblichkeiten. Im Gegensatz zu den aktuellsten Versionen sind die Versionen 1.0 Volume 1 und 1.1, welche auch von Börger verwendet werden, öffentlich zugänglich auf der Webseite der CMI, siehe [CMI07] und [CMI09], ebenso ist ein Benutzerhandbuch zur Version 1.3 verfügbar unter [CMI11].

Betrachtet man ein Tabellenblatt für ein bestimmtes Projektionsmodell, so besteht dieses aus einer Matrix aus Reduktionsfaktoren, welche vom Alter – indiziert in Zeilen – und den Kalenderjahren – in Spalten – abhängen. Dementsprechend beginnt jede dieser Matrizen mit Werten von 100 % im Startjahr und weist in den

folgenden Spalten die kumulativen Faktoren von Beginn bis zum in Frage kommenden Jahr aus. Es sei angemerkt, dass jegliche Projektion in der Library of Mortality Projections unabhängig von einer spezifischen Grundsterbetafel ist (vergleiche allgemeine Bemerkungen auf Seite 3 des Benutzerhandbuchs [CMI11]).

Die kumulativen Reduktionsfaktoren $RF(x, t)$ werden von der CMI definiert als $RF(x, t) = q_{x,t}/q_{x,0}$, wobei x das Alter der versicherten Person und t die seit dem Startjahr vergangene Zeit darstellen. Betrachtet man – ähnlich wie im Benutzerhandbuch der CMI [CMI11] – als Beispiel die Medium-Cohort-Projektion im Tabellenblatt 4 Volume 1 [CMI07] für ein 65-jähriges Individuum, dann sieht die Matrix der Faktoren wie in Tabelle 3.1 aus.

x	2000	2001	2002	2003	2004	2005
65	69,1763%	66,4489%	64,0852%	62,2152%	60,6153%	59,0736%
66	68,4657%	65,6255%	63,1633%	61,1895%	59,4970%	58,0483%
67	67,7614%	64,8110%	62,2531%	60,1790%	58,3974%	57,0363%
68	67,2240%	64,1586%	61,5015%	59,3253%	57,4535%	55,9962%

Tabelle 3.1: Reduktionsfaktoren berechnet mit Medium Cohort Projektion

Die Sterblichkeitsverbesserungen lassen sich mit Hilfe obiger Faktoren und einer beliebigen Ausgangssterbewahrscheinlichkeit berechnen, ich nehme als Beispiel die britische Rententafel PNMA00, welche auch in späteren Kalkulationen verwendet wird. Die Sterblichkeit für das Alter 65 q_{65} im Jahr 2000 kann direkt aus der Rententafel abgelesen werden, da für eine Tafel aus dem Jahr 2000 im selben Jahr keine Veränderungen zu erwarten sind, jenen Zeitpunkt bezeichne ich mit t_0 . Für das zweite Jahr hingegen berechnet man die Sterblichkeit aus dem ursprünglichen $\hat{q}_{66} = 0,011401$ aus PNMA00 und der Verbesserung über das erste Jahr $1 - RF(66, 1)/RF(66, 0) = 1 - 65,6255/68,4657 = 4,1484\%$. Daraus erhält man die angepasste, verringerte Sterblichkeit von $q_{66} = 0,011401 \cdot (1 - 4,1484\%) = 0,010928$. Ähnlich verfahren wird mit dem zweiten und allen weiteren folgenden Jahren. Die Verbesserung in $t = 2$ ist $1 - RF(67, 2)/RF(67, 0) = 1 - 62,2531/67,7614 = 8,1290\%$ und somit gilt $q_{67} = 0,012589 \cdot (1 - 8,1290\%) = 0,011566$. Tabelle 3.2

fasst die Ergebnisse dieses Beispiels übersichtlich zusammen.

Alter	Jahr	\hat{q}_x	q_x
65	2000	0,010403	0,010403
66	2001	0,011401	0,010928
67	2002	0,012589	0,011566

Tabelle 3.2: Sterblichkeiten original \hat{q}_x und verbessert q_x

Verallgemeinerte Formeln zur Berechnung der Verbesserungen finden sich in Kapitel 3.4, in dem zusätzlich die Sterblichkeiten für mein konkretes Beispiel, dem Durchschnitt von fünf speziellen Projektionen mit Mindestverbesserungen, näher spezifiziert und kalkuliert werden. Zuvor werden die Grundideen der gängigen Projektionsweisen von Lee-Carter und der Medium-Cohort-Methode erläutert.

3.2 Das Lee-Carter Modell

Das Modell von Lee-Carter wurde 1992 von Ronald D. Lee und Lawrence R. Carter in [LC92] erstmalig veröffentlicht und hat sich seitdem inklusive diverser Erweiterungen zu einem der meist verwendeten Modelle zur Vorhersage von Sterbewahrscheinlichkeiten entwickelt. Es handelt sich dabei um ein bilineares Modell in Alter x und Zeit t der Form

$$\ln \mu(x, t) = a_x + b_x k_t + \epsilon_{x,t}. \quad (3.1)$$

Die Sterbeintensität $\mu(x, t)$ wird abgeleitet dadurch, dass das Modell an vorhandene Sterblichkeitsdaten angepasst und Parameter geschätzt werden. Vorhersagen beruhen auf Extrapolation des zeitabhängigen Parameters k_t unter Verwendung von Zeitreihenanalysen. Die Komponenten des Modells bestehen aus:

- dem durchschnittlichen Sterblichkeitsniveau über die Zeit für ein bestimmtes Alter x , a_x ,

- der Gesamtveränderung der Sterblichkeit über die Zeit bei gegebenem Alter, k_t ,
- einem Schema der Abweichungen pro Alter x vom Gesamtniveau der Sterblichkeitsänderungen, b_x , und
- den Fehlertermen $\epsilon_{x,t}$.

Die Beschaffenheit von b_x gibt somit Aufschluss darüber, welche Sterberaten als Reaktion auf Veränderungen in k_t schnell und welche langsamer abnehmen. Beide Komponenten a_x und b_x werden als invariant über die Zeit angenommen. Der Fehlerterm $\epsilon_{x,t}$ mit Mittelwert 0 und Varianz σ_ϵ^2 spiegelt altersspezifische Einflüsse wider, welche nicht vom Modell erfasst werden.

Es gilt nun, die Parameter mittels Maximum Likelihood so zu schätzen, dass das Modell zu den vorhandenen Daten passt. Bei gegebenem $\mu(x, t)$ wird eine Lösung der Gleichung (3.1) nach der Methode der kleinsten Quadrate gesucht. Diese Gleichung ist offensichtlich unterbestimmt, was bedeutet, dass bei einer Lösung von a, b, k zum Beispiel $a, bc, k/c$ mit einem Skalar c ebenfalls Lösung des Modells ist. Deswegen werden k bis auf eine lineare Transformation, b bis auf eine multiplikative Konstante und a bis auf eine additive Konstante genau bestimmt. Um die Eindeutigkeit der Wahl der Parameter zu gewährleisten, werden bei der Singulärwertzerlegung, welche zur Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate zum Einsatz kommt, die Bedingungen $\sum_x b(x) = 1$ und $\sum_t k(t) = 0$ verwendet. In vielen Anwendungen inklusive dem originalen Werk von Lee-Carter [LC92] wird aufgrund der Linearität von $k(t)$ ein Random Walk mit Drift als geeignet angesehen

$$k(t) = k(t-1) + d + e(t), \quad (3.2)$$

wobei d der Drift-Parameter und $e(t)$ ein Fehlerterm sind. Die zukünftige Mortalität wird dann berechnet mit Hilfe der geschätzten a_x und b_x und dem prognostizierten Sterblichkeitsindex k_t . Bei der Methode, die zum Erhalt der Lee-Carter-Projektion für die Library of Projections verwendet wird, wird der stochastische Fehlerterm exkludiert, um eine eindeutige zentrierte Projektion der $\mu(x, t)$ zu erzeugen.

Mehrere Modifikationen des Modells sind darauf basierend entwickelt worden, zum Beispiel die Möglichkeit der Verwendung von Termen höherer Ordnung für eine größere Flexibilität bei den projizierten Veränderungen der Sterberaten.

3.3 Medium Cohort

Als Kohorte bezeichnet man Gruppen von Personen, welche nach bestimmten Kriterien ausgewählt werden und eine gewisse Eigenschaft gemeinsam haben. In der Sterblichkeitsanalyse spricht man im Speziellen von einer Menge an Leuten, die in derselben Zeitperiode geboren worden sind. Für das Vereinigte Königreich sind die sogenannten Kohorteneffekte dank der CMI sehr gut erforscht, siehe [CMI02] aus dem Jahr 2002. Obwohl in jeder Population gewisse Kohorteneffekte zu beobachten sind, wird diesem Begriff in Großbritannien ein besonderes Phänomen zugeschrieben: Menschen, die zwischen 1925 und 1945 geboren worden sind, haben höhere Sterblichkeitsverbesserungen erlebt als Leute, die entweder davor oder danach zur Welt kamen. Es stellt sich die Frage, was zu diesen schnellen Verringerungen der Mortalität geführt hat und warum weder für die vorhergehende noch für die nachfolgende Kohorte ähnlich rapide Veränderungen festgestellt werden konnten. Dies könnte aus einem Zusammenspiel einiger Faktoren wie einem wachsenden Wohlfahrtsstaat oder dem zweiten Weltkrieg erklärt werden. Während des Krieges wurden starke Geburtenraten verzeichnet und Menschen, die in den 1930er Jahren zur Welt kamen, wurden nicht zum Wehrdienst eingezogen. Laut Willets Arbeit [Wil99] gibt es Anzeichen dafür, dass die Sterblichkeitsverbesserungen ab einem Alter von 80 Jahren in größerem Ausmaß zu greifen beginnen.

Die CMI stellt drei unterschiedliche Varianten der Cohort-Tabellen mit kumulativen Sterblichkeitsverbesserungsfaktoren zur Verfügung. In den Projektionen wird angenommen, dass der Kohorteneffekt zu verschiedenen Zeitpunkten abgeschwächt wird und ausstirbt. Die „92er“-Tabellen, welche 2002 aktualisiert und angepasst worden sind, enthalten die folgenden Zeitpunkte der Abschwächung der Kohorteneffekte:

- Long Cohort im Jahr 2040,
- Medium Cohort im Jahr 2020 und
- Short Cohort im Jahr 2010.

Auch in den heute älteren Generationen sind stetige Steigerungen der Lebenserwartung zu beobachten. Wie lange sich dieser Trend fortsetzen wird, ist unklar.

Auch warum Sterblichkeitsverbesserungen in diesem Ausmaß stattfinden, kann zwar ansatzweise aber noch immer nicht vollständig erklärt werden. Es stellt sich außerdem die Frage, ob nur mit einer Erhöhung der Lebenserwartung gerechnet werden muss oder ob die Lebensdauer ansteigt. Dies käme einem Verschieben des maximal erreichten Alters nach oben gleich, was für viele Diskussionen sorgt.

3.4 Projektionen in dem betrachteten Beispiel

Ausgangspunkt für die Berechnungen sind die britische Rententafel PNMA00 aus dem Jahr 2000, welche unter [CMI06] verfügbar ist, und die Reduktionsfaktoren für die beiden benötigten Projektionsmethoden. Zum Einsatz kommt einerseits das Tabellenblatt „Medium Cohort“ aus [CMI07] sowie andererseits Tabellenblatt „LC_Male_Ass_2006_Central“ aus [CMI09], in dem zur Kalkulation der Verbesserungen das Lee-Carter-Modell verwendet wurde. Beide Matrizen beinhalten Werte ab dem Startjahr 1992 bis zum Ende 2130, interessant für meine Kalkulationen sind die Faktoren ab dem Jahr 2000, aus dem die relevante Rententafel stammt. Das in Folge betrachtete Beispiel einer sofort beginnenden Rente mit Versicherungsbeginn Ende 2007 lässt die Annahme zu, dass bei Vertragsbeginn bereits eine Verringerung der Sterblichkeit PNMA00 vorliegt. Dementsprechend gibt es bereits im ersten Jahr des Versicherungsvertrags, ganz im Gegensatz zum vorherigen Beispiel mit Ergebnissen in 3.2, eine Verringerung der Mortalität um $RF(x, 2007)/RF(x, 2000)$. Es kann passieren, dass die tatsächliche Änderung der Sterberaten zwischen der zugrundeliegenden Sterbetafel – in vorliegendem Fall 2000 – und dem Bewertungsstichtag – hier Ende 2007 – sich von den prognostizierten zukünftigen Verbesserungen unterscheidet. Sinnvollerweise sollte deswegen in der Praxis die bereits vorhandene Information über die tatsächliche Veränderung der Sterbewahrscheinlichkeiten bis zum Stichtag verwendet und erst für Zeitpunkte danach die Projektionen angewendet werden.

Bei den Projektionen der fünf großen britischen Versicherungsunternehmen wird jeweils von gewissen jährlichen Mindeststerblichkeitsverbesserungen ausgegangen. Da die Reduktionsfaktoren aus den Tabellen der CMI kumulative Verbesserungen ausgehend von dem zugrunde liegenden Startjahr widerspiegeln, müssen für den Durchschnitt aus den fünf Projektionen zuerst Verbesserungsraten auf jährlicher

Basis berechnet werden. Es wird der Startpunkt der Rententafel 2000 mit $t = 0$ und die eingelesenen Reduktionsfaktoren mit $RF_{MC}(x, t)$ für Medium Cohort respektive $RF_{LC}(x, t)$ für Lee-Carter benannt, wobei x das Alter und t die seit dem Startjahr vergangene Zeit bezeichnen.

Definition 3.1. Für die Medium-Cohort- und die Lee-Carter-Projektion definiere ich für $t = 2, \dots, 120 - x$ die jährliche Verbesserung zum Zeitpunkt t durch

$$MC^1(x, t) := 1 - \frac{RF_{MC}(x, t)}{RF_{MC}(x, t-1)}, \quad MC^1(x, 1) = 0 \text{ und} \quad (3.3)$$

$$LC^1(x, t) := 1 - \frac{RF_{LC}(x, t)}{RF_{LC}(x, t-1)}, \quad LC^1(x, 1) = 0. \quad (3.4)$$

Für zwei der fünf Ansätze der britischen Versicherungsunternehmen werden Durchschnittswerte aus Medium Cohort und Lee-Carter Modell genommen.

Definition 3.2. Der Durchschnitt der einjährigen Sterblichkeitsverbesserungen aus dem Modell nach Lee-Carter und der Medium-Cohort-Methode ist definiert durch

$$ML^1(x, t) := \frac{MC^1(x, t) + LC^1(x, t)}{2} \quad \text{für } t = 1, \dots, 120 - x. \quad (3.5)$$

Im nächsten Schritt werden jene jährlichen Verbesserungsgraten, welche unter dem geforderten Minimum liegen, durch den Minimalwert von $r\%$ ersetzt und damit danach die neuen kumulativen Reduktionsfaktoren berechnet. Bei gegebenen jährlichen Verbesserungen von $MC^1(x, t)$ können die kumulativen Reduktionsfaktoren durch Umformen der Definition (3.3) erhalten werden durch

$$RF_{MC}(x, t) = RF_{MC}(x, t-1) \cdot [1 - MC^1(x, t)].$$

Ersetzen der jährlichen Verbesserungsrate $MC^1(x, t)$ durch das Maximum aus ihr und der jeweiligen Mindestverbesserungsrate r liefert

$$RF_{MC}(x, t) = RF_{MC}(x, t-1) \cdot [1 - \max(r; MC^1(x, t))] \quad \text{für } t = 2, \dots, 120 - x,$$

mit r als Minimaländerung von 1,25 %, 1,5 % oder 2 %. Die Verbesserung im ersten Jahr $t = 1$ ist genau der ursprüngliche Reduktionsfaktor aus der Library of Projections, da angenommen wird, dass die 2000er-Sterbetafel für das erste Jahr genaue

Werte liefert. Somit gilt:

$$MC_r^1(x, 1) = RF_{MC}(x, 1).$$

Die Berechnung für den Durchschnitt aus Medium Cohort und Lee-Carter-Modell mit Mindestverbesserungen von $r = 0,5\%$ beziehungsweise $r = 0,8\%$ funktioniert analog zu vorherigen Überlegungen und liefert für $t = 2, \dots, 120 - x$

$$ML_r^1(x, t) = \frac{RF_{MC}(x, t-1) + RF_{LC}(x, t-1)}{2} \cdot [1 - \max(r; ML^1(x, t))]$$

$$ML_r^1(x, 1) = \frac{RF_{MC}(x, 1) + RF_{LC}(x, 1)}{2}.$$

Mit Hilfe obiger fünf relevanten Mindestverbesserungen können in weiterer Folge die neuen Sterbewahrscheinlichkeiten berechnet werden. Für die Medium-Cohort-Methode mit einer Mindestverbesserung von r erhält man die verringerten Sterberaten durch Multiplikation der ursprünglichen Sterberaten \hat{q}_x aus der Tafel PNMA00 mit dem kumulativen Verbesserungsfaktor inklusive Mindestverbesserung von 2000 bis zur Zeit t , oder anders ausgedrückt

$$MC_r(x, t) = \hat{q}_x \cdot \frac{MC_r^1(x, t)}{MC_r^1(x, 1)} \quad \text{für } t = 1, \dots, 120 - x.$$

Analog erhalten wir

$$ML_r(x, t) = \hat{q}_x \cdot \frac{ML_r^1(x, t)}{ML_r^1(x, 1)} \quad \text{für } t = 1, \dots, 120 - x.$$

Die Projektion der Sterberaten, welche für das Fallbeispiel verwendet wird, berechnet sich aus dem Durchschnitt obiger fünf Veränderungen

$$q_x = (MC_{1,25} + MC_{1,5} + MC_2 + ML_{0,5} + ML_{0,8}) \cdot \frac{1}{5}. \quad (3.6)$$

Die ursprüngliche Sterblichkeit \hat{q}_x aus PNMA00 und der Durchschnitt der fünf Projektionen q_x für eine bei Vertragsbeginn 65-jährige Person sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Dabei ist ersichtlich, dass der Unterschied zwischen den beiden Kurven mit steigendem Alter größer wird. Verantwortlich dafür sind vor allem die jährlichen Mindeststerblichkeitsverbesserungen, die bei höherem Alter schlagend werden.

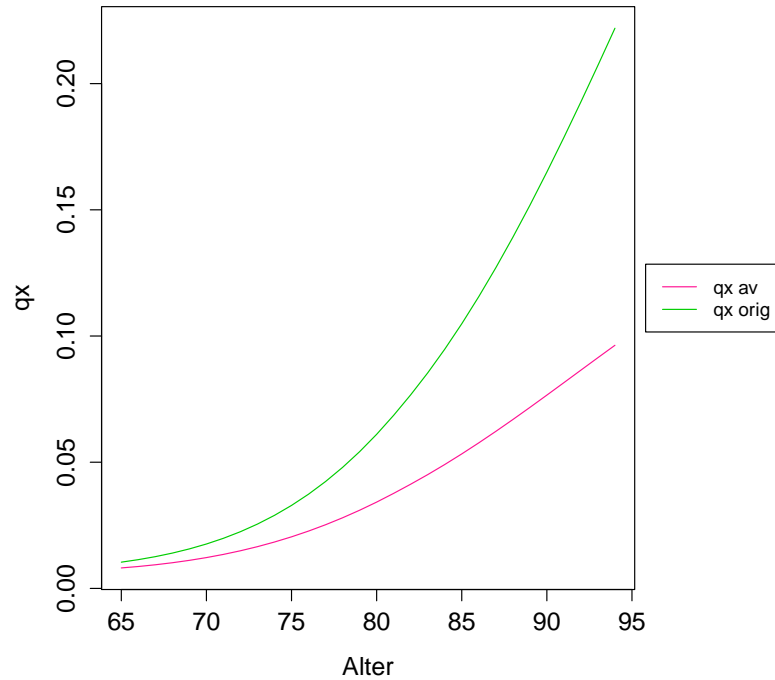


Abbildung 3.1: Sterblichkeit aus Projektion und PNMA00 mit $x_0 = 65$

Die neue Rententafel q_x , welche mit Hilfe des in Anhang A.1 programmierten R-Codes berechnet wird, stellt in weiterer Folge den Ausgangspunkt meiner Überlegungen dar. Zuerst werden in Kapitel 4 diese Sterbewahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines stochastischen Modells in die Zukunft projiziert, danach werden in Kapitel 5 die Solvenzkapitalanforderung einerseits mit den stochastischen und andererseits mit den geschockten Sterblichkeiten berechnet und Vergleiche zwischen den beiden Ansätzen gezogen.

Kapitel 4

Das Sterblichkeitsmodell

Zur Kalkulation der Sterblichkeitsverbesserungen für die Berechnung der Solvenzkapitalanforderung mittels Value at Risk verwende ich ein Modell folgend Börger [Bö10]. Es handelt sich dabei um ein sogenanntes Forward-Sterblichkeitsmodell, welches vollständig durch dessen Volatilität und eine Anfangsbedingung für die zugrunde liegende Sterbeintensität erklärt wird. Im ersten Abschnitt des Kapitels 4.1, welcher der als Basis verwendeten Arbeit von Börger folgt, wird die Intention und Spezifikation des Sterblichkeitsmodells erklärt. Danach beschäftige ich mich mit der genauen Beschreibung der Volatilitätsfunktion, welche von der Zeit, der Maturität und dem jeweiligen Eintrittsalter der versicherten Person abhängig ist. Zusätzlich zum Inhalt von Börgers Arbeit [Bö10] beinhaltet der Abschnitt 4.2 eine Erklärung der Bedeutung, die Diskussion sowie eine grafische Darstellung der einzelnen Komponenten der Volatilitätsfunktion. In Abschnitt 4.3 wird mit Hilfe einiger vereinfachender Bezeichnungen die Theorie zur Berechnung der Verbesserungen für den stetigen Fall hergeleitet. Die Eigenschaften des Modells werden auf den diskreten Fall übertragen, da die Diskretisierung des Modells mit täglichen Stützstellen benötigt wird, um mittels Monte-Carlo-Simulation viele Pfade an Sterblichkeitsveränderungen zur Kalkulation des Value at Risk zu generieren. Dieser Abschnitt kann als Erweiterung des zugrunde liegenden Papers angesehen werden, da darin Details zu den tatsächlichen Berechnungen nicht explizit enthalten sind.

4.1 Das grundlegende Modell

Das Forward-Intensitätsmodell, welches für die Simulation der zukünftigen Sterblichkeiten verwendet wird, wird von Börger in [Bö10] beschrieben und basiert auf unterschiedlichen Werken von Bauer, Börger und diversen Koautoren, siehe zum Beispiel [BBRZ08] und [BBR10]. Es werden ein Zeithorizont T^* und ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$ fixiert, wobei $\mathbf{F} = (\mathcal{F})_{0 \leq t \leq T^*}$ eine Filtration ist und somit den üblichen Bedingungen der Vollständigkeit und Rechtsstetigkeit genügt. Zusätzlich wird eine große, aber fixe zugrundeliegende Population angenommen, jede Kohorte innerhalb dieser Population wird angezeigt durch ihr Alter x_0 zum Zeitpunkt $t_0 = 0$.

Definition 4.1. Die Best-Estimate-Sterbeintensität vom Zeitpunkt t mit Maturität T ist definiert durch

$$\mu_t(T, x_0) := -\frac{\partial}{\partial T} \log \left\{ \mathbb{E}_P \left[{}_T p_{x_0}^{(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \right\} \stackrel{T \geq t}{=} -\frac{\partial}{\partial T} \log \left\{ \mathbb{E}_P \left[{}_{T-t} p_{x_0+t}^{(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \right\}.$$

Die Variable ${}_{T-t} p_{x_0+t}^{(T)}$ bezeichnet die Proportion an $(x_0 + t)$ -jährigen Personen zum Zeitpunkt $t \leq T$, welche zur Zeit T noch am Leben sind, und stellt dementsprechend die Überlebensrate oder realisierte Überlebenswahrscheinlichkeit dar. Zusätzlich wird angenommen, dass $(\mu_t(T, x_0))$ die stochastischen Differentialgleichungen

$$d\mu_t(T, x_0) = \alpha(t, T, x_0) dt + \sigma(t, T, x_0) dW_t, \quad \mu_0(T, x_0) > 0, \quad x_0, T \geq 0 \quad (4.1)$$

erfüllt. Dabei handelt es sich bei $(W_t)_{t \geq 0}$ um eine d -dimensionale Brownsche Bewegung, welche unabhängig vom Finanzmarkt ist, die Funktionen $\alpha(t, T, x_0)$ und $\sigma(t, T, x_0)$ sind stetig in der Zeit t für $t \leq T$. Ferner muss der Drift-Term $\alpha(t, T, x_0)$ mit Gleichung (4.3) als Martingal die Drift-Bedingung

$$\alpha(t, T, x_0) = \sigma(t, T, x_0) \cdot \int_t^T \sigma(t, s, x_0)' ds$$

erfüllen. Das impliziert, dass das Forward-Sterblichkeitsmodell vollständig beschrieben wird durch die Volatilität $\sigma(t, T, x_0)$ und eine Anfangsbedingung für die Sterbeintensität $\mu_0(T, x_0)$.

Aus Definition (4.1) können die Best-Estimate-Überlebenswahrscheinlichkeiten

für eine x_0 -jährige Person, die von $t = 0$ bis zum Zeitpunkt T überlebt, abgeleitet werden und man erhält

$$\mathbb{E}_P [{}_T p_{x_0}^{(T)} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_P \left[e^{-\int_0^T \mu_u(u, x_0) du} \middle| \mathcal{F}_t \right] = e^{-\int_0^T \mu_t(u, x_0) du}. \quad (4.2)$$

Für die spätere Berechnung der Verbindlichkeiten und Nettovermögenswerte nach einem Jahr benötigt man genau die Überlebenswahrscheinlichkeiten aus obiger Gleichung für $t = 1$. Man beachte, dass $\mu_t(u, x_0) = \mu_u(u, x_0)$ für $u \leq t$ gilt, da die Volatilität $\sigma(t, u, x_0)$ für bereits vergangene Zeitpunkte $u \leq t$ offensichtlicherweise gleich Null sein muss. Einsetzen der Beziehung aus Gleichung (4.1) in (4.2) liefert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P [{}_T p_{x_0}^{(T)} | \mathcal{F}_t] = & \mathbb{E}_P [{}_T p_{x_0}^{(T)}] \\ & \cdot \exp \left\{ - \int_0^T \left(\int_0^t \alpha(s, u, x_0) ds + \int_0^t \sigma(s, u, x_0) dW_s \right) du \right\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Somit ist es ausreichend, neben der Volatilität $\sigma(t, T, x_0)$ die T -jährigen Best-Estimate-Überlebenswahrscheinlichkeiten zur Zeit $t = 0$ zu kennen. Diese können theoretischerweise aus jeder beliebigen Genenerationentafel erhalten werden, eine Forward-Sterbeintensität muss für diverse Kalkulationen daher nicht genauer spezifiziert werden. Mit Hilfe jener Größen kann die Solvenzkapitalanforderung für das Langlebighkeitsrisiko über den Value-at-Risk-Ansatz berechnet werden, indem Simulationen mit einer großen Anzahl an Pfaden für die Entwicklung der Sterberaten durchgeführt werden.

Für alle weiteren Überlegungen betrachte ich als Ausgangspunkt die folgende Beschreibung der T -jährigen Best-Estimate-Überlebenswahrscheinlichkeit einer x_0 -jährigen Person beobachtet zum Zeitpunkt t

$$\mathbb{E}_P [{}_T p_{x_0}^{(T)} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_P [{}_T p_{x_0}^{(T)}] \cdot e^{-M(t, T, x_0)} \quad (4.4)$$

mit

$$M(t, T, x_0) = \int_{u=0}^T \left(\int_{s=0}^t \alpha(s, u, x_0) ds + \int_{s=0}^t \sigma(s, u, x_0) dW_s \right) du. \quad (4.5)$$

Der erste Term $\mathbb{E}_P [{}_T p_{x_0}^{(T)}]$ wird direkt mit Hilfe der vorliegenden Sterbetafel, genauer gesagt den zukünftigen Projektionen der Sterbetafel aus Kapitel 3, und den daraus resultierenden T -jährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten berechnet. Zum

Zeitpunkt des Beginns des Versicherungsvertrags $t = 0$ ist noch keine zusätzlichen Information vorhanden und Gleichung (4.4) reduziert sich zu

$$\mathbb{E}_P [{}_T p_{x_0}^{(T)} | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}_P [{}_T p_{x_0}^{(T)}]. \quad (4.6)$$

Zum Zeitpunkt $t = 1$ ist die tatsächlich realisierte Sterberate des ersten betrachteten Jahres bekannt, man hat somit neue Information gesammelt und kann die Projektion der Sterbetafel mithilfe von Gleichung (4.4) aktualisieren.

4.2 Die Volatilitätsfunktion $\sigma(t, T, x_0)$

Zur Kalkulation der Sterblichkeitsverbesserungen wird darüber hinaus eine genaue Definition der Volatilität $\sigma(t, T, x_0)$ benötigt. Dadurch und durch die zusätzliche Angabe der T -jährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten wird das Modell vollständig beschrieben. Die Volatilität $\sigma(t, T, x_0)$ kann durch einen sechsdimensionalen Vektor dargestellt werden, der unterschiedliche Funktionen für verschiedene Alter enthält. Im Gegensatz zu vorher bekannten Modellen verwendet Börger einen neuen, leicht abgeänderten Ansatz und benutzt anstelle der Standard-Gompertz-Form eine logistische Gompertz-Form der Gestalt $\mu_x = \frac{\exp(ax+b)}{1+\exp(ax+b)} + c$. Der Grund dafür ist, dass mit Hilfe dieses Gesetzes die Volatilität für hohe Alter nicht unrealistisch groß werden kann.

Der Vektor der Volatilitäten $\sigma(t, T, x_0) = (\sigma_1(t, T, x_0), \dots, \sigma_6(t, T, x_0))$ besteht für $T \geq t$ mit $t > 0$ und $T > 0$ aus den Komponenten

$$\sigma_i(t, T, x_0) = c_i \cdot r_i(t, T, x_0) \quad (4.7)$$

mit

$$r_i(t, T, x_0) = f(x_0 + T) \cdot h_i(t, T, x_0),$$

$$f(x) = \frac{\exp(ax + b)}{1 + \exp(ax + b)} + c.$$

Für $t = 0$ sei $\sigma_i(0, T, x_0) = 0 \forall T$. Hintergrund dafür ist, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ nur die ursprünglich prognostizierten Sterbewahrscheinlichkeiten als Information vorliegen und deshalb noch keine abgeänderten zukünftigen Werte der q_x berechnet

werden müssen. Für $T < t$ muss die Volatilität $\sigma_i(t, T, x_0)$, $i = 1, \dots, 6$ gleich Null sein, da die Sterblichkeitsverbesserungen für Maturität T schon beobachtet worden und folglich deterministisch sind. Die Werte für die Parameter a, b, c, c_i , $i = 1, \dots, 6$ werden mit Hilfe eines Kalibrierungsalgorithmus festgelegt und sind somit bekannt. Benötigt zur Berechnung des Solvenzkapitals werden Werte für σ zum Zeitpunkt $t = 1$, T beschreibt die Maturität, welche mit dem Ende der verwendeten Sterbetafel nach oben beschränkt ist, und x_0 steht für das Eintrittsalter der jeweiligen Versicherungsnehmerin beziehungsweise des Versicherungsnehmers. Die Funktionen h_i sind verschiedene Anpassungen für die unterschiedlichen Alter, können durch Angabe von Eintrittsalter, Maturität und Zeitpunkt kalkuliert werden und sind folgendermaßen spezifiziert:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1, \\ h_2 &= \exp(\log(0, 1)(T - t)), \\ h_3 &= \exp\left(\frac{\log(0, 5)}{20^2}(T - t - 20)^2 + \frac{\log(0, 5)}{17,5^2}(x_0 + T - 37,5)^2\right), \\ h_4 &= \exp\left(\frac{\log(0, 5)}{20^2}(T - t - 20)^2 + \frac{\log(0, 5)}{12,5^2}(x_0 + T - 67,5)^2\right), \\ h_5 &= \exp\left(\frac{\log(0, 5)}{20^2}(T - t - 20)^2 + \frac{\log(0, 5)}{30^2}(x_0 + T - 110)^2\right), \\ h_6 &= \exp\left(\frac{\log(0, 5)}{80^2}(T - t - 120)^2\right). \end{aligned}$$

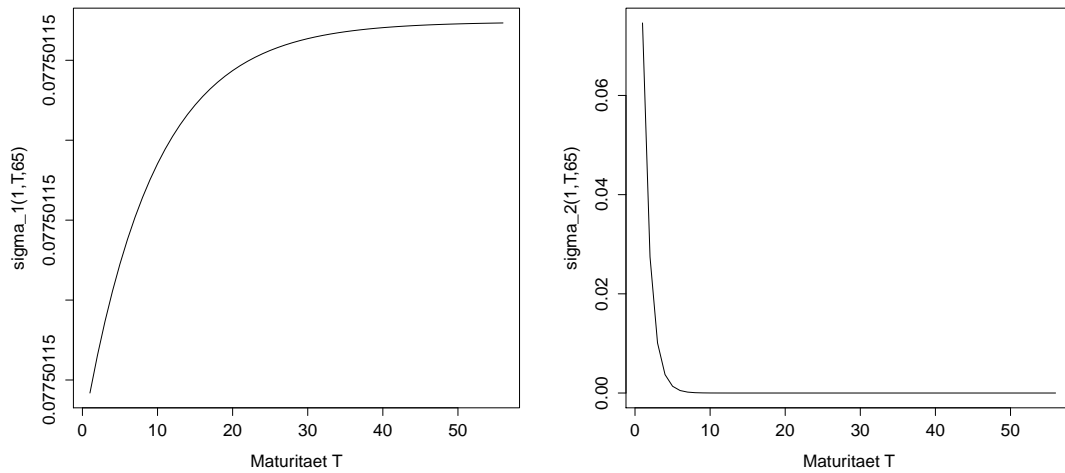
Mit Hilfe eines Kalibrierungsalgorithmus werden von Börger für die Parameter Werte von $a = 0,1069$, $b = -12,57$ und $c = 0,0007896$ erhalten, für genauere Information diesbezüglich sei auf den Anhang A.3 in [Bö10] verwiesen. Es sei angemerkt, dass in Börgers Arbeit das Vorzeichen des Parameters b falsch abgedruckt ist. Ein positives Vorzeichen würde zu vollkommen unplausiblen Werten für Sterblichkeitsverbesserungen führen. Die optimalen Werte für die Volatilitätsparameter sind in Tabelle 4.1 ersichtlich. Damit können nun alle sechs Einträge des Volatilitätsvektors berechnet werden sowie in weiterer Folge der Term, der die Sterblichkeitsverbesserungen repräsentiert.

Um ein Bild über das Aussehen von $\sigma(t, T, x_0)$ zu bekommen, betrachte ich das Beispiel einer 65-jährigen Person und den Zeitpunkt $t = 1$. Die Elemente des Volatilitätsvektors $\sigma_i(t, T, 65)$ sind Null für alle $T < t$, die Maturität T läuft in

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
0,07744	0,07456	0,06747	0,25902	0,04215	0,24054

Tabelle 4.1: Optimale Werte für die Parameter c_i

diesem Fall von 1 bis zum Erreichen des Endalters der Sterbetafel $120 - 65 = 55$. Eine Betrachtung der Maturität von $T = 0$ ist aus versicherungsmathematischer Sicht nicht sinnvoll.

Abbildung 4.1: Funktionen $\sigma_1(1, T, 65)$ und $\sigma_2(1, T, 65)$

Als Ergebnis für $\sigma_1(1, T, 65)$, $T = 1, \dots, 55$ ergeben sich Werte von 0,07750115, welche sich erst in der neunten Nachkommastelle voneinander unterscheiden. Trotzdem ist, wie in Abbildung 4.1 ersichtlich, ein sehr leichter Trend zu erkennen, dass die Werte sich langsam einem Grenzwert annähern. Die Funktion σ_1 kann als genereller Verbesserungsfaktor für das gesamte Modell interpretiert werden, der bei kleinen Maturitäten minimal geringer und zum Ende hin gleichbleibend groß ist.

Zusätzlich zur Abbildung 4.1, in der nur die Maturität T als Parameter angenommen wird, kann einen dreidimensionalen Plot betrachtet werden, in dem sowohl die Zeit als auch die Maturität variieren und wiederum das Eintrittsalter bei $x_0 = 65$ fixiert wird. Dabei läuft t von 1 bis 20, da sich die Werte von $\sigma_i(t, T, x_0)$ zu späteren Zeitpunkten nicht mehr allzu viel unterscheiden und es dementsprechend nicht sinn-

voll ist, die Funktionen über einen längeren Zeitraum zu zeigen. Der dreidimensionale Plot in Abbildung 4.2 zeigt ebenfalls, dass die Werte für σ_1 über unterschiedliche Zeiten und Maturitäten keine erheblichen Unterschiede aufweisen und die größten Verbesserungen bei kleinen Altern und geringen Maturitäten zu erwarten sind.

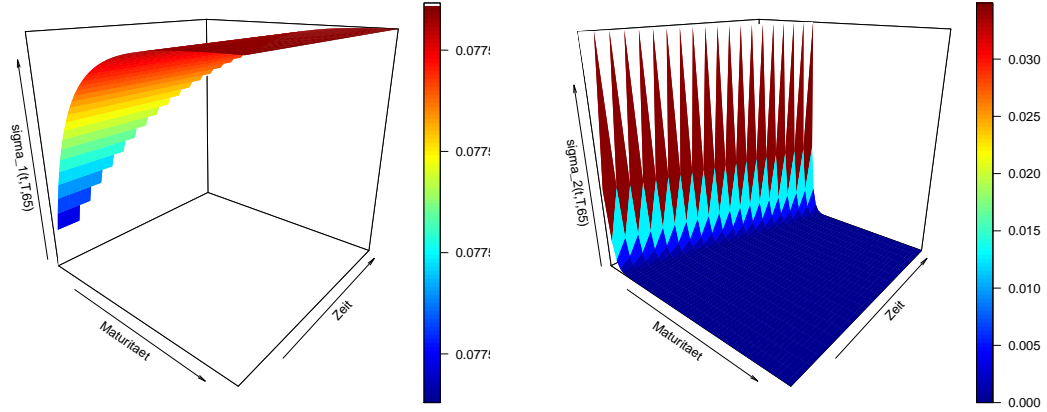
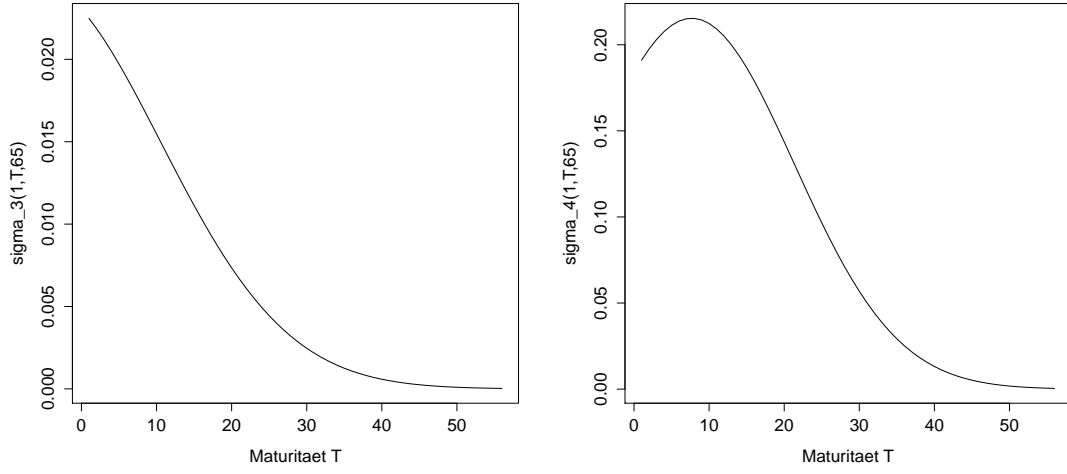
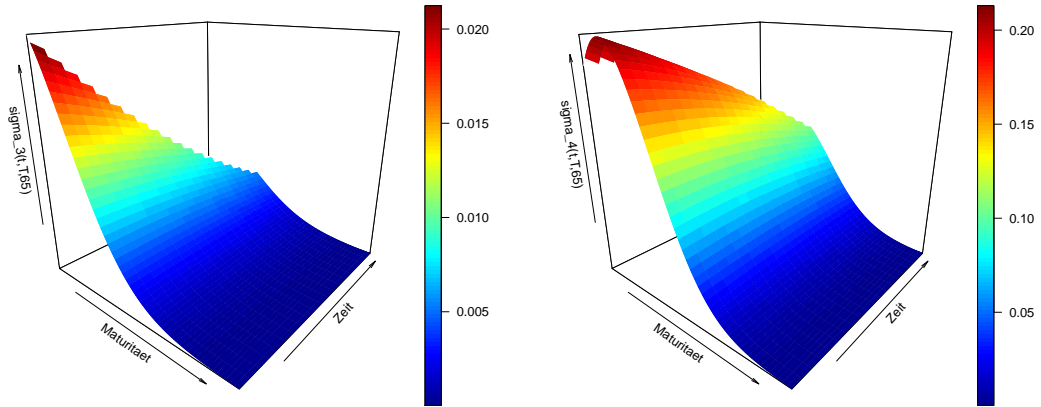


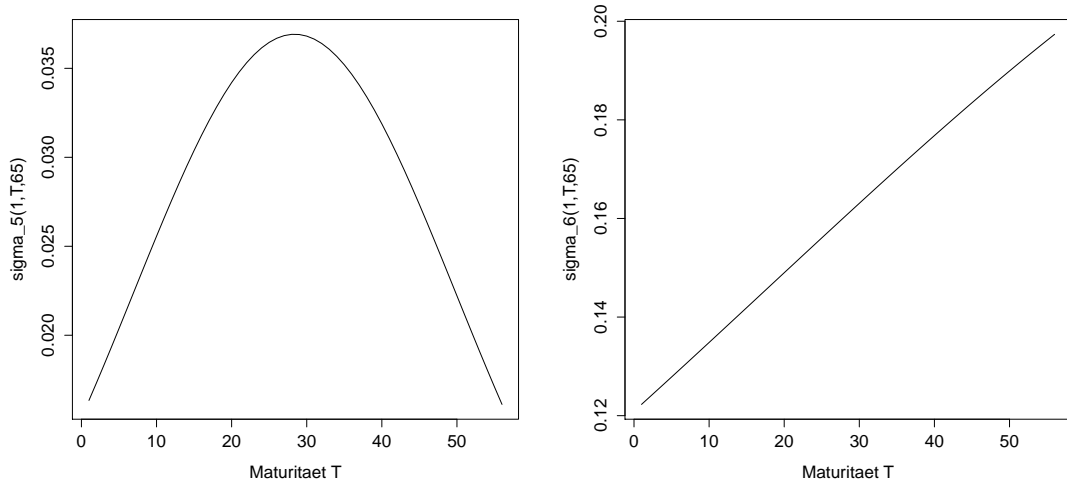
Abbildung 4.2: Funktionen $\sigma_i(t, T, 65)$, $i = 1, 2$ für $t = 1, \dots, 20$ und $T = 1, \dots, 55$

Die Ergebnisse für $\sigma_2(1, T, 65)$ sind monoton fallend über die Maturität T . Bei sehr großen Maturitäten wird ein Ergebnis nahe bei Null erreicht, was auch aus dem rechten Bild der Abbildung 4.1 abgelesen werden kann. Daran und an dem dreidimensionalen Plot in Abbildung 4.2 ist erkennbar, dass es sich bei dem zweiten Element des σ -Vektors um eine Anpassung für kurzfristige Maturitäten handelt.

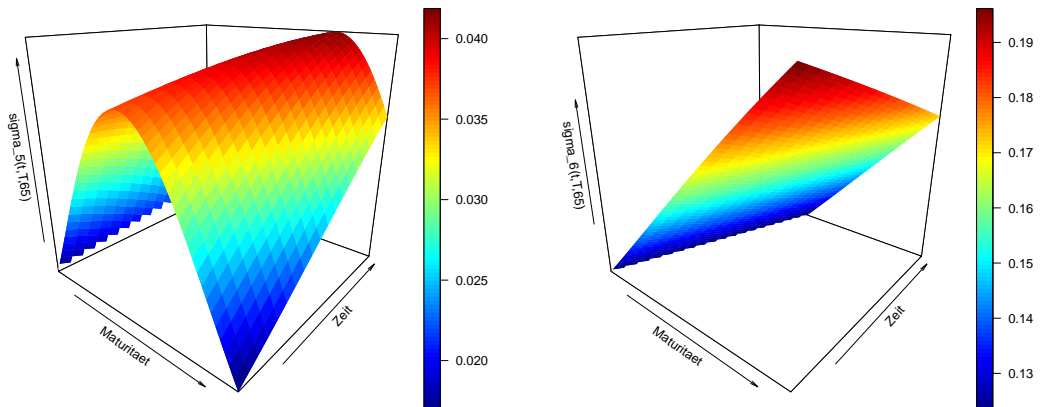
Die Komponente $\sigma_3(t, T, x_0)$ beschreibt hauptsächlich die Sterblichkeitsveränderung in jungen Jahren. Der Wert bei der 65-jährigen Person für steigende Maturität T ist fallend und das Maximum der Kurve ist, wie im linken Bild der Abbildung 4.3 ersichtlich, bei einem deutlich geringeren Alter kombiniert mit relativ kleiner Maturität. Auch bei Betrachtung von variablen Zeitpunkten und Maturitäten in Abbildung 4.4 kann gesehen werden, dass der größte Einfluss auf die Funktion $\sigma_3(t, T, 65)$ bei jungem Alter und kleiner Maturität ist. Je älter die Person ist, desto geringer wird der Wert von σ_3 . Eine Anpassung für die mittleren Alter geschieht durch σ_4 , was an der grafischen Darstellung des Beispiels erkannt werden kann. In diesem Fall sind die Ergebnisse bis Maturität $T = 10$ steigend und danach monoton fallend.

Abbildung 4.3: Funktionen $\sigma_3(1, T, 65)$ und $\sigma_4(1, T, 65)$ Abbildung 4.4: Funktionen $\sigma_i(t, T, 65)$, $i = 3, 4$ für $t = 1, \dots, 20$ und $T = 1, \dots, 55$

Das fünfte Element des Volatilitätsvektors charakterisiert die Sterblichkeitsveränderungen für hohe Alter. Die Werte sind hier zuerst steigend mit wachsender Maturität, allerdings nehmen sie für das Beispiel einer 65-jährigen Person ab Maturitäten von guten 30 Jahren wieder ab. Grundsätzlich sehen sich die drei Kurven für $\sigma_3(t, T, x_0)$, $\sigma_4(t, T, x_0)$ und $\sigma_5(t, T, x_0)$ von der Form her ähnlich. Da diese die Anpassungen für unterschiedliche Altersgruppen repräsentieren, sind sie auf der x -Achse verschoben, weisen jeweils andere Amplituden auf und erreichen demnach

Abbildung 4.5: Funktionen $\sigma_5(1, T, 65)$ und $\sigma_6(1, T, 65)$

ihren entsprechenden Höhepunkt bei unterschiedlichen Kombinationen aus Altern und Maturitäten. Die Werte der letzten Komponente sind monoton steigend über die gesamte Maturität, σ_6 spiegelt die langfristige Komponente der Sterblichkeitsverbesserungen in diesem Modell wider.

Abbildung 4.6: Funktionen $\sigma_i(t, T, 65)$, $i = 5, 6$ für $t = 1, \dots, 20$ und $T = 1, \dots, 55$

Um ein Gefühl für das Zusammenspiel der sechs Komponenten zu bekommen und deren Eigenschaften besser aufzuzeigen, betrachte ich die einzelnen σ_i -Funktionen in

einem gemeinsamen Plot. Dargestellt werden die Komponenten für unterschiedliche Maturitäten von 1 bis zum Ende der Sterbetafel, wobei das Alter im linken Bild der Abbildung 4.7 mit 45, im rechten mit 65 und der Zeitpunkt bei beiden Grafiken mit $t = 1$ fixiert werden.

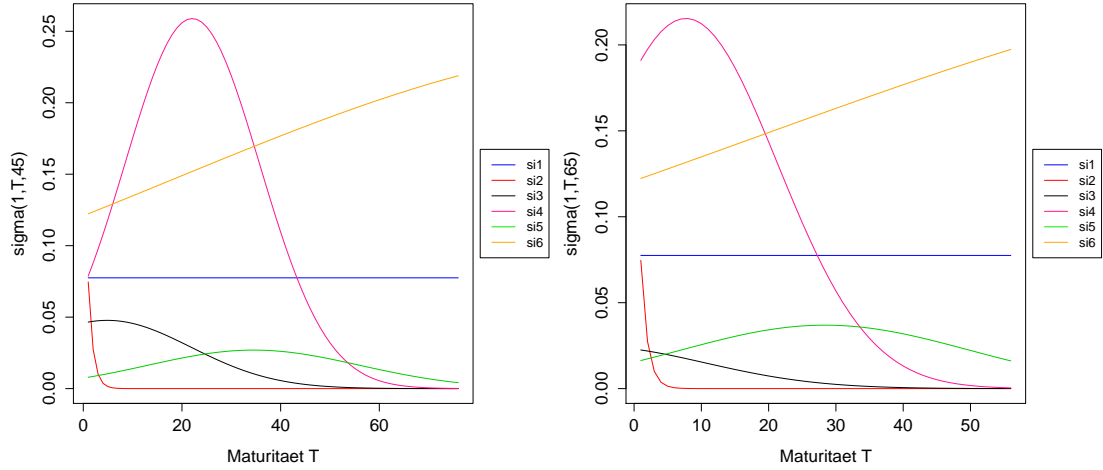


Abbildung 4.7: Funktionen $\sigma_i(1, T, 45)$ und $\sigma_i(1, T, 65)$

Die allgemeine Verbesserung σ_1 , dargestellt von der blauen Linie, ist in beiden Fällen konstant, auch die zwei Anpassungen für kurzfristige Maturitäten σ_2 im linken und im rechten Bild lassen sich kaum voneinander unterscheiden. Ebenso verhält es sich mit den langfristigen Komponenten σ_6 . Differenzen ergeben sich in den Anpassungen für niedrige, mittlere und hohe Alter, da sich die beiden Beispielfrafiken an verschiedenen Eintrittsaltern orientieren. Sehr gut erkennbar sind die abweichenden Amplituden der Komponenten σ_3 , σ_4 und σ_5 , welche natürlich vom Eintrittsalter abhängen, aber auch durch die unterschiedlich großen Werte der Faktoren c_i , $i = 3, 4, 5$ bestimmt werden. Beispielsweise besitzt c_4 , das zur Berechnung der Anpassung für mittlere Alter verwendet wird, mit Abstand den größten Wert, was sich in den Werten von σ_4 in beiden Grafiken von Abbildung 4.7 widerspiegelt.

4.3 Berechnung der Sterblichkeitsverbesserungen

Um die Best Estimate Liabilities zu berechnen, genügt es, sich die Gleichung (4.4) mit $M(t, T, x_0)$ in (4.5) zum Zeitpunkt $t = 1$ anzusehen.

Definition 4.2. Zur einfacheren Schreibweise definieren wir

$$a(s, T, x_0) := \int_{u=0}^T \alpha(s, u, x_0) du, \quad (4.8)$$

$$b(s, T, x_0) := \int_{u=0}^T \sigma(s, u, x_0) du. \quad (4.9)$$

Lemma 4.3. Für fixierte Zeit t und Eintrittsalter x_0 ist $\{M(t, T, x_0) : T = 1, \dots, w - x_0\}$ mit w als Ende der Sterbetafel ein Gauß-Prozess mit

1. $E[M(t, T, x_0)] = \int_{s=0}^t a(s, T, x_0) ds,$
2. $Var[M(t, T, x_0)] = \int_{s=0}^t \|b(s, T, x_0)\|^2 ds,$
3. $Cov[M(t, S, x_0), M(t, T, x_0)] = \int_{s=0}^t b(s, S, x_0) \cdot b(s, T, x_0) ds.$

Beweis. Die Verwendung des Satzes von Fubini liefert die Vertauschung der Integrationsreihenfolge innerhalb des ersten Summanden von $M(t, T, x_0)$

$$\int_{u=0}^T \left(\int_{s=0}^t \alpha(s, u, x_0) ds \right) du = \int_{s=0}^t \left(\int_{u=0}^T \alpha(s, u, x_0) du \right) ds = \int_{s=0}^t a(s, T, x_0) ds.$$

Mit Hilfe des stochastischen Satzes von Fubini kann auch der zweite Term umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} \int_{u=0}^T \left(\int_{s=0}^t \sigma(s, u, x_0) dW(s) \right) du &= \int_{s=0}^t \left(\int_{u=0}^T \sigma(s, u, x_0) du \right) dW(s) \\ &= \int_{s=0}^t b(s, T, x_0) dW(s). \end{aligned}$$

Da das stochastische Integral ein Martingal ist, folgt daraus

$$E[M(t, T, x_0)] = \int_{s=0}^t a(s, T, x_0) ds.$$

Aufgrund der Ito-Isometrie erhält man

$$\text{Var}[M(t, T, x_0)] = \int_{s=0}^t \|b(s, T, x_0)\|^2 ds$$

und

$$\text{Cov}[M(t, S, x_0), M(t, T, x_0)] = \int_{s=0}^t b(s, S, x_0) \cdot b(s, T, x_0) ds.$$

Ebenfalls kann man sehen, dass $\{M(t, T, x_0) : T = 1, \dots, w - x_0\}$ einer multivariaten Gauß-Verteilung folgt. \square

Für weitere Betrachtungen setze ich

$$\begin{aligned} A(t, T, x_0) &= \int_{s=0}^t a(s, T, x_0) ds, \\ B(t, T, x_0) &= \left(\int_{s=0}^t \|b(s, T, x_0)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \text{ und} \\ C(t, S, T, x_0) &= \int_{s=0}^t b(s, S, x_0) \cdot b(s, T, x_0) ds. \end{aligned}$$

Lemma 4.4. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$A(t, T, x_0) = \frac{1}{2} B(t, T, x_0)^2. \quad (4.10)$$

Beweis. Aufgrund einer der Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes muss

$$\mathbb{E}_P [\mathbb{E}_P [Tp_{x_0}^{(T)} | \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}_P [Tp_{x_0}^{(T)}]$$

gelten, was äquivalent ist zu

$$\mathbb{E}_P [e^{-M(t, T, x_0)}] = 1.$$

Nachdem $M(t, T, x_0)$ ein Gauß-Prozess ist, erfüllt dieser

$$M(t, T, x_0) \sim N(A(t, T, x_0), B(t, T, x_0)^2)$$

und

$$\mathbb{E}_P \left[e^{-M(t,T,x_0)} \right] = e^{-A(t,T,x_0) + \frac{1}{2}B(t,T,x_0)^2}.$$

Daraus ergibt sich

$$-A(t, T, x_0) + \frac{1}{2}B(t, T, x_0)^2 = 0.$$

□

Bemerkung 4.5. Die obere Eigenschaft folgt auch direkt aus der Drift-Bedingung.

Das Ziel dieser Betrachtung ist eine geeignete Diskretisierung von $M(t, T, x_0)$, um mittels Monte-Carlo-Simulation eine große Anzahl an Pfaden zur Berechnung des Value at Risk generieren zu können. Dazu sei an erster Stelle angemerkt, dass es sich bei den $b(s, T, x_0)$ um einen Vektor mit sechs Einträgen handelt,

$$b(s, T, x_0) = \begin{bmatrix} b_1(s, T, x_0) \\ \vdots \\ b_6(s, T, x_0) \end{bmatrix}.$$

Es wird eine Zahl $n \geq 1$ fixiert, die die Schrittweite der Berechnungen darstellt, $n = 1$ entspricht einer jährlichen Kalkulation. In meinem Fall wird $n = 365$ für eine tägliche Betrachtungsweise verwendet. Die Zeit t sei weiterhin ganzzahlig und kleiner der Maturität, $1 \leq t \leq T$. Dann wird der zweite Term in $M(t, T, x_0)$ approximiert durch

$$\begin{aligned} \int_{s=0}^t \left(\int_{u=0}^T \sigma(s, u, x_0) du \right) dW_s &\approx \sum_{i=1}^{nt} \sum_{l=1}^6 \left(\sum_{j=1}^{nT} \sigma_l \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, x_0 \right) \frac{1}{n} \right) \frac{\epsilon_{il}}{\sqrt{n}} \\ &= \sum_{i=1}^{nt} \sum_{l=1}^6 b_l^{(n)} \left(\frac{i}{n}, T, x_0 \right) \frac{\epsilon_{il}}{\sqrt{n}} \text{ mit } \epsilon_{il} \text{ iid } N(0, 1). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Approximation für $M(t, T, x_0)$

$$M(t, T, x_0) \approx M^{(n)}(t, T, x_0) = A^{(n)}(t, T, x_0) + \sum_{i=1}^{nt} \sum_{l=1}^6 b_l^{(n)} \left(\frac{i}{n}, T, x_0 \right) \frac{\epsilon_{il}}{\sqrt{n}}, \quad (4.11)$$

wobei es zu bemerken gibt, dass

$$E[M^{(n)}(t, T, x_0)] = A^{(n)}(t, T, x_0) \text{ und}$$

$$Var[M^{(n)}(t, T, x_0)] = \sum_{i=1}^{nt} \sum_{l=1}^6 b_l^{(n)}\left(\frac{i}{n}, T, x_0\right)^2 \frac{1}{n} =: B^{(n)}(t, T, x_0)$$

gelten. Wie auch zuvor in der stetigen Version will ich erreichen, dass die Bedingung

$$\mathbb{E}_P \left[e^{-M^{(n)}(t, T, x_0)} \right] = 1$$

erfüllt ist, was ähnlich einer arbitragefreien Diskretisierung in der Finanzmathematik angesehen werden kann und bedeutet, dass

$$A^{(n)}(t, T, x_0) = \frac{1}{2} B^{(n)}(t, T, x_0)^2. \quad (4.12)$$

Man bemerke, dass das ebenfalls aus einer geeigneten diskreten Drift-Bedingung folgt, welche verschieden von der stetigen ist, aber für $n \rightarrow \infty$ mit dieser im Grenzwert übereinstimmt.

Die Koeffizienten $A^{(n)}(t, T, x_0)$ und $B^{(n)}(t, T, x_0)$, bestehend aus $b_i^{(n)}(t, T, x_0)$, $i = 1, \dots, 6$, werden mit Hilfe des R-Codes im Anhang A.2 berechnet und später zur Monte-Carlo-Simulation in A.3 verwendet. Somit ist das Sterblichkeitsmodell und dessen Kalkulation genau spezifiziert, und ich kann mich im nächsten Kapitel der Berechnung und Untersuchung der Ergebnisse des Solvenzkapitals widmen.

Kapitel 5

Die Berechnung des Solvenzkapitals

Nachdem im letzten Kapitel das Sterblichkeitsmodell und die Berechnung der Mortalitätsraten präsentiert worden sind, kann die Kalkulation der Solvenzkapitalanforderung mittels der zwei unterschiedlichen Ansätze durchgeführt werden. Im Abschnitt 5.1 betrachten wir das Beispiel einer sofort beginnenden Rente für ein einzelnes Eintrittsalter und eine spezielle Zinskurve und beschreiben die Berechnungen Schritt für Schritt. Um die Angemessenheit des Langlebigkeitsschocks nach der Solvency II-Standardformel zu untersuchen, werden Auswirkungen von Veränderungen der Parameter auf die Ergebnisse analysiert. Die Effekte unterschiedlicher Zinskurven, verschiedener Eintrittsalter und Verschiebungen im ursprünglichen Mortalitätslevel werden dargestellt und diskutiert. Da sich die Ergebnisse der beiden Berechnungsmethoden für das SCR für jüngere Alter anders verhalten zu scheinen, wird in Abschnitt 5.3 das Beispiel einer aufgeschobenen Rente studiert.

5.1 Das Solvenzkapital für das Beispiel einer sofort beginnenden Rente

In Betracht ziehe ich ein britisches Versicherungsunternehmen sowie den Projektionsstartzeitpunkt $t = 0$ zu Jahresende 2007, weswegen die risikofreie Zinskurve der Europäischen Aufsicht von Ende 2007 aus [CEI08] verwendet wird. Es wird angenommen, dass sich die Vermögenswerte und die technischen Rückstellungen

bei $t = 0$ decken. Weiters unterstellen wir, dass das Unternehmen ausschließlich dem Langlebigkeitsrisiko ausgesetzt ist, weshalb vorausgesetzt wird, dass nur in risikofreie Vermögensgegenstände investiert wird und das Unternehmen gegen Änderungen der Zinsrate komplett abgesichert ist. Dadurch ist ein deterministischer Ansatz für die Entwicklung der Zinskurve ausreichend, und die risikofreie Zinsstruktur zum Zeitpunkt t kann von der durch die EIOPA vorgegebenen Zinsstruktur aus dem Jahr 2007 abgeleitet werden. Es bezeichne i_T die jährliche Zinsrate für die Laufzeit T zum Zeitpunkt $t = 0$, vorgegeben durch die Europäische Aufsicht. Dieser Zins wird auch Kassazins oder spot rate genannt. Dann kann der Terminzins oder forward rate $i(t, T)$ gültig ab einem zukünftigen Zeitpunkt t mit Laufzeit T berechnet werden mittels

$$i(t, T) = \left(\frac{(1 + i_T)^T}{(1 + i_t)^t} \right)^{\frac{1}{T-t}} - 1. \quad (5.1)$$

Man beachte, dass $i(0, T) = i_T$ und $i(0, t) = i_t$ gelten. In dem konkreten Fall der Berechnung der Best Estimate Liabilities zum Zeitpunkt $t = 1$ wird nur $i(1, T)$, der Terminzins zum Zeitpunkt $t = 1$ für alle unterschiedlichen Maturitäten T , benötigt. Somit reduziert sich Gleichung (5.1) auf

$$i(1, T) = \left(\frac{(1 + i_T)^T}{1 + i_1} \right)^{\frac{1}{T-1}} - 1, \quad T = 1, \dots, 120 - w.$$

Das betrachtete Beispiel ist so einfach wie möglich konstruiert. Deshalb wird angenommen, dass Unterschiede zwischen Vermögenswerten und Technischen Rückstellungen zum Zeitpunkt $t > 0$ immer auf Änderungen in der Sterblichkeit zurückzuführen sind. Betrachtet wird ein Vertrag einer sofort beginnenden Leibrente, welcher, solange die versicherte Person am Leben ist, eine fixe nachschüssige Rente in der Höhe von R pro Jahr ausbezahlt. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass keinerlei Optionen und Garantien für Todesfalleistungen beinhaltet sind, keine Gewinnbeteiligung berücksichtigt wird und jegliche Kosten außer Acht gelassen werden. Die Verbindlichkeiten für einen Vertrag einer sofortigen Rente über 1 Euro einer zum Zeitpunkt $t = 0$ x_0 -jährigen Person belaufen sich somit auf

$$BEL_t = \sum_{T>t} \frac{1}{(1 + i(t, T))^{T-t}} \cdot \mathbb{E}_P [{}_T p_{x_0}^{(T)} | \mathcal{F}_t]. \quad (5.2)$$

Als Konsequenz aller vereinfachenden Annahmen erhält man

$$A_1 = A_0(1 + i(0, 1)) + CF_1, \quad (5.3)$$

wobei CF_1 für den Zahlungsstrom des Versicherungsunternehmens zum Zeitpunkt $t = 1$ steht. Im Fall sofort beginnender Renten ist dieser Cash Flow immer negativ, für aufgeschobene Renten ist er bei aufrechter Prämienzahlung positiv. Betrachtet man ein Portfolio aus laufenden und aufgeschobenen Renten, kann entweder ein negatives oder positives Ergebnis erhalten werden. Gleichung (5.3) kann mit Hilfe der Beziehung (2.4) umgeformt werden zu

$$NAV_0 - \frac{NAV_1}{1 + i(0, 1)} = \frac{BEL_1 - CF_1}{1 + i(0, 1)} - BEL_0, \quad (5.4)$$

und daher folgt aus Gleichung (2.5) für die Berechnung des SCR über den Value at Risk

$$SCR^{VaR} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left(P \left(\frac{BEL_1 - CF_1}{1 + i(0, 1)} - BEL_0 > x \right) \leq 0,005 \right). \quad (5.5)$$

Dementsprechend wird zur Berechnung des SCR mittels Value at Risk die Überlebenswahrscheinlichkeiten aus den $n = 50.000$ Simulationen benötigt. Für jeden einzelnen dieser Pfade können die Best Estimate Liabilities zum Zeitpunkt $t = 1$ mit Hilfe der Gleichung (5.2) berechnet werden, welche zusätzlich noch mit der Rentenhöhe $R = 1000$ multipliziert werden muss. Der Zahlungsstrom zur Zeit $t = 1$ pro Simulation CF_1 ergibt sich aus

$$CF_1 = -R \cdot \mathbb{E}_P \left[{}_1p_{x_0}^{(T)} \mid \mathcal{F}_1 \right],$$

die Best Estimate Liabilities zum Zeitpunkt $t = 0$ für die Rentenhöhe $R = 1000$ werden ebenfalls über Gleichung (5.2) ermittelt,

$$BEL_0 = R \cdot \sum_{T>0} \frac{1}{(1 + i(0, T))^T} \cdot \mathbb{E}_P \left[{}_Tp_{x_0}^{(T)} \right].$$

Dabei entspricht $\mathbb{E}_P \left[{}_Tp_{x_0}^{(T)} \right]$ den ursprünglichen Überlebenswahrscheinlichkeiten aus den Projektionen fünf britischer Versicherungsunternehmen, siehe (3.6). Die Solvenzkapitalanforderung entspricht dann dem empirischen 99,5 % Quantil der Ver-

lustvariable

$$\frac{BEL_1 - CF_1}{1 + i(0, 1)} - BEL_0.$$

Die dafür benötigten Best Estimate Liabilities zum Zeitpunkt $t = 1$ werden berechnet mit

$$BEL_1 = R \cdot \sum_{T>0} \frac{1}{(1 + i(1, T))^{T-1}} \cdot \mathbb{E}_P [{}_T p_{x_0}^{(T)}] \cdot e^{-M(1, T, x_0)},$$

wobei $M(1, T, x_0)$ durch Gleichung (4.5) definiert ist und über die Approximation in Gleichung (4.11), welche durch geeignete Diskretisierung erhalten worden ist, kalkuliert wird.

Die Formel zur Berechnung der Solvenzkapitalanforderung nach Vorgabe des Solvency II-Standardmodells anhand eines 25 %igen Langlebigkeitsschocks kann ebenfalls unter Verwendung der Verbindlichkeiten umgeschrieben werden zu

$$SCR^{shock} = (BEL_0 | \text{longevity shock}) - BEL_0.$$

Zur Kalkulation des SCR werden zuerst die geschockten Sterblichkeiten aus den Projektionen in Gleichung (3.6) berechnet, indem die Sterblichkeit eines jeden Alters um 25 % reduziert wird,

$$q_{x_0}^{shock} = q_{x_0} \cdot (1 - 25 \%).$$

Daraus können die zugehörigen ein- und mehrjährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten

$$p_{x_0}^{shock} = 1 - q_{x_0}^{shock} \quad \text{und} \quad {}_T p_{x_0}^{shock} = \prod_{k=0}^{T-1} p_{x_0+k}^{shock}$$

abgeleitet und damit in weiterer Folge die geschockten Best Estimate Liabilities zum Zeitpunkt $t = 0$ berechnet werden über die Formel

$$(BEL_0 | \text{longevity shock}) = R \cdot \sum_{T>0} \frac{1}{(1 + i(0, T))^T} \cdot {}_T p_{x_0}^{shock}.$$

Unter Verwendung obiger Gleichungen kann untersucht werden, ob die beiden Berechnungsmethoden für die Solvenzkapitalanforderung ähnliche Ergebnisse liefern. Damit wäre sichergestellt, dass der Schock einer 25 %igen Verringerung aller Sterblichkeitsraten eine vernünftige und sinnvolle Approximation des Value at Risk, also eines 200-jährigen Extremszenarios für die Mortalität über ein Jahr, ist. Die Ergebnisse der Berechnungen für eine 65-jährige Person mit Langlebigkeitsschock und Value-at-Risk-Methode lassen sich in Tabelle 5.1 ablesen.

	BEL_0	$BEL_1 - CF_1$	SCR	$\frac{SCR}{BEL_0}$
Schock	12873,86	14593,48	951,28	7,39 %
VaR	12873,86	13589,68	870,69	6,76 %

Tabelle 5.1: SCR für eine 65-jährige Person

Anhand der oben dargestellten Werte ist ersichtlich, dass im Falle der Kalkulation mit Hilfe des Langlebigkeitsschocks ungefähr 9 % mehr Kapital benötigt werden als über die Value-at-Risk-Methode. Diese Abweichung erscheint etwas zu hoch, obwohl der Langlebigkeitsschock im Solvency II-Standardmodell so kalibriert worden sein sollte, dass er als konservativ gilt. Setzt man die Solvenzkapitalanforderung in Relation zu den Best Estimate Liabilities zum Zeitpunkt $t = 0$, sieht die Abweichung von 0,6 % ebenfalls ein wenig zu groß aus.

Um weitere und detaillierte Aussagen über das Verhalten der beiden Berechnungsmethoden treffen zu können, werden in Folge unterschiedliche Sensitivitäten kalkuliert und deren Ergebnisse analysiert.

5.2 Sensitivitätsanalyse für das Beispiel einer sofort beginnenden Rente

Ein interessanter Aspekt ist die Untersuchung, welche Auswirkungen die Variation diverser Parameter auf die Ergebnisse des in Kapitel 5.1 präsentierten Beispiels hat. Im Folgenden werden zuerst die Effekte verschiedener Zinskurven betrachtet.

Eine weitere wichtige Frage ist, wie sich das Eintrittsalter auf die Resultate der Berechnung des Solvenzkapitals nach den beiden vorgestellten Methoden auswirkt und bei welchem Alter die Verwendung der Standardformel eine Unter- oder Überschätzung des Solvenzkapitals mit sich bringt. Zusätzlich werden die Auswirkungen einer Verschiebung des Levels der Ausgangssterblichkeit analysiert.

Die Zinssensitivität

Zunächst betrachte ich die Berechnung des Solvenzkapitals mit unterschiedlichen Zinskurven, um sicherzustellen, dass Abweichungen in den Ergebnissen nach beiden Berechnungsmethoden nicht hauptsächlich von der betrachteten Zinskurve verursacht werden. Einerseits wird die ursprüngliche risikofreie Zinskurve aus der QIS4 verwendet sowie andererseits die risikofreie Zinskurve von Ende 2014, welche von der EIOPA unter [EIO15] bereitgestellt wird und dazu dient, die Auswirkungen der Niedrigzinsphase auf das Solvenzkapital zu untersuchen. Zusätzlich zu der von Börger benutzten QIS4-Kurve wende ich eine Zinskurve an, welche um 100 Basispunkte nach oben verschoben ist (dem entspricht eine Erhöhung aller einzelnen Zinssätze um 1 %). Ebenfalls wird eine Verschiebung um 100 Basispunkte nach unten, also eine Verringerung der Ausgangskurve um 1 %, in Betracht gezogen. Abbildung 5.1 zeigt eine grafische Darstellung der vier zur Berechnung verwendeten Zinskurven.

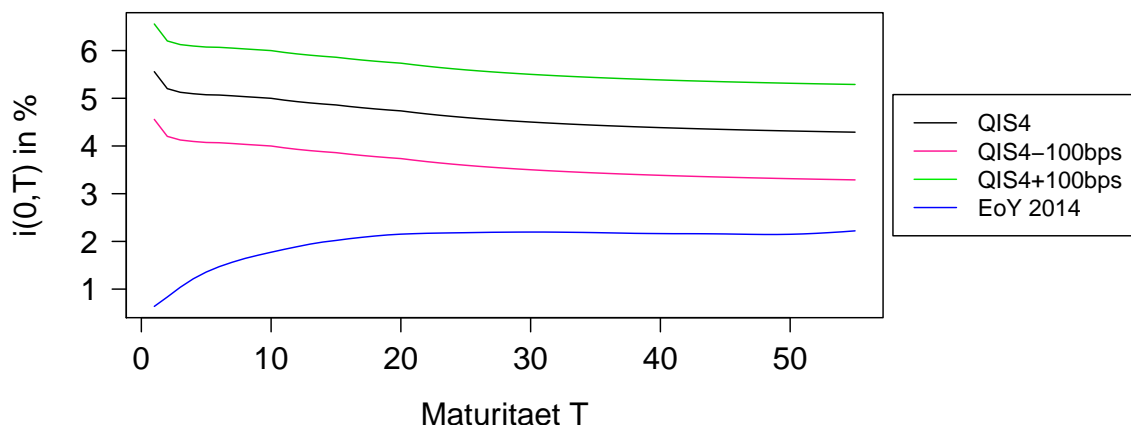


Abbildung 5.1: Verschiedene Zinskurven zur Berechnung des SCR

Wie erwartet ist anhand der Ergebnisse in Tabelle 5.2 ersichtlich, dass eine niedrige Zinskurve wie die risikofreie zu Jahresende 2014 zu bedeutend höheren Verbindlichkeiten und dementsprechend auch zu größerer Solvenzkapitalanforderung führt. Die relative Abweichung der beiden Berechnungsmethoden für das SCR wird beschrieben durch

$$\frac{\Delta SCR}{SCR^{VaR}} = \frac{SCR^{shock} - SCR^{VaR}}{SCR^{VaR}}$$

und ist dargestellt in der letzten Spalte der Tabelle 5.2. Es kann gesehen werden, dass die Höhe der relativen Abweichung der zwei Ansätze zwar leicht, aber nicht wesentlich von unterschiedlichen Zinsniveaus beeinflusst wird und bei kleineren Zinssätzen geringer ausfällt. Die kompletten erhaltenen Ergebnisse der Kalkulation sind in Tabelle 5.2 übersichtlich zusammengefasst.

Zinskurve	BEL_0	SCR^{shock}	$\frac{SCR^{shock}}{BEL_0}$	SCR^{VaR}	$\frac{SCR^{VaR}}{BEL_0}$	$\frac{\Delta SCR}{SCR^{VaR}}$
QIS4	12.873,86	951,28	7,39 %	870,69	6,76 %	9,26 %
QIS4 - 100bps	14.358,64	1.212,84	8,45 %	1.115,48	7,77 %	8,73 %
QIS4+100bps	11.631,79	756,09	6,50 %	691,10	5,94 %	9,40 %
EoY 2014	17.779,90	1.729,89	9,73 %	1.603,79	9,02 %	7,86 %

Tabelle 5.2: SCR für unterschiedliche Zinskurven

Die Auswirkungen unterschiedlicher Eintrittsalter

Im nächsten Schritt werden die Effekte unterschiedlicher Eintrittsalter für das Beispiel einer sofort beginnenden, jährlich nachschüssig ausbezahlten Rente in Höhe von 1000 Euro untersucht. Im Genaueren betrachte ich Alter bei Versicherungsvertragsabschluss zwischen 55 und 105 Jahren sowie die Zinskurve aus der QIS4. Logischerweise werden die Best Estimate Liabilities bei höherem Eintrittsalter kleiner, da das Endalter von 120 Jahren schneller erreicht ist und die Überlebenswahrscheinlichkeiten von Jahr zu Jahr sinken.

x	BEL_0	SCR^{shock}	$\frac{SCR^{shock}}{BEL_0}$	SCR^{VaR}	$\frac{SCR^{VaR}}{BEL_0}$	$\frac{\Delta SCR}{SCR^{VaR}}$	$\frac{\Delta SCR}{BEL_0}$
55	16.366,18	703,46	4,30 %	1.209,11	7,39 %	-41,82 %	-3,09 %
65	12.873,86	951,28	7,39 %	870,69	6,76 %	9,26 %	0,63 %
75	9.097,40	1.091,84	12,00 %	607,25	6,68 %	79,80 %	5,33 %
85	5.306,54	1.070,60	20,18 %	392,20	7,39 %	172,97 %	12,78 %
95	2.473,06	792,69	32,05 %	196,83	7,96 %	302,72 %	24,09 %
105	1.317,67	614,05	46,60 %	154,07	11,69 %	298,56 %	34,91 %

Tabelle 5.3: SCR einer sofort beginnenden Rente für unterschiedliche Alter

Aus den Ergebnissen in Spalte 3 und 4 in Tabelle 5.3 kann man erkennen, dass die Solvenzkapitalanforderung berechnet nach Standardformel mit steigendem Alter zuerst steigt und ab einem gewissen Punkt fällt. Das SCR in Relation zu den Verbindlichkeiten BEL_0 wird vergleichsweise groß für die ältere Generation, was auf die Struktur des Schocks in der Standardformel zurückzuführen ist. Je größer die Sterblichkeit und somit je älter die Person ist, desto stärker wirkt sich eine 25 %ige Reduktion der Sterbewahrscheinlichkeiten aus. Auffällig ist allerdings, dass sich das SCR nach Value-at-Risk-Methode komplett anders verhält und mit steigendem Alter und fallenden Verbindlichkeiten kontinuierlich geringer wird. Lediglich das Verhältnis zwischen SCR und Verbindlichkeiten steigt bei ganz hohen Altern leicht an, davor bleibt es beinahe konstant. Offen bleibt noch, wie es sich bei jüngeren Altern auswirkt, was in Kapitel 5.3 anhand des Beispiels einer aufgeschobenen Rente untersucht wird. Das Verhalten der Ergebnisse beim Value-at-Risk-Ansatz scheint intuitiv eher verständlich und passend als jenes bei Berechnung mit der Standardformel. Interessant sind die Resultate in den letzten beiden Spalten von Tabelle 5.3, welche die Differenz der zwei Solvenzkapitalanforderungen in Relation zum SCR^{VaR} beziehungsweise zu den Best Estimate Liabilities zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreiben. Bereits im Alter von 85 Jahren ist das SCR mittels Value at Risk mehr als doppelt so hoch als das SCR mittels Langlebigkeitsschocks, diese Diskrepanz wird bei steigendem Alter noch um einiges größer. Auch die Differenz der beiden Ansätze in Bezug auf die Verbindlichkeiten wird sehr groß. Dieses Resümee lässt die Angebrachtheit des Langlebigkeitsschock im Solvency II-Standardmodell in Frage stellen.

Im Gegensatz zu den hohen Altern kann andererseits festgestellt werden, dass bei einem Eintrittsalter von 55 Jahren die Solvenzkapitalanforderung mittels Schock-Ansatz niedriger ausfällt als bei Kalkulation durch Value at Risk und somit die Berechnung nach Standardformel das erforderliche Solvenzkapital in diesem Beispiel unterschätzt. Es ergeben sich demnach gegenteilige Effekte bei jüngeren und älteren Personen, sowohl Über- als auch Unterschätzung des Solvenzkapitals in Abhängigkeit des Eintrittsalters treten bei Gegenüberstellung der beiden Modelle auf. Generell kann daraus abgeleitet werden, dass ein altersabhängiger Langlebigkeitsschock mit kleineren Verbesserungen für ältere Personen und höheren relativen Reduzierungen für jüngere Personen angemessener wäre. Börger bringt in [Bö10], Seite 237 diese Erkenntnis in Beziehung zu epidemiologischen Beobachtungen und Ergebnissen. Danach wird es für Ältere, wenn sie bis zu einem bestimmten Alter noch nicht einer bestimmten Todesursache wie zum Beispiel einem Herzinfarkt erlegen sind, immer unwahrscheinlicher, an dieser zu sterben. Jedoch sterben sie mit höherer Wahrscheinlichkeit als jüngere Menschen auf eine andere Art und Weise. Demnach sind erhebliche Verbesserungen der Sterberaten für alte Menschen wesentlich schwieriger zu erreichen als für junge.

Der von mir im Zuge dieser Diplomarbeit programmierte R-Code, welcher zu den in Tabelle 5.3 dargestellten Ergebnissen führt, und eine zusätzliche kurze Beschreibung dessen finden sich in den Anhängen A.2 und A.3. Das Programm für den R-Code in Anhang A.2 berechnet die benötigten Koeffizienten für die betrachteten Alter. Anhang A.3 beschäftigt sich mit der Monte-Carlo-Simulation, der Berechnung der Solvenzkapitalanforderung nach beiden vorgestellten Methoden und der Aufbereitung der Resultate in einer L^AT_EX-Tabelle mittels des R-Packages *xtable*.

Die Verschiebung des Sterblichkeitsniveaus

Als weitere Sensitivität wird ein Verschieben des Sterblichkeitsniveaus analysiert. Dazu betrachte ich die in Kapitel 3 berechnete Ausgangssterblichkeit sowie eine Erhöhung als auch eine Reduktion dieses Mortalitätslevels um 10 und 20 Prozent für eine zu Versicherungsvertragsbeginn 65-jährige Person. Wie in Tabelle 5.4 ersichtlich lassen sich gegensätzliche Tendenzen in absoluten wie in relativen Werten feststellen: Mit steigenden Sterbewahrscheinlichkeiten nimmt einerseits das SCR im Schock-Ansatz zu, andererseits sinkt das SCR nach der Value-at-Risk-Methode maßgeblich.

q_x	BEL_0	SCR^{shock}	$\frac{SCR^{shock}}{BEL_0}$	SCR^{VaR}	$\frac{SCR^{VaR}}{BEL_0}$	$\frac{\Delta SCR}{SCR^{VaR}}$	$\frac{\Delta SCR}{BEL_0}$
-20 %	13.614,37	923,83	6,79 %	1.134,74	8,33 %	-18,59 %	-1,55 %
-10 %	13.225,54	939,60	7,10 %	984,69	7,45 %	-4,58 %	-0,34 %
Basis	12.873,86	951,28	7,39 %	868,31	6,74 %	9,56 %	0,64 %
+10 %	12.553,13	960,14	7,65 %	776,49	6,19 %	23,65 %	1,46 %
+20 %	12.258,51	967,03	7,89 %	703,69	5,74 %	37,42 %	2,15 %

Tabelle 5.4: SCR für unterschiedliche Sterblichkeitsniveaus

Bei Berechnungen laut Standardformel ergibt sich kaum ein Unterschied in der Solvenzkapitalanforderung (siehe Spalte 3), wenn die Sterblichkeiten um einen bestimmten Prozentsatz verschoben werden. Bei höherem Mortalitätsniveau ergeben sich für das SCR^{shock} leicht höhere Werte. Dies kann wiederum mit der zugrunde liegenden Struktur des Langlebigkeitsschocks, dem Verringern aller Sterberaten um 25 %, begründet werden: je höher die Sterberate, desto größer ist der Langlebigkeitsschock in absoluten Werten. Diese automatische Anpassung des erforderlichen Solvenzkapitals an das Sterblichkeitsniveau ist eine praktische Eigenschaft. Ganz im Gegensatz dazu verhält sich der Value-at-Risk-Ansatz: Das SCR ist bei steigenden Sterberaten niedriger, die früheren Todesfälle verringern das Langlebigkeitsrisiko. Das resultiert daraus, dass die Volatilität im Gegensatz zum Schock-Ansatz nicht vom Mortalitätslevel abhängig ist. Aufgrund dessen und der erhaltenen Ergebnisse wird klar, dass eine Kalibrierung des Modells mittels der verwendeten Daten bezüglich des Sterblichkeitsniveaus unumgänglich ist.

5.3 Das Beispiel einer aufgeschobenen Rente

Bei der Analyse unterschiedlicher Alter für eine sofort beginnende Rente mit Ergebnissen in Tabelle 5.3 war ersichtlich, dass sich die Relation der Solvenzkapitalanforderungen nach den zwei unterschiedlichen Methoden anscheinend für jüngere Alter umdreht. Um dies genauer zu untersuchen, betrachte ich in diesem Abschnitt eine um m Jahre aufgeschobene nachschüssige Rente mit Rentenbeginn im Alter von 65

Jahren. Demnach ist die Aufschubzeit abhängig von dem jeweiligen Eintrittsalter und lässt sich berechnen durch $m = 65 - x_0$ für Eintrittsalter $x_0 \leq 65$. Ganz allgemein gilt dann für eine jährlich ausbezahlte Rentenhöhe von 1 zu einem Zeitpunkt $t < m$

$$BEL_t = \sum_{T>m} \frac{1}{(1+i(t,T))^{T-t}} \cdot \mathbb{E}_P [Tp_{x_0}^{(T)} | \mathcal{F}_t]$$

mit $m = 65 - x_0$ und $x_0 \leq 65$. Die Best Estimate Liabilities zum Zeitpunkt $t = 0$ für eine Rentenhöhe R berechnen sich mittels

$$BEL_0 = R \cdot \sum_{T>m} \frac{1}{(1+i(0,T))^T} \cdot \mathbb{E}_P [Tp_{x_0}^{(T)}],$$

und zum Zeitpunkt $t = 1$ ergibt sich

$$BEL_1 = R \cdot \sum_{T>m} \frac{1}{(1+i(1,T))^{T-1}} \cdot \mathbb{E}_P [Tp_{x_0}^{(T)}] \cdot e^{-M(1,T,x_0)}.$$

x	BEL_0	SCR^{shock}	$\frac{SCR^{shock}}{BEL_0}$	SCR^{VaR}	$\frac{SCR^{VaR}}{BEL_0}$	$\frac{\Delta SCR}{SCR^{VaR}}$	$\frac{\Delta SCR}{BEL_0}$
30	3.518,68	223,10	6,34 %	854,75	24,29 %	-73,90 %	-17,95 %
35	4.176,67	282,72	6,77 %	862,48	20,65 %	-67,22 %	-13,88 %
40	5.074,79	349,24	6,88 %	1.004,16	19,79 %	-65,22 %	-12,91 %
45	6.072,22	436,86	7,19 %	1.067,46	17,58 %	-59,07 %	-10,39 %
50	7.300,85	543,44	7,44 %	1.137,71	15,58 %	-52,23 %	-8,14 %
55	8.788,74	673,95	7,67 %	1.174,67	13,37 %	-42,63 %	-5,70 %
60	10.647,62	824,06	7,74 %	1.131,31	10,63 %	-27,16 %	-2,89 %

Tabelle 5.5: SCR einer aufgeschobenen Rente für unterschiedliche Alter

An den Resultaten, dargestellt in Tabelle 5.5, kann erkannt werden, dass die Solvenzkapitalanforderung nach dem Value-at-Risk-Ansatz wesentlich höher ist als jene berechnet mit dem Schock-Ansatz. Speziell für sehr niedrige Alter divergieren die beiden erhaltenen Werte und somit deren relative Abweichung. Der Langlebig-

keitsschock im Solvency II-Standardmodell unterschätzt hier das Langlebigkeitsrisiko wesentlich, weswegen wiederum ein Langlebigkeitsschock unabhängig vom jeweiligen Alter unangebracht erscheint. Bei einem Portfolio mit sofort beginnenden und aufgeschobenen Renten kann es aufgrund der Gegensätzlichkeit der Werte für niedrige und hohe Alter dazu kommen, dass sich die Differenzen der beiden Berechnungsmethoden aufheben und die Ergebnisse zusammenfallen oder zumindest sehr ähnlich sind. Allerdings ist es keine befriedigende Lösung, auf eine günstige Zusammensetzung des Portfolios zu hoffen.

Nach eingehender Studie der beiden Beispiele einer sofort beginnenden und einer aufgeschobenen Rente kann gesagt werden, dass die Ergebnisse für die Solvenzkapitalanforderung nach Standardformel und nach Value-at-Risk-Methode nicht übereinstimmen. Abhängig vom Eintrittsalter tritt entweder eine Überschätzung oder eine Unterschätzung des SCR mit Langlebigkeitsschock auf. Die Differenzen in den Ergebnissen sind teilweise gravierend, sodass die Einfachheit der Struktur des Langlebigkeitsschocks laut Standardformel, also die gleichmäßige Senkung der Mortalitätsraten um 25 %, hinterfragt werden muss.

Börger schlägt in [Bö10] eine Modifikation dieses Schocks vor. Dabei wird das Modul des Langlebigkeitsrisikos im Solvency II-Standardmodell durch die Beibehaltung der Struktur eines einmaligen Schocks so einfach wie möglich gehalten. Allerdings sollen laut Börger die Änderungen nicht für alle Alter fix sondern abhängig vom Eintrittsalter x_0 und der Maturität T sein. Der Schock wird definiert entsprechend des 99,5 % Quantils der erwarteten T -jährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten für eine x_0 -jährige Person wie in einer einjährigen Simulation des von Börger entwickelten und in dieser Arbeit verwendeten Sterblichkeitsmodells. Angewendet wird der Schock durch Multiplikation der so erhaltenen Faktoren mit den Best-Estimate-Überlebenswahrscheinlichkeiten. Dadurch würde sich der Aufwand zur Berechnung des Langlebigkeitsschocks nicht wesentlich verändern, die Ergebnisse aber das Risiko, dem sich das Versicherungsunternehmen aussetzt, besser widerspiegeln.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Das Projekt Solvency II zur Harmonisierung des Versicherungsrechts in Europa beschäftigt sich unter anderem mit Mindestanforderungen an den Kapitalbedarf eines Versicherungsunternehmens und soll dazu dienen, Versicherungsnehmerinnen und Versicherungsnehmer zu schützen. Deren Verbindlichkeiten sollen zu jedem Zeitpunkt gedeckt sein, auch wenn der Versicherung ein unvorhergesehenes Ereignis widerfährt. Im Zuge dieser Arbeit wurde nur auf Rentenprodukte eingegangen, die vom Teilrisiko der Langlebigkeit betroffen sind. In der Solvency II-Standardformel wird die Solvenzkapitalanforderung für das Langlebigkeitsrisiko als die Änderung des Net Asset Value bei einer Reduktion der Sterbewahrscheinlichkeiten berechnet. Dieser Ansatz dient als Approximation des 99,5 % Value at Risk des verfügbaren Kapitals über ein Jahr, welcher ansonsten ausschließlich mit Hilfe von stochastischer Modellierung der Sterbewahrscheinlichkeiten berechnet werden kann. Unabhängig vom Alter beziehungsweise Eintrittsalter der versicherten Person beläuft sich der Langlebigkeitsschock in der Standardformel auf eine 25 %ige Verringerung eines jeden Eintrags der zugrunde liegenden Sterbetafel. Diese Form sollte laut Kalibrierung der Standardformel als konservativ gelten. Allerdings lässt sich leicht erahnen, dass eine solche Struktur eines Schocks in der Realität nicht vorkommen wird und es durchaus passieren kann, dass dadurch das Solvenzkapital eines Versicherungsunternehmens über- oder unterschätzt wird.

Um sich der Auswirkungen der Approximation des Value at Risk bewusst zu werden, wird ein stochastisches Sterbemodell folgend Börger [Bö10] eingeführt. Es handelt sich um ein Forward-Sterblichkeitsmodell, das vollständig durch dessen Vo-

latilität und eine Anfangsbedingung für die verwendeten Sterblichkeiten erklärt wird. Enthalten ist eine Volatilitätsfunktion, die in Abhängigkeit von Eintrittsalter und Maturität definiert ist. Ebenso werden in den Komponenten der Volatilität Effekte unterschiedlicher Altersgruppen berücksichtigt. Demnach ergeben sich für niedrigere Alter unterschiedliche Verbesserungsfaktoren als für hohe Alter, was aus einer genauen Betrachtung der mathematischen Beschreibung und der Grafiken der einzelnen Komponenten hervorgeht. Zur Berechnung der Verringerungen der Sterberaten wird folgend Börger ein Durchschnitt verschiedener Projektionen von fünf britischen Versicherungsunternehmen als Ausgangssterbewahrscheinlichkeit kalkuliert und verwendet. Die Verbesserungen lassen sich über eine Diskretisierung des Modells bestimmen, dazu wurde der Code in R implementiert und folglich mittels einer zufälligen Komponente eine Anzahl von 50.000 Pfaden generiert. Damit wird der 99,5 % Value at Risk kalkuliert, welcher die Solvenzkapitalanforderung im stochastischen Fall darstellt. Zusätzlich wird der Langlebigkeitsschock nach dem Solvency II-Standardmodell berechnet, um die Unterschiede in den Ergebnissen zwischen den beiden Ansätzen herausarbeiten zu können.

Betrachtet werden die Beispiele einer sofort beginnenden Rente und einer aufgeschobenen Rente. Auffällig ist, dass sich die Solvenzkapitalanforderungen in beiden Methoden in Abhängigkeit vom Alter teilweise erheblich voneinander unterscheiden. Im Allgemeinen kann festgestellt werden, dass die Standardformel das SCR für niedrige Alter unterschätzt und das benötigte Kapital im VaR-Ansatz um einiges höher ist. Gegenteilig verhält es sich für hohe Alter: Der Langlebigkeitsschock liefert höhere Anforderungen an das Kapital als die Methode über den Value at Risk. Abhängig vom Eintrittsalter – in Kombination mit der Maturität – tritt entweder eine Überschätzung oder eine Unterschätzung des SCR mit Langlebigkeitsschock auf. Die Differenzen in den Ergebnissen sind teilweise so gravierend, dass die Einfachheit der Struktur des Langlebigkeitsschocks laut Standardformel kritisch hinterfragt und über eine Modifikation des im Moment definierten Langlebigkeitsschocks nachgedacht werden muss. Um die Form dessen möglichst einfach zu halten, wären zum Beispiel alters- und maturitätsabhängige Faktoren sinnvoll. Sie sollen durch Multiplikation mit den Best-Estimate-Überlebenswahrscheinlichkeiten angewendet und mit Hilfe eines wie in dieser Arbeit beschriebenen Modells kalibriert werden. Damit könnte das Risiko, dem das Versicherungsunternehmen bei Sterblichkeitsverbesserungen ausgesetzt ist, wesentlich besser widerspiegelt werden.

Um weitere Einblicke in die Auswirkungen der beiden unterschiedlichen Ansätze zu gelangen, wäre es gut, zusätzlich die Risikomarge zu berechnen und in die Überlegungen miteinzubeziehen. Der Grund dafür ist, dass sich das Value-at-Risk-Modell neben den Effekten auf die Solvenzkapitalanforderung auch auf die Risikomarge auswirkt. Ebenfalls könnte man Ergebnisse für unterschiedliche Portfoliozusammensetzungen berechnen und diskutieren, um zu sehen, wie groß die Abweichungen in unterschiedlichen Fällen sein können. Von kompletter Unterschätzung des Solvenzkapitals über ein Zusammenfallen der Werte beider Ansätze bis hin zu großer Überschätzung ist alles möglich. Das beschriebene Modell hängt wesentlich von den Parametern der Volatilitätsfunktion ab, weshalb eine neuerliche Kalibrierung bei Verwendung anderer Ausgangssterblichkeiten unumgänglich wird. Interessant wäre es, eine solche Kalibrierung selbst durchzuführen. Damit könnte man die Auswirkungen der verwendeten Sterbetafeln auf die Parameter und in Folge auf das Solvenzkapital untersuchen.

Die in dieser Arbeit betrachteten Beispiele sind bewusst einfach konstruiert. Zur genaueren Untersuchung und Weiterführung der Analyse der Angemessenheit des Langlebigkeitsschocks sollten komplexere Rentenprodukte betrachtet werden. Zuerst können Verträge mit laufenden Prämien erforscht werden, in einem weiteren Schritt können zum Beispiel verschiedene Kosten wie Verwaltungskosten oder Abschlusskosten hinzugefügt werden. Um die tatsächlichen Unterschiede aufzuzeigen, müssen mit einer Bestandsprojektionssoftware die kompletten Zahlungsströme eines Versicherungsunternehmens in die Zukunft projiziert werden. Dazu müssen die stochastischen Sterbewahrscheinlichkeiten als die Sterblichkeit zweiter Ordnung inkludiert werden, die Projektion damit durchgeführt und die Zahlungsströme ausgelesen und daraus Best Estimate Liabilities und Solvenzkapitalanforderungen berechnet werden. Da es sich bei den stochastischen Sterbmodellen um ein relativ junges Thema handelt und die fertig ausformulierten Rahmenbedingungen von Solvency II noch nicht allzu lange feststehen, werden sich auf diesem Gebiet in naher Zukunft sicherlich einige interessante Neuerungen und Diskussionen ergeben. Durch neue Berechnungsmodelle kann der Kapitalbedarf zur dauerhaften Deckung der Verbindlichkeiten mit höherer Genauigkeit und Zuverlässigkeit bestimmt und somit die Interessen der Versicherungsnehmerinnen und Versicherungsnehmer gewahrt werden.

Anhang A

R-Code

A.1 Projektion der Sterbewahrscheinlichkeiten

Der folgende Code liest die ursprünglichen Sterbewahrscheinlichkeiten aus der britischen Sterbetafel PNMA00 aus dem Jahr 2000 ein, welche unter [CMI06] verfügbar ist. Mit Hilfe der kumulativen Verbesserungsfaktoren, einerseits nach der Medium Cohort und andererseits nach der Lee-Carter Methode aus [CMI07] und [CMI09], werden jährliche Verbesserungsfaktoren und damit fünf unterschiedliche Projektionen mit gewissen jährlichen Mindestveränderungen berechnet. Danach rechnet man wiederum auf kumulative Faktoren um und erhält die fünf unterschiedlichen verbesserten Sterblichkeiten, deren Durchschnitt für die weiteren Kalkulationen von Relevanz ist.

```
1 rm(list=ls()) # Workspace loeschen
2 w <- 120 # Ende der Sterbetafel
3 # Einlesen der Ueberlebenswahrscheinlichkeiten aus PNMA00
4 # Die Werte beginnen erst beim Alter 20, setze daher  $q_1, \dots, q_{19} = 0$ .
5 q <- c(rep(0,19), read.csv("pnma00.csv", header=TRUE, sep=";", dec=","))$
   qx)
6 # Reduktionsfaktoren fuer Medium Cohort, Alter von 1 bis 120, Zeit von 2000 bis
   2130
7 RFMC <- read.csv("MC.csv", header=TRUE, sep=";", dec=",")
8 # Reduktionsfaktoren fuer Lee-Carter, Alter von 1 bis 120, Zeit von 2000 bis
```

```

2130
9  RFLC <- read.csv("LC.csv", header=TRUE, sep=";", dec=",")
10 # Definition der Matrizen der Verbesserungsfaktoren
11 # w+8 Spalten, da es von Projektionsstart 31.12.2007 bis Ende Sterbetafel w
    Jahre sind, von Sterbetafel 2000 bis Projektionsstart Ende 2007 sind es
    zusaetzliche 8 Jahre.
12 RFMC1 <- matrix(nrow=w, ncol=w+8)
13 RFLC1 <- matrix(nrow=w, ncol=w+8)
14 RFML1 <- matrix(nrow=w, ncol=w+8)
15 RFMC1.25 <- matrix(nrow=w, ncol=w+8)
16 RFMC1.5 <- matrix(nrow=w, ncol=w+8)
17 RFMC2 <- matrix(nrow=w, ncol=w+8)
18 RFML0.5 <- matrix(nrow=w, ncol=w+8)
19 RFML0.8 <- matrix(nrow=w, ncol=w+8)
20 # Berechnung der jaehrlichen Verbesserungsfaktoren laut Formel CMI library
    guidelines Seite 5
21 # Zeilen i entsprechen Alter, Spalten j der Zeit
22 for (i in 1:w) {
23   for (j in 2:(w+8)) {
24     # Achtung: in Spalte 1 steht das Alter
25     # jaehrliche Verbesserungsfaktoren
26     RFMC1[i,j] = 1 - RFMC[i,j+1] / RFMC[i,j]
27     RFLC1[i,j] = 1 - RFLC[i,j+1] / RFLC[i,j]
28     RFML1[i,j] = (RFMC1[i,j] + RFLC1[i,j]) / 2
29     # inklusive Mindestverbesserungen
30     RFMC1.25[i,j] = (1 - pmax(0.0125, RFMC1[i,j])) * RFMC[i,j]
31     RFMC1.5[i,j] = (1 - pmax(0.015, RFMC1[i,j])) * RFMC[i,j]
32     RFMC2[i,j] = (1 - pmax(0.02, RFMC1[i,j])) * RFMC[i,j]
33     RFML0.5[i,j] = (1 - pmax(0.005, RFML1[i,j])) * (RFMC[i,j] + RFLC[i,j])/2
34     RFML0.8[i,j] = (1 - pmax(0.008, RFML1[i,j])) * (RFMC[i,j] + RFLC[i,j])/2
35     # keine Mindestverbesserung im 1. Jahr
36     RFMC1.25[i,1] = RFMC[i,2]
37     RFMC1.5[i,1] = RFMC[i,2]
38     RFMC2[i,1] = RFMC[i,2]
39     RFML0.5[i,1] = (RFMC[i,2] + RFLC[i,2])/2

```

```

40   RFML0.8[i,1] = (RFMC[i,2] + RFLC[i,2])/2
41   }
42 }
43 MC1.25 <- matrix(nrow=w, ncol=w)
44 MC1.5 <- matrix(nrow=w, ncol=w)
45 MC2 <- matrix(nrow=w, ncol=w)
46 ML0.5 <- matrix(nrow=w, ncol=w)
47 ML0.8 <- matrix(nrow=w, ncol=w)
48 for (j in 1:w) {
49   # urspruengliche Sterberate * kumulativer Verbesserungsfaktor 2000 bis t
50   MC1.25[j,1:(w+1-j)] = q[j:w] * RFMC1.25[j,9:(w+9-j)] / RFMC1.25[j,1]
51   MC1.5[j,1:(w+1-j)] = q[j:w] * RFMC1.5[j,9:(w+9-j)] / RFMC1.5[j,1]
52   MC2[j,1:(w+1-j)] = q[j:w] * RFMC2[j,9:(w+9-j)] / RFMC2[j,1]
53   ML0.5[j,1:(w+1-j)] = q[j:w] * RFML0.5[j,9:(w+9-j)] / RFML0.5[j,1]
54   ML0.8[j,1:(w+1-j)] = q[j:w] * RFML0.8[j,9:(w+9-j)] / RFML0.8[j,1]
55   # Ende der Sterbetafel wird mit 1 belegt.
56   MC1.25[j,w+1-j] = 1
57   MC1.5[j,w+1-j] = 1
58   MC2[j,w+1-j] = 1
59   ML0.5[j,w+1-j] = 1
60   ML0.8[j,w+1-j] = 1
61 }
62 # Fuer die Berechnung des SCR verwendetes qx ist der Durchschnitt ueber diese
   fuenf Tafeln.
63 qx <- (MC1.25 + MC1.5 + MC2 + ML0.5 + ML0.8) / 5
64 # Keine Sterblichkeiten fuer Alter kleiner 20 vorhanden, setze Werte auf 0.
65 qx[1:19,] <- 0
66 # Alle NA werden mit 1 belegt, damit es bei spaeteren Berechnungen zu keinen
   Problemen kommt.
67 qx[is.na(qx)] <- 1
68 save(qx,file="qx.RData")
69
70 # Plot qx verbessert und qx original fuer Alter x0 = 65
71 pdf("qx_verb_orig_65.pdf")
72 # Hinzufuegen von zusaetzlichem Platz rechts des Plots, default=c(5, 4, 4, 2) +

```

```

0.1
73 par(mar=c(5, 4, 4, 7.2) + 0.1)
74 x <- 65
75 TT=1:30
76 plot(x-1+TT, qx[x,TT], type="l", ylim=range(qx[x,TT],q[x-1+TT]), col="
    deeppink", xlab="Alter", ylab="qx", cex.axis=1.3, cex.lab=1.3)
77 lines(x-1+TT, q[x-1+TT], col="green3")
78 legend("right", inset=c(-0.27,0), c("qx_av", "qx_orig"), col=c("deeppink", "
    green3"), lty=c(1, 1, 1), xpd=TRUE, cex=1)
79 dev.off()

```

A.2 Berechnung der Koeffizienten für die Monte-Carlo-Simulation

Zur Berechnung der stochastischen Sterblichkeitsverbesserungen werden zuerst für ausgewählte Alter die benötigten Koeffizienten b_1, \dots, b_6 und A kalkuliert und pro Alter in einer zugehörigen Datei gespeichert. Anfangs werden die einzelnen Teile der Funktionen $\sigma_i(t, T, x_0)$, $i = 1, \dots, 6$ definiert. In g_i befinden sich alle Terme, welche abhängig von $x_0 + T$ sind, h_i beinhaltet sowohl die Koeffizienten c_i als auch Terme in Abhängigkeit von $T - t$. Die $\sigma_i(t, T, x_0)$ erhält man durch Multiplikation der entsprechenden g_i und h_i , man vergleiche dazu 4.7. Die Koeffizienten b_i bekommen wir über $b_l^{(n)}(\frac{i}{n}, T, x_0) = \sum_{j=1}^{nT} \sigma_l(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, x_0) \frac{1}{n}$ und A mit Hilfe der Beziehung in Gleichung (4.12).

```

1 rm(list=ls()) # Workspace loeschen
2 n <- 365 # Anzahl an Stuetzstellen, taegliche Betrachtung
3 w <- 120 # Endalter der Sterbetafel
4 N <- n*w
5 a <- 0.1069; b <- -12.57; c <- 0.0007896;
6 c1 <- 0.07744; c2 <- 0.07456; c3 <- 0.06747; c4 <- 0.25902; c5 <- 0.04215;
    c6 <- 0.24054;
7
8 # gi beinhaltet alle Terme von sigma_i, die abhaengig von (x_0+T) sind.

```



```

9  TT <- (0:N)/n
10 g1 <- c(rep(0,n), rep(1,N+1))
11 g2 <- c(rep(0,n), exp(log(0.1)*TT))
12 g3 <- c(rep(0,n), exp(log(0.5)/20^2*(TT-20)^2))
13 g4 <- g3
14 g5 <- g3
15 g6 <- c(rep(0,n), exp(log(0.5)/80^2*(TT-120)^2))
16
17 # Berechnung fuer Alter zwischen 40 und 70 im Abstand von 5 Jahren
18 for(x in seq(55,105,10)){
19
20   # hi beinhaltet die Koeffizienten ci sowie alle Terme von sigma_i, die
      abhaengig von (T-t) sind.
21   TT <- x+(1:N)/n
22   f <- exp(a*TT+b) / (1+exp(a*TT+b)) + c
23   h1 <- c1 * f
24   h2 <- c2 * f
25   h3 <- c3 * f * exp(log(0.5)/17.5^2*(TT-37.5)^2)
26   h4 <- c4 * f * exp(log(0.5)/12.5^2*(TT-67.5)^2)
27   h5 <- c5 * f * exp(log(0.5)/30^2*(TT-110)^2)
28   h6 <- c6 * f
29
30   bfun <- function(g,h){
31     si <- outer(1:n,1:N, function(i,j) g[j-i+n+1] * h[j])
32     t(sapply(1:n, function(i)diffinv(colSums(matrix(si[i,],nrow=n))))[-1]/n))
33   }
34
35   b1 <- t(bfun(g1,h1))
36   b2 <- t(bfun(g2,h2))
37   b3 <- t(bfun(g3,h3))
38   b4 <- t(bfun(g4,h4))
39   b5 <- t(bfun(g5,h5))
40   b6 <- t(bfun(g6,h6))
41
42   A <- sapply(1:w, function(T) sum(b1[T,1:n]^2 + b2[T,1:n]^2 + b3[T,1:n]^2

```

```

      + b4[T,1:n]^2 + b5[T,1:n]^2 + b6[T,1:n]^2) / (2*n))
43  # Werte fuer b1,...,b6 und A werden je Alter in einer Datei gespeichert und
      spaeter zur Berechnung der verbesserten Sterblichkeiten aufgerufen.
44  save(A,b1,b2,b3,b4,b5,b6, file=sprintf("coeff%03d.RData",x))
45  }

```

A.3 Berechnung des Solvenzkapitals

Um die Solvenzkapitalanforderung zu kalkulieren, werden zunächst die vorher in A.1 berechneten Sterbewahrscheinlichkeiten und die verwendete Zinskurve der QIS4 eingelesen. Dann werden aus letzterer die Forward Rates zu $t = 1$ und die Diskontierungsfaktoren zu $t = 0$ und $t = 1$ berechnet. Für das Monte-Carlo-Experiment werden pro Komponente der Volatilitätsfunktion $\sigma_i, i = 1, \dots, 6$ normalverteilte Zufallsvariablen erzeugt, mit denen die Verbesserungsfaktoren im stochastischen Sterblichkeitsmodell ermittelt werden. Zusätzlich benötigen wir dazu die bereits vorher in A.2 errechneten Koeffizienten, wobei aus Gründen der Effizienz und Laufzeit jeweils nur diejenige Datei geladen wird, deren Alter gerade zur Kalkulation relevant ist. Die Ermittlung der Best Estimate Liabilities zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ für das Grundszenario sowie den Langlebigkeitsschock nach Standardmodell und der daraus resultierenden Solvenzkaptialerfordernis erfolgt nach den in Kapitel 5 vorgestellten Formeln. Für den SCR nach der Value at Risk Methode berechnen wir das 99,5 % Quantil der Verlustvariable, welche für jeden der 50.000 einzelnen Pfade angesehen wird. Die Ergebnisse für jedes einzelne Alter werden in einem Data Frame gespeichert und zum Schluss mittels des Befehls *xtable* in Code für eine L^AT_EX-Tabelle umgewandelt.

```

1  rm(list=ls()) # Workspace loeschen
2  set.seed(2015) # Garantiert bei Erzeugung der Zufallszahlen die
      Reproduzierbarkeit der Ergebnisse
3  n <- 365 # Stuetzstellen fuer Diskretisierung, taegliche Betrachtung
4  w <- 120 # Ende der Sterbetafel
5  K <- 1000 # Rentenhoehe
6  m <- 50000 # Anzahl der Pfade
7

```

```

8  # Initialisierung des Dataframes fuer den benoetigten Output, bei den
   Berechnungen wird pro Alter eine Zeile mit den entsprechenden Ergebnissen
   hinzugefuegt.
9  out <- data.frame(x=integer(0), BEL0=numeric(0), SCRL=numeric(0),
   relL=numeric(0), SCRv=numeric(0), relV=numeric(0), delta1=numeric
   (0), delta2=numeric(0))
10
11 # Einlesen der Ueberlebenswahrscheinlichkeiten aus dem Mittelwert mehrerer
   Projektionen, welche in A.1 berechnet wurden.
12 load("qx.RData")
13 p0 <- 1 - qx
14 # Definition einer Matrix mit Ueberlebenswahrscheinlichkeiten aller
   unterschiedlichen Eintrittsalter.
15 px0 <- matrix(nrow=w,ncol=w)
16 for (j in 1:w) {
17   px0[j,] <- c(rep(NA,j-1), p0[j,1:(w+1-j)])
18 }
19
20 # Fuer Berechnungen zu t=0 werden die Spot Rates aus der QIS4 verwendet.
21 i0 = read.csv("i_qis4.csv", header = TRUE, sep = ";", dec = ",")$i
22 # Spot Rates bis Maturitaet 75 vorhanden, spaetere werden gleich der von 75
   gesetzt.
23 i0[76:120] = i0[75]
24 i1 <- rep(0,120)
25 i1[1] = i0[1]
26 for (j in 2:120) {
27   i1[j] = ((1 + i0[j])^j / (1 + i0[1])) ^ (1/(j - 1)) - 1
28 }
29 # Berechnung der Diskontierungsfaktoren fuer t=0 und t=1.
30 v0 <- function(T) { 1/(1 + i0[T])^T }
31 v1 <- function(T) { 1/(1 + i1[T])^(T-1) }
32
33 # Monte-Carlo-Experiment
34 ep1 <- matrix(rnorm(n*m),ncol=m) / sqrt(n)
35 ep2 <- matrix(rnorm(n*m),ncol=m) / sqrt(n)

```

```

36 ep3 <- matrix(rnorm(n*m),ncol=m) / sqrt(n)
37 ep4 <- matrix(rnorm(n*m),ncol=m) / sqrt(n)
38 ep5 <- matrix(rnorm(n*m),ncol=m) / sqrt(n)
39 ep6 <- matrix(rnorm(n*m),ncol=m) / sqrt(n)
40
41 # Ich berechne Best Estimate Liabilities und Solvenzkapitalanforderung fuer
    unterschiedliche Alter. Pro Alter werden die dafuer benoetigten Koeffizienten
    eingelesen.
42 for(x in seq(55,105,10)){
43   px <- px0[x,]
44   # Trick zur Berechnung der T-jaehrigen Ueberlebenswahrscheinlichkeiten
45   Tpx <- exp(diffinv (log(px[(x+1):(w-1)]), xi = log(px[x])))
46   # Lade bereits berechnete Koeffizienten fuer das jeweilige Alter.
47   load(sprintf("coeff%03d.RData",x))
48   # Verbesserungsfaktoren fuer t=1
49   TT <- 1:(w-x)
50   Ep1 <- Tpx * exp(-A[TT] - b1[TT,]*%ep1 - b2[TT,]*%ep2 - b3[TT,]*
    %ep3 - b4[TT,]*%ep4 - b5[TT,]*%ep5 - b6[TT,]*%ep6)
51
52   # Best Estimate Liabilities fuer t=0
53   BEL0 <- sum(K * v0(1:(w-x)) * Tpx)
54
55   # Langlebigkeitsschock durch Verringern der Sterberaten um 25%. Das "L" in
    Variablen steht fuer Langlebigkeitsschock.
56   qxL <- (1 - px) * (1 - 0.25)
57   qxL[w] <- 1
58   pxL <- 1 - qxL
59   # Trick zur Berechnung der T-jaehrigen Ueberlebenswahrscheinlichkeiten
60   TpxL <- exp(diffinv (log(pxL[(x+1):(w-1)]), xi = log(pxL[x])))
61   # Best Estimate Liabilities fuer t=0, Rententafel mit 25% verringerten Raten
62   BEL0L <- sum(K * v0(1:(w-x)) * TpxL)
63
64   # SCR mittels Langlebigkeitsschock ist die Differenz aus BEL und BEL
    geschockt.
65   SCRL <- BEL0L - BEL0

```

```

66 # Best Estimate Liabilities fuer t=1
67 BEL1 <- sum(K * v1(2:(w-x)) * Tpx[2:(w-x)])
68 # Cashflow zum Zeitpunkt t=1 ist die erste Rentenzahlung in Hoehe von K fuer
    alle, die das erste Jahr ueberlebt haben. Negatives Vorzeichen, da es sich um
    eine Verbindlichkeit handelt.
69 CF1 <- -K * Tpx[1]
70 # Best Estimate Liabilities fuer t=1 mit geschockten Sterblichkeiten
71 BEL1L <- sum(K * v1(2:(w-x)) * TpxL[2:(w-x)])
72 # Cashflow zu t=1 bei Langlebigkeitsschock
73 CF1L <- -K * TpxL[1]
74
75 # Berechnung Best Estimate Liabilities fuer t=1 im VaR Ansatz. Das "V" in den
    Variablen steht fuer Value at Risk Ansatz.
76 BEL1V <- matrix(nrow=m,ncol=1)
77 CF1V <- matrix(nrow=m,ncol=1)
78 loss <- matrix(nrow=m,ncol=1)
79 for (s in 1:m) {
80   BEL1V[s] = sum(K * v1(2:(w-x)) * Ep1[2:(w-x),s])
81   CF1V[s] = -K * Ep1[1,s]
82   loss[s] <- (BEL1V[s] - CF1V[s]) / (1 + i0[1]) - BEL0
83 }
84 # Solvenzkapitalanforderung ist das 99,5% Quantil der Verlustvariable.
85 SCRv <- quantile(loss,0.995)
86
87 # Darstellung mancher Werte im Output in Prozent
88 relL <- paste(format(round(SCRL/BEL0*100,2), nsmall=2), "%",sep="")
89 relV <- paste(format(round(SCRv/BEL0*100,2), nsmall=2), "%",sep="")
90 delta1 <- paste(format(round((SCRL-SCRv)/SCRv*100,2), nsmall=2), "%",sep="")
91 delta2 <- paste(format(round((SCRL-SCRv)/BEL0*100,2), nsmall=2), "%",sep="")
92
93 # Hinzufuegen einer neuen Zeile im Output mit den relevanten Ergebnissen.
94 out[nrow(out) + 1, ] <- c(x, format(round(BEL0,2), nsmall=2), format(
    round(SCRL,2), nsmall=2), relL, format(round(SCRv,2), nsmall=2), relV,

```

```
    delta1, delta2)
95 }
96
97 # Mittels des Befehls xtable koennen die Ergebnisse im Data Frame einfach als
    LaTeX Tabelle exportiert werden. Der erhaltene Code wird kopiert und im
    LaTeX File eingefuegt.
98 print(xtable(prettyNum(out,decimal.mark=", "), align="rrrrrrrr", label="tab:
    SCR__alter", caption="SCR_einer_sofort_beginnenden_Rente_fuer_
    unterschiedliche_Alter"),
99 include.rownames=F,
100 floating=T,
101 hline.after=NULL,
102 add.to.row=list(pos=list(-1,0, nrow(out)),
103 command=c(
104     '\\toprule\\n',
105     '\\midrule\\n',
106     '\\bottomrule\\n')))
```

Literaturverzeichnis

- [BaF14] BAFIN: Solvency II: Aufbau und Gesetzgebung, verfügbar unter http://www.bafin.de/DE/Internationales/Regelungsvorhaben/Solvency2/solvency2_node.html, aufgerufen am 11.10.2015. (2014)
- [BBR10] BAUER, Daniel ; BÖRGER, Matthias ; RUSS, Jochen: On the pricing of longevity-linked securities. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 46 (2010), Nr. 1, S. 139–149
- [BBRZ08] BAUER, Daniel ; BÖRGER, Matthias ; RUSS, Jochen ; ZWIESLER, Hans-Joachim: The Volatility of Mortality. In: *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance* 3 (2008), Nr. 1, S. 1–29
- [Bö10] BÖRGER, Matthias: Deterministic shock vs. stochastic value-at-risk — an analysis of the Solvency II standard model approach to longevity risk. In: *Blätter der DGVFM* 31 (2010), Nr. 2, S. 225–259
- [CEI08] CEIOPS: CEIOPS QIS4 Term Structures 20080507, verfügbar unter <https://eiopa.europa.eu/Publications/QIS/CEIOPS-DOC-23-08%20rev%20QIS4%20Term%20Structures%2020080507.xls>, aufgerufen am 10.08.2015. (2008)
- [CEI09a] CEIOPS: CEIOPS’ Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: Standard formula SCR - Article 109 c Life underwriting risk, verfügbar unter http://www.eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/consultations/consultationpapers/CP49/CEIOPS-L2-Final-Advice-on-Standard-Formula-Life-underwriting-risk.pdf, aufgerufen am 07.09.2015. (2009)

- [CEI09b] CEIOPS: Draft CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: Supervisory Reporting and Public Disclosure Requirements, verfügbar unter https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/consultations/consultationpapers/CP58/CEIOPS-CP-58-09-L2-Advice-Supervisory-Reporting-and-Disclosure.pdf, aufgerufen am 06.09.2015. (2009)
- [CMI02] CMI, Continuous Mortality Investigation: An interim basis for adjusting the "92" Series mortality projections for cohort effects, verfügbar unter <http://www.actuaries.org.uk/research-and-resources/documents/cmi-working-paper-1-interim-basis-adjusting-92-series-mortality-pro>, aufgerufen am 14.10.2015. (2002)
- [CMI06] CMI, Continuous Mortality Investigation: PNMA00 - Pensioners, males, Normal, amounts, verfügbar unter <http://www.actuaries.org.uk/research-and-resources/documents/pnma00-pensioners-males-normal-amounts>, aufgerufen am 10.08.2015. (2006)
- [CMI07] CMI, Continuous Mortality Investigation: CMI library of mortality projections. Previously-published tables of projections, verfügbar unter <http://www.actuaries.org.uk/sites/all/files/documents/zip/prodplibv1.zip>, aufgerufen am 10.08.2015. (2007)
- [CMI09] CMI, Continuous Mortality Investigation: CMI library of mortality projections. Additional projections from version 1.1 of the library, verfügbar unter <http://www.actuaries.org.uk/sites/all/files/documents/zip/projectionslibrary-version116.zip>, aufgerufen am 10.08.2015. (2009)
- [CMI11] CMI, Continuous Mortality Investigation: User guide to version 1.3 of the CMI library of mortality projections, verfügbar unter <http://www.actuaries.org.uk/sites/all/files/documents/pdf/cmi-projectionslibraryuserguidev1-3.pdf>, aufgerufen am 10.08.2015. (2011)
- [EIO14] EIOPA: The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation, verfügbar un-

- ter https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/EIOPA-14-322_Underlying_Assumptions.pdf, aufgerufen am 08.09.2015. (2014)
- [EIO15] EIOPA: Risk free curves as of 31-December-2014, verfügbar unter https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/EIOPA_RFR_20141231.zip, aufgerufen am 11.09.2015. (2015)
- [EU09] EU: RICHTLINIE 2009/138/EG DES EUROPÄISCHEN PARLAMENTS UND DES RATES vom 25. November 2009 betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität II), verfügbar unter <http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2009:335:0001:0155:de:PDF>, aufgerufen am 07.09.2015. (2009)
- [EU14] EU: DELEGIERTE VERORDNUNG (EU) 2015/35 DER KOMMISSION vom 10. Oktober 2014 zur Ergänzung der Richtlinie 2009/138/EG des Europäischen Parlaments und des Rates betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität II), verfügbar unter <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/DE/TXT/PDF/?uri=CELEX:32015R0035&from=DE>, aufgerufen am 07.09.2015. (2014)
- [FMA15] FMA: Änderungen durch Solvency I, verfügbar unter <https://www.fma.gv.at/de/sonderthemen/solvency-ii/allgemeine-grundlagen/grundlagen-solvency-i/aenderungen-durch-solvency-i.html>, aufgerufen am 11.10.2015. (2015)
- [Gri07] GRIMSHAW, Dave: Mortality projections. Current issues in life assurance seminar 2007, verfügbar unter: <http://www.actuaries.org.uk/research-and-resources/documents/mortality-projections>, aufgerufen am 10.08.2015. (2007)
- [ISG14] ISS SOFTWARE GMBH, Hamburg: Solvenzkapital, verfügbar unter <http://www.solvency-ii-kompakt.de/content/solvvenzkapital>, aufgerufen am 09.09.2015. (2014)
- [LC92] LEE, Ronald D. ; CARTER, Lawrence R.: Modeling and Forecasting U.S. Mortality. In: *Journal of the American Statistical Association* 87 (1992), Nr. 419, S. 659–671

- [Wil99] WILLETS, Richard C.: Mortality in the Next Millenium, verfügbar unter <http://sias.org.uk/resources/papers/2b90b719c8070e3cc1b90c85464f79b8.pdf>, aufgerufen am 20.08.2015.
(1999)

Abbildungsverzeichnis

2.1	Übersicht über die drei Säulen von Solvency II	6
2.2	Bilanz nach Solvency II, Quelle [ISG14]	7
2.3	Überblick über das Governance System nach Solvency II	9
2.4	Zusammensetzung SCR nach Standardformel, aus [EIO14] Seite 6 .	12
2.5	Korrelationsmatrix für das lebensversicherungstechnische Risiko, aus [EU14] Seite 88	14
3.1	Sterblichkeit aus Projektion und PNMA00 mit $x_0 = 65$	28
4.1	Funktionen $\sigma_1(1, T, 65)$ und $\sigma_2(1, T, 65)$	34
4.2	Funktionen $\sigma_i(t, T, 65)$, $i = 1, 2$ für $t = 1, \dots, 20$ und $T = 1, \dots, 55$.	35
4.3	Funktionen $\sigma_3(1, T, 65)$ und $\sigma_4(1, T, 65)$	36
4.4	Funktionen $\sigma_i(t, T, 65)$, $i = 3, 4$ für $t = 1, \dots, 20$ und $T = 1, \dots, 55$.	36
4.5	Funktionen $\sigma_5(1, T, 65)$ und $\sigma_6(1, T, 65)$	37
4.6	Funktionen $\sigma_i(t, T, 65)$, $i = 5, 6$ für $t = 1, \dots, 20$ und $T = 1, \dots, 55$.	37
4.7	Funktionen $\sigma_i(1, T, 45)$ und $\sigma_i(1, T, 65)$	38
5.1	Verschiedene Zinskurven zur Berechnung des SCR	48

Tabellenverzeichnis

3.1	Reduktionsfaktoren berechnet mit Medium Cohort Projektion . . .	21
3.2	Sterblichkeiten original \hat{q}_x und verbessert q_x	22
4.1	Optimale Werte für die Parameter c_i	34
5.1	SCR für eine 65-jährige Person	47
5.2	SCR für unterschiedliche Zinskurven	49
5.3	SCR einer sofort beginnenden Rente für unterschiedliche Alter . . .	50
5.4	SCR für unterschiedliche Sterblichkeitsniveaus	52
5.5	SCR einer aufgeschobenen Rente für unterschiedliche Alter	53