



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology

D I P L O M A R B E I T

Der Vergleich des Value-at-Risk mit alternativen Risikomaßen und dessen Umsetzung in der Praxis

Ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer

durch
Mag. Lisa Maria Neitzel, B.Sc.
Kaiserstraße 7/11
1070 Wien

Datum

Unterschrift

Zusammenfassung

Risikomanagement und der Einsatz von Risikokennzahlen sind Begriffe, die in letzter Zeit im Finanzbereich nicht mehr wegzudenken sind. Nach adaptierten Rahmenlinien vom Basler Ausschuss und dem EU-Projekt Solvency II, kam es zu verschärften Anforderungen an das Risikomanagement und zu neuen Erkenntnissen über die Methoden zur Berechnung von Risikomaßen. Value-at-Risk und Expected Shortfall sind die bekanntesten Risikomaße im Finanzbereich, jedoch werden immer wieder neue Risikomaße für die Anwendung in der Praxis vorgeschlagen. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine Übersicht der verschiedenen Risikomaße zu liefern und die verschiedenen Modelle für die Ermittlung des Value-at-Risk anhand von Daten zu analysieren. Mit dieser Arbeit soll beantwortet werden, ob das beste Risikomaß in der Praxis überhaupt existiert.

Abstract

The term risk management and key risk figures have recently become indispensable in the financial sector. The adaption of guidelines by the Basel Committee and the EU Solvency II project, led to stricter requirements and new insights through the method of calculating risk measures. Value-at-Risk and Expected Shortfall are the most common risk measures in the financial sector, however, new risk measures to be used in practice are proposed constantly. The aim of this paper is to provide an overview of the various risk measures and to analyze the different models for the calculation of value-at-risk, based on a dataset. This paper tries to answer whether the best form of risk measure can exist in practice at all.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer für seine ausgesprochen gute Betreuung und die hervorragende Zusammenarbeit bedanken.

Der größte Dank gebührt meinen Eltern und Großeltern, ohne sie wäre dies nicht möglich gewesen. Sie haben mir das Studium finanziell ermöglicht und sind mir immer mit gutem Rat zur Seite gestanden. Ich möchte mich bei ihnen auch dafür bedanken, dass sie immer wieder Verständnis aufbrachten und mich in allen Phasen der Arbeit motivierten.

Außerdem möchte ich mich bei meinen Schwiegereltern für ihre Unterstützung und die immer wieder lieben Worte bedanken.

Einen besonderen Dank hat sich mein Freund Martin verdient, der mich in jeder Phase der Diplomarbeit tatkräftig unterstützt hat. Er hat mich immer wieder ermutigt und fand immer die passenden Worte. Ohne ihn hätte ich nur halb so schöne Erinnerungen an dieses Studium.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Einführung	3
2.1	Definition Risiko	4
2.2	Unterschiedliche Risikoarten	4
2.2.1	Marktrisiko	4
2.2.2	Kreditrisiko	4
2.2.3	Interne und operative Risiken	5
2.3	Aufgaben des Risikomanagements	5
2.3.1	Herausforderungen	5
2.3.2	Ablauforganisation	5
3	Gesetzliche Anforderungen	7
3.1	Basel III	7
3.1.1	Risikomanagement und die früheren Schwachstellen	7
3.2	Solvency II	9
4	Der Vergleich von Risikomaßen	10
4.1	Risikomaße	10
4.2	Kohärente Risikomaße in der Praxis	13
4.3	Die Wahl eines guten Risikomaßes	15
4.3.1	Elicitability	15
4.3.2	Conditional Elicitability	16
4.3.3	Robustheit	17
4.4	Populäre Risikomaße	18
4.4.1	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	18
4.4.2	Value-at-Risk	20
4.4.3	Conditional VaR	22
4.4.4	Expected Shortfall	23
4.4.5	Expektile	24
4.5	Eigenschaften der Standard-Risikomaße	25
4.5.1	VaR - subadditiv?	25
4.5.2	Robustheit	27

4.5.3	Elicitability und Conditional Elicitability	27
4.6	Gegenüberstellung der Risikomaße	29
5	Value-at-Risk Modelle und die Umsetzung anhand von Daten	31
5.1	Verwendete Indizes	31
5.1.1	ATG1TR Index - Österreichische Staatsanleihen	31
5.1.2	REX Index - Deutsche Anleihen	32
5.1.3	SX5E Index - Aktienindex Europa	32
5.1.4	MSCI World Index - Aktienindex weltweit	32
5.2	Methoden zur Ermittlung des Value-at-Risk	33
5.3	Parametrische Methoden	34
5.3.1	Varianz-Kovarianz-Modell	34
5.4	Simulationsmodelle	37
5.4.1	Historische Simulation	37
5.4.2	Monte Carlo Simulation	42
5.5	Der Vergleich der Modelle	44
5.6	Unterschiedliche Value-at-Risk	46
5.6.1	Incremental VaR	46
5.6.2	Marginal VaR	47
5.6.3	Conditional VaR	48
5.6.4	Probability of Shortfall	48
6	Conclusio	50
	Abbildungsverzeichnis	51
	Literaturverzeichnis	53

Kapitel 1

Einleitung

Im Finanzbereich werden bewusst Risiken eingegangen um hohe Erträge zu erzielen. Für die adäquate Umsetzung spielt das Risikomanagement von Finanzinstituten eine bedeutende Rolle. Das Risikomanagement hat die Aufgabe die unterschiedlichen Risiken zu identifizieren, zu messen, zu überwachen und zu steuern. Für Finanzinstitute und somit auch für das Risikomanagement wurden nach der Finanzkrise 2007/2008 die regulatorischen Rahmenlinien verschärft, im Hinblick um zukünftig auftretende Tail-Ereignisse besser abfedern zu können. Das Risikomanagement ermittelt die Höhe eines Risikos anhand eines Risikomaßes. Für die Messung des Risikos wird zumeist der weitverbreitete Value-at-Risk Ansatz verwendet. Der Value-at-Risk drückt das Verlustpotential eines Portfolios, bestehend aus Positionen innerhalb eines Zeithorizonts T aus, bei gegebenem Konfidenzniveau α . Dieses Risikomaß ist eines der beliebtesten und wurde auch vom Basler Ausschuss für die Erfassung des Risikos vorgeschlagen, um die Höhe des Eigenmittelkapitals zu berechnen, das nötig ist, um größere unerwartete Verluste aufzufangen. Jedoch weist der Value-at-Risk auch Nachteile auf, was wiederum dazu führt, dass neue Risikomaße für die Verwendung im Finanzbereich vorgeschlagen werden. Ein Risikomaß, das im Vergleich zum Value-at-Risk auch Tail-Ereignisse erfassen kann, ist der Expected Shortfall. Dieses Risikomaß wurde 1997 von [Artzner et al.] als kohärentes Risikomaß eingeführt und wird immer mehr in der Praxis verwendet.

Die Arbeit gliedert sich in vier große Bereiche, der Einführung des Risikos, den gesetzlichen Anforderungen für das Risikomanagement, dem Vergleich von Risikomaßen und Value-at-Risk Modellen und deren Umsetzung in der Praxis.

Im 2. Kapitel wird "Risiko" definiert, sowie die einzelnen Risikoarten, die die Finanzbranche betreffen, beschrieben. Des Weiteren werden die Aufgaben des Risikomanagements erläutert und ein Überblick über den Ablauf des Risikomanagementprozesses gegeben.

Das 3. Kapitel befasst sich mit den gesetzlichen Anforderungen. Es wird auf Basel III sowie dessen Vorschlag der Einführung des „Stressed Value-at-Risk“ eingegangen. Zusätzlich werden die Leitlinien bezüglich des Risikomanagements aus Sicht von Solvency II erläutert.

Das 4. Kapitel widmet sich dem Vergleich der Risikomaße. Es werden kohärente Risikomaße in der Praxis erläutert, sowie die Wahl eines geeigneten Risikomaßes analysiert. Es wird auf die verschiedenen Eigenschaften der Risikomaße eingegangen und abschließend die bekanntesten Risikomaße vorgestellt und miteinander verglichen.

Im 5. Kapitel werden verschiedene Value-at-Risk Methoden anhand von Daten berechnet. Hierfür wurden vier verschiedene Indizes verwendet, um die eventuell auftretenden Unterschiede besser veranschaulichen zu können. Des Weiteren werden der Incremental VaR, der Marginal VaR, der Conditional VaR sowie der Expected Shortfall anhand der gewählten Daten ermittelt.

Kapitel 2

Einführung

Eine Besonderheit des Finanzsektors ist es, aktiv Finanzrisiken einzugehen, um einen hohen Gewinn zu erwirtschaften. In anderen Wirtschaftsbereichen dagegen spielen Finanzrisiken eine wesentlich geringere Rolle, da der Großteil des Ertrags mit dem Verkauf von Produkten oder Dienstleistungen erzielt wird. Es besteht in diesen Sektoren die Möglichkeit, sich gegen erwartende Verluste abzusichern, falls man erforderliche und gewinnmindernde Absicherungskosten in Kauf nimmt.

Im Allgemeinen wird nur eine hohe Rendite im Finanzbereich erzielt, wenn man gleichzeitig bereit ist, Risiken einzugehen. Unterschiedliche historische Analysen von langfristigen Anlagen in europäischen und amerikanischen Märkten haben ergeben, dass ein Portfolio mit einem hohen Aktienanteil bei einer langjährigen Haltedauer in der Vergangenheit eine höhere Rendite erzielen konnte, als ein Portfolio mit einem hohen Anteil von Staatsanleihen mit einem AAA-Rating. Hierzu muss gesagt werden, dass die Volatilität im Aktienportfolio deutlich höher war, als bei den Anleihen. Die Volatilität ist ein Maß, das mit Hilfe der Standardabweichung misst, in welchem Ausmaß die tatsächlich erzielte Rendite auf dem Finanzmarkt von der erwarteten Rendite abweichen kann.

Je weiter die erzielten Renditen von den erwarteten Renditen entfernt liegen, desto höher ist die Volatilität. Dies erhöht zum einen das Risiko von Verlusten, zum anderen aber auch die Chance von überdurchschnittlichen Renditen. Aufgrund der von ihren Aktionären und Kunden geforderten Mindestrenditen sind Finanzunternehmen und somit auch Kapitalanlagegesellschaften gefordert, bewusst höhere Risiken in den Portfolios in Kauf zu nehmen.

Finanzunternehmen sollten in der Lage sein, unerwartet hohe Verluste aus unterschiedlichen Finanzrisiken zu verkraften, ohne dabei zahlungsunfähig zu werden. Die Aufgabe des Risikomanagements ist es, dieses Gleichgewicht zu halten und wenn nötig, es zu balancieren (vgl. [16], S. 10-12).

2.1 Definition Risiko

Risiko kann als Volatilität unerwarteter Ereignisse beschrieben werden, welche durch Asset Werte, Erträge und Eigenkapital dargestellt werden. (vgl. [12], S.3)

Ein Risiko liegt vor, wenn es zu einer negativen Abweichung von den erwarteten Werten kommt. (siehe [16], S.20)

Der Begriff Risiko hat mehrere Bedeutungen und kann auch als "eine Gefahr, eine Möglichkeit schlechter Folgen, ein Verlust oder eine Einwirkung von unglücklichen Zufällen" bezeichnet werden. Risiko kann auch als quantifizierbare Wahrscheinlichkeit des Verlustes oder weniger - als erwartete Renditen oder erwartete Erträge angesehen werden. (vgl. [7], S.1)

2.2 Unterschiedliche Risikoarten

Finanzrisiken sind Risiken eines Unternehmens, die ihren Ursprung im Finanzsektor haben. Da Banken, Kapitalanlagegesellschaften und Versicherungen in verschiedenste Finanzprodukte investieren, sind sie dem Markt- und Kreditrisiko ausgesetzt. Des Weiteren müssen sich Finanzunternehmen und Versicherungen bewusst sein, dass jede Art unternehmerischen Handelns operationales Risiko mit sich führen kann. Diese drei Risikofaktoren spielen für die aktuellen Regulierungen von Banken und Versicherungen eine wichtige Rolle.

2.2.1 Marktrisiko

Wenn Marktparameter sich anders verhalten als erwartet und die einzelnen Finanzpositionen beeinflussen, so kann das als Marktrisiko bezeichnet werden. Aktien-, Wertpapier-, Wechselkurse, Zinssätze sowie Rohstoffe können sich entgegen der zu erwartenden Werte verhalten und dadurch kann es zu einem Verlust im Anlageportfolio kommen.

Abhängig vom auslösenden Parameter unterscheidet man Aktienkursrisiken, Zinsrisiken, Wechselkursrisiken etc. Das Marktrisiko kann auch als potentieller Verlust einer Position, eines Portfolios oder eines gehandelten Finanzprodukts angesehen werden. Des Weiteren ist zu berücksichtigen, dass die unterschiedlichen Finanzprodukte auf unterschiedlichen Märkten gehandelt werden und einige davon eigene Gesetze und Vorgangsweisen haben. Ein relativ neuer Aspekt im Finanzbereich ist das relative Marktrisiko, das sich der Performance und Erfolgsmessung widmet. Anders gesagt, schildert es das Erreichen oder Nichterreichen von geplanten unternehmerischen Zielvorgaben.

2.2.2 Kreditrisiko

Kreditrisiko bezeichnet im Allgemeinen die Gefahr, dass ein Kunde seine Kredite nicht bzw. nicht mehr zur Gänze zurückzahlen kann. Das Kreditrisiko steht demzufolge in Relation mit der Bonität des Kreditnehmers. Eine besondere Rolle spielt

somit die Prüfung der Bonität des Klienten. Diese sollte durch verschiedene Limiten eingegrenzt werden.

2.2.3 Interne und operative Risiken

Der Begriff operationelles Risiko (auch als operationales Risiko bezeichnet) beschreibt sämtliche Unternehmensrisiken, die - außerhalb der typischen betrieblichen Risiken - in einem Unternehmen Schaden verursachen können. Operationales Risiko kann auch als Gefahr von Verlusten aufgrund des Versagens von internen Prozessen, Menschen und Systemen beschrieben werden. Durch die Eigenkapitalrichtlinien von Basel III spielt das operationelle Risiko eine bedeutende Rolle. Im Rahmen von Basel III muss erstmals neben dem Kreditrisiko und dem Marktrisiko auch das operationale Risiko mit Eigenmitteln unterlegt werden. (vgl. [13] S. 20 - 31 und vgl. [16] S. 12-20)

2.3 Aufgaben des Risikomanagements

2.3.1 Herausforderungen

- Der Aufsichtsrat hat die Aufgabe ein Konzept zu erstellen, um den zuständigen Personen des Risikomanagements die Möglichkeit zu geben, die gesetzlichen Vorgaben zu erfüllen.
- Im Unternehmen muss daher ein eigener Bereich geschaffen werden, welcher sich nur mit der Umsetzung der Aufgaben des Risikomanagements befasst.
- Danach müssen die Abläufe und Arbeitsanweisungen festgelegt werden, wie und wann die einzelnen Arbeitsgruppen ihren Beitrag zur Bewältigung der wichtigsten Risiken leisten müssen.

2.3.2 Ablauforganisation

Im Risikomanagement ist es wichtig, dass der Prozessablauf der einzelnen Stufen ausführlich definiert ist und die einzelnen Prozessphasen exakt aufeinander abgestimmt sind.

- 1. Risikoidentifikation:** In der ersten Phase müssen sämtliche Risiken, die für das Unternehmen einen potenziellen Verlust darstellen können, erkannt und erfasst werden.
- 2. Risikomessung:** Um die Wahrscheinlichkeit und das finanzielle Ausmaß potenzieller Verluste der einzelnen Risiken zu bestimmen, müssen adäquate Prozesse konzipiert werden, um die einzelnen Risiken messen zu können.
- 3. Risikoaggregation:** Im Allgemeinen dient dieser Prozess dazu, die Wahrscheinlichkeit des Verlusts aller Risikoparameter zu ermitteln. Hier ist zu beachten,

dass sich einzelne Risiken in einem Prozess betrachtet, gegenseitig abschwächen bzw. gegenseitig das Verlustpotenzial vergrößern können.

4. Risikoplanung und -steuerung: Diese Phase beinhaltet die Festlegung der Risikogrenzen, abhängig von den vorher beschriebenen Ergebnissen. Die Grenzwerte sollten als Richtlinien angesehen werden, die ein Unternehmen eingehen darf. Die Risikomanager stehen dabei in einem Interessenskonflikt, einerseits das Risiko möglichst klein zu halten und andererseits die Rendite zu maximieren.

5. Risikoüberwachung: Im letzten Ablaufprozess geht es um die Überprüfung der Grenzen, die von den einzelnen Risiken ausgelöst werden. Des Weiteren werden die einzelnen Ablaufschritte kontrolliert und kritisch betrachtet, ob die einzelnen Phasen die gesetzten Anforderungen erfüllen. Sollten einzelne Phasen bzw. Prozesse Schwachstellen aufweisen, müssen die einzelnen Abläufe überarbeitet, eventuell erweitert, bzw. neue Verfahren entwickelt werden.

Das Risikomanagement hat grundsätzlich die Funktion einer "Feuerwehr". Die Hauptaufgabe unter normalen Marktumständen ist es, das Unternehmen für zukünftige Stressszenarien bzw. "Tail Events" vorzubereiten. Dazu ist es notwendig, dass dieser Notfalleinsatz mit Hilfe von möglichst realistischen Stresstests immer wieder geübt wird. Neben der aktiven Vorbereitung auf zukünftige Krisenszenarien leistet das Risikomanagement für das laufende Tagesgeschäft folgende wertvolle Dienstleistungen:

- Es entlastet die obersten Führungsorgane von ihrer Aufsichtsverantwortung, indem es laufend prüft, ob die vorgegebenen Risikogrenzwerte eingehalten werden.
- Es zeigt auf, ob sich das Risiko-Exposure des gesamten Unternehmens in die jeweils gewünschte Richtung entwickelt.
- Es übernimmt vielfältige Aufgaben in der Berichterstattung an die verschiedenen Aufsichtsbehörden.

Dabei wird allerdings selbst das beste Risikomanagement niemals in der Lage sein, die Auslöser und das Ausmaß der nächsten größeren Finanzkrise exakt vorherzusagen. Somit können auch die resultierenden, negativen finanziellen Konsequenzen für das Unternehmen nur sehr grob eingeschätzt werden. Daher kann das Risikomanagement immer nur ein Baustein für das Unternehmen sein, um die Gefahr eines Konkurses oder einer Unterdeckung zu minimieren. Viele Unternehmen setzen dafür das bereits bekannte Risikomaß, den Value-at-Risk ein. (vgl. [13], S. 12-18 und vgl. [16] S.58-66))

Kapitel 3

Gesetzliche Anforderungen

3.1 Basel III

3.1.1 Risikomanagement und die früheren Schwachstellen

Viele Aspekte, wie zum Beispiel die Defizite im Risikomanagement der Finanzinstitute, führten zur Finanzkrise. Im Hinblick auf die Risikokonzentration hat die Finanzkrise aufgezeigt, dass viele Banken Risikokonzentrationen innerhalb einzelner Risikoarten (insb. Kreditrisiko), sowie die Korrelation zwischen einzelnen Risikoarten, zum Teil unterschätzt bzw. unvollständig oder überhaupt nicht, im Rahmen ihres Risikomanagements, erfasst haben. Der Basler Ausschuss hat somit die Anforderungen an das Risikomanagement und die Kapitalplanungsprozesse der Banken adaptiert und verschärft. Zusätzlich zu den Mängeln in der Gesamtkonzeption des vorherigen Entwurfs, zeigten die Ansätze einige Schwachstellen:

- Schwächen des modellbasierten Ansatzes:
Dieser Ansatz verwendet den 10-Tages-VaR auf das 99. Perzentil berechnet, mit einem vorgegebenen Konfidenzintervall. Durch die Konstruktion beabsichtigt das Risikomaß, das Risiko von kurzfristigen Marktpreisschwankungen zu erfassen. Der 10-Tages-VaR ist für den täglichen internen Risikomanagementzweck nützlich. Es stellt sich allerdings die Frage, ob dieses Risikomaß passend für die Zielsetzungen der Aufsichtsvorschriften ist, die vorsehen, dass die Banken genügend Kapital haben, um große Ereignisse abzufedern.
Schwächen, die mit der 10-Tages-VaR-Methode identifiziert wurden, sind:
 - die Unfähigkeit, das Kreditrisiko adäquat zu erfassen,
 - die Unfähigkeit, das Marktliquiditätsrisiko zu erfassen und
 - unter Umständen, die nicht adäquate Bestimmung des Basisrisikos.
- Schwächen des standardisierten Ansatzes:
Auch wenn die Krise weitgehend Probleme mit dem modellbasierten Ansatz bezüglich dem Marktrisiko in den Vordergrund brachte, hat das Komitee auch

erhebliche Probleme mit dem standardisierten Ansatz ermittelt. Dazu gehören Schwächen der Risikosensitivität, eine sehr begrenzte Erkennung der Absicherung von Diversifikationsvorteilen und die Unfähigkeit, Risiko das mit komplexen Instrumenten verbunden ist, ausreichend zu messen.

Stresstests

Der Basler Ausschuss hat konkrete Anforderungen und Rahmenrichtlinien bezüglich Stresstests konzipiert und veröffentlicht. Das Risikomanagement der Banken war durch die vorherrschende Value-at-Risk-Betrachtung zu stark auf die Ausschläge historischer Daten ausgerichtet. Künftig wird dieser eher rückblickende Ansatz durch vorgeschriebene, auf mögliche künftige Risiken bezogene Stresstests ergänzt. Die Empfehlungen an Finanzinstitute umfassen die Nutzung von Stresstests und deren Einbindung in das Risikomanagement, die Auswahl von Methoden und Szenarien sowie eine Darstellung bestimmter Risiken, die im Verlauf der aktuellen Krise besondere Relevanz hatten und die nunmehr im Rahmen von Stresstests ebenfalls betrachtet werden sollen. Die Empfehlungen an die Aufseher beziehen sich auf die Beurteilung der angemessenen Umsetzung bzw. der Anwendung der Empfehlungen an die Banken, sowie auf die Berücksichtigung von Stresstest-Ergebnissen im Rahmen des bankaufsichtlichen Überprüfungsprozesses. (siehe [24], Stand: 21.04.2015)

Die Einführung des «Stressed VaR»

Zusätzlich zu den 10-Tages-VaR Anforderungen, verlangt das Basler Komitee von Banken eine Berechnung des «Stressed VaR». Der Stressed VaR beabsichtigt, die VaR Berechnung nachzubilden, die auf dem derzeitigen Portfolio der Bank generiert wurde, wenn die relevanten Marktfaktoren einer Stressperiode ausgesetzt werden. Das Risikomaß soll auf 10 Tagen basieren, 99. Perzentil mit einem vorgegebenen „one-tailed“-Konfidenzniveau für den VaR. Des Weiteren soll ein Modell auf historischen Daten mit einem stetigen Zeitraum von 12 Monaten von signifikanten Stressereignissen herangezogen werden. Die Einführung des «Stressed VaR» beabsichtigt, das Problem der Marktspannungen zu mindern, die zeitweise von der kalibrierten Datenperiode des VaR entstehen.

Der Übergang vom Value-at-Risk zum Expected Shortfall

Eine Reihe von Schwachpunkten wurde bei der Verwendung des Value-at-Risk für die Bestimmung aufsichtrechtlicher Kapitalanforderungen, einschließlich der Unfähigkeit «Tail-Risks» zu erfassen, identifiziert. Das Komitee hält es daher für notwendig, eine alternative Risikokennzahl heran zu ziehen, die diese Schwachstellen überwinden könnte. Aus diesem Grund hat der Ausschuss eine alternative Risikomessgröße vorgeschlagen, nämlich den Expected Shortfall (ES). Im Gegensatz zum VaR, misst der ES das Risiko einer Position unter Berücksichtigung der Größe und der Wahrscheinlichkeit von Verlusten über ein bestimmtes Konfidenzniveau. Mit

anderen Worten, es wird der erwartete Wert dieser Verluste über ein vorgegebenes Konfidenzintervall berechnet. Der Ausschuss gibt zu, dass der Übergang zum ES operative Herausforderungen mit sich bringen kann; dennoch ist er der Ansicht, dass die Vorteile den VaR zu ersetzen um «Tail-Risks» besser zu erfassen, überwiegen. Das Komitee schlägt daher die Verwendung von ES für die internen, modellbasierten Ansätze vor und beabsichtigt auch, Risikogewichte für den standardisierten Ansatz mit der ES-Methodik zu bestimmen. (vgl. [23], Stand: 21.04.2015)

3.2 Solvency II

Solvency II ist ein Gesetzgebungsprojekt der EU zur Neufassung des Versicherungsaufsichtsrechts, vor allem der Solvabilitätsvorschriften für die Eigenmittelausstattung von Versicherungsunternehmen. Versicherungen haben oft viel Kapital in zins-sensitiven Finanzprodukten investiert. Daher ist es besonders wichtig, Zinsrisiko und Kreditrisiko zu erfassen und zu steuern. Im Rahmen der 1. Säule wird die Solvenzkapitalanforderung (SCR - Solvency Capital Requirement) dargestellt. Das SCR kann entweder unter Verwendung einer vorgegebenen Standardformel oder durch ein eigenes entwickeltes Modell des Versicherungsunternehmens ermittelt werden. Das SCR wird im Standardmodell unter dem Grundsatz der Unternehmensfortführung so berechnet, dass alle erfassbaren Risiken, denen ein Versicherungsunternehmen ausgesetzt ist, berücksichtigt werden. Es wird als Value-at-Risk (VAR) zu einem Konfidenzniveau von 99,5 Prozent berechnet. Die Vorteile des VaR sind, dass dieses Maß oft in der Finanzbranche verwendet wird und unabhängig der Größe eines Unternehmens einen Vergleich ermöglicht. Der Nachteil ist jedoch, falls ein Verlust eintreten sollte, gibt der VaR nicht an wie hoch dieser sein wird. (vgl. [25] und [28], Stand: 21.04.2015)

Kapitel 4

Der Vergleich von Risikomaßen

Als Grundlage für dieses Kapitel werden die Papers von Emmer S., Kratz M. und Tasche D. "*What is the best risk measure in practice? A comparison of standard measures*", sowie von Jorion P. "*Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk*" herangezogen.

Wie schon oben erwähnt, stellt das Risikomanagement eine Kernkompetenz von Finanzinstituten dar. Es ist nützlich, Risiko mit einer Zahl ausdrücken zu können, die als Kapitalbetrag interpretiert wird. Hierfür werden die verschiedenen Risikomaße benötigt. Die folgenden Fragen sind besonders wichtig für die Finanzbranche:

- Welche Eigenschaften werden von einem Risikomaß erwartet?
- Was macht ein gutes Risikomaß aus?
- Gibt es das "beste" Risikomaß?

4.1 Risikomaße

Für ein Risikomaß bildet ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ die grundlegende Basis. Die Menge Ω besteht aus Elementen ω , die als Szenarien finanzieller Ereignisse beschrieben werden können. $\mathcal{F}$ beschreibt die Menge aller Informationen und $\mathbb{P}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß. Die Zufallsvariable X bezeichnet eine Finanzposition. $X(\omega)$ kann als Nettowert der Position am Ende des Handelszeitraums aufgefasst werden, wenn das Szenario $\omega \in \Omega$ eintritt. Das Ziel ist es, das Verlustrisiko durch ein quantitatives Maß zu bestimmen.

Definition 4.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und V eine nichtleere Menge der von $\mathcal{F}$ messbaren, reellwertigen Zufallsvariablen. Eine Abbildung

$$\rho : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

wird als **Risikomaß** bezeichnet.

(vgl. [19], S.3)

Definition 4.2. Eine Abbildung $\rho : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt **finanzielles Risikomaß** falls $\forall X, Y \in V$ gilt:

- *Monotonie:* $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$
- *Translationsinvarianz:* $\forall m \in \mathbb{R}, \rho(X + m) = \rho(X) - m$

Lemma 4.1. Jedes finanzielle Risikomaß ist Lipschitzstetig bezüglich der Supremumsnorm

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|.$$

Definition 4.3. Ein finanzielles Risikomaß $\rho : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt **konvexes Risikomaß**, wenn gilt:

- *Konvexität:* $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y), \forall \lambda \in [0, 1]$.

Bei einer Investmentstrategie bezeichnet λ den Anteil der Position X und $(1 - \lambda)$ den Anteil der anderen Position Y. Die Konvexität besagt, dass die Diversifikation das Risiko nicht erhöht.

Definition 4.4. Ein konvexes Risikomaß ρ wird als **kohärentes Risikomaß** bezeichnet, falls gilt:

- *Positive Homogenität:* $\forall \lambda \geq 0, \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$

Bemerkung 4.1. Wenn das finanzielle Risikomaß ρ positiv homogen ist, dann ist es normalisiert ($\rho(0) = 0$). Unter der Annahme der positiven Homogenität, gilt:

$$\rho \text{ ist konvex} \Leftrightarrow \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \text{ (Subadditivität)}.$$

Die Akzeptanzmenge von ρ

$$\mathcal{A}_\rho := \{X \in V | \rho(X) \leq 0\}$$

bezeichnet eine Menge von Positionen, die kein zusätzliches Kapital als Sicherheit erfordert, wobei V wie oben.

Die folgenden zwei Propositionen beschreiben die Zusammenhänge zwischen dem Risikomaß ρ und dessen Akzeptanzmenge $\mathcal{A}_\rho$.

Proposition 4.1. Sei ρ das finanzielle Risikomaß und $\mathcal{A} := \mathcal{A}_\rho$ dessen Akzeptanzmenge dann gilt:

$$\begin{aligned} i) \quad \mathcal{A} &\neq \emptyset, \\ \inf\{m \in \mathbb{R} | m \in \mathcal{A}\} &> -\infty \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad & \\ X \in \mathcal{A}, Y \in V, Y &\geq X \Rightarrow Y \in \mathcal{A}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

iii) ρ kann von $\mathcal{A}$ gewonnen werden:

$$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | m + X \in \mathcal{A}\}.$$

ix) ρ ist konvex $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ ist konvex.

x) ρ ist positiv homogen $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ ist ein Kegel. Insbesondere: ρ ist kohärent $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ ist ein konvexer Kegel.

Proposition 4.2. Sei $\mathcal{A}$ eine nichtleere Teilmenge von V , die (4.1) und (4.2) erfüllt. Dann gelten für $\rho_{\mathcal{A}}(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} | m + X \in \mathcal{A}\}$ folgende Eigenschaften:

i) $\rho_{\mathcal{A}}$ ist ein finanzielles Risikomaß.

ii) Wenn $\mathcal{A}$ konvex ist, dann ist $\rho_{\mathcal{A}}$ konvex.

iii) Wenn $\mathcal{A}$ ein Kegel ist, dann ist $\rho_{\mathcal{A}}$ positiv homogen. Insbesondere: Wenn $\mathcal{A}$ ein konvexer Kegel ist, dann ist $\rho_{\mathcal{A}}$ kohärent.

(vgl.[9] S. 152 - S.160)

Für die weitere Analyse von Risikomaßen werden einige grundlegende Definitionen benötigt.

Definition 4.5. Die **Indikatorfunktion** ist wie folgt definiert:

$$\mathbb{1}_A(a) = \mathbb{1}_A = \begin{cases} 1, a \in A \\ 0, a \notin A. \end{cases}$$

Definition 4.6. Sei $\alpha \in (0, 1)$ und X eine $\mathbb{R}$ -wertige Zufallsvariable, dann heißt $q \in \mathbb{R}$ ein α -**Quantil**, wenn

$$\mathcal{P}[X < q] \leq \alpha \leq \mathcal{P}[X \leq q].$$

Mit der Verteilungsfunktion

$$F_x(q_-) \leq \alpha \leq F_x(q)$$

wobei $F_x(q_-) = \lim_{x \rightarrow q, x < q} F(X)$ und $F(x)$ die kumulative Verteilungsfunktion von X bezeichnet.

$$x_{\alpha} = q_{\alpha}(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathcal{P}[X \leq x] \geq \alpha\} \quad (4.3)$$

wird als unteres α -Quantil bezeichnet und

$$x^{\alpha} = q^{\alpha}(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathcal{P}[X \leq x] > \alpha\} \quad (4.4)$$

kann als oberes α -Quantil beschrieben werden.

(vgl. [1], S.3)

Definition 4.7. Ein Risikomaß heißt **verteilungsinvariant**, wenn

$$P(X \leq l) = P(Y \leq l), l \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X) = \rho(Y).$$

4.2 Kohärente Risikomaße in der Praxis

Es wird ein Portfolio mit m riskanten Positionen betrachtet. $L_i, i \in \{1, \dots, m\}$ entspricht dem Verlust in der i -ten Position. In einem gewöhnlichen Ein-Perioden-Modell ist der Portfolioverlust durch $L = \sum_{i=1}^m L_i$ gegeben. In diesem Modell werden Verluste als positive Zahl und Gewinne als negative Zahl dargestellt. Die Annahme ist, dass die Portfolioverlustvariable L auf dem *Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ definiert ist. Abbildungen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen oder Zufallsvariablen auf eine reelle Zahl werden als Risikomaße bezeichnet. In diesem Kapitel wird Risikomaß als eine Risikobewertung in Form einer Kapitalmenge dargestellt, die als eine Art Puffer dient, um unerwartete zukünftige Verluste abzufedern.

Die Kohärenz bündelt bestimmte mathematische Eigenschaften, die mögliche Kriterien für die Auswahl eines Risikomaßes sind.

Definition 4.8. *Ein Risikomaß ρ heißt kohärent, wenn es die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

- *Translationsinvarianz: Für alle Verlustvariablen L und $\forall m \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\rho(L - m) = \rho(L) - m.$$

- *Positive Homogenität: Für alle Verlustvariablen L und $\forall \lambda \geq 0$ gilt*

$$\rho(\lambda L) = \lambda \rho(L).$$

- *Monotonie: Für alle Verlustvariablen L_1 und L_2 gilt*

$$L_1 \leq L_2 \Rightarrow \rho(L_1) \geq \rho(L_2).$$

- *Subadditivität: Für alle Verlustvariablen L_1 und L_2 gilt*

$$\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2).$$

Formal ausgedrückt, kann ein kohärentes Risikomaß als eine Abbildung angesehen werden, die einem Portfolio mit dem zukünftigen Verlust L eine Zahl $\rho(L)$ zuordnet und die vier obigen Eigenschaften erfüllt. Laut [Artzner et al.] ist es möglich, in Hinblick auf die vier Axiome, im Rahmen des Risikomanagements zwischen akzeptablen und nicht akzeptablen Portfolios zu unterscheiden. Es werden für die darauf folgende Risikoanalyse nur die nicht akzeptablen Positionen herangezogen und betrachtet. Für diese Positionen ist es das Ziel, den jeweils kleinsten Kapitalbetrag zu bestimmen, welcher für die jeweilige untersuchte Position den geringsten, jedoch gerade noch akzeptablen Wert ergibt. Gemäß dieser Darlegung definieren [Artzner] et al. ein Risikomaß wie folgt:

Der minimale Kapitalbetrag, der nötig ist, um aus einer nicht akzeptablen Position durch Investition in andere Finanzprodukte und deren Kombination mit der betrachteten Position eine gerade akzeptable Position zu erzeugen, wird als Risikomaß bezeichnet. (vgl. [2], S.203-205)

Nachfolgend sind die einzelnen Axiome und deren Aussagen beschrieben:

1. Translationsinvarianz: Die Aussage der Translationsinvarianz ist, dass sichere Verluste vollkommen mit Kapital hinterlegt werden müssen, aber nicht das Restrisiko beeinflussen.
Ein sicherer Verlust stellt kein Risiko dar, weil er vollkommen vorhersehbar und somit erfassbar ist. Aus der Eigenschaft der Translationsinvarianz folgt außerdem $\rho(X - \rho(X)) = 0$. Das Risikokapital $\rho(X)$ stellt den Geldbetrag dar, der aufgebracht werden muss, um das Risiko bezüglich dem Risikomaß aufzufangen. Mit anderen Worten, kann das Risikomaß mit der Translationsinvarianz-Eigenschaft als ein mindestens zu investierender Kapitalbetrag angesehen werden, sodass eine nicht akzeptable Position in eine akzeptable transformiert wird. Somit sind Risikomaße, die diese Eigenschaft erfüllen, akzeptabel.
2. Positive Homogenität: Diese Eigenschaft kann als eine Skalierungsinvarianz dargestellt werden. Es ist nebensächlich, in welcher Geldeinheit das Risiko gemessen wird. Erfüllt das Risikomaß diese Eigenschaft nicht, würde die beliebig gewählte Geldeinheit das Kapital beeinflussen, was natürlich nicht sein darf. Die Eigenschaft der positiven Homogenität besagt, falls eine Position den x-fachen Wert aufweist, führt dieser auch das x-fache Risiko mit sich. Das positive Homogenitäts-Axiom liegt vor, wenn eine Vervielfachung der Versicherungssummen eines Portfolios eine entsprechende Vervielfachung des Risikos beinhaltet. Das ist bei kleinen Beständen nachvollziehbar. Bei größeren Beständen werden die Liquiditätsrisiken jedoch zunehmend größer, da im Falle eines Versicherungsfalls höhere Zahlungen erbracht werden müssen.
3. Monotonie: Die Eigenschaft der Monotonie bedeutet, das Risiko eines Portfolios X ist stets größer als bei einem Portfolio Y, vorausgesetzt der Wert von X ist für jeden möglichen Zustand immer kleiner als der Wert von Y. Diese Eigenschaft fordert, dass ein Portfolio, das in jeder möglichen Situation höhere Verluste als ein anderes Portfolio hat, auch ein höheres Risikokapital mit sich bringt.
4. Subadditivität: Die Eigenschaft der Subadditivität beschreibt das Konzept der Diversifikation. Erfüllt ein Risikomaß die Subadditivitäts-Eigenschaft, so bedeutet dies, dass das Einzelrisiko von zwei separat betrachteten Finanzpositionen stets größer gleich dem Gesamtrisiko der Summe der beiden Positionen ist. Des Weiteren kann die Aussage gemacht werden, dass durch Hinzunehmen einer Position Y in das Portfolio X das Portfoliorisiko maximal um das Einzelrisiko von Y ansteigen würde. Subadditivität ist für die Versicherungsbranche besonders intuitiv, weil auf dem Diversifizierungseffekt das Geschäftsmodell der Versicherung basiert. (siehe [14], S. 34 - 35)

Die Eigenschaft der komonotonen Additivität ist interessant, da sie die komplementäre Eigenschaft der Subadditivität ist.

Definition 4.9. Zwei reellwertige Zufallsvariablen L_1 und L_2 werden als *komonoton* bezeichnet, wenn eine reellwertige Zufallsvariable X (der Risikofaktor) und nicht fallende Funktionen f_1 und f_2 existieren und es gilt

$$L_1 = f_1(X) \text{ und } L_2 = f_2(X).$$

Ein Risikomaß ρ ist *komonoton additiv*, wenn für jede komonotone Zufallsvariable L_1 und L_2 gilt

$$\rho(L_1 + L_2) = \rho(L_1) + \rho(L_2).$$

Komonotonie kann als stärkste mögliche Abhängigkeit von Zufallsvariablen betrachtet werden. Wenn ein Risikomaß subadditiv und komonoton additiv ist, belohnt es auf der einen Seite die Diversifikation (Subadditivität), aber auf der anderen Seite werden komonotonen Risiken keine Diversifikationsvorteile zugeschrieben. Risikomaße, die nur von der Verteilung der Verluste abhängen, sind besonders interessant, weil deren Werte durch Verlustbeobachtungen geschätzt werden können (d.h.: keine weiteren Informationen wie Stressszenarien sind nötig) (vgl [8], S.4).

4.3 Die Wahl eines guten Risikomaßes

4.3.1 Elicitability

Ein interessantes Kriterium um ein Risikomaß zu ermitteln ist *Elicitability*. Für die Definition von *Elicitability* werden zuerst strikt konsistente Bewertungsfunktionen eingeführt. Eine Bewertungsfunktion zielt auf die Zuweisung eines numerischen Werts auf eine Einzelwert-Punktprognose ab, basierend auf dem vorhergesagten Punkt und dem tatsächlichen Wert:

Definition 4.10. Eine **Bewertungsfunktion** (*scoring function*) ist eine Funktion

$$s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$$

$$(x, y) \rightarrow s(x, y)$$

und x und y sind Punktprognosen beziehungsweise Beobachtungen.

Definition 4.11. Sei ν ein Funktional auf der Klasse der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{P}$ auf $\mathbb{R}$:

$$\nu : \mathcal{P} \rightarrow 2^{\mathbb{R}} \text{ (der Potenzmenge von } \mathbb{R}),$$

$$P \rightarrow \nu(P) \subset \mathbb{R}$$

Eine Bewertungsfunktion $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ist **konsistent** für das Funktional ν im Bezug auf die Klasse $\mathcal{P}$ dann und nur dann, wenn für alle $P \in \mathcal{P}$, $t \in \nu(P)$ und $x \in \mathbb{R}$,

$$E_P[s(t, L)] \leq E_P[s(x, L)],$$

L ist die Verlustzufallsvariable definiert auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Die Funktion ist **strikt konsistent**, wenn sie konsistent ist und

$$E_P[s(t, L)] = E_P[s(x, L)] \Rightarrow x \in \nu(P).$$

Definition 4.12. Das Funktional ν ist **elicitable** im Bezug zu $\mathcal{P}$, dann und nur dann, wenn es eine Bewertungsfunktion s , die strikt konsistent für ν im Bezug zu $\mathcal{P}$ ist, gibt.

Beispiel 4.1. Standard Beispiele für Bewertungsfunktionen sind folgende:

- $s(x, y) = (x - y)^2$, quadratischer Fehler
- $s(x, y) = (\mathbb{1}_{\{x \geq y\}} - \alpha)(x - y)^2 \operatorname{sgn}(x - y)$, $0 < \alpha < 1$ fest, gewichteter quadratischer Fehler
- $s(x, y) = |x - y|$, absoluter Fehler
- $s(x, y) = (\mathbb{1}_{\{x \geq y\}} - \alpha)(x - y)$, $0 < \alpha < 1$ fest, gewichteter absoluter Fehler

Quadratische, gewichtete quadratische, absolute und gewichtete absolute Fehler sind strikt konsistente Bewertungsfunktionen: das Mittelwert-Funktional wird durch den quadratischen Fehler hervorgerufen, die Expektile durch den gewichteten quadratischen Fehler, der Median durch den absoluten und das Quantil durch den gewichteten absoluten Fehler.

Elicitability ist ein hilfreiches Kriterium für die Bestimmung der optimalen Punktprognose. Die Klasse der (strikt) konsistenten Bewertungsfunktionen für das Funktional, ist identisch mit der Klasse der Funktionen unter denen das Funktional eine optimale Punktprognose ist. Wenn eine strikt konsistente Bewertungsfunktion für das Funktional ν gefunden wurde, kann die optimale Prognose $\hat{x}$ für $\nu(\mathcal{P})$ bestimmt werden durch

$$\hat{x} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} E_P[s(x, L)].$$

Der ökonomische Grund hinter dieser Definition ist folgender: Angenommen die Schätzung soll eine möglichst genaue Bewertung der Menge $\nu(P)$ sein. Wenn das Funktional ν elicitable ist und der Schätzer den erwarteten Verlust minimiert, dann kann davon ausgegangen werden, dass er ein genauer Schätzer für den erwarteten Verlust ist.

Elicitability eines Funktional von Wahrscheinlichkeitsverteilungen kann als die Eigenschaft, dass Funktionale durch generalisierte Regression geschätzt werden können, interpretiert werden. Eine weitere Eigenschaft, die Elicitability als ein wichtiges Konzept darstellt, ist, dass es für den Vergleich von der Performance von unterschiedlichen Prognoseverfahren verwendet werden kann. Ebenfalls stellt Elicitability eine weitere Methode zur Durchführung des Backtesting dar (vgl. [8], S. 4-5).

4.3.2 Conditional Elicitability

Bisher wurde nur zwischen elicitablen und nicht-elicitablen Funktionalen unterschieden. Es stellt sich allerdings heraus, dass einige nützliche Risikomaße nicht elicitable sind, aber in 'zweiter Ordnung' Elicitability in folgendem Sinne erfüllen.

Definition 4.13. Ein Funktional ν von $\mathcal{P}$ heißt **conditional elicitable**, wenn Funktionale $\tilde{\gamma}$ und γ existieren mit

$$\nu(P) = \gamma(P, \tilde{\gamma}(P)),$$

wo $\tilde{\gamma}$ elicitable im Bezug zu $\mathcal{P}$ ist. γ ist durch γ_c , definiert durch

$$\gamma_c : \mathcal{P} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}, P \rightarrow \gamma(P, c) \subset \mathbb{R},$$

elicitable im Bezug zu $\mathcal{P}$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

Conditional Elicitability ist ein hilfreiches Konzept für die Schätzung einiger Risikomaße, die nicht die Elicitability-Eigenschaft erfüllen. Expected Shortfall ist eines der Risikomaße, dessen conditional Elicitability die Möglichkeit bietet, in zwei Schritten zu schätzen. Aufgrund der conditional Elicitability von $\tilde{\gamma}$, kann zuerst $\tilde{\gamma}(P)$ geschätzt werden und im zweiten Schritt wird das Ergebnis für $\tilde{\gamma}(P)$ festgesetzt und $\gamma(P, c)$ aufgrund der Elicitability von γ_c geschätzt. Im Hinblick auf das Backtesting bietet conditional Elicitability einen Weg, um das Prognoseverfahren in zwei Teilverfahren zu trennen und diese einzelnen Komponenten separat zu backtesten (vgl. [8] S. 6).

Bemerkung 4.2. Jedes elicitable Funktional ist conditional elicitable.

4.3.3 Robustheit

Ein weiterer wichtiger Punkt bei der Einschätzung der Risikomaße ist Robustheit. Ohne Robustheit sind die Ergebnisse nicht aussagekräftig, weil geringe Messfehler in der Verlustverteilung einen großen Einfluss auf die Schätzung der Risikomaße haben können. Deshalb wird die Robustheit in Bezug auf die Stetigkeit überprüft. Da die meisten der relevanten Risikomaße nicht stetig sind in Bezug auf die schwache Topologie, wird ein stärkerer Begriff der Konvergenz benötigt. Aus diesem Grund und wegen einiger Skalierungseigenschaften, die zweckmäßig für das Risikomanagement sind, ist es sinnvoll, die Wasserstein-Distanz bei der Untersuchung der Robustheit der Risikomaße zu überprüfen.

Die *Wasserstein-Distanz* zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen P und Q ist wie folgt definiert:

$$d_W(P, Q) = \inf\{E(|X - Y|) : X \sim P, Y \sim Q\}.$$

Wenn ein Risikomaß robust in Bezug auf die Wasserstein-Distanz ist, bedeutet das Stetigkeit in Bezug zur Wasserstein-Distanz im folgenden Sinn:

Definition 4.14. Sei $P_n, n \geq 1$, und P Wahrscheinlichkeitsmaße, und $X_n \sim P_n, n \geq 1$ und $P \sim X$. Ein Risikomaß ρ heißt stetig in X im Bezug zur Wasserstein-Distanz, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_W(X_n, X) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |\rho(X_n) - \rho(X)| = 0.$$

[Cont et al.] verwenden ein anderes, möglicherweise potenziell, intuitiveres Konzept der Robustheit, welches das Schätzverfahren berücksichtigt. Sie untersuchen Robustheit, wie die Empfindlichkeit der Schätzung des Risikomaßes durch Zugabe eines neuen Datenpunkts zu dem Datensatz, der als Grundlage für die Schätzung verwendet wird. Es stellt sich heraus, dass für das gleiche Risikomaß die Schätzmethode einen erheblichen Einfluss auf die Empfindlichkeit haben kann. Zum Beispiel kann die Risikomaß Schätzung in einer ganz anderen Weise auf einen zusätzlichen Datenpunkt reagieren, wenn ein parametrisches Modell, anstatt der empirischen Verlustverteilung verwendet wird.

[Cont et al.] zeigen, dass es einen Konflikt zwischen der Subadditivität und Robustheit eines Risikomaßes gibt. Im Gegensatz zur Robustheit basierend auf der Stetigkeit in Bezug auf die schwache Topologie oder die Wasserstein-Distanz, ermöglicht das Konzept von [Cont et al.], zwischen verschiedenen Graden der Robustheit zu unterscheiden. Allerdings ist bei diesem Konzept schwer zu entscheiden, ob ein Risikomaß immer noch risikosensitiv ist oder nicht länger robust in Bezug auf Datenausreißer bei der Schätzprobe ist. Deshalb wird für diese Arbeit die Vorstellung der Robustheit basierend auf der Wasserstein-Distanz gewählt.

Es soll beachtet werden, dass im Kontext mit Messfehlern, das Konzept der Robustheit in der Statistik eingeführt wurde. Bei Finanzinstituten und Versicherungen treten allerdings des Öfteren große Werte auf, die keine Messfehler oder Ausreißer sind, sondern Bestandteile des Prozesses (vgl. [8], S. 6-7)

4.4 Populäre Risikomaße

Dieses Kapitel basiert auf *Expected Shortfall and Beyond* von Tasche D., auf *Value-at-risk versus Expected Shortfall: A practical perspective* von Yamai Y. und Yoshida T. und auf *On the coherence of Expected Shortfall* von Acerbi C. und Tasche D. .

4.4.1 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Eines der bekanntesten Risikomaße ist die Varianz beziehungsweise die Standardabweichung, die in der Praxis auch Volatilität genannt wird. Die Varianz ist ein Streuungsmaß relativ zum Erwartungswert. Der Erwartungswert, mit x_i als mögliche Wertveränderung und p_i als die jeweils zugehörige Eintrittswahrscheinlichkeit, kann wie folgt dargestellt werden:

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^N p_i x_i \quad (4.5)$$

Die Varianz und die Volatilität können folgendermaßen dargestellt werden:

$$Var(X) = \sigma^2 = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2, \quad (4.6)$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^N p_i [x_i - E(X)]^2, \quad (4.7)$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}. \quad (4.8)$$

Das Risikomaß hat die unangenehme Eigenschaft, dass die Verteilung annähernd symmetrisch um den Mittelwert liegt, weil die Varianz nicht zwischen den positiven und negativen Abweichungen vom Mittelwert unterscheidet. Dies entspricht nicht der Definition des Risikos, die nur die negativen Abweichungen vom Mittelwert beschreibt. Zudem sind symmetrische Risikomaße für die Erfassung von ökonomischen Risiken nicht besonders geeignet. In Hinsicht der Darstellung des Verlustes, beschreibt die Varianz das Risiko nicht in Geldeinheiten, sondern in Geldeinheiten zum Quadrat. Die Volatilität erfasst zwar das Risiko in Geldeinheiten, allerdings kann keine Aussage über das benötigte Risikokapital gemacht werden. Das Risikomaß beschreibt lediglich die Streuung der Verluste.

Der Erwartungswert erfüllt nicht die Monotonie Eigenschaft:

- Erwartungswert $E(X)$:

- Monotonie: $X \leq Y \Rightarrow^? E(X) \geq E(Y)$

Beweis durch Interpretation:

Unter der Annahme, dass alle möglichen Realisierungen x der Zufallsvariable X kleiner gleich sind als die Realisierungen y der Zufallsvariable Y , ist auch der Erwartungswert von X kleiner gleich der Erwartungswert von Y .

D.h. für $X \leq Y$ gilt $E(X) \leq E(Y)$. Der Erwartungswert ist somit kein kohärentes Risikomaß. (siehe [5], S. 15)

Die Varianz ist nicht translationsinvariant und erfüllt die positive Homogenität nicht:

- Varianz σ^2 :

Setze $X = c + dX$, mit $c \in \mathbb{R}$ und $d \geq 0$ und überprüfe damit die Eigenschaft der Translationsinvarianz:

$$\begin{aligned} \text{Var}(c + dX) &= E((c + dX - E(c + dX))^2) \text{ (wegen (4.6))} \\ &= E((c + dX - c - dE(X))^2) \text{ (wegen der Linearität des E.)} \\ &= E((d(X - E(X)))^2) \text{ (wegen (4.6))} \\ &= d^2 E((X - E(X))^2) \text{ (wegen der Linearität des E.)} \\ &= d^2 \text{Var}(X) \text{ (wegen (4.6)).} \end{aligned}$$

Die Varianz ist damit weder translationsinvariant, noch erfüllt sie die Anforderung der Eigenschaft der positiven Homogenität. Zudem erfüllt die Varianz die Eigenschaften der Subadditivität und der Monotonie nicht.

Wegen

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \times \text{Cov}(X, Y)$$

ist die Subadditivität nämlich nur im Fall unkorrelierter oder negativ korrelierter Zufallsgrößen X und Y erfüllt.

- Monotonie: $X \leq Y \Rightarrow^? \text{Var}(X) \geq \text{Var}(Y)$

Beweis durch Interpretation:

Seien Y und X zwei Zufallsvariablen mit $\text{Var}(X) > \text{Var}(Y)$ und die Zufallsvariable X wird um einen Betrag erhöht, dass sie in jedem Zustand höhere Realisierungen als Y aufweist. Aufgrund der Lageunabhängigkeit der Varianz würde diese Erhöhung keinen Einfluss auf die Varianz besitzen.

Die Varianz erfüllt somit keine der vier Anforderungen an kohärente Risikomaße. (siehe [18], S. 46-49)

Seitdem wurden viele Risikomaße vorgeschlagen, die bekanntesten sind der Value-at-Risk (VaR) und der Expected Shortfall (ES). Der Basler Ausschuss hat vorgeschlagen, den VaR durch den Expected Shortfall zu ersetzen. Eine Studie hat aufgezeigt, dass es zu einem Problem beim direkten Backtesting des Expected Shortfall kommen kann, da dieser nicht *elicitable* ist. In Hinblick auf die Durchführbarkeit des Backtestings, wurden alternative Risikomaße wie die **Expektile** vorgeschlagen, die kohärent und elicitable sind.

4.4.2 Value-at-Risk

Historisch betrachtet waren die Varianz und die Standardabweichung dominierende Risikomaße im Finanzbereich. Doch in den letzten 20 Jahren, wurden diese beide Maße durch den Value-at-Risk in der Praxis ersetzt, weil es möglich ist, das Risiko von unterschiedlichen Finanzprodukten in einer Kennzahl auszudrücken. Der VaR gehört zu der Kategorie der Downside-Risikomaße, da lediglich die Verlustseite einer Verteilung betrachtet wird. Das Risikomaß Value-at-Risk drückt das Verlustpotential eines Portfolios bestehend aus Positionen aus, die mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (Konfidenzniveau $\alpha - 1$) bei normalen Marktbedingungen nicht überschritten werden. Ein Verlust-Szenario, das den VaR-Wert überschreitet, tritt somit nur in α % der Fälle ein. (vgl. [12], S. 15 -21)

Definition 4.15. *Der Value-at-Risk einer Zufallsvariable X zum Level $\alpha \in (0, 1)$ ist definiert als das α -Quantil der Verlustverteilung*

$$\text{VaR}_\alpha(X) = q_\alpha(X). \quad (4.9)$$

Proposition 4.3. *Sei $\alpha \in (0, 1)$ fix und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Betrachte das Risikomaß ρ auf der Menge V der $\mathcal{F}$ -messbaren reellwertigen Zufallsvariablen, das durch*

$$\rho(X) = VaR_\alpha(X), X \in V \quad (4.10)$$

gegeben ist. Das Risikomaß ρ erfüllt folgende Eigenschaften: Monotonie, positive Homogenität, Translationsinvarianz, Verteilungs-Invarianz und komonotone Additivität.

Es soll beachtet werden, dass der VaR_α verteilungsinvariant in einem sehr starken Sinn ist:

Die Verteilungen von X und Y müssen nicht identisch verteilt sein, dass

$$VaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(Y)$$

impliziert. Eine gewisse lokale Identität der Verteilung genügt für diese Implikation. Insbesondere eine Zufallsvariable X mit schwacher Tail-Wahrscheinlichkeit und eine Zufallsvariable Y mit schwerer Tail-Wahrscheinlichkeit können den gleichen VaR_α haben. Dieser Aspekt ist ein Hauptkritikpunkt bei der Verwendung des Value-at-Risk als Risikomaß.

Ein weiterer Kritikpunkt ist, dass der Value-at-Risk kein kohärentes Risikomaß ist, da es die Eigenschaft der Subadditivität grundsätzlich nicht erfüllt. Hinsichtlich der fehlenden Anforderung der Subadditivität muss sich das ermittelte Risiko bei einer Portfoliodiversifikation nicht zwangsläufig verringern.

Als Beweis wird ein Gegenbeispiel präsentiert mit stetigen und unabhängigen Zufallsvariablen.

Beispiel 4.2. *Seien X_1, X_2 Pareto verteilte Werte in $(\infty, 1)$ und unabhängig. Die gemeinsame Verteilung von (X, Y) ist gegeben durch*

$$P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2] = (2 - x_1)^{-1}(2 - x_2)^{-1}, \quad x_1, x_2 < 1 \quad (4.11)$$

Das bedeutet

$$VaR_\alpha(X_i) = (1 - \alpha)^{-1} - 2, \quad i = 1, 2, \quad (4.12)$$

$$P[X_1 + X_2 \leq x] = \frac{2}{4 - x} + \frac{2 \log(3 - x)}{(4 - x)^2}, \quad x < 2.$$

Wegen (4.12) gilt $VaR_\alpha(X_1) + VaR_\alpha(X_2) < VaR_\alpha(X_1 + X_2)$ für alle $\alpha \in (0, 1)$, da

$$P[-(X_1 + X_2) \leq 2VaR_\alpha(X_1)] = \alpha - \frac{1 - \alpha}{2} \log \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} < \alpha. \quad (4.13)$$

Insbesondere, $\alpha = 0,99$ führt zu

$$VaR_\alpha(X_1) = VaR_\alpha(X_2) = 0,98 \quad VaR_\alpha(X_1 + X_2) \approx 203,2$$

(siehe [19], S. 4).

VaR für normalverteilte Zufallsvariablen

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dann gilt für den VaR zum Konfidenzniveau $p \in]0, 1[$:

$$VaR_p(X) = \sigma \Phi^{-1}(p) - \mu. \quad (4.14)$$

4.4.3 Conditional VaR

Als kohärentes, alternatives Risikomaß wurde der Conditional VaR eingeführt.

Definition 4.16. *Sei X eine Zufallsvariable. Die Tail Conditional Expectation und der Conditional Value-at-Risk können wie folgt im Zusammenhang dargestellt werden*

$$CVaR_\alpha(X) = TCE_\alpha(X)(VaR_\alpha(X)) = E[X|X > VaR_\alpha(X)].$$

CVaR für normalverteilte Zufallsvariablen

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dann gilt

$$CVaR_p(X) = -\mu + \sigma \frac{\phi(z_1 - p)}{1 - p}$$

mit

$z_1 - p$: $(1 - p)$ -Quantil der Standardnormalverteilung

ϕ : Dichte der Standardnormalverteilung

Seien X und Y Zufallsvariablen. Für stetige Verteilungen erfüllt der Conditional VaR die Eigenschaft der Subadditivität

$$CVaR_\alpha(X + Y) \leq CVaR_\alpha(X) + CVaR_\alpha(Y).$$

Dies kann interpretiert werden, dass das Risiko in einem diversifizierten Kollektiv geringer ist, als die Summe der Einzelrisiken. Es soll beachtet werden, dass diese Eigenschaft im Allgemeinen für Zufallsvariablen X und Y mit Verteilungsfunktionen, die Sprünge haben, nicht gilt. Der eng verwandte Expected Shortfall erfüllt allerdings die Eigenschaft der Subadditivität für alle Zufallsvariablen. Der Conditional VaR und der Expected Shortfall stehen in folgender Beziehung zueinander:

Bemerkung 4.3. *Für eine stetige Zufallsvariable X gilt*

$$CVaR_\alpha(X) = ES_\alpha(X).$$

(siehe [14], S. 25)

4.4.4 Expected Shortfall

Der Expected Shortfall (ES), auch Conditional-Value-at-Risk genannt, wurde 1997 von [Artzner et al.] als kohärentes Risikomaß eingeführt und gehört, wie der Value-at-Risk auch, zu der Kategorie der Downside-Risikomaßen. Das Risikomaß beschreibt den erwarteten Verlust, für den Fall, dass der VaR tatsächlich überschritten wird, d.h. es werden nur solche Verluste betrachtet, die den VaR-Wert überschreiten. Der Expected Shortfall kann als wahrscheinlichkeitsgewichteter Durchschnitt aller Verluste, die den VaR übersteigen, gesehen werden.

Definition 4.17. Sei $\alpha \in (0, 1)$ fix und X eine reelle Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ mit $E[\max(0, -X)] < \infty$. $q_\alpha(-X)$ ist wie in Definition 4.6 definiert. Dann wird

$$ES_\alpha(X) = -(1 - \alpha)^{-1} \left(E[X \mathbb{1}_{\{-X \geq q_\alpha(-X)\}}] + q_\alpha(-X) \left\{ \alpha - P[-X < q_\alpha(-X)] \right\} \right) \quad (4.15)$$

als Expected Shortfall (ES) von X zum Level α bezeichnet.

Es stellt sich heraus, dass der Expected Shortfall wie in 4.17 definiert, die kleinste kohärente und verteilungsinvariante Majorante des Var_α ist.

Definition 4.18. Der Expected Shortfall zum Level $\alpha \in (0, 1)$ der Zufallsvariable X ist gegeben

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X) &= \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 q_u(X) du \\ &= E[X|X \geq q_\alpha(X)] + (E[L|L \geq q_\alpha(X)] - q_\alpha(X)) \left(\frac{P[L \geq q_\alpha(X)]}{1 - \alpha} - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Wenn $P[X = q_\alpha(X)] = 0$ (insbesondere, wenn X stetig ist), $ES_\alpha = E[X|X \geq q_\alpha(X)]$.

In Kombination mit der Proposition 4.3 impliziert die Definition 4.17, dass der Expected Shortfall ein verteilungsinvariantes und komonoton additives Risikomaß ist. Die komonotone Additivität eines Risikomaßes wird besonders interessant, wenn zur gleichen Zeit die Eigenschaft der Subadditivität auftritt.

Bemerkung 4.4. Sei $\alpha \in (0, 1)$ und X und Y integrierbare Zufallsvariablen. Angenommen die gemeinsame Verteilung von X und Y ist nicht bekannt. In Bezug zur Subadditivität, stellt $ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y)$ eine obere Schranke für das Risiko $X + Y$ dar, wenn das Risiko durch den Expected Shortfall gemessen wird. Durch die komonotone Additivität, wird zusätzlich aufgezeigt, dass diese obere Grenze scharf ist, im Fall, dass X und Y komonoton sind. (d.h.: $X = f \circ Z$ und $Y = g \circ Z$ für Zufallsvariablen Z und nicht fallende Funktionen f und g).

Vergleiche diese Situation, wenn der Value-at-Risk für die Risikomessung verwendet wird. Dann gibt es keine einfach allgemeingültige Obergrenze für das Risiko $X + Y$ und die Suche nach der gemeinsamen Verteilung von X und Y , die den Maximalwert für $Var_\alpha(X + Y)$ ergibt, ist eine nicht triviale Aufgabe.

Die wichtigste Eigenschaft des Expected Shortfall ist die Kohärenz.

Proposition 4.4. *Sei $\alpha \in (0, 1)$ fix. Betrachte die Menge V der reellwertigen Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, sodass $E[-X] < \infty$ für alle $X \in V$. Dann ist*

$$\rho : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \rho(X) = ES_\alpha(X)$$

für alle $X \in V$ ein kohärentes Risikomaß (im Sinne der Definition 4.8).

Der Expected Shortfall ist nicht elicitable (vgl. [19], S. 6-9, vgl. [8], S. 7-8, 12-13 und vgl. [1], S.5).

4.4.5 Expektile

Die Verwendung von Expektilen wurde vorgeschlagen, da sie kohärent und elicitable sind. Die folgende Definition charakterisiert Expektile analog zum Erwartungswert, als Lösungen für Minimierungsprobleme. Als solche, verallgemeinern sie die Erwartungswerte. Allerdings ist diese Definition nicht die allgemeinste, weil sie fordert, dass Zufallsvariablen quadratisch integrierbar sind. Aus diesem Grund wird sie noch adaptiert und überarbeitet.

Definition 4.19. *Für $0 < \tau < 1$ und X quadratisch integrierbar, ist das τ -Expektil $e_\tau(X)$ definiert durch*

$$e_\tau(X) = \arg \min_{l \in \mathbb{R}} E[\tau \max(X - l, 0)^2 + (1 - \tau) \max(l - X, 0)^2] \quad (4.17)$$

Da der Value-at-Risk nicht kohärent ist und dem Expected Shortfall die Eigenschaft der direkten Elicitability fehlt, sind Risikomaße die kohärent und zusätzlich elicitable sind besonders interessant. Ein alternatives Risikomaß, das beide Anforderungen erfüllt sind Expektile. Eine allgemeinere aber weniger intuitive Definition wird durch die folgende Beobachtung vorgeschlagen:

Lemma 4.2. *Wenn X eine integrierbare Zufallsvariable ist, dann ist $e_\tau(X)$ die eindeutige Lösung l der Gleichung*

$$\tau E[\max(L - l, 0)] = (1 - \tau) E[\max(l - L, 0)].$$

Folglich erfüllt $e_\tau(X)$

$$e_\tau(X) = \frac{\tau E[X \mathbb{1}_{\{X \geq e_\tau(X)\}}] + (1 - \tau) E[X \mathbb{1}_{\{X < e_\tau(X)\}}]}{\tau P[X \geq e_\tau(X)] + (1 - \tau) P[X < e_\tau(X)]}.$$

Proposition 4.5. *Expektile haben die folgenden Eigenschaften:*

1. *Für $0 < \tau < 1$ sind Expektile homogen und verteilungsinvariant. Als Konsequenz sind Expektile additiv für lineare abhängige Zufallsvariablen. Das heißt*

$$\text{corr}[X_1, X_2] = 1 \quad \Rightarrow \quad e_\tau(X_1 + X_2) = e_\tau(X_1) + e_\tau(X_2).$$

2. Für $\frac{1}{2} \leq \tau < 1$ sind Expektile subadditiv (und daher kohärent), während für $\frac{1}{2} \geq \tau > 0$ gilt, dass sie superadditiv sind.

[Bellini und Bigozzi] haben gezeigt, dass mit einer gering engeren Definition von Elicitability, Expektile die einzigen verteilungsinvarianten und kohärenten Risikomaße sind. Wegen Lemma 4.2 und Proposition 4.5, sieht es aus, als ob Expektile ideale Risikomaße darstellen, die die Mängel des VaR und des ES nicht aufweisen. Das ist allerdings nicht der Fall, weil Expektile nicht komonoton additiv sind.

Proposition 4.6. Für $\frac{1}{2} < \tau < 1$ sind Expektile nicht komonoton additiv.

BEWEIS für PROPOSITION 4.6:

Wenn e_τ komonoton additiv wäre, dann würde es nach [Tasche] ein spektrales Risikomaß sein. Nach dem Korollar 4.3 von [Ziegel] ist das einzige elicitable Spektralmaß der Erwartungswert und somit führt $\tau = \frac{1}{2}$ zu einem Widerspruch (vgl. [8], S. 8-9).

4.5 Eigenschaften der Standard-Risikomaße

Obwohl der Einsatz von verschiedenen Risikomaßen einen besseren Überblick eines Risikos in einem Portfolio verschaffen würde, ist in der Praxis oft die Angabe eines Werts wichtig, der als Basis für strategische Entscheidungen dient. Um diese Wahl besser zu plausibilisieren, werden die Risikomaße und deren Eigenschaften detailliert dargestellt. Zum Schluss werden die unterschiedlichen Risikomaße gegenübergestellt.

4.5.1 VaR - subadditiv?

Wie schon im Kapitel 4.4.2 erwähnt ist der Value-at-Risk im Allgemeinen nicht subadditiv und somit nicht kohärent. Der Mangel der Subadditivität widerspricht der Vorstellung, dass es Diversifikationsvorteile im Zusammenhang mit Misch-Portfolios gibt. Der Einsatz des VaR ist schwierig, da es nicht sicher ist, ob bei aggregierten VaR-Zahlen für verschiedene Portfolios oder Geschäftsbereiche eine Grenze für das Gesamtrisiko eines Unternehmens aufgezeigt wird. Außerdem gibt der VaR zum Level α keine Auskunft über die Schwere der Tail-Verluste, die mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$ auftreten - im Gegensatz zum ES mit dem selben Konfidenzniveau. Wenn aggregierte Risiken $\sum_{i=1}^n L_i$ betrachtet werden, ist es bekannt, dass der Expected Shortfall die Kohärenz-Eigenschaft erfüllt. Insbesondere ist der ES subadditiv im Gegensatz zum VaR. Allerdings gibt es Beispiele, wo der VaR superadditiv ist. Das heißt

$$VaR_\alpha\left(\sum_{i=1}^n L_i\right) > \sum_{i=1}^n VaR_\alpha(L_i).$$

Ob der VaR subadditiv ist oder nicht, hängt von den Eigenschaften der gemeinsamen Verlustverteilung ab. In diesem Kapitel wird keine umfassende Überprüfung der Ergebnisse für die Subadditivität des VaR geliefert, sondern drei Standardfälle betrachtet:

1. Die Zufallsvariablen sind unabhängig, identisch verteilt, sowie von positiver regulärer Variation.
2. Die Zufallsvariablen haben eine elliptische Verteilung.
3. Die Zufallsvariablen haben eine Archimedische Überlebens-Abhängigkeitsstruktur.

Ad 1.) Die folgende Proposition präsentiert eine Bedingung auf das Tail-Verhalten von identisch verteilten Zufallsvariablen für den Value-at-Risk, der die asymptotische Subadditivität erfüllt.

Proposition 4.7. *Betrachte unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen $X_i, i = 1, \dots, n$ mit gemeinsamer kumulativer Verteilungsfunktion F . Angenommen, sie sind von regulärer Variation mit Tail-Index $\beta > 0$. Das bedeutet, dass das rechte Tail $1 - F$ der Verteilung folgendes erfüllt:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(ax)}{1 - F(x)} = \alpha^{-\beta}, \forall a > 0.$$

Dann ist das Risikomaß VaR asymptotisch subadditiv für $X_1, \dots, X_n$, wenn $\beta \geq 1$:

$$\lim_{a \nearrow 1} \frac{VaR_\alpha(\sum_{i=1}^n X_i)}{\sum_{i=1}^n VaR_\alpha(X_i)} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \beta \geq 1.$$

Ad 2.) Eine weitere wichtige Klasse von Verteilungen, die die Subadditivität des VaR impliziert ist die Klasse der elliptischen Verteilungen.

Proposition 4.8. *Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ ein Zufallsvektor mit elliptischer Verteilung. Betrachte die Menge der linearen Portfolios $M = \{Z = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$. Der VaR zum Level α ist subadditiv auf M , wenn $0,5 < \alpha < 1$:*

$$VaR_\alpha(Z_1 + Z_2) \leq VaR_\alpha(Z_1) + VaR_\alpha(Z_2), \quad Z_1, Z_2 \in M.$$

Ad 3.) Zudem existiert ein analoges Ergebnis für eine andere Art der Abhängigkeit, die Archimedische Überlebens-Copula:

Proposition 4.9. *Betrachte die Zufallsvariablen $X_i, i = 1, \dots, n$ mit gleicher stetiger Randverteilungsfunktion F . Angenommen die Tail-Verteilung $\bar{F} = 1 - F$ ist von regulärer Variation mit Tail-Index $-\beta < 0$. Das heißt, $\bar{F}(x) = x^{-\beta} G(x)$ für beliebige Funktionen G , welche langsam gegen Unendlich variieren. Angenommen $(-X_1, \dots, -X_n)$ hat eine Archimedische Copula mit Generator Ψ , von regulärer Varianz bei 0 mit Index $-\alpha < 0$. Dann gilt $\forall \alpha > 0$:*

- VaR ist asymptotisch subadditiv für alle $\beta > 1$
- VaR ist asymptotisch superadditiv für alle $\beta < 1$.

(vgl. [8], S. 9-11).

4.5.2 Robustheit

Die meisten Risikomaße sind bezüglich der schwachen Topologie unstetig. Aus diesem Grund und wegen einiger Skalierungseigenschaften wird im Risikomanagement Robustheit als Stetigkeit bezüglich der Wasserstein-Distanz (wie in Definition 4.14) betrachtet.

Laut [Stahl et al.] sind die Varianz, der Expected Shortfall, die Expektile und der Mittelwert unstetig, bezüglich der schwachen Topologie.

Wohingegen der Value-at-Risk zum Level α robust bei F_0 ist, falls F_0^{-1} stetig in α ist. [Stahl et al.] stellten fest, dass der Mittelwert, der VaR und der Expected Shortfall stetig sind, bezüglich der Wasserstein-Distanz. [Bellini et al.] zeigte, dass Expektile Lipschitz-stetig sind, bezüglich der Wasserstein-Distanz mit Konstante $K = \max\{\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{1-\alpha}{\alpha}\}$, was wiederum die Stetigkeit bezüglich der Wasserstein-Distanz impliziert.

[Cont et al.] veranschaulichten, dass der historische Expected Shortfall viel empfindlicher ist bei der Zugabe eines Datenpunktes, als der VaR. Darüber hinaus, ist der ES empfindlich auf die Größe des Datenpunktsatzes. Unter Berücksichtigung, dass der VaR aufgrund seiner Definition als Quantil unempfindlich auf die Größe der Datenpunkte ist, die nicht in der Umgebung des VaR liegen, ist die Bemerkung von [Cont et al.] nicht überraschend. Der Begriff des Expected Shortfall wurde als Abhilfe für den Mangel an Risikosensitivität des VaR eingeführt.

Schließlich ist zu beachten, dass in der Praxis, die Berechnung des ES auf einer größeren Stichprobe basiert, als die des VaR. Zum Beispiel, bei der Verwendung von 100.000 simulierten Iterationen, wird der ES zum 99% Niveau mit 1.000 Punkten berechnet, während die VaR-Berechnung auf einer kleinen Umgebung des 99.000 Punktes basiert. Darüber hinaus, wenn die Skalierungseigenschaften des VaR und des ES von aggregierten, finanziellen Erträgen empirisch untersucht werden, wurde aufgezeigt, dass die numerische Stabilität des Skalierungsexponenten mit dem ES viel höher war. Diese Beobachtungen widersprechen der Bemerkung von [Cont et al.] hinsichtlich der Datenmenge die zur Berechnung benötigt wird. Denn oft ist es möglich, Hochfrequenzdaten einzusetzen, um den ES genau zu berechnen. Anschließend werden in diesem Fall die Skalierungseigenschaften verwendet, um den Expected Shortfall für aggregierte Risiken zu bestimmen (vgl. [8], S. 11-12).

4.5.3 Elicitability und Conditional Elicitability

Die fehlende Kohärenz-Eigenschaft des Value-at-Risk, lenkt immer mehr die Aufmerksamkeit auf den Expected Shortfall. Der Expected Shortfall ist im Gegensatz zum VaR empfindlich gegenüber der Tail-Verluste. Sobald es allerdings um die Schätzung und um das Backtesting des ES geht, entsteht ein potenzieller Mangel im Vergleich zum Value-at-Risk. Der Expected Shortfall ist nicht elicitable. Es wurde aufgezeigt, dass die Existenz einer konvexen Konfidenzmenge eine notwendige Bedingung für die Elicitability ist.

Lemma 4.3. *Für stetige Verteilungen, ist der Expected Shortfall bedingt elicitable.*

BEWEIS von LEMMA 4.3:

Für stetige Verteilungen, impliziert der Expected Shortfall $ES_\alpha(L) = E[L|L \geq q_\alpha(L)]$. Dann kann $ES_\alpha(L)$ mit Hilfe von γ_c definiert durch

$$\gamma_c : \mathcal{P} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}, P \mapsto \gamma(P, c) := E_P[L|L \geq c]$$

und $\bar{\gamma}$ definiert durch

$$\bar{\gamma} : \mathcal{P} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}, P \mapsto \bar{\gamma}(P) := q_\alpha(L)$$

umgeschrieben werden. Laut [Newey and Powell], ist $\bar{\gamma}$ elicitable mit strikter konsistenter Bewertungsfunktion $s(x, y) = (\mathbb{1}_{\{x \geq y\}} - \alpha)(x - y)$ und γ_c ist elicitable mit strikt konsistenter Bewertungsfunktion $s(x, y) = (x - y)^2$, da es der Mittelwert ist. Es folgt $ES_\alpha(L) = \gamma(P, \bar{\gamma}(P))$ für stetige Verteilungen ist bedingt elicitable. In der Praxis bedeutet das, aufgrund der bedingten Elicitability, kann der Expected Shortfall in einem Zwei-Schritt-Verfahren ermittelt werden:

1. Die Quantile werden geschätzt durch

$$\hat{q}_\alpha(L) = \arg \min_x E_P((\mathbb{1}_{\{x \geq L\}} - \alpha)(x - L))$$

mit der strikten konsistenten Bewertungsfunktion $s(x, y) = (\mathbb{1}_{\{x \geq y\}} - \alpha)(x - y)$ aus dem Beispiel 4.1.

2. Dieses Ergebnis, als fixer Wert $\hat{q}_\alpha$ angenommen, zeigt, dass $E[L|L \geq \hat{q}_\alpha]$ nur ein Erwartungswert ist. Somit kann der quadratische Fehler als strikt konsistente Bewertungsfunktion verwendet werden, um $ES_\alpha(L) \approx E[L|L \geq \hat{q}_\alpha]$ mit $\arg \min_x E_{\hat{P}}((x - L)^2)$ zu schätzen, wobei $\hat{P}(A) = P(A|L \geq \hat{q}_\alpha)$. Das ist eine optimale Schätzung bzw. Prognose für den Expected Shortfall.

Lemma 4.4. *Die Varianz ist bedingt elicitable.*

BEWEIS für LEMMA 4.4:

Definiere γ_c durch

$$\gamma_c : \mathcal{P} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}, P \mapsto \gamma(P, c) := E_P[(L - c)^2]$$

und $\tilde{\gamma}$ durch

$$\tilde{\gamma} : \mathcal{P} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}, P \mapsto \tilde{\gamma}(P) := E_P(L).$$

Die Varianz $E_P((L - E_P(L))^2)$ kann umgeschrieben werden als $Var(L) = \gamma(P, \tilde{\gamma}(P))$. Dann ist nach [Newey and Powell] $\tilde{\gamma}$, sowie γ_c elicitable. Aufgrund der Definition von *Conditional elicitable* ist die Varianz ebenfalls bedingt elicitable.

Lemma 4.5. *Expektile sind elicitable.*

Bemerkung 4.5. *Expektile sind bedingt elicitable.*

(vgl. [8], S. 12-13).

4.6 Gegenüberstellung der Risikomaße

Im letzten Kapitel wurden einige Eigenschaften analysiert, die für Risikomaße besonders interessant sind. Nun zu einer kurzen Zusammenfassung:

- **Value-at-Risk:**

Es ist bekannt, dass der Value-at-Risk die Anforderungen der Subadditivität im Allgemeinen nicht erfüllt und somit nicht unbedingt geeignet für die Beschreibung der Risikokonzentration ist. In vielen praktischen Anwendungen sollte dies aber kein ernsthaftes Problem sein, solange die zugrundeliegenden Risiken eine endliche Varianz besitzen oder in einigen Fällen einen endlichen Mittelwert. Der Value-at-Risk deckt keine Tail-Risiken über den VaR hinaus, was ein gravierendes Problem darstellt. Ironischerweise ist der VaR ein robusteres Risikomaß als die anderen, die analysiert wurden. Das Problem mit der Erfassung von Tail-Risiken kann besonders schwerwiegend sein, wenn eine Auswahl von unterschiedlichen Risiken mit verschiedenen Tails gegenübersteht. VaR und ES präsentieren verschiedene optimale Ergebnisse, die als suboptimal in der Praxis bekannt sind.

- **Expected Shortfall:**

Der Expected Shortfall bereinigt die Mängel der Subadditivität des VaR und erfasst Tail-Risiken. Durch die Analyse wurde gezeigt, dass der ES nicht elicitable ist. Das bedeutet wiederum, dass das Backtesting des ES weniger einfach ist, als im Vergleich zum VaR. Es gibt allerdings eine Reihe von Ansätzen, um dieses Problem zu umgehen. Der Expected Shortfall benötigt mehr Validierungsdaten um das gleiche Niveau an Sicherheit wie der VaR zu erreichen.

- **Expektile:**

Expektile wurden als alternatives Risikomaß zum ES eingeführt, da es kohärent und elicitable ist. Obwohl Expektile eine Reihe von attraktiven Merkmalen haben, ist das zugrundeliegende Konzept weniger intuitiv, als das des VaR und des Expected Shortfall. Zudem sind Expektile nicht komonoton additiv, was dazu führen kann, dass in Anwendungen, möglicherweise aufgrund nicht linearer Abhängigkeiten, die Risikokonzentration nicht richtig erfasst werden kann.

Abschließend ist zu sagen, dass ES das beste Risikomaß für den Einsatz in der Praxis ist, trotz einiger Vorbehalte hinsichtlich der Schätzung und des Backtesting. Es lohnt sich allerdings, die anderen Risikomaße immer als Alternative zu betrachten. Der Value-at-Risk ist für spezifische Anwendungen geeignet (vgl. [8], S. 22).

Die nächste Tabelle gibt einen Überblick über die Eigenschaften der Risikomaße.

Überblick der Eigenschaften				
	Varianz	VaR	ES	e_τ (für $\tau \geq 1/2$)
Kohärent			x	x
Komonoton Additiv		x	x	
Robustheit bezüglich schwacher Topologie		x		
Robustheit bezüglich der Wasserstein-Distanz	x	x	x	x
Elicitability		x		x
Conditional Elicitability	x	x	x	x

Abbildung 4.1: Überblick der Eigenschaften der Risikomaße

Kapitel 5

Value-at-Risk Modelle und die Umsetzung anhand von Daten

Welche Value-at-Risk Ergebnisse werden ermittelt, wenn mit denselben Daten der VaR unter Heranziehung unterschiedlicher Ansätze berechnet wird?

In diesem Abschnitt werden die verschiedenen Ansätze

1. der Varianz-Kovarianz Ansatz,
2. die historische Simulation,
3. der Monte Carlo Simulation Ansatz gegenübergestellt und verglichen.

Des Weiteren werden der Incremental VaR, der Marginal VaR sowie der Conditional VaR berechnet. Zum Schluss wird der Expected Shortfall dargestellt.

Es wurden folgende Daten im Zeitraum von 29.10.2009 – 29.10.2014 für die Berechnungen herangezogen:

- ATG1TR Index: Österr. Staatsanleihen (Laufzeit: 1-3 Jahre) – mündelsicher
- REX Index: Deutsche Börse REX Index (Deutscher Anleihenmarkt)
- SX5E Index: EuroStoxx 50 - 50 europäischer Blue Chips
- MXWO Index: MSCI World Index (weltweite Aktien aus Industrieländern)

Die Daten wurden aus Bloomberg entnommen und für die Diplomarbeit zur Verfügung gestellt.

5.1 Verwendete Indizes

5.1.1 ATG1TR Index - Österreichische Staatsanleihen

Bundesanleihen werden von der Republik Österreich nach österreichischem Recht vergeben, um den staatlichen Geldbedarf durch Fremdfinanzierung zu decken. Der

Bund finanziert damit wichtige Aufgaben des Staates, beispielsweise den Infrastrukturausbau oder das Bildungs-, Pensions- und Gesundheitswesen. Der Kauf einer Bundesanleihe der Republik Österreich stellt wechselseitig eine kreditähnliche Finanzierung für die Republik Österreich dar. Gleichzeitig erfüllen Bundesanleihen die Grundbedürfnisse eines Investors, denn sie sind nicht nur krisenfest, sondern besitzen zusätzlich eine solide Rendite und bieten die höchste Sicherheit am Kapitalmarkt. Aus eben genannten Gründen gelten österreichische Bundesanleihen als nachhaltige Geldanlage. Insbesondere in turbulenten Zeiten verlangen Anleger nach sicheren Kapitalanlageformen. Bundesanleihen zählen mitunter zu den sichersten Anlageformen und sind zudem mündelsicher im Sinne des § 230ff ABGB. (siehe [29], Stand: 01.03.2015)

5.1.2 REX Index - Deutsche Anleihen

Der Deutsche Rentenindex, kurz REX, ist ein Performance-Index, der die Wertentwicklung von Anleihen misst. Der Index gibt die Performance deutscher Staatsanleihen wider und stellt den Anlageerfolg dar. Berechnet wird der REX aus 30 Anleihen mit ganzjährigen Laufzeiten von einem Jahr bis zehn Jahren. Die Anleihen sind nach ihrem Marktanteil gewichtet. Der REX wird seit 1991 täglich von der Deutschen Börse veröffentlicht. Er gibt den Markt der Staatspapiere am deutschen Rentenmarkt wider. (siehe [26], Stand: 01.03.2015)

5.1.3 SX5E Index - Aktienindex Europa

Der EURO STOXX 50 gilt als einer der wichtigsten Indizes in Europa und besteht aus den Aktien der 50 bedeutendsten Unternehmen der Eurozone. Aus eben genannten Gründen gilt der EuroStoxx 50 und seine Wertentwicklung auch als Indikator für den gesamten Aktienmarkt in der Eurozone. Der Index wird von der Stoxx Ltd. berechnet, ein in der Schweiz beheimatetes Joint Venture der Deutschen Börse AG und dem Betreiber der Schweizer Börse, der SIX Group. Die Berechnung erfolgt sowohl als Kursindex, als auch als Performanceindex, wobei dem Kursindex ohne Berücksichtigung von Ausschüttungen die deutlich größere Bedeutung zukommt. Die Aufnahme einer Gesellschaft in EuroStoxx 50 erfolgt nicht nach festgelegten Kriterien oder zu festgelegten Terminen. Stattdessen entscheidet ein Joint Venture zwischen der Schweizer Börse SWX Group, der Deutsche Börse AG und der Dow Jones und Company über die Aufnahme oder das Ausscheiden einer Aktie. (siehe [27], Stand: 01.03.2015)

5.1.4 MSCI World Index - Aktienindex weltweit

Der MSCI World Index ist einer der wichtigsten Aktienindizes der Welt. Er wird von dem US-amerikanischen Finanzdienstleister Morgan Stanley Capital International in drei Varianten berechnet, als Kursindex, als Performanceindex ohne Berücksichtigung von Quellensteuern und als Performanceindex mit Berücksichtigung

von Quellensteuern. Veröffentlicht wird in der Regel der Kursindex. Der Index beinhaltet über 1.612 Aktien aus 23 Ländern (Stand: Mai 2014): Australien, Belgien, Dänemark, Deutschland, Finnland, Frankreich, Großbritannien, Hongkong, Irland, Israel, Italien, Japan, Kanada, Niederlande, Neuseeland, Norwegen, Österreich, Portugal, Schweden, Schweiz, Singapur, Spanien und USA. Der MSCI World wird seit dem 31. März 1968 berechnet.

Aufgrund der kapitalmäßigen Dominanz der US-Börsen an der weltweiten Marktkapitalisierung stellten am 11. Januar 2013 Titel aus den USA 52,44 % am MSCI World. Zum Vergleich: Europa stellte 28,51 % (davon Großbritannien 9,7 %, Frankreich 4,05 % und Deutschland 3,76 %); Japan kommt auf einen Anteil von 8,47 %. Der Index ist somit stark von der US-Aktienmarktentwicklung abhängig. (siehe [30], Stand: 01.03.2015)

In der nächsten Tabelle ist das Basis Portfolio dargestellt.

Portfolio Basis					
Stichtag:	28.10.2014				
	ATG1TR Index	REX Index	SX5E Index	MXWO Index	Portfolio
Preis:	277,16	137,76	3 036,15	1 322,35	
Menge:	500	1000	50	200	
Ertrag:	138 582,00	137 756,40	151 807,50	264 469,74	692 615,64
Gewichtung:	20,01%	19,89%	21,92%	38,18%	100,00%

Abbildung 5.1: Das Basis Portfolio

Bevor die Besonderheiten der einzelnen Ansätze beschrieben werden, gilt es die Zeitreihen der Renditen für jede Position zu definieren. In diesem Fall wird der natürliche Logarithmus von den aufeinander folgenden Preisen bestimmt. Dies bildet die Basis für alle oben erwähnten Verfahren (mit Ausnahme der Monte-Carlo-Simulation).

Die Zeitreihe der Rendite für das Portfolio kann als „preisbereinigte“ Reihe angesehen werden, anders gesagt, eine Reihe, die die Korrelation zwischen den verschiedenen Positionen im Portfolio berücksichtigt. Die Renditereihe des Portfolios für jeden Zeitpunkt kann als Summenprodukt der Gewichte mit den einzelnen Indizes beschrieben werden.

5.2 Methoden zur Ermittlung des Value-at-Risk

Bei den Methoden zur Berechnung des Value-at-Risk können parametrische und nichtparametrische Ansätze unterschieden werden. Zu den parametrischen Modellen zählen beispielsweise der Asset-Normal-VaR, der Delta-Normal-VaR (Delta-Approximation) und der Delta-Gamma-Normal-VaR (Delta-Gamma-Approximation). Zu den nicht-

parametrischen Modellen gehören z.B. Simulationen mit totaler Schätzung (Monte Carlo VaR, Historical Simulation, Stress Scenarios).

Das Ermitteln von finanziellen Risiken kann grundsätzlich auf zwei Arten erfolgen, nämlich analytisch oder durch Einsatz einer Simulation. Für die Verwendung der analytischen Methoden, muss zu Beginn eine Verteilung vorausgesetzt werden. Die einfachste Version dieser Verteilung, ist die Annahme der Normalverteilung.

5.3 Parametrische Methoden

Die Annahme ist, dass die Portfolio-Wertveränderung einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung zugrunde liegt. Um den VaR ermitteln zu können, müssen die Verteilungsparameter bekannt sein. Da Quantile nicht additiv sind, erweist es sich als weitgehend schwierig den Value-at-Risk zu berechnen. Aufgrund fehlender Daten können beim Schätzen großer Risiken (kleiner Quantile) Probleme auftreten. Dem folgend wird für parametrische Methoden die Normalverteilungsannahme vorausgesetzt.

5.3.1 Varianz-Kovarianz-Modell

Die Varianz-Kovarianz-Methode ist auch als Linear-VaR oder Delta-Normal-VaR bekannt. Dieser Ansatz ist im Vergleich zu anderen Methoden relativ einfach zu implementieren und weit verbreitet. Die Varianz-Kovarianz-Methode beinhaltet Teile der modernen Portfolio Theorie nach Markowitz, mit Berücksichtigung der Korrelationskoeffizienten zwischen den Assets. Für die Berechnung des VaR wird für jede Portfolioposition ein eigener Risikofaktor mit entsprechender Kovarianz ermittelt (vgl. [12], S. 247-262).

Dieser Ansatz setzt voraus, dass die täglichen Renditen einer Normalverteilung folgen. Der tägliche Value-at-Risk ist eine Funktion der Standardnormalabweichung der einzelnen Positionen der Zeitreihe, der Renditen und des gewünschten Konfidenzniveaus. Bei dieser Methode kann die Volatilität σ auf zwei Arten berechnet werden:

1. σ kann durch die Funktion „STABW“ im Excel (schätzt die Standardabweichung ausgehend von einer Stichprobe) von den Renditen der einzelnen Indizes ermittelt werden. Diese Darstellungsweise wird als **Simple Moving Average** (SMA) Ansatz bezeichnet.

	ATG1TR Index	REX Index	SX5E Index	MXWO Index	Portfolio
SMA tägliche Vola	0,0862%	0,2173%	1,3686%	0,7766%	0,5399%

Abbildung 5.2: Volatilität mit Simple Moving Average Ansatz

2. Des Weiteren kann σ mit Hilfe des **Exponentially weighted moving Average** (EWMA) berechnet werden.

$$\sigma^2 = \sum_{t=1}^n (1 - \lambda) \times \lambda^{t-1} \times R_t^2$$

Abhängig vom gewählten λ , liegt der Fokus mehr auf den jüngeren Änderungsraten, als beim SMA Ansatz.

Als erster Schritt wird der Wert von λ gewählt. Je kleiner der Wert von λ ist, desto größer ist die Gewichtung, die auf die neueren Beobachtungen angewendet wird. Für diese Berechnungen wird $\lambda = 0,5$ gewählt. Als nächstes wird die Gewichtung definiert:

$$(1 - \lambda) \times \lambda^{t-1}$$

Abhängig von der verwendeten Stichprobengröße, müssen die Gewichte (mittels Division jedes Gewichtes durch $(1 - \lambda^n)$) so skaliert werden, dass die Summe der Gewichte gleich 1 ergibt.

Die EWMA Varianz wird durch das Summenprodukt der skalierten Gewichtungen mit den Renditen zum Quadrat ermittelt. Die EWMA Volatilität wird durch die Quadratwurzel der resultierenden Varianz berechnet.

	ATG1TR Index	REX Index	SX5E Index	MXWO Index	Portfolio
EWMA Varianz	0,0000%	0,0001%	0,0075%	0,0027%	0,0013%
EWMA Volatilität	0,0168%	0,0894%	0,8664%	0,5162%	0,3577%

Abbildung 5.3: EWMA Varianz und EWMA Volatilität

Basierend darauf ist es möglich, den täglichen Value-at-Risk zu ermitteln. Dies ist das Produkt aus der Volatilität und der inversen Standardnormalverteilung für ein bestimmtes Konfidenzniveau. Für das Konfidenzintervall von 95% wird ein α von 1,645 ausgegeben und für das 99% Konfidenzniveau entspricht $\alpha = 2,326$.

Die Ergebnisse des Value-at-Risk mit dem *Simple Moving Average Ansatz* und mit dem *Exponentially Weighted Moving Average* werden in der unten angeführten Tabelle dargestellt.

	ATG1TR Index	REX Index	SX5E Index	MXWO Index	Portfolio
SMA VaR	0,1418%	0,3575%	2,2511%	1,2775%	0,8881%
EWMA VaR	0,0276%	0,1470%	1,4250%	0,8491%	0,5883%

Abbildung 5.4: Value-at-Risk mit EWMA Ansatz und SMA Ansatz

Vorteile und Nachteile

Als Vorteil dieser Methode ist anzuführen, dass für die Berechnung rein die Korrelationen und Varianzen benötigt werden. Da diese Risikofaktoren zu den häufigsten Risk Metrics Daten von J. P. Morgan zählen und einfach zu ermitteln sind, ist die Implementierung vergleichsweise einfach. Ein Nachteil dieser Methode ist jedoch, dass die Risikofaktoren sich gemäß eines Random Walk bzw. einer geometrischen Brownschen Bewegung verhalten. Der VaR basierend auf der Normalverteilung ist nicht in der Lage, die Tail Risks zu messen. Des Weiteren ist es oft der Fall, dass die zugrundeliegende Normalverteilung nicht für alle Risikofaktoren die Realität widerspiegelt.

5.4 Simulationsmodelle

Eine Alternative zu den bereits oben beschriebenen, parametrischen Methoden stellen die Simulationsmodelle dar. Im Zuge dieser, wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Portfolio-Wertänderung aus einer Verteilung der simulierten Rendite ermittelt. Die historische Simulation und die Monte Carlo Simulation sind zwei der bekanntesten Simulationsmodelle. Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Methoden, ist die Verwendung von Zufallszahlen (vgl. [12], S. 247-262).

5.4.1 Historische Simulation

Die Historische Simulation ist ein nicht parametrischer Ansatz zur Schätzung des Value-at-Risk. Dies bedeutet die Renditen unterliegen keiner Verteilungsfunktion. Diese Methode basiert nicht auf analytischen Ansätzen, sondern verwendet Daten aus vergangenen Szenarien. Der Value-at-Risk wird direkt aus den Daten geschätzt, ohne abgeleiteten Parametern oder Annahmen über die gesamte Verteilung. Die Methode setzt voraus, dass das Muster der historischen Renditen bezeichnend für die zukünftigen Renditen ist.

Bei der Historischen Simulation ist die Auswahl der Daten von großer Wichtigkeit. Ziel ist es, einen adäquaten Mittelweg für die Auswahl der Daten zu finden. Einerseits ist es bei Heranziehung vieler historischer Daten fraglich, wieweit diese Daten für die aktuelle Risikomessung aussagekräftig sind. Andererseits ist es zweifelhaft ob die Anzahl der beobachteten Werte einer Risikomessung, basierend auf rein aktuellen Daten, repräsentativ ist. Zu beachten ist, dass sich der Schätzfehler mit abnehmendem Stichprobenumfang vergrößert.

Mit Hilfe eines Histogramms der Renditen ist es möglich, den täglichen Value-at-Risk zu ermitteln. Um die Histogramme der einzelnen Indizes besser zu vergleichen, wurde eine bestimmte Ausrichtung vorausgesetzt. In den Histogrammen ist eine Intervallweite von insgesamt 8% zu sehen.

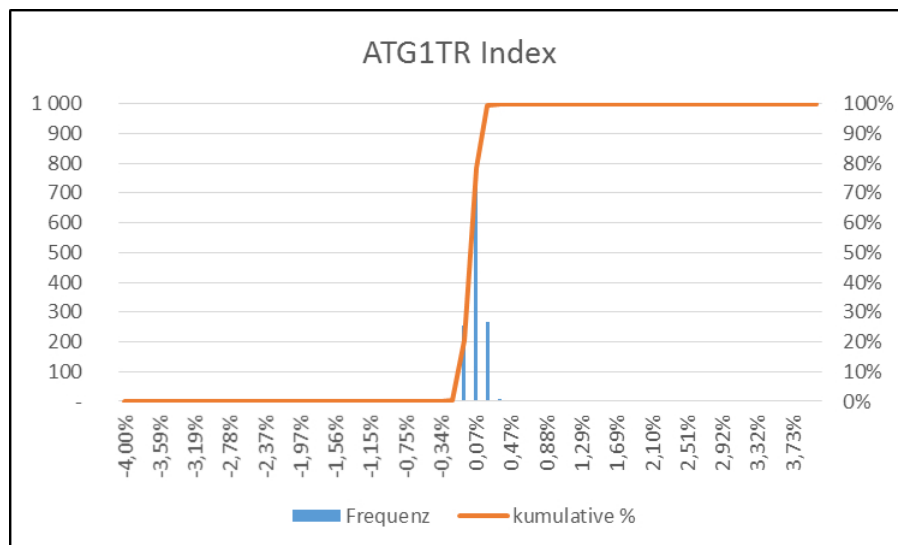


Abbildung 5.5: Histogramm des ATG1TR Index - Öst. Staatsanleihen

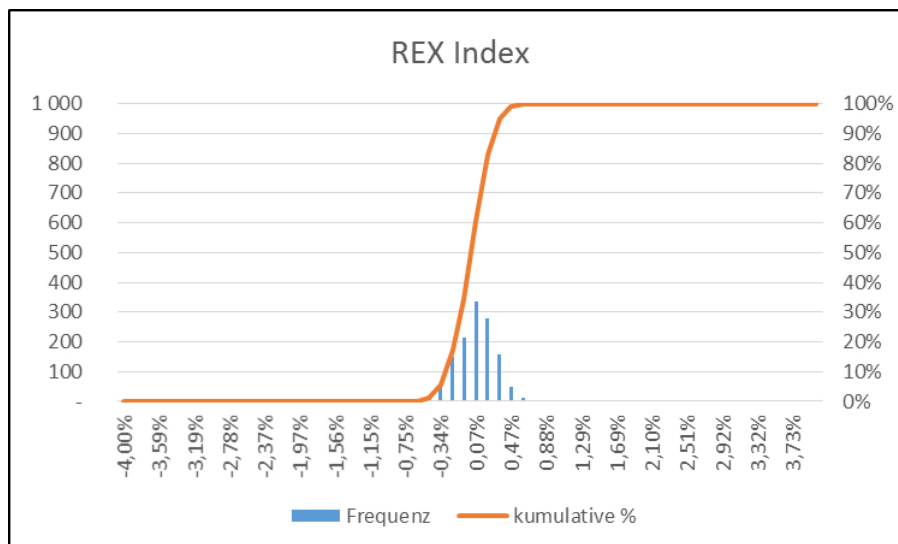


Abbildung 5.6: Histogramm des REX Index - Deutsche Anleihen

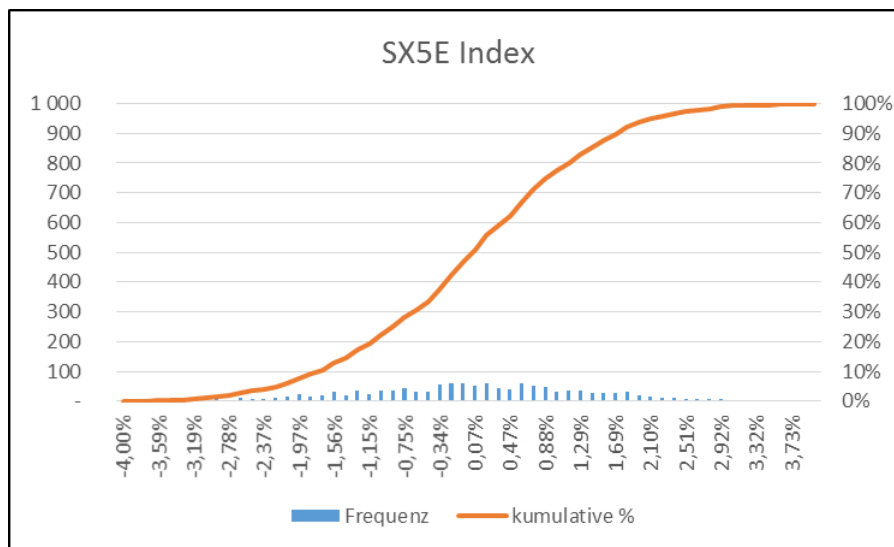


Abbildung 5.7: Histogramm des SX5E Index - Aktienindex Europa

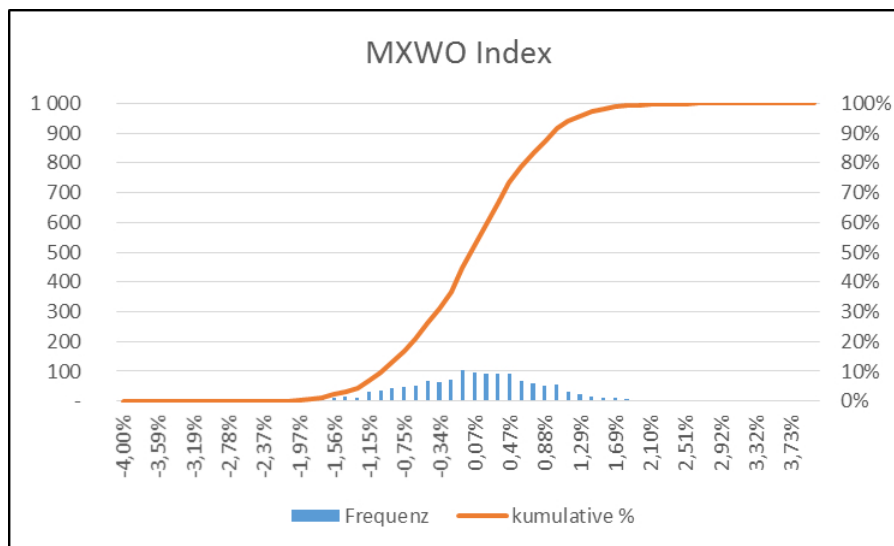


Abbildung 5.8: Histogramm des MSCI World Index - Aktienindex weltweit

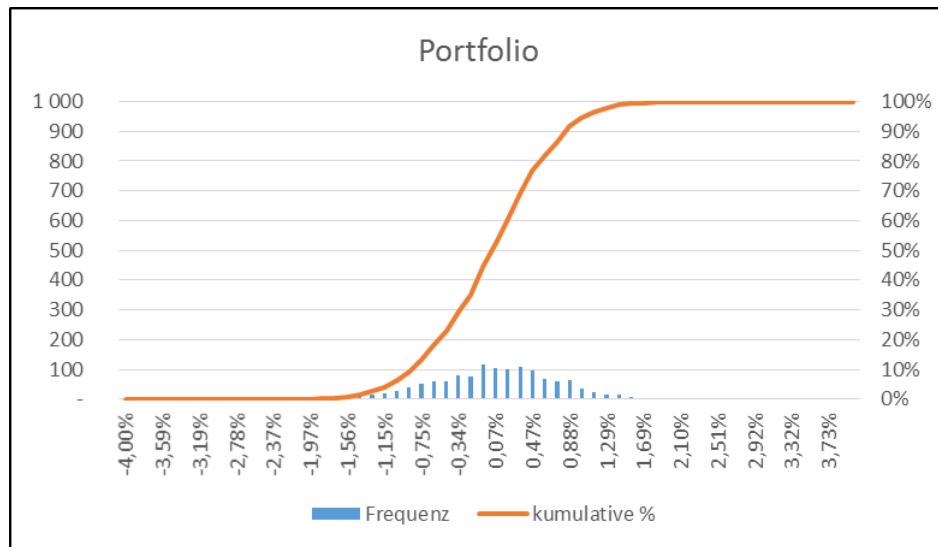


Abbildung 5.9: Histogramm für das Portfolio

Des Weiteren müssen folgende Berechnungen durchgeführt werden:

- Es wird für jeden Index das Minimum und das Maximum der Renditen berechnet.
- Weiters wird die Intervalllänge (bin width) für das Histogramm aus der Differenz des Minimums und Maximums, dividiert durch die Anzahl der Schritte (buckets) ermittelt. In diesem Fall wurden 60 Schritte gewählt.
- Als Nächstes wird der Wert jedes Schrittes berechnet:

$$bin(1) = \text{minimum value of return}$$

$$bin(t) = bin(t - 1) + \text{bin width}$$

	ATG1TR Index	REX Index	SX5E Index	MXWO Index	Portfolio
min	-0,75%	-0,94%	-6,32%	-5,06%	-2,78%
max	0,82%	0,97%	9,85%	3,96%	3,48%
Anzahl der Schritte	60	60	60	60	60
Differenz	-1,57%	-1,91%	-16,16%	-9,02%	-6,26%
Intervalllänge	0,000261733	0,000318502	0,002694126	0,001503642	0,001043733

Abbildung 5.10: Historische Simulation

- Des Weiteren muss die kumulative Frequenz ermittelt werden, indem die Anzahl der Renditen, die unterhalb des Schrittwertes liegen, aufsummiert werden.

- Mit der ZÄHLENWENN Funktion wird die Anzahl der Renditen bestimmt, die weniger oder gleich dem Bin Wert sind.
- Im nächsten Schritt wird die Frequenz ermittelt:

$$\text{Kumulative Frequenz}(t) - \text{kumulative Frequenz}(t - 1)$$

- Abschließend wird die kumulative Wahrscheinlichkeit ermittelt:

$$\frac{\text{kumulative Frequenz}}{\text{Gesamtanzahl der Renditen Beobachtungen}}$$

- Das Konfidenzlevel wird durch 1 minus der kumulativen Frequenz bestimmt.
- Zum Schluss wird der VaR-Wert, für das gewünschte Konfidenzniveau ermittelt.

Confidence Level	95,00%				
	ATG1TR Index	REX Index	SX5E Index	MXWO Index	Portfolio
Daily VaR	0,107%	0,342%	2,300%	1,270%	0,853%
Konfidenzlevel O	95,837%	96,229%	96,151%	95,287%	95,758%
Wert	-0,118%	-0,367%	-2,546%	-1,300%	-0,903%
Konfidenzlevel U	93,794%	94,658%	94,894%	93,873%	94,187%
Wert	-0,092%	-0,335%	-2,277%	-1,150%	-0,799%

Abbildung 5.11: Value-at-Risk mit historischer Simulation

Vorteile und Nachteile

Die historische Simulation und die Varianz-Kovarianz-Methode haben eine Gemeinsamkeit, nämlich die einfache Umsetzung. Im Gegensatz zur Varianz-Kovarianz-Methode werden bei diesem Ansatz jedoch keine Risikofaktoren wie die Volatilität oder die Korrelation für die Berechnung des VaR benötigt. Zudem verzichtet die historische Simulation auf Modellannahmen und umgeht so elegant die "Tail Risk" - Problematik, da bereits alle Extrema aus den vergangenen Beobachtungen als bekannt vorausgesetzt werden können. Ein weiterer Vorteil der historischen Simulation ist, dass Eigenschaften, die häufig nicht den Standardannahmen entsprechen exakt repliziert werden.

Ein schwerwiegender Nachteil dieser Methode ist die geringe (statistische) Genauigkeit, die mit der empirischen Quantilschätzung verbunden ist. Zudem ist die Auswahl der Daten für einen geeigneten Stichprobenumfang nicht einfach zu wählen. Wenn diese Methode mit dem Varianz-Kovarianz-Ansatz verglichen wird, ist die Berechnung wegen der größeren Datenmenge aufwändiger. Eine Kritik an dieser Methode

ist die nicht durchgehend frei wählbare Modellannahme, da für die VaR-Berechnung der historischen Renditen ein bestimmter Modellrahmen gilt.

Ebenso nachteilig ist, dass die Bewertung von Optionen nicht möglich ist, da für diese eine Normalverteilungsannahme Voraussetzung ist, die bei diesem Ansatz nicht getroffen wird (vgl. [12], S. 262 - 265).

5.4.2 Monte Carlo Simulation

Die Monte Carlo Simulation basiert auf einem ähnlichen Ansatz wie die historische Simulation. Anstatt historische Portfolio-Wertveränderungen als Daten zu verwenden, wird ein hypothetischer Datensatz anhand von Zufallsvariablen generiert. Dies ermöglicht eine Berücksichtigung der zukünftigen Entwicklung von Risikofaktoren, wie sie bei der historischen Simulation nicht durchführbar ist. Es gilt die Annahme, dass die gewählte Verteilung das Preisverhalten der modellierten Zufallsvariablen gut approximiert.

Die Grundlage bildet die Black Scholes Preis Formel

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} + \sigma\sqrt{t}z_t.$$

- Preis S_0 des jeweiligen Index zum Stichtag
- Konstante Volatilität σ entspricht der berechneten täglichen SMA Volatilität
- Fälligkeit $T = 1$
- Risikofreier Zinssatz = 0%
- Zuerst wird eine Reihe von Zufallszahlen mit Hilfe der Excel Funktion ZUFALL() erzeugt. Es wird eine gleichmäßig verteilte Reihe mit zufälligen Werten generiert, die zwischen 0 und 1 liegen.
- Im nächsten Schritt wird die Serie mit den Zufallszahlen mit der Funktion STANDNORMINV() in eine normalverteilte Serie konvertiert. Die NORMSINV Funktion nimmt einen Wahrscheinlichkeitsschätzwert, eine Zahl zwischen 0 und 1 und wandelt sie in eine normalverteilte Reihe um. Dem folgend wird der erste Teil der Black-Scholes-Preis Formel Schritt berechnet, indem man μ durch r ersetzt:

$$\frac{r - \sigma^2}{2} \times t$$

Der Simulator unter der Blacks-Scholes-Annahme impliziert, dass alle Vermögenswerte bei dem risikolosen Zinssatz wachsen.

- Im nächsten Schritt wird die Reihe der Zufallszahlen berechnet.
- Als Nächstes werden die beiden oben beschriebenen Berechnungen mit der Exponentialfunktion zusammengeführt.

- Der generierte Index kann als Multiplikation des Black-Scholes Ergebnis und des S_0 Preises ermittelt werden.
- Diese Schritte werden nun für alle Indizes durchgeführt und generierte Indizes und deren Renditen ermittelt.
- Das generierte Portfolio kann mit der Basis Gewichtung und den generierten Indizes dargestellt werden.

In einem weiteren Schritt muss der tägliche Value-at-Risk mit der historischen Simulation ermittelt werden.

MONTE CARLO WERTE					
	ATG1TR Index	REX Index	SX5E Index	MXWO Index	Portfolio
min	-0,75%	-0,94%	-6,32%	-5,06%	-2,78%
max	0,82%	0,97%	9,85%	3,96%	3,48%
Anzahl der Schritte	60	60	60	60	60
Differenz	-1,57%	-1,91%	-16,16%	-9,02%	-6,26%
Intervalllänge	0,000261733	0,000318502	0,002694126	0,001503642	0,001043733

Abbildung 5.12: Monte Carlo Werte mit historischer Simulation

Die oben beschriebenen Schritte müssen mehrmals wiederholt werden. Eine Excel Datentabelle kann genutzt werden, um die einzelnen Schritte zu simulieren und um viele Value-at-Risk zu erzeugen.

Der Value-at-Risk kann nun als Durchschnitt der simulierten Läufe ermittelt werden.

Konfidenz Level	95,00%				
	ATG1TR Index	REX Index	SX5E Index	MXWO Index	Portfolio
Tägl. VaR	0,142%	0,358%	2,264%	1,282%	1,139%
Konfidenzlevel O	95,679%	95,679%	95,679%	95,679%	95,601%
Wert	-0,146%	-0,369%	-2,334%	-1,322%	-1,172%
Konfidenzlevel U	94,108%	94,108%	94,108%	94,108%	94,187%
Wert	-0,136%	-0,344%	-2,172%	-1,230%	-1,093%

Abbildung 5.13: Monte Carlo Value-at-Risk mit historischer Simulation

Vorteile und Nachteile

Die Monte Carlo Simulation ist im Vergleich zu den anderen Methoden sehr flexibel, insbesondere bei der Risikomessung von komplexen Risikofaktoren, sowie bei vielen

Finanzprodukten im Portfolio. Ein großer Nachteil dieser Methode ist der hohe Rechenaufwand und bedingt dadurch die lange Rechenzeit bei großen Portfolios. Es muss ein Gleichgewicht der Geschwindigkeit und der Genauigkeit der Risikomessung gefunden werden. Bei weniger Simulationen kommt es im Wesentlichen zu höheren Schätzfehlern. Für einfache Risikostrukturen empfiehlt es sich, die historische Simulation oder den Varianz-Kovarianz-Ansatz zu verwenden. Bedingt durch die vergleichsweise einfache mathematische Basis der Monte Carlo Simulation und die immer besser werdende Rechnerleistung, erzielt diese Methode eine hohe Anwendungsquote. (vgl. [12], S.265 - S.268)

5.5 Der Vergleich der Modelle

Die nächste Tabelle zeigt die verschiedenen Value-at-Risk Werte mit den verschiedenen Modellen.

	ATG1TR Index	REX Index	SX5E Index	MXWO Index	Portfolio
SMA VaR	0,1418%	0,3575%	2,2511%	1,2775%	0,8881%
EWMA VaR	0,0276%	0,1470%	1,4250%	0,8491%	0,5883%
hist. Simulation VaR	0,1071%	0,3417%	2,2997%	1,2698%	0,8530%
Monte Carlo VaR	0,1421%	0,3575%	2,2618%	1,2808%	1,0680%

Abbildung 5.14: Übersicht der Value-at-Risk Werte mit 95% Konfidenzniveau

	ATG1TR Index	REX Index	SX5E Index	MXWO Index	Portfolio
SMA VaR	0,2006%	0,5056%	3,1838%	1,8067%	1,2561%
EWMA VaR	0,0390%	0,2080%	2,0155%	1,2009%	0,8320%
hist. Simulation VaR	0,2336%	0,5818%	3,7709%	2,2160%	1,5144%
Monte Carlo VaR	0,2004%	0,5056%	3,1908%	1,8133%	1,5181%

Abbildung 5.15: Übersicht der Value-at-Risk Werte mit 99% Konfidenzniveau

	Varianz-Kovarianz-Methode	Historische Simulation	Monte Carlo Simulation
In der Lage das Risiko von Portfolios zu erfassen, die Optionen beinhalten?	Nein. Es sei denn, man berechnet unter Verwendung einer kurzen Periode mit geringer oder mäßiger Optionenanzahl im Portfolio.	Ja. Unabhängig von der Anzahl der Optionen.	Ja. Unabhängig von der Anzahl der Optionen.
Einfache Implementierung?	Ja, für Portfolios beschränkt auf Währungen und Finanzinstrumente, die durch eine Standard-Software abgedeckt sind. Ansonsten mittelschwer umzusetzen, abhängig von der Komplexität der Finanzprodukte und der Verfügbarkeit der Daten.	Ja, für Portfolios, wo vergangenen Daten der Marktfaktoren zur Verfügung stehen.	Ja, für Portfolios beschränkt auf Währungen und Finanzinstrumente, die durch eine Standard-Software abgedeckt sind. Ansonsten mäßig bis extrem schwer umzusetzen.
Schnelle Berechnung des VaR?	Ja.	Ja.	Nein, mit Ausnahme von sehr kleinen Portfolios.
VaR-Methode einfach der Geschäftsleitung zu erklären?	Nein.	Ja.	Nein.
Generiert eine irreführende VaR Schätzung, wenn die jüngere Vergangenheit der Daten untypisch ist?	Ja, wenn angenommen wird, dass die alternative Korrelation/ Standardabweichung verwendet wird.	Ja.	Ja, wenn angenommen wird, dass alternative Schätzungen von den Parametern verwendet werden.
Szenario-Analyse	Alternative Annahmen über die Korrelationen und die Standardabweichung können überprüft werden. Alternative Annahmen über die Verteilung der Marktfaktoren können nicht untersucht werden, also andere als die Normalverteilung.	Nein.	Ja.

Abbildung 5.16: Übersicht der Methoden zur Berechnung des VaR

5.6 Unterschiedliche Value-at-Risk

5.6.1 Incremental VaR

Der Incremental VaR misst die Auswirkungen von kleinen Veränderungen einzelner Positionen auf den Gesamt-VaR.

Full Valuation Ansatz

Im Full Valuation Ansatz wird der gesamte Prozess für die Berechnung des Value-at-Risk auf der Grundlage der geänderten Positionen im Portfolio neu ermittelt. Der Value-at-Risk wird in diesem Fall zweimal berechnet. Der Incremental VaR stellt die Differenz zwischen dem ursprünglichen Value-at-Risk und dem neuen Value-at-Risk dar.

Portfolio Basis					
Stichtag:	28.10.2014				
	ATG1TR Index	REX Index	SX5E Index	MXWO Index	Portfolio
Preis:	277,16	137,76	3 036,15	1 322,35	
Menge:	500	1000	50	200	
Ertrag:	138 582,00	137 756,40	151 807,50	264 469,74	692 615,64
Gewichtung:	20,01%	19,89%	21,92%	38,18%	100,00%

Abbildung 5.17: Basis Portfolio

Der ursprüngliche Portfoliowert beträgt 692.615,64. Der tägliche SMA Value-at-Risk liegt bei 0,8881%. Der Portfolio VaR Wert wird als Multiplikation der beiden Ergebnisse berechnet und liegt somit bei 6.151,17.

Geht man von einer Steigerung um 1% in allen Positionen, bezogen auf den Gesamtportfoliowert, aus (Steigerung um 6.926,16 in allen Positionen), dann sieht das neu berechnete Portfolio folgendermaßen aus:

Full valuation approach					
%-Wachstum	1,00%				
	ATG1TR Index	REX Index	SX5E Index	MXWO Index	Portfolio
Positionen neu	145 508,16	144 682,56	158 733,66	271 395,90	720 320,27
Gewichtung neu	20,20%	20,09%	22,04%	37,68%	100,00%
Neu SMA tägl. Volatilität	0,08623%	0,21733%	1,36860%	0,77664%	0,53774%
Neu SMA tägl. VaR	0,14183%	0,35748%	2,25114%	1,27746%	0,88451%
Neuer Portfolio VaR Wert	6 371,28				
Incremental VaR	220,11				

Abbildung 5.18: Portfolio mit neuer Gewichtung und IVaR

Des Weiteren wird das Portfolio mit neuer Gewichtung berechnet und anschließend wieder mit der STABW() Funktion die tägliche Volatilität berechnet. Anschließend wird die Volatilität mit α wieder multipliziert und das Ergebnis des neu berechneten Value-at-Risk liegt bei 0,88451%.

Der neue Portfolio VaR Wert beträgt 6.371,28 und somit liegt der Incremental VaR bei 220,11.

5.6.2 Marginal VaR

Der Marginal VaR misst die potenzielle Veränderung des Gesamt VaR, bei kompletter Entfernung einer Position aus dem Portfolio. Die Grundlage bildet das Basis Portfolio und deren Gewichtung. Im nächsten Schritt wird je eine Position im Portfolio entfernt und eine neue Gewichtung berechnet.

Gewichtung ohne						Summe
ATG1TR Index	0,00%	24,86%	27,40%	47,74%	100,00%	554 033,64
REX Index	24,98%	0,00%	27,36%	47,66%	100,00%	554 859,24
SXSE Index	25,62%	25,47%	0,00%	48,90%	100,00%	540 808,14
MXWO Index	32,37%	32,18%	35,46%	0,00%	100,00%	428 145,90

Abbildung 5.19: Portfolio mit neuer Gewichtung

Anschließend werden neue Portfolio Renditen, bezogen auf die veränderten Gewichtungen, berechnet. Mit diesen neuen Werten wird die Volatilität, der VaR in % und der Portfolio VaR Wert berechnet.

Konfidenz Intervall	95%				
	Portfolio ohne ATG1TR Index	Portfolio ohne REX Index	Portfolio ohne SXSE Index	Portfolio ohne MXWO Index	Portfolio original Gewichtung
Portfoliowert	554 033,64	554 859,24	540 808,14	428 145,90	692 615,64
Tägl. VaR Wert	6 173,71	6 261,08	3 319,82	3 272,98	6 151,17
Tägl. VaR%	1,114%	1,128%	0,614%	0,764%	0,888%
Tägl. SMA Volatility	0,677%	0,686%	0,373%	0,465%	0,540%
Marginal VaR	22,54	109,91	- 2 831,35	- 2 878,19	-

Abbildung 5.20: Marginal VaR

Der Marginal VaR, wenn der MXWO Index nicht im Basis Portfolio ist, beträgt 2.828,19. Das bedeutet, der VaR Wert wird um diese Zahl reduziert.

Es gilt zu beachten, dass der Portfolio VaR gestiegen ist, der Portfoliowert (auf den sich der VaR Prozentsatz bezieht) sich allerdings reduziert hat, woraus eine generelle Verringerung des Gesamt VaR resultiert.

5.6.3 Conditional VaR

Der Conditional VaR misst den Durchschnittsverlust in Bezug zu den Value-at-Risk bei einem gegebenen Konfidenzniveau. Es wird der VaR Prozentwert aus der historischen Simulation herangezogen. Anschließend wird der VaR Wert für jeden Index berechnet.

Im nächsten Schritt wird für jede Rendite die Menge des Verlusts in Bezug zu dem Ertrag des Index berechnet. Ist der Rückgabewert negativ, so wird der Verlust ermittelt. Wenn der Rückgabewert positiv ist, wird eine Null zurückgegeben.

Als Nächstes wird der Conditional Loss ermittelt. Der Conditional Loss wird mit einer WENN Funktion berechnet, diese basiert auf der Bedingung, wenn der Verlust größer ist als der VaR Wert des Index, dann wird der Verlust zurückgegeben. Ist der Verlust allerdings kleiner, wird eine 0 ausgegeben. Zusammengefasst kann gesagt werden, dass nur die Verluste, die den VaR Wert übertreffen, in Betracht gezogen werden.

Des Weiteren wird der gewichtete durchschnittliche VaR ermittelt, wobei die Gewichtung auf dem bedingten Verlust basiert.

Dies kann als Summenprodukt der Renditen mit der Reihe des Conditional Losses dargestellt werden. Das Ergebnis wird dividiert durch die Summe der Conditional Losses. Dieser durchschnittliche VaR % wird als Conditional VaR bezeichnet werden. Wenn der Conditional VaR mit dem Indexwert oder dem Portfoliowert multipliziert wird, erhält man den Conditional VaR Wert. Dieser entspricht der durchschnittlichen Schadenshöhe, die den VaR Wert überschreitet.

Daily VaR	0,107%	0,342%	2,300%	1,270%	0,853%
VaR Amount	148,41	470,70	3491,16	3358,20	5908,25
Conditional VaR	0,278%	0,524%	3,457%	2,088%	1,366%
Conditional VaR Amount	385,46	722,26	5247,39	5522,65	9460,98
Durchschn. Verlust über dem Daily VaR	280,95	659,96	4 881,93	4 919,35	8 555,12

Abbildung 5.21: Conditional VaR

5.6.4 Probability of Shortfall

Wie in Kapitel 4.4.3 beschrieben, entspricht der Conditional VaR dem Expected Shortfall, wenn eine stetige Verteilung zugrunde liegt.

Die Probability of Shortfall misst die Wahrscheinlichkeit, mit der die Anlagerenditen ein bestimmtes vorgegebenes Ziel nicht erreichen oder alternativ die Wahrscheinlichkeit, mit der die Anlagerenditen unter eine bestimmte Grenze fallen.

Als Zielsetzung kann angenommen werden, dass die Positionen oder die Portfolio Renditen nicht negativ und stets größer als Null sein sollten.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Renditen mit zugrunde liegender Verteilung negativ sind?

Mit der Histogramm Darstellung der historischen Simulation wurde bereits eine kumulative Häufigkeit von Renditen dargestellt, die kleiner oder gleich einem bestimmten Wert sind. Des Weiteren muss die kumulative Häufigkeit der Renditen ermittelt werden, die kleiner oder gleich 0 sind.

Für den REX Index beträgt der Shortfall 44,698%. Die Ergebnisse der einzelnen Indizes und des Portfolio werden in der nächsten Tabelle dargestellt.

Konfidenzintervall	99,00%				
	ATG1TR Index	REX Index	SX5E Index	MXWO Index	Portfolio
Expected Shortfall	33,071%	44,698%	44,148%	37,863%	40,063%

Abbildung 5.22: Shortfall mit 99% Konfidenzniveau

Kapitel 6

Conclusio

Ein strategisch gut aufgesetztes Risikomanagement, muss sich mit den unterschiedlichen Risikokennzahlen befassen. Nur so ist es möglich, eine adäquate Abbildung des Risikos für ein Finanzunternehmen zu erlangen. Durch die gesetzlichen Rahmenlinien sind Value-at-Risk, Stressed Value-at-Risk und Expected Shortfall wichtige Komponenten des Risikomanagementprozesses. Die Arbeit hat aufgezeigt, dass die unterschiedlichen Risikomaße sowohl Vor-, als auch Nachteile aufweisen.

Geeignete Risikomaße sollen die Anforderungen der Kohärenz erfüllen. Der Value-at-Risk erfüllt diese Eigenschaft nicht, da er im Allgemeinen nicht subadditiv ist. Dennoch ist der Value-at-Risk das meist eingesetzte Risikomaß. Die vier Kohärenzaxiome sind nicht einschränkend genug, um das 'beste' Risikomaß angeben zu können. Der Expected Shortfall ist ein kohärentes Risikomaß und ist in der Lage, im Gegensatz zum Value-at-Risk, Tail-Ereignisse zu erfassen. Nachteilig ist aber, dass das Backtesting des Expected Shortfall kompliziert ist, im Vergleich zum Value-at-Risk. Für diese Problemstellung gibt es allerdings eine Reihe von Ansätzen, um sie zu umgehen. Es werden auch Expektile beschrieben, die ein alternatives Risikomaß zum Expected Shortfall darstellen. Da ihr zugrundeliegendes Konzept weniger intuitiv ist, als das des VaR und des Expected Shortfall, wird dieses Risikomaß weniger Einsatz im Finanzbereich finden. Laut [Tasche] ist der Expected Shortfall das beste Risikomaß für den Einsatz in der Praxis.

Die Entscheidung, welches Risikomaß nun konkret verwendet wird, sollte auch immer im Kontext der jeweiligen wirtschaftlichen Situation, sowie dem zu messenden Risiko getroffen werden. Es lohnt sich immer, die anderen Risikomaße als Alternative zu betrachten. Der Value-at-Risk und der Expected Shortfall sind bei normalen Marktbedingungen adäquate Risikomaße für die Messung des Risikos im Finanzbereich.

Für die Ermittlung des Value-at-Risk gibt es unterschiedliche Methoden. Es kann zwischen dem parametrischen und dem nichtparametrischen Ansatz unterschieden werden. Eine der bekanntesten parametrischen Methoden ist das Varianz-Kovarianz-Modell. Der Varianz-Kovarianz Ansatz kann für die Berechnung des Value-at-Risk

bei einfachen Risikostrukturen verwendet werden. Die historische Simulation zählt zu den nicht parametrischen Ansätzen zur Schätzung des Value-at-Risk. Ein großer Vorteil dieser Methode ist die einfache Implementierung. Ein Ansatz, der immer mehr zum Einsatz kommt, ist die Monte Carlo Simulation. Diese Methode ist sehr flexibel und ihre Verwendung empfiehlt sich besonders bei komplexen Risikofaktoren. Alle Methoden weisen Vor- und Nachteile auf, jedoch wird sich das Einsatzgebiet der Monte Carlo Simulation im Finanzbereich immer weiter vergrößern.

Abbildungsverzeichnis

4.1	Überblick der Eigenschaften der Risikomaße	30
5.1	Das Basis Portfolio	33
5.2	Volatilität mit Simple Moving Average Ansatz	34
5.3	EWMA Varianz und EWMA Volatilität	35
5.4	Value-at-Risk mit EWMA Ansatz und SMA Ansatz	35
5.5	Histogramm des ATG1TR Index - Öst. Staatsanleihen	38
5.6	Histogramm des REX Index - Deutsche Anleihen	38
5.7	Histogramm des SX5E Index - Aktienindex Europa	39
5.8	Histogramm des MSCI World Index - Aktienindex weltweit	39
5.9	Histogramm für das Portfolio	40
5.10	Historische Simulation	40
5.11	Value-at-Risk mit historischer Simulation	41
5.12	Monte Carlo Werte mit historischer Simulation	43
5.13	Monte Carlo Value-at-Risk mit historischer Simulation	43
5.14	Übersicht der Value-at-Risk Werte mit 95% Konfidenzniveau	44
5.15	Übersicht der Value-at-Risk Werte mit 99% Konfidenzniveau	44
5.16	Übersicht der Methoden zur Berechnung des VaR	45
5.17	Basis Portfolio	46
5.18	Portfolio mit neuer Gewichtung und IVaR	46
5.19	Portfolio mit neuer Gewichtung	47
5.20	Marginal VaR	47
5.21	Conditional VaR	48
5.22	Shortfall mit 99% Konfidenzniveau	49

Literaturverzeichnis

- [1] Acerbi C., Tasche D., On the coherence of Expected Shortfall, 2002
- [2] Artzner P., Delbaen F., Eber J., & Heath D., Coherent Measures of Risk, Mathematical Finance, Volume 9 (3), 1999
- [3] Bellini F., Klar B., Müller A., and Rosazza Gianin E., Generalized quantiles as risk measures. Insurance: Mathematics and Economics 54, (2014) 41-48.
- [4] Bellini F., Bignozzi V., On Elicitable Risk Measures. Quantitative Finance, (2014) forthcoming.
- [5] Böck Ch., VRG-Risikoanalyse - Berechnung und Analyse des Value at Risk, Masterarbeit, Technische Universität Wien, 2008
- [6] Cont R., Deguest R., Scandolo G., Robustness and sensitivity analysis of risk measurement procedures. Quantitative Finance 10(6), (2010) 593-606.
- [7] Embrechts P., Frey R., McNeil A.J., Quantitative Risk Management; Princeton University Press, 2005
- [8] Emmer S., Kratz M., Tasche D., What is the best risk measure in practice? A comparison of standard measures, 2014
- [9] Föllmer H., Schied A., Stochastic Finance - An Introduction in discrete Time, Walter de Gruyter GmbH, Berlin, 2004
- [10] Hull J., Risk management and financial institutions, Pearson/Prentice Hall, 2007
- [11] Hull J., Risikomanagement, Banken, Versicherungen und andere Finanzinstitutionen, Pearson Studium, München, 2011
- [12] Jorion P., Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk, 3rd Edition, The McGraw-Hill Companies, 2007
- [13] Keitsch D., Risikomanagement, Schäffer-Poeschel, Stuttgart, 2000
- [14] Kriele M., Wolf J., Wertorientiertes Risikomanagement von Versicherungsunternehmen, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2012

- [15] Newey W., Powell J., Asymmetric least squares estimation and testing. *Econometrica* 55(4), (1987) 819-847
- [16] Rüstmann M., Risikomanagement in der Finanzbranche; Vom Umgang der Banken, Versicherungen, Pensionskassen und Vermögensverwalter mit Risiken, Versus, Zürich, 2012
- [17] Stahl G., Zheng J., Kiesel R., Rühlicke R., Conceptualizing Robustness in Risk Management. 2012 SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2065723>.
- [18] Strohbücker S., Bepreisen von Preis- und Mengenrisiken der Strombeschaffung unter Berücksichtigung von Portfolioaspekten bei Großkunden im Strommarkt, Gabler Verlag, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2011
- [19] Tasche D., Expected Shortfall and Beyond, *Journal of Banking & Finance* 26(7), 2002
- [20] Theiler U., Optimierungsverfahren zur Risk-, Return-Steuerung der Gesamtbank, Deutscher Universitätsverlag
- [21] Yamai Y., Yoshida T., Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective, *Journal of Banking & Finance* 29 (2005) 997–1015
- [22] Ziegel J.F., Coherence and Elicitability, *Mathematical Finance*, 2014

Onlinequellen

- [23] Basel Committee on Banking Supervision, Fundamental review of the trading book; www.bis.org/publ/bcbs219.pdf, Stand: 21.04.2015
- [24] Bundesbank, Leitfaden - Bankenaufsicht Basel III ;www.bundesbank.de, Stand: 21.04.2015
- [25] Europäische Kommission, Banken und Finanzwesen, Solvabilität II, www.ec.europa.eu, Stand: 21.04.2015
- [26] Finanzen, Zinsen, REX-Preformance-Index, <http://www.finanzen.net/zinsen/REX-Performance-Index>, Stand: 01.03.2015
- [27] Finanzen, Index, EuroStoxx 50, www.finanzen.at/index/EuroStoxx50, Stand: 01.03.2015
- [28] Solvency II kompakt, das aktuelle Kompetenzportal zu Solvency II; www.solvency-ii-kompakt.de; Stand: 21.04.2015
- [29] Wienerbörse, Publikationen, Bundesanleihen , <http://www.wienerborse.at/static/cms/sites/wbag/media/de/pdf/service/publikationen/bundesanleihen.pdf>, Stand: 01.03.2015

-
- [30] Wikipedia, MSCI World, <http://de.wikipedia.org/wiki/MSCIWorld>, Stand: 01.03.2015

