Unterschrift der Betreuers

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

Masterarbeit

A-Posteriori-Fehlerschätzer des Discontinuous-Galerkin-Verfahrens für die Space-Time-Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung

Ausgeführt am Institut für

Analysis und Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Jens Markus Melenk, PhD

durch

Bernhard Erwin STIFTNER
Praterstraße 8/14, 1020 Wien

8. Februar 2015

Bernhard Erwin STIFTNER

Danksagung

Ich möchte mich besonders bei Herrn Prof. Melenk für das Thema und für die sehr gute Betreuung der Arbeit bedanken. Bei unseren wöchentlichen Terminen ist es ihm stets gelungen mich “in die richtige Richtung zu stoßen“. Mein Dank gilt auch den vielen Freunden und Kollegen, die mich während schwierigeren Phasen dieser Masterarbeit “ertragen“ mussten und mich immer wieder motiviert haben. Last but not least möchte ich mich ganz besonders bei meinen Eltern bedanken. Beide hatten es gewiss nicht immer leicht und haben sehr hart gearbeitet um sich und mir eine Existenz aufzubauen. Ich durfte so studieren und empfinde das als ein Privileg.

Wien, am 8. Februar 2015 Bernhard Erwin Stiftner

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Das zentrale Problem dieser Arbeit ist die numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Die Wärmeleitungsgleichung ist der Prototyp einer linearen parabolischen partiellen Differentialgleichung mit wichtigen Anwendungen in der Physik. Die numerische Analysis für die Wärmeleitungsgleichung lässt sich in vielen Fällen auf allgemeinere lineare parabolische Differentialgleichungen übertragen. In unserem Fall sei

Voraussetzung V 1.

$$T > 0 \text{ und } \Omega \in \mathbb{R}^2 \text{ ein beschränktes, konvexes Gebiet.}$$

Wir betrachten das Problem:

Problem P 1.

$$u_t(t,x) - \Delta_x u(t,x) = f(t,x) \qquad \forall (t,x) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$u(t,x) = 0 \qquad \forall (t,x) \in \partial\Omega \times [0,T), \tag{2}$$

$$u(0,x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega. \tag{3}$$

In (2) und (3) haben wir als Vereinfachung gefordert, dass die Lösung am Rand und zum Anfangszeitpunkt verschwindet. Das Problem kann wie in [11], Kapitel 7, [12], oder [32] schwach formuliert und gelöst werden. Ein Ansatz für die näherungsweise Berechnung der schwachen Lösung ist die Finite-Elemente-Methode (FEM). Dabei wird die Lösung in einem endlichdimensionalen Raum approximiert. Für die Berechnung dieser Lösung muss dann ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Eine Variante der FEM ist das Discontinuous-Galerkin-Verfahren (DG). Dabei wird die schwache Lösung- wie der Name schon sagt- durch nicht-stetige Funktionen approximiert. In dieser Arbeit wählen wir dafür wie in [12] den Ansatz der Space-Time-Diskretisierung- d.h. wir approximieren sowohl in der Zeit- als auch in der Ortsrichtung durch stückweise Polynome. Damit dieses DG-Verfahren wohldefiniert ist, muss nicht unbedingt $f \in C^\infty\left(\overline{\Omega_T}\right)$ gelten. Es reicht uns dafür

Voraussetzung V 2.

$$f \in L^2(\Omega_T) \tag{4}$$

Ein wichtiger Bereich der Theorie zur FEM sind die A-Posteriori-Fehlerschätzer. A-Posteriori-Fehlerschätzer geben obere oder untere Schranken den Fehler der FEM oder speziell des DG-Verfahrens an. Das Hauptresultat dieser Arbeit sind 2 obere Schranken für den Fehler des volldiskreten DG-Verfahrens. Dazu werden in Kapitel 2 das Gebiet geeignet zerlegt und die wesentlichen Funktionenräume eingeführt. In Kapitel 3 geben wir die schwache Formulierung von Problem P 1 an, leiten die schwache Formulierung des DG-Verfahren her und fassen einige Aussagen über die Lösbarkeit der schwachen Formulierung und des DG-Verfahrens zusammen. In Kapitel 4 führen wir die zuverlässigen A-Posteriori-Fehlerschätzer ein. Zwei verschiedene Ansätze führen uns auf zwei obere Schranken für den Fehler des DG-Verfahrens. Der erste Ansatz ist eine Verallgemeinerung der Arbeit [18] von der Laplacegleichung auf die Wärmeleitungsgleichung. Der zweite Ansatz ist eine Verallgemeinerung von [22] und [32] vom semidiskret-parabolischen auf den volldiskreten Ansatz. In Kapitel 5 testen wir das Verhalten der beiden Abschätzungen. Kapitel 6 fasst einige mögliche zukünftige Überlegungen zum Thema dieser Arbeit zusammen.

2. Grundlagen

2.1. Zerlegung des Gebiets

Eine wichtige Vorarbeit zur Bestimmung des endlichdimensionalen Raum von unstetigen Funktionen im DG-Verfahren ist die Bestimmung von geeigneten Zerlegungen von Ω_T. Später werden die Funktionen auf den einzelnen Elementen dieser Zerlegungen stetig sein. Wir zerlegen das Zeitintervall $(0, T)$ in Intervalle und Ω in Dreiecke. Eine Zerlegung von Ω_T entsteht dann in natürlicher Weise.

Definition 2.1.1 (Zerlegung, erzeugte Zerlegung)**.** (i) Ein Mengensystem $\mathcal{M} := \bigcup_{i=0}^{M} \{(t_n, t_{n+1})\}$ mit $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{M+1} = T$ heißt Zerlegung des Zeitintervalls.

(ii) Ein Mengensystem $\mathcal{K}$ mit $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ für $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ und $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} \overline{K} = \overline{\Omega}$ heißt Zerlegung von Ω.

(iii) Sei $\mathcal{K}$ eine Zerlegung von Ω und $\mathcal{M}$ eine Zerlegung des Zeitintervalls. Das Mengensystem $\mathcal{K}^{\mathcal{M}} := \left(K^{(n)}\right)_{K \in \mathcal{K}}^{n \in \{0,1,\ldots,M\}}$ mit $K^{(n)} := (t_n, t_{n+1}) \times K$ heißt die von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{K}$ auf Ω_T erzeugte Zerlegung.

Bis jetzt haben wir an die Form der Elemente der Zerlegung $\mathcal{K}$ von Ω noch keine Forderungen gestellt. Einige Regularitätsvoraussetzungen sind aber aus beweistechnischen Gründen aber notwendig. Wir gehen ähnlich wie in [35] vor.

Definition 2.1.2 (Affine-äquivalente Zerlegung)**.** Sei $K_0 := \operatorname{conv}\{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ das Referenzelement in $\mathbb{R}^2$. Eine Zerlegung $\mathcal{K}$ von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ wird affin-äquivalent genannt, wenn es für jedes Element $K \in \mathcal{K}$ eine bijektive affine Abbildung T_K gibt, mit $T_K(K) = K_0$.

Voraussetzung V 3. Indem wir für eine Zerlegung $\mathcal{K}$ von Ω affine Äquivalenz fordern, haben wir implizit gefordert, dass das Gebiet Ω eine Vereinigung von Dreiecken ist. Wir wollen uns in dieser Arbeit auf solche Gebiete Ω beschränken.

Bemerkung 2.1.3. Mit Voraussetzung V 1 und V 3 ist Ω ein Gebiet mit stückweise glattem Rand. Damit ist Ω in der Notation von [4], Seite 31 insbesondere ein Lipschitzgebiet und erfüllt eine Kegelbedingung. Für die Elemente K einer affin-äquivalenten Zerlegung $\mathcal{K}$ gilt das genauso.

Definition 2.1.4 (Knoten einer Zerlegung)**.** Sei $\mathcal{K}$ eine affin-äquivalente Zerlegung von Ω und $V_0 := \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ die Menge der Einheitsknoten. Bezeichne

(i) mit $\mathcal{N}_{\mathcal{K}} := \bigcup_K T_K(V_0)$ die Menge der Knoten von $\mathcal{K}$,

(ii) mit $\mathcal{N}_{\mathcal{K},\mathcal{I}} := \mathcal{N}_{\mathcal{K}} \cap \Omega$ die Menge aller inneren Knoten von $\mathcal{K}$ und mit

(iii) und mit $\mathcal{N}_{\mathcal{K},\mathcal{B}} := \mathcal{N}_{\mathcal{K}} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{K},\mathcal{I}} = \mathcal{N}_{\mathcal{K}} \cap \partial\Omega$ die Menge aller äußeren Knoten von $\mathcal{K}$.

Definition 2.1.5 (Kanten einer Zerlegung)**.** Sei $\mathcal{K}$ eine affin-äquivalente Zerlegung von Ω.

(i) Seien $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ zwei Elemente, sodass $e := \overline{K_1} \cap \overline{K_2}$ eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, dann wird e eine innere Kante von $\mathcal{K}$ genannt. Die Menge aller inneren Kanten einer Zerlegung wird mit $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ bezeichnet.

(ii) Sei $K \in \mathcal{K}$ ein Element, sodass $e := \overline{K} \cap \partial\Omega$ eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, dann wird e äußere Kante von $\mathcal{K}$ genannt. Die Menge aller äußeren Kanten einer Zerlegung wird mit $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ bezeichnet.

(iii) Die Menge $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} := \mathcal{I}_{\mathcal{K}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ heißt die Menge aller Kanten einer Zerlegung $\mathcal{K}$ von Ω.

Sei zusätzlich $\mathcal{M}$ eine Zerlegung des Zeitintervalls und $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ die von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{K}$ erzeugte Zerlegung.

(iv) Setze

$$\mathcal{E}_x^{\mathcal{M},\mathcal{K}} := \left\{ e^{(n)} := (t_n, t_{n+1}) \times e : e \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}, n \in \{0, \dots, M\} \right\}$$

die Menge der Ortskanten,

$$\mathcal{E}_t^{\mathcal{M},\mathcal{K}} := \{\{t_n\} \times K : K \in \mathcal{K}, n \in \{0, \dots, M+1\}\}$$

die Menge der Zeitkanten und $\mathcal{E}^{\mathcal{M},\mathcal{K}} := \mathcal{E}_x^{\mathcal{M},\mathcal{K}} \cup \mathcal{E}_t^{\mathcal{M},\mathcal{K}}$ die Menge der Kanten von $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$.

Definition 2.1.6 (Knoten-Patches, Kanten-Patch, Element-Patch)**.** Sei $\mathcal{M}$ eine Zerlegung des Zeitintervalls, $\mathcal{K}$ eine affin-äquivalente Zerlegung von Ω und $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ die von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{K}$ erzeugte Zerlegung.

(i) Für $x \in \Omega$ bzw. $(t, x) \in \Omega_T$ heißt die Menge

$$\omega_x := \bigcup \left\{ K : x \in \overline{K} \right\} \text{ bzw. } \omega_{(t,x)} := \bigcup \left\{ K^{(n)} : x \in \overline{K^{(n)}} \right\}$$

der Punkt-Patch von x bzw. (t, x),

(ii) für $e \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ bzw. $e_T \in \mathcal{E}^{\mathcal{M},\mathcal{K}}$ weiter

$$\omega_e := \bigcup \left\{ K : \overline{K} \cap e \neq \emptyset \right\} \text{ bzw. } \omega_{e_T} := \bigcup \left\{ K^{(n)} : \overline{K^{(n)}} \cap e_T \neq \emptyset \right\}$$

der Kanten-Patch von e bzw. e_T und

(iii) für $K \in \mathcal{K}$ bzw. $K^{(n)} \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ dann

$$\omega_K := \bigcup \left\{ K_1 : \overline{K_1} \cap \overline{K} \neq \emptyset \right\} \text{ bzw. } \omega_{K^{(n)}} := \bigcup \left\{ \mathcal{K}_1^{(n_1)} : \mathcal{K}_1^{(n_1)} \cap \overline{K^{(n)}} \neq \emptyset \right\}$$

der Element-Patch von K bzw. $K^{(n)}$.

Definition 2.1.7 (Durchmesser, Kantenlänge, Zeitschrittweite, globale Schrittweiten)**.** Sei $\mathcal{K}$ eine affin-äquivalente Zerlegung von Ω. Wir nennen

(i) $h_K := \operatorname{diam}(K)$ den Durchmesser des Elements $K \in \mathcal{K}$ von $\mathcal{K}$,

(ii) $h_e := \frac{1}{2}\left(h_{K_+} + h_{K_-}\right)$ die Kantenlänge einer inneren Kante $e \in \mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ von $\mathcal{K}$, wenn $e = K_+ \cap K_-$ für $K_+, K_- \in \mathcal{K}$ gilt und $h_e := h_K$ die Kantenlänge einer äußeren Kanten $e \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$, wenn $e = \overline{K} \cap \partial\Omega$ für $K \in \mathcal{K}$,

(iii) $h_{\mathcal{K}} := \max\limits_{K \in \mathcal{K}} h_K$ die globale Schrittweite von $\mathcal{K}$.

Sei zusätzlich $\mathcal{M}$ eine Zerlegung des Zeitintervalls und $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ die von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{K}$ erzeugte Zerlegung.

(iv) $\tau_n := t_{n+1} - t_n$ die Zeitschrittweite von $K^{(n)}$ für $K \in \mathcal{K}$,

(v) $\tau_{\mathcal{M}} := \max\limits_{n<M} \tau_n$ die globale Zeitschrittweite von $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ und

Definition 2.1.8 (Reguläre Zerlegung)**.** Eine Zerlegung $\mathcal{K}$ von Ω eine wird regulär genannt, wenn sie

- affin-äquivalent ist und
- es keine hängenden Knoten gibt, d.h.

$$T_K(V_{0,d}) = \overline{K} \cap \mathcal{N}_{\mathcal{K}} \quad \forall K \in \mathcal{K}$$

Definition 2.1.9 (Nummerierung)**.** Sei $\mathcal{K}$ eine reguläre Zerlegung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Eine beliebige aber feste, bijektive Abbildung

$$\alpha_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \{1, \ldots, |\mathcal{K}|\}$$

heißt Nummerierung von $\mathcal{K}$.

Die Nummerierung α_K einer regulären Zerlegung $\mathcal{K}$ von Ω erlaubt es nun für eine Kante $e \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ einen Normalvektor definieren.

Definition 2.1.10 (Normalvektor einer Kante)**.** Sei $\mathcal{K}$ eine reguläre Zerlegung von Ω und $\alpha_{\mathcal{K}}$ die Nummerierung von $\mathcal{K}$.

(i) Für $e \in \mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ seien $K_+, K_- \in \mathcal{K}$ die beiden Elemente für die $e = \overline{K_+} \cap \overline{K_-}$ gilt mit $\alpha_{\mathcal{K}}(K_+) > \alpha_{\mathcal{K}}(K_-)$, Sei n_{K_+}. der äußere Normalvektor von e an K_+ und n_{K_+} die äußere Normale von e an K_-, dann heißt $n_e := n_{K_+}$ der Normalvektor der Kante $e \in \mathcal{I}_{\mathcal{K}}$.

(ii) Ist $e \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$, dann sei $K \in \mathcal{K}$ das Element, für das $e = \overline{K} \cap \partial\Omega$ und n_K der äußere Normalvektor von e an K. Setze dann $n_e := n_K$ als Normale der Kante $e \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}}$.

Bemerkung 2.1.11. Für eine reguläre Zerlegung $\mathcal{K}$ wird durch die Nummerierung $\alpha_{\mathcal{K}}$ aus Definition 2.1.10 lediglich das Vorzeichen des Normalvektors an die Kante $e \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ festgelegt. In anderen Worten bestimmen wir für Kanten $e \in \mathcal{I}_K$, welches der beiden Elemente $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ mit $\overline{K_1} \cap \overline{K_2} = e$ "außen" liegt. Diese Bestimmung denken wir uns zu jeder regulären Zerlegung $\mathcal{K}$ mit der beliebigen aber festen Abbildung $\alpha_{\mathcal{K}}$ dazu. In Kapitel 4 ist in den Beweisen der Abschätzungen und in den Abschätzungen selbst das tatsächliche Aussehen dieser Nummerierung nicht relevant.

Voraussetzung V 4. Für den Rest der Arbeit sei $(\mathcal{M}_\tau)_{\tau \le \tilde{\tau}}$ eine Familie von Zerlegungen des Zeitintervalls $(\mathcal{K}_h)_{h \le \tilde{h}}$ von Zerlegungen von Ω. Dann ist $\left(\mathcal{K}_h^{\mathcal{M}_\tau}\right)_{h \le \tilde{h}}^{\tau \le \tilde{\tau}}$ eine Familie von Zerlegungen von Ω_T. Wir fordern

(i) $\tau_{\mathcal{M}_\tau} = \tau$ für alle $\tau \le \tilde{\tau}$,

(ii) $(\mathcal{M}_\tau)_{\tau \le \tilde{\tau}}$ ist lokal quasi-uniform, d.h. es existiert eine Konstante $C_{\text{uni},t} > 0$

$$\sup_{\tau \le \tilde{\tau}} \max_{n \in \{1,\dots,|\mathcal{M}_\tau|-1\}} \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} + \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} \le C_{\text{uni},t}$$

(iii) $h_{\mathcal{K}_h} = h$ für alle $h \le \tilde{h}$,

(iv) $\mathcal{K}_h$ ist affin-äquivalent für alle $h \le \tilde{h}$,

(v) $\mathcal{K}_h$ hat keine hängenden Knoten für alle $h \le \tilde{h}$,

(vi) $(\mathcal{K}_h)_{h \le \tilde{h}}$ ist gleichmäßig formregulär, d.h. es existiert Konstante $C_{\text{shape}} > 0$, sodass

$$\sup_{h \le \tilde{h}} \sup_{K \in \mathcal{K}_h} \frac{|h_K|^d}{|K|} \le C_{\text{shape}},$$

Bemerkung 2.1.12. (i) Um die Notation zu vereinfachen schreiben wir für die Familie $(\mathcal{K}_h)_{h \le \tilde{h}}$ aus Voraussetzung V 4 h statt $h_{\mathcal{K}_h}$ und τ statt $\tau_{\mathcal{M}_\tau}$. Für die Kanten

setzen wir weiter $\mathcal{I}_h = \mathcal{I}_{\mathcal{K}_h}$, $\mathcal{B}_h = \mathcal{B}_{\mathcal{K}_h}$ und $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_{\mathcal{K}_h}$. Für die Knoten schreiben wir $\mathcal{N}_h$ statt $\mathcal{N}_{\mathcal{K}_h}$, für die inneren Knoten $\mathcal{N}_{h,\mathcal{I}}$ statt $\mathcal{N}_{\mathcal{K}_h,\mathcal{I}}$ und für die äußeren Knoten $\mathcal{N}_{h,\mathcal{B}}$ statt $\mathcal{N}_{\mathcal{K}_h,\mathcal{B}}$. Analog zur Definition 2.1.1 schreiben wir schließlich $M_\tau := |\mathcal{M}_\tau| - 1$.

(ii) Punkt (iv) und (v) in Voraussetzung V 4 bedeuten, dass $\mathcal{K}_h$ für jedes $h \leq \tilde{h}$ eine reguläre Zerlegung ist.

(iii) Aus Punkt (vi) in Voraussetzung V 4 folgt wie in [24], dass es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt mit

$$C_1 \leq \sup_{h \leq \tilde{h}} \sup_{K \in \mathcal{K}_h, e \in \mathcal{E}} \frac{|h_K|}{\operatorname{diam} e} \leq C_2$$

und dass die Mächtigkeit der Punkt-Patches, der Kanten-Patches und der Element-Patches in $(\mathcal{K}_h)_{h \leq \tilde{h}}$ gleichmäßig beschränkt ist. Es gilt also

$$\sup_{h \leq \tilde{h}} \sup_{x \in \mathcal{N}_h} |\omega_K| < \infty$$

und

$$\sup_{h \leq \tilde{h}} \sup_{e \in \mathcal{E}_h} |\omega_e| < \infty$$

und

$$\sup_{h \leq \tilde{h}} \sup_{K \in \mathcal{K}_h} |\omega_K| < \infty$$

Im Wesentlich folgen diese Abschätzungen aus der Tatsache, dass bei gleichmäßiger Formregularität in Voraussetzung V 4 die Elemente $K \in \mathcal{K}_h$ bei nicht "degenerieren"können- d.h. mit klein werdenden Volumen muss auch der Durchmesser klein werden.

(iv) Mit dem vorherigen Punkt folgern wir auch, dass

$$\sup_{\tau \leq \tilde{\tau}, h \leq \tilde{h}} \sup_{K^{(n)} \in \mathcal{K}_h^{\mathcal{M}_\tau}} |\omega_{K^{(n)}}| \leq 3 \sup_{h \leq \tilde{h}} \sup_{K \in \mathcal{K}_h} |\omega_K| < \infty$$

und

$$\sup_{\tau \leq \tilde{\tau}, h \leq \tilde{h}} \sup_{e^{(n)} \in \mathcal{E}_{\tau,h}} |\omega_{e^{(n)}}| \leq 3 \sup_{h \leq \tilde{h}} \sup_{K \in \mathcal{K}_h} |\omega_K| < \infty$$

(v) Weil wir für $h \leq \tilde{h}$ mit den Voraussetzung (iv) und (v) Regularität für die Zerlegung $\mathcal{K}_h$ $(\mathcal{K}_h)_{h \leq \tilde{h}}$ gefordert haben, folgt ähnlich zu [24] aus der gleichmäßigen Formregularität in Voraussetzung V 4, (vi) für die Familie $(\mathcal{K}_h)_{h \leq \tilde{h}}$ auch Quasi-Uniformität. Es existiert also eine Konstante $C_{\text{uni},x} > 0$, sodass

$$\sup_{h \leq \tilde{h}} \max_{K \in \mathcal{K}_h} \max_{\tilde{K} \in \omega_K} \frac{|h_K|}{|h_{\tilde{K}}|} \leq C_{\text{uni},x}$$

2.2. Sobolevräume

Sei in diesem Abschnitt $\omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, konvexes Gebiet mit stückweise glattem Rand $\partial\omega$. Wir stellen uns für ω etwa ein Element $K \in \mathcal{K}_h$ oder auch ganz $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vor. Lt. Voraussetzung V 3 ist $\partial\Omega$ oder ∂K für $K \in \mathcal{K}_h$ stückweise glatt. Wir fassen einige wichtige Aussagen und Definitionen über Sobolevräume zusammen. Die Voraussetzungen zu diesen Aussagen lassen sich in den meisten Fällen noch abschwächen. Mehr zu Sobolevräumen findet man etwa in [4], [9], [11] oder auch in [23].

Definition 2.2.1 (schwache Ableitungen, Sobolevräume)**.** (i) Sei $v \in L^2(\omega)$, $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \{1, \ldots, d\}^k$ ein Multiindex. Gilt für eine Funktion $g_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\omega)$

$$\int_\omega v \partial^\alpha \phi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\omega g_\alpha \phi \, \mathrm{d}x \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\omega), \tag{5}$$

so heißt v k-fach schwach in Richtung des Multiindex α differenzierbar. Die Funktion $\partial^\alpha v := g_\alpha$ heißt schwache Ableitung von w in Richtung des Multiindex α.

(ii) Die Menge

$$H^k(\omega) := \left\{ v \in L^2(\omega) : \partial^\alpha v \in L^2(\omega), \forall |\alpha| \leq k \right\}$$

heißt Sobolevraum der Ordnung k.

Bemerkung 2.2.2. (i) Um die Notation zu vereinfachen setzen wir für den leeren Multiindex $\alpha = \emptyset$ dann $\partial^\alpha v := v$ und $H^0(\omega) := L^2(\omega)$.

(ii) Für $k \in \mathbb{N}$ und den Multiindex α mit $|\alpha| \leq k$ ist die k-Ableitung in Richtung α, sofern sie existiert, eindeutig und die Abbildung $\partial^\alpha : H^k(\omega) \to L^2(\omega) : u \mapsto \partial^\alpha u$ ist linear. (Siehe dazu etwa [11] oder [23])

(iii) Für $v \in H^1(\omega)$ wird der Funktionenvektor $(v_{x_1}, \ldots, v_{x_n})^T := \nabla v \in (L^2(\omega))^d$ Gradient von v genannt.

(iv) Durch partielle Integration erhält man sofort, dass für $k \in \mathbb{N}$ und einen Multiindex α mit $|\alpha| \leq k$ für $w \in C^k(\overline{\omega})$ die Gleichung (5) mit $g_i = \partial_{x_i}$ gilt. Für klassisch bis zum Rand differenzierbare Funktionen fallen der Begriff der klassischen und schwachen Differenzierbarkeit also zusammen. Damit folgt $C^k(\overline{\omega}) \subset H^k(\omega)$.

Der folgende Satz beschreibt die Situation genauer.

Satz 2.2.3. Sei $k \in \mathbb{N}$. $H^k(\omega)$ ist ein linearer Raum, die Abbildung

$$(\cdot,\cdot)_{H^k(\Omega)} : H^k(\Omega) \times H^k(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+ : (u, v) \mapsto \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_\Omega$$

ist ein Innprodukt auf $H^k(\omega)$ und $\left(H^k(\omega), (\cdot,\cdot)_{H^k(\Omega)}\right)$ ist ein Hilbertraum.

Beweis. Siehe etwa [9], Satz 5.10 und Lemma 5.11, [23], Kapitel 1.1.12 oder [11], Kapitel 5.2.3 Theorem 2. □

Satz 2.2.4 (Spurabbildung)**.** Es gibt eine lineare, stetige Abbildung

$$\operatorname{tr} : H^1(\omega) \to L^2(\partial\omega) : u \mapsto \operatorname{tr} u$$

sodass $u|_{\partial\omega} = \operatorname{tr} u$ für $u \in C^\infty(\overline{\omega})$ gilt.

Beweis. Siehe etwa [4], Satz 3.1. □

Bemerkung 2.2.5. Sei $E \subset \partial\omega$ mit $\mu_{\partial\omega}(E) > 0$. Dann ist

$$\operatorname{tr}|_E : H^1(\omega) \to L^2(E) : u \mapsto (\operatorname{tr} u)|_E$$

eine Abbildung mit $u|_E = \operatorname{tr}|_E u$ für $u \in C^\infty(\overline{\omega})$.

Definition 2.2.6. Sei $E \subset \partial\omega$ und $v \in H^1(\omega)$. Die Abbildungen aus Satz 2.2.4 und Bemerkung 2.2.5 heißen Spurabbildungen und $\operatorname{tr} v$ bzw. $\operatorname{tr}|_E v$ heißen die Spur von v auf ∂w bzw. E.

Satz 2.2.7 (partielle Integration)**.** Sei $v, w \in H^1(\omega)$ und tr der Operator aus Satz 2.2.4, dann gilt

$$\int_\omega v\partial_{x_i} w \,\mathrm{d}x = -\int_\omega \partial_{x_i} vw \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\omega} n_i \operatorname{tr} v \operatorname{tr} w \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. siehe etwa [6], Proposition 5.1.5 □

Bemerkung 2.2.8. Um die Notation zu vereinfachen, wird für $v \in H^1(\omega)$ statt $\operatorname{tr} v$ und $\int_{\partial\omega} \operatorname{tr} v \,\mathrm{d}\mu$ oft etwas unscharf $v|_{\partial\omega}$ und $\int_{\partial\omega} v \,\mathrm{d}\mu$ geschrieben.

Satz 2.2.9. Der Raum

$$H_0^1(\omega) := \left\{u \in H^1(\omega) : \operatorname{tr} u = 0\right\}$$

ist ein abgeschlossener Teilraum von $\left(H^1(\omega), (\cdot,\cdot)_{H^1(\omega)}\right)$.

Beweis. Es gilt $H_0^1(\Omega) = \operatorname{tr}^{-1}\{0\}$ und als Urbild einer abgeschlossenen Menge einer stetigen Abbildung abgeschlossen. □

Bemerkung 2.2.10. In der Literatur haben sich die Bezeichnungen $H^{-1}(\omega)$ für $(H_0^1(\omega))^\star$ und $\tilde{H}^{-1}(\omega)$ für $(H^1(\omega))^\star$ etabliert.

Lemma 2.2.11 (Poincaré-Ungleichung)**.** Für $u \in H_0^1(\omega)$ gilt

$$\|\nabla_x u\|_\omega \simeq \|u\|_{H^1(\omega)}$$

und die Konstante hängt vom Gebiet $\omega \subset \mathbb{R}^2$ ab.

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus [9], Satz 6.14. □

Satz 2.2.12. (i) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $C^\infty(\overline{\omega})$ dicht in $H^1(\omega)$.

(ii) $C_0^\infty(\omega)$ ist dicht in $H_0^1(\omega)$.

Beweis. (i) Siehe [23], Section 1.1.6, Theorem 1.

(ii) In [9] ist $H_0^1(\omega) := \overline{C_0^\infty(\omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\omega)}}$ und in [9], Satz 6.18 wird dann bewiesen, dass $H_0^1(\omega) = \mathrm{tr}^{-1}\{0\}$. Damit ist die Definition aus [9] und unsere Definition aus Satz 2.2.9 äquivalent und die Aussage ist gezeigt.

□

2.3. Stückweise Sobolevräume

im folgenden Abschnitt sei $\mathcal{K}$ eine reguläre Zerlegung von Ω. Die folgende Definition ist eine Verallgemeinerung von Definition 2.2.1.

Definition 2.3.1. Sei $k \in \mathbb{N}$. Der Raum

$$H^k(\mathcal{K}) := \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_K \in H^k(K), \forall K \in \mathcal{K} \right\}$$

heißt stückweiser Sobolevraum der Ordnung k.

Satz 2.3.2. Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Abbildung

$$(\cdot,\cdot)_{H^k(\mathcal{K})} : H^k(\mathcal{K}) \times H^k(\mathcal{K}) \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto \sum_K (u,v)_{H^k(K)} = \sum_K \sum_{k \le |\alpha|} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_K$$

ist ein Innenprodukt auf $H^k(\mathcal{K})$. $\left(H^k(\mathcal{K}), (\cdot,\cdot)_{H^1(\mathcal{K})}\right)$ ist ein Hilbertraum.

Beweis. (i) Dass $(\cdot,\cdot)_{H^k(\mathcal{K})}$ ein Innenprodukt auf $H^k(\mathcal{K})$ ist, folgt wie in Satz 2.2.3. Es bleibt die Vollständigkeit zu zeigen. Für $v \in H^k(\mathcal{K})$ folgt aus der Definition von $H^k(\mathcal{K})$, dass $v \in H^k(K)$ für alle $K \in \mathcal{K}$. Für eine Cauchyfolge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ setze dann $v|_K := \lim_{n\in\mathbb{N}} v|_K$ den Grenzwert bzgl. $\|\cdot\|_{H^k(K)}$. Es gilt dann $v \in H^k(\mathcal{K})$ und $v_n \to v$ bzgl. $\|\cdot\|_{H^k(\mathcal{K})}$.

□

Der folgende Satz betrifft die Familie $(\mathcal{K}_h)_{h \le \tilde{h}}$ aus Voraussetzung V 4.

Satz 2.3.3. Sei $\mathcal{K}_h$ eine Zerlegung aus der Familie aus Voraussetzung V 4 und $u \in H^1(\mathcal{K}_h)$.

(i) Es gilt dann

$$\|u\|_\Omega^2 \preceq \sum_{K\in\mathcal{K}_h} \|\nabla_x u\|_K^2 + \sum_{e\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \|[v]_e\|_e^2 + \sum_{e\in\mathcal{B}_h} \frac{1}{h_e} \|u\|_e^2 .$$

(ii) Für $K \in K$ und $e \in \mathcal{E}$ mit $e \subset \partial K$ folgt auch

$$\|u\|_e \preceq \frac{1}{h_K} \|u\|_K + h_K \|\nabla u\|_K$$

und beide Konstanten hängt nicht von $h \leq \tilde{h}$ ab.

Beweis. (i) Die Aussage folgt sofort aus [10], Lemma 3.1.

(ii) Siehe [20], Theorem 2.1 und Remark 2.3.

□

2.4. Bochnerräume

Im folgenden Abschnitt sei $a, b \in \mathbb{R}^2$ und $a < b$ und $(H, \|\cdot\|_H)$ ein Hilbertraum. Wir gehen vor wie in [32].

Definition 2.4.1 (quadratische Bochner-Integrierbarkeit)**.** Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Eine Bochner-messbare Funktion $v : (a, b) \to H$ heißt quadratisch Bochner-integrierbar auf (a, b), wenn

$$\int_a^b \|v(t)\|_H^2 \, \mathrm{d}t < \infty.$$

Die Menge all dieser Funktionen wird mit $L^2((a, b), H)$ bezeichnet.

Bemerkung 2.4.2. Indem wir $u \in L^2(\Omega_T)$ als Funktion $u : (0, T) \to L^2(\Omega)$ interpretieren, gilt $L^2(\Omega_T) \cong L^2((0, T), L^2(\Omega))$. Damit haben wir auch $f \in L^2((0, T), L^2(\Omega))$.

Satz 2.4.3. Ist $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ ein Hilbertraum, dann ist

$$(\cdot, \cdot)_{L^2((a,b),H)} : L^2((a, b), H) \times L^2((a, b), H) \to R_0^+ : (u, v) \mapsto \int_a^b (u(t), v(t))_H \, \mathrm{d}t$$

ein Innenprodukt auf $L^2((a, b), H)$ und $\left(L^2((a, b), H), (\cdot, \cdot)_{L^2((a,b),H)}\right)$ ist ein Hilbertraum.

Beweis. Siehe [41], Theorem 23.2 oder [13], Satz 1.11 und 1.13. □

Definition 2.4.4. Sei $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ ein Hilbertraum, $p \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{M}$ eine Zerlegung des Zeitintervalls.

(i) Es sei

$$\mathcal{P}^p(\mathcal{M}, H) := \left\{ v \in L^2((0, T), H) : v|_{(t_n, t_{n+1})} \in \mathcal{P}^p((t_n, t_{n+1}), H), \forall n \in \{0, 1, \ldots, M\} \right\}$$

der Raum der stückweisen Polynome der Zerlegung $\mathcal{M}$ nach H.

(ii) Mit $\Pi^p_{\mathcal{M},H} : L^2((0,T),H) \to \mathcal{P}^p(\mathcal{M},H)$ bezeichne die Projektion, für die

$$\int_0^T (u,v)_H \,\mathrm{d}t = \int_0^T \left(\Pi^p_{\mathcal{M},H} u, v\right)_H \mathrm{d}t \quad \forall v \in \mathcal{P}^p(\mathcal{M},H)$$

gilt.

Bemerkung 2.4.5. (i) Indem man in Definition 2.4.4, (i) einfach $H = \mathbb{R}$ setzt, erhält man als Spezialfall von $\mathcal{P}^p(\mathcal{M},H)$ den Raum

$$\mathcal{P}^p(\mathcal{M}) := \left\{ v \in L^2(0,T) : v|_{(t_n,t_{n+1})} \in \mathcal{P}^p(t_n,t_{n+1}), \forall n \in \{0,1,\dots,M\} \right\}$$

Wir vereinfachen die Notation weiter und setzen für eine Zerlegung $\mathcal{K}$ von Ω

$$\mathcal{P}^q(\mathcal{K}) := \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_K \in \mathcal{P}^q(K), \forall K \in \mathcal{K} \right\}.$$

Diese Bezeichnungen werden wir in dieser Arbeit öfter verwenden.

(ii) Sei $p \in \mathbb{N}$. Wähle für jedes $n \in \{1,\dots,M\}$ eine Orthonormalbasis $(\phi_{j,n})^{j\in\mathbb{N}_0}$ von $L^2(t_n,t_{n+1})$ so, dass $\operatorname{span}\{\phi_{j,n} : j \in \{0,1,\dots,p\}\} = \mathcal{P}^p(\mathcal{M})$ gilt. Die Funktionen $\phi_{j,n}$ werden mit 0 auf $(0,T)$ fortgesetzt. Es gilt dann

$$\int_0^T \phi_{j_1,n_1}\phi_{j_2,n_2} \,\mathrm{d}t = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi_{j_1,n}\phi_{j_2,n_2} \,\mathrm{d}t = \delta_{(j_1,n_1),(j_2,n_2)}$$
$$\forall j_1,j_2 \in \mathbb{N}_0 \quad \forall n_1,n_2 \in \{0,1,\dots,M+1\}.$$

(iii) $(\phi_{j,n})^{j\in\mathbb{N}_0}_{n\in\{0,1,\dots,M\}}$ ist eine Orthonormalbasis von $L^2(0,T)$ und $(\phi_{j,n})^{j\in\{0,1,\dots,p\}}_{n\in\{0,1,\dots,M\}}$ ist eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}^p(\mathcal{M})$.

Lemma 2.4.6. Sei H ein Banachraum, $(\phi_{j,n})^{j\in\mathbb{N}_0}_{n\in\{0,1,\dots,M\}}$ die Orthonormalbasis von $L^2(0,T)$ Bemerkung 2.4.5, (iii), $p \in \mathbb{N}$ und bezeichne mit $\Pi^p_{H,\mathcal{M}}$ den Operator aus Definition 2.4.4, (ii). Für $u \in L^2((0,T),H)$, $j \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \{0,1,\dots,M\}$ sei $a_{j,n} := \int_{t_n}^{t_{n+1}} u\phi_{i,j} \,\mathrm{d}t \in H$. Es gelten dann die folgenden Aussagen:

(i) $\Pi^p_{H,\mathcal{M}} u = \sum_{n=0}^{M} \sum_{j=0}^{p} a_{j,n}\phi_{j,n}$ und

(ii) $\left\|\Pi^p_{H,\mathcal{M}} u\right\|^2_{L^2((0,T),H)} = \sum_{n=0}^{M} \sum_{j=0}^{p} \|a_{j,n}\|^2_H$.

Beweis. (i) Sei $v \in \mathcal{P}^p(\mathcal{M}, H)$. Für $j \in \{0, 1, \ldots, p\}$ und $n \in \{0, 1, \ldots, M\}$ gibt es $b_{j,n} \in H$, sodass $v = \sum_{n=0}^{M} \sum_{j=0}^{p} b_{j,n}\phi_{j,n}$ gilt. Wir berechnen:

$$
\begin{aligned}
&(u, v)_{L^2((0,T),H)} = \\
&= \sum_{n=0}^{M} \sum_{j=0}^{p} (u(t), b_{j,n}\phi_{j,n}(t))_{L^2((0,T),H)} = \sum_{n=0}^{M} \sum_{j=0}^{p} \int_0^T (u(t), b_{j,n})_H \phi_{j,n}(t) \,\mathrm{d}t = \\
&= \sum_{n=0}^{M} \sum_{j=0}^{p} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (u(t)\phi_{j,n}(t), b_{j,n})_H \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{M} \sum_{j=0}^{p} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} u(t)\phi_{j,n}(t) \,\mathrm{d}t, b_{j,n} \right)_H = \\
&= \sum_{n_1,n_2=0}^{M} \sum_{j_1,j_2=0}^{p} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} u(t)\phi_{j_1,n_1}(t) \,\mathrm{d}t, b_{j_2,n_2} \right)_H \int_0^T \phi_{j_1,n_1}, \phi_{j_2,n_2} \,\mathrm{d}t = \\
&= \left(\sum_{n=0}^{M} \sum_{j=0}^{p} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u(t)\phi_{j_1,n_1}(t) \,\mathrm{d}t \phi_{j,n}, \sum_{n=0}^{M} \sum_{j=0}^{p} b_{j,n}\phi_{j,n} \right)_{L^2((0,T),H)} = \\
&= \left(\sum_{n=0}^{M} \sum_{j=0}^{p} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u(t)\phi_{j_1,n_1}(t) \,\mathrm{d}t \phi_{j,n}, v \right)_{L^2((0,T),H)} .
\end{aligned}
$$

Mit Definition 2.4.4 folgt die Aussage.

(ii) Mit (i) folgt

$$
\begin{aligned}
\left\| \Pi^p_{H,\mathcal{M}} u \right\|^2_{L^2((0,T),H)} &= \left(\sum_{n=0}^{M} \sum_{j=0}^{p} a_{j,n}\phi_{j,n}, \sum_{n=0}^{M} \sum_{j=0}^{p} a_{j,n}\phi_{j,n} \right)_{L^2((0,T),H)} = \\
&= \sum_{n_1,n_2=0}^{M} \sum_{j_1,j_2=0}^{p} (a_{j_1,n_1}, a_{j_2,n_2})_H \underbrace{\int_0^T \phi_{j_1,n_1}, \phi_{j_2,n_2} \,\mathrm{d}t}_{=\delta_{(j_1,n_1),(j_2,n_2)}} = \\
&= \sum_{n=0}^{M} \sum_{j=0}^{p} \|a_{j,n}\|^2_H .
\end{aligned}
$$

□

Lemma 2.4.7. Sei H ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt $(\cdot,\cdot)_H$, $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}$ eine Zerlegung des Zeitintervalls und

$$
J(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R} : (\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto J(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in H
$$

eine stetige Bilinearform. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Die Abbildung

$$J_T(\cdot,\cdot) : L^2((0,T),H) \times L^2((0,T),H) \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto \int_0^T J(u,v)\,\mathrm{d}t$$

ist eine stetige Bilinearform.

(ii) Sei $u_p \in \mathcal{P}^p(\mathcal{M},H)$. Dann gilt

$$\int_0^T J(u_p,v)\,\mathrm{d}t = \int_0^T J\left(u_p, \Pi^p_{\mathcal{M},H} v\right)\mathrm{d}t \quad \forall v \in L^2((0,T),H).$$

Beweis. (i) Die Bilinearität ist klar. Für die Stetigkeit sei $u,v \in L^2((0,T),H)$

$$|J_T(u,v)| = \left|\int_0^T J(u,v)\,\mathrm{d}t\right| \preceq \int_0^T \|u(t)\|_H \|u(t)\|_H\,\mathrm{d}t \preceq$$

$$\preceq \left(\int_0^T \|u(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|v(t)\|_H^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{L^2((0,T),H)} \|v\|_{L^2((0,T),H)},$$

womit die Aussage gezeigt ist.

(ii) Da $u_p \in \mathcal{P}((0,T),H)$ gilt $\Pi^p_{\mathcal{M},H} u_p = u_p$ und es gibt eine Folge $(a_{j,n})^{j\in\{0,1,\dots,p\}}_{n\in\{0,1,\dots,M\}}$ mit

$$u_p = \sum_{n=0}^{M}\sum_{j=0}^{p} a_{j,n}\phi_{j,n}.$$

Sei $v \in L^2((0,T),H)$ beliebig. Lt. Lemma 2.4.6 gibt es eine Folge $(b_{i,j})^{j\in\mathbb{N}_0}_{n\in\{0,1,\dots,M\}} \subset H$, sodass

$$v = \sum_{n=0}^{M}\sum_{j=0}^{\infty} b_{j,n}\phi_{j,n}.$$

Mit (i) und den Eigenschaften von Orthonormalbasen folgt dann

$$\begin{aligned}
\int_0^T J(u_p,v)\,\mathrm{d}t &= \int_0^T J\left(\sum_{n_1=0}^{M}\sum_{j=0}^{p} a_{j_1,n_1}\phi_{j_1,n_1}, \sum_{n_2=0}^{M}\sum_{j_2=0}^{\infty} b_{j_2,n_2}\phi_{j_2,n_2}\right)\mathrm{d}t = \\
&= \sum_{n_1,n_2=0}^{M}\sum_{j=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\int_0^T J(a_{j_1,n_1}, b_{j_2,n_2})\,\phi_{j_1,n_1}\phi_{j_2,n_2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \sum_{n_1,n_2=0}^{M}\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{\infty} J(a_{j_1,n_1}, b_{j_2,n_2}) \underbrace{\int_0^T \phi_{j_1,n_1}\phi_{j_2,n_2}\,\mathrm{d}t}_{=\delta_{(j_1,n_1),(j_2,n_2)}} = \\
&= \sum_{n=0}^{M}\sum_{j=0}^{p} J(a_{j,n}, b_{j,n})
\end{aligned}$$

Andererseits gilt lt. Lemma 2.4.6

$$\Pi^p_{\mathcal{M},H} v = \sum_{n=0}^{M} \sum_{j=0}^{p} b_{j,n} \phi_{j,n},$$

und man berechnet analog zu oben

$$\int_0^T J\left(u_p, \Pi^p_{\mathcal{M},H} v\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{M} \sum_{j=0}^{p} J\left(a_{j,n}, b_{j,n}\right),$$

womit die Aussage unmittelbar folgt.

□

Bemerkung 2.4.8. (i) Lemma 2.4.7 bleibt richtig, wenn statt der Stetigkeit die schwächere Bedingung

$$\int_0^T J\left(u_p, v\right) \mathrm{d}t \leq C\left(p\right) \|u_p\|_{L^2((0,T),H)} \|v\|_{L^2((0,T),H)} \quad \forall u_p \in \mathcal{P}^p\left(\mathcal{M}, H\right), \forall v \in L^2\left((0,T), H\right)$$

gefordert wird.

(ii) Im Fall $H = H^1\left(\mathcal{K}_h\right)$ schreiben wir statt $\Pi^p_{\mathcal{M}_\tau, H^1(\mathcal{K}_h)}$ einfach $\Pi^p_{\tau,h}$ und für $H = L^2\left(\Omega\right)$ schreiben wir Π^p_τ.

(iii) Es gilt $X\left(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h\right) \subset L^2\left((0,T), H^1\left(\mathcal{K}_h\right)\right)$ und damit ist für $u \in X\left(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h\right)$ auch $\Pi^p_{\tau,h} u$ wohldefiniert.

Mit Lemma 2.4.6 folgt auch sofort die folgende Aussage:

Lemma 2.4.9. Sei $u \in L^2\left((0,T), H^1_0\left(\Omega\right)\right)$. Dann gilt $\Pi^p_\tau u = \Pi^p_{\tau,h} u = \Pi^p_{\mathcal{M}_\tau, H^1_0(\Omega)} u$.

Beweis. Mit der Orthonormalbasis $(\phi_{j,n})^{j\in\mathbb{N}_0}_{n\in\{0,1,\ldots,M\}}$ von $L^2\left(0,T\right)$ Bemerkung 2.4.5, (iii), $j \in \{0,1,\ldots,p\}$ und $n \in \{0,1,\ldots,M\}$ gilt

$$\Pi^p_{\tau,h} u := \sum_{n=0}^{M} \sum_{j=0}^{p} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u \phi_{j,n} \, \mathrm{d}t \phi_{j,n}. \tag{6}$$

Die Integrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} u\phi_{j,n} \, \mathrm{d}t \subset H^1_0\left(\Omega\right)$ konvergieren auch in $H^1\left(\mathcal{K}_h\right)$ und $L^2\left(\Omega\right)$ und die Bochner-Integrale stimmen überein. Mit Lemma 2.4.6, (i) folgt die Aussage dann sofort.

□

2.5. Bochner-Sobolev-Räume

Sei in diesem Abschitt immer $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\mathcal{M}$ eine Zerlegung des Zeitintervalls und $\mathcal{K}$ eine reguläre Zerlegung von Ω. Wir können die Lösung u von Problem P 1 in natürlicher Weise auch als Funktion $u : t \mapsto u(t, \cdot)$ interpretieren. Die Bochner-Sobolev-Räume bilden hierfür die passende Struktur. In der Literatur ist die Vorgehensweise beim Definieren dieser Räume ist nicht immer ganz einheitlich. Wir wählen den Zugang aus [13]. Für weitere Literatur zu diesem Thema siehe etwa auch [11], [25] und [41].

Definition 2.5.1 (distributionelle Zeitableitungen)**.** Sei $k \in \mathbb{N}$, X ein reflexiver und separabler Banachraum und $u \in L^2((a,b), X)$. Die Distribution $u^{(k)} \in \mathrm{L}(C_0^\infty(a,b), X)$

$$u^{(k)} : C_0^\infty(a,b) \to X : u^{(k)}(\phi) := (-1)^k \int_a^b u(t)\, \phi^{(k)}(t)\, \mathrm{d}t \tag{7}$$

wird die k-te schwache Zeitableitung von u auf (a,b) genannt.

Bemerkung 2.5.2. (i) Die Konvergenz des Bochner-Integrals in (7) ist bzgl. der $\|\cdot\|_X$-Norm zu verstehen.

(ii) Sei Y ein reflexiver und separabler Banachraum mit $X \hookrightarrow Y$ und dem Einbettungsoperator $i_{X\to Y}$. Wir sagen $u^{(k)} \in L^2((a,b), Y)$, wenn es ein $v \in L^2((a,b), Y)$ gibt, sodass

$$\int_a^b v(t)\, \phi(t)\, \mathrm{d}t = i_{X\to Y}\left((-1)^k \int_a^b u(t)\, \phi^{(k)}(t)\, \mathrm{d}t\right) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(a,b). \tag{8}$$

In (8) ist das linke Bochnerintegral bzgl. der $\|\cdot\|_Y$-Norm und das rechte Bochnerintegral bzgl. der $\|\cdot\|_X$-Norm zu verstehen. Statt v schreiben wir in (8) dann einfach $u^{(k)}$. Mit Definition 2.5.1 gilt für Testfunktionen dann die Formel der partiellen Integration

$$\int_a^b u^{(k)}(t)\, \phi(t)\, \mathrm{d}t = i_{X\to Y}\left((-1)^k \int_a^b u(t)\, \phi^{(k)}(t)\, \mathrm{d}t\right) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(a,b). \tag{9}$$

(iii) Aus Definition 2.5.1 folgt für $a \le \tau_1 < \tau_2 \le b$ sofort, dass $\left(u|_{(\tau_1,\tau_1)}\right)' = u'|_{(\tau_1,\tau_1)}$. Die distributionelle Zeitableitung ist also ein lokaler Begriff.

(iv) Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $u^{(0)} := u$. Statt $u^{(1)}$ schreiben wir auch u'.

Definition 2.5.3 (Evolutionstripel)**.** Sei V ein reflexiver und separabler Banachraum und H ein separabler Hilbertraum. Gilt $V \hookrightarrow H$ stetig und dicht, dann wird $(V, H, V^\star)$ Evolutionstripel genannt.

Bemerkung 2.5.4. (i) Sei $u \in H$. Für $v \in V$ können wir $\langle u, v\rangle_{V^\star \times V} := (u, v)_H$ setzen. Weil

$$\langle u, v\rangle_{V^\star \times V} = (u, v)_H \leq \|u\|_H \|v\|_H \preceq \|u\|_H \|v\|_V$$

können wir H als Teilmenge von $V^\star$ auffassen. In Hilberträumen gilt ja lt. dem Satz von Riesz-Fischer $H \cong H^\star$. Insgesamt haben wir $V \subset H \subset V^\star$.

(ii) Mit [41], Problem 18.6. folgt, dass $H \cong H^\star$ dicht in $V^\star$ liegt.

(iii) Lt. Satz 2.2.12 liegen $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ dicht in $H^1(\Omega)$ und $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$. Damit folgt sofort, dass $H^1(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ sind. Insgesamt sind $\left(H^1(\Omega), L^2(\Omega), \tilde{H}^{-1}(\Omega)\right)$ und $(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ Evolutionstripel.

(iv) Sei V der reflexive und separable Banachraum aus einem Evolutionstrippel $(V, H, V^\star)$. Lt. Punkt (i) haben wir $V \subset V^\star$ und wir können $u(t)$ fast überall auf (a, b) als Element von $V^\star$ interpretieren. Für die distributionelle Zeitableitung u' einer Funktion $u \in L^2((a, b), V)$ können wir mit Bemerkung 2.5.2, (ii) auch nur $u' \in L^2((a, b), V^\star)$ fordern.

(v) Sei $k_t, k_x \in \mathbb{N}$, $n \in \{0, 1, \ldots, |\mathcal{M}|\}$, $K \in \mathcal{K}$ und $u \in C^{k_t,k_x}\left(\overline{K^{(n)}}\right)$. Sei $\partial_t^{k_t} u \in C^{0,k_x}\left(\overline{K^{(n)}}\right)$ die k_t-fache klassische Ableitung von u in der Richtung t, dann gilt mit der Formel der partiellen Integration:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K u(t, x)\, v(x)\, \phi^{(k)}(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = (-1)^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \partial_t^k u(t, x)\, v(x)\, \phi(t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$$
$$\forall \phi \in C_0^\infty(t_n, t_{n+1}), \forall v \in C^\infty\left(\overline{K}\right). \tag{10}$$

Die Funktionen $u \in C^{k_t,k_x}\left(\overline{K^{(n)}}\right)$ und $\partial_t^{k_t} u \in C^{0,k_x}\left(\overline{K^{(n)}}\right)$ können auch als Funktion $u : [0, T] \to u(t, \cdot)$ und $\partial_t^{k_t} u : [0, T] \to u(t, \cdot)$ aufgefasst werden. Dann haben wir $u, \partial_t^{k_t} u \in L^2((t_n, t_{n+1}), L^2(\Omega))$. Mit [41], Proposition 23.9 und (10) gilt

$$\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} u(t)\, \phi^{(k)}(t)\, \mathrm{d}t, v\right)_{L^2(\Omega)} = \left((-1)^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \partial_t^k u(t)\, \phi(t)\, \mathrm{d}t, v\right)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in C^\infty\left(\overline{K}\right).$$

Da $v \in C^\infty\left(\overline{K}\right)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt, gilt folgt schon $\int_{t_n}^{t_{n+1}} u\phi^{(k)}\, \mathrm{d}t = (-1)^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \partial_t^k u\phi(t)\, \mathrm{d}t$. Mit Bemerkung 2.5.2, (ii) erhalten wir, dass $\partial_t^{k_t} u$ die k_t-te distributionelle Zeitableitung von u im Sinn von Defintion 2.5.1 ist. Interpretieren wir $u \in C^{k_t,k_x}\left(\overline{K^{(n)}}\right)$ als Funktion $u : t \mapsto u(, \cdot)$, dann fallen die Begriffe der distributionellen Zeitableitung und der klassischen Zeitableitung zusammen.

Satz 2.5.5. Sei $(V, H, V^\star)$ ein Evolutionstripel, $u \in L^2((a,b), V)$ und $u' \in L^2((a,b), V^\star)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) $u \in C([a,b], H)$.

(ii) Wenn $v \in L^2((a,b), V)$ und $v' \in L^2((a,b), V^\star)$, dann gilt für $\tau_1, \tau_2 \in [a,b]$ mit $a \leq \tau_1 < \tau_2 \leq b$ die Formel der partiellen Integration:

$$(u(\tau_2), v(\tau_2))_H - (u(\tau_1), v(\tau_1))_H = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \langle u'(t), v(t)\rangle_{V^\star \times V} + \langle v'(t), u(t)\rangle_{V^\star \times V} \, \mathrm{d}t$$

(iii) Die Funktion $t \mapsto \|u(t)\|_H^2$ ist differenzierbar auf (a,b) und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|u(t)\|_H^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle_{V^\star \times V}.$$

Beweis. Für (i) und (ii) siehe [13], Satz 1.17. Zum Beweis von (iii) setze in (ii) $u = v$ und erhalte

$$\|u(\tau)\|_H^2 - \|u(a)\|_H^2 = 2\int_a^\tau \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle_{V^\star \times V} \, \mathrm{d}t \quad \forall \tau \in (a,b]$$

Durch Differenzieren der Gleichung folgt die Aussage sofort. □

Definition 2.5.6 (Lösungsraum, stückweiser Lösungsraum)**.** Sei $n \in \{0, 1, \ldots, |\mathcal{M}|\}$, $K \in \mathcal{K}$ und

$$X(n, K) := \left\{ u \in L^2\left((t_n, t_{n+1}), H^2(K)\right) : u' \in L^2\left((t_n, t_{n+1}), L^2(K)\right) \right\}.$$

Wir definieren

(i) den verallgemeinerten Lösungsraum

$$\tilde{X}_0(T, \Omega) := \left\{ u \in L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right) : u' \in L^2\left((0,T), H^{-1}(\Omega)\right), u(0,\cdot) = 0 \right\},$$

(ii) den Lösungsraum

$$X_0(T, \Omega) := \left\{ u \in L^2\left((0,T), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) : u' \in L^2\left((0,T), L^2(\Omega)\right), u(0) = 0 \right\}$$

(iii) und den stückweisen Lösungsraum

$$X(\mathcal{M}, \mathcal{K}) := \left\{ u \in L^2\left((0,T), L^2(\Omega)\right) : u|_{K^{(n)}} \in X(n, K), \forall K^{(n)} \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}} \right\}.$$

Lemma 2.5.7. Interpretieren wir für $u \in X_0(T,\Omega)$ und $K^{(n)} \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ die Einschränkung der Funktionen u und u' auf das Element $K^{(n)}$ als Funktionen

$$u|_{K^{(n)}} : (t_n, t_{n+1}) \to H^2(K) : t \mapsto u(t)|_K$$

und

$$u'|_{K^{(n)}} : (t_n, t_{n+1}) \to L^2(K) : t \mapsto u'(t)|_K,$$

dann gilt $(u|_{K^{(n)}})' = u'|_{K^{(n)}} \in L^2((t_n, t_{n+1}), K)$ und $X_0(T,\Omega) \subset X(\mathcal{M},\mathcal{K})$.

Beweis. Sei $u \in X_0(T,\Omega)$ und $K^{(n)} \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$. Für $\phi \in C_0^\infty(t_n, t_{n+1})$ berechnen wir, indem wir uns die Funktion mit 0 auf $(0,T)$ fortgesetzt denken und mit der Definition der schwachen Zeitableitung von u und mit Bemerkung 2.5.2, (ii) dann

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} u|_{K^{(n)}}(t)\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{X}|_K \int_a^b u(t)\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t = -\mathcal{X}|_K \int_a^b u'(t)\,\phi(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\mathcal{X}|_K \int_a^b u'(t)\,\phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K u'|_{K^{(n)}}(t)\,\phi(t)\,\mathrm{d}t$$

Da $\phi \in C_0^\infty(t_n, t_{n+1})$ beliebig war, folgt die Aussage aber unmittelbar. □

Bemerkung 2.5.8. (i) Mit Lemma 2.5.7 gilt $X_0(T,\Omega) \subset X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$ und damit auch $X_0(T,\Omega) \subset \tilde{X}_0(T,\Omega)$.

(ii) Seien $u, v \in X(\mathcal{M},\mathcal{K})$ und $K^{(n)} \in \mathcal{K}^{\mathcal{M}}$. Die Aussage (ii) aus Satz 2.5.5 wird dann zu

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K u'v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_K u_{n+1}^+ v_{n+1}^+\,\mathrm{d}x - \int_K u_n^- v_n^-\,\mathrm{d}x - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K uv'\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

(iii) Die Mengen $\tilde{X}_0(T,\Omega), X_0(T,\Omega)$ und $X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$ sind lineare Räume. Die Abbildung

$$\|\cdot\|_{\tilde{X}((0,T),\Omega)} : \tilde{X}((0,T),\Omega) \to \mathbb{R}_0^+ : u \mapsto \left(\|u\|^2_{L^2\left((0,T),H_0^1(\Omega)\right)} + \|u'\|^2_{L^2((0,T),H^{-1}(\Omega))}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist eine Norm auf $\tilde{X}((0,T),\Omega)$. $\left(\tilde{X}((0,T),\Omega), \|\cdot\|_{\tilde{X}((0,T),\Omega)}\right)$ ist lt. [13], Satz 1.16 sogar ein Banachraum. Mit

$$\|\cdot\|_{X(\mathcal{M}_\tau,\mathcal{K}_h)} : X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h) \to \mathbb{R}_0^+ : u \mapsto \left(\sum_{n,K} \|u\|^2_{X(n,K)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

wird in natürlicher Weise eine Norm auf dem stückweisen Lösungsraum $X(\mathcal{M},\mathcal{K})$ definiert.

In Analogie zum Raum $H^k(\Omega)$, der alle Funktionen in $L^2(\Omega)$ schwachen Ableitungen der Ordnung k in $L^2(\Omega)$ umfasst, kann man einen solchen Raum auch für banachraumwertige Funktionen definieren:

Definition 2.5.9. Die Menge

$$H^k((a,b),V) := \left\{u \in L^2((a,b),V) : u^{(k)} \in L^2((a,b),V)\right\}$$

heißt Bochner-Sobolev-Raum der Ordnung k.

Satz 2.5.10. $H^k((a,b),V)$ ist ein linearer Raum, die Abbildung

$$\|\cdot\|_{H^k((a,b),V)} : H^k((a,b),V) \to \mathbb{R}_0^+ : u \mapsto \left(\sum_{i=0}^{k} \left\|u^{(k)}\right\|^2_{L^2((a,b),V)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist eine Norm auf $H^k((a,b),V)$ und $\left(H^k((a,b),V), \|\cdot\|_{H^k((a,b),V)}\right)$ ist ein Banachraum.

Beweis. Das $\|\cdot\|_{H^k((a,b),V)}$ eine Norm ist, ist klar. Es bleibt, die Vollständigkeit zu zeigen. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $H^k((a,b),V)$. Wegen der Vollständigkeit von $L^2((a,b),V)$ gibt es für $i \in \{0,1,\ldots,k\}$ Funktionen $w_i \in L^2((a,b),V)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^{(i)} = w_i$. Mit Bemerkung 2.5.2, (ii) berechnen wir für $\phi \in C_0^\infty(a,b)$

$$\begin{aligned}\int_a^b w_i(t)\,\phi(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n^{(i)}(t)\,\phi(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \lim_{n\to\infty}(-1)^i\int_a^b u_n(t)\,\phi^{(i)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^i\int_a^b w_0(t)\,\phi^{(i)}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Damit haben wir $w_i = u^{(i)}$ und die Vollständigkeit ist gezeigt. Insgesamt folgt die Richtigkeit des Satzes. □

3. Das DG-Verfahren

3.1. Schwache Formulierung

Multiplikation von (1) mit $v \in L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right)$ und partielle Integration nach der x-Richtung liefert

$$\langle u'(t), v(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + a\left(u(t), v(t)\right) = \left(f(t), v(t)\right)_\Omega$$

mit der Bilinearform

$$a(\cdot,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+ : (u,v) \mapsto \int_\Omega \nabla_x u \nabla_x v \,\mathrm{d}x.$$

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und der Poincaré-Ungleichung folgt sofort, dass das eine stetige und koerzive Bilinearform ist. Damit wird Problem P 1 zu:

Problem P 2 (schwache Formulierung)**.** Finde $u \in \tilde{X}_0(T,\Omega)$, mit

$$\begin{aligned} &\langle u'(t), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + a\left(u(t), v\right) = \left(f(t), v\right)_\Omega \\ &\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad t \in [0,T] \text{ f.ü.} \end{aligned} \tag{11}$$

Definition 3.1.1 (schwache Lösung)**.** Eine Funktion $u \in \tilde{X}_0(T,\Omega)$ heißt schwache Lösung, wenn sie Problem P 2 löst.

Bemerkung 3.1.2. Die Forderung $u(0) = 0$ ist wegen Lemma 2.5.5 sinnvoll.

Satz 3.1.3 (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung schwachen Lösung)**.** Sei $f \in L^2\left((0,T), L^2(\Omega)\right)$. Es gibt dann eine eindeutige, schwache Lösung $u \in L^2\left((0,T), H^2(\Omega)\right)$ und es gilt $u' \in L^2\left((0,T), L^2(\Omega)\right)$.

Beweis. Für den Beweis der Existenz bzw. Eindeutigkeit einer schwachen Lösung $u \in L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right)$ mit $u' \in L^2\left((0,T), H^{-1}(\Omega)\right)$ siehe [11], Kapitel 7, Theorem 3 bzw. Theorem 4. Dort ist $f \in L^2\left((0,T), H^{-1}(\Omega)\right)$. Die restliche Aussage über höhere Regularität folgt mit der Voraussetzung $f \in L^2\left((0,T), L^2(\Omega)\right)$ wie in [11], Kapitel 7, Theorem 5, (i). Im Beweis dieser Aussage wird vorausgesetzt, dass $\partial\Omega$ glatt ist. Diese Bedingung wird nur beim beim Zitieren von [11], Kapitel 6.3.1., Theorem 1 verwendet. Dieser Satz besagt, dass wenn $g \in L^2(\Omega)$ und $\partial\Omega$ glatt ist, das Problem

Problem P 3. Finde $u \in H_0^1(\Omega)$, sodass

$$\int_\Omega \nabla_x u \nabla_x v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega g v \,\mathrm{d}x \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

eindeutig lösbar ist und für die Lösung sogar $u \in H^2(\Omega)$ gilt. Lt. [4], Satz 7.2 und [9], Satz 7.6 ist das auch für ein konvexes Gebiet Ω richtig. Mit Voraussetzung V 1 folgt dann die Richtigkeit des Satzes. $\square$

Wir multiplizieren die Gleichung (11) mit $v \in C([0,T], H_0^1(\Omega))$ und integrieren über $(0,T)$. Lt. [13], Kapitel IV, Lemma 1.12 liegt $C([0,T], H_0^1(\Omega))$ dicht in $L^2((0,T), H_0^1(\Omega))$. Wir erhalten die zu Problem P 2 äquivalente und für unsere Zwecke handlichere Formulierung schwache Formulierung von Problem P 1.

Problem P 4. Finde $u \in \tilde{X}_0(T,\Omega)$ mit

$$\int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \int_0^T a(u(t), v(t))\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\,\mathrm{d}t \quad \forall v \in L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right) \tag{12}$$

Ist nun $f \in L^2((0,T), L^2(\Omega))$, so folgt mit Satz 3.1.3 auch $u \in X_0(T,\Omega)$. Wir können deshalb gleich $u \in X_0(T,\Omega)$ fordern.

Setze

$$A(u,v) := \int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \int_0^T a(u(t), v(t))\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^T (u'(t), v(t))_\Omega\,\mathrm{d}t + \int_0^T a(u(t), v(t))\,\mathrm{d}t$$

und

$$F(v) := \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\,\mathrm{d}t = \int_0^T (f(t), v(t))_\Omega\,\mathrm{d}t.$$

Schließlich erhält man das Problem

Problem P 5. Finde $u \in X_0(T,\Omega)$ mit

$$A(u,v) = F(v) \quad \forall v \in L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right) \tag{13}$$

Lemma 3.1.4 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)**.** Sei $d \in \mathbb{N}$, $\omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $f \in L^2(\omega)$. Gilt

$$\int_\omega g(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\omega),$$

dann ist $g = 0$ fast überall auf ω.

Beweis. In [9], Satz 5.1 wird sogar bewiesen, dass aus

$$\int_\omega g(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\omega), \phi \geq 0$$

bereits $g \geq 0$ fast überall auf ω folgt. Anwenden dieses Satzes auf u und $-u$ liefert die Aussage. □

Bemerkung 3.1.5. Partielle Integration von (12) liefert

$$\int_0^T \int_\Omega (u' - \Delta_x u - f)\,v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall v \in L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right)$$

und mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt, dass $u_t - \Delta_x u = f$ fast überall auf Ω_T und $u(0) = 0$ fast überall auf Ω erfüllt ist.

3.2. Herleitung

In diesem Abschnitt leiten wir das DG-Verfahren her. Die Vorgehensweise ist dabei ganz ähnlich zu [25]. Zuerst vereinfachen wir die Notation.

Definition 3.2.1 (Ortssprung, Durchschnitt)**.** Für $e \in \mathcal{I}_h$ seien $K_+, K_- \in \mathcal{K}_h$ die beiden Elemente für die $\overline{K_+} \cap \overline{K_-} = e$ und $\alpha_{\mathcal{K}_h}(K_+) > \alpha_{\mathcal{K}_h}(K_-)$ gilt. Für $u \in H^1(\mathcal{K}_h)$ definiere dann

(i) den Sprung $[u]_e := \operatorname{tr}|_e u|_{K_+} - \operatorname{tr}|_e u|_{K_-}$ und

(ii) den Durchschnitt $\langle u \rangle_e := \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}|_e u|_{K_+} + \operatorname{tr}|_e u|_{K_-}\right)$

an der Kante $e \in \mathcal{I}_h$.

Bemerkung 3.2.2. Für $u \in X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$ und $e \in \mathcal{I}$ schreiben wir $[u]_e$ bzw. $\langle u \rangle_e$ und meinen damit eigentlich die Abbildungen $t \mapsto [u(t)]_e$ und $t \mapsto \langle u(t) \rangle_e$.

Definition 3.2.3. Sei

$$C\left(\mathcal{M}_\tau, L^2(\Omega)\right) := \Big\{ v \in L^2\left((0,T), L^2(\Omega)\right) : \\ v|_{(t_n,t_{n+1})} \in C\left([t_n, t_{n+1}], L^2(\Omega)\right), \forall n \in \{0,1,\ldots,M_\tau\} \Big\}$$

der Raum der stückweise stetigen Funktionen auf $H^1(\mathcal{K}_h)$. Für $u \in C(\mathcal{M}_\tau, L^2(\Omega))$ definiere

- den Upwind $u_n^- := \lim_{\epsilon \to 0^+} u(t_n - \epsilon)$ für $n \in \{1, \ldots, M_\tau + 1\}$ und
- den Downwind $u_n^+ := \lim_{\epsilon \to 0^+} u(t_n + \epsilon)$ für $n \in \{0, \ldots, M_\tau\}$,
- den Zeitsprung $[u]_n := u_n^+ - u_n^-$ für $\{1, \ldots, M_\tau\}$ und
- den zeitlichen Durchschnitt $\langle u \rangle_n = \frac{1}{2}(u_n^+ + u_n^-)$ für $\{1, \ldots, M_\tau\}$,

wobei die Grenzwerte bzgl. der L^2-Norm zu verstehen sind.

Bemerkung 3.2.4. Wir schreiben auch $u(0) := u_0^-$ und $u(T, \cdot) := u_{M+1}^+$.

Wir leiten nun 2 Lemmata her, die wir für die Herleitung des DG-Verfahrens benötigen werden.

Lemma 3.2.5. Sei $u, v \in X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$ und $e \in \mathcal{I}_h$ und $n \in \{1, \ldots, M_\tau\}$. Dann gilt

(i) $[uv]_e = \langle u \rangle_e [v]_e + [u]_e \langle v \rangle_e$ fast überall auf $(0, T)$ und

(ii) $[uv]_n = \langle u \rangle_n [v]_n + [u]_n \langle v \rangle_n$ fast überall auf Ω.

Beweis. Wir beweisen die Aussage wie in [25], Lemma 2.7.

(i) Sei $K_+, K_- \in \mathcal{K}_h$ die beiden Elemente mit $\overline{K_+} \cap \overline{K_-} = e$ und gelte $\alpha_{\mathcal{K}_h}(K_+) > \alpha_{\mathcal{K}_h}(K_-)$. Einsetzen der Definition liefert fast überall auf $(0, T)$

$$
\begin{aligned}
[uv]_e &= \operatorname{tr}|_e (uv)|_{K_+} - tr|_e (uv)|_{K_-} = \\
&= \operatorname{tr}|_e u|_{K_+} u \operatorname{tr}|_e v|_{K_+} - \operatorname{tr}|_e u_{K_-} \operatorname{tr}|_e v|_{K_-} = \\
&= \operatorname{tr}|_e u|_{K_+} \operatorname{tr}|_e v|_{K_+} - \operatorname{tr}|_e u|_{K_+} \operatorname{tr}|_e v|_{K_-} + \\
&\quad + \operatorname{tr}|_e u|_{K_+} \operatorname{tr}|_e v|_{K_-} - \operatorname{tr}|_e u|_{K_-} \operatorname{tr}|_e v|_{K_-} v = \\
&= \frac{1}{2}\Big(\operatorname{tr}|_e u|_{K_+} \operatorname{tr}|_e v|_{K_+} - \operatorname{tr}|_e u|_{K_+} \operatorname{tr}|_e v|_{K_-} + \\
&\quad + \operatorname{tr}|_e u|_{K_+} \operatorname{tr}|_e v|_{K_-} - \operatorname{tr}|_e u|_{K_-} \operatorname{tr}|_e v|_{K_-} v \Big) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(\operatorname{tr}|_e u|_{K_+} \operatorname{tr}|_e v|_{K_+} - \operatorname{tr}|_e u|_{K_+} \operatorname{tr}|_e v|_{K_-} + \\
&\quad + \operatorname{tr}|_e u|_{K_+} \operatorname{tr}|_e v|_{K_-} - \operatorname{tr}|_e u|_{K_-} \operatorname{tr}|_e v|_{K_-} v \Big) = \\
&= \frac{1}{2}\Big(\operatorname{tr}|_e u|_{K_+} + \operatorname{tr}|_e u|_{K_-} \Big) \Big(\operatorname{tr}|_e v|_{K_+} - \operatorname{tr}|_e v|_{K_-} \Big) + \\
&\quad + \Big(\operatorname{tr}|_e u|_{K_+} - \operatorname{tr}|_e u|_{K_-} \Big) \frac{1}{2} \Big(\operatorname{tr}|_e v|_{K_+} + \operatorname{tr}|_e v|_{K_-} \Big) = \\
&= \langle u \rangle_e [v]_e + [u]_e \langle v \rangle_e
\end{aligned}
$$

(ii) Den zweiten Teil der Aussage beweist man auf die gleiche Weise.

□

Lemma 3.2.6. Sei $u \in X_0(T,\Omega)$ dann folgt $[\partial_{n_e} u(t)]_e = 0$, $[u(t)]_e = 0$ für alle $e \in \mathcal{I}_h$, $u(t)|e = 0$ für alle $e \in \mathcal{B}_h$ fast überall auf $(0,T)$ und $[u]_n = 0$ für alle $n \in \{1,\dots,M_\tau\}$.

Beweis. Sei $u \in X_0(T,\Omega)$, dann folgt mit Satz 2.5.5 $u \in C([0,T], H^1(\Omega))$ und damit muss auch $[u]_n = 0$ für alle $n \in \{1,\dots,M_\tau\}$ gelten. Da $u \in H^2(\Omega)$ fast überall auf $(0,T)$ gilt, folgt die restliche Aussage. □

Es soll nun das DG-Verfahren für Problem P 1 hergeleitet werden. Die Vorgehensweise ist dabei ganz ähnlich zu [25], Kapitel 2.2. Für die schwache Lösung u gilt lt. Bemerkung 3.1.5, (ii) die Gleichung $u' - \Delta_x u = f$ punktweise fast überall auf Ω_T und $u(0) = 0$ fast überall auf Ω. Wir multiplizieren die Gleichung mit $v \in X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$ und integrieren über Ω_T. Mit der Bezeichnung λ_3 für das 3-dimensionale Lesbesgue-Maß, mit partieller Integration, Ausnützen von $u(0) = 0$ und weil $[u]_n = 0$ für alle $n \in \{1,\dots,M_\tau\}$ gilt, folgt dann

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_T} u'v \,\mathrm{d}\lambda_3 &= \sum_{n,K} \int_{K^{(n)}} u'v \,\mathrm{d}\lambda_3 = \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K u'v \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \\
&= -\sum_{n,K} \int_K \int_{t_n}^{t_{n+1}} uv' \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x + \sum_{n=0}^{M} \sum_K \int_K u_{n+1}^- v_{n+1}^- - u_n^+ v_n^+ \,\mathrm{d}x = \\
&= -\sum_{n,K} \int_K \int_{t_n}^{t_{n+1}} uv' \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{M} \sum_K \int_K [uv]_n \,\mathrm{d}x + \\
&\quad + \sum_K \int_K u(T,\cdot)\, v(T,\cdot) \,\mathrm{d}x - \sum_K \int_K \underbrace{u(0,x)}_{=0} v(0,x) \,\mathrm{d}x = \\
&= -\sum_{n,K} \int_K \int_{t_n}^{t_{n+1}} uv' \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{M} \sum_K \int_K \underbrace{\langle u \rangle_n}_{=u_n^-} [v]_n \,\mathrm{d}x + \\
&\quad - \sum_{n=1}^{M} \sum_K \int_K \underbrace{[u]_n}_{=0} \langle v \rangle_n \,\mathrm{d}x + \sum_K \int_K u(T,\cdot)\, v(T,\cdot) \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Setze nun

$$
A_{1,\tau,h}(u,v) := -\sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K uv' \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{M} \sum_K \int_K u_n^- [v]_n \,\mathrm{d}x + \sum_K \int_K u(T,x)\, v(T,x) \,\mathrm{d}x. \tag{14}
$$

Wir bezeichnen mit $\mu_{\partial K^{(n)}}$ das Oberflächenmaß von $\partial K^{(n)}$, mit $\mu_{\partial K}$ das Oberflächenmaß von ∂K und mit μ_e das Oberflächenmaß über $e \in \mathcal{I}_h$. Partielle Integration und

Ausnützen der Randbedingung aus (2) liefert dann:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_T} -\Delta_x uv \,\mathrm{d}\lambda_3 &= -\sum_{n,K} \int_{K^{(n)}} \Delta_x uv \,\mathrm{d}\lambda_3 = \sum_{n,K} \int_{K^{(n)}} \nabla_x u \nabla_x v \,\mathrm{d}\lambda_3 - \sum_{n,K} \int_{\partial K^{(n)}} \frac{\partial u}{\partial n} v \,\mathrm{d}\mu_{\partial K^{(n)}} = \\
&= \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \nabla_x u \nabla_x v \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial K} \partial_{n_x} uv \,\mathrm{d}\mu_{\partial K} \,\mathrm{d}t = \\
&= \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \nabla_x u \nabla_x v \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e [\partial_{n_e} uv]_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t - \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} uv \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t = \\
&= \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \nabla_x u \nabla_x v \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \underbrace{[\partial_{n_e} u]_e}_{=0} \langle v \rangle_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t - \\
&\quad - \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \langle \partial_{n_e} u \rangle_e [v]_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t - \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} uv \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Für die schwache Lösung u gilt $[u]_e = 0$ für $e \in \mathcal{I}$ und $u|_e = 0$ für $e \in \mathcal{B}$. Damit folgt auch für $\gamma > 0$

$$\begin{aligned}
0 = &\sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e [u]_e \langle \partial_{n_e} v \rangle_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e u \partial_{n_e} v \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \\
&+ \gamma \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e [u]_e [v]_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \gamma \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e uv \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Setze nun für $u, v \in H^1(\mathcal{K}_h)$

$$\begin{aligned}
a_h(u,v) := &\sum_K \int_K \nabla_x u \nabla_x v \,\mathrm{d}x - \sum_{e\in\mathcal{I}_h} \int_e \langle \partial_{n_e} u \rangle_e [v]_e \,\mathrm{d}\mu_e - \\
&- \sum_{e\in\mathcal{I}_h} \int_e [u]_e \langle \partial_{n_e} v \rangle_e \,\mathrm{d}\mu_e + \gamma \frac{1}{h_e} \sum_{e\in\mathcal{I}_h} \int_e [u]_e [v]_e \,\mathrm{d}\mu - \\
&- \sum_{e\in\mathcal{B}_h} \int_e \partial_{n_e} uv \,\mathrm{d}\mu_e - \sum_{e\in\mathcal{B}_h} \int_e u \partial_{n_e} v \,\mathrm{d}\mu_e + \\
&+ \gamma \sum_{e\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e uv \,\mathrm{d}\mu_e. \qquad (15)
\end{aligned}$$

Für $u, v \in X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$ definiere weiter

$$A_{2,\tau,h}(u,v) := \sum_{n=0}^{M_\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} a_h(u(t), v(t)) \,\mathrm{d}t \qquad (16)$$

Setze noch für $u, v \in X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$

$$A_{\tau,h}(u,v) := A_{1,\tau,h}(u,v) + A_{2,\tau,h}(u,v)$$

und

$$F_{\tau,h}(v) := \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K f v \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t$$

Wir erhalten das Problem

Problem P 6. Finde $u \in X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$, mit

$$A_{\tau,h}(u,v) := A_{1,\tau,h}(u,v) + A_{2,\tau,h}(u,v) = F_{\tau,h}(v) \quad \forall v \in X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h) \tag{17}$$

Bemerkung 3.2.7. (i) Wir sind bei der Herleitung der schwachen Formulierung von der Gleichung $u' - \Delta_x u = f$ ausgegangen. Diese Gleichung gilt lt. Bemerkung 3.1.5, (ii) für die schwache Lösung $u \in X_0(T,\Omega) \subset X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$, punktweise fast überall auf Ω_T. Damit ist u auch eine Lösung von Problem P 6.

(ii) Der Parameter $\gamma > 0$ in der Definition von $a_h(\cdot,\cdot)$ aus (15) und der Definition von $A_{2,\tau,h}(\cdot,\cdot)$ in (16) heißt Stabilisierungsparameter. Genau genommen hängen $a_h(\cdot,\cdot)$ und $A_{2,\tau,h}(\cdot,\cdot)$ damit von γ ab. Wir werden aber γ für alle $\tau \leq \tilde{\tau}$ und für alle $h \leq \tilde{h}$ gleich wählen (vgl. dazu auch Satz 3.3.2). In der Notation der restlichen Arbeit werden wir γ deshalb nicht berücksichtigen.

(iii) Es folgt sofort, dass

$$a_h(u,v) = a(u,v) \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \tag{18}$$

$$A_{\tau,h}(u,v) = A(u,v) \quad \forall u, v \in X_0(T,\Omega) \tag{19}$$

und

$$F_{\tau,h}(v) = F(v) \quad \forall v \in X_0(T,\Omega) \tag{20}$$

gilt.

Das folgende Lemma gilt analog zu [26], Remark 2.1.6 und liefert eine äquivalente Formulierung für $A_{1,\tau,h}(u,v)$, wenn $u, v \in X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$.

Lemma 3.2.8. Sei $u, v \in X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$. Dann gilt

$$A_{1,\tau,h}(u,v) = \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K u'v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{M} \sum_K \int_K [u]_n v_n^+ \,\mathrm{d}x + \sum_K \int_K u(0,x)\, v(0,x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Wir integrieren partiell und erhalten

$$\begin{aligned}
&A_{1,\tau,h}(u,v) = \\
&= -\sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K uv' \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{M} \sum_K \int_K u_n^- [v]_n \,\mathrm{d}x + \sum_K \int_K u(T,x)\, v(T,x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K u'v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \sum_K \int_K u(T,x)\, v(T,x)\,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K u_n^- v_n^- dx + \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K u_n^+ v_n^+ dx + \\
&\quad + \sum_K \int_K u(0,x)\, v(0,x)\, dx + \sum_K \int_K u(T,x)\, v(T,x)\,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K u_n^- [v]_n \,\mathrm{d}x. \qquad (21)
\end{aligned}$$

Es gilt weiter

$$\begin{aligned}
u_n^+ v_n^+ - u_n^- v_n^- - u_n^- [u]_n &= u_n^+ v_n^+ - u_n^- v_n^- - u_n^- v_n^+ - u_n^- v_n^- = \\
&= \left(u_n^+ - u_n^-\right) v_n^+ = [u]_n v_n^-. \qquad (22)
\end{aligned}$$

Einsetzen von (22) in (21) liefert die Gültigkeit des Lemmas. □

Definition 3.2.9 (DG-Raum)**.** Sei $p, q \in \mathbb{N}$. Der Raum $V_{\tau,h}^{p,q} := \mathcal{P}^p(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{P}^q(\mathcal{K}_h))$ heißt DG-Raum der Ordnung $[p,q]$ in $X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$.

Bemerkung 3.2.10. (i) Der Raum $V_{\tau,h}^{p,q}$ ist ein endlichdimensionaler Teilraum von $X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$.

(ii) Sei $\Pi_{\tau,h}^p$ die Abbildung aus Bemerkung 2.4.5, (iii) und $v_{\tau,h} \in V_{\tau,h}^{p,q}$. Dann gilt $\Pi_{\tau,h}^p v_{\tau,h} = v_{\tau,h}$.

Wir haben die notwendigen Bausteine des DG-Verfahrens definiert.

Problem P 7 (DG-Verfahren)**.** Finde $u_{\tau,h} \in V_{\tau,h}^{p,q}$, mit

$$A_{\tau,h}(u_{\tau,h}, v_{\tau,h}) = A_{1,\tau,h}(u_{\tau,h}, v_{\tau,h}) + A_{2,\tau,h}(u_{\tau,h}, v_{\tau,h}) = F_{\tau,h}(v_{\tau,h}) \quad \forall v_{\tau,h} \in V_{\tau,h}^{p,q} \qquad (23)$$

Definition 3.2.11 (DG-Verfahren)**.** Seien $p, q \in \mathbb{N}$. Die Lösung $u_{\tau,h} \in V_{\tau,h}^{p,q}$ von Problem P 7 wird DG-Lösung genannt.

3.3. Lösbarkeit und Konvergenz

Lemma 3.3.1. Es gelten die folgenden Aussagen:

(i) $|u|^1_{1,\tau,h} := A_{1,\tau,h}(u,u)$ ist eine Seminorm auf $X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$ und es gilt

$$|u|^2_{1,\tau,h} = \frac{1}{2}\|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u(T,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M_\tau}\sum_K \|[u]_n\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

(ii)

$$\|u\|^2_{2,\tau,h} := \sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla_x u\|^2_K \,\mathrm{d}t + \gamma \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h}\frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|[u]_e\|^2_e \,\mathrm{d}t + \gamma \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h}\frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u\|^2_e \,\mathrm{d}t$$

ist eine Norm auf $X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$. Es gilt

$$\sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u\|^2_K \,\mathrm{d}t \preceq \|u\|^2_{2,\tau,h}$$

und die Konstante hängt nur vom Gebiet Ω_T ab.

(iii) $\|u\|^2_{\tau,h} := |u|^2_{1,\tau,h} + \|u\|^2_{2,\tau,h}$ ist eine Norm auf $X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$.

Beweis. (i) Es reicht, die Darstellung von $|u|_{1,\tau,h}$ zu zeigen. Berechne dazu analog zu [26] (Satz 2.11):

$$|u|^2_{1,\tau,h} = -\sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_K \underbrace{uu'}_{=\frac{1}{2}(u^2)_t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{M_\tau}\sum_K\int_K u_n^-\,[u]_n\,\mathrm{d}x + \sum_K\int_K u(T,\cdot)\,u(T,\cdot)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \|u(T,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=1}^{M_\tau}\sum_K\int_K \frac{1}{2}\left[u^2\right]_n - u_n^-\,[u]_n\,\mathrm{d}x =$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[u^2\right]_n - u_n^-\,[u]_n &= \frac{1}{2}u_n^+u_n^+ - \frac{1}{2}u_n^-u_n^- - u_n^-\left(u_n^+ - u_n^-\right) = \\ &= \frac{1}{2}u_n^+u_n^+ - u_n^+u_n^- + \frac{1}{2}u_n^-u_n^- = \\ &= \frac{1}{2}\left(u_n^+ - u_n^-\right)^2 = \frac{1}{2}[u]_n^2\end{aligned}$$

Insgesamt folgt also:

$$|u|^2_{1,\tau,h} = \frac{1}{2}\|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u(T,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M_\tau}\sum_K \|[u]_n\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

(ii) Die Dreiecksungleichung und die Positivität sind klar. Aus $\|u\|_{2,\tau,h}^2 = 0$ folgt f.ü. auf $(0,T)$, dass $u(t)$ stückweise konstant ist und das $u(t)|_{\partial\Omega} = 0$ und $u(t)|_e = 0$ für alle $e \in \mathcal{I}_h$ gilt. Damit muss aber schon $u(t) = 0$ f.ü. auf $(0,T)$ gelten. Insgesamt haben wir $u = 0$. Die Abschätzung gilt nach Satz 2.3.3, (i).

(iii) Folgt sofort aus (i) und (ii).

□

Satz 3.3.2 (Elliptizität auf dem DG-Raum)**.** Seien $p, q \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\|v_{\tau,h}\|_{\tau,h}^2 \preceq A_{\tau,h}(v_{\tau,h}, v_{\tau,h}) \quad \forall v_{\tau,h} \in V_{\tau,h}^{p,q},$$

wenn der Parameter γ abhängig von p und q groß genug gewählt wird.

Beweis. Siehe etwa [12], Kapitel 4.2. □

Bemerkung 3.3.3. Wir können in Satz 3.3.2 o.E.d.A annehmen, dass $\gamma > 1$. Siehe dazu auch [12], Kapitel 4.2, Gleichung (4.7).

Satz 3.3.4 (Lax-Milgram)**.** Sei $(X, (\cdot,\cdot)_X)$ ein Hilbertraum, $F \in X^\star$ und $B : X \times X \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto B(u,v)$ eine Bilinearform, die

(i) koerziv, d.h. $B(u,u) \succeq \|u\|_X^2$ für alle $u \in X$ und

(ii) stetig, d.h. $B(u,v) \preceq \|u\|_X \|v\|_X$ für alle $u, v \in X$, ist.

Es gibt dann ein eindeutiges $u \in X$, sodass $B(u,v) = F(v)$ für alle $v \in X$.

Beweis. Siehe [11], Section 6.2.1, Theorem 1 oder [6], Theorem 2.7.7 oder [9], Satz 2.29 □

Satz 3.3.5 (Inverse Ungleichung)**.** Sei $p \in \mathbb{N}$, $K^{(n)} \in \mathcal{K}_h^{\mathcal{M}_\tau}$, $v \in \mathcal{P}^p\left(K^{(n)}\right)$, $e \in \mathcal{E}_h$, mit $e \subset \partial K$ und $t \in (0,T)$ und $n \in \{0, 1, \ldots, M_\tau\}$. Es gelten dann die folgenden Aussagen:

(i) $\|v(t)\|_e^2 \preceq \frac{1}{h_e}\|v(t)\|_K^2$ und $\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|v(t)\|_e^2 \,\mathrm{d}t \preceq \frac{1}{h_e} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|v(t)\|_K^2 \,\mathrm{d}t$,

(ii) $\|\nabla_x v(t)\|_e^2 \preceq \frac{1}{h_e}\|\nabla_x v(t)\|_K^2$ und $\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla_x v(t)\|_e^2 \,\mathrm{d}t \preceq \frac{1}{h_e} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla_x v(t)\|_K^2 \,\mathrm{d}t$,

(iii) $\|v(t_n)\|_K^2 \preceq \frac{1}{\tau_n} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|v(t)\|_K^2 \,\mathrm{d}t$ und $\|v(t_n)\|_e^2 \preceq \frac{1}{\tau_n} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|v(t)\|_e^2 \,\mathrm{d}t$,

(iv) $\|v(t_{n+1})\|_K^2 \preceq \frac{1}{\tau_n} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|v(t)\|_K^2 \,\mathrm{d}t$ und $\|v(t_{n+1})\|_e^2 \preceq \frac{1}{\tau_n} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|v(t)\|_e^2 \,\mathrm{d}t$,

(v) $\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|v'(t)\|_K^2 \,\mathrm{d}t \preceq \frac{1}{\tau_n^2} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|v(t)\|_K^2 \,\mathrm{d}t$,

und die Konstante hängt nur vom Polynomgrad p und von der Konstante C_{shape} zur Formregularität und den Konstanten zur lokalen Quasi-Uniformität $C_{\text{uni},t}$ und $C_{\text{uni},x}$ aus Voraussetzung V 4 ab.

Beweis. (v) folgt sofort aus [6], Lemma 4.5.3 und (i)-(iv) folgen sofort aus [38]. □

Satz 3.3.6 (Existenz der DG-Lösung)**.** Seien $p, q \in \mathbb{N}$ und der Parameter $\gamma > 0$ abhängig von p und q groß genug gewählt. Dann existiert ein eindeutiges $u_{\tau,h} \in V_{\tau,h}^{p,q}$, das Problem P 7 löst.

Beweis. Es reicht die Voraussetzungen vom Satz von Lax-Milgram nachzuprüfen. $V_{\tau,h}^{p,q}$ ist als endlichdimensionaler Teilraum von $X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$ ein Hilbertraum. Die Elliptizität gilt nach Satz 3.3.2 für die Norm $\|\cdot\|_{\tau,h}$. Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und der inversen Ungleichung überzeugt man sich leicht, dass

$$A_{\tau,h}(v,w) \preceq \|v\|_{X(\mathcal{M}_\tau,\mathcal{K}_h)} \|w\|_{X(\mathcal{M}_\tau,\mathcal{K}_h)} \quad \forall v, w \in X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$$

gilt. Da $V_{\tau,h}^{p,q}$ endlichdimensional ist, folgt $\|v\|_{\tau,h} \simeq \|v\|_{X(\mathcal{M}_\tau,\mathcal{K}_h)}$ und die Stetigkeit und Ellipizität sind gezeigt. □

Satz 3.3.7 (Galerkin-Orthogonalität)**.** Sei u die schwache Lösung aus Problem P 2 und $u_{\tau,h} \in V_{\tau,h}^{p,q}$ die DG-Lösung aus Problem P 7. Dann gilt

$$A_{\tau,h}(u - u_{\tau,h}, v_{\tau,h}) = 0 \quad \forall v_{\tau,h} \in V_{\tau,h}^{p,q}.$$

Beweis. Die schwache Lösung $u \in X(T, \Omega)$ löst lt. Bemerkung 3.2.7,(i) auch Problem P 2, womit die Aussage sofort folgt. □

Bis jetzt haben wir gezeigt, dass das Problem P 7 lösbar ist. Damit wir später überhaupt den Fehler eines sinnvollen Verfahrens abschätzen, muss das Verfahren auch konvergieren. Für unser Setting zitieren wir dazu die Arbeit [12].

Satz 3.3.8 (Konvergenz des DG-Vefahrens)**.** Sei $u \in H^{q+1}((0,T), H^1(\Omega)) \cap C([0,T], H^{p+1}(\Omega))$ und $u_{\tau,h}$ die DG-Lösung aus Problem P 7. Dann gilt

$$\sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \|\nabla_x (u - u_{\tau,h})\|_K^2 \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|[u - u_{\tau,h}]\|_e^2 \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u - u_{\tau,h}\|_e^2 \,\mathrm{d}t \preceq$$
$$\preceq h^{2p} \|u\|_{L^2((0,T),H^{p+1}(\Omega))}^2 + \tau^{2q+2} \|u\|_{H^{p+1}((0,T),H^1(\Omega))}^2 + h^{2p} \|u\|_{C([0,T],H^{p+1}(\Omega))}.$$

Diese Konstante hängt vom Endzeitpunkt T ab.

Beweis. Der Satz ist eine Vereinfachung von [12], Theorem 2. □

4. A Posteriori-Fehlerschätzer

4.1. Das Konzept

Definition 4.1.1 (Fehlerschätzer)**.** Eine Funktion

$$\eta_{\tau,h} : L^2\left((0,T), L^2(\Omega)\right) \times V_{\tau,h}^{p,q} : (f, u_{\tau,h}) \mapsto \eta_{\tau,h}(f, u_{\tau,h}) \geq 0$$

heißt Fehlerschätzer des DG-Verfahrens für das Modellproblem.

Definition 4.1.2 (Zuverlässigkeit)**.** Sei u die schwache Lösung, $u_{\tau,h} \in V_{\tau,h}^{p,q}$ die DG-Lösung und $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, sodass $u, u_{\tau,h} \in X$ gilt. Ein Fehlerschätzer η heißt zuverlässig bezüglich der Norm $\|\cdot\|_X$, wenn

$$\|u - u_{\tau,h}\|_X^2 \preceq \eta_{\tau,h}(f, u_{\tau,h})^2$$

gilt.

Es ergeben sich also die folgenden Fragen:

- Bezüglich welcher Norm soll $u - u_{\tau,h}$ abgeschätzt werden?
- Wie wählt man den Fehlerschätzer idealerweise, sodass das Verhalten des exakten Fehlers $u - u_{\tau,h}$ möglichst gut wiedergegeben wird?

4.2. 1. Ansatz

In [18] oder in [16] wird eine Abschätzung für das DG-Verfahren für die Laplacegleichung hergeleitet. Die Aussagen, die Beweisideen und die Vorgehensweise aus [18] werden im folgenden Kapitel für die Wärmeleitungsgleichung adaptiert.

4.2.1. Stetige Approximation auf dem DG-Raum

Lemma 4.2.1. Sei $N \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \ldots, N\}$. Mit der Bezeichnung $b := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a_i$ folgt

$$\sum_{i=1}^{N} |a_i - b|^2 \preceq \sum_{i=1}^{N-1} |a_{i+1} - a_i|^2$$

und die Konstante hängt nur von N ab.

Beweis. Siehe [18], Lemma 2.2 □

Lemma 4.2.2. Sei $u \in \mathcal{P}^q(\mathcal{K}_h)$. Es gelten die folgenden Aussagen

(i) $h_K^d \|u\|_{L^\infty(K)}^2 \simeq \|u\|_K^2 \quad \forall K \in \mathcal{K}$,

(ii) $h_e^{d-1} \|u\|_{L^\infty(e)}^2 \simeq \|u\|_e^2 \quad \forall e \in \mathcal{E}_h$

Beweis. Die Aussage folgt sofort mit der inversen Ungleichung und einem Skalierungsargument. □

Der folgende Satz gilt in Analogie zu [18], Theorem 2.2.

Satz 4.2.3. Für jedes $u \in V_{\tau,h}^{p,q}$ existiert ein $\chi \in V_{\tau,h}^{p,q} \cap C\left(\overline{\Omega_T}\right)$ mit $\chi|_{\{0\}\times\Omega\cup[0,T)\times\partial\Omega} = 0$, sodass die folgenden Aussagen gelten.

(i)

$$\sum_{n,K} \|\nabla_x (u-\chi)\|_{K^{(n)}}^2 \preceq \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|[u]_e\|_{L^2(e)}^2 \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u\|_{L^2(e)}^2 \,\mathrm{d}t + \\ + \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \frac{\tau_n}{h_K^2} \|[u]_n\|_{L^2(K)}^2 + \sum_K \frac{\tau_0}{h_K^2} \|u(0)\|_{L^2(K)}^2$$

(ii)

$$\sum_{n,K} \left\|(u-\chi)'\right\|_{K^{(n)}}^2 \preceq \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \frac{h_e}{\tau_n^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|[u]_e\|_{L^2(e)}^2 \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \frac{h_e}{\tau_n^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u\|_{L^2(e)}^2 \,\mathrm{d}t + \\ + \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \frac{1}{\tau_n} \|[u]_n\|_{L^2(K)}^2 + \sum_K \frac{1}{\tau_0} \|u(0)\|_{L^2(K)}^2$$

gelten.

(iii) und

$$\sum_{n,K} \|u-\chi\|_{K^{(n)}}^2 \preceq \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} h_e \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|[u]_e\|_{L^2(e)}^2 \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} h_e \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u\|_{L^2(e)}^2 \,\mathrm{d}t + \\ + \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \tau_n \|[u]_n\|_{L^2(K)}^2 + \sum_K \tau_0 \|u(0)\|_{L^2(K)}^2$$

Die Konstanten hängen nur den Polynomgraden p und q, vom Gebiet Ω_T und den Konstanten C_{shape} zur Formregularität und $C_{\text{uni},x}$ und $C_{\text{uni},t}$ zur lokalen Quasi-Uniformität ab.

Beweis. (i) Wir verallgemeinern die Vorgehensweise im Beweis von [18], Theorem 2.2. auf die Diskretisierung in dieser Arbeit. Sei $\mathcal{M}_\tau$ eine Zerlegung von $(0,T)$ aus Voraussetzung V 4. Setze $t_{M_\tau+i} = 2T - t_{M+1-i}$ für $i \in \{1,\dots,M_\tau+1\}$.

$$\mathcal{M}_{\tau,2T} := \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < T_{M_\tau+1} = T < T_{M_\tau+2} < \cdots < t_{2M_\tau+2} = 2T\}$$

ist eine Zerlegung des Zeitintervalls $(0, 2T)$. Mit diesen Bezeichnungen gilt klarerweise $\mathcal{K}_h^{\mathcal{M}_\tau} \subset \mathcal{K}_h^{\mathcal{M}_{\tau,2T}}$.

Setze

$$\tilde{u}_{\tau,h}(t,x) := \begin{cases} u(t,x) & \text{für } t \in [0,T] \\ u(2T-t,x) & \text{für } t \in (T,2T] \end{cases}$$

Sei $\mathcal{V}_{t,\text{ref}}$ eine Menge von Lagrangegrangepunkten auf $[0,1]$. Für $n \in \{0,1,\ldots,2M_\tau+1\}$ sei $\mathcal{V}_n$ die Menge der von $\mathcal{V}_{t,\text{ref}}$ auf $[t_n, t_{n+1}]$ transformierten Lagrangepunkte. Bezeichne weiter mit $\mathcal{V}_{x,\text{ref}}$ eine Menge von auf dem abgeschlossenen Referenzelement. Für $K \in \mathcal{K}_h$ sei dann wieder $\mathcal{V}_K$ die Menge der auf $\overline{K}$ transformierten Lagrangegrangepunkten. Bezeichne dann mit $(\phi_{\nu_x,n})_{\nu \in \mathcal{V}_n}$ bzw. $(\psi_{\nu_x,K})_{\nu_x \in \mathcal{V}_K}$ die zugehörige Lagrangebasis von $\mathcal{P}^p([t_n,t_{n+1}])$ von $\mathcal{P}^q(K)$. Denken wir uns die Funktionen $(\phi_{\nu_t,n})_{\nu_t \in \mathcal{V}_n}$ bzw. $(\psi_{\nu_x,K})_{\nu_x \in \mathcal{V}_K}$ außerhalb ihrer Definitionsbereich mit 0 fortgesetzt, so haben wir eine Basis von $\mathcal{P}^p(\mathcal{M}_{\tau,2t})$ bzw. von $\mathcal{P}^q(\mathcal{K}_h)$. Setze schließlich $\mathcal{V}_t := \bigcup_{n=0}^{2M_\tau+1} \mathcal{V}_n$, $\mathcal{V}_x := \bigcup_{K \in \mathcal{K}_h} \mathcal{V}_K$ und

$$\mathcal{V} := \left\{(\nu_t, \nu_x) \in \mathbb{R}^{d+1} : \nu_t \in \mathcal{V}_t, \nu_x \in \mathcal{V}_x\right\}$$

sowie $\mathcal{V}^{\mathcal{I}} := \mathcal{V} \cap (0,2T) \times \Omega$. Mit diesen Bezeichnungen gibt es nun für jedes $K^{(n)} \in K_h^{\mathcal{M}_{\tau,2T}}$ Skalare $\left(a_{\nu_t,\nu_x,K^{(n)}}\right)_{\nu_t \in \mathcal{V}_n}^{\nu_x \in \mathcal{V}_K}$, sodass

$$\tilde{u}(t,x) = \sum_{n,K} \sum_{\nu_t \in \mathcal{V}_n} \sum_{\nu_x \in \mathcal{V}_K} a_{\nu_t,\nu_x,K^{(n)}} \phi_{\nu_t,n}(t) \psi_{\nu_x,K}(x).$$

Für $(\nu_t, \nu_x) \in \mathcal{V}$ setze weiter

$$b_{\nu_t,\nu_x} := \begin{cases} \frac{1}{\left|\omega_{(\nu_t,\nu_x)}\right|} \sum_{K^{(n)} \in \omega_{(\nu_t,\nu_x)}} a_{\nu_t,\nu_x,K^{(n)}} & \text{für } (\nu_t,\nu_x) \in \mathcal{V}^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und schließlich

$$\tilde{\chi}(t,x) = \sum_{n,K} \sum_{\nu_t \in \mathcal{V}_n} \sum_{\nu_x \in \mathcal{V}_K} b_{\nu_t,\nu_x} \phi_{\nu_t,n}(t) \psi_{\nu_x,K}(x).$$

Es folgt leicht, dass $\tilde{\chi} \in C_0\left([0,2T] \times \overline{\Omega}\right)$, $\tilde{\chi}(\cdot,x) \in \mathcal{P}^p(\mathcal{M}_{\tau,2T})$ fast überall auf Ω und $\tilde{\chi}(t,\cdot) \in \mathcal{P}^q(\mathcal{K}_h)$ fast überall auf $(0,2T)$ ist. Mit $\|\phi_{\nu_t}\|_{(t_n,t_{n+1})}^2 \preceq \tau_n$, $\|\nabla_x \psi_{\nu_x}\|_K^2 \preceq$

h_K^{d-2}, Lemma 4.2.1 und der Bezeichnung $e^{(n)} := (t_n, t_{n+1}) \times e$ folgt

$$
\begin{aligned}
&\sum_{K^{(n)} \in \mathcal{K}_h^{\mathcal{M}_{\tau,2T}}} \left\| \nabla_x \left(\tilde{u} - \tilde{\chi} \right) \right\|_{K^{(n)}}^2 \preceq \\
&\preceq \sum_{n,K} \sum_{\nu_t \in \mathcal{V}_n} \sum_{\nu_x \in \mathcal{V}_K} \left| a_{\nu_t,\nu_x,K^{(n)}} - b_{\nu_t,\nu_x} \right|^2 \tau_n h_K^{d-2} \preceq \\
&\preceq \sum_{n,K} \tau_n h_K^{d-2} \sum_{(\nu_t,\nu_x) \in \mathcal{V}^{\mathcal{I}} \cap \overline{K^{(n)}}} \left| a_{\nu_t,\nu_x,K^{(n)}} - b_{\nu_t,\nu_x} \right|^2 + \\
&\quad + \sum_{n,K} \tau_n h_K^{d-2} \sum_{(\nu_t,\nu_x) \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}^{\mathcal{I}} \cap \overline{K^{(n)}}} \left| a_{\nu_t,\nu_x,K^{(n)}} \right|^2 \preceq \\
&\preceq \sum_{n,e \in \mathcal{I}_h} \tau_n h_e^{d-2} \sum_{(\nu_t,\nu_x) \in \overline{e^{(n)}}} \sum_{K^{(n)} \in \omega_{(\nu_t,\nu_x)}} \left| a_{\nu_t,\nu_x,K^{(n)}} - b_{\nu_t,\nu_x} \right|^2 + \\
&\quad + \sum_{n,e \in \mathcal{B}_h} \tau_n h_e^{d-2} \sum_{(\nu_t,\nu_x) \in \overline{e^{(n)}} \subset \overline{K^{(n)}}} \left| a_{\nu_t,\nu_x,K^{(n)}} \right|^2 + \\
&\quad + \sum_{K} \tau_0 h_K^{d-2} \sum_{(\nu_t,\nu_x) \in \overline{\{0\} \times K} \subset \overline{K^{(n)}}} \left| a_{\nu_t,\nu_x,K^{(n)}} \right|^2 + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_{K} \tau_n h_K^{d-2} \sum_{(\nu_t,\nu_x) \in \overline{\{t_n\} \times K}} \sum_{K^{(n)} \in \omega_{(\nu_t,\nu_x)}} \left| a_{\nu_t,\nu_x,K^{(n)}} - b_{\nu_t,\nu_x} \right|^2 + \\
&\quad + \sum_{K} \tau_{2M_\tau+1} h_K^{d-2} \sum_{(\nu_t,\nu_x) \in \overline{\{2T\} \times K} \subset \overline{K^{(n)}}} \left| a_{\nu_t,\nu_x,K^{(n)}} \right|^2 \preceq \\
&\preceq \sum_{n,e \in \mathcal{I}_h} \tau_n h_e^{d-2} \sum_{(\nu_t,\nu_x) \in \overline{e^{(n)}}} \sum_{K_1^{(n_1)}, K_2^{(n_2)} \in \omega_{e^{(n)}}} \left| a_{\nu_t,\nu_x,K_1^{(n_1)}} - a_{\nu_t,\nu_x,K_2^{(n_2)}} \right|^2 + \\
&\quad + \sum_{n,e \in \mathcal{B}_h} \tau_n h_e^{d-2} \sum_{(\nu_t,\nu_x) \in \overline{e^{(n)}} \subset \overline{K^{(n)}}} \left| a_{\nu_t,\nu_x,K^{(n)}} \right|^2 + \\
&\quad + \sum_{K} \tau_0 h_K^{d-2} \sum_{(\nu_t,\nu_x) \in \overline{\{0\} \times K} \subset \overline{K^{(n)}}} \left| a_{\nu_t,\nu_x,K^{(n)}} \right|^2 + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_{K} \tau_n h_K^{d-2} \sum_{(\nu_t,\nu_x) \in \overline{\{t_n\} \times K}} \sum_{K_1^{(n_1)}, K_2^{(n_2)} \in \omega_{\{t_n\} \times K}} \left| a_{\nu_t,\nu_x,K_1^{(n_1)}} - a_{\nu_t,\nu_x,K_2^{(n_2)}} \right|^2 + \\
&\quad + \sum_{K} \tau_{2M_\tau+1} h_K^{d-2} \sum_{(\nu_t,\nu_x) \in \overline{\{2T\} \times K} \subset \overline{K^{(n)}}} \left| a_{\nu_t,\nu_x,K^{(n)}} \right|^2 \preceq \\
&\preceq \sum_{n,e \in \mathcal{I}_h} \tau_n h_e^{d-2} \left\| [\tilde{u}]_e \right\|_{L^\infty\left(e^{(n)}\right)}^2 + \sum_{n,e \in \mathcal{B}_h} \tau_n h_e^{d-2} \left\| \tilde{u} \right\|_{L^\infty\left(e^{(n)}\right)}^2 + \\
&\quad + \sum_{K} \tau_n h_K^{d-2} \left\| \tilde{u}\left(0\right) \right\|_{L^\infty(K)}^2 + \sum_{K} \tau_{2M_\tau+1} h_K^{d-2} \left\| \tilde{u}\left(2T\right) \right\|_{L^\infty(K)}^2 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{M_\tau+1} \sum_{K} \tau_n h_K^{d-2} \left\| [\tilde{u}]_n \right\|_{L^\infty(K)}^2
\end{aligned}
$$

Für $e \in \mathcal{I}_h$ gilt folgt mit Lemma 4.2.2, (ii)

$$\begin{aligned}\tau_n h_K^{d-2} \left\|[\tilde{u}]_e\right\|^2_{L^\infty\left(e^{(n)}\right)} &\preceq h_K^{d-2} \sup_{x\in e} \tau_n \left\|[\tilde{u}]_e(\cdot,x)\right\|^2_{L^\infty([t_n,t_{n+1}])} \preceq \\ &\preceq h_K^{d-2} \sup_{x\in e} \left\|[\tilde{u}]_e(\cdot,x)\right\|^2_{L^2([t_n,t_{n+1}])} \preceq \left\|\left\|[\tilde{u}]_e(\cdot,x)\right\|^2_{L^\infty(e)}\right\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1})} \preceq \\ &\preceq \frac{1}{h_e}\left\|[\tilde{u}]_e\right\|^2_{e^{(n)}} = \frac{1}{h_e}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|[\tilde{u}]_e\right\|^2_e \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Für $e \in \mathcal{B}_h$ folgt auf die gleiche Weise

$$\tau_n h_K^{d-2} \left\|\tilde{u}\right\|^2_{L^\infty\left(e^{(n)}\right)} \preceq \frac{1}{h_e}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\tilde{u}\right\|^2_e \,\mathrm{d}t.$$

Für $n \in \{1,\dots,2M_\tau+1\}$ und $K \in \mathcal{K}_h$ folgt mit Lemma 4.2.2, (i) dann schließlich

$$h_K^{d-2}\left\|[\tilde{u}]_n\right\|^2_{L^\infty(K)} \preceq \frac{1}{h_K^2}\left\|[\tilde{u}]_n\right\|^2_{L^2(K)}$$

und

$$h_K^{d-2}\left\|\tilde{u}(0)\right\|^2_{L^\infty(K)} \preceq \frac{1}{h_K^2}\left\|\tilde{u}(0)\right\|^2_{L^2(K)},$$

sowie

$$h_K^{d-2}\left\|\tilde{u}(2T)\right\|^2_{L^\infty(K)} \preceq \frac{1}{h_K^2}\left\|\tilde{u}(2T)\right\|^2_{L^2(K)}.$$

Es gilt nun lt. Definition $\tilde{u}(2T,x) = u(0,x)$, $[\tilde{u}]_{M+1} = 0$. Weiter gilt

$$\left\|[\tilde{u}]_{2M-n+1}\right\|^2_{L^2(K)} = \left\|[u]_n\right\|^2_{L^2(K)} \quad \forall n \in \{0,1,\dots,M_\tau\}$$

und

$$\int\limits_{t_{2M-n+1}}^{t_{2M-n+2}} \left\|[\tilde{u}]_e\right\|_{L^2(e)} \mathrm{d}t = \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|[u]_e\right\|_{L^2(e)} \mathrm{d}t \quad \forall n \in \{0,1,\dots,M_\tau\}.$$

Setzt man nun $\chi(t,\cdot) := \chi|_{[0,T]}(t,\cdot)$, dann haben wir $\chi \in V^{p,q}_{\tau,h} \cap C\left(\overline{\Omega_T}\right)$ und $\chi|_{\{0\}\times\Omega\cup[0,T)\times\partial\Omega} = 0$ und schließlich folgt die Aussage mit

$$\sum_{K^{(n)}\in\mathcal{K}_h^{\mathcal{M}_\tau}} \left\|\nabla_x(u-\chi)\right\|^2_{K^{(n)}} \preceq \sum_{K^{(n)}\in\mathcal{K}_h^{\mathcal{M}_{\tau,2T}}} \left\|\nabla_x(\tilde{u}-\tilde{\chi})\right\|^2_{K^{(n)}}$$

und $\tau_{2M-n+1} = \tau_n$ für $n \in n \in \{0,1,\dots,M_\tau\}$ unittelbar.

(ii) , (iii) Wir wählen $\chi \in V^{p,q}_{\tau,h} \cap C\left(\overline{\Omega_T}\right)$ mit $\chi|_{\{0\}\times\Omega\cup[0,T)\times\partial\Omega} = 0$ wie in (i). Der Beweis der Aussagen verläuft mit $\left\|\phi'_{\nu_t}\right\|^2_{(t_n,t_{n+1})} \preceq \frac{1}{\tau_n}$, $\left\|\psi_{\nu_x}\right\|^2_K \preceq h_K^d$ und $\left\|\phi_{\nu_t}\right\|^2_{(t_n,t_{n+1})} \preceq \tau_n$ auf die gleiche Weise.

□

4.2.2. Die Abschätzung

Lemma 4.2.4 (Young-Ungleichung)**.** Sei $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jedes $\epsilon > 0$

$$|xy| \leq \frac{1}{2\epsilon}x^2 + \frac{\epsilon}{2}y^2.$$

Beweis. Es gilt

$$0 \leq (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy.$$

Bringt man $-2xy$ auf die linke Seite und dividiert durch 2, so ist die Aussage für $\epsilon = 1$ bewiesen. Berechne

$$|xy| = \left(\epsilon^{-\frac{1}{2}}x\right)\left(\epsilon^{\frac{1}{2}}y\right) \leq \frac{1}{2\epsilon}x^2 + \frac{\epsilon}{2}y^2,$$

und die Aussage ist bewiesen. □

Lemma 4.2.5. Sei $u \in X\left(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h\right)$ und sei $\Pi_0 : L^2\left(\Omega\right) \to \mathcal{P}^0\left(\mathcal{K}_h\right)$ die Projektion, für die

$$\left(\Pi_0 v, w\right)_\Omega = \left(v, w\right)_\Omega \quad \forall w \in \mathcal{P}^0\left(\mathcal{K}_h\right)$$

gilt und $\Pi^p_{\tau,h} : L^2\left(\left(0,T\right), H^1\left(\mathcal{K}_h\right)\right)$ die Projektion aus Definition 2.4.4, (ii). Es gilt $\Pi_0\left(\Pi^p_{\tau,h}u\right)(t) \in V^{p,q}_{\tau,h}$.

Beweis. Sei $\left(\phi_{j,n}\right)^{j\in\mathbb{N}_0}_{n\in\{0,1,\ldots,M_\tau\}}$ die Orthonormalbasis von $L^2\left(0,T\right)$ aus Bemerkung 2.4.5, (iii). Setze $a_{j,n} := \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} u\left(t\right)\phi\left(t\right)\mathrm{d}t \in H^1\left(\mathcal{K}_h\right)$ für $i \in \{0,1,\ldots,p\}$ und $n \in \{0,1,\ldots,M_\tau\}$. Lt. Lemma 2.4.6, (i) gilt dann

$$\Pi_0\left(\Pi^p_{\tau,h}u\left(t\right)\right) = \Pi_0\left(\sum_{n=0}^{M_\tau}\sum_{j=0}^{p} a_{j,n}\phi_{j,n}\left(t\right)\right) = \sum_{n=0}^{M_\tau}\sum_{j=0}^{p}\underbrace{\Pi_0 a_{j,n}}_{\in\mathcal{P}^0(\mathcal{K}_h)}\underbrace{\phi_{j,n}\left(t\right)}_{\in\mathcal{P}^p(\mathcal{M}_\tau)}$$

und die Aussage folgt unmittelbar. □

Wir kommen nun zur ersten Abschätzung des Fehlers $u - u_{\tau,h}$ nach oben. Für eine vergleichbare Abschätzung für elliptische Probleme verweisen wir auf [18], Theorem 3.1 oder auf [16], Theorem 3.2.

Satz 4.2.6. Sei $u_{\tau,h} \in V_{\tau,h}^{p,q}$ die Lösung von Problem P 7 und gelten die Voraussetzungen V 1 - V 4. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\|u - u_{\tau,h}\|_{\tau,h}^2 \preceq \eta_1 (u_h, f)^2 := \\
&:= \|f - \Pi_\tau^p f\|_{\Omega_T}^2 + \sum_{n,K} h_K^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \Pi_\tau^p f - u'_{\tau,h} + \Delta_x u_{\tau,h} \right\|_K^2 \mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} h_e \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|[\partial_{n_e} u_{\tau,h}]\|_e^2 \,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \gamma \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \left(\frac{1}{h_e} + \frac{h_e}{\tau_n^2} \right) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| [u_{\tau,h}]_e \right\|_e^2 \mathrm{d}t + \gamma \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \left(\frac{1}{h_e} + \frac{h_e}{\tau_n^2} \right) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{\tau,h}\|_e^2 \,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \left(\frac{1}{\tau_n} + \frac{\tau_n}{h_K^2} \right) \left\| [u_{\tau,h}]_n \right\|_K^2 + \sum_K \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{\tau_0}{h_K^2} \right) \|u_{\tau,h}(0)\|_K^2 ,
\end{aligned}$$

und die Konstante hängt nur vom Gebiet Ω_T, den Polynomgraden $p, q \in \mathbb{N}$ und den Konstanten C_{shape} zur Formregularität und $C_{\text{uni},x}$ und $C_{\text{uni},t}$ zur lokalen Quasi-Uniformität ab.

Beweis. Wir gehen vor wie wie in [18], Kapitel 3. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned}
D_{\tau,h}(u,v) := A_{1,\tau,h}(u,v) &+ \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \nabla_x u \nabla_x v \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \\
&+ \gamma \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e [u]_e [v]_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \gamma \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e uv \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Mit partieller Integration folgt für $v \in X(\mathcal{M}_\tau, \mathcal{K}_h)$ und die DG-Lösung $u_{\tau,h} \in V_{\tau,h}^{p,q}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \nabla_x u_{\tau,h} \nabla_x v \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x = &- \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \Delta_x u_{\tau,h} v \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \langle \partial_{n_e} u_{\tau,h} \rangle [v]_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \\
&+ \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e [\partial_{n_e} u_{\tau,h}]_e \langle v \rangle_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} u_{\tau,h} v \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{24}$$

Sei $E = u - u_{\tau,h}$. Mit der Galerkinorthogonalität, Umformen und der Bezeichnung $\eta := v - v_{\tau,h}$ gilt weiter:

$$\begin{aligned}
&D_{\tau,h}(E,v) = \\
&= A_{\tau,h}(E,v) + \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \langle \partial_{n_e} E \rangle_e [v]_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e [E]_e \langle \partial_{n_e} v \rangle_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} E v \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e E \partial_{n_e} v \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t =
\end{aligned}$$

$$= A_{\tau,h}(E,\eta) + \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \langle \partial_{n_e} E\rangle_e [v]_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e [E]_e \langle \partial_{n_e} v\rangle_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t +$$
$$+ \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} E v \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e E \partial_{n_e} v \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t =$$

Weil die schwache Lösung lt. Bemerkung 3.2.7, (i) auch eine Lösung von Problem P 6 folgt weiter

$$D_{\tau,h}(E,v) = F_{\tau,h}(\eta) - A_{\tau,h}(u_{\tau,h},\eta) +$$
$$+ \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \langle \partial_{n_e} E\rangle_e [v]_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e [E]_e \langle \partial_{n_e} v\rangle_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t +$$
$$+ \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} E v \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e E \partial_{n_e} v \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t.$$

Mit Lemma 3.2.8 und (24) folgt dann

$$D_{\tau,h}(E,v) =$$
$$= \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \left(f - u'_{\tau,h} + \Delta_x u_{\tau,h}\right) \eta \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \langle \partial_{n_e} u_{\tau,h}\rangle [\eta]_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t -$$
$$- \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e [\partial_{n_e} u_{\tau,h}]_e \langle \eta\rangle_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t - \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} u_{\tau,h} \eta \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t -$$
$$- \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \int_K [u_{\tau,h}]_n \eta_n^+ \,\mathrm{d}x - \sum_K \int_K u_{\tau,h}(0,x)\,\eta(0,x)\,\mathrm{d}x +$$
$$+ \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \langle \partial_{n_e} u_{\tau,h}\rangle_e [\eta]_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \langle \partial_{n_e} \eta\rangle_e [u_{\tau,h}]_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t +$$
$$+ \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} u_{\tau,h} \eta \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} \eta u_{\tau,h} \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t +$$
$$- \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \gamma \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e [u_{\tau,h}]_e [\eta]_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t - \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \gamma \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e u_{\tau,h} \eta \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t +$$
$$+ \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \langle \partial_{n_e} E\rangle_e [v]_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e [E]_e \langle \partial_{n_e} v\rangle_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t +$$
$$+ \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} E v \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e E \partial_{n_e} v \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t.$$

Wir berechnen für $e \in \mathcal{I}_h$

$$\langle \partial_{n_e} \eta \rangle_e \left[u_{\tau,h} \right]_e + \langle \partial_{n_e} v \rangle_e \left[E \right]_e = \tag{25}$$

$$= \langle \partial_{n_e} v \rangle_e \left[u_{\tau,h} \right]_e - \langle \partial_{n_e} v_{\tau,h} \rangle_e \left[u_{\tau,h} \right]_e + \langle \partial_{n_e} v \rangle_e \underbrace{\left[u \right]_e}_{=0} - \langle \partial_{n_e} v \rangle_e \left[u_{\tau,h} \right]_e = \tag{26}$$

$$= - \langle \partial_{n_e} v_{\tau,h} \rangle_e \left[u_{\tau,h} \right]_e . \tag{27}$$

Wenn wir $u|_e (t) = 0$ f.ü. $(0,T)$ für $e \in \mathcal{B}_h$ ausnützen, folgern wir für $e \in \mathcal{B}_h$ auf die gleiche Weise auch

$$\partial_{n_e} \eta u_{\tau,h}|_e + \partial_{n_e} v E|_e = - \partial_{n_e} v_{\tau,h} u_{\tau,h}|_e .$$

Wenn wir verlangen, dass $v_{\tau,h}(t) \in \mathcal{P}^0(\mathcal{K}_h)$ auf $(0,T)$, folgt weiter

$$\sum_{n,e \in \mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \langle \partial_{n_e} \eta \rangle_e \left[u_{\tau,h} \right]_e \mathrm{d}\mu_e \, \mathrm{d}t + \sum_{n,e \in \mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \langle \partial_{n_e} v \rangle_e \left[E \right]_e \mathrm{d}\mu_e \, \mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{n,e \in \mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \langle \underbrace{\partial_{n_e} v_{\tau,h}}_{=0} \rangle_e \left[u_{\tau,h} \right]_e \mathrm{d}\mu_e \, \mathrm{d}t = 0$$

und

$$\sum_{n,e \in \mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} \eta u_{\tau,h} \, \mathrm{d}\mu_e \, \mathrm{d}t + \sum_{n,e \in \mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} v E \, \mathrm{d}\mu_e \, \mathrm{d}t = \sum_{n,e \in \mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \underbrace{\partial_{n_e} v_{\tau,h}}_{=0} u_{\tau,h} \, \mathrm{d}\mu_e \, \mathrm{d}t = 0.$$

Mit Satz 2.4.7 und Bemerkung 2.4.8 folgt mit dem Operator $\Pi^p_{\tau,h}$ aus Definition 2.4.4, (ii) und mit Lemma 2.4.9 weiter

$$\begin{aligned}
&D_{\tau,h}(E,v) = \\
&= \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K (f - \Pi^p_\tau f) \, \eta \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \left(\Pi^p_\tau f - u'_{\tau,h} + \Delta_x u_{\tau,h} \right) \Pi^p_{\tau,h} \eta \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - \\
&\quad - \sum_{n,e \in \mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \left[\partial_{n_e} u_{\tau,h} \right]_e \langle \Pi^p_{\tau,h} \eta \rangle_e \, \mathrm{d}\mu_e \, \mathrm{d}t - \sum_{n,e \in \mathcal{I}_h} \gamma \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \left[u_{\tau,h} \right]_e \left[\Pi^p_{\tau,h} \eta \right]_e \mathrm{d}\mu_e \, \mathrm{d}t - \\
&\quad - \sum_{n,e \in \mathcal{B}_h} \gamma \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e u_{\tau,h} \Pi^p_{\tau,h} \eta \, \mathrm{d}\mu_e \, \mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \int_K \left[u_{\tau,h} \right]_n \eta_n^+ \, \mathrm{d}x - \sum_K \int_K u_{\tau,h}(0,x) \, \eta(0,x) \, \mathrm{d}x + \\
&\quad + \sum_{n,e \in \mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \langle \partial_{n_e} E \rangle_e \left[v \right]_e \mathrm{d}\mu_e \, \mathrm{d}t + \sum_{n,e \in \mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} E v \, \mathrm{d}\mu_e \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Setze $v = E$ und wähle $v_{\tau,h}(t) = \Pi_0 \left(\left(\Pi^p_{\tau,h} E \right)(t) \right)$. Mit Satz 4.2.5 folgt $v_{\tau,h} \in V^{p,q}_{\tau,h}$. Wähle nun $\chi \in V^{p,q}_{\tau,h} \cap C\left(\overline{\Omega_T} \right)$ mit $\chi|_{\{0\} \times \Omega \cup [0,T) \times \partial\Omega} = 0$ wie in Lemma 4.2.3. Weil für $e \in \mathcal{I}_h$

$$\langle \partial_{n_e} E \rangle_e \left[E \right]_e = - \langle \partial_{n_e} E \rangle_e \left[u_{\tau,h} \right]_e = - \langle \partial_{n_e} E \rangle_e \left[u_{\tau,h} - \chi \right]_e$$

und für $e \in \mathcal{B}_h$

$$\partial_{n_e} E E|_e = -\partial_{n_e} E u_{\tau,h}|_e = -\partial_{n_e} E \left(u_{\tau,h} - \chi\right)|_e$$

gilt, folgt dann:

$$\begin{aligned}
&D_{\tau,h}\left(E, E\right) = \\
&= \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \left(f - \Pi_\tau^p f\right) \eta \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \left(\Pi_\tau^p f - u'_{\tau,h} + \Delta_x u_{\tau,h}\right) \Pi_{\tau,h}^p \eta \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \\
&\quad - \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \left[\partial_{n_e} u_{\tau,h}\right]_e \left\langle \Pi_{\tau,h}^p \eta \right\rangle_e \mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t - \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \gamma \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \left[u_{\tau,h}\right]_e \left[\Pi_{\tau,h}^p \eta\right]_e \mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \\
&\quad - \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \gamma \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e u_{\tau,h} \Pi_{\tau,h}^p \eta \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \int_K \left[u_{\tau,h}\right]_n \eta_n^+ \,\mathrm{d}x - \sum_K \int_K u_{\tau,h}\left(0,x\right) \eta\left(0,x\right) \mathrm{d}x - \\
&\quad - \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \left\langle \partial_{n_e} E \right\rangle_e \left[u_{\tau,h} - \chi\right]_e \mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t - \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} E \left(u_{\tau,h} - \chi\right) \mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Schließlich gilt wegen der Galerkinorthogonalität

$$\begin{aligned}
&0 = A_{\tau,h}\left(E, u_{\tau,h} - \chi\right) = \\
&= \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \nabla_x E \nabla_x \left(u_{\tau,h} - \chi\right) \mathrm{d}t \,\mathrm{d}x - \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \left\langle \partial_{n_e} E \right\rangle_e \left[u_{\tau,h} - \chi\right]_e \mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t - \\
&\quad - \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \left\langle \partial_{n_e} \left(u_{\tau,h} - \chi\right) \right\rangle_e \underbrace{\left[E\right]_e}_{=-\left[u_{\tau,h}\right]_e} \mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \gamma \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \underbrace{\left[E\right]_e}_{=-\left[u_{\tau,h}\right]_e} \underbrace{\left[u_{\tau,h} - \chi\right]_e}_{=\left[u_{\tau,h}\right]_e} \mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t - \\
&\quad - \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \partial_{n_e} E \left(u_{\tau,h} - \chi\right) \mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t - \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} \left(u_{\tau,h} - \chi\right) \underbrace{E}_{=-u_{\tau,h}} \mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \gamma \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \underbrace{E}_{=-u_{\tau,h}} \underbrace{\left(u_{\tau,h} - \chi\right)}_{=u_{\tau,h}} \mathrm{d}\mu_e - \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K E \left(u_{\tau,h} - \chi\right)' + \\
&\quad - \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \int_K E_n^- \underbrace{\left[u_{\tau,h} - \chi\right]_n}_{=\left[u_{\tau,h}\right]_n} \mathrm{d}x + \sum_K \int_K E\left(T,x\right) \left(u_{\tau,h} - \chi\right)\left(T,x\right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ausdrücken von $\sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \left\langle \partial_{n_e} E \right\rangle_e \left[u_{\tau,h} - \chi\right]_e \mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} E \left(u_{\tau,h} - \chi\right) \mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t$ und Einsetzen liefert schließlich:

$$
\begin{aligned}
&D_{\tau,h}\left(E,E\right) = \\
&= \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \left(f - \Pi_\tau^p f\right) \eta \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \left(\Pi_\tau^p f - u'_{\tau,h} + \Delta_x u_{\tau,h}\right) \Pi_{\tau,h}^p \eta \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - \\
&- \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \left[\partial_{n_e} u_{\tau,h}\right]_e \left\langle \Pi_{\tau,h}^p \eta \right\rangle_e \mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t - \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \gamma \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \left[u_{\tau,h}\right]_e \left[\Pi_{\tau,h}^p \eta\right]_e \mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \\
&- \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \gamma \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e u_{\tau,h} \Pi_{\tau,h}^p \eta \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \int_K \left[u_{\tau,h}\right]_n \eta_n^+ \,\mathrm{d}x - \sum_K \int_K u_{\tau,h}\left(0,x\right) \eta\left(0,x\right) \mathrm{d}x - \\
&- \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \nabla_x E \nabla_x \left(u_{\tau,h} - \chi\right) \mathrm{d}t \,\mathrm{d}x - \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \left\langle \partial_{n_e} \left(u_{\tau,h} - \chi\right)\right\rangle_e \left[u_{\tau,h}\right]_e \mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t - \\
&- \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \partial_{n_e} \left(u_{\tau,h} - \chi\right) u_{\tau,h} \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \gamma \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \left[u_{\tau,h}\right]_e^2 \mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t - \\
&+ \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \gamma \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_{\tau,h}^2 \,\mathrm{d}\mu_e + \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K E \left(u_{\tau,h} - \chi\right)' \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \\
&+ \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \int_K E_n^- \left[u_{\tau,h}\right]_n \mathrm{d}x - \sum_K \int_K E\left(T,x\right) \left(u_{\tau,h} - \chi\right)\left(T,x\right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Die auftretenden Terme werden nun nacheinander abgeschätzt:

- Mit den Ungleichungen von Young und Cauchy-Schwarz folgt:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \left(f - \Pi_\tau^p f\right) \eta \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \preceq \\
&\preceq \frac{1}{\epsilon_1} \left\|f - \Pi_\tau^p f\right\|_{\Omega_T}^2 + \epsilon_1 \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\eta\right\|_K^2 \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{\epsilon_1} \left\|f - \Pi_\tau^p f\right\|_{\Omega_T}^2 + \epsilon_1 \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|E - v_{\tau,h}\right\|_K^2 \mathrm{d}t \preceq \\
&\preceq \frac{1}{\epsilon_1} \left\|f - \Pi_\tau^p f\right\|_{\Omega_T}^2 + \epsilon_1 \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|E\right\|_K^2 \mathrm{d}t + \epsilon_1 \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\nabla_x E\right\|_K^2 \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

- Für $K^{(n)} \in \mathcal{K}_h$ gilt

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\Pi^p_{\tau,h}\eta\right\|_K^2 \,\mathrm{d}t = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\Pi^p_{\tau,h}\left(E - v_{\tau,h}\right)\right\|_K^2 \,\mathrm{d}t = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\Pi^p_{\tau,h}E - v_{\tau,h}\right\|_K^2 \,\mathrm{d}t \preceq$$

$$\preceq h_K^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\nabla_x\left(\Pi^p_{\tau,h}E\right)\right\|_K^2 \,\mathrm{d}t \preceq h_K^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|E\|_K^2 \,\mathrm{d}t + h_K^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla_x E\|_K^2 \,\mathrm{d}t.$$

Mit der Young-Ungleichung gilt dann

$$\sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \left(\Pi^p_\tau f - u'_{\tau,h} + \Delta_x u_{\tau,h}\right) \Pi^p_{\tau,h}\eta \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \preceq$$

$$\preceq \frac{1}{\epsilon_1} \sum_{n,K} h_K^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\Pi^p_\tau f - u'_{\tau,h} + \Delta_x u_{\tau,h}\right\|_K^2 \,\mathrm{d}t + \epsilon_1 \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|E\|_K^2 \,\mathrm{d}t + \epsilon_1 \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla_x E\|_K^2 \,\mathrm{d}t.$$

- Für $e \in \mathcal{I}_h$ bezeichne mit $K_+, K_- \in \mathcal{K}_h$ die beiden Elemente für die $\overline{K_+} \cap \overline{K_-} = e$. Mit der Spurungleichung und weil $\nabla_x\left(\Pi^p_{\tau,h}\eta\right) = \nabla_x\left(\Pi^p_{\tau,h}E\right)$ gilt dann

$$\left\|\langle \Pi^p_{\tau,h}\eta\rangle_e\right\|_e^2 \preceq$$

$$\preceq \frac{1}{h_{K_+}} \left\|\Pi^p_{\tau,h}\eta\right\|_{K_+}^2 + h_{K_+} \left\|\nabla_x\left(\Pi^p_{\tau,h}\eta\right)\right\|_{K_+}^2 + \frac{1}{h_{K_-}} \left\|\Pi^p_{\tau,h}\eta\right\|_{K_-}^2 + h_{K_-} \left\|\nabla_x\left(\Pi^p_{\tau,h}\eta\right)\right\|_{K_-}^2 \preceq$$

$$\preceq h_{K_+} \left\|\nabla_x\left(\Pi^p_{\tau,h}E\right)\right\|_{K_+}^2 + h_{K_-} \left\|\nabla_x\left(\Pi^p_{\tau,h}E\right)\right\|_{K_-}^2$$

und

$$\sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\langle \Pi^p_{\tau,h}\eta\rangle_e\right\|_e^2 \,\mathrm{d}t \preceq$$

$$\preceq \sum_{n,K} h_K \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\nabla_x\left(\Pi^p_{\tau,h}E\right)\right\|_K^2 \,\mathrm{d}t \preceq \sum_{n,K} h_K \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|E\|_K^2 \,\mathrm{d}t + \sum_{n,K} h_K \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla_x E\|_K^2 \,\mathrm{d}t. \tag{28}$$

Mit den Ungleichungen von Cauchy-Schwarz und Young folgt:

$$\sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e \left[\partial_{n_e} u_{\tau,h}\right]_e \langle \Pi^p_{\tau,h}\eta\rangle_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t \preceq$$

$$\preceq \epsilon_2 \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} h_e \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|[\partial_{n_e} u_{\tau,h}]\|_e^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\epsilon_2} \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\langle \Pi^p_{\tau,h}\eta\rangle_e\right\|_e^2 \preceq$$

$$\preceq \epsilon_2 \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} h_e \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|[\partial_{n_e} u_{\tau,h}]\|_e^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\epsilon_2} \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|E\|_K^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\epsilon_2} \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla_x E\|_K^2 \,\mathrm{d}t. \tag{29}$$

- Auf die gleiche Weise wie in den vorherigen 2 Punkten folgt

$$\sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \gamma \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e [u_{\tau,h}]_e \left[\Pi^p_{\tau,h}\eta\right]_e \mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t \preceq$$
$$\preceq \epsilon_3 \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \gamma \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|[u_{\tau,h}]\|_e^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\epsilon_3} \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|E\|_K^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\epsilon_3} \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla_x E\|_K^2 \,\mathrm{d}t$$

und auch

$$\sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \gamma \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e u_{\tau,h} \Pi^p_{\tau,h}\eta \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t \preceq$$
$$\preceq \epsilon_4 \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \gamma \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{\tau,h}\|_e^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\epsilon_4} \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|E\|_K^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{\epsilon_4} \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla_x E\|_K^2 \,\mathrm{d}t.$$

- Es werden nun 2 Terme auf einmal abschätzt. Es gilt $E_n^+ - E_n^- = [E]_n = -[u_{\tau,h}]_n$ und damit folgt

$$\sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \int_K E_n^- [u_{\tau,h}]_n \,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \int_K [u_{\tau,h}]_n \eta_n^+ \,\mathrm{d}x =$$
$$= \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \int_K \int_K \left(E_n^- - \eta_n^+\right) [u_{\tau,h}]_n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \int_K \left(E_n^- - E_n^+ - v_{\tau,h}{}_n^+\right) [u_{\tau,h}]_n \,\mathrm{d}x =$$
$$= \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \int_K \left|[u_{\tau,h}]_n\right|^2 \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \int_K v_{\tau,h}{}_n^+ [u_{\tau,h}]_n \,\mathrm{d}x.$$

Mit den Ungleichungen von Cauchy-Schwarz und Young und der inversen Ungleichung und der Definition von $v_{\tau,h}$ folgt

$$\sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \int_K v_{\tau,h}{}_n^+ [u_{\tau,h}]_n \,\mathrm{d}x \preceq$$
$$\preceq \frac{1}{\epsilon_5} \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \frac{1}{\tau_n} \int_K \left|[u_{\tau,h}]_n\right|^2 \mathrm{d}x + \epsilon_5 \sum_K \tau_n \int_K \left|v_{\tau,h}{}_n^+\right|^2 \preceq$$
$$\preceq \frac{1}{\epsilon_5} \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \frac{1}{\tau_n} \int_K \left|[u_{\tau,h}]_n\right|^2 \mathrm{d}x + \epsilon_5 \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|v_{\tau,h}\|_K^2 \,\mathrm{d}t \preceq$$
$$\preceq \frac{1}{\epsilon_5} \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \frac{1}{\tau_n} \int_K \left|[u_{\tau,h}]_n\right|^2 \mathrm{d}x + \epsilon_5 \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|E\|_K^2 \,\mathrm{d}t + \epsilon_5 \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla_x E\|_K^2 \,\mathrm{d}t.$$

- Da für die schwache Lösung u die Anfangsbedingung $u(0) = 0$ gilt, folgt $\eta(0) = -u_{\tau,h}(0) - v_{\tau,h}(0)$ und mit der inversen Ungleichung und den Ungleichungen von Young und Cauchy-Schwarz berechnen wir auf die gleiche Weise wie im vorherigen Punkt

$$\sum_K \int_K u_{\tau,h}(0,x)\,\eta(0,x)\,\mathrm{d}x =$$
$$\preceq \frac{1}{\epsilon_6}\sum_K \frac{1}{\tau_n}\int_K |u_{\tau,h}(0,x)|^2\,\mathrm{d}x + \epsilon_6 \sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|E\|_K^2\,\mathrm{d}t + \epsilon_6 \sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla_x E\|_K^2\,\mathrm{d}t.$$

- Mit Lemma 4.2.3 folgt

$$\sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_K \nabla_x E \nabla_x (u_{\tau,h} - \chi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \preceq$$
$$\preceq \frac{1}{\epsilon_7}\sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla_x E\|_K^2\,\mathrm{d}t + \epsilon_7 \sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla_x (u_{\tau,h} - \chi)\|_K^2\,\mathrm{d}t \preceq$$
$$\preceq \frac{1}{\epsilon_7}\sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla_x E\|_K^2\,\mathrm{d}t + \epsilon_7 \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h}\frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|[u_{\tau,h}]_e\right\|_e^2\,\mathrm{d}t + \epsilon_7 \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h}\frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{\tau,h}\|_e^2\,\mathrm{d}t +$$
$$+ \epsilon_7 \sum_{n=1}^{M_\tau}\sum_K \frac{\tau_n}{h_K^2}\left\|[u_{\tau,h}]_n\right\|_{L^2(K)}^2 + \epsilon_7 \sum_K \frac{\tau_0}{h_K^2}\|u_{\tau,h}(0)\|_{L^2(K)}^2.$$

- Für $e \in \mathcal{I}_h$ seien wieder $K_+, K_- \in \mathcal{K}$ derart, dass $\overline{K_+} \cap \overline{K_-} = e$. Mit der inversen Ungleichung folgt

$$\|\langle \partial_{n_e}(u_{\tau,h} - \chi)\rangle_e\|_e^2 \preceq \frac{1}{h_{K_-}}\|\nabla_x (u_{\tau,h} - \chi)\|_{K_-}^2 + \frac{1}{h_{K_+}}\|\nabla_x (u_{\tau,h} - \chi)\|_{K_+}^2.$$

Mit den Ungleichungen von Cauchy-Schwarz und Young, obiger Überlegung und Lemma 4.2.3 gilt:

$$\sum_{n,e\in\mathcal{I}_h}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_e \langle \partial_{n_e}(u_{\tau,h} - \chi)\rangle_e [u_{\tau,h}]_e\,\mathrm{d}\mu_e\,\mathrm{d}t \preceq$$
$$\preceq \sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla_x (u_{\tau,h} - \chi)\|^2\,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h}\frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|[u_{\tau,h}]_e\right\|_e^2\,\mathrm{d}t \preceq$$
$$\preceq \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h}\frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|[u_{\tau,h}]_e\right\|_e^2\,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h}\frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{\tau,h}\|_e^2\,\mathrm{d}t +$$
$$+ \sum_{n=1}^{M_\tau}\sum_K \frac{\tau_n}{h_K^2}\left\|[u_{\tau,h}]_n\right\|_{L^2(K)}^2 + \sum_K \frac{\tau_0}{h_K^2}\|u_{\tau,h}(0)\|_{L^2(K)}^2.$$

- Analog zum vorherigen Punkt folgt dann auch

$$\sum_{n,e\in\mathcal{B}_h}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_e \partial_{n_e}\left(u_{\tau,h}-\chi\right)u_{\tau,h}\,\mathrm{d}\mu_e\,\mathrm{d}t \preceq$$
$$\preceq \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h}\frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|[u_{\tau,h}]_e\right\|_e^2\mathrm{d}t+\sum_{n,e\in\mathcal{B}_h}\frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_h\|_e^2\,\mathrm{d}t+$$
$$+\sum_{n=1}^{M_\tau}\sum_K\frac{\tau_n}{h_K^2}\left\|[u_{\tau,h}]_n\right\|_{L^2(K)}^2+\sum_K\frac{\tau_0}{h_K^2}\left\|u_{\tau,h}(0)\right\|_{L^2(K)}^2.$$

- Mit Lemma 4.2.3 und den Ungleichungen von Young und Cauchy-Schwarz folgt:

$$\sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_K E\left(u_{\tau,h}-\chi\right)'\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \preceq$$
$$\preceq \epsilon_8\sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|E\|_K^2\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\epsilon_8}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|\left(u_{\tau,h}-\chi\right)'\right\|_K^2\mathrm{d}t \preceq$$
$$\preceq \epsilon_8\sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|E\|_K^2\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\epsilon_8}\sum_{n,e\in\mathcal{I}_h}\frac{h_e}{\tau_n^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|[u_{\tau,h}]_e\right\|_e^2\mathrm{d}t+$$
$$+\frac{1}{\epsilon_8}\sum_{n,e\in\mathcal{B}_h}\frac{h_e}{\tau_n^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_{\tau,h}\|_e^2\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\epsilon_8}\sum_{n=1}^{M_\tau}\sum_K\frac{1}{\tau_n}\left\|[u_{\tau,h}]_n\right\|_K^2+\frac{1}{\epsilon_8}\sum_K\frac{1}{\tau_n}\|u(0)\|_K^2.$$

- Für jedes $K\in\mathcal{K}_h$ folgt mit der inversen Ungleichung

$$\int_K\left|u_{\tau,h}(T,x)-\chi(T,x)\right|^2\mathrm{d}x \preceq \frac{1}{\tau_n}\int_{t_M}^{T}\int_K\left(u_{\tau,h}-\chi\right)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

  Mit den Ungleichungen von Cauchy-Schwarz und Young und Lemma 4.2.3 gilt dann

$$\sum_K\int_K E(T,x)\left(u_{\tau,h}-\chi\right)(T,x)\,\mathrm{d}x$$
$$\preceq \epsilon_9\sum_K\int_K\left|E(T,x)\right|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{\epsilon_9}\sum_K\int_K\left|u_{\tau,h}(T,x)-\chi(T,x)\right|^2\mathrm{d}x \preceq$$
$$\preceq \epsilon_9\sum_K\int_K\left|E(T,x)\right|^2\mathrm{d}x+\epsilon_9\sum_{n,K}\frac{1}{\tau_n}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_{\tau,h}-\chi\|_K^2\,\mathrm{d}t \preceq$$
$$\preceq \epsilon_9\sum_K\int_K\left|E(T,x)\right|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{\epsilon_9}\sum_{n,e\in\mathcal{I}_h}\frac{h_e}{\tau_n}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|[u_{\tau,h}]_e\right\|_e^2\mathrm{d}t+$$

$$+\frac{1}{\epsilon_9}\sum_{n,e\in\mathcal{B}_h}\frac{h_e}{\tau_n}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_{\tau,h}\|_e^2\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\epsilon_9}\sum_{n=1}^{M_\tau}\sum_K\left\|[u_{\tau,h}]_n\right\|_K^2+\frac{1}{\epsilon_9}\sum_K\|u(0)\|_K^2\preceq$$

$$\preceq\epsilon_9\sum_K\int\limits_K|E(T,x)|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\epsilon_9}\sum_{n,e\in\mathcal{I}_h}\frac{h_e}{\tau_n^2}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|[u_{\tau,h}]_e\right\|_e^2\,\mathrm{d}t+$$

$$+\frac{1}{\epsilon_9}\sum_{n,e\in\mathcal{B}_h}\frac{h_e}{\tau_n^2}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_{\tau,h}\|_e^2\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\epsilon_9}\sum_{n=1}^{M_\tau}\sum_K\frac{1}{\tau_n}\left\|[u_{\tau,h}]_n\right\|_K^2+\frac{1}{\epsilon_9}\sum_K\frac{1}{\tau_n}\|u(0)\|_K^2\,.$$

Die Werte $\epsilon_i>0$ können für alle $i\,\{1,\ldots,9\}$ frei gewählt werden. Auf der linken Seite der Ungleichung gilt mit Lemma 3.3.1, (i)

$$\sum_{n,K}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}\|E\|_K^2\,\mathrm{d}t+\|E\|_{\tau,h}^2\preceq\|E\|_{\tau,h}^2$$

und diese Konstante hängt nur von $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ und $T>0$ ab. Die Aussage des Satzes folgt mit $\|E\|_{\tau,h}^2=D(E,E)$ unmittelbar. □

4.3. 2.Ansatz

In diesem Kapitel soll ein alternativer Ansatz für die Abschätzung des Fehlers des DG-Verfahrens verwendet werden. In [32] und in [22] werden Fehlerschätzer für eine Diskretisierung nur in der Zeitrichtung angegeben. Wir verallgemeinern diese beiden Arbeiten für die in dieser Arbeit eingeführte Diskretisierung in Zeit und Ort. Dabei verwenden wir auch Ideen aus [16], [18] und [35].

4.3.1. Rekonstruktion

Sei in diesem Kapitel $\mathcal{M}$ eine Zerlegung des Zeitintervalls $\mathcal{K}$ eine reguläre Zerlegung von Ω und $\mathcal{K}^{\mathcal{M}}$ die von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{K}$ erzeugte Zerlegung.

Satz 4.3.1. Sei $(H,(\cdot,\cdot)_H)$ ein Hilbertraum, $u\in\mathcal{P}^p(\mathcal{M},H)$. Es gibt ein eindeutiges $\widehat{u}\in\mathcal{P}^{p+1}(\mathcal{M},H)\cap C([0,T],H)$, sodass

$$\widehat{u}(0)=0,\quad\widehat{u}(t_n)=u_n^-\quad\forall n\in\{1,\ldots,M\}\tag{30}$$

$$\int\limits_0^{t_1}(\widehat{u}',v)_H\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{t_1}(u',v)_H\,\mathrm{d}t+(u(0),v(0))_H\quad\forall v\in\mathcal{P}^p(\mathcal{M},H)\tag{31}$$

und

$$\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}(\widehat{u}',v)_H\,\mathrm{d}t=\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}(u',v)_H\,\mathrm{d}t+\left([u]_n,v_n^+\right)_H\quad\forall n\in\{1,\ldots,M\}\quad\forall v\in\mathcal{P}^p(\mathcal{M},H)\tag{32}$$

erfüllt.

Beweis. Die Wohldefiniertheit von $\widehat{u} \in \mathcal{P}^{p+1}(\mathcal{M}, H) \cap C([0,T], H)$ folgt wie in [22], Kapitel 2 □

Definition 4.3.2 (Rekonstruktion)**.** Sei $u \in \mathcal{P}^p(\mathcal{M}, H)$, dann heißt $\widehat{u} \in \mathcal{P}^{p+1}(\mathcal{M}, H) \cap C([0,T], H)$ aus Satz 4.3.1 Rekonstruktion von u.

Bemerkung 4.3.3. (i) Seien $q \in \mathbb{N}$, $(\lambda_i)_{i=1}^{q+1}$ mit $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{q+1} = 1$ die Punkte der Radauregel und $\beta_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \ldots, q+1\}$ die zugehörigen Gewichte. Es gilt dann

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{q+1} \beta_i g(\lambda_i) \quad \forall g \in \mathcal{P}^{2q}(0,1)$$

Setze $\lambda_0 := 0$. Es existieren Polynome $\mathcal{L}_i \in \mathcal{P}^{p+1}(0,1)$ mit $\mathcal{L}_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$ für $i, j \in \{0, 1 \ldots, q+1\}$. Diese Polynome heißen Lagrange-Polynome zu den Radaupunkten.

(ii) Sei $n \in \{0, 1, \ldots, M_\tau\}$. Setze $\mathcal{L}_{i,n}(t) := \mathcal{L}_i\left(\frac{t-t_n}{t_{n+1}-t_n}\right)$. Diese Funktionen heißen Lagrange-Polynome auf (t_n, t_{n+1}). Es gilt $\mathcal{L}_{i,n} \in \mathcal{P}^{p+1}(t_n, t_{n+1})$ und

$$\mathcal{L}_{i,n}(t_n + \tau_n \lambda_j) = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \in \{0, 1 \ldots, q+1\}$$

Satz 4.3.4 (Eigenschaften der Rekonstruktion)**.** Seien $\mathcal{L}_{i,n}$ für $n \in \{0, 1, \ldots, M\}$, $i \in \{0, 1, \ldots, q+1\}$ die Lagrange-Polynome aus Bemerkung 4.3.3, $u \in \mathcal{P}^p(\mathcal{M}, H^1(\mathcal{K}))$ und $\widehat{u} \in \mathcal{P}^{p+1}(\mathcal{M}, H^1(\mathcal{K})) \cap C([0,T], H^1(\mathcal{K}))$ die Rekonstruktion von u.

(i) Es gilt

$$(\widehat{u} - u)|_{(t_n, t_{n+1})}(t) = \mathcal{L}_{0,n}(t)\,[u]_n \quad \forall n \in \{1, \ldots, M\}$$

und

$$(\widehat{u} - u)|_{(0,t_1)}(t) = \mathcal{L}_{0,0}(t)\,u(0)$$

(ii) Die Aussagen aus (31) und (32) gelten auch auf $L^2(\Omega)$, d.h.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\widehat{u}', v)_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (u', v)_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \left([u]_n, v_n^+\right)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in \mathcal{P}^p\left(\mathcal{M}, H^1(\mathcal{K})\right) \tag{33}$$

für alle $n \in \{1, \ldots, M\}$ und

$$\int_0^{t_1} (\widehat{u}', v)_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_1} (u', v)_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t + (u(0), v(0))_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in \mathcal{P}^p\left(\mathcal{M}, H^1(\mathcal{K})\right). \tag{34}$$

(iii) Ist $u \in \mathcal{P}^p(\mathcal{M}, \mathcal{P}^q(\mathcal{K}))$, dann gilt $\widehat{u} \in \mathcal{P}^{p+1}(\mathcal{M}, \mathcal{P}^q(\mathcal{K}))$.

(iv) Sei $|\cdot|_A$ eine beliebige Seminorm auf $H^1(\mathcal{K})$. Dann gilt

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} |u(t) - \widehat{u}(t)|_A^2 \, \mathrm{d}t \simeq \tau_n \left|[u]_n\right|_A^2 \quad \forall n \in \{1, \ldots, M\}$$

und

$$\int_0^{t_1} |u(t) - \widehat{u}(t)|_A^2 \, \mathrm{d}t \simeq \tau_0 \left|u(0)\right|_A^2 .$$

(v) Es gilt

$$\begin{aligned} \|u - \widehat{u}\|_{L^2((0,T),H^1(\mathcal{K}))}^2 &\leq \sum_K \tau_0 \left\|u(0)\right\|_{H^1(\mathcal{K})}^2 + \sum_{n=1}^{|\mathcal{M}|} \tau_n \left\|[u]_n\right\|_{H^1(\mathcal{K})}^2 = \\ &= \sum_K \tau_0 \left\|u(0)\right\|_{H^1(K)}^2 + \sum_{n=1}^{|\mathcal{M}|} \sum_K \tau_n \left\|[u]_n\right\|_{H^1(K)}^2 . \end{aligned}$$

Beweis. (i) Siehe [22], Lemma 2.2

(ii) Es gilt $\mathcal{P}^p(\mathcal{M}, H^1(\mathcal{K})) \subset \mathcal{P}^p(\mathcal{M}, L^2(\Omega))$. Setzen wir in Satz 4.3.1 $H = L^2(\Omega)$, dann gibt es auch ein $\widehat{u}_{L^2(\Omega)}$, das die Gleichungen (33) und (34) erfüllt. Nach (i) gilt für $n \in \{1, \ldots, M_\tau\}$ auf dem Intervall (t_n, t_{n+1}) dann

$$\widehat{u}_{L^2(\Omega)}|_{(t_n,t_{n+1})}(t) = u|_{(t_n,t_{n+1})}(t) + \mathcal{L}_{0,n}(t)\,[u]_n = \widehat{u}|_{(t_n,t_{n+1})}(t)$$

fast überall auf Ω. Auf $(0, t_1)$ folgt die Aussage auf die gleiche Weise.

(iii) Sei $u \in \mathcal{P}^p((0,T), \mathcal{P}^q(\mathcal{K})) \subset \mathcal{P}^p((0,T), H^1(\mathcal{K}))$, $n \in \{1, \ldots, M_\tau\}$ und $(\phi_i)_{i=0}^p$ eine orthonormale Basis von $\mathcal{P}^p(t_n, t_{n+1})$. Es gibt dann Funktionen $(a_i)_{i=0}^q \in \mathcal{P}^q(\mathcal{K})$, sodass

$$u|_{(t_n,t_{n+1})\times\Omega}(t,x) = \sum_{i=0}^p \phi_i(t)\, a_i(x) .$$

Damit gilt

$$\widehat{u}|_{(t_n,t_{n+1})\times\Omega}(t,x) = \mathcal{L}_{0,n}(t)\,[u]_n(x) + \sum_{i=0}^p \phi_i(t)\, a_i(x) .$$

Mit dieser Darstellung folgt $\widehat{u}|_{(t_n,t_{n+1})\times\Omega}(\cdot, x) \in \mathcal{P}^{p+1}(t_n, t_{n+1})$ für $x \in \Omega$ fast überall und $\widehat{u}|_{(t_n,t_{n+1})\times\Omega}(t, \cdot) \in \mathcal{P}^q(\mathcal{K})$. Auf $(0, t_1) \times \Omega$ folgt die Aussage genauso. Insgesamt gilt $\widehat{u} \in \mathcal{P}^{p+1}(\mathcal{M}, \mathcal{P}^q(\mathcal{K}))$.

(iv) Siehe [22], Lemma 2.2

(v) Die Aussage folgt sofort aus (iv).

□

4.3.2. Clément Interpolation

In diesem Kapitel sei $\mathcal{K}$ eine reguläre Zerlegung von Ω.

Definition 4.3.5 (Nodale Basisfunktionen)**.** Für $x \in \mathcal{N}_{\mathcal{K},\mathcal{I}}$ wird eine Funktion $\phi_{\mathcal{K},\mathcal{I},x} \in \mathcal{P}^1(\mathcal{K}) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ für die $\phi_{\mathcal{K},\mathcal{I},x}(\tilde{x}) = \delta_{x,\tilde{x}}$ für alle $\tilde{x} \in \mathcal{N}_{\mathcal{K}}$ gilt, eine nodale Basisfunktion von x bezeichnet.

Bemerkung 4.3.6. Für eine reguläre Zerlegung $\mathcal{K}$ von $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ existieren die nodalen Basisfunktionen $\phi_{\mathcal{K},\mathcal{I},x}$ aus Definition 4.3.5 für jedes $x \in \mathcal{N}_{\mathcal{K},\mathcal{I}}$. Sei dazu $\omega_x = \bigcup_{i=1}^{N_x} K_x$ für ein $N_x \in \mathbb{N}$. Sei für $i \in \{1, \ldots, N_x\}$ weiter $e_i = \overline{K_i} \cap \partial\omega_x$ die Kante die x "gegenüberliegt". Wähle $\phi_{\mathcal{K},\mathcal{I},x}(x) := 1$, $\phi_{\mathcal{K},\mathcal{I},x}|_{e_i} = 0$, verbinde auf K_i den Punkt x mit der Kante e_i linear und setze $\phi_{\mathcal{K},\mathcal{I},x}|_{\Omega\setminus\omega_x} := 0$. Insgesamt hat $\phi_{\mathcal{K},\mathcal{I},x}$ die geforderten Eigenschaften.

Definition 4.3.7 (Clément-Interpolant)**.** Sei $S^q(\mathcal{K}) := \mathcal{P}^q(\mathcal{K}) \cap H_0^1(\Omega)$. Die Abbildung

$$\mathcal{I}_{\mathcal{K}} : L^1(\Omega) \to S^p(\mathcal{K}) : u \mapsto \sum_{x \in \mathcal{N}_{\mathcal{K},\mathcal{I}}} \frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} u \,\mathrm{d}x \phi_{\mathcal{K},\mathcal{I},x}$$

heißt der Clément-Interpolant.

Bemerkung 4.3.8. Da $|\Omega| < \infty$ gilt, ist $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ und $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ ist auch auf $H^1(\mathcal{K})$ wohldefiniert.

Der folgende Satz fasst die wichtigsten Eigenschaften des Clément-Interpolanten zusammen.

Satz 4.3.9. Sei $\mathcal{K}$ eine reguläre Zerlegung von Ω, $u \in H_0^1(\Omega)$ und $\mathcal{I}_{\mathcal{K}^{\mathcal{M}}}$ der Clément-Interpolant aus Definition 4.3.7. Es gelten dann die folgenden Aussagen

(i) $\|u - \mathcal{I}_{\mathcal{K}} u\|_K \leq h_K \|\nabla_x u\|_{\omega_K}$ für $K \in \mathcal{K}$

(ii) $\|u - \mathcal{I}_{\mathcal{K}} u\|_e \leq h_e^{\frac{1}{2}} \|\nabla_x u\|_{\omega_K}$ für $e \in \mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ und $e \subset \partial K$,

(iii) $\|\nabla_x \mathcal{I}_{\mathcal{K}} u\|_K \leq \|\nabla_x u\|_{\omega_K}$ für $K \in \mathcal{K}$,

(iv) $\|\nabla_x u - \nabla_x \mathcal{I}_{\mathcal{K}} u\|_K \leq \|\nabla_x u\|_{\omega_K}$ für $K \in \mathcal{K}$ und

(v) $\|\mathcal{I}_{\mathcal{K}} u\|_K \leq \|u\|_{H^1(\omega_K)}$.

Beweis. Siehe [24], Theorem 2,1. Für einen Beweis von (i)- (ii) siehe auch etwa [36], Proposition 2.1. (iv) und (v) lassen sich auch aus [37], Lemma 3.1. ableiten, (iii) folgt auch sofort aus (iv). □

4.3.3. Die Abschätzung

Die Idee zur folgenden Definition stammt aus [16].

Definition 4.3.10. Setze $S_h^q(\mathcal{K}_h) := \mathcal{P}^q(\mathcal{K}_h) \cap H_0^1(\Omega)$. Sei $\mathfrak{C}_h^q$ die orthogonale Projektion auf $\left(S^q(\mathcal{K}_h), (\cdot,\cdot)_{q,h}\right)$ mit

$$(\cdot,\cdot)_{q,h} : \mathcal{P}^q(\mathcal{K}_h) \times \mathcal{P}^q(\mathcal{K}_h) : (u,v) \mapsto \sum_K \int_K \nabla_x u \nabla_x v \,\mathrm{d}x + \gamma \sum_{e\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \int_e [u]_e [v]_e \,\mathrm{d}\mu_e + \gamma \sum_{e\in\mathcal{B}_h} \frac{1}{h_e} \int_e uv \,\mathrm{d}\mu.$$

Wir nennen $\mathfrak{C}_h^q(u)$ den konformen Anteil und $\mathfrak{D}_h^q(u) := u - \mathfrak{C}_h^q(u)$ den nicht-konformen Anteil von u.

Lemma 4.3.11. Sei $u \in \mathcal{P}^q(\mathcal{K}_h)$. Es gilt

$$\|\mathfrak{D}_h^q(u)\|_{H^1(\mathcal{K})}^2 \simeq \gamma \sum_{e\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \|[u]_e\|_e^2 + \gamma \sum_{e\in\mathcal{B}_h} \frac{1}{h_e} \|u\|_e^2$$

Beweis. Die Aussage ist eine Vereinfachung von Proposition 4.5 in [15]. □

Bemerkung 4.3.12. (i) Für $u \in \mathcal{P}^q(\mathcal{K}_h)$ gilt lt. Definition 4.3.10 klarerweise

$$\mathfrak{C}_h^q(u) \perp_{(\cdot,\cdot)_{q,h}} \mathfrak{D}_h^q(u)$$

(ii) Mit Lemma 3.3.1,(i) und Lemma 4.3.11 folgt für $u \in \mathcal{P}^q(\mathcal{K}_h)$

$$\sum_{n,K} \|u - \mathfrak{C}_h^q(u)\|_{H^1(K_h)}^2 \preceq \gamma \sum_{e\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \|[u]_e\|_e^2 + \gamma \sum_{e\in\mathcal{B}_h} \frac{1}{h_e} \|u\|_e^2$$

(iii) Sei $u \in V_{\tau,h}^{p,q} \subset L^2((0,T), H^1(\mathcal{K}_h))$, dann wird $\mathfrak{C}_h^q(u)$ als $t \mapsto \mathfrak{C}_h^q(u(t))$ und $\mathfrak{D}_h^q(u)$ als $t \mapsto \mathfrak{D}_h^q(u(t))$ interpretiert.

Bemerkung 4.3.13. (i) Sei $u_{\tau,h} \in V_{\tau,h}^{p,q}$ und $e \in \mathcal{I}_h$. Mit Satz 4.3.4 und der inversen Ungleichung gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|[\widehat{u_{\tau,h}}]_e\right\|_e^2 \mathrm{d}t &\preceq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|[u_{\tau,h}]_e\right\|_e^2 \mathrm{d}t + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|[\widehat{u_{\tau,h}} - u_{\tau,h}]_e\right\|_e^2 \mathrm{d}t \preceq \\
&\preceq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|[u_{\tau,h}]_e\right\|_e^2 \mathrm{d}t + \tau_n \left\|\left[[u_{\tau,h}]_n\right]_e\right\|_e^2 \preceq \\
&\preceq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|[u_{\tau,h}]_e\right\|_e^2 \mathrm{d}t + \tau_{n-1} \left\|\left[u_{\tau,h_n^-}\right]_e\right\|_e^2 + \tau_n \left\|\left[u_{\tau,h_n^+}\right]_e\right\|_e^2 \preceq \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \left\|[u_{\tau,h}]_e\right\|_e^2 \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Genauso folgt auch

$$\int_0^{t_1} \left\| [\widehat{u_{\tau,h}}]_e \right\|_e^2 \mathrm{d}t \preceq \int_0^{t_1} \left\| [u_{\tau,h}]_e \right\|_e^2 \mathrm{d}t.$$

Für die Kante $e \in \mathcal{B}_h$ folgt auf die gleiche Weise

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\widehat{u_{\tau,h}}\|_e^2 \mathrm{d}t \preceq \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \|u_{\tau,h}\|_e^2 \mathrm{d}t$$

und

$$\int_0^{t_1} \|\widehat{u_{\tau,h}}\|_e^2 \mathrm{d}t \preceq \int_0^{t_1} \|u_{\tau,h}\|_e^2 \mathrm{d}t.$$

(ii) Mit dem vorherigen Punkt gilt dann

$$\sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| [\widehat{u_{\tau,h}}]_e \right\|_e^2 \mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\widehat{u_{\tau,h}}\|_e^2 \mathrm{d}t \preceq \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| [u_{\tau,h}]_e \right\|_e^2 \mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{\tau,h}\|_e^2 \mathrm{d}t.$$

Bemerkung 4.3.14. Für die DG-Lösung $u_{\tau,h} \in V_{\tau,h}^{p,q}$ von Problem P 7 gilt dann mit der Definition der Rekonstruktion

$$\int_0^T \int_\Omega \widehat{u_{\tau,h}}' v_{\tau,h} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \int_0^T a_h\left(u_{\tau,h}, v_{\tau,h}\right) \mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega f v_{\tau,h} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \quad \forall v_{\tau,h} \in V_{\tau,h}^{p,q}.$$

Lemma 4.3.15. Sei $u \in L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right)$, $\mathcal{I}_{\mathcal{K}_h}$ die Abbildung aus Definition 4.3.7 und $\Pi_{\tau,h}^p$ der orthogonale Projektor wie in Bemerkung 2.4.5. Dann gilt:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{K}_h}\left(\Pi_{\tau,h}^p u(t)\right) \in L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right) \cap V_{\tau,h}^{p,q}$$

Beweis. Mit Lemma 2.4.9 folgt, für $u \in L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right)$, dass $\Pi_{\tau,h}^p u \in L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right)$ ist. Sei $(\phi_{j,n})_{n\in\{0,1,\ldots,M_\tau\}}^{j\in\mathbb{N}_0}$ die Orthonormalbasis von $L^2(0,T)$ aus Bemerkung 2.4.5. Für $j \in \{0,1,\ldots,p\}$ und $n \in \{0,1,\ldots,M_\tau\}$ setze dann $a_{j,n} := \int_{t_n}^{t_{n+1}} u\phi_{i,j} \,\mathrm{d}t \in H_0^1(\Omega)$. Mit Lemma 2.4.6 erhalten wir dann

$$\Pi_{\tau,h}^p u(t,x) = \sum_{n=0}^{M_\tau} \sum_{j=0}^{p} a_{j,n}(x)\, \phi_{j,n}(t)$$

und schließlich gilt

$$\mathcal{I}_{\mathcal{K}_h}\left(\Pi_{\tau,h}^p u(t,\cdot)\right) = \mathcal{I}_{\mathcal{K}_h}\left(\sum_{n=0}^{M_\tau} \sum_{j=0}^{p} a_{j,n}(\cdot)\, \phi_{j,n}(t)\right) = \sum_{n=0}^{M_\tau} \sum_{j=0}^{p} \underbrace{\phi_{j,n}(t)}_{\in\mathcal{P}^p(\mathcal{M}_\tau)} \underbrace{\mathcal{I}_{\mathcal{K}_h}\left(a_{j,n}(\cdot)\right)}_{\in H_0^1(\Omega)\cap\mathcal{P}^q(\mathcal{K}_h)}.$$

Die Aussage folgt unmittelbar. □

Das folgende Lemma wird in Satz 4.3.17 benötigt. Die Abschätzung in (ii) erscheint auf den ersten Blick grob. Möglicherweise ist auch ein "schärferes" Resultat möglich.

Lemma 4.3.16. Sei $u \in V_{\tau,h}^{p,q}$. Mit den Bezeichnungen aus Definition 4.3.10 gelten die folgenden Aussagen:

(i) $\mathfrak{D}_h^q(u)'(t) = \mathfrak{D}_h^q(u'(t))$

(ii) $\int_0^T \left\|\mathfrak{D}_h^q(u)'\right\|_{(H^1(\mathcal{K}_h))^\star}^2 \mathrm{d}t \preceq \gamma \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|[u']_e\|_e^2 \,\mathrm{d}t + \gamma \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u'\|_e^2 \,\mathrm{d}t$

Beweis. (i) Es genügt

$$\left(\mathfrak{D}_h^q(u)', \mathfrak{C}_h^q(v)\right)_{q,h} = 0 \quad \forall v \in V_{\tau,h}^{p,q}$$

nachzurechnen. Sei dazu $(\phi_{j,n})_{n\in\{0,1,\ldots,M_\tau\}}^{j\in\mathbb{N}_0}$ die Orthonormalbasis von $L^2(0,T)$. Bemerkung 2.4.5, (iii). Lt. Lemma 2.4.6 (iv). Es gilt dann

$$v(t,x) = \sum_{n=0}^{M_\tau} \sum_{j=0}^{p} a_j(x)\,\phi_{j,n}(t)$$

für gewisse $a_j \in \mathcal{P}^p(\mathcal{K}_h)$ für alle $j \in \{0,1,\ldots,p\}$. Mit dieser Darstellung folgt weiter

$$\mathfrak{D}_h^q(u)' = \left(\sum_{n=0}^{M_\tau} \sum_{j=0}^{p} \mathfrak{D}_h^q(a_j)\,\phi_{j,n}\right)' = \sum_{n=0}^{M_\tau} \sum_{j=0}^{p} \mathfrak{D}_h^q(a_j)\,\phi_{j,n}'.$$

Schließlich folgt

$$\left(\mathfrak{D}_h^q(u)', \mathfrak{C}_h^q(v)\right)_{q,h} = \sum_{n=0}^{M_\tau} \sum_{j=0}^{p} \phi_{j,n}' \underbrace{\left(\mathfrak{D}_h^q(a_j), \mathfrak{C}_h^q(v)\right)_{q,h}}_{=0} = 0 \quad \forall v \in V_{\tau,h}^{p,q}$$

(ii) Mit (i) und Lemma 4.3.11 und Bemerkung 4.3.13 folgt sofort

$$\int_0^T \left\|\mathfrak{D}_h^q(u)'\right\|_{(H^1(\mathcal{K}_h))^\star}^2 \mathrm{d}t = \int_0^T \|\mathfrak{D}_h^q(u')\|_{(H^1(\mathcal{K}_h))^\star}^2 \mathrm{d}t \preceq \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mathfrak{D}_h^q(u')\|_K^2 \,\mathrm{d}t \preceq$$

$$\preceq \gamma \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|[u']_e\|_e^2 \,\mathrm{d}t + \gamma \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u'\|_e^2 \,\mathrm{d}t \quad \forall u \in V_{\tau,h}^{p,q}$$

□

Satz 4.3.17. Sei $u_{\tau,h} \in V_{\tau,h}^{p,q}$ die Lösung von Problem P 7 und gelten die Voraussetzungen V 1 - V 4. Dann ist

$$\max\left\{\max_n \left\|\left(u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)(t_n)\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right\|_{H^1(K)}^2 \mathrm{d}t, \sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|u - u_{\tau,h}\right\|_{H^1(K)}^2 \mathrm{d}t\right\} \preceq \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
&\preceq \eta_2\left(u_h, f\right)^2 := \\
&:= \sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|f - \Pi_\tau^p f\right\|_{L^2(K)}^2 \mathrm{d}t + \sum_{n,K} h_K^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\Pi_\tau^p f + u'_{\tau,h} - \Delta_x u_{\tau,h}\right\|_{L^2(K)}^2 \mathrm{d}t + \\
&\quad + \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} h_e \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\left[\partial_{n_e} u_{\tau,h}\right]\right\|_e^2 \mathrm{d}t + \gamma \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\left[u_{\tau,h}\right]_e\right\|_e^2 \mathrm{d}t + \gamma \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|u_{\tau,h}\right\|_e^2 \mathrm{d}t + \\
&\quad + \gamma \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\left[u'_{\tau,h}\right]_e\right\|_e^2 \mathrm{d}t + \gamma \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|u'_{\tau,h}\right\|_e^2 \mathrm{d}t + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{M_\tau}\sum_K \tau_0 \left\|\left[u_{\tau,h}\right]_n\right\|_{H^1(K)}^2 + \sum_K \tau_0 \left\|u_{\tau,h}(0)\right\|_{H^1(K)}^2 + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{M_\tau}\sum_K \frac{h_K^2}{\tau_n} \left\|\left[u_{\tau,h}\right]_n\right\|_K^2 + \sum_K \frac{h_K^2}{\tau_0} \left\|u_{\tau,h}(0)\right\|_K^2
\end{aligned}$$

und die Konstante hängt nur vom Gebiet Ω_T, den Polynomgraden $p, q \in \mathbb{N}$ und den Konstanten C_{shape} zur Formregularität und $C_{\text{uni},x}$ und $C_{\text{uni},t}$ zur lokalen Quasi-Uniformität ab.

Beweis. Für die schwache Lösung u und ein $v \in L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right) \subset L^2\left((0,T), H^1(\mathcal{K}_h)\right)$ gilt mit partieller Integration und der Definition von $a(\cdot,\cdot)$

$$a\left(u(t), v(t)\right) = \int_\Omega \nabla_x u(t)\, \nabla_x v(t)\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \Delta_x u(t)\, v(t)\, \mathrm{d}x \quad , \text{ f.ü. auf } (0,T)$$

Weil $u(0) = 0$ und $[u]_n = 0$ für alle $n \in \{1, \ldots, M_\tau\}$ und weil $u' - \Delta_x u = f$ lt. Bemerkung 3.1.5, (v) punktweise fast überall auf Ω_T gilt, haben wir

$$\left(u'(t), v(t)\right)_\Omega + a\left(u(t), v(t)\right) = \left(f(t), v(t)\right)_\Omega \quad \forall v \in L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right) \quad \text{f.ü. auf } [0,T]$$

Damit, weil $\widehat{u_{\tau,h}} = \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right) + \mathfrak{D}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)$ und mit Bemerkung 3.2.7 folgt f.ü. auf $[0,T]$

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)', u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)_\Omega + a\left(u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right), u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right) = \\
&= \left(f, u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)_\Omega - \left(\mathfrak{C}\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)', u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)_\Omega - a_h\left(\mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right), u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right) = \\
&= \left(f, u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)_\Omega - \left(\widehat{u_{\tau,h}}', u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)_\Omega - a_h\left(\widehat{u_{\tau,h}}, u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right) + \\
&\quad + \left(\mathfrak{D}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)', u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)_\Omega + a_h\left(\mathfrak{D}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right), u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right) = \\
&= \left(f, u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)_\Omega - \left(\widehat{u_{\tau,h}}', u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)_\Omega - a_h\left(u_{\tau,h}, u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right) + \\
&\quad + a_h\left(u_{\tau,h} - \widehat{u_{\tau,h}}, u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right) + \left(\mathfrak{D}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)', u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)_\Omega + a_h\left(\mathfrak{D}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right), u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right) = \\
&= \left(f, u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)_\Omega - \left(\widehat{u_{\tau,h}}', u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)_\Omega - a_h\left(u_{\tau,h}, u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right) + \\
&\quad + a_h\left(u_{\tau,h} - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right), u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right) + \left(\mathfrak{D}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)', u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)_\Omega .
\end{aligned}
$$

Setze nun ähnlich zu [35], Kapitel 4

$$
\left\langle \mathfrak{R}_h\left(u_{\tau,h}\right), v\right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} := \left(f, v\right)_\Omega - \left(\widehat{u_{\tau,h}}', v\right)_\Omega - \sum_K \left(\nabla_x u_{\tau,h}, \nabla_x v\right)_K .
$$

Mit dieser Bezeichnung, mit $E_{\mathfrak{C}} := u - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)$ und der Definition von $a\left(\cdot,\cdot\right)$ gilt dann f.ü. auf $(0,T)$

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\left(E_{\mathfrak{C}}', E_{\mathfrak{C}}\right)_\Omega}_{=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|E_{\mathfrak{C}}\|_\Omega^2} + a\left(E_{\mathfrak{C}}, E_{\mathfrak{C}}\right) = \\
&= \left\langle \mathfrak{R}_h\left(u_{\tau,h}\right), E_{\mathfrak{C}}\right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + \sum_{e\in\mathcal{I}_h}\int_e \left[u_{\tau,h}\right]_e \left\langle \partial_{n_e} E_{\mathfrak{C}}\right\rangle_e \mathrm{d}\mu_e + \sum_{e\in\mathcal{B}_h}\int_e u_{\tau,h}\partial_{n_e} E_{\mathfrak{C}}\,\mathrm{d}\mu_e + \\
&\quad + a_h\left(u_{\tau,h} - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right), E_{\mathfrak{C}}\right) + \left(\mathfrak{D}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)', E_{\mathfrak{C}}\right)_\Omega = \\
&= \left\langle \mathfrak{R}_h\left(u_{\tau,h}\right), E_{\mathfrak{C}}\right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + \sum_{e\in\mathcal{I}_h}\int_e \left[u_{\tau,h}\right]_e \left\langle \partial_{n_e} E_{\mathfrak{C}}\right\rangle_e \mathrm{d}\mu_e + \sum_{e\in\mathcal{B}_h}\int_e u_{\tau,h}\partial_{n_e} E_{\mathfrak{C}}\,\mathrm{d}\mu_e + \\
&\quad + \sum_K \int_K \nabla_x\left(u_{\tau,h} - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)\nabla_x E_{\mathfrak{C}}\,\mathrm{d}x - \sum_{e\in\mathcal{I}_h}\int_e \underbrace{\left[u_{\tau,h} - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right]_e}_{=\left[u_{\tau,h}\right]_e} \left\langle \partial_{n_e} E_{\mathfrak{C}}\right\rangle_e \mathrm{d}\mu_e - \\
&\quad - \sum_{e\in\mathcal{B}_h}\int_e \underbrace{\left(u_{\tau,h} - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)}_{=u_{\tau,h}|_e} \partial_{n_e} E_{\mathfrak{C}}\,\mathrm{d}\mu + \left(\mathfrak{D}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)', E_{\mathfrak{C}}\right)_\Omega = \\
&= \left\langle \mathfrak{R}_h\left(u_{\tau,h}\right), E_{\mathfrak{C}}\right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + \left(\mathfrak{D}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)', E_{\mathfrak{C}}\right)_\Omega + \sum_K \int_K \nabla_x\left(u_{\tau,h} - \mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)\nabla_x E_{\mathfrak{C}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Integration von 0 bis t_n mit $n \in \{1,\ldots,M+1\}$ und die Ungleichungen von Cauchy-

Schwarz und Young liefern

$$\|E_{\mathfrak{C}}(t_n)\|_\Omega^2 + \int_0^{t_n} \|E_{\mathfrak{C}}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}t \preceq \tag{36}$$

$$\preceq \int_0^{t_n} \langle \mathfrak{R}_h(u_{\tau,h}), E_{\mathfrak{C}} \rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \,\mathrm{d}t + \int_0^T \left\| \mathfrak{D}_h^q \left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)' \right\|_{(H^1(\mathcal{K}_h))^\star}^2 \mathrm{d}t +$$

$$+ \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\nabla_x (u_{\tau,h} - \mathfrak{C}_h^q(\widehat{u_{\tau,h}}))\|_K^2 \,\mathrm{d}t + \underbrace{\|\mathfrak{C}_h^q(\widehat{u_{\tau,h}})(0)\|_\Omega^2}_{=0}. \tag{37}$$

Wir schätzen zuerst $\int_0^{t_n} \langle \mathfrak{R}_h(u_{\tau,h}), E_{\mathfrak{C}} \rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \,\mathrm{d}t$ ab. Dazu setzen wir $v_{\tau,h}(t) := \mathcal{I}_{\mathcal{K}_h}\left(\Pi_{\tau,h}^p E_{\mathfrak{C}}(t)\right)$ wie in Lemma 4.3.15,(ii) und $v_{h,n} = v_{\tau,h}\mathcal{X}_{[0,t_n)}$. Es gilt dann

$$\int_0^{t_n} \langle \mathfrak{R}_h(u_{\tau,h}), v_{h,n} \rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \,\mathrm{d}t = \int_0^T \langle \mathfrak{R}_h(u_{\tau,h}), v_{h,n} \rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^T (f, v_{h,n})_\Omega \,\mathrm{d}t - \int_0^T (\widehat{u_{\tau,h}}', v_{h,n})_\Omega \,\mathrm{d}t - \sum_K \int_0^T (\nabla_x u_{\tau,h}, \nabla_x v_{h,n})_K \,\mathrm{d}t =$$

$$= \underbrace{A_{\tau,h}(u, v_{h,n}) - A_{\tau,h}(u_{\tau,h}, v_{h,n})}_{=0} - \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e [u_{\tau,h}]_e \langle \partial_{n_e} v_{h,n} \rangle_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t -$$

$$- \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e u_{\tau,h} \partial_{n_e} v_{h,n} \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t =$$

$$= - \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e [u_{\tau,h}]_e \langle \partial_{n_e} v_{h,n} \rangle_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t - \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e u_{\tau,h} \partial_{n_e} v_{h,n} \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t$$

und schließlich folgt

$$\int_0^{t_n} \langle \mathfrak{R}_h(u_{\tau,h}), E_{\mathfrak{C}} \rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{t_n} \langle \mathfrak{R}_h(u_{\tau,h}), E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n} \rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \,\mathrm{d}t + \sum_{n,e\in\mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e [u_{\tau,h}]_e \langle \partial_{n_e} v_{h,n} \rangle_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t +$$

$$+ \sum_{n,e\in\mathcal{B}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e u_{\tau,h} \partial_{n_e} v_{h,n} \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t.$$

Die auftretenden Terme werden nun abgeschätzt.

- Lemma 2.4.7, lemma 2.4.9, Lemma 4.3.15 und partielle Integration liefert

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t_n} \langle \mathfrak{R}_h\left(u_{\tau,h}\right), E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n}\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{t_n} f\left(E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^{t_n}\int_\Omega \widehat{u_{\tau,h}}'\left(E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^{t_n}\int_\Omega \nabla_x u_{\tau,h} \nabla_x \left(E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{t_n}\int_\Omega \left(f - \Pi_\tau^p f\right)\left(E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^{t_n}\int_\Omega \Pi_\tau^p f \left(\Pi_{\tau,h}^p E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\
&\quad - \int_0^{t_n}\int_\Omega \widehat{u_{\tau,h}}' \left(\Pi_{\tau,h}^p E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^{t_n}\int_\Omega \nabla_x u_{\tau,h} \nabla_x \left(\Pi_{\tau,h}^p E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{t_n}\int_\Omega \left(f - \Pi_\tau^p f\right)\left(E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \int_0^{t_n}\int_\Omega \left(\Pi_\tau^p f - \widehat{u_{\tau,h}}' + \Delta_x u_{\tau,h}\right) \left(\Pi_{\tau,h}^p E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \sum_{e\in\mathcal{I}} \int_0^{t_n}\int_e \left[\partial_{n_e} u_{\tau,h}\right]_e \langle \Pi_{\tau,h}^p E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n}\rangle_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Mit den Ungleichungen von Young und Cauchy-Schwarz und mit Lemma 4.3.7, (iii), (v) folgt

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t_n}\int_\Omega \left(f - \Pi_\tau^p f\right)\left(E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \\
&\le \frac{1}{\epsilon_1} \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|f - \Pi_\tau^p f\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \mathrm{d}t + \epsilon_1 \sum_K \int_0^{t_n} \left\|E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n}\right\|_K^2 \mathrm{d}t \le \\
&\le \frac{1}{\epsilon_1} \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|f - \Pi_\tau^p f\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \mathrm{d}t + \epsilon_1 \int_0^{t_n} \left\|E_{\mathfrak{C}}\right\|_{H^1(\Omega)}^2 \mathrm{d}t + \epsilon_1 \int_0^{t_n} \left\|\Pi_{\tau,h}^p \mathcal{I}_{\mathcal{K}_h} E_{\mathfrak{C}}\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \mathrm{d}t \le \\
&\le \frac{1}{\epsilon_1} \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|f - \Pi_\tau^p f\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \mathrm{d}t + \epsilon_1 \int_0^{t_n} \left\|E_{\mathfrak{C}}\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Weiter folgt mit Lemma 4.3.9 und der inversen Ungleichung

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t_n}\int_\Omega \left(\Pi_\tau^p f - \widehat{u_{\tau,h}}' + \Delta_x u_{\tau,h}\right) \left(\Pi_{\tau,h}^p E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \preceq \\
&\preceq \frac{1}{\epsilon_2} \sum_{n,K} h_K^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\Pi_\tau^p f + \widehat{u_{\tau,h}}' - \Delta_x u_{\tau,h}\right\|_K^2 + \epsilon_2 \int_0^{t_n} \left\|E_{\mathfrak{C}}\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \mathrm{d}t \preceq
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\preceq \frac{1}{\epsilon_2} \sum_{n,K} h_K^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \Pi_\tau^p f + u'_{\tau,h} - \Delta_x u_{\tau,h} \right\|_K^2 + \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon_2} \sum_{n,K} h_K^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| u'_{\tau,h} - \widehat{u_{\tau,h}}' \right\|_K^2 + \epsilon_2 \int_0^{t_n} \|E_{\mathfrak{C}}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}t \preceq \\
&\preceq \frac{1}{\epsilon_2} \sum_{n,K} h_K^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \Pi_\tau^p f + u'_{\tau,h} - \Delta_x u_{\tau,h} \right\|_K^2 + \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon_2} \sum_{n,K} \frac{h_K^2}{\tau_n^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_{\tau,h} - \widehat{u_{\tau,h}}\|_K^2 + \epsilon_2 \int_0^{t_n} \|E_{\mathfrak{C}}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}t \preceq \\
&\preceq \frac{1}{\epsilon_2} \sum_{n,K} h_K^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \Pi_\tau^p f + u'_{\tau,h} - \Delta_x u_{\tau,h} \right\|_K^2 + \epsilon_2 \int_0^{t_n} \|E_{\mathfrak{C}}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon_2} \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \frac{h_K^2}{\tau_n} \left\| [u_{\tau,h}]_n \right\|_K^2 + \frac{1}{\epsilon_2} \sum_K \frac{h_K^2}{\tau_0} \|u_{\tau,h}(0)\|_K^2 .
\end{aligned}
$$

Wir berechnen weiter

$$
\begin{aligned}
&\sum_{e \in \mathcal{I}_h} \int_0^{t_n} \frac{1}{h_e} \left\| \langle \Pi_{\tau,h}^p E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n} \rangle_e \right\|_e^2 \mathrm{d}t \leq \\
&\leq \sum_{e \in \mathcal{I}_h} \int_0^{t_n} \frac{1}{h_e} \left\| \Pi_{\tau,h}^p E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n} \right\|_e^2 \mathrm{d}t \leq \sum_K \int_0^{t_n} \left\| \Pi_{\tau,h}^p E_{\mathfrak{C}} \right\|_{\omega_K}^2 \mathrm{d}t \leq \int_0^{t_n} \|E_{\mathfrak{C}}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Ähnlich wie schon in (29) gilt dann

$$
\begin{aligned}
&\sum_{e \in \mathcal{I}_h} \int_0^{t_n} \int_e [\partial_{n_e} u_{\tau,h}]_e \langle \Pi_{\tau,h}^p E_{\mathfrak{C}} - v_{h,n} \rangle_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t \leq \\
&\leq \frac{1}{\epsilon_3} \sum_{n,e \in \mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} h_e \left\| [\partial_{n_e} u_{\tau,h}]_e \right\|_e^2 + \epsilon_3 \int_0^{t_n} \|E_{\mathfrak{C}}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

- Mit der inversen Ungleichung folgt

$$
\sum_{n,e \in \mathcal{I}_h} h_e \|\langle v_{h,n} \rangle_e\|_e^2 \,\mathrm{d}t \leq \sum_{n,K} \|v_{h,n}\|_K^2 = \sum_K \int_0^{t_n} \left\| \mathcal{I}_{\mathcal{K}_h} \Pi_{\tau,h}^p E_{\mathfrak{C}} \right\|_K^2 \mathrm{d}t \leq \int_0^{t_n} \|E_{\mathfrak{C}}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}t.
$$

Mit den Ungleichungen von Young und Cauchy-Schwarz folgt dann

$$
\sum_{n,e \in \mathcal{I}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_e [u_{\tau,h}]_e \langle \partial_{n_e} v_{h,n} \rangle_e \,\mathrm{d}\mu_e \,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\epsilon_4} \sum_{n,e \in \mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| [u_{\tau,h}]_e \right\|_e^2 \mathrm{d}t + \epsilon_4 \int_0^{t_n} \|E_{\mathfrak{C}}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}t.
$$

- Analog zum vorherigen Punkt folgt auch

$$\sum_{n,e\in\mathcal{I}_h}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_e u_{\tau,h}\partial_{n_e}v_{h,n}\,\mathrm{d}\mu_e\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{\epsilon_4}\sum_{n,e\in\mathcal{I}_h}\frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_{\tau,h}\|_e^2\,\mathrm{d}t + \epsilon_4\int_0^{t_n}\|E_{\mathfrak{C}}\|_{H_0^1(\Omega)}^2\,\mathrm{d}t.$$

Wir kommen beim Abschätzen der Terme in (37) zu $\int_0^T\left\|\mathfrak{D}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)'\right\|_{(H^1(\mathcal{K}_h))^\star}^2\mathrm{d}t$. Mit Lemma 4.3.16,(ii) erhalten wir

$$\int_0^T\left\|\mathfrak{D}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)'\right\|_{(H^1(\mathcal{K}_h))^\star}^2\mathrm{d}t \preceq \gamma\sum_{n,e\in\mathcal{I}_h}\frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|\left[u'_{\tau,h}\right]_e\right\|_e^2\mathrm{d}t + \gamma\sum_{n,e\in\mathcal{B}_h}\frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|u'_{\tau,h}\right\|_e^2\mathrm{d}t$$

Schließlich muss in (37) nun noch der Term $\sum_K\int_0^T\|\nabla_x\left(u_{\tau,h}-\mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)\|_K^2\,\mathrm{d}t$ in (37) abgeschätzt werden. Einschieben von $\widehat{u_{\tau,h}}$ liefert mit den Ungleichungen von Young und Cauchy-Schwarz, Satz 4.3.4, Lemma 4.3.11 und Bemerkung 4.3.13

$$\begin{aligned}
&\sum_K\int_0^T\|\nabla_x\left(u_{\tau,h}-\mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)\|_K^2\,\mathrm{d}t \preceq\\
&\preceq\sum_K\int_0^T\|\nabla_x\left(u_{\tau,h}-\widehat{u_{\tau,h}}\right)\|_K^2\,\mathrm{d}t + \sum_K\int_0^T\|\nabla_x\left(\widehat{u_{\tau,h}}-\mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\right)\|_K^2\,\mathrm{d}t \le\\
&\preceq\sum_{n=1}^{M_\tau}\sum_K\tau_n\left\|\left[u_{\tau,h}\right]_n\right\|_{H^1(K)}^2 + \sum_K\tau_0\left\|u_{\tau,h}(0)\right\|_{H^1(K)}^2 +\\
&\quad+\gamma\sum_{n,e\in\mathcal{I}_h}\frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|[\widehat{u_{\tau,h}}]\|_e^2\,\mathrm{d}t + \gamma\sum_{n,e\in\mathcal{B}_h}\frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\widehat{u_{\tau,h}}\|_e^2\,\mathrm{d}t \preceq\\
&\preceq\sum_{n=1}^{M_\tau}\sum_K\tau_n\left\|\left[u_{\tau,h}\right]_n\right\|_{H^1(K)}^2 + \sum_K\tau_0\left\|u_{\tau,h}(0)\right\|_{H^1(K)}^2 +\\
&\quad+\gamma\sum_{n,e\in\mathcal{I}_h}\frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|[u_{\tau,h}]\|_e^2\,\mathrm{d}t + \gamma\sum_{n,e\in\mathcal{B}_h}\frac{1}{h_e}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_{\tau,h}\|_e^2\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

ϵ_i mit $i\in\{1,2,3,4\}$ können frei in $\mathbb{R}^+$ gewählt werden. $n\in\{1,\dots,M+1\}$ war beliebig und die Aussage folgt die Abaschätzung für die Terme $\max_n\|u(t_n)-\mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)(t_n)\|_{L^2(K)}^2$ und $\sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u-\mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\|_{H^1(K)}^2\,\mathrm{d}t$ unmittelbar. Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned}
&\sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u-u_{\tau,h}\|_{H^1(K)}^2\,\mathrm{d}t \preceq\\
&\preceq\sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u-\mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)\|_{H^1(K)}^2\,\mathrm{d}t + \sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\mathfrak{C}_h^q\left(\widehat{u_{\tau,h}}\right)-\widehat{u_{\tau,h}}\|_{H^1(K)}^2\,\mathrm{d}t + \sum_{n,K}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\widehat{u_{\tau,h}}-u_{\tau,h}\|_{H^1(K)}^2\,\mathrm{d}t \preceq
\end{aligned}$$

$$\preceq \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| u - \mathfrak{C}_h^q \left(\widehat{u_{\tau,h}} \right) \right\|_{H^1(K)}^2 \mathrm{d}t + \gamma \sum_{n,e \in \mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \left[\widehat{u_{\tau,h}} \right]_e \right\|_e^2 \mathrm{d}\mu_e + \gamma \sum_{n,e \in \mathcal{B}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \widehat{u_{\tau,h}} \right\|_e^2 \mathrm{d}\mu_e +$$

$$+ \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \tau_n \left\| \left[u_{\tau,h} \right]_n \right\|_{H^1(K)}^2 + \sum_K \tau_0 \left\| u_{\tau,h}(0) \right\|_{H^1(K)}^2 \preceq$$

$$\preceq \sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| u - \mathfrak{C}_h^q \left(\widehat{u_{\tau,h}} \right) \right\|_{H^1(K)}^2 \mathrm{d}t + \gamma \sum_{n,e \in \mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \left[u_{\tau,h} \right]_e \right\|_e^2 \mathrm{d}\mu_e + \gamma \sum_{n,e \in \mathcal{B}_h} \frac{1}{h_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| u_{\tau,h} \right\|_e^2 \mathrm{d}\mu_e +$$

$$+ \sum_{n=1}^{M_\tau} \sum_K \tau_n \left\| \left[u_{\tau,h} \right]_n \right\|_{H^1(K)}^2 + \sum_K \tau_0 \left\| u_{\tau,h}(0) \right\|_{H^1(K)}^2 . \tag{38}$$

$\sum_{n,K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| u - \mathfrak{C}_h^q \left(\widehat{u_{\tau,h}} \right) \right\|_{H^1(K)}^2 \mathrm{d}t$ haben wir bereits nach oben abgeschätzt und in dieser Abschätzung kommen auch die restlichen Terme aus (38) vor. Damit ist die Aussage aber gezeigt. □

Bemerkung 4.3.18. Auf der linken Seite von (35) hängen 2 der 3 Terme nur von u und $\mathfrak{C}_h^q \left(\widehat{u_{\tau,h}} \right)$ ab. $\mathfrak{C}_h^q \left(\widehat{u_{\tau,h}} \right)$ ergibt sich aus der DG-Lösung $u_{\tau,h}$. Es ist an dieser Stelle aber nicht klar, wie dieser Term berechnet werden kann. In jedem Fall haben wir

$$\int_0^T \left\| u - u_{\tau,h} \right\|_{H^1(\mathcal{K}_h)}^2 \mathrm{d}t \preceq \eta_{2,\tau,h} \left(u_{\tau,h}, f \right)^2$$

bewiesen.

4.4. Vergleich der Abschätzungen

Wir wollen nun die beiden Ansätze vergleichen. Siehe dazu Tabelle 1.

	1.Ansatz	**2.Ansatz**
	$\left\|u-u_{\tau,h}\right\|_{\tau,h}^2 \preceq$	$\int\limits_0^T \left\|u-u_{\tau,h}\right\|_{H^1(\mathcal{K}_h)}^2 \mathrm{d}t \preceq$
Fehler der Daten	$\sum\limits_{n,K} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|f-\Pi_\tau^p f\right\|_K^2 \mathrm{d}t+$	$\sum\limits_{n,K} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|f-\Pi_\tau^p f\right\|_K^2 \mathrm{d}t+$
Residuum	$\sum\limits_{n,K} h_K^2 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\Pi_\tau^p f-u'_{\tau,h}+\Delta_x u_{\tau,h}\right\|_K^2 \mathrm{d}t+$	$\sum\limits_{n,K} h_K^2 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\Pi_\tau^p f-u'_{\tau,h}+\Delta_x u_{\tau,h}\right\|_K^2 \mathrm{d}t+$
Sprung der Ortsableitung	$\sum\limits_{n,e\in\mathcal{I}_h} h_e \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|[\partial_{n_e} u_{\tau,h}]\right\|_e^2 \mathrm{d}t+$	$\sum\limits_{n,e\in\mathcal{I}_h} h_e \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|[\partial_{n_e} u_{\tau,h}]\right\|_e^2 \mathrm{d}t+$
Ortssprung (Inneres)	$\gamma \sum\limits_{n,e\in\mathcal{I}_h} \left(\frac{1}{h_e}+\frac{h_e}{\tau_n^2}\right) \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|[u_{\tau,h}]\right\|_e^2 \mathrm{d}t+$	$\gamma \sum\limits_{n,e\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|[u_{\tau,h}]_e\right\|_e^2 \mathrm{d}t+$
Ortssprung (Rand)	$\gamma \sum\limits_{n,e\in\mathcal{B}_h} \left(\frac{1}{h_e}+\frac{h_e}{\tau_n^2}\right) \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|u_{\tau,h}\right\|_e^2 \mathrm{d}t+$	$\gamma \sum\limits_{n,e\in\mathcal{B}_h} \frac{1}{h_e} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|u_{\tau,h}\right\|_e^2 \mathrm{d}t+$
Zeitsprung(Inneres)	-	$\gamma \sum\limits_{n,e\in\mathcal{I}_h} \frac{1}{h_e} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\left[u'_{\tau,h}\right]_e\right\|_e^2 \mathrm{d}t+$
Zeitsprung(Rand)	-	$\gamma \sum\limits_{n,e\in\mathcal{B}_h} \frac{1}{h_e} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|u'_{\tau,h}\right\|_e^2 \mathrm{d}t+$
L^2 - Zeitsprung	$\sum\limits_{n=1}^{M_\tau} \sum\limits_K \left(\frac{1}{\tau_n}+\frac{\tau_n}{h_K^2}\right) \left\|[u_{\tau,h}]_n\right\|_K^2 +$	$\sum\limits_{n=1}^{M_\tau} \sum\limits_K \frac{h_K^2}{\tau_n} \left\|[u_{\tau,h}]_n\right\|_K^2 +$
L^2 - Fehler an $T=0$	$\sum\limits_K \left(\frac{1}{\tau_0}+\frac{\tau_0}{h_K^2}\right) \left\|u(0)\right\|_K^2$	$\sum\limits_K \frac{h_K^2}{\tau_0} \left\|u_{\tau,h}(0)\right\|_K^2 +$
H^1 - Zeitsprung	-	$\sum\limits_{n=1}^{M_\tau} \sum\limits_K \tau_n \left\|[u_{\tau,h}]_n\right\|_{H^1(K)}^2 +$
H^1 - Fehler an $T=0$	-	$\sum\limits_K \tau_0 \left\|u_{\tau,h}(0)\right\|_{H^1(K)}^2$
$\sum$	$= \eta_{1,\tau,h}(u_{\tau,h},f)^2$	$= \eta_{2,\tau,h}(u_{\tau,h},f)^2$

Tabelle 1: Die einzelnen Terme der Abschätzungen in beiden Ansätzen übersichtlich in einer Tabelle angeschrieben

Bemerkung 4.4.1. (i) Es ist nicht klar, ob

$$\|u - u_{\tau,h}\|_{\tau,h}^2 \simeq \eta_{1,\tau,h}\left(f, u_{\tau,h}\right)^2$$

oder

$$\int_0^T \|u\left(t\right) - u_{\tau,h}\left(t\right)\|_{H^1(\mathcal{K}_h)}^2 \,\mathrm{d}t \simeq \eta_{2,\tau,h}\left(f, u_{\tau,h}\right)^2$$

und ob auch nur $\eta_{1,\tau,h}\left(f, u_{\tau,h}\right) \to 0$ oder $\eta_{2,\tau,h}\left(f, u_{\tau,h}\right) \to 0$ gilt, wenn $h_K, h_e, \tau_n \to 0$.

(ii) $\eta_{2,\tau,h}\left(f, u_{\tau,h}\right)$ hängt im Gegensatz zu $\eta_{1,\tau,h}\left(f, u_{\tau,h}\right)$ auch vom Sprung der Zeitableitung im Ort ab.

5. Numerische Experimente

In diesem Kapitel wollen wir das Verhalten der Abschätzungen aus Kapitel 4 anhand einiger einfacher numerischer Beispiele testen. Diese Tests wurden durch die Matlab-Prozeduren aus dem Anhang ausgeführt.

Bemerkung 5.0.2. Es wird erwartet, dass die Abschätzungen aus Satz 4.2.6 und Satz 4.3.17 genauso für eine beliebige Raumdimension $d \in \mathbb{N}$ gelten. Die Beweise verlaufen auf die gleiche Weise. $d = 2$ wurde in dieser Arbeit und in zahlreichen zitierten Arbeiten zur Vereinfachung der Notation und zur besseren Anschaulichkeit gewählt.

Wir behalten Bemerkung 5.0.2 im Hinterkopf und setzen nun

Voraussetzung V 5.

$$d = 1, T = 1, \Omega = (0,1) \text{ und } p = q = 1 \tag{39}$$

Problem P 1 wird dann zu

Problem P 8.

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) &= f(t,x) && \forall (t,x) \in (0,1)^2, \\ u(t,0) = u(t,1) &= 0 && \forall t \in (0,1), \\ u(0,x) &= 0 && \forall x \in (0,1). \end{aligned}$$

Zur Wahl einer Basis von $V_{\tau,h}^{1,1}$ sei $Q_{\text{ref}} := (0,1)^2$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \phi_{1,T}(t,x) &:= (1-t)(1-x), && (t,x) \in (0,1)^2, \\ \phi_{2,T}(t,x) &:= t(1-x), && (t,x) \in (0,1)^2, \\ \phi_{3,T}(t,x) &:= (1-t)x, && (t,x) \in (0,1)^2, \\ \phi_{4,T}(t,x) &:= tx, && (t,x) \in (0,1)^2. \end{aligned}$$

und denken uns $\phi_{i,T}$ für $i \in \{1,2,3,4\}$ außerhalb von Q mit 0 fortgesetzt. Wir fassen die Zerlegungen $\mathcal{K}_h$ als Mengen $(x_j)_{i \in \{0,1,\ldots,|\mathcal{K}_h|+1\}}$ auf. Betrachte für $n \in \{0,1,\ldots,M_\tau\}$ und $j \in \{0,1,\ldots,|\mathcal{K}_h|\}$ die affinen Abbildungen:

$$T_{n,j} : Q \to (t_n, t_{n+1}) \times (x_j, x_{j+1}) : (t,x) \mapsto (t_n, x_i) + (t(t_{n+1} - t_n), x(x_{j+1} - x_j))$$

dann bilden die Funktionen $\phi_{j,n,i}(t,x) := T_{n,j} \circ \phi_{j,T}$ für $i \in \{1,2,3,4\}$, $n \in \{0,1,\ldots,M_\tau\}$ und $j \in \{0,1,\ldots,|\mathcal{K}_h|\}$ eine Basis von $V_{\tau,h}^{1,1}$. Das Lösen von Problem P 7 ist dann äquivalent zum Lösen eines linearen Gleichungssystem mit den Koeffizienten

$$A_{j_2,n_2,i_2}^{j_1,n_1,i_1} := A_{\tau,h}\left(\phi_{j_1,n_1,i_1}, \phi_{j_2,n_2,i_2}\right) \tag{40}$$

und einer rechten Seite

$$F_{i,n,j} := F_{\tau,h}\left(\phi_{j,n,i}\right)$$

Bemerkung 5.0.3. Die Matrix aus (40) ist nicht symmetrisch. Vergleiche dazu die Definition von $A_{1,\tau,h}$ aus (14).

Wähle für die rechte Seite in Problem P 8

$$f(t,x) := \sin(\pi x) + \pi^2 \sin(\pi x)\, t \tag{41}$$

Wir haben $\Pi_{\tau,h}^1 f = f$. Durch Differenzieren erhält man leicht, dass

$$u(t,x) := \sin(\pi x)\, t$$

eine Lösung von Problem P 8 ist. Mit Satz 3.3.8, Satz 2.3.3 und mit den Annahmen aus (39) gilt

$$\int_0^T \|u - u_{\tau,h}\|_{H^1(\mathcal{K})}^2 \, dt \preceq \tau^2 + h^2.$$

Wir wählen $\tilde{\tau} = \tilde{h} = 1$ und $\tau \simeq h$, $\tau \simeq h^2$ und $\tau^2 \simeq h$ für $\tau \leq \tilde{\tau}$ und $h \leq \tilde{h}$. Wir erwarten, dass $\int_0^T \|u - u_{\tau,h}\|_{H^1(\mathcal{K})}^2 \, dt = \mathcal{O}(h^2)$ und $\|u - u_{\tau,h}\|_{1,\tau,h}^2 = \mathcal{O}(h^2)$ gilt. Für eine Zerlegung $\mathcal{K}_h = \{(x_i, x_{i+1})\}_{i=0}^{|\mathcal{K}_h|}$ setze für $i \in \{0,1,\ldots,|\mathcal{K}_h|\}$ dann $h_i = x_{i+1} - x_i$. Zur Vereinfachung seien die h_i für alle $i \in \{0,1,\ldots,|\mathcal{K}_h|\}$ gleich groß. Für kleiner werdende Schrittweiten h werden wir die $\int_0^T \|u - u_{\tau,h}\|_{H^1(\mathcal{K})}^2 \, dt$ und $\eta_1(f, u_{\tau,h})^2$ bzw. $\|u - u_{\tau,h}\|_{1,\tau,h}^2$ und $\eta_2(f, u_{\tau,h})^2$ nun tatsächlich ausrechnen und vergleichen. Die Berechnung erfolgt mit den im Anhang A abgedruckten Matlab-Prozeduren. Betrachte nun die Abbildungen 1, 2 und 3.

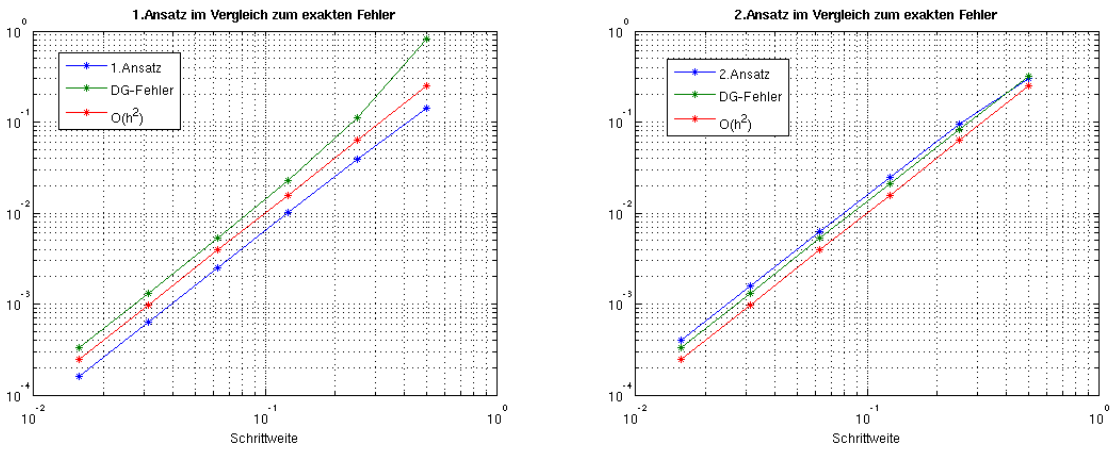

Abbildung 1: Vergleich des DG-Fehlers $\|u - u_{\tau,h}\|^2_{\tau,h}$ mit dem Fehlerschätzer nach dem 1.Ansatz links und Vergleich des DG-Fehlers $\|u - u_{\tau,h}\|^2_{H^1(\mathcal{K}_h)}$ mit dem Fehlerschätzer nach dem 2.Ansatz rechts, wobei $\tau_i = h_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i$ und $i \in \{1, \ldots, 6\}$.

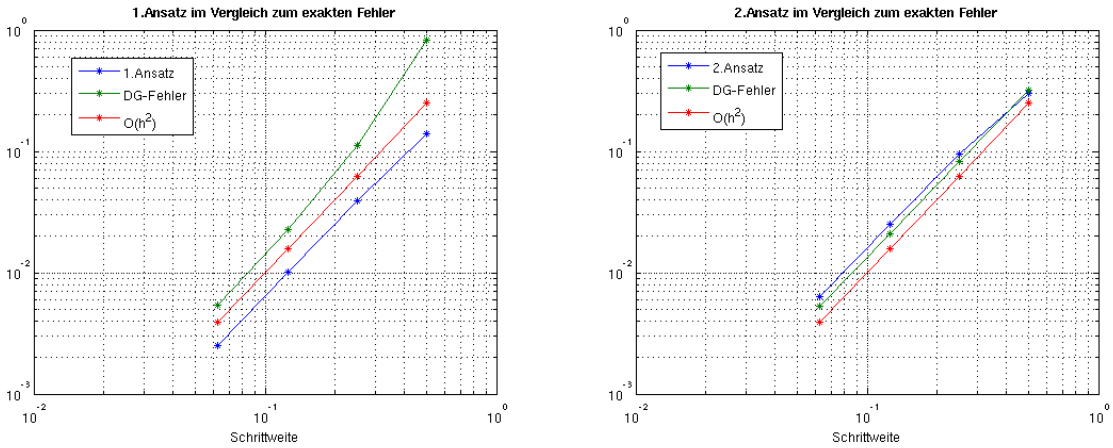

Abbildung 2: Vergleich des DG-Fehlers $\|u - u_{\tau,h}\|^2_{\tau,h}$ mit dem Fehlerschätzer nach dem 1.Ansatz links und Vergleich des DG-Fehlers $\|u - u_{\tau,h}\|^2_{H^1(\mathcal{K}_h)}$ mit dem Fehlerschätzer nach dem 2.Ansatz rechts, wobei $\tau_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i$, $h_i = \tau_i^2$ und $i \in \{1, \ldots, 4\}$.

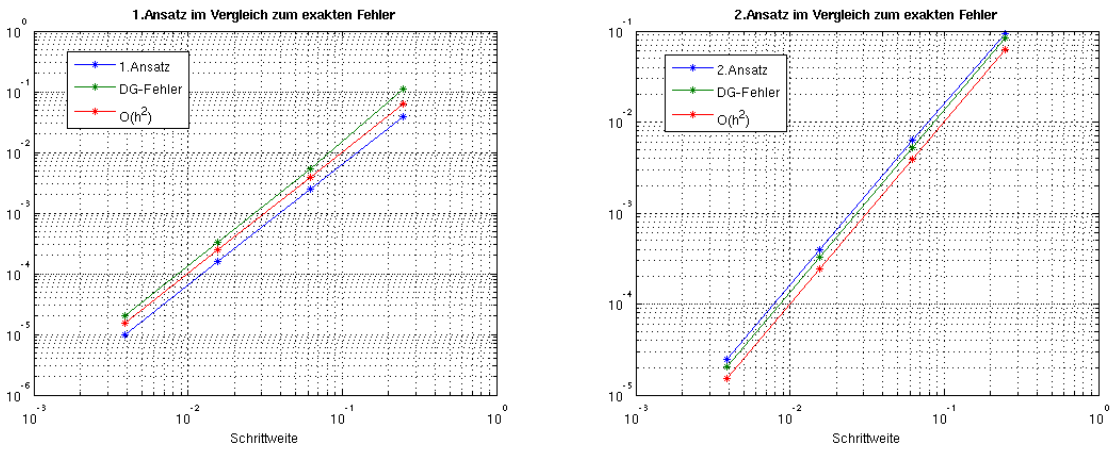

Abbildung 3: Vergleich des DG-Fehlers $\|u - u_{\tau,h}\|_{\tau,h}^2$ mit dem Fehlerschätzer nach dem 1.Ansatz links und Vergleich des DG-Fehlers $\|u - u_{\tau,h}\|_{H^1(\mathcal{K}_h)}^2$ mit dem Fehlerschätzer nach dem 2.Ansatz rechts, wobei $h_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i$, $\tau_i = h_i^2$ und $i \in \{1, \ldots, 4\}$.

Sowohl für $\tau \simeq h$ als auch für $\tau^2 \simeq h$ als auch für $\tau = h^2$ wird für die Wahl von f in (41) das Verhalten für $h \to 0$ von $\|u - u_{\tau,h}\|_{\tau,h}^2$ durch $\eta_1 (f, u_{\tau,h})^2$ und $\sum\limits_{n,K} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|u - u_{\tau,h}\|_{H^1(K)}^2$ durch $\eta_2 (f, u_{\tau,h})^2$ wiedergegeben. Dieses Ergebnis muss aus den kritisch hinterfragt werden. Wir haben nämlich nur ein Beispiel getestet und in diesem Beispiel ist die exakte Lösung glatt- d.h. $u \in C^\infty \left(\overline{\Omega_T}\right)$.

6. Ausblick

Die folgenden Fragen könnten ein Anstoß für weiterführende Arbeit zum Thema dieser Arbeit sein.

- Funktionieren die Ansätze dieser Arbeit auch für nicht konvexe Gebiete?
- Können wir diese Arbeit auch auf rechteckige oder auch allgemeinere Elemente verallgemeinern?
- Wie kann ein Fehlerschätzer aussehen, wenn $\mathcal{K}_h$ nicht mehr auf jedem Intervall (t_n, t_{n+1}) gleich aussieht?
- Lassen sich die Ergebnisse dieser Arbeit auch auf DG-Formulierungen zu Zerlegungen von Ω_T wie in [25] und [26] übertragen. Diese Zerlegungen bestehen nicht mehr aus Elementen der Art $(t_n, t_{n+1}) \times K$, sondern behandeln Zeit- und Ortsdimensionen gleich.
- Sind die Abschätzungen aus Satz 4.2.6 und Satz 4.3.17 wirklich scharf?
- Wie kann eine Abschätzung zur Effizienz aussehen?

A. Anhang

```
function [nodes,time,erg,stima,f_vec] = ...
    DG_parabolic_1D(f,A,B,T,h,tau,sigma)

nodes = A:h:B;
time = 0:tau:T;

N = length(nodes)-1;
M = length(time)-1;

f_vec = sparse(4*N*M,1);

f_vec = sparse(4*N*M,1);
stima = sparse(4*N*M,4*N*M);
erg = f_vec;

stima = DG_parabolic_1D_matrix_a(A,B,T,h,tau,sigma)+...
    DG_parabolic_1D_matrix_b(A,B,T,h,tau,'downwind');
f_vec = DG_parabolic_1D_vector_f(f,A,B,T,h,tau);

%LGS lösen

erg = stima\f_vec; %Lösen des LGS

%plot_function_3D(erg,A,B,T,h,tau);

end
```

```
function[matrix_a] = DG_parabolic_1D_matrix_a(A,B,T,h,tau,sigma)

%vorerst 1.Ordnung

nodes = A:h:B;
time = 0:tau:T;

N = length(nodes)-1;
M = length(time)-1;

f_vec = sparse(4*N*M,1);
matrix_a = sparse(4*N*M,4*N*M);
erg = f_vec;

%Matrix für Integral grad(u) grad(v)
stima_loc = 1/6* [2 , 1 ,-2 , -1 ; 1, 2, -1, -2;...
    -2, -1, 2, 1; -1, -2, 1 ,2];

boundary_temp = 1/12*[-2, -1, 2, 1; -1, -2, 1, 2;...
    2, 1, -2, -1; 1, 2, -1, -2];
boundary_sigma = sigma*1/6*[2, 1, -2, -1;...
    1, 2, -1, -2; -2, -1, 2, 1; -1, -2, 1, 2];
boundary = zeros(8);
```

```
%Steifigkeitsmatrix
for i = 1:N

    for k = 1:M

        index = ( 4*(k-1)*N + 4*i-3 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i );
        matrix_a(index,index) = matrix_a(index,index) +...
            (time(k+1)-time(k)) /(nodes(i+1) - nodes(i)) .* stima_loc;

    end

end

%Matrix der Randterme

%innere Kanten
for k = 1:M

    var_t = time(k+1)-time(k);

    for i = 2:N

        boundary = zeros(8);

        var_1 = nodes(i)- nodes(i-1);
        var_2 = nodes(i+1) - nodes(i);

        boundary(1:4,3:6) = (var_t ./ var_1) * boundary_temp;
        boundary(5:8,3:6) = (var_t ./ var_2) * boundary_temp;
        boundary = boundary + boundary';
        boundary(3:6,3:6) = boundary(3:6,3:6) - ...
            (2 * var_t ./((var_1 + var_2))) .* boundary_sigma;

        index = ( 4*(k-1)*N + 4*i-7 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i );

        matrix_a(index,index) = matrix_a(index,index) - boundary;

    end

end


%äußere Kanten
for k = 1:M

    var_1 = nodes(2) - nodes(1);
    var_2 = nodes(N+1) - nodes(N);
    var_t = time(k+1)-time(k);

    boundary = zeros(4);
```

```
    boundary(:,1:2) = (var_t ./ var_1)* 2 * boundary_temp(:,3:4);
    boundary = boundary + boundary';
    boundary(1:2,1:2) = boundary(1:2,1:2) - ...
        (var_t ./var_1) .* boundary_sigma(3:4,3:4);

    index = ( 4*(k-1)*N + 1 ) : ( 4*(k-1)*N + 4 );

    matrix_a(index,index) = matrix_a(index,index) - boundary;

    boundary = zeros(4);

    boundary(:,3:4) = (var_t ./ var_2) * 2 * boundary_temp(:,1:2);
    boundary = boundary + boundary';
    boundary(3:4,3:4) = boundary(3:4,3:4) - ...
        (var_t ./var_2) .* boundary_sigma(1:2,1:2);

    index = ( 4*k*N - 3 ) : ( 4*k*N );

    matrix_a(index,index) = matrix_a(index,index) - boundary;

end

end
```

```
function[matrix_b] = DG_parabolic_1D_matrix_b(A,B,T,h,tau,string)

%zur Unterscheidung ob b(phi_i,phi_j)...
%mit dem Updwind- oder dem Downwindschema berechnet wird

bool = strcmp('upwind',string);

nodes = A:h:B;
time = 0:tau:T;

N = length(nodes)-1;
M = length(time)-1;
matrix_b = sparse(4*N*M,4*N*M);

%Matrix für Integral u * v_t
matrix_t = 1/12 * [-2 ,2, -1, 1; -2, 2, -1, 1;...
    -1, 1, -2, 2; -1, 1, -2, 2];

%Upwindschema

%Matrix für Randintegral an t = T
matrix_T = 1/6*[0, 0, 0, 0; 0, 2, 0, 1; 0, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 2];

%Matrix des Upwindterms
matrix_up1 = matrix_T;
matrix_up2 = -1/6* [0, 0, 0, 0; 2, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 0; 1, 0, 2, 0];

%Downwindschema
```

```
%Matrix für Randintegral an t = 0
matrix_0 = 1/6*[2, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 0; 1, 0, 2, 0; 0, 0, 0, 0];

%Matrix des Downwindterms
matrix_down1 = -matrix_up2;
matrix_down2 = 1/6* [-2,0,-1,0; 0,0,0,0; -1,0,-2,0; 0,0,0,0];

if bool

    %Matrix generieren
    for i = 1:N

        for k = 1:M

            index = ( 4*(k-1)*N + 4*i-3 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i );
            matrix_b(index,index) = matrix_b(index,index) -...
                (nodes(i+1)- nodes(i)) .* matrix_t; %Upwind

        end

        matrix_b(index,index) = matrix_b(index,index) +...
            (nodes(i+1)-nodes(i))* matrix_T; %Randintegral an t = T

    end

    %Upwind-Matrix
    for k = 1:(M-1)

        for i = 1:N

            var_1 = nodes(i+1) - nodes(i);
            index = ( 4*(k-1)*N + 4*i-3 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i );
            matrix_b(index,index) = matrix_b(index,index) +...
                var_1 * matrix_up1;
            index1 = ( 4*k*N + 4*i-3) : ( 4*k*N + 4*i );
            matrix_b(index,index1) = matrix_b(index,index1) +...
                var_1 * matrix_up2;


        end

    end


else


    %Matrix generieren
    for i = 1:N

    index = 4*(N-1) +1 : 4*(N-1) + 4;
```

```
    matrix_b(index,index) = matrix_b(index,index) +...
        (nodes(i+1)- nodes(i)) .*matrix_0;

        for k = 1:M

            index = ( 4*(k-1)*N + 4*i-3 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i );
            matrix_b(index,index) = matrix_b(index,index) +...
                (nodes(i+1)- nodes(i)) .* matrix_t'; %Downwind

        end

    end

    %Downwind-Matrix
    for k = 1:(M-1)

        for i = 1:N

            var_1 = nodes(i+1) - nodes(i);

            index = ( 4*(k-1)*N + 4*i-3 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i );
            index1 = ( 4*k*N + 4*i-3) : ( 4*k*N + 4*i );

            matrix_b(index,index1) = matrix_b(index,index1) -...
                var_1 * matrix_down1;
            matrix_b(index1,index1) = matrix_b(index1,index1) -...
                var_1 * matrix_down2;

        end

    end

end

matrix_b = matrix_b'; %Transponieren da b(u,v) nicht symmetrisch ist

end

function[f_vec] = DG_parabolic_1D_vector_f(f,A,B,T,h,tau)

nodes = A:h:B;
time = 0:tau:T;

N = length(nodes)-1;
M = length(time)-1;

f_vec = zeros(4*N*M,1);

%Reche Seite
for k = 1:M

    for i = 1:N
```

```
        %Lineare Basisfunktionen
        phi_1 = @(t,x) f(t,x) .* ...
            ( 1 - (t-time(k))/(time(k+1)-time(k)) ) .*...
            ( 1 - (x-nodes(i))/(nodes(i+1)-nodes(i)) );
        phi_2 = @(t,x) f(t,x) .*...
            (t - time(k)) /(time(k+1)-time(k)) .*...
            ( 1 - (x-nodes(i))/(nodes(i+1)-nodes(i)) );
        phi_3 = @(t,x) f(t,x) .*...
            ( 1 - (t-time(k))/(time(k+1)-time(k)) ) .*...
            ( (x- nodes(i))/(nodes(i+1)- nodes(i)) );
        phi_4 = @(t,x) f(t,x) .* (t - time(k)) /(time(k+1)-time(k)) .*...
            ( (x- nodes(i))/(nodes(i+1)- nodes(i)) );

        index = ( 4*(k-1)*N + 4*i-3 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i );

        f_vec(index(1)) = dblquad(phi_1,time(k),time(k+1),...
            nodes(i),nodes(i+1));
        f_vec(index(2)) = dblquad(phi_2,time(k),time(k+1),...
            nodes(i),nodes(i+1));
        f_vec(index(3)) = dblquad(phi_3,time(k),time(k+1),...
            nodes(i),nodes(i+1));
        f_vec(index(4)) = dblquad(phi_4,time(k),time(k+1),...
            nodes(i),nodes(i+1));

    end

end

end
```

```
function [error_res, error_jump_x, error_jump_t] = ...
    DG_parabolic_1D_error_estimator (erg , A , B , T , h , tau , f)

nodes = A:h:B;
time = 0:tau:T;

N = length(nodes)-1;
M = length(time)-1;

error_res = 0;
error_jump_x = 0;
error_jump_t = 0;

temp1 = 0;
temp2 = 0;

stima_jump_x = 1/6 * [2,1,-2,-1;1,2,-1,-2;-2,-1,2,1;-1,-2,1,2];
stima_jump_t = 1/6 * [0,0,0,0,0,0,0,0; 0,2,0,1,-2,0,-1,0; 0,0,0,0,0,0,0,0;...
    0,1,0,2,-1,0,-2,0; 0,-2,0,-1,2,0,1,0; 0,0,0,0,0,0,0,0;...
    0,-1,0,-2,1,0,2,0; 0,0,0,0,0,0,0,0];

%Residualer Fehler
for k = 1:M
```

```
    var_t = time(k+1)-time(k);

    for i = 1:N

        var_h = nodes(i+1)-nodes(i);

        index = ( 4*(k-1)*N + 4*i-3 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i );

        %Lineare Basisfunktionen
        phi_1_t = @(t,x) -ones(size(t))/(time(k+1)-time(k))   .*...
            ( 1 - (x-nodes(i))/(nodes(i+1)-nodes(i)) );
        phi_2_t = @(t,x) ones(size(t))/(time(k+1)-time(k)) .*...
            ( 1 - (x-nodes(i))/(nodes(i+1)-nodes(i)) );
        phi_3_t = @(t,x) -ones(size(t))/(time(k+1)-time(k))   .*...
            ( (x- nodes(i))/(nodes(i+1)- nodes(i)) );
        phi_4_t = @(t,x) ones(size(t))/(time(k+1)-time(k)) .*...
            ( (x- nodes(i))/(nodes(i+1)- nodes(i)) );

        erg_temp_t = @(t,x) ( erg(index(1)) .* phi_1_t(t,x) +...
            erg(index(2)) .* phi_2_t(t,x) + erg(index(3)) .* phi_3_t(t,x) +...
            erg(index(4)) .* phi_4_t(t,x) - f(t,x) ).^2;

        temp = dblquad(erg_temp_t,time(k),time(k+1),nodes(i),nodes(i+1));
        error_res = error_res + var_h^2 * temp;

    end

end


%Fehler für Sprung im Ort, innere Kanten
for k = 1:M

    var_t = time(k+1)-time(k);

    for i = 2:N

        var_1 = nodes(i)- nodes(i-1);
        var_2 = nodes(i+1) - nodes(i);
        var_e = (var_1 + var_2) /2;

        index = ( 4*(k-1)*N + 4*i-7 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i );
        index1 = index(1:4);
        index2 = index(5:8);
        index3 = index(3:6);


        temp1 = var_t .*var_e .* ...
            ( 1/(var_1^2) * erg(index1)' * stima_jump_x * erg(index1)...
            - 2/(var_1*var_2).* erg(index1)' * stima_jump_x * erg(index2) +...
            1/(var_2^2) .* erg(index2)' * stima_jump_x * erg(index2) );
```

```
        temp2 = ( 1./ var_e + var_e/(var_t^2) ).* ...
            ( var_t  .* erg(index3)' * stima_jump_x * erg(index3) );
        error_jump_x = error_jump_x + temp1 + temp2;

    end

end

%Fehler für den Sprung im Ort, äußere Kanten
var_1 = nodes(2)-nodes(1);
var_2 = nodes(N+1)-nodes(N);
error_jump_x_boundary = 0;

for k= 1:M

    var_t = time(k+1)-time(k);

    index1 = ( 4*(k-1)*N + 1 ) : ( 4*(k-1)*N + 4 );
    index2 = ( 4*k*N - 3 ) : ( 4*k*N );

    index1 = index1(1:2);
    index2 = index2(3:4);

    temp1 = (1./var_1 + var_1./(var_t^2)) .*...
        (var_t .* erg(index1)' * stima_jump_x(1:2,1:2) * erg(index1) );
    temp2 = (1./var_2 + var_2./(var_t^2)) .*...
        (var_t .* erg(index2)' * stima_jump_x(3:4,3:4) * erg(index2) );

    error_jump_x_boundary = error_jump_x_boundary + temp1 + temp2;

end

%error_jump_x_boundary
error_jump_x = error_jump_x + error_jump_x_boundary;

%Fehler für Sprung in der Zeit
for k = 1:(M-1)

   var_t = time(k+1)-time(k);

   for i = 1:N

       var_1 = nodes(i+1)- nodes(i);
       index1 = [( 4*(k-1)*N + 4*i-3 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i ),...
           ( 4*k*N + 4*i-3) : ( 4*k*N + 4*i )];
       temp1 = ( 1./var_t + var_t./(var_1^2) ) .*...
           (var_1 * erg(index1)' * stima_jump_t * erg(index1) );
       error_jump_t  = error_jump_t + temp1;

   end

end
```

```
%Fehler für Sprung in der Zeit, Anfangszeitpunkt
for i = 1:N

    var_t = time(2)-time(1);
    var_1 = nodes(i+1)- nodes(i);
    index1 = ( 4*(i-1) + 1 ) : (4 * i );
    temp1 =  ( 1./var_t + var_t./(var_1^2) ) .* ...
        (var_1 * erg(index1)' * stima_jump_t(5:8,5:8) * erg(index1) );
    error_jump_t = error_jump_t + temp1;

end

end

function [error_res, error_jump_x, error_jump_t] =...
    DG_parabolic_1D_error_estimator_2 ...
    (erg , A , B , T , h , tau , f)

nodes = A:h:B;
time = 0:tau:T;

N = length(nodes)-1;
M = length(time)-1;

error_res = 0;
error_jump_x = 0;
error_jump_t = 0;

temp1 = 0;
temp2 = 0;

stima_jump_x = 1/6 * [2,1,-2,-1;1,2,-1,-2;-2,-1,2,1;-1,-2,1,2];
stima_jump_t = 1/6 * [0,0,0,0,0,0,0,0; 0,2,0,1,-2,0,-1,0; 0,0,0,0,0,0,0,0;...
    0,1,0,2,-1,0,-2,0; 0,-2,0,-1,2,0,1,0; 0,0,0,0,0,0,0,0;...
    0,-1,0,-2,1,0,2,0; 0,0,0,0,0,0,0,0];

% Sprung der Ortsableitung in der Zeit
stima_jumpx_t = zeros(8);
stima_temp1 = [1,0,-1;0,0,0;-1,0,1];
stima_jumpx_t(2:4,2:4) = stima_temp1;
stima_jumpx_t(2:4,5:7) = -stima_temp1;
stima_jumpx_t(5:7,2:4) = -stima_temp1;
stima_jumpx_t(5:7,5:7) = stima_temp1;

%Sprung der Zeitableitung im Ort
stima_jumpt_x = zeros(8);
stima_temp2 = [1,-1;-1,1];
stima_jumpt_x(3:4,3:4) = stima_temp2;
stima_jumpt_x(3:4,5:6) = -stima_temp2;
stima_jumpt_x(5:6,3:4) = -stima_temp2;
stima_jumpt_x(5:6,5:6) = stima_temp2;
```

```
%Residualer Fehler
for k = 1:M

    var_t = time(k+1)-time(k);

    for i = 1:N

        var_h = nodes(i+1)-nodes(i);

        index = ( 4*(k-1)*N + 4*i-3 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i );

        %Lineare Basisfunktionen
        phi_1_t = @(t,x) -ones(size(t))/(time(k+1)-time(k))   .*...
            ( 1 - (x-nodes(i))/(nodes(i+1)-nodes(i)) );
        phi_2_t = @(t,x) ones(size(t))/(time(k+1)-time(k)) .*...
            ( 1 - (x-nodes(i))/(nodes(i+1)-nodes(i)) );
        phi_3_t = @(t,x) -ones(size(t))/(time(k+1)-time(k))   .*...
            ( (x- nodes(i))/(nodes(i+1)- nodes(i)) );
        phi_4_t = @(t,x) ones(size(t))/(time(k+1)-time(k)) .*...
            ( (x- nodes(i))/(nodes(i+1)- nodes(i)) );

        erg_temp_t = @(t,x) ( erg(index(1)) .* phi_1_t(t,x) + ...
            erg(index(2)) .* phi_2_t(t,x) + erg(index(3)) .* phi_3_t(t,x) +...
            erg(index(4)) .* phi_4_t(t,x) - f(t,x) ).^2;

        temp = dblquad(erg_temp_t,time(k),time(k+1),nodes(i),nodes(i+1));
        error_res = error_res + var_h^2 * temp;

    end

end


%Fehler für Sprung im Ort, innere Kanten
for k = 1:M

    var_t = time(k+1)-time(k);

    for i = 2:N

        var_1 = nodes(i)- nodes(i-1);
        var_2 = nodes(i+1) - nodes(i);


        index = ( 4*(k-1)*N + 4*i-7 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i );
        index1 = index(1:4);
        index2 = index(5:8);
        index3 = index(3:6);

        temp1 = 2 .* var_t .* ( var_1 + var_2 ) .* ...
            ( 1/(var_1^2) * erg(index1)' * stima_jump_x * erg(index1) -...
            2/(var_1*var_2).* erg(index1)' * stima_jump_x * erg(index2) +...
```

```
            1/(var_2^2) .* erg(index2)' * stima_jump_x * erg(index2) );
        temp2 = 2 * var_t ./ (var_1 + var_2) .* ...
            erg(index3)' * stima_jump_x * erg(index3);

        %Sprung der Funktion
        error_jump_x = error_jump_x + temp1 + temp2;

        %Sprung der Zeitableitung
        temp1 = 2 ./ (var_t .* ( var_1 + var_2 )) *...
            erg(index)' * stima_jumpt_x * erg(index);
        error_jump_x = error_jump_x + temp1;

    end

end

%Fehler für den Sprung im Ort, äußere Kanten
var_1 = nodes(2)-nodes(1);
var_2 = nodes(N+1)-nodes(N);
error_jump_x_boundary = 0;

for k= 1:M

    var_t = time(k+1)-time(k);

    index1 = ( 4*(k-1)*N + 1 ) : ( 4*(k-1)*N + 4 );
    index2 = ( 4*k*N - 3 ) : ( 4*k*N );

    %Sprung der Zeitableitung
    temp1 = 1 ./ (var_t .* var_h) * erg(index1)' *...
        stima_jumpt_x(5:8,5:8) * erg(index1);
    temp2 = 1 ./ (var_t .* var_h) * erg(index2)' *...
        stima_jumpt_x(1:4,1:4) * erg(index2);
    error_jump_x_boundary = error_jump_x_boundary + temp1 + temp2;

    %Sprung der Funktion
    index1 = index1(1:2);
    index2 = index2(3:4);

    temp1 = var_t ./ var_1 .* erg(index1)' *...
        stima_jump_x(1:2,1:2) * erg(index1);
    temp2 = var_t ./ var_2 .* erg(index2)' *...
        stima_jump_x(3:4,3:4) * erg(index2);
    error_jump_x_boundary = error_jump_x_boundary + temp1 + temp2;

end

%error_jump_x_boundary
error_jump_x = error_jump_x + error_jump_x_boundary;

%Fehler für Sprung in der Zeit
for k = 1:(M-1)
```

```
    for i = 1:N

        var_1 = nodes(i+1) - nodes(i);
        index1 = [( 4*(k-1)*N + 4*i-3 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i ),...
            ( 4*k*N + 4*i-3) : ( 4*k*N + 4*i )];
        %differenz = erg(index1(1:4))-erg(index1(5:8))

        %Sprung der Funktion in der Zeit
        temp1 = var_t .*var_1 .* erg(index1)' * stima_jump_t * erg(index1);
        error_jump_t  = error_jump_t + temp1;

        %Sprung der Ortsableitung in der Zeit
        temp1 = var_t ./var_1 .* erg(index1)' * stima_jumpx_t * erg(index1);
        error_jump_t = error_jump_t + temp1;

        %L^2- Sprung
        temp1 = (var_1^2)/var_t .* (var_1 * erg(index1)' *...
            stima_jump_t * erg(index1) );
        error_jump_t  = error_jump_t + temp1;

    end

end

%Fehler für Sprung in der Zeit, Anfangszeitpunkt
for i = 1:N

    var_1 = nodes(i+1) - nodes(i);
    index1 = ( 4*(i-1) + 1 ) : (4 * i );

    %Sprung der Funktion an T=0
    temp1 = var_t .* var_1 .* erg(index1)' * ...
        stima_jump_t(5:8,5:8) * erg(index1);
    error_jump_t = error_jump_t + temp1;

    %Sprung der Ortsableitung der Funktion an T=0
    temp1 = var_t ./var_1 .* erg(index1)' * ...
        stima_jumpx_t(5:8,5:8) * erg(index1);
    error_jump_t = error_jump_t + temp1;

    %L^2- Sprung
    temp1 =  (var_1^2)/var_t .* (var_1 * erg(index1)' *...
        stima_jump_t(5:8,5:8) * erg(index1));
    error_jump_t = error_jump_t + temp1;

end

end
```

```
function[error] =  DG_parabolic_1D_exact_error(u,u_x,erg,A,B,T,h,tau,gamma)

nodes = A:h:B;
```

```
time = 0:tau:T;

N = length(nodes)-1;
M = length(time)-1;
error = 0;
error = 0;
temp = 0;

stima_jump_x = 1/6 * [2,1,-2,-1;1,2,-1,-2;-2,-1,2,1;-1,-2,1,2];
stima_jump_t = 1/6 * [0,0,0,0,0,0,0,0; 0,2,0,1,-2,0,-1,0; 0,0,0,0,0,0,0,0;...
    0,1,0,2,-1,0,-2,0; 0,-2,0,-1,2,0,1,0; 0,0,0,0,0,0,0,0;...
    0,-1,0,-2,1,0,2,0; 0,0,0,0,0,0,0,0];

 for k = 1:M

    for i = 1:N

        index = ( 4*(k-1)*N + 4*i-3 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i );

        phi_x_1 = @(t,x) ( 1 - (t-time(k))/(time(k+1)-time(k)) ) .*...
            -ones(size(x))/(nodes(i+1)-nodes(i)) ; %Lineare Basisfunktionen
        phi_x_2 = @(t,x) (t - time(k)) /(time(k+1)-time(k)) .*...
            -ones(size(x))/(nodes(i+1)-nodes(i)) ;
        phi_x_3 = @(t,x) ( 1 - (t-time(k))/(time(k+1)-time(k)) ) .*...
            ones(size(x))/(nodes(i+1)- nodes(i)) ;
        phi_x_4 = @(t,x) (t - time(k)) /(time(k+1)-time(k)) .*...
            ones(size(x))/(nodes(i+1)- nodes(i)) ;

        fun = @(t,x) ( erg(index(1)) .* phi_x_1(t,x) +...
            erg(index(2)) .* phi_x_2(t,x) + erg(index(3)) .* phi_x_3(t,x) +...
            erg(index(4)) .* phi_x_4(t,x) - u_x(t,x) ).^2;

        error = error + dblquad(fun,time(k),time(k+1),nodes(i),nodes(i+1));

    end

 end

% Norm am Endzeitpunkt
for i = 1:N

    index = ( 4*(M-1)*N + 4*i-3 ) : ( 4*(M-1)*N + 4*i );

    %Lineare Basisfunktionen
    phi_2 = @(x)  1 - (x-nodes(i))/(nodes(i+1)-nodes(i)) ;
    phi_4 = @(x)  (x- nodes(i))/(nodes(i+1)- nodes(i)) ;

    fun = @(x) (erg(index(2)) .* phi_2(x) +...
        erg(index(4)) .* phi_4(x) - u(T,x) ).^2;
    temp = quad(fun,nodes(i),nodes(i+1));
    error = error + temp;
```

```
end

% Norm für den Sprung im Ort, innere Kanten
for k = 1:M

    for i = 2:N

        var_1 = nodes(i)- nodes(i-1);
        var_2 = nodes(i+1) - nodes(i);
        var_t = time(k+1)-time(k);
        index = ( 4*(k-1)*N + 4*i-7 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i );
        index = index(3:6);
        temp = gamma^2 * 2 * var_t/(var_1 + var_2) .*...
            erg(index)' * stima_jump_x * erg(index);
        error = error + temp;

    end

end

%Norm für den Sprung im Ortm äußere Kanten
var_1 = nodes(2)-nodes(1);
var_2 = nodes(N+1)-nodes(N);

for k= 1:M

      var_t = time(k+1)-time(k);

      index1 = ( 4*(k-1)*N + 1 ) : ( 4*(k-1)*N + 4 );
      index2 = ( 4*k*N - 3 ) : ( 4*k*N );

      index1 = index1(1:2);
      index2 = index2(3:4);

      temp1 = gamma^2 * var_t ./ var_1 .*...
          erg(index1)' * stima_jump_x(1:2,1:2) * erg(index1);
      temp2 = gamma^2 * var_t ./ var_2 .*...
          erg(index2)' * stima_jump_x(3:4,3:4) * erg(index2);

      error = error + temp1 + temp2;

end

%% Norm für Sprung in der Zeit
for k = 1:(M-1)

   for i = 1:N

       var_1 = nodes(i+1) - nodes(i);
       index = [( 4*(k-1)*N + 4*i-3 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i ),...
           ( 4*k*N + 4*i-3) : ( 4*k*N + 4*i )];
       temp1 = var_1 *erg(index)' * stima_jump_t * erg(index);
```

```
        error  = error + temp1;

    end

end
%
%Norm für den Sprung in der Zeit, T = 0
for i = 1:N

    var_1 = nodes(i+1)- nodes(i);
    index1 = ( 4*(i-1) + 1 ) : (4 * i );
    temp1 = var_1 * erg(index1)' * stima_jump_t(5:8,5:8) * erg(index1);
    error= error + temp1;

end

end
```

```
function[h,error_approx_1,error_approx_2,error_FEM_1,error_FEM_2] = ...
    DG_parabolic_1D_test(m)

res_1= zeros(1,m);
jump_x_1 = zeros(1,m);
jump_t_1 = zeros(1,m);

res_2= zeros(1,m);
jump_x_2 = zeros(1,m);
jump_t_2 = zeros(1,m);

error_FEM_1 = zeros(1,m);
error_FEM_2 = zeros(1,m);
error_nodal = zeros(1,m);

%f2 = @(t,x) 2*pi* sin(2*pi*x) .* ( 2*pi*sin(2*pi*t) + cos(2*pi*t) );
%u2 = @(t,x) sin(2*pi*t) .* sin(2*pi*x);
%u2_x = @(t,x) sin(2*pi*t) .* cos(2*pi*x) * 2 * pi;

%f1 = @(t,x) (sin(pi*x) + pi^2 * sin(pi*x) .*t).*(t<0.5);
%u1 = @(t,x) (sin(pi*x) .* t) .* (t<0.5);
%u1_x = @(t,x) (pi*cos(pi*x) .* t) .* (t<0.5);

f1 = @(t,x) (sin(pi*x) + pi^2 * sin(pi*x) .*t);
u1 = @(t,x) (sin(pi*x) .* t);
u1_x = @(t,x) (pi*cos(pi*x) .* t);

A = 0;
B = 1;
T = 1;
h = 2.^(-1 .* (1:m))
tau = 2.^(-1 .* (1:m))
gamma = 40;
```

```
for i = 1:m

    Fortschritt = i
    %FEM-Lösung berechnen
    [~,~,erg_FEM,~,~] = DG_parabolic_1D(f1,A,B,T,h(i),tau(i),gamma);

    erg_nodal = nodal_interpolant(u1,A,B,T,h(i),tau(i));

     %Fehlerschätzer (1.Ansatz)
    [res_1(i), jump_x_1(i), jump_t_1(i)] = ...
        DG_parabolic_1D_error_estimator...
        (erg_FEM,A,B,T,h(i),tau(i),f1);

    %Fehlerschätzer (2.Ansatz)
    [res_2(i), jump_x_2(i), jump_t_2(i)] = ...
        DG_parabolic_1D_error_estimator_2...
        (erg_FEM,A,B,T,h(i),tau(i),f1);

    %exakter Fehler, FEM-Loesung ((tau,h)-Norm))
    error_FEM_1(i) = ...
        DG_parabolic_1D_exact_error...
        (u1,u1_x,erg_FEM,A,B,T,h(i),tau(i),gamma);

    %exakter Fehler, FEM-Lösung (H^1-Norm)
        error_FEM_2(i) = ...
        DG_parabolic_1D_exact_error_2(u1,u1_x,erg_FEM,A,B,T,h(i),tau(i));


end

%error_approx = error_approx_jump_x;
error_approx_1 = res_1 + jump_x_1 + jump_t_1;
error_approx_2 = res_2 + jump_x_2 + jump_t_2;

figure(1)
loglog(h,0.02 .* error_approx_1,'*-',h,error_FEM_1,'*-',h,h.^2,'*-');
xlabel('Schrittweite');
legend('1.Ansatz','DG-Fehler','O(h^2)');
title('!.Ansatz im Vergleich zum exakten Fehler','Fontweight','bold');
grid on

figure(2)
loglog(h,0.02 .* error_approx_2,'*-',h,error_FEM_2,'*-',h,h.^2,'*-');
xlabel('Schrittweite');
legend('2.Ansatz','DG-Fehler','O(h^2)');
title('2.Ansatz im Vergleich zum exakten Fehler','Fontweight','bold');
grid on

end

function plot_function_3D(erg,A,B,T,h,tau)

nodes = A:h:B;
```

```
time = 0:tau:T;

N = length(nodes)-1;
M = length(time)-1;

hold on

for k = 1:M

    var_t = time(k+1)-time(k);

    for i = 1:N

        var_h = nodes(i+1)-nodes(i);

        index = ( 4*(k-1)*N + 4*i-3 ) : ( 4*(k-1)*N + 4*i );

        %Lineare Basisfunktionen
        phi_1 = @(t,x) ( 1 - (t-time(k))/(time(k+1)-time(k)) ).*...
            ( 1 - (x-nodes(i))/(nodes(i+1)-nodes(i)) );
        phi_2 = @(t,x) (t - time(k)) /(time(k+1)-time(k)) .*...
            ( 1 - (x-nodes(i))/(nodes(i+1)-nodes(i)) );
        phi_3 = @(t,x) ( 1 - (t-time(k))/(time(k+1)-time(k)) ) .*...
            ( (x- nodes(i))/(nodes(i+1)- nodes(i)) );
        phi_4 = @(t,x) (t - time(k)) /(time(k+1)-time(k)) .* ...
            ( (x- nodes(i))/(nodes(i+1)- nodes(i)) );

        phi = @(t,x) erg(index(1)) .* phi_1(t,x) + ...
            erg(index(2)) .* phi_2(t,x) + erg(index(3)) .* phi_3(t,x) +...
            erg(index(4)) .* phi_4(t,x);

        [T,X] = meshgrid( time(k) : 1/20* var_t: time(k+1),...
            nodes(i) :  1/20 * var_h : nodes(i+1) );

        Z = phi(T,X);
        surf(T,X,Z);

    end

end

%hold off

end
```

Abkürzungen und Symbole

$\mathbb{N}$	Menge aller natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge aller nichtnegativen ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge aller reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge aller positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$	Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen
μ	Oberflächenmaß
conv	konvexe Hülle
supp	Träger einer Funktion
$\preceq$	kleiner oder gleich mal einer Konstante
$\simeq$	verhält sich wie
$\succeq$	größer oder gleich mal einer Konstante
∂w	Rand von ω
$L^2(\omega)$	Menge aller auf ω quadratisch integrierbaren Funktionen
$\|\cdot\|_\omega$	$\|\cdot\|_{L^2(\omega)}$
$C(\omega)$	Menge der stetigen Funktionen auf ω
$C(\overline{\omega})$	Menge aller bis zum Rand stetigen Funktionen auf ω
$C((a,b),V)$	Menge aller stetigen Funktion auf (a,b) mit Werten in V
$C^\infty(\omega)$	Menge der beliebig oft auf ω differenzierbaren Funktionen
$C^\infty(\overline{\omega})$	Menge der beliebig oft auf Gebiet ω bis zum Rand differenzierbaren Funktionen
$C^{k_t,k_x}((a,b)\times\omega)$	Menge der k_t- mal in der Zeitrichtung und k_x- in der Ortsrichtung auf $(a,b)\times\omega$ differenzierbaren Funktionen
$C^{k_t,k_x}([a,b]\times\overline{\omega})$	Menge der k_t- mal in der Zeitrichtung und k_x- in der Ortsrichtung auf $(a,b)\times\omega$ bis zum Rand differenzierbaren Funktionen
$C^k(\omega)$	Menge der k- mal auf ω differenzierbaren Funktionen
$C^k(\overline{\omega})$	Menge der k- mal ω bis zum Rand differenzierbaren Funktionen
$C_0^\infty(\omega)$	Menge der beliebig oft auf ω differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger
$\mathcal{P}^p((a,b),V)$	Menge der Polynome auf (a,b) vom Grad p mit Werten in V
$\mathcal{P}^p(\omega)$	Menge der Polynome vom Grad p auf ω
ω_T	$(0,T)\times\omega$
DG	Discontinuous Galerkin
FEM	Finite Elemente Methode
f.ü.	fast überall
o.E.d.A	ohne Einschränkung der Allgemeinheit

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Literatur

[1] Mark Ainsworth und David Kay. »The approximation theory for the p-version finite element method and application to non-linear elliptic PDEs«. *Numer. Math.* 82 (1999), S. 351–388.

[2] Mark Ainsworth und J. Tinsley Oden. »A posteriori error estimation in finite element analysis«. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 142 (1997), S. 1–88.

[3] Douglas N. Arnold u. a. »Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems«. *SIAM J. NUMER. ANAL.* Vol. 39, No. 5 (2002), S. 1749–1779.

[4] D. Braess. *Finite Elemente- Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer, 1997.

[5] Susanne C. Brenner. »Poincaré-Friedrichs Inequalities for piecewise H1-Functions«. *SIAM J. NUMER. ANAL.* Vol. 41, No. 1 (2003), S. 306–324.

[6] Susanne C Brenner und Scott L. Ridgway. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, 2002.

[7] Annalisa Buffa und Christoph Ortner. »Compact embeddings of broken Sobolev spaces and applications«. *IMA Journal of Numerical Analysis* 29 (2009), 827–855. DOI: 10.1093/imanum/drn038.

[8] P H . Clément. »Approximation by finite element functions using local regularization«. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opéra- tionnelle. Analyse numérique* tome 9, no. 2 (1975), S. 77–84.

[9] Manfred Dobrowolski. *Angewandte Funktionalanalysis*. Springer, 2006.

[10] V. Dolejší, M. Feistauer und C. Schwab. »A finite volume discontinuous Galerkin scheme for nonlinear convection–diffusion problems«. *CALCOLO* 39 (2002), S. 1–40.

[11] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. Second Edition. Americal Mathematical Society, 2010.

[12] Miloslav Feistauer u. a. »Analysis of space–time discontinuous Galerkin method for nonlinear convection–diffusion problems«. *Numer. Math.* 117 (2011), S. 251–288. DOI: 10.1007/s00211-010-0348-x.

[13] H. Gajewski, K. Gröger und K. Zacharias. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*. Academie-Verlag Berlin, 1974.

[14] P. Houston, C. Schab und E. Süli. *Discontinuous hp–Finite Element Methods for Advection–Diffusion Problems*. Research Report No. 2000-07. ETH Zürich, 2000.

[15] Paul Houston, Dominik Schötzau und Thomas P. Wihler. »Energy Norm A-Posteriori Error Estimation of hp-Adaptive Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems«. *IMA Preprint Series 1985* (2004).

[16] Paul Houston, Endre Suli und Thomas P. Wihler. »A posteriori error analysis of hp-version discontinuous Galerkin finite-element methods for second-order quasilinear elliptic PDEs«. *IMA Journal of Numerical Analysis* 28 (2007), S. 245–273. DOI: 10.1093/imanum/drm009.

[17] Ohannes Karakashian und Charalambros Makridakis. »A Space-Time Finite Element Method for the Nonlinear Nonlinear Schrödinger Equation: The Discontinuous Galerkin Method«. *MATHEMATICS OF COMPUTATION* Volume 67, Number 222 (1998), S. 479–499.

[18] Ohannes A. Karakashian und Frederic Pascal. »A Posteriori Error Estimates for a Discontinuous Galerkin Approximation of Second-Order Elliptic Problems«. *SIAM J. NUMER. ANAL.* Vol. 41, No. 6 (2003), 2374–2399.

[19] Stig Larsson und Vidar Thomée. *Partielle Differentialgleichungen und numerische Methoden.* Springer, 2003.

[20] Andris Lasis und Endre Süli. *Poincaré-Type Inequalities for Broken Sobolev Spaces.* Preprint. Oxford University Computing Laboratory.

[21] Ben Q. Li. *Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer.* Springer, 2006.

[22] Charalambros Makridakis und Riccardo Nochetto. »A Posteriori Analysis for Higher Order Dissipative Methods for Evolution Equations«. *Numer. Math.* 104 (2006), 489–514.

[23] Vladimir Maz'ya. *Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations.* Springer, 2011.

[24] J. M. Melenk. »hp-Interpolation of Smooth Functions«. *SIAM J. Numer. Anal.* 43 (2005), S. 127–155.

[25] Martin Neumüller. »Eine Finite Elemente Methode für optimale Kontrollprobleme mit parabolischen Randwertaufgaben«. Master Thesis. Technische Universität Graz, 2010.

[26] Martin Neumüller. »Space-Time Methods«. Diss. Technische Universität Graz, 2013.

[27] Riccardo H. Nochetto, Guiseppe Savaré und Claudio Verdi. »A Posteriori Error Estimates for Variable Time-Step Discretizations of Nonlinear Evolution Equations«. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 000 (199X), S. 1–75.

[28] David Orden und Francisco Santos. *Asymptotically efficient triangulations of the d-cube.* Techn. Ber.

[29] Dirk Praetorius, Ewa Weinmuller und Philipp Wissgott. *ASC Report No. 07/2008 - A Space-Time Adaptive Algorithm for Linear Parabolic Problems.* Techn. Ber. ISBN 978-3-902627-00-1. Institute for Analysis und Scientific Computing Vienna University of Technology — TU Wien, 2008.

[30] Béatrice Rivière. *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations*. Hrsg. von James M. Hyman. Rice University, Houston, Texas: SIAM, 2008.

[31] Joachim Schöberl. »Numerical Methods for Partial Differential Equations«. Vorlesungsmitschrift, Technische Universität Wien. 2009.

[32] Dominik Schötzau und Thomas P. Wihler. »A posteriori error estimation for hp-version time-stepping methods for parabolic partial differential equations«. *Numer. Math.* 115 (2010), 475–509. DOI: 10.1007/s00211-009-0285-8.

[33] Olaf Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme-Finite Elemente und Randelemente*. Teubner, 2003.

[34] Vidar Thomée. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1983.

[35] R. Verfürth. *A posteriori error estimates for linear parabolic equations*. Techn. Ber. Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, 2004.

[36] R. Verfürth. *Error estimates for some quasi-interpolation operators*. Techn. Ber. Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, 1997.

[37] R. Verfürth. »Robust a posteriori error estimators for a singularly perturbed reaction-diffusion equation«. *Numer. Math.* 78 (1998), S. 479–493.

[38] T. Warburton und J.S. Hesthaven. »On the constants in hp-finite element trace inverse inequalities«. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192 (2003), S. 2765–2773.

[39] T. Werder u. a. *hp Discontinuous Galerkin Time-Stepping for Parabolic Problems*. Reserach Report No, 2000-2001. Eidgenössische Technische Hochschule, 2000.

[40] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen- Sobolevräume und Randwertaufgaben*. B.G. Teubner Stuttgart, 1982.

[41] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A- Linear Monotone Operators*. Springer-Verlag, 1990.