Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Optimale Modell-Fesselung in der naben-krafterregten Fahrzeugsimulation

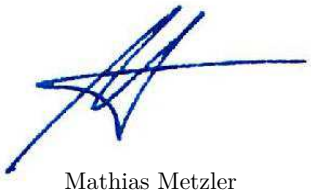
ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Werner Mack
Institut für Mechanik und Mechatronik, E 325
Abteilung Fahrzeugdynamik und Biomechanik, A1

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

Mathias Metzler
Matrikelnummer: 9371279
Neulinggasse 9/3
1030 Wien



Wien, im September 2015

Mathias Metzler

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand am Institut für Mechanik und Mechatronik der Technischen Universität Wien in Zusammenarbeit mit Magna Steyr Fahrzeugtechnik AG & Co KG.

Mein herzlicher Dank gilt **Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Werner Mack** für die ausgezeichnete Betreuung meiner Diplomarbeit. In zahlreichen Besprechungen trug er mit vielen hilfreichen Anregungen wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Ein besonderer Dank gilt auch Herrn **Dipl.-Ing. Dr.techn. Anton Falkner** der Firma Magna Steyr Fahrzeugtechnik für seine persönliche Betreuung und Unterstützung bei der Erstellung meiner Diplomarbeit. Mit seiner langjährigen Erfahrung und seinem Fachwissen hat er maßgeblich zum Fortschritt dieser Arbeit beigetragen.

Ebenso möchte ich mich bei allen Mitarbeitern und Kollegen des Institutes für Mechanik und Mechatronik für ihre Hilfsbereitschaft und das angenehme Arbeitsklima bedanken.

Mein größter Dank gilt jedoch meinen Eltern Elisabeth und Stefan, die mir mein Studium ermöglicht haben und mir jederzeit unterstützend zur Seite stehen. Ihnen möchte ich die vorliegende Arbeit widmen.
Zuletzt möchte ich mich bei meiner Freundin Irina für ihre große Geduld und Unterstützung sehr herzlich bedanken.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Abdrifteffekten in der nabenkrafterregten Fahrzeugsimulation. In der heutigen Fahrzeugentwicklung spielt die Simulation eine zunehmend bedeutende Rolle, um ressourcenschonend Neuerungen zu testen und Entwicklungen voranzutreiben. Voraussetzung hierfür sind gültige mechanische Modelle, sowie numerische Verfahren um zuverlässige Ergebnisse zu erhalten. In der Ingenieurpraxis werden solche Gesamtfahrzeugmodelle oftmals krafterregt simuliert. Dabei werden bei einer Überfahrt eines realen Testfahrzeuges über eine definierte Fahrbahn die auftretenden Kräfte und Momente auf die Radnaben gemessen und als Eingangsgrößen für ein virtuelles Fahrzeugmodell in der Simulation verwendet. Es stellt sich heraus, dass sich das Gesamtfahrzeugmodell im Laufe einer krafterregten Simulation von seiner realen Bahn entfernt und damit die ermittelten Ergebnisse an Gültigkeit verlieren. Die Ursachen dieses Abdrifteffekts und das charakteristische Systemverhalten werden anhand eines Halbfahrzeugmodells unter Einbeziehung der Motor-Relativbewegung untersucht. Aufbauend auf einer vorhergehenden Arbeit wird die Methode einer künstlichen Fesselung des krafterregten Systems untersucht, um ein Abdriften zu verhindern. Die Aufbaumasse oder wahlweise die Radmassen werden dabei durch geeignet parametrierte Federn und Dämpfer an die Umgebung gebunden. Ziel einer anschließenden Optimierung ist die Suche von optimalen Fesselungsparametern, um den Abdrifteffekt zu minimieren und den Einfluss auf das Schwingungsverhalten gering zu halten. Dabei wird auch der Einfluss der Fahrbahn auf eine optimale Fesselung eingehend analysiert.

Abstract

This work is concerned with drift effects in hub-force excited vehicle simulations. In today's vehicle development, simulations play an increasingly important role in testing and promoting resource-saving innovations and new developments. This requires a valid mechanical model as well as numerical methods to obtain reliable results. Force excitation is commonly used in full vehicle simulations. Here, the measured forces and torques on the wheel hubs, which occur during a crossing of a real test vehicle over a defined road surface are used as input variables for a virtual vehicle model in the simulation. In the course of a force-excited simulation the full vehicle model drifts from its real path, and thus the calculated results lose their validity. The causes of this drift effect and the characteristic system behavior are investigated using a half-car simulation model including the relative motion of the engine. Following the results of a previous thesis the method of artificially constraining the force-excited system to the ground is studied to prevent an undesired drift. In this method, the body mass or, alternatively, the wheel masses are constrained to the environment by suitably parameterized springs and dampers. The aim of a subsequent optimization is to find optimal parameters to minimize both the drift effect and the influence on the vibration behavior. Moreover, the influence of the road surface on the optimized constraint parameters is analyzed comprehensively.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1 Einleitung ... 1
1.1 Motivation und Zielsetzung ... 2
1.2 Aufbau der Arbeit ... 7

Kapitel 2 Modellbildung ... 10
2.1 Wegerregtes Modell ... 12
2.1.1 Modellbeschreibung ... 12
2.1.2 Bewegungsgleichungen des wegerregten Modells ... 13
2.2 Krafterregtes Modell ... 16
2.2.1 Modellbeschreibung ... 16
2.2.2 Bewegungsgleichungen des krafterregten Modells ... 18
2.3 Modellparameter ... 19
2.4 Fesselung des krafterregten Modells ... 21
2.4.1 Modellbeschreibung ... 22
2.4.2 Bewegungsgleichungen des krafterregten gefesselten Modells ... 23

Kapitel 3 Stabilitätsuntersuchung ... 25
3.1 Stabilitätsdefinition ... 25
3.2 Stabilitätsanalyse ... 26
3.3 Wegerregtes Modell ... 28
3.4 Krafterregtes Modell ... 29
3.5 Krafterregtes gefesseltes Modell ... 31

Kapitel 4 Simulationsergebnisse ... 34
4.1 Numerische Lösung des Anfangswertproblems ... 34
4.2 Analytische Anregungen ... 38
4.2.1 Wegerregtes Modell ... 38
4.2.2 Krafterregtes Modell ... 44
4.2.3 Krafterregtes gefesseltes Modell ... 51
4.3 Komfortstrecke und Schlechtwegstrecke ... 55
4.3.1 Wegerregtes Modell ... 55
4.3.2 Krafterregtes Modell ... 59
4.3.3 Krafterregtes gefesseltes Modell ... 64

Kapitel 5 Optimierung 69
5.1 Optimierungsmethode 69
5.1.1 Optimierungskriterien 69
5.1.2 Optimierungsalgorithmen 72
5.2 Optimierungsergebnisse 74
5.2.1 Anregung Sprung 75
5.2.2 Anregung Schwelle 77
5.2.3 Anregung Komfortstrecke 79
5.2.4 Anregung Schlechtwegstrecke 81
5.2.5 Zusammenfassung 84

Kapitel 6 Conclusio und Ausblick 86
6.1 Conclusio 86
6.2 Ausblick 88

Anhang 90
Anhang A Systemmatrizen 91
Anhang B Parameterwerte 94
Anhang C Auswahl einer geeigneten Integrationsroutine 95
Anhang D Wahl einer geeigneten *virtuellen Samplingfrequenz* 100

Abbildungsverzeichnis 103
Tabellenverzeichnis 105
Literaturverzeichnis 106

Kapitel 1

Einleitung

Im Bereich der Fahrzeugtechnik findet die virtuelle Simulationstechnik immer breitere Anwendung, um Entwicklungen zu testen und voranzutreiben. Neben Faktoren wie Qualität und Innovation entscheidet heute in immer stärker werdendem Maße auch die Zeit von der Idee bis zur Serienreife über den Erfolg eines Produktes. Zusätzlich ist der Automobilmarkt von einer fortschreitenden Kundenorientierung in der Produktentwicklung geprägt, die mit einer zunehmenden Komplexität einhergeht. Somit müssen immer mehr komplexere Fahrzeuge in immer kürzerer Zeit entwickelt werden. Die virtuelle Simulation bietet dabei enorme Zeit- und Kosteneinsparungspotentiale und führt im Allgemeinen zu einer erhöhten Entwicklungsqualität. So können bereits in einem frühen Projektstadium Zielkonflikte entdeckt und gelöst werden und weiters Aussagen über Funktion, Gewicht, Belastungsdaten eines Fahrzeugkonzepts oder eines Bauteils getroffen werden. Durch eine schnelle Änderung am Modell und erneute Simulation kann auch an deren Optimierung gearbeitet werden, teilweise lange bevor die ersten Prototypenfahrzeuge oder Bauteile für Tests zur Verfügung stehen. Für den Begriff der virtuellen Simulation wird im internationalen Sprachgebrauch die Abkürzung CAE (*Computer Aided Engineering*) verwendet.

Die Ergebnisse aus der virtuellen Simulation, wie Informationen über das Fahrverhalten, über den Fahrkomfort oder über eine Bauteildimensionierung stehen unmittelbar der Analyse und Weiterentwicklung eines Fahrzeuges zur Verfügung. Da die Komplexität eines Fahrzeuges ständig wächst, werden auch an die Modellbildung neue Herausforderungen gestellt. Um die Gültigkeit eines Modells und in weiterer Folge der gewonnenen Resultate einer Simulation zu gewährleisten, müssen etwaige Fehler in einem gewissen Rahmen gehalten werden. Diese entstehen unweigerlich bei der Modellbildung, einer anschließenden numerischen Berechnung aufgrund von Diskretisierungs- und Rundungsfehlern oder bei notwendigen Messungen. Ein ganz bestimmter Anteil dieser Fehler steht im Fokus der vorliegenden Arbeit. Nach einer eingehenden Analyse der Ursache werden Möglichkeiten vorgeschlagen und analysiert, um den Fehler zu minimieren [1, 2, 3].

1.1 Motivation und Zielsetzung

In der Entwicklungsphase eines Automobils lassen sich nicht nur einzelne Bauteile und Systeme, sondern auch ein Gesamtfahrzeug virtuell mit einer Mehrkörpersystem-Software simulieren. Mit einer Gesamtfahrzeugsimulation kann man das Fahrzeug über eine virtuelle Fahrbahn fahren lassen und dabei beliebige Fahrmanöver durchführen. Dabei werden nicht nur fahrdynamisches Verhalten und Kennwerte des Fahrzeuges beurteilt, sondern es lassen sich neben einer Analyse des Fahrkomforts die dabei auftretenden Kräfte ermitteln und bis zu den Schnittstellen der einzelnen Bauteile zerlegen. Die genaue Bestimmung von Schnittlasten ist die Voraussetzung sowohl für die Auslegung der Komponenten von Fahrwerken durch Festigkeitsberechnungen, als auch für abschließende Versuche für die Validierung dieser Komponenten und das Gesamtsystem Fahrwerk, respektive Fahrzeug [3].
Bei einer Betrachtung der Vertikaldynamik mit Hilfe einer Vollfahrzeugsimulation wird das Fahrzeugmodell mit einer definierten Erregung angeregt und sein Verhalten studiert, um den Komfort, die Lebensdauer einzelner Bauteile oder die Sicherheit des Fahrzeuges untersuchen zu können. Die Anregung des Fahrzeugmodells kann im Allgemeinen auf zwei unterschiedliche Arten erfolgen [1].

Wegerregte Simulation Zur Simulation des Fahrdynamik- und Eigenlenkverhaltens benötigt man neben einem Vollfahrzeugmodell auch ein geeignetes Fahrbahnmodell und die Definition von standardisierten Fahrmanövern. Die Fahreigenschaften werden in starkem Maße von der Kraftübertragung am Reifen bestimmt. Daher müssen die Fahrbahnoberfläche geeignet beschrieben und die Reifeneigenschaften genau vermessen und modelliert werden.
Um die Berechnungen von Fahrzeugbelastungen durch Abfahren einer bestimmten virtuellen Fahrbahnoberfläche, beispielsweise einer Schlechtweg- oder Komfortstrecke, für die Bauteilauslegung und den Einfluss auf den Fahrkomfort verwenden zu können, erfordert es einen weitaus größeren Modellierungsaufwand. Ausreichend genaue Lasten können nur bei Vorhandensein sehr präziser Modelle von Reifen und Fahrbahnoberfläche erreicht werden. Die komplexe Struktur des Reifens, die mit einer Vielzahl von Eigenformen bei unterschiedlichen Frequenzen schwingt, und die starke Nichtlinearität des Reifenverhaltens erfordern in der Praxis eine sehr präzise Modellierung, aufwendige Parametrierung und Validierung bei der wegerregten Vollfahrzeugsimulation. Für die Berechnung mit einem Gesamtfahrzeugmodell benötigt man für ein geeignetes realistisches Fahrbahnmodell eine zuverlässige Vermessung der Fahrbahnoberfläche und Modellierung der 3D-Straßengeometrie.
Von Magna Steyr Fahrzeugtechnik wurden Messdaten von einer Schlechtweg- und einer Komfortstrecke zur Verfügung gestellt, die eine realistische Form der Anregung

darstellen. Die Schlechtwegstrecke wird überwiegend für die Bauteildimensionierung und Analyse der Betriebsfestigkeit in der Vollfahrzeugsimulation verwendet. Die Fahrbahnunebenheiten stellen im niedrigen Frequenzbereich die intensivste Erregerquelle für das Schwingungssystem Kraftfahrzeug dar. Die Fahrbahn regt durch Unebenheiten Vertikalbewegungen an. Die Komfortstrecke dient zur Beurteilung des Fahrkomforts. Neben dem Antriebsstrang ist nämlich der Kontakt der Reifen zur Fahrbahn die dominante Quelle für Schwingungen und Geräusche, die den Fahrkomfort beeinflussen. Es lassen sich mit einer Vollfahrzeugsimulation und geeignet genauer Fahrbahnmodellierung der Fahrkomfort und die Auslegung der Bauteilfestigkeiten beschreiben. Ein entsprechendes Fahrbahnmodell erfasst zusätzlich Schlaglöcher, scharfkantige Hindernisse oder Vertiefungen wie Stoßfugen, die gerade zu Anregungen der Fahrwerkstruktur und schließlich zu Vibrationen im Innenraum führen [1, 3]. Bei der wegerregten Simulation kommt es also zu einer Erregung des Fahrzeugmodells durch Auslenkungen der Radaufstandspunkte aufgrund der Wegbeschaffenheit, welche wiederum zu Kräften und Momenten führen und Schwingungen des Systems induzieren. Im Folgenden wird eine alternative Methode bei der virtuellen Simulation vorgestellt.

Krafterregte Simulation In der Entwicklungsphase eines Automobils lassen sich durch die Ausstattung eines Prototyps des Fahrzeuges mit Messinstrumenten und Überfahrt einer genau definierten Teststrecke oder öffentlichen Straße Lasten für Prüfstände oder zur Modellvalidierung ermitteln. Teilweise werden 100-200 verschiedene Größen an unterschiedlichen Stellen des Fahrzeuges wie Radnabenkräfte, Federverschiebungen, Verzerrungen oder Beschleunigungen gemessen. Für die Messung der Radnabenkräfte werden an den Radmittelpunkten Radmessnaben angebracht, welche die an der Verbindungsstelle Felge zu Radnabe wirkenden Kräfte und Momente messen und seriell auslesen. Das Ergebnis einer solchen Überfahrt wären beispielsweise die sechs Schnittgrößen pro Rad in Abhängigkeit der Zeit, die als Vektoren von Kraft- und Momentenwerten zur Verfügung stehen. Die Daten können einerseits direkt für einen Komponentenprüfstand oder andererseits als Anregung eines Mehrkörpersystemmodells des Gesamtfahrzeuges bzw. von Komponenten verwendet werden, um in weiterer Folge Schnittgrößen bestimmen zu können. Das Ziel ist eine genaue Bestimmung von Schnittlasten sowohl für eine Auslegung der Komponenten durch Festigkeitsberechnungen, als auch die Validierung dieser Komponenten in abschließenden Versuchen.
Die gemessenen Radnabenkräfte, die bei einer Überfahrt einer geeigneten Teststrecke ermittelt wurden, dienen als Anregung für ein krafterregtes Gesamtfahrzeugmodell. Die gemessenen Schnittkräfte stellen in diesem Falle die einzige Wechselwirkung des Fahrzeugmodells mit der Umgebung dar. Die wesentlich einfacher zu realisierende Messung der Radnabenkräfte, sowie die Einsparung eines aufwendigen Fahrbahn-

und Reifenmodells haben häufig die Anwendung der krafterregten Simulation eines Gesamtfahrzeugmodells bei einer vertikaldynamischen Betrachtung zur Folge [1, 4].

Probleme bei der krafterregten Simulation Wird ein virtuelles Vollfahrzeugmodell in der Simulation mit gemessenen Radnabenkräften angeregt, kommt es zu einigen Problemen, die im Folgenden kurz erläutert werden.
Abgesehen von Gewichts- und Luftwiderstandskräften, wirken als einzige Belastungen die gemessenen Radnabenkräfte auf das System und stellen daher die einzige Wechselwirkung des Systems mit der Umgebung dar. Es entfallen somit die Kräfte und Momente, die bei einer wegerregten Simulation des Fahrzeuges über den Kontakt der Reifen zur Fahrbahn übertragen werden. Wird das krafterregte Gesamtfahrzeugmodell mit den gemessenen Radnabenkräften virtuell angeregt, kommt es allerdings zu einem Abdriften des Fahrzeuges in der Simulation. Das Phänomen des Abdriftens entsteht aufgrund von Fehlern, die sich kumulieren und ungünstig auf das Simulationsergebnis auswirken.
Beispielsweise sind die gemessenen Radnabenkräfte unweigerlich mit Messfehlern behaftet. Im statischen Fall kann bei fehlerbehafteten Messergebnissen der Radnabenkräfte durch einen Nullabgleich zwar korrigierend eingegriffen werden, im dynamischen Fall besteht diese Möglichkeit nicht mehr. Damit sich das Gesamtfahrzeugmodell im statischen Gleichgewicht befindet, werden den gemessenen Kräften der Gleichgewichtslage kleine Korrekturwerte hinzugefügt, sodass sie den berechneten Radnabenkräften gleich sind. Im dynamischen Fall kann nicht mehr korrigierend eingegriffen werden, da die dynamischen Auslenkungen der Radmassen gemessen nicht zur Verfügung stehen. Eine gute Übereinstimmung der Auslenkungen in der Rechnung und der Realität ist aber eine Voraussetzung für aussagekräftige Simulationsergebnisse.
Stehen bei einer krafterregten Simulation ausschließlich die gemessenen Kräfte einer Messfahrt zur Verfügung, kann man a priori gar nicht beurteilen, ob es sich aktuell um ein Abdriften oder um die tatsächliche Fahrzeugbewegung handelt. Man braucht also in jedem Fall gewissermaßen zusätzliche Informationen, um das System richtig abschätzen zu können.
Ein weiterer wichtiger Aspekt liegt in der Modellierung und Parametrierung des Fahrzeugmodells. Da gemessene Daten eines realen Fahrzeuges auf ein mechanisches bzw. in weiterer Folge numerisches Modell übertragen werden, wird es alleine aus dem Grund, dass das mechanische Modell eine Approximation des realen Fahrzeuges ist, zu einem Abdriften kommen. Lässt man Messfehler außer Acht, korrespondieren die Bewegungen des echten Fahrzeuges mit den gemessenen Radnabenkräften. Ist nun aber beispielsweise die Masse des Fahrzeugmodells auch nur ein wenig zu gering, wird sich ein translatorisches Abdriften in vertikaler Richtung einstellen. Die gemes-

senen Kräfte werden im Allgemeinen also nicht mit den Kräften des krafterregten virtuellen Fahrzeugmodells korrelieren.
Bei der numerischen Berechnung des virtuellen krafterregten Systems kommt es zu weiteren Fehlern, die zu einem Abdriften des Fahrzeugmodells führen. Bei der Integration des beschreibenden Differentialgleichungssystems wird das ursprünglich kontinuierliche Lösungsintervall auf diskrete Punkte reduziert, somit liegt die Lösung nur mehr an bestimmten Zeitpunkten vor. Genauso wird das stetige Differentialgleichungssystem durch Differenzengleichungen angenähert. Zu guter Letzt tritt ein Rundungsfehler auf, da ein Computer nur eine endliche Anzahl von Stellen einer Zahl speichern kann.
Von den zahlreichen Fehlerquellen wird in dieser Arbeit anhand eines Halbfahrzeugmodells ausschließlich der numerische Aspekt betrachtet. Der Einfluss von Messfehlern, sowie Modellierungs- und Parametrierungsfehlern wird nicht untersucht.

Das krafterregte Fahrzeugmodell besitzt keine Lagerung gegenüber der Umgebung und kann daher als entartetes System ohne isolierte Gleichgewichtslage bezeichnet werden. Die fehlende Bindung des Modells an die Umgebung ermöglicht eine rückstellkraftfreie Bewegung, die zu fehlerbehafteten Ergebnissen bei einer numerischen Berechnung in der Simulation führt. In mathematischer Hinsicht kennzeichnen verschwindende *Eigenwerte* des beschreibenden linearen Differentialgleichungssystems das ungefesselte Fahrzeugmodell.
Die Vielzahl von möglichen Fehlerquellen und die Besonderheit des krafterregten Systems einer möglichen rückstellkraftfreien Bewegung führen zu einem translatorischen und rotatorischen Abdriften des Systems. Die ungefesselte Bewegung führt zu einer Abweichung zwischen numerisch ermittelten und wahren Auslenkungen. In Anbetracht einer anschließenden Schnittkraftbestimmung ist ein Anwachsen der rotatorischen Auslenkung besonders ungünstig. Unter Berücksichtigung der Gewichtskraft führt eine unerwünschte Rotation aufgrund einer Änderung der Wirkungslinien der Kräfte zu völlig falschen Ergebnissen und sollte tunlichst vermieden werden. Einige Möglichkeiten ein Abdriften zu vermeiden oder zumindest zu verringern, werden im Folgenden vorgestellt [1, 4].

Lösungsmöglichkeiten Die Vielzahl von möglichen Fehlern führt in der Praxis zu einem Abdriften der krafterregten virtuellen Vollfahrzeugsimulation und erfordert Maßnahmen den Abdrifteffekt zu vermeiden. In der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich der Einfluss numerischer Fehler auf ein Abdriften untersucht. Auch bei der Wahl von entsprechenden Fehlertoleranzen wird sich ein Fehler kumulieren. Dies lässt sich mit dem bekannten Drift vergleichen, der bei einer Integration eines beschreibenden differentialalgebraischen Gleichungssystems eines Mehrkörpersystems mit Zwangsbedingungen auf Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene auftritt.

Übliche Stabilisierungsverfahren um diesen Fehler zu verringern oder zu eliminieren, wie beispielsweise eine *Baumgarte* Stabilisierung, können im vorliegenden Fall nicht angewendet werden, da keine Information über Zwangsbedingungen auf Lageebene vorliegt. Da die tatsächliche Trajektorie des realen Fahrzeuges nicht bekannt ist, wird man auf andere Maßnahmen ausweichen müssen.
In [4] wird eine zusätzliche Messung von Beschleunigungen an verschiedenen Stellen des Fahrzeuges vorgeschlagen. Ein Algorithmus lässt eine vollständige Beschreibung der Starrkörperbewegung des Fahrzeuges mit den gemessenen Beschleunigungen zu, ist allerdings nicht im Stande den Abdrifteffekt vollständig zu vermeiden.
Als Alternative wird eine zusätzliche Messung auf Geschwindigkeits- oder Lageebene vorgeschlagen. Erfasst man beispielsweise die Winkelgeschwindigkeit des Aufbaus mit einer entsprechenden Messausrüstung, ist nur mehr eine einmalige Integration der gemessenen Daten nötig. Abhängig von der Qualität der verwendeten Messausrüstung wird man den Abdrifteffekt auf ein akzeptables Maß reduzieren können.
In der vorliegenden Arbeit wird anhand eines Halbfahrzeugmodells eine Fesselung als artifizielle Bindung des Systems an die Umgebung untersucht. Fährt ein Fahrzeug über eine horizontale Strecke, werden sich unabhängig von der Anregung durch die Fahrbahn im Allgemeinen kleine Nickwinkel und Hubbewegungen einstellen. Wählt man eine geeignete Fesselung, wie auch in [5] und [6] erläutert, wird eine rückstellkraftfreie Bewegung des Fahrzeuges unterbunden und die Lagekoordinaten auf sinnvolle Werte begrenzt. Durch die künstliche Bindung entstehen rücktreibende Kräfte und Momente, die ein Abdriften verhindern. Mathematisch werden dem System durch eine Fesselung mit geeigneten Parametern seine verschwindenden *Eigenwerte* genommen. Durch den künstlichen Eingriff mit einer Fesselung wird das Systemverhalten verändert und a priori nachteilig beeinflusst. Aus diesem Grund gilt es, die tatsächliche Ausführung einer Fesselung und die entsprechenden Fesselungsparameter klug zu wählen und deren Wirkung eingehend zu studieren. Die Güte der Fesselung wird analysiert, um ein möglichst realitätsgetreues und sinnvolles Schwingungsverhalten und in weiterer Folge richtige Simulationsergebnisse zu erhalten [1, 4].

Untersuchung an einem Halbfahrzeugmodell In der vorliegenden Arbeit wird in einem ersten Schritt die Überfahrt eines realen Testfahrzeuges über eine Strecke und in einem weiteren Schritt die radnabenkrafterregte Simulation eines Vollfahrzeuges modelliert, um so Erkenntnisse sowohl über das Phänomen des Abdriftens als auch eine geeignete Fesselung zu erhalten. Zu diesem Zweck wird ein Halbfahrzeugmodell eingeführt. Es stellt ein ebenes Schwingungsersatzsystem mit Einspuranregung dar und besteht aus zwei Radmassen, einer Aufbaumasse und einer Motormasse. Für die grundsätzliche Untersuchung des Abdriftens wird ein lineares Modell angenommen. Von dem Modell werden ausschließlich dynamische Anteile betrachtet, es wird also ein „liegendes“ Fahrzeugmodell betrachtet. Im Gegensatz zu einem Voll-

fahrzeugmodell wird die Gewichtskraft nicht explizit berücksichtigt. Von dem Halbfahrzeugmodell wird in dieser Arbeit ausschließlich die Vertikaldynamik betrachtet.
Für eine Untersuchung der Abdrifteffekte und einer optimalen Modell-Fesselung wird die folgende Vorgangsweise gewählt. Um die Überfahrt eines realen Testfahrzeuges simulieren zu können, wird ein wegerregtes Halbfahrzeugmodell implementiert. Neben einer Auswahl von repräsentativen Strecken wie der vermessenen Schlechtwegstrecke und der Komfortstrecke werden auch analytisch definierte Teststrecken wie Sprung und Schwelle von dem Halbfahrzeugmodell überfahren. Dabei kann ähnlich wie bei einer realen Messfahrt mit einem geeigneten Fahrzeug eine virtuelle Messung durchgeführt werden und äquivalente Radnabenkräfte ermittelt werden.
In weiterer Folge wird ein krafterregtes Halbfahrzeugmodell implementiert, welches das Vollfahrzeugmodell in einer Mehrkörpersystem-Simulationsumgebung repräsentiert. Die ermittelten äquivalenten Kräfte werden als Anregung für das krafterregte Halbfahrzeugmodell verwendet, so wie auch die gemessenen Radnabenkräfte als Anregung für ein Gesamtfahrzeugmodell dienen. Bei der Simulation kann auch beim Halbfahrzeugmodell das Phänomen des Abdriftens beobachtet werden.
Um das Abdriften minimieren zu können, wird eine künstliche Fesselung beim Halbfahrzeugmodell eingeführt. Da die tatsächliche Trajektorie des ursprünglichen Fahrzeugmodells bei einer Überfahrt einer Strecke bekannt ist, also die Lösung des wegerregten Systems, kann der Einfluss der verschiedenen Fesselungsparameter auf die Abweichung elegant studiert werden. Man kann mit diesem Vorgehen unmittelbar den Einfluss der Fesselungsparameter und der Fesselungsart überprüfen. Anhand einer Optimierung wird versucht optimale Fesselungsparameter zu finden.

1.2 Aufbau der Arbeit

Im Folgenden soll der Aufbau der Arbeit kurz erläutert und ein rascher Überblick dargestellt werden.

Kapitel 2 Modellbildung Im zweiten Kapitel wird die Aufgabe der Modellbildung ausführlich beschrieben. Ein wichtiger Aspekt der Modellierung eines realen Systems ist die Entscheidung, welche Eigenschaften und Effekte relevant sind und geeignet modelliert werden müssen oder vernachlässigt werden können. In weiterer Folge muss damit einhergehend die Gültigkeit des mechanischen Modells und dessen Grenzen klar definiert und berücksichtigt werden. Nach einer detaillierten Beschreibung des Modellaufbaus, der eingeführten verallgemeinerten Lagekoordinaten, der Parameter des Modells und wichtiger geometrischer Größen, wird auf den Unterschied der verwendeten Modelle eingegangen. Es erfolgt eine Beschreibung der verschiedenen Fesselungsmethoden mit Hauptaugenmerk auf einer Aufbaumassenfesselung. Ein Ab-

schnitt befasst sich mit der geeigneten Wahl und Ermittlung von Parameterwerten und den dabei getroffenen Annahmen. Nach der Definition der Modelle werden unter Anwendung bekannter Prinzipien der Mechanik die Bewegungsgleichungen aufgestellt. Die Newton-Euler-Gleichungen liefern eine mathematische Beschreibung des Systems, welche im Folgenden in Zustandsraumdarstellung numerisch gelöst werden.

Kapitel 3 Stabilitätsuntersuchung Im dritten Kapitel werden anfangs allgemeine Aussagen über das Stabilitätsverhalten eines schwingungsfähigen mechanischen Systems zusammengefasst und eine angemessene Stabilitätsdefinition vorgestellt. Nach Einführen von wichtigen Begriffen wird die Stabilitätsanalyse auf die verwendeten Modelle angewendet und das Stabilitätsverhalten betrachtet. Von besonderem Interesse ist die Veränderung des Stabilitätsverhaltens bei den verschiedenen Modellen. Insbesondere der Einfluss einer Fesselung und der entsprechenden Fesselungsparameter wird untersucht und erlaubt einen ersten Anhaltspunkt, wie Fesselungsparameter zu wählen sind. Beinhaltet sind ebenfalls eine anschauliche Interpretation der Eigenfrequenzen und der zugehörigen Eigenschwingungsformen.

Kapitel 4 Simulationsergebnisse Das ausführliche vierte Kapitel umfasst im Wesentlichen die numerische Lösung und eine Interpretation der Ergebnisse. Nach einem kurzen einführenden Exkurs in die mathematische Theorie zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen werden die ausgewählten Integrationsverfahren aus der großen Familie der Runge-Kutta-Verfahren vorgestellt. Die expliziten Lösungsverfahren werden im Detail beleuchtet und die Diskretisierungsmethoden erklärt. Weiters wird der Einfluss einer gewählten Schrittweite erläutert. Die Berechnungsergebnisse aus der Simulation sind in zwei Abschnitte gegliedert. Im ersten Teil werden die analytischen Anregungen Sprung und Schwelle, im zweiten Teil die Anregungen Schlechtweg- und Komfortstrecke beschrieben. Es wird jeweils der Simulationsaufbau im Detail aufgezeigt und auf Besonderheiten bei der numerischen Berechnung hingewiesen. Anhand der analytischen Anregungen erfolgt eine Plausibilitätsprüfung der Simulationsergebnisse. Nach einer Berechnung des wegerregten Systems wird auf das krafterregte System und die Ermittlung der äquivalenten Kräfte eingegangen. Des Weiteren wird ein Maß für die Abweichung des krafterregten Systems eingeführt. Dies ermöglicht im Folgenden eine detaillierte Analyse der Zeitverläufe wichtiger Lagekoordinaten und einen Vergleich von verschiedenen Systemen wie dem wegerregten und dem krafterregten Modell. Durch die Berechnung des krafterregten gefesselten Modells mit optimal gewählter Fesselungsart und Parametern kann die Verbesserung dargestellt und analysiert werden. Neben einer einfachen Interpretation der Ergebnisse ermöglicht dies ein tiefer gehendes Verständnis einer Fesselung des krafterregten Modells.

Kapitel 5 Optimierung Nach kurzen einführenden Worten wird auf die Definition der *Optimierungsaufgabe* mit einer entsprechenden *Zielfunktion* und möglichen *Restriktionen* näher eingegangen. Im Folgenden werden die verschiedenen Optimierungsalgorithmen vorgestellt, die zur Lösung der *Optimierungsaufgabe* in dieser Arbeit Verwendung finden. Es wird jeweils ein kurzer Exkurs in die zugehörige Theorie unternommen. Um optimale Ergebnisse zu erhalten, wird eine Variation bei der Fesselungsart, den *Restriktionen* und der Anregung durchgeführt. Die Optimierungsergebnisse werden in einem folgenden Abschnitt zusammengefasst und grafisch aufbereitet, wobei die Aufbaumassenfesselung im Fokus der Betrachtungen steht. Durch eine grafische Darstellung der Ergebnisse und entsprechende Beschreibung in Worten lassen sich einfach Verbesserungen durch eine optimal gewählte Fesselung erkennen. Nicht nur das Verbesserungspotential, sondern auch ein Vergleich bei den verschiedenen Anregungen und der Einfluss der Fesselungsparameter auf die Abweichung bzw. Qualität der Fesselung werden sichtbar. Dies erleichtert das Finden einer optimalen Fesselung.

Kapitel 6 Conclusio und Ausblick Nach einer kurzen Zusammenfassung runden abschließende Worte die Arbeit ab. Es werden wichtige Ergebnisse und das Potential einer Fesselung noch einmal beleuchtet. Zu guter Letzt werden einige Ideen und Denkanstöße für weitere Untersuchungen angesprochen.

Anhang Im ersten Teil des Anhangs finden sich für die Stabilitätsuntersuchung und numerische Berechnung wichtige Systemmatrizen der verschiedenen Modelle. Anschließend findet sich eine Zusammenfassung aller verwendeten Parameterwerte. Nach einer eingehenden Studie zur Auswahl einer geeigneten Integrationsroutine für die numerische Berechnung wird abschließend die Wahl einer geeigneten Samplingfrequenz für eine virtuelle Messung der Radaufstandskräfte beschrieben.

Kapitel 2

Modellbildung

Die Aufgabe der Modellbildung ist es, eine Abbildung der Realität zu schaffen, die mit analytischen oder numerischen Ingenieurmethoden behandelt werden kann. Dabei ist das Ziel jedoch nicht, die Realität so genau wie möglich abzubilden, sondern die maßgebenden Effekte für das mechanische Problem zu identifizieren und zu beschreiben. Das Modell sollte also so einfach wie möglich gestaltet werden, um einerseits den Modellierungsaufwand in Grenzen zu halten, und andererseits Modelluntersuchungen mit technisch und wirtschaftlich vertretbarem Aufwand zu ermöglichen. Dabei dürfen jedoch keine das Systemverhalten zu stark verfälschenden Annahmen getroffen werden. Albert Einstein formulierte diese Maxime einmal folgendermaßen:

„Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden, aber nicht einfacher!“

Für die Überführung der komplexen Realität in ein mathematisch beschreibbares mechanisches Ersatzmodell finden häufig grundlegende Vereinfachungen und Idealisierungen Anwendung:

- starre anstatt elastische Körper,
- Punktmassen statt verteilter Massen,
- masselose Feder- und Dämpferelemente,
- reibungsfreie Gelenke,
- Angriff von äquivalenten Einzelkräften statt verteilter Krafteinleitung,
- etc.

Der Informationsverlust bei der Überführung der Realität zu einem mathematischen Modell führt dazu, dass Modelle immer ziel- und funktionsorientiert sind. Folglich ergeben sich je nach Anwendungsgebiet Grenzen, in denen das Modell die Realität ausreichend genau beschreibt. Außerhalb dieser Grenzen können sich starke Abweichungen vom realen Verhalten einstellen, durch welche das Modell seine Gültigkeit für die vorgesehene Untersuchung verliert.
Um die Bewegung und die dabei auftretenden Kräfte eines Systems mit mehreren Körpern beschreiben zu können, bedient man sich sogenannter Mehrkörpersystem-Modelle (MKS-Modelle). Ein MKS-Modell bezeichnet ein System aus mehreren Körpern, die im Allgemeinen starr oder elastisch deformierbar sein können, welche durch

diskrete kinematische oder dynamische Bindungen miteinander verbunden sind [7]. Kinematische Bindungen entsprechen einfach ausgedrückt Gelenken zwischen den Körpern, welche die Bewegungsfreiheit und somit den Freiheitsgrad des Systems reduzieren. Dynamische Bindungen hingegen entsprechen Kraftgesetzen zwischen den einzelnen Körpern (beispielsweise Federn, Dämpfer,…) und beeinflussen den Freiheitsgrad des Systems nicht. Zur mathematischen Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines MKS-Modells werden unter Anwendung bekannter Prinzipien der Mechanik Bewegungsgleichungen erstellt. Die Bestimmung dieser Gleichungen wird mit zunehmender Modellkomplexität immer schwieriger und fehleranfälliger. Deshalb wurden Programmsysteme entwickelt, die den Benutzer weitgehend bei der Erstellung und Auswertung der Bewegungsgleichungen unterstützen. Bei der vorliegenden Arbeit wurde aufgrund der geringen Modellkomplexität eine Erstellung der Bewegungsgleichungen per Hand und deren Auswertung mit Hilfe des numerischen Berechnungsprogramms Matlab (Academic License R2011b) bevorzugt und lediglich eine Kontrollrechnung im MKS-Programm Simpack gemacht. Einer aufwendigeren Implementierung steht der Vorteil der einfachen Variation verschiedener Berechnungsparameter gegenüber.

Mit den heutigen Simulationsprogrammen und Rechenleistungen ist es also möglich, auch sehr komplizierte Schwingungsgebilde, d.h. Schwingungssysteme mit vielen Freiheitsgraden, zu berechnen. Sehr schwierig ist es hingegen, die Rechenergebnisse zu verstehen. Um ein Verständnis für das Schwingungsverhalten von Kraftfahrzeugen zu erhalten bzw. das betrachtete Phänomen des Abdriftens besser verstehen zu können, muss mit möglichst einfachen Systemen, also mit möglichst wenig Freiheitsgraden begonnen werden, die dann Schritt für Schritt zahlreicher werden [8]. So wurden das Viertelfahrzeugmodell und das Halbfahrzeugmodell schon eingehend studiert [1]. Um die Modellierungstiefe zu erhöhen, wird nun zusätzlich die Motormasse berücksichtigt.

Die Grundannahme für das betrachtete Halbfahrzeug soll lauten: Das Fahrzeug ist um seine Längsachse symmetrisch aufgebaut [8]. Daraus ergeben sich bei reiner Hubanregung, also bei gleicher Anregung am linken und rechten Rad einer Achse, keine Wankschwingungen (Winkelbewegung um die Längsachse), Seitenbewegungen (Bewegungen in Querrichtung) und Gierschwingungen (Winkelbewegungen um die Hochachse) des Aufbaus, sondern nur Hubbewegungen (Bewegungen in vertikaler Richtung) und Nickschwingungen (Winkelbewegungen um die Querachse). Es werden vom komplizierten Fahrzeugsystem lediglich Hub- und Nickschwingungen betrachtet. Der Einfluss der Radaufhängungen wird nicht berücksichtigt und die Hinterräder fahren in der Spur der Vorderräder (die Anregungen der Räder sind bis auf eine Phasenverschiebung gleich). Mit den getroffenen Annahmen ergeben sich für die vorliegenden Problemstellungen die folgenden Schwingungsersatzschemata.

2.1 Wegerregtes Modell

2.1.1 Modellbeschreibung

Grundlage für die weiteren Untersuchungen ist das folgende Modell in Abbildung 2.1. Das schwingungsfähige System besteht aus vier starren Körpern, der Aufbaumasse m_A, der Motormasse m_M und den beiden Radmassen m_{R1} und m_{R2}.

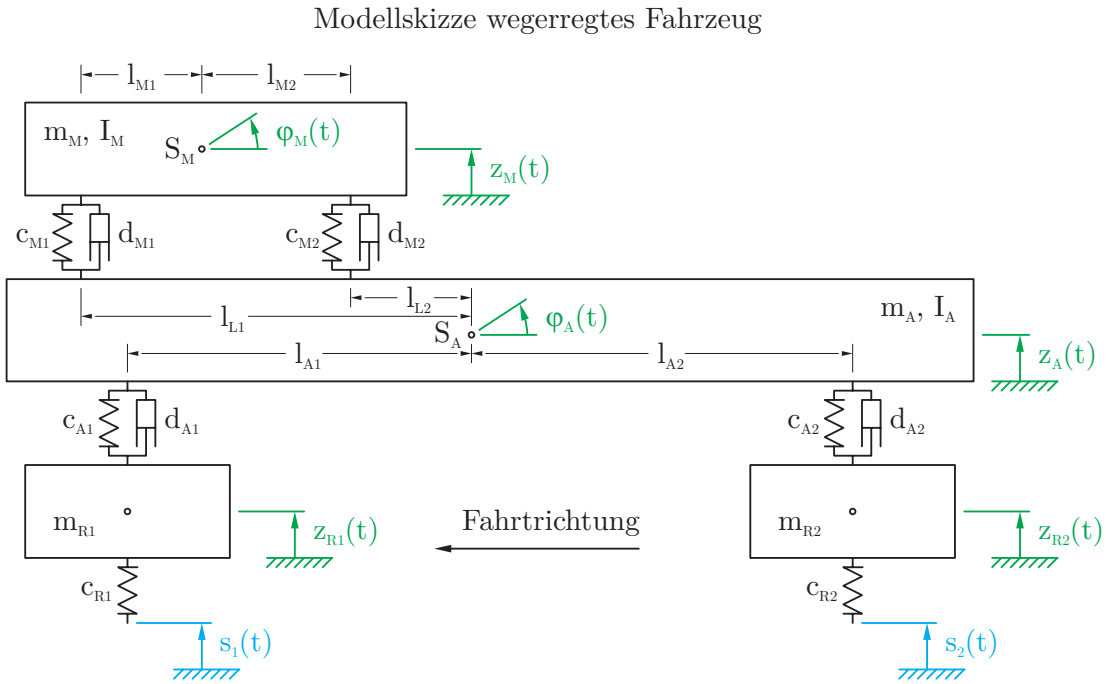


Abbildung 2.1: Modellskizze des wegerregten Fahrzeuges

Alle gegenüber der Fahrbahn ungedämpften Massen seien in der Radmasse m_{Ri} zusammengefasst. Der Index i bezeichne den vorderen $(i = 1)$ bzw. den hinteren Teil $(i = 2)$ des Fahrzeuges. Beide Radmassen seien über eine lineare Feder mit der Federsteifigkeit c_{Ri}, welche die Steifigkeit des Reifens modellieren soll, mit der Fahrbahn verbunden. Die Radmassen sind weiters mit einer Feder-Dämpfer-Kombination mit der Aufbaumasse m_A verbunden. Die Kelvin-Voigt-Elemente haben die linearen Federsteifigkeiten c_{Ai} und geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungsraten d_{Ai}. Sie befinden sich im Abstand l_{Ai} vom Schwerpunkt S_A der Aufbaumasse. Für den Radstand gilt also $L = l_{A1} + l_{A2}$. Die Aufbaumasse m_A habe das Massenträgheitsmoment I_A bezogen auf die Drehachse durch den Schwerpunkt S_A. Weiters ist die Motormasse m_M mit zwei Kelvin-Voigt-Elementen mit der Aufbaumasse gekoppelt. Die Motorlager haben die linearen Federsteifigkeiten c_{Mi} und geschwindigkeitspro-

portionalen Dämpfungsraten d_{Mi} und befinden sich im Abstand l_{Mi} vom Motorschwerpunkt S_M. Das Massenträgheitsmoment des Motors sei I_M und ist wiederum auf die Drehachse durch den Schwerpunkt S_M bezogen.

Das betrachtete System ist vom Freiheitsgrad 6. Als verallgemeinerte Lagekoordinaten werden die Hubbewegung $z_A(t)$ und die Nickbewegung $\varphi_A(t)$ der Aufbaumasse, die translatorischen Bewegungen $z_{R1}(t)$ und $z_{R2}(t)$ der vorderen Radmasse m_{R1} und der hinteren Radmasse m_{R2}, sowie die Hubbewegung $z_M(t)$ und die Nickbewegung $\varphi_M(t)$ der Motormasse eingeführt. Die verallgemeinerten Lagekoordinaten werden von der statischen Gleichgewichtslage gezählt. Ferner werden die Weganregungen mit $s_1(t)$ und $s_2(t)$ bezeichnet.
Für das vorliegende Modell seien kleine Verschiebungen und Neigungen vorausgesetzt, sodass eine lineare Betrachtung des Modells ausreicht [8]. Des Weiteren werden nur dynamische Anteile erfasst und die statischen Anteile zufolge der Gewichtskraft vernachlässigt, es wird also ein „liegendes“ Modell betrachtet. Werden für die Berechnung lineare Federkennlinien vorausgesetzt, entsprechen die Ergebnisse den dynamischen Anteilen bzw. Auslenkungen um die Gleichgewichtslage. Werden jedoch nichtlineare Federkennlinien angenommen, wäre bei Berücksichtigung der Gewichtskraft Vorsicht geboten. Der statische Anteil bestimmt nämlich den Arbeitspunkt der nichtlinearen Feder und ist auch für das dynamische Verhalten der Feder von großer Bedeutung. Da jedoch nur lineare Federsteifigkeiten vorausgesetzt werden, muss dieser Einfluss nicht zusätzlich berücksichtigt werden.

2.1.2 Bewegungsgleichungen des wegerregten Modells

Nach dem Freischneiden und Einzeichnen aller eingeprägten Kräfte lassen sich für das System die Bewegungsgleichungen anschreiben.

Die Schwerpunktsätze der beiden Radmassen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} m_{R1}\ddot{z}_{R1} &= F_{cR1} - F_{cA1} - F_{dA1} \\ m_{R2}\ddot{z}_{R2} &= F_{cR2} - F_{cA2} - F_{dA2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die auftretenden Feder- und Dämpferkräfte ergeben sich unter Verwendung einer linearen Kennlinie und bei den vorausgesetzten kleinen Verschiebungen und Neigungen zu

$$\begin{aligned} F_{cRi} &= -c_{Ri}(z_{Ri} - s_i) \\ F_{cAi} &= -c_{Ai}(z_A + (-1)^i l_{Ai}\varphi_A - z_{Ri}) \\ F_{dAi} &= -d_{Ai}(\dot{z}_A + (-1)^i l_{Ai}\dot{\varphi}_A - \dot{z}_{Ri}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

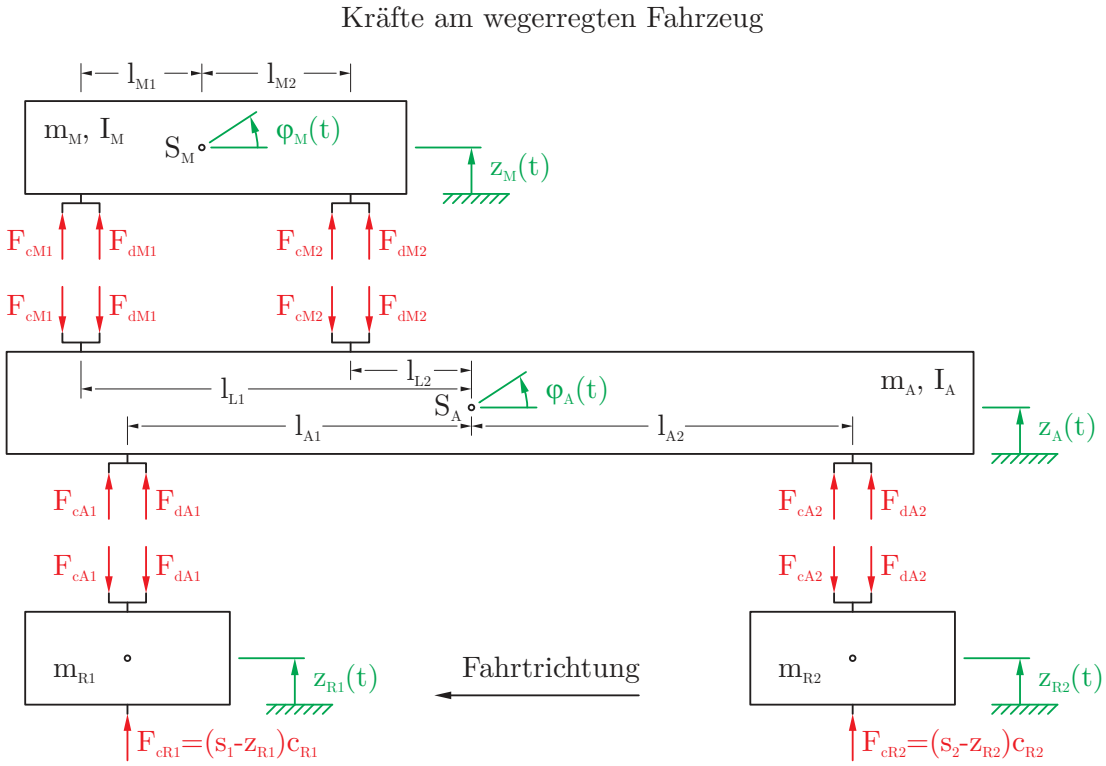


Abbildung 2.2: Schnittbild des wegerregten Fahrzeugmodells

Setzt man nun die Kräfte in die Gleichungen (2.1) ein und formt geeignet um, so erhält man

$$\begin{aligned} m_{R1}\ddot{z}_{R1} - d_{A1}\dot{z}_A + d_{A1}\dot{z}_{R1} + d_{A1}l_{A1}\dot{\varphi}_A - c_{A1}z_A + (c_{R1}+c_{A1})z_{R1} + c_{A1}l_{A1}\varphi_A &= c_{R1}s_1 \\ m_{R2}\ddot{z}_{R2} - d_{A2}\dot{z}_A + d_{A2}\dot{z}_{R2} - d_{A2}l_{A2}\dot{\varphi}_A - c_{A2}z_A + (c_{R2}+c_{A2})z_{R2} - c_{A2}l_{A2}\varphi_A &= c_{R2}s_2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Der Schwerpunktsatz für die Aufbaumasse ergibt sich zu

$$m_A\ddot{z}_A = F_{cA1} + F_{dA1} + F_{cA2} + F_{dA2} - F_{cM1} - F_{dM1} - F_{cM2} - F_{dM2} \tag{2.4}$$

Für die Motorlagerkräfte gelten wieder obige Voraussetzungen und man erhält

$$\begin{aligned} F_{cMi} &= -c_{Mi}(z_M + (-1)^i l_{Mi}\varphi_M - z_A + l_{Li}\varphi_A) \\ F_{dMi} &= -d_{Mi}\dot{z}_M - (-1)^i d_{Mi}l_{Mi}\dot{\varphi}_M + d_{Mi}\dot{z}_A - d_{Mi}l_{Li}\dot{\varphi}_A \end{aligned} \tag{2.5}$$

Eingesetzt von (2.2) und (2.5) in (2.4) und geeignet umgeformt, ergibt sich

$$\begin{gathered} m_A\ddot{z}_A + (d_{A1} + d_{A2} + d_{M1} + d_{M2})\dot{z}_A - d_{A1}\dot{z}_{R1} - d_{A2}\dot{z}_{R2} + \\ +(-d_{A1}l_{A1} + d_{A2}l_{A2} - d_{M1}l_{L1} - d_{M2}l_{L2})\dot{\varphi}_A + (-d_{M1} - d_{M2})\dot{z}_M + \\ +(d_{M1}l_{M1} - d_{M2}l_{M2})\dot{\varphi}_M + (c_{A1} + c_{A2} + c_{M1} + c_{M2})z_A - \\ -c_{A1}z_{R1} - c_{A2}z_{R2} + (-c_{A1}l_{A1} + c_{A2}l_{A2} - c_{M1}l_{L1} - c_{M2}l_{L2})\varphi_A + \\ +(-c_{M1} - c_{M2})z_M + (c_{M1}l_{M1} - c_{M2}l_{M2})\varphi_M = 0 \end{gathered} \tag{2.6}$$

Der Schwerpunktsatz für die Motormasse ergibt sich zu

$$m_M\ddot{z}_M = F_{cM1} + F_{dM1} + F_{cM2} + F_{dM2} \tag{2.7}$$

Setzt man wiederum die Kräfte (2.5) in (2.7) ein und formt um, ergibt sich

$$\begin{gathered} m_M\ddot{z}_M + (-d_{M1} - d_{M2})\dot{z}_A + (d_{M1}l_{L1} + d_{M2}l_{L2})\dot{\varphi}_A + (d_{M1} + d_{M2})\dot{z}_M + \\ +(-d_{M1}l_{M1} + d_{M2}l_{M2})\dot{\varphi}_M + (-c_{M1} - c_{M2})z_A + (c_{M1}l_{L1} + c_{M2}l_{L2})\varphi_A + \\ +(c_{M1} + c_{M2})z_M + (-c_{M1}l_{M1} + c_{M2}l_{M2})\varphi_M = 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Der Drallsatz für die Aufbaumasse lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} I_A\ddot{\varphi}_A = &- l_{A1}(F_{cA1} + F_{dA1}) + l_{A2}(F_{cA2} + F_{dA2}) + \\ &+ l_{L1}(F_{cM1} + F_{dM1}) + l_{L2}(F_{cM2} + F_{dM2}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Wiederum eingesetzt, (2.2) und (2.5) in (2.9), und passend umgeformt, ergibt sich

$$\begin{gathered} I_A\ddot{\varphi}_A + (-d_{A1}l_{A1} + d_{A2}l_{A2} - d_{M1}l_{L1} - d_{M2}l_{L2})\dot{z}_A + d_{A1}l_{A1}\dot{z}_{R1} - \\ -d_{A2}l_{A2}\dot{z}_{R2} + (d_{A1}l_{A1}^2 + d_{A2}l_{A2}^2 + d_{M1}l_{L1}^2 + d_{M2}l_{L2}^2)\dot{\varphi}_A + \\ +(d_{M1}l_{L1} + d_{M2}l_{L2})\dot{z}_M + (-l_{L1}d_{M1}l_{M1} + l_{L2}d_{M2}l_{M2})\dot{\varphi}_M + \\ +(-c_{A1}l_{A1} + c_{A2}l_{A2} - c_{M1}l_{L1} - c_{M2}l_{L2})z_A + c_{A1}l_{A1}z_{R1} - \\ -c_{A2}l_{A2}z_{R2} + (c_{A1}l_{A1}^2 + c_{A2}l_{A2}^2 + c_{M1}l_{L1}^2 + c_{M2}l_{L2}^2)\varphi_A + \\ +(c_{M1}l_{L1} + c_{M2}l_{L2})z_M + (-l_{L1}c_{M1}l_{M1} + l_{L2}c_{M2}l_{M2})\varphi_M = 0 \end{gathered} \tag{2.10}$$

Der Drallsatz für die Motormasse ergibt

$$I_M\ddot{\varphi}_M = -l_{M1}(F_{cM1} + F_{dM1}) + l_{M2}(F_{cM2} + F_{dM2}) \tag{2.11}$$

Erneut eingesetzt, (2.5) in (2.11), und umgeformt gibt die Gleichung

$$\begin{aligned} I_M\ddot{\varphi}_M + (d_{M1}l_{M1} - d_{M2}l_{M2})\dot{z}_A + (-l_{M1}d_{M1}l_{L1} + l_{M2}d_{M2}l_{L2})\dot{\varphi}_A + \\ +(-d_{M1}l_{M1} + d_{M2}l_{M2})\dot{z}_M + (d_{M1}l_{M1}^2 + d_{M2}l_{M2}^2)\dot{\varphi}_M + \\ +(c_{M1}l_{M1} - c_{M2}l_{M2})z_A + (-l_{M1}c_{M1}l_{L1} + l_{M2}c_{M2}l_{L2})\varphi_A + \\ +(-c_{M1}l_{M1} + c_{M2}l_{M2})z_M + (c_{M1}l_{M1}^2 + c_{M2}l_{M2}^2)\varphi_M = 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Die Newton-Euler-Gleichungen ergeben sechs gekoppelte lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die so hergeleiteten Bewegungsgleichungen (2.3), (2.6), (2.8), (2.10) und (2.12) lassen sich zusammenfassen und in Matrixform darstellen

$$\underline{M}_G\ddot{\vec{z}}(t) + \underline{D}_G\dot{\vec{z}}(t) + \underline{C}_G\vec{z}(t) = \vec{f}_G(t) \tag{2.13}$$

wobei die auftretenden Matrizen und Vektoren geeignet definiert seien (Anhang A Systemmatrizen). Für die Implementierung in MATLAB lässt sich das System mit der Übereinkunft

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \vec{z}(t) \\ \dot{\vec{z}}(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_G(t) = \begin{bmatrix} \vec{0}_6 \\ \underline{M}_G^{-1}\vec{f}_G(t) \end{bmatrix} \tag{2.14, 2.15}$$

in Zustandsform anschreiben

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0}_{6,6} & \underline{E}_6 \\ -\underline{M}_G^{-1}\underline{C}_G & -\underline{M}_G^{-1}\underline{D}_G \end{bmatrix}}_{\underline{A}_{GW}} \vec{x}(t) + \vec{b}_G(t) \tag{2.16}$$

wobei $\underline{A}_{GW}$ einer 12x12-Matrix entspricht, die das Systemverhalten charakterisiert.

2.2 Krafterregtes Modell

Das krafterregte Modell unterscheidet sich auf den ersten Blick nur sehr wenig vom wegerregten Modell, jedoch haben die Unterschiede sehr große Auswirkungen auf die Simulationsergebnisse. Im Folgenden wird der Aufbau des krafterregten Modells in Abbildung 2.3 kurz beschrieben und es werden die Bewegungsgleichungen hergeleitet.

2.2.1 Modellbeschreibung

Wie bereits erwähnt, wird in der Praxis häufig ein krafterregtes Modell gegenüber einem wegerregten Modell bevorzugt, da sich eine Messung der Radnabenkräfte und -momente als Eingangsgröße wesentlich einfacher realisieren lässt, als eine Vermes-

sung der Fahrbahn. Als Eingangsgröße des vorliegenden Halbfahrzeugmodells dient nun nicht mehr eine Weganregung $s_i(t)$, welche über die Steifigkeit c_{Ri} des Reifens mit der Radmasse m_{Ri} gekoppelt ist, sondern eine dieser Kombination äquivalente Kraft $F_i(t)$. Aus der Ersatzsteifigkeit des Reifens, der Verschiebung der Radmasse des wegerregten Modells und der Weganregung lassen sich die äquivalenten Kräfte bestimmen. Es erfolgt eine Anregung des krafterregten Modells mit den äquivalenten Radaufstandskräften, eine eingehende Diskussion der Berechnung findet in Kapitel 4.2.2 und 4.3.2 statt. Eine Anregung mit einer Kraft $F_i(t)$ statt einem Weg $s_i(t)$ verändert die Struktur des schwingungsfähigen Systems in grundlegender Weise und verursacht erst das betrachtete Phänomen des Abdriftens. Bei einer numerischen Betrachtung des krafterregten Modells wird nun die Nickbewegung ebenso anwachsen wie die translatorische Verschiebung des Systems. In Anbetracht einer folgenden Bauteildimensionierung wirkt sich das Anwachsen der Nickbewegung vor allem auf die Berechnung der notwendigen Schnittkräfte negativ aus. Ein rein translatorisches Abdriften des Systems erscheint nicht so problematisch wie eine fehlerhafte Nickbewegung, die zu völlig falschen Schnittkräften führt.

Modellskizze krafterregtes Fahrzeug

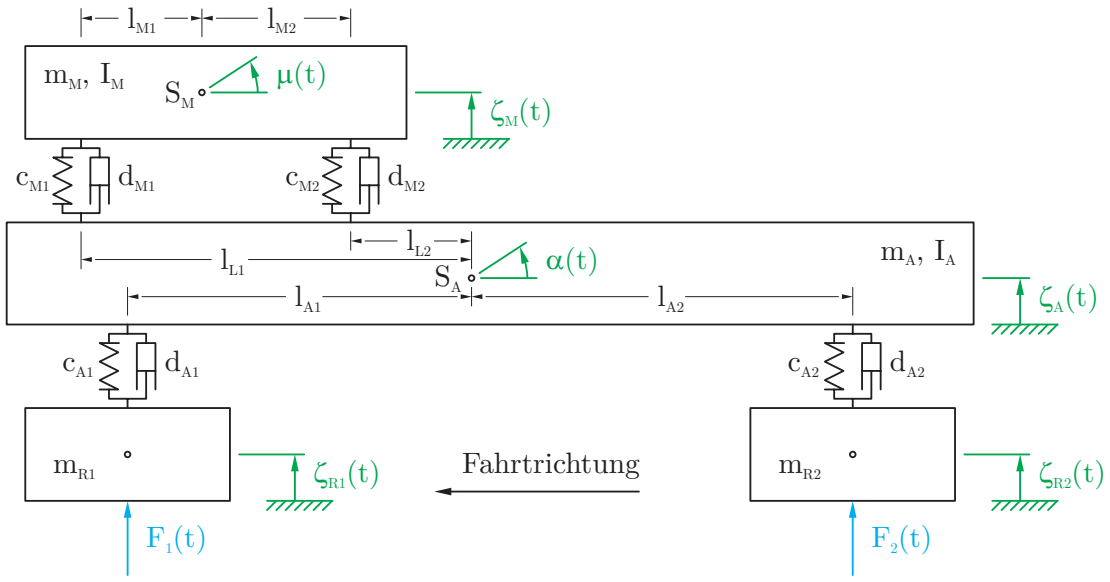


Abbildung 2.3: Modellskizze des krafterregten Fahrzeuges

Für das krafterregte Modell sollen dieselben Voraussetzungen und Annahmen gelten, wie für das wegerregte Modell in Abschnitt 2.1.1. Alle verwendeten Modellparameter haben in Übereinstimmung mit der bisherigen Nomenklatur dieselben Bezeichnungen, lediglich die verallgemeinerten Lagekoordinaten erhalten für eine bessere Unterscheidung in den Simulationsergebnissen neue Bezeichnungen. Das betrachtete System ist

wiederum vom Freiheitsgrad 6. Es werden nun die Hubbewegung und die Nickbewegung des Aufbaus mit $\zeta_A(t)$ und $\alpha(t)$ bezeichnet, die translatorischen Bewegungen der Radmassen mit $\zeta_{R1}(t)$ und $\zeta_{R2}(t)$ und die Hubbewegung und die Nickbewegung des Motors mit $\zeta_M(t)$ und $\mu(t)$. Anstelle der Weganregungen $s_1(t)$ und $s_2(t)$ soll nun eine Anregung mit den Kräften $F_1(t)$ und $F_2(t)$ auf die vordere und hintere Radmasse m_{R1} und m_{R2} wirken.

2.2.2 Bewegungsgleichungen des krafterregten Modells

Nach dem Freischneiden und Einzeichnen aller eingeprägten Kräfte lassen sich für das krafterregte System die Bewegungsgleichungen anschreiben.

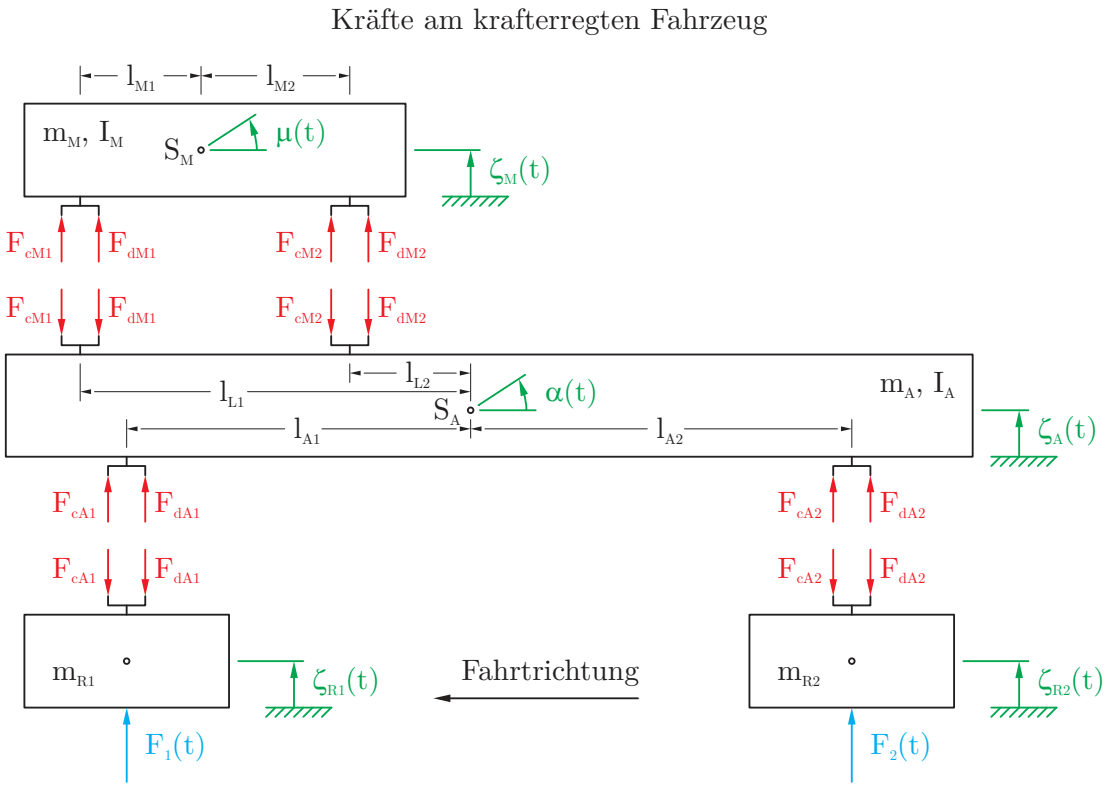


Abbildung 2.4: Schnittbild des krafterregten Fahrzeugmodells

Die Bewegungsgleichungen für das krafterregte Modell lassen sich sehr ähnlich denen für das wegerregte Modell herleiten (siehe Abschnitt 2.1.2). Wie man im Folgenden erkennen kann, ändern sich die Gleichungen in ihrer Gestalt zwar wenig, deren Eigenschaften unterscheiden sich aber grundlegend von jenen des wegerregten Systems. Die Newton-Euler-Gleichungen für Aufbaumasse und Motormasse sind ident, lediglich die Gleichungen für die Radmassen m_{R1} und m_{R2} ändern sich.

Die Schwerpunktsätze der beiden Radmassen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} m_{R1}\ddot{\zeta}_{R1} &= F_1(t) - F_{cA1} - F_{dA1} \\ m_{R2}\ddot{\zeta}_{R2} &= F_2(t) - F_{cA2} - F_{dA2} \end{aligned} \tag{2.17}$$

An dieser Stelle sei nur das Ergebnis der Rechnung erwähnt. Die hergeleiteten Bewegungsgleichungen lassen sich wiederum zusammenfassen und in Matrixschreibweise darstellen

$$\underline{M}_G\ddot{\vec{\zeta}}(t) + \underline{D}_G\dot{\vec{\zeta}}(t) + \underline{\widetilde{C}}_G\vec{\zeta}(t) = \vec{f}_G(t) \tag{2.18}$$

Die Massenmatrix $\underline{M}_G$ und die Dämpfungsmatrix $\underline{D}_G$ bleiben unverändert, bei der Steifigkeitsmatrix $\underline{\widetilde{C}}_G$ lässt sich eine Veränderung feststellen. Die Matrizen und Vektoren seien wiederum geeignet definiert (siehe Anhang A Systemmatrizen).

In Zustandsform lässt sich das System mit der Übereinkunft

$$\vec{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \vec{\zeta}(t) \\ \dot{\vec{\zeta}}(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_{GK}(t) = \begin{bmatrix} \vec{0}_6 \\ \underline{M}_G^{-1}\vec{f}_G(t) \end{bmatrix} \tag{2.19, 2.20}$$

wie folgt anschreiben

$$\frac{d}{dt}\vec{\xi}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0}_{6,6} & \underline{E}_6 \\ -\underline{M}_G^{-1}\underline{\widetilde{C}}_G & -\underline{M}_G^{-1}\underline{D}_G \end{bmatrix}}_{\underline{A}_{GK}} \vec{\xi}(t) + \vec{b}_{GK}(t) \tag{2.21}$$

wobei $\underline{A}_{GK}$ einer 12x12-Matrix entspricht und das Systemverhalten des krafterregten Modells charakterisiert.

2.3 Modellparameter

Im Folgenden sollen die Parameter der Modelle kurz erläutert werden. Alle verwendeten Parameterwerte wurden von MAGNA STEYR Fahrzeugtechnik ermittelt und zur Verfügung gestellt. In der Einleitung des Kapitels wurde das Halbfahrzeug beschrieben. Die Parameterwerte wurden allerdings so gewählt, dass sie sich auf das gesamte Fahrzeug beziehen. So umfasst beispielweise die Aufbaumasse die Masse des gesamten Aufbaus oder die Radmasse jeweils die Masse beider Räder einer Achse. Die Zahlenwerte lassen sich der Tabelle 12 im Anhang B Parameterwerte entnehmen.

Reifen Durch den Reifen werden alle vertikalen und horizontalen Kräfte zur Fahrbahn übertragen. Er stellt daher ein zentrales Bauelement im Fahrzeug dar. Aufgrund der Vielzahl von Wirkparametern und des ausgeprägt nichtlinearen Verhaltens ist eine detaillierte Abbildung des Reifens nur mit komplexen Modellen möglich. Da jedoch im Arbeitspunkt des Reifens der Zusammenhang zwischen Vertikalkraft und Reifeneinfederung nahezu linear ist, kann für eine vertikaldynamische Betrachtung vereinfacht mit einer linearen Feder und einer konstanten Reifensteifigkeit gerechnet werden [3].
Aufgrund des viskoelastischen Verhaltens des Gummiwerkstoffs und der Reifenstruktur verfügt der Reifen neben den Federungs- auch über Dämpfungseigenschaften. Da diese Dämpfungsbeiwerte im Vergleich zum Aufbauschwingungsdämpfer sehr klein sind, können sie für einfache Betrachtungen vernachlässigt werden [3].

Rad Alle Massen wie Felge, Reifen, Radträger und Anteile der Lenker werden in der Radmasse zusammengefasst. Der Einfluss der Radaufhängung wird vernachlässigt und somit eine Auswirkung auf das Schwingungsverhalten ausgeschlossen [8].

Aufbau Der Aufbau wird als starrer Körper betrachtet und die Masse umfasst den gesamten Aufbau mit Beladung. Das Massenträgheitsmoment um die Nickachse bezieht sich auf den Schwerpunkt.
Gegen den Aufbau stützen sich die Aufbaufedern, welche meist in die Radaufhängung integriert sind. In Abhängigkeit der Kinematik der Radaufhängung ergibt sich zwischen der Einfederbewegung des Radaufstandspunktes und der entsprechenden Längenänderung der Aufbaufeder ein bestimmtes Übersetzungsverhältnis. Die Steifigkeit der Aufbaufeder muss folglich vom Komponentenkennwert auf eine radbezogene Ersatzsteifigkeit umgerechnet werden [3].
Ähnlich wie bei der Federung wird die Dämpfung in die Radaufhängung integriert. Um einen nutzbaren Kennwert der Dämpfung für schwingungstechnische Betrachtungen zu erhalten, muss auch hier der Komponentenkennwert auf eine radbezogene Dämpferkonstante umgerechnet werden [3].

Motor Die Motormasse umfasst die tatsächliche Masse des Motors und weiters die Masse des Getriebes und des Achs- und Verteilergetriebes. Der Motor- und Getriebeverband wird als starre Masse angenommen. Das Massenträgheitsmoment bezieht sich wiederum auf die Nickachse durch den Schwerpunkt.
Die Motorlagerung besteht konstruktiv aus zwei Hydrolagern, die für eine einfachere Berechnung zu einem Lager mit entsprechenden Steifigkeits- und Dämpfungsparametern zusammengefasst werden, und die Getriebelagerung aus einem Hydrolager.

Ein Hydrolager lässt sich mit den dynamischen Kennwerten, der dynamischen Steifigkeit $c_{dyn.}$ und dem Verlustwinkel δ beschreiben, jedoch ist das Verhalten des Lagers stark frequenzabhängig. Für eine einfache mathematische Beschreibung werden die Hydrolager als Kelvin-Voigt-Elemente modelliert. Die dynamischen Kennwerte eines linearen Lagermodells können als Betrag (dynamische Steifigkeit $c_{dyn.}$) und Phasenwinkel (Verlustwinkel δ) der komplexen Übertragungsfunktion zwischen Lagerverschiebung und Lagerkraft empirisch ermittelt werden [9]. Die Modellparameter c und k des Kelvin-Voigt-Elements berechnen sich zu

$$c = \sqrt{\frac{c_{dyn.}^2}{1+\tan^2(\delta)}} \qquad \text{und} \qquad k = \frac{c\tan(\delta)}{\omega} \tag{2.22, 2.23}$$

Die Gleichungen für $c_{dyn.}$ und δ lassen erkennen, dass durch die Wahl von Federsteifigkeit c und Dämpfungskoeffizient k die Werte $c_{dyn.}$ und δ, bei vorgegebener Kreisfrequenz ω, eindeutig bestimmt sind. Dies hat zur Folge, dass ein Kelvin-Voigt-Element nur bei einer bestimmten Frequenz an gemessene Lagerkennlinien angepasst werden kann. Für die vorliegenden Betrachtungen wurde als Arbeitspunkt des Hydrolagers eine Frequenz von 7 Hz und eine Amplitude von 1 mm bei einer Temperatur von 22 °C gewählt.

2.4 Fesselung des krafterregten Modells

Eine Anregung mit einer Kraft statt einem Weg verändert die Struktur des Systems in grundlegender Weise und hat eine Instabilität der Lösung zur Folge. Dies verursacht erst das betrachtete Phänomen des Abdriftens bei einer numerischen Betrachtung des krafterregten Modells. Es wird nun die Nickbewegung ebenso anwachsen, wie die translatorische Verschiebung des Systems. Durch eine artifizielle Bindung des krafterregten Halbfahrzeugmodells an die Umgebung wird versucht, den Abdrifteffekt zu unterbinden. Rein mathematisch gesprochen bewirkt eine Fesselung des betrachten Modells, völlig unabhängig davon wie diese nun konkret realisiert wird, das Verschwinden der für die Instabilität des Systems und somit das Abdriften verantwortlichen Nulleigenwerte. Es ergibt sich für das krafterregte Modell, wie in Kapitel 3.4 ausführlich besprochen, ein Nulleigenwert mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 2. Es erscheint daher nötig das Modell an zwei Stellen zu fesseln. Heuristisch gesprochen muss die Fesselung des Systems ein Abdriften in translatorischer und in rotatorischer Richtung vermeiden. Es bietet sich eine Fesselung der Aufbaumasse als dominante Masse des Systems an. Verhindert man das Abdriften der translatorischen Auslenkung des Aufbaumassenschwerpunktes, ist noch immer eine ungefesselte Nickbewegung und damit auch ein Abdriften möglich. Um-

gekehrt ist bei einer Fesselung der reinen rotatorischen Bewegung der Aufbaumasse noch eine translatorische Abweichung möglich. Man muss also dafür Sorge tragen, neben der translatorischen Abdriftbewegung ein Abdriften der Nickbewegung zu unterbinden. Die Aufbaumassenfesselung im Schwerpunkt mit jeweils einer Feder-Dämpfer-Kombination in translatorischer und rotatorischer Richtung kombiniert diese beiden Eigenschaften.
Die Notwendigkeit, das Modell an zwei Stellen an die Umgebung zu fesseln, lässt einen gewissen Spielraum bei der Auslegung. Eine Fesselung an jeweils beiden Radmassen erscheint auch als eine zulässige Fesselung, um ein Abdriften in translatorischer und rotatorischer Richtung zu verhindern. Dabei werden jeweils beide Radmassen mit Hilfe einer Feder-Dämpfer-Kombination mit linearer Federsteifigkeit und geschwindigkeitsproportionaler Dämpfungsrate gefesselt.
Um das Schwingungsverhalten des Systems trotz dieser artifiziellen Bindung an die Umgebung, die es in dieser Form in der Realität klarerweise nicht gibt, möglichst exakt abzubilden, gilt es sowohl die Fesselungsparameter, als auch den Ort der Fesselung gut zu wählen. Die Güte dieser Wahl kann durch die in Kapitel 5 Optimierung angeführte Analyse beurteilt werden. Festzustellen ist, dass sich die Fesselung der Aufbaumasse im Folgenden als günstiger erweist und somit der Fesselung der Radmasse vorzuziehen ist. Aus diesem Grund wird in diesem Abschnitt nur die Aufbaumassenfesselung im Detail beschrieben.

2.4.1 Modellbeschreibung

Modellskizze krafterregtes gefesseltes Fahrzeug

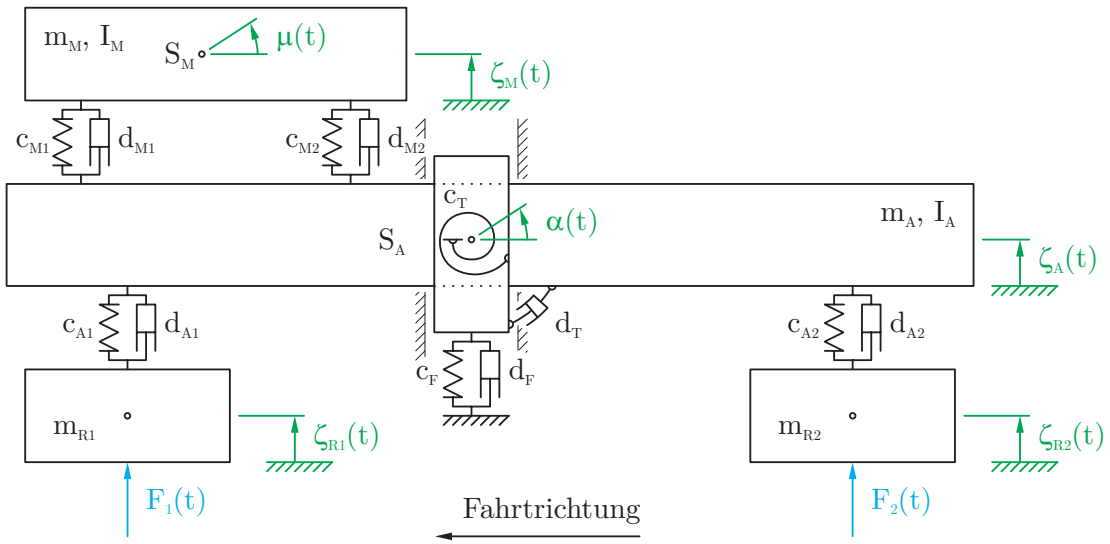


Abbildung 2.5: Modellskizze des krafterregten gefesselten Fahrzeuges

Für das krafterregte gefesselte Modell sollen dieselben Voraussetzungen und Annahmen gelten, wie für das krafterregte Modell in Abschnitt 2.2.2. Alle verwendeten Modellparameter und verallgemeinerten Lagekoordinaten haben in Übereinstimmung mit der bisherigen Nomenklatur dieselben Bezeichnungen. Das betrachtete System ist wiederum vom Freiheitsgrad 6. Als verallgemeinerte Lagekoordinaten werden die Hubbewegung $\zeta_A(t)$ und die Nickbewegung $\alpha(t)$ der Aufbaumasse, die translatorischen Bewegungen $\zeta_{R1}(t)$ und $\zeta_{R2}(t)$ der vorderen Radmasse m_{R1} und der hinteren Radmasse m_{R2}, sowie die Hubbewegung $\zeta_M(t)$ und die Nickbewegung $\mu(t)$ der Motormasse eingeführt. Auf die vordere und hintere Radmasse m_{R1} und m_{R2} soll eine Anregung mit den Kräften $F_1(t)$ und $F_2(t)$ wirken.
Die Aufbaumassenfesselung besteht im Detail aus zwei Komponenten, die sowohl die Hubbewegung, als auch die Nickbewegung der Aufbaumasse an die Umgebung zu fesseln vermögen. Die Komponente für Hub sei eine mit dem Aufbaumassenschwerpunkt verbundene Feder-Dämpfer-Kombination in translatorischer Richtung mit der linearen Federsteifigkeit c_F und der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungsrate d_F. Die Komponente für Nicken sei eine Feder-Dämpfer-Kombination in rotatorischer Richtung mit der linearen Drehfedersteifigkeit c_T und der winkelgeschwindigkeitsproportionalen Dämpfungsrate d_T.

2.4.2 Bewegungsgleichungen des krafterregten gefesselten Modells

Die Bewegungsgleichungen der beiden Radmassen und der Motormasse bleiben im Vergleich zum krafterregten Modell (siehe Abschnitt 2.2.2) unverändert, lediglich die Newton-Euler-Gleichungen für die Aufbaumasse bedürfen einer neuerlichen Betrachtung.
Auf die Aufbaumasse wirken zusätzlich die Kräfte und Momente der Fesselung (vergleiche Abbildung 2.4). Setzt man für die Federn und Dämpfer der Fesselung eine lineare Kennlinie voraus, so lässt sich anschreiben

$$\begin{aligned} F_{cF} &= -c_F\zeta_A & \qquad M_{cT} &= -c_T\alpha_A \\ F_{dF} &= -d_F\dot{\zeta}_A & \qquad M_{dT} &= -d_T\dot{\alpha}_A \end{aligned} \tag{2.24, 2.25}$$

Der Schwerpunktsatz für die Aufbaumasse ergibt sich zu

$$m_A\ddot{\zeta}_A = F_{cA1} + F_{dA1} + F_{cA2} + F_{dA2} - F_{cM1} - F_{dM1} - F_{cM2} - F_{dM2} + F_{cF} + F_{dF} \tag{2.26}$$

Der Drallsatz für die Aufbaumasse ergibt sich zu

$$\begin{aligned} I_A\ddot{\alpha}_A = l_{A2}(F_{cA2} + F_{dA2}) - l_{A1}(F_{cA1} + F_{dA1}) + \\ + l_{L1}(F_{cM1} + F_{dM1}) + l_{L2}(F_{cM2} + F_{dM2}) + M_{cT} + M_{dT} \end{aligned} \tag{2.27}$$

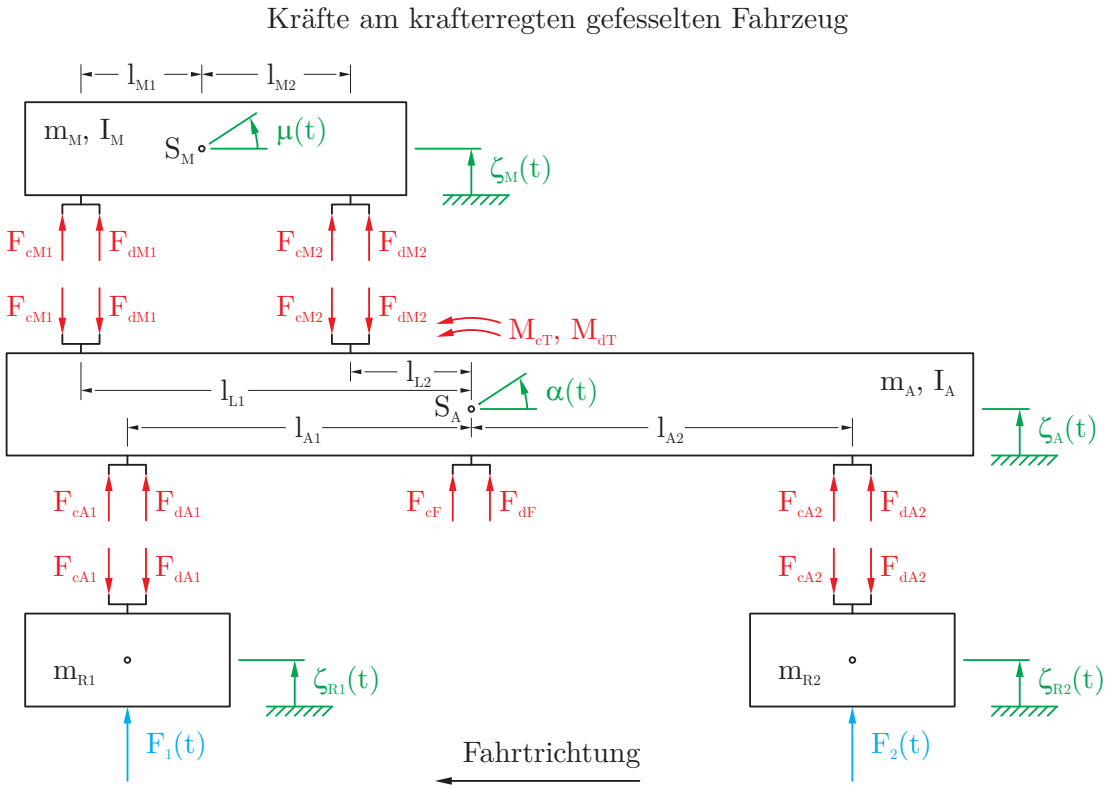


Abbildung 2.6: Schnittbild des krafterregten gefesselten Fahrzeugmodells

An dieser Stelle sei wiederum nur das Ergebnis der Rechnung erwähnt. Die hergeleiteten Bewegungsgleichungen lassen sich zusammenfassen und in Matrixschreibweise darstellen

$$\underline{M}_G\ddot{\vec{\zeta}}(t) + \underline{D}_{GFA}\dot{\vec{\zeta}}(t) + \underline{C}_{GFA}\vec{\zeta}(t) = \vec{f}_G(t) \tag{2.28}$$

Nun lässt sich sowohl eine Änderung in der Dämpfungsmatrix $\underline{D}_{GFA}$, als auch in der Steifigkeitsmatrix $\underline{C}_{GFA}$ feststellen. Die Definition der Matrizen lässt sich mit Hilfe der bereits definierten Matrizen anschreiben (siehe Anhang A Systemmatrizen).

In Zustandsform lässt sich das System mit der Vereinbarung (2.19, 2.20) wie folgt anschreiben

$$\frac{d}{dt}\vec{\xi}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0}_{6,6} & \underline{E}_6 \\ -\underline{M}_G^{-1}\underline{C}_{GFA} & -\underline{M}_G^{-1}\underline{D}_{GFA} \end{bmatrix}}_{\underline{A}_{GFA}} \vec{\xi}(t) + \vec{b}_{GK}(t) \tag{2.29}$$

wobei $\underline{A}_{GFA}$ einer 12x12-Matrix entspricht, welche das Systemverhalten des krafterregten gefesselten Modells charakterisiert.

Kapitel 3

Stabilitätsuntersuchung

Untersuchungen zum Stabilitätsverhalten dynamischer Systeme liefern häufig entscheidende Aufschlüsse über das generelle Systemverhalten. Daher sind Stabilitätsanalysen nicht nur beim Studium des dynamischen Verhaltens eines Systems, sondern auch beim Vergleich mehrerer Systeme von besonderem Interesse. Spricht man von Stabilität, kann man nach [10] zwei Konzepte unterscheiden. Unter *Strukturstabilität* oder *Robustheit* versteht man das Verhalten eines Systems bei einer kleinen Änderung (Störung) des Systems oder seiner Parameter. Diese Definition kann beispielsweise bei einer Optimierung der Fesselungsparameter hilfreich sein. Unter dem *Stabilitätsproblem im Sinne Ljapunows* betrachtet man das Verhalten einer speziellen Lösung des gegebenen Systems bei einer kleinen Störung zufolge unvermeidbarer äußerer Einflüsse. Mit diesem Konzept lässt sich das untersuchte Abdriften bei einer Betrachtung und einem anschließenden Vergleich von den verschiedenen Modellen beschreiben. Stabilitätsuntersuchungen von dynamischen Systemen gehen prinzipiell von einem *ungestörten Zustand* aus, beispielsweise einer Ruhelage, dessen Stabilität untersucht werden soll. Anhand der Reaktion des Systems auf eine aufgebrachte Störung, durch die der *ungestörte* in den *gestörten Zustand* übergeht, können dann Aussagen über das Stabilitätsverhalten getroffen werden.

3.1 Stabilitätsdefinition

Die Bewegung eines Systems aus starren Körpern lässt sich durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben, welche sich für eine weitere Beschreibung als Differentialgleichungssystem 1. Ordnung anschreiben lassen. Handelt es sich um ein *autonomes* System[1], ergibt sich ein durch den Zustandsvektor $\vec{x} = [x_1, ..., x_n]^T$ charakterisiertes (homogenes) Differentialgleichungssystem der Form

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \tag{3.1}$$

Der *ungestörte Zustand* $\vec{x}_0(t)$, dessen Stabilitätsverhalten untersucht werden soll, stellt eine spezielle (partikuläre) Lösung der Systemgleichungen (3.1) dar;

[1] Tritt in den Bewegungsgleichungen eines Systems die Zeit t explizit auf, so nennt man dieses *rheonom* (oder *nichtautonom*), andernfalls *skleronom* (oder *autonom*).

$$\dot{\vec{x}}_0(t) = \vec{f}(\vec{x}_0(t)) \tag{3.2}$$

Stabilität im Sinne Ljapunows

Der *ungestörte Zustand* $\vec{x}_0(t)$ heißt *stabil im Sinne Ljapunows*, wenn man für jede beliebige *gestörte* Lösung $\vec{x}_s(t)$ von (3.1) ein $\epsilon > 0$ vorgeben kann, so dass es ein $\delta(\epsilon) > 0$ gibt mit

$$|\vec{x}_0(t_0) - \vec{x}_s(t_0)| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |\vec{x}_0(t) - \vec{x}_s(t)| < \delta(\epsilon) \tag{3.3}$$

für $t \in [t_0, \infty)$.

Asymptotische Stabilität

Der *ungestörte Zustand* $\vec{x}_0(t)$ sei Ljapunow-stabil. Dann heißt $\vec{x}_0(t)$ *asymptotisch stabil*, wenn man für jede andere Lösung $\vec{x}_s(t)$ von (3.1) ein $\epsilon > 0$ vorgeben kann, so dass

$$|\vec{x}_0(t_0) - \vec{x}_s(t_0)| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |\vec{x}_0(t) - \vec{x}_s(t)| \to 0 \tag{3.4}$$

für $t \to \infty$.
Eine anschauliche Erklärung dieser Definitionen kann mit Hilfe von Integralkurven gegeben werden (siehe beispielsweise [10]).

3.2 Stabilitätsanalyse

Die Systemgleichungen der vorliegenden Modelle lassen sich als lineares Differentialgleichungssystem in der Form

$$\dot{\vec{x}} = \underline{A}\vec{x} \tag{3.5}$$

anschreiben, wobei die Systemmatrix $\underline{A}$ von der Dimension $(n \times n)$ ist. Gemäß [10] kann die allgemeine Lösung $\vec{x}(t)$ dieses Gleichungssystems aus einem Fundamentalsystem von n unabhängigen Lösungsvektoren $\vec{x}_1(t), ..., \vec{x}_n(t)$ mit dem Ansatz

$$\vec{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \vec{x}_j(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\underline{A}t} \vec{v}_j \tag{3.6}$$

und nach längerer Umformung durch

$$\vec{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t}[\vec{v}_j + t(\underline{A} - \lambda_j \underline{E})\vec{v}_j + ... + \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!}(\underline{A} - \lambda_j \underline{E})^{m_j-1}\vec{v}_j] \qquad (3.7)$$

angegeben werden. Dabei sind die Konstanten c_j aus den jeweiligen Anfangsbedingungen $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ zu bestimmen. Aus (3.7) ist unmittelbar die Bedeutung der *Eigenwerte* $\lambda_j = \alpha_j \pm i\omega_j$ der Systemmatrix $\underline{A}$ für das Stabilitätsverhalten der Lösung $\vec{x}(t)$ ersichtlich. Die folgenden Stabilitätsaussagen nach [10] sind daher leicht nachzuvollziehen:

1. Haben *alle n Eigenwerte* λ_j der Systemmatrix $\underline{A}$ *negative Realteile*, so ist das System *asymptotisch stabil*.

2. Hat auch *nur einer der Eigenwerte* einen *positiven Realteil*, so ist das System *instabil*.

3. Tritt ein *Eigenwert* mit verschwindendem Realteil auf, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

   a) ist $k_1 = k$, also die algebraische Vielfachheit k gleich der geometrischen k_1 (es gibt eine der Vielfachheit entsprechende Anzahl linear unabhängiger *Eigenvektoren*), so ist das System *stabil*.

   b) ist $k_1 < k$, also die algebraische Vielfachheit k größer als die geometrische k_1, so ist das System *instabil*.

Für das Stabilitätsverhalten eines *ungestörten Zustandes* $\vec{x}_0$ sind also die Realteile α_j der *Eigenwerte* λ_j der Systemmatrix entscheidend.
Mit der Bestimmung der *Eigenwerte* und den zugehörigen *Eigenvektoren* lässt sich nicht nur das Stabilitätsverhalten, sondern generell das Schwingungsverhalten des Systems beschreiben. Die Bewegung eines Systems kann wie in (3.7) ersichtlich als (Linear-)Kombination der auftretenden Eigenschwingungsformen mit ihren Frequenzen und Dämpfungen verstanden werden. Die Frequenz eines konjugiert komplexen Eigenwertpaares lässt sich zu $f_j = \omega_j/2\pi$ in Hertz berechnen, das Lehr'sche Dämpfungsmaß zu $D_j = -\alpha_j/\sqrt{\alpha_j^2 + \omega_j^2}$.
Für ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar sind auch die *Eigenvektoren* konjugiert komplex. Grundsätzlich ist der Betrag eines *Eigenvektors* nicht eindeutig definiert, im Folgenden wird der *Eigenvektor* so skaliert, dass jeweils die betragsmäßig größte Komponente den Wert 1 hat.

3.3 Wegerregtes Modell

Im folgenden Abschnitt soll das Stabilitätsverhalten des wegerregten Modells untersucht werden. Als *ungestörter Zustand* soll die Ruhelage dienen, in der keine äußeren Kräfte und Weganregungen auf das Modell wirken. Die *Eigenwerte* λ werden durch Bildung des *charakteristischen Polynoms* $p(\lambda) = det(\underline{A}_{GW} - \lambda\underline{E})$ und Lösung der *charakteristischen Gleichung* $p(\lambda) = 0$ ermittelt (siehe auch Abschnitt 2.1.2). Für die Berechnung der *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* wird in MATLAB die Routine `eig.m` angewendet.

Tabelle 1: *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* des wegerregten Modells

$$\lambda_{1,2} = -12,1 \pm 87,2i \qquad f_{1,2} = 13,9 \text{ Hz}$$

$${}^z\vec{v}_{1,2}^{\,\mathfrak{amp}} = \begin{bmatrix} 0,018 \\ 0,013 \\ 1 \\ 0,018 \\ 0,002 \\ 0,016 \end{bmatrix} \qquad {}^z\vec{v}_{1,2}^{\,\mathfrak{phase}} = \begin{bmatrix} -113,90 \\ -16,77 \\ 0 \\ -107,58 \\ -72,30 \\ 134,25 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{3,4} = -11,4 \pm 75,3i \qquad f_{3,4} = 12,0 \text{ Hz}$$

$${}^z\vec{v}_{3,4}^{\,\mathfrak{amp}} = \begin{bmatrix} 0,034 \\ 1 \\ 0,019 \\ 0,045 \\ 0,043 \\ 0,037 \end{bmatrix} \qquad {}^z\vec{v}_{3,4}^{\,\mathfrak{phase}} = \begin{bmatrix} -91,80 \\ 0 \\ 163,81 \\ 87,33 \\ 121,61 \\ -110,14 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{5,6} = -22,9 \pm 57,5i \qquad f_{5,6} = 9,1 \text{ Hz}$$

$${}^z\vec{v}_{5,6}^{\,\mathfrak{amp}} = \begin{bmatrix} 0,029 \\ 0,019 \\ 0,006 \\ 0,013 \\ 0,101 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad {}^z\vec{v}_{5,6}^{\,\mathfrak{phase}} = \begin{bmatrix} -159,22 \\ -16,57 \\ -86,53 \\ 71,12 \\ 17,87 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{7,8} = -14,6 \pm 51,4i \qquad f_{7,8} = 8,2 \text{ Hz}$$

$${}^z\vec{v}_{7,8}^{\,\mathfrak{amp}} = \begin{bmatrix} 0,278 \\ 0,314 \\ 0,042 \\ 0,369 \\ 0,953 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad {}^z\vec{v}_{7,8}^{\,\mathfrak{phase}} = \begin{bmatrix} -20,78 \\ 74,03 \\ -110,52 \\ 162,10 \\ 155,38 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{9,10} = -1,6 \pm 8,8i \qquad f_{9,10} = 1,4 \text{ Hz}$$

$${}^z\vec{v}_{9,10}^{\,\mathfrak{amp}} = \begin{bmatrix} 0,670 \\ 0,066 \\ 0,137 \\ 0,967 \\ 0,859 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad {}^z\vec{v}_{9,10}^{\,\mathfrak{phase}} = \begin{bmatrix} -11,47 \\ -145,91 \\ 15,41 \\ -0,72 \\ -171,01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{11,12} = -1,3 \pm 7,1i \qquad f_{11,12} = 1,1 \text{ Hz}$$

$${}^z\vec{v}_{11,12}^{\,\mathfrak{amp}} = \begin{bmatrix} 0,685 \\ 0,068 \\ 0,035 \\ 0,195 \\ 1 \\ 0,206 \end{bmatrix} \qquad {}^z\vec{v}_{11,12}^{\,\mathfrak{phase}} = \begin{bmatrix} 5,14 \\ 20,96 \\ 30,54 \\ 166,15 \\ 0 \\ 167,85 \end{bmatrix}$$

Mit dem Lagevektor des wegerregten Systems $\vec{z} = \left[z_A,\, z_{R1},\, z_{R2},\, \varphi_A,\, z_M,\, \varphi_M\right]^T$

In Tabelle 1 werden die gerundeten komplexen *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* angegeben. Von den komplexen *Eigenvektoren* werden einerseits die Beträge und andererseits die Phasenlage der Komponenten angeschrieben um die Interpretation der Eigenschwingungsformen zu vereinfachen, wobei lediglich die Komponenten der Lage angegeben werden.
Wie leicht ersichtlich haben alle *Eigenwerte* negative Realteile, somit ist das wegerregte Modell nach Abschnitt 3.2 *asymptotisch stabil*. Möchte man die Ergebnisse in Tabelle 1 interpretieren, lassen sich folgende Schlüsse ziehen. Die ersten beiden Eigenmodes beschreiben jeweils eine dominierende Schwingung der beiden Radmassen (Wheel Hop Mode). Die entsprechenden Frequenzen stimmen auch mit den Angaben in [8] überein, wo ein Frequenzbereich von 8-15 Hz angegeben wird. Der dritte und vierte Eigenmode beschreibt einerseits eine Nickschwingung (Bounce Mode), andererseits eine Hubschwingung des Motors (Pitch Mode). Die letzten beiden Eigenmodes entsprechen dominierenden Nick- und Hubschwingungen des Aufbaus, welche dem Frequenzbereich von 0,8-2,1 Hz [8] entsprechen. Diese Interpretationen lassen sich anhand von Animationen der Eigenmodes in SIMPACK anschaulich nachvollziehen.

3.4 Krafterregtes Modell

Im folgenden Abschnitt soll das Stabilitätsverhalten des krafterregten Modells untersucht werden. Als *ungestörter Zustand* soll die Ruhelage dienen, in der keine äußeren Kräfte auf das Modell wirken. Die *Eigenwerte* λ werden wiederum durch Bildung des *charakteristischen Polynoms* $p(\lambda) = det(\underline{A}_{GK} - \lambda\underline{E})$ und Lösung der *charakteristischen Gleichung* $p(\lambda) = 0$ ermittelt (siehe auch Abschnitt 2.2.2). Weitere Informationen sind dem Abschnitt 3.3 zu entnehmen.
Betrachtet man nun das krafterregte Modell, kann man eine strukturelle Veränderung zwischen den Systemmatrizen $\underline{A}_{GW}$ und $\underline{A}_{GK}$ feststellen. Dies bewirkt allerdings auch eine Veränderung der *charakteristischen Polynome* und der sich ergebenden *Eigenwerte*. Diese Veränderung hat weitreichende Konsequenzen hinsichtlich des Stabilitätsverhaltens des krafterregten Systems. Während die Systemmatrix $\underline{A}_{GW}$ für alle $c_R \neq 0$ regulär ist, stellt $\underline{A}_{GK}$ jedoch für beliebige Parameterwerte eine singuläre Matrix dar, was sich im Auftreten verschwindender *Eigenwerte* äußert. Wie man Tabelle 2 entnehmen kann, ergibt sich für das krafterregte Modell ein Nulleigenwert mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 2. Mit der Dimension $dim\, V = 12$ des zugrundeliegenden Vektorraumes und einem Rang der Systemmatrix von $rg(\underline{A}_{GK}) = 10$ ergibt sich ein Defekt von $def(\underline{A}_{GK}) = 2$ (Dimension des Eigenraums zum Nulleigenwert und gleich der geometrischen Vielfachheit). Das Auftreten der Nulleigenwerte zieht also einen nicht vollständigen Rangabfall nach sich. Erinnert man sich an die Stabilitätsdefinitionen im Abschnitt 3.2, handelt

es sich hier um den Fall 3.b), welcher eine Instabilität des Systems und somit ein Abdriften bei numerischer Berechnung des Systems bedeutet. Das Auftreten von Nulleigenwerten ist kennzeichnend für eine ungefesselte, d.h. nicht an die Umgebung gebundene Bewegung.
Verwendet man also für eine numerische Berechnung Parameterwerte, welche den realen Gegebenheiten entsprechen, erhält man im Falle des wegerregten Systems sechs Paare konjugiert komplexer *Eigenwerte* (Tabelle 1), welche jeweils negative Realteile aufweisen und somit gegenüber anfänglichen Störungen ein stabiles Schwingungsverhalten aufweisen. Dies gilt nicht mehr für das krafterregte System, welches vier Paare konjugiert komplexer *Eigenwerte* mit negativem Realteil und aber vier *Eigenwerte* mit (numerisch fast) verschwindendem Realteil liefert. Dies entspricht Nulleigenwerten bei analytischer Rechnung. Weichen die Anfangswerte folglich nur in geringem Maße ab, so erhält man aufklingende Lösungsanteile, welche vom System nicht gedämpft werden und eine Instabilität der Lösung bewirken. Das Vorhandensein von Lösungsanteilen, welche bei einer numerischen Berechnung des krafterregten Systems aufklingen, soll im Kapitel 4 ausführlich behandelt werden.

Tabelle 2: *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* des krafterregten Modells

$$\lambda_{1,2} = -22,9 \pm 57,5i \qquad \lambda_{3,4} = -14,7 \pm 50,1i$$

$$f_{1,2} = 9,1 \text{ Hz} \qquad f_{3,4} = 8,0 \text{ Hz}$$

$$\zeta_{\vec{v}_{1,2}^{\mathfrak{amp}}} = \begin{bmatrix} 0,026 \\ 0,016 \\ 0,010 \\ 0,011 \\ 0,097 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \zeta_{\vec{v}_{1,2}^{\mathfrak{phase}}} = \begin{bmatrix} -157,60 \\ 116,13 \\ 55,92 \\ 81,19 \\ 18,54 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \zeta_{\vec{v}_{3,4}^{\mathfrak{amp}}} = \begin{bmatrix} 0,271 \\ 0,423 \\ 0,091 \\ 0,352 \\ 1 \\ 0,953 \end{bmatrix} \quad \zeta_{\vec{v}_{3,4}^{\mathfrak{phase}}} = \begin{bmatrix} -173,51 \\ 86,86 \\ -90,63 \\ 10,64 \\ 0 \\ -153,29 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{5,6} = -13,6 \pm 21,8i \qquad \lambda_{7,8} = -12,7 \pm 17,3i$$

$$f_{5,6} = 3,5 \text{ Hz} \qquad f_{7,8} = 2,8 \text{ Hz}$$

$$\zeta_{\vec{v}_{5,6}^{\mathfrak{amp}}} = \begin{bmatrix} 0,070 \\ 0,062 \\ 1 \\ 0,059 \\ 0,026 \\ 0,068 \end{bmatrix} \quad \zeta_{\vec{v}_{5,6}^{\mathfrak{phase}}} = \begin{bmatrix} 179,61 \\ -125,76 \\ 0 \\ -179,43 \\ 33,90 \\ -166,08 \end{bmatrix} \quad \zeta_{\vec{v}_{7,8}^{\mathfrak{amp}}} = \begin{bmatrix} 0,050 \\ 1 \\ 0,081 \\ 0,059 \\ 0,156 \\ 0,064 \end{bmatrix} \quad \zeta_{\vec{v}_{7,8}^{\mathfrak{phase}}} = \begin{bmatrix} 175,67 \\ 0 \\ 39,64 \\ -11,97 \\ -170,02 \\ 9,40 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{9,10} = 0 \qquad \lambda_{11,12} = 0$$

$$\zeta_{\vec{v}_9^{\mathfrak{amp}}} \qquad \zeta_{\vec{v}_9^{\mathfrak{phase}}} \qquad \zeta_{\vec{v}_{10}^{\mathfrak{amp}}} \qquad \zeta_{\vec{v}_{10}^{\mathfrak{phase}}}$$

Mit dem Lagevektor des krafterregten Systems $\vec{\zeta} = \left[\zeta_A,\, \zeta_{R1},\, \zeta_{R2},\, \alpha_A,\, \zeta_M,\, \mu_M\right]^T$

Möchte man die Ergebnisse wiederum physikalisch interpretieren, lassen sich die folgenden Aussagen treffen. Bei den ersten beiden Eigenmodes kann man eine Nick- und Hubschwingung des Motors im selben Frequenzbereich wie beim wegerregten Modell erkennen. Der dritte und vierte Eigenmode beschreibt eine Schwingung der hinteren und vorderen Radmasse. Hier ist der Frequenzbereich, verglichen zum wegerregten Modell, bedeutend niedriger, da die relativ hohe Ersatzsteifigkeit des Reifens wegfällt und somit nur die Steifigkeit der jeweiligen Aufbaufederung die Schwingung maßgebend beeinflusst. Die letzten beiden Eigenmodes entsprechen Starrkörpereigenformen des ungefesselten Systems. Sie beschreiben ein Abdriften einerseits in translatorischer, andererseits in rotatorischer Richtung. Da die beiden Vektoren jeweils linear kombinierbar sind, wird auf eine explizite Angabe verzichtet. Die Interpretation der Ergebnisse lässt sich wiederum mit Hilfe von Animationen in SIMPACK verifizieren.

3.5 Krafterregtes gefesseltes Modell

Im folgenden Abschnitt soll das Stabilitätsverhalten des krafterregten Modells mit Aufbaumassenfesselung untersucht werden. Als *ungestörter Zustand* soll die Ruhelage dienen, in der keine äußeren Kräfte auf das Modell wirken. Die *Eigenwerte* λ werden wiederum durch Bildung des *charakteristischen Polynoms* $p(\lambda) = det(\underline{A}_{GFA} - \lambda\underline{E})$ und Lösung der *charakteristischen Gleichung* $p(\lambda) = 0$ ermittelt (siehe auch Abschnitt 2.4.2). Die Werte der Fesselungsparameter wurden zufällig gewählt, liegen jedoch etwa im Bereich der optimalen Fesselungsparameter, welche in Abschnitt 5.2 ermittelt wurden.
Betrachtet man nun das krafterregte System mit einer Aufbaumassenfesselung, kann man eine strukturelle Veränderung zwischen den Systemmatrizen $\underline{A}_{GK}$ und $\underline{A}_{GFA}$ feststellen. Dies bewirkt bei geeignet gewählten Fesselungsparametern eine günstige Veränderung des *charakteristischen Polynoms* und der sich ergebenden *Eigenwerte* wie in Tabelle 3 ersichtlich. Durch die Bindung des krafterregten Systems an die Umgebung in Form einer Aufbaumassenfesselung mit nichttrivialen Fesselungsparametern verändern sich die *Eigenwerte* dahingehend, dass die Systemmatrix $\underline{A}_{GFA}$ des gefesselten Systems keine Nulleigenwerte mehr besitzt. Dies hat wiederum bei den verwendeten Modellparametern und geeignet gewählten Fesselungsparametern ein stabiles System zur Folge, sodass kein Abdriften im Sinne einer rückstellkraftfreien Bewegung mehr auftritt. Die *Eigenwerte* mit verschwindendem Realteil und den zugehörigen Starrkörpereigenformen treten nicht mehr auf, man erhält zusätzlich zwei Paare konjugiert komplexer *Eigenwerte*, welche in Abhängigkeit der Fesselungsparameter negative Realteile aufweisen und somit gegenüber anfänglichen Störungen ein stabiles Schwingungsverhalten aufweisen. Wie leicht ersichtlich, haben

alle angeführten *Eigenwerte* negative Realteile und somit ist das System nach Abschnitt 3.2 *asymptotisch stabil*. Der Rang der Systemmatrix $\underline{A}_{GFA}$ berechnet sich zu $rg(\underline{A}_{GFA}) = 12$. Sehr wohl wird aber das Systemverhalten durch diesen künstlichen Eingriff verändert und a priori nachteilig beeinflusst. Dies steht eigentlich im Widerspruch zum Versuch der Modellbildung, die Realität möglichst richtig abzubilden und ausreichend genau zu beschreiben. Es bedarf daher einer eingehenden Untersuchung, um das Schwingungsverhalten des Systems trotz dieser artifiziellen Bindung an die Umgebung möglichst exakt abbilden zu können. Es gilt, geeignete Fesselungsparameter zu wählen und diese auf ihre Güte hin zu untersuchen. Dieser Aufgabe sei das Kapitel 5 Optimierung gewidmet.

Tabelle 3: *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* des krafterregten gefesselten Modells

$$\lambda_{1,2} = -22,9 \pm 57,5i \qquad \lambda_{3,4} = -14,8 \pm 50,1i$$
$$f_{1,2} = 9,1 \text{ Hz} \qquad f_{3,4} = 8,0 \text{ Hz}$$
$$\zeta\vec{v}_{1,2}^{\,\mathfrak{amp}} = \begin{bmatrix} 0,026 \\ 0,016 \\ 0,010 \\ 0,011 \\ 0,097 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \zeta\vec{v}_{1,2}^{\,\mathfrak{phase}} = \begin{bmatrix} -157,45 \\ 116,45 \\ 55,92 \\ 81,63 \\ 18,62 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \zeta\vec{v}_{3,4}^{\,\mathfrak{amp}} = \begin{bmatrix} 0,272 \\ 0,424 \\ 0,091 \\ 0,352 \\ 1 \\ 0,952 \end{bmatrix} \quad \zeta\vec{v}_{3,4}^{\,\mathfrak{phase}} = \begin{bmatrix} -173,43 \\ 87,04 \\ -89,97 \\ 10,97 \\ 0 \\ -153,12 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{5,6} = -13,6 \pm 21,8i \qquad \lambda_{7,8} = -12,8 \pm 17,3i$$
$$f_{5,6} = 3,5 \text{ Hz} \qquad f_{7,8} = 2,8 \text{ Hz}$$
$$\zeta\vec{v}_{5,6}^{\,\mathfrak{amp}} = \begin{bmatrix} 0,070 \\ 0,063 \\ 1 \\ 0,060 \\ 0,027 \\ 0,068 \end{bmatrix} \quad \zeta\vec{v}_{5,6}^{\,\mathfrak{phase}} = \begin{bmatrix} 179,81 \\ -124,86 \\ 0 \\ -178,99 \\ 35,09 \\ -165,59 \end{bmatrix} \quad \zeta\vec{v}_{7,8}^{\,\mathfrak{amp}} = \begin{bmatrix} 0,050 \\ 1 \\ 0,083 \\ 0,060 \\ 0,157 \\ 0,065 \end{bmatrix} \quad \zeta\vec{v}_{7,8}^{\,\mathfrak{phase}} = \begin{bmatrix} 175,78 \\ 0 \\ 40,67 \\ -11,72 \\ -169,82 \\ 9,63 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{9,10} = (-9,0 \pm 28,2i)10^{-2} \qquad \lambda_{11,12} = (-2,6 \pm 4,4i)10^{-2}$$
$$f_{9,10} = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ Hz} \qquad f_{11,12} = 0,7 \cdot 10^{-2} \text{ Hz}$$
$$\zeta\vec{v}_{9,10}^{\,\mathfrak{amp}} = \begin{bmatrix} 0,226 \\ 0,834 \\ 1 \\ 0,643 \\ 0,750 \\ 0,643 \end{bmatrix} \quad \zeta\vec{v}_{9,10}^{\,\mathfrak{phase}} = \begin{bmatrix} 7,10 \\ 175,47 \\ 0 \\ -2,07 \\ 175,19 \\ -2,07 \end{bmatrix} \quad \zeta\vec{v}_{11,12}^{\,\mathfrak{amp}} = \begin{bmatrix} 0,994 \\ 1 \\ 0,989 \\ 0,007 \\ 0,999 \\ 0,007 \end{bmatrix} \quad \zeta\vec{v}_{11,12}^{\,\mathfrak{phase}} = \begin{bmatrix} -0,55 \\ 0 \\ -0,96 \\ -123,33 \\ -0,04 \\ -123,33 \end{bmatrix}$$

Mit dem Lagevektor des krafterregten gefesselten Systems $\vec{\zeta} = \left[\zeta_A,\, \zeta_{R1},\, \zeta_{R2},\, \alpha_A,\, \zeta_M,\, \mu_M\right]^T$ und Aufbaumassenfesselung mit den Fesselungsparametern $c_F = 5$ N/m, $d_F = 100$ Ns/m, $c_T = 250$ Nm/rad und $d_T = 500$ Nms/rad.

Möchte man die Ergebnisse physikalisch interpretieren, lassen sich die folgenden Aussagen treffen. Bei den ersten beiden Eigenmodes kann man nahezu ident zum rein krafterregten Modell eine Nick- und Hubschwingung des Motors im selben Frequenzbereich wie beim wegerregten Modell erkennen. Der dritte und vierte Eigenmode beschreibt wiederum eine Schwingung der hinteren und vorderen Radmasse. Deutlich erkennbar ist der geringe Unterschied der *Eigenwerte* zwischen rein krafterregten und krafterregten System mit Aufbaumassenfesselung. Die Ähnlichkeit hängt klarerweise von der geeigneten Wahl der Fesselungsparameter ab. Die letzten beiden Eigenmodes entsprechen dominierenden Nick- und Hubschwingungen des Aufbaus in einem sehr niedrigen Frequenzbereich aufgrund der gewählten Fesselungsparamater. Die entsprechenden *Eigenwerte* sind besonders sensitiv auf die Wahl der Fesselungsparameter. Die Interpretation der Ergebnisse lässt sich wiederum mit Hilfe von Animationen der Eigenschwingungsformen in Simpack erheblich vereinfachen.

Kapitel 4

Simulationsergebnisse

4.1 Numerische Lösung des Anfangswertproblems

Zur ingenieurmäßigen Behandlung von Problemen ist es notwendig, das dynamische System im Rahmen der Modellbildung in mathematischer Form zu charakterisieren. Der Zustandsraum stellt eine Möglichkeit dar, das Verhalten des dynamischen Systems im Zeitbereich zu beschreiben. Zur Darstellung werden alle systembeschreibenden Differentialgleichungen in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung überführt. Erinnert man sich an Kapitel 2 Modellbildung, liefert die mathematische Beschreibung jeweils ein lineares inhomogenes Differentialgleichungssystem (2.16), (2.21) und (2.29) mit konstanten Koeffizienten der Form

$$\dot{\vec{x}}(t) = \underline{A}\vec{x}(t) + \vec{b}(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t)) \tag{4.1}$$

für deren Lösung die mathematische Theorie der Differentialgleichungen zahlreiche Methoden zur Verfügung stellt. Wir suchen die spezielle Lösung $\vec{x}(t)$, die in einem bestimmten Zeitpunkt t_0 den vorgegebenen Wert $\vec{x}_0$ annimmt. Wir wollen also eine Funktion $\vec{x}(t)$ bestimmen, die das Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t)), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \tag{4.2}$$

löst [11]. In vielen Fällen ist jedoch die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung nicht mehr einfach durch einen geschlossenen Formelausdruck, der bekannte elementare und höhere Funktionen enthält, darstellbar bzw. führt auf extrem lange Ausdrücke. Die dennoch (unter sehr allgemeinen Voraussetzungen) vorhandende Lösung kann dann durch numerische Verfahren bestimmt werden, wobei ihre Anwendung nur unter Verwendung von Computern effektiv zu realisieren ist [12]. Dabei wird die Differentialgleichung mittels einer Diskretisierung approximiert.
Die Grundidee der Diskretisierung besteht darin, die zu lösende kontinuierliche DGL im Lösungsintervall $[a, b]$ nur in endlich vielen Werten der unabhängigen Variablen t zu betrachten, die als Gitterpunkte und deren Abstände als Schrittweite bezeichnet werden. Auf Diskretisierung beruhende numerische Methoden bezeichnet man als Diskretisierungsmethoden.

Sie ersetzen

- das kontinuierliche (stetige) Lösungsintervall der DGL durch die diskrete (endliche) Menge der Gitterpunkte, die als Gitter bezeichnet wird.
- das stetige DGL-Modell durch ein diskretes Ersatzmodell und nähern überdies Differentialgleichungen durch Differenzengleichungen an. Dabei wird ein Diskretisierungsfehler begangen, der von der Schrittweite abhängt.

Neben dem Diskretisierungsfehler kommt es auch zum Rundungsfehler. Dieser Fehler ergibt sich aus der Tatsache, dass ein Computer nur eine endliche Anzahl an Stellen einer Zahl speichern kann. Somit ergibt sich eine endliche Genauigkeit der Zahlen.
Diskretisierungsmethoden liefern als Näherung für die Lösungsfunktion keinen analytischen Ausdruck, sondern nur Funktionswerte in endlich vielen vorgegebenen Gitterpunkten [13]. Zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen können Einschritt- oder Mehrschrittverfahren eingesetzt werden. Es lässt sich auch zwischen expliziten und impliziten Methoden unterscheiden, die dadurch charakterisiert sind, dass bei expliziten, im Unterschied zu impliziten, die zu berechnenden Werte nur auf der linken Seite der Rekursionsgleichung (Differenzengleichung) auftreten.
Wie im Anhang ausführlich erläutert wird, fällt die Wahl der Dikretisierungsmethode auf ein Runge-Kutta-Verfahren, ein explizites Einschrittverfahren. Einschrittverfahren benutzen definitionsgemäß nur den zuletzt berechneten Näherungswert, um im nächsten Zeitschritt die nächste Näherung zu berechnen. Geht man von der Integraldarstellung der Lösung

$$\vec{x}(T) = \vec{x}(t) + \int_t^T f(\tau, \vec{x}(\tau))d\tau \tag{4.3}$$

aus, so ersetzt man den Integranden durch ein Interpolationspolynom, so dass sich obiges Integral, selbst bei höheren Genauigkeitsanforderungen, relativ einfach berechnen lässt. Die einheitliche Berechnungsvorschrift der großen Familie der Runge-Kutta-Verfahren lautet

$$\begin{aligned} \vec{x}_{i+1} &= \vec{x}_i + h_i \sum_{j=1}^{s} b_j k_j, \quad t_{i+1} = t_i + h_i \\ k_j &= \vec{f}(t_j, \vec{x}_j), \quad t_j = t_i + c_j h_i, \quad \vec{x}_j = \vec{x}_i + h_i \sum_{l=1}^{s} a_{jl} k_l \end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei sich die $c_j\,, b_j$ und a_{jl} in Vektoren $\vec{c}\,,\ \vec{b}$ bzw. in einer Matrix $\underline{A}$ zusammenfassen und kompakt als sogenanntes *Butcher-Array* darstellen lassen, mit dem das Verfahren eindeutig charakterisiert wird

$$\begin{array}{c|c} \vec{c} & \underline{A} \\ \hline & \vec{b}^T \end{array}\,. \tag{4.5}$$

Bei der Herleitung von Runge-Kutta-Verfahren kann man nach Wahl der gewünschten Konsistenzordnung p und Zahl der Stufen $s \geq p$ mehrere Parameter frei wählen und unterschiedliche Verfahren definieren. Die Konsistenzordnung beschreibt die Qualität der numerischen Approximation in einem Schritt. Ein Verfahren heißt *konsistent*, falls der lokale Diskretisierungsfehler für $h \to 0$ gegen 0 strebt. Tatsächlich interessant ist allerdings die Qualität nach n Schritten. Ein Verfahren heißt *konvergent*, falls der globale Diskretisierungsfehler in einem Kompaktum für $n \to \infty$ ebenfalls gegen 0 strebt [14]. Konvergenz bedeutet also, dass für ein feiner werdendes Netz die Abweichung zwischen numerischer und exakter Lösung gegen 0 strebt. Mit einer geeigneten Definition von Stabilität sichern Konsistenz und Stabilität die Konvergenz eines Verfahrens. Ein Einschrittverfahren ist *konsistent* mit der Ordnung p genau dann, wenn es *konvergent* mit der Ordnung p ist. Deshalb spricht man üblicherweise nur noch von der Ordnung eines Einschrittverfahren [15].

Neben dem Ziel, für eine gewünschte Genauigkeit und erforderlichen Aufwand ein möglichst optimales Verhältnis zu finden, ist besonders die Möglichkeit der Fehlerabschätzung und damit der Schrittweitensteuerung das Ziel der Verfahrenssuche. Dafür benötigt man zwei Ergebnisse unterschiedlicher Genauigkeit, welche man durch Rechnung mit Verfahren verschiedener Ordnung p erhält. Um den Rechenaufwand zu minimieren, gilt es zwei Verfahren zu finden, bei denen möglichst viele der berechneten Funktionswerte $\vec{f}(t_j, \vec{x}_j)$ für beide Rechnungen verwendet werden können. Es gilt also zwei Verfahren zu finden, die sich nur in den Koeffizienten des Vektors $\vec{b}$ unterscheiden, weil dann alle Funktionswertberechnungen $\vec{f}(t_j, \vec{x}_j)$ für beide Verfahren verwendet werden können. Solche Verfahren werden *eingebettete Verfahren* genannt.

Für die Berechnung des wegerregten Systems in MATLAB wird die Routine `ode45.m` angewendet, die ein Verfahren 4. und 5. Ordnung kombiniert, das sogenannte *Dormand-Prince-Verfahren*. Die beiden Mathematiker J. R. Dormand und P. J. Prince haben ein 7-stufiges Verfahrenspaar entwickelt, das eine Lösung der Ordnung $p = 5$ und eine eingebettete Lösung der Ordnung $p = 4$ erzeugt. Obwohl 7-stufig, sind bei diesem Verfahren nur 6 Funktionswertberechnungen für einen Integrationsschritt erforderlich, weil die letzte Funktionswertberechnung eines Schrittes gleichzeitig als erste für den nächsten Schritt genutzt wird. Die Methode wird durch das entsprechende *Butcher-Array* definiert. Der interessierte Leser sei auf die Literatur verwiesen, im Speziellen auf [16].

Für die Berechnung des krafterregten und krafterregten gefesselten Systems hat sich eine Integration mit fixer Schrittweite als besser erwiesen (siehe Anhang C Auswahl einer geeigneten Integrationsroutine). Als geeignetes Verfahren mit entsprechendem

Butcher-Array für äquidistante Schrittweite und höchstmöglicher Ordnung kommt das nach den beiden deutschen Mathematikern C. Runge und M. W. Kutta benannte *klassische Runge-Kutta-Verfahren* in Frage. Für die Berechnung in Matlab wird die Routine `ode4.m` eingesetzt. Im Unterschied zur Berechnung des wegerregten Systems wird bei diesem 4-stufigen Verfahren der Ordnung $p = 4$ anstelle einer Schrittweitensteuerung mit Hilfe einer eingebetteten Lösung eine fixe Schrittweite verwendet. Die Genauigkeit der Lösung und die Simulationsdauer sind also direkt von der gewählten Schrittweite und der Ordnung des Verfahrens abhängig.

Schrittweite
Um die Stabilität des Verfahrens zu sichern, aber auch um die gewünschte Genauigkeit des Verfahrens zu erhalten, sollte eine Schrittweitenkontrolle mit der numerischen Simulation einhergehen. In Bereichen, in denen sich die Lösung stark ändert, muss eine relativ kleine Schrittweite gewählt werden, um den Fehler klein zu halten. In den Bereichen, in denen sich die Lösung wenig ändert, kann dann eine große Schrittweite gewählt werden, um den Rechenaufwand zu verringern. Die Schrittweite muss gewissermaßen dem Lösungsverlauf angepasst werden. Die Effizienz des Verfahrens hängt sehr stark von einer guten Schrittweitensteuerung ab [17]. Das *Dormand-Prince-Verfahren* liefert für jeden Zeitschritt eine Approximation 4. Ordnung und eine 5. Ordnung, die miteinander verglichen werden. Die Differenz wird als Maß für den lokalen Fehler benutzt, um automatisch die Schrittweite zu steuern [18].
Das *klassische Runge-Kutta-Verfahren* hat aufgrund seiner fixen Schrittweite keine inhärente Fehlerabschätzung. Es muss daher die Schrittweite auf einen sinnvollen Wert festgelegt werden und eine Analyse des Fehlers in Abhängigkeit der Schrittweite durchgeführt werden (siehe Anhang D Wahl einer geeigneten *virtuellen Samplingfrequenz*).

Continuous Extensions
Bei der numerischen Berechnung mit Schrittweitensteuerung erhält man als Ergebnis Näherungen der Lösungsfunktion an beliebigen Stellen. Die Schrittweite ist nicht konstant. Manchmal sind Lösungen an weiteren oder an ganz bestimmten Zeitpunkten von Interesse. Alleine für einen optisch ansprechenden Plot mit ausreichender Genauigkeit benötigt man entsprechend viele Punkte, die jeweils mit Geraden verbunden werden. Runge-Kutta-Algorithmen mittlerer bis höherer Ordnung machen teilweise so große Schritte, dass diese im Plot erkennbar sind. Ist man an der Lösung an weiteren Punkten interessiert, bedarf es einer Approximation der Lösung zwischen den Gitterpunkten. Hierzu wird die Lösung mittels einer stetigen Erweiterung der Ordnung 4 angenähert, die auf einem Polynom vom Grad 5 basiert. Diese wird an den gewünschten Stellen ausgewertet, wobei für die Berechnung keine zusätzlichen Gitterpunkte nötig sind und somit einiges an Rechenaufwand gespart werden kann

[14, 19, 20]. Die erhaltene Lösung an den bestimmten Zeitpunkten ist von derselben Fehlerordnung, wie die Lösung an den Gitterpunkten [21].
Die Implementierung der *Continuous Extensions* in Matlab wird in dieser Arbeit für die Berechnung des wegerregten Systems verwendet um die Vorteile der variablen Schrittweite nützen zu können um Rechenzeit zu sparen und gleichzeitig die notwendigen Fehlertoleranzen einzuhalten, dabei dennoch eine Lösung mit fixer Schrittweite zu erhalten. Dies ermöglicht verschiedene Ergebnisse an bestimmten Zeitpunkten vergleichen zu können.

4.2 Analytische Anregungen

Als einfachste Anregungen des wegerregten Systems dienen der Sprung und die Schwelle. Die Anregungen helfen einerseits bei der Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse, andererseits stellen sie eine sehr einfache Form der Weganregung dar. Die Anregungen lassen sich allgemein mit bekannten mathematischen Funktionen beschreiben und liefern eine kontinuierliche Darstellung, die sich zu beliebigen Zeitpunkten auswerten lässt. So werden auch die beiden Anregungen stückweise mittels Geraden definiert und dienen als Eingabe für das Berechnungsprogramm. Als Anregung Sprung dient eine Sprungfunktion mit einer Amplitude von 0,01 m. Die Abmessungen der Schwelle wurden von Magna Steyr Fahrzeugtechnik zur Verfügung gestellt (siehe auch Abbildung 4.4). Die Schwelle soll folgend als MSF-Schwelle bezeichnet werden. Beide Anregungen werden nach 0,5 s vom Vorderrad überfahren, die Anregung am Hinterrad stellt sich in Abhängigkeit der Fahrgeschwindigkeit ein. Um die Plausibilität der Ergebnisse zu bewahren und ein Abheben der Reifen zu verhindern, wurde bei den analytischen Anregungen eine Fahrgeschwindigkeit von 6 km/h gewählt. Die Wahl der Fahrgeschwindigkeit und die Abmessungen der jeweiligen Anregungen stellen sicher, dass die Radaufstandskräfte nicht verschwinden und eine möglichst realitätsnahe, aber dennoch einfache Berechnung erfolgt.

4.2.1 Wegerregtes Modell

Im Folgenden sei die numerische Berechnung des wegerregten Systems anhand eines Flussdiagramms erläutert. Als Eingabe des Berechnungsprogramms dient die Weganregung Sprung oder Schwelle, die jeweils mit stückweise linearen Funktionen definiert ist. Nach Aufstellen der Systemmatrizen mit den entsprechenden Parametern und Definieren der Anfangsbedingungen lässt sich das System in der Zustandsraumdarstellung nach der Zeit integrieren. Wie bereits beschrieben, wird die Matlab Integrationsroutine `ode45.m` verwendet, ein explizites eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren.

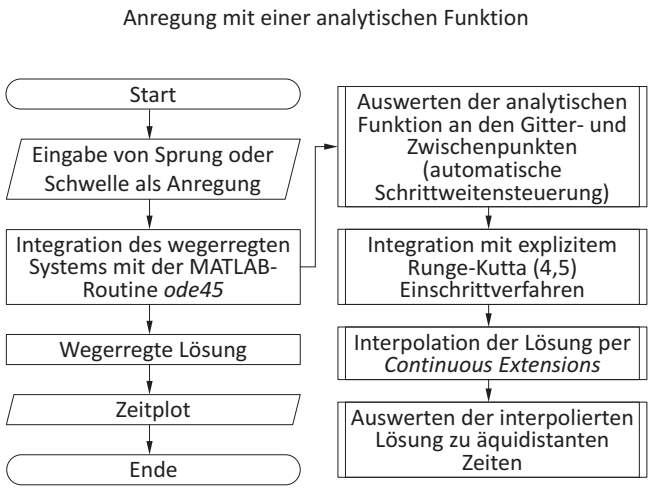


Abbildung 4.1: Flussdiagramm der numerischen Berechnung des wegerregten Systems bei einer analytischen Anregung

Für die Berechnung der Näherungslösung an einem folgenden Gitterpunkt ist das Auswerten des Differentialgleichungssystems und folglich der analytischen Funktion sowohl am Gitterpunkt, als auch an Zwischenpunkten nötig. Das Runge-Kutta-Verfahren benötigt nämlich für die Berechnung der Näherungslösung an den Gitterpunkten zusätzlich Funktionswerte an Zwischenpunkten. Aufgrund der automatischen Schrittweitensteuerung sind die einzelnen Integrationsschritte nicht äquidistant. Die Integration liefert nun eine Näherungslösung an den Gitterpunkten. Will man aber Zustandsgrößen an von den Gitterpunkten verschiedenen Stellen wissen, bedient man sich der Verwendung von *Continuous Extensions*. Die Lösung wird mit Interpolationspolynomen vierter Ordnung stückweise interpoliert und an den gesuchten Zeitpunkten ausgewertet, wobei die Fehlerordnung der ausgewerteten Punkte gleich jener der bereits berechneten Lösung an den Gitterpunkten ist [21]. In vorliegendem Problem ist die Lösung an äquidistanten Zeitpunkten von Interesse. Diese äquidistanten Zeitpunkte im Berechnungsprogramm entsprechen den Messpunkten der Radnabenkräfte und -momente während einer Messung. Man kann also den Abstand der berechneten Punkte als Abtastintervall bezeichnen bzw. daraus eine Samplingfrequenz ableiten. Die Abtastfrequenz soll im Weiteren als *virtuelle Samplingfrequenz* oder *Ausgabeschrittweite* bezeichnet werden. Die so berechnete Lösung des wegerregten Systems liefert also alle Zustandsgrößen der Lage und Geschwindigkeit zu äquidistanten Zeitpunkten. Die konstante Schrittweite ist für die Verwendung der Integrationsroutine `ode4.m` zur Berechnung der krafterregten Systeme notwendig und ermöglicht es überdies, die Lösung von verschiedenen Systemen zu gleichen Zeitpunkten vergleichen zu können. Die vorhandene Lösung wird über der Zeit geplottet und als Graphik (siehe Abbildung 4.2 und Abbildung 4.5) ausgege-

ben bzw. als Eingangskräfte, die über Radverschiebung und Federsteifigkeit berechnet werden, dem krafterregten System übergeben.

Sprung

Die verwendete Sprungfunktion hat eine Amplitude von 0,01 m und es wird eine Fahrgeschwindigkeit von 6 km/h angenommen. Daraus ergibt sich eine Phasenverschiebung der Signale zwischen Vorder- und Hinterrad von etwa 1,7 s, wobei das Vorderrad nach 0,5 s angeregt wird. Als Integrationsintervall wird durchgehend 10 s gewählt, um die Ergebnisse wiederum vergleichbar zu machen. Die maximale Schrittweite `MaxStep` wurde auf 10 ms begrenzt, um sicherzugehen, dass der Solver die Schrittweite nicht zu groß wählt und Information der Anregung überspringt. Betrachtet man nur die Sprunganregung, wäre dieses Vorgehen nicht nötig, da ein Informationsverlust bei Anregung Sprung und der gewählten Integrationsdauer praktisch nicht möglich ist. Da die Ergebnisse aber vergleichbar sein sollen, wurden bei der Berechnung der verschiedenen Systeme durchwegs dieselben Einstellungen verwendet. Als *Ausgabeschrittweite* wurde 1 ms gewählt. Übliche Abtastfrequenzen bei Magna Steyr Fahrzeugtechnik sind für die Nabenkraftmessung vorwiegend 600 Hz und teilweise 1000 Hz. Bei der gewählten Frequenz von 1 kHz handelt es sich also um die größtmögliche realistische Samplingfrequenz (siehe auch Anhang D Wahl einer geeigneten *virtuellen Samplingfrequenz*).

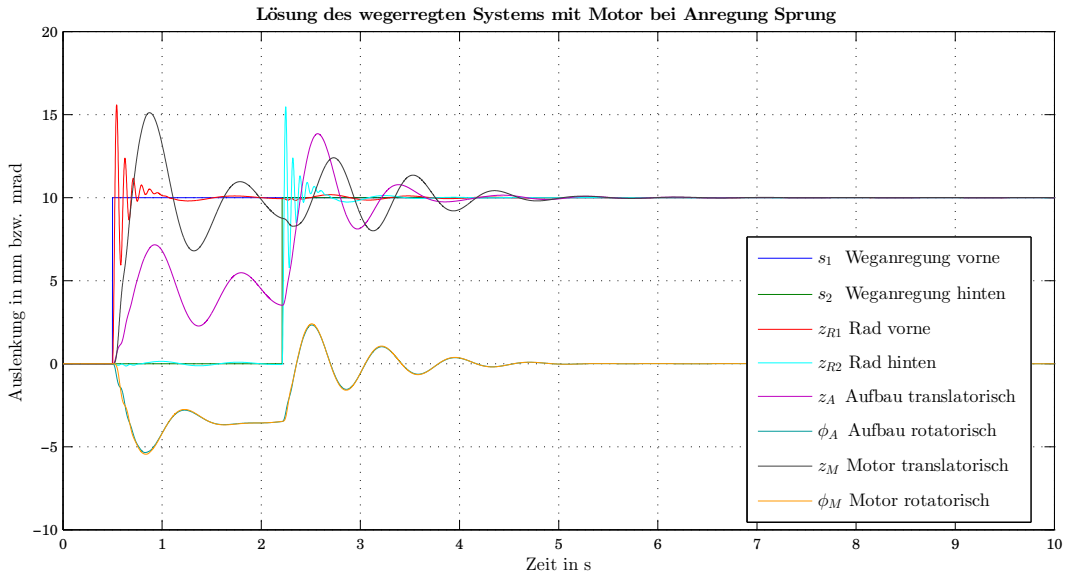


Abbildung 4.2: Lösung des wegerregten Systems bei Anregung Sprung

Die Fahrgeschwindigkeit scheint auf den ersten Blick etwas gering. Ein Aspekt wurde bereits erwähnt, denn die Wahl der Amplitude der Anregung und die Fahrgeschwindigkeit stellen sicher, dass kein Abheben der Reifen auftreten kann. Des Weiteren ist

das Modell auch nur bei geringen Geschwindigkeiten gültig. Die sehr einfache Modellierung des Reifens berücksichtigt ausschließlich vertikaldynamische Aspekte, Längs- und Querdynamik werden gänzlich außer Acht gelassen.

In Abbildung 4.2 ist die Lösung des wegerregten Systems ersichtlich. Dargestellt sind alle verallgemeinerten Lagekoordinaten bei einer Sprunganregung. Deutlich zu erkennen sind die höherfrequenten Schwingungen der beiden Radmassen, welche im Bereich der jeweiligen Eigenfrequenzen liegen (12,0 Hz vorne und 13,9 Hz hinten). Die translatorischen Schwingungen des Aufbaus und Motors liegen bei etwa 1 Hz, die rotatorischen Schwingungen bei etwa 1,5 Hz. Die Frequenzen liegen wiederum in der Nähe der jeweiligen Eigenfrequenzen (Hubschwingung von 1,1 Hz bzw. Nickschwingung von 1,4 Hz von Aufbau- und Motormasse). Die typischen Frequenzbereiche lassen sich auch aus einem Bode-Diagramm ablesen, welches das Übertragungsverhalten des dynamischen Systems darstellt.
Wie man in Abbildung 4.2 erkennen kann, sind die rotatorischen Auslenkungen der Aufbau- und Motormasse kaum zu unterscheiden. Betrachtet man Abbildung 4.3, treten tatsächlich relativ kleine Motorrelativverschiebungen gegenüber der Aufbaumasse auf.

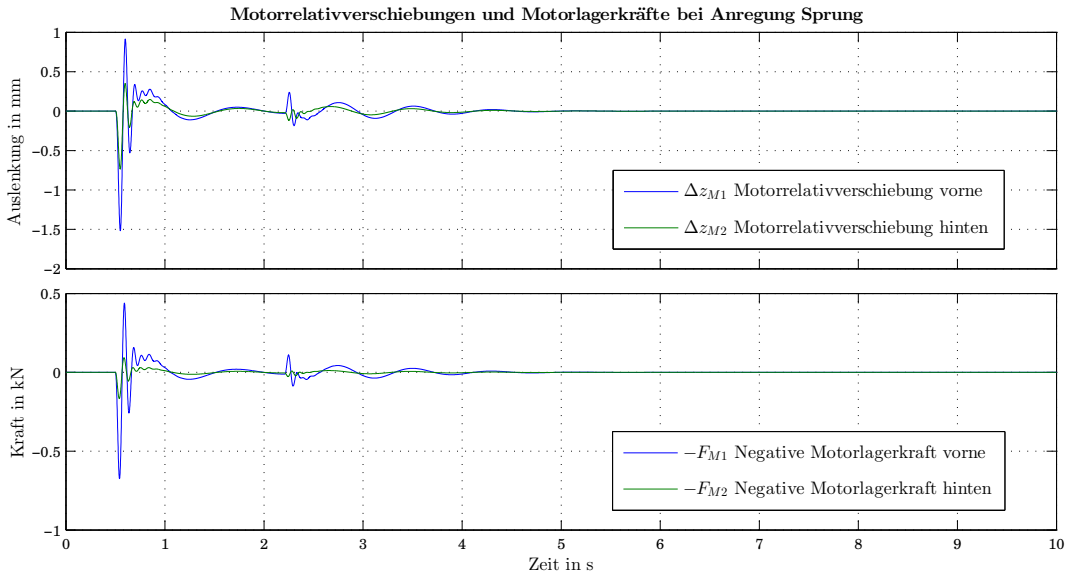


Abbildung 4.3: Motorlagerkräfte und Motorrelativverschiebungen bei Sprunganregung

Im oberen Teil der Abbildung 4.3 sind die jeweiligen Motorrelativverschiebungen der Motormasse gegenüber der Aufbaumasse dargestellt. Bis auf einen Faktor, der Ersatzsteifigkeit der Motor- und Getriebelagerung, entsprechen sie den jeweiligen Federkräften. Im unteren Teil der Abbildung sind die Motor- und Getriebelagerkräfte dargestellt. Diese Kräfte umfassen sowohl Feder- als auch Dämpfungskräfte. Man

sieht also, dass eher geringe Dämpfungskräfte auftreten und die Federkräfte dominieren, da sich beide Verläufe qualitativ kaum unterscheiden. Einzig bei der unmittelbaren Sprunganregung ist ein Unterschied zu erkennen. Die Kräfte am Motorlager sind auch bedeutend größer als jene am Getriebelager. Wirft man einen Blick in den Anhang B Parameterwerte und betrachtet im Speziellen die Lage des Motorschwerpunktes, so erscheinen die Ergebnisse auch plausibel.

Schwelle

Als Anregung Schwelle wird die MSF-Schwelle verwendet, deren Abmessungen in Abbildung 4.4 ersichtlich sind. Die allgemeinen Annahmen und Integrationseinstellungen entsprechen jenen der Sprunganregung, um die Ergebnisse vergleichbar zu machen. Die Schwelle wird wiederum mit einer Fahrgeschwindigkeit von 6 km/h überfahren. Dabei benötigt die Überfahrt des schrägen Teils der Schwelle jeweils 48 ms und jene des geraden Teils 300 ms. Die Begrenzung der maximalen Schrittweite `MaxStep` auf 10 ms scheint dadurch ausreichend und auf einen sinnvollen Wert festgelegt, um einen Informationsverlust der Anregung vermeiden zu können. Ein Abheben der Räder und ein Verschwinden der Radaufstandskräfte kann wieder ausgeschlossen werden.

Abmessungen der MSF-Schwelle

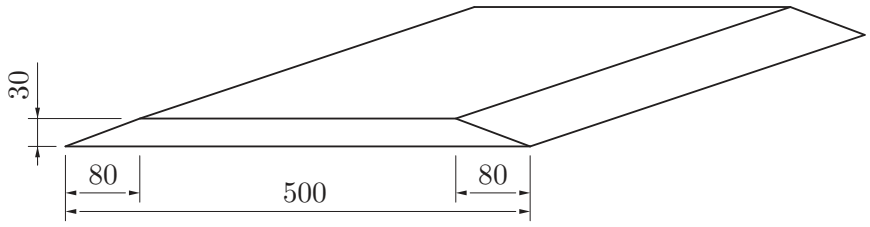


Abbildung 4.4: Abmessungen der MSF-Schwelle in Millimeter

Die Lösung des wegerregten Systems bei Anregung Schwelle zeigt erneut das Systemverhalten des Modells. Vergleicht man die einzelnen Zustandsgrößen der Lage bei den verschiedenen Anregungen, lassen sich charakteristische Eigenschaften wiederfinden. Die Frequenzen der beiden Radmassen liegen wieder zwischen 12 Hz und 14 Hz, wobei die hintere Radmasse entsprechend mit der höheren Frequenz schwingt. Der Frequenzbereich der Hub- und Nickschwingungen von Aufbau- und Motormasse liegt wiederum bei etwa 1 Hz und 1,5 Hz.

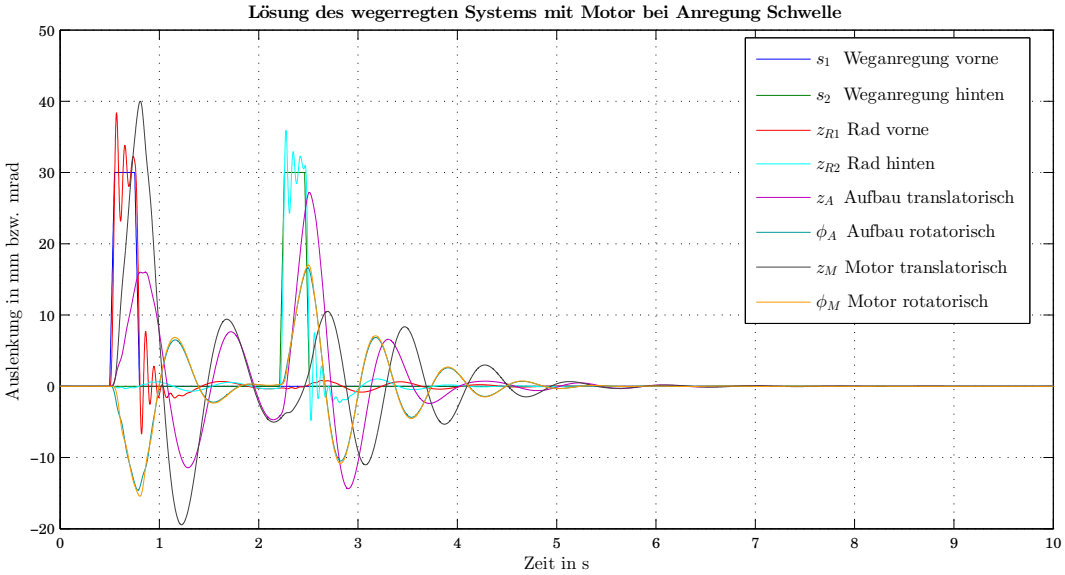


Abbildung 4.5: Lösung des wegerregten Systems bei Anregung Schwelle

In der folgenden Abbildung 4.6 sind die Motorrelativverschiebungen gegenüber der Aufbaumasse und die entsprechenden Motorlagerkräfte dargestellt. Zu erkennen ist wiederum der geringe Anteil der Dämpfungskräfte, sichtbar am kaum merkbaren qualitativen Unterschied in den Kurvenverläufen. Einzig bei der unmittelbaren Schwellenüberfahrt ist ein Unterschied zu erkennen. Die Motorlagerkräfte sind aufgrund der geometrischen Anordnung bedeutend größer als die Getriebelagerkräfte.

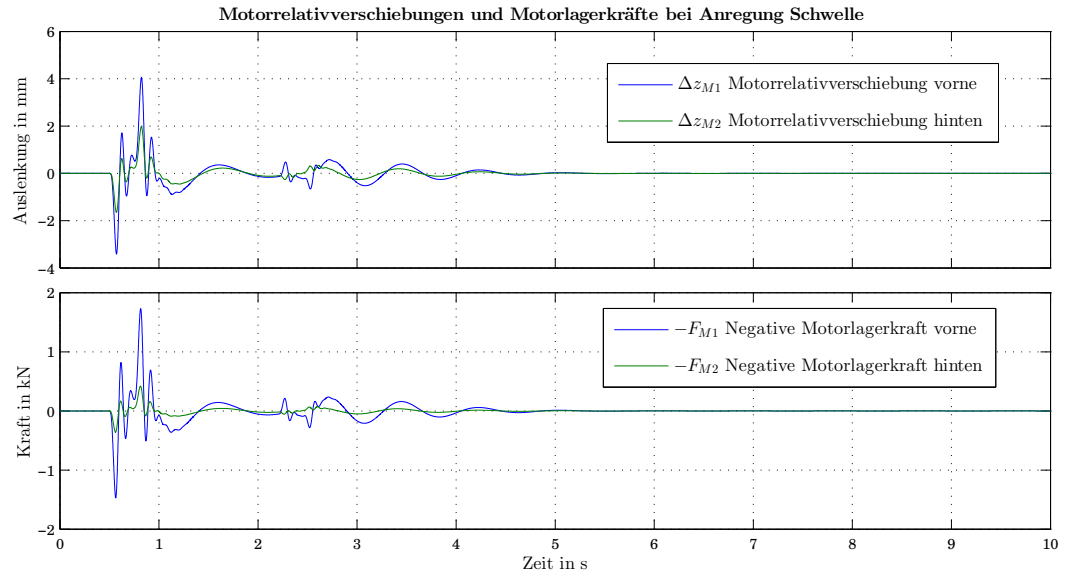


Abbildung 4.6: Motorlagerkräfte und Motorrelativverschiebungen bei Schwellenanregung

Vergleicht man die Kräfte bei Anregung Sprung und Anregung Schwelle, treten bei Schwellenanregung wegen der geometrischen Abmessungen der MSF-Schwelle höhere Verschiebungen und Kräfte auf.

Die beiden Anregungen Sprung und Schwelle des wegerregten Systems lassen sich gut zur Prüfung der Richtigkeit der Rechnung und Plausibilität der Ergebnisse heranziehen. Zusätzlich wurde das System im MKS-Programm SIMPACK implementiert und eine Kontrollrechnung durchgeführt, um richtige Ergebnisse zu gewährleisten.

4.2.2 Krafterregtes Modell

Nach der Integration des wegerregten Systems kennt man nun alle Zustandsgrößen der Lage und Geschwindigkeit bei Anregung Sprung oder Schwelle (siehe auch Abbildung 4.7). Dies entspricht in der Realität der Überfahrt eines Fahrzeuges über das entsprechende Hindernis. Während man nun bei einer tatsächlichen Messfahrt die Radnabenkräfte und -momente mit einer Radmessnabe aufzeichnet, muss dieser Schritt in der Rechnung auch erfolgen. Es gilt also, aus den Zustandsgrößen des wegerregten Modells und der Anregung die auftretenden Kräfte zu bestimmen. Aus der Ersatzsteifigkeit des Reifens, der Verschiebung der Radmasse und der Weganregung lassen sich die äquivalenten Kräfte wie folgt ermitteln

$$F_i(t) = c_{Ri}[s_i(t) - z_i(t)] \qquad \text{bzw.} \qquad F_{i,j} = c_{Ri}(s_{i,j} - z_{i,j}) \qquad (4.6,\ 4.7)$$

wobei der Index i wiederum die entsprechende Radmasse kennzeichnet und j einen Zeitpunkt der äquidistanten Lösung des wegerregten Systems. Bei den berechneten Kräften handelt es sich allerdings um die Radaufstandskräfte des jeweiligen Rades, während bei einer Messung die Radnabenkräfte aufgezeichnet werden. Es wird also das krafterregte Modell in der Rechnung mit Radaufstandskräften erregt. Für die grundsätzliche Untersuchung des Abdriftens spielt diese Vereinfachung keine Rolle, es wird lediglich aus Gründen der Vollständigkeit darauf hingewiesen. Würde man der echten Messung entsprechende Radnabenkräfte ermitteln wollen, müsste man die anteiligen Trägheitskräfte der bekannten Massen von Reifen und Felge abziehen.

Da die Berechnung der äquivalenten Kräfte mit der Messung der Radnabenkräfte gleichzusetzen ist, wird entsprechend einem konstanten Abtastintervall der Messung eine Berechnung des wegerregten Systems zu äquidistanten Zeitpunkten angestrebt. Es kann dabei eine *virtuelle Samplingfrequenz* abgeleitet werden, wobei die geeignete Wahl im Anhang D genauer beschrieben wird. Die berechneten äquivalenten Kräfte dienen nun als Eingabe für die Simulation des krafterregten Systems.

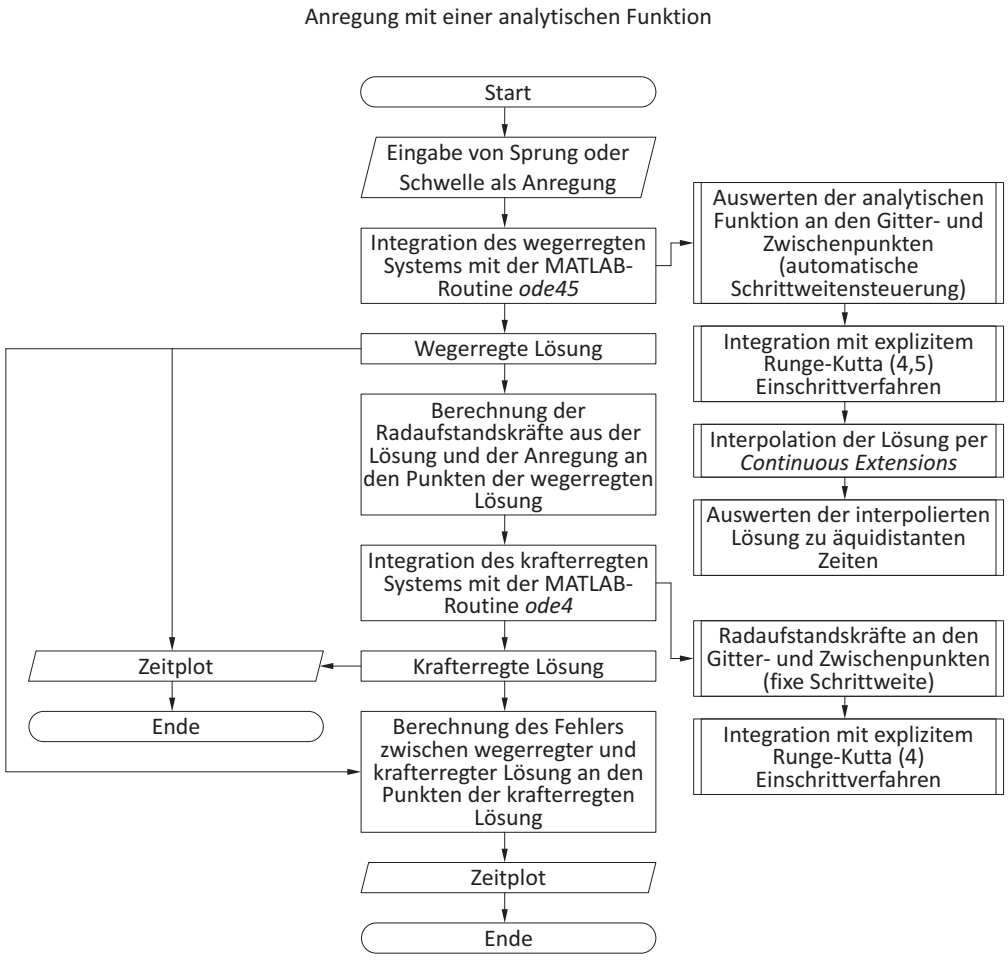


Abbildung 4.7: Flussdiagramm der numerischen Berechnung des krafterregten Systems bei einer analytischen Anregung

Die Integration des krafterregten Systems erfolgt mit der Routine `ode4.m`, einem *klassischen Runge-Kutta-Verfahren* 4. Ordnung. Für die Berechnung der Näherungslösung an einem folgenden Gitterpunkt ist entsprechend dem *Butcher-Array* das Auswerten des Differentialgleichungssystems und folglich der äquivalenten Kräfte sowohl am Gitterpunkt, als auch an einem vorhergehenden Zwischenpunkt nötig. Das *klassische Runge-Kutta-Verfahren* benötigt nämlich für die Berechnung der Näherungslösung an den Gitterpunkten zusätzlich Funktionswerte an äquidistanten Zwischenpunkten. Die Radaufstandskräfte liegen zu äquidistanten Zeitpunkten vor und ermöglichen so die Integration mit fixer Schrittweite. Die Integration liefert nun eine Näherungslösung des krafterregten Systems an den Gitterpunkten. Aufgrund der notwendigen Zwischenpunkte ergibt sich beim krafterregten System eine doppelt so große *Ausgabeschrittweite* wie beim wegerregten System. Dies ermöglicht den Vergleich der beiden Systeme zu gleichen Zeitpunkten. Die Berechnung des Fehlers zwi-

schen wegerregter und krafterregter Lösung kann nun an den Zeitpunkten der krafterregten Lösung erfolgen. Nach der Berechnung der beiden Systeme lassen sich einerseits einzelne Zustandsgrößen der Lage und Geschwindigkeit im Zeitplot darstellen, beispielsweise die translatorische und rotatorische Verschiebung der Aufbaumasse in Abbildung 4.8 und Abbildung 4.11. Andererseits lässt sich die Differenz von krafterregten und wegerregten System aufgrund der Darstellung zu gleichen Zeitpunkten berechnen und wie in Abbildung 4.9 und Abbildung 4.12 als Zeitplot darstellen.

Maß für die Abweichung

Wie im folgenden Kapitel 5 Optimierung genauer beschrieben wird, ist die translatorische und rotatorische Abweichung des Aufbaus von besonderem Interesse. Möchte man diese Abweichung quantitativ erfassen, benötigt man ein geeignetes Maß. Als Qualitätsmerkmal für die Güte einer Fesselung soll der ECOV (Error Coefficient of Variation) dienen. Der Grund der Wahl soll im folgenden Kapitel noch näher erläutert werden. Um die Abweichung des krafterregten vom wegerregten System zu erfassen, lässt sich der ECOV wie folgt anschreiben

$$ECOV_{z_A} = 100\sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_N}(z_A(t)-\zeta_A(t))^2dt}{\int_{t_0}^{t_N} z_A(t)^2dt}} \tag{4.8}$$

$$ECOV_{\varphi_A} = 100\sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_N}(\varphi_A(t)-\alpha(t))^2dt}{\int_{t_0}^{t_N} \varphi_A(t)^2dt}} \tag{4.9}$$

Die auftretenden Integrale werden in MATLAB durch numerische Integration mit der Trapezregel `trapz.m` berechnet.

Sprung

Die Integrationseinstellung des krafterregten Systems bei Anregung Sprung ist entsprechend der verwendeten Integrationsroutine und der gewählten *virtuellen Samplingfrequenz* von 1000 Hz eine fixe Schrittweite von 2 ms. Das Integrationsintervall ist wiederum 10 s. Die *Ausgabeschrittweite* des krafterregten Systems ergibt sich zu 2 ms.

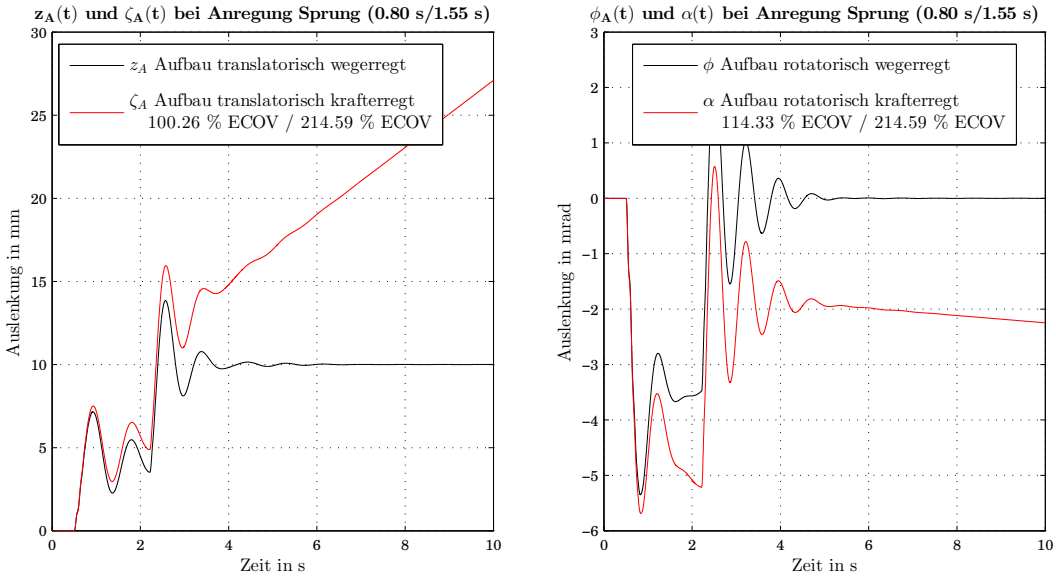


Abbildung 4.8: Translation und Rotation der Aufbaumasse des wegerregten und krafterregten Systems bei Anregung Sprung

Im linken Bild der Abbildung 4.8 ist die translatorische Verschiebung der Aufbaumasse ersichtlich, im rechten Bild die rotatorische Auslenkung. Es ist sehr deutlich die große Abweichung des krafterregten vom wegerregten System zu erkennen. In der Legende ist die Abweichung mit Hilfe des ECOVs quantitativ beschrieben, der linke Wert beschreibt jeweils die Abweichung von reiner Translation bzw. Rotation und der rechte die Summe der beiden Abweichungen. Vergleicht man mit den anderen Anregungen, kommt es beim Sprung zu den größten Abweichungen. Besonders die rotatorische Abweichung ist in Anbetracht einer Bestimmung von Schnittgrößen unakzeptabel hoch. Neben einer optisch großen Abweichung beider Lagekoordinaten ergibt eine Bewertung mit Hilfe des ECOVs ebenfalls große Differenzen. Die Abweichung der reinen Translation erscheint optisch geringfügig größer, die Bewertung der Abweichung mit Hilfe des ECOVs deutet allerdings auf eine etwas größere rotatorische Abweichung hin. Da der ECOV allerdings eine bezogene Größe ist und der Nenner in Formel (4.9) entsprechend dem Verlauf der rotatorischen Auslenkung relativ klein ist, erklärt das den größeren Wert des ECOVs verglichen zur reinen Translation. Beachtet man die absolute Größe der Auslenkungen, so überschreitet beispielsweise bei reiner Translation die Abweichung um mehr als den doppelten Wert die maximale Auslenkung.

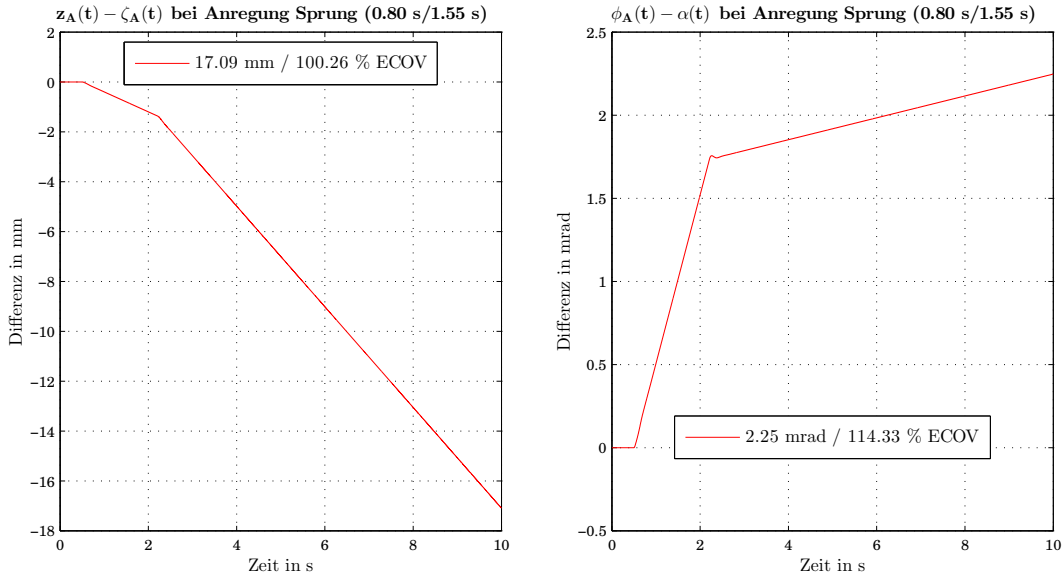


Abbildung 4.9: Differenz zwischen weg- und krafterregter Lösung bei Anregung Sprung

In Abbildung 4.9 sind jeweils die Differenzen von weg- und krafterregtem System dargestellt. Man kann deutlich die Sprunganregung der beiden Radmassen am Verlauf der Kurven erkennen. Wirkt keine Anregung der Radmassen, so stellt sich ein Abdriften mit konstanter Geschwindigkeit ein. In den Abbildungen lassen sich in den oberen Schriftleisten die Rechenzeiten des weg- und krafterregten Systems ablesen, wobei der erste Wert die Simulationsdauer des wegerregten Systems und der zweite die Simulationsdauer des krafterregten Systems beschreibt.

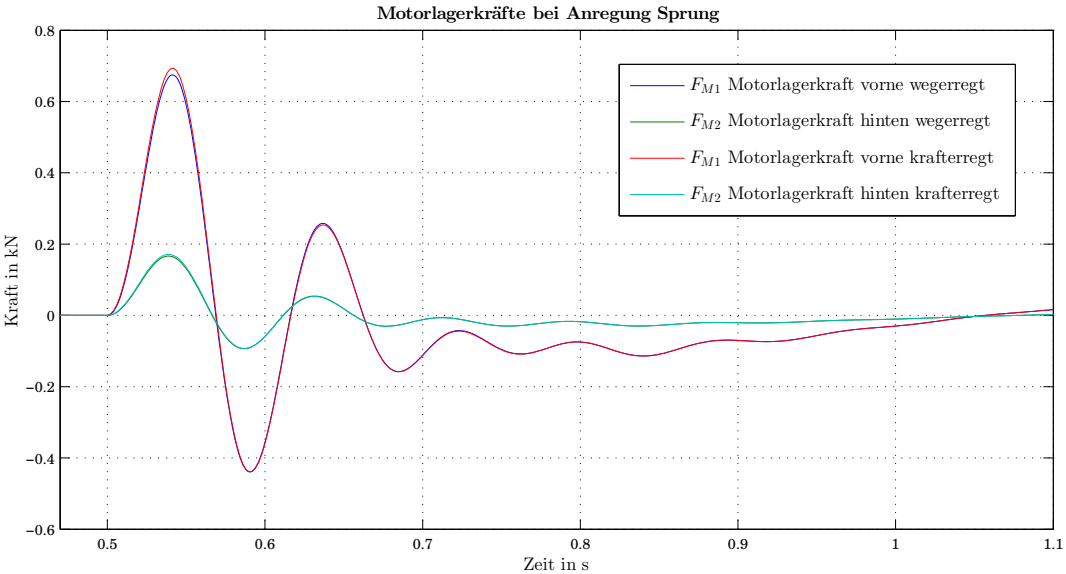


Abbildung 4.10: Motorlagerkräfte des weg- und krafterregten Systems bei Anregung Sprung

Wirft man einen Blick auf die Motorlagerkräfte beim wegerregten und krafterregten System, so ergibt sich, anders als bei den Auslenkungen, eine bessere Übereinstimmung. Dargestellt ist in Abbildung 4.10 ein Ausschnitt am Anfang des Integrationsintervalls, um den Unterschied in den Kurven besser erkennbar zu machen. Die Kräfte am Motorlager unterscheiden sich geringfügig mehr als jene am Getriebelager. Während bei einem Abdriften des Systems mit konstanter Geschwindigkeit die Verschiebungen linear anwachsen, kumuliert sich bei den Kräften kein Fehler. Würde man allerdings wie bei einer Vollfahrzeugsimulation den Einfluss der Gewichtskraft berücksichtigen und dann die Motorlagerkräfte berechnen, würde sich durch ein rotatorisches Abdriften eine starke Abweichung ergeben.

Schwelle

Die Integrationseinstellungen entsprechen jenen der Anregung Sprung.

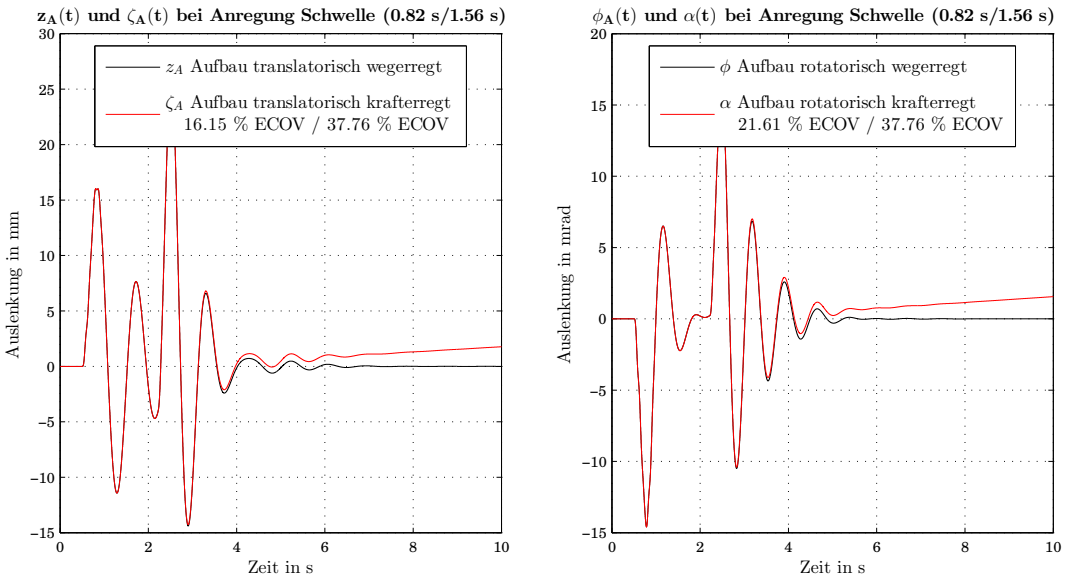


Abbildung 4.11: Translation und Rotation der Aufbaumasse des wegerregten und krafterregten Systems bei Anregung Schwelle

Wie man in obiger Abbildung erkennen kann, sind sowohl die translatorische als auch die rotatorische Abweichung bei Anregung Schwelle bedeutend geringer als bei Anregung Sprung. Neben einer geringen optischen Abweichung stellt sich auch eine etwas bessere Bewertung mit Hilfe des ECOVs ein. Ähnlich wie bei Anregung Sprung lässt sich ein größeres rotatorisches Abdriften feststellen.

Ein möglicher Grund der geringeren Abweichung beider Lagekoordinaten liegt vermutlich im Impuls, den das System bei der Überfahrt der Schwelle erfährt. Während das System durch die Anregung des vorderen schrägen Teils einen Impuls nach oben erfährt, erhält es bei unmittelbarer Überfahrt des hinteren schrägen Teils einen ent-

gegengesetzten Impuls nach unten und es könnte auf diese Weise ein weiteres Abdriften vermindert werden. Ein anderer Grund liegt sicherlich im unterschiedlichen Frequenzspektrum der beiden Anregungen. Während der Sprung zumindest sehr hohe Frequenzen enthält, die man mit der gewählten *virtuellen Samplingfrequenz* nicht abbilden kann, sind die enthaltenen Frequenzen bei der Anregung Schwelle niedriger.

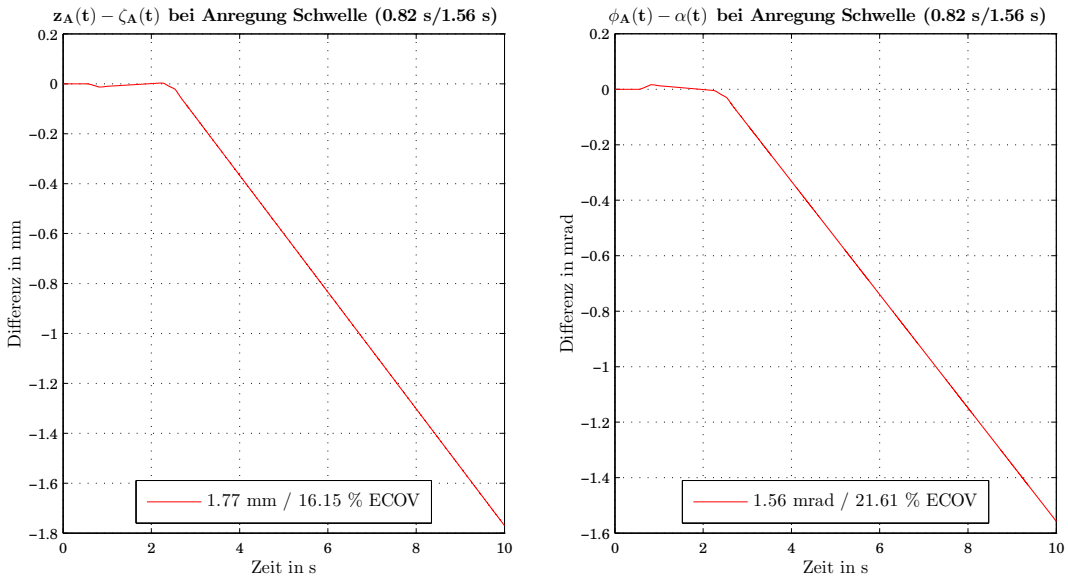


Abbildung 4.12: Differenz zwischen weg- und krafterregter Lösung bei Anregung Schwelle

Im Verlauf der Differenzen in Abbildung 4.12 lässt sich wieder die Anregung erkennen. In beiden Bildern kann man jeweils die Schwellenüberfahrt der beiden Radmassen identifizieren. Bei fehlender Anregung stellt sich wiederum ein Abdriften mit konstanter Geschwindigkeit ein. Die Motorlagerkräfte stimmen bei Anregung Schwelle so gut überein, dass sich kein optischer Unterschied in den beiden Verläufen erkennen lässt.

Zusammenfassend für die Systeme mit analytischen Funktionen als Anregung treten bei Anregung Sprung bedeutend größere Abweichungen auf als bei Anregung Schwelle. Beiden Anregungen gemeinsam ist die größere rotatorische Abweichung, was sich natürlich in einem Vollfahrzeugmodell besonders ungünstig auf die Bestimmung von Schnittkräften auswirkt. Eine Fesselung des krafterregten Systems würde sich in beiden Fällen als notwendig erweisen, wobei es besonders bei Anregung Sprung viel Verbesserungspotential gibt.

4.2.3 Krafterregtes gefesseltes Modell

Der Simulationsaufbau des krafterregten gefesselten Systems gleicht jenem des krafterregten Systems. Einzig die Koeffizientenmatrix des Differentialgleichungssystems ändert sich aufgrund der Aufbaumassenfesselung (siehe Anhang A Systemmatrizen). Das Integrationsintervall ist wiederum 10 s bei einer *virtuellen Samplingfrequenz* von 1000 Hz und einer *Ausgabeschrittweite* des gefesselten Systems von 2 ms. Die dargestellten Plots sind die Lösungen des krafterregten gefesselten Modells bei den analytischen Anregungen Sprung und Schwelle mit Aufbaumassenfesselung, wobei die Fesselungsparameter für die jeweilige Anregung die optimalen Parameter des *restringierten* Problems sind. Es werden also nur positive Werte der Fesselungsparameter als Lösung der *Optimierungsaufgabe* zugelassen. Die Bestimmung der optimalen Parameter wird in Kapitel 5 Optimierung genauer beschrieben. Im selben Kapitel lässt sich auch der Einfluss der Radmassenfesselung auf die Simulationsergebnisse nachlesen.

Sprung

Die Integrationseinstellungen gleichen jenen des krafterregten Systems. Die folgenden Abbildungen enthalten die Simulationsergebnisse des krafterregten gefesselten Modells mit den optimalen *restringierten* Fesselungsparametern bei Anregung Sprung.

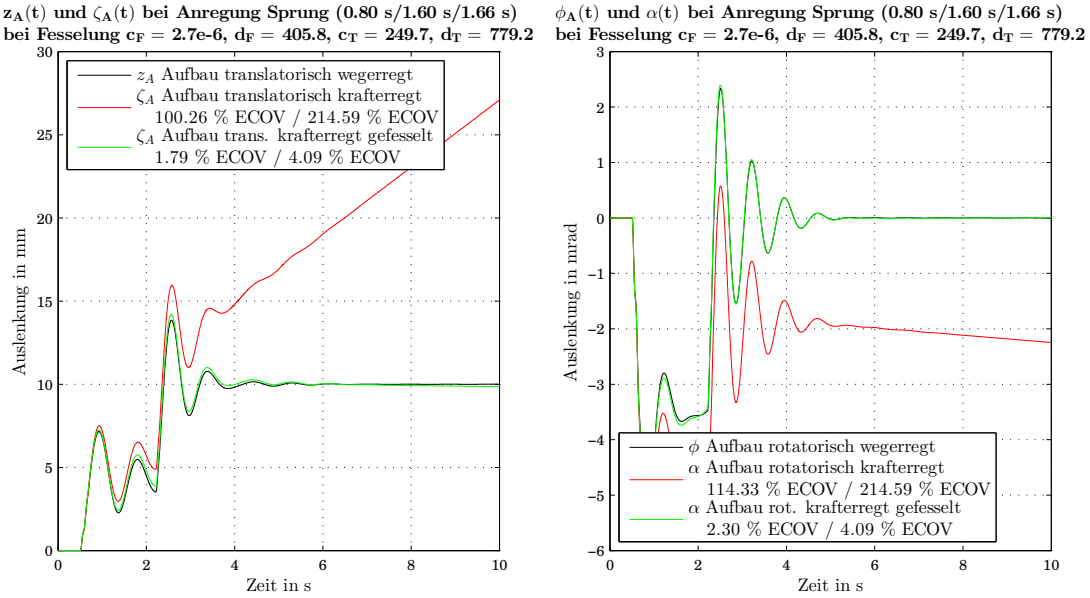


Abbildung 4.13: Translation und Rotation der Aufbaumasse des krafterregten gefesselten Systems mit optimalen Fesselungsparametern bei Anregung Sprung

In Abbildung 4.13 ist die Abweichung des krafterregten und des krafterregten gefesselten Systems vom wegerregten System zu sehen. Man kann eine deutliche Verbesserung des gefesselten Systems gegenüber dem ungefesselten System erkennen. Die Fes-

selung mit den optimalen Parametern bringt eine so gute Verbesserung, dass sich besonders die Rotation des krafterregten gefesselten Systems optisch kaum vom wegerregten System unterscheiden lässt. Dies bestätigt auch eine äußerst gute Bewertung der beiden Lagekoordinaten mit Hilfe des ECOVs. In Anbetracht der unakzeptabel hohen Abweichung des ungefesselten Systems bei Anregung Sprung ist die geringe Abweichung des krafterregten gefesselten Systems ein optimales Ergebnis. Die optimalen Fesselungsparameter des *semirestringierten* Problems stimmen mit jenen des *restringierten* Problems überein und liefern daher keine zusätzliche Verbesserung der Abweichung. Lässt man durchgehend negative Fesselungsparameter zu, wie im Falle des *unrestringierten* Problems, verbessert sich die translatorische Abweichung nochmals geringfügig. Wie man auch im folgenden Kapitel noch sehen wird, ist gerade bei Anregung Sprung das Verbesserungspotential besonders hoch, mit einer geeigneten Fesselung und optimalen Parametern die Abweichung zu reduzieren.

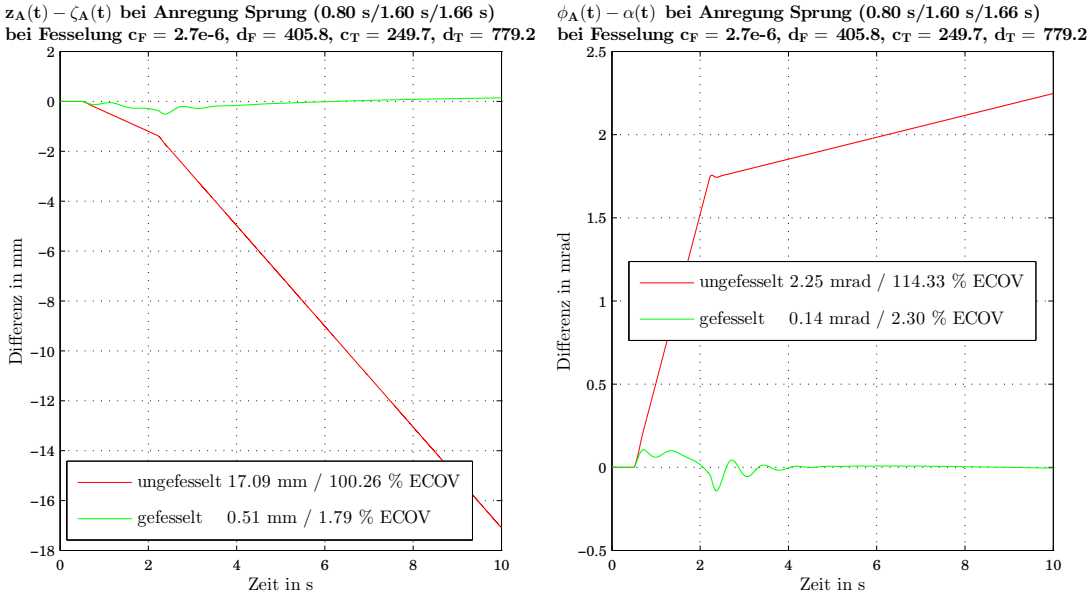


Abbildung 4.14: Differenz zwischen wegerregter und krafterregter gefesselter Lösung mit optimalen Fesselungsparametern bei Anregung Sprung

In Abbildung 4.14 ist die Differenz der beiden krafterregten Systeme vom wegerregten System dargestellt. Wiederum kann man eine deutliche Verbesserung aufgrund der Fesselung erkennen. Bei der unmittelbaren Anregung kann man eine leichte Abweichung erkennen, die einer niederfrequenten Schwingung entspricht. Bei Verwendung der optimalen Fesselungsparameter des *unrestringierten* Problems kann man im Bereich der fehlenden Anregung durch die Fahrbahn eine geringfügige Verbesserung der translatorischen Abweichung feststellen.

Schwelle

Die Integrationseinstellungen des krafterregten gefesselten Systems bei Anregung Schwelle entsprechen jenen bei Anregung Sprung. In den folgenden Abbildungen werden wiederum das krafterregte ungefesselte System und das krafterregte gefesselte System mit einer Aufbaumassenfesselung verglichen. Die optimalen Parameter entsprechen den Ergebnissen der *restringierten Optimierungsaufgabe*.

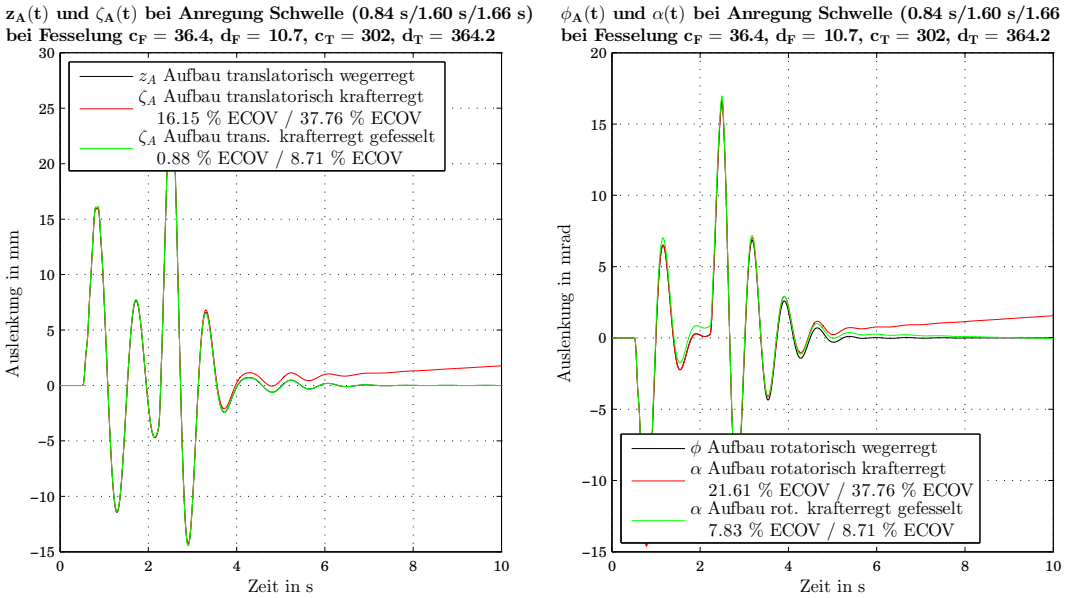


Abbildung 4.15: Translation und Rotation der Aufbaumasse des krafterregten gefesselten Systems mit optimalen Fesselungsparametern bei Anregung Schwelle

In Abbildung 4.15 sind die Lagekoordinaten der Aufbaumasse des ungefesselten und des gefesselten Modells bei Anregung Schwelle ersichtlich. Man kann eine deutliche Reduzierung des Abdriftverhaltens erkennen. Besonders auffallend ist die gute Übereinstimmung der translatorischen Lagekoordinaten der Aufbaumasse von wegerregtem und krafterregtem gefesselten System. Es lässt sich optisch de facto kein Unterschied erkennen. Dies bestätigt auch die Bewertung mit Hilfe des ECOVs. Bei der Rotation ist noch eine leichte Abweichung zu erkennen. Die gesamte Abweichung wird durch die geeignete Wahl der Fesselungsparameter deutlich reduziert. Die Verbesserung durch eine Aufbaumassenfesselung bei Anregung Schwelle ist allerdings nicht so stark ausgeprägt wie bei einer Anregung mit Sprung. Bei Anregung Sprung kann die geringste Abweichung des krafterregten gefesselten Systems bei der Verwendung der berechneten optimalen Fesselungsparameter erzielt werden. Das Verbesserungspotential des krafterregten Systems durch eine geeignete Fesselung bei den unterschiedlichen Anregungen ist auch im Kapitel 5.2.5 nochmals zusammengefasst.

Bei Anregung Schwelle liefern die *Optimierungsaufgaben* unabhängig der *Restriktionen* dieselben optimalen Fesselungsparameter. Die Antwort des Systems im Zeitbereich ändert sich also nicht in Abhängigkeit der Rahmenbedingungen der Fesselung.

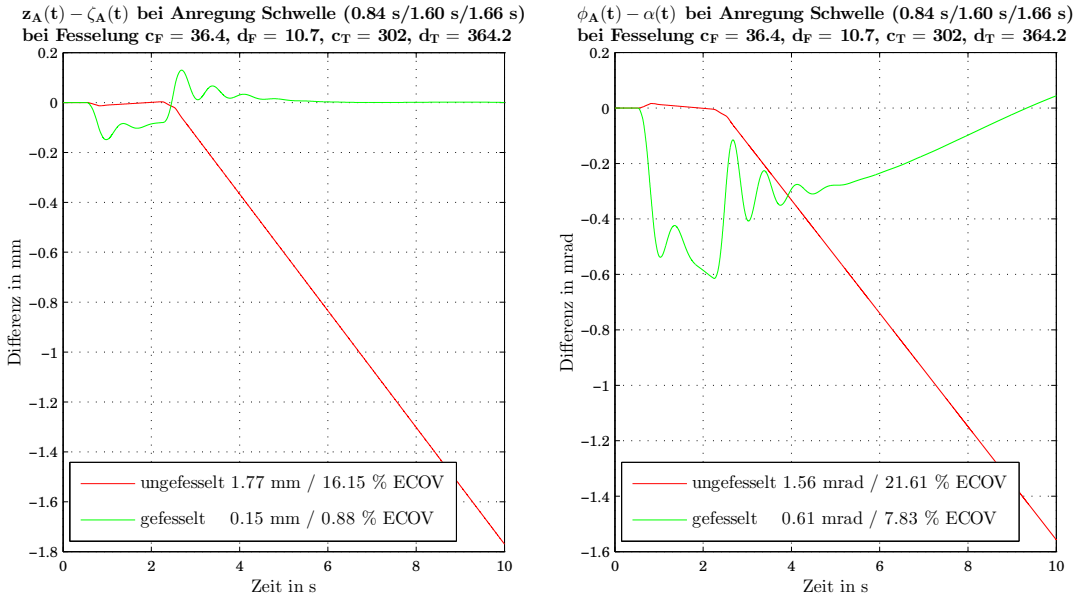


Abbildung 4.16: Differenz zwischen wegerregter und krafterregter gefesselter Lösung mit optimalen Fesselungsparametern bei Anregung Schwelle

In Abbildung 4.16 ist die Differenz der beiden krafterregten Systeme vom wegerregten System dargestellt. Besonders bei der unmittelbaren Überfahrt der Schwelle ist die Abweichung am größten. Bei fehlender Anregung durch die Fahrbahn stellt sich bei der Translation ein geringes Abdriften ein. Bei der Rotation ist auch bei der Differenz ein deutlich größerer Fehler erkennbar.
Zusammenfassend verbessert die Verwendung einer Aufbaumassenfesselung das Abdriftverhalten enorm. Besonders bei den analytischen Anregungen Sprung und Schwelle kann durch die geeignete Wahl der Fesselungsparameter eine große Verbesserung erzielt werden. Der Kurvenverlauf vom krafterregten gefesselten Modell ist dann teilweise vom wegerregten Modell optisch nicht mehr zu unterscheiden. Besonders bei Anregung Sprung ist die Verbesserung bemerkenswert. Beim ungefesselten System treten mit Abstand die größten Abweichungen bei Anregung Sprung auf, beim krafterregten gefesselten System kann man bei Wahl von optimalen Fesselungsparametern hingegen die geringsten Abweichungen erreichen. Ein Grund für die große Verbesserung bei den analytischen Anregungen ist sicherlich die relativ geringe Anregung über das gesamte Integrationsintervall. Sowohl bei Anregung Sprung, als auch bei Anregung Schwelle gibt es nur zu jeweils kurzen Teilen des Integrationsintervalls eine Anregung durch die Fahrbahn. Die auftretenden Abweichungen lassen sich deshalb sehr effektiv mit der gewählten Art von Fesselung reduzieren.

4.3 Komfortstrecke und Schlechtwegstrecke

Von Magna Steyr Fahrzeugtechnik wurden Messdaten von einer Schlechtweg- und einer Komfortstrecke zur Verfügung gestellt. Im Gegensatz zu den analytischen Anregungen, die sowohl zur Plausibilitätsprüfung, als auch für eine einfachere Interpretation der Ergebnisse dienen, stellen die Schlechtweg- und Komfortstrecke eine realistische Form der Anregung dar. Die Schlechtwegstrecke wird überwiegend für die Bauteildimensionierung und Analyse der Betriebsfestigkeit in der Vollfahrzeugsimulation verwendet. Die Komfortstrecke dient zur Beurteilung des Fahrkomforts, Minimierung akustischer Störungen und zur Optimierung eines möglichst angenehmen Schwingungsverhaltens des Fahrzeuges.

4.3.1 Wegerregtes Modell

Als realistische Anregungen für das wegerregte System dienen die gemessenen Anregungen Schlechtweg- und Komfortstrecke. Für die Berechnung des wegerregten Fahrzeugmodells benötigt man für ein geeignetes realistisches Fahrbahnmodell eine Vermessung der Fahrbahnoberfläche. Die Anregungen sind jeweils äquidistante Punkte, die bei der Vermessung der Fahrbahnoberfläche aufgezeichnet wurden und als Eingabe für das Berechnungsprogramm dienen. Da die Messung der Fahrbahnoberfläche nur an diskreten Stellen vorliegt, jedoch eine Integration mit der Routine `ode45.m` eine Auswertung zu beliebigen Stellen erforderlich macht, gilt es die diskret gemessenen Datenpunkte zu interpolieren um eine stetige Darstellung zu erhalten. Aufgrund der automatischen Schrittweitensteuerung müssen sich das Differentialgleichungssystem und folglich die anregende Fahrbahn zu beliebigen Zeitpunkten auswerten lassen.

Interpolation
Ziel der Interpolation ist es, zu gegebenen diskreten Daten eine stetige Funktion zu finden, die diese Daten abbildet. Unter den vielen verfügbaren Interpolationsmethoden gilt es also eine auszuwählen, die unabhängig von der Anregung verlässliche Ergebnisse liefert. Für einen Vergleich wurden alle in Matlab verfügbaren Interpolationsroutinen ins Berechnungsprogramm implementiert und bei verschiedenen Anregungen verglichen. Es hat sich sehr rasch gezeigt, dass Interpolationen höherer Ordnung zu Oszillationen neigen. Das führt bei einer Berechnung des weg- und kraftterregten Systems zu stark fehlerbehafteten Ergebnissen und muss unter allen Umständen vermieden werden. Es gilt also eine Interpolationsroutine zu finden, bei der die zu interpolierenden Punkte nur einen lokalen Einfluss auf die Interpolationsfunktion haben. Die einfachste Methode ist die lineare Interpolation, die sich auch als am bes-

ten geeignet erwiesen hat. Bei Verwendung der linearen Interpolation können Oszillationen definitiv ausgeschlossen werden. Ein weiterer großer Vorteil ist die sehr kurze Rechenzeit, insbesondere bei der verwendeten MATLAB Routine `interp1q.m`. Des Weiteren garantiert die Verwendung einer linearen Interpolation eine eindeutige Reproduzierbarkeit der Ergebnisse. In der Hilfe von numerischen Berechnungsprogrammen werden Interpolationsroutinen gleich benannt oder beschrieben, sind aber teilweise geringfügig anders implementiert und liefern daher unterschiedliche Ergebnisse. Die lineare Interpolation wird neben einem Akima Spline auch erfolgreich bei MAGNA STEYR Fahrzeugtechnik angewendet. Der Akima Spline ist ebenfalls eine Interpolationsmethode, bei dem die Interpolationspunkte nur lokalen Einfluss haben und Oszillationen vermieden werden.

Die Interpolation der vermessenen Fahrbahnoberfläche und anschließende Integration mit automatischer Schrittweitensteuerung erlaubt es, die effiziente Implementierung der Integrationsroutinen in MATLAB nutzen zu können. Überdies hat die langjährige Erfahrung bei MAGNA STEYR Fahrzeugtechnik gezeigt, dass dieses Vorgehen eine höhere Genauigkeit der Ergebnisse liefert, als eine Integration mit fixer Schrittweite.

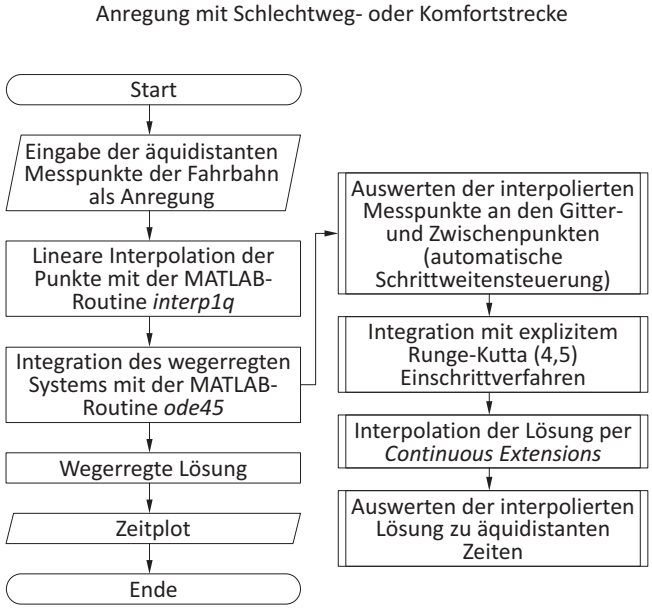


Abbildung 4.17: Flussdiagramm der numerischen Berechnung des wegerregten Systems bei einer gemessenen Anregung mit Schlechtweg- und Komfortstrecke

Nach erfolgter Interpolation der Messpunkte und Aufstellen der Systemmatrizen lässt sich das System in der Zustandsraumdarstellung nach der Zeit integrieren. Dabei werden das Differentialgleichungssystem und folglich die interpolierten Messpunkte an geeigneten Gitter- und Zwischenpunkten ausgewertet. Die weitere Vorgehensweise ist äquivalent zur Berechnung des wegerregten Modells bei einer analytischen Anregung in Abschnitt 4.2.1. Die Ausgabe des Berechnungsprogramms ist eine Näherungslösung des Anfangswertproblems und liefert alle Zustandsgrößen der Lage und Geschwindigkeit zu äquidistanten Zeitpunkten. Die verallgemeinerten Lagekoordinaten der jeweiligen Massen werden in Abbildung 4.18 und Abbildung 4.19 über der Zeit geplottet bzw. in einem weiteren Schritt dem krafterregten System übergeben.

Komfortstrecke

Bei einer Anregung des Fahrzeugmodells mit der Komfortstrecke lässt sich der Einfluss der Fahrbahn auf den Fahrkomfort beurteilen. Die Komfortstrecke wird dabei mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h überfahren. Daraus ergibt sich ein Phasenverzug zwischen Vorder- und Hinterrad von etwa 103 ms. Der Abstand zwischen zwei Messpunkten der Fahrbahnoberfläche beträgt 50 mm. Dies würde einer Samplingfrequenz von etwa 555 Hz bei der Fahrgeschwindigkeit von 100 km/h entsprechen. Das Integrationsintervall wird wiederum mit 10 s gewählt und die maximale Schrittweite `MaxStep` auf 10 ms begrenzt. Als *Ausgabeschrittweite* des wegerregten Systems wurde 1 ms gewählt, um die Ergebnisse wieder vergleichbar zu machen und eine Integration des krafterregten Systems mit fixer Schrittweite zu ermöglichen.

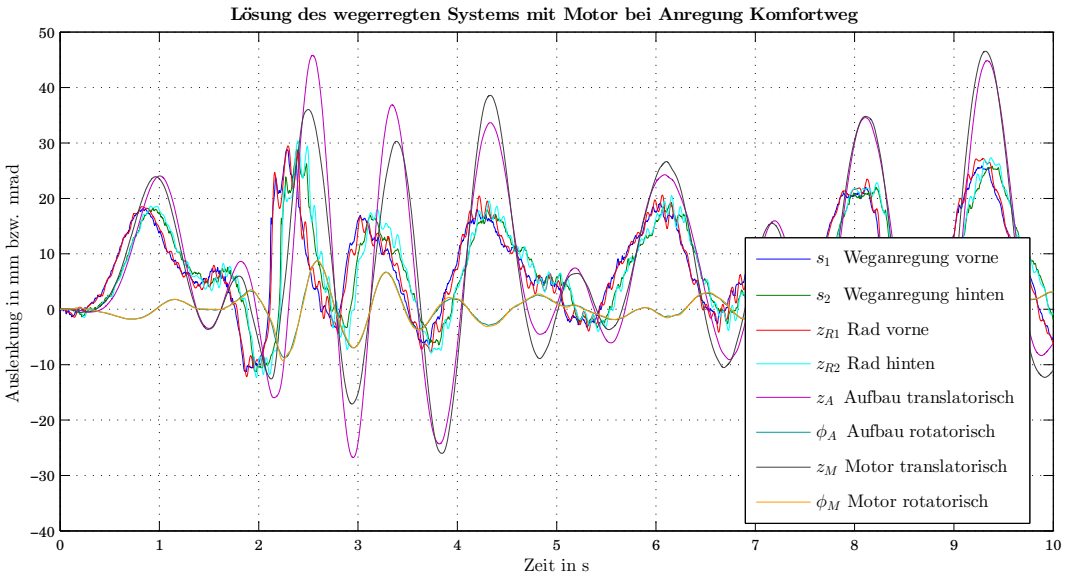


Abbildung 4.18: Lösung des wegerregten Systems bei Anregung mit Komfortstrecke

Bei der Anregung Komfortstrecke kann bei Berücksichtigung der statischen Anteile aufgrund der Gewichtskraft ein Verschwinden der Radaufstandskräfte und damit ein Abheben der Räder ausgeschlossen werden. Aufgrund der sehr einfachen Modellierung des Fahrzeuges und insbesondere des Reifens ist bei der Interpretation der Ergebnisse auf die Modellgrenzen zu achten. Die Modellierung ist für das betrachtete Phänomen des Abdriftens völlig ausreichend, wird aber vermutlich bei höheren Geschwindigkeiten des Fahrzeugmodells die reale Reifencharakteristik nicht ausreichend genau beschreiben. In Abbildung 4.18 ist die Lösung des wegerregten Systems bei Anregung mit Komfortstrecke ersichtlich. Dargestellt sind die verallgemeinerten Lagekoordinaten und die Weganregungen von Vorder- und Hinterrad. Deutlich zu erkennen sind wiederum die höherfrequenten Schwingungen der Radmassen, die der Fahrbahnoberfläche folgen. Die rotatorischen Auslenkungen von Aufbau- und Motormasse unterscheiden sich nur gering. Die typischen Frequenzbereiche der jeweiligen Massen lassen sich wiederum leicht zuordnen.

Schlechtwegstrecke

Die Anregung mit Schlechtwegstrecke dient vorwiegend für die Bauteildimensionierung und eine Beurteilung der Vertikaldynamik. Die Strecke wird mit einer Geschwindigkeit von 23 km/h überfahren, was in einem Phasenverzug zwischen Vorder- und Hinterrad von etwa 446 ms resultiert. Die Daten enthalten eine Vermessung der Fahrbahnoberfläche alle 10 mm, was einer Samplingfrequenz von etwa 640 Hz bei einer Überfahrt mit der gewählten Geschwindigkeit entsprechen würde. Die Integrationseinstellungen werden vom wegerregten System bei Anregung mit der gemessenen Komfortstrecke übernommen.

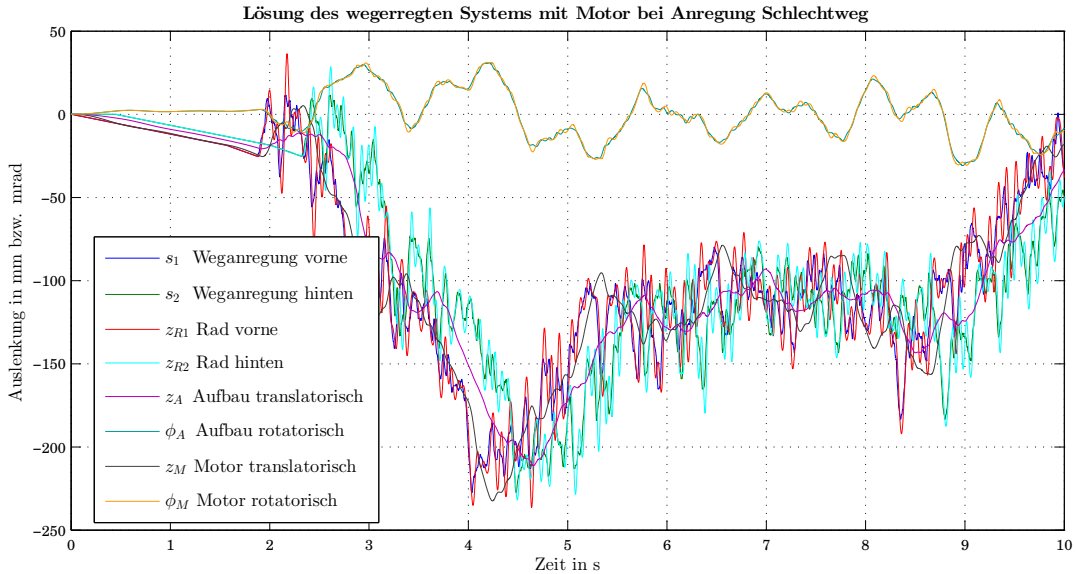


Abbildung 4.19: Lösung des wegerregten Systems bei Anregung mit Schlechtwegstrecke

Bei Anregung mit Schlechtwegstrecke kann ein Abheben der Räder bei Berücksichtigung der statischen Anteile zufolge der Schwerkraft nicht gänzlich ausgeschlossen werden. Aufgrund der intensiven Anregung durch die Schlechtwegstrecke kommt es vereinzelt zu einem Abheben der Räder. Es wird jedoch vereinfacht eine durchgehende Gültigkeit der angeführten Systemmatrizen angenommen, wobei dies für die grundsätzliche Untersuchung des Abdriftens keine Rolle spielt.
In Abbildung 4.19 ist die Lösung des wegerregten Systems bei Anregung mit Schlechtwegstrecke dargestellt. Es sind die verallgemeinerten Lagekoordinaten und die Anregungen der jeweiligen Radmassen ersichtlich. Vergleicht man mit der Komfortstrecke, so erkennt man größere Auslenkungen bei Überfahrt der Schlechtwegstrecke. Den Grundschwingungen von Aufbau- und Motormasse sind aufgrund der intensiven Anregung deutlich erkennbare Oberschwingungen überlagert.

4.3.2 Krafterregtes Modell

Die Schlechtweg- und Komfortstrecke werden wie bereits erwähnt in der Entwicklungsphase eines Automobils bei einer Vollfahrzeugsimulation überfahren. Will man aus Zeit- und Kostengründen oder aus Mangel an Ressourcen die aufwendige Vermessung der Fahrbahnoberfläche und die komplexe Modellierung und Parametrierung des Reifens umgehen, kann man sich der krafterregten Simulation bedienen. Es muss hierzu ein passendes Testfahrzeug über die gewünschte Strecke fahren, während die Radnabenkräfte und -momente mit Hilfe einer Radmessnabe aufgezeichnet werden. Diese Messfahrt wird im Berechnungsprogramm mit der Simulation des wegerregten Modells nachgebildet. Die Lösung des wegerregten Modells entspricht der Überfahrt des realen Fahrzeuges über die Strecke. Im Berechnungsprogramm erfolgt die Ermittlung der Kräfte, wie auch in Abschnitt 4.2.2 ausführlich beschrieben, bei der Berechnung der äquivalenten Radaufstandskräfte aus der Ersatzsteifigkeit des jeweiligen Reifens, der Verschiebung der Radmasse und der Weganregung. Man erhält also sowohl bei einer Aufzeichnung der Messfahrt, als auch bei der Berechnung in der Simulation Kräfte zu äquidistanten Zeitpunkten, die als Eingang für das krafterregte System dienen. Der weitere Berechnungsablauf ist schon von den Systemen mit analytischen Funktionen als Anregung bekannt und wird in Abbildung 4.20 zusammenfassend dargestellt. Die Ausgabe ist die Lösung des wegerregten und des krafterregten Systems, die sich aufgrund der gewählten *virtuellen Samplingfrequenz* und der Integrationsroutine mit fixer Schrittweite an den Zeitpunkten der krafterregten Lösung vergleichen lassen. Die Differenz des krafterregten und wegerregten Systems wird in Abbildung 4.22 und in Abbildung 4.24 als Zeitplot dargestellt. Die beiden verallgemeinerten Lagekoordinaten der Aufbaumasse des wegerregten und krafterregten Systems und deren bewertete Abweichung sind in Abbildung 4.21 und Abbildung 4.23 ersichtlich.

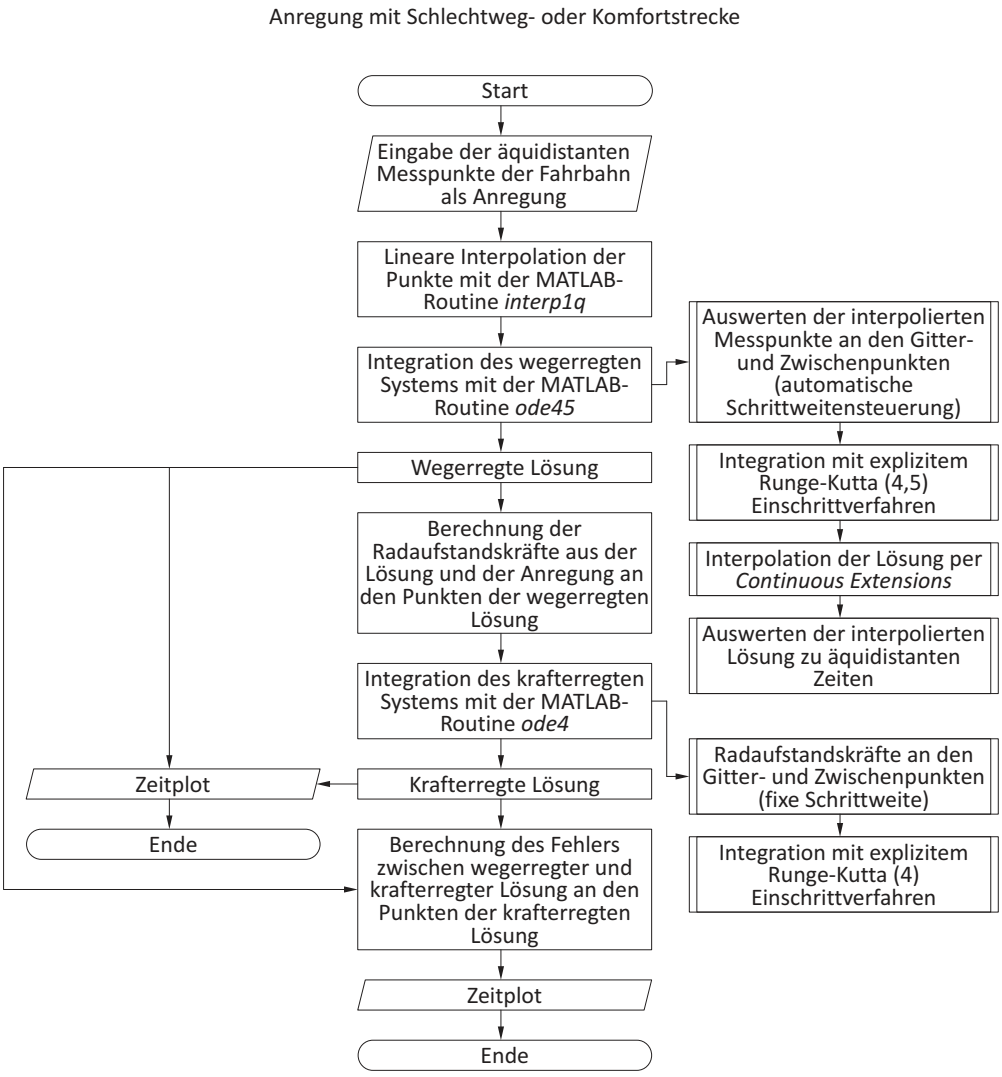


Abbildung 4.20: Flussdiagramm der numerischen Berechnung des krafterregten Systems bei einer gemessenen Anregung mit Schlechtweg- und Komfortstrecke

Komfortstrecke

Die Integrationseinstellungen des krafterregten Systems bei Anregung mit Komfortstrecke unterscheiden sich nicht vom krafterregten System bei analytischen Anregungen. Integrationsintervall ist wiederum 10 s bei einer *Ausgabeschrittweite* von 1 ms beim wegerregten System und 2 ms beim krafterregten System.

In Abbildung 4.21 ist jeweils die Translation und Rotation der Aufbaumasse des wegerregten und krafterregten Systems zu sehen. Bei der Rotation kann man deutlich eine Abweichung erkennen, die Translation stimmt optisch recht gut überein. Diese Beurteilung bestätigt auch die Bewertung der Kurven mit Hilfe des ECOVs. Wiederum ist die translatorische Abweichung der Aufbaumasse geringer als die rota-

torische Abweichung, was sich bei einer Ermittlung der Schnittkräfte unter Berücksichtigung des Schwerkraftvektors natürlich sehr ungünstig auswirkt. Die rotatorische Abweichung ist annähernd so groß wie die maximal auftretende Auslenkung.

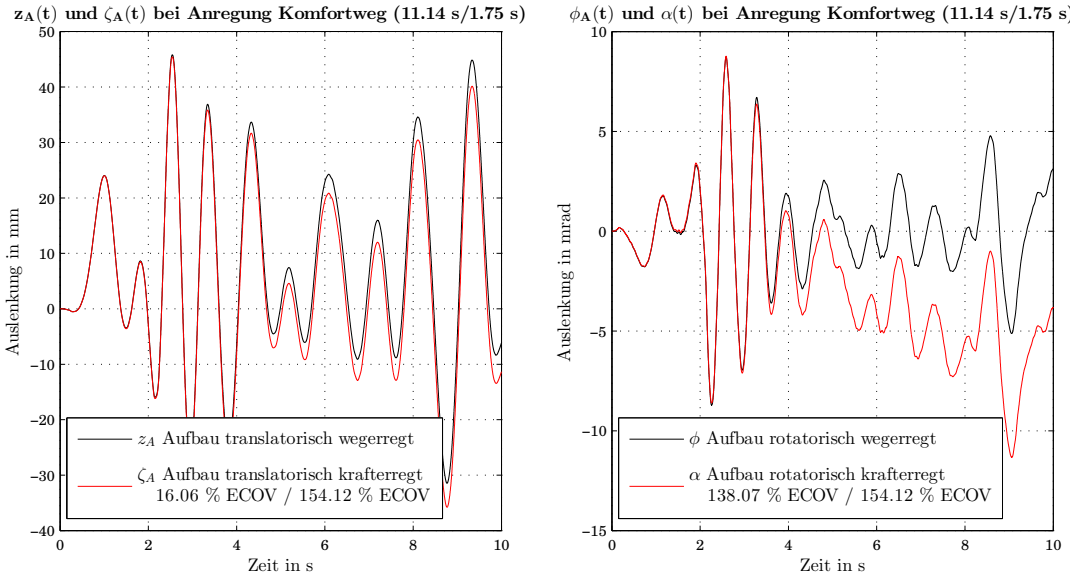


Abbildung 4.21: Translation und Rotation der Aufbaumasse des wegerregten und krafterregten Systems bei Anregung mit Komfortstrecke

Zu beachten seien auch die unterschiedlichen Rechenzeiten der beiden Systeme. Während das wegerregte System bedeutend längere Rechenzeiten bei einer gemessenen Anregung im Gegensatz zu einer analytischen Anregung in Anspruch nimmt, ist beim krafterregten System kaum ein Unterschied zu erkennen. Bei den Anregungen Sprung und Schwelle gibt es nur bei der Überfahrt des Hindernisses eine Weganregung. Die erforderlichen Integrationspunkte halten sich somit in Grenzen. Bei den gemessenen Strecken macht sich die intensive Anregung des wegerregten Systems über die gesamte Dauer des Integrationsintervalls bemerkbar. Bei der Integration der krafterregten Systeme gibt es unabhängig von der Strecke eine durchgehende Anregung durch Radaufstandskräfte aufgrund von Schwingungen der jeweiligen Massen. Das wiederum resultiert in einem geringen Unterschied der Rechenzeiten für die krafterregten Systeme.

In Abbildung 4.22 wird die Differenz der wegerregten und krafterregten Lösung bei einer Anregung mit der Komfortstrecke gezeigt. Während sich bei einer analytischen Anregung ein Abdriften mit konstanter Geschwindigkeit bei Überfahrt der horizontalen Abschnitte und fehlender Anregung einstellt, ist das Abdriften bei Anregung mit Komfortweg aufgrund der durchgehend wirkenden Anregung der Radmassen von unbestimmter Natur und nicht näher vorherzusagen.

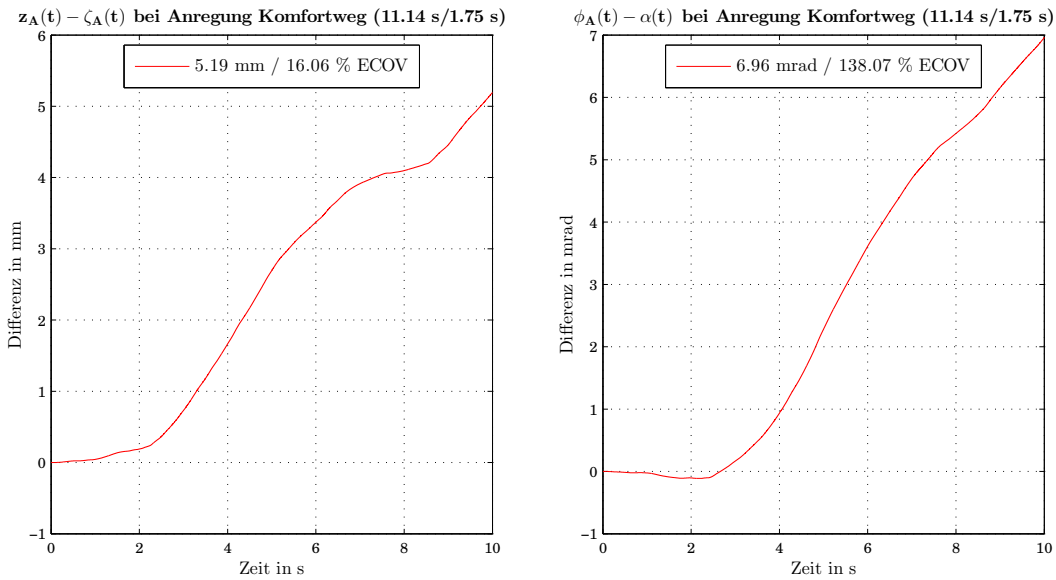


Abbildung 4.22: Differenz zwischen wegerregter und krafterregter Lösung bei Anregung mit Komfortstrecke

Schlechtwegstrecke

Bei einer Anregung des krafterregten Systems mit der gemessenen Schlechtwegstrecke stimmen die gewählten Integrationseinstellungen mit der Anregung Komfortstrecke überein. In Abbildung 4.23 sind wiederum die verallgemeinerten Lagekoordinaten der Aufbaumasse dargestellt, wobei deutlich geringere Abweichungen bei Translation und Rotation, als bei einer Anregung mit der Komfortstrecke festzustellen sind. Bei der translatorischen Auslenkung ergibt sich zumindest anfangs eine gute optische Übereinstimmung, bei der Rotation stellt sich ein deutlich erkennbares Abdriften ein. Ähnlich wie bei den übrigen Anregungen ist eine geringere Abweichung bei der Translation als bei der Rotation zu erkennen, besonders durch die Bewertung mit Hilfe des ECOVs. Die Überfahrt der Schlechtwegstrecke stellt eine sehr intensive Anregung des Systems dar. Betrachtet man die Rechenzeiten, ergibt sich beim wegerregten System bei Anregung mit der Schlechtwegstrecke eine längere Simulationsdauer als bei der Komfortstrecke, da das System stärker von der Fahrbahn erregt wird. Der Rechenaufwand des krafterregten Systems ändert sich kaum.

In Abbildung 4.24 ist die Differenz der beiden Systeme bei Anregung mit der Schlechtwegstrecke aufgetragen. Deutlich zu erkennen ist ein nahezu nicht vorhandenes Abdriften innerhalb der ersten zwei Sekunden aufgrund der geringen Anregung durch die Fahrbahn am Beginn der Schlechtwegstrecke. Wird die Anregung intensiver, stellt sich ein unbestimmtes Abdriften ein. Die Abweichungen sind ähnlich der Anregung mit Komfortstrecke nicht näher vorherzusagen, können aber mit einer geeigneten Fesselung minimiert werden.

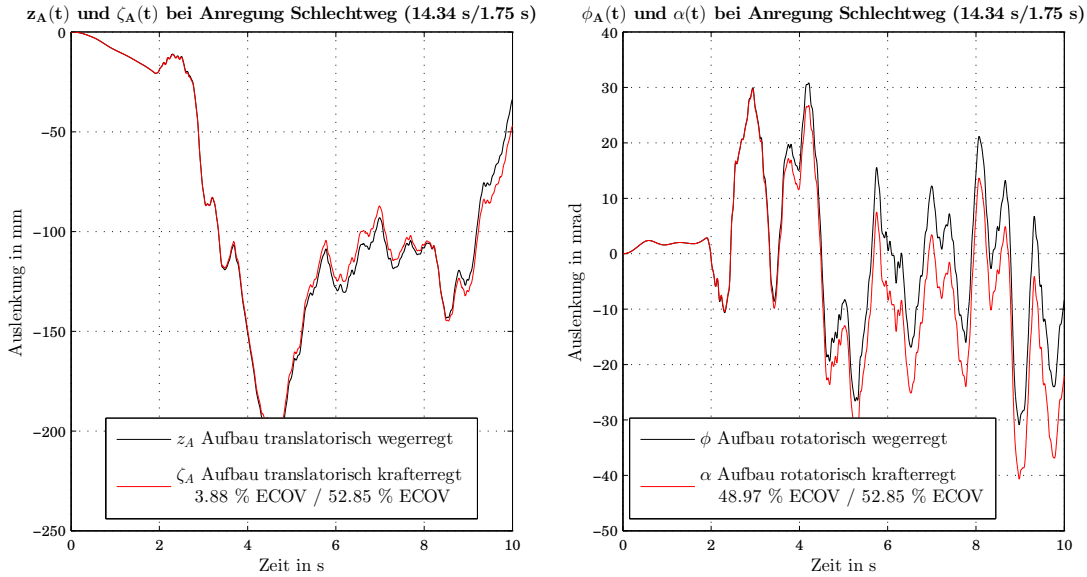


Abbildung 4.23: Translation und Rotation der Aufbaumasse des wegerregten und krafterregten Systems bei Anregung mit Schlechtwegstrecke

Die Schwingungsverläufe des krafterregten Systems stimmen qualitativ einigermaßen mit jenen des jeweiligen wegerregten Systems überein, allerdings führt besonders das rotatorische Abdriften des krafterregten Systems zu völlig falschen Ergebnissen der Schnittkräfte.

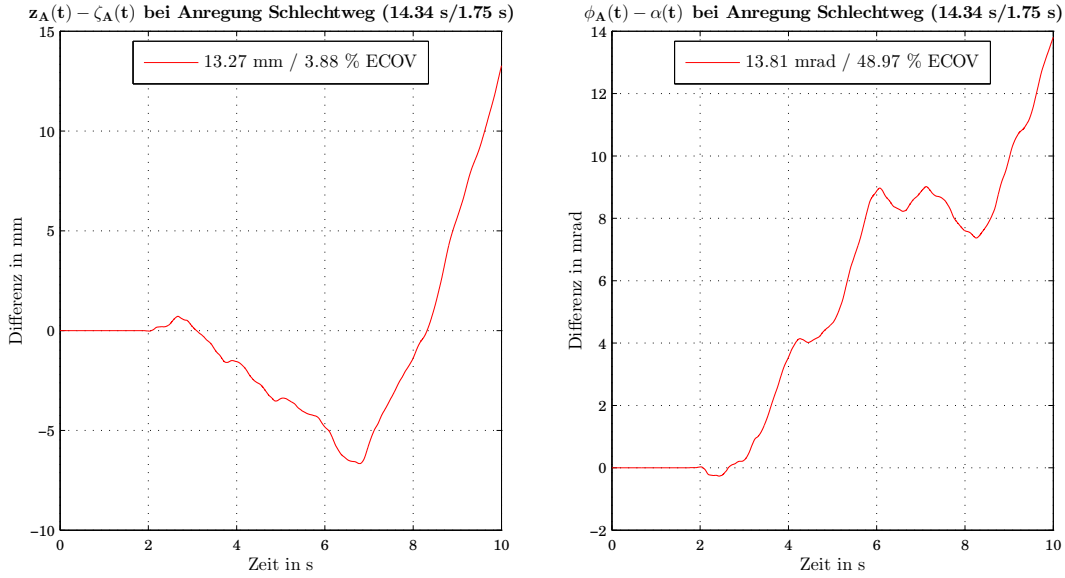


Abbildung 4.24: Differenz zwischen wegerregter und krafterregter Lösung bei Anregung mit Schlechtwegstrecke

4.3.3 Krafterregtes gefesseltes Modell

Der Integrationsaufbau des krafterregten gefesselten Systems bei den gemessenen Anregungen entspricht jenem des krafterregten Systems. Einzig die Koeffizientenmatrix des Differentialgleichungssystems ändert sich durch die Aufbaumassenfesselung geringfügig, aber in fundamentaler Weise (siehe Anhang A Systemmatrizen). Das Integrationsintervall ist wiederum 10 s bei einer *virtuellen Samplingfrequenz* von 1000 Hz und einer *Ausgabeschrittweite* des gefesselten Systems von 2 ms. Die verwendeten Fesselungsparameter sind jeweils die optimalen Ergebnisse der *restringierten Optimierungsaufgabe* des krafterregten Systems mit Aufbaumassenfesselung.

Komfortstrecke

In der folgenden Abbildung 4.25 sind die Lagekoordinaten der Aufbaumasse bei einer Anregung mit Komfortweg zu sehen. Es werden die optimalen *restringierten* Parameter der Aufbaumassenfesselung für das krafterregte gefesselte Modell verwendet.

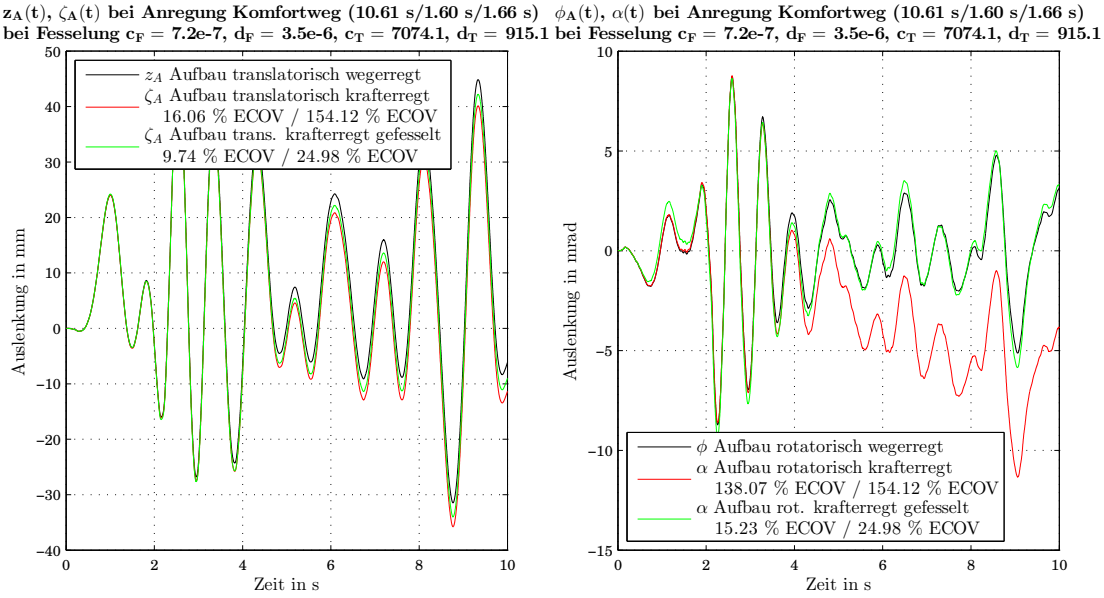


Abbildung 4.25: Translation und Rotation der Aufbaumasse des krafterregten gefesselten Systems mit optimalen Fesselungsparametern bei Anregung mit Komfortstrecke

Durch die geeignete Wahl der Fesselungsparameter kann eine deutliche Reduzierung der Abweichungen erzielt werden. Besonders die Abweichung der rotatorischen Auslenkung hat sich gegenüber dem ungefesselten System stark reduziert, was für eine exakte Berechnung der Schnittkräfte sehr vorteilhaft ist. Auch bei der Translation ist eine Verbesserung erkennbar. Das krafterregte gefesselte System ist teilweise kaum vom wegerregten System zu unterscheiden und bestätigt die gute Wahl der Fesselungsparameter. Der qualitative Kurvenverlauf stimmt beim gefesselten System sehr

gut, einige Peaks können jedoch nicht exakt abgebildet werden. Die Auslenkungen der Aufbaumasse sind recht groß, die geringen Ungenauigkeiten der Amplituden spielen daher eher eine untergeordnete Rolle. Bei Anregung mit Komfortweg kann ähnlich wie bei Anregung Sprung durch eine geeignete Fesselung eine bemerkenswerte Reduktion der Abweichung erzielt werden. Das Verbesserungspotential ist bei diesen Anregungen besonders hoch. Durch Zulassen von negativen Dämpfungswerten wie beim *semirestringierten* Problem, kann die translatorische Abweichung noch einmal deutlich verringert werden. Beim *unrestringierten* Problem, bei dem durchgehend negative Fesselungsparameter zugelassen sind, ist keine nennenswerte Verbesserung erkennbar. Die rotatorische Abweichung ändert sich durch die unterschiedlichen Rahmenbedingungen allerdings kaum. Von der Rechenzeit her ist beim krafterregten gefesselten Modell kaum ein Unterschied zum krafterregten Modell zu erkennen.

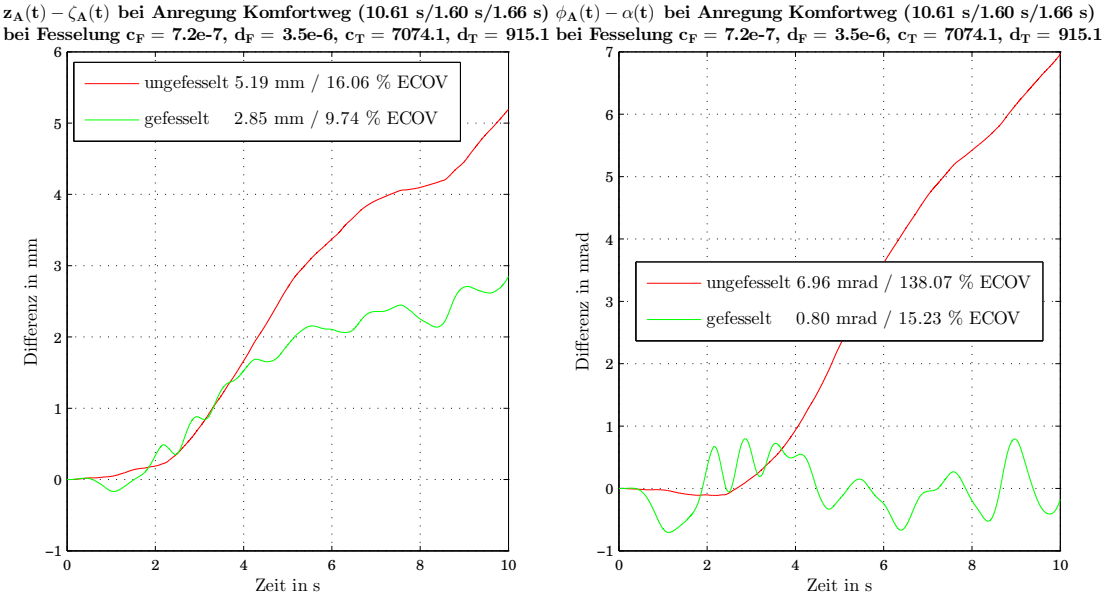


Abbildung 4.26: Differenz zwischen wegerregter und krafterregter gefesselter Lösung mit optimalen Fesselungsparametern bei Anregung mit Komfortstrecke

Ähnlich wie beim ungefesselten System ist auch beim gefesselten System die Differenz zum wegerregten System nicht vorherzusagen und von unbestimmter Natur. Bei der Translation kann man in Abbildung 4.26 durch die Anwendung der *restringierten* Fesselungsparameter noch ein Abdriften beobachten. Dieses lässt sich bei Verwendung der *semi-* und *unrestringierten* Fesselungsparameter deutlich reduzieren. Bei der Rotation stellt sich ein Abdriften um die Nulllage ein, die Abweichung ist im Mittel sehr klein. Betrachtet man die Differenz des krafterregten gefesselten Systems vom wegerregten System, macht sich besonders in dieser Abbildung die durchgehende Anregung durch die Fahrbahn über das gesamte Integrationsintervall bemerkbar.

Schlechtwegstrecke

Die Integrationseinstellungen bei Anregung Schlechtwegstrecke entsprechen jenen bei Anregung Komfortstrecke. Gezeigt werden die optimalen Fesselungsparameter der *restringierten Optimierungsaufgabe* bei einer Aufbaumassenfesselung.

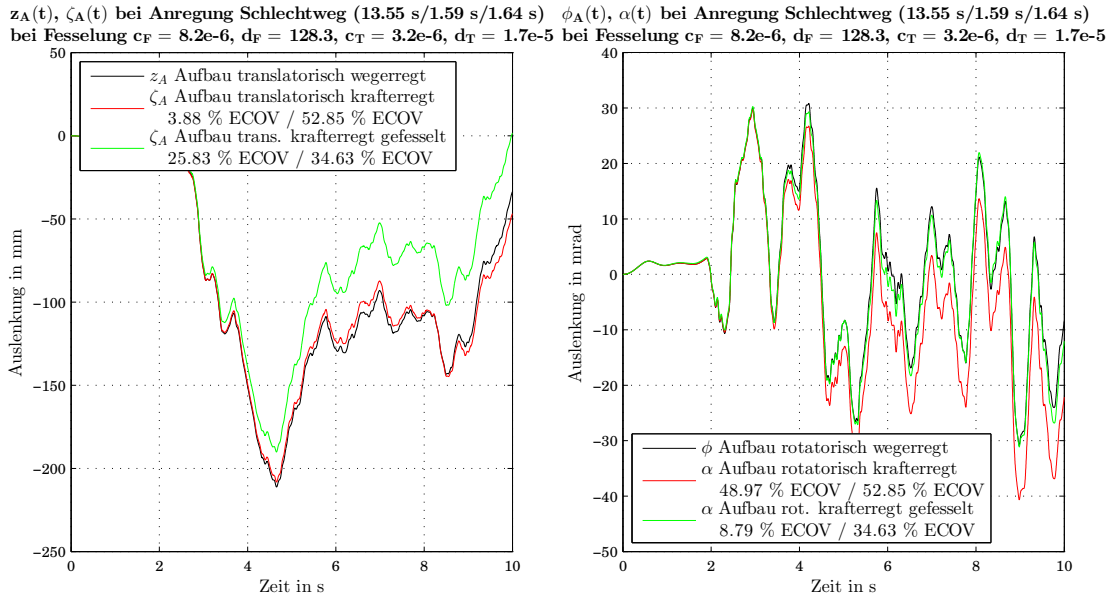


Abbildung 4.27: Translation und Rotation der Aufbaumasse des krafterregten gefesselten Systems mit optimalen Fesselungsparametern bei Anregung mit Schlechtwegstrecke

In Abbildung 4.27 sind die Lagekoordinaten der Aufbaumasse ersichtlich. Unmittelbar zu erkennen ist eine translatorische Abweichung, die sich durch die Aufbaumassenfesselung mit den optimalen *restringierten* Parametern vergrößert hat. Bewertet man die Abweichung mit Hilfe des ECOVs kann man eine mehr als sechsfache Zunahme des translatorischen Fehlers erkennen. Der rotatorische Fehler nimmt hingegen so viel ab, dass sich die gesamte Abweichung bedeutend verringert. Bei der reinen Rotation kann man eine optisch gute Übereinstimmung im gesamten Integrationsintervall erkennen. Ähnlich wie bei der Anregung mit Komfortweg kann man eine leichte Ungenauigkeit bei manchen Peaks beobachten. Der rotatorische Fehler wird durch die Wahl geeigneter Fesselungsparameter deutlich reduziert, was besonders für eine anschließende Bestimmung von Schnittgrößen äußerst wichtig ist. Vor allem die Schlechtwegstrecke wird für die Bestimmung von auftretenden Kräften gewählt und sollte entsprechend genaue Ergebnisse für eine anschließende Auslegung und Dimensionierung von Bauteilen liefern. Verglichen mit den anderen Anregungen, sind die optimalen *restringierten* Fesselungsparameter bei Anregung Schlechtwegstrecke jene mit den größten Abweichungen. Mit Hilfe der Berechnung des *semirestringierten* Problems, bei dem auch negative Dämpfungswerte der Fesselungsparameter zugelassen werden, kann die translatorische Abweichung der Aufbaumasse sehr stark redu-

ziert werden. Dabei steigt interessanterweise die rotatorische Abweichung wieder an. Durch die Verwendung der *unrestringierten* Fesselungsparameter kann die rotatorische Abweichung der Aufbaumasse wieder auf den ursprünglichen Wert reduziert werden. Beim krafterregten gefesselten System mit Aufbaumassenfesselung und Anregung mit der Schlechtwegstrecke zeigen sich die größten Veränderungen der Abweichungen abhängig von den *Restriktionen* der *Optimierungsaufgabe*. Bei den Rechenzeiten gibt es wiederum kaum einen Unterschied zwischen krafterregten und krafterregt gefesselten System.

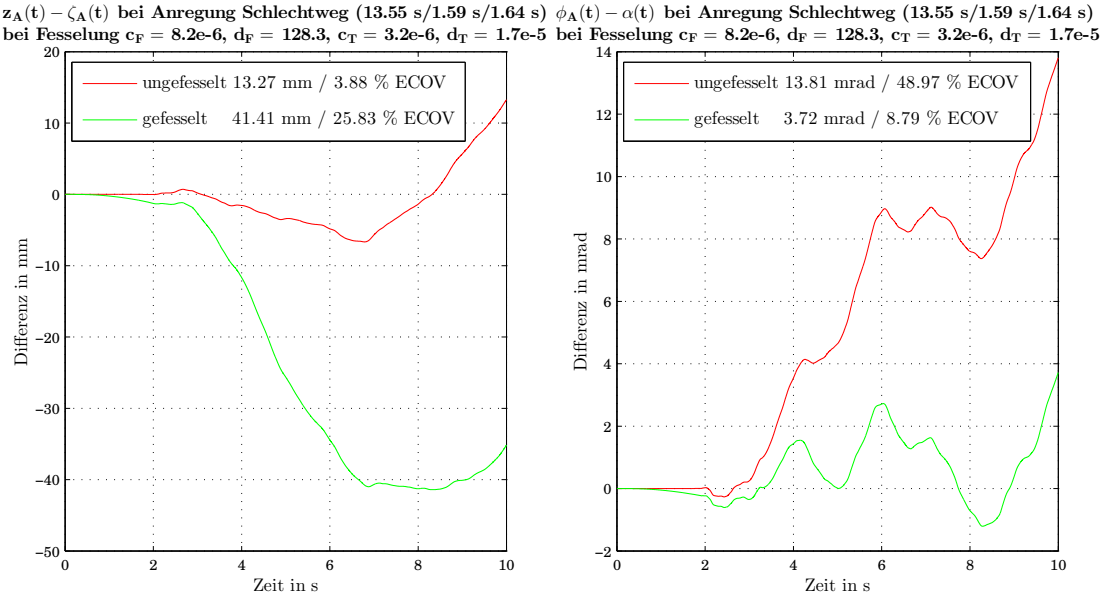


Abbildung 4.28: Differenz zwischen wegerregter und krafterregter gefesselter Lösung mit optimalen Fesselungsparametern bei Anregung mit Komfortstrecke

In Abbildung 4.28 sind die Differenzen der beiden krafterregten Systeme vom wegerregten System dargestellt. Gerade in dieser Darstellung ist die Zunahme der translatorischen Abweichung bei Verwendung der *restringierten* Fesselungsparameter deutlich zu erkennen. Diese kann jedoch wie erwähnt durch die Verwendung der *semi-* bzw. *unrestringierten* Parameter deutlich reduziert werden. Der Kurvenverlauf der Differenzen ist ähnlich wie bei Anregung Komfortweg. Es lässt sich deutlich die geringe Anregung am Anfang des Intervalls und die durchgehend intensive Anregung im restlichen Intervall beobachten.

Bei den gemessenen Strecken als Anregung kann bei einer Verwendung der Aufbaumassenfesselung mit geeignet gewählten Parametern eine deutliche Verringerung der Abweichung erzielt werden. Besonderes Verbesserungspotential der Aufbaumassenfesselung stellt sich bei einer Anregung mit der Komfortstrecke ein. Der Fehler des krafterregten ungefesselten Systems ist sehr hoch und kann durch die Fesselung mit

optimalen Parametern sehr stark reduziert werden. Die Verringerung des Fehlers ist dabei nahezu unabhängig von den *Restriktionen* des Optimierungsproblems. Bei einer Anregung mit der Schlechtwegstrecke kann auch eine eindeutige Verbesserung erzielt werden, allerdings ist die Abnahme des Fehlers nicht so stark ausgeprägt. Eine deutliche Reduzierung bei der Schlechtwegstrecke ist allerdings bei unterschiedlichen *Restriktionen* zu erkennen. Durch Zulassen von negativen Fesselungsparametern kann eine starke Abnahme des Fehlers erreicht werden. Eine detaillierte Diskussion der optimalen Fesselungsparameter findet noch in Kapitel 5.2 Optimierungsergebnisse statt.

Bei den gemessenen Anregungen stellt sich zwar eine deutliche Verbesserung durch die Verwendung einer geeigneten Fesselung ein, jedoch bleibt ein durchaus erkennbarer Fehler. Der Fehler kann jedenfalls nicht so stark wie bei den analytischen Anregungen reduziert werden. Ein Grund dafür ist sicherlich die Dauer der Anregung selbst, die bei den analytischen Funktionen nur relativ kurz ist. Sowohl bei Anregung Sprung, als auch bei Anregung Schwelle erfolgt nur in kurzen Teilen des Integrationsintervalls eine Anregung durch die Fahrbahn. Bei den gemessenen Anregungen wird das Modell jeweils über die gesamte Dauer des Integrationsintervalls angeregt und es stellt sich daher ein nicht näher vorhersagbarer Kurvenverlauf bei der Abweichung ein. Die Methode der Fesselung des krafterregten Systems stößt hier vermutlich an seine Grenzen. Die Fesselungsparameter sind zeitinvariante Größen, die sich im Laufe des Integrationsintervalls nicht ändern. Bei einer durchgehenden Anregung durch die Fahrbahn wie bei den gemessenen Strecken lässt sich die Abweichung daher nicht gänzlich vermeiden.
Die auftretenden Abweichungen lassen sich mit einer Aufbaumassenfesselung und optimalen Parametern nur in gewissen Grenzen reduzieren. Eine geeignete Fesselung ist dennoch ein großer Gewinn für die Genauigkeit der Ergebnisse. Unabhängig der zugrundeliegenden *Restriktionen* kann beispielsweise die rotatorische Abweichung reduziert werden. Besonders die Minimierung der rotatorischen Abweichung ist wichtig für eine exakte Berechnung der Schnittkräfte. Zusammenfassend wird durch die Verwendung einer Aufbaumassenfesselung eine eindeutige Verbesserung erreicht und die Abweichungen deutlich reduziert.

Kapitel 5

Optimierung

Das Bestmögliche zu erreichen oder zumindest in seine hinreichende Nähe zu gelangen, ist eine natürliche Forderung. In alltäglichen Bereichen wie Sport und Wissenschaft, Industrie und Wirtschaft, Politik und Gesellschaft lassen sich leicht unzählige Beispiele finden. Ebenso alt wie dieses Streben ist der Streit darüber, was die beste Lösung eines vorliegenden Problems und die beste Antwort auf eine Herausforderung ist. Eine klare Zielsetzung und akkurate Annahmen über die Rahmenbedingungen verlangen in aller Regel eine weitgehende Vereinfachung des realen Problems. Somit ergibt sich ein mathematisches Modell des realen Problems. Die richtige Modellierung ist ein kreativer Prozess, bei dem es stets verschiedene Möglichkeiten gibt, das Problem mit einem mathematischen Modell zu beschreiben. Nach der Modellbildung scheiden sich die potentiellen Lösungen in die zulässigen Lösungen, welche den Rahmenbedingungen genügen, und die unzulässigen Lösungen, die eine der Rahmenbedingungen verletzen. Wenn eine *optimale zulässige Lösung*, also eine beste der im Rahmen des Modells zulässigen Lösungen gesucht wird, spricht man in der Mathematik von einer *Optimierungsaufgabe*. Unter Optimierung verstehen wir also die Auswahl günstiger Werte in Bezug auf ein Gütekriterium, der *Zielfunktion*, unter Beachtung der Rahmenbedingungen, den *Restriktionen* [22, 23].

5.1 Optimierungsmethode

5.1.1 Optimierungskriterien

Für die vorliegende *Optimierungsaufgabe* ist es notwendig, die Abweichung eines jeweiligen Systems in geeigneter Form zu beschreiben. Es gilt, einerseits die Abweichung des krafterregten Systems vom wegerregten System zu erfassen und andererseits die mögliche Verbesserung durch eine Fesselung des krafterregten Systems zu bestimmen. Die Güte einer Fesselung lässt sich mit einer geeigneten *Zielfunktion* beschreiben, die Rahmenbedingungen mit den notwendigen *Restriktionen*.

Zielfunktion
Zentraler Bestandteil einer *Optimierungsaufgabe* ist eine geeignet gewählte *Zielfunktion* die minimiert werden soll. Die *Zielfunktion* soll die Abweichung des krafterregten gefesselten Systems vom wegerregten System beschreiben. In einem ersten Schritt

gilt es zu bestimmen, welche Größen die Abweichung geeignet beschreiben. Mögliche Größen für eine Gütefunktion wären beispielweise eine gewichtete Abweichung aller Lagekoordinaten, eine Energiebetrachtung des Systems oder eine Abweichung der Motorlagerkräfte, da mit aufsteigendem Lastpfad die Abweichungen zunehmen. Da besonders eine rotatorische Abweichung des Systems ungünstig für eine folgende Berechnung der Schnittkräfte ist, sollte diese berücksichtigt werden. Es eignet sich eine Beschreibung der Aufbaumasse, da sie den weitaus größten Anteil des Systems einnimmt. Die translatorische Abweichung repräsentiert dabei näherungsweise die potentielle Energie bei Berücksichtigung der Gewichtskraft wie bei der Vollfahrzeugsimulation, die gerade bei einem Abdriften anwächst. Die kinetische Energie wird eher geringfügig von einem Drift beeinflusst werden. Es wird nun die Summe von bewerteter dimensionsloser translatorischer und rotatorischer Abweichung der Lagekoordinaten gewählt, also die gesamte Abweichung der Aufbaumasse. Mit diesem Bewertungskriterium wird die ungünstige rotatorische Abweichung berücksichtigt, und durch die Beachtung der translatorischen Abweichung ergibt sich eine ähnliche Bewertung wie mit einer Energiebetrachtung des Systems. In einem weiteren Schritt gilt es, ein geeignetes Maß für die gewählte Abweichung zu definieren. In [1] wurde die Bewertung mit Hilfe des ECOVs (Error Coefficient of Variation) durchgeführt und hat sich als sehr geeignet erwiesen. Daher wird dieses Bewertungskriterium auch für diese Arbeit übernommen. Der ECOV ist ein Maß, mit dem sowohl Amplituden- als auch Phasenabweichungen eines Signals bewertet werden. Die quadratische Abweichung wird jeweils über das gesamte Integrationsintervall erfasst. Der ECOV ist sehr sensitiv auf einen Phasenverzug des Signals. Die *Zielfunktion* der vorliegenden *Optimierungsaufgabe* sei folglich die Summe aus dimensionsloser translatorischer und rotatorischer Abweichung der Aufbaumasse, mit dem ECOV bewertet. So soll die Güte einer Fesselung geeignet bestimmt werden können. Um die Abweichung des krafterregten vom wegerregten System zu erfassen, lässt sich der ECOV wie folgt anschreiben

$$ECOV_{z_A}(\vec{p}_F) = 100\sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_N}(z_A(t) - \zeta_A(t,\vec{p}_F))^2 dt}{\int_{t_0}^{t_N} z_A(t)^2 dt}} \tag{5.1}$$

$$ECOV_{\varphi_A}(\vec{p}_F) = 100\sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_N}(\varphi_A(t) - \alpha(t,\vec{p}_F))^2 dt}{\int_{t_0}^{t_N} \varphi_A(t)^2 dt}} \tag{5.2}$$

Wobei die Größe $\vec{p}_F = (c_F, d_F, c_T, d_T)^T$ den für die Fesselung verwendeten Parametervektor bezeichnen soll. Die Summe der beiden Abweichungen ergibt sich zur *Zielfunktion* der *Optimierungsaufgabe*

$$ECOV(\vec{p}_F) = ECOV_{z_A}(\vec{p}_F) + ECOV_{\varphi_A}(\vec{p}_F) \quad \rightarrow \quad \min \tag{5.3}$$

Für die numerische Berechnung werden die auftretenden Integrale mit Hilfe der Trapezregel berechnet. Hierzu wird die MATLAB-Routine `trapz.m` angewendet. Die Berechnung erfolgt an den Zeitpunkten der krafterregten gefesselten Lösung. Die tatsächliche Berechnung entspricht lediglich einer Approximation der Formel (5.3), welche durch die Feinheit des verwendeten Netzes durchaus legitim erscheint.
Will man die Optimierungsroutine `lsqcurvefit.m` verwenden, muss man das vorliegende Problem leicht modifizieren und als nichtlineares kleinstes Quadrate-Problem anschreiben. Die Berechnung wurde bereits in [1] hergeleitet und ist dort nachzulesen. Es wurde bei der Implementierung in MATLAB jedoch eine numerische Berechnung der Integrale mit Hilfe der Rechtecksregel verwendet.

Restriktionen
Bei der Modellbildung versucht man entsprechend der Realität das reale Problem auf ein mechanisches Modell zu reduzieren und dieses mit mathematischen Methoden zu beschreiben. Beim vorliegenden Problem des Abdriftens bemerkt man sehr rasch, dass es Maßnahmen benötigt, um das Abdriften zu verhindern, die jedoch die Realität in gewissen Maßen nicht getreu abbilden. Durch eine artifizielle Bindung des Systems kann man das Abdriftverhalten deutlich verringern, jedoch verändert man das System in fundamentaler Weise. Bei der vorliegenden *Optimierungsaufgabe* gilt es nun die Rahmenbedingungen der Fesselung zu erörtern. Will man trotz der künstlichen Bindung realitätsnahe Annahmen treffen, scheint es sinnvoll, nur positive Fesselungsparameter als Rahmenbedingungen zuzulassen. Für das *restringierte* Problem wäre also nur jeweils der positive Halbraum zulässige Menge für die Fesselungsparameter. Ist man allerdings durch die künstliche Bindung nicht motiviert auf einen Realitätsbezug der Fesselungsparameter zu achten, kann man zweifellos negative Parameter zulassen. Besonders negative Dämpfungswerte ergeben durchaus Sinn, da sie dem System Energie zuführen, die durch eine numerische Dämpfung dem System in Abhängigkeit des gewählten Integrationsverfahrens entzogen wird. Diese *Optimierungsaufgabe* wird in der vorliegenden Arbeit *semirestringiert* genannt. Betrachtet man die Fesselung als reine mathematische Maßnahme um die Koeffizientenmatrix des Systems geeignet zu manipulieren und die Nulleigenwerte verschwinden zu lassen, dann sind auch negative Steifigkeit- und Dämpfungsparameter durchaus vertretbar. Die *Optimierungsaufgabe* wird dann *unrestringiert* genannt. Unabhängig davon welchen Standpunkt man nun wählen möge, kann man eine deutliche Verbesserung durch eine artifizielle Bindung des Systems beobachten. Die jeweiligen Rahmenbedingungen beeinflussen klarerweise das Optimierungsergebnis. In dieser Arbeit seien a priori nur positive Fesselungsparameter zugelassen, es wird also das *restringierte* Optimierungsproblem betrachtet. Dennoch werden bei der Besprechung der Optimierungsergebnisse immer auch die Ergebnisse der *semirestringierten* und *unrestringierten* Probleme erwähnt.

5.1.2 Optimierungsalgorithmen

Nach einer geeigneten Definition der *Optimierungsaufgabe* gilt es mit einem passenden Verfahren optimale Lösungen zu berechnen. Um optimale Fesselungsparameter zu finden, wird die Berechnung mit verschiedenen Optimierungsalgorithmen durchgeführt. Die *Optimierungsaufgabe* wird einmal als stetiges nichtlineares Problem und einmal als Problem nichtlinearer kleinster Quadrate formuliert. Da die Verfahren in Abhängigkeit des Startwertes zu verschiedenen Lösungen konvergieren können, werden bei jedem Problem die Startwerte variiert. Die Lösungen sind jeweils lokale Extrema, ob sie allerdings das globale Extremum, also die optimale Lösung darstellen, wird man nicht sagen können. Nichtsdestotrotz wird man bei der Vielzahl von Zugängen sehr gute Fesselungsparameter finden, die eine Abweichung deutlich reduzieren. So wird man auch in Kapitel 5.2 sehen, dass teilweise unterschiedliche Fesselungsparameter mit ähnlich guten Ergebnissen gefunden werden. Für die Berechnung in Matlab wurden die Routinen `fminsearch.m`, `fminunc.m`, `fmincon.m` und `lsqcurvefit.m` verwendet, die im Folgenden kurz dargestellt werden.

`fminsearch.m` Der Nelder-Mead-Algorithmus (auch als Downhill-Simplex bezeichnet) ist eine *direkte Suchmethode*, die nur Funktionswerte verwendet und für nichtlineare *Zielfunktionen* ohne Nebenbedingungen eingesetzt wird [24]. Dieser Algorithmus benötigt eher längere Rechenzeiten, um auf ein optimales Ergebnis zu konvergieren.

`fminunc.m` Der Quasi-Newton-Algorithmus nutzt ein gemischtes quadratisches und kubisches Liniensuchverfahren sowie die BFGS-Formel (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) zur Aktualisierung der Näherung der Hesse-Matrix. Da die *Zielfunktion* ohne Nebenbedingungen des gefesselten Modells keine Information über den Gradienten enthält, wird der `MediumScale` Algorithmus gewählt. Die Hesse-Matrix wird dabei anhand einer Approximation mittels Finite-Differenzen ermittelt [25]. Diese Matlab-Routine benötigt die geringsten Rechenzeiten, um auf eine Lösung zu kommen.

`fmincon.m` Der Interior-Point-Algorithmus wird für die allgemeine nichtlineare Optimierung mit Nebenbedingungen verwendet und eignet sich besonders für umfangreiche und komplexe Probleme. Er basiert auf einer Barrierefunktion und kann so gesteuert werden, dass alle Iterationswerte im Optimierungsverlauf streng in den zulässigen Grenzen bleiben. Der Algorithmus konvergiert relativ rasch zu einer optimalen Lösung.

`lsqcurvefit.m` Der Trust-Region-Reflective-Algorithmus kann nur für Probleme mit oberen und unteren Schranken oder für lineare Gleichungen als Nebenbedingungen verwendet werden. Er eignet sich besonders für Probleme mit sehr vielen Variablen.

Beim vorliegenden Problem hat sich der Trust-Region-Reflective-Algorithmus aufgrund sehr langer Rechenzeiten als nicht geeignet erwiesen. Es wurden Kontrollrechnungen mit der MATLAB-Routine `lsqcurvefit.m` durchgeführt, jedoch ist für eine *restringierte* Optimierung die Routine `fmincon.m` zu bevorzugen.

Downhill-Simplex-Verfahren nach Nelder-Mead
Die sogenannte Simplexmethode von J. Nelder und R. Mead ist vermutlich das in der Praxis mit Abstand am meisten verwendete Verfahren zur nichtlinearen Minimierung. Das Nelder-Mead-Verfahren ist eine Methode zur Optimierung ohne Nebenbedingungen einer skalaren nichtlinearen Funktion von N reellen Parametern und kommt ohne Information über Ableitungen der Funktion aus. Es fällt somit in die Klasse der *direkten Suchmethoden*. Das Verfahren konvergiert in aller Regel recht langsam, ist aber dafür einfach und relativ robust [26, 27].
Der Algorithmus basiert auf einem Simplex, dem einfachsten Volumen im N-dimensionalen Parameterraum, das aus N+1 Punkten aufgespannt wird. Im vorliegenden vierdimensionalen Raum wird das 4-Simplex *Pentachoron* genannt. Die erzeugenden Punkte entsprechen jeweils einem Parametersatz, wobei jeder Punkt mit der *Zielfunktion* bewertet wird. Bei einem Iterationsschritt werden nach einer gewissen Systematik ein oder mehrere neue Punkte in oder nahe dem aktuellen Simplex gewählt. Die Funktionswerte der neuen Punkte werden mit den Eckpunkten verglichen und bewertet. Von einem Iterationsschritt zum nächsten wird normalerweise der Punkt mit der schlechtesten Bewertung durch einen mit einer besseren Bewertung ersetzt und so ein neues Simplex gebildet. Dieser Schritt wird solange wiederholt, bis das aktuelle Simplex hinreichend klein ist. Das Nelder-Mead-Verfahren erlaubt dem Simplex sowohl die Größe, als auch die Form zu verändern. So nähert es sich zielstrebig dem Optimum. Der interessierte Leser sei auf weiterführende Literatur, insbesondere auf [27] und [28] verwiesen.

Quasi-Newton-Verfahren
Newton- und Quasi-Newton-Methoden sind numerische Verfahren zur Lösung nichtlinearer Minimierungsprobleme und beruhen auf dem Prinzip, bei jeder Hauptiteration eine quadratische Näherung des tatsächlichen Verlaufs der *Zielfunktion* auf ihr Minimum hin zu untersuchen. Das Quasi-Newton-Verfahren basiert auf dem Newton-Verfahren, verwendet jedoch anstelle der exakten Hesse-Matrix der zu minimierenden *unrestringierten* Funktion eine geeignete Approximation an diese. Dadurch wird die häufig sehr aufwendige explizite Berechnung der zweiten partiellen Ableitungen der *Zielfunktion* vermieden. Diese Approximation wird dabei von Iteration zu Iteration aufdatiert. In der Berechnung werden also keine zusätzlichen Funktions- oder Ableitungswerte benötigt. Damit ist jeder Iterationsschritt des Quasi-Newton-Verfahrens weniger aufwendig und oft viel effizienter als beim Newton-Verfahren [29].

Das beliebteste und erfolgreichste Quasi-Newton-Verfahren ist das BFGS-Verfahren. Das BFGS-Verfahren, das praktisch zeitgleich und unabhängig voneinander von Broyden, Fletcher, Goldfarb und Shanno entdeckt wurde, findet auch Anwendung in der Berechnung mit Matlab [24].

Innere-Punkte-Verfahren
Der Innere-Punkte-Algorithmus wird für die allgemeine nichtlineare Optimierung verwendet und eignet sich besonders für umfangreiche und komplexe Probleme. Er basiert auf einer Barrierefunktion und kann so gesteuert werden, dass alle Iterationswerte im Optimierungsverlauf streng in den zulässigen Grenzen bleiben. Dabei wird zur *Zielfunktion* eine *logarithmische Barrierefunktion* hinzuaddiert, deren Funktionswerte gegen Unendlich wachsen, wenn man sich dem Rand des zulässigen Bereichs nähert. Über die Theorie des Innere-Punkte-Verfahrens wird der Begriff des *zentralen Pfades* geprägt. Dabei handelt es sich um einen stetigen Pfad im strikten Inneren des zulässigen Bereiches, der in Richtung der optimalen Lösung führt. Innerhalb der einzelnen Iterationen des Verfahrens werden dabei Iterationspunkte erzeugt, die sich an dem Verlauf des *zentralen Pfades* orientieren [30]. Auf die Gleichungen, die innerhalb der zentralen Pfadbedingungen auftreten, wird das Newton-Verfahren angewandt. In der Berechnung mit Matlab erfolgt die näherungsweise Berechnung der Hesse-Matrizen mit dem bereits erwähnten BFGS-Verfahren [31].

5.2 Optimierungsergebnisse

Nach einer geeigneten Definition der *Optimierungsaufgabe* und der Wahl verschiedener Lösungsverfahren gilt es, optimale zulässige Lösungen zu finden. Im Folgenden werden die Ergebnisse der *Optimierungsaufgaben* dargestellt und kurz besprochen. Wie bereits erwähnt, werden für die Lösung verschiedene Zugänge gewählt. Einerseits variieren die Rahmenbedingungen des Systems und andererseits werden verschiedene Optimierungsalgorithmen mit jeweils unterschiedlichen Startwerten angewendet. Für das krafterregte gefesselte System werden optimale Parameter für das System mit Aufbaumassenfesselung (siehe Kapitel 2.4 Fesselung des krafterregten Modells) berechnet. Aufgrund der Analyse einer geeigneten Fesselungsmethode in [1] wurde auch in dieser Arbeit eine Radmassenfesselung wahlweise überprüft. Es zeigt sich, dass die Radmassenfesselung besonders bei den analytischen Anregungen teilweise bessere Ergebnisse liefert. Dennoch wird das Hauptaugenmerk auf die Aufbaumassenfesselung gelegt, da sich diese nach der langjährigen Erfahrung von Magna Steyr Fahrzeugtechnik in der Vollfahrzeugsimulation als deutlich besser erweist. A priori ist also die Lösung der *restringierten Optimierungsaufgabe* des Systems mit Aufbaumassenfesselung von Interesse.

5.2.1 Anregung Sprung

Beim krafterregten gefesselten System mit Anregung Sprung wurde die *Optimierungsaufgabe* gelöst, um optimale Parameter für eine Aufbaumassenfesselung zu finden. Wie bereits erwähnt, wurden verschiedene Algorithmen zur Berechnung eingesetzt, bei denen jeweils die beiden unterschiedlichen Startwerte $\vec{p}_{F,0} = (0,0,0,0)^T$ und $\vec{p}_{F,0} = (1000,1000,1000,1000)^T$ verwendet wurden. In Tabelle 4 sind die optimalen Parameter in Abhängigkeit der *Restriktionen* des Systems mit Aufbaumassenfesselung zusammengefasst. Bei der Berechnung mit verschiedenen Optimierungsalgorithmen konnte festgestellt werden, dass bei Anregung Sprung unabhängig des Verfahrens dieselben optimalen Fesselungsparameter berechnet werden. Neben den erwähnten Optimierungsalgorithmen wurden auch die Fesselungsparameter im Intervall von 0 bis 1000 systematisch variiert und die beste Bewertung mit Hilfe der *Zielfunktion* als optimales Ergebnis gewertet. Dies entspricht gewissermaßen dem *restringierten* Problem und bestätigt bei Anregung Sprung die Optimierungsergebnisse.

Tabelle 4: Optimale Fesselungsparameter bei Aufbaumassenfesselung und Anregung Sprung

Restriktionen	Optimale Fesselungsparameter				ECOV
restringiert	[2.7e-6	405,8	249,7	779,2]	4,1
semirestringiert	[2,7e-6	405,8	249,7	779,2]	4,1
unrestringiert	[-5,4	425,3	247,1	798,0]	3,7

Fesselungsparameter c_F, d_F, c_T, d_T in N/m, Ns/m, Nm/rad, Nms/rad und ECOV in %.

In Abbildung 5.1 werden die optimalen *restringierten* Fesselungsparameter graphisch dargestellt. Die Fläche wird von den beiden rotatorischen Fesselungsparametern c_T und d_T und dem entsprechenden Funktionswert der *Zielfunktion* erzeugt, wobei die translatorischen Fesselungsparameter c_F und d_F jeweils den Wert der optimalen Parameter zugewiesen bekommen. Der rote Punkt kennzeichnet die Stelle der optimalen Lösung.
Für eine optische Interpretation der Ergebnisse werden die vier Fesselungsparameter jeweils in einem Intervall von 0 bis 1000 mit einer Schrittweite von 50 variiert und entsprechend animiert. Um die fünfdimensionalen Ergebnisse vorstellbar zu machen, werden wie in Abbildung 5.1 jeweils die Fesselungsparameter der Rotation auf den horizontalen Koordinatenachsen und der entsprechende Fehler auf der vertikalen Achse aufgetragen. Es werden dann jeweils die anderen beiden Fesselungsparameter für die Translation variiert und so eine Schar von Flächen erzeugt. Eine Animation dieser Flächen in einem Video ermöglicht eine Interpretation der Ergebnisse. So kann der Einfluss der verschiedenen Fesselungsparameter sehr einfach abgelesen werden und erleichtert somit deutlich das Verständnis des Systems.

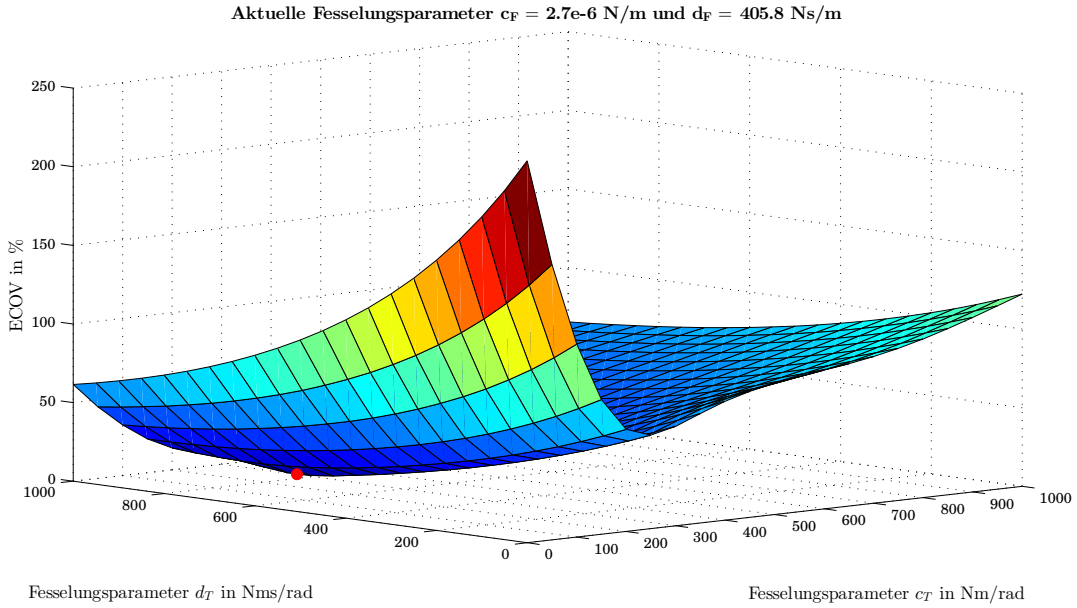


Abbildung 5.1: Optimierungsergebnisse bei Aufbaumassenfesselung und Anregung Sprung

Im Folgenden werden die wichtigsten Eigenschaften des krafterregten gefesselten Systems bei Aufbaumassenfesselung und Anregung Sprung erläutert

- Bei geringer translatorischer Steifigkeit c_F nimmt der Fehler mit zunehmender translatorischer Dämpfung d_F anfangs stark ab und dann wieder leicht zu.
- Bei größerer translatorischer Steifigkeit c_F nimmt der Fehler mit zunehmender translatorischer Dämpfung d_F ab, bei geringen Werten von d_F stärker und bei größeren Werten weniger stark.
- Mit zunehmender translatorischer Steifigkeit c_F nimmt der Fehler anfangs ab und dann wieder leicht zu.
- Bei geringer translatorischer Steifigkeit c_F und Dämpfung d_F ist die Fläche annähernd eine Ebene, die mit zunehmender rotatorischer Steifigkeit c_T ansteigt.
- Bei größer werdender translatorischer Steifigkeit c_F und Dämpfung d_F bildet sich eine deutliche konvexe Form der Fläche aus, wobei ähnlich wie in Abbildung 5.1 die Abhängigkeit von der rotatorischen Steifigkeit c_T ausgeprägter ist, als von der rotatorischen Dämpfung d_T.
- Gerade bei höheren rotatorischen Steifigkeiten c_T ist keine große Veränderung des Fehlers in Abhängigkeit der rotatorischen Dämpfung d_T zu erkennen.
- Bei niedrigen Werten der rotatorischen Steifigkeit c_T ergibt sich eine bauchige und deutlich konvex gekrümmte Form der Fläche.
- Es ist fast unabhängig von den übrigen Parametern ein ausgeprägter Anstieg des Fehlers bei kleinen Werten von rotatorischer Steifigkeit c_T und Dämpfung d_T zu erkennen.

Neben einer Berechnung des krafterregten Systems mit Aufbaumassenfesselung wurde auch das System mit Radmassenfesselung gerechnet. Bei den analytischen Anregungen zeigt sich überraschend eine deutliche Verbesserung mit einer Radmassenfesselung. Wie sich später noch herausstellen wird, ist die Verbesserung bei den gemessenen Anregungen jedoch nicht mehr so deutlich zu erkennen.

Tabelle 5: Optimale Fesselungsparameter bei Radmassenfesselung und Anregung Sprung

Restriktionen	Optimale Fesselungsparameter				ECOV
restringiert	[1,1e-2	219,6	1,3e-2	175,6]	0,1
semirestringiert	[1,1e-2	219,6	1,3e-2	175,6]	0,1
unrestringiert	[1,1e-2	219,6	1,3e-2	175,6]	0,1

Fesselungsparameter c_1, d_1, c_2, d_2 in N/m, Ns/m, N/m, Ns/m und ECOV in %.

Der Parametervektor umfasst jeweils die translatorische Steifigkeit c_1 und Dämpfung d_1 des vorderen Rades und die translatorische Steifigkeit c_2 und Dämpfung d_2 des hinteren Rades. Interessant bei den optimalen Fesselungsparametern sind die geringen Steifigkeiten bei beiden Radmassen. Es tritt vor allem Dämpfung auf, wobei entsprechend der höheren vorderen Radmasse die Dämpfung vorne höher ist.

5.2.2 Anregung Schwelle

Die Berechnung der *Optimierungsaufgabe* des krafterregten gefesselten Systems bei Anregung Schwelle entspricht im Wesentlichen jener bei Anregung Sprung. Es wurden wiederum die erwähnten Verfahren mit den Startwerten $\vec{p}_{F,0} = (0,0,0,0)^T$ und $\vec{p}_{F,0} = (1000,1000,1000,1000)^T$ für die Lösung des Systems mit den unterschiedlichen *Restriktionen* angewandt. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in Tabelle 6 zusammengefasst, in der die optimalen Fesselungsparameter abhängig von den jeweiligen Rahmenbedingungen und die zugehörige Abweichung ersichtlich sind. Ähnlich wie bei Anregung Sprung konvergieren die unterschiedlichen Verfahren zu denselben optimalen Parametern. Ebenso bestätigt die Berechnung mit einer systematischen Variation der Fesselungsparameter in einem Intervall von 0 bis 1000, was gewissermaßen dem *restringierten* Problem mit Aufbaumassenfesselung entspricht, die Ergebnisse der Optimierungsalgorithmen.

Tabelle 6: Optimale Fesselungsparameter bei Aufbaumassenfesselung und Anregung Schwelle

Restriktionen	Optimale Fesselungsparameter				ECOV
restringiert	[36,4	10,7	302,0	364,2]	8,7
semirestringiert	[36,4	10,7	302,0	364,2]	8,7
unrestringiert	[36,4	10,7	302,0	364,2]	8,7

Fesselungsparameter c_F, d_F, c_T, d_T in N/m, Ns/m, Nm/rad, Nms/rad und ECOV in %.

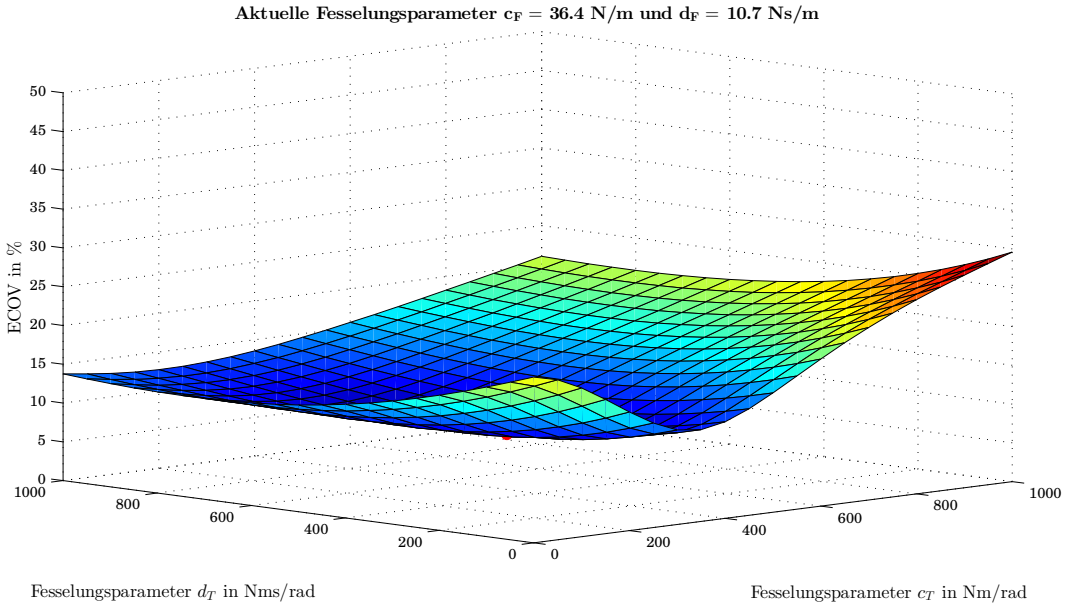


Abbildung 5.2: Optimierungsergebnisse bei Aufbaumassenfesselung und Anregung Schwelle

Mit Hilfe einer Animation der Optimierungsergebnisse lassen sich wiederum leicht die Zusammenhänge erkennen. Die wichtigsten sind im Folgenden zusammengefasst.

- Bei geringer translatorischer Steifigkeit c_F nimmt der Fehler mit zunehmender translatorischer Dämpfung d_F anfangs ab und dann wieder zu.
- Bei größeren Werten der translatorischen Steifigkeit c_F nimmt der Fehler mit zunehmender translatorischer Dämpfung d_F ab, bei geringen Werten von d_F schneller und bei größeren Werten langsamer.
- Mit zunehmender translatorischer Steifigkeit c_F nimmt der Fehler anfangs leicht ab und dann wieder deutlich zu.
- Es bildet sich eine deutliche konvexe Form der Fläche aus, wobei ähnlich wie in Abbildung 5.2 die Abhängigkeit von der rotatorischen Steifigkeit c_T im Allgemeinen ausgeprägter ist, als von der rotatorischen Dämpfung d_T.
- Das lokale Optimum der Fläche wandert bei geringen Werten der translatorischen Steifigkeit c_F mit steigender translatorischer Dämpfung d_F vom linken Rand in die Mitte des betrachteten Intervalls.
- Mit zunehmenden Werten der translatorischen Steifigkeit c_F wandert das lokale Optimum dann langsam zum rechten Rand und mit steigender translatorischer Dämpfung d_F von dort wiederum in die Mitte des betrachteten Intervalls.

Vergleicht man die Anregung Schwelle mit Anregung Sprung, lassen sich einige Analogien erkennen. Dennoch lassen sich schwer geeignete Fesselungsparameter voraussagen oder schätzen. Das qualitative Verhalten ist ähnlich, aber leider zu verschie-

den, um eine verlässliche Voraussage treffen zu können. Der Vergleich der unterschiedlichen Ergebnisse bei beiden analytischen Anregungen bestätigt dies auch.

Tabelle 7: Optimale Fesselungsparameter bei Radmassenfesselung und Anregung Schwelle

Restriktionen	Optimale Fesselungsparameter				ECOV
restringiert	[2.3e-6	1.9e-5	49,7	7.4e-5]	2,3
semirestringiert	[1.0e-4	-13,3	47,5	-4,0]	1,5
unrestringiert	[-3,9	5,0	46,7	-2,2]	0,1

Fesselungsparameter c_1, d_1, c_2, d_2 in N/m, Ns/m, N/m, Ns/m und ECOV in %.

Es wurde auch beim System mit Anregung Schwelle eine Radmassenfesselung überprüft. Ähnlich wie bei Anregung Sprung zeigt sich eine deutliche Verbesserung bei einer Radmassenfesselung. Interessant sind ebenfalls die geringen Werte der Fesselungsparameter unabhängig von den Rahmenbedingungen. Auch bei einer Radmassenfesselung kann man schwer Parallelen zwischen den optimalen Fesselungsparametern in Abhängigkeit von der Anregung ziehen oder gar eine Vorhersage treffen.

5.2.3 Anregung Komfortstrecke

Wie bereits bei den analytischen Anregungen ausführlich beschrieben, wird die *Optimierungsaufgabe* des Systems mit Anregung Komfortstrecke gelöst. Die optimalen Ergebnisse werden in Tabelle 8 in Abhängigkeit von den *Restriktionen* zusammengefasst. Bei Anregung mit Komfortstrecke konvergieren die verschiedenen Optimierungsalgorithmen teilweise zu unterschiedlichen Fesselungsparametern. In der folgenden Tabelle werden jeweils die Parameter mit der geringsten Abweichung aufgelistet. Beim *restringierten* Problem wären $\vec{p}_F = (956, 705, 9090, 3\text{e-}4)^T$ mit 49% Abweichung, beim *semi-* und *unrestringierten* Problem $\vec{p}_F = (1002, 719, 9409, -550)^T$ mit einer Abweichung von etwa 48% ebenfalls gute Fesselungsparameter. Obwohl diese Parameter eine deutlich unterschiedliche Charakteristik haben, liefern sie gute Ergebnisse und reduzieren die Abweichung beträchtlich. Eine Berechnung mit Variation der Fesselungsparameter im Intervall von 0 bis 1000 wurde auch bei diesem Problem durchgeführt. Die Ergebnisse bestätigen die optimalen Parameter nur bedingt, da sie teilweise außerhalb des betrachteten Intervalls liegen.

Tabelle 8: Optimale Fesselungsparameter bei Aufbaumassenfesselung und Komfortstrecke

Restriktionen	Optimale Fesselungsparameter				ECOV
restringiert	[7,2e-7	3,5e-6	7074,1	915,1]	25,0
semirestringiert	[9,2e-6	-84,9	6848,9	1028,0]	18,3
unrestringiert	[-7,0	-59,6	6904,4	996,7]	18,2

Fesselungsparameter c_F, d_F, c_T, d_T in N/m, Ns/m, Nm/rad, Nms/rad und ECOV in %.

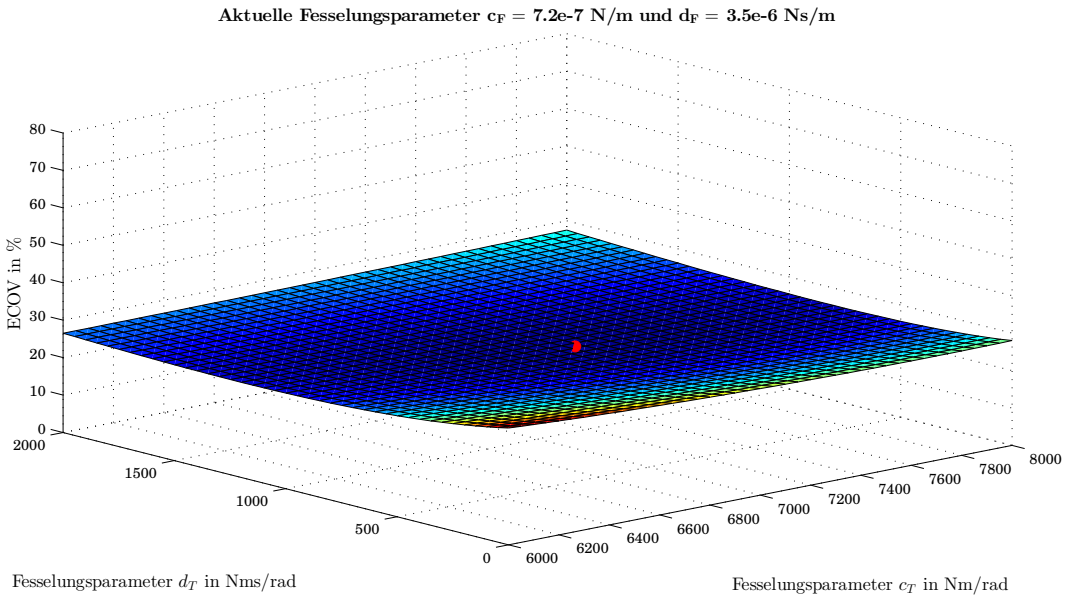


Abbildung 5.3: Optimierungsergebnisse bei Aufbaumassenfesselung und Komfortstrecke

In Abbildung 5.3 sind die Optimierungsergebnisse des *restringierten* Problems dargestellt. Der rote Punkt kennzeichnet wiederum die Lage der optimalen Fesselungsparameter mit der entsprechend geringsten Abweichung des gefesselten Systems. Mit Hilfe einer Animation lässt sich sehr einfach der Einfluss der verschiedenen Fesselungsparameter auf die Abweichung des krafterregten gefesselten Systems beschreiben. Es wurden hierzu die Fesselungsparameter jeweils im Intervall von 0 bis 1000 mit einer Schrittweite von 50 variiert und der Fehler in Abhängigkeit der rotatorischen Fesselungsparameter als Fläche dargestellt. Durch Variation der translatorischen Fesselungsparameter wird eine Schar von Flächen erzeugt und animiert. Die wichtigsten Aussagen sind im Folgenden kurz zusammengefasst.

- Bei geringen Werten der translatorischen Steifigkeit c_F und Dämpfung d_F ist die Fläche leicht konvex geformt und krümmt sich stärker mit zunehmender translatorischer Dämpfung d_F.
- Bei größer werdender translatorischer Steifigkeit c_F und Dämpfung d_F bildet sich eine deutliche konvexe Form der Fläche aus, wobei ähnlich wie bei den analytischen Anregungen die Abhängigkeit von der rotatorischen Steifigkeit c_T ausgeprägter ist, als von der rotatorischen Dämpfung d_T.
- Bei geringen Werten der translatorischen Steifigkeit c_F nimmt der Fehler mit zunehmender translatorischer Dämpfung d_F zu.
- Bei größeren Werten der translatorischen Steifigkeit c_F nimmt der Fehler mit zunehmender translatorischer Dämpfung d_F ab, bei geringen Werten von d_F stärker und bei größeren Werten weniger stark.

- Bei gewählter rotatorischer Steifigkeit c_T und Dämpfung d_T ist der Fehler bei größeren Werten der translatorischen Dämpfung d_F nahezu unabhängig von der translatorischen Steifigkeit c_F.
- Ohne großen Einfluss der translatorischen Parameter ist ein ausgeprägter Anstieg des Fehlers bei kleinen Werten von rotatorischer Steifigkeit c_T und Dämpfung d_T zu erkennen.
- Bei größeren Werten der rotatorischen Steifigkeit c_T und translatorischen Dämpfung d_F ist kaum ein Einfluss von der rotatorischen Dämpfung d_T auf den Fehler festzustellen.

Vergleicht man die Zusammenhänge mit den analytischen Anregungen lassen sich wiederum einige Analogien erkennen. Dennoch gibt es im betrachteten Intervall einige Unterschiede, die eine Schätzung oder eine Vorhersage von guten Fesselungsparametern nicht möglich machen.

Tabelle 9: Optimale Fesselungsparameter bei Radmassenfesselung und Komfortstrecke

Restriktionen	Optimale Fesselungsparameter				ECOV
restringiert	[78,2	3,3e-4	4,5e-5	1,4e-3]	47,9
semirestringiert	[41,9	-115,2	1.2e-6	-115,3]	23,8
unrestringiert	[23,8	-43,5	-20,6	-48,5]	20,2

Fesselungsparameter c_1, d_1, c_2, d_2 in N/m, Ns/m, N/m, Ns/m und ECOV in %.

Für die Anregung mit Komfortstrecke wurde wiederum eine Berechnung des krafterregten gefesselten Systems mit Radmassenfesselung durchgeführt. Bei der gemessenen Strecke als Anregung kann im Gegensatz zur Anregung mit Sprung und Schwelle nun keine Verbesserung bei einer Radmassenfesselung des Systems festgestellt werden. In diesem Fall ist die Aufbaumassenfesselung zu bevorzugen. Dies entspricht auch der Einschätzung von MAGNA STEYR bei einer Anwendung der Fesselung in der Vollfahrzeugsimulation. Ähnlich wie bei einer Aufbaumassenfesselung konvergieren auch bei einer Radmassenfesselung die verschiedenen Algorithmen zu unterschiedlichen Ergebnissen. Neben den optimalen Parametern in Tabelle 9 liefert der Parametervektor $\vec{p}_F = (689, 86, 701, 162)^T$ eine Abweichung von etwa 47% unabhängig der *Restriktionen*. Trotz unterschiedlicher Charakteristik der Fesselungsparameter kann eine deutliche Reduzierung der Abweichung erreicht werden.

5.2.4 Anregung Schlechtwegstrecke

Wie bei den analytischen Anregungen und bei der gemessenen Anregung mit Komfortweg sind auch bei der Anregung mit Schlechtwegstrecke die entsprechenden *Optimierungsaufgaben* berechnet und die optimalen Ergebnisse in Tabelle 10 zusam-

mengefasst. Bei Anregung Schlechtweg liefern alle Algorithmen dieselben optimalen Fesselungsparameter, unterschiedliche Ergebnisse gibt es nur bei Anregung Komfortweg. Die Optimierungsergebnisse des *restringierten* Problems konnten anhand einer entsprechenden Berechnung mit einer systematischen Variation der Fesselungsparameter im Intervall von 0 bis 1000 mit einer Schrittweite von 50 wiederum bestätigt werden.

Tabelle 10: Optimale Fesselungsparameter bei Aufbaumassenfesselung und Schlechtwegstrecke

Restriktionen	Optimale Fesselungsparameter				ECOV
restringiert	[8,2e-6	128,3	3.2e-6	1.7e-5]	34,6
semirestringiert	[26,2	-77,4	1,6e-5	-833,3]	22,8
unrestringiert	[14,4	-48,1	-226,9	-166,3]	10,4

Fesselungsparameter c_F, d_F, c_T, d_T in N/m, Ns/m, Nm/rad, Nms/rad und ECOV in %.

Bemerkenswert ist hier sicherlich, dass beim *semi-* und *unrestringierten* Problem nur negative Werte der Dämpfung auftreten würden, was einer Anfachung des Systems entspricht. Ähnliche Ergebnisse finden sich auch bei einer Radmassenfesselung.
In Abbildung 5.4 sind die Optimierungsergebnisse des *restringierten* Systems mit Aufbaumassenfesselung dargestellt. Der rote Punkt kennzeichnet die Stelle der optimalen Fesselungsparameter, wobei deutlich zu erkennen ist, dass das Optimum am Rande des zulässigen Intervalls liegt. Löst man demnach das *semi-* oder *unrestringierte* System ergeben sich teilweise negative Fesselungsparameter. Lässt man durchgehend negative Fesselungsparameter zu, wie beim *unrestringierten* Problem, kann man eine deutliche Verringerung der Abweichung beobachten.

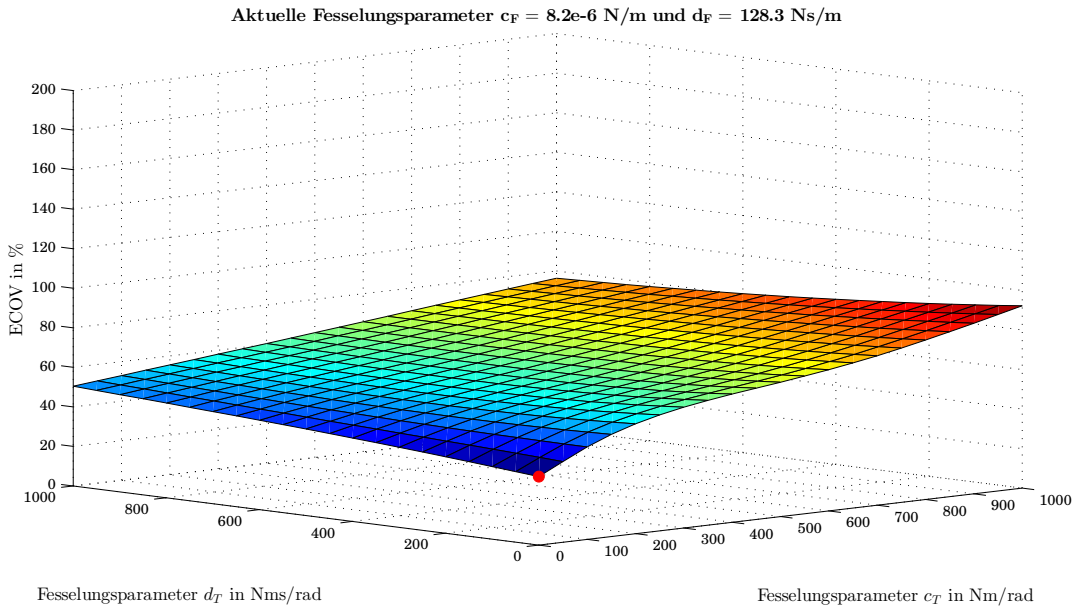


Abbildung 5.4: Optimierungsergebnisse bei Aufbaumassenfesselung und Schlechtwegstrecke

Mit Hilfe einer Animation des Fehlers in Abhängigkeit der Fesselungsparameter können wiederum einfach Zusammenhänge erkannt werden. Die wichtigsten sind im Folgenden zusammengefasst.

- Bei geringer translatorischer Steifigkeit c_F nimmt der Fehler mit zunehmender translatorischer Dämpfung d_F zu.
- Bei höherer translatorischer Steifigkeit c_F nimmt der Fehler mit zunehmender translatorischer Dämpfung d_F ab, bei geringen Werten von d_F stärker und bei größeren Werten weniger stark.
- Bei geringer translatorischer Steifigkeit c_F und Dämpfung d_F ist die Fläche wie in Abbildung 5.4 annähernd eine Ebene, die mit zunehmender rotatorischer Steifigkeit c_T ansteigt.
- Bei größer werdender translatorischer Steifigkeit c_F und Dämpfung d_F bildet sich ähnlich wie in Abbildung 5.1 eine deutliche konvexe Form der Fläche aus, wobei die Abhängigkeit von der rotatorischen Steifigkeit c_T ausgeprägter ist, als von der rotatorischen Dämpfung d_T.
- Außer bei sehr geringen Werten ist fast unabhängig der übrigen Parameter ein ausgeprägter Anstieg des Fehlers bei kleinen Werten von rotatorischer Steifigkeit c_T und Dämpfung d_T zu erkennen.
- Bei mittleren translatorischen Steifigkeiten c_F wandert bei steigender translatorischer Dämpfung d_F ein ausgeprägtes lokales Optimum vom rechten Rand des Intervalls in Richtung höherer Dämpfungswerte d_T.

Vergleicht man die Ergebnisse mit den bereits betrachteten analytischen Anregungen Sprung und Schwelle und der gemessenen Anregung Komfortweg, kann man erneut deutliche Parallelen wiederfinden. Besonders ähnlich ist das Verhalten wie bei Anregung Sprung. Dennoch ist eine Vorhersage der Fesselungsparameter kaum möglich.

Tabelle 11: Optimale Fesselungsparameter bei Radmassenfesselung und Schlechtwegstrecke

Restriktionen	Optimale Fesselungsparameter				ECOV
restringiert	[4,4e-6	4.1e-6	2,4e-6	26,7]	16,6
semirestringiert	[9,9	-45,7	7,7	-10,5]	9,1
unrestringiert	[9,9	-45,7	7,7	-10,5]	9,1

Fesselungsparameter c_1, d_1, c_2, d_2 in N/m, Ns/m, N/m, Ns/m und ECOV in %.

Die optimalen Fesselungsparameter des Systems mit Radmassenfesselung sind in Tabelle 11 zusammengefasst. Bei Anregung mit der gemessenen Schlechtwegstrecke kann man bei einer Radmassenfesselung eine geringere Abweichung erzielen als mit einer Aufbaumassenfesselung. Es treten ähnlich wie bei der Anregung mit Schwelle

und Komfortweg nur relativ kleine Werte der Fesselungsparameter auf. Vorhersagen über gute Parameter lassen sich aber kaum treffen.

5.2.5 Zusammenfassung

Zusammenfassend betrachtet werden im Kapitel 5 Optimierung verschiedene *Optimierungsaufgaben* mit dem Ziel gelöst, optimale Fesselungsparameter zu finden und ein Abdriften so gut wie möglich zu verhindern. Da es bei der Modellierung mehrere Wege gibt, eine *Optimierungsaufgabe* geeignet zu definieren, werden unterschiedliche Varianten ausprobiert und berechnet. Neben einer Variation der Fesselungsart werden auch die entsprechenden Rahmenbedingungen geändert. Zusätzlich zu einer Berechnung des krafterregten Systems mit Aufbaumassenfesselung wird auch das System mit Radmassenfesselung gerechnet. Aufgrund der Analyse einer geeigneten Fesselungsmethode in [1] wird auch in dieser Arbeit die Radmassenfesselung wahlweise überprüft. Bei den analytischen Anregungen hat sich überraschend eine deutliche Verbesserung mit einer Radmassenfesselung gezeigt. Bei einer Anregung mit einer gemessenen Strecke können nicht mehr so deutliche Verbesserungen mit einer Radmassenfesselung beobachtet werden. In [1] wurde festgestellt, dass sich die Fesselung der Aufbaumasse als günstiger erweist und somit der Fesselung der Radmasse vorzuziehen ist. Ebenso hat sich nach der langjährigen Erfahrung von MAGNA STEYR Fahrzeugtechnik bei einer Vollfahrzeugsimulation eine Aufbaumassenfesselung als besser geeignet erwiesen. Aus diesen Gründen wird in dieser Arbeit eine Aufbaumassenfesselung bevorzugt.

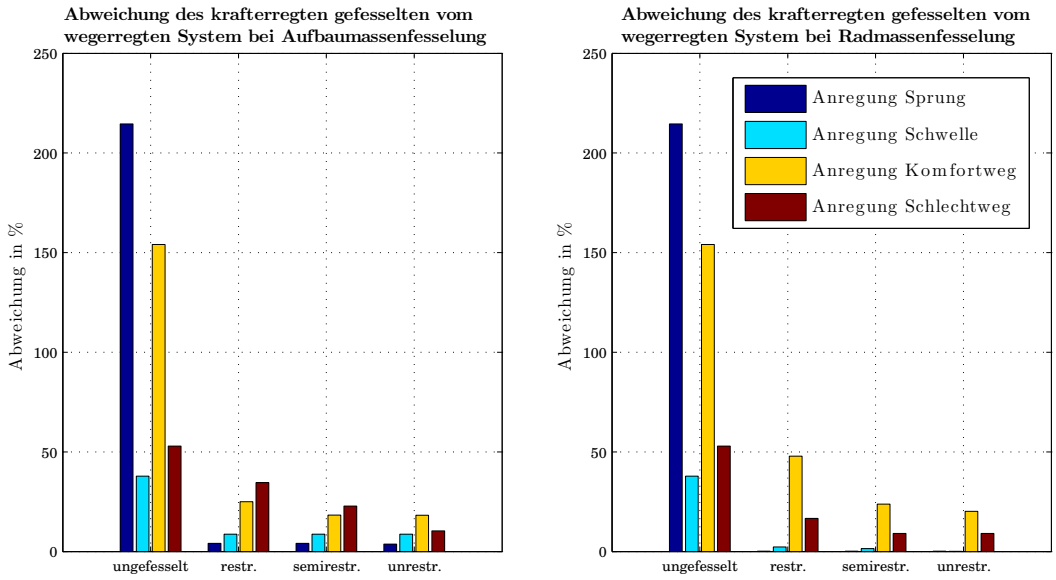


Abbildung 5.5: Abweichung in Abhängigkeit der *Restriktionen* bei verschiedenen Anregungen

Um die Sinnhaftigkeit einer geeigneten Fesselung mit optimalen Parametern auch bildlich darzustellen, sind in Abbildung 5.5 die Abweichungen aller Systeme aufgeführt. Es wird die Abweichung des krafterregten gefesselten Systems in Abhängigkeit der *Restriktionen* im Vergleich zum ungefesselten System gezeigt. Man kann auf den ersten Blick eine deutliche Reduktion des Abdriftens erkennen. Je nach Rahmenbedingungen lässt sich der Fehler teilweise nochmals deutlich verringern. Besondere Verbesserung ergibt sich beim System mit Anregung Sprung, gefolgt vom System mit Anregung Komfortweg. Eine genaue Beschreibung der Systeme mit optimalen Fesselungsparametern findet sich bereits in Kapitel 4.2.3 für die analytischen Anregungen und in Kapitel 4.3.3 für die gemessenen Anregungen.
Vergleicht man die Animationen des Fehlers in Abhängigkeit der Fesselungsparameter, kann man einige Parallelen erkennen. Besonders das Verhalten bei Anregung Sprung und Anregung Schlechtweg ist ähnlich. Bei Anregung Komfortweg kann man noch einige gemeinsame Charakteristiken erkennen, am meisten unterscheidet sich das Verhalten bei Anregung Schwelle. Auch wenn im Verhalten teilweise sehr viele Ähnlichkeiten zu finden sind, ist es kaum möglich, gute Fesselungsparameter zu schätzen. Das qualitative Verhalten ist zwar ähnlich, lässt es aber nicht zu, auf quantitative Größe zu schließen. Vermutlich ist eine Schätzung von Fesselungsparametern durchaus möglich, wenn sich bei gleichen Systemparametern die Anregungen durch die Fahrbahn nur geringfügig unterscheiden.

Kapitel 6

Conclusio und Ausblick

Das folgende abschließende Kapitel soll einen kurzen Überblick und eine rasche Zusammenfassung dieser Arbeit darstellen. Die wichtigsten Arbeitsschritte und Erkenntnisse sind auf einen Blick zusammengefasst. Anschließend werden einigen Ideen und Denkanstöße für eine weitere Untersuchung angesprochen.

6.1 Conclusio

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, eine *optimale Modell-Fesselung in der nabenkrafterregten Fahrzeugsimulation* zu studieren. Einer einfach zu realisierenden Messung von Radnabenkräften, sowie einer Einsparung eines aufwendigen Reifen- und Fahrbahnmodells steht ein Abdriften in der Simulation aufgrund von Fehlern gegenüber, die sich kumulieren und ungünstig auf das Simulationsergebnis auswirken. Beispielsweise sind die gemessenen Radnabenkräfte unweigerlich mit Messfehlern behaftet, weiters wird das Fahrzeugmodell aufgrund der Modellbildung das reale Verhalten des Fahrzeuges nicht exakt abbilden. Bei der numerischen Berechnung des mathematischen Modells kommt es ebenfalls zu unvermeidbaren Fehlern, wie einem Diskretisierungs- und einem Rundungsfehler. Die Vielzahl von möglichen Fehlern führt im Allgemeinen zu einem Abdriften des krafterregten Modells in der Simulation aufgrund einer möglichen rückstellkraftfreien Bewegung. Diese Instabilität des Systems lässt sich durch Auftreten von Nulleigenwerten der beschreibenden Systemmatrix erklären.

Übliche Stabilisierungsmaßnahmen wie eine *Baumgarte* Stabilisierung sind in diesem Fall nicht anwendbar, da eine Information über die tatsächliche Trajektorie des realen Fahrzeuges nicht zur Verfügung steht. Vorschläge aus der Literatur verwenden zusätzliche Messungen von Beschleunigungen an verschiedenen Stellen oder ausgewählten Lage- oder Geschwindigkeitskoordinaten, wie beispielsweise des Nickwinkels. In der vorliegenden Arbeit wird eine virtuelle Fesselung des Fahrzeugmodells untersucht, welche einer Kopplung des Systems an die Umgebung entspricht. Aufgrund der Nulleigenwerte des krafterregten Systems mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 2 und der folglich zwei möglichen Starrkörpereigenformen muss die Fesselung im Stande sein, ein translatorisches und ein rotatorisches Abdriften zu verhindern. Eine mögliche Variante ist eine Fesselung der Aufbaumasse als

dominanter Masse des Systems. Jeweils eine Feder-Dämpfer-Kombination in translatorischer und rotatorischer Richtung nimmt dem System seine trivialen *Eigenwerte* und erzeugt rückstellende Kräfte und Momente. Neben einer untersuchten Radmassenfesselung steht die Aufbaumassenfesselung im Fokus dieser Arbeit, da sie zufriedenstellende Ergebnisse liefert und sich nach langjähriger Erfahrung von Magna Steyr in der Praxis ebenfalls als vorteilhaft erwiesen hat.

Um optimale Ergebnisse einer Fesselung zu erhalten, wurde folgende Vorgehensweise gewählt. Nach der numerischen Lösung des wegerregten Systems, welche einer Überfahrt des realen Fahrzeuges über eine Teststrecke entspricht, wurden entsprechend einer Messfahrt die äquivalenten Kräfte in einer virtuellen Messung ermittelt. Bei einer folgenden Simulation des krafterregten Modells mit einer Anregung der ermittelten äquivalenten Kräfte sollten sich dieselben Fahrzeugbewegungen in der krafterregten Simulation wie bei der virtuellen Überfahrt ergeben. Aufgrund numerischer Fehler stellt sich eine Abweichung des krafterregten Modells vom wegerregten Modell ein und entfernt sich von dessen Bahn. Mit einem geeignet gewählten Maß kann die Abweichung quantitativ erfasst werden. Nach Einführung einer Aufbaumassenfesselung und testweise einer Radmassenfesselung wird die Abweichung in Abhängigkeit der Fesselungsparameter studiert. Anhand einer Optimierung kann die Abweichung des krafterregten gefesselten Modells minimiert und optimale Fesselungsparameter gefunden werden. Dabei werden neben einer Variation der Fesselungsart, die Anregung durch die Fahrbahn, die Rahmenbedingungen und Optimierungsalgorithmen mit jeweiligen Startwerten variiert. Eine abschließende Simulation des *restringierten* krafterregten Fahrzeugmodells mit Aufbaumassenfesselung zeigt die Güte und das Verbesserungspotential einer optimalen Fesselung mit entsprechenden Parametern.

Die wichtigsten Aussagen der Optimierungsmethode sind im Folgenden kurz zusammengefasst. Es sei an dieser Stelle auch auf Abbildung 5.5 verwiesen.
Die Verwendung einer Aufbaumassenfesselung mit optimalen Fesselungsparametern verringert das Abdriftverhalten enorm. Besonders bei den analytischen Anregungen Sprung und Schwelle kann durch die Wahl einer geeigneten Fesselung eine große Verbesserung erzielt werden. Der Kurvenverlauf wichtiger Lagekoordinaten des krafterregten gefesselten Modells ist dann optisch kaum vom wegerregten Modell zu unterscheiden. Bei Anregung Sprung kann man die größte Verbesserung feststellen. Hat bei dieser Anregung das ungefesselte System die größte Abweichung, kann durch Wahl von optimalen Fesselungsparametern die beste Übereinstimmung beim gefesselten System erreicht werden. Ein Grund für das hohe Verbesserungspotential bei den analytischen Anregungen ist sicherlich die geringe Anregung über das gesamte Intervall. Die Anregung der Fahrbahn wirkt jeweils nur zu kurzen Zeiten auf das Fahrzeugmodell. Die auftretenden Abweichungen lassen sich daher sehr effektiv mit einer

Aufbaumassenfesselung reduzieren. Bei den analytischen Anregungen zeigt sich allerdings eine Radmassenfesselung überlegen, bei den gemessenen Strecken ändert sich aber dieser Umstand.
Besonderes Verbesserungspotential bei den gemessenen Strecken stellt sich bei der Komfortstrecke ein. Ähnlich wie bei Anregung Sprung kann die Abweichung durch eine Fesselung mit optimalen Parametern sehr stark reduziert werden. Bei Anregung mit Schlechtwegstrecke kann auch eine deutliche Reduzierung des Fehlers erreicht werden, wobei eine starke Abhängigkeit von den gewählten *Restriktionen* zu erkennen ist. Bei den gemessenen Strecken als Anregung stellt sich bei Verwendung einer optimalen Fesselung eine deutliche Verbesserung ein, die auftretenden Abweichungen lassen sich mit der Methode einer Fesselung jedoch nur in gewissen Grenzen reduzieren. Anders als bei den analytischen Anregungen wird hier das Modell über das gesamte Intervall angeregt. Eine geeignete Fesselung ist dennoch ein großer Gewinn für die Genauigkeit der Ergebnisse.
Interpretiert man den Einfluss der einzelnen Fesselungsparameter auf die Abweichung, kann man besondere Parallelen bei Anregung Sprung und Anregung Schlechtwegstrecke erkennen. Bei der Anregung Komfortstrecke lassen sich noch einige gemeinsame Eigenschaften finden, am meisten unterscheidet sich das Verhalten bei Anregung Schwelle. Auch wenn im Verhalten sehr viele Analogien zu finden sind, ist es kaum möglich, optimale Fesselungsparameter zu schätzen.

6.2 Ausblick

Vorteilhaft an der Methode einer virtuellen Fesselung ist sicherlich das sehr einfache Konzept, welches eine rasche Implementierung ermöglicht. So einfach eine Aufbaumassenfesselung auf den ersten Blick auch sein mag, so anspruchsvoll stellt es sich heraus, entsprechend optimale Fesselungsparameter zu bestimmen. Es werden jedenfalls weiterführende Studien notwendig sein, um zuverlässig optimale Fesselungsparameter schätzen zu können. Im Folgenden werden einige Ideen angesprochen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit dem Phänomen des Abdriftens, welches numerisch bedingt ist. Der Fehler, der durch eine Integration zustande kommt, ist aber nicht die einzige mögliche Fehlerquelle bei einer Vollfahrzeugsimulation. Für aussagekräftige Ergebnisse sollte man den Einfluss weiterer möglicher Fehlerquellen untersuchen. Einen unvermeidbaren Messfehler könnte man durch eine Überlagerung der ermittelten äquivalenten Kräfte mit einem entsprechenden Signal, wie einem weißen Rauschen, simulieren. Den Einfluss des Modellierungs- und Parametrierungsfehlers könnte man durch Änderung von wichtigen Größen wie Masse- und Trägheitseigenschaften, Steifigkeits- und Dämpfungswerten oder Ähnlichem un-

tersuchen. Eine anschließende Sensitivitätsanalyse gibt Aufschlüsse über den Einfluss sowohl auf das Abdriften, als auch auf die optimalen Fesselungsparameter. Von besonderem Interesse ist dabei die Gültigkeit der bereits ermittelten optimalen Fesselungsparameter.
Die gewünschte Existenz von Fesselungsparametern, welche unabhängig von der Anregung zufriedenstellende Ergebnisse liefern, sei in Frage gestellt. Die bisherigen Untersuchungen haben gezeigt, dass die Art der Anregung sehr wohl entscheidend in die Lösung eingeht. Es muss also der Einfluss der Anregungen eingehend studiert werden, denn nur so ist es möglich, Vorhersagen über gute Fesselungsparameter treffen zu können. In der vorliegenden Arbeit ist es bereits gelungen, unabhängig von der Anregung einige Gemeinsamkeiten zu finden, allerdings sind diese qualitativen Analogien nicht ausreichend, um quantitative Aussagen tätigen zu können. Will man die Aufbaumassenfesselung tatsächlich nutzen, um verlässlich den Abdrifteffekt zu minimieren und auf ein akzeptables Maß zu reduzieren, gilt es, den Einfluss der Fahrbahn auf die optimalen Parameter zu identifizieren. Nur dann lassen sich Vorhersagen über gute Fesselungsparameter bei einer sich ändernden Fahrbahn treffen. Dieser Punkt sollte ein Bestandteil einer weiteren Analyse dieses Problems sein.
Die Charakteristik der Abweichung des krafterregten Systems und des Fehlers ist relativ sensitiv auf Integrationseinstellungen. Will man profunde Aussagen über das Fehlerverhalten tätigen, sollten das gewählte Integrationsverfahren und die getroffenen Integrationseinstellungen mit der Vollfahrzeugsimulation sehr gut übereinstimmen. Ein interessanter Aspekt wäre der Einfluss der Integrationsdauer auf das Fehlerverhalten oder eine Umkehr der Fahrtrichtung bei gleicher Fahrbahn.
Ein weiterer Schritt in fortführenden Studien könnte eine Simulation eines dreidimensionalen Gesamtfahrzeuges sein, welches mit den aus der Optimierung berechneten Parametern an die Umgebung gefesselt wird. Interessant scheint vor allem, ob sich die bereits ermittelten Fesselungsparameter ebenfalls als günstig erweisen.

Anhang

Anhang A Systemmatrizen

Wegerregtes Modell

$$\underline{M}_G = \begin{bmatrix} m_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{R1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{R2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_M \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_G = \begin{bmatrix} d_{A1}+d_{A2}+d_{M1}+d_{M2} & -d_{A1} & -d_{A2} & -d_{A1}l_{A1}+d_{A2}l_{A2}-d_{M1}l_{L1}-d_{M2}l_{L2} & -d_{M1}-d_{M2} & d_{M1}l_{M1}-d_{M2}l_{M2} \\ -d_{A1} & d_{A1} & 0 & d_{A1}l_{A1} & 0 & 0 \\ -d_{A2} & 0 & d_{A2} & -d_{A2}l_{A2} & 0 & 0 \\ -d_{A1}l_{A1}+d_{A2}l_{A2}-d_{M1}l_{L1}-d_{M2}l_{L2} & d_{A1}l_{A1} & -d_{A2}l_{A2} & d_{A1}l_{A1}^2+d_{A2}l_{A2}^2+d_{M1}l_{L1}^2+d_{M2}l_{L2}^2 & d_{M1}l_{L1}+d_{M2}l_{L2} & -l_{L1}d_{M1}l_{M1}+l_{L2}d_{M2}l_{M2} \\ -d_{M1}-d_{M2} & 0 & 0 & d_{M1}l_{L1}+d_{M2}l_{L2} & d_{M1}+d_{M2} & -d_{M1}l_{M1}+d_{M2}l_{M2} \\ d_{M1}l_{M1}-d_{M2}l_{M2} & 0 & 0 & -l_{L1}d_{M1}l_{M1}+l_{L2}d_{M2}l_{M2} & -d_{M1}l_{M1}+d_{M2}l_{M2} & d_{M1}l_{M1}^2+d_{M2}l_{M2}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_G = \begin{bmatrix} c_{A1}+c_{A2}+c_{M1}+c_{M2} & -c_{A1} & -c_{A2} & -c_{A1}l_{A1}+c_{A2}l_{A2}-c_{M1}l_{L1}-c_{M2}l_{L2} & -c_{M1}-c_{M2} & c_{M1}l_{M1}-c_{M2}l_{M2} \\ -c_{A1} & c_{A1}+c_{R1} & 0 & c_{A1}l_{A1} & 0 & 0 \\ -c_{A2} & 0 & c_{A2}+c_{R2} & -c_{A2}l_{A2} & 0 & 0 \\ -c_{A1}l_{A1}+c_{A2}l_{A2}-c_{M1}l_{L1}-c_{M2}l_{L2} & c_{A1}l_{A1} & -c_{A2}l_{A2} & c_{A1}l_{A1}^2+c_{A2}l_{A2}^2+c_{M1}l_{L1}^2+c_{M2}l_{L2}^2 & c_{M1}l_{L1}+c_{M2}l_{L2} & -l_{L1}c_{M1}l_{M1}+l_{L2}c_{M2}l_{M2} \\ -c_{M1}-c_{M2} & 0 & 0 & c_{M1}l_{L1}+c_{M2}l_{L2} & c_{M1}+c_{M2} & -c_{M1}l_{M1}+c_{M2}l_{M2} \\ c_{M1}l_{M1}-c_{M2}l_{M2} & 0 & 0 & -l_{L1}c_{M1}l_{M1}+l_{L2}c_{M2}l_{M2} & -c_{M1}l_{M1}+c_{M2}l_{M2} & c_{M1}l_{M1}^2+c_{M2}l_{M2}^2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{f}_G(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ c_{R1}s_1(t) \\ c_{R2}s_2(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{z}(t) = \begin{bmatrix} z_A(t) \\ z_{R1}(t) \\ z_{R2}(t) \\ \varphi_A(t) \\ z_M(t) \\ \varphi_M(t) \end{bmatrix}$$

Krafterregtes Modell

$$\underline{M}_G = \begin{bmatrix} m_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{R1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{R2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_M \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_G = \begin{bmatrix} d_{A1}+d_{A2}+d_{M1}+d_{M2} & -d_{A1} & -d_{A2} & -d_{A1}l_{A1}+d_{A2}l_{A2}-d_{M1}l_{L1}-d_{M2}l_{L2} & -d_{M1}-d_{M2} & d_{M1}l_{M1}-d_{M2}l_{M2} \\ -d_{A1} & d_{A1} & 0 & d_{A1}l_{A1} & 0 & 0 \\ -d_{A2} & 0 & d_{A2} & -d_{A2}l_{A2} & 0 & 0 \\ -d_{A1}l_{A1}+d_{A2}l_{A2}-d_{M1}l_{L1}-d_{M2}l_{L2} & d_{A1}l_{A1} & -d_{A2}l_{A2} & d_{A1}l_{A1}^2+d_{A2}l_{A2}^2+d_{M1}l_{L1}^2+d_{M2}l_{L2}^2 & d_{M1}l_{L1}+d_{M2}l_{L2} & -l_{L1}d_{M1}l_{M1}+l_{L2}d_{M2}l_{M2} \\ -d_{M1}-d_{M2} & 0 & 0 & d_{M1}l_{L1}+d_{M2}l_{L2} & d_{M1}+d_{M2} & -d_{M1}l_{M1}+d_{M2}l_{M2} \\ d_{M1}l_{M1}-d_{M2}l_{M2} & 0 & 0 & -l_{L1}d_{M1}l_{M1}+l_{L2}d_{M2}l_{M2} & -d_{M1}l_{M1}+d_{M2}l_{M2} & d_{M1}l_{M1}^2+d_{M2}l_{M2}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\widetilde{C}}_G = \begin{bmatrix} c_{A1}+c_{A2}+c_{M1}+c_{M2} & -c_{A1} & -c_{A2} & -c_{A1}l_{A1}+c_{A2}l_{A2}-c_{M1}l_{L1}-c_{M2}l_{L2} & -c_{M1}-c_{M2} & c_{M1}l_{M1}-c_{M2}l_{M2} \\ -c_{A1} & c_{A1} & 0 & c_{A1}l_{A1} & 0 & 0 \\ -c_{A2} & 0 & c_{A2} & -c_{A2}l_{A2} & 0 & 0 \\ -c_{A1}l_{A1}+c_{A2}l_{A2}-c_{M1}l_{L1}-c_{M2}l_{L2} & c_{A1}l_{A1} & -c_{A2}l_{A2} & c_{A1}l_{A1}^2+c_{A2}l_{A2}^2+c_{M1}l_{L1}^2+c_{M2}l_{L2}^2 & c_{M1}l_{L1}+c_{M2}l_{L2} & -l_{L1}c_{M1}l_{M1}+l_{L2}c_{M2}l_{M2} \\ -c_{M1}-c_{M2} & 0 & 0 & c_{M1}l_{L1}+c_{M2}l_{L2} & c_{M1}+c_{M2} & -c_{M1}l_{M1}+c_{M2}l_{M2} \\ c_{M1}l_{M1}-c_{M2}l_{M2} & 0 & 0 & -l_{L1}c_{M1}l_{M1}+l_{L2}c_{M2}l_{M2} & -c_{M1}l_{M1}+c_{M2}l_{M2} & c_{M1}l_{M1}^2+c_{M2}l_{M2}^2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\tilde{f}}_G(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1(t) \\ F_2(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{\zeta}(t) = \begin{bmatrix} \zeta_A(t) \\ \zeta_{R1}(t) \\ \zeta_{R2}(t) \\ \alpha_A(t) \\ \zeta_M(t) \\ \mu_M(t) \end{bmatrix}$$

Krafterregtes gefesseltes Modell

$$\underline{D}_{GFA} = \underline{D}_G + \begin{bmatrix} d_F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} d_{A1}+d_{A2}+d_{M1}+d_{M2}+d_F & -d_{A1} & -d_{A2} & -d_{A1}l_{A1}+d_{A2}l_{A2}-d_{M1}l_{L1}-d_{M2}l_{L2} & -d_{M1}-d_{M2} & d_{M1}l_{M1}-d_{M2}l_{M2} \\ -d_{A1} & d_{A1} & 0 & d_{A1}l_{A1} & 0 & 0 \\ -d_{A2} & 0 & d_{A2} & -d_{A2}l_{A2} & 0 & 0 \\ -d_{A1}l_{A1}+d_{A2}l_{A2}-d_{M1}l_{L1}-d_{M2}l_{L2} & d_{A1}l_{A1} & -d_{A2}l_{A2} & d_{A1}l_{A1}^2+d_{A2}l_{A2}^2+d_{M1}l_{L1}^2+d_{M2}l_{L2}^2+d_T & d_{M1}l_{L1}+d_{M2}l_{L2} & -l_{L1}d_{M1}l_{M1}+l_{L2}d_{M2}l_{M2} \\ -d_{M1}-d_{M2} & 0 & 0 & d_{M1}l_{L1}+d_{M2}l_{L2} & d_{M1}+d_{M2} & -d_{M1}l_{M1}+d_{M2}l_{M2} \\ d_{M1}l_{M1}-d_{M2}l_{M2} & 0 & 0 & -l_{L1}d_{M1}l_{M1}+l_{L2}d_{M2}l_{M2} & -d_{M1}l_{M1}+d_{M2}l_{M2} & d_{M1}l_{M1}^2+d_{M2}l_{M2}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_{GFA} = \widetilde{\underline{C}}_G + \begin{bmatrix} c_F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{A1}+c_{A2}+c_{M1}+c_{M2}+c_F & -c_{A1} & -c_{A2} & -c_{A1}l_{A1}+c_{A2}l_{A2}-c_{M1}l_{L1}-c_{M2}l_{L2} & -c_{M1}-c_{M2} & c_{M1}l_{M1}-c_{M2}l_{M2} \\ -c_{A1} & c_{A1} & 0 & c_{A1}l_{A1} & 0 & 0 \\ -c_{A2} & 0 & c_{A2} & -c_{A2}l_{A2} & 0 & 0 \\ -c_{A1}l_{A1}+c_{A2}l_{A2}-c_{M1}l_{L1}-c_{M2}l_{L2} & c_{A1}l_{A1} & -c_{A2}l_{A2} & c_{A1}l_{A1}^2+c_{A2}l_{A2}^2+c_{M1}l_{L1}^2+c_{M2}l_{L2}^2+c_T & c_{M1}l_{L1}+c_{M2}l_{L2} & -l_{L1}c_{M1}l_{M1}+l_{L2}c_{M2}l_{M2} \\ -c_{M1}-c_{M2} & 0 & 0 & c_{M1}l_{L1}+c_{M2}l_{L2} & c_{M1}+c_{M2} & -c_{M1}l_{M1}+c_{M2}l_{M2} \\ c_{M1}l_{M1}-c_{M2}l_{M2} & 0 & 0 & -l_{L1}c_{M1}l_{M1}+l_{L2}c_{M2}l_{M2} & -c_{M1}l_{M1}+c_{M2}l_{M2} & c_{M1}l_{M1}^2+c_{M2}l_{M2}^2 \end{bmatrix}$$

Anhang B Parameterwerte

Tabelle 12: Parameterwerte

Größe	Zeichen	Zahlenwert	Einheit
Radstand	L	2,851	m
Vorderachsabstand	l_{A1}	1,643	m
Hinterachsabstand	l_{A2}	1,208	m
Aufbaumasse	m_A	1363	kg
Radmasse vorne	m_{R1}	118,4	kg
Radmasse hinten	m_{R2}	91,2	kg
Motormasse	m_M	365	kg
Massenträgheitsmoment des Aufbaus	I_A	1722	kg m^2
Massenträgheitsmoment des Motors	I_M	46	kg m^2
Ersatzsteifigkeit der Aufbaufederung vorne	c_{A1}	47000	N/m
Ersatzsteifigkeit der Aufbaufederung hinten	c_{A2}	52600	N/m
Ersatzsteifigkeit des Reifens vorne	c_{R1}	660000	N/m
Ersatzsteifigkeit des Reifens hinten	c_{R2}	660000	N/m
Ersatzsteifigkeit der Motorlagerung	c_{M1}	398488	N/m
Ersatzsteifigkeit der Getriebelagerung	c_{M2}	192542	N/m
Dämpfungskonstante der Aufbaulagerung vorne	d_{A1}	2652	Ns/m
Dämpfungskonstante der Aufbaulagerung hinten	d_{A2}	2172	Ns/m
Dämpfungskonstante der Motorlagerung	d_{M1}	3762	Ns/m
Dämpfungskonstante der Getriebelagerung	d_{M2}	2331	Ns/m
Abstand Motorlagerung zu Aufbauschwerpunkt	l_{L1}	1,798	m
Abstand Getriebelagerung zu Aufbauschwerpunkt	l_{L2}	0,662	m
Abstand Motorlagerung zu Motorschwerpunkt	l_{M1}	0,285	m
Abstand Getriebelagerung zu Motorschwerpunkt	l_{M2}	0,851	m

Tabelle 13: Fesselungsparameter

Größe	Zeichen	Einheit
Federsteifigkeit der linearen Feder	c_F	N/m
Dämpfungsrate des linearen Dämpfers	d_F	Ns/m
Federsteifigkeit der Drehfeder	c_T	Nm/rad
Dämpfungsrate des Drehdämpfers	d_T	Nms/rad

Anhang C Auswahl einer geeigneten Integrationsroutine

Wegerregtes System

Für die numerische Berechnung von Anfangswertproblemen stellt die Mathematik zahlreiche Algorithmen zur Verfügung. Bewährte Integrationsroutinen sind in MATLAB als `functions` implementiert und erlauben dem Anwender eine einfache Verwendung. Um eine geeignete Integrationsroutine für die Berechnung der vorliegenden Systeme zu finden, wird parallel zum wegerregten System ein freier ungedämpfter Einmassenschwinger integriert. Die Bewegungsgleichung des Schwingers ist vom wegerregten System entkoppelt, wird allerdings bei einer jeweiligen Anregung zu denselben Zeitpunkten integriert. Die Parameter des Einmassenschwingers werden so gewählt, dass sich eine Eigenfrequenz von 10 Hz ergibt. Die Masse wird mit 100 kg gewählt und orientiert sich etwa an den Radmassen, die Steifigkeit wird entsprechend angepasst. Die Anfangsbedingungen des Schwingers werden so gewählt, dass sich eine der Anregung entsprechende Amplitude einstellt. Das System schwingt entsprechend bei Anregung Sprung mit einer Amplitude der Sprunghöhe und bei Anregung Schwelle mit einer Amplitude der Schwellenhöhe.
Das System wird mit allen verfügbaren MATLAB Integrationsroutinen berechnet und ermöglicht so die Auswahl eines geeigneten Verfahrens. Aufgrund unverhältnismäßig langer Rechenzeiten ist die Integrationsroutine `ode23s.m` für steife Systeme gleich zu Beginn aus der Auswahl geschieden.

- `ode45` – Explizites Einschrittverfahren, eingebettetes Runge-Kutta (4,5) Verfahren (Dormand-Prince); Nicht Steif
- `ode23` – Explizites Einschrittverfahren, eingebettetes Runge-Kutta (2,3) Verfahren (Bogacki und Shampine); Nicht Steif bis Mäßig Steif
- `ode113` – Prädiktor-Korrektor-Verfahren nach Adams-Bashfort-Moulton, Mehrschrittverfahren variabler Ordnung (1-13); Nicht Steif
- `ode15s` – Implizites Mehrschrittverfahren variabler Ordnung (1-5), Numerische Differentiationsformeln (NDF); Steif
- `ode23s` – Implizites Einschrittverfahren, eingebettetes Rosenbrock-Wanner (2,3) Verfahren; Steif
- `ode23t` – Trapezregel (2) mit freier Interpolation, implizites Einschrittverfahren; Mäßig Steif

- `ode23tb` – Implizites Runge-Kutta (2,3) Verfahren, kombinierte implizite Trapezregel mit Rückwärts-Differentiationsformel 2. Ordnung (TR-BDF2), Mehrschrittverfahren; Steif
- `ode15i` – Löst implizite gewöhnliche Differential- und differentialalgebraische Gleichungen vom Index 1, Rückwärts-Differentiationsformeln (BDF); Nicht Steif

Der interessierte Leser sei auf die MATLAB-Hilfe [21], insbesondere dort empfohlene weiterführende Literatur verwiesen.

Die Abweichung der jeweiligen numerischen Lösung von der analytischen Lösung soll das Entscheidungskriterium für den Solver sein. Die Referenzlösung ist die analytische Lösung des Einmassenschwingers bei gegebenen Anfangsbedingungen. Als Maß für die Abweichung dient der ECOV, der sich wie folgt anschreiben lässt

$$ECOV_i = 100\sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_N}(z_{anal}(t) - z_{num,i}(t))^2 dt}{\int_{t_0}^{t_N} z_{anal}(t)^2 dt}} \tag{6.1}$$

In der folgenden Abbildung sieht man einen Ausschnitt bei Anregung Sprung nach etwa 9 s Integrationszeit, um die auftretende Phasenverschiebung und den Amplitudenabfall aufgrund der numerischen Dämpfung deutlich erkennen zu können. Die Integrationseinstellungen entsprechen den Beschreibungen in Abschnitt 4.2.1, lediglich der Einmassenschwinger wird zusätzlich parallel integriert.

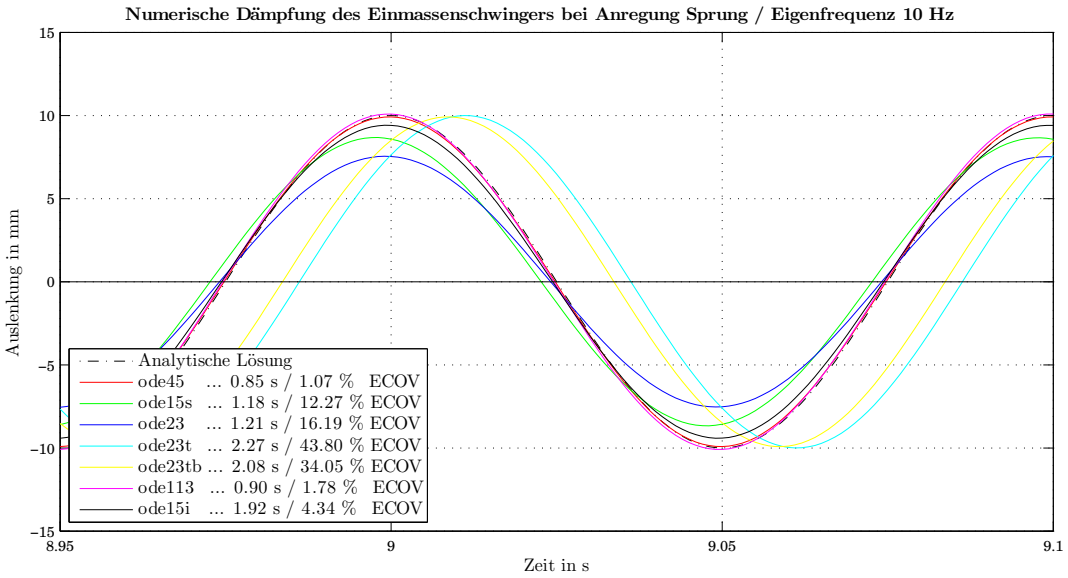


Abbildung C 1: Numerische Dämpfung des Einmassenschwingers bei Anregung Sprung

In Abbildung C 1 sind die unterschiedlichen Rechenzeiten der jeweiligen Integrationsroutinen und deren Abweichungen zur analytischen Lösung ersichtlich. Man kann deutlich erkennen, dass die numerische Lösung der Integrationsroutine `ode45.m` am geringsten von der analytischen Lösung abweicht. Neben einer guten optischen Übereinstimmung der beiden Kurven, ergibt sich auch nur ein geringer Wert des ECOVs von 1,07 %. Des Weiteren stellt sich eine geringe Rechenzeit von 0,85 s ein, was natürlich günstig für eine anschließende rechenintensive Optimierung der Fesselungsparameter ist. In der folgenden Abbildung C 2 sind die Differenzen der jeweiligen numerischen zur analytischen Lösung ersichtlich.

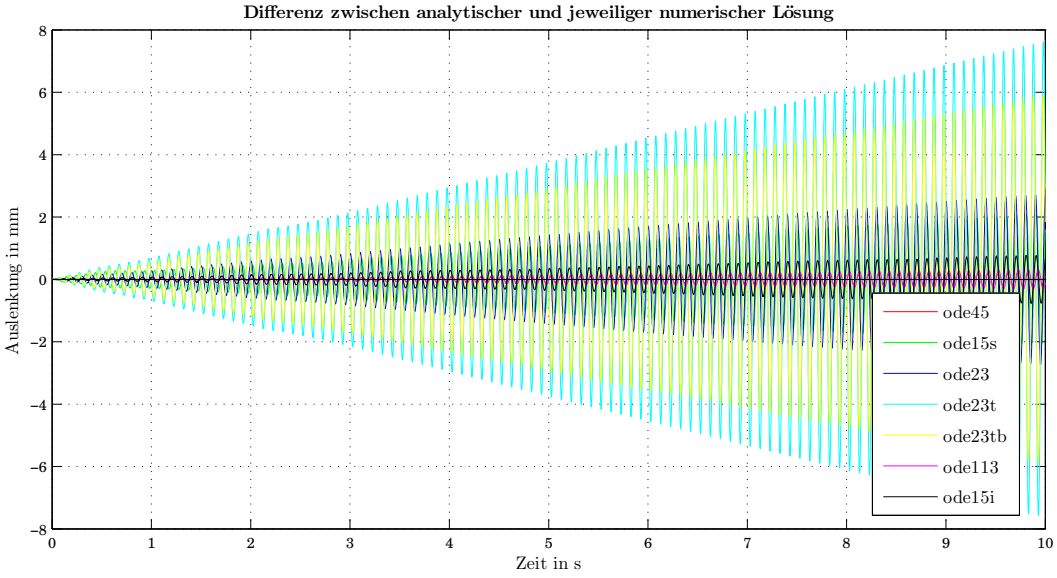


Abbildung C 2: Differenz von analytischer und jeweiliger numerischer Lösung

Betrachtet man das wegerregte System mit parallelem Einmassenschwinger bei Anregung Schwelle, ergeben sich sehr ähnliche Ergebnisse. Die Unterschiede vom System bei Anregung Schwelle zum System bei Anregung Sprung ergeben sich durch eine unterschiedliche Verteilung der Integrationspunkte aufgrund einer automatischen Schrittweitensteuerung der verwendeten Integrationsroutinen. Wiederum liefert die numerische Lösung der Integrationsroutine `ode45.m` die geringste Abweichung zur analytischen Lösung des Einmassenschwingers. Bei Anregung Schwelle stellt sich die geringe Rechenzeit von 0,88 s ein, was wiederum günstig für eine Optimierung ist.

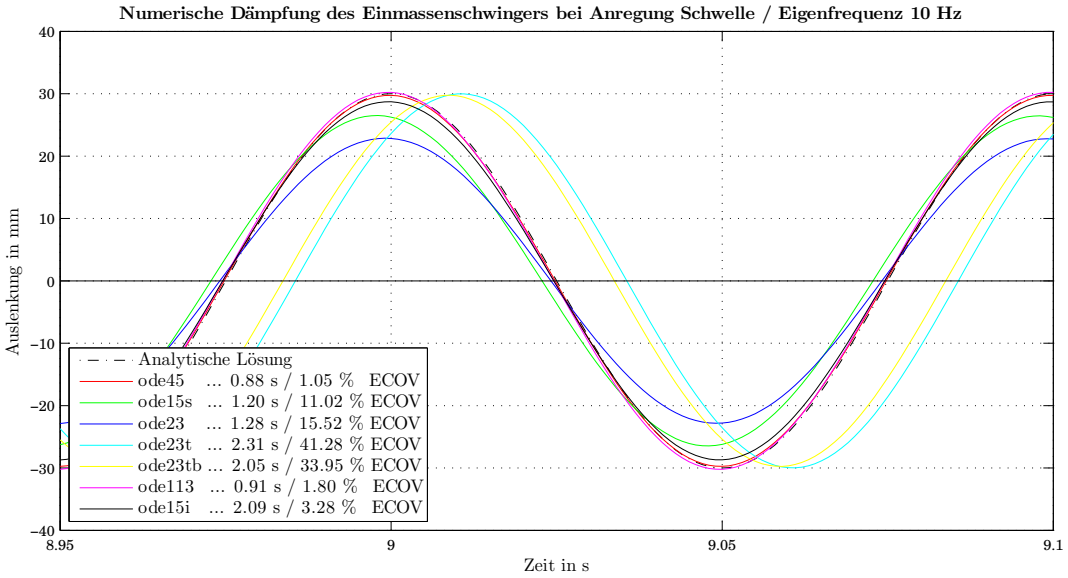


Abbildung C 3: Numerische Dämpfung des Einmassenschwingers bei Anregung Schwelle

Krafterregte Systeme

Bei der Integration des krafterregten und krafterregten gefesselten Systems hat sich sehr rasch gezeigt, dass die Verwendung des eingebetteten *Dormand-Prince-Verfahrens* `ode45.m` nicht optimal ist. Es stellt sich bei der Berechnung der beiden Systeme unabhängig vom Phänomen des Abdriftens ein hoher stochastischer Anteil ein, der sehr sensitiv auf Änderungen von System- und Fesselungsparametern reagiert. Besonders bemerkbar macht sich dieser bei den Berechnungen des krafterregten gefesselten Systems. Bei gleicher Anregung und leicht unterschiedlichen Fesselungsparametern stellt sich ein stark unterschiedliches Abdriftverhalten ein. Das Übertragungsverhalten des Systems ändert sich dabei kaum, die Antwort des Systems im Zeitbereich allerdings deutlich. Da die vorliegenden Systeme durchgehend linear gerechnet werden (lineare Feder- und Dämpferkennlinien und geometrisch linearisiert), ist ein solch stochastisches Verhalten kaum vorzustellen. Folglich wurden für die Berechnung der krafterregten Systeme vergleichbare Integrationsroutinen getestet, wobei sich das *klassische Runge-Kutta-Verfahren* als sehr gut geeignet erwiesen hat. Beide verwendete Verfahren gehören zur großen Familie der Runge-Kutta-Verfahren. Das verwendete eingebettete *Dormand-Prince-Verfahren* mit Schrittweitensteuerung liefert eine Lösung 5. Ordnung, das *klassische Runge-Kutta-Verfahren* mit fixer Schrittweite eine Lösung 4. Ordnung. Für die Berechnung in Matlab wurde die Routine `ode4.m` verwendet und hat sich als sehr geeignet erwiesen. Die Ergebnisse entsprechen den Erwartungen an ein lineares System. Ein Grund für den hohen stochastischen Anteil bei der Verwendung des *Dormand-Prince-Verfahrens* `ode45.m` könnte die Kombination von notwendiger Interpolation der äquivalenten Kräfte, In-

tegration mit Schrittweitensteuerung und Verwendung von *Continuous Extensions* bei der Auswertung der Lösung zu äquidistanten Zeitpunkten und die damit verbundenen numerischen Fehler sein. Bei der vorliegenden Integrationsmethode der beiden krafterregten Systeme fallen durch die Verwendung einer fixen Schrittweite die Interpolation und die Verwendung von *Continuous Extensions* weg. Die geeignete Wahl einer sinnvollen Schrittweite sollte sowohl realisierbare Samplingfrequenzen berücksichtigen, als auch die mit der Wahl verbundene Genauigkeit der krafterregten und krafterregten gefesselten Integration. Hierfür wurde eine Studie im Anhang D Wahl einer geeigneten *virtuellen Samplingfrequenz* durchgeführt.

Zusammenfassend stellt die Integration des wegerregten Systems mit der Integrationsroutine `ode45.m` mit variabler Schrittweite eine effiziente Berechnung mit sehr flexiblen Eingabewerten dar und liefert eine Lösung zu äquidistanten Zeitpunkten. Die folgende Integration des krafterregten und krafterregten gefesselten Systems mit der Integrationsroutine `ode4.m` mit fixer Schrittweite hat sich als notwendig und sehr gut geeignet erwiesen.

Anhang D Wahl einer geeigneten *virtuellen Samplingfrequenz*

Will man den Ablauf der numerischen Berechnung möglichst realitätsnah gestalten, gilt es für die Berechnung der äquivalenten Kräfte eine passende *virtuelle Samplingfrequenz* zu wählen. Wie bereits erwähnt wurde, entspricht die Ermittlung der äquivalenten Kräfte im Berechnungsprogramm der Aufzeichnung der Radnabenkräfte während einer Messfahrt. Da mit einer konstanten Abtastrate gemessen wird, wählt man zweckmäßig eine zeitlich äquidistante Berechnung der Kräfte. Es kann folglich der Abstand der berechneten Punkte als Abtastintervall bezeichnet und davon eine Samplingfrequenz abgeleitet werden, die in dieser Arbeit als *virtuelle Samplingfrequenz* bezeichnet wird. Bei der Wahl einer geeigneten *virtuellen Samplingfrequenz* wird man sich an den in der Praxis üblichen Werten orientieren. Bei Magna Steyr wird bei etwa 90 % aller gefesselten Simulationen eine Messabtastung von 600 Hz und bei den restlichen 10 % eine Messabtastung von 1000 Hz gewählt.
Neben einer realitätsnahen Wahl der *virtuellen Samplingfrequenz* muss auch der Einfluss auf die Genauigkeit der Lösung bei der Integration beachtet werden. Die Wahl des Integrationsverfahrens und damit verbunden die Wahl einer Schrittweite haben großen Einfluss auf die Genauigkeit der Lösung. Das verwendete *klassische Runge-Kutta-Verfahren* ist eine Integrationsmethode mit fixer Schrittweite. Diese Integrationsroutine hat im Gegensatz zum *Dormand-Prince-Verfahren* keine Abschätzung des Fehlers. Die Berechnungsdauer und die Genauigkeit der Lösung hängen direkt von der gewählten Schrittweite ab. Verringert man die Schrittweite, erhöht sich die Genauigkeit der Näherungslösung, allerdings erhöht sich auch die Berechnungsdauer. Ebenso erhöht sich die Genauigkeit der Lösung bei gewählter Schrittweite mit höherer Verfahrensordnung. Die Ordnung des Verfahrens wurde bereits durch die Wahl des Integrationsverfahrens festgelegt. Die Genauigkeit der Lösung lässt sich nunmehr allein durch die geeignete Wahl der *virtuellen Samplingfrequenz* beeinflussen.
In den folgenden Abbildungen sieht man den Einfluss verschiedener *virtueller Samplingfrequenzen* einerseits auf die Abweichung des krafterregten vom wegerregten System, andererseits auf die Rechenzeit der beiden Systeme. Das Integrationsintervall ist durchgehend 10 s mit einer Begrenzung der maximalen Schrittweite `MaxStep` auf 10 ms beim wegerregten System. Die *virtuelle Samplingfrequenz* wird jeweils im Bereich von 200 Hz bis 1200 Hz variiert. Als Maß für die translatorische und rotatorische Abweichung der Aufbaumasse dient wiederum der ECOV.

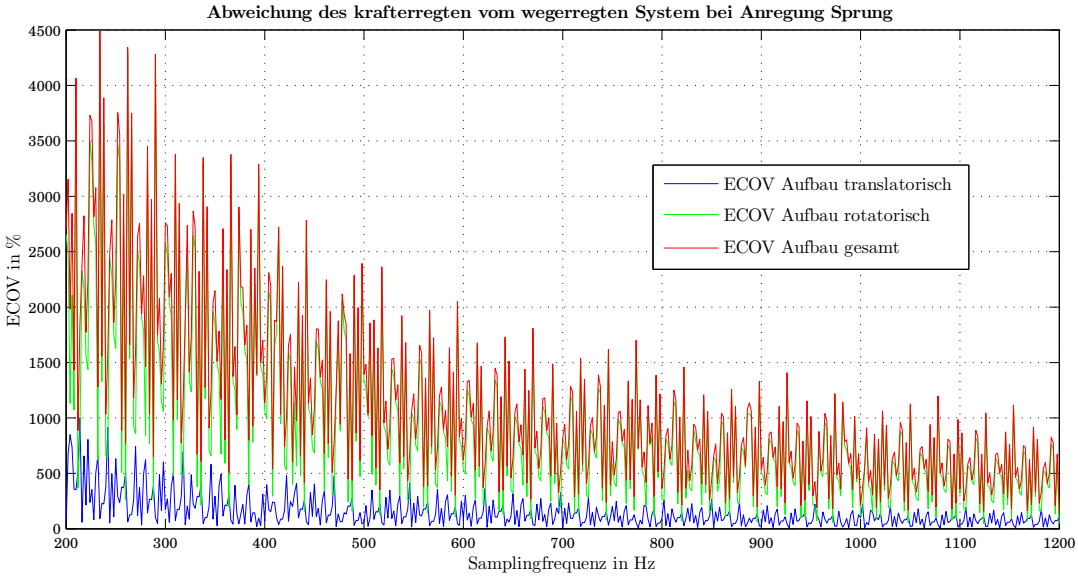


Abbildung D 1: Abweichung des krafterregten vom wegerregten System in Abhängigkeit der *virtuellen Samplingfrequenz* bei Anregung Sprung

In Abbildung D 1 ist die Abweichung des krafterregten vom wegerregten System in Abhängigkeit der *virtuellen Samplingfrequenz* bei Anregung Sprung zu sehen. Erkennbar ist ein eindeutiger globaler Trend mit allerdings sehr großen lokalen Abweichungen. Je kleiner die Schrittweite gewählt wird, desto geringer ist die Abweichung.

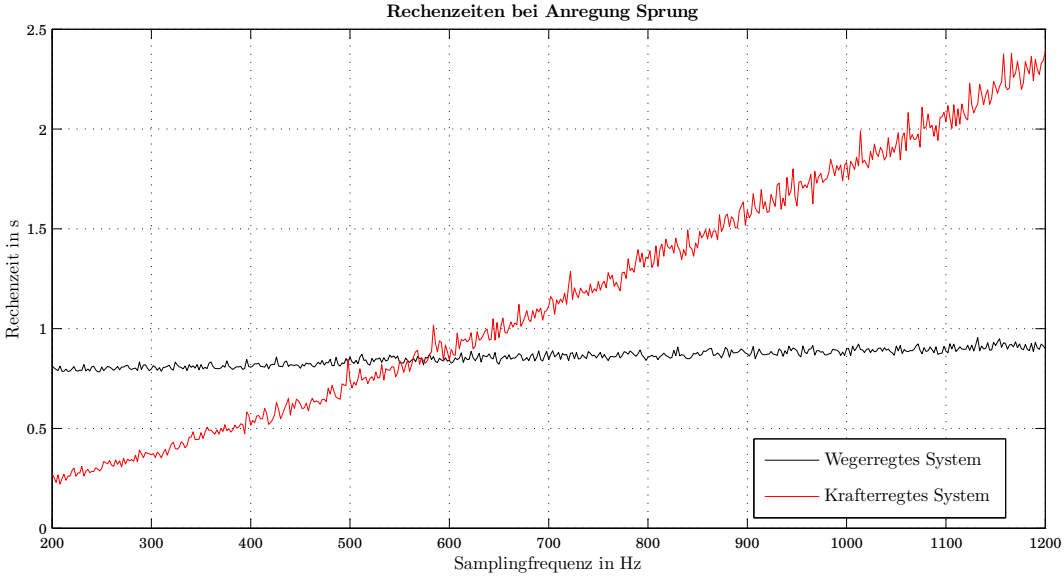


Abbildung D 2: Rechenzeiten in Abhängigkeit der *virtuellen Samplingfrequenz*

In der vorherigen Abbildung sind jeweils die Rechenzeiten der beiden Systeme in Abhängigkeit von der gewählten Frequenz aufgetragen. Eine Zunahme der Rechenzeit des krafterregten Systems bei einer höheren gewählten *virtuellen Samplingfrequenz* ist eindeutig zu erkennen. Die Berechnungsdauer des wegerregten Systems wird dagegen kaum beeinflusst, da einzig die Auswertung der bereits berechneten Lösung zu äquidistanten Zeitpunkten abhängig von der Wahl der Schrittweite ist.

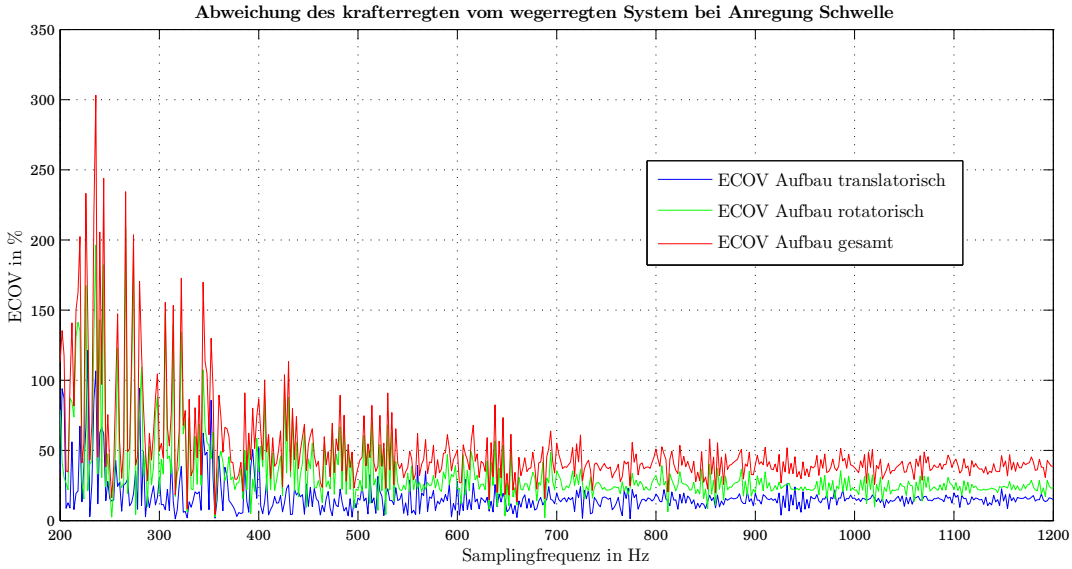


Abbildung D 3: Abweichung des krafterregten vom wegerregten System in Abhängigkeit von der *virtuellen Samplingfrequenz* bei Anregung Schwelle

Bei Anregung Schwelle stellt sich bei höheren Samplingfrequenzen ein annähernd konstanter Fehler mit entsprechend leichten Schwankungen ein. Eine größere Frequenz, als die gewählte Samplingfrequenz von 1 kHz, würde folglich keinen großen Genauigkeitsgewinn bringen. Vergleicht man mit Anregung Sprung, sind die auftretenden Fehler weitaus geringer und die lokalen Schwankungen sind deutlich weniger stark ausgeprägt. Auch bei Anregung Schwelle lässt sich ein nahezu identes Verhalten bei den Rechenzeiten feststellen.

Vergleicht man die beiden Anregungen, kann man eine deutliche Abnahme des Fehlers mit zunehmender *virtueller Samplingfrequenz* feststellen. Es gilt, eine Frequenz zu wählen, die einerseits in der Praxis überhaupt möglich ist, andererseits einen guten Kompromiss von ausreichender Genauigkeit und angemessener Rechenzeit darstellt. Die Wahl von 1 kHz stellt also die größtmögliche realistische Samplingfrequenz dar und wurde bewusst gewählt, um den Einfluss der Abtastrate möglichst gering zu halten.

Abbildungsverzeichnis

Modellskizze des wegerregten Fahrzeuges 12
Schnittbild des wegerregten Fahrzeugmodells 14
Modellskizze des krafterregten Fahrzeuges 17
Schnittbild des krafterregten Fahrzeugmodells 18
Modellskizze des krafterregten gefesselten Fahrzeuges 22
Schnittbild des krafterregten gefesselten Fahrzeugmodells 24
Flussdiagramm der numerischen Berechnung des wegerregten Systems bei einer analytischen Anregung 39
Lösung des wegerregten Systems bei Anregung Sprung 40
Motorlagerkräfte und Motorrelativverschiebungen bei Sprunganregung 41
Abmessungen der MSF-Schwelle in Millimeter 42
Lösung des wegerregten Systems bei Anregung Schwelle 43
Motorlagerkräfte und Motorrelativverschiebungen bei Schwellenanregung 43
Flussdiagramm der numerischen Berechnung des krafterregten Systems bei einer analytischen Anregung 45
Translation und Rotation der Aufbaumasse des wegerregten und krafterregten Systems bei Anregung Sprung 47
Differenz zwischen weg- und krafterregter Lösung bei Anregung Sprung 48
Motorlagerkräfte des weg- und krafterregten Systems bei Anregung Sprung 48
Translation und Rotation der Aufbaumasse des wegerregten und krafterregten Systems bei Anregung Schwelle 49
Differenz zwischen weg- und krafterregter Lösung bei Anregung Schwelle 50
Translation und Rotation der Aufbaumasse des krafterregten gefesselten Systems mit optimalen Fesselungsparametern bei Anregung Sprung 51
Differenz zwischen wegerregter und krafterregter gefesselter Lösung mit optimalen Fesselungsparametern bei Anregung Sprung 52
Translation und Rotation der Aufbaumasse des krafterregten gefesselten Systems mit optimalen Fesselungsparametern bei Anregung Schwelle 53
Differenz zwischen wegerregter und krafterregter gefesselter Lösung mit optimalen Fesselungsparametern bei Anregung Schwelle 54
Flussdiagramm der numerischen Berechnung des wegerregten Systems bei einer gemessenen Anregung mit Schlechtweg- und Komfortstrecke 56
Lösung des wegerregten Systems bei Anregung mit Komfortstrecke 57
Lösung des wegerregten Systems bei Anregung mit Schlechtwegstrecke 58
Flussdiagramm der numerischen Berechnung des krafterregten Systems bei einer gemessenen Anregung mit Schlechtweg- und Komfortstrecke 60

Translation und Rotation der Aufbaumasse des wegerregten und krafterregten Systems bei Anregung mit Komfortstrecke 61
Differenz zwischen wegerregter und krafterregter Lösung bei Anregung mit Komfortstrecke 62
Translation und Rotation der Aufbaumasse des wegerregten und krafterregten Systems bei Anregung mit Schlechtwegstrecke 63
Differenz zwischen wegerregter und krafterregter Lösung bei Anregung mit Schlechtwegstrecke 63
Translation und Rotation der Aufbaumasse des krafterregten gefesselten Systems mit optimalen Fesselungsparametern bei Anregung mit Komfortstrecke 64
Differenz zwischen wegerregter und krafterregter gefesselter Lösung mit optimalen Fesselungsparametern bei Anregung mit Komfortstrecke 65
Translation und Rotation der Aufbaumasse des krafterregten gefesselten Systems mit optimalen Fesselungsparametern bei Anregung mit Schlechtwegstrecke 66
Differenz zwischen wegerregter und krafterregter gefesselter Lösung mit optimalen Fesselungsparametern bei Anregung mit Komfortstrecke 67
Optimierungsergebnisse bei Aufbaumassenfesselung und Anregung Sprung 76
Optimierungsergebnisse bei Aufbaumassenfesselung und Anregung Schwelle 78
Optimierungsergebnisse bei Aufbaumassenfesselung und Komfortstrecke 80
Optimierungsergebnisse bei Aufbaumassenfesselung und Schlechtwegstrecke 82
Abweichung in Abhängigkeit der *Restriktionen* bei verschiedenen Anregungen 84
Numerische Dämpfung des Einmassenschwingers bei Anregung Sprung 96
Differenz von analytischer und jeweiliger numerischer Lösung 97
Numerische Dämpfung des Einmassenschwingers bei Anregung Schwelle 98
Abweichung des krafterregten vom wegerregten System in Abhängigkeit der *virtuellen Samplingfrequenz* bei Anregung Sprung 101
Rechenzeiten in Abhängigkeit der *virtuellen Samplingfrequenz* 101
Abweichung des krafterregten vom wegerregten System in Abhängigkeit der *virtuellen Samplingfrequenz* bei Anregung Schwelle 102

Tabellenverzeichnis

Eigenwerte und *Eigenvektoren* des wegerregten Modells 28
Eigenwerte und *Eigenvektoren* des krafterregten Modells 30
Eigenwerte und *Eigenvektoren* des krafterregten gefesselten Modells 32
Optimale Fesselungsparameter bei Aufbaumassenfesselung und Anregung Sprung .. 75
Optimale Fesselungsparameter bei Radmassenfesselung und Anregung Sprung 77
Optimale Fesselungsparameter bei Aufbaumassenfesselung und Anregung Schwelle 77
Optimale Fesselungsparameter bei Radmassenfesselung und Anregung Schwelle 79
Optimale Fesselungsparameter bei Aufbaumassenfesselung und Komfortstrecke..... 79
Optimale Fesselungsparameter bei Radmassenfesselung und Komfortstrecke..... 81
Optimale Fesselungsparameter bei Aufbaumassenfesselung und Schlechtwegstrecke 82
Optimale Fesselungsparameter bei Radmassenfesselung und Schlechtwegstrecke 83
Parameterwerte 94
Fesselungsparameter 94

Literaturverzeichnis

[1] J. Vilsecker, *Abdrifteffekte in der nabenkrafterregten Fahrzeugsimulation*, Diplomarbeit, TU Wien, 2009

[2] H.-H. Braess und U. Seiffert, *Vieweg Handbuch Kraftfahrzeugtechnik*, 6. Auflage, Vieweg & Teubner Verlag, Wiesbaden, 2011

[3] B. Heissing und M. Ersoy, *Fahrwerkhandbuch*, Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2007

[4] M. Speckert, N. Ruf, and K. Dressler, *Undesired drift of multibody models excited by measured accelerations or forces*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics 48, No. 3, pp. 813-837, 2010

[5] W. Hirschberg, *Entwicklungsmethoden und Simulation: Modellbildung und Simulation von Schlechtwegfahrten*, Eröffnungssymposium Engineeringzentrum Graz, S. 275-286, Steyr-Daimler-Puch Fahrzeugtechnik AG, Graz, 1998

[6] M. Eichler und A. Lion, *Gesamtfahrzeugsimulationen auf Prüfstrecken zur Bestimmung von Lastkollektiven*, VDI Bericht 1559, Berechnung und Simulation im Fahrzeugbau, S. 369-398, VDI Verlag, Düsseldorf, 2000

[7] M. Plöchl, *Grundlagen der Mehrkörpersystemdynamik*, Skriptum zur Vorlesung, TU Wien, 2012

[8] M. Mitschke und H. Wallentowitz, *Dynamik der Kraftfahrzeuge*, 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004

[9] A. John, *Einfluss der Modelle passiver Hydrolager auf die Ergebnisse von Gesamtfahrzeugsimulationen*, Diplomarbeit, TU Wien, 2002

[10] W. Mack und M. Plöchl, *Stabilitätsprobleme bewegter Systeme*, Skriptum zur Vorlesung, TU Wien, 2010

[11] M. Braun, *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988

[12] I. N. BRONSTEIN ET AL., *Taschenbuch der Mathematik*, 5. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 2000

[13] H. BENKER, *Differentialgleichungen in MATHCAD und MATLAB*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005

[14] B. SIMEON, *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Skriptum zur Vorlesung, TU Kaiserslautern, 2012

[15] M. HERMANN, *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Oldenbourg Verlag, München, 2004

[16] J. R. DORMAND AND P. J. PRINCE, *"A family of embedded Runge-Kutta formulae"*, J. Comp. Appl. Math., Vol. 6, No. 1, pp. 19-26, 1980

[17] C.-D. MUNZ UND T. WESTERMANN, *Numerische Behandlung gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen, Ein interaktives Lehrbuch für Ingenieure*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006

[18] J. DANKERT, *Numerische Integration von Anfangswertproblemen, Teil 1: Grundlagen und Teil: 2 Praxis*, Ergänzung zu Dankert/Dankert, *Technische Mechanik*, 6. Auflage, Vieweg & Teubner Verlag, Wiesbaden, 2011

[19] L. F. SHAMPINE, I. GLADWELL, AND S. THOMPSON, *Solving ODEs with Matlab*, Cambridge University Press, New York, 2003

[20] L. F. SHAMPINE AND L. O. JAY, *Continuous extensions*, Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics, Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations, Springer – The Language of Science, Submitted

[21] `http://www.mathworks.de/de/help/matlab/ref/ode45.html` Stand vom 17. Jänner 2014

[22] R. E. BURKARD UND U. T. ZIMMERMANN, *Einführung in die Mathematische Optimierung*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012

[23] K.-H. ELSTER, *Nichtlineare Optimierung*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1978

[24] http://www.mathworks.de/de/help/optim/ug/unconstrained-nonlinear-optimization-algorithms.html Stand vom 17. Jänner 2014

[25] http://www.mathworks.de/de/help/optim/ug/choosing-a-solver.html Stand vom 17. Jänner 2014

[26] F. JARRE UND J. STOER, *Optimierung*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004

[27] J. C. LAGARIAS, J. A. REEDS, M. H. WRIGHT, AND P. E. WRIGHT, *"Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions"*, SIAM Journal of Optimization, Vol. 9 Number 1, pp. 112-147, 1998

[28] M. H. WRIGHT, *"Direct Search Methods: Once Scorned, Now Respectable"*, Numerical Analysis 1995, Proceedings of the 1995 Dundee Biennial Conference in Numerical Analysis, D. F. GRIFFITHS AND G. A. WATSON (Eds.), Addison Wesley Longman, pp. 191-208, Harlow, 1996

[29] C. GEIGER, C. KANZOW, *Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999

[30] P. SCHADE, *Innere-Punkte-Verfahren mit Redundanzerkennung für die Quadratische Optimierung*, Gabler Verlag, Wiesbaden, 2008

[31] http://www.mathworks.de/de/help/optim/ug/constrained-nonlinear-optimization-algorithms.html Stand vom 17. Jänner 2014