



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Konstruktionen rationaler Flächenstücke auf Quadriken und deren geometrische Eigenschaften

Ausgeführt am Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Mag.rer.nat Dr.techn. MARTIN PETERNELL

durch
MATHIAS LAUSEGGER
Mikschallee 4
9020 Klagenfurt

Ort, Datum

Mathias Lausegger

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich recht herzlich bei allen bedanken, die mir während des Studiums und beim Verfassen dieser Arbeit geholfen haben.

Mein Dank gilt Ao.Univ.Prof. Mag.rer.nat Dr.techn. MARTIN PETERNELL für das Betreuen dieser Arbeit und dafür, dass er es mir ermöglichte, ein so interessantes Thema zu behandeln. Des Weiteren möchte ich meinem Studienkollegen und Freund JOSEF KEMETMÜLLER für seine konstruktive Kritik und Ideen bei der Erstellung der Grafiken danken.

Ein besonderer Dank gilt meinen Eltern, IGNAZ und MARGARETHE LAUSEGGER, sowie meinen Geschwistern EVELYN und PATRICK, deren mentale sowie finanzielle Unterstützung es mir ermöglicht haben, dieses Studium erfolgreich abzuschließen.

Ein ebenso großer Dank gilt meiner Freundin ANNA KOLLERMANN, die mir nicht nur bei Formulierungen in dieser Arbeit geholfen, sondern mich auch stets ermutigt hat und immer ein offenes Ohr für meine Probleme hatte.

Zum Abschluss nochmals ein Dankeschön an alle Professoren, Studienkollegen und Wegbegleiter, die mich während dieses so schönen Lebensabschnittes begleitet haben.

Danke!

Kurzfassung

Im Zuge dieser Arbeit werden verschiedene Verfahren zur Erzeugung von Dreiecks- sowie Tensorprodukt-Flächen auf Quadriken, deren Randkurven Kegelschnittsegmente sind, betrachtet. Dabei werden diese Flächen als rationale *Bézier-Flächen* dargestellt. Ein jedes Kegelschnittsegment kann als rationale quadratische Bézier-Kurve $\mathbf{c}(t)$ dargestellt werden. Eine jede solche Kurve $\mathbf{c}(t)$ beschreibt ein Kegelschnittsegment. Zwischen rationalen quadratischen Dreiecks-Bézier- sowie Tensorprodukt-Bézier-Flächen vom Grad $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$ und Quadriken ist diese Beziehung im Allgemeinen nicht wahr. Es werden daher verschiedene Bedingungen an die Randkegelschnitte, Kontrollpunkte des Bézier-Netzes und an die Parameterlinien hergeleitet, welche gewährleisten, dass sich die Bézier-Fläche auf einer Quadrik befindet.

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt dabei auf der *verallgemeinerten stereografischen Projektion*, mit welcher die vorher genannten Flächen konstruiert werden. Für biquadratische Bézier-Flächen wird gezeigt, dass die Randkegelschnitte einen Spezialfall des Satzes von Miquel erfüllen müssen. Es wird des Weiteren ein Zusammenhang zwischen quadratischen Dreiecks-Bézier-Flächen und der gewöhnlichen stereografischen Projektion hergeleitet. Zusätzlich werden das *Weighted Radial Displacement*, sowie andere Verfahren betrachtet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	3
2.1	Projektive Geometrie	3
2.2	Quadriken	4
2.2.1	Festlegung einer Quadrik im \mathbb{P}^3	5
2.3	Liniengeometrie	5
2.3.1	Plückerkoordinaten	5
2.3.2	Linearer Komplex	9
2.3.3	Lineare Geradenkongruenzen	10
2.4	Rationale Kurven und Flächen	11
2.4.1	Kegelschnitt als rationale quadratische Bézier-Kurve	13
2.4.2	Basispunkte	16
3	Verallgemeinerte stereografische Projektion	19
3.1	Ovale Quadriken	19
3.1.1	Zahlentheoretischer Zugang	20
3.1.2	Geometrische Eigenschaften	21
3.2	Ringförmige Quadriken	24
3.2.1	Zahlentheoretischer Zugang	24
3.2.2	Geometrische Eigenschaften	25
3.3	Kegelflächen	28
3.3.1	Zahlentheoretischer Zugang	28
3.3.2	Geometrische Eigenschaften	29
3.4	Konstruktion von Kegelschnitten	31
4	Dreiecks-Bézier-Flächen	35
4.1	Zusammenhang der Dreiecks-Bézier-Flächen mit der stereografischen Projektion	38
4.2	Dreiecks-Bézier-Flächen auf nicht regulären Quadriken	40
4.2.1	Rationale Fläche auf einer Quadrik	43
4.3	Konstruktionsmöglichkeiten von Dreiecks-Bézier-Flächen ohne gegebener Quadrik	44
4.3.1	Darstellung von Dreiecks-Bézier-Flächen als Tensorprodukt-Bézier-Flächen	47

4.4	Konstruktionsverfahren	50
5	Tensorprodukt-Bézier-Flächen	53
5.1	Bilineare Bézier-Flächen	53
5.2	Tensorprodukt-Bézier-Flächen vom Grad (1,2)	54
5.3	Biquadratische Bézier-Flächenstücke	56
5.3.1	Lage der Randkegelschnitte	56
5.3.2	Überdeckung und Gradbestimmung der biquadratischen Fläche	59
5.3.3	Vermutung von U. Fink	61
5.3.4	Patchwork-Theorem	65
5.4	Tensorprodukt-Bézier-Flächen vom Grad (2,4)	69
5.4.1	Konstruktion mit beliebig vorgegebenen Randkurven	69

Das Thema der vorliegenden Arbeit ist es, unterschiedliche rationale Darstellungen von Quadriken zu untersuchen. Quadriken sind algebraischen Flächen zweiter Ordnung. Diese Problemstellung ist dem Bereich der geometrischen Datenverarbeitung (*Computer Aided Geometric Design, CAGD*) und der algebraischen Geometrie zuzuordnen. Eine Übersicht der Klassifikation von Quadriken ist Tabelle 2.2 zu entnehmen. Einige Beispiele sind wiederum in Abbildung 2.1 gegeben.

Um Flächen in computergestützten Modellersystemen darzustellen, haben sich im Wesentlichen zwei mathematische Beschreibungsmöglichkeiten durchgesetzt. Zum einen ist hier die parametrische Flächendarstellung zu nennen. Bei dieser hat sich die stückweise rationale Parameterdarstellung durchgesetzt, wobei als Basisfunktionen meist Bernsteinpolynome oder B-Splines (*Non Uniform Rationale B-Splines* = NURBS) verwendet werden. Andererseits können Flächen mittels algebraischer Gleichungen, also als polynomielle implizite Gleichungen, dargestellt werden.

Die Aufgabe, Schnittpunkte und -kurven zu berechnen, stellt sich als besonders einfach heraus, wenn eine der Flächen oder Kurven in parametrischer und die andere in impliziter Darstellung gegeben ist. Während bei der Parameterdarstellung die Erzeugung von Kurven- oder Flächenpunkten einfach ist, lässt sich anhand der impliziten Darstellung sehr einfach verifizieren, ob sich ein gegebener Punkt auf der Fläche befindet. Eine jede Darstellung besitzt somit ihre Vorteile und es ist wünschenswert, Verfahren zu finden, welche aus einer algebraischen eine parametrische Darstellung erzeugen, und umgekehrt. Die Berechnung einer algebraischen Darstellung, mittels einer parametrischen Darstellung, wird *Implizition* genannt. Verfahren, welche dies bewerkstelligen, werden in Kapitel 15 in [18] betrachtet. Als Beispiel sei hier die *Resultantenmethode* genannt.

Mit Hilfe der Implizition konnte gezeigt werden, dass eine jede parametrische Kurve vom Grad n eine implizite Gleichung vom Grad n besitzt. Eine jede implizite Gleichung, die man mittels Implizition erhält, wird *rational* genannt. Alle algebraischen quadratischen Kurven besitzen eine rationale quadratische Parametrisierung. Für Kurven höheren Grades ist die entsprechende Aussage im Allgemeinen nicht wahr, siehe Kapitel 15 in [18]. Für Flächen stellen sich die Verhältnisse noch schwieriger dar. Zum Beispiel können parametrische Tensorprodukt-Bézier-Flächen vom Grad $(1, 2)$, $(2, 2)$ oder $(2, 4)$ eine algebraische Darstellung mit implizitem Grad, von maximal 4, 8 beziehungsweise 16, besitzen. Es wird im Folgenden betrachtet, wann Dreiecks-Bézier-Flächen vom Grad 2 und Tensorprodukt-Bézier-Flächen der Grade $(1, 2)$, $(2, 2)$ oder $(2, 4)$ eine Quadrik beschreiben.

Die restliche Arbeit ist wie folgt strukturiert:

- In Kapitel 2 werden grundlegende Sachverhalte und Definitionen aus der projektiven Geometrie, der Liniengeometrie und der geometrischen Datenverarbeitung vermittelt. Der Zweck ist es, eine fundierte Basis für den weiteren Verlauf zu geben.
- In Kapitel 3 wird der in [14] vorgestellte algebraische Ansatz gezeigt, mit dessen Hilfe man eine Darstellungsformel erhält, die den dreidimensionalen projektiven Raum auf die Oberfläche der Quadrik abbildet. Die dadurch erhaltene Abbildung wird *verallgemeinerte stereografische Projektion* genannt. Um zu zeigen, dass diese eine Zusammensetzung zweier wohlbekannter Abbildungen ist, wird auf die Resultate in [12, 13, 14, 15, 26] zurückgegriffen. Im letzten Teil dieses Kapitels werden die vorherigen Ergebnisse dazu verwendet, Kegelschnitte auf einer Quadrik zu erzeugen, die durch drei vorgegebene Punkte verlaufen.
- Kapitel 4 befasst sich mit rationalen quadratischen Dreiecks-Bézier-Flächen. Zuerst wird im Satz 4.2, mit Hilfe der verallgemeinerten stereografischen Projektion, eine notwendige sowie hinreichende Bedingung für die Randkegelschnittsegmente der Fläche formuliert. Am Ende des Kapitel wird ein Konstruktionsverfahren, basierend auf der verallgemeinerten stereografischen Projektion, angegeben. Dazwischen wird auf die Ergebnisse in [29] zurückgegriffen. Es wird gezeigt, dass im Fall der singulären Quadriken quadratische Dreiecks-Bézier-Flächenstücke existieren, welche die Bedingung im Satz 4.2 nicht erfüllen und trotzdem auf einer singulären Quadrik liegen. Außerdem wird ein Algorithmus aus [29] zum Erzeugen solcher Flächen angegeben. Es wird des Weiteren eine Bedingung aus [1] gegeben, die es ermöglicht, zu verifizieren, ob eine quadratische Dreiecks-Bézier-Fläche auf einer Quadrik liegt, ohne dabei die Quadrik explizit zu kennen. Anschließend wird ein Verfahren aus [32] betrachtet, welches es ermöglicht, Dreiecks-Bézier-Flächenstücke zu erzeugen, ohne die Quadrik vorzugeben. Zuletzt werden noch Umwandlungen aus [35, 28, 25, 24] von Dreiecks-Bézier-Flächen in Tensorprodukt-Bézier-Flächen betrachtet und präsentiert.
- Tensorprodukt-Bézier-Flächen vom Grad $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$ und $(2, 4)$ werden in Kapitel 5 betrachtet. Dabei wird für jeden dieser Typen, wie in [15, 12], ein Konstruktionsverfahren, welches auf der verallgemeinerten stereografischen Projektion basiert, gegeben. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf den biquadratischen Flächen. Da diese Objekte der Untersuchungen in [5, 19, 20, 14] sind, sind eine Vielzahl an Eigenschaften bekannt. Es werden Aussagen über die Lage der Kontrollpunkte und Kegelschnitte gegeben. Außerdem wird mit Argumenten aus [12] eine Vermutung aus [19], die eine Aussage über die Trägerebenen der Parameterlinien gibt, gezeigt.

2.1 Projektive Geometrie

Wir betrachten den dreidimensionalen reellen euklidischen Raum \mathbb{E}^3 , wobei ein Punkt $X \in \mathbb{E}^3$ durch den Koordinatenvektor $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ beschrieben wird. Der Raum wird um die Fernpunkte, die als Schnittpunkte von parallelen Geraden angesehen werden können, erweitert. Wir erhalten damit den reellen projektiven Raum \mathbb{P}^3 . Die Punkte des \mathbb{P}^3 werden durch homogene Koordinatenvektoren $\mathbf{x} = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)^T$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ beschrieben. Diese sind bis auf einen multiplikativen Faktor eindeutig definiert. Das heißt zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ beschreiben denselben Punkt $X \in \mathbb{P}^3$ genau dann, wenn für die beiden Koordinatenvektoren ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert, sodass $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ gilt.

Wir beschreiben Ebenen $g \subset \mathbb{P}^3$ ebenfalls durch homogene Koordinaten $\mathbf{g} = (g_0, g_1, g_2, g_3)^T$ mit $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. Um Punkte von Ebenen und Punktkoordinaten von Ebenenkoordinaten besser unterscheiden zu können, wird ein \mathbb{R} , je nachdem ob es sich um Punkte beziehungsweise Punktkoordinaten nach der Variable, zum Beispiel $\mathbf{x}\mathbb{R}, \mathbf{y}\mathbb{R}$ oder um Ebenen bzw. Ebenenkoordinaten vor der Variable, zum Beispiel $\mathbb{R}\mathbf{g}, \mathbb{R}\mathbf{h}$ handelt, geschrieben. Eine Ebene $\mathbb{R}\mathbf{g}$ wird durch drei Punkte $\mathbf{a}\mathbb{R} \vee \mathbf{b}\mathbb{R} \vee \mathbf{c}\mathbb{R}$ definiert. Ein Punkt $\mathbf{g}\mathbb{R}$ kann wiederum durch drei Ebenen $\mathbb{R}\mathbf{a} \wedge \mathbb{R}\mathbf{b} \wedge \mathbb{R}\mathbf{c}$ festgelegt werden. Die Koordinaten dieser Ebene sowie des Punktes können mittels

$$\hat{\mathbf{g}}_i = (-1)^i \det \begin{pmatrix} a_j & a_k & a_l \\ b_j & b_k & b_l \\ c_j & c_k & c_l \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

wobei $(i, j, k, l) \in \{(0, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 0, 1), (3, 0, 1, 2)\}$, berechnet werden.

Im Folgenden wird zwischen dem Punkt $X \in \mathbb{P}^3$ und seinen homogenen Koordinatenvektoren $\mathbb{R}\mathbf{x}$ nicht mehr unterschieden. Dasselbe gilt natürlich für Ebenen $g \subset \mathbb{P}^3$ und ihre homogenen Koordinatenvektoren $\mathbb{R}\mathbf{g}$. Wenn es aus dem Kontext eindeutig hervorgeht ob es sich um einen Punkt oder eine Ebene handelt, wird auf das \mathbb{R} vor oder nach dem Koordinatenvektor ebenfalls verzichtet.

Die Fernpunkte $\mathbf{x}\mathbb{R}$ sind durch $x_0 = 0$ gekennzeichnet. Die Ebene die alle Fernpunkte enthält, wird als *Fernebene* u_0 bezeichnet und hat den Koordinatenvektor $\mathbb{R}\mathbf{u}_0 = \mathbb{R}(1, 0, 0, 0)^T$. Um von eigentlichen Punkten $X \in \mathbb{P}^3$ wieder die affinen Koordinaten zu erhalten, wird der Zusammenhang

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0} \quad \text{und} \quad z = \frac{x_3}{x_0}$$

verwendet. Die Gleichung $(\mathbf{x}\mathbb{R})^T \mathbb{R}\mathbf{g} = 0$ wird *Inzidenzbedingung* genannt und beschreibt die Menge aller Punkte $X \in \mathbb{P}^3$, die in einer festen Ebene $g \subset \mathbb{P}^3$ liegen. Die Gleichung kann aber auch so ausgelegt werden, dass die Inzidenzbedingung die Menge der Ebenen beschreibt die durch den festen Punkt X geht. Dieses Prinzip wird *Dualitätsprinzip* genannt. Dabei werden bei jeder Aussage Punkte durch Ebenen, Ebenen durch Punkte, Geraden durch Geraden, Schnitte durch Vereinigungen und vice versa ersetzt. Man erhält dadurch wieder einen projektiven Raum, den *Dualraum* \mathbb{P}^{3*} . Wahre Aussagen des \mathbb{P}^3 gehen dabei in wahre Aussagen des \mathbb{P}^{3*} über. Als Beispiel sei etwa der *Satz von Pascal* und der *Satz von Brianchon* genannt, welche zueinander dual sind, siehe [3, 4, 30]). Als weiteres Beispiel sei der selbstduale *Satz von Desargue* genannt, siehe [3, 4].

2.2 Quadriken

Sei $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ eine reguläre Matrix, dann induziert diese eine projektive Abbildung κ mit

$$\begin{aligned} \kappa : \quad \mathbb{P}^3 &\rightarrow \mathbb{P}^{3*} \\ \mathbf{x}\mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}A \cdot \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Eine solche Abbildung, die Punkte auf Ebenen abbildet, wird *Korrelation* genannt. Korrelationen sind bijektive Abbildungen welche die Inzidenzbedingung erhalten, das heißt kollineare Punkte werden auf ein Ebenenbüschel abgebildet. Im Folgenden werden nur noch Korrelationen bei der die Abbildungsmatrix A symmetrisch ist, das heißt $A = A^T$, betrachtet. Diese werden *Polaritäten* genannt. Abbildungen bei denen die Matrizen schief-symmetrisch sind werden *Null-polaritäten* genannt und werden später in 2.3.2 nochmals auftreten.

Das Bild eines Punktes (Ebene) unter einer Polarität wird *Polarebene (Pol)* genannt, dabei ist der Pol (Polarebene) der Polarebene (Pol) wieder der ursprüngliche Punkt (Ebene). Ein Punkt \mathbf{y} heißt *konjugiert* beziehungsweise *polar* zu einem Punkt \mathbf{x} , wenn dieser auf der Polarebene von \mathbf{x} liegt. Es muss daher

$$\mathbf{y}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{y} = 0,$$

gelten, wobei sich die Äquivalenz aufgrund der Symmetrie von A ergibt.

Definition 2.1 *Es sei die Polarität $\kappa : \text{von } \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^{3*}$ mit $\mathbf{x}\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}A\mathbf{x}$ gegeben, wobei A eine symmetrische Matrix ist. Die Menge der selbstkonjugierten Punkte, bezüglich der Abbildungsmatrix von κ bilden eine Quadrik in \mathbb{P}^3 . Die Punkte auf einer Quadrik Q sind gegeben durch alle Punkte die*

$$Q(x_0, x_1, x_2, x_3) : \mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} = 0 \tag{2.2}$$

erfüllen. Im Folgenden beschreiben sowohl die Quadrik als auch das beschreibende Polynom mit Q . Die Polarebene zu einem selbstkonjugierten Punkt ist die Tangentialebene an die Quadrik.

Die Gleichung (2.2) ist eine homogene quadratische Gleichung und definiert auch dann eine quadratische Oberfläche $Q \subset \mathbb{P}^3$, wenn für die zugehörige Abbildung $\det(A) = 0$ gilt. Eine solche Quadrik wird als *ausgeartet* oder auch *singulär* bezeichnet.

In der projektiven Geometrie wird im \mathbb{P}^n zwischen $\frac{n^2+6n+4}{4}$ für n gerade und $\frac{n^2+6n+5}{4}$ für n ungerade Klassen von Quadriken unterschieden [3, 4, 34], wobei diese wiederum in ausgeartete und nicht ausgeartete Quadriken unterteilt werden können. $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte liegen zumindest auf

einer Quadrik im \mathbb{P}^n . In den Tabellen 2.1 und 2.2 sind alle Klassen für $n = 2, 3$ jeweils mit ihren homogenen Gleichungen in Normalform, sowie ihren affinen Klassen, aufgelistet. Die affinen Klassen ergeben sich dabei aus dem Typ des Schnittes der Quadrik mit der Fernebene. In der Abbildung 2.1 sind einige Quadriken dargestellt.

2.2.1 Festlegung einer Quadrik im \mathbb{P}^3

Wenn neun Punkte des projektiven Raumes vorgegeben sind, dann legen diese eine Quadrik eindeutig fest, genau dann, wenn keine zwei gleich und keine vier kollinear sind. Zusätzlich dürfen keine sechs auf einem Kegelschnitt liegen sowie keine sieben Punkte koplanar sein. Wird ein Punkt mit Tangentialebene vorgegeben ist dies drei Punkten gleichzusetzen. Bei Vorgabe von drei Punkten mit ihren Tangentialebenen ist entweder keine oder eine einparametrische Schar von Quadriken festgelegt. Letzteres tritt ein, wenn die Schnittgeraden, die man durch Schneiden der Tangentialebenen erhält, gemeinsam mit den gegebenen drei Punkten einen Kegelschnitt definieren. In dieser Konstellation bilden die drei Geraden und Punkte die Figur von Brianchon beziehungsweise Pascal, siehe [34].

Da ein regulärer Kegelschnitt durch fünf Punkte eindeutig festgelegt wird, definieren zwei beliebige räumliche Kegelschnitte im Allgemeinen keine reguläre Quadrik. Eine Quadrik ist dann durch zwei räumliche Kegelschnitte festgelegt, wenn sich diese genau in zwei Punkten oder in einem Doppelpunkt schneiden, sowie ein weiterer Punkt, der nicht in einer der Ebenen die von den beiden Kegelschnitten aufgespannt wird, gegeben ist. Des Weiteren ist durch drei Kegelschnitte im Raum, wovon sich jeweils zwei in zwei Punkten schneiden sodass sich alle sechs Schnittpunkte unterscheiden, wiederum eine Quadrik eindeutig festgelegt.

Liegen drei Punkte auf einer Geraden, muss die ganze Gerade auf der Quadrik liegen, da die Fläche die Gerade sonst in drei Punkte schneiden würde. Die Gerade wäre somit ein *Erzeuger* der Quadrik. Sind nochmals drei Punkte auf einer Geraden gegeben, welche die erste nicht schneiden, ist dies eine weitere Erzeugende der Quadrik. Drei beliebige windschiefe Geraden bestimmen somit eine Quadrik, siehe Seite 144 in [34].

2.3 Liniengeometrie

Um in späterer Folge die verallgemeinerten stereografischen Projektionen besser zu verstehen, wird die Geometrie der Geraden des \mathbb{P}^3 etwas genauer betrachtet. Dabei bezeichnen wir die Menge der Geraden des \mathbb{P}^3 mit \mathcal{L} . Erste Personen die sich mit dieser Thematik intensiver beschäftigten waren H. Grassmann sowie J. Plücker. Auf Letzteren ist die Darstellung von Geraden mittels Koordinaten, die nach ihm benannten *Plückerkoordinaten*, zurückzuführen.

2.3.1 Plückerkoordinaten

Jede Gerade $\mathbf{l} \subset \mathbb{P}^3$ lässt sich als Verbindungsgerade zweier Punkte $\mathbf{x}\mathbb{R} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{y}\mathbb{R} = (y_0, y_1, y_2, y_3)^T$ darstellen. Ausgehend von den zwei Punkten $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{l}$ können wir die 16 Determinanten

$$g_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix} \quad \text{mit } 1 \leq i, k \leq 3 \quad (2.3)$$

Rang	Gleichung in homogener NF	Bezeichnung	Gleichung in affiner NF	Bezeichnung
1	$x_1^2 = 0$	Doppelgerade	$x_1^2 = 0$	Doppelgerade
2	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	multiteiliges Geradenpaar	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	reeller Schnittpunkt
	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	einteiliges Geradenpaar	$x_1^2 - x_2^2 = 0$ $x_1^2 - 1 = 0$	sich schneidendes Geradenpaar paralleles Geradenpaar
3	$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2 = 0$	multiteiliger regulärer Kegelschnitt	$x_1^2 + x_2^2 = 1$	keine reellen Schnittpunkte
	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$	einteiliger regulärer Kegelschnitt	$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ $x_1^2 + 2x_2 = 0$	Ellipse Hyperbel Parabel

Tabelle 2.1: Klassifikation der Kegelschnitte im \mathbb{P}^2

Rang	Gleichung in homogener NF	Bezeichnung	Gleichung in affiner NF	Bezeichnung
1	$x_1^2 = 0$	Doppelebene	$x_1^2 = 0$	Doppelebene
2	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	nullteiliges Ebenenpaar	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	reelle Schnittgerade
	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	einteiliges Ebenenpaar	$x_1^2 - x_2^2 = 0$ $x_1^2 - 1 = 0$	sich schneidendes Ebenenpaar paralleles Ebenenpaar
3	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	nullteiliger Kegel	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	reeller Schnittpunkt
	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	einteiliger Kegel	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ $x_1^2 + 2x_2 = 0$	Kegel elliptischer Zylinder hyperbolischer Zylinder parabolischer Zylinder
	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	nullteilige Quadrik	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$	keine reellen Schnittpunkte
4	$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$	ovale Quadrik	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0$	Ellipsoid zweischaliges Hyperboloid elliptisches Hyperboloid
	$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$	ringartige Quadrik	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$ $x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 = 0$	einschaliges Hyperboloid hyperbolisches Paraboloid

Tabelle 2.2: Klassifikation der Quadriken im \mathbb{P}^3

berechnen. Da einerseits $g_{ik} = -g_{ki}$ und $g_{ii} = 0$ gilt, sind von den 16 Determinanten nur 6 relevant. Diese Determinanten schreiben wir in ein 6-Tupel

$$\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6) \in \mathbb{R}^6 \setminus \{0\}$$

mit $l_1 := g_{01}$, $l_2 := g_{02}$, $l_3 := g_{03}$, $l_4 := g_{23}$, $l_5 := g_{31}$, $l_6 := g_{12}$. Diese 6 Koordinaten werden *Plückerkoordinaten* genannt. Plückerkoordinaten sind homogene Punktkoordinaten im \mathbb{P}^5 . Die Koordinaten der Geraden $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6)$ sind des Weiteren unabhängig von der Wahl der Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{l}$. Wählt man zwei andere Punkte $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \in \mathbf{l}$ dann unterscheiden sich die Determinanten g_{ij}^* von g_{ij} nur um einen gemeinsamen Faktor $\lambda \neq 0$. Die mittels (2.3) erhaltenen Plückerkoordinaten erfüllen die sogenannte *Plückeridentität*

$$l_1 l_4 + l_2 l_5 + l_3 l_6 = 0. \tag{2.4}$$

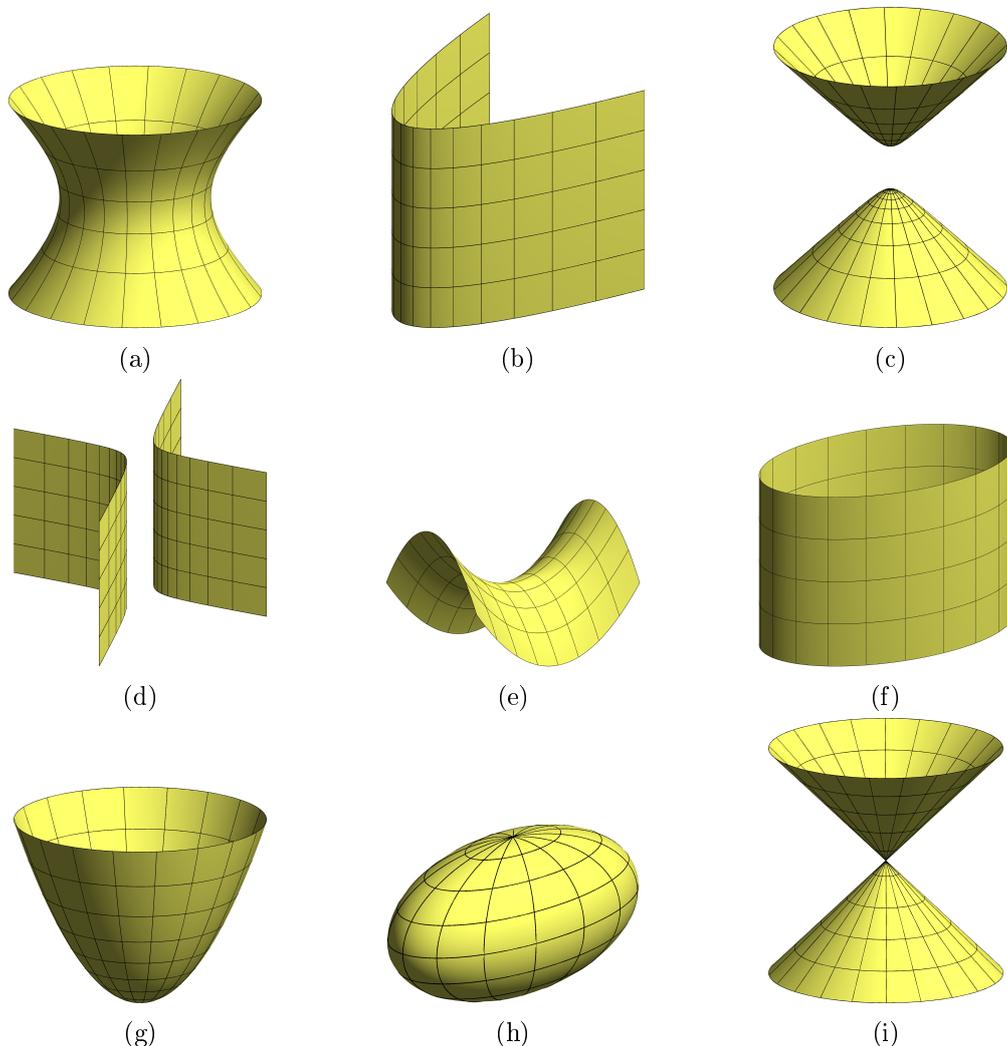


Abbildung 2.1: (a) einschaliges Hyperboloid, (b) parabolischer Zylinder, (c) zweischaliges Hyperboloid, (d) hyperbolischer Zylinder, (e) hyperbolisches Paraboloid, (f) elliptischer Zylinder, (g) elliptisches Paraboloid, (h) Ellipsoid, (i) Drehkegel.

Die Gleichung (2.4) definiert eine reguläre Quadrik im \mathbb{P}^5 , diese wird *Plückerquadrik* oder *Kleinsche Hyperquadrik* genannt und mit M_2^4 bezeichnet. Bezüglich den Geraden des \mathbb{P}^3 und den Punkten des \mathbb{P}^5 auf der Plückerquadrik besteht eine Bijektion, siehe [30]. Die Abbildung die dies leistet wird *Kleinsche Abbildung* genannt.

Duale Sichtweise

Wir können Geraden auch als Schnitt zweier Ebenen $\alpha = (a_0, a_1, a_2, a_3)^T$, $\beta = (b_0, b_1, b_2, b_3)^T$ auffassen. Die Geradenkoordinaten lassen sich analog zu (2.3) bilden. Die sogenannten *Achsenkoordinaten* l_i^* mit $1 \leq i \leq 6$ stehen mit den Plückerkoordinaten l_i in folgender Relation

$$(l_1^*, l_2^*, l_3^*, l_4^*, l_5^*, l_6^*) = (l_4, l_5, l_6, l_1, l_2, l_3). \quad (2.5)$$

Wir wollen noch eine geometrische Interpretation der Plückerkoordinaten betrachten, wenn wir das 6-Tupel als

$$\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6) = (\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}}) \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3), \quad \bar{\mathbf{l}} = (l_4, l_5, l_6) \quad (2.7)$$

schreiben. Dann können wir \mathbf{l} als *Richtungsvektor* und $\bar{\mathbf{l}}$ als *Momentenvektor* auffassen, siehe dazu [30]. Durch diese Schreibweise kann die Plückeridentität (2.4) als

$$\langle \mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}} \rangle = 0 \quad (2.8)$$

geschrieben werden, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das gewöhnliche Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 bezeichnet. Die Schnittbedingung für zwei Geraden $g = (\mathbf{g}, \bar{\mathbf{g}})$, $h = (\mathbf{h}, \bar{\mathbf{h}})$ kann nun mit Hilfe der Darstellung in 2.8 durch die Gleichung

$$\langle \mathbf{g}, \bar{\mathbf{h}} \rangle + \langle \bar{\mathbf{g}}, \mathbf{h} \rangle = 0 \quad (2.9)$$

ausgedrückt werden. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so sind die beiden Geraden windschief.

2.3.2 Linearer Komplex

Die *linearen Geradenkomplexe* sind dreidimensionale lineare Mannigfaltigkeiten von Geraden, wobei die Plückerkoordinaten der Geraden eine lineare Gleichung erfüllen. Lineare Geradenkomplexe stehen in engem Zusammenhang mit Nullpolaritäten des projektiven Raumes \mathbb{P}^3 . Man kann zeigen, dass es zu jeder Nullpolarität π einen linearen Geradenkomplex \mathcal{C} gibt, sodass die Nullgeraden von π in \mathcal{C} liegen. Außerdem kann man zeigen, dass es zu jeder Schraubung im euklidischen Raum einen Komplex gibt, bei dem die Plückerkoordinaten der Bahnnormalen der Schraubung die Gleichung des Komplexes erfüllen, siehe [30]. Allgemein kann man eine lineare Gleichung zwischen Plückerkoordinaten x_i einer Geraden x als

$$c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6 x_3 + c_1 x_4 + c_2 x_5 + c_3 x_6 = \bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.10)$$

schreiben.

Die Menge von Geraden deren Koordinaten (2.10) erfüllen, heißt *linearer Geradenkomplex* \mathcal{C} . Das 6-Tupel $c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$, das den linearen Geradenkomplex \mathcal{C} definiert, legt einen Punkt $\mathbf{c} \in \mathbb{P}^5$ fest, der im Allgemeinen nicht auf der Plückerquadrik M_2^4 liegt und daher nicht die Plückeridentität (2.4) erfüllt. Ein solcher linearer Geradenkomplex wird *regulär* genannt. Ist

die Plückeridentität für $\mathbf{c} = (\mathbf{c}, \bar{\mathbf{c}})$ erfüllt, so spricht man von einem *singulären Geradenkomplex*. Ein singulärer Geradenkomplex besteht aus der Menge aller Treffgeraden an die Gerade $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$, die Treffgerade wird *Achse* genannt.

2.3.3 Lineare Geradenkongruenzen

Eine eindimensionale lineare Mannigfaltigkeit \mathbf{G} von linearen Komplexen wird *Büschel linearer Komplexe* genannt. Als *Träger* einer solchen Mannigfaltigkeit \mathbf{G} von linearen Komplexen bezeichnen wir die Menge aller Geraden, die in jedem linearen Komplex \mathcal{C} aus \mathbf{G} enthalten ist. Man kann ein solches Büschel als Linearkombination

$$\mathbf{G} = \lambda \mathcal{C}_1 + \mu \mathcal{C}_2 \quad (2.11)$$

zweier linearer Komplexe $\mathcal{C}_i = (\mathbf{c}_i, \bar{\mathbf{c}}_i)$ mit $i \in 1, 2$ darstellen. Wir wollen diese etwas genauer studieren und schneiden \mathbf{G} daher mit der Plückerquadrik M_2^4 im \mathbb{P}^5 und erhalten die Gleichung

$$\lambda^2 (\mathbf{c}_1 \bar{\mathbf{c}}_1 + \bar{\mathbf{c}}_1 \mathbf{c}_1) + 2\lambda\mu (\mathbf{c}_1 \bar{\mathbf{c}}_2 + \bar{\mathbf{c}}_1 \mathbf{c}_2) + \mu^2 (\mathbf{c}_2 \bar{\mathbf{c}}_2 + \bar{\mathbf{c}}_2 \mathbf{c}_2). \quad (2.12)$$

Die Anzahl der Lösungen hängt einerseits davon ab, ob das homogene Polynom in (λ, μ) das Nullpolynom ist und andererseits vom Vorzeichen der Diskriminante

$$\Delta := (\mathbf{c}_1 \bar{\mathbf{c}}_2 + \mathbf{c}_2 \bar{\mathbf{c}}_1)^2 - 4\mathbf{c}_1 \bar{\mathbf{c}}_1 \mathbf{c}_2 \bar{\mathbf{c}}_2.$$

Wir vernachlässigen den Fall, dass das Polynom in (2.12) das Nullpolynom ist. Je nachdem ob die Diskriminante $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ oder $\Delta = 0$ ist, unterscheidet sich die Anzahl und die Lage der singulären linearen Komplexe des Büschel, zueinander. Im Fall $\Delta > 0$ existieren zwei reelle Schnittpunkte mit der Plückerquadrik, das Büschel wird dann *hyperbolisch* genannt. Die Achsen der beiden erhaltenen singulären Komplexe sind zueinander windschief. Der Träger ist die Menge aller Geraden, welche die Achsen der beiden singulären Komplexe schneidet.

Definition 2.2 Die Menge $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}$ der Geraden welche zwei windschiefe Geraden \mathbf{g}, \mathbf{h} schneidet wird *hyperbolische lineare Kongruenz*, mit *Brenngeraden* \mathbf{g} und \mathbf{h} , genannt.

Eine Menge von Geraden deren Kleinsches Bild eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist, wird *Kongruenz* genannt.

Der zweite Fall mit $\Delta < 0$, wird *elliptisch* genannt und besitzt keine reellen Schnittpunkte mit der Plückerquadrik. In diesem Fall ist es sinnvoll auf die komplexe Erweiterung $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ des projektiven Raumes zurückzugreifen, für genauere Vorgänge siehe [30]. Wir erhalten dann zwei singuläre lineare Geradenkomplexe, deren windschiefe Achsen konjugiert komplex sind. Mit Hilfe dieser singulären Komplexe erhalten wir folgende

Definition 2.3 Die Menge der reellen Geraden $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}$ welche zwei konjugiert komplexe windschiefe Geraden \mathbf{g} und $\bar{\mathbf{g}}$ schneidet wird *elliptische lineare Kongruenz*, mit *Brenngeraden* \mathbf{g} und $\bar{\mathbf{g}}$, genannt.

Die Brenngeraden \mathbf{g} und $\bar{\mathbf{g}}$ sind dabei imaginäre Geraden und die Achsen der beiden singulären Komplexe. Wie im hyperbolischen Fall besteht der Träger aus jenen Geraden, die beide Achsen der singulären Komplexen treffen.

Im letzten Fall, bei dem $\Delta = 0$ ist, liegt das Büschel der linearen Komplexe tangential zur Plückerquadrik M_2^4 und besitzt daher nur einen singulären Geradenkomplex. Ein solches Büschel wird *parabolisch* genannt.

Definition 2.4 Die Menge aller Geraden $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}$, welche die Achse des einzigen singulären Komplexes von einem Büschel \mathbf{G} schneidet und in einem weiteren Komplex $\mathcal{C} \in \mathbf{G}$ liegt, wird *parabolische lineare Kongruenz* genannt.

In Abbildung 2.2 sind Beispiele einer elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Kongruenz veranschaulicht.

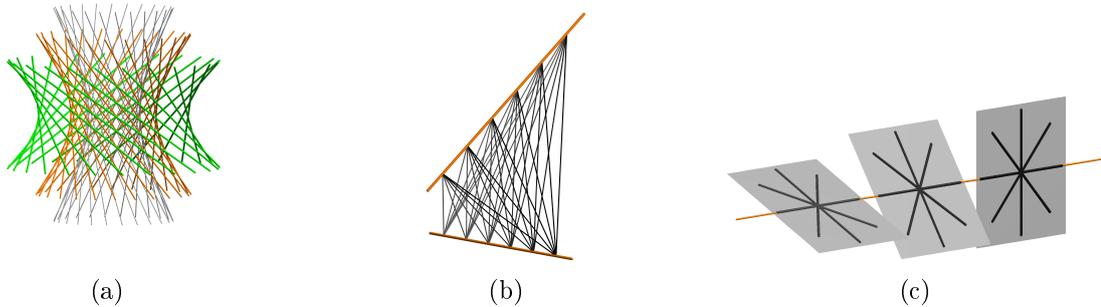


Abbildung 2.2: (a) elliptische Kongruenz, (b) hyperbolische Kongruenz, (c) parabolische Kongruenz.

2.4 Rationale Kurven und Flächen

Eine jede rationale Kurve $\mathbf{x}(t)$ des euklidischen Raumes \mathbb{E}^3 kann im projektiven Raum \mathbb{P}^3 als

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

dargestellt werden.

Die Funktionen $x_i(t)$, $i = 0, \dots, 3$ sind dabei Elemente aus dem Polynomring $\mathbb{R}[t]$. Durch Inhomogenisierung der rationalen Bézier-Kurve, welche in projektiven Koordinaten gegeben ist, erhält man die Darstellung der rationalen Bézier-Kurve in affinen Koordinaten

$$x(t) = \frac{x_1(t)}{x_0(t)}, \quad y(t) = \frac{x_2(t)}{x_0(t)}, \quad z(t) = \frac{x_3(t)}{x_0(t)}.$$

In der geometrischen Datenverarbeitung werden rationale Kurven häufig mittels *Bézier-Darstellung* beschrieben. Die Polynome werden dabei als Linearkombination von *Bernsteinpolynomen* vom Grad n

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n \quad (2.14)$$

dargestellt. Die Bernsteinpolynome haben unter anderem folgende Eigenschaften:

- Zerlegung der Eins, das heißt $\sum_{i=0}^n B_i^n \equiv 1$
- Nichtnegativität im Intervall $[0,1]$, das heißt $B_i^n(t) \geq 0$ für $t \in [0,1]$

- Rekursionsvorschrift $B_i^n(t) = B_i^{n-1}(t) \cdot t + B_{i-1}^{n-1}(t) \cdot (1-t)$ mit $B_i^n \equiv 0$ für alle $i < 0$ und $i > n$

Zur Vertiefung siehe [22, 16].

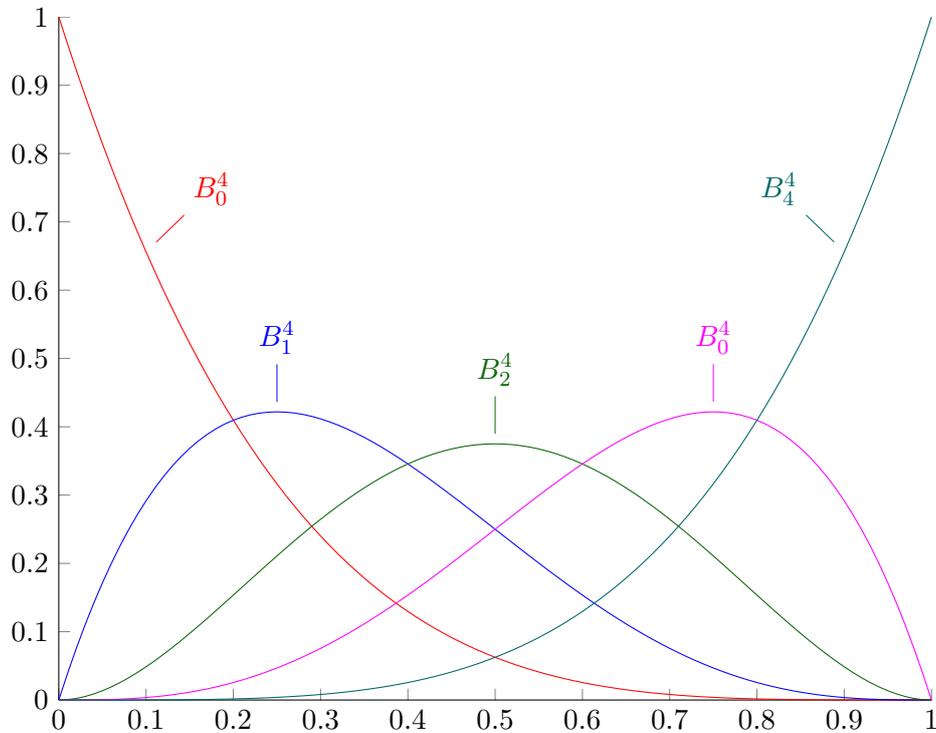


Abbildung 2.3: Bernsteinpolynome vom Grad 4.

Eine rationale Bézier-Kurve besitzt somit die Darstellung

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{b}_i, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.15)$$

Die Punkte $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\mathbf{0}\}$ heißen *Bézier-Kontrollpunkte*. Der Polygonzug der die Punkte $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ verbindet wird *Kontrollpolygon* genannt. Die homogenisierende Komponente $\omega_i = \mathbf{b}_i^{(0)}$ von \mathbf{b}_i , $i = 0, \dots, n$ wird als *Gewicht* des Kontrollpunktes bezeichnet. Ein Bézier-Kontrollpunkt \mathbf{b}_i kann also dargestellt werden als $\mathbf{b}_i = (\omega_i, \omega \mathbf{c}_i)^T$ mit $\mathbf{c}_i \in \mathbb{E}^3$.

Aufgrund der engen Beziehung zwischen dem Kurvenverlauf und dem Kontrollpolygon, werden im CAGD die Kurven oft in Bézier-Form dargestellt. So liegen zum Beispiel der erste und der letzte Kontrollpunkt \mathbf{b}_0 und \mathbf{b}_n , falls es sich um eigentliche Punkte handelt, auf der Kurve. Die Randseiten des Kontrollpolygons sind die Tangenten im Anfang- und Endpunkt der rationalen Bézier-Kurve. Eine weitere Eigenschaft von Bézier-Kurven ist die *variationsvermindernde Eigenschaft*. Eine Kurve schneidet eine beliebige Ebene nicht öfter als ihr Kontrollpolygon. Personen die sich mit dem Thema der Bézier-Darstellung von Kurven und Flächen tiefergehend befassen möchten, sind auf Hoschek und Lasser [22] sowie Farin [17] verwiesen.

2.4.1 Kegelschnitt als rationale quadratische Bézier-Kurve

Die rationale quadratische Bézier-Kurve

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\omega_0 \mathbf{c}_0 B_0^2(t) + \omega_1 \mathbf{c}_1 B_1^2(t) + \omega_2 \mathbf{c}_2 B_2^2(t)}{\omega_0 B_0^2(t) + \omega_1 B_1^2(t) + \omega_2 B_2^2(t)} \quad \text{mit } t \in [0, 1], \mathbf{c}_i \in \mathbb{E}^3, i = 0, 1, 2, \quad (2.16)$$

wobei die Punkte \mathbf{c}_i mit $i = 0, 1, 2$ nicht kollinear sein dürfen, beschreibt die Menge der regulären Kegelschnitte und umgekehrt, siehe [22] Seite 151.

Wie Farin auf Seite 178 in [16] zeigt, ist es immer möglich, für $w_i \neq 0, i = 0, 1, 2$ durch die Umparametrisierung

$$t = \frac{\hat{t}}{\hat{p}(1-\hat{t}) + \hat{t}} \quad \text{mit } \hat{p} = \sqrt{\frac{w_2}{w_0}}$$

und anschließender Division durch w_2 in der Darstellung (2.16), $\omega_0 = \omega_2 = 1$ zu erreichen. Ein Kegelschnitt der dieser Bedingung genügt ist in *Standardform* gegeben. In diesem Fall ist die Tangente im *Schulterpunkt*, der Punkt der Bézier-Kurve $\mathbf{x}(t)$ für $t = \frac{1}{2}$, parallel zu der von den Kontrollpunkten \mathbf{c}_0 und \mathbf{c}_1 aufgespannten Geraden.

Sei eine rationale quadratische Bézier-Kurve in einer solchen Standardform gegeben. Dann können wir eine geometrische Interpretation dieser laut [22] mittels dem Parameter

$$s := \frac{\omega_1}{1 + \omega_1}$$

geben. Es gilt, dass eine rationale quadratische Bézier-Kurve für Parameter s

- $s = \frac{1}{2}$ ein Parabelsegment,
- $s < \frac{1}{2}$ ein Ellipsensegment,
- $s > \frac{1}{2}$ ein Hyperbelsegment

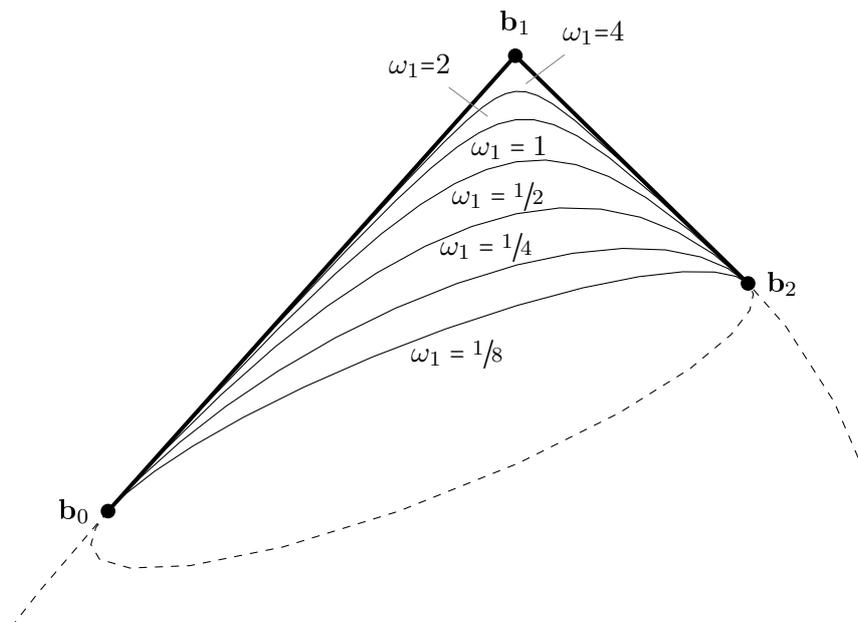


Abbildung 2.4: Rationale quadratische Bézier-Kurve mit variierendem Gewicht ω_1 .

liefert. Man erkennt aus der Beziehung, dass eine rationale Bézier-Kurve durch die Lage ihrer Kontrollpunkte alleine nicht eindeutig bestimmt ist. Erst durch die zusätzliche Angabe der Gewichte ist diese eindeutig festgelegt. Die Gewichte können dabei als weiteres Werkzeug zur Manipulation des Kurvenverlaufs verwendet werden. Es genügt daher bei Anwendung einer projektiven Abbildung nicht nur die Kontrollpunkte abzubilden, sondern die Gewichte müssen ebenfalls transformiert werden.

Eine weitere Möglichkeit eine rationale Bézier-Kurve festzulegen gibt Farin an. Er führte *Gewichtspunkte*, auch *Farin-Punkte*

$$\mathbf{f}_i := \mathbf{b}_i + \mathbf{b}_{i+1}$$

genannt, ein. Die Farin-Punkte legen die Gewichte bis auf einen gemeinsamen Faktor eindeutig fest. Im Gegensatz zu den Gewichten ω_i besitzen die Farin-Punkte eine geometrische Deutung im Zusammenhang mit den Kontrollpunkten des Kontrollpolygons. Sie können so intuitiver als die Gewichte zum Design der Bézier-Kurve eingesetzt werden. Der Gewichtspunkt \mathbf{f}_i teilt die Gerade die von den beiden Punkten \mathbf{b}_i und \mathbf{b}_{i+1} aufgespannt wird im Verhältnis $\omega_i : \omega_{i+1}$. Es gilt somit

$$\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \mathbf{TV}(\mathbf{b}_i, \mathbf{f}_i, \mathbf{b}_{i+1}),$$

dabei steht **TV** für Teilverhältnis. Geise und Jüttler führen in [21] zusätzlich zu den Farin-Punkten, dort *innere Gewichtspunkte* genannt, noch *äußere Gewichtspunkte* \mathbf{w}_i mit

$$\mathbf{w}_i := \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_{i+1}$$

ein. Durch Angabe der Kontroll- sowie der inneren und äußeren Gewichtspunkte ist die rationale Bézier-Kurve eindeutig festgelegt. Die vier Punkte \mathbf{b}_i , \mathbf{b}_{i+1} , \mathbf{f}_i und \mathbf{w}_i liegen dabei in harmonischer Lage, es gilt somit

$$\mathbf{DV}(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}, \mathbf{w}_i, \mathbf{f}_i) = \frac{\mathbf{TV}(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}, \mathbf{w}_i)}{\mathbf{TV}(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}, \mathbf{f}_i)} = -1.$$

Im Allgemeinen betrachtet man Bézier-Kurven nur im Parameterintervall $[0,1]$, die rationalen quadratischen Bézier-Kurven beschreiben Kegelschnittsegmente. Lässt man für den Parameter t jedoch $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zu, wird der ganze Kegelschnitt beschrieben. Das Segment welches für $t \notin [0,1]$ durchlaufen wird, bezeichnet man als *komplementäres* Kurvensegment der rationalen Bézier-Kurve. Beispiele für Darstellungen von Kegelschnittsegmenten sowie des komplementären Kegelschnittsegmentes sind in den Abbildungen 3.5a sowie 3.5b zu sehen.

In der Praxis ergeben sich Probleme wenn für t beliebige Werte eingesetzt werden. Um eine Parametrisierung des komplementären Kegelschnittsegmentes für $t \in [0,1]$ zu erhalten, ist das mittlere Gewicht ω_1 mit -1 zu multiplizieren, siehe [35]. Wir bezeichnen das komplementäre Segment von $\mathbf{x}(t)$ mit $\tilde{\mathbf{x}}(t)$. Wie Teller und Sequin in [35] erwähnen gilt, dass der mittlere Kontrollpunkt \mathbf{c}_1 sowie die Punkte $\mathbf{x}(t^*)$ und $\tilde{\mathbf{x}}(t^*)$ für jedes beliebige $t^* \in \mathbb{R}$ kollinear sind.

Eine Verallgemeinerung von Bézier-Kurven sind die *Tensorprodukt-Bézier-Flächen*. Eine Tensorprodukt-Bézier-Fläche vom Grad (m,n) hat die Form

$$\mathbf{x}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{b}_{i,j}, \quad u,v \in [0,1], \quad (2.17)$$

welche wiederum eine Linearkombination der Kontrollpunkte $\mathbf{b}_{i,j}$ mit Bernsteinpolynomen darstellt. Die Kontrollpunkte $\mathbf{b}_{i,j}$ beschreiben ein Kontrollnetz. Die u - und v -Parameterlinien sind

Bézier-Kurven vom Grad m und Grad n . Jeder innere Kontrollpunkt $\mathbf{b}_{i,j}$ besitzt vier innere und vier äußere Gewichtspunkte. Diese können im Gegensatz zum Kurvenfall aber nicht beliebig gewählt werden, sondern müssen in einer Ebene liegen [21].

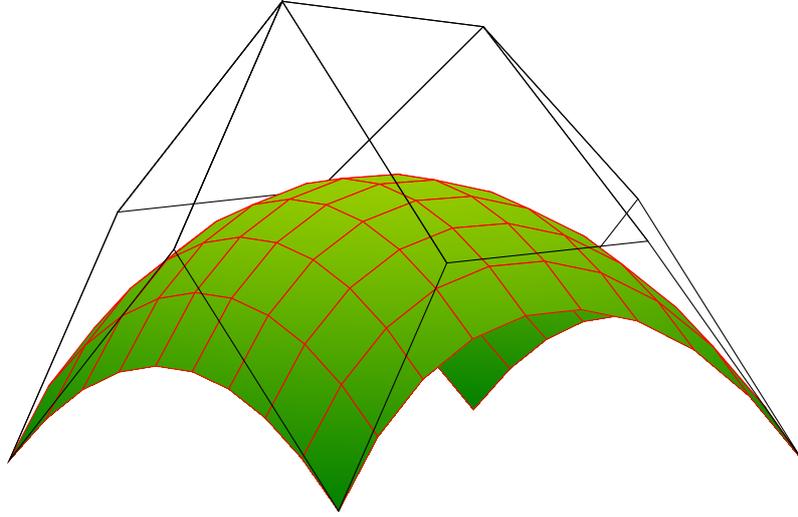


Abbildung 2.5: Rationale quadratische Tensorprodukt-Bézier-Fläche vom Grad $(3, 2)$

Zusätzlich zu den Tensorprodukt-Bézier-Flächen, die über ein rechteckiges Parametergebiet definiert sind, existieren noch die Dreiecks-Bézier-Flächen, die nach Farin in [17] als die "natürlichere" Verallgemeinerung der Bézier-Kurven gelten. Eine Dreiecks-Bézier-Fläche vom Grad n besitzt die Darstellung

$$\mathbf{x}(u, v, w) = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \geq 0}} B_{i,j,k}^n(u, v, w) \mathbf{b}_{i,j,k}, \quad u + v + w = 1, \quad u, v, w \geq 0, \quad (2.18)$$

wobei $B_{i,j,k}^n$ verallgemeinerte Bernsteinpolynome vom Grad n mit

$$B_{i,j,k}^n(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \quad (2.19)$$

darstellen. Die Punkte $\mathbf{b}_{i,j,k}$ bilden dabei die Eckpunkte des *Bézier-Netzes* der Fläche. Das Bild einer jeden Geraden der Parameterebene wird auf eine Kurve n -ten Grades auf der Dreiecks-Bézier-Fläche abgebildet.

Um später Bézier-Darstellungen von Kurven und Flächenstücken auf Quadriken zu erhalten, wird es nötig sein, Produkte von Bernsteinpolynomen zu berechnen. Dies wird mit der Produktformel

$$B_i^m \cdot B_j^n = \frac{\binom{m}{i} \binom{n}{j}}{\binom{m+n}{i+j}} B_{i+j}^{m+n}, \quad i = 0, \dots, m \text{ und } j = 0, \dots, n, \quad (2.20)$$

sowie der Produktformel

$$B_{i,j,k}^m \cdot B_{I,J,K}^n = \frac{m!n!}{(m+n)!} \frac{(i+I)!(j+J)!(k+K)!}{i!I!j!J!k!K!} \cdot B_{i+I,j+J,k+K}^{m+n} \quad (2.21)$$

mit $i, j, k = 0, \dots, m$ und $i + j + k = m$ sowie $I, J, K = 0, \dots, n$ und $I + J + K = n$ berechnet.

2.4.2 Basispunkte

Der *implizite Grad* einer Fläche ist gleich der Maximalanzahl der Schnittpunkte der Fläche mit einer beliebigen Geraden in allgemeiner Lage, wobei die Gerade nicht vollkommen auf der Fläche liegt. Sei eine Fläche mittels algebraischer Gleichung (2.13) mit Grad n gegeben. Wir stellen eine Gerade allgemeiner Lage als Schnitt zweier Ebenen dar, dann schneidet jede Ebene die Fläche in einer ebenen Kurve vom Grad n . Nach dem *Satz von Bézout*, siehe Seite 102 in [30], haben zwei ebene Kurven vom Grad n , ohne gemeinsame Komponenten, genau $n \cdot n$ Schnittpunkte gemein. Somit ist der implizite Grad einer Fläche, die in parametrischer Form mit Polynomgrad n gegeben ist, gleich n^2 , siehe Kapitel 15 in [18].

Bei manchen Parametrisierungen kann es passieren, dass für bestimmte Parameterwerte t^* alle Komponenten $x_i(t)$ in der Darstellung (2.13) den Wert 0 annehmen. Wegen der Bedeutung der $x_i(t)$ handelt es sich dabei um diejenigen Punkte der Parameterebene, zu denen keine Flächenpunkte gehören. Diese Punkte im Parametergebiet werden als *Basispunkte* bezeichnet. Liegt für einen Wert t^* ein Basispunkt vor, kann der lineare Faktor $(t - t^*)$ aus der rationalen Kurvendarstellung gekürzt werden. Der Polynomgrad der Fläche und somit auch der algebraische Grad kann dann um 1 reduziert werden. Wenn ein solcher Basispunkt existiert, dann enthält jede Schnittkurve einer beliebigen Ebene mit der Fläche diesen Basispunkt und es verringert sich somit auch der implizite Grad der Kurve.

Beispiel 2.5

Die ebene rationale Kurve vierten Grades

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 + 2t^2 + t^4 \\ 1 - t^4 \\ 2t + 2t^3 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

besitzt die beiden Basispunkte $t = \pm i$ und kann daher um den Faktor $t^2 + 1$ reduziert werden. Man erhält dadurch die wohlbekannte Parametrisierung des Kreises

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 + t^2 \\ 1 - t^2 \\ 2t \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Das bedeutet der implizite Grad der quartischen Kurve (2.22) ist 2.

Eine Dreiecks-Bézier-Fläche vom Grad n besitzt eine implizite Ordnung vom Grad n^2 . Besitzt die Fläche einen k -fachen Basispunkt, so verringert sich der implizite Grad der Fläche um k^2 . Bei einer Tensorprodukt-Fläche vom Grad (m, n) ist der höchst auftretende Term $u^m v^n$. Der maximale implizite Grad einer solchen Fläche ist somit $(n+m)^2$. Jede Tensorprodukt-Fläche der Form (2.17) besitzt einen n -fachen Basispunkt im Fernpunkt der u -Achse, sowie einen m -fachen Basispunkt beim Fernpunkt der v -Achse. Der implizite Grad einer Tensorprodukt-Fläche ist somit höchstens $(n+m)^2 - n^2 - m^2 = 2mn$. Basispunkte können auch dazu verwendet werden, die

Gestalt der Flächen zu beeinflussen. Warren erzeugte Parametrisierungen von vier-, fünf- und sechsseitigen Flächenstücken mittels rationalen Dreiecks-Bézier-Flächen, indem er Basispunkte in die Ecken des Kontrollpolygons legte [36].

Es gibt weitere Möglichkeiten eine Kurve oder Fläche graderhöht darzustellen. Existieren zu jedem Kurvenpunkt n Parameterwerte die diesen Punkt annehmen spricht man von einer $n - 1$ -Parametrisierung.

Beispiel 2.6

Die ebene rationale Kurve vom Grad 4

$$\mathbf{x}(s) = \begin{pmatrix} 1 - s^2 + 2s^4 \\ s^2 - 2s^4 \\ s^2 - 1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

besitzt keinen Basispunkt. Die rationale Kurve (2.24) beschreibt ein Teilstück des Kreises und nimmt für die Parameterwerte $+t$ und $-t$ denselben Kurvenpunkt an. Die Parametrisierung erhält man durch die Substitution $t = s^2 - 1$ für $t \in [-1, \infty]$ aus der Darstellung 2.23.

Die Existenz der Basispunkte in den Fernpunkten bei einer Tensorprodukt-Fläche garantieren, dass es eine eindeutige Parametrisierung, auch 1-1-Parametrisierung genannt, gibt.

Verallgemeinerte stereografische Projektion

Mehrere Arbeiten haben sich schon mit Methoden zur Konstruktion rationaler parametrischer Darstellungen für Kurven und Flächen auf Quadriken beschäftigt [23, 29, 35]. Alle diese Arbeiten haben gemein, dass sie zur Konstruktion der rationalen Kurven und Flächen auf einer Quadrik, die stereografische Projektion verwenden. Die Konstruktion mit Hilfe der stereografischen Projektion besitzt jedoch Nachteile. Man betrachte zum Beispiel die Einheitskugel U . Das Urbild eines Kreises C auf U ist, falls das Projektionszentrum auf dem Kreis liegt, eine Gerade und ansonsten ein Kreis in der Projektionsebene.

Die Tatsache, dass der Grad des Urbilds von der Lage des Projektionszentrums zum Kreis abhängt, birgt jedoch Nachteile. Die stereografische Projektion auf eine Quadrik ist eine quadratische Abbildung. Das Bild einer rationalen Kurve vom Grad n , in der Projektionsebene, ist demnach höchstens vom Grad $2n$ auf U . Die Behauptung, dass jede rationale Kurve vom Grad $2n$ auf U das Bild einer rationalen Kurve vom Grad n unter der stereografischen Projektion ist, gilt daher nicht.

Die von Dietz, Hoschek und Jüttler in [14] eingeführte *verallgemeinerte stereografische Projektion* besitzt diesen Nachteil nicht. Die verallgemeinerte stereografische Projektion besitzt eine bijektive Beziehung zwischen den Punkten auf einer Quadrik und einer zweiparametrischen Schar von Geraden im \mathbb{E}^3 . Diese Geraden bilden eine *Faserung* des \mathbb{E}^3 . Unter Faserung versteht man eine Menge von Elementen gleichen Ranges (*Fasern*), wobei durch jeden Punkt des Raumes, bis auf eine Ausnahmemenge, genau eine Faser verläuft. Der große Vorteil der verallgemeinerten stereografischen Projektion ist, dass ihre Definition nicht länger vom speziellen Projektionszentrum abhängt und somit allgemein gültige Aussagen getroffen werden können, siehe zum Beispiel Lemma 3.3.

Es wird im Folgenden die verallgemeinerte stereografische Projektion für drei Repräsentanten von Quadriken eingeführt. Dazu werden einige Eigenschaften, die in [12, 13, 14, 15, 21, 26] beschrieben und bewiesen wurden, zusammengefasst. Darauf aufbauend werden in den folgenden Kapiteln, mit Hilfe der verallgemeinerten stereografischen Projektion, mehrere Aussagen über Bézier-Flächenstücke auf Quadriken bewiesen und Konstruktionsverfahren entwickelt.

3.1 Ovale Quadriken

Wie aus der Tabelle 2.2 zu entnehmen ist, gehören zu den ovalen Quadriken die Ellipsoide, zweischalige Hyperboloide und elliptischen Paraboloiden. Diese Klasse zeichnet sich dadurch aus,

dass sie zwei nicht reelle Scharen von Geraden als Erzeugende besitzt. Als Repräsentant dieser Klasse wird die Einheitskugel U mit der impliziten Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_0^2$ herangezogen. Es wird mittels der impliziten Gleichung eine Abbildung δ , die als verallgemeinerte stereografische Projektion bezeichnet wird, definiert. Außerdem werden von δ einige geometrische Eigenschaften gezeigt.

3.1.1 Zahlentheoretischer Zugang

Satz 3.1 Sei R einer der Polynomringe $\mathbb{R}[t]$, $\mathbb{R}[u, v]$ oder $\mathbb{R}[u, v, w]$. Die teilerfremden Polynome x_0, x_1, x_2 und $x_3 \in R$ mögen die Gleichung

$$x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (3.1)$$

erfüllen. Dann gibt es Polynome $p_0, p_1, p_2, p_3 \in R$, sodass

$$\begin{aligned} x_0 &= p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 & \text{oder} & & x_0 &= -(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \\ x_1 &= 2p_0p_1 - 2p_2p_3 \\ x_2 &= 2p_1p_3 + 2p_0p_2 \\ x_3 &= p_1^2 + p_2^2 - p_0^2 - p_3^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

gilt.

Lösungen von Gleichung (3.1) werden *Pythagoräische Quadrupel* genannt. Sie wurden schon im Fall des Ringes der ganzen Zahlen von V.A. Lebesgue im Jahr 1868 und von E. Catalan im Jahre 1885 untersucht, siehe [11]. Ein Beweis dieses Satzes ist in [14] zu finden. Beim Beweis dieser Aussage geht essentiell ein, dass der jeweilige Polynomring ein faktorieller Ring ist.

Die erhaltene Darstellungsformel (3.2) wird nun dazu verwendet eine surjektive Abbildung vom \mathbb{P}^3 auf die Einheitskugel U zu definieren.

Definition 3.2 Die Abbildung $\delta: \mathbb{P}^3 \rightarrow U$ mit

$$\delta: \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \\ 2p_0p_1 - 2p_2p_3 \\ 2p_1p_3 + 2p_0p_2 \\ p_1^2 + p_2^2 - p_0^2 - p_3^2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

heißt *verallgemeinerte stereografische Projektion auf die Einheitskugel U* .

Als Folgerung des Satzes 3.1 erhält man den in [26] gegebenen

Satz 3.3 Jede irreduzible rationale Bézier-Kurve (*B-Splinekurve*), vom Grad $2n$ auf der Kugel, ist das Bild einer Bézier-Kurve (*B-Splinekurve*) vom Grad n im \mathbb{P}^3 unter δ . Jede irreduzible rationale Tensorprodukt-Fläche vom Grad $(2m, 2n)$ auf der Kugel ist das Bild einer rationalen Tensorprodukt-Fläche vom Grad (m, n) unter δ .

Bemerkung 3.4 Wie zum Beispiel in [12] gezeigt wird, ist δ keine Projektion im üblichen Sinne, da die Gleichung $\delta \circ \delta = \delta$ nicht gilt. In [13] wurde angemerkt, dass bei der induzierten Selbstabbildung der Kugel, die Oberfläche auf die südliche Halbkugel abgebildet wird. Die Punkte am Äquator, sowie der Südpol, sind Fixpunkte. Wobei die Punkte am Äquator anziehende Fixpunkte sind und der Südpol ein abstoßender Fixpunkt ist.

3.1.2 Geometrische Eigenschaften

Obwohl ein algebraischer Zugang gewählt wurde, besitzt die verallgemeinerte stereografische Projektion eine geometrische Interpretation, die im starken Zusammenhang mit der Liniengeometrie steht. Jüttler und Rittenschober gaben in ihrer Arbeit [27], mit Hilfe linearer Kongruenzen, eine Abbildung von den Punkten des projektiven Raumes \mathbb{P}^3 auf die Menge der Geraden \mathcal{L} des \mathbb{P}^3 an. Diese ist äquivalent zur der in Definition 3.2 gegebenen Abbildung. Bei Pottmann und Wallner in [30] wird die Abbildung δ ebenfalls betrachtet, dort aber als *Hopf Abbildung* bezeichnet.

Satz 3.5 *Die Einschränkung der verallgemeinerten stereografischen Projektion δ auf die Äquatorebene P , das heißt die Ebene $x_3 = 0$, ist gleich die stereografische Projektion $\sigma : P \rightarrow U$ mit dem Zentrum $\mathbf{z} = (1, 0, 0, 1)^T$.*

Beweis. Wenn wir δ auf P einschränken, lautet die Abbildungsvorschrift

$$\delta|_P : \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 \\ 2p_0p_1 \\ 2p_0p_2 \\ p_1^2 + p_2^2 - p_0^2 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Die stereografische Projektion σ ist eine wohlbekannte Abbildung und ihre Abbildungsvorschrift ist aus [4, 34] bekannt. Sie stimmt mit der oben eingeschränkten Abbildung überein. Es gilt somit $\delta|_P = \sigma$. \square

Bemerkung 3.6 *In der Literatur, zum Beispiel [3, 4, 34], wird eigentlich die Umkehrabbildung σ^{-1} , also die Zentralprojektion von der Kugeloberfläche auf eine Ebene, als stereografische Projektion bezeichnet. Aus Vereinfachung und zur Anlehnung an [12] wird in dieser Arbeit die Abbildung σ als stereografische Projektion bezeichnet.*

Die Eigenschaften der stereografischen Projektion sind ausführlich in der Fachliteratur gezeigt worden. Auf die Beweise wird daher nicht näher eingegangen. Für die weiteren Ausführungen wird die Kreistreue und Winkeltreue von besonderer Relevanz sein. Kreistreue bedeutet, dass Kreise und Geraden der Ebene auf Kreise der Kugeloberfläche U abgebildet werden.

Satz 3.7 *Die verallgemeinerte stereografische Projektion δ ist die Zusammensetzung der Abbildung $\nu : \mathbb{P}^3 \rightarrow P$*

$$\nu : \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_0^2 + p_3^2 \\ p_0p_1 - p_2p_3 \\ p_1p_3 + p_0p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

mit der stereografischen Projektion σ , das heißt es gilt $\delta = \sigma \circ \nu$. Die Abbildung ν heißt hyperbolische Projektion und lässt die Ebene P punktweise fest.

Beweis. Man betrachte einen Punkt $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T \in U$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{z}$. Die Abbildungsvorschrift für σ^{-1} lautet nach [34]

$$\sigma^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_0 - x_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man nun die Hintereinanderausführung $\sigma^{-1} \circ \delta$, so ergibt sich für einen Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{P}^3$, dass $\sigma^{-1} \circ \delta(\mathbf{p}) = 2\nu(\mathbf{p}) \sim \nu(\mathbf{p})$ ist. Die zweite Aussage ist ebenfalls leicht ersichtlich. Man setzt einen Punkt $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, 0)^T \in P$ in die Gleichung (3.5) ein und erhält daraus $\nu(\mathbf{p}) = (p_0^2, p_0 p_1, p_0 p_2, 0)^T \sim \mathbf{p}$. \square

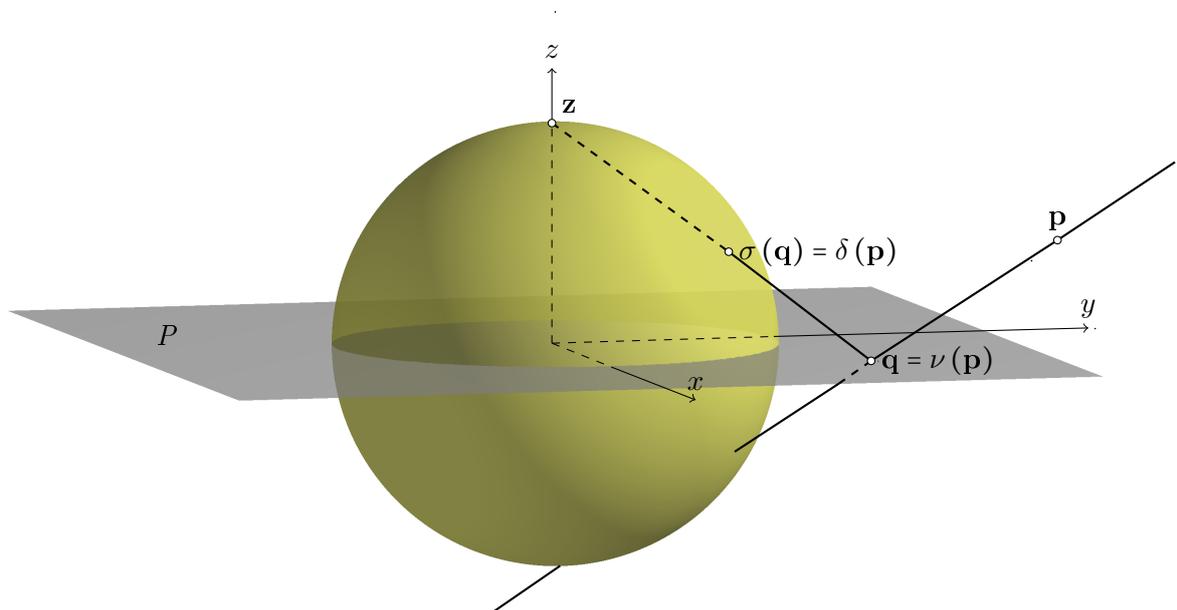


Abbildung 3.1: Verallgemeinerte stereografische Projektion auf die Einheitskugel U .

Lemma 3.8 Die Menge aller Urbilder eines Punktes $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T \in U$ unter δ (bzw. Menge der Urbilder eines Punktes $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, 0)$ auf P unter ν wobei $\mathbf{x} = \sigma(\mathbf{q})$) bildet die Gerade

$$\mathbf{g}_x : \lambda \mathbf{p} + \mu \mathbf{p}^\perp \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}), \quad (3.6)$$

wobei $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ ein beliebiges Urbild von \mathbf{x} unter δ ist und $\mathbf{p}^\perp := (-p_3, p_2, -p_1, p_0)^T$ gilt.

Beweis. Das Bild eines beliebigen Punktes $\lambda \mathbf{p} + \mu \mathbf{p}^\perp \in \mathbf{g}_x$ unter δ ist $\delta(\lambda \mathbf{p} + \mu \mathbf{p}^\perp) = (\lambda^2 + \mu^2) \delta(\mathbf{p}) \sim \mathbf{x}$. Die Geraden (3.6) werden *projizierende Geraden* von δ genannt. \square

Die projizierende Gerade \mathbf{g}_x kann man, neben der Darstellungsmöglichkeit (3.6) als Verbindungsgerade zweier Punkte, auch als Schnittgerade der beiden Ebenen

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} -p_3 \\ p_2 \\ -p_1 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{p}}^\perp = \begin{pmatrix} -p_2 \\ -p_3 \\ p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

darstellen. Wie oben schon erwähnt, gibt es einen engen Zusammenhang mit linearen Kongruenzen in der Liniengeometrie. Eine erste Verbindung gibt folgender

Satz 3.9 Die Menge der projizierenden Geraden einer hyperbolischen Projektion bildet eine elliptische lineare Kongruenz.

Beweis. Man betrachte die komplexe Erweiterung des \mathbb{P}^5 und die Plückerkoordinaten der projizierenden Gerade zu einem beliebigen Punkt $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T$

$$\mathbf{G}_p = \begin{pmatrix} p_0^2 - p_1^2 \\ -p_0p_3 - p_1p_2 \\ p_0p_2 - p_1p_3 \\ p_2^2 + p_3^2 \\ -p_1p_2 - p_0p_3 \\ -p_1p_3 + p_0p_2 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

wobei $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)^T$ ein beliebiges Urbild unter δ sei. Des Weiteren betrachte man die beiden komplexen Geraden

$$\mathbf{F}_1 = (1, -i, 0, -1, i, 0)^T \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2 = (1, i, 0, -1, -i, 0)^T, \quad (3.9)$$

welche konjugiert komplex sowie windschief sind, da sie die Schnittbedingung (2.9) nicht erfüllen. Die Gerade \mathbf{F}_1 (bzw. \mathbf{F}_2) wird durch die Punkte $(1, 0, 0, i)$ und $(0, 1, -i, 0)$ (bzw. durch die konjugierten Punkte) aufgespannt.

Die Plückerkoordinaten jeder projizierenden Geraden erfüllen $\langle \mathbf{G}_p, \mathbf{F}_1 \rangle = 0$ als auch $\langle \mathbf{G}_p, \mathbf{F}_2 \rangle = 0$, womit die Menge der projizierenden Geraden zwei windschiefe konjugiert komplexe Geraden schneidet. Sie bildet daher eine elliptische lineare Kongruenz mit den Brenngeraden $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$. \square

Das Bild der hyperbolischen Projektion besteht also aus Projektionen längs den projizierenden Geraden auf die Äquatorebene P . Die hyperbolische Projektion ist somit eine *Netzprojektion*. Netzprojektionen wurden zum Beispiel von Brauner in [6, 7] untersucht. Einige Eigenschaften die in [6, 7] gezeigt wurden, werden im Folgenden aufgezählt:

- Das Bild einer Geraden, die ungleich den projizierenden Geraden und nicht parallel zur Äquatorebene P ist, ist ein Kreis.
- Geraden die parallel zu P sind, werden auf Geraden abgebildet.
- Jede Ebene E enthält genau eine projizierende Gerade und das Feld der Geraden der Ebene E wird auf ein Kreisbündel in P abgebildet. Dabei ist der Trägerpunkt des Bündels genau das Bild der projizierenden Gerade die in E enthalten ist.

Die hyperbolische Projektion ν wird hier als eine Abbildung der Punkte des euklidischen Raumes auf Punkte der Ebene P eingeführt. Man kann sie aber auch als eine Abbildung der Geraden des euklidischen Raumes auf die Kreise der Ebene P , wobei die Kreise zu Punkten und Geraden ausarten können, auffassen. Aufgrund der Kreistreue der stereografischen Projektion σ gelten die eben erwähnten Eigenschaften der hyperbolischen Projektion ν auch für die verallgemeinerte stereografische Projektion δ .

Um den Namen hyperbolische Projektion für ν zu rechtfertigen, führen wir das in [14] gegebene Lemma an und beweisen dieses.

Lemma 3.10 *Das Urbild eines Kreises auf P unter ν (und somit eines Kreises auf U unter δ , der nicht durch den Nordpol verläuft) ist ein einschaliges Hyperboloid. Das Urbild einer Geraden in P unter ν (und somit eines Kreises auf U unter δ , der durch den Nordpol verläuft) ist ein hyperbolisches Paraboloid.*

Beweis. Ein Beweis dieser Aussage ist in [12] gegeben. Aufgrund der Eigenschaften der Netzprojektionen wissen wir, dass das Bild einer Gerade \mathbf{g} ein Kreis C ist. Diese Gerade schneidet die beiden Brenngeraden im Allgemeinen nicht, da es sich sonst um eine projizierende Gerade handeln würde und der Kreis C zu einem Punkt ausarten würde. Das Urbild des Kreises C besteht somit aus allen projizierenden Geraden, die \mathbf{g} und die beiden Brenngeraden schneiden, und bildet somit ein Regulus. Die Menge der projizierenden Geraden, die das Urbild des Kreises C sind, ist daher eine Schar von Erzeugenden einer ringförmigen Quadrik. \square

Bemerkung 3.11 *Auf einer ringförmigen Quadrik liegen zwei Scharen von Geraden, Erzeugende genannt. Die erste Schar sind die projizierenden Geraden, die zweite Schar wird konjugiert zur ersten genannt. Das Bild eines konjugierten Erzeugers einer ringförmigen Quadrik Q unter δ , dessen erste Schar aus projizierenden Geraden besteht, ist somit ein Kreis $\mathbf{x}(\varphi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Das folgt aus der Tatsache, dass sich zwei Geraden verschiedener Scharen genau in einem Punkt schneiden. Daher schneidet eine konjugierte Gerade alle projizierenden Geraden die auf der Quadrik Q liegen.*

3.2 Ringförmige Quadriken

Zu der Klasse der ringförmigen Quadriken gehören die Hyperboloide und hyperbolischen Paraboloid, siehe dazu Tabelle 2.2. Diese zeichnen sich wie bereits erwähnt dadurch aus, dass sie zwei Familien von reellen Geraden besitzen. Als Repräsentant der ringförmigen Quadriken wird das hyperbolische Paraboloid H , mit Darstellung

$$H : x_0x_3 = x_1x_2$$

in homogenen Koordinaten, gewählt. Wir werden, wie im vorherigen Kapitel, zuerst einen algebraischen Zugang wählen um eine explizite Darstellung für die Komponenten x_0 , x_1 , x_2 und x_3 zu erhalten.

3.2.1 Zahlentheoretischer Zugang

Satz 3.12 *Sei R einer der Polynomringe $\mathbb{R}[t]$, $\mathbb{R}[u, v]$ oder $\mathbb{R}[u, v, w]$. Die teilerfremden Polynome x_0 , x_1 , x_2 und $x_3 \in R$ mögen die Gleichung*

$$x_0x_3 = x_1x_2 \tag{3.10}$$

erfüllen. Dann gibt es p_0 , p_1 , p_2 , $p_3 \in R$, sodass

$$x_0 = p_0p_3, \quad x_1 = p_1p_3, \quad x_2 = p_0p_2 \quad \text{und} \quad x_3 = p_1p_2 \tag{3.11}$$

gilt.

Dieser Satz wurde von Dietz in [12] bewiesen und kann dort nachgelesen werden. Aus dieser Darstellung kann nun wie im Fall der Pythagoräischen Quadrupel eine Abbildung ψ definiert werden.

Definition 3.13 Die Abbildung $\psi : \mathbb{P}^3 \rightarrow H$ mit

$$\psi : \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_0 p_3 \\ p_1 p_3 \\ p_0 p_2 \\ p_1 p_2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

heißt verallgemeinerte stereografische Projektion auf das hyperbolische Paraboloid H .

Als Folgerung dieses Satzes erhält man abermals eine Aussage über die Urbilder von Flächenstücken auf dem hyperbolischen Paraboloid.

Satz 3.14 Jede rationale Bézier-Kurve (B-Splinekurve) vom Grad n , auf dem hyperbolischen Paraboloid, ist das Bild einer Bézier-Kurve (B-Splinekurve) vom Höchstgrad n unter ψ . Jede rationale Tensorprodukt-Fläche vom Grad (m, n) ist das Bild einer rationalen Tensorprodukt-Fläche vom Höchstgrad (m, n) unter ψ .

3.2.2 Geometrische Eigenschaften

Wie schon bei den ovalen Quadriken wird im Folgenden gezeigt, dass die verallgemeinerte stereografische Projektion ψ eine Zusammensetzung von wohlbekannten Abbildungen ist. Aufbauend auf diesen bekannten Abbildungen können dann einige Aussagen getroffen werden.

Satz 3.15 Die Einschränkung der verallgemeinerten stereografischen Projektion ψ auf die Ebene R mit $x_0 = x_3$, das heißt die Ebene mit $z = 1$, ist gleich die stereografische Projektion $\tau : R \rightarrow H$ mit Projektionszentrum $\mathbf{c} = (0, 0, 0, 1)^T \in H$, dem Fernpunkt der z -Achse.

Beweis. Wenn wir ψ auf R einschränken, lautet die Abbildungsvorschrift

$$\tau = \psi|_R : \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_0^2 \\ p_1 p_0 \\ p_0 p_2 \\ p_1 p_2 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Das Bild des Punktes $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_0) \in H$, unter der stereografischen Projektion τ , lässt sich als Linearkombination $\tau(\mathbf{p}) = \lambda \mathbf{p} + \mu \mathbf{c}$ schreiben. Nimmt man die Werte, $\lambda = p_0$ und $\mu = (p_1 p_2 - p_0^2)$, erhält man die Darstellung (3.13) und es gilt somit $\psi|_R = \tau$. \square

Satz 3.16 Die verallgemeinerte stereografische Projektion ψ ist die Zusammensetzung der Abbildung $\alpha : \mathbb{P}^3 \rightarrow R$

$$\alpha : \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_0 p_3 \\ p_1 p_3 \\ p_0 p_2 \\ p_0 p_3 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

mit der stereografischen Projektion τ , das heißt es gilt $\psi = \tau \circ \alpha$. Die Abbildung α heißt axiale Projektion und lässt die Ebene R punktweise fest.

Beweis. Es wird ein Punkt $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T \in H$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{c}$ betrachtet. Die Abbildungsvorschrift für τ^{-1} ist wohl bekannt und lautet $\tau^{-1}(\mathbf{x}) = (x_0, x_1, x_2, x_0)^T$. Betrachtet man die Hintereinanderausführung $\tau^{-1} \circ \psi$, so ergibt sich für einen Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{P}^3$, dass $\tau^{-1} \circ \psi(\mathbf{p}) = \alpha(\mathbf{p})$ gilt. Die zweite Aussage ist einfach nachzurechnen. \square

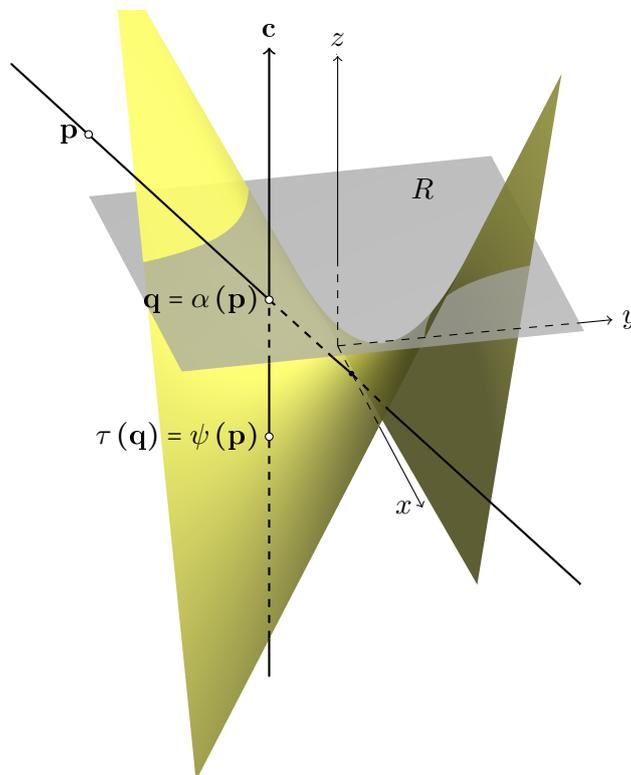


Abbildung 3.2: Verallgemeinerte stereografische Projektion auf das hyperbolische Paraboloid H .

Lemma 3.17 Ein Urbild des Punktes $\mathbf{x} \in H$ unter ψ , mit $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T$, ist

$$\begin{aligned} (x_0, x_1, x_2, x_0)^T & \quad \text{für } \mathbf{x} \neq (0, 0, 0, 1)^T, \\ (x_2, x_3, x_3, x_1)^T & \quad \text{für } \mathbf{x} \neq (1, 0, 0, 0)^T, \\ (x_2, x_3, x_2, x_0)^T & \quad \text{für } \mathbf{x} \neq (0, 1, 0, 0)^T \text{ und} \\ (x_0, x_1, x_3, x_0)^T & \quad \text{für } \mathbf{x} \neq (0, 0, 1, 0)^T. \end{aligned}$$

Das Urbild eines Punktes $\mathbf{x} \in H$ ist die Gerade

$$\mathbf{h}_x : \lambda \mathbf{p}^* + \mu \mathbf{p}^{**} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}), \quad (3.15)$$

wobei $\mathbf{p}^* := (p_0, p_1, 0, 0)^T$ und $\mathbf{p}^{**} := (0, 0, p_2, p_3)^T$ gilt. Dabei ist $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)^T$ ein Urbild von \mathbf{x} unter ψ und wegen der ersten Aussage des Lemmas gilt $\mathbf{p}^* \neq (0, 0, 0, 0)^T \neq \mathbf{p}^{**}$.

Beweis. Die erste Aussage ist leicht zu überprüfen. Das Bild eines beliebigen Punktes $\tilde{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{p}^* + \mu \mathbf{p}^{**} \in \mathbf{h}_x$ unter ψ lautet $\psi(\tilde{\mathbf{x}}) = \psi(\lambda \mathbf{p}^* + \mu \mathbf{p}^{**}) = (\lambda \mu) \psi(\mathbf{p}) \sim \psi(\mathbf{p}) = \mathbf{x}$. Die Geraden (3.15) werden *projizierende Geraden* von ψ genannt. \square

Die projizierende Gerade \mathbf{h}_x kann ebenfalls als Schnitt der beiden Ebenen

$$\hat{\mathbf{p}}^* = \begin{pmatrix} p_1 \\ -p_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{p}}^{**} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_3 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

dargestellt werden. Dabei ist $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)^T$ ein Urbild von \mathbf{x} unter ψ .

Es stellt sich die Frage, ob für die Menge der projizierenden Geraden von ψ , ähnliche Aussagen wie im Fall der ovalen Quadriken getroffen werden können. Wir erhalten als erstes folgenden

Satz 3.18 *Die Menge der projizierenden Geraden einer axialen Projektion bilden eine hyperbolische lineare Kongruenz.*

Beweis. Es werden die Plückerkoordinaten einer projizierenden Geraden zu einem Punkt $\mathbf{p} \in H$

$$\mathbf{H}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ p_0 p_2 \\ p_0 p_3 \\ 0 \\ -p_1 p_3 \\ p_1 p_2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

bezüglich der axialen Projektion α betrachtet. Des Weiteren betrachten wir die beiden Geraden

$$\mathbf{F}_1 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T. \quad (3.18)$$

Dabei ist \mathbf{F}_1 jene Gerade, die von den Punkten $(0, 0, 0, 1)^T$ (Fernpunkt der z -Achse) und $(0, 0, 1, 0)^T$ (Fernpunkt y -Achse) aufgespannt wird. Also ist \mathbf{F}_1 die Schnittgerade aller zur xy -Ebene parallelen Ebenen. \mathbf{F}_2 ist wiederum die x -Achse und kann zum Beispiel durch ihren Fernpunkt $(0, 1, 0, 0)^T$ und den Ursprung $(1, 0, 0, 0)^T$ aufgespannt werden. Die Geraden \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 sind windschief. Jede projizierende Gerade erfüllt die Gleichungen $\langle \mathbf{H}_p, \mathbf{F}_1 \rangle = 0$ und $\langle \mathbf{H}_p, \mathbf{F}_2 \rangle = 0$ und schneidet daher \mathbf{F}_1 , als auch \mathbf{F}_2 . Damit wurde gezeigt, dass die projizierenden Geraden von ψ eine hyperbolische lineare Kongruenz mit den Brenngeraden $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ bilden. \square

Es werden noch die Urbilder von Geraden und Kreisen auf R genauer betrachtet und man erhält damit das

Lemma 3.19 *Das Urbild einer Erzeugenden von H unter ψ und somit das Urbild einer Geraden von R unter α , die parallel zur x - oder y -Achse verläuft, ist eine Ebene des euklidischen Raumes. Diese enthält eine der Brenngeraden des zu ψ gehörigen Netzes.*

Das Urbild einer auf H liegenden Parabel oder Hyperbel unter ψ (und somit das Urbild einer Geraden auf R unter α , die nicht parallel zur x - oder y -Achse verläuft, bzw. einer Hyperbel auf R unter α , die zur x - und y -Achse parallele Asymptoten besitzt) ist eine ringförmige Quadrik, die beide Brenngeraden enthält.

Beweis. Das Bild einer Ebene unter α , welche die x -Achse enthält, ist eine zur x -Achse parallele Gerade $g_x = \lambda(x_0, x_1, x_2, x_0)^T + \mu(x_0, y_1, x_2, x_0)^T$ in R , die mittels τ auf die Gerade $\tau(g_x) = \lambda(x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2, x_1 x_2)^T + \mu(x_0^2, x_0 y_1, x_0 x_2, x_2 y_1)^T$ abgebildet wird. Diese liegt auf dem

hyperbolischen Paraboloid H und ist somit eine Erzeugende von H . Für Ebenen, die parallel zur yz -Ebene liegen, sind die Schritte analog.

Im zweiten Fall wird wie bei Dietz in [12] vorgegangen. Das Urbild besteht aus einer Menge projizierender Geraden. Jede projizierende Gerade der Menge schneidet beide Brenngeraden. Aufgrund von Satz 3.14 wissen wir, dass eine Gerade existiert, welche auf die gegebene Parabel, beziehungsweise Hyperbel, abgebildet wird. Diese schneidet keine der beiden Brenngeraden, da sie sonst auf eine Gerade abgebildet werden würde. Außerdem schneidet jede projizierende Gerade aus dem Urbild diese Gerade. Wir haben somit ein System von Geraden, welches drei windschiefe Geraden schneidet und eine ringförmige Quadrik bildet. \square

Anstatt dem hyperbolischen Paraboloid H kann auch ein anderer Repräsentant gewählt werden. Wählt man etwa das einschalige Hyperboloid mit Gleichung $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$ kann dieses, aus dem hyperbolischen Paraboloid, mittels der projektiven Abbildung

$$\pi_2 : (x_0, x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (x_0 + x_3, x_0 - x_3, x_1 + x_2, x_1 - x_2)^T$$

gewonnen werden. Man würde dann eine zu (3.11) analoge Darstellung

$$\begin{aligned} x_0 &= p_0 p_3 + p_1 p_2 & x_1 &= p_0 p_3 - p_1 p_2 \\ x_2 &= p_1 p_3 + p_0 p_2 & x_3 &= p_1 p_3 - p_0 p_2 \end{aligned}$$

erhalten.

3.3 Kegelflächen

Die letzte Klasse der Quadriken die noch von Interesse ist, ist die der Kegelflächen. Diese haben, im Gegensatz zu den vorherigen beiden Klassen, nur eine Schar von Geraden als Erzeuger.

Als Repräsentant der Kegelflächen wird der Zylinder C , mit der impliziten Gleichung

$$x_0^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

gewählt. Die Vorgehensweise ist gleich wie im Fall der ovalen, sowie ringförmigen Quadriken. Es wird zuerst eine Abbildungsvorschrift hergeleitet und einige ihrer geometrischen Eigenschaften gezeigt.

3.3.1 Zahlentheoretischer Zugang

Definition 3.20 Die Abbildung $\varphi : \mathbb{P}^3 \rightarrow C$ mit

$$\varphi : \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_2^2 + p_0^2 \\ p_2^2 - p_0^2 \\ 2p_0 p_2 \\ 2p_3 p_0 + 2p_2 p_1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

heißt verallgemeinerte stereografische Projektion auf den Zylinder C .

Die Herleitung dieser Darstellungsmöglichkeit kann in [12] nachgelesen werden. Im Gegensatz zu den Parametrisierungen für nicht-ausgeartete Quadriken, ist es mit der Abbildung φ , mit

Darstellungsformel (3.19), nicht möglich alle rationalen Bézier-Flächen auf dem Kegel C darzustellen. Die ersten drei Koordinaten von (3.19) beschreiben eine stereografische Projektion auf den Einheitskreis. Wenn man für die letzte Koordinate beliebige Polynome zulassen würde, erhielte man eine Darstellungsformel für alle rationalen Parametrisierungen auf C . Man hätte dann nicht mehr die Möglichkeit die Abbildung φ , als Hintereinanderausführung von einer Netzprojektion und einer stereografischen Projektion, darzustellen.

3.3.2 Geometrische Eigenschaften

Satz 3.21 *Die Einschränkung der verallgemeinerten stereografischen Projektion φ auf die Ebene S mit $x_1 = 0$, die yz -Ebene, ist die stereografische Projektion ω . Dabei bildet ω den Punkt $\mathbf{q} = (q_0, 0, q_1, q_3)^T \in S$, mittels dem Projektionszentrum $\mathbf{d} = (1, 1, 0, 0)^T$, auf C ab.*

Beweis. Wenn wir φ auf S einschränken, lautet die Abbildungsvorschrift

$$\omega = \varphi|_S : \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p_2^2 + p_0^2 \\ p_2^2 - p_0^2 \\ 2p_2p_0 \\ 2p_3p_0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Es existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass man das Bild eines Punktes $\mathbf{p} = (p_0, 0, p_2, p_3)^T \in S$ unter $\varphi|_S$ als $\varphi|_S(\mathbf{p}) = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{d} \in C$ darstellen kann. Wenn wir $\lambda = 2p_0$ und $\mu = p_2^2 - p_0^2$ wählen, sind die Voraussetzungen erfüllt und es gilt $\varphi|_S = \omega$. □

Satz 3.22 *Die verallgemeinerte stereografische Projektion φ ist die Zusammensetzung der Abbildung $\chi : \mathbb{P}^3 \rightarrow S$*

$$\chi : \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2p_0^2 \\ 0 \\ 2p_0p_2 \\ 2p_0p_3 + 2p_1p_2 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

mit der stereografischen Projektion ω . Demnach gilt $\varphi = \omega \circ \chi$. Die Abbildung χ lässt die Ebene S punktweise fest.

Beweis. Wir betrachten einen Punkt $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T \in C$. Die Abbildungsvorschrift für ω^{-1} ist bekannt, zum Beispiel aus [34] und lautet $\omega^{-1}(\mathbf{x}) = (x_0 - x_1, 0, x_2, x_3)^T$. Betrachten wir nun die Hintereinanderausführung $\omega^{-1} \circ \varphi$, so ergibt sich für einen Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{P}^3$, dass $\omega^{-1} \circ \varphi(\mathbf{p}) = \chi(\mathbf{p})$. Die zweite Aussage ist aufgrund des Satzes 3.21 klar. □

Lemma 3.23 *Die Urbildmenge eines Punktes $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in C$ unter φ , ist die Gerade*

$$l_{\mathbf{x}} : \quad \lambda\mathbf{p}^\circ + \mu\mathbf{p}^{\circ\circ} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}). \quad (3.22)$$

Es gilt $\mathbf{p}^\circ := (p_0 - p_1, 0, p_2, p_3)^T$ und $\mathbf{p}^{\circ\circ} := (0, -p_2, 0, p_0 + p_1)^T$. Dabei sei $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)^T$ ein beliebiges Urbild von \mathbf{x} .

Beweis. Das Bild eines beliebigen Punktes $\tilde{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{p}^\circ + \mu \mathbf{p}^{\circ\circ} \in \mathbf{l}_x$ unter φ lautet $\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) = \varphi(\lambda \mathbf{p}^\circ + \mu \mathbf{p}^{\circ\circ}) = 2\lambda^2(x_0 - x_1)\varphi(\mathbf{p}) \sim \varphi(\mathbf{p}) = \mathbf{x}$, wobei man $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2$ verwendet. Die Geraden (3.22) werden *projizierende Geraden* von φ genannt. \square

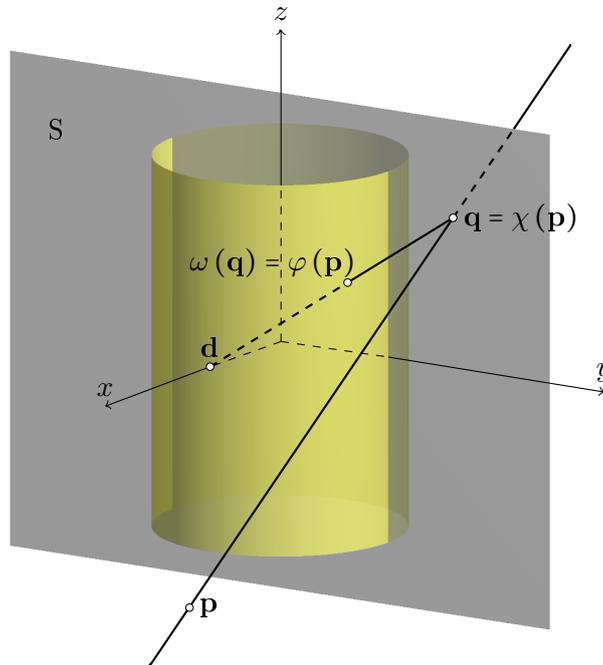


Abbildung 3.3: Verallgemeinerte stereografische Projektion auf den Kegel C .

Es ist nun wieder möglich, eine Aussage über die projizierenden Geraden der verallgemeinerten stereografischen Projektion φ , zu geben. Damit erhält man den ausständigen Typ von linearen Kongruenzen.

Satz 3.24 Die Menge der projizierenden Geraden der Abbildung χ bildet eine parabolische lineare Kongruenz.

Beweis. Wir betrachten die Plückerkoordinaten einer beliebigen projizierenden Geraden der Abbildung χ

$$\mathbf{L}_x = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ 0 \\ x_2 \\ x_0 + x_1 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Des Weiteren betrachten wir die Gerade

$$\mathbf{F}_1 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T. \quad (3.24)$$

Dabei ist \mathbf{F}_1 die Ferngerade der xz -Ebene und wird zum Beispiel von den Fernpunkten der x - beziehungsweise z -Achse aufgespannt. Jede projizierende Gerade mit Darstellung (3.22) schnei-

det die Gerade \mathbf{F}_1 . Diese ist eine doppelte Brenngerade einer parabolischen linearen Kongruenz, die von \mathbf{F}_1 und vom regulären Komplex $(0, 0, 1, 0, 1, -1)^T$ aufgespannt wird. \square

Als letztes wollen wir noch eine Aussage über die Urbilder der Kegelschnitte auf C , welche Dietz in [12] tätigt, geben. Der Zylinder besitzt nur Geraden und Ellipsen als Kegelschnitte.

Lemma 3.25 *Das Urbild einer erzeugenden Geraden von C unter der Abbildung φ (und somit das Urbild einer zur z -Achse parallelen Geraden in S unter χ), ist eine Ebene des projektiven Raumes, welche die Brenngerade der von φ zugehörigen linearen Kongruenz enthält. Das Urbild unter φ einer Ellipse von C (also das Urbild einer Geraden von S unter χ , die nicht parallel zur z -Achse verläuft bzw. einer Parabel in S , deren Achse parallel zur z -Achse verläuft) ist eine ringförmige Quadrik des projektiven Raumes, welche die Brenngerade des Netzes enthält.*

Beweis. Das Urbild eines Erzeugers von C unter ω ist klarerweise eine Gerade, in der yz -Ebene S , welche parallel zur z -Achse verläuft. Sei

$$\mathbf{h}_x : \alpha \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ x_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

eine zur z -Achse parallele Gerade in S . Diese schneidet die Brenngerade in einem Punkt. Das Urbild besteht laut Lemma 3.22 aus Geraden, die durch die Punkte von \mathbf{h}_x in Richtung $(0, -x_2, 0, x_0)^T$ verläuft. Diese Schar von Geraden beschreibt eine Ebene die parallel zur xz -Ebene verläuft und die Brenngerade von φ enthält.

Im zweiten Fall ist ähnlich, wie im zweiten Fall von Lemma 3.19, zu argumentieren. Es existiert eine Raumgerade l , welche auf die gegebene Ellipse von C abgebildet wird. Die Gerade l ist dabei windschief zur Brenngeraden von φ . Würde l die Brenngerade schneiden wäre das Bild unter χ eine Parabel in S , beziehungsweise unter φ eine Erzeugende von C . Wir haben ein System von projizierenden Geraden. Diese trifft die Gerade l , welche wiederum die Brenngerade nicht schneidet. Ein solches System bildet eine ringförmige Quadrik. \square

Im weiteren Verlauf werden allgemeine Aussagen und Konstruktionsverfahren für die verallgemeinerte stereografische Projektion hergeleitet. Dafür führen wir eine neue Bezeichnung ein. Eine jede reguläre Quadrik oder Kegelfläche Q kann mittels einer projektiven Abbildung $x \mapsto A \cdot x$ mit $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ aus der Einheitskugel U , dem hyperbolischen Paraboloid H oder dem Zylinder C hervorgehen. Mit ζ bezeichnen wir die Abbildung

- $\mathbf{y} \mapsto A \cdot \delta(\mathbf{y}) \in Q$,
- $\mathbf{y} \mapsto A \cdot \psi(\mathbf{y}) \in Q$ und
- $\mathbf{y} \mapsto A \cdot \varphi(\mathbf{y}) \in Q$

mit $\mathbf{y} \in \mathbb{P}^3$, je nachdem zu welcher Klasse Q gehört. Wir nennen diese, die *verallgemeinerte stereografische Projektion* auf die Quadrik Q .

3.4 Konstruktion von Kegelschnitten

Wenn man eine Ebene mit einer Quadrik schneidet, ergibt sich als Schnittmenge ein Kegelschnitt [34]. Es ist daher in vielerlei Anwendungen von Interesse, diese Kegelschnitte darzustellen. In

unserem Fall sollen sie mittels Bézier-Kurven dargestellt werden. Eine Vielzahl an Arbeiten ([16, 17, 23, 35, 29]) hat sich mit dem Thema der Darstellung von Kegelschnitten, mittels rationalen Bézier-Kurven, auseinandergesetzt. Die Konstruktionen und Beweise in diesen Arbeiten basieren jedoch meist auf der gewöhnlichen stereografischen Projektion σ . Einige Eigenschaften von σ wurden schon in diesem Kapitel erwähnt, weitere Betrachtungen zu σ folgen in Kapitel 4. Wir wollen die Konstruktion der Kegelschnitte mittels der verallgemeinerten stereografischen Projektion genauer betrachten. In den folgenden Kapiteln werden Konstruktionen verschiedener Flächen, mittels verallgemeinerter stereografischer Projektion, gezeigt. Für diese benötigen wir die Konstruktion von Kegelschnitten.

Man erhält einen regulären Kegelschnitt auf einer regulären Quadrik Q , indem man diese mit einer Ebene schneidet [34]. Der Kegelschnitt kann dabei zu einer Geraden oder einem Punkt ausarten, wenn es sich bei der Ebene um eine Tangentialebene handelt. Es wird im Folgenden, zuerst auf den allgemeinen und anschließend auf den Spezialfall der Geraden, eingegangen.

Eine Ebene können wir durch drei Punkte \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , und \mathbf{p}_2 eindeutig festlegen. Es sei angenommen, dass diese Punkte auf der regulären Quadrik Q liegen. Es soll nun eine rationale Bézier-Kurve konstruiert werden, die den Teil des Kegelschnittes beschreibt, der von \mathbf{p}_0 nach \mathbf{p}_2 über \mathbf{p}_1 verläuft.

In einem ersten Schritt werden die Urbilder der Punkte \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 unter der verallgemeinerten stereografischen Projektion ζ betrachten. Die drei projizierenden Geraden $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_0)$, $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_1)$ und $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_2)$ sind laut Lemma 3.10 oder 3.19, Erzeugende einer Ringquadrik R . Wenn man nun eine der konjugierten Erzeugenden der Ringquadrik R hätte, würde diese mittels der Abbildung ζ auf den gewünschten Kegelschnitt abgebildet werden. Es muss also eine lineare Bézier-Kurve

$$\mathbf{y}(t) = (1-t)\mathbf{c}_0 + t\mathbf{c}_1, \quad t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad (3.26)$$

mit Kontrollpunkten $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1 \in \mathbb{P}^3$ gefunden werden, sodass $\zeta(\mathbf{y}(t))$ das gewünschte Kegelschnittsegment beschreibt.

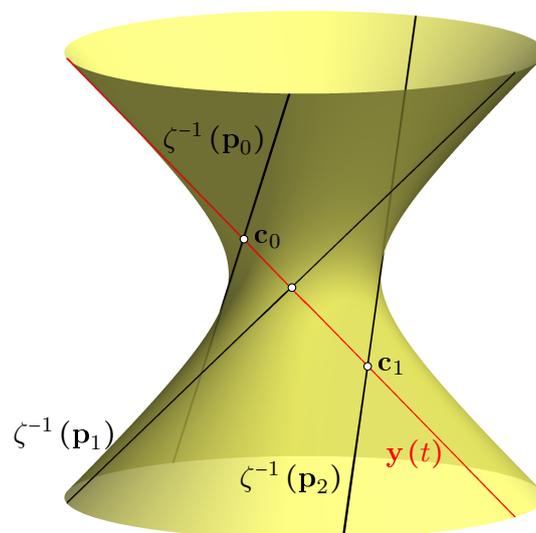


Abbildung 3.4: Urbild des Äquators der Einheitskugel unter δ und Beispiel einer gebrochen linearen Bézier-Kurve $\mathbf{y}(t)$, welche drei projizierende Geraden auf dem Urbild schneidet.

Der Vorgang ist nun folgendermaßen aufgebaut. Der Kontrollpunkt $\mathbf{c}_0 \in \zeta^{-1}(\mathbf{p}_0)$ ist beliebig

wählbar. Den zweiten Kontrollpunkt \mathbf{c}_1 erhält man, indem die Ebene $\hat{\mathbf{v}}$, die vom Punkt \mathbf{c}_0 und der Geraden $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_1)$ aufgespannt wird, mit der Geraden $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_2)$ geschnitten wird. Die Geraden $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_0)$, $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_1)$ und $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_2)$ können einerseits durch die beiden Punkte \mathbf{r}_i , \mathbf{s}_i , $i = 0, 1, 2$ aus Lemma 3.8 beziehungsweise Lemma 3.17 aufgespannt werden. Andererseits können sie als Schnitt der Ebenen in (3.7) beziehungsweise in (3.16), welche wir hier mit $\hat{\mathbf{r}}_i$, $\hat{\mathbf{s}}_i$, $i = 0, 1, 2$ bezeichnen, dargestellt werden.

Im Fall der ovalen Quadrik konnten die Autoren in [15], mit den aufeinander orthogonalen Koordinatenvektoren

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^\perp = \begin{pmatrix} -r_3 \\ r_2 \\ -r_1 \\ r_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \\ -r_0 \\ -r_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{r}}^\perp = \begin{pmatrix} -r_2 \\ -r_3 \\ r_0 \\ r_1 \end{pmatrix},$$

wobei \mathbf{r} ein beliebiger Punkt auf der projizierenden Gerade sei, eine einfache Darstellungsmöglichkeit für die Ebene $\hat{\mathbf{v}}$

$$\hat{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{c}_0, \hat{\mathbf{r}}_1 \rangle \hat{\mathbf{r}}_1^\perp - \langle \mathbf{c}_0, \hat{\mathbf{r}}_1^\perp \rangle \hat{\mathbf{r}}_1 \quad (3.27)$$

und des zweiten Kontrollpunktes \mathbf{c}_1 der gebrochen linearen Bézier-Kurve $\mathbf{y}(t)$

$$\mathbf{c}_1 = \langle \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{r}}_2 \rangle \hat{\mathbf{r}}_2^\perp - \langle \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{r}}_2^\perp \rangle \hat{\mathbf{r}}_2, \quad (3.28)$$

geben. Im allgemeinen Fall kann die Ebene $\hat{\mathbf{v}}$, mittels den Punkten \mathbf{c}_0 , \mathbf{r}_1 , \mathbf{s}_1 und der Formel (2.1), berechnet werden. Um den Schnittpunkt der Ebene $\hat{\mathbf{v}}$ mit der projizierenden Geraden $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_2)$

$$\hat{\mathbf{v}} \cap \zeta^{-1}(\mathbf{p}_2) = \alpha \mathbf{r}_2 + \beta \mathbf{s}_2 \quad (3.29)$$

zu berechnen, verwenden wir die Inzidenzbedingung. Wir erhalten für α und β , dass diese im Verhältnis

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{r}_2}{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{s}_2}. \quad (3.30)$$

stehen müssen.

Um als Bild der gebrochen linearen Bézier-Kurve unter ζ eine rationale quadratische Bézier-Kurve in Standardform zu erhalten, müssen die Gewichte der beiden Kontrollpunkte \mathbf{c}_0 und \mathbf{c}_1 noch angepasst werden. Im Fall der Einheitskugel müssen die Kontrollpunkte zum Beispiel auf 1 normiert werden.

Würden zur Berechnung von $\hat{\mathbf{v}}$ und \mathbf{c}_1 die Berechnungsmethoden aus (3.27) und (3.28) verwendet, dann ist damit gewährleistet, dass die rationale lineare Bézier-Kurve die projizierende Gerade $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_1)$ im Intervall $[0, 1]$ schneidet. Wenn zur Berechnung der Kontrollpunkte eine andere Methode gewählt wurde, kann es vorkommen, dass $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_1)$ von $\mathbf{y}(t)$ nicht im Intervall $[0, 1]$ geschnitten wird und somit die rationale quadratische Bézier-Kurve $\zeta(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{x}(t)$ den Punkt \mathbf{p}_1 ebenfalls nicht im Intervall $[0, 1]$ durchläuft. Dann wäre es nötig zum komplementären Segment überzugehen indem der Kontrollpunkt \mathbf{c}_1 mit -1 multipliziert wird. Wir würden die rationale lineare Bézier-Kurve $\mathbf{y}(t) = t\mathbf{c}_0 - (1-t)\mathbf{c}_1$ mit $t \in [0, 1]$ erhalten.

Es stellt sich noch die Frage wie man überprüfen soll, ob der Punkt \mathbf{p}_1 für $t \in (0, 1)$ auf der quadratischen Bézier-Kurve $\mathbf{x}(t)$ liegt. Dazu kontrolliert man, ob die gebrochen lineare Bézier-Kurve $\mathbf{y}(t)$ die projizierende Gerade $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_1)$ für $t \in (0, 1)$ interpoliert. Zur Überprüfung nimmt man die Ebene $\hat{\mathbf{r}}_1$ mit $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_1) \subset \hat{\mathbf{r}}_1$, wobei man $\hat{\mathbf{r}}_1$ über (3.7) bzw. (3.16) erhält. Ersteres verwendet man für ovale Quadriken, Zweiteres für ringförmige. Es wird dabei angenommen, dass sowohl \mathbf{c}_0 als auch \mathbf{c}_1 nicht in der Ebene $\hat{\mathbf{r}}_1$ enthalten sind. Es gilt nun zu testen, ob die Punkte \mathbf{c}_0 und \mathbf{c}_1 auf jeweils unterschiedlichen Seiten bezüglich der Ebene $\hat{\mathbf{r}}_1$ liegen. Dann verläuft $\mathbf{x}(t)$ im Intervall $[0, 1]$ durch den Punkt \mathbf{p}_1 , sofern

$$\langle \hat{\mathbf{r}}_1, \mathbf{c}_0 \rangle \langle \hat{\mathbf{r}}_1, \mathbf{c}_1 \rangle < 0$$

erfüllt ist.

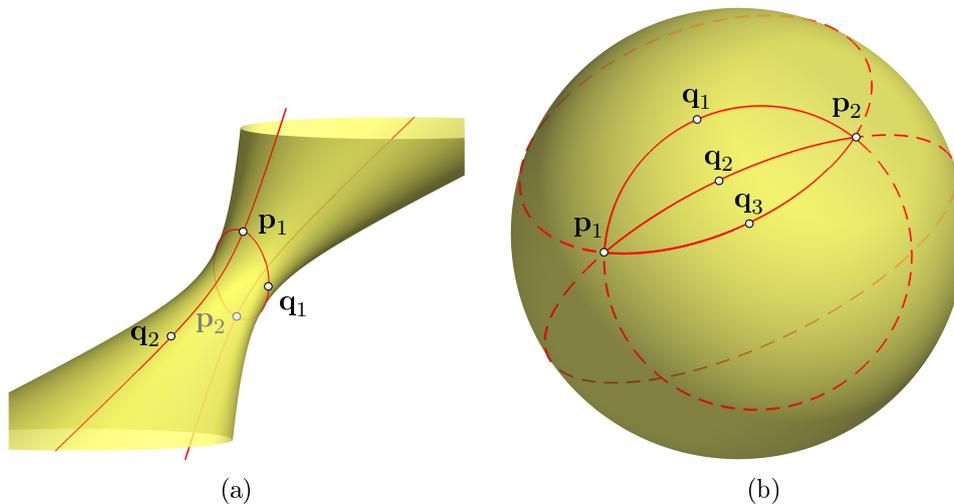


Abbildung 3.5: (a) Hyperboloid auf der zwei Kegelschnitte gegeben sind, wobei diese von \mathbf{p}_1 nach \mathbf{p}_2 , über \mathbf{q}_1 und einmal über \mathbf{q}_2 verlaufen. (b) Kegelschnittsegmente auf der Kugel welche \mathbf{p}_1 mit \mathbf{p}_2 , wobei diese zusätzlich durch \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 , beziehungsweise durch \mathbf{q}_3 verlaufen. Zusätzlich sind die komplementären Segmente strichliert dargestellt.

Damit ist es uns möglich, ein Kegelschnittsegment auf einer Quadrik zu konstruieren, das durch drei vorgegebene Punkte verläuft. Auf einer ringförmigen Quadrik Q kann der Schnitt mit einer Ebene zu zwei Geraden entarten, welche dann Erzeugende der Ringquadrik darstellen. Die Frage die sich nun stellt ist, wie man eine solche Erzeugende als Bild einer gebrochen linearen Bézier-Kurve unter ζ erhalten kann. Nach Lemma 3.19 ist das Urbild einer Erzeugenden unter ζ eine Ebene, die eine der Brenngeraden enthält. Wählt man nun eine Gerade l , welche ungleich der projizierenden Gerade dieser Ebene ist, so wird diese mittels ζ auf die Erzeugende abgebildet. Die gebrochen lineare Bézier-Darstellung der Geraden l wird mittels ζ auf eine rationale quadratische Bézier-Kurve abgebildet. Da diese Darstellung einen Basispunkt aufweist, ist sie graderhöht. Der Schnittpunkt der Gerade l mit der Brenngerade wird unter ζ auf diesen Basispunkt abgebildet. Man erhält somit eine gebrochen lineare Parametrisierung.

Wenn $\mathbf{x}(t)$ den Basispunkt für den Parameterwert ∞ durchlaufen soll, dann muss für $\mathbf{y}(t)$, welche mittels ζ auf $\mathbf{x}(t)$ abgebildet wird, der äußere Gewichtspunkt \mathbf{w}_i auf eine Brenngerade von ζ gelegt werden.

Dreiecks-Bézier-Flächen

Wir wollen uns in diesem Kapitel mit Flächenstücken auf Quadriken über dreieckigem Parametergebiet befassen. Dazu betrachten wir rationale quadratische Dreiecks-Bézier-Flächen

$$\mathbf{x}(u, v, w) = \sum_{\substack{i+j+k=2 \\ i,j,k \geq 0}} \mathbf{b}_{ijk} B_{ijk}^2(u, v, w) \quad \text{mit } u + v + w = 1, \text{ und } u, v, w \geq 0, \quad (4.1)$$

wobei die B_{ijk}^2 wie in (2.19) definiert sind. Die \mathbf{b}_{ijk} sind dabei homogene Koordinatenvektoren des \mathbb{P}^3 . Das dadurch erhaltene Flächenstück ist von drei Randkurven, welche Segmente von Kegelschnitten sind, berandet. Diese Kegelschnitte werden wir als *Randkegelschnitte* bezeichnen. Im Gegensatz zum Fall der rationalen quadratischen Kurven, die stets einen Kegelschnitt beschreiben, erzeugen rationale Dreiecks-Bézier-Flächen vom Grad 2 im Allgemeinen algebraische Flächen vierter Ordnung, die sogenannten *Steinerschen Flächen* [33].

Eine rationale quadratische Dreiecks-Bézier-Fläche ist durch seine Randkegelschnitte eindeutig bestimmt. Der Grund ist, dass sich alle sechs Kontrollpunkte des Flächenstückes auf dem Rand des Kontrollnetzes befinden und dieses somit eindeutig festlegen.

Soll (4.1) eine Parametrisierung einer Quadrik beschreiben, so können die Kontrollpunkte und somit die Randkegelschnitte nicht beliebig gewählt werden, sondern müssen bestimmte Bedingungen erfüllen. In einer Vielzahl von Arbeiten wurden Bedingungen formuliert, die Aussagen darüber treffen, wann eine Dreiecks-Bézier-Fläche vom Grad 2 auf einer Quadrik liegt [5, 12, 29, 33, 35]. Eine notwendige Bedingung die in jeder dieser Arbeiten vorkommt ist, dass die Randkegelschnitte einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Wir geben im Folgenden einen auf [12] basierenden Satz an, der sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingungen darüber liefert, ob eine rationale quadratische Dreiecks-Bézier-Fläche auf einer regulären Quadrik liegt. Aufbauend auf diesem Satz und der Konstruktion von Kegelschnitten aus Abschnitt 3.4 geben wir das Konstruktionsverfahren, welches Dietz, Hoschek und Jüttler in [14] entwickelt haben, an.

Zwei Kegelschnitte auf einer Quadrik Q , die sich in einem Punkt \mathbf{p} schneiden, besitzen zwangsläufig einen weiteren Schnittpunkt \mathbf{q} . Diesen bezeichnen wir als *sekundären Schnittpunkt*. Falls die beiden Kegelschnitte im Schnittpunkt \mathbf{p} dieselbe Tangente aufweisen, fallen die beiden Schnittpunkte zusammen. Wenn der Fall des doppelt zu zählenden Schnittpunktes nicht auftritt, zerfällt der Kegelschnitt in zwei Segmente.

Definition 4.1 *Es seien drei paarweise verschiedene Punkte $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ und \mathbf{p}_3 auf einer Quadrik Q gegeben. Wir bezeichnen mit $k_{i,j}$, $(i,j) \in \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$ den Kegelschnitt, der durch \mathbf{p}_i und \mathbf{p}_j verläuft. Ein Kegelschnitt $k_{i,j}$ wird als regulär bezeichnet, wenn er den dritten Punkt nicht enthält und nicht zerfallend ist, also aus keinem Geradenpaar besteht. Eine Dreiecks-Bézier-Fläche vom Grad 2 wird als regulär bezeichnet, wenn ihre drei Randkegelschnitte regulär sind.*

Nun können wir eine sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung für die Existenz von Dreiecks-Bézier-Flächen auf regulären Quadriken angeben. Diese werden von Dietz in [12] zum folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 4.2 *Ein reguläres Dreiecks-Flächenstück $\mathbf{x}(u,v,w)$ vom Grad 2, kurz \mathbf{x} genannt, liegt auf einer regulären Quadrik Q genau dann, wenn die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:*

- *Drei Randkegelschnitte auf Q schneiden sich in einem Punkt $\mathbf{q} \in Q$.*
- *Die Anzahl der Randsegmente, die durch \mathbf{z} verlaufen, beträgt 0 oder 2.*

Beweis. (\Rightarrow) : Es sei ein reguläres Dreiecks-Bézier-Flächenstück \mathbf{x} auf Q gegeben. Jede der Randkurven von \mathbf{x} ist ein regulärer Kegelschnitt. Daher ist das Urbild unter ζ einer jeden Randkurve, laut Lemma 3.10 bzw. Lemma 3.19, eine ringförmige Quadrik. Die konjugierten Erzeugenden einer solchen Urbildquadrik unter ζ werden auf den entsprechenden Randkegelschnitt von \mathbf{x} abgebildet.

Das Flächenstück \mathbf{x} ist das Bild einer linearen Dreiecksfläche \mathbf{y} unter ζ . Jede Randgerade von \mathbf{y} ist dabei eine konjugierte Erzeugende von einer Urbildquadrik der Ränder von \mathbf{x} . Die drei Eckpunkte von \mathbf{y} spannen eine Ebene $\hat{\mathbf{v}}$, die \mathbf{y} enthält, auf. Die Ebene $\hat{\mathbf{v}}$ enthält jedoch keine Brenngerade, da sonst $\hat{\mathbf{v}}$ auf eine Erzeugende von Q abgebildet werden würde. Jede Ebene, die keine Brenngerade enthält, besitzt genau eine projizierende Gerade $\zeta^{-1}(\mathbf{z})$. Alle Parameterlinien von \mathbf{y} müssen somit zwangsläufig $\zeta^{-1}(\mathbf{z})$ schneiden und daher verlaufen alle Parameterlinien von $\zeta(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$ durch \mathbf{z} . Jede Gerade, welche die projizierende Gerade $\zeta^{-1}(\mathbf{z})$ in einem Brennpunkt schneidet, wird auf eine Erzeugende von Q abgebildet. Da jedoch alle Ränder von \mathbf{x} als regulär vorausgesetzt wurden, kann dieser Fall nicht eintreffen.

Die projizierende Gerade $\zeta^{-1}(\mathbf{z})$ in $\hat{\mathbf{v}}$ trifft \mathbf{y} in zwei oder keinem Randsegment. Der Fall dass $\zeta^{-1}(\mathbf{z})$ durch einen Eckpunkt von \mathbf{y} verläuft, kann aufgrund der Regularität von \mathbf{x} nicht eintreffen.

(\Leftarrow) : Es sei ein Flächenstück \mathbf{x} gegeben, das die geforderten Bedingungen erfüllt. Wir wollen mittels ζ ein Flächenstück $\tilde{\mathbf{x}}$ konstruieren, welches dieselben Randkurven wie \mathbf{x} aufweist. Es wird dazu eine Ebene $\hat{\mathbf{v}}$, die $\zeta^{-1}(\mathbf{z})$ aber keine der Brenngeraden enthält, gewählt. In einer jeden solchen Ebene gibt es nun Geraden, die mittels ζ auf den geforderten Kegelschnitt abgebildet werden. Man kann daher eine lineare Dreiecksfläche $\tilde{\mathbf{y}}$ generieren, die mittels ζ auf $\tilde{\mathbf{x}}$ abgebildet wird. Die Gleichheit von \mathbf{x} und $\tilde{\mathbf{x}}$ ergibt sich aus der Tatsache, dass eine Dreiecks-Bézier-Fläche vom Grad 2 durch ihre Randkurven eindeutig bestimmt ist. \square

Wie aus Satz 4.2 zu entnehmen ist, liegen nicht alle Kegelschnittkonfigurationen auf der Quadrik. Von den acht Möglichkeiten gilt genau für vier, dass diese auch auf der Quadrik liegen. Es sei ein Dreiecks-Bézier-Flächenstück mit der Darstellung (4.1) gegeben. Die Gewichte der Eckpunkte seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich 1. Wir gelangen zu einer der anderen

acht Kegelschnittkonfigurationen, indem bei einem der Randkegelschnitte das Vorzeichen des mittleren Kontrollpunktes umgedreht wird.

Man geht dabei, wie bei den rationalen quadratischen Kurven, zum komplementären Segment eines Kegelschnittes über. Die Fläche, die von dem neuen Randkegelschnittsegment sowie den beiden unveränderten Segmenten beschrieben wird, liegt jedoch nicht mehr auf der Quadrik Q . Erst durch Übergang zum komplementären Kegelschnittsegment bei einem weiteren Randkegelschnitt, liegt die Fläche, welche durch die Kontrollpunkte der Kegelschnitte bestimmt ist, wieder auf der Quadrik Q . Die Abbildung 4.2 zeigt als Beispiel die weiteren drei Randsegmentkonfigurationen, die mittels dem Dreiecks-Bézier-Flächenstück aus Abbildung 4.1 gewonnen wurden.

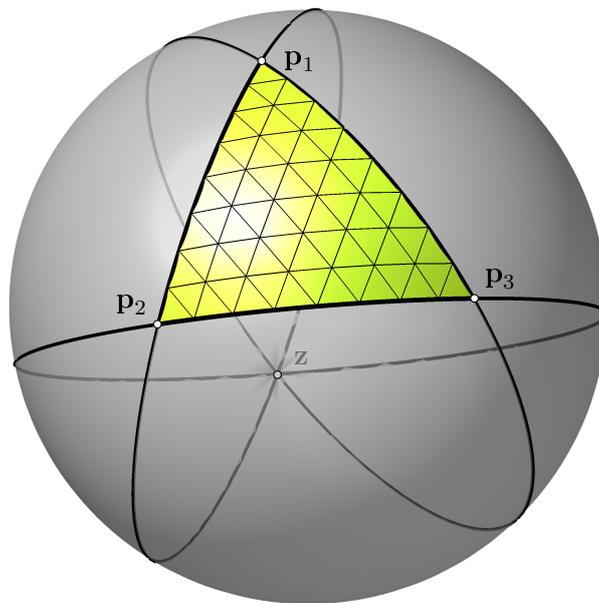


Abbildung 4.1: Dreiecks-Bézier-Fläche vom Grad 2 auf der Sphäre.

Im Fall, dass es sich bei der Quadrik um eine Kugel handelt und das Flächenstück auf dieser keines der Randsegmente durch den sekundären Schnittpunkt enthält, kann eine Bedingung mittels der Öffnungswinkel der drei Ecken gegeben werden. Der Öffnungswinkel wird in [12] folgendermaßen definiert.

Definition 4.3 *Der Öffnungswinkel einer Ecke eines Bézier-Flächenstückes sei der spitze Winkel, der von den Tangenten der beiden Randkurven, die sich in dieser Ecke treffen, eingeschlossen wird.*

Nun können wir eine Möglichkeit angeben, ob eine Fläche $\mathbf{x}(u, v, w)$ auf der Kugel liegt. Dies ist genau der Fall, wenn die Summe der drei Öffnungswinkel der Ecken π ergeben. Die Aussage ist einfach mit Hilfe der stereografischen Projektion und ihrer Eigenschaft der Winkeltreue zu zeigen. Man wähle eine Projektionsebene $\hat{\mathbf{v}}$ und als Projektionszentrum einen der drei sekundären Schnittpunkte. Die beiden Kegelschnitte durch den sekundären Schnittpunkt werden auf Geraden abgebildet. Der dritte Kegelschnitt wird aufgrund der Kreistreue entweder auf einen Kreis oder eine Gerade abgebildet. Der Fall, dass der Kegelschnitt auf eine Gerade abgebildet wird, tritt genau dann ein, wenn auch der dritte Kegelschnitt durch den sekundären Schnittpunkt, der als Projektionszentrum gewählt wurde, verläuft. Es ergibt sich in der Ebene $\hat{\mathbf{v}}$ dann ein Dreieck,

welches die Innenwinkelsumme π besitzt. Da die stereografische Projektion winkeltreu ist, gilt für die Innenwinkelsumme des Dreiecks-Bézier-Flächenstück dieselbe Innenwinkelsumme.

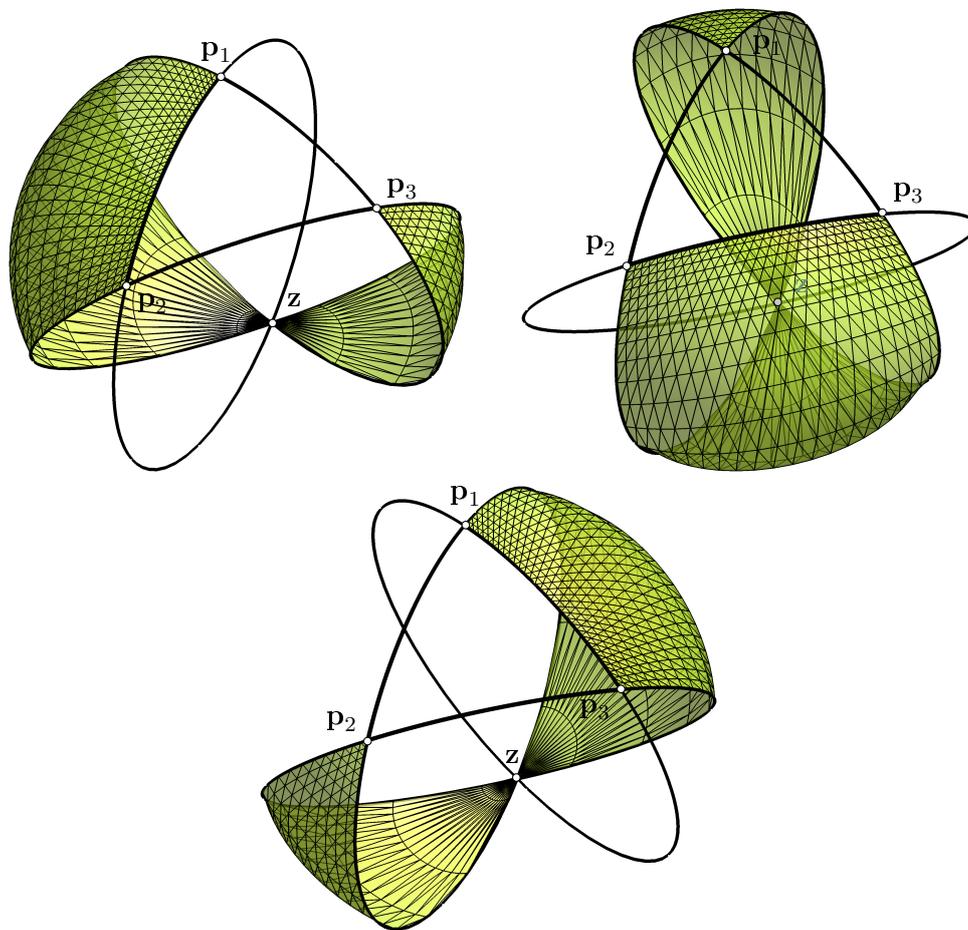


Abbildung 4.2: Die restlichen drei Möglichkeiten der Randsegmentkonfiguration zu den Punkten aus Abbildung 4.1.

4.1 Zusammenhang der Dreiecks-Bézier-Flächen mit der stereografischen Projektion

Hansford und Boehm geben als notwendige Bedingung in [5] an, dass alle Randkegelschnitte einen gemeinsamen Punkt besitzen müssen, die drei Tangenten im gemeinsamen Punkt müssen koplanar sein und der gemeinsame Punkt muss dreimal mit dem Parameterwert ∞ zusammenfallen. Die Eigenschaft des gemeinsamen Punktes bei Dreiecks-Bézier-Flächenstücken vom Grad 2 wird von Teller und Sequin in [35] damit begründet, dass ein jedes solches Flächenstück mittels einer geeigneten stereografischen Projektion eines linear gebrochenen ebenen Dreiecks erzeugt werden kann.

Die Gleichung (4.1) kann auch als rationale quadratische Abbildung der uvw -Parameterebene ϵ auf eine reguläre Quadrik Q interpretiert werden und somit als stereografische Projektion π , beachte Bemerkung 3.6.

Die stereografische Projektion ist durch ihr Projektionszentrum $\mathbf{z} \in Q$, sowie ihre beiden Fundamentalpunkte (auch Basispunkte genannt) \mathbf{a} und \mathbf{b} in der Ebene ϵ , welche den Punkt \mathbf{z} nicht enthält, eindeutig bestimmt. Die Verbindungsgerade der Punkte \mathbf{a} und \mathbf{b} wird als *Fundamentalgerade* bezeichnet. Diese erhält man als Schnittgerade der Parameterebene ϵ mit der Tangentialebene $T_{\mathbf{z}}$ des Punktes \mathbf{z} an die reguläre Quadrik Q . Die Tangentialebene $T_{\mathbf{z}}$ schneidet eine reguläre Quadrik Q in einem zerfallenden Kegelschnitt. Dieser besteht aus einem Geradenpaar, wobei die beiden Geraden Erzeuger durch den Punkt \mathbf{z} sind. Im Fall ovaler Quadriken sind die beiden Erzeuger imaginär, im Fall ringartiger Quadriken sind die beiden Erzeuger reell. Die Schnittpunkte dieser Erzeugenden mit der Ebene ϵ sind die beiden Punkte \mathbf{a} und \mathbf{b} . Ein Beispiel ist in Abbildung 4.3a gegeben.

Jede Gerade, die von \mathbf{z} und einem Punkt $\mathbf{q} \in \epsilon$ aufgespannt wird und nicht in der Tangentialebene $T_{\mathbf{z}}$ liegt, besitzt einen weiteren Schnittpunkt \mathbf{p} mit der Quadrik Q . Wir nennen \mathbf{p} das Bild von \mathbf{q} unter der stereografischen Projektion.

Es kann damit jedem Punkt $\mathbf{q} \in \epsilon$, außerhalb der Fundamentalgeraden, ein eindeutiges Bild auf der regulären Quadrik zugeordnet werden. Die beiden Basispunkte \mathbf{a} und \mathbf{b} besitzen jedoch alle Punkte der beiden Erzeugenden, außerhalb von \mathbf{z} , als Bild. Die restlichen Punkte der Fundamentalgerade besitzen zuerst kein Bild, sowie \mathbf{z} kein Urbild unter der stereografischen Projektion. Wenn man diese Punkte einander zuordnet, ergibt sich eine, bis auf die Ausnahmen \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{z} , eindeutige Abbildung.

Für den Fall der Kegelflächen zeigt Niebuhr in [29], dass es zwischen den stereografischen Projektionen auf die Kegelfläche und den Dreiecks-Bézier-Flächen, bei denen die drei Randkegelschnitte durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen, einen ähnlichen Zusammenhang gibt.

Die Tangentialebene durch das Projektionszentrum \mathbf{z} schneidet die Kegelfläche in einer Doppelgerade, dem zusammenfallenden Erzeugendenpaar in \mathbf{z} . Diese Doppelgerade schneidet die Projektionsebene ϵ in einem Fundamentalpunkt \mathbf{c} , welcher doppelt zu zählen ist. Die Fundamentalgerade ist jene Gerade, welche in der Projektionsebene ϵ liegt und die Kegelfläche im Punkt \mathbf{c} berührt. Ein Beispiel ist in Abbildung 4.3b gegeben.

Die stereografischen Projektionen auf Quadriken unterscheidet sich somit nicht durch das Vorhandensein der Fundamentalgerade, sondern durch die Eigenschaft der Fundamentalpunkte auf dieser. Dies führt zu dem in [29] getätigten Satz.

Satz 4.4 *Eine rationale quadratische Dreiecks-Bézier-Fläche beschreibt genau dann eine stereografische Projektion einer*

- *ovalen Quadrik,*
- *ringförmigen Quadrik oder*
- *Kegelfläche,*

wenn eine Fundamentalgerade in der Parameterebene existiert, auf der

- *zwei konjugiert komplexe Fundamentalpunkte oder*
- *zwei reelle Fundamentalpunkte liegen, oder*
- *ein doppelt zu zählender Fundamentalpunkt*

liegt.

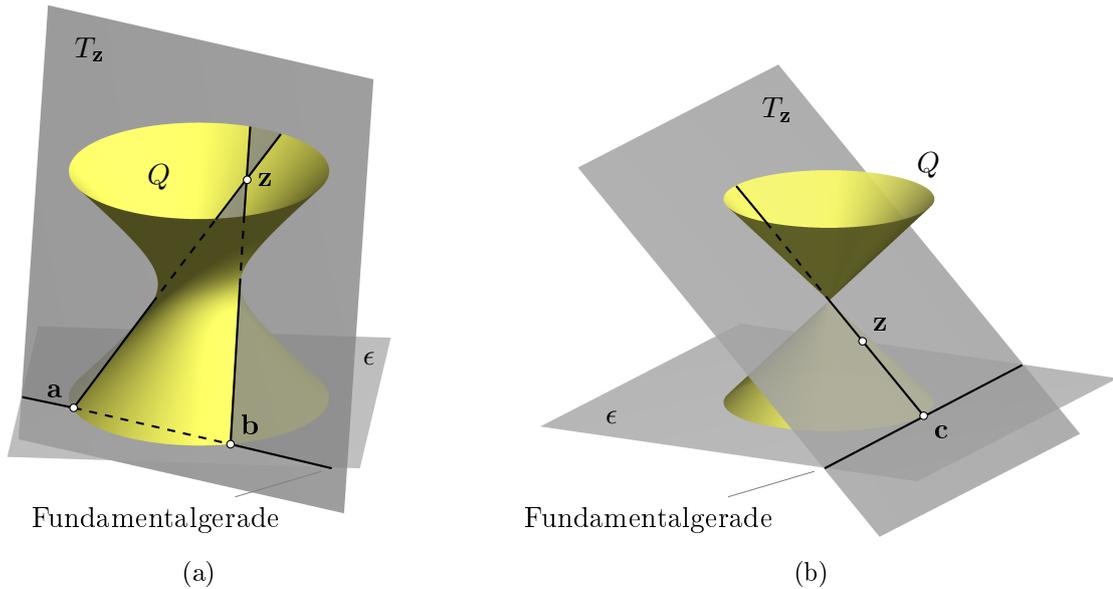


Abbildung 4.3: (a) Die stereografische Projektion einer regulären Fläche vom Grad 2. (b) Die stereografische Projektion einer Kegelfläche.

Bemerkung 4.5 Die Forderung in [5], dass der gemeinsame Punkt z der Randkegelschnitte jeweils für den Wert ∞ angenommen wird, ist gleichbedeutend mit der Tatsache, dass die Fundamentalgerade der zugehörigen stereografischen Projektion, gleich mit der Ferngeraden der Parameterebene zusammenfällt.

Ein Konstruktionsverfahren, dass zu einer gegebenen Dreiecks-Bézier-Fläche vom Grad 2, welche eine Quadrik beschreibt, eine stereografische Projektion konstruiert und umgekehrt, wurde von Teller und Sequin in [35] angegeben.

4.2 Dreiecks-Bézier-Flächen auf nicht regulären Quadriken

Niebuhr zeigt in [29], dass auf Kegelflächen Dreiecks-Bézier-Flächen vom Grad 2 existieren, bei welchen die Randkurven nicht durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen. Durch die Vorgabe eines gemeinsamen Punktes, wie zum Beispiel im Satz 4.2, erlangt man zwar eine eindeutige Parametrisierung, diese wird jedoch durch eine geringe Flexibilität der Randkurven der Dreiecks-Bézier-Fläche erkauft. Bei Kegelflächen kann auf die Eigenschaft des gemeinsamen Punktes der Randkegelschnitte verzichtet werden. Der Preis für die höhere Flexibilität der Randkurven ist jedoch der Verlust der Eindeutigkeit der Abbildung. Niebuhr konnte in [29] sogar zeigen, dass zu drei beliebig vorgegebenen ebenen Randkurven auf einer Kegelfläche eine passende Dreiecks-Bézier-Fläche vom Grad 2 existiert. Ein Beispiel eines Dreiecks-Bézier-Flächenstücks vom Grad 2, mit beliebig vorgegebenen Randkegelschnitten, ist in Abbildung 4.4a zu sehen.

Bei den Untersuchungen der Dreiecks-Bézier-Flächen vom Grad 2 in [29], welche keinen gemeinsamen Schnittpunkt der Randkurven besitzen, konnten folgende Eigenschaften gezeigt werden:

- Es sei $\mathbf{m} \in \mathbb{P}^2$ ein Punkt in der Parameterebene, welcher mittels der durch (4.1) definierten rationalen quadratischen Abbildung, auf die Kegelspitze abgebildet wird. Die Geraden des

Büschels mit dem Träger \mathbf{m} werden auf Mantellinienabschnitte, welche durch die Kegelspitze und einen Grenzkegelschnitt K begrenzt sind, abgebildet.

- Das Bild jeder Geraden in der Parameterebene, die den Punkt \mathbf{m} nicht enthält, wird auf einen Kegelschnitt abgebildet. Dieser berührt den Grenzkegelschnitt K .
- Der mittels (4.1) dargestellte Bereich der Kegelfläche wird doppelt überdeckt. Grund für die nicht eindeutige Parametrisierung ist, dass im Gegensatz zu den Flächenstücken, die von einer stereografischen Projektion induziert werden, hier keine Basispunkte vorhanden sind. Deshalb werden diese Flächen in [29] auch als *Kegelflächen ohne Fundamentaldoppelpunkt* bezeichnet.

Bevor wir später ein Konstruktionsverfahren für Dreiecks-Bézier-Flächenstücke, basierend auf der verallgemeinerten stereografischen Projektion angeben werden, wird vorher ein weiteres Verfahren, welches in [29] angegeben wurde, vorgestellt. Das Verfahren kann sowohl rationale quadratische Dreiecks-Bézier-Flächen auf Kegelflächen, ohne gemeinsamen Punkt der Randkurven, als auch rationale Dreiecks-Bézier-Flächen vom Grad 2 auf regulären Quadriken erzeugen. Das Verfahren basiert auf dem folgenden

Satz 4.6 Sei $\mathbf{x}(u, v, w)$ ein rationales Dreiecks-Bézier-Flächenstück vom Grad 2 mit

$$\mathbf{x}(u, v, w) = \sum_{\substack{i+j+k=2 \\ i,j,k \geq 0}} b_{ijk} B_{ijk}^2(u, v, w) \quad u + v + w = 1. \quad u, v, w \geq 0.$$

Die Fläche $\mathbf{x}(u, v, w)$ liegt genau dann auf der Quadrik Q , wenn folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{002}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{002} &= 0 \\ \mathbf{b}_{020}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{020} &= 0 \\ \mathbf{b}_{200}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{200} &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{011}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{002} &= 0, & \mathbf{b}_{011}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{020} &= 0 \\ \mathbf{b}_{101}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{200} &= 0, & \mathbf{b}_{101}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{002} &= 0 \\ \mathbf{b}_{110}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{200} &= 0, & \mathbf{b}_{110}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{020} &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{002}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{200} + 2\mathbf{b}_{101}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{101} &= 0 \\ \mathbf{b}_{002}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{020} + 2\mathbf{b}_{011}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{011} &= 0 \\ \mathbf{b}_{200}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{020} + 2\mathbf{b}_{110}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{110} &= 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{002}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{110} + 2\mathbf{b}_{101}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{011} &= 0 \\ \mathbf{b}_{020}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{101} + 2\mathbf{b}_{110}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{011} &= 0 \\ \mathbf{b}_{200}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{011} + 2\mathbf{b}_{110}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{101} &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Beweis. Damit die Fläche $\mathbf{x}(u, v, w)$ auf der Quadrik liegt, muss die Inzidenzbedingung

$$\mathbf{x}(u, v, w)^T \cdot Q \cdot \mathbf{x}(u, v, w) = 0$$

erfüllt sein. Unter der Verwendung der Bilinearität und der Unabhängigkeit der auftretenden Bernsteinpolynome, erhält man die oben genannten Bedingungen. \square

Die Bedingungen in Satz 4.6 besitzen ebenfalls eine geometrische Interpretation. Die Gleichungen (4.2) bedeuten, dass die drei Eckpunkte \mathbf{b}_{002} , \mathbf{b}_{020} und \mathbf{b}_{200} auf der Quadrik liegen müssen. Die in (4.3) gegebenen Bedingungen sagen aus, dass die mittleren Kontrollpunkte \mathbf{b}_{011} , \mathbf{b}_{101} und \mathbf{b}_{110} auf den Schnittgeraden der Tangentialebenen der beiden Eckpunkte \mathbf{b}_{002} und \mathbf{b}_{020} , \mathbf{b}_{200} und \mathbf{b}_{002} sowie \mathbf{b}_{200} und \mathbf{b}_{020} liegen müssen.

Die Bedingungen in (4.4) sind dann zusätzlich zu den Gleichungen in (4.2) und (4.3) erfüllt, wenn alle drei Randkurven von $\mathbf{x}(u, v, w)$ auf der Quadrik Q liegen.

Die Voraussetzungen im (4.5) sind zusätzlich zu den Gleichungen (4.2), (4.3) und (4.4) erfüllt, wenn die rationale Dreiecks-Bézier-Fläche gänzlich auf der Quadrik liegt. Im Fall, dass es sich bei der Quadrik Q um eine reguläre rationale Fläche zweiter Ordnung handelt, sichert (4.5) die Existenz des gemeinsamen Schnittpunktes der Randkegelschnitte.

Wir können nun, basierend auf dem Satz 4.6, einen Algorithmus angeben, der Dreiecks-Bézier-Flächen vom Grad 2 auf Quadriken erzeugt.

- Dazu wählt man die drei Eckpunkte \mathbf{b}_{002} , \mathbf{b}_{020} und \mathbf{b}_{200} der rationalen Dreiecks-Bézier-Fläche auf der Quadrik Q . Diese erfüllen dann die Gleichungen (4.2). Alle Gewichte der Eckpunkte können ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf 1 gesetzt werden.
- Zwei der drei mittleren Kontrollpunkte können auf der jeweiligen Schnittgerade der beiden Tangentialebenen beliebig gewählt werden und erfüllen somit zwei Gleichungen in (4.3).
- Man berechnet für die beiden ausgewählten mittleren Kontrollpunkte, die zugehörigen Gewichte mittels den passenden Gleichungen in (4.4).
- Um den noch nicht berechneten dritten mittleren Kontrollpunkt zu bestimmen, muss man zwischen zwei Fällen unterscheiden.
 1. Die Quadrik beschreibt eine reguläre Fläche zweiter Ordnung.
In diesem Fall muss der dritte mittlere Kontrollpunkt so gewählt werden, dass die Existenz des Projektionszentrums gewährleistet wird. Es muss daher, zu der noch nicht verwendeten Bedingung aus (4.3), zusätzlich eine Bedingung aus (4.5) hinzugenommen werden.
 2. Die Quadrik beschreibt eine Kegelfläche.
Der dritte mittlere Punkt besitzt keine weiteren Einschränkungen und kann so gewählt werden, dass er die noch nicht verwendete Gleichung in (4.3) erfüllt.
- Um das Gewicht des letzten mittleren Kontrollpunktes zu bestimmen, wird die noch nicht verwendete Gleichung in (4.4) herangezogen.

Bemerkung 4.7 *Die Bestimmung des dritten mittleren Kontrollpunktes und dessen Gewichtes, wird im Normalfall nicht voneinander trennbar sein. Es wird zumeist ein simultanes Lösen der vier Gleichungen mit den vier Unbekannten, die drei Koordinaten des Kontrollpunktes und das Gewicht, nötig sein. Außerdem sind im Allgemeinen von den vier Gleichungen zwei nichtlinear. In diesem Fall ist es notwendig, zusätzlich zu den vier Gleichungen, noch Gleichungen aus (4.5) hinzuzunehmen.*

Eine Fläche, die mit Hilfe des eben angeführten Verfahrens berechnet wurde, ist in Abbildung 4.4 zu sehen. In Abbildung 4.4a ist eine Dreiecks-Bézier-Fläche auf dem Kegel mit impliziter Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ zu sehen, wobei die Randkegelschnitte nicht durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen. Bei Abbildung 4.4b ist zu erkennen, dass jede Parameterlinie den Grenzkegelschnitt K berührt.

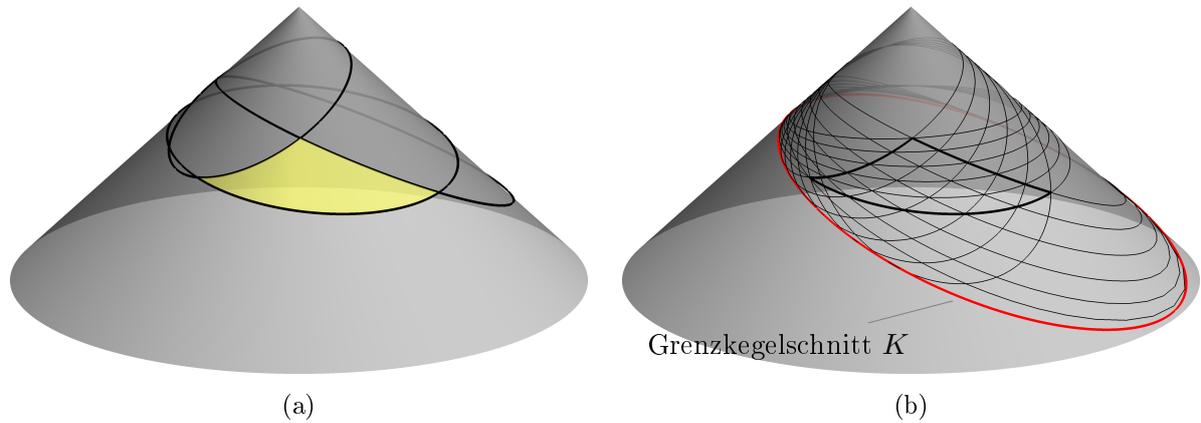


Abbildung 4.4: Eine auf einer Kegelfläche gelegene rationale quadratische Dreiecks-Bézier-Fläche ohne Fundamentalpunkte.

4.2.1 Rationale Fläche auf einer Quadrik

Bei allen bisher getätigten Aussagen und Konstruktionsverfahren, war die Quadrik Q explizit gegeben. Wenn keine bestimmte Quadrik Q gegeben ist, stellt sich die Frage, wann eine Dreiecks-Bézier-Fläche vom Grad 2 eine Quadrik beschreibt. Arbeiten, die dieser Fragestellung nachgehen und Aussagen darüber treffen, sind zum Beispiel [12, 29, 32]. Die Zugänge aller erwähnten Arbeiten sind geometrischer Natur und in vielen Fällen numerisch nicht zuverlässig nachzuprüfen. Albrecht konnte in [1], basierend auf den Resultaten von [8, 9], welche Aussagen über Verones'sche Flächen im \mathbb{P}^5 treffen, ein Kriterium entwickeln, das eine Antwort auf die Frage, ob eine gegebene Dreiecks-Bézier-Fläche vom Grad 2 auf einer Quadrik liegt, gibt.

Wir definieren mittels der Darstellung (4.1) die Vektoren

$$\tilde{\mathbf{b}}_{ijk} := \frac{n!}{i!j!k!} \mathbf{b}_{ijk} \in \mathbb{R}^4, \quad (4.6)$$

sowie die Matrix $B := (\tilde{\mathbf{b}}_{200}, \tilde{\mathbf{b}}_{020}, \tilde{\mathbf{b}}_{002}, \tilde{\mathbf{b}}_{011}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ und lösen die beiden Gleichungssysteme

$$B \cdot \mathbf{y}_{110} = \tilde{\mathbf{b}}_{110} \quad \text{und} \quad B \cdot \mathbf{y}_{101} = \tilde{\mathbf{b}}_{101} \quad (4.7)$$

mit $\mathbf{y}_{101} = (y_{101}^0, y_{101}^1, y_{101}^2, y_{101}^3)$ und $\mathbf{y}_{110} = (y_{110}^0, y_{110}^1, y_{110}^2, y_{110}^3)$. Die rationale Dreiecks-Bézier-

Fläche vom Grad 2 liegt genau dann auf einer Quadrik Q , wenn für

$$\alpha_0 := -y_{101}^0 y_{101}^1 y_{101}^2 + y_{101}^0 (y_{101}^3)^2 + y_{101}^1, \quad (4.8)$$

$$\alpha_1 := -y_{101}^0 y_{101}^1 y_{110}^2 - (y_{101}^0 y_{110}^1 + y_{110}^0 y_{101}^1) y_{101}^2 + 2y_{101}^0 y_{101}^3 y_{110}^3 + y_{110}^0 (y_{101}^3)^2 - 2y_{101}^3 + y_{110}^1, \quad (4.9)$$

$$\alpha_2 := -y_{110}^0 y_{110}^1 y_{101}^2 - (y_{101}^0 y_{110}^1 + y_{110}^0 y_{101}^1) y_{110}^2 + 2y_{110}^0 y_{101}^3 y_{110}^3 + y_{101}^0 (y_{110}^3)^2 - 2y_{110}^3 + y_{101}^2 \quad \text{und} \quad (4.10)$$

$$\alpha_3 := -y_{110}^0 y_{110}^1 y_{110}^2 + y_{110}^0 (y_{110}^3)^2 + y_{110}^2 \quad (4.11)$$

gilt, dass

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Der Beweis dieser Aussage, wird hier nicht gegeben. Der interessierte Leser sei auf [1] verwiesen. Die numerische Kondition dieser Bedingung und unterschiedliche Implementierungsmöglichkeiten sind des Weiteren in [2] zu finden.

4.3 Konstruktionsmöglichkeiten von Dreiecks-Bézier-Flächen ohne gegebener Quadrik

Um Flächen in Computersystemen darzustellen, werden diese oftmals trianguliert, also durch ein Netz ebener Dreiecke approximiert. Es stellt sich die Frage, ob man anstatt mit ebenen Dreiecken, die Fläche auch stückweise durch Quadriken darstellen könnte. Das Verfahren von Niebuhr in [29] und jenes von Dietz, Hoschek und Jüttler in [14] setzen stets voraus, dass zum Erzeugen eines Flächenstückes, die zugrunde liegende Quadrik explizit gegeben sein muss. Diese Verfahren kommen deshalb nicht in Frage.

Sánchez-Reyes präsentiert in seiner Arbeit [31] ein Verfahren, genannt *Weighted Radial Displacement* (WRD), mit welchem die Form von NURBS-Kurven und Flächen mittels projektiven Transformationen verändert wird. Aufbauend auf diesem Verfahren zeigen Sánchez-Reyes und Paluszny in [32] eine Methode, mit der es möglich ist, alle Dreiecks-Bézier-Flächenstücke vom Grad 2, welche eine stereografische Projektion definieren, auf regulären Quadriken zu erzeugen. Dabei muss die Quadrik nicht explizit gegeben sein.

Die Idee beim WRD ist es, die Kontrollpunkte einer Bézier-Kurve oder -Fläche radial bezüglich einem beliebig wählbaren Punkt \mathbf{O} , zu verschieben. Wir nehmen an, der Punkt \mathbf{O} sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit, der Ursprung des Koordinatensystems. Wir können dann die radiale Verschiebung realisieren, indem wir die homogenisierende Koordinate b_{ijk}^0 , also das Gewicht der Kontrollpunkte $\mathbf{b}_{ijk} = (b_{ijk}^0, b_{ijk}^1, b_{ijk}^2, b_{ijk}^3)$ einer Bézier-Fläche, die in Darstellung (4.15) gegeben ist, mit einem nicht negativen Faktor λ_{ijk} multiplizieren. Sei nun die Dreiecks-Bézier-Fläche $\mathbf{x}(u, v, w)$ in ihrer affinen Darstellung gegeben

$$\mathbf{x}(u, v, w) = \frac{1}{w(u, v, w)} \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i, j, k \geq 0}} w_{ijk} \mathbf{c}_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w), \quad (4.12)$$

wobei $u + v + w = 1$, $u, v, w \geq 0$ mit $\mathbf{c}_{ijk} \in \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{b}_{ijk} = (w_{ijk}, w_{ijk}\mathbf{c}_{ijk})^T$ gilt. Dabei gilt

$$w(u, v, w) = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \geq 0}} w_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w).$$

Wenn wir nun das Gewicht eines Kontrollpunktes \mathbf{b}_{ijk} mit dem Faktor λ_{ijk} multiplizieren, erhalten wir

$$\mathbf{b}_{ijk} \rightarrow \mathbf{b}_{ijk}^* = (\lambda_{ijk} b_{ijk}^0, b_{ijk}^1, b_{ijk}^2, b_{ijk}^3)^T = (\lambda_{ijk} w_{ijk}, \mathbf{c}_{ijk})^T.$$

Das Gewicht w_{ijk} und der Kontrollpunkt \mathbf{c}_{ijk} gehen dann über in

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{ijk} &\rightarrow \mathbf{c}_{ijk}^* = \frac{\mathbf{c}_{ijk}}{\lambda_{ijk}} && \text{sowie} \\ w_{ijk} &\rightarrow w_{ijk}^* = \lambda_{ijk} w_{ijk}. \end{aligned}$$

Die neu erhaltene Fläche $\mathbf{x}^*(u, v, w)$ kann jetzt als

$$\mathbf{x}^*(u, v, w) = \frac{\mathbf{x}(u, v, w)}{\lambda(u, v, w)} \text{ mit } \lambda(u, v, w) = 1 + (\lambda_{ijk} - 1) \frac{w_{ijk} B_{ijk}^n}{w(u, v, w)}$$

dargestellt werden. Geometrisch kann dies als eine stereografische Projektion gedeutet werden. Um basierend auf WRD eine Quadrik darzustellen, geht man folgendermaßen vor:

- Man wählt ein linear parametrisiertes Dreieck

$$\mathbf{d}(u, v, w) = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c} \tag{4.13}$$

mit $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. Dabei sei die homogenisierende Koordinate jeweils 1.

- Man führt mit $\mathbf{d}(u, v, w)$ eine Graderhöhung durch [17]. Wir erhalten drei zusätzliche Kontrollpunkte, die Mittelpunkte zwischen den Eckpunkten von $\mathbf{d}(u, v, w)$.
- Man wählt einen beliebigen Punkt \mathbf{O} aus, welcher nicht in der vom Dreieck aufgespannten Ebene liegt, und wendet WRD auf das quadratisch parametrisierte Dreieck $\mathbf{d}(u, v, w)$ an.

Es gilt noch zu zeigen, dass die mittels dem Verfahren erhaltene Fläche auf einer Quadrik liegt. Wie schon in Kapitel 2.4.1 erwähnt wurde, beschreibt jede rationale quadratische Bézier-Kurve einen Kegelschnitt und umgekehrt. Das heißt, jede der drei Seiten stellt einen Kegelschnitt dar. Es muss somit gezeigt werden, dass alle drei Kegelschnitte, die wir mit $\mathbf{k}_i(t)$ $i = 1, 2, 3$ bezeichnen, durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen sowie, dass die Tangenten im gemeinsamen Punkt koplanar sind.

Aufgrund der Konstruktionsweise kann leicht nachgerechnet werden, dass jeder der drei Kegelschnitte für t gegen unendlich durch den Punkt \mathbf{O} verläuft. Um zu zeigen, dass die Tangenten im Punkt \mathbf{O} koplanar sind, betrachten wir zuerst einen der drei Randkegelschnitte $\mathbf{k}_i(t)$, welcher in der Form (2.15) gegeben ist. Wir parametrisieren diesen mittels $t = \frac{1}{s}$ um und werten anschließend dessen Ableitung im Punkt $s = 0$ aus. Es zeigt sich, dass die Tangente im Punkt \mathbf{O} parallel zu der Grundkante des Dreieckes (4.13) ist, aus welcher der Randkegelschnitt $\mathbf{k}_i(t)$ hervorging. Dies gilt für alle drei Randkegelschnitte, sie sind somit im Punkt \mathbf{O} koplanar.

Bemerkung 4.8 *Im Fall, dass es sich beim Punkt O um einen Fernpunkt handelt, entartet das WRD-Verfahren zu einer Verschiebung entlang paralleler Geraden und die erhaltene Dreiecks-Bézier-Fläche liegt auf einem Paraboloid.*

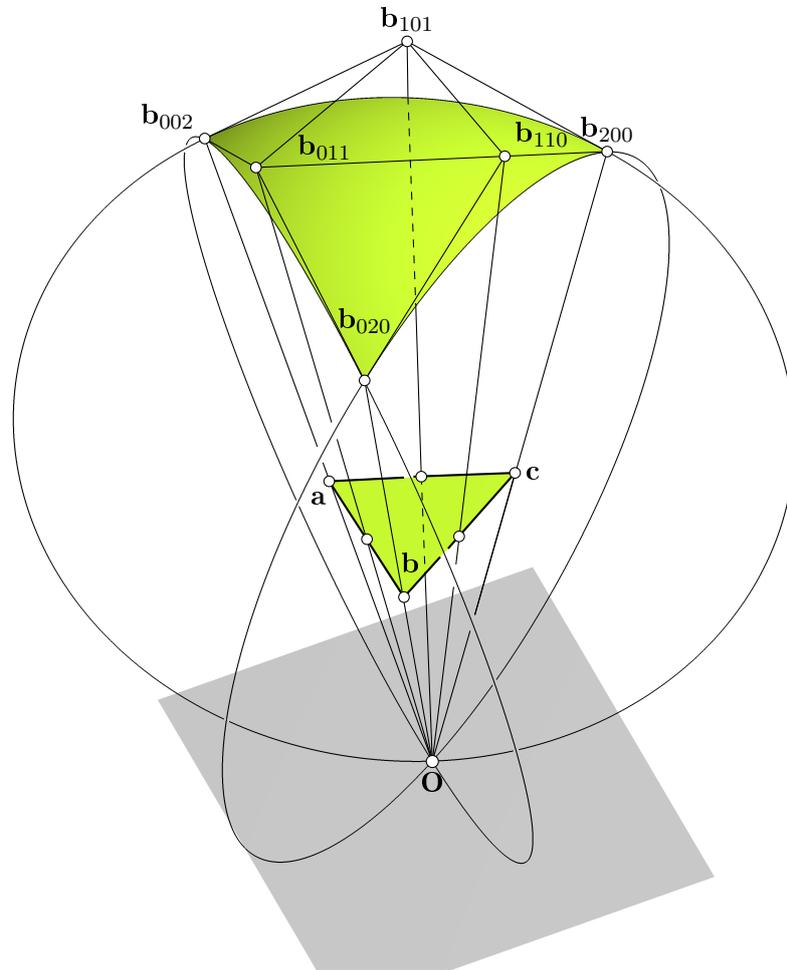


Abbildung 4.5: Konstruktion eines Dreiecks-Bézier-Flächenstückes mittels WRD-Verfahrens.

Das WRD-Verfahren definiert somit eine stereografische Projektion von einer Ebene P , die vom Dreieck $\mathbf{d}(u, v, w)$ bestimmt wird, auf eine Quadrik Q . Anstatt der klassischen Graderhöhung, bei der man eine polynomiale quadratische Bézier-Darstellung des Dreiecks $\mathbf{d}(u, v, w)$ erhält, kann auch eine verallgemeinerte Graderhöhung, welche Denker und Henson in [10] einführen, verwendet werden. Bei dieser erhält man eine rationale Darstellung des Dreiecks $\mathbf{d}(u, v, w)$. Um eine solche Darstellung des Dreiecks (4.13) zu erhalten, muss dieses mit einer linearen Funktion $\hat{w}(u, v, w)$ multipliziert sowie dividiert werden. Anschließend wird sie noch durch $u + v + w = 1$ dividiert und man erhält die Darstellung

$$\mathbf{d}(u, v, w) = \frac{(u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}) \hat{w}(u, v, w)}{(u + v + w) \hat{w}(u, v, w)}, \quad \hat{w}(u, v, w) = \hat{w}_A u + \hat{w}_B v + \hat{w}_C w. \quad (4.14)$$

Beim WRD-Verfahren, wie anfangs angeführt, gilt stets, dass die Tangentialebene im Punkt O parallel zu der Ebene P ist. Die Fundamentalgerade, der durch das WRD-Verfahren definierten stereografischen Projektion, ist somit die Ferngerade. Wendet man die verallgemeinerte Grader-

höhung an, erhält man zwei zusätzliche Freiheitsgrade. Mit diesen ist es möglich, die Lage der Fundamentalgerade festzulegen. Die Fundamentalgerade kann, demnach wie in Abbildung 4.3a, als eigentliche Gerade gewählt werden. Für detailliertere Ausführungen sei auf [32] verwiesen.

Ein weiteres Verfahren, bei dem die Quadrik nicht explizit gegeben ist, gibt Albrecht in [2] an.

4.3.1 Darstellung von Dreiecks-Bézier-Flächen als Tensorprodukt-Bézier-Flächen

Wie im zweiten Kapitel unter 2.4.1 erwähnt wurde, gibt es zwei Möglichkeiten, Flächen in Bézier-Darstellungen anzugeben. Einerseits gibt es die Darstellung als Dreiecks-Bézier-Fläche

$$\mathbf{x}(u, v, w) = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \geq 0}} B_{i,j,k}^n(u, v, w) \mathbf{c}_{i,j,k}, \quad u + v + w = 1, \quad u, v, w \geq 0. \quad (4.15)$$

Andererseits können sie als Tensorprodukt-Bézier-Flächen dargestellt werden. Beide Darstellungen besitzen unterschiedliche Bernstein-Basisfunktionen und haben daher verschiedene geometrische Eigenschaften. Ihre Inkompatibilität verursacht Probleme, wenn im selben CAD-System beide Darstellungsvarianten verwendet werden.

Es ist daher von Interesse, Verfahren und explizite Formeln zur Umwandlung einer Darstellung in die jeweils andere, zu finden. Im Folgenden werden zwei Verfahren, welche in [35] eine explizite Umwandlung von rationalen Dreiecks-Bézier-Flächen vom Grad 2 in biquadratische Tensorprodukt-Bézier-Flächen angeführt haben, betrachtet.

Beim ersten Verfahren werden aus den Kontrollpunkten \mathbf{c}_{ijk} aus (4.15), die Kontrollpunkte

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{00} &= \mathbf{c}_{002}, & \mathbf{p}_{01} &= \frac{\mathbf{c}_{002} + \mathbf{c}_{011}}{2}, & \mathbf{p}_{02} &= \mathbf{c}_{002} \\ \mathbf{p}_{10} &= \mathbf{c}_{101}, & \mathbf{p}_{11} &= \frac{\mathbf{c}_{101} + \mathbf{c}_{011}}{2}, & \mathbf{p}_{12} &= \mathbf{c}_{011} \\ \mathbf{p}_{20} &= \mathbf{c}_{200}, & \mathbf{p}_{21} &= \mathbf{c}_{110}, & \mathbf{p}_{22} &= \mathbf{c}_{020} \end{aligned} \quad (4.16)$$

berechnet. Diese beschreiben eine geometrisch äquivalente biquadratische Tensorprodukt-Bézier-Fläche.

Eine Verallgemeinerung dieses Verfahrens, zur Umwandlung von Dreiecks-Bézier-Flächen vom Grad n in Tensorprodukt-Bézier-Flächen vom Grad (n, n) , ist in [24] gegeben. Die Aussage ist zusammengefasst im folgenden

Satz 4.9 *Eine Dreiecks-Bézier-Fläche $\mathbf{x}(u, v, w)$ vom Grad n , wie in (4.15) beschrieben, kann als eine degenerierte Tensorprodukt-Bézier-Fläche vom Grad (n, n)*

$$\mathbf{x}(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_i^n(s) B_j^n(t)$$

dargestellt werden. Die Kontrollpunkte $\mathbf{b}_{i,j}$, mit $i, j = 0, \dots, n$, erhält man durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{i,0} \\ \mathbf{b}_{i,1} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{i,n} \end{pmatrix} = A_1 A_2 \cdots A_i \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{i,0,n-i} \\ \mathbf{b}_{i,1,n-(i+1)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{i,n-i,0} \end{pmatrix}, \quad \text{mit } i = 0, \dots, n. \quad (4.17)$$

Die auftretenden A_i , mit $i = 0, \dots, n$, sind dabei Graderhöhungsoperatoren, wobei

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{n-(k-1)} & \frac{n-k}{n-(k-1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{n-(k-1)} & \frac{n-k}{n-(k-1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n-k}{n-(k-1)} & \frac{1}{n-(k-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(k+1) \times k}. \quad (4.18)$$

Beweis. Wir parametrisieren die Fläche in (4.15) um, indem wir

$$\begin{cases} s = u \\ t = \frac{v}{1-u} = \frac{v}{v+w} \end{cases}$$

setzen.

Der dreieckige Definitionsbereich von $\mathbf{x}(u, v, w)$, mit $\{(u, v, w) | u + v + w = 1, u, v, w \geq 0\}$, wird dabei auf das rechteckige Parametergebiet $[0, 1] \times [0, 1]$ abgebildet. Mit Hilfe der Gleichung $k = n - i - j$ sowie einigen Umformungen, können die verallgemeinerten Bernsteinpolynome als

$$\begin{aligned} B_{ijk}^n(u, v, w) &= \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k = \frac{n!}{i!j!k!} \frac{(n-i)!}{(n-i)!} u^i v^j w^k \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{j!k!} u^i v^j w^k = \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!} u^i v^j w^k \\ &= \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} u^i v^j w^k \frac{(1-u)^{n-i}}{(1-u)^{n-i}} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} u^i v^j w^k \frac{(1-u)^{n-i}}{(v+w)^{j+k}} \\ &= \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \binom{n-i}{j} \frac{v^j w^k}{(v+w)^{j+k}} = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-1} \binom{n-i}{j} \frac{v^j}{(v+w)^j} \frac{(w+v-v)^k}{(v+w)^k} \\ &= \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \binom{n-i}{j} \frac{v^j}{(v+w)^j} \left(1 - \frac{v}{v+w}\right)^k \\ &= B_i^n(s) B_j^{n-i}(t) \end{aligned}$$

dargestellt werden. Die Fläche $\mathbf{x}(u, v, w)$ kann nun als

$$\mathbf{x}(u, v, w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \mathbf{c}_{i,j,n-i-j} B_i^n(s) B_j^{n-i}(t)$$

angegeben werden. Damit man nun eine Tensorprodukt-Bézier-Darstellung vom Grad (n, n) erhält, müssen die rationalen Bézier-Kurven

$$\mathbf{C}_i(t) = \sum_{j=0}^{n-i} \mathbf{c}_{i,j,n-i-j} B_j^{n-i}(t) \quad , \text{ mit } i = 0, \dots, n,$$

mittels Graderhöhung als Kurven vom Grad n dargestellt werden. Danach können die Kontrollpunkte der Kurve $\mathbf{C}_i(t)$ durch (4.17) ausgedrückt werden. \square

Die ursprüngliche Fläche mit Darstellung (4.15) besitzt die gleiche Form, wie die durch (4.17) erhaltene Tensorprodukt-Bézier-Fläche. Aus Abbildung 4.6 ist jedoch ersichtlich, dass die beiden

unterschiedliche Parametrisierung besitzen. Die Koinzidenz von drei Punkten und eine Gerade, die zu einem Punkt degeneriert, sind Fälle, die im CAGD vermieden werden sollten. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt jedoch darin, dass man beim Durchlaufen des gesamten Parametergebiets $[0, 1] \times [0, 1]$, genau die ursprüngliche Fläche erhält.

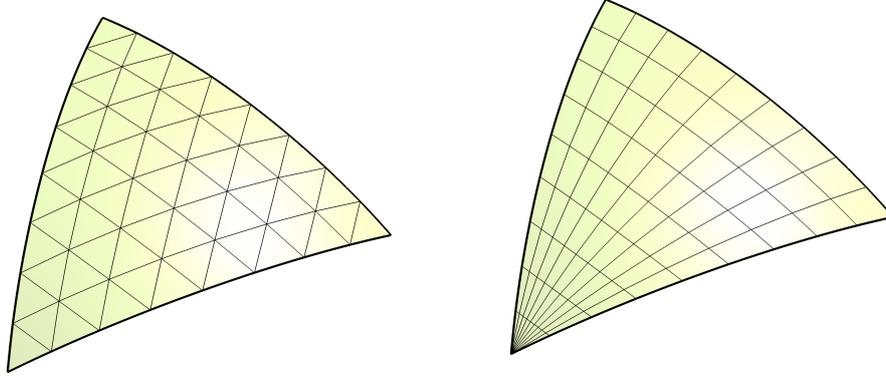


Abbildung 4.6: Dreiecks-Fläche und formgleiche degenerierte Tensorprodukt-Bézier-Darstellung mittels (4.16).

Es wäre natürlich wünschenswert, eine biquadratische Tensorprodukt-Bézier-Darstellung der Dreiecks-Fläche zu besitzen, welche nicht nur dieselbe Form, sondern auch eine äquivalente Parametrisierung aufweist. Eine solche Tensorprodukt-Darstellung erhalten wir, indem wir die Kontrollpunkte der Fläche mittels

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_{00} &= & \mathbf{c}_{002}, \\
 \mathbf{p}_{01} &= & \mathbf{c}_{011}, \\
 \mathbf{p}_{02} &= & \mathbf{c}_{020}, \\
 \mathbf{p}_{10} &= & \mathbf{c}_{101}, \\
 \mathbf{p}_{11} &= & \mathbf{c}_{002} + \frac{(\mathbf{c}_{011} + \mathbf{c}_{002}) + (\mathbf{c}_{110} - \mathbf{c}_{002}) + (\mathbf{c}_{101} - \mathbf{c}_{002})}{2}, \\
 \mathbf{p}_{12} &= & \mathbf{c}_{110} + (\mathbf{c}_{020} - \mathbf{c}_{011}), \\
 \mathbf{p}_{20} &= & \mathbf{c}_{200}, \\
 \mathbf{p}_{21} &= & \mathbf{c}_{110} + (\mathbf{c}_{200} - \mathbf{c}_{101}), \\
 \mathbf{p}_{22} &= & \mathbf{c}_{002} + (\mathbf{c}_{020} - \mathbf{c}_{011}) + (\mathbf{c}_{110} - \mathbf{c}_{011}) + (\mathbf{c}_{110} - \mathbf{c}_{101}) + (\mathbf{c}_{200} - \mathbf{c}_{101})
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

berechnen. Wenn das Parametergebiet $[0, 1] \times [0, 1]$, der durch (4.19) definierten Tensorprodukt-Bézier-Fläche, auf das Dreieck $\{(u, v, w) | u + v + w = 1, u, v, w \geq 0\}$ eingeschränkt wird, dann besitzt sie dieselben Parameterlinien wie die ursprüngliche parametrisierte Fläche (4.15). Ein Beispiel ist in Abbildung 4.7 gegeben.

Nachteil dieses Konstruktionsverfahrens ist, dass man, wenn das gesamte Parametergebiet $[0, 1] \times [0, 1]$ durchläuft, erhält man mehr als die ursprüngliche Dreiecks-Bézier-Fläche. Es stimmen zwar die Parameterlinien der beiden Flächen überein, damit jedoch die Flächen gleich sind, darf wiederum nur das dreieckige Parametergebiet durchlaufen werden.

Bemerkung 4.10 Die äquivalente Darstellung einer Dreiecks-Bézier-Fläche vom Grad 2 als Tensorprodukt-Fläche vom Grad $(2, 2)$, mittels Darstellung 4.19, gilt nicht nur für den Fall einer Quadrik, sondern kann auch im Fall einer Steinerschen Fläche verwendet werden.

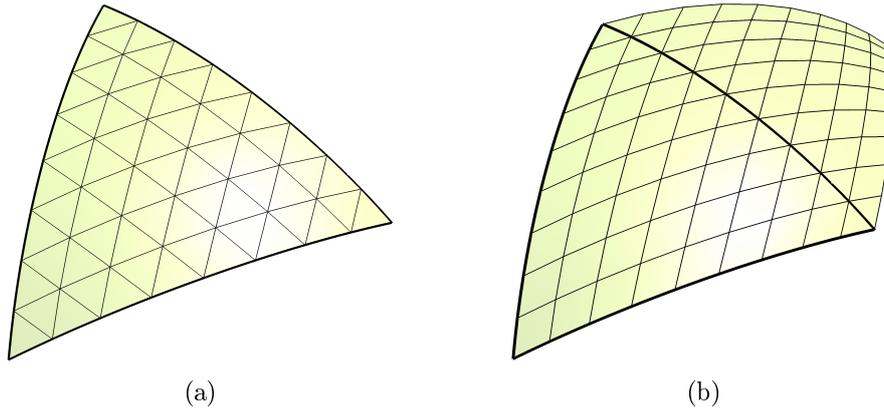


Abbildung 4.7: Dreiecks-Bézier-Flächenstück und seine zugehörige äquivalente Tensorprodukt-Bézier-Darstellung mittels (4.19) über dem Parametergebiet $[0, 1] \times [0, 1]$.

Die beiden angegebenen Umwandlungen sind zwei der einfachsten Transformationen, von Dreiecks-Flächen in Tensorprodukt-Flächen. Viele weitere Arbeiten befassen sich mit der Umwandlung von Dreiecks-Flächen in Tensorprodukt-Flächen und umgekehrt. Beispiele hierfür findet man in [24, 25, 28], sowie der Literatur, auf welche dort verwiesen wird. Dabei wurden unterschiedliche Verfahren zur Umwandlung angegeben. Hu gab in [25] einen Algorithmus an, welcher eine Dreiecks-Fläche vom Grad n , mittels drei Tensorprodukt-Flächen vom Grad (n, n) , darstellt. In Abbildung 4.8 wurde der Algorithmus, der in [25] explizit gegeben ist, auf ein Flächenstück der Kugel angewendet.

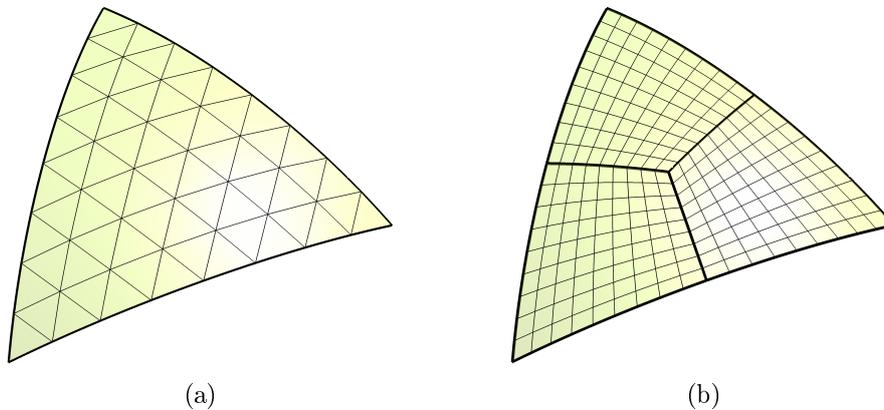


Abbildung 4.8: Umformung einer Dreiecks-Bézier-Fläche in drei Tensorprodukt-Bézier-Flächen mittels dem Verfahren aus [25].

4.4 Konstruktionsverfahren

Aufbauend auf der Konstruktion von Kegelschnitten auf Quadriken, aus Abschnitt 3.4, entwickelten Dietz, Hoschek und Jüttler in [14] ein Verfahren zum Erstellen von Dreiecks-Bézier-Flächen vom Grad 2. Dabei muss die Quadrik Q explizit gegeben sein.

Es seien dafür drei Punkte \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 und \mathbf{p}_3 auf einer regulären Quadrik Q gegeben. Diese sollen die Eckpunkte der Fläche werden. Zusätzlich muss noch ein weiterer Punkt $\mathbf{z} \in Q$, der

ungleich den ersten drei Punkten ist, gegeben sein. Durch den Punkt \mathbf{z} sollen alle Randkegelschnitte hindurchlaufen. Der Punkt \mathbf{z} soll nicht dem Flächenstück angehören. Gesucht sind nun die Kontrollpunkte einer rationalen quadratischen Bézier-Fläche $\mathbf{x}(u, v, w)$ auf Q , bei der die Randkurven die gewünschten Vorgaben erfüllen. Die Vorgangsweise ist nun folgendermaßen. Es soll eine gebrochen lineare Dreiecks-Bézier-Fläche

$$\mathbf{y}(u, v, w) = u\mathbf{c}_{100} + v\mathbf{c}_{010} + w\mathbf{c}_{001}, \quad \text{mit } u, v, w \geq 0, \quad u + v + w = 1, \quad (4.20)$$

für die $\mathbf{x}(u, v, w) = \zeta(\mathbf{y}(u, v, w))$ gilt, gefunden werden. Dazu werden wir die Konstruktion der Kegelschnitte auf Seite 31 benötigen und uns an dieser orientieren. Wir wählen den ersten Kontrollpunkt \mathbf{c}_{100} auf der projizierenden Gerade $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_1)$ beliebig. Den zweiten Kontrollpunkt $\mathbf{c}_{010} \in \zeta^{-1}(\mathbf{p}_2)$ erhalten wir durch die Konstruktion des Kegelschnittes, der die Punkte \mathbf{p}_1 , \mathbf{z} und \mathbf{p}_2 interpoliert, mittels Konstruktion in Abschnitt 3.4. Es wird jedoch jenes Kegelschnittsegment verwendet, welches nicht durch \mathbf{z} verläuft. Den letzten Kontrollpunkt \mathbf{c}_{001} erhält man ebenfalls, indem das Konstruktionsverfahren aus Abschnitt 3.4 auf die Punkte \mathbf{p}_2 , \mathbf{z} und \mathbf{p}_3 angewendet wird.

Zuletzt müssen die Kontrollpunkte \mathbf{c}_{100} , \mathbf{c}_{010} und \mathbf{c}_{001} so angepasst werden, dass die drei Gewichte der Eckkontrollpunkte von $\mathbf{x}(u, v, w)$ jeweils 1 sind. Im Fall ovaler Quadriken erreicht man dies durch Normierung der Vektoren. Durch Anwendung der Abbildung ζ und der Produktformeln (2.21) können jetzt die Kontrollpunkte von $\mathbf{x}(u, v, w)$ bestimmt werden.

Weil sich die Punkte \mathbf{c}_{100} , \mathbf{c}_{010} und \mathbf{c}_{001} mit der Gerade $\zeta^{-1}(\mathbf{z})$ in einer Ebene befinden, schneidet auch die Gerade durch \mathbf{c}_{100} und \mathbf{c}_{001} die projizierende Gerade. Dies gewährleistet, dass auch die dritte Gerade von $\mathbf{y}(u, v, w)$ auf den gewünschten Kegelschnitt abgebildet wird. Flächenstücke, die mittels diesem Konstruktionsverfahren erzeugt wurden, sind in Abbildung 4.1 und Abbildung 5.5 zu sehen.

Tensorprodukt-Bézier-Flächen

Zum Abschluss betrachten wir noch die Erzeugung von Tensorprodukt-Bézier-Flächen mittels der verallgemeinerten stereografischen Projektion. Dietz, Hoschek und Jüttler haben in [14] solche Flächenstücke auf regulären Quadriken, wobei diese wiederum von Kegelschnittsegmenten berandet sind, erzeugt. Je nachdem, welchen Grad das gewollte Flächenstück haben soll, konnten die Autoren Bedingungen finden, damit dieses sich auf der Quadrik befindet. Zu Beginn sind wieder die Eckpunkte \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 und $\mathbf{p}_4 \in Q$ gegeben.

5.1 Bilineare Bézier-Flächen

Bilineare Flächen besitzen zwei Scharen von Geraden. Deshalb können solche Flächenstücke nur auf ringförmigen Quadriken R auftreten. Dies ist genau der Fall, wenn die vier Ränder des Flächenstückes, Segmente von vier Erzeugenden der Ringquadrik R sind. Das Urbild einer Erzeugenden von R ist laut Lemma 3.19 eine Ebene, die eine der beiden Brenngeraden enthält. Im Fall des hyperbolischen Paraboloid ist es die x -Achse oder die Ferngerade der yz -Ebene.

Dietz geht nun in [12] folgendermaßen vor. Es werden von zwei diagonal gegenüberliegenden Punkten, zum Beispiel \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_3 , zwei beliebige Urbilder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)^T$ mit $\mathbf{a} \in \zeta^{-1}(\mathbf{p}_1)$ sowie $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3)^T$ mit $\mathbf{b} \in \zeta^{-1}(\mathbf{p}_3)$ gewählt.

Die anderen beiden Punkte der bilinearen Fläche $\mathbf{y}(u, v)$ müssen jeweils so gewählt werden, dass die Gerade, welche mit \mathbf{a} beziehungsweise \mathbf{b} aufgespannt wird, eine der beiden Brenngeraden schneidet. Die Schnittpunkte der Geraden mit den Brenngeraden werden unter ζ auf Basispunkte abgebildet. Damit die Basispunkte von $\mathbf{x}(u, v) = \zeta(\mathbf{y}(u, v))$ für $u = \infty$ und $v = \infty$ erreicht werden, müssen die Gewichte der Kontrollpunkte von $\mathbf{y}(u, v)$ so angepasst werden, dass die äußeren Gewichtspunkte jeweils auf den Brenngeraden liegen. Dies ist genau der Fall, wenn für zwei benachbarte Punkte \mathbf{a} (beziehungsweise \mathbf{b}) und $\mathbf{r} = (r_0, r_1, r_2, r_3)^T$ gilt, dass entweder $a_0 = r_0$ und $a_1 = r_1$ (bzw. $b_0 = r_0$ und $b_1 = r_1$) parallel zur yz -Ebene liegen oder, dass $a_2 = r_2$ und $a_3 = r_3$ (bzw. $b_2 = r_2$ und $b_3 = r_3$) in einer Ebene, welche die x -Achse enthält, liegen. Für das bilineare Flächenstück $\mathbf{y}(u, v)$ ergibt sich somit die Darstellung

$$\mathbf{y}(u, v) = B_0^1(u)B_0^1(v) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + B_1^1(u)B_0^1(v) \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + B_0^1(u)B_1^1(v) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + B_1^1(u)B_1^1(v) \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Dieses wird, mittels der verallgemeinerten stereografischen Projektion ζ und der Anwendung von (2.20) auf das gewünschte Flächenstück $\mathbf{x}(u, v)$, abgebildet. Das Flächenstück $\mathbf{x}(u, v)$ ist vom Grad (2, 2). Durch die Wahl der Kontrollpunkte und der daraus folgenden Lage der äußeren Gewichtspunkte von $\mathbf{y}(u, v)$, ist es möglich, eine Gradreduzierung zu bewirken und eine gebrochene lineare Geradenparametrisierung zu erhalten. Ein Beispiel eines bilinearen Bézier-Flächenstückes ist in Abbildung 5.1 zu sehen.

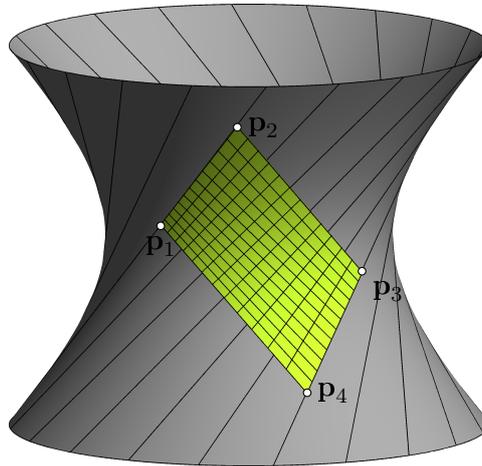


Abbildung 5.1: Bilineares Bézier-Flächenstück auf dem einschaligen Hyperboloid mit impliziter Gleichung $z^2 = x^2 + y^2 - 1$.

Bemerkung 5.1 Abschließend ist noch zu erwähnen, dass falls das bilineare Flächenstück polynomial ist, es ein hyperbolisches Paraboloid beschreibt.

5.2 Tensorprodukt-Bézier-Flächen vom Grad (1,2)

Dietz gibt in [12] ein Verfahren an, dass auf einer ringförmigen Quadrik R ein Tensorprodukt-Bézier-Flächenstück $\mathbf{x}(u, v)$ vom Grad (1,2) berechnet. Damit ein solches Flächenstück auf R liegt, muss für die vier Eckpunkte \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 und $\mathbf{p}_4 \in R$ gelten, dass zwei Randkurven, die jeweils zwei gegenüberliegende Punkte miteinander verbinden, auf einer nicht konjugierten Erzeugenden liegen. Die anderen beiden Randkurven sind Segmente von regulären Kegelschnitten. Es muss also eine bilineare Fläche $\mathbf{y}(u, v)$ bestimmt werden, welche mittels ζ auf $\mathbf{x}(u, v)$ abgebildet wird. Das Bild unter ζ ist jedoch eine biquadratische Fläche und muss daher in einer Richtung eine graderhöhte Darstellung aufweisen. Um eine graderhöhte Darstellung zu erhalten, muss eine der v -Parameterlinien mit der Brenngerade \mathbf{b}_1 zusammenfallen.

Zuerst werden die zwei gegenüberliegenden Ränder von $\mathbf{y}(u, v)$, welche auf die regulären Kegelschnitte von $\mathbf{x}(u, v)$ abgebildet werden, bestimmt. Die Urbilder dieser beiden Kegelschnitte sind zwei ringförmige Quadriken, von denen wir zwei beliebige konjugierte Erzeugende als Ränder von $\mathbf{y}(u, v)$ wählen. Um die vier Eckpunkte von $\mathbf{y}(u, v)$ zu erhalten, schneiden wir die gewählten Ränder mit den Urbildebenen der beiden Erzeugenden von R . Die noch frei wählbaren Parameter sind die Gewichte der vier Kontrollpunkte. Diese müssen so gewählt werden, dass in u -Richtung die äußeren Gewichtspunkte jeweils auf der Brenngerade \mathbf{b}_1 , also im Fall des hyperbolischen

Paraboloid auf der x -Achse, liegen. Dadurch erlangen wir die graderhöhte Darstellung sowie die Eigenschaft, dass alle u -Parameterlinien für den Wert ∞ die Brenngerade \mathbf{b}_1 schneiden. Die vier äußeren Gewichtspunkte einer bilinearen Fläche müssen alle in einer Ebene liegen. Damit man dies erreicht, schneidet man die v -Parameterränder mit einer Ebene, welche die Brenngerade \mathbf{b}_1 enthält. Die so definierte bilineare Tensorprodukt-Bézier-Fläche $\mathbf{y}(u, v)$ wird, unter Anwendung von ζ sowie der Produktformel (2.20) auf $\mathbf{x}(u, v)$, abgebildet. Durch anschließende Gradreduzierung erhalten wir die gewünschte Tensorprodukt-Bézier-Fläche von Grad $(1, 2)$.

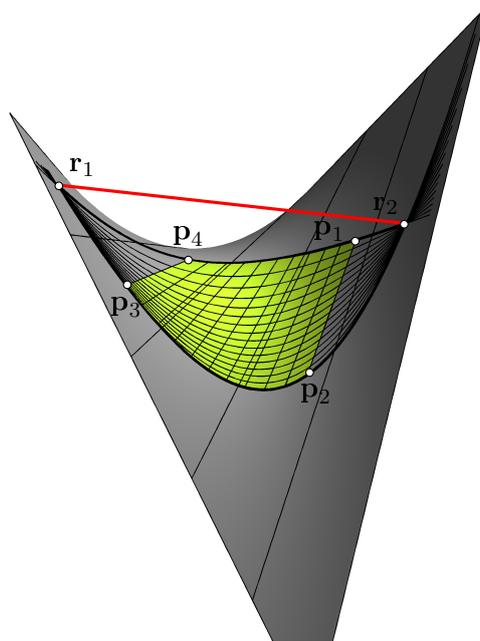


Abbildung 5.2: Bézier-Flächenstück vom Grad $(1, 2)$ auf dem hyperbolischen Paraboloid mit impliziter Gleichung $x_0x_3 = x_1x_2$.

Die bilineare Fläche $\mathbf{y}(u, v)$ wurde so konstruiert, dass eine ihrer v -Parameterlinien mit der Brenngerade \mathbf{b}_1 von ζ zusammenfällt. Eine bilineare Fläche besitzt den impliziten Grad 2. Daher schneidet $\mathbf{y}(u, v)$ die zweite Brenngerade \mathbf{b}_2 in zwei, nicht notwendigerweise reellen, Punkten \mathbf{o}_1 und \mathbf{o}_2 . Es existieren somit zwei u -Parameterlinien, die dementsprechend durch die jeweiligen Punkte \mathbf{o}_1 beziehungsweise \mathbf{o}_2 verlaufen. Diese beiden Geraden sind, da nach Konstruktion alle u -Parameterlinien durch \mathbf{b}_1 verlaufen, projizierende Geraden. Die Bilder dieser beiden projizierenden Geraden unter ζ sind, da jede projizierende Gerade zwei Basispunkte besitzt, die Punkte \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 . Die Punkte \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 liegen offensichtlich auf R . Zusätzlich zu den beiden u -Parameterlinien, gibt es zwei v -Parameterlinien die durch \mathbf{o}_1 beziehungsweise \mathbf{o}_2 verlaufen. Da die beiden v -Parameterlinien jeweils einen Basispunkt besitzen, werden sie mittels ζ auf Erzeugende von R abgebildet, welche durch den Punkt \mathbf{r}_1 beziehungsweise \mathbf{r}_2 verlaufen.

Die gerade getätigte Beobachtung können wir nun, genau wie in [12], zusammenfassen zu folgendem

Lemma 5.2 *Die Trägerebenen der quadratischen Parameterlinien der rationalen Bézier-Fläche vom Grad $(1, 2)$, welche auf einer ringförmigen Quadrik liegt, bilden ein Ebenenbüschel. Schneidet die Trägergerade des Büschels die Quadrik in zwei Punkten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 , verlaufen alle quadratischen Parameterlinien durch diese Beiden.*

5.3 Biquadratische Bézier-Flächenstücke

Aus [33] ist bekannt, dass eine biquadratische rationale Tensorprodukt-Bézier-Fläche

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 B_i^2(u) B_j^2(v) \mathbf{b}_{i,j}, \quad \text{mit } u, v \in [0, 1] \text{ und } \mathbf{b}_{i,j} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, \quad (5.2)$$

im Allgemeinen eine Fläche vom Grad 8 darstellt. Die neun Kontrollpunkte und Gewichte einer rationalen Tensorprodukt-Bézier-Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ können daher nicht beliebig gewählt werden. Wenn die Fläche auf einer regulären Quadrik liegen soll, müssen einige Voraussetzungen erfüllt sein. Da es sich bei den Randkurven einer biquadratischen Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ auf einer regulären Quadrik Q stets um Kegelschnittsegmente handelt, konnten Dietz Hoschek und Jüttler in [14] eine notwendige Bedingung für die Lage der Kegelschnitte angeben.

5.3.1 Lage der Randkegelschnitte

Satz 5.3 *Es seien vier Punkte \mathbf{p}_i , $i = 1, \dots, 4$, wobei jeweils zwei auf keiner Erzeugenden liegen dürfen, sowie vier Kegelschnitte $k_{i,i+1}$ auf einer regulären Quadrik gegeben. Die Indizes betrachten wir dabei modulo 4. Die beiden Punkte \mathbf{p}_i und \mathbf{p}_{i+1} liegen dabei auf dem Kegelschnitt $k_{i,i+1}$. Den sekundären Schnittpunkt zweier Kegelschnitte $k_{i-1,i}$ und $k_{i,i+1}$ bezeichnen wir mit \mathbf{q}_i . Wir setzen des Weiteren voraus, dass die Punkte \mathbf{p}_i und \mathbf{q}_j , $i, j = 1, \dots, 4$ paarweise verschieden sind. Dann existiert ein biquadratisches rationales Bézier-Flächenstück $\mathbf{x}(u, v)$ mit den Eckpunkten \mathbf{p}_i , $i = 1, \dots, 4$ auf Q , wobei dieses von den Kegelschnitten $k_{i,i+1}$ berandet ist, genau dann, wenn die vier Punkte \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_3 , \mathbf{q}_2 und \mathbf{q}_4 (oder äquivalent dazu \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_4 , \mathbf{q}_1 und \mathbf{q}_3) koplanar sind, also auf einem Kegelschnitt liegen.*

Beweis. (\Rightarrow): Es sei eine biquadratische Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ in Darstellung (5.2) auf einer regulären Quadrik Q gegeben. Nach Satz 3.3 bzw. Satz 3.14 existiert ein bilineares Bézier-Flächenstück

$$\mathbf{y}(u, v) = B_0^1(u)B_0^1(v)\mathbf{c}_{0,0} + B_1^1(u)B_0^1(v)\mathbf{c}_{1,0} + B_0^1(u)B_1^1(v)\mathbf{c}_{0,1} + B_1^1(u)B_1^1(v)\mathbf{c}_{1,1}, \quad (5.3)$$

welches unter der verallgemeinerten stereografischen Projektion ζ auf $\mathbf{x}(u, v)$ abgebildet wird. Die Eckpunkte der bilinearen Fläche werden dabei auf die Eckpunkte der biquadratischen Fläche abgebildet. Man betrachte nun die Ebenen $\hat{\mathbf{v}}_1$ bzw. $\hat{\mathbf{v}}_3$, die von den Punkten $\mathbf{c}_{1,0}$, $\mathbf{c}_{0,1}$ und $\mathbf{c}_{0,0}$ sowie von $\mathbf{c}_{1,0}$, $\mathbf{c}_{0,1}$ und $\mathbf{c}_{1,1}$ aufgespannt werden. Die beiden Brenngeraden von ζ liegen in keiner der Ebenen, da laut Voraussetzung keine zwei Punkte \mathbf{p}_i und \mathbf{p}_j mit $i, j = 1, \dots, 4$ auf einer Erzeugenden von Q liegen. Daher enthalten beide Ebenen genau eine projizierende Gerade $\mathbf{g}_1 \subset \hat{\mathbf{v}}_1$ bzw. $\mathbf{g}_3 \subset \hat{\mathbf{v}}_3$. Die beiden Randgeraden von $\mathbf{y}(u, v)$ durch den Punkt $\mathbf{c}_{0,0}$ schneiden jeweils die projizierende Gerade \mathbf{g}_1 . Damit schneiden sich die beiden Kegelschnitte, welche die Bilder der beiden Randgeraden durch $\mathbf{c}_{0,0}$ sind, im Punkt $\mathbf{q}_1 = \zeta(\mathbf{g}_1)$. Bei $\hat{\mathbf{v}}_3$ mit $\mathbf{c}_{1,1}$ kann ähnlich argumentiert werden und man erhält $\mathbf{q}_3 = \zeta(\mathbf{g}_3)$.

Die Gerade \mathbf{g} , die von den beiden Punkten $\mathbf{c}_{1,0}$ und $\mathbf{c}_{0,1}$ aufgespannt wird, liegt sowohl in $\hat{\mathbf{v}}_1$ als auch in $\hat{\mathbf{v}}_3$ und schneidet somit beide projizierenden Geraden \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_3 . Daher wird die Gerade \mathbf{g} unter ζ auf einen Kegelschnitt abgebildet, der durch die Punkte \mathbf{q}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_4 und \mathbf{q}_3 verläuft.

(\Leftarrow): Wir betrachten die sechs projizierenden Geraden $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_1)$, $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_2)$, $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_3)$, $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_4)$, $\zeta^{-1}(\mathbf{q}_1)$ und $\zeta^{-1}(\mathbf{q}_3)$. Nach Voraussetzung existiert ein Kegelschnitt, der durch die Punkte \mathbf{q}_1 ,

\mathbf{p}_2 , \mathbf{q}_3 und \mathbf{p}_4 verläuft und somit eine Gerade \mathbf{g} , welche die vier projizierenden Geraden $\zeta^{-1}(\mathbf{q}_1)$, $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_2)$, $\zeta^{-1}(\mathbf{q}_3)$ und $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_4)$ schneidet. Man lege $\mathbf{c}_{0,0}$ und $\mathbf{c}_{0,1}$ als die Schnittpunkte der Gerade \mathbf{g} mit den projizierenden Geraden $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_2)$ sowie $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_4)$ fest. Die Punkte $\mathbf{c}_{0,0}$ bzw. $\mathbf{c}_{1,1}$ werden definiert als Schnittpunkte der projizierenden Geraden $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_1)$ und $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_3)$ mit den Ebenen $\hat{\mathbf{v}}_1$ bzw. $\hat{\mathbf{v}}_3$, welche durch \mathbf{g} sowie $\zeta^{-1}(\mathbf{q}_1)$ bzw. $\zeta^{-1}(\mathbf{q}_3)$ aufgespannt werden. Das bilineare Bézier-Flächenstück mit den Eckpunkten $\mathbf{c}_{0,0}$, $\mathbf{c}_{0,1}$, $\mathbf{c}_{1,0}$ und $\mathbf{c}_{1,1}$ wird auf ein biquadratisches Bézier-Flächenstück auf Q mit den vorgegeben Kegelschnittsegmenten abgebildet. \square

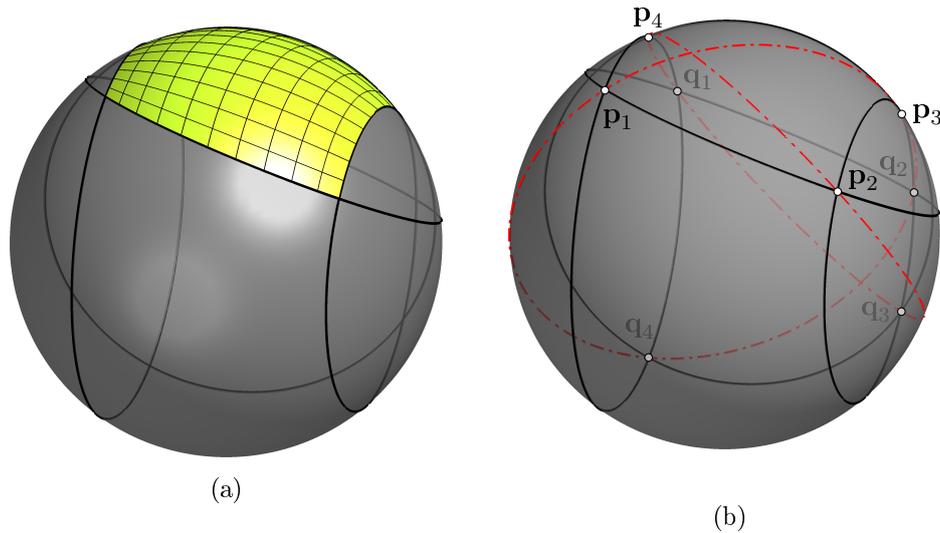


Abbildung 5.3: (a) Ein biquadratisches Bézier-Flächenstück auf der Kugel. (b) Die Lage der sechs Kegelschnitte zum zugehörigen Flächenstück.

Der zweite Teil des Beweises von Satz 5.3 kann zur Konstruktion biquadratischer Flächen verwendet werden. Ausgehend von diesem Beweis entwickelten Dietz, Hoschek und Jüttler in [15] einen Algorithmus, der zu acht vorgegeben Punkten auf einer regulären Quadrik Q , welche die Bedingungen von Satz 5.3 erfüllen, ein biquadratisches Flächenstück erzeugt, das die sekundären Schnittpunkte \mathbf{q}_i , $i = 1, \dots, 4$ nicht enthält.

Konstruktionsmöglichkeit

Die Idee des Verfahrens ist es, zu gegebenen Punkten \mathbf{p}_i , \mathbf{q}_i , $i = 1, \dots, 4$ auf einer regulären Q , welche die Voraussetzungen des Satzes 5.3 erfüllen und die Randkegelschnitte beschreiben, ein biquadratisches Bézier-Flächenstück $\mathbf{x}(u, v)$ zu erhalten. Dabei wird ein bilineares Flächenstück $\mathbf{y}(u, v)$ gesucht, welches mittels der verallgemeinerten stereografischen Projektion ζ auf $\mathbf{x}(u, v)$ abgebildet wird.

Die Urbilder der vier Kegelschnitte $\mathbf{k}_{i,i+1}$ unter ζ , welche durch die Punkte \mathbf{p}_i , \mathbf{p}_{i+1} , \mathbf{q}_i und \mathbf{q}_{i+1} bestimmt sind, sind nach Lemma 3.10 bzw. Lemma 3.19 ringförmige Quadriken $Q_{i,i+1}$. Auf diesen vier ringförmigen Quadriken $Q_{i,i+1}$ wird nun jeweils eine konjugierte Erzeugende so ausgewählt, dass sich die konjugierte Erzeugende von $Q_{i-1,i}$ mit der konjugierten Erzeugenden von $Q_{i,i+1}$ schneidet. Die Schnittpunkte der vier konjugierten Erzeugenden sind dann die Eckpunkte des gesuchten bilinearen Flächenstückes $\mathbf{y}(u, v)$.

Man berechnet zuerst, mit Hilfe von Lemma 3.8 bzw. Lemma 3.17, die Urbilder der acht Punkte unter der Abbildung ζ . Es wird ein beliebiger Punkt $\mathbf{c}_{0,0}$ auf der projizierenden Gerade $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_1)$ gewählt. Es soll nun die konjugierte Erzeugende der ringförmigen Quadrik $Q_{1,2}$ berechnet werden, die durch den Punkt $\mathbf{c}_{0,0}$ verläuft. Dafür wird die Ebene $\hat{\mathbf{v}}_1$, die vom Punkt $\mathbf{c}_{0,0}$ und der projizierenden Gerade $\zeta^{-1}(\mathbf{q}_2)$ aufgespannt wird, berechnet. Im Fall der Kugel kann dazu die Formel 3.27 verwendet werden. Im Allgemeinen kann man die Formel (2.1) anwenden. Die projizierenden Geraden haben im Fall der Kugel die Darstellung (3.6), beziehungsweise im Fall des hyperbolischen Paraboloid (3.15).

Der Schnittpunkt der Ebene $\hat{\mathbf{v}}_1$ mit der projizierenden Gerade $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_2)$ wird als der zweite Eckpunkt $\mathbf{c}_{1,0}$ von $\mathbf{y}(u, v)$ definiert. Dabei stellen wir $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_2)$ als Schnitt der Ebenen in (3.7) im Falle der Kugel, beziehungsweise (3.16) im Falle des hyperbolischen Paraboloid dar. Der Schnittpunkt der drei Ebenen kann mit Hilfe von (2.1) berechnet werden. Um die noch nicht berechneten Eckpunkte $\mathbf{c}_{1,1}$ und $\mathbf{c}_{0,1}$ von $\mathbf{y}(u, v)$ zu erhalten, geht man analog vor. Es muss jeweils eine Ebene $\hat{\mathbf{v}}_2$ und $\hat{\mathbf{v}}_3$, welche von $\mathbf{c}_{1,0}$ und $\zeta^{-1}(\mathbf{q}_2)$ sowie von $\mathbf{c}_{1,1}$ und $\zeta^{-1}(\mathbf{q}_4)$ aufgespannt wird, mit der projizierenden Gerade $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_3)$ beziehungsweise $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_4)$ geschnitten werden.

Nachdem die vier Kontrollpunkte berechnet wurden, muss noch überprüft werden, ob für die Randsegmente des Bézier-Flächenstückes von $\mathbf{x}(u, v)$, die sekundären Schnittpunkte \mathbf{q}_i , $i = 1, \dots, 4$ durchlaufen werden. Dies überprüft man wie im Fall der Konstruktion von Kegelschnitten in Abschnitt 3.4 und geht gegebenenfalls zum komplementären Geradensegment bei $\mathbf{y}(u, v)$ über. Um die biquadratische Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ in Standardform, also Gewichte bei denen $\mathbf{b}_{i,j}$, $i, j \in 0, 2$ gleich 1 sind, zu erhalten, müssen noch die Gewichte der Kontrollpunkte von $\mathbf{y}(u, v)$ angepasst werden. Im Fall der Einheitskugel U müssen diese etwa normiert werden. Als letzten Schritt muss man auf das bilineare rationale Bézier-Flächenstück $\mathbf{y}(u, v)$ die Abbildung ζ und die Produktformel (2.20) anwenden, um auf das biquadratische rationale Bézier-Flächenstück auf der regulären Quadrik zu kommen.

Ein Beispiel eines Flächenstückes, das mittels dem vorher gegebenen Konstruktionsverfahren erzeugt wurde, ist in Abbildung 5.3 zu sehen.

Wie Dietz in [12] bemerkt, erfüllen die acht Punkte \mathbf{p}_i , \mathbf{q}_i mit $i = 1, \dots, 4$ einen speziellen Fall des Satzes von Miquel.

Satz 5.4 (Satz von Miquel) *Können acht Punkte den Ecken eines Würfels zugeordnet werden, sodass vier auf einer Seitenfläche gelegene Punkte konzyklisch sind und dies für fünf Seiten des Würfel gilt, so sind auch die vier Punkte, die der sechsten Seitenfläche des Würfels zugeordnet sind, konzyklisch.*

In diesem Fall bezeichnet konzyklisch, dass durch die vier Punkte ein Kegelschnitt, der auf Q liegt, verläuft. Als Folgerung aus dem Satz 5.3 erhält man, dass ein biquadratisches Flächenstück zu den vorgegebenen Kegelschnitten genau dann existiert, wenn für die Schnittpunkte der Kegelschnitte auf Q der Satz von Miquel erfüllt ist. Der Beweis für den Spezialfall des Satzes von Miquel für Kegelschnitte auf Quadriken ist mittels einer stereografischen Projektion, wobei das Projektionszentrum auf keinem der Kegelschnitte liegt, und einer projektiven Abbildung, welche die beiden Fundamentalpunkte der stereografischen Projektion auf die beiden absoluten Kreispunkte abbildet, auf die 6-Kreise-Form in der Ebene des Satzes von Miquel zurückzuführen.

Die 25 Polaritätsgleichungen

Einen anderen Ansatz um die Kontrollpunkte einer biquadratischen Bézier-Fläche, die ganz auf einer Quadrik Q liegt, zu bestimmen, wählt Fink in [19]. Damit eine biquadratische Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ mit Darstellung (5.2) auf Q liegt, muss

$$\mathbf{x}(u, v)^T \cdot Q \cdot \mathbf{x}(u, v) = 0 \quad (5.4)$$

gelten. Aus Gleichung (5.4) können 25 Bedingungen, welche Fink die 25 *Polaritätsgleichungen* nennt, für die Kontrollpunkte $\mathbf{b}_{i,j}$ gegeben werden. Diese lauten folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{0,0} &= 0 \\ \mathbf{b}_{0,2}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{0,2} &= 0 \\ \mathbf{b}_{2,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,0} &= 0 \\ \mathbf{b}_{2,2}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{0,1} &= 0, & \mathbf{b}_{0,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{1,0} &= 0 \\ \mathbf{b}_{0,2}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{0,1} &= 0, & \mathbf{b}_{0,2}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{1,2} &= 0 \\ \mathbf{b}_{2,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,1} &= 0, & \mathbf{b}_{1,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,0} &= 0 \\ \mathbf{b}_{1,2}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,2} &= 0, & \mathbf{b}_{2,1}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{0,2} + 2\mathbf{b}_{0,1}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{0,1} &= 0 \\ \mathbf{b}_{2,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,2} + 2\mathbf{b}_{2,1}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,1} &= 0 \\ \mathbf{b}_{0,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,0} + 2\mathbf{b}_{1,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{1,0} &= 0 \\ \mathbf{b}_{0,2}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,2} + 2\mathbf{b}_{1,2}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{1,2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{1,1} + \mathbf{b}_{0,1}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{0,1} &= 0 \\ \mathbf{b}_{0,1}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{1,2} + \mathbf{b}_{0,2}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{1,1} &= 0 \\ \mathbf{b}_{0,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{1,2} + 4\mathbf{b}_{0,1}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{1,1} + \mathbf{b}_{0,2}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{1,0} &= 0 \\ \mathbf{b}_{0,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,1} + 4\mathbf{b}_{1,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{1,1} + \mathbf{b}_{0,1}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,0} &= 0 \\ \mathbf{b}_{0,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,2} + 4\mathbf{b}_{0,1}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,1} + \mathbf{b}_{0,2}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,0} + 4\mathbf{b}_{1,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{1,2} + 8\mathbf{b}_{1,1}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{1,1} &= 0 \\ \mathbf{b}_{0,1}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,2} + 4\mathbf{b}_{1,1}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{1,2} + \mathbf{b}_{0,2}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,1} &= 0 \\ \mathbf{b}_{1,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,2} + 4\mathbf{b}_{1,1}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,1} + \mathbf{b}_{1,2}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,0} &= 0 \\ \mathbf{b}_{1,0}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,1} + \mathbf{b}_{1,1}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,0} &= 0 \\ \mathbf{b}_{1,1}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,2} + \mathbf{b}_{1,2}^T \cdot Q \cdot \mathbf{b}_{2,1} &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Dabei können die Bedingungen in (5.5), (5.6) und (5.7) geometrisch gleich interpretiert werden, wie jene in (4.2), (4.3) und (4.4). Es gibt somit für 16 Gleichungen eine einfache geometrische Interpretation. Die restlichen neun Gleichungen in (5.8) enthalten jeweils den mittleren Kontrollpunkt $\mathbf{b}_{1,1}$.

5.3.2 Überdeckung und Gradbestimmung der biquadratischen Fläche

Wie schon in [5] bemerkt wurde, wird der von der biquadratischen Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ beschriebene Teil der Quadrik im Allgemeinen doppelt überdeckt. Mit Hilfe der verallgemeinerten stereografischen Projektion ζ kann nun diese Eigenschaft gezeigt werden. Die durch ζ auf $\mathbf{x}(u, v)$

abgebildete bilineare Fläche $\mathbf{y}(u, v)$ beschreibt, wie vorher schon öfters erwähnt, im Allgemeinen eine ringförmige Quadrik. Das heißt die projizierenden Geraden von ζ schneiden die Fläche $\mathbf{y}(u, v)$ in zwei, einem doppelt zu zählenden oder keinem Punkt. Daraus folgert man, dass der von $\mathbf{x}(u, v)$ beschriebene Teil der Quadrik doppelt überdeckt wird.

Wie im Kapitel 2.4.2 erwähnt wurde, besitzt eine jede rationale Tensorprodukt-Bézier-Fläche bei $u = \infty$ sowie $v = \infty$ einen Basispunkt. Dies gilt somit auch für $\mathbf{y}(u, v)$. Durch die Anwendung von ζ verdoppelt sich jeweils die algebraische Vielfachheit der Basispunkte. Das Flächenstück $\mathbf{x}(u, v)$ besitzt somit zwei doppelt zu zählende Basispunkte bei $u = \infty$ und $v = \infty$. Die Fläche $\mathbf{y}(u, v)$ schneidet außerdem noch die beiden Brenngeraden von ζ in jeweils zwei Punkten und die Fläche $\mathbf{x}(u, v) = \zeta(\mathbf{y}(u, v))$ besitzt damit zusätzlich, zu den beiden doppelt zu zählenden Basispunkten, noch vier weitere Basispunkte.

Die vorherigen Beobachtungen können nun dazu verwendet werden, zu zeigen, dass der implizite Grad dieser rationalen biquadratischen Tensorprodukt-Bézier-Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ genau 2 beträgt. Wir müssen dazu zeigen, dass eine beliebige Gerade im Raum die Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ in höchstens zwei Punkten schneidet. Es sei die Gerade als Schnitt zweier Ebenen $\hat{\mathbf{v}}$ und $\hat{\mathbf{w}}$ gegeben. Die zwei Schnittbedingungen

$$\langle \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{x}(u, v) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{x}(u, v) \rangle = 0$$

definieren, da $\mathbf{x}(u, v)$ maximal den Term u^2v^2 besitzt, zwei implizite Kurven vom Grad 4. Nach dem Satz von Bézout besitzen diese beiden Kurven 16 gemeinsame Schnittpunkte. Jede der beiden Kurven besitzt einerseits die beiden doppelt zu zählenden Basispunkte bei $u = \infty$ und $v = \infty$, womit diese als vierfache Basispunkte zählen. Andererseits sind noch die vier weiteren einfachen Basispunkte von $\mathbf{x}(u, v)$ zu zählen. Von den anfänglichen 16 Schnittpunkten sind somit 12 durch die Basispunkte fixiert und es existieren nur vier freie Schnittpunkte. Da die Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ die Quadrik doppelt überdeckt, werden von den vier freien Schnittpunkten jeweils zwei auf denselben Flächenpunkt abgebildet. Es hat somit jede beliebige Gerade mit $\mathbf{x}(u, v)$ höchstens zwei Schnittpunkte gemein.

Bemerkung 5.5 *Die Tatsache, dass eine jede rationale biquadratische Bézier-Fläche bei $u = \infty$ und $v = \infty$ einen doppelten Basispunkt besitzt, ist die Ursache dafür, dass sich ihr algebraischer Grad von 16 auf höchstens 8 reduziert, siehe [33].*

In den vorhergehenden Äußerungen wurde stets angenommen, dass die bilineare Fläche $\mathbf{y}(u, v)$ eine ringförmige Quadrik beschreibt. Ist das nicht der Fall, treffen obige Überlegungen nicht zu. Es sei angenommen, $\mathbf{y}(u, v)$ beschreibt eine Ebene, die keine der Brenngeraden von ζ enthält. Dann schneidet eine jede projizierende Gerade, bis auf die in der Ebene liegende projizierende Gerade, $\mathbf{y}(u, v)$ in einem Punkt. In diesem Fall überdeckt die biquadratische Fläche $\mathbf{x}(u, v) = \zeta(\mathbf{y}(u, v))$ die Quadrik nur einfach. Die Fläche $\mathbf{y}(u, v)$ schneidet somit die beiden Brenngeraden jeweils nur in einem Punkt und $\mathbf{x}(u, v)$ besitzt daher nur zwei Basispunkte, zusätzlich zu den zweifachen Basispunkten bei $u = \infty$ und $v = \infty$. In diesem Fall würde man die biquadratische Fläche auch erhalten, indem man das Parametergebiet einer rationalen Dreiecks-Bézier-Fläche vom Grad 2 auf $u, v \in [0, 1]$ erweitert. Die biquadratische Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ besitzt damit ebenso viele Basispunkte wie eine Dreiecks-Bézier-Fläche vom Grad 2.

Die obigen Aussagen können zu dem in [12] getätigten Satz zusammengefasst werden.

Satz 5.6 *Es sei $\mathbf{x}(u, v)$ eine reguläre biquadratische Fläche auf der Quadrik Q . Dann gilt entweder:*

- *Die biquadratische Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ wird mittels einer stereografischen Projektion π einer ebenen bilinearen Fläche erzeugt und überdeckt, bis auf das Projektionszentrum \mathbf{z} von π , die ganze Quadrik Q einfach. Alle u - und v -Parameterlinien verlaufen durch das Projektionszentrum \mathbf{z} und für die vier sekundären Schnittpunkte gilt $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_4 = \mathbf{z}$.*

oder

- *Die Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ beschreibt einen Teil der Quadrik Q und überdeckt diesen doppelt. Zusätzlich zu den doppelt zu zählenden Basispunkten bei $u = \infty$ und $v = \infty$, besitzt $\mathbf{x}(u, v)$ noch vier weitere, eventuell konjugiert komplexe Basispunkte. Es existieren jeweils vier u - beziehungsweise v -Parameterlinien, die auf unter Umständen komplexe Erzeugende der Quadrik Q abgebildet werden.*

Der zweite Fall beschreibt nur einen Teil der Quadrik, da nicht alle projizierenden Netzgeraden von ζ , die von $\mathbf{y}(u, v)$ beschriebene ringförmige Quadrik Q treffen. Die jeweils vier u - und v -Parameterlinien, welche auf Erzeugende von Q abgebildet werden, sind genau jene Geraden, die durch die zusätzlichen vier Basispunkte in der Parameterebene verlaufen.

Bemerkung 5.7 *Der Fall, dass nur zwei sekundäre Schnittpunkte identisch sind, kann nicht auftreten. Sei zum Beispiel $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j$ mit $i, j = 1, \dots, 4$ und $i \neq j$, dann gilt für die Urbilder $\zeta(\mathbf{q}_i) = \zeta(\mathbf{q}_j)$. Wir betrachten im Folgenden die Indizes der Eckpunkte modulo 2. Die Eckpunkte $\mathbf{c}_{i-1,i}$, $\mathbf{c}_{i,i}$ und $\mathbf{c}_{i,i-1}$ von $\mathbf{y}(u, v)$ liegen mit der projizierenden Gerade $\zeta(\mathbf{q}_i)$ in einer Ebene. Dasselbe gilt für $\mathbf{c}_{j-1,j}$, $\mathbf{c}_{j,j}$ und $\mathbf{c}_{j,j-1}$ und die projizierende Gerade $\zeta(\mathbf{q}_j)$. Die beiden Ebenen sind somit identisch und enthalten alle vier Eckpunkte $\mathbf{c}_{0,0}$, $\mathbf{c}_{0,1}$, $\mathbf{c}_{1,0}$ und $\mathbf{c}_{1,1}$ der bilinearen Fläche $\mathbf{y}(u, v)$, die damit auch eben ist. Daraus folgt, wenn zwei sekundäre Punkte zusammenfallen, gilt gleich $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_4$.*

5.3.3 Vermutung von U. Fink

Bei den Untersuchungen biquadratischer Bézier-Flächen stellte Fink in [19] eine Vermutung, über die Lage der Trägerebenen der u - und v -Parameterlinien, auf. Diese Vermutung konnte in [12, 13] mit Hilfe der verallgemeinerten stereografischen Projektion gezeigt werden. Anlehnend an diese beiden Arbeiten wollen wir dieselben Schlüsse ziehen und anschließend die gesammelten Beobachtungen, zu der von Fink geäußerten Vermutung, zusammenfassen. Um spätere Beobachtungen besser verstehen zu können, wollen wir zuerst noch einige zusätzliche Bemerkungen zu dualen Kurven und Flächen sowie zu *Quadrikenbüscheln* geben.

Duale Flächen

Eine Fläche kann einerseits als die Menge von Punkten die auf der Fläche liegen beschrieben werden. Andererseits kann sie als die Einhüllende einer Menge von Tangentialebenen formuliert werden.

Eine beliebige Gerade schneidet eine Fläche in einer endlichen Anzahl von Punkten, die gleich dem Grad der Fläche in Punktkoordinaten entspricht. Die maximale Anzahl an Schnittpunkten bezeichnen wir als Grad der Fläche. Dual dazu wird der Grad einer Fläche in Ebenenkoordinaten, *Klasse* genannt, durch die Anzahl der Tangentialebenen an die Fläche, welche durch eine beliebig vorgegebene Gerade des Raumes verlaufen, definiert. Die Menge der Punkte, die eine

Ebene gemeinsam mit einer Fläche besitzt, bildet eine ebene Kurve, deren Grad dem der Fläche entspricht. Dual dazu bilden die Ebenen eines Ebenenbündels (alle Ebenen gehen durch einen Punkt), die tangential an die Fläche sind, einen Kegel, dessen Klasse gleich dem der Fläche ist. Es gilt somit, dass ein Kegel n -ter Klasse dual zu einer ebenen Kurve n -ten Grades ist. Eine ebene Kurve ist somit eine einparametrische Menge von Punkten und ein Kegel ist eine einparametrische Schar von Tangentialebenen. Zu jedem Punkt der Kurve gibt es genau eine Tangente und jede Ebene durch diese Tangente ist eine Tangentialebene der Kurve. Zu jeder Tangentialebene eines Kegels existiert genau eine Tangente, die Erzeugende des Kegels. Jeder Punkt auf dieser Geraden liegt auf dem Kegel. Damit ist ein Kegel eine zweiparametrische Schar von Punkten und eine ebene Kurve ist eine zweiparametrische Schar von einhüllenden Ebenen, siehe Kapitel 11 in [34].

Da sich alle Tangentialebenen in einem Punkt schneiden, können wir schließen, dass eine duale Bézier-Kurve zweiter Klasse einen quadratischen Kegel einhüllt.

Quadrikenbüschel

Es seien zwei Quadriken Q_1 und Q_2 mittels impliziten Gleichungen

$$\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^T \cdot B \cdot \mathbf{x} = 0$$

gegeben. Dabei seien A und B zwei reelle reguläre symmetrische 4×4 -Matrizen. Dann beschreibt die Linearkombination

$$\mathbf{x}^T \cdot (\lambda A + \mu B) \cdot \mathbf{x} = 0 \tag{5.9}$$

mit homogenem Parameter $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ eine Familie von Quadriken, auch *Quadrikenbüschel* genannt. Für jedes feste Paar (λ, μ) beschreibt (5.9) eine Quadrik aus dem Büschel. Wir studieren zuerst die Menge der ausgearteten Quadriken im Büschel und betrachten dafür das Polynom $\det(\lambda A + \mu B)$. Dieses Polynom hat in $(\lambda : \mu)$ maximal den Grad 4 und es gibt deshalb höchstens vier, nicht notwendigerweise verschiedene, ausgeartete Quadriken in einem Quadrikenbüschel. Wir betrachten den allgemeinen Fall, dass es sich bei den singulären Quadriken um Kegel handelt und lassen die anderen Fälle außen vor.

Die vier Kegelspitzen bilden in diesem Fall, falls keine drei auf einer Geraden liegen, ein *Polar-tetraeder*. Das heißt die Polarebene eines Eckpunktes des Polartetraeders bezüglich einer jeden regulären Quadrik des Büschels wird von den jeweils anderen drei Punkten aufgespannt. Alle Quadriken eines Büschels besitzen gemeinsame Schnittpunkte, diese bilden eine *Basiskurve*, auch *Grundkurve* genannt. Eine Ebene schneidet das Büschel stets in einem Kegelschnittbüschel und somit haben im Allgemeinen die Grundkurve und eine beliebige Ebene vier Schnittpunkte gemein. Die Grundkurve wird als *Raumkurve vierter Ordnung erster Art* bezeichnet.

Durch jeden Punkt des Raumes existiert genau eine Quadrik des Büschels, welche durch diesen verläuft. Wenn die Koordinaten dieses Punktes in die Büschelgleichung (5.9) eingesetzt werden, erhalten wir eine lineare Gleichung um (λ, μ) zu bestimmen. Die Polarebene zu einem Punkt $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T$ bezüglich einer Quadrik des Quadrikenbüschels ist

$$\lambda P_1 + \mu P_2 = 0.$$

Dabei ist P_1 die Polarebene von \mathbf{x} bezüglich Q_1 und P_2 die Polarebene von \mathbf{x} bezüglich Q_2 . Daraus folgt, dass sich alle Polarebenen eines Punktes bezüglich eines Quadrikenbüschels in einem

Ebenenbüschel befinden und, dass alle Pole zu einer Ebene bezüglich einem Quadrikenbüschel auf einer Gerade liegen.

Eine Quadrik ist laut Abschnitt 2.2.1 durch neun Punkte eindeutig festgelegt. Als Basisflächen eines Quadrikenbüschel können zwei Quadriken gewählt werden, wobei diese durch acht gemeinsame und jeweils einen neunten Punkt festgelegt werden können. Im Allgemeinen ist also ein Büschel und damit eine Raumkurve vierter Ordnung erster Art, also eine Grundkurve, durch acht Punkte bestimmt, vergleiche Kapitel 13 in [34].

Nun können wir mit Hilfe der vorher getätigten Äußerungen, die Vermutung von Fink zeigen.

Wir berechnen die Trägerebenen der v -Parameterlinien einer biquadratischen Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ auf einer Quadrik Q anhand dreier auf ihr liegenden Punkte $\mathbf{x}(u_0, v)$, $\mathbf{x}(u_1, v)$ und $\mathbf{x}(u_2, v)$ mittels

$$\mathbf{T}(v) = \mathbf{x}(u_0, v) \vee \mathbf{x}(u_1, v) \vee \mathbf{x}(u_2, v),$$

wobei man hierzu die Formel (2.1) sowie die Produktformel (2.20) verwendet. Man erhält dadurch eine duale Bézier-Kurve vom Grad 6. Wir haben $\mathbf{x}(u, v)$ mittels Anwendung von ζ auf die bilineare Fläche $\mathbf{y}(u, v)$ erhalten, welche wiederum eine ringförmige Quadrik beschreibt. Diese besitzt jeweils zwei v -Parameterlinien welche die beiden Brenngeraden von ζ schneiden. Dadurch besitzt das vektorwertige Polynom $\mathbf{T}(v)$ mindestens vier Basispunkte. Es ist daher möglich ein quartisches Polynom $p(v)$ abzuspalten und den Grad von $\mathbf{T}(v)$ auf zwei zu minimieren. Die duale Bézier-Kurve $\mathbf{T}(v)$ zweiten Grades hüllt dementsprechend einen quadratischen Kegel V ein, der auch zu einer Geraden entarten kann. Mit der gleichen Argumentation erhält man, dass die Trägerebenen der u -Parameterlinien einen quadratischen Kegel U einhüllen. Es gibt somit zu einer biquadratischen Fläche auf einer regulären Quadrik zwei Kegel, deren Tangentialebenen die Quadrik in ihren Parameterlinien schneidet. Der Schnitt jeweils eines Kegels mit der Quadrik ergibt damit die gleiche quartische Kurve und die Quadrik liegt somit in einem Quadrikenbüschel. Die beiden Kegel sollen die impliziten Gleichungen Q_1 und Q_2 mit

$$\mathbf{x}^T \cdot Q_1 \cdot \mathbf{x} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^T \cdot Q_2 \cdot \mathbf{x} = 0$$

besitzen. Dabei sind Q_1 und Q_2 zwei symmetrische 4×4 -Matrizen mit Rang 3. Es gibt somit ein $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$, sodass die Gleichung (5.9) die Quadrik Q beschreibt.

Die beiden Kegel Q_1 und Q_2 sind zwei der vier entarteten Quadriken die in einem allgemeinen Quadrikenbüschel liegen und daher sind deren beiden Kegelspitzen polar zu einander bezüglich jeder regulären Quadrik im Büschel und somit insbesondere bezüglich Q . Die gesammelten Beobachtungen können wir nun zusammenfassen im folgenden

Satz 5.8 (Vermutung von U. Fink) *Falls eine biquadratische Parameterdarstellung der Quadrik Q nicht zu einem Punkt oder einem Kegelschnitt entartet, so hüllen die von den Trägerebenen der u - und der v -Parameterlinien gebildeten Ebenenscharen jeweils einen quadratischen Kegel ein oder sie liegen in einem Ebenenbüschel. Wenn beide Scharen von Trägerebenen je einen Kegel einhüllen, dann sind diese zusammen mit der Quadrik Q in einem Quadrikenbüschel, wobei die beiden Kegelspitzen polar zueinander bezüglich der Quadrik Q liegen. Die Schnittkurven der beiden Kegel mit der Quadrik sind identisch. Sie bilden die Hüllkurve der Kegelschnitte der biquadratischen Parameterdarstellung, welche eine doppelte Überdeckung eines Teiles der Quadrik beschreibt.*

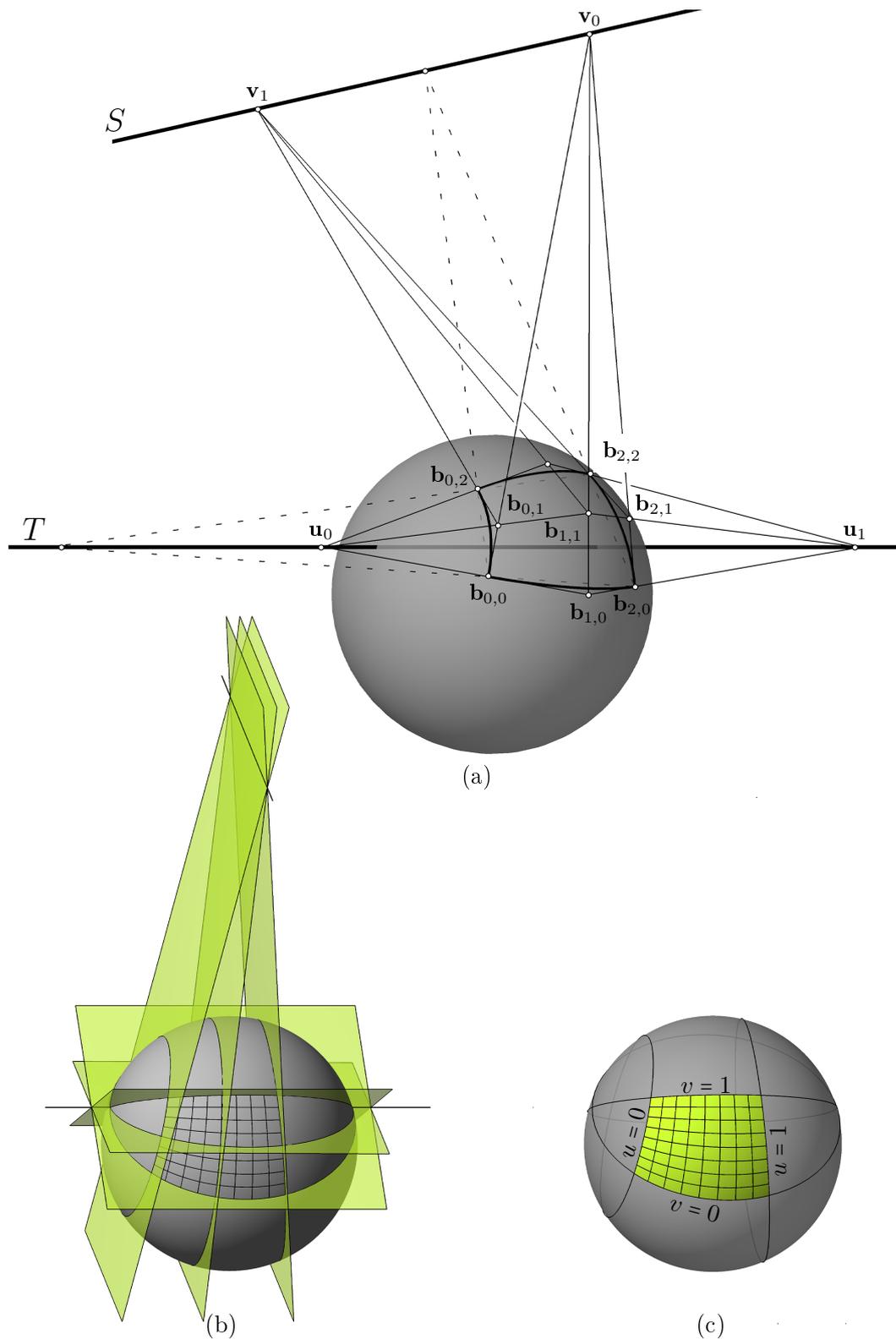


Abbildung 5.4: (a) Darstellung der Pole zu den Trägerebenen der Parameterlinien. (b) Darstellung der Trägerebenen der Parameterlinien und deren Schnitt in einer Trägergeraden. (c) Zugehöriges biquadratische Tensorprodukt-Bézier-Flächenstück.

Der Fall, dass die Trägerebenen der Parameterlinien Ebenenbüschel bilden, tritt auf, wenn zwei projizierende Geraden auf der bilinearen Fläche $\mathbf{y}(u, v)$ liegen.

Ein einfaches Beispiel eines rationalen biquadratischen Flächenstücks auf der Kugel U , bei dem die Parameterlinien jeweils in einem Ebenenbüschel liegen und zusätzlich die u - beziehungsweise v -Parameterlinien entlang der Breitenkreise und Meridiane verlaufen, wurde in [5] konstruiert. Um ein solches Flächenstück auf der Kugel U zu generieren, nützen Boehm und Hansford in [5] einige Eigenschaften aus.

Die Trägerebenen zu den Parameterlinien $u = 0$ und $u = 1$ schneiden sich in der Gerade S . Mit \mathbf{u}_0 und \mathbf{u}_1 bezeichnen wir die beiden Pole dieser Trägerebenen bezüglich der Quadrik U . Diese beiden Punkte spannen eine Achse T auf. Die Trägerebenen der Parameterlinien $v = 0$ und $v = 1$ schneiden sich in der Achse T . Die Pole \mathbf{v}_0 und \mathbf{v}_1 der Trägerebenen zu den Parameterlinien $v = 0$ und $v = 1$ spannen wiederum die Gerade S auf. Die Trägerebenen der Parameterlinien liegen jeweils in einem Ebenenbüschel mit Trägergerade S beziehungsweise T . Aufgrund der Dualität liegt der Pol einer Trägerebene bezüglich der Quadrik U jeweils auf der Trägergerade des anderen Ebenenbüschels.

Die Verbindungsgerade zweier jeweils gegenüberliegender Bézier-Kontrollpunkte schneidet sich in S beziehungsweise T . Daraus folgt, dass die vier Bézier-Kontrollpunkte $\mathbf{b}_{0,0}$, $\mathbf{b}_{2,0}$, $\mathbf{b}_{0,2}$ und $\mathbf{b}_{2,2}$ in einer Ebene liegen müssen.

Die Tangenten zu $u = 0$ und $u = 1$ bei $v = 0$, also die Tangenten in den Kontrollpunkten $\mathbf{b}_{0,0}$ und $\mathbf{b}_{2,0}$, schneiden sich in \mathbf{v}_0 . Entsprechendes gilt für die anderen Tangenten. Zuletzt gilt noch, dass sich die Verbindungsgeraden von $\mathbf{b}_{0,1}$, $\mathbf{b}_{1,0}$, $\mathbf{b}_{2,1}$ und $\mathbf{b}_{1,2}$ mit jeweils $\mathbf{b}_{1,1}$ im Punkt \mathbf{u}_0 , \mathbf{v}_0 , \mathbf{u}_1 beziehungsweise \mathbf{v}_1 schneiden.

5.3.4 Patchwork-Theorem

In Abschnitt 4.3.1 haben wir schon ein Verfahren kennengelernt, das aus einer rationalen Dreiecks-Bézier-Fläche vom Grad 2 ein biquadratisches Flächenstück mit der gleichen Parametrisierung erzeugt. In Satz 5.6 wurde gezeigt, dass ein jedes biquadratisches Flächenstück, welches die Quadrik nur einfach überdeckt, mittels einer stereografischen Projektion erzeugt wird. Wir haben in Kapitel 4 gesehen, dass es eine eindeutige Beziehung zwischen Dreiecksflächen und stereografischen Projektionen gibt. Es stellt sich die Frage, ob es solche Zusammenhänge auch für biquadratische Flächen, welche die Quadrik doppelt überdecken, und Dreiecksflächen gibt. Allgemeine Aussagen darüber, die auch den Fall der einfach überdeckten Quadrik enthalten, sind in [12] gegeben. Für den Fall der Kugel wurde in [14] ein Kriterium gegeben. Die Aussagen werden im Folgenden zusammengefasst.

Lemma 5.9 *Eine jede rationale biquadratische Tensorprodukt-Bézier-Fläche auf einer regulären Quadrik Q kann in zwei Dreiecks-Bézier-Flächen vom Grad 2 zerlegt werden.*

Beweis. Im gesamten Beweis werden die Indizes modulo 4 betrachtet. Wir verwenden die gleiche Notation wie in Satz 5.3 und bezeichnen mit $k_{i,i+2}$, $i = 1, \dots, 4$ den Kegelschnitt durch die Punkte \mathbf{p}_i , \mathbf{p}_{i+2} , \mathbf{q}_{i-1} und \mathbf{q}_{i+1} , der laut Satz 5.3 existiert. Dann sind alle Voraussetzungen von Satz 4.2 erfüllt und wir können die beiden rationalen Dreiecks-Bézier-Flächen vom Grad 2 festlegen. Die erste rationale Dreiecks-Bézier-Fläche besitzt als Randkurven die Kegelschnittsegmente $k_{i,i+2}$, $k_{i,i+1}$ und $k_{i+1,i+2}$, wobei \mathbf{q}_{i+1} als gemeinsamer Punkt der Randsegmente dient. Die zweite Dreiecks-Bézier-Fläche besitzt als Randkurven $k_{i,i+2}$, $k_{i+2,i-1}$ und $k_{i-1,i}$ und als Projektionszentrum \mathbf{q}_{i-1} . \square

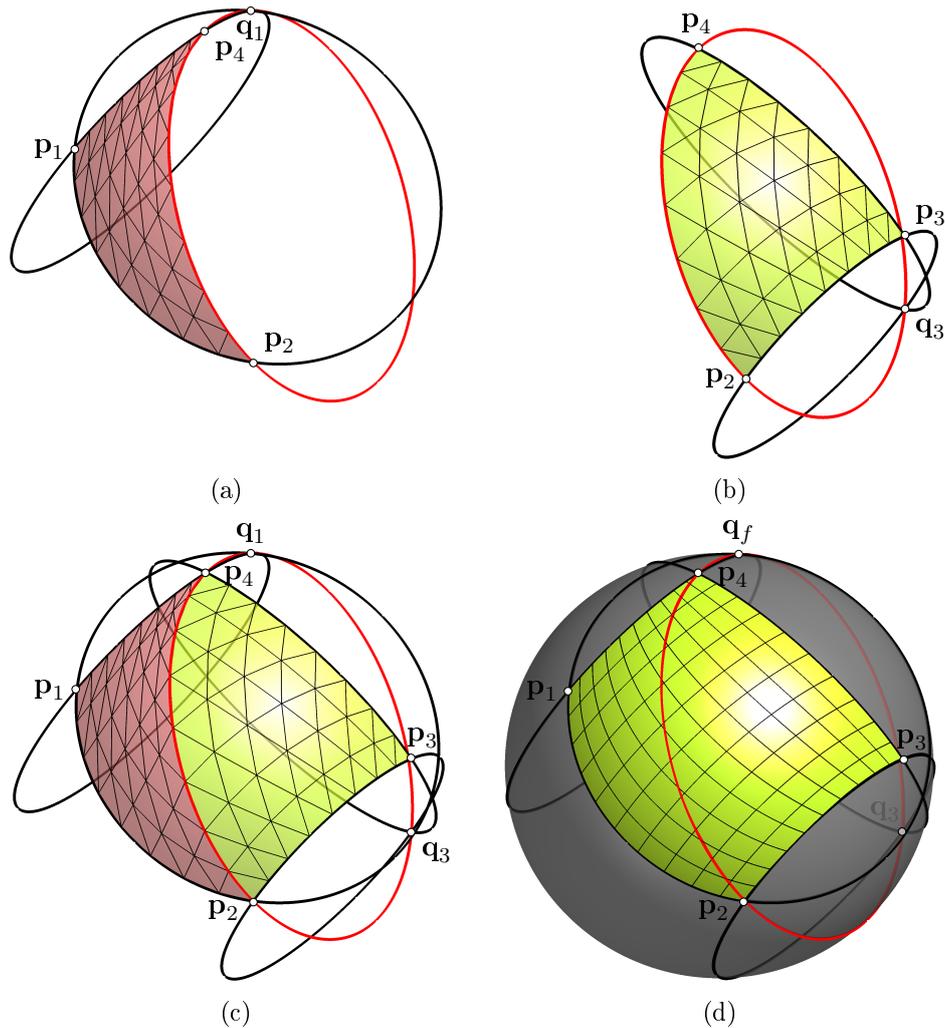


Abbildung 5.5: Beispiel für das Zusammenfügen zweier Dreiecks-Bézier mit einem gemeinsamen Randkegelschnitt, zu einer biquadratischen Tensorprodukt-Bézier-Fläche.

Ein Beispiel für eine solche Zerlegung in zwei Dreiecks-Bézier-Flächen ist in Abbildung 5.5 zu sehen. Eine Antwort auf die Frage, wann zwei rationale Dreiecks-Bézier-Flächenstücke vom Grad 2 auf einer Quadrik Q zu einem biquadratischen Tensorprodukt-Bézier-Flächenstück zusammengesetzt werden können, gibt folgendes

Lemma 5.10 *Zwei Dreiecks-Bézier-Flächen vom Grad 2 auf einer Quadrik Q , die eine Randkurve gemeinsam haben, können zu einem biquadratischen Bézier-Flächenstück zusammengesetzt werden.*

Beweis. Wir müssen nachprüfen, ob alle Voraussetzungen von Satz 5.3 erfüllt sind. Ist dies der Fall, existiert die biquadratische Tensorprodukt-Bézier-Fläche. Wir bezeichnen die beiden Dreiecksflächen mit $\mathbf{x}_1(u, v)$ und $\mathbf{x}_3(u, v)$, wobei diese die drei Eckpunkte \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 und \mathbf{p}_4 sowie \mathbf{p}_3 , \mathbf{p}_2 und \mathbf{p}_4 besitzen. Mit \mathbf{q}_1 und \mathbf{q}_3 bezeichnen wir jeweils den gemeinsamen Punkt der Randkegelschnitte von $\mathbf{x}_1(u, v)$ und $\mathbf{x}_3(u, v)$. Die Randkurve durch die Eckpunkte \mathbf{p}_2 und \mathbf{p}_4 ist die gemeinsame Randkurve.

Die Punkte \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_4 , \mathbf{q}_1 und \mathbf{q}_3 liegen dann auf einem Kegelschnitt. Der Kegelschnitt durch \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 von $\mathbf{x}_1(u, v)$ und der Kegelschnitt durch \mathbf{p}_3 und \mathbf{p}_2 von $\mathbf{x}_3(u, v)$ schneiden sich, zusätzlich

zum Punkt \mathbf{p}_2 noch im Punkt \mathbf{q}_2 und dieser ist somit ein sekundärer Schnittpunkt. Für den Punkt \mathbf{q}_1 kann ähnlich argumentiert werden. Die zwei fehlenden sekundären Schnittpunkte sind durch die Konfiguration schon festgelegt und es sind alle Voraussetzungen von Satz 5.3 erfüllt. \square

Die Abbildung 5.5 kann somit auch in die umgekehrte Richtung betrachtet werden. Es sind zuerst die beiden Dreiecksflächen gegeben und diese können zu einem biquadratischen Flächenstück zusammengefügt werden. Das heißt wir können die beiden Lemmata zu dem in [14] getätigten Satz zusammenfassen.

Satz 5.11 (Patchwork-Theorem) *Die zwei regulären Dreiecks-Flächenstücke auf der regulären Quadrik Q , welche von den Kegelschnittsegmenten $k_{i,i+2}$, $k_{i,i+1}$ und $k_{i+1,i+2}$ sowie $k_{i,i+2}$, $k_{i-1,i}$ und $k_{i+2,i-1}$ berandet sind, können genau dann als rationale Dreiecks-Bézier-Flächen vom Grad 2 dargestellt werden, wenn das Flächenstück auf Q , welches von den Kegelschnittsegmenten $k_{i,i+1}$, $k_{i+1,i+2}$, $k_{i+2,i-1}$ und $k_{i-1,i}$ berandet wird, als rationale biquadratische Tensorprodukt-Bézier-Fläche dargestellt werden kann.*

Wie Dietz in [12] bemerkt, sind im Allgemeinen die Parametrisierungen im Inneren der Dreiecksflächen beziehungsweise der biquadratischen Fläche verschieden. Wie auch in Abbildung 5.5 zu sehen ist, ist die Zerlegung entlang der Mittelkegelschnitte keine entlang der Parameterlinien $u = v$ beziehungsweise $u = 1 - v$).

Lage des inneren Kontrollpunktes

Man betrachte die beiden Mittelkegelschnitte $k_{1,3}$ und $k_{2,4}$ des biquadratischen Flächenstückes $\mathbf{x}(u, v)$ und bezeichne mit $s_{1,3}$ und $s_{2,4}$ jeweils jenes Kegelschnittsegment von $k_{1,3}$ beziehungsweise $k_{2,4}$, welches $\mathbf{x}(u, v)$ in zwei Dreiecks-Flächenstücke vom Grad 2 teilt. Dann kann der innere Kontrollpunkt $\mathbf{b}_{1,1}$ von $\mathbf{x}(u, v)$ mittels den mittleren Kontrollpunkten der Bézier-Darstellung der beiden Kegelschnittsegmente $s_{1,3}$ und $s_{2,4}$ dargestellt werden.

Wir zeigen diese Eigenschaft für den Fall, dass es sich bei der reguläre Quadrik um die Einheitskugel U handelt. Es gilt daher $\zeta = \delta$. Das bilineare Flächenstück $\mathbf{y}(u, v)$ mit Darstellung (5.1), welches mittels ζ auf $\mathbf{x}(u, v)$ abgebildet wird, sei mit $\mathbf{c}_{i,j} = (c_{i,j}^0, c_{i,j}^1, c_{i,j}^2, c_{i,j}^3)^T$, $i, j = 0, 1$ gegeben. Das Kegelschnittsegment $s_{1,3}$ kann dann als

$$\mathbf{s}_{1,3}(t) = \zeta (B_0^1(t) \mathbf{c}_{0,0} + B_1^1(t) \mathbf{c}_{1,1}) \quad (5.10)$$

$$= B_0^2(t) \mathbf{p}_1 + B_1^2(t) \mathbf{p}_{13} + B_2^2(t) \mathbf{p}_3 \quad (5.11)$$

dargestellt werden, wobei der Punkt \mathbf{p}_{13} den Koordinatenvektor

$$\mathbf{p}_{13} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{1,0}^T \cdot \mathbf{c}_{0,1} \\ c_{0,1}^0 c_{1,0}^1 + c_{0,1}^1 c_{1,0}^0 - c_{0,1}^2 c_{1,0}^3 - c_{0,1}^3 c_{1,0}^2 \\ c_{0,1}^0 c_{1,0}^2 + c_{0,1}^1 c_{1,0}^3 + c_{0,1}^2 c_{1,0}^0 + c_{0,1}^3 c_{1,0}^1 \\ -c_{0,1}^0 c_{1,0}^0 + c_{0,1}^1 c_{1,0}^1 + c_{0,1}^2 c_{1,0}^2 - c_{0,1}^3 c_{1,0}^3 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

besitzt. Den Koordinatenvektor für den mittleren Kontrollpunkt \mathbf{p}_{24} des Kegelschnittsegmentes $s_{2,4}$ erhält man, indem man in Gleichung (5.12), $\mathbf{c}_{0,1}$ und $\mathbf{c}_{1,0}$ durch $\mathbf{c}_{0,0}$ und $\mathbf{c}_{1,1}$ ersetzt. Der innere Kontrollpunkt $\mathbf{b}_{1,1}$ der biquadratischen Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ aus (5.2) ist eindeutig durch

die Randkegelschnittsegmente festgelegt. Um eine Darstellung des inneren Kontrollpunktes von $\mathbf{x}(u, v)$ zu erhalten, verwenden wir, dass $\mathbf{x}(u, v) = \zeta(\mathbf{y}(u, v))$ sowie die Produktformel (2.20) und lesen den Koeffizienten von $B_1^2(u) \cdot B_1^2(v)$ ab. Wir erhalten, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{1,1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{0,0}^T \cdot \mathbf{c}_{1,1} + \mathbf{c}_{1,0}^T \cdot \mathbf{c}_{0,1} \\ c_{0,1}^0 c_{1,0}^1 + c_{0,1}^1 c_{1,0}^0 - c_{0,0}^2 c_{1,1}^3 - c_{0,0}^3 c_{1,1}^2 - c_{0,1}^2 c_{1,0}^3 - c_{0,1}^3 c_{1,0}^2 + c_{0,0}^0 c_{1,1}^1 + c_{0,0}^1 c_{1,1}^0 \\ c_{0,0}^2 c_{1,1}^0 + c_{0,0}^3 c_{1,1}^1 + c_{0,1}^0 c_{1,0}^2 + c_{0,1}^1 c_{1,0}^3 + c_{0,1}^2 c_{1,0}^0 + c_{0,1}^3 c_{1,0}^1 + c_{0,0}^0 c_{1,1}^2 + c_{0,0}^1 c_{1,1}^3 \\ c_{0,0}^2 c_{1,1}^2 - c_{0,0}^3 c_{1,1}^3 - c_{0,1}^0 c_{1,0}^0 + c_{0,1}^1 c_{1,0}^1 + c_{0,1}^2 c_{1,0}^2 - c_{0,1}^3 c_{1,0}^3 - c_{0,0}^0 c_{1,1}^0 + c_{0,0}^1 c_{1,1}^1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{c}_{0,0}^T \cdot \mathbf{c}_{1,1} \\ -c_{0,0}^2 c_{1,1}^3 - c_{0,0}^3 c_{1,1}^2 + c_{0,0}^0 c_{1,1}^1 + c_{0,0}^1 c_{1,1}^0 \\ c_{0,0}^2 c_{1,1}^0 + c_{0,0}^3 c_{1,1}^1 + c_{0,0}^0 c_{1,1}^2 + c_{0,0}^1 c_{1,1}^3 \\ c_{0,0}^2 c_{1,1}^2 - c_{0,0}^3 c_{1,1}^3 - c_{0,0}^0 c_{1,1}^0 + c_{0,0}^1 c_{1,1}^1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_{24}} + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{c}_{1,0}^T \cdot \mathbf{c}_{0,1} \\ c_{0,1}^0 c_{1,0}^1 + c_{0,1}^1 c_{1,0}^0 - c_{0,1}^2 c_{1,0}^3 - c_{0,1}^3 c_{1,0}^2 \\ c_{0,1}^0 c_{1,0}^2 + c_{0,1}^1 c_{1,0}^3 + c_{0,1}^2 c_{1,0}^0 + c_{0,1}^3 c_{1,0}^1 \\ -c_{0,1}^0 c_{1,0}^0 + c_{0,1}^1 c_{1,0}^1 + c_{0,1}^2 c_{1,0}^2 - c_{0,1}^3 c_{1,0}^3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_{13}} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{p}_{24} + \mathbf{p}_{13}). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass der innere Kontrollpunkt $\mathbf{b}_{1,1}$ auf der von den Punkten \mathbf{p}_{13} , \mathbf{p}_{24} aufgespannten Gerade liegen muss.

Im Falle des hyperbolischen Paraboloid H erhält man für

$$\mathbf{p}_{13} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_{0,0}^0 c_{1,1}^3 + c_{0,0}^3 c_{1,1}^0 \\ c_{0,0}^1 c_{1,1}^3 + c_{0,0}^3 c_{1,1}^1 \\ c_{0,0}^0 c_{1,1}^2 + c_{0,0}^2 c_{1,1}^0 \\ c_{0,0}^1 c_{1,1}^2 + c_{0,0}^2 c_{1,1}^1 \end{pmatrix}.$$

Die restlichen Schritte sind analog. Der innere Kontrollpunkt einer biquadratischen Fläche auf einer regulären Quadrik Q kann somit als

$$\mathbf{b}_{1,1} = \frac{1}{2} (\mathbf{p}_{13} + \mathbf{p}_{24}) \quad (5.13)$$

dargestellt werden.

Durch die Beziehung des inneren Kontrollpunktes $\mathbf{b}_{1,1}$ von $\mathbf{x}(u, v)$ mit den beiden mittleren Kegelschnittsegmenten $s_{1,3}$ und $s_{2,4}$ ist es auch möglich, die Kontrollpunkte des biquadratischen Flächenstückes zu berechnen, ohne die bilineare Fläche $\mathbf{y}(u, v)$ zu bestimmen, welche auf $\mathbf{x}(u, v)$ abgebildet wird. Es reicht, alle sechs Kegelschnittsegmente in Bézier-Darstellung zu bestimmen.

Zulässige Randkegelschnittkonfigurationen

Wie nach dem Beweis von Satz 4.2 bemerkt wurde, gilt nicht für alle Randkegelschnittkonfigurationen, dass die Dreiecks-Fläche auf der regulären Quadrik Q liegt. Es stellt sich die Frage, welche der $2^5 = 32$ möglichen Konfigurationen einer biquadratischen Fläche auf einer Quadrik liegen. Aus der Eigenschaft, dass man jedes biquadratische Flächenstück $\mathbf{x}(u, v)$ in zwei Dreiecksflächen vom Grad 2 teilen kann und Satz 4.2, können wir folgern, dass wenn wir eine biquadratische Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ haben, wir eine weitere zulässige Fläche erhalten, indem man bei zwei Randkegelschnittsegmenten zum Komplement übergeht. Es ergibt sich somit, dass es insgesamt acht Konfigurationen zu einer zulässigen Kegelschnittanordnung gibt, die auf der Quadrik liegen.

Bis jetzt wurde noch keine Bedingung angegeben, wann eine biquadratische Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ auf der Quadrik liegt. Es wurde zwar ein Verfahren zur Erstellung von biquadratischen Flächen, auf denen die sekundären Schnittpunkte nicht auf den ausgewählten Randkegelschnitten enthalten sind, und eine notwendige Bedingung im Satz 5.3 gegeben, jedoch wäre eine hinreichende Bedingung wünschenswert. In [15] sowie [12] geben die Autoren eine hinreichende Bedingung für den Fall an, dass die gewählten Kegelschnittsegmente von $k_{i,i+1}$, $i = 1, \dots, 4$ keinen der beiden sekundären Schnittpunkte enthalten. Das Mittelkegelschnittsegment $s_{1,3}$, oder äquivalent dazu $s_{2,4}$, verläuft entweder durch beide oder keinen der beiden sekundären Schnittpunkte.

Ein weiteres Konstruktionsverfahren

Eine weitere Arbeit, die sich mit der Erzeugung biquadratischer Flächen auf Quadriken befasst, ist [20]. Die Autoren erzeugen rationale biquadratische Bézier-Flächen auf der Kugel, dem Zylinder und dem Drehkegel, indem sie die Symmetrieeigenschaften von Kreisen und Bernsteinpolynomen verwenden. Daraus folgern die Autoren eine Reihe von Bedingungen an eine rationale biquadratische Bézier-Fläche auf einer Quadrik. Diese Bedingungen bezeichnen sie als *baryzentrische Eigenschaften*. Mit Hilfe einer Parametrisierung der Quadrik und den baryzentrischen Eigenschaften wurde ein Algorithmus entwickelt, der biquadratische Flächenstücke erzeugt, bei denen die Randkegelschnitte entlang den Parameterlinien der Parametrisierung verlaufen.

5.4 Tensorprodukt-Bézier-Flächen vom Grad (2,4)

Es wurde gezeigt, dass die Randkegelschnitte der Tensorprodukt-Bézier-Flächen auf Quadriken vom Grad (1,1), (1,2) und (2,2) bestimmte Bedingungen erfüllen müssen und nicht beliebig gewählt werden können. Wenn alle vier Randkegelschnitte beliebig wählbar sein sollen, muss somit eine Tensorprodukt-Bézier-Fläche höheren Grades verwendet werden. In [15] sowie [12] wurde mit Hilfe der verallgemeinerten stereografischen Projektion gezeigt, dass ein rationales Tensorprodukt-Bézier-Flächenstück vom Grad (2,4) ausreichend ist, damit die Randkegelschnittsegmente beliebig wählbar sind. Es sollen im Folgenden die Idee und die Konstruktionschritte aus [12] und [14] betrachtet werden, um ein solches Flächenstück auf einer regulären Quadrik Q zu erzeugen.

5.4.1 Konstruktion mit beliebig vorgegebenen Randkurven

Auf einer regulären Quadrik Q seien vier Punkte \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 und \mathbf{p}_4 , sowie vier Kegelschnitte $k_{1,2}$, $k_{2,3}$, $k_{3,4}$ und $k_{4,1}$ vorgegeben. Die Kegelschnitte sind dabei durch die jeweiligen sekundären Schnittpunkte \mathbf{q}_i $i = 1, \dots, 4$ auf der Quadrik festgelegt. Es soll ein rationales Tensorprodukt-Bézier-Flächenstück $\mathbf{x}(u, v)$ vom Grad (2,4), welches die vorgegebenen Punkte als Eckpunkte und die Segmente der vier Kegelschnitte als Randkurven besitzt, berechnet werden. Dazu muss, so wie in den vorherigen Konstruktionen, eine Fläche

$$\mathbf{y}(u, v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 B_i^1(u) B_j^2(v) \mathbf{c}_{i,j} \quad (5.14)$$

gefunden werden, die mittels der verallgemeinerten stereografischen Projektion ζ auf $\mathbf{x}(u, v)$ abgebildet wird.

Die ersten Schritte verlaufen gleich wie im Fall der biquadratischen Fläche. Der Kontrollpunkt

$\mathbf{c}_{0,0}$ kann abermals beliebig auf $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_1)$ gewählt werden. Ausgehend von $\mathbf{c}_{0,0}$ können die Punkte $\mathbf{c}_{1,0}$, $\mathbf{c}_{1,2}$ und $\mathbf{c}_{0,2}$ als Schnitt der Ebenen $\hat{\mathbf{v}}_1$, $\hat{\mathbf{v}}_2$ und $\hat{\mathbf{v}}_3$ mit den projizierenden Geraden $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_2)$, $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_3)$ und $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_4)$ berechnet werden. Dabei werden die Ebenen $\hat{\mathbf{v}}_1$, $\hat{\mathbf{v}}_2$ und $\hat{\mathbf{v}}_3$ von $\mathbf{c}_{0,0}$ und $\zeta^{-1}(\mathbf{q}_2)$, $\mathbf{c}_{1,0}$ und $\zeta^{-1}(\mathbf{q}_2)$ sowie $\mathbf{c}_{1,2}$ und $\zeta^{-1}(\mathbf{q}_4)$ aufgespannt. Die drei Geraden, aufgespannt von den Punkten $\mathbf{c}_{0,0}$ und $\mathbf{c}_{1,0}$, $\mathbf{c}_{1,0}$ und $\mathbf{c}_{1,2}$ sowie $\mathbf{c}_{1,2}$ und $\mathbf{c}_{0,2}$, sind jeweils konjugierte Erzeugende auf einer ringförmigen Quadrik, welche die Urbilder von $k_{1,2}$, $k_{2,3}$ und $k_{3,4}$ unter ζ sind.

Es müssen noch die beiden Kontrollpunkte $\mathbf{c}_{1,1}$ und $\mathbf{c}_{0,1}$ berechnet werden. Da die Gerade, welche von den Punkten $\mathbf{c}_{1,0}$ und $\mathbf{c}_{1,2}$ aufgespannt wird, eine konjugierte Erzeugende ist, wird diese unter ζ auf den Kegelschnitt $k_{2,3}$ abgebildet. Der Kontrollpunkt $\mathbf{c}_{1,1}$ ergibt sich, indem man die rationale lineare Bézier-Kurve

$$B_0^1(v) \mathbf{c}_{1,0} + B_1^1(v) \mathbf{c}_{1,2}$$

graderhöht darstellt. Man erhält dadurch $\mathbf{c}_{1,1} = \frac{\mathbf{c}_{1,0} + \mathbf{c}_{1,2}}{2}$. Der noch fehlende Kontrollpunkt $\mathbf{c}_{0,1}$ kann auf diese Art nicht bestimmt werden, da im Allgemeinen die beiden Punkte $\mathbf{c}_{1,0}$ und $\mathbf{c}_{1,2}$ auf keiner konjugierten Erzeugenden liegen. Wäre dies der Fall, wären alle Voraussetzungen von Satz 5.3 erfüllt und es würde ein Flächenstück vom Grad $(2, 2)$ ausreichend sein.

Es muss daher ein Kegelschnitt durch die beiden Punkte $\mathbf{c}_{0,0}$ und $\mathbf{c}_{0,2}$ gefunden werden, der im Urbild von $k_{4,1}$ unter ζ liegt. Das Urbild von $k_{4,1}$ ist, wie erwähnt, eine ringförmige Quadrik $Q_{4,1}$. Um den gesuchten Kegelschnitt von $\mathbf{y}(u, v)$ zu erhalten, stellen die Autoren in [12, 14] die Quadrik $Q_{4,1}$ als bilineare Tensorprodukt-Bézier-Fläche dar. Eine Darstellung von $Q_{4,1}$ erhält man wie folgt.

Es sei \mathbf{d}_4 der Schnittpunkt der projizierenden Gerade $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_4)$ mit der konjugierten Erzeugenden durch den Punkt $\mathbf{c}_{0,0}$ und \mathbf{d}_1 der Schnittpunkt der projizierenden Gerade $\zeta^{-1}(\mathbf{p}_1)$ mit der konjugierten Erzeugenden durch $\mathbf{c}_{0,2}$. Für geeignete Gewichte von \mathbf{d}_1 und \mathbf{d}_4 kann es erreicht werden, dass die beiden linearen Bézier-Kurven

$$B_0^1(u) \mathbf{c}_{0,0} + B_1^1(u) \mathbf{d}_4 \quad \text{und} \quad B_0^1(u) \mathbf{d}_1 + B_1^1(u) \mathbf{c}_{0,2} \quad (5.15)$$

für jedes $u_0 \in [0, 1]$ dieselbe projizierende Gerade auf der ringförmigen Quadrik $Q_{4,1}$ treffen. Dies wurde in [12] erreicht, indem die Gewichte der beiden bilinearen Bézier-Kurven so gewählt wurden, dass deren äußere Gewichtspunkte

$$\mathbf{w}_4 := \mathbf{c}_{0,0} - \mathbf{d}_4 \quad \text{und} \quad \mathbf{w}_1 := \mathbf{d}_1 - \mathbf{c}_{0,2}$$

auf der gleichen projizierenden Gerade liegen. Dann beschreibt die bilineare Fläche

$$\mathbf{r}(u, v) = B_0^1(u) B_0^1(v) \mathbf{c}_{0,0} + B_0^1(u) B_1^1(v) \mathbf{d}_4 + B_1^1(u) B_0^1(v) \mathbf{d}_1 + B_1^1(u) B_1^1(v) \mathbf{c}_{0,2} \quad (5.16)$$

für $u, v \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ die Quadrik $Q_{4,1}$. Damit beschreibt die rationale quadratische Kurve $\mathbf{c}(v)$ mit

$$\mathbf{c}(v) := \mathbf{r}(v, v) = B_0^2(v) \mathbf{c}_{0,0} + B_0^2(v) \frac{\mathbf{d}_0 + \mathbf{d}_4}{2} + B_2^2(v) \mathbf{c}_{0,2}$$

einen Kegelschnitt durch die beiden Punkte $\mathbf{c}_{0,0}$ und $\mathbf{c}_{0,2}$, der ganz auf der Quadrik $Q_{4,1}$ verläuft.

Der letzte fehlende Kontrollpunkt der Fläche $\mathbf{y}(u, v)$ ist demnach

$$\mathbf{c}_{0,1} = \frac{\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2}{2}.$$

Die ermittelte Fläche $\mathbf{y}(u, v)$ wird mittels ζ auf ein Flächenstück $\mathbf{x}(u, v)$ vom Grad $(2, 4)$ abgebildet, das die entsprechenden Kegelschnitte als Randkurven besitzt.

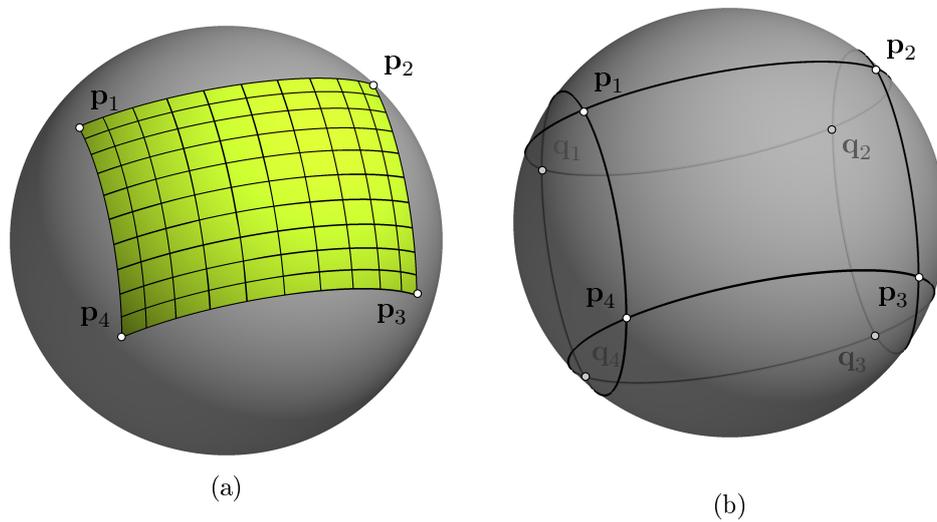


Abbildung 5.6: (a) Ein rationales Tensorprodukt-Bézier-Flächenstück vom Grad $(2, 4)$ auf der Kugel. (b) Die Lage der Randkegelschnitte, wobei sich die Trägerebenen der Randkegelschnitte im rechten Winkel schneiden.

- [1] G. ALBRECHT. *Determination and classification of triangular quadric patches*. In: *Computer Aided Geometric Design* **15** (1998), 675–697.
- [2] G. ALBRECHT. *Rational quadratic Bézier triangles on quadric*. In: *Proceedings Computer Graphics International 1998*. 1998, 34–40.
- [3] M. AUDIN. *Geometry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003.
- [4] W. BLASCHKE. *Projektive Geometrie*. Verlag Birkhäuser, 1954.
- [5] W. BOEHM und D. HANSFORD. *Parametric representation of quadric surfaces*. In: *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* **26** (1992), 191–200.
- [6] H. BRAUNER. *Über Mannigfaltigkeiten von Strahlen mit kongruenten Netzrissen*. In: *Archiv der Mathematik* **7** (1957), 406–416.
- [7] H. BRAUNER und R. BEREIS. *Schraubung und Netzprojektion*. In: *Elemente der Mathematik* **12** (1957), 33–41.
- [8] A. COFFMAN, A.J. SCHWARTZ und C. STANTON. *The algebra and geometry of Steiner and other quadratically parametrizable surfaces*. In: *Computer Aided Geometric Design* **16** (1996), 257–286.
- [9] W.L.F. DEGEN. *The types of triangular Bézier surfaces*. In: *IMA The Mathematics of Surfaces*. 1994, 153–170.
- [10] W.A. DENKER und G.J. HENSON. *Generalizing rational degree elevation*. In: *Computer Aided Geometric Design* **14** (1997), 399–406.
- [11] L.E. DICKSON. *History of the Theory of Numbers*. Chelsea, New York, 1952.
- [12] R. DIETZ. *Rationale Bézier-Kurven und Bézier-Flächenstücke auf Quadriken*. Diss. TH Darmstadt, 1995.
- [13] R. DIETZ, G. GEISE und B. JÜTTLER. *Zur verallgemeinerten stereographischen Projektion*. In: *Mathematica Pannonica* **6/2** (1995), 181–197.
- [14] R. DIETZ, J. HOSCHEK und B. JÜTTLER. *An algebraic approach to curves and surfaces on the sphere and on other quadrics*. In: *Computer Aided Geometric Design* **10** (1993), 211–229.

- [15] R. DIETZ, J. HOSCHEK und B. JÜTTLER. *Rational Patches on Quadrics*. In: *Computer Aided Geometric Design* **27** (1995), 27–40.
- [16] G. FARIN. *From conics to NURBS: A tutorial and survey*. In: *IEEE Computer Graphics and Applications* **12** (1992), 78–86.
- [17] G. FARIN. *Kurven und Flächen im Computer Aided Geometric Design*. Vieweg, 1994.
- [18] G. FARIN, J. HOSCHEK und K. MYUNG-SOO. *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Elsevier, 2002.
- [19] U. FINK. *Biquadratische Bézier-Flächenstücke auf Quadriken*. Diss. Universität Stuttgart, 1992.
- [20] L. GARNIER, S. FOUFOU und D. MICHELUCCI. *Conversion of quadrics into rational biquadratic Bézier patches*. In: *isiCAD. Constraint-based Approaches und Methods of Mathematical Modelling for Intelligent CAD/CAM/CAE systems: From Methods to Applications*. 2004, 140–160.
- [21] G. GEISE und B. JÜTTLER. *A geometrical approach to curvature continuous joints of rational curves*. In: *Computer Aided Geometric Design* **10** (1993), 109–122.
- [22] J. HOSCHEK und D. LASSER. *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Stuttgart Teubner, 1992.
- [23] J. HOSCHEK und G. SEEMANN. *Spherical Splines*. In: *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* **26** (1992), 1–22.
- [24] S.-M. HU. *Conversion between triangular and rectangular Bézier-Patches*. In: *Computer Aided Geometric Design* (2001), 667–671.
- [25] S.-M. HU. *Conversion of a triangular Bézier patch into three rectangular Bézier patches*. In: *Computer Aided Geometric Design* **13** (1996), 219–226.
- [26] B. JÜTTLER. *Zur Konstruktion rationaler Kurven und Flächen auf Quadriken*. In: *Journal of Geometry* **47** (1993), 53–64.
- [27] B. JÜTTLER und K. RITTENSCHÖBER. *Using Line Congruences for Parameterizing Special Algebraic Surfaces*. In: *Mathematics of Surfaces*. **2768**, 223–243.
- [28] H. LIU, L. LI und D. ZHANG. *Converting a triangular Bézier patch into a combination of triangular and rectangular patches*. In: *Computational Intelligence and Software Engineering (CiSE), 2010 International Conference on*. 2010.
- [29] J. NIEBUHR. *Eigenschaften der Darstellung insbesondere degenerierter Quadriken mittels Dreiecks-Bézier-Flächen*. Diss. TU Braunschweig, 1992.
- [30] H. POTTMANN und J. WALLNER. *Computational line geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [31] J. SÁNCHEZ-REYES. *A simple technique for NURBS shape modification*. In: *IEEE Computer Graphics and Applications* **17** (1997), 52–59.
- [32] J. SÁNCHEZ-REYES und M. PALUSZNY. *Weighted radial displacement: A geometric look at Bézier conics and quadrics*. In: *Computer Aided Geometric Design* **17** (2000), 267–289.
- [33] T.W. SEDERBERG und Anderson D.C. *Steiner Surface Patches*. In: *IEEE Computer Graphics and Applications* **5** (1985), 23–36.

- [34] D.M.Y. SOMMERVILLE. *Analytical Geometry of three Dimensions*. The University Press, 1934.
- [35] S. TELLER und C. SEQUIN. *Modeling implicit quadrics and free-form surfaces with trimmed rational quadratic Bézier patches*. Techn. Ber. EECS Department, University of California, Berkeley, 1990.
- [36] J. WARREN. *Creating multisided rational Bézier surfaces using base points*. In: *ACM Transactions on Graphics* **11** (1992), 127–139.