

Jens Markus Melenk

Wolfgang Hackbusch



### DISSERTATION

# Approximation inverser Finite Elementeund Randelementematrizen mittels hierarchischer Matrizen

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der technischen Wissenschaften unter der Leitung von

### Univ.-Prof. Jens Markus Melenk, PhD

E101 - Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien

eingereicht an der Technischen Universität Wien Fakultät für Mathematik und Geoinformation

von

### Dipl.-Ing. Markus Faustmann

Matrikelnummer: 0625721 Margaretenstrasse 133/15 1050 Wien

## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Approximierbarkeit inverser Matrizen, die aus der Diskretisierung verschiedener partieller Differentialgleichungen mittels Finiter Elemente Methode oder Randelementmethode erhalten werden, im Matrixkompressionsformat der hierarchischen Matrizen.

Das Konzept der hierarchischen Matrizen, eingeführt in [Hac99], erlaubt die Speicherung sowie (approximative) arithmetische Operationen in logarithmisch linearer Komplexität. Da inverse Finite Elemente- und Randelementmatrizen im Allgemeinen vollbesetzt sind, und daher Speicherung und Rechnungen mit diesen ineffizient sind, ist die sinnvolle Approximierbarkeit dieser Matrizen durch hierarchische Matrizen wünschenswert.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass Approximationen an inverse Finite Elemente Matrizen für elliptische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit gemischten Randbedingungen sowie für die Lamé-Gleichung existieren und der auftretende Fehler exponentiell im Rang der Approximation konvergiert. Unsere Resultate erweitern die bisher bekannten theoretischen Aussagen, welche nur elliptische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung und die Lamé-Gleichung jeweils mit Dirichlet-Randbedingungen behandelt und Genauigkeit bis zum Diskretisierungsfehler gezeigt haben, auf generellere Randbedingungen und liefern Approximationen mit beliebiger Genauigkeit.

Für inverse Randelementmatrizen ist die Anwendbarkeit von hierarchischen Matrizen bisher nur numerisch beobachtet worden. Eines der Hauptresultate dieser Arbeit ist der Beweis der Existenz einer Approximation an inverse Matrizen zu Diskretisierungen des Einfachschichtoperators sowie des hypersingulären Integraloperators, was eine theoretische Grundlage für den numerisch beobachteten, erfolgreichen Einsatz der hierarchischen Matrizen liefert.

Im Gegensatz zu den bestehenden Ansätzen in der Literatur wird eine volldiskrete Approximation konstruiert, wodurch keine Einschränkung an die Genauigkeit der Approximation entsteht. Ein entscheidender Schritt hierbei ist der Beweis einer diskreten inneren Regularitätsabschätzung, ähnlich zu der klassischen Caccioppoli-Ungleichung.

Neben der Approximation von inversen Matrizen wird auch die Existenz approximativer Cholesky- und LU-Zerlegungen für die erwähnten Finite Elemente- und Randelementdiskretisierungen untersucht. Mit Hilfe der Approximation gewisser Schurkomplemente durch blockweise Niedrigrangmatrizen kann die Existenz approximativer Cholesky- und LU-Zerlegungen im Format der hierarchischen Matrizen gezeigt werden. Diese Faktorisierungen können beispielsweise zur Black-Box-Vorkonditionierung für iterative Lösungsverfahren verwendet werden.

Schlussendlich werden numerische Beispiele angegeben, die die theoretischen Resultate untermauern.

### **Abstract**

This thesis is concerned with the existence of approximations to the inverses of matrices that are obtained from finite element or boundary element discretizations of some partial differential equations. The approximation is performed in the format of hierarchical matrices.

The concept of hierarchical matrices, introduced in [Hac99], permits to store as well as to apply some (approximate) arithmetic operations in logarithmic linear complexity. The inverses of finite element and boundary element matrices are dense in general, which leads to slow computations and large amounts of memory consumption. Therefore, the approximability of these matrices by hierarchical matrices is desirable.

In this thesis, we show that approximations to inverses of finite element matrices for second order elliptic partial differential equations with mixed boundary conditions and for the Lamé equation exist, and the error converges exponentially in the block-rank of the approximation. Our results generalize the known theoretical results for elliptic partial differential equations and the Lamé system with Dirichlet boundary conditions to more general boundary conditions. Moreover, the existence of approximations with arbitrary accuracy is proven, whereas the previous results only achieved accuracy up to the discretization error.

For the inverses of boundary element matrices the applicability of hierarchical matrices has only been observed numerically. One of the main results of this work is the proof of existence of an approximation to the inverse matrices corresponding to discretizations of the single-layer and the hypersingular integral operator. These results give a mathematical foundation to the numerically observed success of hierarchical matrices for the approximation of inverse matrices.

In contrast to the known results in the literature, we work in a fully discrete setting, which leads to approximations of arbitrary accuracy. A main ingredient for our purpose is the proof of a discrete interior regularity result similar to the classical Caccioppoli inequality.

Besides the approximations to inverse matrices, we are also concerned with the existence of approximative Cholesky- and LU-decompositions for the above mentioned finite element and boundary element discretizations. By approximating certain Schur complements by some blockwise low rank factorizations, we are able to prove the existence of approximate Cholesky- and LU-decompositions in the format of hierarchical matrices. For example, these factorizations can be used for black-box preconditioning in iterative solvers.

A series of numerical examples is given, which confirm the theoretical results.

## **Danksagung**

In den letzten vier Jahren, in denen diese Arbeit entstanden ist, haben mich viele Menschen begleitet. Ohne deren Unterstützung wäre es mir nicht möglich gewesen die vorliegende Arbeit zu verfassen, und ich möchte daher hier einigen Personen meinen speziellen Dank dafür aussprechen.

Besonders bedanken möchte ich mich bei meinem Betreuer Prof. Jens Markus Melenk, nicht nur für die Vergabe des interessanten Themas, sondern auch für die hervorragende Betreuung während der letzten vier Jahre. Stets waren die Türen für Diskussionen und Erklärungen offen, seine Begeisterung für Mathematik war regelrecht ansteckend und ich habe enorm viel von ihm gelernt.

Ich möchte mich auch ganz herzlich bei Prof. Wolfgang Hackbusch bedanken, dass er sich die Zeit für die Begutachtung der Dissertation genommen hat.

Ein spezieller Dank gilt auch Prof. Dirk Praetorius, mit dem es mir eine Freude war fachlich zusammenzuarbeiten, und der durch seine fröhliche Art in den Mittagspausen stets für Unterhaltung sorgte.

Das Arbeitsumfeld am Institut für Analysis und Scientific Computing hätte in den letzten Jahren nicht besser sein können. Einen großen Anteil daran haben die vielen tollen Arbeitskollegen, mit denen ich jeden Tag, oft auch nach der Arbeit, lustige Stunden verbringen durfte. Ein großes Dankeschön dafür an Alexander Haberl, Bernhard Stiftner, Gregor Gantner, Marcus Page, Michele Ruggeri und Thomas Führer. Speziell möchte ich Michael Feischl erwähnen, der in den letzten neun Jahren ein guter Freund und ständiger Wegbegleiter war, zuerst als Studien- und dann als Arbeitskollege. Ein ganz besonderer Dank geht an meinen Bürokollegen Alexander Rieder, der mir nicht nur bei einigen Problemen bei den Implementierungen sehr geholfen hat, sondern auch stets gute Laune im Büro verbreitet hat.

Für einen super Ausgleich und viele lustige Abende möchte ich mich bei allen meinen Freunden bedanken. Sei es bei gemütlichem Beisammensitzen, gemeinsamem Sport oder lustigen Pubquizstunden, die Freizeit mit euch zu verbringen war für mich enorm wichtig und hat für oft notwendige Ablenkung gesorgt.

Meiner Familie danke ich von ganzem Herzen für den ständigen Rückhalt. Meine Eltern, Gerlinde und Friedrich, haben von klein auf meine Freude an der Mathematik erkannt und gefördert, mich in meinem Weg stets ermutigt und waren immer für mich da. Ein herzliches Dankeschön auch für das Korrekturlesen der Arbeit. Abschließend möchte ich mich bei meiner Freundin Julia für die vielen schönen und lustigen gemeinsamen Stunden, einige wunderschöne Reisen sowie ihre ständige Unterstützung bedanken.

# Erklärung

Hiermit erkläre ich, Markus Faustmann, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet habe. Außerdem bestätige ich, dass diese Arbeit in dieser oder ähnlicher Form noch nie veröffentlicht wurde.

Wien, am 05. Oktober 2015

# Inhaltsverzeichnis

1	Einl		1					
	1.1	Result	ate und Aufbau der Arbeit	3				
2	Gru	_	de Definitionen und ${\cal H}$ -Matrizen	7				
	2.1		onenräume	7				
	2.2	Diskre	tisierung	10				
		2.2.1	Finite Elemente Diskretisierungen	10				
		2.2.2	Randelementdiskretisierungen	11				
		2.2.3	Interpolation	13				
	2.3	Hierard	chische Matrizen	16				
		2.3.1	Definition von $\mathcal{H}$ -Matrizen	16				
		2.3.2	$\mathcal{H} ext{-Arithmetik}$	20				
	2.4	Lokalis	sierung	22				
3	Mod	dellprob	leme	25				
	3.1	Elliptis	sche partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung	25				
		3.1.1	Gemischte Randbedingungen	25				
		3.1.2	Neumann-Randbedingungen	27				
	3.2	Die La	umé-Gleichung	29				
		3.2.1	Neumann-Randbedingungen	30				
	3.3	9 9						
		3.3.1	Integraloperatoren	32				
		3.3.2	Die schwach-singuläre Integralgleichung	34				
		3.3.3	Die hypersinguläre Integralgleichung	35				
4	Nie	drigdime	ensionale Approximation	39				
	4.1	_	ruktion einer Niedrigrangapproximation	39				
	4.2		sche partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung	41				
		4.2.1	Orthogonalität	42				
		4.2.2	Der Approximationsraum $\mathcal{H}_{h,0}(D,\omega_{\rho})$	42				
		4.2.3	Caccioppoli-artige Ungleichung	42				
		4.2.4	Niedrigdimensionale Approximation in $\mathcal{H}_{h,0}(D,\omega_{\rho})$	46				
		4.2.5	Das reine Neumann-Problem	50				
	4.3	-	amé-Gleichung	53				
	-	4.3.1	Orthogonalität	53				
		4.3.2	Der Approximationsraum $\mathcal{H}_{h,0}(D,\omega_{\rho})$	53				
		4.3.3	Caccioppoli-artige Ungleichung	54				
		4.3.4	Niedrigdimensionale Approximation in $\mathcal{H}_{h,0}(D,\omega_a)$					

		4.3.5 Das Neumann-Problem	58
	4.4	Die schwach-singuläre Integralgleichung	61
		4.4.1 Orthogonalität	61 61
		n	63
		4.4.3 Caccioppoli-artige Ungleichung	68
	4.5	Die hypersinguläre Integralgleichung	71
	4.0	4.5.1 Orthogonalität	71
		4.5.2 Die Approximationsräume $\mathcal{H}_h(D)$ und $\mathcal{H}_{h,0}(D,\Gamma_{\rho},\mu)$	72
		4.5.3 Caccioppoli-artige Ungleichung	74
		4.5.4 Niedrigdimensionale Approximation in $\mathcal{H}_{h,0}(D,\Gamma_{\rho},\mu)$	77
5	App	proximation von inversen Matrizen	83
	5.1	Inverse FEM-Matrizen für elliptische partielle Differential operatoren $\ .\ .\ .$	83
	5.2	Inverse FEM-Matrizen für die Lamé-Gleichung	86
	5.3	Inverse BEM-Matrizen für den Einfachschichtoperator	88
	5.4	Inverse BEM-Matrizen für den hypersingulären Integraloperator	90
	5.5	Der Poincaré-Steklov-Operator	91
6	Vor	konditionierung mit ${\mathcal H}$ -Matrizen	93
	6.1	Darstellung von Schurkomplementen	94
	6.2	Existenz approximativer $LU$ -Zerlegungen mittels approximativer Schurkom-	
		plemente	96
	6.3	Elliptische partielle Differentialgleichungen - $\mathcal{H}$ - $LU$ - $Z$ erlegung	98
	6.4	Die Lamé-Gleichung - $\mathcal{H}$ - $LU$ - $Z$ erlegung	102
	6.5	Die schwach-singuläre Integralgleichung - $\mathcal{H}$ - $LU$ - $Z$ erlegung	103
	6.6	Die hypersinguläre Integralgleichung - $\mathcal{H}$ - $LU$ -Zerlegung	108
	6.7	FEM-BEM-Kopplung	113
7		nerische Experimente	115
	7.1	Numerische Resultate für Finite Elemente Diskretisierungen	115
	7.2	Numerische Resultate für Randelementdiskretisierungen	123
		7.2.1 Der Einfachschichtoperator	123
		7.2.2 Der hypersinguläre Integraloperator	127
	7.3	Vorkonditionierung für FEM-BEM-Kopplung	130
		urverzeichnis	133

## 1 Einleitung

Die numerische Simulation mathematischer Modelle, die zur Beschreibung von kontinuierlichen Abläufen beispielsweise in Natur, Technik oder Physik verwendet werden, führt oftmals auf großskalige Probleme mit mehreren Millionen Unbekannten. Da die Rechenzeiten und der Speicheraufwand für das Aufstellen und Lösen von Gleichungssystemen im Allgemeinen quadratisch oder gar kubisch mit der Problemgröße wachsen, stoßen direkte Methoden trotz stetig wachsender Rechenkapazität der Computer schnell an ihre Grenzen. Um den Rechen- und Speicheraufwand zu reduzieren und eine effiziente Lösung großskaliger Probleme zu garantieren, kann man versuchen, gewisse Matrixkompressionsverfahren anzuwenden, also einfach berechenbare Approximationen an die ursprüngliche Matrix zu finden, die günstig gespeichert und weiterverarbeitet werden können. Damit die Anwendung eines derartigen Verfahrens für das jeweilige Problem sinnvoll ist, sollte der auftretende Fehler klein sein, aber trotzdem eine gute Kompressionsrate erreicht werden.

In der vorliegenden Arbeit werden Diskretisierungen verschiedener partieller Differentialgleichungen mittels Finiter Elemente Methode (FEM) und Randelementmethode (BEM) betrachtet. Die Finite Elemente Methode ist ein in der Anwendung überaus beliebtes Verfahren und wird beispielsweise von Ingenieuren für Belastungstests in der Automobil- oder auch Luft- und Raumfahrtindustrie eingesetzt. Einer der größten Vorteile der FEM - neben der einfachen Implementierung der Methode - ist, dass die Systemmatrizen des aus der FEM resultierenden linearen Gleichungssystems schwach besetzt, beispielsweise Bandmatrizen, sind, also viele Nulleinträge enthalten. Da diese Einträge nicht gespeichert werden müssen, können FEM-Matrizen schnell und effizient aufgebaut und gespeichert werden. Benötigt man allerdings die Inverse oder LU-Zerlegung einer FEM-Matrix, so führt das auf vollbesetzte Matrizen, deren Speicherung teuer ist und für die die Anwendbarkeit eines Matrixkompressionsverfahren wünschenswert ist.

Ein Nachteil der klassischen FEM ist, dass sie nur auf beschränkten Geometrien anwendbar ist. Eine Lösung hierfür bietet die Randelementmethode, bei der anstelle einer Differentialgleichung auf einem Gebiet eine Integralgleichung am Rand dieses Gebiets gelöst wird. Obwohl die damit einhergehende Reduktion der Dimension des Problems auf eine geringere Anzahl an Freiheitsgraden führt, hat die Nicht-Lokalität der Integraloperatoren den Nachteil, dass BEM-Matrizen und somit auch ihre Inversen und LU-Zerlegungen vollbesetzt sind. Da für die BEM-Matrizen auch singuläre Integrale numerisch berechnet werden müssen, ist das Assemblieren von Randelementmatrizen teuer. Um diesem Nachteil der BEM entgegenzuwirken wurden bereits in den 1980er Jahren verschiedene Verfahren zur effizienten Lösung von Integralgleichungen entwickelt, wie beispielsweise die Multipolentwicklung [Rok85, GR97] oder die Panel-Clusterung, [NH88, HN89, HS93, Sau92]. Eine Grundidee hierbei ist die in der Integralgleichung auftretende Fundamentallösung der Differentialgleichung auf gewissen Teilgebieten durch Polynome (beispielsweise mittels Taylorentwicklung) zu approximieren. Einen anderen Ansatz zur Matrixkompression bieten die so genann-

ten Wavelet-Techniken, siehe beispielsweise [Rat98, Rat01, Sch98a, vPSS97, Tau03, TW03], bei denen durch den Einsatz von bestimmten Wavelet-Basen gewisse nicht relevante Matrixeinträge weggelassen werden können, um den Speicheraufwand zu reduzieren. Alle diese Kompressionsverfahren können den Speicheraufwand und somit den Aufwand für die Matrix-Vektor-Multiplikation auf (logarithmisch) linearen Aufwand reduzieren, nicht aber für andere arithmetische Operationen mit Matrizen, wie beispielsweise die Matrix-Matrix-Multiplikation.

Gegen Ende der 90er Jahre entwickelte Hackbusch [Hac99] das Konzept der hierarchischen Matrizen ( $\mathcal{H}$ -Matrizen), siehe auch [GH03, Gra01, Hac09, HK00a, HK00b], welches die Idee der blockweisen niedrigdimensionalen Approximation von Multipolentwicklung und Panel-Clusterung aufgreift und zusätzlich (approximative) arithmetische Operationen, wie Matrix-Addition und Matrix-Matrix-Multiplikation, in logarithmisch linearer Komplexität erlaubt. Die Grundidee ist die Approximation von gewissen zulässigen Nicht-diagonal-Blöcken mittels eines Produkts zweier Matrizen mit niedrigem Rang, was auf eine deutliche Reduktion des Speicheraufwandes führt, da die Speicherung von Niedrigrangmatrizen billig ist. Die übrigen, nicht zulässigen, aber generell kleinen Blöcke werden exakt gespeichert. Für effiziente und praktikable Methoden zur Assemblierung einer  $\mathcal{H}$ -Matrix seien die Algorithmen "adaptive cross approximation" (ACA), [Beb00], "hybrid cross approximation" (HCA), [BG05], mit Hilfe derer Approximationen im  $\mathcal{H}$ -Matrix-Format direkt aus gewissen Einträgen der BEM-Matrizen gewonnen werden können, sowie Interpolation der Kernfunktion, [BG04] oder Quadratur [BG13] erwähnt.

Eine effizientere Variante der  $\mathcal{H}$ -Matrizen sind die so genannten  $\mathcal{H}^2$ -Matrizen, eingeführt in [HKS00, Gie01, HB02], welche die Idee der hierarchischen Matrizen mit einer zusätzlichen hierarchischen Struktur koppelt, und somit (approximative) arithmetische Operationen in linearer Komplexität erlaubt. In engem Zusammenhang zu  $\mathcal{H}^2$ -Matrizen seien auch so genannte hierarchisch semiseparable Matrizen, siehe beispielsweise [Xia13, XCGL09, LGWX12], erwähnt.

Finite Elemente Matrizen können auf Grund ihrer Schwachbesetztheit fehlerfrei im  $\mathcal{H}$ -Matrix-Format gespeichert werden. In [Gra01] ist die erfolgreiche Anwendbarkeit von  $\mathcal{H}$ -Matrizen als Matrixkompressionsformat für Randelementmatrizen theoretisch sowie numerisch untersucht. Obwohl mit Hilfe der  $\mathcal{H}$ -Matrix-Arithmetik auch rekursiv  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximationen an inverse FEM- oder BEM-Matrizen angegeben werden können, ist die Genauigkeit dieser Approximationen unklar. Jedoch zeigten numerische Beobachtungen für inverse FEM-Matrizen in [Gra01] sowie inverse BEM-Matrizen in [Beb05, Gra05] exponentielle Konvergenz des Fehlers im Rang sowie gute Kompressionsraten. Die erste theoretische Erklärung hierfür findet sich in [BH03] für inverse FEM-Matrizen zu elliptischen Differentialoperatoren zweiter Ordnung mit Dirichlet-Randbedingungen. Verallgemeinerungen dieses Resultates finden sich in [Sch06] für elliptische Systeme und [Bör10a] für  $\mathcal{H}^2$ -Matrizen. Die Generalisierung dieser Resultate für allgemeinere Randbedingungen und beliebige Genauigkeit sowie die Existenz einer  $\mathcal{H}$ -Matrix Approximation an inverse Randelementmatrizen, was theoretisch bis dahin noch nicht behandelt war, waren die Ansatzpunkte der vorliegenden Arbeit.

### 1.1 Resultate und Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 werden grundlegende Notationen und Definitionen festgelegt. Zunächst werden Sobolevräume und einige Resultate zu diesen angegeben. Weiters werden die diskreten Funktionsräume für die Finite Elemente Methode und die Randelementmethode und einige Interpolationsoperatoren eingeführt. Schlussendlich wird das Matrixkompressionsformat der hierarchischen Matrizen, eingeführt in [Hac99], vorgestellt und die  $\mathcal{H}$ -Arithmetik erklärt. Der letzte Abschnitt beschäftigt sich mit Resultaten zur Lokalisierung mit Hilfe von Abschneidefunktionen.

In **Kapitel 3** werden die Modellprobleme vorgestellt und die jeweiligen Hauptresultate formuliert. Unsere Approximationsresultate haben die Form

$$\left\|\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}_{\mathcal{H}}\right\|_{2} \le CN^{\alpha}e^{-br^{\beta}},$$

wobei  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  eine (FEM- oder BEM-) Matrix zu einem der nachfolgenden Modellprobleme ist,  $\mathbf{M}_{\mathcal{H}}$  die Approximation im  $\mathcal{H}$ -Matrix-Format mit maximalem blockweisen Rang r und  $C, b, \alpha, \beta$  Konstanten, die vom jeweiligen Modellproblem abhängen.

Als erstes Modellproblem in Abschnitt 3.1 betrachten wir eine Finite Elemente Diskretisierung von elliptischen partiellen Differentialoperatoren zweiter Ordnung mit  $L^{\infty}$ -Koeffizienten mit gemischten Dirichlet-, Neumann- und Robin-Randbedingungen. Die Existenz einer  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation für dieses Modellproblem mit Dirichlet-Randbedingungen wurde bereits in [BH03] diskutiert und in [Bör10a] verbessert, wobei die Genauigkeit der Approximation nur bis zum Diskretisierungsfehler erreicht wird, da eine kontinuierliche Approximation konstruiert wird und anschließend auf den FEM-Raum projiziert wird. Weiters besteht eine Kopplung von Rang und Anzahl der Freiheitsgrade in der Form  $r \sim |\log N|$ . Das hier formulierte Resultat aus Satz 3.1 erreicht beliebige Genauigkeit, da eine volldiskrete Approximation konstruiert wird und somit kein Projektionsfehler auftritt, und gibt eine entkoppelte Fehlerabschätzung an. Weiters werden allgemeinere Randbedingungen betrachtet und auch der Fall eines reinen Neumann-Problems (Satz 3.3) mit Hilfe einer Sattelpunktformulierung sowie einer stabilisierten Galerkin-Diskretisierung behandelt.

Unser zweites Modellproblem sind die Lamé-Gleichungen aus der linearen Elastizität. In [Sch06] sind die Ideen aus [BH03] auf elliptische Systeme, wie das Lamé-System mit Dirichlet-Randbedingungen, verallgemeinert. Der kontinuierliche Ansatz liefert abermals Genauigkeit bis zum Diskretisierungsfehler. In Satz 3.6 wird dieses Resultat ohne Einschränkung an die Genauigkeit verallgemeinert. Weiters werden auch reine Neumann-Randbedingungen, mit spezieller Behandlung des Kerns des Differentialoperators, bestehend aus den Starrkörperbewegungen, diskutiert.

In Abschnitt 3.3 werden zunächst die für die Randelementmethode benötigten Integraloperatoren, der Einfachschicht-, Doppelschicht- und hypersinguläre Integraloperator, vorgestellt und einige Resultate für diese Operatoren angegeben. Schließlich wird für die schwachsinguläre Integralgleichung in Satz 3.12 die Existenz einer  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation mit exponentiell im Rang konvergierendem Fehler gezeigt, was bisher nur numerisch beobachtet
worden ist.

In Abschnitt 3.3.3 wird ein ähnliches Resultat für die hypersinguläre Integralgleichung in Satz 3.14 formuliert. Da der hypersinguläre Integraloperator einen Kern hat, wird wie bei den Neumann-Problemen in den Abschnitten 3.1, 3.2 eine Sattelpunktformulierung sowie eine stabilisierte Galerkin-Diskretisierung betrachtet.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Konstruktion von niedrigdimensionalen Approximationen an die Galerkin-Lösungen der Modellprobleme und liefert die essentiellen Schritte zum Beweis der Existenz einer  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an die inversen Matrizen, was schlussendlich in Kapitel 5 gezeigt wird. Der entscheidende Schritt hierbei ist der Beweis einer diskreten Caccioppoli-artigen Ungleichung, also einer Abschätzung einer starken Norm auf einem kleinen Gebiet durch eine schwächere Norm auf einem größeren Gebiet. Kontinuierliche Caccioppoli-Ungleichungen finden sich beispielsweise in [BH03] für elliptische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung und [Sch06] für das Lamé-System. Die diskreten inneren Regularitätsaussagen in Abschnitt 4 haben die Form

$$\|\nabla u\|_{L^{2}(B_{R})} \leq C \frac{h}{\operatorname{dist}(\partial B_{R}, \partial B_{R'})} \|\nabla u\|_{L^{2}(B_{R'})} + C \frac{1}{\operatorname{dist}(\partial B_{R}, \partial B_{R'})} \|u\|_{L^{2}(B_{R'})},$$

wobei  $B_R \subset B_{R'}$  gewisse Teilgebiete sind und h die Gitterweite bezeichnet. Eine Approximation an die Galerkin-Lösung wird mit Hilfe von geeigneter Interpolation und Projektion konstruiert. Auf Grund der obigen Regularitätsabschätzung kann man das Approximationsresultat dann schlussendlich auf geschachtelten Teilgebieten iterieren und erhält eine niedrigdimensionale Approximation, die exponentiell in der Dimension des Approximationsraumes gegen die Galerkin-Lösung konvergiert.

In **Kapitel 5** werden die Hauptresultate aus Kapitel 3 bewiesen. Mit Hilfe einer Approximation an die Galerkin-Lösung kann mittels geeigneten lokalen Basisisomorphismen schließlich eine  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an die inversen Matrizen gefunden werden. Weiters folgt aus dem Approximationsresultat für den Einfachschichtoperator und der  $\mathcal{H}$ -Matrix-Arithmetik auch die Existenz einer  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an den diskreten Poincaré-Steklov-Operator.

Kapitel 6 beschäftigt sich mit der Vorkonditionierung der linearen Systeme aus Kapitel 3. Löst man lineare Gleichungssysteme nicht direkt, sondern mittels iterativer Verfahren, so ist die Konvergenzgeschwindigkeit des iterativen Verfahrens abhängig von der Konditionszahl, also bei symmetrischen, positiv definiten Matrizen von dem Quotienten des größten und kleinsten Eigenwerts. Multipliziert man also das lineare System  $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{f}$  mit einer Matrix  $\mathbf{P}^{-1}$ , sodass der Spektralradius von  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}$  nahe bei 1 liegt, so kann man das neue Gleichungssystem schnell lösen. Ein sinnvoller Vorkonditionierer  $\mathbf{P}$  sollte sowohl diese Eigenschaft besitzen, aber auch mit geringem Aufwand (deutlich geringer als der Aufwand der Invertierung von  $\mathbf{M}$ ) berechenbar sein. Unsere Wahl als Vorkonditionierer  $\mathbf{P}$  ist eine approximative LU-Zerlegung von  $\mathbf{M} \simeq \mathbf{L}_{\mathcal{H}}\mathbf{U}_{\mathcal{H}}$  im  $\mathcal{H}$ -Matrix-Format.

Mit Hilfe der  $\mathcal{H}$ -Matrix-Arithmetik sind in [Lin04, Beb05] Algorithmen zur Berechnung einer approximativen Cholesky- und LU-Zerlegung im  $\mathcal{H}$ -Matrix-Format vorgestellt worden. Numerische Beobachtungen, beispielsweise in [Beb05, Gra05, GHK08, LBG06,

GKLB08], zeigen abermals gute Resultate beim Einsatz der  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegung als Vorkonditionierer. Das erste theoretische Resultat zur Existenz einer  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegung für elliptische Differentialoperatoren zweiter Ordnung findet sich in [Beb07], wo mit Hilfe einer Approximation an Nebendiagonalblöcke gewisser Schurkomplemente mit algebraischen Argumenten eine Approximation an die LU-Faktoren konstruiert wird, wobei die Existenz einer Approximation an die inverse FEM-Matrix mit beliebiger Genauigkeit vorausgesetzt wird. Einerseits zeigen unsere Resultate aus Kapitel 5 diese Voraussetzung und andererseits werden in Abschnitt 6.3 die Resultate aus [Beb07] für generellere Randbedingungen sowie für eine stabilisierte Diskretisierung des reinen Neumann-Problems verallgemeinert. In den weiteren Abschnitten 6.4-6.6 wird die Existenz einer hierarchischen LU-Zerlegung für die weiteren Modellprobleme aus Kapitel 3 gezeigt, für die die Existenz von  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegungen bisher unbekannt waren. Unsere Resultate haben hierbei die Form

$$\|\mathbf{M} - \mathbf{L}_{\mathcal{H}} \mathbf{U}_{\mathcal{H}}\|_{2} \le CN^{\alpha} e^{-br^{\beta}} \|\mathbf{M}\|_{2}$$

mit Konstanten  $C, b, \alpha, \beta$ , die sich bei den jeweiligen Modellproblemen unterscheiden. Die Existenz der  $\mathcal{H}\text{-}LU\text{-}$ Zerlegung wird wie in [Beb07, GKLB09] mit Hilfe von  $\mathcal{H}\text{-}$ Matrix-Approximationen an gewisse Schurkomplemente gezeigt, was allgemein in Abschnitt 6.2 diskutiert wird. Für die Approximation der Schurkomplemente wird hierbei nicht  $\mathcal{H}\text{-}$ Matrix-Arithmetik wie beispielsweise in [GKLB09] verwendet, sondern eine Darstellung der Schurkomplemente als Orthogonalisierung bezüglich gewisser Freiheitsgrade, was auf bessere Abschätzungen im Rang der Approximation führt. Die Niedrigrangapproximation von Schurkomplementen ist auch ein wichtiger Bestandteil in der effizienten Anwendbarkeit von verschiedenen direkten Lösern, siehe beispielsweise für Finite Elemente Diskretisierungen [HY13a, GM14, SY12, Mar09] oder [MR05, CMZ15, HY13b] für Randelementdiskretisierungen.

Abschließend wird ein guter Blockdiagonal-Vorkonditionierer für eine Diskretisierung eines Transmissionsproblems mittels Kopplung von Finiten Elementen und Randelementen mit Hilfe der  $\mathcal{H}$ -LU Zerlegungen für FEM und BEM Matrizen, deren Existenz auf Grund der obig vorgestellten Resultate gewährleistet ist, angegeben.

Schlussendlich werden in **Kapitel 7** numerische Beispiele angeführt, die die theoretischen Resultate der vorherigen Abschnitte, also die Existenz einer  $\mathcal{H}$ -Inversen, für die der Fehler exponentiell im Blockrang konvergiert, sowie die Anwendbarkeit einer  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegung als Vorkonditionierer, verifizieren.

Teile dieser Arbeit setzen sich aus den Arbeiten [FMP14, FMP15c, FMP15b, FMP15a] zusammen, die während der Promotionszeit entstanden sind. In [FMP14, FMP15c] finden sich die oben beschriebenen Resultate für elliptische partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung mit gemischten Randbedingungen, wobei der Fall der reinen Neumann-Randbedingungen nur numerisch untersucht ist. [FMP15b] behandelt die Randelementdiskretisierung niedrigster Ordnung der schwach-singulären Integralgleichung, was in dieser Arbeit auf Diskretisierungen höherer Ordnung verallgemeinert wird. Im Preprint [FMP15a] wird die hypersinguläre Integralgleichung betrachtet.

# 2 Grundlegende Definitionen und $\mathcal{H}$ -Matrizen

In diesem Kapitel werden die verwendeten kontinuierlichen und diskreten Funktionenräume sowie das Matrixkompressionsformat der hierarchischen Matrizen eingeführt. Zunächst werden in Abschnitt 2.1 Sobolevräume positiver und negativer Ordnung definiert sowie Spuroperatoren, Fortsetzungsoperatoren und Spurungleichungen in diesen Räumen angegeben. Abschnitt 2.2 beschäftigt sich mit Volumen- und Randtriangulierungen sowie diskreten Räumen und einigen speziellen Interpolationsoperatoren. In Abschnitt 2.3 werden hierarchische Matrizen eingeführt und einige Eigenschaften dieses Formats - speziell die Existenz einer (approximativen) Arithmetik - diskutiert. Schlussendlich werden in Abschnitt 2.4 Abschneidefunktionen zur Lokalisierung behandelt.

### 2.1 Funktionenräume

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Funktionenräume definiert, speziell werden hierbei Sobolevräume auf Gebieten und am Rand betrachtet. Als grundlegende Referenz dient hierfür [Ada75]. Weiters werden Spuroperatoren und Konormalenableitungen eingeführt, was sich unter anderem in [SS11] findet, sowie Forsetzungsoperatoren, siehe beispielsweise [Neč67, Ada75], und eine multiplikative Spurabschätzung aus [BS02] angegeben.

Im Folgenden bezeichnet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{2,3\}$  immer ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit Rand  $\Gamma := \partial \Omega$ , also eine offene und zusammenhängende Menge, deren Rand sich lokal als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion darstellen lässt. Wir verlangen zusätzlich, dass  $\Omega$  einfach zusammenhängend ist, wodurch der Rand  $\Gamma$  ebenfalls zusammenhängend ist, was wir nur bei den Randelementdiskretisierungen benötigen werden.

Mit  $L^2(\Omega)$  sei der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf  $\Omega$  bezeichnet. Weiters sei  $C^\infty(\overline{\Omega})$  der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf dem Abschluss von  $\Omega$  und  $C_0^\infty(\Omega)$  der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in  $\Omega$ , wobei der Träger einer Funktion u mittels  $\sup(u) := \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$  definiert ist.

Für Multiindices  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ , wobei  $|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$  die Ordnung von  $\alpha$  bezeichnet, und eine genügend oft klassisch differenzierbare Funktion u sei  $D^{\alpha}u$  die Ableitung

$$D^{\alpha}u := \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Existiert die Ableitung  $D^{\alpha}u$  nicht im klassischen Sinn, so kann man die schwache Ableitung,

wieder bezeichnet mit  $D^{\alpha}u$ , einer (lokal) integrierbaren Funktion u mittels

$$\int_{\Omega} D^{\alpha} u \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi dx \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$
 (2.1)

als lineares Funktional im Dualraum von  $C_0^{\infty}(\Omega)$  definieren. Verlangt man, dass die schwache Ableitung  $D^{\alpha}u$  quadratisch integrierbar ist, so führt dies auf eine Definition des Sobolevraumes  $H^k(\Omega)$  mittels

$$H^k(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \, : \, D^{\alpha}u \in L^2(\Omega) \; \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d, 0 \leq |\alpha| \leq k \right\}.$$

Der Sobolevraum  $H^k(\Omega)$  ist versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} := \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, \\ 0 \le |\alpha| \le k}} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v dx$$

ein Hilbertraum und die induzierte Norm ist gegeben als  $\|u\|_{H^k(\Omega)} := \sqrt{\langle u,u\rangle_{H^k(\Omega)}}$ . Wir werden auch die Seminormen  $|u|^2_{H^k(\Omega)} := \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha|=k}} \int_{\Omega} \left(D^\alpha u\right)^2 dx$  verwenden. Verlangt man an

Stelle der Quadratintegrierbarkeit die Beschränktheit der schwachen Ableitungen, so erhält man den Raum  $W^{k,\infty}(\Omega)$  definiert durch

$$W^{k,\infty}(\Omega):=\left\{u\in L^\infty(\Omega)\,:\, D^\alpha u\in L^\infty(\Omega)\;\forall \alpha\in\mathbb{N}_0^d, 0\leq |\alpha|\leq k\right\},$$

wobei  $L^{\infty}(\Omega)$  den Raum der fast überall auf  $\Omega$  beschränkten Funktionen bezeichnet.

Wir benötigen auch Sobolevräume am Rand  $\Gamma$  mit rationaler Ordnung  $k \in \mathbb{Q}$ . Hierfür sei die Slobodeckij-Norm für 0 < k < 1 gegeben durch

$$||u||_{H^k(\Gamma)} := \left( ||u||_{L^2(\Gamma)}^2 + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{d-1+2k}} ds_y ds_x \right)^{1/2},$$

und somit der Sobolevraum  $H^k(\Gamma)$  als  $H^k(\Gamma) := \left\{ u \in L^2(\Gamma) : \|u\|_{H^k(\Gamma)} < \infty \right\}$ .

Alternativ und äquivalent zu obiger Definition kann man den Raum  $H^{1/2}(\Gamma)$  als Spurraum des Raumes  $H^1(\Omega)$  definieren. Der Spuroperator  $\gamma_0^{\rm int}: C^\infty(\overline{\Omega}) \to L^2(\Gamma), u \mapsto u|_{\Gamma}$  ist beschränkt und linear und lässt sich auf Grund der Dichtheit von  $C^\infty(\overline{\Omega})$  in  $H^1(\Omega)$  in stetiger Weise zu einem beschränkten und surjektiven Operator  $\gamma_0^{\rm int}: H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma), u \mapsto u|_{\Gamma}$  fortsetzen. Ersetzt man  $\Omega$  durch  $\Omega^{\rm ext}$ , so erhält man in selber Weise den äußeren Spuroperator  $\gamma_0^{\rm ext}: H^1_{\rm loc}(\Omega^{\rm ext}) \to H^{1/2}(\Gamma)$ , wobei der Raum  $H^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$  definiert ist durch  $H^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^d):=\{u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)': \eta u\in H^1(\mathbb{R}^d) \ \forall \eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\}.$ 

Die Beschränktheit des Spuroperators für gewisse Sobolevräume  $H^k(\Omega)$  ist in folgendem Lemma zusammengefasst.

Satz 2.1 (Spursatz). Sei  $\frac{1}{2} < k \le 1$ . Dann ist der Spuroperator  $\gamma_0^{\text{int}} : H^k(\Omega) \to H^{k-1/2}(\Gamma)$  ein beschränkter linearer Operator. Es existiert also eine Konstante  $C_{\text{tr}}$ , die nur von  $\Omega$  und k abhängt, sodass für alle  $u \in H^k(\Omega)$  gilt

$$\|\gamma_0^{\text{int}} u\|_{H^{k-1/2}(\Gamma)} \le C_{\text{tr}} \|u\|_{H^k(\Omega)}.$$
 (2.2)

Ersetzt man in obiger Spurabschätzung (2.2) die  $H^{k-1/2}(\Gamma)$ -Norm durch die  $L^2(\Gamma)$ -Norm, so kann man eine verschärfte Variante der Spurungleichung erhalten, die so genannte multiplikative Spurabschätzung. Für einen Beweis sei auf [BS02, Ungleichung (1.6.2)] verwiesen.

**Lemma 2.2** (Multiplikative Spurabschätzung). Für den Spuroperator  $\gamma_0^{\text{int}}$  und  $u \in H^1(\Omega)$  gilt die Abschätzung

$$\|\gamma_0^{\text{int}} u\|_{L^2(\Gamma)} \le C_{\text{mtr}} \left( \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \right), \tag{2.3}$$

wobei die Konstante  $C_{\rm mtr} > 0$  nur von  $\Omega$  abhängt.

Mit Hilfe des Spuroperators kann man den Raum  $H_0^1(\Omega; \Gamma_D)$  für eine relativ offene Teilmenge  $\Gamma_D \subseteq \Gamma$  definieren als

$$H_0^1(\Omega; \Gamma_D) := \{ u \in H^1(\Omega) : \gamma_0^{\text{int}} u = 0 \text{ auf } \Gamma_D \}.$$

Eine Umkehrung des Spursatzes liefert die Existenz eines Fortsetzungsoperators. Für einen Beweis sei auf [Neč67, Ch. 2, Thm. 5.7] für die erste Aussage und [Ada75, Thm. 4.32] für die zweite Aussage verwiesen.

**Satz 2.3** (Fortsetzungsoperator). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein Lipschitzgebiet und  $1/2 < k \le 1$ .

• Es existiert ein beschränkter, linearer Operator  $E: H^{k-1/2}(\Gamma) \to H^k(\Omega)$  mit der Eigenschaft  $\gamma_0^{\rm int}(Eu) = u$  für  $u \in H^{k-1/2}(\Gamma)$  und

$$||Eu||_{H^k(\Omega)} \le C_{\text{ext}} ||u||_{H^{k-1/2}(\Gamma)},$$

wobei die Konstante  $C_{\text{ext}}$  nur von  $\Omega$ , k und d abhängt.

• Weiters existiert ein stabiler Fortsetzungsoperator  $\widetilde{E}: H^k(\Omega) \to H^k(\mathbb{R}^d)$  mit  $\widetilde{E}u = u$  in  $\Omega$  und

$$\|\widetilde{E}u\|_{H^k(\mathbb{R}^d)} \le C_{\mathrm{fs}} \|u\|_{H^k(\Omega)},$$

wobei die Konstante  $C_{\mathrm{fs}}$  nur von  $\Omega$ , k und d abhängt.

Kombiniert man beide Fortsetzungsoperatoren aus Satz 2.3, so erhält man einen stabilen Fortsetzungsoperator  $\mathcal{L}: H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\mathbb{R}^d)$  mit  $\gamma_0^{\rm int}(\mathcal{L}u|_{\Omega}) = u$  für  $u \in H^{1/2}(\Gamma)$  und

$$\|\mathcal{L}u\|_{H^k(\mathbb{R}^d)} \le C_{\text{lif}} \|u\|_{H^{k-1/2}(\Gamma)}.$$
 (2.4)

Weiters werden Sobolevräume negativer Ordnung als topologische Dualräume von Sobolevräumen positiver Ordnung definiert, also  $H^{-k}(\Gamma) := (H^k(\Gamma))'$  mit der dualen Norm

$$||u||_{H^{-k}(\Gamma)} := \sup_{v \in H^k(\Gamma)} \frac{\langle u, v \rangle_{\Gamma}}{||v||_{H^k(\Gamma)}},$$

wobei das Dualitätspaar  $\langle u, v \rangle_{\Gamma}$  das erweiterte  $L^2(\Gamma)$ -Skalarprodukt bezeichnet.

 $\text{Mit } L^2_{\text{comp}}(\Omega) := \bigcup_{\substack{T \subset \Omega \\ T \text{kompakt}}} \{u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega) : \text{supp } u \subset T \} \text{ und mittels der Green'schen Formel lässt sich die verallgemeinerte Konormalenableitung } \gamma_1^{\text{int}} \text{ als Abbildung } \gamma_1^{\text{int}} : H^1_{\Delta}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \Delta u \in L^2_{\text{comp}}(\Omega)\} \to H^{-1/2}(\Gamma) \text{ definieren durch}$ 

$$\left\langle \gamma_1^{\rm int} u, \gamma_0^{\rm int} \psi \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = \left\langle \nabla u, \nabla \psi \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle \Delta u, \psi \right\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \tag{2.5}$$

Ersetzt man abermals  $\Omega$  durch  $\Omega^{\rm ext}$ , so erhält man die äußere Konormalenableitung  $\gamma_1^{\rm ext}$ . Die Konormalenableitungen  $\gamma_1^{\rm int}$ ,  $\gamma_1^{\rm ext}$  sind beschränkte Operatoren mit

$$\begin{split} & \left\| \gamma_1^{\text{int}} u \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} & \leq & C \left( \left\| \Delta u \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \nabla u \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ & \left\| \gamma_1^{\text{ext}} u \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} & \leq & C \left( \left\| \Delta u \right\|_{L^2(\Omega^{\text{ext}})} + \left\| \nabla u \right\|_{L^2(\Omega^{\text{ext}})} \right). \end{split}$$

Für den Beweis dieser Aussagen sowie für weitere Eigenschaften der Konormalenableitungen sei auf [SS11, Kap. 2.7] verwiesen.

### 2.2 Diskretisierung

Wir werden in diesem Abschnitt die diskreten Funktionenräume definieren, wobei wir sowohl Diskretisierungen im Gebiet  $\Omega$  (Finite Element Methode) als auch am Rand  $\Gamma$  (Randelementmethode) betrachten. Schlussendlich werden noch ein paar Resultate zu Interpolation angegeben, die in späteren Abschnitten benötigt werden.

### 2.2.1 Finite Elemente Diskretisierungen

Als Zerlegung von  $\Omega$  betrachten wir für h > 0 Triangulierungen  $\mathcal{T}_h = \{T_1, \dots, T_M\}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- 1. Alle  $T \in \mathcal{T}_h$  sind ebene, offene Dreiecke für d=2 oder flache, offene Tetraeder für d=3 in  $\mathbb{R}^d$ . Für jedes Dreieck bzw. jeden Tetraeder definieren wir die Menge der Eckpunkte als  $\mathcal{N}_T = \{x_1^T, \dots, x_{d+1}^T\}$ . Hierbei sei implizit angenommen, dass die Eckpunkte nicht in einem (d-1)-dimensionalen Unterraum liegen. Weiters sind die Kanten  $\mathcal{E}_T$  eines Elements T gerade die Menge aller konvexen Hülle von 2 Knoten in  $\mathcal{N}_T$  sowie für d=3 die Flächen  $\mathcal{F}_T$  eines Elements T die Menge aller konvexen Hülle von 3 Knoten in  $\mathcal{N}_T$ .
- 2. Die Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  überdeckt  $\Omega$ , also  $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \overline{T} = \overline{\Omega}$ .
- 3. Die Triangulierung ist regulär im Sinn von Ciarlet [Cia78], also für zwei verschiedene Elemente  $T, T' \in \mathcal{T}_h$  gilt entweder  $\overline{T} \cap \overline{T'} = \emptyset$  oder  $\overline{T} \cap \overline{T'} = \{x_j\}$  mit  $x_j \in \mathcal{N}_T \cap \mathcal{N}_{T'}$  (gemeinsamer Knoten) oder  $\overline{T} \cap \overline{T'} \in \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{T'}$  (gemeinsame Kante) oder  $\overline{T} \cap \overline{T'} \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_{T'}$  (gemeinsame Fläche).

4.  $\mathcal{T}_h$  ist  $\gamma$ -formregulär, also für festes  $\gamma > 0$  gilt

$$\max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\operatorname{diam}(T)^d}{|T|} \le \gamma,$$

wobei mit |T| die Fläche von T bezeichnet ist. Die Formregularitätskonstante  $\gamma$  liefert eine Schranke für die Entartung der Dreiecke in  $\mathcal{T}_h$ , also eine Schranke an die Winkel der Dreiecke.

5.  $\mathcal{T}_h$  ist quasiuniform mit Gitterweite  $h = \sup_{T \in \mathcal{T}_h} \operatorname{diam}(T)$ , also  $h_T := \operatorname{diam}(T) \sim h$ , wobei  $\operatorname{diam}(T) := \sup_{x,y \in T} |x - y|$ .

Im Folgenden werden Galerkin-Diskretisierungen mit (stetigen) stückweisen Polynomen mit fixem Grad  $p \ge 0$  betrachtet. Hierfür seien die diskreten Räume

$$S^{p,1}(\mathcal{T}_h) := \{ u \in C(\Omega) : u|_T \in P_p(T) \,\forall T \in \mathcal{T}_h \}$$
 (2.6)

$$S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D) := \{ u \in S^{p,1}(\mathcal{T}_h) : u|_{\Gamma_D} = 0 \}$$
 (2.7)

für Volumendiskretisierungen von  $\Omega$  definiert, wobei  $\Gamma_D \subseteq \Gamma$  eine relativ offene Teilmenge ist, und  $P_p(T)$  den Raum der Polynome von maximalem Grad p auf T bezeichnet. Im Fall  $\Gamma_D = \Gamma$  schreiben wir  $S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h)$  statt  $S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h;\Gamma)$ .

Im Folgenden verwenden wir die Notation  $\lesssim$  als Abkürzung für  $\leq C$  mit einer Konstante C > 0, die nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität von  $\mathcal{T}_h$  abhängt. Weiters verwenden wir  $\simeq$  als Abkürzung sofern die beiden Abschätzungen  $\lesssim$  und  $\gtrsim$  gelten.

Wir wählen eine Basis  $\mathcal{B}_h^{\Omega}$  von  $S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h;\Gamma_D)$  mit Dimension  $N_{\Omega}$ . Da unsere Resultate für Matrizen formuliert sind, ist die konkrete Wahl der Basis von Interesse. Hierbei wird nur verlangt, dass für die Basisisomorphismen  $\Phi^{\Omega}: \mathbb{R}^{N_{\Omega}} \to S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h;\Gamma_D)$ ,  $\mathbf{x} \mapsto \sum_{j=1}^{N_{\Omega}} \mathbf{x}_j \psi_j$ ,  $\psi_j \in \mathcal{B}_h^{\Omega}$  gilt, dass

$$h^{d/2} \|\mathbf{x}\|_{2} \lesssim \|\Phi^{\Omega}(\mathbf{x})\|_{L^{2}(\Omega)} \lesssim h^{d/2} \|\mathbf{x}\|_{2} \quad \forall \, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_{\Omega}}. \tag{2.8}$$

Bemerkung 2.4. Standard Basen für p=1 sind die klassischen Hutfunktionen, die  $\psi_j(x_i) = \delta_{i,j}$  mit dem Kronecker-Delta  $\delta_{i,j}$  für einen Knoten  $x_i$  erfüllen. Für  $p \geq 2$  verweisen wir auf [Sch98b, KS99, DKP<sup>+</sup>08]. Diese Basen erfüllen ebenfalls die Annahme (2.8).

### 2.2.2 Randelementdiskretisierungen

Bei Randelementdiskretisierungen betrachten wir Triangulierungen  $\mathcal{E}_h = \{E_1, \dots, E_{\widehat{M}}\}$  von  $\Gamma$  mit den Eigenschaften:

- 1. Alle  $E \in \mathcal{E}_h$  sind gerade, offene Liniensegmente für d=2 oder ebene, offene Dreiecke für d=3 in  $\mathbb{R}^d$ .
- 2. Die Triangulierung überdeckt  $\Gamma$ , also  $\bigcup_{E \in \mathcal{E}_h} \overline{E} = \Gamma$ .
- 3. Die Triangulierung ist regulär im Sinn von Ciarlet (siehe Abschnitt 2.2.1).

4.  $\mathcal{E}_h$  ist  $\gamma$ -formregulär, also für festes  $\gamma > 0$  gilt für d = 2, dass

$$\max_{E \in \mathcal{E}_h} \max_{E' \in \mathcal{E}_h} \frac{|E|}{|E'|} \le \gamma$$

und für d = 3, dass

$$\max_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{\operatorname{diam}(E)^2}{|E|} \le \gamma.$$

5.  $\mathcal{E}_h$  ist quasiuniform mit Gitterweite  $h = \sup_{E \in \mathcal{E}_h} \operatorname{diam}(E)$ .

Für eine Kante/Fläche  $E\in\mathcal{E}_h$  mit affiner Parametrisierung  $\zeta_E:E\to\mathbb{R}^{d-1}$  definieren wir den Raum  $P_p(E)$  der Polynome von Grad p auf E als  $P_p(E) := \{\pi \circ \zeta_E : \pi \in P_p(\mathbb{R}^{d-1})\}.$ Somit erhalten wir die diskreten Räume auf dem Rand  $\Gamma$  als

$$S^{p,0}(\mathcal{E}_h) := \{ u \in L^2(\Gamma) : u|_E \in P_p(E) \, \forall E \in \mathcal{E}_h \}$$
 (2.9)

$$S^{p,1}(\mathcal{E}_h) := \{ u \in C(\Gamma) : u|_E \in P_p(E) \,\forall E \in \mathcal{E}_h \}. \tag{2.10}$$

Wir wählen Basen  $\mathcal{B}_h^{\Gamma,i}$  von  $S^{p,i}(\mathcal{E}_h)$ , i=0,1 mit Dimensionen  $N_{\Gamma,i}$ . Für die Wahl der Basen verlangen wir hier, dass für die Isomorphismen  $\Phi^{\Gamma,i}: \mathbb{R}^{N_{\Gamma,i}} \to S^{p,i}(\mathcal{E}_h)$ ,  $\mathbf{y} \mapsto \sum_{j=1}^{N_{\Gamma,i}} \mathbf{y}_j \xi_j^i$ , für  $i \in \{0,1\}$  und  $\xi_j^i \in \mathcal{B}_h^{\Gamma,i}$  folgt, dass

$$h^{(d-1)/2} \|\mathbf{y}\|_{2} \lesssim \|\Phi^{\Gamma,i}(\mathbf{y})\|_{L^{2}(\Gamma)} \lesssim h^{(d-1)/2} \|\mathbf{y}\|_{2} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma,i}}, \ i = 0, 1.$$
 (2.11)

Falls aus dem Kontext klar ist welche der Basen  $\mathcal{B}_h^{\Gamma,i}$  gemeint ist, werden wir auch  $\mathcal{B}_h^\Gamma$  für  $\mathcal{B}_h^{\Gamma,i}$  und  $N_\Gamma$  für  $N_{\Gamma,i}$ schreiben, um die Notation zu vereinfachen.

Für diskrete Funktionen in  $S^{p,i}(\mathcal{E}_h)$  gelten die folgenden inversen Ungleichungen. Ein Beweis für den hier betrachteten Fall von formregulären Gittern findet sich in der grundlegenden Arbeit [DFG<sup>+</sup>01, Thm. 4.1, Thm. 4.7], für eine Verallgemeinerung auf degenerierte Gitter sei auf [GHS05, Thm. 3.2] verwiesen. Die dritte, elementweise inverse Ungleichung findet sich beispielsweise in [SS11, Thm. 4.4.2].

**Lemma 2.5.** Es existiert eine Konstante C > 0, die nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  abhängt, sodass für  $s \in [0, 1]$ 

$$||v_h||_{H^s(\Gamma)} \le Ch^{-s} ||v_h||_{L^2(\Gamma)} \qquad \forall v_h \in S^{p,1}(\mathcal{E}_h),$$
 (2.12)

$$||v_h||_{L^2(\Gamma)} \le Ch^{-1/2} ||v_h||_{H^{-1/2}(\Gamma)} \qquad \forall v_h \in S^{p,0}(\mathcal{E}_h).$$
 (2.13)

Weiters gilt für alle  $T \in \mathcal{T}_h$  und  $0 \le m \le \ell$  die inverse Ungleichung

$$||v_h||_{H^{\ell}(T)} \le Ch^{m-\ell} ||v_h||_{H^m(T)}, \quad \forall v_h \in P_p(T),$$
 (2.14)

wobei die Konstante C > 0 zusätzlich von  $\ell$  abhängt.

Da der Raum  $H^{1/2}(\Gamma)$  auch, äquivalent zu der in Abschnitt 2.1 angeführten Definition, als Interpolationsraum der Räume  $H^1(\Gamma)$  und  $L^2(\Gamma)$  definiert werden kann, folgt die inverse Ungleichung

$$\|v_h\|_{H^1(\Gamma)} \le Ch^{-1/2} \|v_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \qquad \forall v_h \in S^{p,1}(\mathcal{E}_h)$$
 (2.15)

mittels Interpolation der ersten Ungleichung aus (2.12).

### 2.2.3 Interpolation

Im Folgenden wird mehrfach die  $L^2(\Omega)$ -Orthogonalprojektion  $\Pi^{L^2}_{\Omega}: L^2(\Omega) \to V_h$  auf einen endlich dimensionalen Raum  $V_h \subset L^2(\Omega)$ , definiert durch

$$\left\langle \Pi_{\Omega}^{L^2} u, \psi_h \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, \psi_h \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall \psi_h \in V_h,$$
 (2.16)

verwendet. Mittels der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Testen mit der Funktion  $\psi_h = \Pi_{\Omega}^{L^2}u$  erhält man aus obiger Definition die  $L^2(\Omega)$ -Beschränktheit der  $L^2(\Omega)$ -Orthogonal-projektion

$$\left\| \Pi_{\Omega}^{L^2} u \right\|_{L^2(\Omega)} \le \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

In analoger Weise ist die  $L^2(\Gamma)$ -Orthogonalprojektion  $\Pi^{L^2}_{\Gamma}: L^2(\Gamma) \to W_h$  auf einen endlich dimensionalen Raum  $W_h \subset L^2(\Gamma)$  definiert durch

$$\left\langle \Pi_{\Gamma}^{L^2} u, \psi_h \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = \left\langle u, \psi_h \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \forall \psi_h \in W_h.$$
 (2.17)

Für die  $L^2(\Gamma)$ -Orthogonalprojektion auf  $S^{p,0}(\mathcal{E}_h)$  gilt auf Grund ihrer Bestapproximationseigenschaft das Approximationsresultat

$$\left\| u - \Pi_{\Gamma}^{L^2} u \right\|_{L^2(E)} \lesssim h^{p+1} \left| u \right|_{H^{p+1}(E)}$$
 (2.18)

für  $u \in H^{p+1}(E)$  und  $E \in \mathcal{E}_h$ , siehe auch [Ste08] für den Fall p = 0. Für ein Element  $T \in \mathcal{T}_h$  definieren wir den Elementpatch von T als

$$\omega_T := \operatorname{interior} \left( \bigcup \left\{ \overline{T'} \in \mathcal{T}_h : \overline{T} \cap \overline{T'} \neq \emptyset \right\} \right),$$

also als die Vereinigung von T und allen Elementen T', die einen gemeinsamen Knoten mit T haben. Für eine Vereinigung von Elementen  $\Gamma_{\tau} \subset \Gamma$  ist der Elementpatch gegeben als  $\omega_{\Gamma_{\tau}} := \operatorname{interior}\left(\bigcup_{T \in \Gamma_{\tau}} \overline{\omega_T}\right)$ .

In weiterer Folge wird die so genannte Scott-Zhang-Projektion

$$I_h: H^1(\Omega) \to S^{p,1}(\mathcal{T}_h),$$
 (2.19)

erstmals eingeführt in [SZ90], oftmals verwendet. Die Scott-Zhang-Projektion ist ein Quasi-Interpolationsoperator bezüglich einer nodalen Basis, dessen Gewichte über Mittelung über ein Element (sofern der Freiheitsgrad in diesem Element liegt) oder eine Kante (sofern der Freiheitsgrad auf einer Kante liegt) oder einer frei gewählten Kante (sofern der Freiheitsgrad in einem Gitterpunkt liegt) bestimmt werden. Sofern Freiheitsgraden am Rand liegen, kann man, da man im letzten Fall eine beliebige Kante wählen kann, diese Kante als Randkante wählen. Für mehr Details über die Konstruktion der Scott-Zhang-Projektion verweisen wir auf [SZ90]. Einige weitere nützliche Eigenschaften der Scott-Zhang-Projektion finden sich in [AFK+13].

Der derartig konstruierte Operator hat die folgenden Eigenschaften:

• Lokalität: Der Wert von  $I_h u|_T$  für  $T \in \mathcal{T}_h$  hängt nur von den Werten von u auf  $\omega_T$  ab. Somit gilt

$$\operatorname{supp} u \subset \overline{\Gamma_{\tau}} \implies \operatorname{supp} I_h u \subset \overline{\omega_{\Gamma_{\tau}}}.$$

- Erhaltung von Dirichlet-Randbedingungen: Da für Freiheitsgrade am Rand Randkanten mit  $E_T \subset \overline{\Gamma_D}$  gewählt werden können, folgt  $I_h : H_0^1(\Omega; \Gamma_D) \to S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D)$ .
- Stabilität in  $L^2\text{-Norm}$  und  $H^1\text{-Seminorm:}$  Für  $s\in\{0,1\}$  gilt

$$|I_h u|_{H^s(T)} \le C |u|_{H^s(\omega_T)}.$$
 (2.20)

• Approximationseigenschaft: Die Scott-Zhang-Projektion  $I_h$  hat folgende lokale Approximationseigenschaften für  $H^{\ell}(\Omega)$ -Funktionen

$$||u - I_h u||_{H^m(T)}^2 \le C_{SZ} h^{2(\ell - m)} |u|_{H^{\ell}(\omega_T)}^2, \quad 0 \le m \le 1, \ m \le \ell \le p + 1.$$
 (2.21)

Die Konstante  $C_{\rm SZ} > 0$  hängt nur von der  $\gamma$ -Formregularität von  $\mathcal{T}_h$  und der Dimension d ab.

Das folgende Lemma konstruiert einen stabilen Interpolationsoperator aus der Scott-Zhang-Projektion mit einer zusätzlichen Orthogonalität zu Funktionen in  $S^{p,0}(\mathcal{E}_h)$ .

**Lemma 2.6.** Es existiert ein linearer Operator  $\mathcal{J}_h: H^1(\Gamma) \to S^{q,1}(\mathcal{E}_h)$  mit q = p + d und den folgenden Eigenschaften für  $v \in H^1(\Gamma)$ :

i. 
$$\|\mathcal{J}_h v\|_{L^2(E)} \le C \|v\|_{L^2(\omega_E)} \quad \forall E \in \mathcal{E}_h;$$

ii. 
$$\|\nabla \mathcal{J}_h v\|_{L^2(E)} \le C \|\nabla v\|_{L^2(\omega_E)} \quad \forall E \in \mathcal{E}_h;$$

iii. 
$$\langle v - \mathcal{J}_h v, \psi \rangle_{L^2(\Gamma)} = 0 \quad \forall \psi \in S^{p,0}(\mathcal{E}_h);$$

iv. 
$$||v - \mathcal{J}_h v||_{L^2(E)} \le Ch ||\nabla v||_{L^2(\omega_E)} \quad \forall E \in \mathcal{E}_h.$$

Die Konstante C > 0 hängt nur von d, p und der  $\gamma$ -Formregularität von  $\mathcal{E}_h$  ab.

Beweis. Für ein Dreieck E seien  $\chi_\ell^E \in P_q(E), \ \ell = 0, \ldots, \dim(P_p(E)) = \binom{p+d-1}{d-1} =: \widehat{p}$  die Elemente einer dualen Basis zu  $P_p(E)$ , also für jede Basisfunktion  $\xi_j^E \in P_p(E) = S^{p,0}(\mathcal{E}_h)|_E$  gilt  $\left\langle \xi_j^E, \chi_\ell^E \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = 0$  für  $j \neq \ell$ , und der zusätzlichen Eigenschaft, dass  $\chi_\ell^E|_{\partial E} = 0$  und supp  $\chi_\ell^E \subset \overline{E}$ . Weiters seien die Funktionen  $\chi_j^E$  so skaliert, dass  $\left\langle \xi_j^E, \chi_j^E \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = 1$ . Für p=0 sind die Elementbubblefunktionen ein Beispiel für derartige Funktionen. Mit der Scott-Zhang-Projektion  $I_h$  definieren wir

$$\mathcal{J}_h v := I_h v + \sum_{E' \in \mathcal{E}_h} \sum_{j=0}^{\widehat{p}} \chi_j^{E'} \left\langle v - I_h v, \xi_j^{E'} \right\rangle_{L^2(\Gamma)}.$$

Für  $\xi_{\ell}^{E} \in \mathcal{B}_{h}^{\Gamma,0}$  folgt

$$\langle v - \mathcal{J}_h v, \xi_\ell^E \rangle_{L^2(\Gamma)} = \left\langle v - I_h v - \sum_{E' \in \mathcal{E}_h} \sum_{j=0}^{\widehat{p}} \chi_j^{E'} \left\langle v - I_h v, \xi_j^{E'} \right\rangle, \xi_\ell^E \right\rangle_{L^2(\Gamma)}$$

$$= \left\langle v - I_h v, \xi_\ell^E \right\rangle_{L^2(\Gamma)} - \left\langle v - I_h v, \xi_\ell^E \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = 0,$$

was (iii) beweist. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung sowie die Approximationseigenschaft (2.21) von  $I_h$  implizieren

$$||v - \mathcal{J}_h v||_{L^2(E)} \le ||v - I_h v||_{L^2(E)} + \sum_{j=0}^{\widehat{p}} ||\chi_j^E||_{L^2(E)} ||\xi_j^E||_{L^2(E)} ||v - I_h v||_{L^2(E)}$$

$$\lesssim ||v - I_h v||_{L^2(E)} \lesssim h ||\nabla v||_{L^2(\omega_E)},$$

was (iv) beweist. Der erste Punkt (i) folgt analog mit Hilfe der  $L^2$ -Stabilität der Scott-Zhang-Projektion  $I_h$  aus (2.20). Schlussendlich folgt

$$\begin{split} \|\nabla(v - \mathcal{J}_h v)\|_{L^2(E)} &\lesssim \|\nabla(v - I_h v)\|_{L^2(E)} + \sum_{j=0}^{\widehat{p}} \|\nabla \chi_j^E\|_{L^2(E)} \|\xi_j^E\|_{L^2(E)} \|v - I_h v\|_{L^2(E)} \\ &\lesssim \|\nabla(v - I_h v)\|_{L^2(E)} + \frac{1}{h} \|v - I_h v\|_{L^2(E)} \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(\omega_E)} \,, \end{split}$$

und die Dreiecksungleichung liefert (ii).

Wir werden auch den nodalen Interpolationsoperator  $J_h: C(\overline{\Omega}) \to S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D)$  verwenden. Der nodale Interpolationsoperator ist lokal, erfüllt also

$$\operatorname{supp} u \subset B \implies \operatorname{supp} J_h u \subset B. \tag{2.22}$$

Weiters gilt für  $p \geq 1$ , dass  $p+1 > \frac{d}{2}$  für d=2,3, und somit die Approximationseigenschaft für stückweise  $H^{p+1}$ -Funktionen  $u \in C(\overline{\Omega}) \cap H^{p+1}_{\mathrm{pw}}(\Omega, \mathcal{T}_h) := \{u \in L^2(\Omega) : u|_T \in H^{p+1}(T) \, \forall \, T \in \mathcal{T}_h \}$  als

$$||u - J_h u||_{H^m(T)}^2 \le Ch^{2(p+1-m)} |u|_{H^{p+1}(T)}^2, \ 0 \le m \le p+1.$$
 (2.23)

Die Konstante C > 0 hängt nur von d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab.

Der nodale Interpolationsoperator erfüllt im Gegensatz zu der obigen Scott-Zhang-Projektion keine lokale Stabilitätsabschätzung (2.20).

### 2.3 Hierarchische Matrizen

In diesem Kapitel wird das Matrixkompressionsformat der hierarchischen Matrizen ( $\mathcal{H}$ -Matrizen) sowie deren approximative Arithmetik vorgestellt. Die erste Arbeit zum Format der  $\mathcal{H}$ -Matrizen ist [Hac99], und eine detaillierte Diskussion der  $\mathcal{H}$ -Matrix-Arithmetik findet sich in der Dissertation [Gra01]. Für grundlegende Referenzen zu  $\mathcal{H}$ -Matrizen sei auch auf die Bücher [Hac09, Bör10b, Beb08] verwiesen.

Die Grundidee des Kompressionsformates besteht darin, eine Matrix nicht vollbesetzt zu speichern, sondern als (blockweise) approximative Faktorisierung durch jeweils ein Produkt zweier Matrizen, deren Rang deutlich niedriger als die Blockgröße ist, wobei der hierbei gemachte Fehler exponentiell in dem Rang gegen Null konvergiert.

### 2.3.1 Definition von $\mathcal{H}$ -Matrizen

Im Allgemeinen ist es nicht möglich eine Niedrigrangfaktorisierung für die gesamte Matrix zu finden, aber oftmals können gewisse (große) Blöcke approximiert werden. Wir werden in diesem Abschnitt spezifizieren, welche Blöcke für eine Approximation geeignet sind, wofür wir im Folgenden einige grundlegende Definitionen benötigen. Als Referenz sei hierfür beispielsweise auf [Hac09] verwiesen. Wir beginnen mit der Definition eines Cluster-Baumes, welcher die den hierarchischen Matrizen zu Grunde liegende Blockstruktur bzw. Matrixpartition beschreiben wird.

**Definition 2.7** (Cluster, Cluster-Baum). Sei  $\mathcal{I} = \{1, ..., N\}$  eine Indexmenge. Eine Teilmenge  $\tau \subset \mathcal{I}$  heißt Cluster.

Ein Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  ist ein binärer Baum mit Wurzel  $\mathcal{I}$ , d.h. jeder Knoten  $\tau \in \mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  hat entweder zwei disjunkte Söhne, die mit  $\operatorname{sons}(\tau)$  bezeichnet werden, oder hat keine Söhne und wird somit als Blatt des Baumes bezeichnet. Für jeden Knoten  $\tau \in \mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  gilt zusätzlich entweder  $\tau = \bigcup_{\tau' \in \operatorname{sons}(\tau)} \tau'$  für  $\operatorname{sons}(\tau) \neq \emptyset$  oder für die Blätter, also  $\operatorname{sons}(\tau) = \emptyset$ , dass  $|\tau| \leq n_{\text{blatt}}$ , mit einer Konstante  $n_{\text{blatt}} \in \mathbb{N}$ , die nicht von  $\tau$  abhängt. Hier bezeichnet  $|\tau|$  die Kardinalität der endlichen Menge  $\tau$ .

Für einen Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  ist der Produkt-Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}} \times \mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  definiert als induktiv definierter Baum mit Wurzel  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ , für den jeder Knoten  $b \in \mathbb{T}_{\mathcal{I}} \times \mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  die Darstellung  $b = \tau \times \sigma$  mit  $\tau, \sigma \in \mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  hat, und

$$\operatorname{sons}(\tau \times \sigma) := \left\{ \begin{array}{l} \tau \times \operatorname{sons}(\sigma), & \operatorname{sons}(\tau) = \emptyset, \operatorname{sons}(\sigma) \neq \emptyset \\ \operatorname{sons}(\tau) \times \sigma, & \operatorname{sons}(\tau) \neq \emptyset, \operatorname{sons}(\sigma) = \emptyset \\ \operatorname{sons}(\tau) \times \operatorname{sons}(\sigma), & \operatorname{sons}(\tau), \operatorname{sons}(\sigma) \neq \emptyset. \end{array} \right.$$

Für einen Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  gilt allgemein, dass  $|\mathbb{T}_{\mathcal{I}}| \sim \mathcal{O}(N)$ . Die Konstante  $n_{\text{blatt}}$  dient dazu, dass Cluster und dazugehörige Matrixblöcke nicht zu klein werden, und in diesem Fall eine Approximation teurer wäre als eine exakte Berechnung der Einträge.

Eine wichtige Größe eines Cluster-Baumes ist die Baumtiefe, welche mit Hilfe der Level-Funktion angegeben wird.

**Definition 2.8** (Level-Funktion, Tiefe). Für einen Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  sei die Level-Funktion level :  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}} \to \mathbb{N}_0$  induktiv definiert durch level ( $\mathcal{I}$ ) = 0 und level ( $\tau$ ') := level ( $\tau$ ) + 1, falls  $\tau$ ' ein Sohn von  $\tau$  ist. Die Tiefe eines Cluster-Baumes ist depth ( $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$ ) :=  $\max_{\tau \in \mathbb{T}_{\mathcal{I}}}$  level ( $\tau$ ).

Für eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  identifizieren wir den Matrixblock  $\mathbf{A}|_{\tau \times \sigma} \in \mathbb{R}^{|\tau| \times |\sigma|}$  als  $|\tau| \times |\sigma|$ -Matrix, die die Matrixeinträge zugehörig zu den Zeilen in  $\tau \subset \mathcal{I}$  und Spalten in  $\sigma \subset \mathcal{I}$  enthält.

Um einen Zusammenhang zwischen der beschriebenen Baumstruktur und der Approximation von Diskretisierungen von Differentialoperatoren zu erhalten assoziieren wir mit jedem Index  $i \in \mathcal{I}$  eine diskrete Funktion  $\phi_i$ . Für Galerkin-Matrizen  $\mathbf{A}$  mit  $\mathbf{A}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$ , die nachfolgend mit verschiedenen Bilinearformen  $a(\cdot, \cdot)$  betrachten werden, sind dies die (lokalen) Basisfunktionen  $\phi_i$ , beispielsweise von  $S^{p,1}(\mathcal{T}_h)$ . Mit Hilfe einer so genannten Zulässigkeitsbedingung, welche nachfolgend definiert wird, wird entschieden, welche Matrixblöcke der Galerkin-Matrizen gut approximiert werden können.

**Definition 2.9** (Bounding-Box,  $\eta$ -Zulässigkeit). Für einen Cluster  $\tau \subset \mathcal{I}$  und  $R_{\tau} > 0$  definieren wir die Bounding-Box  $B_{R_{\tau}} \subset \mathbb{R}^d$  als offenes Quadrat für d = 2 bzw. als offenen Würfel für d = 3 mit minimaler Seitenlänge  $R_{\tau}$ , sodass

$$\operatorname{supp} \phi_i \subset \overline{B_{R_{\tau}}} \quad \forall i \in \tau.$$

Sei  $\eta > 0$ . Ein Cluster-Paar  $\tau \times \sigma \subset \mathcal{I} \times \mathcal{I}$  heißt  $\eta$ -zulässig, falls zugehörige Bounding-Boxen  $B_{R_{\tau}}$ ,  $B_{R_{\sigma}}$  existieren, die folgende Bedingung erfüllen:

$$\max\{\operatorname{diam}(B_{R_{\tau}}), \operatorname{diam}(B_{R_{\sigma}})\} \le \eta \operatorname{dist}(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}). \tag{2.24}$$

Hier ist  $\operatorname{dist}(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) := \inf\{\|x - y\|_2 : x \in B_{R_{\tau}}, y \in B_{R_{\sigma}}\}$  die Distanz in der euklidischen Norm.

Der Begriff der Bounding-Box ist speziell in der Implementierung hilfreich, da die Distanz zweier Bounding-Boxen wesentlich schneller berechnet werden kann, als die Distanz der Vereinigung von Elementen, die zu den Trägern von Basisfunktionen gehören.

In weiterer Folge wird oftmals der Begriff von konzentrischen (Bounding-)Boxen verwendet, welcher nachfolgend definiert wird.

**Definition 2.10.** Zwei offene Boxen  $B_R$ ,  $B_{R'}$  heißen konzentrische Boxen mit Seitenlängen R und R', falls sie den gleichen Mittelpunkt haben und  $B_R$  aus  $B_{R'}$  durch eine Streckung mit dem Faktor R/R' und dem gemeinsamen Mittelpunkt als Streckungszentrum erhalten werden kann.

Die nachfolgende Graphik zeigt eine Illustration der Zulässigkeitsbedingung.

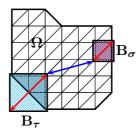


Abbildung 2.1: Bounding-Boxen und Zulässigkeit.

Basierend auf der Zulässigkeitsbedingung kann eine Partition der Produktindexmenge  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$  und somit eine geeignete Partition einer Galerkin-Matrix erhalten werden.

**Definition 2.11** (Zulässige Partition, Nah- und Fernfeld). Eine disjunkte Partition P der Produktindexmenge  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$  heißt auf einem Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  basierend, falls  $P \subset \mathbb{T}_{\mathcal{I}} \times \mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  ist. Sei  $\eta > 0$  ein fixer Zulässigkeitsparameter, dann nennen wir eine derartige Partition zulässig, falls alle  $\tau \times \sigma \in P$  entweder  $\eta$ -zulässig gemäß Definition 2.9 sind, oder  $\min\{|\tau|, |\sigma|\} \leq n_{\text{blatt}}$  gilt.

Für eine zulässige Partition P definieren wir das Fernfeld  $P_{\rm far}$  und das Nahfeld  $P_{\rm near}$  als

$$P_{\text{far}} := \{ \tau \times \sigma \in P : \tau \times \sigma \text{ ist } \eta\text{-zul\"{assig}} \}, \quad P_{\text{near}} := P \setminus P_{\text{far}}.$$
 (2.25)

Eine wichtige Größe für zulässige Partitionen wird durch die so genannte Schwachbesetztheitskonstante  $C_{\rm sp}$ , eingeführt in [HK00a, HK00b, Gra01], angegeben, welche ein Maß für die Anzahl der Blöcke in einer Partition angibt und daher in sämtlichen Rechen- und Speicheraufwandbetrachtungen auftritt.

**Definition 2.12** (Schwachbesetztheitskonstante). Für eine zulässige Partition gemäß Definition 2.11 ist die Schwachbesetztheitskonstante  $C_{\rm sp}$  gegeben als

$$C_{\rm sp} := \max \left\{ \max_{\tau \in \mathbb{T}_{\mathcal{I}}} \left| \left\{ \sigma \in \mathbb{T}_{\mathcal{I}} : \tau \times \sigma \in P_{\rm far} \right\} \right|, \max_{\sigma \in \mathbb{T}_{\mathcal{I}}} \left| \left\{ \tau \in \mathbb{T}_{\mathcal{I}} : \tau \times \sigma \in P_{\rm far} \right\} \right| \right\}. \tag{2.26}$$

Ein Cluster-Baum und eine resultierende zulässige Partition kann auf verschiedene Arten konstruiert werden. Eine Möglichkeit hierfür wäre das so genannte geometrische Clustering. Hierbei werden Bounding-Boxen entlang der längsten Kante in der Mitte geteilt und anschließend für die resultierenden Sohn-Cluster neue Bounding-Boxen bestimmt, die abermals geteilt werden, bis eine zulässige Partition entsteht. In [Gra01] wurde gezeigt, dass für zulässige Partitionen, die mittels geometrischem Clustering erzeugt werden, die Konstante  $C_{\rm sp}$  beschränkt ist unabhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade N.

Eine Alternative wäre das kardinalitäsbasierte Clustering, bei dem die Boxen so geteilt werden, dass die beiden neuen Boxen gleich viele Freiheitsgrade enthalten. Somit erhält man einen balancierten Cluster-Baum mit minimaler Baumtiefe von depth( $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$ )  $\leq \log_2(N)$ . Wir verweisen auf [Hac09, Abschnitt 5.4] für eine genauere Beschreibung der Clustering-Methoden.

Die beiden beschriebenen Clustering-Strategien führen im Allgemeinen auf unterschiedliche zulässige Partitionen. Für unsere Resultate ist die konkrete Wahl der Partition nicht von Interesse, wir zeigen für eine gegebene Partition ein Approximationsresultat, wobei die konkrete Partition in den Abschätzungen nur in den Größen  $C_{\rm sp}$  und depth( $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$ ) eingeht.

Mit Hilfe einer zulässigen Partition können wir nun hierarchische Matrizen als Blockmatrizen definieren, wobei zulässige Blöcke niedrigen Rang haben.

**Definition 2.13** ( $\mathcal{H}$ -Matrizen). Sei P eine zulässige Partition von  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$  gemäß Definition 2.11. Eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  heißt  $\mathcal{H}$ -Matrix (hierarchische Matrix), falls für alle zulässigen Blöcke  $\tau \times \sigma \in P_{\mathrm{far}}$  gilt, dass  $\mathbf{A}|_{\tau \times \sigma} = \mathbf{X}_{\tau \sigma} \mathbf{Y}_{\tau \sigma}^T$  mit Matrizen  $\mathbf{X}_{\tau \sigma} \in \mathbb{R}^{|\tau| \times r}$ ,  $\mathbf{Y}_{\tau \sigma} \in \mathbb{R}^{|\sigma| \times r}$  mit maximalem Rang r. Nicht zulässige Blöcke  $\tau \times \sigma \in P_{\mathrm{near}}$  sind als volle Matrix, also  $\mathbf{A}|_{\tau \times \sigma} \in \mathbb{R}^{|\tau| \times |\sigma|}$ , gegeben.

Für den Speicherbedarf und somit auch den Aufwand der Matrix-Vektor-Multiplikation einer hierarchischen Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  gemäß Definition 2.13 gilt, siehe z.B. [Gra01, Hac09], dass

Speicher(
$$\mathbf{A}$$
)  $\leq C_{\rm sp} \max\{n_{\rm blatt}, r\} (\operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) + 1) N.$ 

Für quasiuniforme Gitter und Partitionen, die mittels geometrischem Clustering erzeugt wurden, gilt für die Tiefe des Cluster-Baumes, siehe [Gra01], dass depth( $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$ )  $\sim \mathcal{O}(\log(N))$ , womit der Speicheraufwand einer hierarchischen Matrix von der Ordnung  $\mathcal{O}(rN\log N)$  ist.

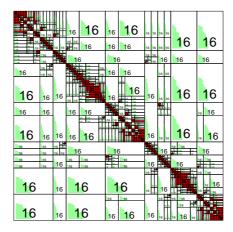


Abbildung 2.2: Illustration einer  $\mathcal{H}$ -Matrix-Struktur. Die grün unterlegten Blöcke sind als Niedrigrangfaktorisierung mit einem maximalen Rang von 16 gespeichert, die roten Blöcke werden vollbesetzt gespeichert.

Bemerkung 2.14. Einige Clustering-Algorithmen verwenden die schwächere Bedingung

$$\min\{\operatorname{diam}(B_{R_{\tau}}), \operatorname{diam}(B_{R_{\sigma}})\} \le \eta \operatorname{dist}(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) \tag{2.27}$$

statt der Zulässigkeitsbedingung (2.24). Um einen zu  $\tau \times \sigma$  gehörigen Matrixblock zu approximieren benötigen unsere Hauptresultate in Kapitel 4 nur eine Bedingung der Form diam $(B_{R_{\tau}}) \leq \eta$  dist $(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}})$ . Für symmetrische Probleme (Modellproblem in Kapitel 3.1 für  $\mathbf{b} = 0$  und Modellprobleme in Kapitel 3.2, 3.3.2) ist eine Approximation des Blocks zu  $\tau \times \sigma$  gleichbedeutend wie eine Approximation des Blocks zu  $\sigma \times \tau$ , und daher kann auch die schwächere Zulässigkeitsbedingung (2.27) gefordert werden.

Wir werden  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximationen in der Spektralnorm suchen, welche gegeben ist durch

$$\|\mathbf{M}\|_2 := \sup_{0 \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \frac{\|\mathbf{M}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2},$$

wobei die Normen der Vektoren auf der rechten Seite euklidische Normen sind. Da im  $\mathcal{H}$ -Matrix-Format einzelne Blöcke approximiert werden, wird eine Abschätzung der globalen Spektralnorm durch die Spektralnormen der Unterblöcke benötigt, was im nachfolgenden

Lemma formuliert ist. Eine erste Variante hierfür findet sich in [Gra01] und in weiterer Folge in [Hac09, Lemma 6.5.8], wobei für den Produkt-Cluster-Baum stufentreue vorausgesetzt wird. Das selbe Resultat ohne eine derartige Voraussetzung findet sich in [Bör10b].

**Lemma 2.15.** Sei  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  und P eine zulässige Partition von  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ . Dann gilt

$$\|\mathbf{M}\|_{2} \leq C_{\mathrm{sp}} \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \max \{ \|\mathbf{M}|_{\tau \times \sigma}\|_{2} : \tau \times \sigma \in P, \mathrm{level}(\tau) = \ell \} \right).$$

Approximationen in anderen Normen sind ebenfalls möglich, beispielsweise in der Forbeniusnorm

$$\|\mathbf{M}\|_F := \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\mathbf{M}_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

Mittels der Abschätzung

$$\|\mathbf{M}\|_{2} \le \|\mathbf{M}\|_{F} \le \sqrt{N} \|\mathbf{M}\|_{2}$$
 (2.28)

für  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  erhält man beispielsweise aus einer Approximation in der Spektralnorm auch direkt eine Approximation in der Frobeniusnorm, wobei der zusätzliche Faktor  $\sqrt{N}$  auftritt.

### 2.3.2 $\mathcal{H}$ -Arithmetik

Einer der größten Vorteile des  $\mathcal{H}$ -Matrix-Formats gegenüber anderen Matrixkompressionsverfahren ist, wie in der Einleitung beschrieben, die Existenz einer approximativen Arithmetik in logarithmisch linearer Komplexität, basierend auf der Singulärwertzerlegung. Wir werden in diesem Abschnitt die  $\mathcal{H}$ -Matrix-Arithmetik kurz vorstellen, Details finden sich beispielsweise in [Hac99, HK00a, HK00b, Gra01, GH03].

Für jede beliebige Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  existiert eine Singulärwertzerlegung  $\mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$  mit orthogonalen Matrizen  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  und einer Diagonalmatrix  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , deren Einträge die positiven, nach der Größe absteigend geordneten Singulärwerte  $\sigma_i$  sind. Nimmt man nur die ersten r Singulärwerte und definiert  $\mathbf{\Sigma}_r := \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r \times r}$  sowie die ersten r Spalten der Matrizen  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  und bezeichnet diese mit  $\mathbf{U}_r \in \mathbb{R}^{N \times r}, \mathbf{V}_r \in \mathbb{R}^{N \times r}$ , so erhält man eine Rang-r-Faktorisierung durch

$$\Pi_r \mathbf{M} := \mathbf{U}_r \mathbf{\Sigma}_r \mathbf{V}_r^T.$$

Diese Rang-r-Faktorisierung hat die Bestapproximationseigenschaften

$$\|\mathbf{M} - \Pi_r \mathbf{M}\|_2 = \min_{\substack{\mathbf{M}_r \in \mathbb{R}^{N \times N}, \\ \operatorname{rang} \mathbf{M}_r \le r}} \|\mathbf{M} - \mathbf{M}_r\|_2 = \sigma_{r+1}, \tag{2.29}$$

$$\|\mathbf{M} - \Pi_r \mathbf{M}\|_F = \min_{\substack{\mathbf{M}_r \in \mathbb{R}^{N \times N}, \\ \operatorname{rang} \mathbf{M}_r \le r}} \|\mathbf{M} - \mathbf{M}_r\|_F = \sqrt{\sum_{j=r+1}^N \sigma_j^2}.$$
 (2.30)

Wendet man den Projektionsoperator  $\Pi_r$  auf jeden zulässigen Block an, so erhält man eine Bestapproximation in der Frobeniusnorm beziehungsweise mittels der Abschätzung aus Lemma 2.15 eine Quasi-Bestapproximation in der Spektralnorm im  $\mathcal{H}$ -Matrix-Format

$$\Pi_{\mathcal{H}(r)}\mathbf{M}|_{\tau \times \sigma} := \begin{cases} \Pi_r \mathbf{M}|_{\tau \times \sigma}, & \tau \times \sigma \in P_{\text{far}} \\ \mathbf{M}|_{\tau \times \sigma}, & \text{sonst.} \end{cases}$$
 (2.31)

Da die Berechnung der Singulärwertzerlegung einer vollbesetzten Matrix im Allgemeinen teuer ist, werden in numerischen Simulationen andere Methoden zur  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation, wie beispielsweise ACA (Adaptive Cross Approximation, [Beb00]) oder Interpolation [BG04] verwendet. Für theoretische Betrachtungen, vor allem für die Definition einer (approximativen) Arithmetik ist die Singulärwertzerlegung allerdings von Nutzen. Hierbei wird ausgenützt, dass der Aufwand für die Berechnung der Singulärwertzerlegung für Rang-r-Faktorisierungen beschränkt ist durch  $\mathcal{O}(r^3 + r^2N)$ .

Im Allgemeinen kann der Rang bei der Addition von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  maximal rang( $\mathbf{A}$ ) + rang( $\mathbf{B}$ ) betragen. Somit kann die Addition von zwei  $\mathcal{H}$ -Matrizen mit Blockrang r aus dem Raum der  $\mathcal{H}$ -Matrizen mit maximalem Blockrang r hinausführen. Definiert man allerdings eine approximative Addition mittels der Projektion  $\Pi_{\mathcal{H}(r)}$  aus (2.31) durch  $\mathbf{A} +_r \mathbf{B} := \Pi_{\mathcal{H}(r)}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ , so ist die resultierende Matrix abermals eine  $\mathcal{H}$ -Matrix mit maximalem Blockrang r, und auf Grund von (2.29) eine Bestapproximation in der Frobeniusnorm sowie eine Quasi-Bestapproximation in der Spektralnorm. Der Aufwand einer derartigen Addition ist, siehe [Gra01], von der Ordnung  $\mathcal{O}(r^3N + r^2N\log N)$ .

In analoger Weise kann man eine approximative Matrix-Multiplikation definieren, wobei die zugehörigen Cluster-Bäume im Sinne der Matrix-Multiplikation zusammenpassen müssen. Für die Multiplikation zweier  $\mathcal{H}$ -Matrizen folgt für den Blockrang des Produktes, dass

$$r_{AB} \le C_{\text{sp}}(\text{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) + 1) \max\{r_A, r_B, n_{\text{blatt}}\}.$$

Projektion auf Rang  $r := \max\{r_A, r_B\}$  liefert eine approximative Matrix-Matrix-Multiplikation als  $\mathbf{A} \cdot_r \mathbf{B} := \Pi_{\mathcal{H}(r)}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ , welche mit einem Aufwand von  $\mathcal{O}(r^3 N \log^3 N)$  bestimmt werden kann.

Mit  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}$  und dem Schurkomplement  $\mathbf{S} = \mathbf{M}_{22} - \mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{M}_{12}$  kann die

mverse

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11}^{-1} + \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{M}_{12} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{11}^{-1} & -\mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{M}_{12} \mathbf{S}^{-1} \\ -\mathbf{S}^{-1} \mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{11}^{-1} & \mathbf{S}^{-1} \end{pmatrix}$$
(2.32)

exakt bestimmt werden. Ersetzt man sämtliche arithmetische Operationen durch  $\mathcal{H}$ -Matrix-Arithmetik und verwendet rekursiv die Formel (2.32) angefangen bei den Blättern des Cluster-Baumes, auf denen die Inversionen für volle Matrizen berechnet werden, so erhält man eine approximative inverse Matrix im  $\mathcal{H}$ -Matrix-Format. Der Aufwand für die derartige Inversion von  $\mathcal{H}$ -Matrizen ist, wie bei der Matrix-Matrix-Multiplikation, von der Ordnung  $\mathcal{O}(r^3N\log^3N)$ . Allerdings ist die derartig berechnete  $\mathcal{H}$ -Matrix nicht die Bestapproximation zu der exakten Inversen der ursprünglichen Matrix, und im Allgemeinen ist die Genauigkeit der Approximation nicht klar.

### 2.4 Lokalisierung

Da in der Definition der hierarchischen Matrizen zulässige Blöcke lokal approximiert werden, benötigen wir geeignete lokale Abschätzungen. Für die Lokalisierung wird hierbei eine global definierte Funktion mit einer Abschneidefunktion mit lokalem Träger, die nachfolgend definiert wird, multipliziert, womit das Produkt lokalen Träger hat.

**Definition 2.16** (Abschneidefunktion). Für zwei nicht-leere, offene Mengen  $D_1$  und  $D_2$  mit  $D_1 \subsetneq D_2$ ,  $\operatorname{dist}(\partial D_1, \partial D_2) > 0$  sei eine Abschneidefunktion  $\eta$  durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:

- $\eta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ , supp  $\eta \subset \overline{D_2}$ ;
- $0 \le \eta \le 1$ ,  $\eta \equiv 1$  auf  $D_1$ ;
- Es existiert eine Konstante C > 0, die nicht von der Größe von  $D_1$ ,  $D_2$  abhängt, sodass

$$\|\nabla \eta\|_{L^{\infty}(D_2)} \le C \frac{1}{\operatorname{dist}(\partial D_1, \partial D_2)}.$$

Bemerkung 2.17. Für eine Abschneidefunktion  $\eta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$  kann zusätzlich  $\gamma_0^{\text{int}}\eta = \gamma_0^{\text{ext}}\eta \in S^{1,1}(\mathcal{E}_h)$  angenommen werden. Dies gilt, da für eine glatte Abschneidefunktion  $\widetilde{\eta} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$  der stückweise lineare Interpolant  $J_h\widetilde{\eta} \in S^{1,1}(\mathcal{E}_h)$  mit  $J_h$  aus (2.23) die gewünschte Eigenschaft am Rand  $\Gamma$  hat. Es genügt somit, eine geeignete Fortsetzung zu konstruieren, was mit dem Fortsetzungsoperator aus [Ste70, Chap. VI, Thm. 3] erreicht werden kann. Schlussendlich folgt das gewünschte Resultat nach Multiplikation mit einer weiteren geeigneten Abschneidefunktion.

Für eine Indexmenge  $\rho \subset \mathcal{I}$  definieren wir die Menge

$$\omega_{\rho} := \operatorname{interior}\left(\bigcup_{j \in \rho} \operatorname{supp} \psi_{j}\right) \subseteq \Omega,$$
(2.33)

wobei die Funktionen  $\psi_j$  Elemente der Basis  $\mathcal{B}_h^{\Omega}$  von  $S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h;\Gamma_D)$  sind, und nehmen somit implizit an, dass diese Menge eine Vereinigung von Elementen aus  $\mathcal{T}_h$  ist.

In analoger Weise definieren wir die relativ offene Mannigfaltigkeit  $\Gamma_{\rho} \subseteq \Gamma$  als

$$\Gamma_{\rho} := \operatorname{interior}\left(\bigcup_{j \in \rho} \operatorname{supp} \xi_{j}^{i}\right),$$
(2.34)

wobei die Funktionen  $\xi^i_j$  Elemente der Basis  $\mathcal{B}^{\Gamma,i}_h$  von  $S^{p,i}(\mathcal{E}_h)$  sind.

Das folgende, elementare Lemma fasst einige Eigenschaften von Produkten von Funktionen aus  $H^1$  mit Abschneidefunktionen aus Definition 2.16 zusammen, wie Fortsetzbarkeit auf ganz  $\Omega$ , und gibt eine Abschätzung für die  $H^{p+1}$ -Seminorm an.

**Lemma 2.18.** Für  $\rho \subset \mathcal{I}$  sei  $\omega_{\rho}$  die Vereinigung von Elementen definiert in (2.33). Seien  $\delta \in (0,1), R > 0$  und  $B_R, B_{(1+\delta)R} \subset \mathbb{R}^d$  konzentrische Boxen gemäß Definition 2.10 sowie  $\eta$  eine Abschneidefunktion gemäß Definition 2.16 mit  $D_1 = B_R$  und  $D_2 = B_{(1+\delta)R}$ . Für  $u \in H_0^1(B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho}; (\Gamma_D \cup (\partial \omega_{\rho} \cap \Omega)) \cap \overline{(B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho})})$  definieren wir die Funktion  $\eta u$  punktweise in  $\Omega$  mittels  $(\eta u)(x) := \eta(x)u(x)$  für  $x \in B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho}$  und  $(\eta u)(x) = 0$  für  $x \notin B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho}$ . Dann gilt

- 1.  $\eta u \in H_0^1(\Omega; \Gamma_D)$ ;
- 2.  $\operatorname{supp}(\eta u) \subset \overline{B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho}};$
- 3. Falls  $\eta \in S_0^{q,1}(\mathcal{T}_h)$  und  $u \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D)$ , dann ist  $\eta u \in S_0^{p+q,1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D)$ . Speziell folgt für q = 1 und  $T \in \mathcal{T}_h$ , dass

$$\left|\eta^{2} u\right|_{H^{p+1}(T)}^{2} \leq C \frac{1}{(\delta R)^{2}} \left|\eta u\right|_{H^{p}(T)}^{2} + C \frac{1}{(\delta R)^{4}} \left|u\right|_{H^{p-1}(T)}^{2}.$$
 (2.35)

Die Konstante C > 0 hängt nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab.

Beweis. Die ersten drei Aussagen folgen direkt aus den Definitionen der jeweiligen Räume sowie aus den Trägereigenschaften der Funktionen  $\eta$  und u. Wir zeigen noch die Abschätzung (2.35). Sei  $k \in \mathbb{N}_0^d$  ein Multiindex mit |k| = p+1. Da für jedes  $T \in \mathcal{T}_h$  gilt, dass  $u|_T \in P_p(T)$ , erhalten wir  $D^k u|_T = 0$ . Weiters führt die Annahme  $\eta \in S^{1,1}(\mathcal{T}_h)$  auf  $D^k \eta|_T = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0^d$  mit  $|k| \geq 2$ . Die Leibniz-Produktregel liefert nun

$$\begin{split} & \left\| \eta^{2} u \right\|_{H^{p+1}(T)}^{2} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_{0}^{d} \\ |k| = p+1}} \left\| D^{k}(\eta^{2} u) \right\|_{L^{2}(T)}^{2} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_{0}^{d} \\ |k| = p+1}} \left\| \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{N}_{0}^{d}, \ell \leq k \\ |\ell| = 2}} \binom{k}{\ell} D^{k-\ell} u D^{\ell}(\eta^{2}) \right\|_{L^{2}(T)}^{2} \\ & \lesssim \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_{0}^{d} \\ |k| = p+1}} \left\| \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{N}_{0}^{d}, \ell \leq k \\ |\ell| = 1}} \binom{k}{\ell} D^{k-\ell} u (D^{\ell} \eta) \eta + \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_{0}^{d}, m \leq k-\ell \\ |m| = 1}} \binom{k}{\ell+m} D^{k-\ell-m} u D^{\ell} \eta D^{m} \eta \right\|_{L^{2}(T)}^{2} \\ & \lesssim \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_{0}^{d} \\ |k| = p+1}} \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{N}_{0}^{d}, \ell \leq k \\ |\ell| = 1}} \left| \binom{k}{\ell} \right|^{2} \left\| D^{k-\ell} u (D^{\ell} \eta) \eta + D^{\ell} \eta \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_{0}^{d}, m \leq k-\ell \\ |m| = 1}} \binom{k}{\ell} \eta^{-1} \binom{k}{\ell+m} D^{k-\ell-m} u D^{m} \eta \right\|_{L^{2}(T)}^{2} \end{split}$$

Da auf Grund der Definition von konzentrischen Boxen dist $(\partial B_R, \partial B_{(1+\delta)R}) = \frac{\delta R}{2}$  gilt, folgt aus der Abschätzung der  $L^{\infty}$ -Norm des Gradienten der Abschneidefunktion  $\eta$  aus

Definition 2.16 und der Dreiecksungleichung, dass

$$\begin{split} &\left\|\eta^{2}u\right\|_{H^{p+1}(T)}^{2} \\ &\lesssim \frac{1}{(\delta R)^{2}} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_{0}^{d} \\ |k| = p+1}} \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{N}_{0}^{d}, \ell \leq k \\ |\ell| = 1}} |k|^{2} \left\| (D^{k-\ell}u)\eta + \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_{0}^{d}, m \leq k-\ell \\ |m| = 1}} \binom{k-\ell}{m} D^{k-\ell-m}uD^{m}\eta \right\|_{L^{2}(T)}^{2} \\ &+ \frac{1}{(\delta R)^{2}} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_{0}^{d} \\ |k| = p+1}} \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{N}_{0}^{d}, \ell \leq k \\ |\ell| = 1}} |k|^{2} \left\| \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_{0}^{d}, m \leq k-\ell \\ |m| = 1}} \left( \binom{k}{\ell}^{-1} \binom{k}{\ell+m} - \binom{k-\ell}{m} \right) D^{k-\ell-m}uD^{m}\eta \right\|_{L^{2}(T)}^{2} \\ &\lesssim \frac{1}{(\delta R)^{2}} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_{0}^{d} \\ |k| = p+1}} \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{N}_{0}^{d}, \ell \leq k \\ |\ell| = 1}} \left\| D^{k-\ell}(u\eta) \right\|_{L^{2}(T)}^{2} + \frac{1}{(\delta R)^{4}} |u|_{H^{p-1}(T)}^{2} \\ &\lesssim \frac{1}{(\delta R)^{2}} |\eta u|_{H^{p}(T)}^{2} + \frac{1}{(\delta R)^{4}} |u|_{H^{p-1}(T)}^{2}, \end{split}$$

was die gewünschte Abschätzung zeigt.

# 3 Modellprobleme

In diesem Abschnitt werden die betrachteten Modellprobleme vorgestellt sowie die jeweiligen Hauptresultate, die Existenz von  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximationen an die inversen Galerkin-Matrizen, formuliert. Wir werden Finite Elemente Diskretisierungen für elliptische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung (Abschnitt 3.1) sowie die Lamé-Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie (Abschnitt 3.2) behandeln. Weiters werden Randelementdiskretisierungen der schwach-singulären Integralgleichung (Abschnitt 3.3.2) und hypersingulären Integralgleichung erster Art (Abschnitt 3.3.3) betrachtet.

# 3.1 Elliptische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Unser erstes und einfachstes Modellproblem sind elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung, auch als Transport-Diffusionsgleichungen bezeichnet. Wir werden bei den vorgeschriebenen Randwerten zwei Fälle unterscheiden, einerseits gemischte Dirichlet-Neumann-Robin-Randbedingungen und andererseits den Fall von reinen Neumann-Randbedingungen, bei dem die eindeutige Lösbarkeit der schwachen Formulierung nicht mehr gewährleistet ist.

### 3.1.1 Gemischte Randbedingungen

Wir betrachten Differentialoperatoren der Form

$$Lu := -\operatorname{div}(\mathbf{C}\nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u + \beta u, \tag{3.1}$$

wobei  $\mathbf{b} \in L^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d), \beta \in L^{\infty}(\Omega)$  und die matrixwertige Funktion  $\mathbf{C} \in L^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^{d \times d})$  punktweise symmetrisch ist sowie

$$c_1 \|\mathbf{y}\|_2^2 \le \langle \mathbf{C}(x)\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_2 \le c_2 \|\mathbf{y}\|_2^2 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$$
 (3.2)

mit Konstanten  $c_1, c_2 > 0$ , die nicht von x abhängen, erfüllt.

Für  $f \in L^2(\Omega)$  betrachten wir das Modellproblem

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega,$$
 (3.3a)

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_D,$$
 (3.3b)

$$\mathbf{C}\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_N, \tag{3.3c}$$

$$\mathbf{C}\nabla u \cdot \mathbf{n} + \alpha u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_{\mathcal{R}}, \tag{3.3d}$$

wobei **n** den äußeren Normalvektor an die Fläche  $\Gamma$  bezeichnet,  $\alpha \in L^{\infty}(\Gamma_{\mathcal{R}})$ ,  $\alpha > 0$  und sich der Rand  $\Gamma = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N} \cup \overline{\Gamma_{\mathcal{R}}}$  in drei paarweise disjunkte, relativ offene Mengen  $\Gamma_D$  (Dirichlet-Rand),  $\Gamma_N$  (Neumann-Rand) und  $\Gamma_{\mathcal{R}}$  (Robin-Rand) aufspalten lässt.

Die Bilinearform  $a: H^1_0(\Omega; \Gamma_D) \times H^1_0(\Omega; \Gamma_D) \to \mathbb{R}$  der schwachen Formulierung des Problems (3.3) ist gegeben durch

$$a(u,v) := \langle \mathbf{C}\nabla u, \nabla v \rangle_{L^{2}(\Omega)} + \langle \mathbf{b} \cdot \nabla u + \beta u, v \rangle_{L^{2}(\Omega)} + \langle \alpha \gamma_{0}^{\text{int}} u, \gamma_{0}^{\text{int}} v \rangle_{L^{2}(\Gamma_{\mathcal{D}})}. \tag{3.4}$$

Wir werden im Folgenden die Notation im Randterm abkürzen und stattdessen  $\langle \alpha u, v \rangle_{L^2(\Gamma_{\mathcal{R}})}$  schreiben. Für das diskrete Variationsproblem ist somit eine Funktion  $\phi_h \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D)$  gesucht, sodass

$$a(\phi_h, \psi_h) = \langle f, \psi_h \rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \psi_h \in S_0^{p, 1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D). \tag{3.5}$$

Um eindeutige Lösbarkeit der kontinuierlichen und diskreten schwachen Formulierung zu garantieren, nehmen wir an, dass die Parameter  $\alpha$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\beta$  sowie  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$ ,  $\Gamma_R$  so gewählt sind, dass die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  die Koerzivität

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \le Ca(u, u)$$
 (3.6)

erfüllt, womit dann das Lax-Milgram-Lemma eine eindeutige Lösung liefert.

Mit einer Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  wie Kapitel 2.2 definiert und der zusätzlichen Eigenschaft, dass für jedes Element T mit  $E_T \cap \Gamma \neq \emptyset$  für eine Kante  $E_T \in \mathcal{E}_T$  entweder  $E_T \subset \overline{\Gamma_D}$ ,  $E_T \subset \overline{\Gamma_R}$  oder  $E_T \subset \overline{\Gamma_N}$  gilt. Mit der Basis  $\mathcal{B}_h^{\Omega}$  von  $S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D)$  aus Abschnitt 2.2.1 führt die Galerkin-Diskretisierung (3.5) auf eine positiv definite Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_{\Omega} \times N_{\Omega}}$ , wobei

$$\mathbf{A}_{jk} = \langle \mathbf{C} \nabla \psi_k, \nabla \psi_j \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \mathbf{b} \cdot \nabla \psi_k + \beta \psi_k, \psi_j \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \alpha \psi_k, \psi_j \rangle_{L^2(\Gamma_{\mathcal{R}})}, \quad \psi_k, \psi_j \in \mathcal{B}_h^{\Omega}.$$
(3.7)

Die Indexmenge  $\mathcal{I}$  ist hier gegeben als  $\mathcal{I} := \{1, \dots, N_{\Omega}\}.$ 

Unser Ziel ist eine Approximation der inversen Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  mittels hierarchischen Matrizen. Das Hauptresultat ist im folgenden Theorem zusammengefasst.

Satz 3.1. Sei  $\eta > 0$  ein fixer Zulässigkeitsparameter und eine zulässige Partition P von  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$  basierend auf einem Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  gegeben. Dann existiert eine  $\mathcal{H}$ -Matrix  $\mathbf{B}_{\mathcal{H}}$  mit maximalem blockweisen Rang r, sodass

$$\|\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}_{\mathcal{H}}\|_{2} \le C_{\mathrm{apx}} C_{\mathrm{sp}} N_{\Omega} \mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}}.$$
 (3.8)

Die Konstante  $C_{apx}$  hängt nur von den Koeffizienten in (3.3),  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab, die Konstante b > 0 hängt zusätzlich noch von  $\eta$  ab.

Bemerkung 3.2. Eine Schranke für den relativen Fehler erhält man mit  $\frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|_2} \lesssim N_{\Omega}^{-1}$  (siehe z.B. [EG06, Theorem 4]) als

$$\frac{\|\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}_{\mathcal{H}}\|_{2}}{\|\mathbf{A}^{-1}\|_{2}} \lesssim C_{\text{apx}} C_{\text{sp}} \text{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}}.$$
(3.9)

Für quasiuniforme Gitter gilt depth( $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$ )  $\simeq \log(N_{\Omega})$ , und wie in Abschnitt 2.3.1 ist der Speicherbedarf der hierarchischen Matrix  $\mathbf{B}_{\mathcal{H}}$  von der Ordnung  $\mathcal{O}(rN_{\Omega}\log N_{\Omega})$  und wächst somit linear, wobei der Fehler exponentiell im Rang fällt.

Obiges Approximationsresultat gilt für beliebiges r>0, also durch Erhöhen des Ranges kann eine beliebige Genauigkeit erreicht werden. Wie bereits in der Einleitung erwähnt erreichen die nicht volldiskreten Beweise in [BH03], [Bör10a] für das reine Dirichlet-Problem nur eine Genauigkeit bis zum Diskretisierungsfehler.

Für den symmetrischen Fall, also falls  $\mathbf{b} \equiv 0$ , kann wie in Bemerkung 2.14 beschrieben auch die schwächere Zulässigkeitsbedingung (2.27) gefordert werden.

### 3.1.2 Neumann-Randbedingungen

Im vorherigen Abschnitt ist der Fall von puren Neumann-Randbedingungen, also  $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{N}}$  und  $\beta = 0$ , nicht inkludiert, da hierbei konstante Funktionen im Kern der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  sind und somit die Koerzivität (3.6) nicht mehr gilt.

Um eindeutige Lösbarkeit zu garantieren, wird für die Lösung zusätzlich verlangt, dass das Integralmittel verschwindet, also  $\langle \phi_h, 1 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$ . Weiters nehmen wir an, dass die rechte Seite f die Kompatibilitätsbedingung  $\langle f, 1 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$  erfüllt.

Eine Möglichkeit, die Nebenbedingung  $\langle \phi_h, 1 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$  an  $\phi_h$  zu realisieren, ist mit Hilfe einer Sattelpunktformulierung. Gesucht seien also eine Funktion und ein Lagrange-Multiplikator  $(\phi_h, \lambda) \in S^{p,1}(\mathcal{T}_h) \times \mathbb{R}$ , sodass

$$a(\phi_h, \psi_h) + \lambda \langle \psi_h, 1 \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, \psi_h \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall \psi_h \in S^{p,1}(\mathcal{T}_h), \tag{3.10a}$$

$$\mu \langle \phi_h, 1 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$
 (3.10b)

Mit einer Basis  $\mathcal{B}_h := \{ \psi_j : j = 1, \dots, N_{\mathcal{N}} \}$  von  $S^{p,1}(\mathcal{T}_h)$  erhält man eine symmetrische, invertierbare Matrix  $\mathbf{A}_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{(N_{\mathcal{N}}+1)\times(N_{\mathcal{N}}+1)}$  mit

$$\mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & 0 \end{pmatrix},\tag{3.11}$$

wobei  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_{\mathcal{N}} \times N_{\mathcal{N}}}$  wie in (3.7) definiert ist und  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N_{\mathcal{N}}}$  gegeben ist durch  $\mathbf{B}_j = \langle \psi_j, 1 \rangle_{L^2(\Omega)}$ . Die Indexmenge  $\mathcal{I}$  ist hier definiert als  $\mathcal{I} := \{1, \dots, N_{\mathcal{N}}\}$ .

Das nachfolgende Theorem zeigt, dass für den ersten  $N_{\mathcal{N}} \times N_{\mathcal{N}}$ -Teilblock der Matrix  $\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{-1}$  ein analoges Resultat zu Satz 3.1 gilt.

Satz 3.3. Sei  $\eta > 0$  ein fixer Zulässigkeitsparameter und eine zulässige Partition P von  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$  basierend auf einem Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  gegeben. Dann existiert eine  $\mathcal{H}$ -Matrix  $\widehat{\mathbf{B}}_{\mathcal{H}}$  mit maximalem blockweisen Rang r, sodass

$$\left\| \mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{-1}|_{N_{\mathcal{N}} \times N_{\mathcal{N}}} - \widehat{\mathbf{B}}_{\mathcal{H}} \right\|_{2} \le C_{\text{apx}} C_{\text{sp}} N_{\mathcal{N}} \text{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}}.$$
(3.12)

Die Konstante  $C_{\rm apx} > 0$  hängt nur von den Koeffizienten in (3.3),  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab, die Konstante b > 0 hängt zusätzlich noch von  $\eta$  ab.

Bemerkung 3.4. Die inverse Matrix  $\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{-1}$  hat die Gestalt  $\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & 0 \end{pmatrix}$ . Da  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{N_{\mathcal{N}}}$ 

ein Vektor ist, ist die Matrix  $\mathbf{B}_{\mathcal{H}} := \begin{pmatrix} \mathbf{\widehat{B}}_{\mathcal{H}} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & 0 \end{pmatrix}$  eine blockweise Rang-r-Approximation an die volle Inverse, wobei die selbe Fehlerabschätzung wie in Satz 3.3 gilt.

Alternativ zu obiger Sattelpunktformulierung kann man auch eine stabilisierte Galerkin-Diskretisierung betrachten, um eine invertierbare Matrix zu erhalten. Hierbei wird für einen Stabilisierungsparameter  $\alpha > 0$  in der stabilisierten schwachen Formulierung eine Funktion  $\phi_h \in S^{p,1}(\mathcal{T}_h)$  gesucht, sodass

$$a(\phi_h, \psi_h) + \alpha \langle \phi_h, 1 \rangle_{L^2(\Omega)} \langle \psi_h, 1 \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, \psi_h \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall \psi_h \in S^{p,1}(\mathcal{T}_h). \tag{3.13}$$

Die resultierende Galerkin-Matrix  $\mathbf{A}^{\text{st}} \in \mathbb{R}^{N_{\mathcal{N}} \times N_{\mathcal{N}}}$  ist dann gegeben als

$$\mathbf{A}^{\text{st}} := \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B} \mathbf{B}^T, \tag{3.14}$$

mit der Matrix  $\mathbf{A}$  und dem Vektor  $\mathbf{B}$  aus (3.11). Die Matrix  $\mathbf{A}^{\mathrm{st}}$  ist positiv definit, da die stabilisierte Bilinearform koerziv ist, und symmetrisch, falls  $\mathbf{A}$  symmetrisch ist.

Die Matrix A<sup>st</sup> ist unter anderem von Interesse, da das Lösen des linearen Systems

$$\mathbf{A}_{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent ist zum Lösen des symmetrischen, positiv semidefiniten Systems

$$\widehat{\mathbf{A}}_{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B} \mathbf{B}^T & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

mit positiv definitem ersten Diagonalblock. Um eine  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an die Matrix  $(\mathbf{A}^{\text{st}})^{-1}$  aus der Approximation für  $\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{-1}$  zu bestimmen, zerlegen wir

$$\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Da  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{P}$  die Gleichungen  $\mathbf{A}\mathbf{G} + \mathbf{B}\mathbf{P}^T = \mathbf{I}$  und  $\mathbf{B}^T\mathbf{G} = \mathbf{0}$  erfüllen, folgt  $\mathbf{A}^{\mathrm{st}}\mathbf{G} + \mathbf{B}\mathbf{P}^T = \mathbf{I}$ , und die Inverse  $(\mathbf{A}^{\mathrm{st}})^{-1}$  kann exakt bestimmt werden als

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{st}})^{-1} = \mathbf{G} + (\mathbf{A}^{\mathrm{st}})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{T}.$$

Die Inverse  $(\mathbf{A}^{\mathrm{st}})^{-1}$  wird also aus der Matrix  $\mathbf{G}$ , die gerade der erste  $(N_{\mathcal{N}} \times N_{\mathcal{N}})$ -Teilblock von  $\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{-1}$  ist, und einer Korrektur mit Rang 1 berechnet. Wir erhalten also direkt das folgende Korollar zu Satz 3.3.

**Korollar 3.5.** Es existiert eine blockweise Rang-(r+1)-Approximation  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{H}}$  an  $(\mathbf{A}^{st})^{-1}$  mit

$$\|(\mathbf{A}^{st})^{-1} - \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{H}}\|_2 < C_{\text{anx}}C_{\text{sp}} \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{T}})N_{\mathcal{N}}e^{-br^{1/(d+1)}}.$$

wobei  $C_{apx}$ , b > 0 die Konstanten aus Satz 3.3 sind.

# 3.2 Die Lamé-Gleichung

Wir betrachten die Lamé-Gleichung aus der linearen Elastizitätstheorie, die die Deformierung eines elastischen Körpers durch eine externe Kraft modelliert. Hierfür beschreibt  $\mathbf{u}$  die Verschiebung der Massepunkte und  $e(\mathbf{u})$  den linearisierten Verzerrungstensor gegeben durch  $e_{ij}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial \mathbf{x}_i} \right)$ . Mit den Lamé-Konstanten  $\lambda, \mu > 0$  erhalten wir die Lamé-Gleichung als

$$-2\mu \operatorname{div} e(\mathbf{u}) - \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \tag{3.16a}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial \Omega,$$
 (3.16b)

mit einer Kraft  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$ . Die erste Gleichung kann auch umgeschrieben werden zu  $-(\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div}(\mathbf{u})) - \mu\Delta\mathbf{u}$ , wobei die Anwendung des Laplace-Operators komponentenweise zu verstehen ist. Für eine Herleitung der Gleichungen sei auf [Bra07] verwiesen. Der Einfachheit halber betrachten wir homogene Dirichlet-Randbedingungen, der allgemeinere Fall von gemischten Dirichlet-, Neumann- und Robin-Randbedingungen kann wie in Abschnitt 3.1.1 behandelt werden. In der schwachen Formulierung der Lamé-Gleichung (3.16) ist ein  $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^d$  gesucht, sodass

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$$
 (3.17)

mit der Bilinearform  $a(\cdot,\cdot): H_0^1(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)^d \to \mathbb{R}$  definiert durch

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := 2\mu \int_{\Omega} e(\mathbf{u}(x)) : e(\mathbf{v}(x)) dx + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}(x) \operatorname{div} \mathbf{v}(x) dx$$
$$= 2\mu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{d} e_{ij}(\mathbf{u}(x)) e_{ij}(\mathbf{v}(x)) dx + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}(x) \operatorname{div} \mathbf{v}(x) dx.$$

Wir wählen eine nodale Basis bestehend aus Vektoren  $\psi_{il} := (\psi_i \delta_{jl})_{j=1,\dots,d}, l=1,\dots,d, i=1,\dots,N_{\Omega}$ , wobei  $\psi_i$  eine Basisfunktion von  $S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h)$  aus Abschnitt 2.2.1 ist. Wir sortieren die Basis knotenweise, also  $\psi_{il} := \psi_{(i-1)d+l}$ , und bezeichnen die Basis mit  $\mathcal{B}_h := \{\psi_i : i=1,\dots,dN_{\Omega}\}$ . In der diskreten schwachen Formulierung von (3.17) ist ein  $\mathbf{u}_h \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d$  gesucht, sodass

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v}_h \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d,$$
 (3.18)

und mit obiger Basis  $\mathcal{B}_h$  führt die Galerkin-Diskretisierung auf das lineare System

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}.\tag{3.19}$$

Die Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{dN_{\Omega} \times dN_{\Omega}}$  und der Vektor  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{dN_{\Omega}}$  sind hierbei gegeben durch  $\mathbf{A}_{jk} = a(\boldsymbol{\psi}_k, \boldsymbol{\psi}_j)$  sowie  $\mathbf{f}_j = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\psi}_j \rangle_{L^2(\Omega)}$ . Die Indexmenge  $\mathcal{I}$  ist hier definiert als  $\mathcal{I} := \{1, \dots, dN_{\Omega}\}$ . Mit Hilfe der ersten Korn'schen Ungleichung, siehe beispielsweise [Bra07, Ste08],

$$|\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}^2 := \sum_{i=1}^d |\mathbf{v}_i|_{H^1(\Omega)}^2 \le 2 \int_{\Omega} e(\mathbf{v}) : e(\mathbf{v}) dx \quad \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$$
(3.20)

und der Poincaré-Ungleichung erhält man die Koerzivität der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  und somit die eindeutige Lösbarkeit der kontinuierlichen und diskreten schwachen Formulierungen (3.17), (3.18) sowie die Invertierbarkeit der Matrix **A**. Wir erwähnen auch die zweite Korn'sche Ungleichung

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 \lesssim \|e(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2$$
 (3.21)

für  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$ .

Das nachfolgende Theorem liefert die Existenz einer  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an die inverse Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Satz 3.6. Sei  $\eta > 0$  ein fixer Zulässigkeitsparameter und eine zulässige Partition P von  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$  basierend auf einem Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  gegeben. Dann existiert eine  $\mathcal{H}$ -Matrix  $\mathbf{B}_{\mathcal{H}}$  mit maximalem blockweisen Rang r, sodass

$$\|\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}_{\mathcal{H}}\|_{2} \le C_{\mathrm{apx}} C_{\mathrm{sp}} N_{\Omega} \mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}}. \tag{3.22}$$

Die Konstante  $C_{apx} > 0$  hängt nur von  $\Omega$ , d, p, den Lamé-Konstanten  $\lambda$ ,  $\mu$  und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab, die Konstante b > 0 hängt zusätzlich noch von  $\eta$  ab.

Bemerkung 3.7. Eine Schranke für den relativen Fehler erhält man abermals mit Hilfe von  $\frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|_{0}} \lesssim N_{\Omega}^{-1}$ , was analog zu [EG06, Theorem 4] gezeigt werden kann, als

$$\frac{\|\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}_{\mathcal{H}}\|_{2}}{\|\mathbf{A}^{-1}\|_{2}} \lesssim C_{\text{apx}} C_{\text{sp}} \text{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}}.$$
(3.23)

### 3.2.1 Neumann-Randbedingungen

In diesem Abschnitt betrachten wir das Neumann-Problem

$$-2\mu \operatorname{div} e(\mathbf{u}) - \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \tag{3.24a}$$

$$\gamma_1^{\text{int}} \mathbf{u} := \lambda(\text{div } \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \mu \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma.$$
 (3.24b)

Im Gegensatz zu (3.16) ist hierfür die eindeutige Lösbarkeit der schwachen Formulierung nicht mehr gewährleistet, da die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  aus (3.17) einen Kern hat, bestehend aus den so genannten Starrkörperbewegungen, siehe [Ste08], die für d=2 gegeben sind als

$$\mathcal{R}_2 := \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} \right\}$$

und für d = 3 als

$$\mathcal{R}_3 := \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x}_3 \\ 0 \\ -\mathbf{x}_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Um eindeutige Lösbarkeit zu garantieren, sucht man also Lösungen im orthogonalen Komplement der Starrkörperbewegungen, also Funktionen  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d$  mit  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{r} \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$  für

alle  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_d$ . Die Nebenbedingung kann abermals mittels einer Sattelpunktformulierung realisiert werden, in welcher ein Paar  $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\nu}) \in S^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d \times \mathcal{R}_d$  gesucht wird, sodass

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \langle \mathbf{v}_h, \boldsymbol{\nu} \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v}_h \in S^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d,$$
 (3.25a)

$$\langle \mathbf{u}_h, \mathbf{r} \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}_d.$$
 (3.25b)

Mit einer knotenweise sortierten Basis von  $S^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d$  analog zu dem vorigen Abschnitt führt dies auf das lineare System

$$\mathbf{A}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & 0 \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

mit einer symmetrischen, invertierbaren Matrix  $\mathbf{A}_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{(dN_{\mathcal{N}} + \dim \mathcal{R}_d) \times (dN_{\mathcal{N}} + \dim \mathcal{R}_d)}$ , wobei  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{dN_{\mathcal{N}} \times dN_{\mathcal{N}}}$  durch (3.19) und die Matrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{dN_{\mathcal{N}} \times \dim \mathcal{R}_d}$  durch  $\mathbf{B}_{jk} = \langle \boldsymbol{\psi}_j, \mathbf{r}_k \rangle_{L^2(\Omega)}$  gegeben sind. Mit  $\mathbf{r}_k$  sind hier die Basisvektoren aus der Definition von  $\mathcal{R}_d$  bezeichnet.

Wir definieren die Indexmenge  $\mathcal{I}$  als  $\mathcal{I} := \{1, \dots, dN_{\mathcal{N}}\}.$ 

Der nachfolgende Satz zeigt die Existenz einer  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an den ersten  $(dN_{\mathcal{N}} \times dN_{\mathcal{N}})$ -Teilblock der inversen Matrix  $\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{-1}$ .

Satz 3.8. Sei  $\eta > 0$  ein fixer Zulässigkeitsparameter und eine zulässige Partition P von  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$  basierend auf einem Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  gegeben. Dann existiert eine  $\mathcal{H}$ -Matrix  $\widehat{\mathbf{B}}_{\mathcal{H}}$  mit maximalem blockweisen Rang r, sodass

$$\left\| \mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{-1} |_{dN_{\mathcal{N}} \times dN_{\mathcal{N}}} - \widehat{\mathbf{B}}_{\mathcal{H}} \right\|_{2} \le C_{\text{apx}} C_{\text{sp}} N_{\mathcal{N}} \text{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}}.$$
(3.27)

Die Konstante  $C_{apx} > 0$  hängt nur von  $\Omega$ , d, p, den Lamé-Konstanten  $\lambda$ ,  $\mu$  und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab, die Konstante b > 0 hängt zusätzlich noch von  $\eta$  ab.

Bemerkung 3.9. Die inverse Matrix  $\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{-1}$  hat die Gestalt  $\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ . Da  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{dN_{\mathcal{N}} \times \dim \mathcal{R}_d}$  eine Niedrigrangmatrix ist, ist die Matrix  $\mathbf{B}_{\mathcal{H}} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{B}}_{\mathcal{H}} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}$  für  $r \geq \dim \mathcal{R}_d$  eine blockweise Rang-r-Approximation an die volle Inverse, wobei die selbe Fehlerabschätzung wie in Satz 3.8 gilt.

Wie auch für das Neumann-Problem in Abschnitt 3.1.2 kann an Stelle von obiger Sattelpunktformulierung auch eine stabilisierte Galerkin-Diskretisierung betrachtet werden, um die Invertierbarkeit der Galerkin-Matrix zu gewährleisten. Mit dem Stabilisierungsparameter  $\alpha > 0$  sei also  $\mathbf{u}_h \in S^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d$  gesucht, sodass

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \alpha \sum_{j=1}^{\dim \mathcal{R}_d} \langle \mathbf{u}_h, \mathbf{r}_j \rangle_{L^2(\Omega)} \langle \mathbf{v}_h, \mathbf{r}_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{v}_h \in S^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d.$$
 (3.28)

Die resultierende Galerkin-Matrix  $\mathbf{A}^{\text{st}} \in \mathbb{R}^{dN_{\mathcal{N}} \times dN_{\mathcal{N}}}$  ist dann gegeben als

$$\mathbf{A}^{\mathrm{st}} := \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B} \mathbf{B}^T \tag{3.29}$$

mit den Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  aus (3.26). Die Matrix  $\mathbf{A}^{\mathrm{st}}$  ist symmetrisch und positiv definit. Für weitere Resultate über diese Stabilisierung verweisen wir auf [Ste08].

Wie in Abschnitt 3.1.2 erhält man für die Inverse  $(\mathbf{A}^{\text{st}})^{-1}$ , dass

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{st}})^{-1} = \mathbf{G} + (\mathbf{A}^{\mathrm{st}})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{T}$$

mit einer Matrix  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{dN_{\mathcal{N}} \times \dim \mathcal{R}_d}$ . Somit kann die Inverse  $(\mathbf{A}^{\mathrm{st}})^{-1}$  aus einer Korrektur mit maximalem Rang dim  $\mathcal{R}_d$  aus der Matrix  $\mathbf{G}$  berechnet werden. Da eine Approximation an  $\mathbf{G}$  laut Satz 3.8 existiert, erhalten wir direkt das folgende Korollar zu Satz 3.8.

**Korollar 3.10.** Es existiert eine blockweise Rang- $(r + \dim \mathcal{R}_d)$ -Approximation  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{H}}$  an  $(\mathbf{A}^{st})^{-1}$  mit

$$\|(\mathbf{A}^{st})^{-1} - \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathcal{H}}\|_2 \le C_{\mathrm{apx}}C_{\mathrm{sp}}\operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}})N_{\mathcal{N}}e^{-br^{1/(d+1)}}$$

wobei  $C_{apx}$ , b > 0 die Konstanten aus Satz 3.8 bezeichnen.

# 3.3 Randelementdiskretisierungen

Mit Hilfe der Darstellungsformel für Lösungen von elliptischen partiellen Differentialgleichungen kann das Randwertproblem 3.3 als Integralgleichung formuliert werden. Betrachtet man eine Galerkin-Diskretisierung der Integralgleichung, so führt dies auf die Randelementmethode (BEM). Wir werden in Abschnitt 3.3.1 die Randintegraloperatoren einführen und Randelementdiskretisierungen der schwach-singulären Integralgleichung (Abschnitt 3.3.2) sowie der hypersingulären Integralgleichung (Abschnitt 3.3.3) betrachten. Für grundlegende Referenzen zu Randintegraloperatoren sowie der Randelementmethode sei auf [Ver84, McL00, HW08, Ste08, SS11] verwiesen. Unsere Hauptresultate liefern eine  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an die inversen Galerkin-Matrizen des Einfachschichtoperators sowie des hypersingulären Integraloperators.

### 3.3.1 Integraloperatoren

In diesem Abschnitt werden die in der Darstellungsformel auftretenden Integraloperatoren, nämlich das Einfachschicht- und das Doppelschichtpotential, sowie die zugehörigen Randintegraloperatoren eingeführt und einige Eigenschaften dieser Operatoren angegeben. Speziell seien hierbei die Abbildungseigenschaften und Sprungbedingungen aus Satz 3.11 erwähnt.

Sei  $G(x) = -\frac{1}{2\pi} \log |x|$  für d = 2 und  $G(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$  für d = 3 die Fundamentallösung (Green'sche Funktion) des Laplace-Operators, also  $-\Delta G = 0$  für  $x \neq 0$  und  $-\Delta G = \delta_0$  für x = 0, wobei  $\delta_0$  die Dirac'sche Deltafunktion für den Punkt x = 0 ist.

Betrachtet man die homogene Gleichung

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{3.30}$$

so erhält man mittels der Green'schen Formel angewendet auf G und u die Darstellungsformel

$$u(x) = -\int_{\Omega} \Delta G(x-y)u(y)dy = \int_{\Gamma} G(x-y)\gamma_{1,y}^{\text{int}}u(y)ds_y - \int_{\Gamma} \gamma_{1,y}^{\text{int}}G(x-y)\gamma_0^{\text{int}}u(y)ds_y, \ x \in \Omega.$$

$$(3.31)$$

Hier bezeichnen  $\gamma_0^{\rm int}$  den Spuroperator aus (2.2) und  $\gamma_{1,y}^{\rm int}$  die innere Konormalenableitung aus (2.5) im Punkt  $y \in \Gamma$ . Um u zu bestimmen, genügt es also, die Randdaten  $\gamma_0^{\rm int} u, \gamma_{1,y}^{\rm int} u$  zu berechnen.

Der erste Integraloperator, der in der Darstellungsformel (3.31) auftritt, ist das so genannte Einfachschichtpotential  $\tilde{V} \in L(H^{-1/2}(\Gamma), H^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ , gegeben durch

$$\widetilde{V}\phi(x) = \int_{\Gamma} G(x-y)\phi(y)ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^d \backslash \Gamma,$$
 (3.32)

wobei  $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ .

Der zweite in (3.31) auftretende Integraloperator ist das Doppelschichtpotential  $\widetilde{K} \in L(H^{1/2}(\Gamma), H^1_{\Lambda}(\mathbb{R}^d \backslash \Gamma))$  gegeben durch

$$\widetilde{K}v(x) := \int_{\Gamma} (\gamma_{1,y}^{\text{int}} G(x - y)) v(y) ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^d \backslash \Gamma,$$
(3.33)

wobei  $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Das Einfachschicht- und Doppelschichtpotential sind Lösungen der homogenen Gleichung überall außer am Rand, es gilt also  $-\Delta \widetilde{V} \phi = 0$ ,  $-\Delta \widetilde{K} v = 0$  auf  $\mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ .

Wendet man den Spuroperator auf das Einfachschichtpotential an, so erhält man den Einfachschichtpotential  $V \in L(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma))$  als

$$V:=\gamma_0^{\rm int}\widetilde{V}.$$

Der Einfachschichtoperator V ist ein elliptischer Isomorphismus für d=3 und für d=2, sofern das Gebiet die Bedingung diam $(\Omega) < 1$  erfüllt, was aber durch ein einfache Skalierung angenommen werden kann. Für  $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$  gilt also

$$\|\phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \le C_{\text{ell}} \langle V\phi, \phi \rangle_{L^2(\Gamma)}. \tag{3.34}$$

Anwendung des Spuroperators auf das Doppelschichtpotential liefert den Doppelschichtoperator  $K \in L(H^{1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma))$  als

$$K := \gamma_0^{\rm int} \widetilde{K} + \frac{1}{2}.$$

Der adjungierte Doppelschichtoperator sei mit  $K' \in L(H^{-1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma))$  bezeichnet.

Wendet man die innere Konormalenableitung auf das Doppelschichtpotential an, so erhält man den hypersingulären Integraloperator  $W \in L(H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma))$  gegeben durch

$$Wv(x) := -\gamma_{1,x}^{\rm int} \widetilde{K}v(x) = -\gamma_{1,x}^{\rm int} \int_{\Gamma} (\gamma_{1,y}^{\rm int} G(x-y))v(y) ds_y, \quad x \in \Gamma.$$

Der hypersinguläre Integraloperator W ist symmetrisch und positiv semidefinit auf  $H^{1/2}(\Gamma)$ , wobei der eindimensionale Kern nur aus den konstanten Funktionen besteht. Somit gilt

$$||v||_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \lesssim \langle Wv, v \rangle_{L^2(\Gamma)} + \left| \langle v, 1 \rangle_{L^2(\Gamma)} \right|^2. \tag{3.35}$$

Zusätzlich zu den bisher erwähnten Eigenschaften erfüllen die obig definierten Integraloperatoren weitere Abbildungseigenschaften sowie Sprungbedingungen über dem Rand  $\Gamma$ . Für Beweise dieser Aussagen sowie weitere Details sei auf die Standardwerke [Ver84, McL00, HW08, Ste08, SS11] verwiesen.

**Satz 3.11** (Abbildungseigenschaften, Sprungbedingungen). 1. Für  $s \in [-1/2, 1/2]$  gelten die folgenden Abbildungseigenschaften

$$\widetilde{V} \in L(H^{-1/2+s}(\Gamma), H^{1+s}_{loc}(\mathbb{R}^d)), \quad V \in L(H^{-1/2+s}(\Gamma), H^{1/2+s}(\Gamma)),$$
 (3.36a)

$$\widetilde{K} \in L(H^{1/2+s}(\Gamma), H^{1+s}_{\Delta}(\mathbb{R}^d \backslash \Gamma)), \quad K \in L(H^{1/2+s}(\Gamma), H^{1/2+s}(\Gamma)), \tag{3.36b}$$

$$K' \in L(H^{-1/2+s}(\Gamma), H^{-1/2+s}(\Gamma)), \quad W \in L(H^{1/2+s}(\Gamma), H^{-1/2+s}(\Gamma)).$$
 (3.36c)

2. Für die in (3.32), (3.33) definierten Potentiale gelten für  $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$  und  $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$  die folgenden Sprungbedingungen

$$\left[\gamma_0 \widetilde{V}\phi\right] := \gamma_0^{\text{int}} \widetilde{V}\phi - \gamma_0^{\text{ext}} \widetilde{V}\phi = 0 \in H^{1/2}(\Gamma), \tag{3.37a}$$

$$\left[\partial_n \widetilde{V}\phi\right] := \gamma_1^{\text{int}} \widetilde{V}\phi - \gamma_1^{\text{ext}} \widetilde{V}\phi = -\phi \in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{3.37b}$$

$$\left[\gamma_0 \widetilde{K} \psi\right] = \psi \in H^{1/2}(\Gamma), \tag{3.37c}$$

$$\left[\partial_n \widetilde{K} \psi\right] = 0 \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{3.37d}$$

### 3.3.2 Die schwach-singuläre Integralgleichung

Betrachtet man das inhomogene Dirichlet-Problem für die Gleichung (3.30), also gelte  $\gamma_0^{\text{int}}u=g$  auf  $\Gamma$  mit  $g\in H^{1/2}(\Gamma)$ , so liefert die Anwendung des Spuroperators auf die Darstellungsformel (3.31) die schwach-singuläre Integralgleichung

$$V\phi = f \quad \text{auf } \Gamma$$
 (3.38)

mit der gesuchten Dichte  $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$  und  $f := (\frac{1}{2} + K)g \in H^{1/2}(\Gamma)$ .

In der Galerkin-Diskretisierung der schwachen Formulierung von (3.38) ist eine Funktion  $\phi_h \in S^{p,0}(\mathcal{E}_h)$  gesucht, sodass

$$\langle V\phi_h, \psi_h \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle f, \psi_h \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \forall \psi_h \in S^{p,0}(\mathcal{E}_h).$$
 (3.39)

Mit der Basis  $\mathcal{B}_h^{\Gamma}$  von  $S^{p,0}(\mathcal{E}_h)$  aus Abschnitt 2.2.2 erhält man eine symmetrische, positiv definite Matrix  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma} \times N_{\Gamma}}$ , wobei

$$\mathbf{V}_{jk} = \langle V\xi_k, \xi_j \rangle_{L^2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x - y)\xi_k(y) ds_y \xi_j(x) ds_x, \quad \xi_j, \xi_k \in \mathcal{B}_h^{\Gamma}.$$
 (3.40)

Wir definieren die Indexmenge  $\mathcal{I}$  als  $\mathcal{I} := \{1, \dots, N_{\Gamma}\}.$ 

Das Hauptresultat für die Randelementdiskretisierung von V, die Approximierbarkeit der inversen Matrix  $\mathbf{V}^{-1}$  durch hierarchische Matrizen mit exponentiell konvergierendem Fehler, ist im folgenden Theorem zusammengefasst.

Satz 3.12. Sei  $\eta > 0$  ein fixer Zulässigkeitsparameter und eine zulässige Partition P von  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$  basierend auf einem Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  gegeben. Dann existiert eine  $\mathcal{H}$ -Matrix  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$  mit maximalem blockweisen Rang r, sodass

$$\|\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{W}_{\mathcal{H}}\|_{2} \le C_{\text{apx}} C_{\text{sp}} N_{\Gamma}^{(d+1)/(d-1)} \text{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}}.$$
 (3.41)

Die Konstante  $C_{apx} > 0$  hängt nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  ab, die Konstante b > 0 hängt zusätzlich noch von  $\eta$  ab.

Bemerkung 3.13. Mit  $h \simeq N_{\Gamma}^{-1/(d-1)}$  sowie  $\frac{1}{\|\mathbf{V}^{-1}\|_2} \leq \|\mathbf{V}\|_2 \lesssim h^{(d-1)/2} \simeq N_{\Gamma}^{-1/2}$  (siehe z.B. [Ste08, Lemma 12.6]) erhält man eine Abschätzung für den relativen Fehler

$$\frac{\|\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{W}_{\mathcal{H}}\|_{2}}{\|\mathbf{V}^{-1}\|_{2}} \lesssim C_{\text{apx}} C_{\text{sp}} N_{\Gamma}^{(d+3)/(2d-2)} \text{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}}.$$
 (3.42)

### 3.3.3 Die hypersinguläre Integralgleichung

Betrachtet man das inhomogene Neumann-Problem für die Gleichung (3.30), also gelte die Randbedingung  $\gamma_1^{\text{int}}u = g$  auf  $\Gamma$  mit  $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ , so liefert die Anwendung der Konormalenableitung auf die Darstellungsformel (3.31) die hypersinguläre Integralgleichung

$$W\phi = f$$
 auf  $\Gamma$ 

mit gesuchter Funktion  $\phi \in H^{1/2}(\Gamma)$  und  $f := (\frac{1}{2} - K')g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ .

Da die konstanten Funktionen im Kern von W sind, ist diese Integralgleichung nicht eindeutig lösbar. Um dies zu gewährleisten, verlangen wir zusätzlich, dass das Integralmittel von  $\phi$  verschwindet, also  $\int_{\Gamma} \phi \, ds_x = 0$ .

Mit der Bilinearform  $b(v, \mu) := \mu \int_{\Gamma} v ds_x$ , erhalten wir die Sattelpunktformulierung dieser Integralgleichung mit Nebenbedingung: Gesucht sind  $(\phi, \lambda) \in H^{1/2}(\Gamma) \times \mathbb{R}$ , sodass

$$\langle W\phi, \psi \rangle_{L^2(\Gamma)} + b(\psi, \lambda) = \langle f, \psi \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma),$$
 (3.43a)

$$b(\phi, \mu) = 0 \qquad \forall \mu \in \mathbb{R}. \tag{3.43b}$$

Die Bilinearform  $b(v,\mu) = \mu \int_{\Gamma} v ds_x$  erfüllt trivialerweise eine inf-sup-Bedingung

$$\inf_{0 \neq \mu \in \mathbb{R}} \sup_{0 \neq v \in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{|b(v, \mu)|}{\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} |\mu|} \ge \gamma > 0.$$
(3.44)

Da die Bilinearform  $\langle W \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Gamma)}$  koerziv auf dem Kern von  $b(\cdot, \lambda)$ , bestehend aus den Funktionen mit Integralmittel Null, ist, liefert die klassische Sattelpunkttheorie (siehe z.B. [BS02, Kapitel 12]) die Existenz einer eindeutigen Lösung  $(\phi, \lambda) \in H^{1/2}(\Gamma) \times \mathbb{R}$ .

Für das diskrete Variationsproblem sind  $(\phi_h, \lambda_h) \in S^{p,1}(\mathcal{E}_h) \times \mathbb{R}$  gesucht, sodass

$$\langle W\phi_h, \psi_h \rangle_{L^2(\Gamma)} + b(\psi_h, \lambda_h) = \langle f, \psi_h \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \forall \psi_h \in S^{p,1}(\mathcal{E}_h), \tag{3.45a}$$

$$b(\phi_h, \mu) = 0 \qquad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$
 (3.45b)

Da auch trivialerweise eine diskrete inf-sup-Bedingung folgt, existiert auch eine eindeutige Lösung des diskreten Problems (3.45), und es gilt die a-priori-Abschätzung

$$\|\phi_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + |\lambda_h| \lesssim \|f\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \tag{3.46}$$

Für  $f \in L^2(\Gamma)$  und die  $L^2$ -Projektion  $\Pi_{\Gamma}^{L^2}: L^2(\Gamma) \to S^{p,1}(\mathcal{E}_h)$  auf  $S^{p,1}(\mathcal{E}_h)$  definiert in (2.17) gilt sogar die Abschätzung

$$\|\phi_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + |\lambda_h| \le C \left\| \Pi_{\Gamma}^{L^2} f \right\|_{L^2(\Gamma)} \le C \|f\|_{L^2(\Gamma)}.$$
(3.47)

Mit der Basis  $\mathcal{B}_h^{\Gamma}$  von  $S^{p,1}(\mathcal{E}_h)$  aus Abschnitt 2.2.2 führt die Diskretisierung der linken Seite von (3.45) auf eine invertierbare Blockmatrix mit

$$\mathcal{W} := \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.48}$$

wobei die Matrix  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma} \times N_{\Gamma}}$  und der Vektor  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma} \times 1}$  gegeben sind durch

$$\mathbf{W}_{jk} = \langle W\xi_k, \xi_j \rangle_{L^2(\Gamma)}, \quad \mathbf{B}_j = \langle \xi_j, 1 \rangle_{L^2(\Gamma)}, \quad \xi_k, \xi_j \in \mathcal{B}_h^{\Gamma}.$$
 (3.49)

Die Indexmenge  $\mathcal{I}$  ist abermals definiert durch  $\mathcal{I} := \{1, \dots, N_{\Gamma}\}.$ 

Der nachfolgende Satz ist das Hauptresultat für die hypersinguläre Integralgleichung und zeigt, dass der erste  $(N_{\Gamma} \times N_{\Gamma})$ -Teilblock der Matrix  $\mathcal{W}$  mittels hierarchischen Matrizen approximiert werden kann, wobei der Fehler in der Spektralnorm exponentiell im Rang gegen Null konvergiert.

Satz 3.14. Sei  $\eta > 0$  ein fixer Zulässigkeitsparameter und eine zulässige Partition P von  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$  basierend auf einem Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  gegeben. Dann existiert eine  $\mathcal{H}$ -Matrix  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$  mit maximalem blockweisen Rang r, sodass

$$\| \mathcal{W}^{-1}|_{N_{\Gamma} \times N_{\Gamma}} - \mathbf{W}_{\mathcal{H}} \|_{2} \le C_{\mathrm{apx}} C_{\mathrm{sp}} \mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) N_{\Gamma}^{(2d-1)/(2d-2)} e^{-br^{1/(d+1)}}$$

Die Konstante  $C_{apx}$  hängt nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  ab, die Konstante b > 0 hängt zusätzlich noch von  $\eta$  ab.

Bemerkung 3.15 (Approximation der vollen Inversen). Der vorherige Satz liefert eine Approximation  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$  an den ersten  $(N_{\Gamma} \times N_{\Gamma})$ -Unterblock  $\mathbf{G}$  der Matrix  $\mathbf{W}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & 0 \end{pmatrix}$ .

 $Da \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma}}$  als Vektor Rang eins hat, ist die Matrix  $\widehat{\mathbf{W}}_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{\mathcal{H}} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^{T} & 0 \end{pmatrix}$  eine blockweise Rang-r-Approximation an die Matrix  $\mathbf{W}^{-1}$  mit

$$\left\| \boldsymbol{\mathcal{W}}^{-1} - \widehat{\mathbf{W}}_{\mathcal{H}} \right\|_{2} \leq C_{\mathrm{apx}} C_{\mathrm{sp}} \mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) N_{\Gamma}^{(2d-1)/(2d-2)} e^{-br^{1/(d+1)}}.$$

Bemerkung 3.16 (Relative Fehler). Um eine Abschätzung für den relativen Fehler zu erhalten, brauchen wir eine Abschätzung für  $\|\mathbf{\mathcal{W}}\|_2$ , da  $\frac{1}{\|\mathbf{\mathcal{W}}^{-1}\|_2} \leq \|\mathbf{\mathcal{W}}\|_2$ . Die Stetigkeit des hypersingulären Integraloperators sowie eine inverse Ungleichung, siehe Lemma 2.5, liefern mit der gewichteten Young'schen Ungleichung und (2.11), dass

$$\left\langle \boldsymbol{\mathcal{W}} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \lambda \end{pmatrix} \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} \lesssim \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^{2} + \left| \lambda \langle v, 1 \rangle_{L^{2}(\Gamma)} \right| \lesssim h^{-1} \|v\|_{L^{2}(\Gamma)}^{2} + |\lambda| \|v\|_{L^{2}(\Gamma)}$$
$$\lesssim h^{-1} \|v\|_{L^{2}(\Gamma)}^{2} + h |\lambda|^{2} \lesssim h^{d-2} \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \lambda \end{pmatrix} \right\|_{2}^{2}.$$

Mit  $h \simeq N_{\Gamma}^{-1/(d-1)}$  bekommen wir eine relative Fehlerabschätzung als

$$\frac{\left\|\boldsymbol{\mathcal{W}}^{-1} - \widehat{\mathbf{W}}_{\mathcal{H}}\right\|_{2}}{\left\|\boldsymbol{\mathcal{W}}^{-1}\right\|_{2}} \lesssim C_{\mathrm{apx}} C_{\mathrm{sp}} N_{\Gamma}^{(d+1)/(2d-2)} \mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}}.$$
(3.50)

Alternativ zu der Sattelpunktformulierung kann auch wie in Abschnitt 3.1.2 eine stabilisierte Galerkin-Diskretisierung betrachtet werden. Hierbei ist die stabilisierte Galerkin-Matrix  $\mathbf{W}^{\mathrm{st}} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma} \times N_{\Gamma}}$  gegeben als

$$\mathbf{W}_{jk}^{\text{st}} = \langle W\xi_k, \xi_j \rangle_{L^2(\Gamma)} + \alpha \langle \xi_k, 1 \rangle_{L^2(\Gamma)} \langle \xi_j, 1 \rangle_{L^2(\Gamma)} = \mathbf{W}_{jk} + \alpha \mathbf{B}_k \mathbf{B}_j, \quad \forall j, k = 1, \dots, N_{\Gamma},$$
(3.51)

wobei  $\alpha > 0$  ein fixierter Stabilisierungsparameter ist, und die Matrix **W** und der Vektor **B** in (3.49) definiert sind. Die stabilisierte Matrix  $\mathbf{W}^{\mathrm{st}} = \mathbf{W} + \alpha \mathbf{B} \mathbf{B}^T$  ist symmetrisch und positiv definit. Um eine  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an die Matrix  $(\mathbf{W}^{\mathrm{st}})^{-1}$  aus der Approximation für  $\mathbf{W}^{-1}$  zu bestimmen, zerlegen wir

$$\mathcal{W}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & 0 \end{pmatrix},$$

und können die Inverse  $(\mathbf{W}^{\text{st}})^{-1}$  wie in Abschnitt 3.1.2 exakt bestimmen durch  $(\mathbf{W}^{\text{st}})^{-1} = \mathbf{G} + (\mathbf{W}^{\text{st}})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{T}$ , also aus einem Rang-1-Update der Matrix  $\mathbf{G}$ . Wir erhalten also direkt das folgende Korollar zu Satz 3.14.

**Korollar 3.17.** Es existiert eine blockweise Rang-(r+1)-Approximation  $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathcal{H}}$  an  $(\mathbf{W}^{st})^{-1}$  mit

$$\|(\mathbf{W}^{st})^{-1} - \widetilde{\mathbf{W}}_{\mathcal{H}}\|_2 \le C_{\mathrm{apx}}C_{\mathrm{sp}} \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) N_{\Gamma}^{(2d-1)/(2d-2)} e^{-br^{1/(d+1)}}.$$

wobei  $C_{apx}$ , b > 0 die Konstanten aus Satz 3.14 sind.

# Niedrigdimensionale Approximation

Das Ziel diese Kapitels ist eine niedrigdimensionale Approximation an die Galerkin-Lösungen der Modellprobleme zu konstruieren. Hierbei soll der Fehler exponentiell mit der Dimension des Approximationsraumes fallen. In Abschnitt 4.1 ist die Konstruktion in sechs Schritten zusammengefasst. In den weiteren Abschnitten werden diese Punkte für die Modellprobleme aus Abschnitt 3, also Finite Elemente Diskretisierungen für elliptische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung sowie die Lamé-Gleichung und Randelementdiskretisierungen der schwach-singulären und hypersingulären Integralgleichung bewiesen.

# 4.1 Konstruktion einer Niedrigrangapproximation

Wir haben in Abschnitt 3 verschiedene Modellprobleme und Galerkin-Diskretisierungen eingeführt. In diesem Kapitel soll ein kurzer Überblick darüber gegeben werden, wie eine niedrigdimensionale Approximation an die Galerkin-Lösung  $\phi_h \in V_h$  eines diskreten variationellen Problems

$$a(\phi_h, \psi_h) = \langle f, \psi_h \rangle \quad \psi_h \in V_h$$

konstruiert werden kann. Die Lösung dieses Problems ist äquivalent zur Lösung des Gleichungssystems

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi_h} = \mathbf{f},$$

wobei  $\phi_h = \sum_{i=1}^N \phi_h^i \psi_i$  mit einer Basis  $\{\psi_i, i=1,\dots,N\}$  von  $V_h$ . Die Approximation eines zulässigen Matrixblockes  $\mathbf{A}^{-1}|_{\tau \times \sigma}$  der inversen Galerkin-Matrix mittels einer Niedrigrangfaktorisierung, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, kann somit darauf zurückgeführt werden, wie gut die Galerkin-Lösung  $\phi_h$  lokal auf einer zu  $\tau$  gehörigen Bounding-Box  $B_{R_{\tau}}$  und beliebiger rechter Seite mit Träger in einer zu  $\sigma$  gehörigen Bounding-Box  $B_{R_{\sigma}}$  approximiert werden kann, wobei die Bounding-Boxen die Zulässigkeitsbedingung  $\eta \operatorname{dist}(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) \geq \operatorname{diam}(B_{R_{\tau}})$  für ein fixes  $\eta > 0$  erfüllen.

Unser Ziel ist also einen endlich dimensionalen Raum  $W_k \subset V_h$  zu finden, für den ein Approximationsresultat der Form

$$\min_{w \in W_k} \|\phi_h - w\|_{L^2(B_{R_\tau})} \le C_{\text{box}} h^{-\alpha} q^k \|f\|_{L^2(B_{R_\sigma})}$$
(4.1)

für beliebiges f mit supp  $f \subset \overline{B_{R_{\sigma}}}$  gilt, wobei die Dimension des Raumes  $W_k \subset V_h$  maximal polynomiell in k wächst und  $\alpha>0$  von dem jeweiligen Modellproblem abhängt. Die Konstruktion eines derartigen Approximationsraumes lässt sich auf sechs Schritte zurückführen, welche wir modellhaft für das Laplace-Problem nachfolgend vorstellen.

### • 1.Schritt: Orthogonalität

Für f mit supp  $f \subset \overline{B_{R_{\sigma}}}$  liefert die Bedingung  $\eta$  dist $(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) \geq \text{diam}(B_{R_{\tau}})$ , dass supp  $f \cap \overline{B_{(1+\delta)R_{\tau}}} = \emptyset$ , falls der Parameter  $\delta > 0$  klein genug ist, und somit  $\langle f, \psi_h \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$  für alle  $\psi_h \in V_h$  mit supp  $\psi_h \subset \overline{B_{(1+\delta)R_{\tau}}}$ . Einsetzen in die Galerkin-Formulierung liefert eine Orthogonalität der Galerkin-Lösung  $\phi_h$  auf der Box  $B_{(1+\delta)R_{\tau}}$ 

$$a(\phi_h, \psi_h) = 0 \quad \forall \psi_h \in V_h \text{ mit supp } \psi_h \subset \overline{B_{(1+\delta)R_\tau}}.$$
 (4.2)

• 2.Schritt: Definition eines Approximationsraumes und einer geeigneten Norm

Man definiert einen abgeschlossenen Raum  $\mathcal{H}_{h,0}(D)$  für eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^d$ , der Funktionen vereint, die gewisse Eigenschaften der Galerkin-Lösung sowie die Orthogonalität aus Schritt 1 erfüllen, beispielsweise harmonische Funktionen oder Sprungbedingungen. Die Abgeschlossenheit des Raumes  $\mathcal{H}_{h,0}(D)$  erlaubt die Definition einer Orthogonalprojektion  $\Pi_{h,R_{\tau}}$  auf diesen Raum.

Weiters wird eine Norm  $\|\cdot\|_{h,R_{\tau}}$  auf dem Raum  $\mathcal{H}_{h,0}(D)$  definiert, in der die Galerkin-Lösung approximiert wird. Generell ist dies für feste Gitterweite h eine zur  $H^1$ -Norm äquivalente Norm mit geeigneter h-Gewichtung.

### • 3.Schritt: Innere Regularität

Da im nachfolgenden vierten Schritt eine Approximation gefunden wird, bei der in der Fehlerabschätzung Ableitungen auftreten, wird die innere Regularität der betrachteten Gleichungen ausgenützt, um diese kontrollieren zu können. Unser Ziel ist daher eine diskrete Caccioppoli-artige Ungleichung für (diskrete) Funktionen  $u \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta)R_{\tau}})$  zu finden, also eine Ungleichung der Form

$$\|\nabla u\|_{L^2(B_{R\tau})} \leq C(\delta) \left(\frac{h}{\delta R_\tau} \left\|\nabla u\right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R\tau})} + \frac{1}{\delta R_\tau} \left\|u\right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R\tau})}\right),$$

wobei  $\delta \in (0,1)$  und  $B_{R_{\tau}}$  und  $B_{(1+\delta)R_{\tau}}$  konzentrische Boxen gemäß Definition 2.10 sind. Da angenommen werden kann, dass der Faktor  $\frac{h}{\delta R_{\tau}}$  klein ist, wird also eine "stärkere Norm" durch eine "schwächere Norm" auf einer leicht vergrößerten Box abgeschätzt.

• 4.Schritt: Approximation mittels Interpolation und Projektion

Auf einem gröberen Gitter mit Gitterweite H > h betrachtet man die Komposition aus obiger Orthogonalprojektion  $\Pi_{h,R_{\tau}}$  und Scott-Zhang-Projektion  $I_H$  aus (2.21) und erhält ein Approximationsresultat

$$||u - \Pi_{h,R_{\tau}} I_H u||_{h,R_{\tau}} \le C(\delta) \left(\frac{h}{R_{\tau}} + \frac{H}{R_{\tau}}\right) ||u||_{h,(1+2\delta)R_{\tau}}.$$

• 5.Schritt: Iteration auf geschachtelten Boxen

Auf geeigneten konzentrisch wachsenden Boxen, die  $B_{R_{\tau}}$  und somit die zum Cluster  $\tau$  gehörigen Freiheitsgrade enthalten, liefert k-malige Iteration dieses Resultates mit geeigneter Wahl von H und  $\delta$  schlussendlich die exponentielle Konvergenz.

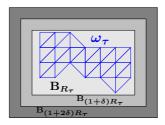


Abbildung 4.1: Konzentrisch wachsende Boxen.

• Bei der Randelementmethode, 6. Schritt: Spurungleichung, Sprungbedingungen

Bei der Randelementmethode werden die Schritte 1-5 für die Potentiale anstelle der Randintegraloperatoren bewiesen, mittels Spurabschätzung und Sprungbedingungen erhält man dann eine Approximation an die Galerkin-Lösung.

Die Anwendung der kontinuierlichen Caccioppoli-Ungleichung bei der Konstruktion von niedrigdimensionalen Approximationen an kontinuierliche Lösungen von elliptischen Differentialgleichungen/Systemen findet sich auch in den Arbeiten [BH03, Sch06, Bör10a]. Wir nützen hierbei allerdings die diskrete Orthogonalität (4.2) an Stelle einer kontinuierlichen Orthogonalität, was auf eine "diskrete" Caccioppoli-artige Ungleichung führt. Derartige Ungleichungen sind in der Literatur, insbesondere für die Randelementmethode, bisher nicht bekannt, und der Beweis dieser Aussagen ist der zentrale Schritt in diesem Abschnitt.

# 4.2 Elliptische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

In diesem Abschnitt werden die ersten fünf Schritte aus dem vorigen Abschnitt für elliptische partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung aus (3.5) mit gemischten Randbedingungen gezeigt. Das Hauptresultat, die Existenz einer niedrigdimensionalen Approximation an die Galerkin-Lösung, ist im Folgenden formuliert.

**Proposition 4.1.** Seien  $\tau \times \sigma$  ein Cluster-Paar und  $B_{R_{\tau}}$ ,  $B_{R_{\sigma}}$  zugehörige Bounding-Boxen gemäß Definition 2.7, wobei  $R_{\tau} \leq 2 \operatorname{diam}(\Omega)$ . Sei  $q \in (0,1)$  und für fixes  $\eta > 0$  die Zulässigkeitsbedingung  $\eta \operatorname{dist}(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) \geq \operatorname{diam}(B_{R_{\tau}})$  erfüllt. Dann existiert für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ein Unterraum  $\widehat{W}_k \subseteq S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D)$  mit  $\operatorname{dim} \widehat{W}_k \leq C_{\operatorname{dim}}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ , sodass für beliebiges  $f \in L^2(\Omega)$  mit supp  $f \subset \overline{B_{R_{\sigma}} \cap \Omega}$ , für die Lösung  $\phi_h$  von (3.5) folgt

$$\min_{\widehat{w} \in \widehat{W}_k} \|\phi_h - \widehat{w}\|_{L^2(B_{R_\tau} \cap \Omega)} \le C_{\text{box}} q^k \|\Pi_{\Omega}^{L^2} f\|_{L^2(\Omega)} \le C_{\text{box}} q^k \|f\|_{L^2(B_{R_\sigma} \cap \Omega)}.$$
(4.3)

Die Konstante  $C_{\text{box}} > 0$  hängt nur von den Koeffizienten in (3.3) und  $\Omega$  ab, die Konstante  $C_{\text{dim}}$  hängt zusätzlich noch von d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab.

## 4.2.1 Orthogonalität

Für beliebiges f mit supp  $f \subset \overline{B_{R_{\sigma}} \cap \Omega}$  liefert Gleichung (3.5)

$$a(\phi_h, \psi_h) = \langle f, \psi_h \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall \psi_h \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D) \text{ mit supp } \psi_h \subset \overline{\Omega} \setminus \overline{B_{R_\sigma}}.$$

Mit der Zulässigkeitsbedingung  $0 < \text{diam}(B_{R_{\tau}}) \leq \eta \text{dist}(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}})$  aus (2.27) und einem genügend kleinen  $\kappa \in (0,1)$ , sodass  $\text{dist}(B_{(1+\kappa)R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) > 0$ , führt dies auf die Orthogonalität

$$a(\phi_h, \psi_h) = 0 \quad \forall \psi_h \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D) \text{ mit supp } \psi_h \subset \overline{B_{(1+\kappa)R_\tau} \cap \Omega},$$
 (4.4)

also auf  $B_{(1+\kappa)R_{\tau}} \cap \Omega$  ist  $\phi_h$  orthogonal bezüglich der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  zu stetigen stückweise Polynomen vom maximalen Grad p, womit Schritt 1, die Orthogonalitätseigenschaft, erfüllt ist.

## **4.2.2** Der Approximationsraum $\mathcal{H}_{h,0}(D,\omega_{\rho})$

Sei  $\omega_{\rho} \subset \Omega$  von der Form (2.33) und  $D \subset \mathbb{R}^d$ . Wir definieren den Raum  $\mathcal{H}_{h,0}(D,\omega_{\rho})$ , der Eigenschaften der Galerkin-Lösung, speziell die Orthogonalität aus (4.4), zusammenfasst als

$$\mathcal{H}_{h,0}(D,\omega_{\rho}) := \{ u \in H^{1}(D \cap \omega_{\rho}) : \exists \widetilde{u} \in S_{0}^{p,1}(\mathcal{T}_{h};\Gamma_{D}) \text{ s.d. } u|_{D \cap \omega_{\rho}} = \widetilde{u}|_{D \cap \omega_{\rho}}, \text{supp } \widetilde{u} \subset \overline{\omega_{\rho}},$$

$$a(u,\psi_{h}) = 0 \ \forall \psi_{h} \in S_{0}^{p,1}(\mathcal{T}_{h};\Gamma_{D}) \text{ mit supp } \psi_{h} \subset \overline{D \cap \omega_{\rho}} \}.$$

$$(4.5)$$

Für den Beweis von Proposition 4.1 benötigen wir nur den Spezialfall  $\omega_{\rho} = \Omega$ . Der allgemeine Fall mit  $\omega_{\rho} \neq \Omega$  wird nur für die Existenz einer approximativen LU-Zerlegung in Kapitel 6.3 benötigt.

Der endlich dimensionale Raum  $\mathcal{H}_{h,0}(D,\omega_{\rho})$  ist klarerweise ein abgeschlossener Unterraum von  $H^1(D\cap\omega_{\rho})$ , und wir haben  $\phi_h\in\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\kappa)R_{\tau}},\Omega)$  für die Galerkin-Lösung  $\phi_h$  aus (3.5) mit supp  $f\subset\overline{B_{R_{\sigma}}\cap\Omega}$  und Bounding-Boxen  $B_{(1+\kappa)R_{\tau}},B_{R_{\sigma}}$  mit dist $(B_{(1+\kappa)R_{\tau}},B_{R_{\sigma}})>0$ . Auf dem Raum  $\mathcal{H}_{h,0}(B_R,\omega_{\rho})$  definieren wir die Norm

$$|||u|||_{h,R}^2 := \frac{h^2}{R^2} ||\nabla u||_{L^2(B_R \cap \omega_\rho)}^2 + \frac{1}{R^2} ||u||_{L^2(B_R \cap \omega_\rho)}^2 ,$$

die für feste h,R äquivalent zur  $H^1$ -Norm ist. Weiters sei  $\Pi_{h,R}: (H^1(B_R \cap \omega_\rho), \|\cdot\|_{h,R}) \to (\mathcal{H}_{h,0}(B_R,\omega_\rho), \|\cdot\|_{h,R})$  die orthogonale Projektion auf  $\mathcal{H}_{h,0}(B_R,\omega_\rho)$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{h,R}$ , die auf Grund der Abgeschlossenheit von  $\mathcal{H}_{h,0}(B_R,\omega_\rho)$  wohldefiniert ist.

### 4.2.3 Caccioppoli-artige Ungleichung

Das folgende Lemma zeigt eine diskrete Caccioppoli-artige Ungleichung für Funktionen in  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta)R},\omega_{\rho})$ . Die hier verwendete Technik, bestehend aus einer Kombination der

nachfolgenden Abschätzungen (4.11) und (4.12), wird in der Literatur auch als "super-Approximation" bezeichnet und geht auf [NS74] (siehe z.B. [Wah91, Annahme 7.1]) zurück. Unter Verwendung der Tatsache, dass die (p+1)-ten partiellen Ableitungen der diskreten Funktion u verschwinden, erhält man hier eine zusätzliche h-Potenz.

Lemma 4.2. Seien  $\delta \in (0,1)$ ,  $R \in (0,2 \operatorname{diam}(\Omega))$  und  $B_R$ ,  $B_{(1+\delta)R}$  zwei konzentrische Boxen mit Seitenlängen R und  $(1+\delta)R$  gemäß Definition 2.10. Weiters gelte  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{4}$  und sei  $\omega_{\rho} \subseteq \Omega$  von der Form (2.33). Dann existiert eine Konstante  $C_{\text{reg}} > 0$ , die nur vom Randwertproblem (3.3),  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  abhängt, sodass für  $u \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta)R}, \omega_{\rho})$  gilt

$$\|\nabla u\|_{L^{2}(B_{R}\cap\omega_{\rho})} \leq \|\nabla u\|_{L^{2}(B_{R}\cap\omega_{\rho})} + \langle \alpha u, u \rangle_{L^{2}(\overline{B_{R}\cap\omega_{\rho}}\cap\Gamma_{\mathcal{R}})}^{1/2} \leq C_{\text{reg}} \frac{1+\delta}{\delta} \|\|u\|_{h,(1+\delta)R}. \quad (4.6)$$

Beweis. Sei  $\eta \in S^{1,1}(\mathcal{T}_h)$  eine stückweise affine Abschneidefunktion gemäß Definition 2.16 mit  $D_1 = B_R$  und  $D_2 = B_{(1+\delta/2)R}$ . Wegen der Voraussetzung  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{4}$  existiert eine derartige Funktion  $\eta \in S^{1,1}(\mathcal{T}_h)$ . Lemma 2.18 liefert  $\eta^2 u \in S_0^{p+2,1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D) \subset H_0^1(\Omega; \Gamma_D)$  sowie

$$\operatorname{supp}(\eta^2 u) \subset \overline{B_{(1+\delta/2)R} \cap \omega_{\rho}}.$$
(4.7)

Da supp $(\eta^2 u)$  eine Vereinigung von Elementen von  $\mathcal{T}_h$  ist, folgt auf Grund der Lokalität des nodalen Interpolationsoperators  $J_h$  aus (2.23), dass supp $J_h(\eta^2 u) = \text{supp}(\eta^2 u)$ , also

$$\operatorname{supp} J_h(\eta^2 u) \subset \overline{B_{(1+\delta/2)R} \cap \omega_\rho} \subset \overline{B} \quad \operatorname{mit} B := B_{(1+\delta)R} \cap \omega_\rho. \tag{4.8}$$

Mit der Koerzivität der Bilinearform  $a(\cdot,\cdot)$  sowie  $\frac{1}{\delta R} \lesssim \frac{1}{(\delta R)^2}$ , da  $\delta < 1$  und  $R \leq 2 \operatorname{diam}(\Omega)$ , erhält man mit  $\operatorname{dist}(\partial B_R, \partial B_{(1+\delta)R}) = \frac{\delta R}{2}$  und der Definition der Abschneidefunktion  $\eta$ , dass

$$\|\nabla u\|_{L^{2}(B_{R}\cap\omega_{\rho})}^{2} + \langle \alpha u, u \rangle_{L^{2}(\overline{B_{R}\cap\omega_{\rho}}\cap\Gamma_{\mathcal{R}})} \leq \|\nabla(\eta u)\|_{L^{2}(B)}^{2} + \langle \alpha \eta u, \eta u \rangle_{L^{2}(\overline{B}\cap\Gamma_{\mathcal{R}})}$$

$$\leq a(\eta u, \eta u)$$

$$= \int_{B} \mathbf{C}\nabla u \cdot \nabla(\eta^{2}u) + u^{2}\mathbf{C}\nabla \eta \cdot \nabla \eta \, dx + \langle \mathbf{b} \cdot \nabla u + \beta u, \eta^{2}u \rangle_{L^{2}(B)}$$

$$+ \langle \mathbf{b} \cdot (\nabla \eta)u, \eta u \rangle_{L^{2}(B)} + \langle \alpha u, \eta^{2}u \rangle_{L^{2}(\overline{B}\cap\Gamma_{\mathcal{R}})}$$

$$\leq \langle \mathbf{C}\nabla u, \nabla(\eta^{2}u) \rangle_{L^{2}(B)} + \langle \mathbf{b} \cdot \nabla u + \beta u, \eta^{2}u \rangle_{L^{2}(B)}$$

$$+ \langle \alpha u, \eta^{2}u \rangle_{L^{2}(\overline{B}\cap\Gamma_{\mathcal{R}})} + \frac{1}{(\delta R)^{2}} \|u\|_{L^{2}(B)}^{2}$$

$$= a(u, \eta^{2}u) + \frac{1}{(\delta R)^{2}} \|u\|_{L^{2}(B)}^{2}.$$

$$(4.9b)$$

Wegen (4.8) folgt supp  $J_h(\eta^2 u) \subset \overline{B}$ , und die Orthogonalität (4.5) für Funktionen in  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta)R},\omega_\rho)$  liefert daher

$$a(u, \eta^{2}u) = a(u, \eta^{2}u - J_{h}(\eta^{2}u))$$

$$\leq \|\mathbf{C}\|_{L^{\infty}(B)} \|\nabla u\|_{L^{2}(B)} \|\nabla (\eta^{2}u - J_{h}(\eta^{2}u))\|_{L^{2}(B)}$$

$$+ \left(\|\mathbf{b}\|_{L^{\infty}(B)} \|\nabla u\|_{L^{2}(B)} + \|\beta\|_{L^{\infty}(B)} \|u\|_{L^{2}(B)}\right) \|\eta^{2}u - J_{h}(\eta^{2}u)\|_{L^{2}(B)}$$

$$+ \left|\left\langle \alpha u, \eta^{2}u - J_{h}(\eta^{2}u)\right\rangle_{L^{2}(\overline{B}\cap\Gamma_{\mathcal{R}})}\right|. \tag{4.10}$$

Die Approximationseigenschaft der nodalen Interpolation (2.23) und die Trägereigenschaft (4.7) von  $\eta^2 u$  liefern nun für  $s \in \{0, 1\}$ 

$$\left|\eta^{2}u - J_{h}(\eta^{2}u)\right|_{H^{s}(B)}^{2} \lesssim h^{2(p+1-s)} \sum_{\substack{T \in \mathcal{T}_{h} \\ T \subseteq B}} \left|\eta^{2}u\right|_{H^{p+1}(T)}^{2}.$$
 (4.11)

Die Abschätzung (2.35) der Seminorm auf der rechten Seite aus Lemma 2.18 sowie die inversen Ungleichungen  $|\eta u|_{H^p(T)} \lesssim h^{-p+1} \|\eta u\|_{H^1(T)}$  und  $|u|_{H^{p-1}(T)} \lesssim h^{-p+1} \|u\|_{L^2(T)}$  aus (2.14) führen auf

$$\left|\eta^{2}u - J_{h}(\eta^{2}u)\right|_{H^{s}(B)}^{2} \lesssim \frac{1}{(\delta R)^{2}}h^{2(p+1-s)} \sum_{\substack{T \in \mathcal{T}_{h} \\ T \subseteq B}} \left(\left|\eta u\right|_{H^{p}(T)}^{2} + \frac{1}{(\delta R)^{2}}\left|u\right|_{H^{p-1}(T)}^{2}\right)$$

$$\lesssim \frac{h^{2(2-s)}}{(\delta R)^{2}}\left\|\eta u\right\|_{H^{1}(B)}^{2} + \frac{h^{2(2-s)}}{(\delta R)^{4}}\left\|u\right\|_{L^{2}(B)}^{2}$$

$$\lesssim \frac{h^{2(2-s)}}{(\delta R)^{2}}\left\|\nabla(\eta u)\right\|_{L^{2}(B)}^{2} + \frac{h^{2(2-s)}}{(\delta R)^{4}}\left\|u\right\|_{L^{2}(B)}^{2}. \tag{4.12}$$

Für den Randterm in (4.10) benötigen wir eine weitere Abschneidefunktion  $\widetilde{\eta}$  gemäß Definition 2.16 mit  $D_1 = \operatorname{interior}(\sup(\eta^2 u - J_h(\eta^2 u)))$  und  $D_2 = B_{(1+\delta)R}$ . Aus  $\sup \eta \subset \overline{B_{(1+\delta/2)R}}$  folgt  $\operatorname{dist}(\partial D_1, \partial D_2) > 0$ . Somit erhalten wir, da  $\widetilde{\eta} = 1$  auf  $\sup(J_h(\eta^2 u) - \eta^2 u)$ , dass

$$\left| \left\langle \alpha u, \eta^2 u - J_h(\eta^2 u) \right\rangle_{L^2(\overline{B} \cap \Gamma_{\mathcal{R}})} \right| = \left| \left\langle \alpha \widetilde{\eta} u, \eta^2 u - J_h(\eta^2 u) \right\rangle_{L^2(\overline{B} \cap \Gamma_{\mathcal{R}})} \right| \\
\leq \left\| \alpha \right\|_{L^{\infty}(\overline{B} \cap \Gamma_{\mathcal{R}})} \left\| \widetilde{\eta} u \right\|_{L^2(\overline{B} \cap \Gamma_{\mathcal{R}})} \left\| \eta^2 u - J_h(\eta^2 u) \right\|_{L^2(\overline{B} \cap \Gamma_{\mathcal{R}})}.$$
(4.13)

Mit Lemma 2.18 kann man die Funktion  $\tilde{\eta}u \in H^1(\Omega)$  definieren, und für den Träger folgt supp  $\tilde{\eta}u \subset \overline{B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho}} = \overline{B}$ . Man kann also die multiplikative Spurabschätzung aus Lemma 2.2 für das gesamte Gebiet  $\Omega$  auf die Funktion  $\tilde{\eta}u$  anwenden, was mit

$$\|\widetilde{\eta}u\|_{H^{1}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{2}(B)} + \|\nabla(\widetilde{\eta}u)\|_{L^{2}(B)} \lesssim \frac{1}{\delta R} \|u\|_{L^{2}(B)} + \|\nabla u\|_{L^{2}(B)}$$

auf eine Abschätzung des zweiten Terms auf der rechten Seite in (4.13) führt

$$\|\widetilde{\eta}u\|_{L^{2}(\overline{B}\cap\Gamma_{\mathcal{R}})} \lesssim \|\widetilde{\eta}u\|_{L^{2}(\Gamma)} \lesssim \|\widetilde{\eta}u\|_{L^{2}(\Omega)} + \|\widetilde{\eta}u\|_{L^{2}(\Omega)}^{1/2} \|\widetilde{\eta}u\|_{H^{1}(\Omega)}^{1/2}$$

$$\lesssim \frac{1}{\sqrt{\delta R}} \|u\|_{L^{2}(B)} + \|u\|_{L^{2}(B)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^{2}(B)}^{1/2}.$$
(4.14)

Abermals mittels multiplikativer Spurabschätzung für  $\Gamma$  und dem Approximationsresultat

(4.12) angewendet mit s = 0 und s = 1 folgt

$$\|\eta^{2}u - J_{h}(\eta^{2}u)\|_{L^{2}(\overline{B}\cap\Gamma_{\mathcal{R}})} \lesssim \|\eta^{2}u - J_{h}(\eta^{2}u)\|_{L^{2}(B)} + \|\eta^{2}u - J_{h}(\eta^{2}u)\|_{L^{2}(B)}^{1/2} \|\nabla(\eta^{2}u - J_{h}(\eta^{2}u))\|_{L^{2}(B)}^{1/2}$$

$$\lesssim \left(\frac{h^{2}}{(\delta R)^{2}} \|u\|_{L^{2}(B)} + \frac{h^{2}}{\delta R} \|\nabla u\|_{L^{2}(B)}\right)$$

$$+ \left(\frac{h}{\delta R} \|u\|_{L^{2}(B)}^{1/2} + \frac{h}{\sqrt{\delta R}} \|\nabla u\|_{L^{2}(B)}^{1/2}\right) \left(\frac{\sqrt{h}}{\delta R} \|u\|_{L^{2}(B)}^{1/2} + \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\delta R}} \|\nabla u\|_{L^{2}(B)}^{1/2}\right)$$

$$\lesssim \frac{h^{2} + h^{3/2}}{(\delta R)^{2}} \|u\|_{L^{2}(B)} + \frac{h^{2} + h^{3/2}}{\delta R} \|\nabla u\|_{L^{2}(B)} + \frac{h^{3/2}}{(\delta R)^{3/2}} \|u\|_{L^{2}(B)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^{2}(B)}^{1/2}$$

$$\lesssim \frac{h^{3/2}}{(\delta R)^{2}} \|u\|_{L^{2}(B)} + \frac{h^{3/2}}{\delta R} \|\nabla u\|_{L^{2}(B)}.$$

Daher erhalten wir gemeinsam mit der Abschätzung (4.14)

$$\begin{split} \|\widetilde{\eta}u\|_{L^{2}(\overline{B}\cap\Gamma_{\mathcal{R}})} \|\eta^{2}u - J_{h}(\eta^{2}u)\|_{L^{2}(\overline{B}\cap\Gamma_{\mathcal{R}})} &\lesssim \left(\frac{1}{\sqrt{\delta R}} \|u\|_{L^{2}(B)} + \|u\|_{L^{2}(B)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^{2}(B)}^{1/2}\right) \\ & \cdot \left(\frac{h^{3/2}}{(\delta R)^{2}} \|u\|_{L^{2}(B)} + \frac{h^{3/2}}{\delta R} \|\nabla u\|_{L^{2}(B)}\right) \\ &\lesssim \frac{h^{3/2}}{(\delta R)^{5/2}} \|u\|_{L^{2}(B)}^{2} + \frac{h^{3/2}}{(\delta R)^{3/2}} \|u\|_{L^{2}(B)} \|\nabla u\|_{L^{2}(B)} \\ & + \frac{h^{3/2}}{(\delta R)^{2}} \|u\|_{L^{2}(B)}^{3/2} \|\nabla u\|_{L^{2}(B)}^{1/2} + \frac{h^{3/2}}{\delta R} \|u\|_{L^{2}(B)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^{2}(B)}^{3/2}. \end{split}$$

Die Young'sche Ungleichung angewendet mit den Young-Exponenten 4/3 und 4 für die letzten beiden Terme liefert

$$\frac{h^{3/2}}{(\delta R)^2}\|u\|_{L^2(B)}^{3/2}\|\nabla u\|_{L^2(B)}^{1/2}\lesssim \frac{h^2}{(\delta R)^2}\|\nabla u\|_{L^2(B)}^2+\frac{h^{4/3}}{(\delta R)^2}\|u\|_{L^2(B)}^2$$

sowie

$$\frac{h^{3/2}}{\delta R}\|u\|_{L^2(B)}^{1/2}\|\nabla u\|_{L^2(B)}^{3/2}\lesssim \frac{h^2}{(\delta R)^2}\|\nabla u\|_{L^2(B)}^2+(\delta R)^2\|u\|_{L^2(B)}^2.$$

Die Voraussetzung  $h/(\delta R) \le 1/4$  impliziert schlussendlich gemeinsam mit  $\frac{1}{\delta R} \lesssim \frac{1}{(\delta R)^2}$ , dass

$$\left| \left\langle \alpha u, \eta^2 u - J_h(\eta^2 u) \right\rangle_{L^2(\overline{B} \cap \Gamma_{\mathcal{R}})} \right| \lesssim \|\widetilde{\eta} u\|_{L^2(\overline{B} \cap \Gamma_{\mathcal{R}})} \|\eta^2 u - J_h(\eta^2 u)\|_{L^2(\overline{B} \cap \Gamma_{\mathcal{R}})}$$

$$\lesssim \frac{h^2}{(\delta R)^2} \|\nabla u\|_{L^2(B)}^2 + \frac{1}{(\delta R)^2} \|u\|_{L^2(B)}^2 = \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^2 \|u\|_{h,(1+\delta)R}^2. \tag{4.15}$$

Die Ungleichungen (4.12) und (4.15) liefern nun geeignete Abschätzungen für die Terme der rechten Seite von (4.10). Anwendung der gewichteten Young-Ungleichung  $ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2$ 

und Einsetzen in (4.9b) liefert nun

$$\begin{split} \|\nabla(\eta u)\|_{L^{2}(B)}^{2} + \langle \alpha \eta u, \eta u \rangle_{L^{2}(\overline{B} \cap \Gamma_{\mathcal{R}})} &\lesssim a(u, \eta^{2}u) + \frac{1}{(\delta R)^{2}} \|u\|_{L^{2}(B)}^{2} \\ &\lesssim \|\nabla u\|_{L^{2}(B)} \left( \frac{h}{(\delta R)^{2}} \|u\|_{L^{2}(B)} + \frac{h}{\delta R} \|\nabla(\eta u)\|_{L^{2}(B)} \right) \\ &+ \left( \|\nabla u\|_{L^{2}(B)} + \|u\|_{L^{2}(B)} \right) \left( \frac{h^{2}}{(\delta R)^{2}} \|u\|_{L^{2}(B)} + \frac{h^{2}}{\delta R} \|\nabla(\eta u)\|_{L^{2}(B)} \right) \\ &+ \frac{h^{2}}{(\delta R)^{2}} \|\nabla u\|_{L^{2}(B)}^{2} + \frac{1}{(\delta R)^{2}} \|u\|_{L^{2}(B)}^{2} \\ &\leq C \frac{h^{2}}{(\delta R)^{2}} \|\nabla u\|_{L^{2}(B)}^{2} + C \frac{1}{(\delta R)^{2}} \|u\|_{L^{2}(B)}^{2} + \frac{1}{2} \|\nabla(\eta u)\|_{L^{2}(B)}^{2} \,. \end{split}$$

Absorbiert man den Term  $\frac{1}{2} \|\nabla(\eta u)\|_{L^2(B)}^2$  auf der linken Seite und setzt man diese Abschätzung in (4.9a) ein, so erhält man das gewünschte Resultat.

Im Gegensatz zu den klassischen Caccioppoli-Ungleichungen der Form

$$\|\nabla u\|_{L^2(B_R)} \lesssim \frac{1}{\delta R} \|u\|_{L^2(B_{(1+\delta)R})},$$

die beispielsweise in [BH03, Bör10a] im kontinuierlichen Fall verwendet werden, tritt einerseits der zusätzliche (kleine) Term  $\frac{h}{\delta R} \|\nabla u\|_{L^2(B_{(1+\delta)R})}$  aus den Approximationsresultaten der nodalen Interpolation auf. Zusätzlich dazu wird die Voraussetzung  $\frac{h}{\delta R} \leq \frac{1}{4}$  an die Parameter  $R, \delta$  der Box  $B_{(1+\delta)R}$  verlangt. Diese Annahme kommt von der Trägereigenschaft der diskreten Testfunktion in der Orthogonalität. Im kontinuierlichen Fall kann der Träger der kontinuierlichen Testfunktion beliebig nahe an  $B_R$  liegen, hier, im diskreten Fall, muss zumindest zwei Elemente Abstand zwischen den beiden Boxen  $B_R$  und  $B_{(1+\delta)R}$  sein, was auf die Bedingung  $4h \leq \delta R$  führt.

# **4.2.4** Niedrigdimensionale Approximation in $\mathcal{H}_{h,0}(D,\omega_{ ho})$

In diesem Kapitel wird, wie in den Schritten 4 und 5 in Abschnitt 4.1 beschrieben, eine niedrigdimensionale Approximation an die Galerkin-Lösung konstruiert. Lemma 4.3 liefert eine niedrigdimensionale Approximation an eine Funktion  $u \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R}, \omega_{\rho})$  mit geeigneten Approximationseigenschaften. Mittels Lemma 4.4 wird dieses Resultat auf konzentrischen Boxen iteriert und somit exponentielle Konvergenz erreicht, womit Proposition 4.1 schlussendlich gezeigt werden kann.

Wir werden Funktionen von  $B_{(1+2\delta)R} \cap \omega_{\rho}$  auf  $\mathbb{R}^d$  fortsetzen. Hierfür verwenden wir den Fortsetzungsoperator  $\widetilde{E}: H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^d)$  aus Satz 2.3, der  $\widetilde{E}u = u$  auf  $\Omega$  erfüllt und  $H^1$ -stabil ist mit

$$\left\|\widetilde{E}u\right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Für eine Funktion  $u \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R},\omega_{\rho})$  und eine Abschneidefunktion  $\eta$  gemäß Definition 2.16 mit  $D_1 = B_R$  und  $D_2 = B_{(1+\delta)R}$  kann man die Funktion  $\eta u \in H^1(\Omega)$  mit Hilfe

von Lemma 2.18 definieren. Hierbei gilt für den Träger  $\operatorname{supp}(\eta u) \subset \overline{B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho}}$  wegen  $\operatorname{supp} u \subset \overline{\omega_{\rho}}$ . Daher ist die Fortsetzung von  $\eta u$  auf  $\Omega$  durch Null in  $H^1(\Omega)$ , und wir haben

$$\left\| \widetilde{E}(\eta u) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le C \|\eta u\|_{H^1(\omega_\rho)}. \tag{4.16}$$

Im Folgenden verwenden wir die Scott-Zhang-Projektion  $I_H: H^1(\Omega) \to S^{1,1}(\mathcal{K}_H)$ , siehe (2.19), für ein quasiuniformes, reguläres Gitter  $\mathcal{K}_H$  auf  $\mathbb{R}^d$  mit Gitterweite  $H:=\sup_{K\in\mathcal{K}_H}|K|$ , um gemeinsam mit dem inneren Regularitätsresultat aus Lemma 4.2 eine Approximation an Funktionen in  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R},\omega_\rho)$  zu konstruieren.

**Lemma 4.3.** Seien  $\delta \in (0,1)$ ,  $R \in (0,2 \operatorname{diam}(\Omega))$  so gewählt, dass  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{4}$  und seien  $B_R$ ,  $B_{(1+\delta)R}$ ,  $B_{(1+2\delta)R}$  konzentrische Boxen. Sei  $\omega_\rho \subset \Omega$  von der Form (2.33) und  $u \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R},\omega_\rho)$ . Sei  $\mathcal{K}_H$  eine (unendliche)  $\gamma$ -formreguläre Triangulierung von  $\mathbb{R}^d$  mit Gitterweite H, für die  $\frac{H}{R} \leq \frac{\delta}{4}$  gilt, und  $\eta$  eine Abschneidefunktion gemäß Definition 2.16 mit  $D_1 = B_R$  und  $D_2 = B_{(1+\delta)R}$ .

Sei  $I_H: H^1(\mathbb{R}^d) \to S^{1,1}(\mathcal{K}_H)$  die Scott-Zhang-Projektion und  $\widetilde{E}: H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^d)$ der  $H^1$ -stabile Fortsetzungsoperator aus (4.16) sowie  $\Pi_{h,R}$  die Orthogonalprojektion auf  $\mathcal{H}_{h,0}(B_R,\omega_\rho)$ . Dann gilt

$$\left(u - \Pi_{h,R} I_H \widetilde{E}(\eta u)\right)|_{B_R \cap \omega_o} \in \mathcal{H}_{h,0}(B_R, \omega_o), \tag{4.17}$$

und für die Dimension des Raumes  $W := \Pi_{h,R} \left( I_H \widetilde{E} \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R}, \omega_\rho) |_{B_R \cap \omega_\rho} \right)$  folgt

$$\dim W \le C_{\rm app} \left(\frac{(1+2\delta)R}{H}\right)^d \tag{4.18}$$

mit einer Konstante  $C_{app} > 0$ , die nur vom Randwertproblem (3.3),  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität von  $\mathcal{T}_h$  und  $\mathcal{K}_H$  abhängt. Weiters gilt

$$\| u - \Pi_{h,R} I_H \widetilde{E}(\eta u) \|_{h,R} \le C_{\text{app}} \frac{1 + 2\delta}{\delta} \left( \frac{h}{R} + \frac{H}{R} \right) \| u \|_{h,(1+2\delta)R}.$$
 (4.19)

Beweis. Für  $u \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R}, \omega_{\rho})$  folgt aus der Definition des Raumes  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R}, \omega_{\rho})$  auch  $u|_{B_R \cap \omega_{\rho}} \in \mathcal{H}_{h,0}(B_R, \omega_{\rho})$  und daher  $\Pi_{h,R}(u|_{B_R \cap \omega_{\rho}}) = u|_{B_R \cap \omega_{\rho}}$ , was (4.17) zeigt. Für die Dimension von W folgt

$$\dim \Pi_{h,R} I_H(\widetilde{E}\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R},\omega_\rho))|_{B_R\cap\omega_\rho} \leq \dim I_H(\widetilde{E}\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R},\omega_\rho))|_{B_R\cap\omega_\rho}$$
  
$$\leq ((1+2\delta)R/H)^d,$$

was (4.18) zeigt.

Die Annahme  $\frac{H}{R} \leq \frac{\delta}{4}$  liefert  $\bigcup \{K \in \mathcal{K}_H : \omega_K \cap B_R \neq \emptyset\} \subseteq B_{(1+\delta)R}$ , und auf Grund der Lokalität und Approximationseigenschaften (2.21) der Scott-Zhang-Projektion  $I_H$  folgt

$$\frac{1}{H} \left\| \widetilde{E}(\eta u) - I_H \widetilde{E}(\eta u) \right\|_{L^2(B_R)} + \left\| \nabla (\widetilde{E}(\eta u) - I_H \widetilde{E}(\eta u)) \right\|_{L^2(B_R)} \lesssim \left\| \nabla \widetilde{E}(\eta u) \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R})},$$

und somit mit (4.16)

$$\begin{aligned} \left\| u - \Pi_{h,R} I_H \widetilde{E}(\eta u) \right\|_{h,R}^2 &= \left\| \left\| \Pi_{h,R} \left( \widetilde{E}(\eta u) - I_H \widetilde{E}(\eta u) \right) \right\|_{h,R}^2 \leq \left\| \widetilde{E}(\eta u) - I_H \widetilde{E}(\eta u) \right\|_{h,R}^2 \\ &= \left( \frac{h}{R} \right)^2 \left\| \nabla (\widetilde{E}(\eta u) - I_H \widetilde{E}(\eta u)) \right\|_{L^2(B_R \cap \omega_\rho)}^2 + \frac{1}{R^2} \left\| \widetilde{E}(\eta u) - I_H \widetilde{E}(\eta u) \right\|_{L^2(B_R \cap \omega_\rho)}^2 \\ &\lesssim \frac{h^2}{R^2} \left\| \nabla \widetilde{E}(\eta u) \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R})}^2 + \frac{H^2}{R^2} \left\| \nabla \widetilde{E}(\eta u) \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R})}^2 \lesssim \left( \frac{h^2}{R^2} + \frac{H^2}{R^2} \right) \left\| \eta u \right\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Wir wenden die Caccioppoli-artige Ungleichung aus Lemma 4.2 an mit  $\widetilde{R}=(1+\delta)R$  und  $\widetilde{\delta}=\frac{\delta}{1+\delta}$ . Es gilt  $(1+\widetilde{\delta})\widetilde{R}=(1+2\delta)R$  sowie  $\frac{h}{\widetilde{R}}\leq\frac{\widetilde{\delta}}{4}$ , da  $4h\leq\delta R=\widetilde{\delta}\widetilde{R}$ , womit die Voraussetzungen von Lemma 4.2 erfüllt sind. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\| u - \Pi_{h,R} I_H \widetilde{E}(\eta u) \right\|_{h,R}^2 &\lesssim \left( \frac{h^2}{R^2} + \frac{H^2}{R^2} \right) \|\eta u\|_{H^1(B_{(1+\delta)R})}^2 \\ &\lesssim \left( \frac{h^2}{R^2} + \frac{H^2}{R^2} \right) \frac{1}{(\delta R)^2} \|u\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \cap \omega_\rho)}^2 + \left( \frac{h^2}{R^2} + \frac{H^2}{R^2} \right) \|\nabla u\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \cap \omega_\rho)}^2 \\ &\lesssim \left( \frac{h^2}{R^2} + \frac{H^2}{R^2} \right) \frac{1}{(\delta R)^2} \|u\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \cap \omega_\rho)}^2 + \left( \frac{h^2}{R^2} + \frac{H^2}{R^2} \right) \frac{(1+2\delta)^2}{\delta^2} \|u\|_{L^2(B_{(1+2\delta)R})}^2 \\ &\leq \left( C_{\text{app}} \frac{1+2\delta}{\delta} \left( \frac{h}{R} + \frac{H}{R} \right) \right)^2 \|u\|_{h,(1+2\delta)R}^2, \end{aligned}$$

was den Beweis der Aussage (4.19) beendet.

Die Eigenschaft (4.17) aus Lemma 4.3 ermöglicht die Iteration des Approximationsresultats (4.19) auf geeigneten konzentrischen Boxen.

**Lemma 4.4.** Sei  $C_{\text{app}}$  die Konstante aus Lemma 4.3 und  $q, \kappa \in (0, 1), R \in (0, 2 \operatorname{diam}(\Omega)), k \in \mathbb{N}$  sowie  $\omega_{\rho} \subset \Omega$  von der Form (2.33). Weiters sei angenommen, dass

$$\frac{h}{R} \le \frac{\kappa q}{8k \max\{C_{\text{add}}, 1\}}.\tag{4.20}$$

Dann existiert ein endlich dimensionaler Unterraum  $V_k$  von  $S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h;\Gamma_D)|_{B_R\cap\omega_\rho}$  mit Dimension

$$\dim V_k \le C_{\dim} \left(\frac{1+\kappa^{-1}}{q}\right)^d k^{d+1},$$

sodass für alle  $u \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\kappa)R},\omega_{\rho})$  gilt

$$\min_{v \in V_k} \|u - v\|_{h,R} \le q^k \|u\|_{h,(1+\kappa)R}. \tag{4.21}$$

Die Konstante  $C_{\text{dim}} > 0$  hängt nur vom Randwertproblem (3.3),  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab.

Beweis. Seien  $B_{(1+\delta_j)R}$  mit  $\delta_j:=\kappa(1-\frac{j}{k})$  für  $j=0,\ldots,k$  konzentrische Boxen gemäß Definition 2.10. Es gilt  $\kappa=\delta_0>\delta_1>\cdots>\delta_k=0$ . Im Folgenden wird das Approximationsresultat aus Lemma 4.3 auf den Boxen  $B_{(1+\delta_j)R}$  iteriert. Mit der Wahl  $H=\frac{\kappa qR}{8k\max\{C_{\mathrm{app}},1\}}$  folgt auf Grund der Voraussetzung (4.20), dass  $h\leq H$ .

Wir wenden Lemma 4.3 an mit  $\widetilde{R}_j = (1 + \delta_j)R$  und  $\widetilde{\delta}_j = \frac{\kappa}{2k(1+\delta_j)} < \frac{1}{2}$ . Wegen Voraussetzung (4.20) gilt  $\frac{h}{\widetilde{R}_j} \leq \frac{\widetilde{\delta}_j}{4}$ . Die Tatsache  $\delta_{j-1} = \delta_j + \frac{\kappa}{k}$  liefert  $(1 + \delta_{j-1})R = (1 + 2\widetilde{\delta}_j)\widetilde{R}_j$  und unsere Wahl von H impliziert  $\frac{H}{\widetilde{R}_j} \leq \frac{\widetilde{\delta}_j}{4}$ . Daher liefert Lemma 4.3 für j = 1 eine Approximation  $w_1$  in einem Unterraum  $W_1$  von  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta_1)R},\omega_\rho)$  mit Dimension dim  $W_1 \leq C\left(\frac{(1+\kappa)R}{H}\right)^d$  und der Approximationseigenschaft

$$|||u - w_1||_{h,(1+\delta_1)R} \leq 2C_{\text{app}} \frac{H}{(1+\delta_1)R} \frac{1+2\widetilde{\delta}_1}{\widetilde{\delta}_1} |||u||_{h,(1+\delta_0)R}$$

$$= 4C_{\text{app}} \frac{kH}{\kappa R} (1+2\widetilde{\delta}_1) |||u||_{h,(1+\kappa)R} \leq q |||u||_{h,(1+\kappa)R}.$$

Da  $u-w_1 \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta_1)R},\omega_\rho)$ , kann Lemma 4.3 auf  $u-w_1$  angewendet werden, und wir erhalten eine Approximation  $w_2$  an  $u-w_1$  in einem Unterraum  $W_2$  von  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta_2)R},\omega_\rho)$  mit dim  $W_2 \leq C\left(\frac{(1+\kappa)R}{H}\right)^d$ . Mit der selben Argumentation wie für j=1 folgt

$$|||u - w_1 - w_2||_{h,(1+\delta_2)R} \le q |||u - w_1||_{h,(1+\delta_1)R} \le q^2 |||u||_{h,(1+\kappa)R}.$$

Führt man diesen Prozess (k-2)-mal weiter, so erhält man eine Approximation  $v:=\sum_{j=1}^k w_i$  im Raum  $V_k:=\sum_{j=1}^k W_j$ , dessen Dimension mit dim  $V_k\leq Ck\left(\frac{(1+\kappa)R}{H}\right)^d=C_{\dim}\left(\frac{1+\kappa^{-1}}{q}\right)^d k^{d+1}$  beschränkt ist, und der Eigenschaft

$$\min_{v \in V_k} \| u - v \|_{h,R} \leq q^k \, \| u \|_{h,(1+\kappa)R} \, ,$$

womit das Lemma gezeigt ist.

Wir haben also eine Approximation an eine Funktion  $u \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\kappa)R},\omega_{\rho})$  konstruiert, welche exponentiell in der Dimension des Approximationsraumes gegen die Funktion u konvergiert. Um nun den Beweis des Hauptresultates dieses Abschnittes, Proposition 4.1, abzuschließen, muss noch  $\kappa$  geeignet gewählt werden und eine Kontrolle für die Norm auf der rechten Seite gefunden werden.

Beweis von Proposition 4.1. Die Wahl  $\kappa = \frac{1}{1+\eta}$  liefert gemeinsam mit der Definition der Bounding-Boxen (Definition 2.7) sowie der Zulässigkeitsbedingung

$$\operatorname{dist}(B_{(1+\kappa)R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) \ge \operatorname{dist}(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) - \frac{1}{2}\kappa R_{\tau}\sqrt{d}$$

$$\ge \eta^{-1}\operatorname{diam}(B_{R_{\tau}}) - \kappa R_{\tau}\sqrt{d}$$

$$= \sqrt{d}R_{\tau}(\eta^{-1} - \kappa) = \sqrt{d}R_{\tau}\left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{1+\eta}\right) > 0.$$

Wir sind nun in der Lage, den Raum  $\widehat{W}_k$  aus Proposition 4.1 zu definieren, wofür wir zwei Fälle unterscheiden werden.

Fall 1: Die Bedingung (4.20) ist nicht erfüllt, es gilt also  $\frac{h}{R_{\tau}} > \frac{\kappa q}{8k \max\{C_{\text{app}},1\}}$ . Dann wählen wir  $\widehat{W}_k := \left\{\widehat{w}|_{B_{R_{\tau}} \cap \Omega} : \widehat{w} \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D)\right\}$ , und das Minimum in der linke Seite von (4.3) ist klarerweise null. Durch die Wahl von  $\kappa$  ist die Dimension von  $W_k$ beschränkt durch

$$\dim \widehat{W}_k \lesssim \left(\frac{R_\tau}{h}\right)^d \lesssim \left(\frac{8k \max\{C_{\text{app}}, 1\}}{\kappa q}\right)^d \lesssim \left((2+\eta)q^{-1}\right)^d k^{d+1}.$$

**Fall 2:** Die Bedingung (4.20) ist erfüllt mit  $R = R_{\tau}$ .

Die Galerkin-Lösung  $\phi_h$  erfüllt wegen  $\operatorname{dist}(B_{(1+\kappa)R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) > 0$  und der Orthogonalität (4.4), dass  $\phi_h|_{B_{(1+\kappa)R_\tau}\cap\Omega}\in\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\kappa)R_\tau},\Omega)$ . Somit kann Lemma 4.4 auf  $\phi_h$  angewendet werden. Die Koerzivität (3.6) der Bilinearform  $a(\cdot,\cdot)$  sowie die diskrete variationelle Formulierung (3.5) implizieren

$$\|\phi_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \lesssim a(\phi_h, \phi_h) = \langle f, \phi_h \rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle \Pi_{\Omega}^{L^2} f, \phi_h \right\rangle_{L^2(\Omega)} \lesssim \left\| \Pi_{\Omega}^{L^2} f \right\|_{L^2(\Omega)} \|\phi_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Mit der Voraussetzung  $\frac{h}{R_{\tau}} < 1$  folgt weiters, dass

$$\|\phi_h\|_{h,(1+\kappa)R_{\tau}} \lesssim \left(1 + \frac{1}{R_{\tau}}\right) \|\phi_h\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \left(1 + \frac{1}{R_{\tau}}\right) \left\|\Pi_{\Omega}^{L^2} f\right\|_{L^2(\Omega)},$$

womit wir eine Abschätzung für die rechte Seite in (4.21) gezeigt haben. Wir setzen  $W_k :=$  $V_k$  mit dem Raum  $V_k$  aus Lemma 4.4 und erhalten schlussendlich

$$\min_{\widehat{w} \in \widehat{W}_k} \|\phi_h - \widehat{w}\|_{L^2(B_{R_\tau} \cap \Omega)} \leq R_\tau \min_{\widehat{w} \in \widehat{W}_k} \|\phi_h - \widehat{w}\|_{h, R_\tau} \lesssim (R_\tau + 1) q^k \|\Pi_{\Omega}^{L^2} f\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\lesssim \operatorname{diam}(\Omega) q^k \|\Pi_{\Omega}^{L^2} f\|_{L^2(\Omega)},$$

und die Dimension von  $\widehat{W}_k$  ist beschränkt durch dim  $\widehat{W}_k \leq C_{\text{dim}}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ .

Das beendet den Beweis der ersten, nicht-trivialen Abschätzung in (4.3). Die zweite Abschätzung folgt direkt aus der  $L^2(\Omega)$ -Stabilität der  $L^2(\Omega)$ -Orthogonalprojektion

### 4.2.5 Das reine Neumann-Problem

Für das reine Neumann-Problem aus Abschnitt 3.1.2 können die Resultate des vorherigen Kapitels nicht direkt angewendet werden, da auf Grund der Sattelpunktformulierung, die betrachtet wird, um eindeutige Lösbarkeit zu garantieren, in der Orthogonalität ein zusätzlicher Term auftritt. In diesem Abschnitt wird die Behandlung dieses Terms diskutiert, wobei große Teile der Beweise analog zum vorigen Abschnitt geführt werden und somit nicht in jedem Detail nochmals angegeben werden. In ähnlicher Weise werden auch die Sattelpunktformulierungen für das Neumann-Problem für die Lamé-Gleichung in Abschnitt 4.3.5 sowie für die hypersinguläre Integralgleichung in Abschnitt 4.5 behandelt.

**Proposition 4.5.** Sei  $\tau \times \sigma$  ein Cluster-Paar und  $B_{R_{\tau}}$ ,  $B_{R_{\sigma}}$  zugehörige Bounding-Boxen gemäß Definition 2.7, wobei  $R_{\tau} \leq 2 \operatorname{diam}(\Omega)$ . Sei  $q \in (0,1)$  und für fixes  $\eta > 0$  die Zulässigkeitsbedingung  $\eta \operatorname{dist}(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) \geq \operatorname{diam}(B_{R_{\tau}})$  erfüllt. Dann existiert für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ein Unterraum  $\widehat{W}_k \subseteq S^{p,1}(\mathcal{T}_h)$  mit  $\operatorname{dim} \widehat{W}_k \leq C_{\operatorname{dim}}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ , sodass für beliebiges  $f \in L^2(\Omega)$  mit supp  $f \subset \overline{B_{R_{\sigma}} \cap \Omega}$  für die Lösung  $\phi_h$  von (3.10a) folgt

$$\min_{\widehat{w} \in \widehat{W}_k} \|\phi_h - \widehat{w}\|_{L^2(B_{R_{\tau}} \cap \Omega)} \le C_{\text{box}} q^k \|\Pi_{\Omega}^{L^2} f\|_{L^2(\Omega)} \le C_{\text{box}} q^k \|f\|_{L^2(B_{R_{\sigma}} \cap \Omega)}. \tag{4.22}$$

Die Konstante  $C_{\text{box}} > 0$  hängt nur von den Koeffizienten in (3.3) und  $\Omega$  ab, die Konstante  $C_{\text{dim}}$  hängt zusätzlich noch von d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab.

Für zwei zulässige Bounding-Boxen  $B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}$  sowie ein kleines  $\kappa > 0$  und  $f \in L^{2}(\Omega)$  mit supp  $f \subset \overline{B_{R_{\sigma}} \cap \Omega}$  haben wir die Orthogonalität

$$a(\phi_h, \psi_h) + \lambda_h \langle \psi_h, 1 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall \psi_h \in S^{p,1}(\mathcal{T}_h), \operatorname{supp} \psi_h \subset \overline{B_{(1+\kappa)R_\tau} \cap \Omega}$$

$$\langle \phi_h, 1 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0.$$
(4.23)

Mit dieser Orthogonalität definieren wir für eine Vereinigung von Elementen  $\omega_{\rho} \subseteq \Omega$  aus (2.33) den affinen Raum

$$\mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(D,\omega_{\rho},\mu) := \{ u \in H^{1}(D \cap \omega_{\rho}) : \exists \widetilde{u} \in S^{p,1}(\mathcal{T}_{h}) \text{ s.d. } u|_{D \cap \omega_{\rho}} = \widetilde{u}|_{D \cap \omega_{\rho}}, \text{ supp } \widetilde{u} \subset \overline{\omega_{\rho}},$$

$$a(u,\psi_{h}) = -\mu \langle \psi_{h}, 1 \rangle \ \forall \ \psi_{h} \in S^{p,1}(\mathcal{T}_{h}) \text{ mit supp } \psi_{h} \subset \overline{D \cap \omega_{\rho}} \}. (4.24)$$

Für Funktionen  $u \in \mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(B_{(1+\delta)R},\omega_{\rho},\mu)$  gilt ein ähnliches inneres Regularitätsresultat wie in Lemma 4.2, was im nachfolgenden Lemma formuliert ist.

Lemma 4.6. Seien  $\delta \in (0,1)$ ,  $R \in (0,2 \operatorname{diam}(\Omega))$  und  $B_R$ ,  $B_{(1+\delta)R}$  zwei konzentrische Boxen mit Seitenlängen R und  $(1+\delta)R$  gemäß Definition 2.10. Weiters gelte  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{4}$  und sei  $\omega_{\rho} \subseteq \Omega$  von der Form (2.33). Dann existiert eine Konstante  $C_{reg} > 0$ , die nur vom Randwertproblem (3.3),  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  abhängt, sodass für  $u \in \mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(B_{(1+\delta)R}, \omega_{\rho}, \mu)$  gilt

$$\|\nabla u\|_{L^{2}(B_{R}\cap\omega_{\rho})} \leq C_{reg}\left(\frac{1+\delta}{\delta} \|\|u\|_{h,(1+\delta)R} + ((1+\delta)R)^{d/2} |\mu|\right).$$

Beweis. Der Beweis ist beinahe identisch zum Beweis von Lemma 4.2, es muss nur der Term  $-\mu \langle J_h(\eta^2 u), 1 \rangle_{L^2(B)}$  in der ersten Gleichheit in (4.10) zu der rechten Seite addiert werden. Dieser kann auf Grund der Approximationseigenschaft von  $J_h$ , siehe auch (4.12), mittels

$$\begin{split} \left| \mu \left\langle J_{h}(\eta^{2}u), 1 \right\rangle_{L^{2}(B)} \right| &\leq \left| \mu \left\langle J_{h}(\eta^{2}u) - \eta^{2}u, 1 \right\rangle_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho})} \right| + \left| \mu \left\langle \eta^{2}u, 1 \right\rangle_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho})} \right| \\ &\leq \left| \mu \right| \left| B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho} \right|^{1/2} \left( \left\| \eta^{2}u - J_{h}(\eta^{2}u) \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho})} + \left\| \eta^{2}u \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho})} \right) \\ &\lesssim \left| \mu \right| \left( (1+\delta)R)^{d/2} \left( \frac{h^{2}}{\delta R} \left\| \nabla (\eta u) \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho})} + \left( \frac{h^{2}}{(\delta R)^{2}} + 1 \right) \left\| u \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho})} \right) \\ &\lesssim \left| \mu \right|^{2} \left( (1+\delta)R)^{d} + \frac{h^{2}}{(\delta R)^{2}} \left\| \nabla u \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho})}^{2} + \frac{1}{(\delta R)^{2}} \left\| u \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho})}^{2} \end{split}$$

abgeschätzt werden, und die restlichen Schritte folgen wie in Lemma 4.2.

Mit Hilfe der Scott-Zhang-Projektion sowie der Orthogonalprojektion  $\Pi_{h,R,\mu}: (H^1(B_R \cap \omega_\rho), \|\cdot\|_{h,R}) \to (\mathcal{H}^{\mathcal{N}}_{h,0}(B_R,\omega_\rho,\mu), \|\cdot\|_{h,R})$  können nun analoge Resultate zu Lemma 4.3 und Lemma 4.4 gezeigt werden, was im nachfolgenden Beweis von Proposition 4.5 zusammengefasst ist. Der zusätzliche Term in der Caccioppoli-artigen Ungleichung tritt hierbei bei der Iteration nur einmal auf, da die Differenz von u und der ersten konstruierten Approximation die Orthogonalität in (4.24) mit  $\mu=0$  erfüllt.

Beweis von Proposition 4.5. Wie in Lemma 4.3 kann eine niedrigdimensionale Approximation mittels Verkettung von Orthogonalprojektion  $\Pi_{h,R,\mu}$  auf  $\mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(B_R,\omega_\rho,\mu)$ , Scott-Zhang-Projektion  $I_H$  und einem Fortsetzungsoperator  $\widetilde{E}$  definiert werden, für die

$$\left\| u - \Pi_{h,R,\mu} I_H \widetilde{E}(\eta u) \right\|_{h,R} \le C_{\text{app}} \left( \frac{h}{R} + \frac{H}{R} \right) \left( \frac{1 + 2\delta}{\delta} \left\| u \right\|_{h,(1+2\delta)R} + ((1+2\delta)R)^{d/2} |\mu| \right)$$

$$\le C_{\text{app}} \left( \frac{h}{R} + \frac{H}{R} \right) \frac{1 + 2\delta}{\delta} \left( \left\| u \right\|_{h,(1+2\delta)R} + ((1+2\delta)R)^{d/2} |\mu| \right)$$

für  $u \in \mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(B_{(1+2\delta)R},\omega_{\rho},\mu)$  gilt. Man erhält somit mit konzentrischen Boxen  $B_{(1+\delta_{j})R_{\tau}}$  mit  $\delta_{j}:=\kappa(1-j/k)$  für  $\kappa=\frac{1}{1+\eta}$  und der Wahl  $H=\frac{\kappa qR_{\tau}}{8k\max\{C_{\mathrm{app}},1\}}$  analog zu Lemma 4.4 eine Approximation  $w_{1}$  an die Galerkin-Lösung  $\phi_{h}\in\mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(B_{(1+\kappa)R_{\tau}},\Omega,\lambda_{h})$  in einem Raum  $W_{1}\subset\mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(B_{(1+\delta_{1})R_{\tau}},\omega_{\rho},\lambda_{h})$  mit Dimension dim  $W_{1}\leq C\left(\frac{(1+\kappa)R_{\tau}}{H}\right)^{d}$  und

$$\|\phi_h - w_1\|_{h,(1+\delta_1)R_\tau} \le q \left( \|\phi_h\|_{h,(1+\kappa)R_\tau} + ((1+\kappa)R_\tau)^{d/2} |\lambda_h| \right).$$

Da  $\phi_h - w_1 \in \mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(B_{(1+\delta_1)R_{\tau}}, \Omega, 0)$  kann obiges Resultat für  $\lambda_h = 0$  erneut angewendet werden, und man erhält eine Approximation  $w_2$  mit

$$\|\phi_h - w_1 - w_2\|_{h,(1+\delta_2)R_\tau} \le q \|\phi_h - w_1\|_{h,(1+\delta_1)R_\tau} \le q^2 \left( \|\phi_h\|_{h,(1+\kappa)R_\tau} + ((1+\kappa)R_\tau)^{d/2} |\lambda_h| \right).$$

Wiederholt man diesen Prozess (k-2)-mal, so erhält man eine Approximation v in einem Raum  $V_k \subset \mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(B_{(1+\kappa)R_{\tau}},\Omega,\lambda_h)$ , dessen Dimension beschränkt ist durch dim  $V_k \leq Ck\left(\frac{(1+\kappa)R_{\tau}}{H}\right)^d = C_{\dim}\left(2+\eta\right)^d q^{-d}k^{d+1}$ , und der Eigenschaft

$$\|\phi_h - v\|_{h,R_{\tau}} \le q^k \left( \|\phi_h\|_{h,(1+\kappa)R_{\tau}} + ((1+\kappa)R_{\tau})^{d/2} |\lambda_h| \right).$$

Um nun die rechte Seite weiter abzuschätzen, testen wir die zweite Gleichung in (3.10a) mit  $\psi_h \equiv 1$  und erhalten  $\lambda_h = \frac{1}{|\Omega|} \langle f, 1 \rangle_{L^2(\Omega)}$  und somit

$$\|\phi_h\|_{h,(1+\kappa)R_{\tau}} + ((1+\kappa)R_{\tau})^{d/2} |\lambda_h| \le C \left(1 + \frac{1}{R_{\tau}}\right) \left(\|\phi_h\|_{H^1(\Omega)} + |\lambda_h|\right) \le C \left\|\Pi_{\Omega}^{L^2} f\right\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Die restlichen Schritte des Beweises folgen komplett analog zum Beweis von Proposition 4.1.

# 4.3 Die Lamé-Gleichung

In diesem Abschnitt wird ähnlich zum vorherigen Kapitel 4.2 eine niedrigdimensionale Approximation an die Galerkin-Lösung der Lamé-Gleichung (3.18) gefunden. Bei der Konstruktion der Approximation werden wir wieder wie in Abschnitt 4.1 beschrieben vorgehen. Die nachfolgende Proposition zeigt die Existenz einer derartigen Approximation, wobei der Fehler exponentiell in der Dimension des Approximationsraumes gegen Null konvergiert.

**Proposition 4.7.** Sei  $\tau \times \sigma$  ein Cluster-Paar und  $B_{R_{\tau}}$ ,  $B_{R_{\sigma}}$  zugehörige Bounding-Boxen gemäß Definition 2.7, wobei  $R_{\tau} \leq 2 \operatorname{diam}(\Omega)$ . Sei  $q \in (0,1)$  und für fixes  $\eta > 0$  die Zulässigkeitsbedingung  $\eta \operatorname{dist}(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) \geq \operatorname{diam}(B_{R_{\tau}})$  erfüllt. Dann existiert für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ein Unterraum  $\widehat{\mathbf{W}}_k \subseteq S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d$  mit  $\operatorname{dim} \widehat{\mathbf{W}}_k \leq C_{\operatorname{dim}}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ , sodass für beliebiges  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$  mit supp  $|\mathbf{f}| \subset \overline{B_{R_{\sigma}} \cap \Omega}$ , für die Lösung  $\mathbf{u}_h$  von (3.18) folgt

$$\min_{\widehat{\mathbf{w}} \in \widehat{\mathbf{W}}_k} \|\mathbf{u}_h - \widehat{\mathbf{w}}\|_{L^2(B_{R_\tau} \cap \Omega)} \le C_{\text{box}} q^k \|\mathbf{f}\|_{L^2(B_{R_\sigma} \cap \Omega)}.$$
(4.25)

Die Konstante  $C_{\text{box}} > 0$  hängt nur von  $\Omega$ , d und den Lamé-Konstanten  $\lambda, \mu > 0$  ab, die Konstante  $C_{\text{dim}}$  hängt zusätzlich noch von p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab.

Die explizite Abhängigkeit der Konstanten  $C_{\text{box}}$ ,  $C_{\text{dim}}$  von den Lamé-Konstanten findet sich im Beweis von Proposition 4.7.

## 4.3.1 Orthogonalität

Für beliebiges  $\mathbf{f}$  mit supp  $|\mathbf{f}| \subset \overline{B_{R_{\sigma}} \cap \Omega}$  erhalten wir aus der diskreten schwachen Formulierung (3.18), dass

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d \text{ mit supp } |\mathbf{v}_h| \subset \overline{\Omega} \setminus \overline{B_{R_{\sigma}}}.$$

Mit der Zulässigkeitsbedingung  $0 < \text{diam}(B_{R_{\tau}}) \leq \eta \text{dist}(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}})$  und einem genügend kleinen  $\kappa \in (0, 1)$ , sodass  $\text{dist}(B_{(1+\kappa)R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) > 0$ , führt dies auf die Orthogonalität

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d \text{ mit supp } |\mathbf{v}_h| \subset \overline{B_{(1+\kappa)R_\tau} \cap \Omega},$$
 (4.26)

also auf  $B_{R_{\tau}} \cap \Omega$  ist  $\mathbf{u}_h$  orthogonal bezüglich der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  zu Vektoren bestehend aus komponentenweisen stetigen stückweisen Polynomen vom maximalen Grad p.

## **4.3.2** Der Approximationsraum $\mathcal{H}_{h,0}(D,\omega_{\rho})$

Sei  $\rho \subset \mathcal{I}$ , dann definieren wir

$$\omega_{\rho} := \omega_{\rho_1} \cup \dots \cup \omega_{\rho_d}, \tag{4.27}$$

wobei die  $\omega_{\rho_i}$  von der Form (2.33) sind, aber nur jeweils Vereinigungen von Elementen zugehörig zu Freiheitsgraden in  $\rho$  zu der *i*-ten Komponente sind. Wir schreiben supp  $\mathbf{v} \subset \overline{\omega_{\rho}}$ , falls supp  $\mathbf{v}_i \subset \overline{\omega_{\rho_i}}$ . Zusätzlich schreiben wir supp  $\mathbf{v} \subset \overline{D \cap \omega_{\rho}}$  falls supp  $|\mathbf{v}| \subset \overline{D}$  und supp  $\mathbf{v} \subset \overline{\omega_{\rho}}$ .

Die Orthogonalität aus (4.26) führt auf die Definition des Raumes  $\mathcal{H}_{h,0}(D,\omega_{\rho})$  mittels

$$\mathcal{H}_{h,0}(D,\omega_{\rho}) := \{ \mathbf{u} \in H^{1}(D \cap \omega_{\rho})^{d} : \exists \widetilde{\mathbf{u}} \in S_{0}^{p,1}(\mathcal{T}_{h})^{d} \text{ s.d. } \mathbf{u}|_{D \cap \omega_{\rho}} = \widetilde{\mathbf{u}}|_{D \cap \omega_{\rho}}, \text{supp } \widetilde{\mathbf{u}} \subset \overline{\omega_{\rho}}, \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_{h}) = 0 \ \forall \ \mathbf{v}_{h} \in S_{0}^{p,1}(\mathcal{T}_{h})^{d} \text{ mit supp } \mathbf{v}_{h} \subset \overline{D \cap \omega_{\rho}} \}.$$
(4.28)

Der Beweis von Proposition 4.7 benötigt abermals nur den Spezialfall  $\rho = \mathcal{I}$  und somit  $\omega_{\rho} = \Omega$ . Der allgemeine Fall mit  $\omega_{\rho} \neq \Omega$  wird bei der Existenz einer approximativen LU-Zerlegung in Kapitel 6.4 verwendet. Hierbei wird auch die Aufteilung aus (4.27) benötigt.

Der endlich dimensionale Raum  $\mathcal{H}_{h,0}(D,\omega_{\rho})$  ist ein abgeschlossener Unterraum von  $H^1(D\cap\omega_{\rho})^d$ . Für die Galerkin-Lösung  $\mathbf{u}_h$  aus (3.18) mit supp  $|\mathbf{f}|\subset\overline{B_{R_{\sigma}}\cap\Omega}$  gilt  $\mathbf{u}_h\in\mathcal{H}_{h,0}(B_{R_{\tau}},\Omega)$ , sofern die Bounding-Boxen  $B_{R_{\tau}},B_{R_{\sigma}}$  die  $\eta$ -Zulässigkeitsbedingung (2.27) erfüllen.

Auf dem Raum  $\mathcal{H}_{h,0}(B_R,\omega_\rho)$  definieren wir die Norm

$$\|\!|\!|\mathbf{u}|\!|\!|_{h,R}^2 := \frac{h^2}{R^2} \left(\mu + \frac{\lambda^2}{\mu}\right) \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(B_R \cap \omega_\rho)}^2 + \frac{1}{R^2} (\lambda + \mu) \left\|\mathbf{u}\right\|_{L^2(B_R \cap \omega_\rho)}^2,$$

wobei wir auf Grund der Trägereigenschaft supp  $\mathbf{u} \subset \overline{\omega_{\rho}}$  die Norm  $\|\mathbf{u}\|_{L^{2}(B_{R} \cap \omega_{\rho})}$  statt der Norm  $\left(\sum_{i=1}^{d} \|\mathbf{u}_{i}\|_{L^{2}(B_{R} \cap \omega_{\rho_{i}})}^{2}\right)^{1/2}$  betrachten können, was die Notation vereinfacht. Weiters sei die orthogonale Projektion auf  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{R},\omega_{\rho})$  mit  $\Pi_{h,R}: (H^{1}(B_{R} \cap \omega_{\rho})^{d}, \|\cdot\|_{h,R}) \to (\mathcal{H}_{h,0}(B_{R},\omega_{\rho}), \|\cdot\|_{h,R})$  bezeichnet.

## 4.3.3 Caccioppoli-artige Ungleichung

Das folgende Lemma zeigt ein analoges Resultat zu Lemma 4.2, also ein diskretes inneres Regularitätsresultat für Funktionen in  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta)R},\omega_{\rho})$ .

**Lemma 4.8.** Seien  $\delta \in (0,1)$ ,  $R \in (0,2 \operatorname{diam}(\Omega))$  und  $B_R$ ,  $B_{(1+\delta)R}$  zwei konzentrische Boxen mit Seitenlängen R und  $(1+\delta)R$  gemäß Definition 2.10. Weiters gelte  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{4}$  und sei  $\omega_{\rho} \subseteq \Omega$  von der Form (4.27). Dann existiert eine Konstante  $C_{\text{reg}}$ , die nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  abhängt, sodass für  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta)R},\omega_{\rho})$  gilt

$$\mu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^{2}(B_{R} \cap \omega_{\rho})}^{2} \leq \mu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^{2}(B_{R} \cap \omega_{\rho})}^{2} + \lambda \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^{2}(B_{R} \cap \omega_{\rho})}^{2} \leq C_{\operatorname{reg}} \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{2} \|\mathbf{u}\|_{h,(1+\delta)R}^{2}.$$
(4.29)

Beweis. Sei  $\eta \in S^{1,1}(\mathcal{T}_h)$  eine skalare, stückweise affine Abschneidefunktion gemäß Definition 2.16 mit  $D_1 = B_R$  und  $D_2 = B_{(1+\delta)R}$ . Lemma 2.18 liefert  $\eta^2 \mathbf{u} \in S_0^{p+2,1}(\mathcal{T}_h)^d \subset H_0^1(\Omega)^d$  sowie

$$\operatorname{supp} \eta^2 \mathbf{u} \subset \overline{B} \quad \operatorname{mit} B := B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho}. \tag{4.30}$$

Mit der ersten Korn'schen Ungleichung (3.20) sowie  $\frac{1}{\delta R} \lesssim \frac{1}{(\delta R)^2}$ , da laut Voraussetzung

 $\delta < 1$  und  $R \leq 2 \operatorname{diam}(\Omega)$ , erhält man

$$2\mu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^{2}(B_{R}\cap\omega_{\rho})}^{2} + \lambda \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L^{2}(B_{R}\cap\omega_{\rho})}^{2} \leq 2\mu \|\nabla(\eta\mathbf{u})\|_{L^{2}(B)}^{2} + \lambda \|\operatorname{div}(\eta\mathbf{u})\|_{L^{2}(B)}^{2}$$

$$\lesssim 2\mu \int_{B} e(\eta\mathbf{u}) : e(\eta\mathbf{u})dx + \lambda \|\operatorname{div}(\eta\mathbf{u})\|_{L^{2}(B)}^{2}$$

$$= 2\mu \int_{B} e(\mathbf{u}) : e(\eta^{2}\mathbf{u}) + \sum_{j,k=1}^{d} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_{k}}\mathbf{u}_{j} + \frac{\partial \eta}{\partial x_{j}}\mathbf{u}_{k}\right)^{2} dx$$

$$+ \lambda \left\langle \operatorname{div}(\mathbf{u}), \operatorname{div}(\eta^{2}\mathbf{u}) \right\rangle_{L^{2}(B)} + \lambda \left\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \eta, \mathbf{u} \cdot \nabla \eta \right\rangle_{L^{2}(B)}$$

$$\lesssim a(\mathbf{u}, \eta^{2}\mathbf{u}) + \frac{1}{(\delta R)^{2}} (\lambda + \mu) \|\mathbf{u}\|_{L^{2}(B)}^{2}.$$

$$(4.31b)$$

Mit  $\mathbf{J}_h$  bezeichnen wir den vektorwertigen Interpolationsoperator  $\mathbf{J}_h : H^1(\Omega)^d \to S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d$ ,  $\mathbf{u} \mapsto (J_h \mathbf{u}_1, \dots, J_h \mathbf{u}_d)^T$  mit dem nodalen Interpolationsoperator  $J_h$  aus (2.23). Auf Grund der Lokalität des nodalen Interpolationsoperators folgt, da  $\omega_\rho$  sowie supp  $\eta^2 \mathbf{u}$  Vereinigungen von Elementen von  $\mathcal{T}_h$  sind, dass

$$\operatorname{supp} \mathbf{J}_h(\eta^2 \mathbf{u}) \subset \overline{B}. \tag{4.32}$$

Somit liefert die Orthogonalität (4.28) für Funktionen in  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta)R},\omega_{\rho})$ , dass

$$a(\mathbf{u}, \eta^{2}\mathbf{u}) = a(\mathbf{u}, \eta^{2}\mathbf{u} - \mathbf{J}_{h}(\eta^{2}\mathbf{u}))$$

$$\leq 2\mu \|e(\mathbf{u})\|_{L^{2}(B)} \|e(\eta^{2}\mathbf{u} - \mathbf{J}_{h}(\eta^{2}\mathbf{u}))\|_{L^{2}(B)}$$

$$+\lambda \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L^{2}(B)} \|\operatorname{div}(\eta^{2}\mathbf{u} - \mathbf{J}_{h}(\eta^{2}\mathbf{u}))\|_{L^{2}(B)}$$

$$(4.33)$$

Die Approximationseigenschaft der nodalen Interpolation (2.23) und die Trägereigenschaft von  $\eta^2 \mathbf{u}$  liefern nun für jede Komponente

$$\left|\eta^{2}\mathbf{u}_{i}-\mathbf{J}_{h}(\eta^{2}\mathbf{u})_{i}\right|_{H^{1}(B)}^{2}\lesssim h^{2p}\sum_{\substack{T\in\mathcal{T}_{h}\\T\subseteq B}}\left|\eta^{2}\mathbf{u}_{i}\right|_{H^{p+1}(T)}^{2}.$$

$$(4.34)$$

Die Abschätzung (2.35) der Seminorm auf der rechten Seite aus Lemma 2.18 sowie die inverse Ungleichung aus (2.14) führen auf

$$|\eta^{2}\mathbf{u}_{i} - \mathbf{J}_{h}(\eta^{2}\mathbf{u})_{i}|_{H^{1}(B)}^{2} \lesssim \frac{1}{(\delta R)^{2}} h^{2p} \sum_{\substack{T \in \mathcal{T}_{h} \\ T \subseteq B}} \left( |\eta \mathbf{u}_{i}|_{H^{p}(T)}^{2} + \frac{1}{(\delta R)^{2}} |\mathbf{u}_{i}|_{H^{p-1}(T)}^{2} \right)$$

$$\lesssim \frac{h^{2}}{(\delta R)^{2}} \|\nabla(\eta \mathbf{u}_{i})\|_{L^{2}(B)}^{2} + \frac{h^{2}}{(\delta R)^{4}} \|\mathbf{u}_{i}\|_{L^{2}(B)}^{2}.$$

$$(4.35)$$

Da laut Definition des linearisierten Verzerrungstensors  $e(\cdot)$  folgt, dass  $\|e(\mathbf{u})\|_{L^2(B)} \lesssim \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(B)}$ , sowie auf Grund von

$$\left\|\operatorname{div}(\eta^{2}\mathbf{u} - \mathbf{J}_{h}(\eta^{2}\mathbf{u}))\right\|_{L^{2}(B)}^{2} = \left\|\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial(\eta^{2}\mathbf{u}_{i} - J_{h}(\eta^{2}\mathbf{u}_{i}))}{\partial x_{i}}\right\|_{L^{2}(B)}^{2} \lesssim \sum_{i=1}^{d} \left|\eta^{2}\mathbf{u}_{i} - \mathbf{J}_{h}(\eta^{2}\mathbf{u})_{i}\right|_{H^{1}(B)}^{2}$$

liefern die komponentenweisen Abschätzungen aus (4.35) schließlich mit der gewichteten Young'schen Ungleichung

$$\begin{split} 2\mu \left\| \nabla (\eta \mathbf{u}) \right\|_{L^{2}(B)}^{2} + \lambda \left\| \operatorname{div}(\eta \mathbf{u}) \right\|_{L^{2}(B)}^{2} \\ &\lesssim 2\mu \left\| e(\mathbf{u}) \right\|_{L^{2}(B)} \left( \frac{h}{(\delta R)^{2}} \left\| \mathbf{u} \right\|_{L^{2}(B)} + \frac{h}{\delta R} \left\| \nabla (\eta \mathbf{u}) \right\|_{L^{2}(B)} \right) \\ &+ \lambda \left\| \operatorname{div}(\mathbf{u}) \right\|_{L^{2}(B)} \left( \frac{h}{(\delta R)^{2}} \left\| \mathbf{u} \right\|_{L^{2}(B)} + \frac{h}{\delta R} \left\| \nabla (\eta \mathbf{u}) \right\|_{L^{2}(B)} \right) + \frac{1}{(\delta R)^{2}} \left( \lambda + \mu \right) \left\| \mathbf{u} \right\|_{L^{2}(B)}^{2} \\ &\leq C \frac{h^{2}}{(\delta R)^{2}} \left( \mu + \frac{\lambda^{2}}{\mu} \right) \left\| \nabla \mathbf{u} \right\|_{L^{2}(B)}^{2} + C \frac{1}{(\delta R)^{2}} \left( \lambda + \mu \right) \left\| \mathbf{u} \right\|_{L^{2}(B)}^{2} + \mu \left\| \nabla (\eta \mathbf{u}) \right\|_{L^{2}(B)}^{2}. \end{split}$$

Absorbiert man den Term  $\mu \|\nabla(\eta \mathbf{u})\|_{L^2(B)}^2$  auf der linken Seite und setzt man diese Abschätzung in (4.31a) ein, so erhält man das gewünschte Resultat.

## **4.3.4** Niedrigdimensionale Approximation in $\mathcal{H}_{h,0}(D,\omega_{\rho})$

In ähnlicher Weise zu Abschnitt 4.2.4 kann mittels Scott-Zhang-Projektion eine niedrigdimensionale Approximation konstruiert werden.

Für ein quasiuniformes, reguläres Gitter  $\mathcal{K}_H$  mit Gitterweite H > 0 seien  $I_H : H^1(\mathbb{R}^d) \to S^{1,1}(\mathcal{K}_H)$  die Scott-Zhang Projektion aus (2.21) und  $\mathbf{I}_H$  der vektorwertige Interpolations-operator

$$\mathbf{I}_{H}(\mathbf{u}) = (I_{H}\mathbf{u}_{1}, \dots, I_{H}\mathbf{u}_{d}). \tag{4.36}$$

Weiters sei  $\mathbf{E}: H^1(\Omega)^d \to H^1(\mathbb{R}^d)^d$  der Fortsetzungsoperator definiert durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = (\widetilde{E}(\mathbf{u}_1), \dots, \widetilde{E}(\mathbf{u}_d)), \tag{4.37}$$

wobei  $\widetilde{E}: H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^d)$  den Fortsetzungsoperator aus Satz 2.3 bezeichnet.

Lemma 4.9. Seien  $\delta \in (0,1)$ ,  $R \in (0,2 \operatorname{diam}(\Omega))$  so gewählt, dass  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{4}$ , und  $B_R$ ,  $B_{(1+\delta)R}$ ,  $B_{(1+2\delta)R}$  konzentrische Boxen gemäß Definition 2.10 sowie  $\omega_{\rho} \subset \Omega$  von der Form (4.27). Sei  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R},\omega_{\rho})$  und  $\mathcal{K}_H$  eine (unendliche)  $\gamma$ -formreguläre Triangulierung von  $\mathbb{R}^d$  mit Gitterweite H, für die zusätzlich  $\frac{H}{R} \leq \frac{\delta}{4}$  gilt. Sei  $\eta$  eine Abschneidefunktion gemäß Definition 2.16 mit  $D_1 = B_R$  und  $D_2 = B_{(1+\delta)R}$  sowie  $\mathbf{I}_H$  und  $\mathbf{E}$  die in (4.36) und (4.37) definierten Interpolations- und Fortsetzungsoperatoren. Dann gilt

$$(\mathbf{u} - \Pi_{h,R} \mathbf{I}_H \mathbf{E}(\eta \mathbf{u})))|_{B_R \cap \omega_o} \in \mathcal{H}_{h,0}(B_R, \omega_\rho), \tag{4.38}$$

und für die Dimension des Raumes  $\mathbf{W} := \prod_{h,R} \mathbf{I}_H \mathbf{E} \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R}, \omega_\rho)|_{B_R \cap \omega_\rho}$  folgt

$$\dim \mathbf{W} \le C_{\text{app}} \left( \frac{(1+2\delta)R}{H} \right)^d \tag{4.39}$$

mit einer Konstante  $C_{app} > 0$ , die nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität von  $\mathcal{T}_h$  und  $\mathcal{K}_H$  abhängt. Weiters gilt

$$\|\mathbf{u} - \Pi_{h,R} \mathbf{I}_H \mathbf{E}(\eta \mathbf{u})\|_{h,R} \le C_{\text{app}} \left( \frac{h}{R} \left( 1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) + \frac{H}{R} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\mu}} \right) \frac{1 + 2\delta}{\delta} \|\mathbf{u}\|_{h,(1 + 2\delta)R}. \quad (4.40)$$

Beweis. Aus  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R}, \omega_{\rho})$  folgt auch  $\mathbf{u}|_{B_R \cap \omega_{\rho}} \in \mathcal{H}_{h,0}(B_R, \omega_{\rho})$  und somit  $\Pi_{h,R}(\mathbf{u}|_{B_R \cap \omega_{\rho}}) = \mathbf{u}|_{B_R \cap \omega_{\rho}}$ , was (4.38) zeigt. Für die Dimension von  $\mathbf{W}$  gilt

$$\dim \mathbf{I}_H(\mathbf{E}\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R},\mu)) \lesssim d((1+2\delta)R/H)^d,$$

was (4.39) zeigt.

Die Lokalität und Approximationseigenschaften der Scott-Zhang-Projektion liefern für jede Komponente  $\mathbf{u}_i$ ,  $i = 1, \dots, d$  von  $\mathbf{u}$ , dass

$$\frac{1}{H} \left\| \widetilde{E}(\eta \mathbf{u}_i) - I_H \widetilde{E}(\eta \mathbf{u}_i) \right\|_{L^2(B_R)} + \left\| \nabla (\widetilde{E}(\eta \mathbf{u}_i) - I_H \widetilde{E}(\eta \mathbf{u}_i)) \right\|_{L^2(B_R)} \lesssim \left\| \nabla \widetilde{E}(\eta \mathbf{u}_i) \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R})}.$$

Wendet man Lemma 4.8 mit  $\widetilde{R}=(1+\delta)R$  und  $\widetilde{\delta}=\frac{\delta}{1+\delta}$  an - wegen  $4h\leq \delta R=\widetilde{\delta}\widetilde{R}$  folgt die Voraussetzung  $\frac{h}{\widetilde{R}}\leq \frac{\widetilde{\delta}}{4}$  - so erhält man

$$\begin{split} \|\mathbf{u} - \Pi_{h,R} \mathbf{I}_{H} \mathbf{E}(\eta \mathbf{u}))\|_{h,R}^{2} &= \|\Pi_{h,R} \left( \mathbf{E}(\eta \mathbf{u}) - \mathbf{I}_{H} \mathbf{E}(\eta \mathbf{u}) \right) \|_{h,R}^{2} \leq \|\mathbf{E}(\eta \mathbf{u}) - \mathbf{I}_{H} \mathbf{E}(\eta \mathbf{u}) \|_{h,R}^{2} \\ &= \sum_{i=1}^{d} \left( \frac{h}{R} \right)^{2} \left( \mu + \frac{\lambda^{2}}{\mu} \right) \left\| \nabla (\widetilde{E}(\eta \mathbf{u}_{i}) - I_{H} \widetilde{E}(\eta \mathbf{u}_{i})) \right\|_{L^{2}(B_{R} \cap \omega_{\rho})}^{2} \\ &+ \frac{1}{R^{2}} (\lambda + \mu) \left\| \widetilde{E}(\eta \mathbf{u}_{i}) - I_{H} \widetilde{E}(\eta \mathbf{u}_{i}) \right\|_{L^{2}(B_{R} \cap \omega_{\rho})}^{2} \\ &\lesssim \left( \frac{h^{2}}{R^{2}} \left( \mu + \frac{\lambda^{2}}{\mu} \right) + \frac{H^{2}}{R^{2}} (\lambda + \mu) \right) \|\eta \mathbf{u}\|_{H^{1}(B_{(1+\delta)R})}^{2} \\ &\lesssim \left( \frac{h^{2}}{R^{2}} \left( 1 + \frac{\lambda^{2}}{\mu^{2}} \right) + \frac{H^{2}}{R^{2}} \left( 1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \right) \frac{(1 + 2\delta)^{2}}{\delta^{2}} \|\mathbf{u}\|_{h,(1+2\delta)R}^{2}, \end{split}$$

was den Beweis von (4.40) beendet.

Durch Iteration dieses Approximationsresultats auf konzentrischen Boxen können wir nun Proposition 4.7 zeigen.

Beweis von Proposition 4.7. Mit der Wahl  $\kappa = \frac{1}{1+\eta}$ , können wir den Raum  $\widehat{\mathbf{W}}_k$  definieren, wofür zwei Fälle unterschieden werden.

Fall 1: Es gilt  $\frac{h}{R_{\tau}} > \frac{\kappa q \mu}{8k \max\{C_{\text{app}}, 1\}(\lambda + \mu)}$ . Dann wählen wir  $\widehat{\mathbf{W}}_k := S_0^{p, 1}(\mathcal{T}_h)^d|_{B_{R_{\tau}}}$  und das Minimum in (4.25) ist klarerweise gleich Null. Mit der Wahl von  $\kappa$  ist die Dimension von  $\widehat{\mathbf{W}}_k$  beschränkt durch

$$\dim \widehat{\mathbf{W}}_k \lesssim \left(\frac{R_{\tau}}{h}\right)^d \lesssim \left(\frac{8k \max\{C_{\text{app}}, 1\}(\lambda + \mu)}{\kappa q \mu}\right)^d \simeq \left((1 + \eta)(q\mu)^{-1}(\lambda + \mu)k\right)^d$$
$$\lesssim (2 + \eta)^d (q\mu)^{-d}(\lambda + \mu)^d k^{d+1}.$$

**Fall 2:** Die Bedingung  $\frac{h}{R_{\tau}} \leq \frac{\kappa q \mu}{8k \max\{C_{\text{app}}, 1\}(\lambda + \mu)}$  mit der Konstante  $C_{\text{app}}$  aus Lemma 4.9 ist erfüllt.

Sei  $\mathbf{u}_h \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d$  die Lösung des diskreten Problems (3.17). Dann gilt  $\mathbf{u}_h|_{B_{(1+\kappa)R_{\tau}}} \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\kappa)R_{\tau}},\Omega)$ . Wir wenden Lemma 4.9 k-mal auf konzentrischen Boxen  $B_{R_{\tau}}$  und

 $B_{(1+\delta_j)R_{\tau}}$  mit  $\delta_j := \kappa(1-j/k)$  und der Wahl  $H = \frac{\kappa q R_{\tau}}{8k \max\{C_{\mathrm{app}},1\}} \sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}$  an. Diese Wahl von H impliziert  $h \frac{\lambda+\mu}{\mu} \leq H \sqrt{\frac{\lambda+\mu}{\mu}}$ , womit der erste Term auf der rechten Seite in (4.40) durch den zweiten Term abgeschätzt werden kann. Die k-malige Iteration von (4.40) liefert somit analog zu Lemma 4.4 eine Approximation  $\hat{\mathbf{w}}$  mit

$$\|\mathbf{u}_h - \widehat{\mathbf{w}}\|_{h,R_{\tau}} \le q^k \|\mathbf{u}_h\|_{h,(1+\kappa)R_{\tau}}.$$
 (4.41)

Gleichung (3.17) impliziert gemeinsam mit der Koerzivität von  $a(\cdot, \cdot)$  und der Young'schen Ungleichung

$$\|\mathbf{u}_{h}\|_{H^{1}(\Omega)}^{2} \lesssim \frac{1}{2\mu} a(\mathbf{u}_{h}, \mathbf{u}_{h}) = \frac{1}{2\mu} \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_{h} \rangle_{L^{2}(\Omega)} \lesssim \frac{1}{2\mu} \|\mathbf{f}\|_{L^{2}(\Omega)} \|\mathbf{u}_{h}\|_{L^{2}(\Omega)}$$

$$\leq C \frac{1}{\mu^{2}} \|\mathbf{f}\|_{L^{2}(\Omega)}^{2} + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_{h}\|_{H^{1}(\Omega)}^{2}.$$

Subtrahiert man letzten Term von beiden Seiten, so erhält man eine a-priori-Abschätzung für  $\|\mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)}$ . Mit  $\frac{h(\lambda+\mu)}{R_\tau\mu} < 1$  folgt somit eine Abschätzung für die rechte Seite von (4.41) als

$$\|\mathbf{u}_{h}\|_{h,(1+\kappa)R_{\tau}}^{2} \leq \left(\mu + \frac{\lambda + \mu}{R_{\tau}^{2}}\right) \|\mathbf{u}_{h}\|_{H^{1}(B_{2R_{\tau}}\cap\Omega)}^{2}$$

$$\lesssim \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{\lambda + \mu}{\mu R_{\tau}^{2}}\right) \|\mathbf{f}\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}.$$

Es existiert also ein Raum  $\widehat{\mathbf{W}}_k$  mit der Approximationseigenschaft

$$\min_{\widehat{\mathbf{w}} \in \widehat{\mathbf{W}}_k} \|\mathbf{u}_h - \widehat{\mathbf{w}}\|_{L^2(B_{R_\tau} \cap \Omega)} \lesssim \frac{R_\tau}{\sqrt{\lambda + \mu}} q^k \|\mathbf{u}_h\|_{h, (1+\kappa)R_\tau} \lesssim \left(\frac{R_\tau}{\sqrt{\mu}\sqrt{\lambda + \mu}} + \frac{1}{\mu}\right) q^k \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} 
\leq C_{\text{box}} q^k \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)},$$

und die Dimension von  $\widehat{\mathbf{W}}_k$  ist auf Grund der Wahl von H beschränkt durch

$$\dim \widehat{\mathbf{W}}_k \le C \left( \frac{1 + \kappa^{-1}}{q} \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\mu}} \right)^d k^{d+1} = C_{\dim} (2 + \eta)^d q^{-d} k^{d+1},$$

was den Beweis von Proposition 4.7 beendet.

### 4.3.5 Das Neumann-Problem

Für das reine Neumann-Problem aus Abschnitt 3.2.1 wird wie in Abschnitt 4.2.5 eine Sattelpunktformulierung und damit einhergehend ein zusätzlicher Term in der Orthogonalität behandelt. Der Beweis der Existenz einer geeigneten niedrigdimensionalen Approximation an die Galerkin-Lösung wird im Wesentlichen analog zu den vorigen Abschnitten geführt, weswegen die Beweise auf die essentiellen Unterschiede reduziert sind.

**Proposition 4.10.** Seien  $\tau \times \sigma$  ein Cluster-Paar und  $B_{R_{\tau}}$ ,  $B_{R_{\sigma}}$  zugehörige Bounding-Boxen gemäß Definition 2.7, wobei  $R_{\tau} \leq 2 \operatorname{diam}(\Omega)$ . Sei  $q \in (0,1)$  und für fixes  $\eta > 0$  die Zulässigkeitsbedingung  $\eta \operatorname{dist}(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) \geq \operatorname{diam}(B_{R_{\tau}})$  erfüllt. Dann existiert für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ein Unterraum  $\widehat{\mathbf{W}}_k \subseteq S^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d$  mit  $\operatorname{dim} \widehat{\mathbf{W}}_k \leq C_{\operatorname{dim}}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ , sodass für beliebiges  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$  mit  $\operatorname{supp} |\mathbf{f}| \subset \overline{B_{R_{\sigma}} \cap \Omega}$ , für die Lösung  $\mathbf{u}_h$  von (3.25) folgt

$$\min_{\widehat{\mathbf{w}} \in \widehat{\mathbf{W}}_k} \|\mathbf{u}_h - \widehat{\mathbf{w}}\|_{L^2(B_{R_\tau} \cap \Omega)} \le C_{\text{box}} q^k \|\mathbf{f}\|_{L^2(B_{R_\sigma} \cap \Omega)}.$$
(4.42)

Die Konstante  $C_{\text{box}} > 0$  hängt nur von  $\Omega$ , d und den Lamé-Konstanten  $\lambda, \mu > 0$  ab, die Konstante  $C_{\text{dim}}$  hängt zusätzlich noch von p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab.

Für ein genügend kleines  $\kappa > 0$ , zwei zulässige Bounding-Boxen  $B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}$  und  $\mathbf{f} \in L^{2}(\Omega)$  mit supp  $|\mathbf{f}| \subset \overline{B_{R_{\sigma}} \cap \Omega}$  haben wir die Orthogonalität

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \langle \mathbf{v}_h, \boldsymbol{\nu} \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in S^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d, \text{ supp } |\mathbf{v}_h| \subset \overline{B_{(1+\kappa)R_\tau} \cap \Omega}.$$
 (4.43)

Diese Orthogonalität führt auf die Definition des affinen Raumes

$$\mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(D,\omega_{\rho},\widetilde{\boldsymbol{\nu}}) := \{ \mathbf{u} \in H^{1}(D \cap \omega_{\rho})^{d} \colon \exists \widetilde{\mathbf{u}} \in S^{p,1}(\mathcal{T}_{h})^{d} \text{ s.d. } \mathbf{u}|_{D \cap \omega_{\rho}} = \widetilde{\mathbf{u}}|_{D \cap \omega_{\rho}}, \text{ supp } \widetilde{\mathbf{u}} \subset \overline{\omega_{\rho}}, \\ a(\mathbf{u},\mathbf{v}_{h}) = -\langle \mathbf{v}_{h}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}} \rangle \ \forall \mathbf{v}_{h} \in S^{p,1}(\mathcal{T}_{h})^{d} \text{ mit supp } \mathbf{v}_{h} \subset \overline{D \cap \omega_{\rho}} \}.$$

Für Funktionen  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(B_{(1+\delta)R}, \omega_{\rho}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}})$  für eine Bounding-Box  $B_{(1+\delta)R}$  kann ein ähnliches inneres Regularitätsresultat wie in Lemma 4.8 gezeigt werden.

Lemma 4.11. Seien  $\delta \in (0,1)$ ,  $R \in (0,2 \operatorname{diam}(\Omega))$  und  $B_R$ ,  $B_{(1+\delta)R}$  zwei konzentrische Boxen mit Seitenlängen R und  $(1+\delta)R$  gemäß Definition 2.10. Weiters gelte  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{4}$  und sei  $\omega_{\rho} \subseteq \Omega$  von der Form (4.27). Dann existiert eine Konstante  $C_{\text{reg}}$ , die nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  abhängt, sodass für  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(B_{(1+\delta)R},\omega_{\rho},\widetilde{\boldsymbol{\nu}})$  gilt

$$\mu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^{2}(B_{R} \cap \omega_{\rho})}^{2} \leq \mu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^{2}(B_{R} \cap \omega_{\rho})}^{2} + \lambda \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^{2}(B_{R} \cap \omega_{\rho})}^{2} \\
\leq C_{\operatorname{reg}} \left( \left( \frac{1+\delta}{\delta} \right)^{2} \|\mathbf{u}\|_{h,(1+\delta)R}^{2} + \frac{1}{\mu} \|\widetilde{\boldsymbol{\nu}}\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R})}^{2} \right).$$

Beweis. Der Beweis ist beinahe identisch zum Beweis von Lemma 4.8, nur an zwei Stellen treten Modifikationen auf. Zunächst liefert die zweite Korn'sche Ungleichung (3.21) an Stelle der ersten Korn'schen Ungleichung in (4.31a) mit  $\delta R \lesssim 1$ , dass

$$\begin{split} 2\mu \left\| \nabla \mathbf{u} \right\|_{L^2(B_R \cap \omega_\rho)}^2 + \lambda \left\| \operatorname{div} \mathbf{u} \right\|_{L^2(B_R \cap \omega_\rho)}^2 &\leq 2\mu \left\| \nabla (\eta \mathbf{u}) \right\|_{L^2(B)}^2 + \lambda \left\| \operatorname{div}(\eta \mathbf{u}) \right\|_{L^2(B)}^2 \\ &\lesssim 2\mu \int_B e(\eta \mathbf{u}) : e(\eta \mathbf{u}) dx + 2\mu \left\| \eta \mathbf{u} \right\|_{L^2(B)}^2 + \lambda \left\| \operatorname{div}(\eta \mathbf{u}) \right\|_{L^2(B)}^2 \\ &\lesssim a(\mathbf{u}, \eta^2 \mathbf{u}) + \left( 1 + \frac{1}{(\delta R)^2} \right) (\lambda + \mu) \left\| \mathbf{u} \right\|_{L^2(B)}^2 \\ &\lesssim a(\mathbf{u}, \eta^2 \mathbf{u}) + \frac{1}{(\delta R)^2} (\lambda + \mu) \left\| \mathbf{u} \right\|_{L^2(B)}^2 . \end{split}$$

Weiters muss noch der Term  $-\langle \mathbf{J}_h(\eta^2\mathbf{u}), \widetilde{\boldsymbol{\nu}}\rangle_{L^2(B)}$  zu der rechten Seite der Gleichung in (4.33) addiert werden. Dieser kann auf Grund der Approximationseigenschaften von  $\mathbf{J}_h$  mittels

$$\begin{split} \left| \left\langle \mathbf{J}_{h}(\eta^{2}\mathbf{u}), \widetilde{\boldsymbol{\nu}} \right\rangle_{L^{2}(B)} \right| &\leq \|\widetilde{\boldsymbol{\nu}}\|_{L^{2}(B)} \|\eta^{2}\mathbf{u} - \mathbf{J}_{h}(\eta^{2}\mathbf{u})\|_{L^{2}(B)} + \|\widetilde{\boldsymbol{\nu}}\|_{L^{2}(B)} \|\eta^{2}\mathbf{u}\|_{L^{2}(B)} \\ &\lesssim \|\widetilde{\boldsymbol{\nu}}\|_{L^{2}(B)} \left( \frac{h^{2}}{\delta R} \|\nabla(\eta\mathbf{u})\|_{L^{2}(B)} + \left( \frac{h^{2}}{(\delta R)^{2}} + 1 \right) \|\mathbf{u}\|_{L^{2}(B)} \right) \\ &\lesssim \frac{1}{\mu} \|\widetilde{\boldsymbol{\nu}}\|_{L^{2}(B)}^{2} + \frac{h^{2}}{(\delta R)^{2}} \mu \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^{2}(B)}^{2} + \frac{1}{(\delta R)^{2}} \mu \|\mathbf{u}\|_{L^{2}(B)}^{2} \end{split}$$

abgeschätzt werden, und die restlichen Schritte folgen analog zu Lemma 4.8.

Mit diesem inneren Regularitätsresultat kann eine niedrigdimensionale Approximation wie beim Neumann-Problem in Abschnitt 4.2.5 mittels Scott-Zhang-Projektion, Orthogonalprojektion und Iteration auf konzentrischen Boxen konstruiert werden.

Beweis von Proposition 4.10. Wie in Lemma 4.9 kann eine niedrigdimensionale Approximation an die Galerkin-Lösung mittels Verkettung von Orthogonalprojektion  $\Pi_{h,R,\tilde{\nu}}$  auf  $\mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(B_{(1+2\delta)R},\omega_{\rho},\tilde{\nu})$ , vektorieller Scott-Zhang-Projektion  $\mathbf{I}_H$  und des vektoriellen Fortsetzungsoperators  $\mathbf{E}$  definiert werden, für die

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{u} - \Pi_{h,R,\widetilde{\boldsymbol{\nu}}} \mathbf{I}_{H} \mathbf{E}(\eta \mathbf{u}) \right\|_{h,R}^{2} &\lesssim \left( \frac{h^{2}}{R^{2}} \left( \mu + \frac{\lambda^{2}}{\mu} \right) + \frac{H^{2}}{R^{2}} (\lambda + \mu) \right) \left\| \nabla \mathbf{u} \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \cap \omega_{\rho})}^{2} \\ &\lesssim \left( \frac{h^{2}}{R^{2}} \left( 1 + \frac{\lambda^{2}}{\mu^{2}} \right) + \frac{H^{2}}{R^{2}} \left( 1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \right) \left( \frac{(1+2\delta)^{2}}{\delta^{2}} \left\| \mathbf{u} \right\|_{h,(1+2\delta)R}^{2} + \frac{1}{\mu} \left\| \widetilde{\boldsymbol{\nu}} \right\|_{L^{2}(B_{(1+2\delta)R})}^{2} \right) \end{aligned}$$

folgt. Man erhält somit für konzentrische Boxen  $B_{(1+\delta_j)R}$  mit  $\delta_j := \kappa(1-j/k)$  für  $\kappa = \frac{1}{1+\eta}$  und der Wahl  $H = \frac{\kappa qR}{8k\max\{C_{\mathrm{app}},1\}}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}$  analog zu Lemma 4.4 eine Approximation  $\mathbf{w}_1$  an die Galerkin-Lösung  $\mathbf{u}_h \in \mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(B_{(1+\kappa)R},\Omega,\boldsymbol{\nu})$  in einem Raum  $\mathbf{W}_1 \subset \mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(B_{(1+\delta_1)R},\Omega,\boldsymbol{\nu})$  mit Dimension dim  $\mathbf{W}_1 \leq C\left(\frac{(1+\kappa)R}{H}\right)^d$ , für die

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_1\|_{h,(1+\delta_1)R} \le q \left( \|\mathbf{u}_h\|_{h,(1+\kappa)R} + \mu^{-1} \|\boldsymbol{\nu}\|_{L^2(B_{(1+\kappa)R})} \right)$$

gilt. Da  $\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_1 \in \mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(B_{(1+\delta_1)R}, \Omega, 0)$ , kann obiges Resultat mit  $\widetilde{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{0}$  erneut angewendet werden und man erhält eine Approximation  $\mathbf{w}_2$  mit

$$\|\mathbf{u}_{h} - \mathbf{w}_{1} - \mathbf{w}_{2}\|_{h,(1+\delta_{2})R} \leq q \|\mathbf{u}_{h} - \mathbf{w}_{1}\|_{h,(1+\delta_{1})R} \leq q^{2} \left(\|\mathbf{u}_{h}\|_{h,(1+\kappa)R} + \mu^{-1} \|\boldsymbol{\nu}\|_{L^{2}(B_{(1+\kappa)R})}\right).$$

Wiederholt man diesen Prozess (k-2)-mal, so erhält man eine Approximation  $\widehat{\mathbf{w}}$  in einem Raum  $\widehat{\mathbf{W}} \subset \mathcal{H}_{h,0}^{\mathcal{N}}(B_{(1+\kappa)R},\Omega,\boldsymbol{\nu})$  mit Dimension dim  $\widehat{\mathbf{W}}_k \leq Ck\left(\frac{(1+\kappa)R}{H}\right)^d = C_{\dim}\left(2+\eta\right)^dq^{-d}k^{d+1}$  und der Eigenschaft

$$\|\mathbf{u}_h - \widehat{\mathbf{w}}\|_{h,R} \le q^k \left( \|\mathbf{u}_h\|_{h,(1+\kappa)R} + \mu^{-1} \|\boldsymbol{\nu}\|_{L^2(B_{(1+\kappa)R})} \right).$$

Für die Abschätzung der rechten Seite testen wir die erste Gleichung in (3.25) mit  $\nu \in S^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d$ , woraus  $\|\nu\|_{L^2(\Omega)} \le \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}$  folgt. Die restlichen Schritte des Beweises folgen analog zum Beweis von Proposition 4.7.

### 4.4 Die schwach-singuläre Integralgleichung

In diesem Kapitel wird eine niedrigdimensionale Approximation an die Galerkin-Lösung der schwach-singulären Integralgleichung mittels der in Abschnitt 4.1 beschriebenen Schritte konstruiert. Im Unterschied zu den Finite Elemente Diskretisierungen, die in den Abschnitten 4.2–4.3 betrachtet wurden, wird hierbei eine Approximation an das Einfachschichtpotential für die Galerkin-Lösung konstruiert, anstatt diese direkt zu approximieren. Mit Hilfe der Sprungbedingungen aus Satz 3.11 erhält man daraus dann eine Approximation an die Galerkin-Lösung. Das Hauptresultat in diesem Abschnitt, die Existenz einer niedrigdimensionalen Approximation an die Galerkin-Lösung, ist im Folgenden formuliert.

**Proposition 4.12.** Seien  $\tau \times \sigma$  ein Cluster-Paar und  $B_{R_{\tau}}$ ,  $B_{R_{\sigma}}$  die zugehörigen Bounding-Boxen gemäß Definition 2.7, wobei  $R_{\tau} \leq 2 \operatorname{diam}(\Omega)$ . Sei  $q \in (0,1)$  und für fixes  $\eta > 0$  die Zulässigkeitsbedingung  $\eta \operatorname{dist}(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) \geq \operatorname{diam}(B_{R_{\tau}})$  erfüllt. Dann existiert für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ein Unterraum  $\widehat{W}_k$  von  $S^{p,0}(\mathcal{E}_h)$  mit  $\operatorname{dim} \widehat{W}_k \leq C_{\operatorname{dim}}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ , sodass für beliebiges  $f \in L^2(\Gamma)$  mit supp  $f \subset \overline{B_{R_{\sigma}} \cap \Gamma}$  für die Lösung  $\phi_h$  von (3.39) folgt

$$\min_{\widehat{w} \in \widehat{W}_k} \|\phi_h - \widehat{w}\|_{L^2(B_{R_\tau} \cap \Gamma)} \le C_{\text{box}} h^{-2} q^k \|\Pi_{\Gamma}^{L^2} f\|_{L^2(\Gamma)} \le C_{\text{box}} h^{-2} q^k \|f\|_{L^2(\Gamma)}.$$
(4.44)

Die Konstanten  $C_{\text{dim}}, C_{\text{box}} > 0$  hängen nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  ab.

### 4.4.1 Orthogonalität

Sei  $u := \widetilde{V} \phi_h$  das Einfachschichtpotential zur Galerkin-Lösung  $\phi_h$  aus (3.39). Für beliebiges f mit supp  $f \subset \overline{B_{R_{\sigma}} \cap \Gamma}$  liefert Gleichung (3.39)

$$\langle \gamma_0^{\text{int}} u, \psi_h \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle V \phi_h, \psi_h \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle f, \psi_h \rangle_{L^2(\Gamma)} = 0 \ \forall \psi_h \in S^{p,0}(\mathcal{E}_h) \text{ mit supp } \psi_h \subset \Gamma \setminus \overline{B_{R_\sigma}}.$$

Mit der Zulässigkeitsbedingung  $0 < \min\{\operatorname{diam}(B_{R_{\tau}}), \operatorname{diam}(B_{R_{\sigma}})\} \leq \eta \operatorname{dist}(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}})$  aus (2.27) und einem genügend kleinen Parameter  $\kappa > 0$  führt dies auf die Orthogonalität

$$\langle \gamma_0^{\text{int}} u, \psi_h \rangle_{L^2(\Gamma)} = 0 \quad \forall \psi_h \in S^{p,0}(\mathcal{E}_h) \text{ mit supp } \psi_h \subset \overline{B_{(1+\kappa)R_\tau} \cap \Gamma},$$
 (4.45)

also auf  $B_{(1+\kappa)R_{\tau}} \cap \Gamma$  ist die Spur  $\gamma_0^{\text{int}}u$  des Potentials u somit orthogonal zu stückweisen Polynomen vom maximalen Grad p.

### **4.4.2** Die Approximationsräume $\mathcal{H}_h(D)$ und $\mathcal{H}_{h,0}(D,\Gamma_{\rho})$

Wir werden zunächst Räume definieren, die einige Eigenschaften des Potentials  $u = V \phi_h$  vereinen. Hierbei ist zu beachten, dass, da eine lokale Approximation gesucht wird, auch eine lokale Definition von Sprung und Normalensprung angegeben werden muss.

Sei D eine offene Menge und setze  $D^- := D \cap \Omega$  sowie  $D^+ := D \cap \overline{\Omega}^c$ . Eine Funktion  $v \in H^1(D^+ \cup D^-)$  heißt stückweise harmonisch, falls

$$\int_{D^{\pm}} \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(D^{\pm}).$$

**Definition 4.13.** Für eine stückweise harmonische Funktion  $v \in H^1(D^+ \cup D^-)$  lässt sich der Normalensprung  $[\partial_n v]|_{D \cap \Gamma}$  auf  $D \cap \Gamma$  definieren als das Funktional

$$\left\langle [\partial_n v]|_{D\cap\Gamma}, \gamma_0^{\text{int}} \varphi \right\rangle := \int_{D^+ \cup D^-} \nabla v \cdot \nabla \varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(D). \tag{4.46}$$

Der Wert  $\langle [\partial_n v]|_{D\cap\Gamma}, \gamma_0^{\rm int}\varphi \rangle$  hängt nur an  $\gamma_0^{\rm int}\varphi|_{D\cap\Gamma}$  im Sinn, dass  $\langle [\partial_n v]|_{D\cap\Gamma}, \gamma_0^{\rm int}\varphi \rangle = 0$  für alle  $\varphi \in C_0^{\infty}(D)$  mit  $\gamma_0^{\rm int}\varphi|_{D\cap\Gamma} = 0$ . Weiters, falls  $[\partial_n v]|_{D\cap\Gamma}$  eine Funktion in  $L^2(D\cap\Gamma)$  ist, ist diese eindeutig im  $L^2$ -Sinn. Die Definition (4.46) passt mit den Sprungbedingungen (3.37a) zusammen: Für das Potential  $\widetilde{V}\phi_h$  mit  $\phi_h \in S^{p,0}(\mathcal{E}_h)$  gilt die Sprungbedingung  $[\partial_n \widetilde{V}\phi_h]|_{D\cap\Gamma} = -\phi_h|_{D\cap\Gamma}$ .

Der Raum der stückweise harmonischen Funktionen auf D mit stückweise polynomiellem Normalensprung ist definiert durch

$$\mathcal{H}_h(D) := \{ v \in H^1(D^+ \cup D^-) : v \text{ ist stückweise harmonisch,} \\ \exists \widetilde{v} \in S^{p,0}(\mathcal{E}_h) \text{ s.d. } [\partial_n v]|_{D \cap \Gamma} = \widetilde{v}|_{D \cap \Gamma} \}.$$

Das Einfachschichtpotential  $u = \widetilde{V}\phi_h$  mit der Galerkin-Lösung  $\phi_h$  von (3.39) erfüllt  $u \in \mathcal{H}_h(D) \cap H^1(D)$  für jede beschränkte offene Menge D. Sei  $\Gamma_\rho \subset \Gamma$  von der Form (2.34).

Für zwei zulässige Bounding-Boxen  $B_{R_{\tau}}$ ,  $B_{R_{\sigma}}$  mit  $\eta$  dist $(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) \geq \text{diam}(B_{R_{\tau}})$  erfüllt das Potential u zusätzlich die Orthogonalität (4.45). Diese Eigenschaft charakterisiert den Raum  $\mathcal{H}_{h,0}(D,\Gamma_{\rho})$ , gegeben als

$$\mathcal{H}_{h,0}(D,\Gamma_{\rho}) := \mathcal{H}_{h}(D) \cap \{v \in H^{1}(D) : \operatorname{supp}[\partial_{n}v]|_{D \cap \Gamma} \subset \overline{\Gamma_{\rho}},$$

$$\langle \gamma_{0}^{\operatorname{int}}v, \varphi \rangle_{L^{2}(D \cap \Gamma)} = 0 \ \forall \varphi \in S^{p,0}(\mathcal{E}_{h}) \operatorname{mit supp} \varphi \subset \overline{D \cap \Gamma_{\rho}} \}.$$

$$(4.47)$$

Für den Beweis von Proposition 4.12 werden wir nur den Fall  $\Gamma_{\rho} = \Gamma$  benötigen. Der allgemeine Fall des Screen-Problems  $\Gamma_{\rho} \subsetneq \Gamma$  ist bei der Existenz einer  $\mathcal{H}$ -Cholesky-Zerlegung in Kapitel 6.5 von Interesse.

Das folgende Lemma zeigt, dass die Räume  $\mathcal{H}_h(D)$  und  $\mathcal{H}_{h,0}(D,\Gamma_\rho)$  abgeschlossene Unterräume von  $H^1(D \setminus \Gamma)$  und  $H^1(D)$  sind.

**Lemma 4.14.** Der Raum  $\mathcal{H}_h(D)$  ist ein abgeschlossener Unterraum von  $H^1(D \setminus \Gamma)$ , und  $\mathcal{H}_{h,0}(D,\Gamma_\rho)$  ist ein abgeschlossener Unterraum von  $H^1(D)$ .

Beweis. Sei  $(v^j)_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}_h(D)$  eine Folge, die gegen  $v\in H^1(D\backslash\Gamma)$  konvergiert. Für  $\varphi\in C_0^\infty(D^\pm)$  folgt

$$\langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle_{L^2(D^{\pm})} = \lim_{j \to \infty} \left\langle \nabla v^j, \nabla \varphi \right\rangle_{L^2(D^{\pm})} = 0,$$

also, dass v stückweise harmonisch in  $D^+ \cup D^-$  ist.

Sei  $\varphi \in C_0^{\infty}(D)$ . Dann folgt aus der lokalen Definition des Sprunges der Normalenableitung (4.46), dass aus  $v^j \to v$  in  $H^1(D \setminus \Gamma)$  auch folgt, dass  $\langle [\partial_n v^j]|_{D \cap \Gamma}, \gamma_0^{\text{int}} \varphi \rangle \to \langle [\partial_n v]|_{D \cap \Gamma}, \gamma_0^{\text{int}} \varphi \rangle$ , und, da der Raum  $S^{p,0}(\mathcal{E}_h)$  endlich dimensional ist, auch  $[\partial_n v]|_{D \cap \Gamma} = \widetilde{v}|_{D \cap \Gamma}$  für eine Funktion  $\widetilde{v} \in S^{p,0}(\mathcal{E}_h)$ .

Schlussendlich ist  $\mathcal{H}_{h,0}(D,\Gamma_{\rho})$  abgeschlossen in  $H^1(D)$ , da  $\mathcal{H}_h(D)$  abgeschlossen in  $H^1(D\setminus\Gamma)$  ist, und der Schnitt abgeschlossener Räume stets abgeschlossen ist.

Auf den Räumen  $\mathcal{H}_h(B_R)$ ,  $\mathcal{H}_{h,0}(B_R,\Gamma_\rho)$  mit einer Bounding-Box  $B_R$  mit Seitenlänge R definieren wir die Norm

$$|||v||_{h,R}^2 := \left(\frac{h}{R}\right)^2 ||\nabla v||_{L^2(B_R \setminus \Gamma)}^2 + \frac{1}{R^2} ||v||_{L^2(B_R)}^2.$$

Auf Grund der Abgeschlossenheit von  $\mathcal{H}_{h,0}(B_R,\Gamma_\rho)$  können wir die orthogonale Projektion  $\Pi_{h,R}: (H^1(B_R), |\!|\!| \cdot |\!|\!|\!|_{h,R}) \to (\mathcal{H}_{h,0}(B_R,\Gamma_\rho), |\!|\!| \cdot |\!|\!|\!|_{h,R})$  definieren.

#### 4.4.3 Caccioppoli-artige Ungleichung

In diesem Abschnitt wird eine diskrete Caccioppoli-artige Ungleichung gezeigt. Im Gegensatz zu den Finite Elemente Diskretisierungen ist der Beweis hierfür deutlich umfangreicher, da die benützte Orthogonalität nur am Rand gilt, das innere Regularitätsresultat aus Lemma 4.17 allerdings für das Potential formuliert ist. Für die Verknüpfung von Volumenund Randabschätzungen wird unter anderem eine (inverse) Abschätzung für den Normalensprung (Lemma 4.16) benötigt.

Wir beginnen mit einem klassischen Hilfslemma, für dessen Beweis wir beispielsweise auf [FMP15a] verweisen.

**Lemma 4.15.** i. Für  $R \leq 1$  bezeichne  $S_R := \{x \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}(x,\Gamma) < R\}$  die schlauchförmige Umgebung von  $\Gamma$  mit Breite R. Dann existiert eine Konstante C > 0, die nur von  $\Gamma$  abhängt, sodass

$$||v||_{L^2(S_R)} \le C\left(\sqrt{R}||\gamma_0^{\text{int}}v||_{L^2(\Gamma)} + R||\nabla v||_{L^2(S_R)}\right) \qquad \forall v \in H^1(S_R).$$

ii. Seien  $\delta$ , R > 0 und  $B_R$ ,  $B_{(1+\delta)R}$  konzentrische Boxen gemäß Definition 2.10 mit Seitenlängen R und  $(1+\delta)R$ . Dann existiert eine Konstante C > 0, die nur von der Dimension d abhängt, sodass für alle  $v \in H^1(B_{(1+\delta)R})$  gilt

$$||v||_{L^{2}(B_{(1+\delta)R}\setminus B_{R})}^{2} \leq C\delta R\left(\frac{1}{(1+\delta)R}||v||_{L^{2}(B_{(1+\delta)R})}^{2} + (1+\delta)R||\nabla v||_{L^{2}(B_{(1+\delta)R})}^{2}\right).$$

Das folgende Lemma kann als inverse Ungleichung für stückweise harmonische Funktionen mit stückweise polynomiellem Normalensprung angesehen werden, und wird in weiterer Folge für den Beweis der inneren Regularitätsaussage von Lemma 4.17 benötigt.

**Lemma 4.16.** Seien  $\delta \in (0,1)$  und  $R \in (0,2 \operatorname{diam}(\Omega))$  so gewählt, dass  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{4}$ , und  $B_{(1+\delta/2)R}$ ,  $B_{(1+\delta)R}$  konzentrische Boxen mit Seitenlängen  $(1+\delta/2)R$  und  $(1+\delta)R$  gemäß Definition 2.10. Dann existiert eine Konstante C > 0, die nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität von  $\mathcal{E}_h$  abhängt, sodass für alle  $v \in \mathcal{H}_h(B_{(1+\delta)R})$  gilt

$$\|[\partial_n v]\|_{L^2(B_{(1+\delta/2)R}\cap\Gamma)} \le Ch^{-1/2} \|\nabla v\|_{L^2(B_{(1+\delta)R})}. \tag{4.48}$$

Beweis. Der Beweis von (4.48) wird in zwei Schritten geführt. Zunächst zeigen wir die Hilfsabschätzung (4.49), mit deren Hilfe folgt im zweiten Schritt die gewünschte Aussage (4.48) aus einem Überdeckungsargument.

**Schritt 1:** Wir zeigen die folgende Aussage: Falls  $\frac{h}{r} \leq \frac{\varepsilon}{4}$  für r > 0 und  $0 < \varepsilon \leq \delta$ , dann existiert eine Konstante C > 0, die nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität von  $\mathcal{E}_h$  abhängt, sodass für alle  $v \in \mathcal{H}_h(B_{(1+\varepsilon)r})$  die Abschätzung

$$\|[\partial_n v]\|_{L^2(B_r \cap \Gamma)} \le Ch^{-1/2} \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon}} \|\nabla v\|_{L^2(B_{(1+\varepsilon)r})}$$
 (4.49)

gilt.

Lemma 2.6 liefert einen stabilen Interpolationsoperator  $\mathcal{J}_h: L^2(\Gamma) \to S^{q,1}(\mathcal{E}_h) \subset H^1(\Gamma)$ mit der zusätzlichen Orthogonalität von  $w - \mathcal{J}_h w$  zu stückweise polynomiellen Funktionen in  $S^{p,0}(\mathcal{E}_h)$ . Da für Funktionen in  $\mathcal{H}_h(B_{(1+\varepsilon)r})$  der Normalensprung in  $S^{p,0}(\mathcal{E}_h)$  ist, liefert diese Orthogonalität somit

$$\|[\partial_n v]\|_{L^2(B_r \cap \Gamma)} = \sup_{\substack{w \in L^2(\Gamma) \\ \text{supp } w \subset B_r}} \frac{\langle [\partial_n v], w \rangle_{L^2(B_r \cap \Gamma)}}{\|w\|_{L^2(\Gamma)}} = \sup_{\substack{w \in L^2(\Gamma) \\ \text{supp } w \subset B_r}} \frac{\langle [\partial_n v], \mathcal{J}_h w \rangle_{L^2(B_{(1+\varepsilon/2)r} \cap \Gamma)}}{\|w\|_{L^2(\Gamma)}}.$$

$$(4.50)$$

Auf Grund der Lokalität der Scott-Zhang-Projektion und der elementweisen Konstruktion von  $\mathcal{J}_h$  folgt für den Träger supp  $\mathcal{J}_h w \subset \overline{B_{(1+\varepsilon/2)r} \cap \Gamma}$ .

Sei  $\eta$  eine Abschneidefunktion gemäß Definition 2.16 mit  $D_1 = B_{(1+\varepsilon/2)r}$  und  $D_2 = B_{(1+\varepsilon)r}$  sowie  $\mathcal{L}: H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\mathbb{R}^d)$  der beschränkte, lineare Fortsetzungsoperator aus (2.4). Dann erhalten wir

$$\langle [\partial_{n}v], \mathcal{J}_{h}w \rangle_{L^{2}(B_{(1+\varepsilon/2)r}\cap\Gamma)} = \langle [\partial_{n}v], \gamma_{0}^{\operatorname{int}}\eta \mathcal{L}\mathcal{J}_{h}w \rangle_{L^{2}(B_{(1+\varepsilon/2)r}\cap\Gamma)}$$

$$= \int_{B_{(1+\varepsilon)r}} \nabla v \cdot \nabla (\eta \mathcal{L}\mathcal{J}_{h}w) dx$$

$$\leq \|\nabla v\|_{L^{2}(B_{(1+\varepsilon)r})} \|\nabla (\eta \mathcal{L}\mathcal{J}_{h}w)\|_{L^{2}(B_{(1+\varepsilon)r})}. \tag{4.51}$$

Die Produktregel sowie  $\eta \equiv 1$  auf  $B_r$  führen auf

$$\|\nabla(\eta \mathcal{L}\mathcal{J}_h w)\|_{L^2(B_{(1+\varepsilon)r})} \lesssim \frac{1}{\varepsilon r} \|\mathcal{L}\mathcal{J}_h w\|_{L^2(B_{(1+\varepsilon)r}\setminus B_r)} + \|\nabla \mathcal{L}\mathcal{J}_h w\|_{L^2(B_{(1+\varepsilon)r})}. \tag{4.52}$$

Die Stetigkeit des Fortsetzungsoperators  $\mathcal{L}: H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\mathbb{R}^d)$ , die inverse Abschätzung (2.12) aus Lemma 2.5 sowie  $B_{(1+\varepsilon)r} \subset S_{\sqrt{d}(1+\varepsilon)r}$  liefern

$$\|\nabla \mathcal{L} \mathcal{J}_h w\|_{L^2(B_{(1+\varepsilon)r})} \leq \|\nabla \mathcal{L} \mathcal{J}_h w\|_{L^2(S_{\sqrt{d}(1+\varepsilon)r})} \leq \|\nabla \mathcal{L} \mathcal{J}_h w\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

$$\lesssim \|\mathcal{J}_h w\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{h}} \|\mathcal{J}_h w\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (4.53)$$

Für den ersten Term in (4.52) verwenden wir Lemma 4.15, (ii) und dann Lemma 4.15, (i)

und erhalten mit (4.53)

$$\frac{1}{\varepsilon r} \| \mathcal{L} \mathcal{J}_h w \|_{L^2(B_{(1+\varepsilon)r} \setminus B_r)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon r} \sqrt{(1+\varepsilon)r}} \| \mathcal{L} \mathcal{J}_h w \|_{L^2(B_{(1+\varepsilon)r})} 
+ \frac{\sqrt{(1+\varepsilon)r}}{\sqrt{\varepsilon r}} \| \nabla \mathcal{L} \mathcal{J}_h w \|_{L^2(B_{(1+\varepsilon)r})} 
\lesssim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon r}} \| \mathcal{L} \mathcal{J}_h w \|_{L^2(\Gamma)} + \frac{\sqrt{(1+\varepsilon)r}}{\sqrt{\varepsilon r}} \| \nabla \mathcal{L} \mathcal{J}_h w \|_{L^2(S_{\sqrt{d}(1+\varepsilon)r})} 
\lesssim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon r}} \| \mathcal{L} \mathcal{J}_h w \|_{L^2(\Gamma)} + \frac{\sqrt{(1+\varepsilon)r}}{\sqrt{\varepsilon r} \sqrt{h}} \| \mathcal{J}_h w \|_{L^2(\Gamma)}.$$

Die Konstruktion von  $\mathcal{L}$  liefert  $\mathcal{L}\mathcal{J}_h w|_{\Gamma} = \mathcal{J}_h w$ , und (4.53) führt auf

$$\frac{1}{\varepsilon r} \|\mathcal{L}\mathcal{J}_h w\|_{L^2(B_{(1+\varepsilon)r}\setminus B_r)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon r}} \|\mathcal{J}_h w\|_{L^2(\Gamma)} + h^{-1/2} \sqrt{1+\varepsilon^{-1}} \|\mathcal{J}_h w\|_{L^2(\Gamma)}. \tag{4.54}$$

Schätzt man den zweiten Term in (4.52) abermals mit Hilfe von (4.53) ab, so erhält man - aus der Voraussetzung  $\varepsilon r \geq 4h$  folgt  $1/\sqrt{\varepsilon r} \lesssim h^{-1/2}$  - mit Hilfe der  $L^2(\Gamma)$ -Stabilität von  $\mathcal{J}_h$  aus Lemma 2.6 schließlich

$$\|\nabla(\eta \mathcal{L} \mathcal{J}_h w)\|_{L^2(B_{(1+\varepsilon)r})} \lesssim \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon r}} + \frac{1}{\sqrt{h}}\right) \|\mathcal{J}_h w\|_{L^2(\Gamma)} + h^{-1/2} \sqrt{1+\varepsilon^{-1}} \|\mathcal{J}_h w\|_{L^2(\Gamma)}$$

$$\lesssim h^{-1/2} \sqrt{1+\varepsilon^{-1}} \|\mathcal{J}_h w\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim h^{-1/2} \sqrt{1+\varepsilon^{-1}} \|w\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Schlussendlich beendet das Einsetzen dieser Ungleichung in (4.51) und nachfolgend in (4.50) den Beweis der Hilfsabschätzung (4.49).

Schritt 2: Die Abschätzung (4.48) wird aus der Hilfsabschätzung (4.49) und einem Überdeckungsargument gezeigt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $B_R = (0,R)^d$ . Wir setzen  $r = \delta R$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$  gegeben, sodass  $n = \lceil R/r \rceil$  und seien  $x_i, i = 1, \ldots, (n+1)^d$  Punkte eines regelmäßigen Gitters in der abgeschlossenen Box  $\overline{B_R}$  mit Abstand R/n. Für  $i = 1, \ldots, (n+1)^d$  betrachten wir Boxen  $B_i := x_i + (-r/2, r/2)^d$  sowie skalierte Boxen  $\widehat{B_i} := x_i + (-r,r)^d$ ,  $i = 1, \ldots, (n+1)^d$ . Die Boxen  $B_i, i = 1, \ldots, (n+1)^d$  überdecken  $B_{(1+\delta/2)R}$ , und die skalierten Boxen  $\widehat{B_i}, i = 1, \ldots, (n+1)^d$  sind in  $B_{(1+\delta)R}$  enthalten. Weiters haben die Boxen eine endliche Überschneidungseigenschaft, also die Anzahl der Boxen, die jeweils eine feste Box schneiden, ist beschränkt durch eine Konstante. Diese Konstante hängt nur von der Raumdimension d ab, da für den Abstand R/n und die Seitenlänge r folgt, dass  $r/(R/n) = (1/\delta)/\lceil 1/\delta \rceil \in [1/2,1]$  für den hier betrachteten Fall  $\delta \in (0,1)$ . Auf Grund der Voraussetzung  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{4}$  folgt, dass  $\frac{h}{r} = \frac{h}{\delta R} \leq \frac{1}{4}$ , und somit impliziert die Abschätzung (4.49) für jedes i

$$\|[\partial_n v]\|_{L^2(B_i \cap \Gamma)} \le Ch^{-1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\widehat{B}_i)}.$$

Die gewünschte Abschätzung (4.48) folgt nun nach Summation aus der Überdeckung- und endlichen Überschneidungseigenschaft der Boxen  $B_i$  und  $\widehat{B}_i$ .

Wir sind nun in der Lage, das zentrale Lemma dieses Abschnittes zu beweisen, ein diskretes inneres Regularitätsresultat für Funktionen in  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta)R},\Gamma_{\rho})$ .

**Lemma 4.17.** Seien  $\delta \in (0,1)$ ,  $R \in (0,2 \operatorname{diam}(\Omega))$  und  $B_R$ ,  $B_{(1+\delta)R}$  zwei konzentrische Boxen mit Seitenlängen R und  $(1+\delta)R$  gemäß Definition 2.10. Weiters gelte  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{16}$  und sei  $\Gamma_{\rho} \subset \Gamma$  von der Form (2.34). Dann existiert eine Konstante C > 0, die nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  abhängt, sodass für  $v \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta)R},\Gamma_{\rho})$  gilt

$$\|\nabla v\|_{L^{2}(B_{R})} \le C \frac{1+\delta}{\delta} \|\|v\|\|_{h,(1+\delta)R}. \tag{4.55}$$

Beweis. Der Beweis von (4.55) folgt in zwei Schritten. Wir zeigen zunächst die Hilfsabschätzung (4.56), das gewünschte Resultat (4.55) folgt dann durch zweimalige Anwendung der Hilfsabschätzung.

**Schritt 1:** Wir zeigen für  $0 < \varepsilon \le \delta$  mit  $\frac{h}{R} \le \frac{\varepsilon}{8}$  die Abschätzung

$$\|\nabla v\|_{L^{2}(B_{R})}^{2} \lesssim \frac{h}{\varepsilon R} \|\nabla v\|_{L^{2}(B_{(1+\varepsilon)R})}^{2} + \frac{1}{(\varepsilon R)^{2}} \|v\|_{L^{2}(B_{(1+\varepsilon)R})}^{2}. \tag{4.56}$$

Hierfür sei  $\eta$  eine Abschneidefunktion gemäß Definition 2.16 mit  $D_1 = B_R$  und  $D_2 = B_{(1+\varepsilon/4)R}$  sowie  $\widetilde{\eta}$  eine weitere Abschneidefunktion mit  $D_1 = B_{(1+\varepsilon/2)R}$  und  $D_2 = B_{(1+\varepsilon)R}$ . Da h der maximale Elementdurchmesser ist, impliziert  $8h \leq \varepsilon R$ , dass  $E \subset B_{(1+\varepsilon/2)R}$  für alle  $E \in \mathcal{E}_h$  mit  $E \cap \text{supp } \eta \neq \emptyset$ . Da v stückweise harmonisch ist, erhalten wir mit partieller Integration, dass

$$\|\nabla(\eta v)\|_{L^{2}(B_{(1+\varepsilon)R})}^{2} = \int_{B_{(1+\varepsilon)R}} \nabla(\eta v) \cdot \nabla(\eta v) dx$$

$$= \int_{B_{(1+\varepsilon)R}} \nabla v \cdot \nabla(\eta^{2}v) + v^{2} |\nabla \eta|^{2} dx$$

$$= \int_{\Gamma \cap B_{(1+\varepsilon)R}} \eta^{2} [\partial_{n}v] \gamma_{0}^{\text{int}} v ds_{x} + \int_{B_{(1+\varepsilon)R}} v^{2} |\nabla \eta|^{2} dx$$

$$= \int_{\Gamma} \eta^{2} [\partial_{n}v] \gamma_{0}^{\text{int}} v ds_{x} + \int_{B_{(1+\varepsilon)R}} v^{2} |\nabla \eta|^{2} dx, \qquad (4.57)$$

wobei im letzten Schritt die Trägereigenschaft supp  $\eta \subset \overline{B_{(1+\varepsilon/4)R}}$  verwendet wurde, um die auf  $\Gamma \cap B_{(1+\varepsilon)R}$  definierte Funktion  $\eta^2[\partial_n v]\gamma_0^{\rm int}v$  mit Null auf den ganzen Rand  $\Gamma$  fortzusetzen. Wir betrachten zunächst das Oberflächenintegral in (4.57). Mit der  $L^2(\Gamma)$ -Projektion  $\Pi_{\Gamma}^{L^2}$  auf  $S^{p,0}(\mathcal{E}_h)$  aus (2.17) erhalten wir aus der Definition des Raumes  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\varepsilon)R},\Gamma_\rho)$ , dass supp  $\Pi_{\Gamma}^{L^2}(\eta^2[\partial_n v]) \subset \overline{\Gamma_\rho \cap B_{(1+\varepsilon)R}}$ . Daher impliziert die Orthogonalität (4.47) von v, dass

$$\langle \eta^{2}[\partial_{n}v], \gamma_{0}^{\text{int}}v \rangle_{L^{2}(\Gamma)} = \langle \eta^{2}[\partial_{n}v] - \Pi_{\Gamma}^{L^{2}}(\eta^{2}[\partial_{n}v]), \gamma_{0}^{\text{int}}v \rangle_{L^{2}(\Gamma)}$$

$$= \langle \eta^{2}[\partial_{n}v] - \Pi_{\Gamma}^{L^{2}}(\eta^{2}[\partial_{n}v]), \gamma_{0}^{\text{int}}(\widetilde{\eta}^{2}v) \rangle_{L^{2}(\Gamma)}$$

$$= \langle \eta^{2}[\partial_{n}v] - \Pi_{\Gamma}^{L^{2}}(\eta^{2}[\partial_{n}v]), \gamma_{0}^{\text{int}}(\widetilde{\eta}^{2}v) - \Pi_{\Gamma}^{L^{2}}(\gamma_{0}^{\text{int}}\widetilde{\eta}^{2}v) \rangle_{L^{2}(\Gamma)}, \quad (4.58)$$

wobei die Abschneidefunktion  $\widetilde{\eta}$  eingefügt werden kann, da  $\widetilde{\eta} \equiv 1$  auf supp $(\eta^2[\partial_n v] - \Pi_{\Gamma}^{L^2}(\eta^2[\partial_n v])) \subset \overline{(B_{(1+\varepsilon/2)R} \setminus B_{R-2h}) \cap \Gamma_{\rho}}$ . Die Approximationseigenschaft der  $L^2$ -Projektion liefert mit (2.35) aus Lemma 2.18 (für  $p \geq 1$ ) und der inversen Ungleichung (2.14)

sowie der Voraussetzung  $\frac{h}{\varepsilon R} \leq \frac{1}{8}$ , dass

$$\begin{split} \|\eta^2[\partial_n v] - \Pi_{\Gamma}^{L^2}(\eta^2[\partial_n v])\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\lesssim h^{2(p+1)} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left|\eta^2[\partial_n v]\right|_{H^{p+1}(E)}^2 \\ &\lesssim h^{2(p+1)} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{(\varepsilon R)^2} \left|\eta[\partial_n v]\right|_{H^p(E)}^2 + \frac{1}{(\varepsilon R)^4} \left|[\partial_n v]\right|_{H^{p-1}(E)}^2 \\ &\lesssim \frac{h^2}{(\varepsilon R)^2} \|[\partial_n v]\|_{L^2((B_{(1+\varepsilon/2)R}) \cap \Gamma_\rho)}^2. \end{split}$$

Im Fall p=0 tritt der Term  $(\varepsilon R)^{-4} \| [\partial_n v] \|_{H^{p-1}(E)}^2$  nicht auf, und es gilt das selbe Resultat. Die Approximationseigenschaft  $\| \gamma_0^{\text{int}}(\widetilde{\eta}^2 v) - \Pi_{\Gamma}^{L^2}(\gamma_0^{\text{int}}\widetilde{\eta}^2 v) \|_{L^2(\Gamma)} \lesssim h^{1/2} \| \gamma_0^{\text{int}}(\widetilde{\eta}^2 v) \|_{H^{1/2}(\Gamma)}$  und die Abschätzung (4.48) aus Lemma 4.16 sowie die Spurungleichung (2.2) für  $\Gamma$  liefern

$$\begin{aligned} \left| \langle \eta^{2}[\partial_{n}v], \gamma_{0}^{\text{int}}v \rangle_{L^{2}(\Gamma)} \right| &\lesssim \frac{h}{\varepsilon R} \| [\partial_{n}v] \|_{L^{2}((B_{(1+\varepsilon/2)R})\cap\Gamma_{\rho})} h^{1/2} \| \gamma_{0}^{\text{int}}(\widetilde{\eta}^{2}v) \|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\lesssim \frac{h}{\varepsilon R} \| \nabla v \|_{L^{2}(B_{(1+\varepsilon)R})} \| \gamma_{0}^{\text{int}}(\widetilde{\eta}^{2}v) \|_{H^{1/2}(\Gamma)} &\lesssim \frac{h}{\varepsilon R} \| \nabla v \|_{L^{2}(B_{(1+\varepsilon)R})} \| \widetilde{\eta}^{2}v \|_{H^{1}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Die Eigenschaften der Abschneidefunktion  $\widetilde{\eta}$  implizieren

$$\|\widetilde{\eta}^2 v\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(B_{(1+\varepsilon)R})} + \frac{1}{\varepsilon R} \|v\|_{L^2(B_{(1+\varepsilon)R})},$$

und Einsetzen in (4.59) und in weiterer Folge in (4.57) liefert

$$\begin{split} \|\nabla(\eta v)\|_{L^{2}(B_{(1+\varepsilon)R})}^{2} &\lesssim \frac{h}{\varepsilon R} \|\nabla v\|_{L^{2}(B_{(1+\varepsilon)R})}^{2} + \frac{h}{(\varepsilon R)^{2}} \|\nabla v\|_{L^{2}(B_{(1+\varepsilon)R})} \|v\|_{L^{2}(B_{(1+\varepsilon)R})} \\ &+ \frac{1}{(\varepsilon R)^{2}} \|v\|_{L^{2}(B_{(1+\varepsilon)R})}^{2} \\ &\lesssim \frac{h}{\varepsilon R} \|\nabla v\|_{L^{2}(B_{(1+\varepsilon)R})}^{2} + \frac{1}{(\varepsilon R)^{2}} \|v\|_{L^{2}(B_{(1+\varepsilon)R})}^{2}, \end{split}$$

wobei der letzte Schritt mittels Young'scher Ungleichung und  $h/(\varepsilon R) \leq 1$  folgt. Somit ist die Hilfsabschätzung (4.56) gezeigt.

Schritt 2: Beginnend bei (4.56) mit  $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$  verwenden wir (4.56) abermals mit  $\varepsilon = \frac{\delta}{2+\delta}$  und  $\widetilde{R} = (1+\delta/2)R$ . Da  $\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\left(1+\frac{\delta}{2+\delta}\right) = 1+\delta$  und  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{16}$  impliziert, dass  $\frac{h}{\widetilde{R}} \leq \frac{\varepsilon}{8}$ , erhalten wir schließlich

$$\begin{split} \|\nabla v\|_{L^{2}(B_{R})}^{2} &\lesssim \frac{h}{\delta R} \|\nabla v\|_{L^{2}(B_{(1+\delta/2)R})}^{2} + \frac{1}{(\delta R)^{2}} \|v\|_{L^{2}(B_{(1+\delta/2)R})}^{2} \\ &\lesssim \left(\frac{h}{\delta R}\right)^{2} \|\nabla v\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R})}^{2} + \left(\frac{h}{(\delta R)^{3}} + \frac{1}{(\delta R)^{2}}\right) \|v\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R})}^{2}, \end{split}$$

und mit  $h/(\delta R) \leq 1$  folgt das gewünschte Resultat.

### **4.4.4** Niedrigdimensionale Approximation in $\mathcal{H}_{h,0}(D,\Gamma_{\rho})$

Mit Hilfe des diskreten inneren Regularitätsresultates aus Abschnitt 4.4.3 wird in diesem Kapitel eine niedrigdimensionale Approximation an eine Funktion  $v \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R}, \Gamma_{\rho})$  mit geeigneten Approximationseigenschaften in Lemma 4.18 konstruiert. Iteration auf konzentrischen Boxen liefert ähnlich zu den vorherigen Abschnitten exponentielle Konvergenz. Schlussendlich erhält man mittels Sprungbedingungen und Lemma 4.16 daraus eine Approximation an die Galerkin-Lösung, was das Hauptresultat, Proposition 4.12, zeigt.

Lemma 4.18. Seien  $\delta \in (0,1)$  und  $R \in (0,2 \operatorname{diam}(\Omega))$  so gewählt, dass  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{16}$ , und  $B_R$ ,  $B_{(1+\delta)R}$ ,  $B_{(1+2\delta)R}$  konzentrische Boxen gemäß Definition 2.10. Sei  $\Gamma_{\rho} \subset \Gamma$  von der Form (2.34) und  $v \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R},\Gamma_{\rho})$ . Sei  $\mathcal{K}_H$  eine (unendliche)  $\gamma$ -formreguläre Triangulierung von  $\mathbb{R}^d$  mit Gitterweite H, für die  $\frac{H}{R} \leq \frac{\delta}{4}$  gilt. Sei  $I_H : H^1(\mathbb{R}^d) \to S^{1,1}(\mathcal{K}_H)$  die Scott-Zhang-Projektion aus (2.19). Dann existiert eine Konstante  $C_{\mathrm{app}} > 0$ , die nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  abhängt, sodass

i. 
$$(v - \Pi_{h,R}I_Hv)|_{B_R} \in \mathcal{H}_{h,0}(B_R, \Gamma_\rho);$$

ii. dim 
$$W \leq C_{\text{app}} \left( \frac{(1+2\delta)R}{H} \right)^d$$
, wobei  $W := \prod_{h,R} I_H \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R}, \Gamma_\rho)$ ;

iii. 
$$||v - \Pi_{h,R}I_Hv||_{h,R} \le C_{\text{app}} \frac{1+2\delta}{\delta} \left(\frac{h}{R} + \frac{H}{R}\right) ||v||_{h,(1+2\delta)R}$$
.

Beweis. Da wegen  $v \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R},\Gamma_{\rho})$  auch  $v|_{B_R} \in \mathcal{H}_{h,0}(B_R,\Gamma_{\rho})$  folgt, gilt  $\Pi_{h,R}(v|_{B_R}) = v|_{B_R}$ , was (i) zeigt. Die Aussage (ii) folgt aus

$$\dim I_H(\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R},\Gamma_\rho)) \lesssim ((1+2\delta)R/H)^d.$$

Die Annahme  $\frac{H}{R} \leq \frac{\delta}{4}$  liefert  $\bigcup \{K \in \mathcal{K}_H : K \cap B_R \neq \emptyset\} \subset B_{(1+\delta)R}$ . Somit führen die Lokalität und Approximationseigenschaft (2.21) der Scott-Zhang-Projektion  $I_H$  auf

$$\frac{1}{H} \|v - I_H v\|_{L^2(B_R)} + \|\nabla(v - I_H v)\|_{L^2(B_R)} \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(B_{(1+\delta)R})}.$$

Wir wenden die Caccioppoli-artige Ungleichung aus Lemma 4.17 mit  $\widetilde{R}=(1+\delta)R$  und  $\widetilde{\delta}=\frac{\delta}{1+\delta}$  an. Hierbei ist  $(1+\widetilde{\delta})\widetilde{R}=(1+2\delta)R$ . Weiters gilt, dass  $16h\leq \delta R=\widetilde{\delta}\widetilde{R}$ , womit die Voraussetzung  $\frac{h}{\widetilde{R}}\leq \frac{\widetilde{\delta}}{16}$  erfüllt ist, und wir erhalten

$$\begin{split} \| v - \Pi_{h,R} I_H v \|_{h,R}^2 &= \| \| \Pi_{h,R} \left( v - I_H v \right) \|_{h,R}^2 \leq \| v - I_H v \|_{h,R}^2 \\ &= \left( \frac{h}{R} \right)^2 \| \nabla (v - I_H v) \|_{L^2(B_R)}^2 + \frac{1}{R^2} \| v - I_H v \|_{L^2(B_R)}^2 \\ &\lesssim \frac{h^2}{R^2} \| \nabla v \|_{L^2(B_{(1+\delta)R})}^2 + \frac{H^2}{R^2} \| \nabla v \|_{L^2(B_{(1+\delta)R})}^2 \\ &\lesssim \left( \frac{1+2\delta}{\delta} \left( \frac{h}{R} + \frac{H}{R} \right) \right)^2 \| v \|_{h,(1+2\delta)R}^2 \,, \end{split}$$

was den Beweis von (iii) beendet.

Ähnlich zu Lemma 4.4 kann auf Grund der Eigenschaft (i) von Lemma 4.18 das Approximationsresultat (iii) auf konzentrischen Boxen iteriert werden, was auf exponentielle Konvergenz führt.

**Lemma 4.19.** Sei  $C_{\text{app}}$  die Konstante aus Lemma 4.18 und  $q, \kappa \in (0, 1), R \in (0, 2 \operatorname{diam}(\Omega)), k \in \mathbb{N}$  sowie  $\Gamma_{\rho} \subset \Gamma$  von der Form (2.34). Weiters sei angenommen, dass

$$\frac{h}{R} \le \frac{\kappa q}{64k \max\{C_{\text{app}}, 1\}}.\tag{4.60}$$

Dann existiert ein endlich dimensionaler Unterraum  $\widetilde{W}_k$  von  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\kappa)R},\Gamma_\rho)$  mit Dimension

$$\dim \widetilde{W}_k \le C_{\dim} \left( \frac{1 + \kappa^{-1}}{q} \right)^d k^{d+1},$$

sodass für alle  $v \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\kappa)R}, \Gamma_{\rho})$  gilt

$$\min_{\widetilde{w} \in \widetilde{W}_{k}} \sqrt{h} \| [\partial_{n} v] - [\partial_{n} \widetilde{w}] \|_{L^{2}(B_{R} \cap \Gamma_{\rho})} \leq \min_{\widetilde{w} \in \widetilde{W}_{k}} \sqrt{h} \| [\partial_{n} v] - [\partial_{n} \widetilde{w}] \|_{L^{2}(B_{R} \cap \Gamma)}$$

$$\leq C_{\text{low}} \frac{R}{h} \min_{\widetilde{w} \in \widetilde{W}_{k}} \| v - \widetilde{w} \|_{h,(1+\kappa/2)R} \leq C_{\text{low}} \frac{R}{h} q^{k} \| v \|_{h,(1+\kappa)R}.$$

$$(4.61)$$

Die Konstanten  $C_{\text{dim}}$ ,  $C_{\text{low}} > 0$  hängen nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität von  $\mathcal{E}_h$  ab.

Beweis. Seien  $B_R$  und  $B_{(1+\delta_j)R}$  mit  $\delta_j:=\kappa(1-\frac{j}{2k})$  für  $j=0,\ldots,k$  konzentrische Boxen. Es gilt  $\kappa=\delta_0>\delta_1>\cdots>\delta_k=\frac{\kappa}{2}$ . Im Folgenden wird das Approximationsresultat aus Lemma 4.18 auf den Boxen  $B_{(1+\delta_j)R}$  iteriert. Wir wählen  $H=\frac{\kappa qR}{64k\max\{C_{\mathrm{app}},1\}}$ , womit  $h\leq H$  gilt, und wenden Lemma 4.18 an mit  $\widetilde{R}_j=(1+\delta_j)R$  und  $\widetilde{\delta}_j=\frac{\kappa}{4k(1+\delta_j)}<\frac{1}{4}$ . Wegen Voraussetzung (4.60) gilt  $\frac{h}{\widetilde{R}_j}\leq\frac{\widetilde{\delta}_j}{16}$ . Die Tatsache  $\delta_{j-1}=\delta_j+\frac{\kappa}{2k}$  liefert, dass  $(1+\delta_{j-1})R=(1+2\widetilde{\delta}_j)\widetilde{R}_j$ , und unsere Wahl von H impliziert  $\frac{H}{\widetilde{R}_j}\leq\frac{\widetilde{\delta}_j}{4}$ . Daher liefert Lemma 4.18 für j=1 eine Approximation  $w_1$  in einem Unterraum  $w_1$  von  $w_1$ 0 mit Dimension dim  $w_1$ 1 der Eigenschaft

$$\begin{split} \|v - w_1\|_{h,(1+\delta_1)R} &= \|v - w_1\|_{h,\widetilde{R}_1} \le C_{\text{app}} \frac{1 + 2\widetilde{\delta}_1}{\widetilde{\delta}_1} \left(\frac{h}{\widetilde{R}_1} + \frac{H}{\widetilde{R}_1}\right) \|v\|_{h,(1+2\widetilde{\delta}_1)\widetilde{R}_1} \\ &\le 2C_{\text{app}} \frac{H}{(1+\delta_1)R} \frac{1 + 2\widetilde{\delta}_1}{\widetilde{\delta}_1} \|v\|_{h,(1+\delta_0)R} \\ &= 8C_{\text{app}} \frac{kH}{\kappa R} (1 + 2\widetilde{\delta}_1) \|v\|_{h,(1+\kappa)R} \le q \|v\|_{h,(1+\kappa)R} \,. \end{split}$$

Da  $v|_{B_{(1+\delta_1)R}}-w_1\in\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta_1)R},\Gamma_\rho)$ , kann Lemma 4.18 auf  $v-w_1$  angewendet werden und liefert eine Approximation  $w_2$  an  $v-w_1$  in einem Unterraum  $W_2\subset\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta_2)R},\Gamma_\rho)$  mit dim  $W_2\leq C_{\rm app}\left(\frac{(1+\kappa)R}{H}\right)^d$ . Mit der selben Argumentation wie bei j=1 folgt

$$|||v - w_1 - w_2||_{h,(1+\delta_2)R} \le q |||v - w_1||_{h,(1+\delta_1)R} \le q^2 |||v||_{h,(1+\kappa)R}.$$

Führt man diesen Prozess (k-2)-mal weiter, so erhält man eine Approximation  $\widetilde{w} := \sum_{j=1}^k w_i$  im Raum  $\widetilde{W}_k := \sum_{j=1}^k W_j$ , dessen Dimension mit dim  $\widetilde{W}_k \le C_{\rm app} k \left(\frac{(1+\kappa)R}{H}\right)^d \le C_{\rm dim} ((1+\kappa^{-1})q^{-1})^d k^{d+1}$  beschränkt ist und der Approximationseigenschaft

$$|\!|\!|\!| v - \widetilde{w} |\!|\!|\!|_{h,(1+\kappa/2)R} = |\!|\!|\!| v - \widetilde{w} |\!|\!|\!|_{h,(1+\delta_k)R} \leq q^k \, |\!|\!|\!| v |\!|\!|\!|_{h,(1+\kappa)R} \, .$$

Da wegen (4.60) die Voraussetzung  $h/R \le \kappa/4$  erfüllt ist, können wir Lemma 4.16 anwenden, um schließlich die Abschätzung

$$\sqrt{h} \| [\partial_n v] - [\partial_n \widetilde{w}] \|_{L^2(B_R \cap \Gamma)} \le C \| \nabla (v - \widetilde{w}) \|_{L^2(B_{(1+\kappa/2)R})} \le C \frac{R}{h} \| v - \widetilde{w} \|_{h, (1+\kappa/2)R}$$

zu erhalten, was das Lemma beweist.

Wir sind nun in der Lage, das Hauptresultat in diesem Abschnitt, Proposition 4.12, zu zeigen.

Beweis von Proposition 4.12. Wir wählen  $\kappa = \frac{1}{1+\eta}$ , womit  $\operatorname{dist}(B_{(1+\kappa)R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) > 0$  aus der Definition der Bounding-Boxen (Definition 2.7) sowie der Zulässigkeitsbedingung (2.24) folgt. Wir werden nun den Raum  $\widehat{W}_k$  definieren, wofür wir zwei Fälle unterscheiden.

Fall 1: Die Bedingung (4.60) ist nicht erfüllt, es gilt also  $\frac{h}{R_{\tau}} > \frac{\kappa q}{64k \max\{C_{\text{add}}, 1\}}$ .

Dann setzen wir  $\widehat{W}_k := \big\{\widehat{w}|_{B_{R_\tau} \cap \Gamma} : \widehat{w} \in S^{p,0}(\mathcal{E}_h)\big\}$ , und das Minimum in (4.44) ist klarerweise gleich Null. Die Wahl von  $\kappa$  sowie  $\frac{h}{R_\tau} > \frac{\kappa q}{64k \max\{C_{\mathrm{app}}, 1\}}$  liefern für die Dimension von  $\widehat{W}_k$ , dass

$$\dim \widehat{W}_k \lesssim \left(\frac{R_\tau}{h}\right)^{d-1} \lesssim \left(\frac{64k \max\{C_{\text{app}}, 1\}}{\kappa q}\right)^{d-1} \simeq \left((1+\eta)q^{-1}k\right)^{d-1}$$

$$\lesssim (2+\eta)^d q^{-d}k^{d+1}.$$

Fall 2: Die Bedingung (4.60) ist erfüllt mit  $R = R_{\tau}$ .

Das Potential  $u = \widetilde{V}\phi_h$  mit der Galerkin-Lösung  $\phi_h \in S^{p,0}(\mathcal{E}_h)$  aus (3.39) erfüllt  $u \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\kappa)R_{\tau}},\Gamma)$ , womit Lemma 4.19 auf u angewendet werden kann. Mit dem Raum  $\widetilde{W}_k$  aus Lemma 4.19 setzen wir nun  $\widehat{W}_k := \{[\partial_n \widetilde{w}] : \widetilde{w} \in \widetilde{W}_k\}$ . Die Sprungbedingungen des Einfachschichtpotentials aus Satz 3.11 führen somit auf

$$\min_{\widehat{w} \in \widehat{W}_k} \|\phi_h - \widehat{w}\|_{L^2(B_{R_\tau} \cap \Gamma)} = \min_{\widehat{w} \in \widehat{W}_k} \|[\partial_n u] - \widehat{w}\|_{L^2(B_{R_\tau} \cap \Gamma)} \lesssim \frac{R_\tau}{h^{3/2}} q^k \|\widetilde{V}\phi_h\|_{h,(1+\kappa)R_\tau}.$$
(4.62)

Die Elliptizität des Einfachschichtoperators (3.34), die diskrete variationelle Randintegralgleichung (3.39) sowie die inverse Ungleichung  $\sqrt{h} \|\phi_h\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim \|\phi_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$  aus (2.13) liefern

$$\|\phi_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \lesssim \langle V\phi_h, \phi_h \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle f, \phi_h \rangle_{L^2(\Gamma)} = \left\langle \Pi_{\Gamma}^{L^2} f, \phi_h \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \lesssim \|\Pi_{\Gamma}^{L^2} f\|_{L^2(\Gamma)} \|\phi_h\|_{L^2(\Gamma)}$$
$$\lesssim h^{-1/2} \|\Pi_{\Gamma}^{L^2} f\|_{L^2(\Gamma)} \|\phi_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Weiters folgt aus der Beschränktheit des Einfachschichtpotentials  $\widetilde{V}: H^{-1/2}(\Gamma) \to H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$  aus Proposition 3.11 sowie  $\frac{h}{R_r} < 1$ , dass

$$\begin{split} \left\| \widetilde{V} \phi_h \right\|_{h,(1+\kappa)R_{\tau}} &\leq 2 \left( 1 + \frac{1}{R_{\tau}} \right) \left\| \widetilde{V} \phi_h \right\|_{H^1(B_{2R_{\tau}})} \lesssim \left( 1 + \frac{1}{R_{\tau}} \right) \|\phi_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\lesssim \left( 1 + \frac{1}{R_{\tau}} \right) h^{-1/2} \left\| \Pi_{\Gamma}^{L^2} f \right\|_{L^2(\Gamma)}. \end{split}$$

Einsetzen in (4.62) führt mit der Annahme  $R_{\tau} \leq 2 \operatorname{diam}(\Omega)$  auf

$$\min_{\widehat{w} \in \widehat{W}_{k}} \|\phi_{h} - \widehat{w}\|_{L^{2}(B_{R_{\tau}} \cap \Gamma)} \lesssim \frac{R_{\tau}}{h^{3/2}} q^{k} \| \widetilde{V} \phi_{h} \|_{h, (1+\kappa)R_{\tau}} \lesssim (R_{\tau} + 1)h^{-2} q^{k} \| \Pi_{\Gamma}^{L^{2}} f \|_{L^{2}(\Gamma)} 
\lesssim h^{-2} q^{k} \| \Pi_{\Gamma}^{L^{2}} f \|_{L^{2}(\Gamma)},$$

und die Dimension von  $\widehat{W}_k$  ist beschränkt durch

$$\dim \widehat{W}_k \le C_{\dim} \left( \frac{1 + \kappa^{-1}}{q} \right)^d k^{d+1} = C_{\dim} (2 + \eta)^d q^{-d} k^{d+1}.$$

Das beendet den Beweis der ersten Ungleichung in (4.44). Die zweite Ungleichung in (4.44) folgt direkt aus der  $L^2(\Gamma)$ -Stabilität der  $L^2(\Gamma)$ -Orthogonalprojektion.

### 4.5 Die hypersinguläre Integralgleichung

In diesem Kapitel wird eine niedrigdimensionale Approximation an die Galerkin-Lösung der hypersingulären Integralgleichung aus (3.45) mit Hilfe der in Abschnitt 4.1 beschriebenen Schritte konstruiert. Das Hauptresultat ist in folgender Proposition zusammengefasst.

**Proposition 4.20.** Sei  $\tau \times \sigma$  ein Cluster-Paar und  $B_{R_{\tau}}$ ,  $B_{R_{\sigma}}$  zugehörige Bounding-Boxen gemäß Definition 2.7, wobei  $R_{\tau} \leq 2 \operatorname{diam}(\Omega)$ . Sei  $q \in (0,1)$  und für fixes  $\eta > 0$  die Zulässigkeitsbedingung  $\eta \operatorname{dist}(B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) \geq \operatorname{diam}(B_{R_{\tau}})$  erfüllt. Dann existiert für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ein Unterraum  $\widehat{W}_k \subseteq S^{p,1}(\mathcal{E}_h)$  mit  $\operatorname{dim} \widehat{W}_k \leq C_{\operatorname{dim}}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ , sodass für beliebiges  $f \in L^2(\Gamma)$  mit supp  $f \subset \overline{B_{R_{\sigma}} \cap \Gamma}$  für die Lösung  $\phi_h$  von (3.45) folgt

$$\min_{\widehat{w} \in \widehat{W}_k} \|\phi_h - \widehat{w}\|_{L^2(B_{R_\tau} \cap \Gamma)} \le C_{\text{box}} h^{-1/2} q^k \|\Pi_{\Gamma}^{L^2} f\|_{L^2(\Gamma)} \le C_{\text{box}} h^{-1/2} q^k \|f\|_{L^2(\Gamma)}.$$
(4.63)

Die Konstanten  $C_{\text{dim}}$ ,  $C_{\text{box}} > 0$  hängen nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  ab.

#### 4.5.1 Orthogonalität

Sei  $u = \widetilde{K}\phi_h$  das Doppelschichtpotential, dann gilt  $-\gamma_1^{\rm int}u = W\phi_h$ . Für rechte Seiten f mit supp  $f \subset \overline{B_{R_\sigma} \cap \Gamma}$  liefert die Gleichung (3.45) mit der Zulässigkeitsbedingung und einem kleinen  $\kappa > 0$ , dass

$$-\left\langle \gamma_1^{\text{int}} u, \psi_h \right\rangle_{L^2(\Gamma)} + \lambda_h \left\langle \psi_h, 1 \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = 0 \quad \forall \psi_h \in S^{p,1}(\mathcal{E}_h) \text{ mit supp } \psi_h \subset \overline{B_{(1+\kappa)R_\tau} \cap \Gamma}. \tag{4.64}$$

Also ist die Normalenableitung des Doppelschichtpotentials auf  $B_{(1+\kappa)R_{\tau}} \cap \Gamma$  orthogonal - bis auf einen eindimensionalen Term - zu stetigen stückweisen Polynomen von Grad p.

### **4.5.2** Die Approximationsräume $\mathcal{H}_h(D)$ und $\mathcal{H}_{h,0}(D,\Gamma_\rho,\mu)$

Wir werden wie in Abschnitt 4.4.2 einen geeigneten Approximationsraum definieren, der gewisse Eigenschaften des Doppelschichtpotentials widerspiegelt. Um die Approximationsräume formal korrekt zu definieren, müssen Spuroperator und Konormalenableitung lokal definiert werden.

**Definition 4.21.** Sei  $D \subset \mathbb{R}^d$  eine offene Menge. Die Einschränkungen des inneren und äußeren Spuroperators  $\gamma_0^{int}$ ,  $\gamma_0^{ext}$  auf  $D \cap \Gamma$  sind Operatoren  $\gamma_0^{int}|_{D \cap \Gamma}: H^1(D^-) \to L^2_{loc}(D \cap \Gamma)$  und  $\gamma_0^{ext}|_{D \cap \Gamma}: H^1(D^+) \to L^2_{loc}(D \cap \Gamma)$ , die folgendermaßen definiert werden: Für jede relativ kompakte Menge  $U \subset D \cap \Gamma$  wählt man eine Abschneidefunktion  $\eta \in C_0^{\infty}(D)$  mit  $\eta \equiv 1$  in U. Da  $u \in H^1(D^-)$  impliziert, dass  $\eta u \in H^1(\Omega)$ , haben wir  $\gamma_0^{int}(\eta u) \in H^{1/2}(\Gamma)$  und daher ist die Einschränkung auf U wohldefiniert und eine Funktion in  $L^2(U)$ . Klarerweise hängen die Werte auf U nicht von der Wahl der Abschneidefunktion  $\eta$  ab. Der äußere Spuroperator  $\gamma_0^{ext}|_{D \cap \Gamma}$  ist in analoger Weise definiert.

Um die Einschränkung der inneren und äußeren Konormalenableitung einer stückweise harmonischen Funktion  $v \in H^1(D \setminus \Gamma)$  zu definieren, sei  $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$  eine Abschneidefunktion mit supp  $\eta \subset D$  und  $\eta \equiv 1$  auf einer kompakten Menge  $U \subset D$ . Dann ist die innere Konormalenableitung  $\gamma_1^{\text{int}}(\eta v)$  wohldefiniert als Funktional in  $H^{-1/2}(\Gamma)$ , und wir definieren  $\gamma_1^{\text{int}}v|_U$  als das Funktional

$$\langle \gamma_1^{\text{int}} v |_U, \varphi \rangle = \langle \gamma_1^{\text{int}} (\eta v), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \text{ supp } \varphi \subset U.$$

Diese Definition hängt abermals nicht an der Wahl der Abschneidefunktion  $\eta$  solange  $\eta \equiv 1$  auf U gilt. In analoger Weise lässt sich die Einschränkung der äußeren Konormalenableitung definieren.

Eine lokale Definition für den Sprung der Normalenableitung findet sich in Definition 4.13. Mit diesen Beobachtungen können wir nun den Approximationsraum  $\mathcal{H}_h(D) \subset H^1(D \setminus \Gamma)$  definieren als

$$\mathcal{H}_h(D) := \{ v \in H^1(D \setminus \Gamma) : v \text{ ist stückweise harmonisch}, [\partial_n v]|_{D \cap \Gamma} = 0, \\ \exists \widetilde{v} \in S^{p,1}(\mathcal{E}_h) \text{ s.d. } [\gamma_0 v]|_{D \cap \Gamma} = \widetilde{v}|_{D \cap \Gamma} \}.$$

Das Potential  $u = K\phi_h$  erfüllt  $u \in \mathcal{H}_h(D)$  für jedes Gebiet D; wir werden nachfolgend D als eine Bounding-Box  $B_R$  mit Seitenlänge R > 0 wählen.

Das nachfolgende Lemma zeigt, dass für stückweise harmonische Funktionen die Einschränkung der Normalenableitung eine Funktion in  $L^2$  auf einer kleineren Box ist, und liefert eine Abschätzung der  $L^2$ -Norm.

**Lemma 4.22.** Seien  $\delta \in (0,1)$  und  $R \in (0,2 \operatorname{diam}(\Omega))$  so gewählt, dass  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{4}$ . Seien  $B_R$ ,  $B_{(1+\delta)R}$  zwei konzentrische Boxen gemäß Definition 2.10 mit Seitenlängen R und  $(1+\delta)R$ . Dann existiert eine Konstante C > 0, die nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  abhängt, sodass für alle  $v \in \mathcal{H}_h(B_{(1+\delta)R})$  gilt

$$\|\gamma_1^{\text{int}}v\|_{L^2(B_R\cap\Gamma)} \le Ch^{-1/2}\left(\|\nabla v\|_{L^2(B_{(1+\delta)R}\setminus\Gamma)} + \frac{1}{\delta R}\|v\|_{L^2(B_{(1+\delta)R}\setminus\Gamma)}\right). \tag{4.65}$$

Beweis. Sei  $\eta$  eine Abschneidefunktion gemäß Definition 2.16 mit  $D_1 = B_{(1+\delta/2)R}$  und  $D_2 = B_{(1+\delta)R}$ . Wie in Bemerkung 2.17 beschrieben sowie wegen der Voraussetzung  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{4}$ , können wir  $\gamma_0^{\text{int}} \eta = \gamma_0^{\text{ext}} \eta \in S^{1,1}(\mathcal{E}_h)$  annehmen. Sei  $z := \widetilde{K}(\gamma_0^{\text{int}} \eta[\gamma_0 v])$ . Mit den Sprungbedingungen

$$[\partial_n z] = 0, \quad [\gamma_0 z] = \gamma_0^{\text{int}} \eta [\gamma_0 v]$$

und da v stückweise harmonisch ist, erhalten wir, dass die Funktion v-z harmonisch auf der Box  $B_{(1+\delta/2)R}$  ist. Also ist jede Komponente von  $w:=\nabla(v-z)$  ebenfalls harmonisch auf  $B_{(1+\delta/2)R}$  und erfüllt somit eine klassische Caccioppoli-Ungleichung

$$\|\nabla w\|_{L^2(B_{(1+\delta/4)R}\backslash\Gamma)} \lesssim \frac{1}{\delta R} \|w\|_{L^2(B_{(1+\delta/2)R}\backslash\Gamma)}. \tag{4.66}$$

Ein kurzer Beweis dieser Ungleichung kann beispielsweise in [BH03] gefunden werden.

Wir benötigen eine weitere Abschneidefunktion  $\widetilde{\eta}$  gemäß Definition 2.16 mit  $D_1 = B_R$  und  $D_2 = B_{(1+\delta/4)R}$ . Die multiplikative Spurabschätzung aus (2.3) liefert gemeinsam mit (4.66) und  $\delta R \leq 2 \operatorname{diam}(\Omega)$  auf Grund der Annahmen an  $\delta, R$ , dass

$$\begin{split} \left\| \gamma_0^{\text{int}}(\widetilde{\eta} w) \right\|_{L^2(B_R \cap \Gamma)}^2 &\lesssim \|\widetilde{\eta} w\|_{L^2(B_{(1+\delta/4)R} \setminus \Gamma)}^2 + \|\widetilde{\eta} w\|_{L^2(B_{(1+\delta/4)R} \setminus \Gamma)} \|\nabla(\widetilde{\eta} w)\|_{L^2(B_{(1+\delta/4)R} \setminus \Gamma)} \\ &\lesssim \|\widetilde{\eta} w\|_{L^2(B_{(1+\delta/4)R} \setminus \Gamma)}^2 \\ &+ \|\widetilde{\eta} w\|_{L^2(B_{(1+\delta/4)R} \setminus \Gamma)} \left( \frac{1}{\delta R} \|w\|_{L^2(B_{(1+\delta/4)R} \setminus \Gamma)} + \|\nabla w\|_{L^2(B_{(1+\delta/4)R} \setminus \Gamma)} \right) \\ &\lesssim \frac{1}{\delta R} \|w\|_{L^2(B_{(1+\delta/2)R} \setminus \Gamma)}^2 \,. \end{split}$$

Wegen  $\gamma_1^{\rm int}z=\gamma_1^{\rm int}\widetilde{K}(\gamma_0^{\rm int}\eta[\gamma_0v])=-W(\gamma_0^{\rm int}\eta[\gamma_0v])$  kann daher die innere Konormalenableitung von v abgeschätzt werden durch

$$\begin{split} \big\| \gamma_1^{\text{int}} v \big\|_{L^2(B_R \cap \Gamma)} & \leq & \| w \cdot n \|_{L^2(B_R \cap \Gamma)} + \big\| \gamma_1^{\text{int}} z \big\|_{L^2(B_R \cap \Gamma)} \\ & \lesssim & \frac{1}{\sqrt{\delta R}} \, \| w \|_{L^2(B_{(1+\delta/2)R} \setminus \Gamma)} + \big\| W(\gamma_0^{\text{int}} \eta[\gamma_0 v]) \big\|_{L^2(B_R \cap \Gamma)} \,. \end{split}$$

Aus der Stetigkeit des hypersingulären Integraloperators von  $H^1(\Gamma)$  nach  $L^2(\Gamma)$  aus Proposition 3.11 sowie der inversen Ungleichung (2.15) -  $(\gamma_0^{\text{int}}\eta)[\gamma_0 v]$  ist ein stückweises Polynom in  $S^{p+1,1}(\mathcal{E}_h)$  - folgt

$$\begin{split} \left\| \gamma_{1}^{\text{int}} v \right\|_{L^{2}(B_{R} \cap \Gamma)} & \lesssim & \frac{1}{\sqrt{\delta R}} \left\| w \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta/2)R} \setminus \Gamma)} + \left\| (\gamma_{0}^{\text{int}} \eta) [\gamma_{0} v] \right\|_{H^{1}(\Gamma)} \\ & \lesssim & \frac{1}{\sqrt{\delta R}} \left( \| \nabla v \|_{L^{2}(B_{(1+\delta/2)R} \setminus \Gamma)} + \| \nabla z \|_{L^{2}(B_{(1+\delta/2)R} \setminus \Gamma)} \right) \\ & & + h^{-1/2} \left\| (\gamma_{0}^{\text{int}} \eta) [\gamma_{0} v] \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \end{split}$$

Die Stetigkeit des Doppelschichtpotentials von  $H^{1/2}(\Gamma)$  nach  $H^1(\Omega)$  impliziert nun gemein-

sam mit der Spurungleichung (2.2), dass

$$\begin{split} \left\| \gamma_1^{\mathrm{int}} v \right\|_{L^2(B_R \cap \Gamma)} & \lesssim \quad h^{-1/2} \left( \left\| \nabla v \right\|_{L^2(B_{(1+\delta/2)R} \backslash \Gamma)} + \left\| (\gamma_0^{\mathrm{int}} \eta) [\gamma_0 v] \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right) \\ & \lesssim \quad h^{-1/2} \left( \left\| \nabla v \right\|_{L^2(B_{(1+\delta/2)R} \backslash \Gamma)} + \left\| \eta v \right\|_{H^1(B_{(1+\delta)R} \backslash \Gamma)} \right) \\ & \lesssim \quad h^{-1/2} \left( \left\| \nabla v \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \backslash \Gamma)} + \frac{1}{\delta R} \left\| v \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \backslash \Gamma)} \right), \end{split}$$

was den Beweis beendet.

Die Orthogonalität aus (4.64) charakterisiert nun den Raum  $\mathcal{H}_{h,0}(D,\Gamma_{\rho},\mu)$  für eine Teilmenge  $\Gamma_{\rho} \subseteq \Gamma$  der Form (2.34) als

$$\mathcal{H}_{h,0}(D,\Gamma_{\rho},\mu) := \mathcal{H}_{h}(D) \cap \{ v \in H^{1}(D \setminus \Gamma) : \operatorname{supp}[\gamma_{0}v] |_{D \cap \Gamma} \subset \overline{\Gamma_{\rho}},$$

$$\langle \gamma_{1}^{\operatorname{int}}v |_{D \cap \Gamma}, \psi_{h} \rangle = \mu \, \langle \psi_{h}, 1 \rangle \, \forall \psi_{h} \in S^{p,1}(\mathcal{E}_{h}) \, \operatorname{mit supp} \psi_{h} \subset \overline{D \cap \Gamma_{\rho}} \}.$$

$$(4.67)$$

**Lemma 4.23.** Die Räume  $\mathcal{H}_h(D)$  und  $\mathcal{H}_{h,0}(D,\Gamma_\rho,\mu)$  sind abgeschlossene Unterräume von  $H^1(D \setminus \Gamma)$ .

Beweis. Sei  $(v^j)_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}_h(D)$  eine Folge, die zu einer Funktion  $v\in H^1(D\setminus\Gamma)$  konvergiert. Aus der Definition des Sprunges  $[\gamma_0v^j]|_{D\cap\Gamma}$  und der Stetigkeit des Spuroperators von  $H^1(\Omega)$  nach  $L^2(\Gamma)$  erhalten wir, dass die Folge  $[\gamma_0v^j]|_{D\cap\Gamma}$  in  $L^2_{\text{loc}}(D\cap\Gamma)$  gegen  $[\gamma_0v]|_{D\cap\Gamma}$  konvergiert, und da der Raum  $S^{p,1}(\mathcal{E}_h)$  endlich dimensional ist, folgt  $[\gamma_0v]|_{D\cap\Gamma}=\widetilde{v}|_{D\cap\Gamma}$  mit einer Funktion  $\widetilde{v}\in S^{p,1}(\mathcal{E}_h)$ .

Weiters gilt für  $\varphi \in C_0^{\infty}(D^{\pm})$ 

$$\langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle_{L^2(D \setminus \Gamma)} = \lim_{i \to \infty} \langle \nabla v^i, \nabla \varphi \rangle_{L^2(D \setminus \Gamma)} = 0,$$

also ist v stückweise harmonisch auf  $D \setminus \Gamma$ . Mittels Definition 4.13 und dem selben Argument erhalten wir  $[\partial_n v]|_{D \cap \Gamma} = 0$ , und daher ist  $\mathcal{H}_h(D)$  ein abgeschlossener Unterraum. Der Raum  $\mathcal{H}_{h,0}(D,\Gamma_\rho,\mu)$  ist schließlich abgeschlossen als Schnitt von abgeschlossenen Räumen.

Für eine Box  $B_R$  mit Seitenlänge R definieren wir auf  $\mathcal{H}_h(D)$  die folgende Norm

$$\| \! | \! | \! | v | \! | \! |_{h,R}^2 := \left( \frac{h}{R} \right)^2 \| \nabla v \|_{L^2(B_R \backslash \Gamma)}^2 + \frac{1}{R^2} \left\| v \right\|_{L^2(B_R \backslash \Gamma)}^2,$$

welche für festes h äquivalent zur  $H^1(B_R \setminus \Gamma)$ -Norm ist. Weiters ist die orthogonale Projektion  $\Pi_{h,R,\mu}: (H^1(B_R \setminus \Gamma), |\!|\!| \cdot |\!|\!|_{h,R}) \to (\mathcal{H}_{h,0}(B_R, \Gamma_\rho, \mu), |\!|\!| \cdot |\!|\!|_{h,R})$  wegen der Abgeschlossenheit von  $\mathcal{H}_{h,0}(B_R, \Gamma_\rho, \mu)$  wohldefiniert.

### 4.5.3 Caccioppoli-artige Ungleichung

Das nachfolgende Lemma zeigt ein diskretes inneres Regularitätsresultat für Funktionen in  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta)R},\Gamma_{\rho},\mu)$ , ähnlich zu Lemma 4.17.

**Lemma 4.24.** Seien  $\delta \in (0,1)$  und  $R \in (0,2 \operatorname{diam}(\Omega))$  so gewählt, dass  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{8}$ , und  $\Gamma_{\rho} \subset \Gamma$  von der Form (2.34). Seien  $B_R$ ,  $B_{(1+\delta)R}$  zwei konzentrische Boxen und  $\mu \in \mathbb{R}$ . Dann existiert eine Konstante C > 0, die nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  abhängt, sodass für alle  $v \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta)R}, \Gamma_{\rho}, \mu)$  gilt

$$\|\nabla v\|_{L^{2}(B_{R}\backslash\Gamma)} \le C\left(\frac{1+\delta}{\delta} \|v\|_{h,(1+\delta)R} + ((1+\delta)R)^{(d-1)/2} |\mu|\right). \tag{4.68}$$

Beweis. Sei  $\eta$  eine Abschneidefunktion gemäß Definition 2.16 mit  $D_1 = B_R$  und  $D_2 = B_{(1+\delta/4)R}$ . Wie im Beweis von Lemma 4.22 nehmen wir zusätzlich an, dass  $\gamma_0^{\rm int} \eta = \gamma_0^{\rm ext} \eta \in S^{1,1}(\mathcal{E}_h)$  ein stückweises Polynom von Grad 1 auf jeder Zusammenhangskomponente von  $\Gamma \cap B_{(1+\delta)R}$  ist. Da v stückweise harmonisch ist und  $[\partial_n v]|_{B_{(1+\delta)R}\cap\Gamma} = 0$ , folgt

$$\|\nabla(\eta v)\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R}\backslash\Gamma)}^{2} = \int_{B_{(1+\delta)R}\backslash\Gamma} \nabla v \cdot \nabla(\eta^{2}v) + v^{2} |\nabla \eta|^{2} dx$$
$$= \langle \gamma_{1}^{\text{int}} v, \eta^{2} [\gamma_{0}v] \rangle_{L^{2}(\Gamma)} + \int_{B_{(1+\delta)R}\backslash\Gamma} v^{2} |\nabla \eta|^{2} dx. \tag{4.69}$$

Hier ist die auf  $B_{(1+\delta)R} \cap \Gamma$  definierte Funktion  $\gamma_1^{\rm int} v \eta^2 [\gamma_0 v]$  abermals implizit mit Null fortgesetzt, und somit als Funktion auf ganz  $L^2(\Gamma)$  definiert. Wir behandeln zunächst das Oberflächenintegral. Mit dem nodalen Interpolationsoperator  $J_h$  aus (2.23) und der Orthogonalität aus (4.67) erhalten wir

$$\langle \gamma_1^{\text{int}} v, \eta^2 [\gamma_0 v] \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle \gamma_1^{\text{int}} v, \eta^2 [\gamma_0 v] - J_h(\eta^2 [\gamma_0 v]) \rangle_{L^2(\Gamma)} + \mu \left\langle J_h(\eta^2 [\gamma_0 v]), 1 \right\rangle_{L^2(\Gamma)}, (4.70)$$

da supp  $J_h(\eta^2[\gamma_0 v]) \subset \overline{B_{(1+\delta/2)R} \cap \Gamma_\rho}$  auf Grund der Lokalität von  $J_h$  und der Voraussetzung  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{8}$  gilt. Die Approximationseigenschaft (2.23) führt mit Lemma 2.18 und der inversen Ungleichung (2.14) aus Lemma 2.5 auf

$$\|\eta^{2}[\gamma_{0}v] - J_{h}(\eta^{2}[\gamma_{0}v])\|_{L^{2}(\Gamma)}^{2} \lesssim h^{2(p+1)} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h}} |\eta^{2}[\gamma_{0}v]|_{H^{p+1}(E)}^{2}$$

$$\lesssim h^{2(p+1)} \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}_{h} \\ E \cap \text{supp } \eta \neq \emptyset}} \left( \frac{1}{(\delta R)^{2}} |\eta[\gamma_{0}v]|_{H^{p}(E)}^{2} + \frac{1}{(\delta R)^{4}} |[\gamma_{0}v]|_{H^{p-1}(E)}^{2} \right)$$

$$\lesssim \frac{h^{3}}{(\delta R)^{2}} \|\eta[\gamma_{0}v]\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^{2} + \frac{h^{4}}{(\delta R)^{4}} \|[\gamma_{0}v]\|_{L^{2}(B_{(1+\delta/2)R} \cap \Gamma)}^{2}. \tag{4.71}$$

Mit der Spurungleichung folgt

$$\begin{split} \|\eta[\gamma_{0}v]\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^{2} &= \|\gamma_{0}^{\text{ext}}(\eta v) - \gamma_{0}^{\text{int}}(\eta v)\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^{2} \\ &\lesssim \|\eta v\|_{L^{2}(\Omega)}^{2} + \|\nabla(\eta v)\|_{L^{2}(\Omega)}^{2} + \|\eta v\|_{L^{2}(\overline{\Omega}^{c})}^{2} + \|\nabla(\eta v)\|_{L^{2}(\overline{\Omega}^{c})}^{2} \\ &\leq \|v\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R}\backslash\Gamma)}^{2} + \|\nabla(\eta v)\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R}\backslash\Gamma)}^{2}. \end{split}$$
(4.72)

Sei  $\tilde{\eta}$  eine weitere Abschneidefunktion gemäß Definition 2.16 mit  $D_1 = B_{(1+\delta/2)R}$  und  $D_2 = B_{(1+\delta)R}$ . Dann liefert die multiplikative Spurabschätzung (2.3)

$$\|[\gamma_{0}v]\|_{L^{2}(B_{(1+\delta/2)R}\cap\Gamma)}^{2} \leq \|\widetilde{\eta}[\gamma_{0}v]\|_{L^{2}(\Gamma)}^{2}$$

$$\lesssim \frac{1}{\delta R} \|v\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R}\setminus\Gamma)}^{2} + \|v\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R}\setminus\Gamma)} \|\nabla v\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R}\setminus\Gamma)}. \quad (4.73)$$

Wir wenden Lemma 4.22 an mit  $\widetilde{R} = (1 + \delta/2)R$  und  $\widetilde{\delta} = \frac{\delta}{2+\delta}$ , sodass  $(1 + \widetilde{\delta})\widetilde{R} = (1 + \delta)R$ . Die Voraussetzung  $\frac{h}{\widetilde{R}} \leq \frac{\widetilde{\delta}}{4}$  gilt wegen der Annahme  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{8}$ . Gemeinsam mit (4.71) - (4.73) führt das auf

$$\left| \langle \gamma_{1}^{\text{int}} v, \eta^{2} [\gamma_{0} v] - J_{h}(\eta^{2} [\gamma_{0} v]) \rangle_{L^{2}(\Gamma)} \right| \leq \left\| \gamma_{1}^{\text{int}} v \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta/2)R} \cap \Gamma)} \left\| \eta^{2} [\gamma_{0} v] - J_{h}(\eta^{2} [\gamma_{0} v]) \right\|_{L^{2}(\Gamma)} \\
\leq C \left( \left\| \nabla v \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \setminus \Gamma)} + \frac{1}{\delta R} \left\| v \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \setminus \Gamma)} \right) \cdot \left( 4.74 \right) \\
\left[ \frac{h}{\delta R} \left( \left\| v \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \setminus \Gamma)} + \left\| \nabla (\eta v) \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \setminus \Gamma)} \right) \\
+ \frac{h^{3/2}}{(\delta R)^{2}} \left( \frac{1}{(\delta R)^{1/2}} \left\| v \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \setminus \Gamma)} + \left\| \eta v \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \setminus \Gamma)}^{1/2} \left\| \eta \nabla v \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \setminus \Gamma)}^{1/2} \right) \right].$$

Für den letzten Term verwenden wir die Young'sche Ungleichung mit Young-Exponenten 4/3 und 4, woraus

$$\frac{h^{3/2}}{(\delta R)^2} \left\| \nabla v \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \backslash \Gamma)}^{3/2} \left\| v \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \backslash \Gamma)}^{1/2} \lesssim \frac{h^2}{(\delta R)^2} \left\| \nabla v \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \backslash \Gamma)}^2 + \frac{1}{(\delta R)^2} \left\| v \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \backslash \Gamma)}^2$$

sowie

$$\frac{h^{3/2}}{(\delta R)^3} \left\| \nabla v \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \backslash \Gamma)}^{1/2} \left\| v \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \backslash \Gamma)}^{3/2} \lesssim \frac{h^2}{(\delta R)^2} \left\| \nabla v \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \backslash \Gamma)}^2 + \frac{h^{4/3}}{(\delta R)^{10/3}} \left\| v \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \backslash \Gamma)}^2$$

folgt. Für die übrigen Terme in (4.74) liefern die Young'sche Ungleichung mit Young-Exponenten 2 und 2 sowie die Annahmen  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{8}$  und  $\delta R \leq 2 \operatorname{diam}(\Omega)$  somit

$$\begin{split} \left| \langle \gamma_1^{\text{int}} v, \eta^2 [\gamma_0 v] - J_h(\eta^2 [\gamma_0 v]) \rangle_{L^2(\Gamma)} \right| \\ & \leq C \frac{h^2}{(\delta R)^2} \left\| \nabla v \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \setminus \Gamma)}^2 + C \frac{1}{(\delta R)^2} \left\| v \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \setminus \Gamma)}^2 + \frac{1}{4} \left\| \nabla (\eta v) \right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \setminus \Gamma)}^2. \end{split}$$

Der letzte Term in (4.70) kann mit (2.23),  $\eta \le 1$  und den vorherigen Ungleichungen (4.71) – (4.72) abgeschätzt werden durch

$$\begin{split} \left| \mu \left\langle J_{h}(\eta^{2}[\gamma_{0}v]), 1 \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} \right| &\lesssim \left| \mu \left\langle \eta^{2}[\gamma_{0}v], 1 \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} \right| + \left| \mu \left\langle \eta^{2}[\gamma_{0}v] - J_{h}(\eta^{2}[\gamma_{0}v]), 1 \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} \right| \\ &\lesssim \left| \mu \right| \left| B_{(1+\delta)R} \cap \Gamma \right|^{1/2} \left( \left\| \eta^{2}[\gamma_{0}v] \right\|_{L^{2}(\Gamma)} + \left\| \eta^{2}[\gamma_{0}v] - J_{h}(\eta^{2}[\gamma_{0}v]) \right\|_{L^{2}(\Gamma)} \right) \\ &\lesssim \left| \mu \right| \left( (1+\delta)R \right)^{(d-1)/2} \left( \left\| \eta^{2}[\gamma_{0}v] \right\|_{L^{2}(\Gamma)} + h^{1/2} \left\| \eta^{2}[\gamma_{0}v] \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right) \\ &\lesssim \left| \mu \right| \left( (1+\delta)R \right)^{(d-1)/2} \left( \left\| v \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \setminus \Gamma)} + \left\| \nabla (\eta v) \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \setminus \Gamma)} \right). \end{split}$$

Anwendung der Young'schen Ungleichung führt auf

$$\left| \mu \left\langle J_{h}(\eta^{2}[\gamma_{0}v]), 1 \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} \right| \leq C((1+\delta)R)^{d-1} |\mu|^{2} + C \frac{1}{(\delta R)^{2}} \|v\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R}\backslash\Gamma)}^{2} + \frac{1}{4} \|\nabla(\eta v)\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R}\backslash\Gamma)}^{2}.$$

Setzt man die vorherigen Abschätzungen in (4.70) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \left| \langle \gamma_{1}^{\text{int}} v, \eta^{2} [\gamma_{0} v] \rangle_{L^{2}(\Gamma)} \right| & \leq \left| \langle \gamma_{1}^{\text{int}} v, \eta^{2} [\gamma_{0} v] - J_{h}(\eta^{2} [\gamma_{0} v]) \rangle_{L^{2}(\Gamma)} \right| + \left| \mu \left\langle J_{h}(\eta^{2} [\gamma_{0} v]), 1 \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} \right| \\ & \leq C \frac{h^{2}}{(\delta R)^{2}} \left\| \nabla v \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \setminus \Gamma)}^{2} + C \frac{1}{(\delta R)^{2}} \left\| v \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \setminus \Gamma)}^{2} \\ & + C((1+\delta)R)^{d-1} \left| \mu \right|^{2} + \frac{1}{2} \left\| \nabla (\eta v) \right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R} \setminus \Gamma)}^{2}. \end{aligned}$$

Einsetzen in (4.69) und Subtraktion von  $\frac{1}{2} \|\nabla(\eta v)\|_{L^2(B_{(1+\delta)R}\setminus\Gamma)}^2$  führt schlussendlich auf

$$\begin{split} \|\nabla v\|_{L^{2}(B_{R}\backslash\Gamma)}^{2} &\leq \|\nabla(\eta v)\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R}\backslash\Gamma)}^{2} \\ &\lesssim \frac{h^{2}}{(\delta R)^{2}} \|\nabla v\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R}\backslash\Gamma)}^{2} + \frac{1}{(\delta R)^{2}} \|v\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R}\backslash\Gamma)}^{2} + ((1+\delta)R)^{d-1} |\mu|^{2} \,, \end{split}$$

was den Beweis beendet.

### **4.5.4** Niedrigdimensionale Approximation in $\mathcal{H}_{h,0}(D,\Gamma_{\rho},\mu)$

Mit Hilfe von Scott-Zhang-Interpolation auf einem groben Gitter und Orthogonalprojektion wird in diesem Abschnitt eine niedrigdimensionale Approximation an die Galerkin-Lösung konstruiert. Im Gegensatz zu Abschnitt 4.4.4 sind Funktionen in  $\mathcal{H}_{h,0}(D,\Gamma_{\rho},\mu)$  nicht notwendigerweise stetig über dem Rand  $\Gamma$ , weswegen eine zusätzliche Annahme an das grobe Gitter getroffen werden muss.

Wir betrachten eine  $\gamma$ -formreguläre Triangulierung  $\widehat{\mathcal{E}}_H$  von  $\mathbb{R}^d$ , die an  $\Omega$  angepasst ist. Speziell nehmen wir also an, dass für jedes  $E \in \widehat{\mathcal{E}}_H$  entweder  $E \subset \Omega$  oder  $E \subset \overline{\Omega}^c$  gilt, und dass die Einschränkungen  $\widehat{\mathcal{E}}_H|_{\Omega}$  und  $\widehat{\mathcal{E}}_H|_{\overline{\Omega}^c}$   $\gamma$ -formreguläre, reguläre Triangulierungen von  $\Omega$  beziehungsweise  $\overline{\Omega}^c$  mit Gitterweite H sind. Auf dem stückweise regulären Gitter  $\widehat{\mathcal{E}}_H$  definieren wir die Scott-Zhang-Projektion  $I_H: H^1(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma) \to S^{1,1}_{\mathrm{pw}}(\widehat{\mathcal{E}}_H) := \{v: v|_{\Omega} \in S^{1,1}(\widehat{\mathcal{E}}_H|_{\Omega}) \text{ und } v|_{\overline{\Omega}^c} \in S^{1,1}(\widehat{\mathcal{E}}_H|_{\overline{\Omega}^c})\}$  stückweise als

$$I_H v = \begin{cases} I_H^{\text{int}} v & \text{für } x \in \Omega, \\ I_H^{\text{ext}} v & \text{sonst,} \end{cases}$$
 (4.75)

wobei  $I_H^{\text{int}}$ ,  $I_H^{\text{ext}}$  die Scott-Zhang-Projektionen für die Gitter  $\widehat{\mathcal{E}}_H|_{\Omega}$  und  $\widehat{\mathcal{E}}_H|_{\overline{\Omega}^c}$  bezeichnen. Da  $I_H$  eine stückweise Scott-Zhang-Projektion ist, gelten die Approximationseigenschaften aus (2.21) und führen auf die folgende Abschätzung

$$||v - I_H v||_{H^m(E)}^2 \le CH^{2(\ell - m)} \begin{cases} |v|_{H^{\ell}(\omega_E^{\Omega})}^2 & \text{falls } E \subset \Omega \\ |v|_{H^{\ell}(\omega_E^{\overline{\Omega}^c})}^2 & \text{falls } E \subset \overline{\Omega}^c \end{cases} \quad 0 \le m \le \ell \le 1.$$
 (4.76)

Hier ist

$$\omega_E^{\Omega} = \bigcup \left\{ E' \in \widehat{\mathcal{E}}_H|_{\Omega} : E \cap E' \neq \emptyset \right\}, \qquad \omega_E^{\overline{\Omega}^c} = \bigcup \left\{ E' \in \widehat{\mathcal{E}}_H|_{\overline{\Omega}^c} : E \cap E' \neq \emptyset \right\}.$$

Die Konstante C > 0 aus (4.76) hängt nur von der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\widehat{\mathcal{E}}_H$  und der Dimension d ab.

Lemma 4.25. Seien  $\delta \in (0,1)$  und  $R \in (0,2 \operatorname{diam}(\Omega))$  so gewählt, dass  $\frac{h}{R} \leq \frac{\delta}{8}$  und  $B_R$ ,  $B_{(1+\delta)R}$ ,  $B_{(1+2\delta)R}$  konzentrische Boxen gemäß Definition 2.10. Sei  $\Gamma_{\rho} \subset \Gamma$  von der Form (2.34) und  $\mu \in \mathbb{R}$ . Sei  $\widehat{\mathcal{E}}_H$  eine  $\gamma$ -formreguläre Triangulierung von  $\mathbb{R}^d$  mit Gitterweite H, die an  $\Omega$  angepasst ist, wie obig beschrieben, und  $\frac{H}{R} \leq \frac{\delta}{4}$ . Sei  $I_H : H^1(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma) \to S^{1,1}_{\mathrm{pw}}(\widehat{\mathcal{E}}_H)$  die stückweise Scott-Zhang-Projektion definiert in (4.75) auf der an  $\Omega$  angepassten,  $\gamma$ -formreguläre Triangulierung  $\widehat{\mathcal{E}}_H$ . Dann existiert eine Konstante  $C_{\mathrm{app}} > 0$ , die nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierungen  $\mathcal{E}_h$  und  $\widehat{\mathcal{E}}_H$  abhängt, sodass für  $v \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R}, \Gamma_{\rho}, \mu)$  gilt:

1. 
$$(v - \Pi_{h,R,\mu} I_H v)|_{B_R} \in \mathcal{H}_{h,0}(B_R, \Gamma_\rho, 0);$$

2. dim 
$$W \leq C_{\text{app}} \left( \frac{(1+2\delta)R}{H} \right)^d$$
, wobei  $W := \prod_{h,R,\mu} I_H \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R}, \Gamma_{\rho}, \mu)$ ;

3. 
$$\|v - \Pi_{h,R,\mu} I_H v\|_{h,R} \le C_{\text{app}} \left(\frac{h}{R} + \frac{H}{R}\right) \left(\frac{1+2\delta}{\delta} \|v\|_{h,(1+2\delta)R} + ((1+2\delta)R)^{(d-1)/2} |\mu|\right)$$
.

Beweis. Für  $u \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R}, \Gamma_{\rho}, \mu)$  haben wir auch  $u|_{B_R} \in \mathcal{H}_{h,0}(B_R, \Gamma_{\rho}, \mu)$  und somit  $\Pi_{h,R,\mu}(u|_{B_R}) = u|_{B_R}$ , was 1. liefert. Die Aussage 2. folgt aus dim  $I_H \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R}, \Gamma_{\rho}, \mu) \lesssim ((1+2\delta)R/H)^d$ .

Wir wenden Lemma 4.24 an mit  $\widetilde{R}=(1+\delta)R$  und  $\widetilde{\delta}=\frac{\delta}{1+\delta}$ . Es gilt  $(1+\widetilde{\delta})\widetilde{R}=(1+2\delta)R$ , und die Voraussetzung  $\frac{h}{\widetilde{R}}\leq \frac{\widetilde{\delta}}{8}$  folgt aus  $8h\leq \delta R=\widetilde{\delta}\widetilde{R}$ . Daher erhalten wir aus der Lokalität und den Approximationseigenschaften (4.76) der Scott-Zhang-Projektion

$$\begin{split} \|u - \Pi_{h,R,\mu} I_H u\|_{h,R}^2 &= \|\Pi_{h,R,\mu} \left(u - I_H u\right)\|_{h,R}^2 \leq \|u - I_H u\|_{h,R}^2 \\ &= \left(\frac{h}{R}\right)^2 \|\nabla (u - I_H u)\|_{L^2(B_R \backslash \Gamma)}^2 + \frac{1}{R^2} \|u - I_H u\|_{L^2(B_R \backslash \Gamma)}^2 \\ &\lesssim \frac{h^2}{R^2} \|\nabla u\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \backslash \Gamma)}^2 + \frac{H^2}{R^2} \|\nabla u\|_{L^2(B_{(1+\delta)R} \backslash \Gamma)}^2 \\ &\lesssim \left(\frac{h}{R} + \frac{H}{R}\right)^2 \left(\frac{(1+2\delta)^2}{\delta^2} \|u\|_{h,(1+2\delta)R}^2 + ((1+2\delta)R)^{d-1} |\mu|^2\right), \end{split}$$

was den Beweis von 3. beendet.

Mittels Iteration auf konzentrischen Boxen sowie der multiplikativen Spurungleichung erhält man nun eine exponentiell konvergierende Approximation an den Sprung  $[\gamma_0 v]$  einer Funktion  $v \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\kappa)R}, \Gamma_\rho, \mu)$ .

**Lemma 4.26.** Sei  $C_{\text{app}}$  die Konstante aus Lemma 4.25 und  $q, \kappa \in (0, 1), R \in (0, 2 \operatorname{diam}(\Omega)), k \in \mathbb{N}$  sowie  $\Gamma_{\rho} \subset \Gamma$  von der Form (2.34). Weiters sei angenommen, dass

$$\frac{h}{R} \le \frac{\kappa q}{32k \max\{C_{\text{app}}, 1\}}.\tag{4.77}$$

Dann existiert ein endlich dimensionaler Unterraum  $\widetilde{W}_k$  von  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\kappa)R},\Gamma_\rho,\mu)$  mit Dimension

$$\dim \widetilde{W}_k \le C_{\dim} \left( \frac{1 + \kappa^{-1}}{q} \right)^d k^{d+1},$$

sodass für alle  $v \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\kappa)R}, \Gamma_{\rho}, \mu)$  gilt

$$\begin{split} \min_{\widetilde{w} \in \widetilde{W}_k} \| [\gamma_0 v] - [\gamma_0 \widetilde{w}] \|_{L^2(B_R \cap \Gamma_\rho)} & \leq C_{\text{low}} R(1+\kappa) h^{-1/2} \min_{\widetilde{w} \in \widetilde{W}_k} \| v - \widetilde{w} \|_{h, (1+\kappa/2)R} \\ & \leq C_{\text{low}} R(1+\kappa) h^{-1/2} q^k \left( \| v \|_{h, (1+\kappa)R} + ((1+\kappa)R)^{(d-1)/2} |\mu| \right). \end{split}$$

Die Konstanten  $C_{\text{dim}}$ ,  $C_{\text{low}} > 0$  hängen nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  ab.

Beweis. Seien  $B_R$  und  $B_{(1+\delta_j)R}$  mit  $\delta_j:=\kappa(1-\frac{j}{2k})$  für  $j=0,\ldots,k$  konzentrische Boxen, wobei  $\kappa=\delta_0>\delta_1>\cdots>\delta_k=\frac{\kappa}{2}.$  Wir wählen  $H=\frac{\kappa qR}{32k\max\{C_{\mathrm{app}},1\}},$  woraus  $h\leq H$  folgt. Wir wenden Lemma 4.25 an mit  $\widetilde{R}=(1+\delta_j)R$  und  $\widetilde{\delta}_j=\frac{\kappa}{4k(1+\delta_j)}<\frac{1}{4}.$  Wegen Voraussetzung (4.77) gilt  $\frac{h}{\widetilde{R}_j}\leq\frac{\widetilde{\delta}_j}{8}.$  Da  $\delta_{j-1}=\delta_j+\frac{\kappa}{2k},$  gilt  $(1+\delta_{j-1})R=(1+2\widetilde{\delta}_j)\widetilde{R},$  und unsere Wahl von H impliziert  $\frac{H}{\widetilde{R}}\leq\frac{\widetilde{\delta}_j}{4}.$  Daher liefert Lemma 4.25 einen Unterraum  $W_1$  von  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta_1)R},\Gamma_\rho,\mu)$  mit dim  $W_1\leq C\left(\frac{(1+\kappa)R}{H}\right)^d$  und ein Element  $w_1\in W_1,$  sodass

$$\begin{aligned} \|v - w_1\|_{h,(1+\delta_1)R} & \leq & 2C_{\text{app}} \frac{H}{(1+\delta_1)R} \left( \frac{1+2\widetilde{\delta}_1}{\widetilde{\delta}_1} \|v\|_{h,(1+\delta_0)R} + ((1+\delta_0)R)^{(d-1)/2} |\mu| \right) \\ & = & 8C_{\text{app}} \frac{kH}{\kappa R} (1+2\widetilde{\delta}_1) \left( \|v\|_{h,(1+\kappa)R} + \frac{\widetilde{\delta}_1}{1+2\widetilde{\delta}_1} ((1+\delta_0)R)^{(d-1)/2} |\mu| \right) \\ & \leq & q \left( \|v\|_{h,(1+\kappa)R} + ((1+\kappa)R)^{(d-1)/2} |\mu| \right). \end{aligned}$$

Da  $v-w_1 \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta_1)R},\Gamma_\rho,0)$ , kann Lemma 4.25 abermals angewendet werden (diesmal mit  $\mu=0$ ) und wir erhalten eine Approximation  $w_2$  an  $v-w_1$  in einem Unterraum  $W_2$  von  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\delta_2)R},\Gamma_\rho,0)$  mit dim  $W_2 \leq C\left(\frac{(1+\kappa)R}{H}\right)^d$ . Analog zum Fall j=1 folgt

$$|||v - w_1 - w_2||_{h,(1+\delta_2)R} \le q |||v - w_1||_{h,(1+\delta_1)R} \le q^2 \left( |||v||_{h,(1+\kappa)R} + ((1+\kappa)R)^{(d-1)/2} |\mu| \right).$$

Führt man diesen Prozess (k-2)-Mal fort, so erhält man eine Approximation  $\widetilde{w} := \sum_{j=1}^k w_i$  in einem Raum  $\widetilde{W}_k := \sum_{j=1}^k W_j$  mit Dimension dim  $\widetilde{W}_k \le Ck \left(\frac{(1+\kappa)R}{H}\right)^d = C_{\text{dim}}((1+\kappa)R)$ 

 $\kappa^{-1}$ ) $q^{-1}$ ) $^dk^{d+1}$ , sodass

$$|||v - \widetilde{w}||_{h,(1+\kappa/2)R} = |||v - \widetilde{w}||_{h,(1+\delta_k)R} \le q^k \left( |||v||_{h,(1+\kappa)R} + ((1+\kappa)R)^{(d-1)/2} |\mu| \right). \quad (4.78)$$

Der letzte Schritt ist die Anwendung der multiplikativen Spurabschätzung (2.3). Mit einer Abschneidefunktion  $\eta$  gemäß Definition 2.16 mit  $D_1 = B_R$  und  $D_2 = B_{(1+\kappa/2)R}$  erhalten wir für  $z \in H^1(B_{(1+\kappa/2)R} \setminus \Gamma)$ 

$$\begin{split} \|[\gamma_0 z]\|_{L^2(B_R \cap \Gamma)}^2 &\leq \|[\gamma_0(\eta z)]\|_{L^2(\Gamma)}^2 \lesssim \|\eta z\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma)} \|\eta z\|_{H^1(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma)} \\ &\lesssim \frac{1}{\kappa R} \|z\|_{L^2(B_{(1+\kappa/2)R})}^2 + \|z\|_{L^2(B_{(1+\kappa/2)R})} \|\nabla z\|_{L^2(B_{(1+\kappa/2)R} \setminus \Gamma)} \\ &\lesssim \frac{1}{\kappa R} \|z\|_{L^2(B_{(1+\kappa/2)R})}^2 + h^{-1} \|z\|_{L^2(B_{(1+\kappa/2)R})}^2 + h \|\nabla z\|_{L^2(B_{(1+\kappa/2)R} \setminus \Gamma)}^2 \\ &\lesssim ((1+\kappa/2)R)^2 h^{-1} \|z\|_{h,(1+\kappa/2)R}^2, \end{split}$$

wobei im letzten Schritt die Annahme  $\frac{h}{\kappa R} \leq 1$  benutzt wurde. Verwendet man diese Abschätzung für  $z=v-\widetilde{w}$  gemeinsam mit (4.78), so folgt schließlich

$$\min_{\widetilde{w} \in \widetilde{W}_k} \| [\gamma_0 v] - [\gamma_0 \widetilde{w}] \|_{L^2(B_R \cap \Gamma)} \le C_{\text{low}} (1 + \kappa) R h^{-1/2} q^k \left[ \| v \|_{h, (1 + \kappa) R} + ((1 + \kappa) R)^{(d - 1)/2} |\mu| \right],$$

womit das gewünschte Resultat gezeigt ist.

Bemerkung 4.27. Der Beweis von Lemma 4.26 zeigt, dass ein Approximationsresultat in der  $H^{1/2}$ -Norm ebenfalls erreicht werden kann, man aber einen zusätzlichen Faktor  $h^{-1/2}$  einbüßt. Mit der Abschneidefunktion  $\eta$ , die im letzten Schritt des Beweises von Lemma 4.26 verwendet wurde, erhält man für  $z \in H^1(B_{(1+\kappa/2)R} \setminus \Gamma)$  die Schranke

$$\|[\gamma_0(\eta z)]\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \|\eta z\|_{H^1(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma)} \lesssim (1 + \kappa/2)R \, h^{-1} \, \|z\|_{h, B_{(1+\kappa/2)R}} \, d^{-1} \, \|z\|_{h, B_{(1+\kappa/2)R}}$$

Also folgt für den Raum  $\widetilde{W}_k$  aus Lemma 4.26, dass

$$\min_{\widetilde{w} \in \widetilde{W}_k} \| [\gamma_0(\eta(v - \widetilde{w}))] \|_{H^{1/2}(\Gamma)} \lesssim C'_{\text{low}}(1 + \kappa)R h^{-1} q^k \left[ \|v\|_{h, (1 + \kappa)R} + ((1 + \kappa)R)^{(d-1)/2} |\mu| \right],$$

und somit das gewünschte Approximationsresultat in  $H^{1/2}$ .

Wir können nun das Hauptresultat dieses Abschnittes, Proposition 4.20, zeigen.

Beweis von Proposition 4.20. Wir wählen  $\kappa = \frac{1}{1+\eta}$ , was  $\operatorname{dist}(B_{(1+\kappa)R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}) > 0$  liefert. Bei der Definition des Raumes  $\widehat{W}_k$  unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall 1: Die Bedingung (4.77) ist nicht erfüllt, es gilt also  $\frac{h}{R_{\tau}} > \frac{\kappa q}{32k \max\{C_{\text{app}},1\}}$ .

Dann setzen wir  $\widehat{W}_k := \{\widehat{w}|_{B_{R_\tau} \cap \Gamma} : \widehat{w} \in S^{p,1}(\mathcal{E}_h)\}$ , und das Minimum in (4.63) ist klarerweise gleich Null. Die Wahl von  $\kappa$  sowie  $\frac{h}{R_\tau} > \frac{\kappa q}{32k \max\{C_{\mathrm{app}},1\}}$  liefern für die Dimension

von  $\widehat{W}_k$ , dass

$$\dim \widehat{W}_k \lesssim \left(\frac{R_{\tau}}{h}\right)^{d-1} \lesssim \left(\frac{32k \max\{C_{\text{app}}, 1\}}{\kappa q}\right)^{d-1} \simeq \left((1+\eta)q^{-1}k\right)^{d-1}$$

$$\lesssim (2+\eta)^d q^{-d}k^{d+1}.$$

Fall 1: Die Bedingung (4.77) ist erfüllt mit  $R = R_{\tau}$ . Sei  $u = \widetilde{K}\phi_h$  das Doppelschichtpotential mit der Galerkin-Lösung  $\phi_h \in S^{p,1}(\mathcal{E}_h)$  aus (3.45), dann gilt  $u \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\kappa)R_{\tau}}, \Gamma, \lambda_h)$ . Mit dem Raum  $\widetilde{W}_k$  aus Lemma 4.26 setzen wir  $\widehat{W}_k := \{ [\gamma_0 \widetilde{w}] : \widetilde{w} \in \widetilde{W}_k \}$ . Wir wenden Lemma 4.26 auf u an und erhalten

$$\min_{\widehat{w} \in \widehat{W}_k} \| [\gamma_0 u] - \widehat{w} \|_{L^2(B_{R_\tau} \cap \Gamma)} \lesssim (1 + \kappa) R_\tau h^{-1/2} q^k \left( \| \widetilde{K} \phi_h \|_{h, (1 + \kappa) R_\tau} + |\lambda_h| \right) . (4.79)$$

Wir erinnern an Abschätzung (3.47), die

$$\|\phi_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + |\lambda_h| \lesssim \left\| \Pi_{\Gamma}^{L^2} f \right\|_{L^2(\Gamma)}$$

besagt. Weiters liefern die Stetigkeit des Doppelschichtpotentials  $\widetilde{K}: H^{1/2}(\Gamma) \to H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$  und  $\frac{h}{R_{\tau}} < 1$ 

$$\begin{split} \left\| \widetilde{K} \phi_h \right\|_{h, R_{\tau}(1+\kappa)} & \leq 2 \left( 1 + \frac{1}{R_{\tau}} \right) \left\| \widetilde{K} \phi_h \right\|_{H^1(B_{2R_{\tau}})} \\ & \lesssim \left( 1 + \frac{1}{R_{\tau}} \right) \left\| \phi_h \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \left( 1 + \frac{1}{R_{\tau}} \right) \left\| \Pi_{\Gamma}^{L^2} f \right\|_{L^2(\Gamma)}. \end{split}$$

Einsetzen in (4.79) und  $R_{\tau} \leq 2 \operatorname{diam}(\Omega)$  sowie  $\kappa \leq 1$  führen mit der Sprungbedingung  $[\gamma_0 u] = \phi_h$  aus (3.37a) auf

$$\min_{\widehat{w} \in \widehat{W}_{k}} \|\phi_{h} - \widehat{w}\|_{L^{2}(B_{R_{\tau}} \cap \Gamma)} \lesssim (1 + \kappa)R_{\tau} h^{-1/2} q^{k} \left( \left\| \widetilde{K}\phi_{h} \right\|_{h, (1 + \kappa)R_{\tau}} + |\lambda_{h}| \right) \\
\lesssim (1 + \kappa)(R_{\tau} + 1)h^{-1/2} q^{k} \left\| \Pi_{\Gamma}^{L^{2}} f \right\|_{L^{2}(\Gamma)} \lesssim h^{-1/2} q^{k} \left\| \Pi_{\Gamma}^{L^{2}} f \right\|_{L^{2}(\Gamma)},$$

und die Dimension von  $\widehat{W}_k$  ist beschränkt durch

$$\dim \widehat{W}_k \le C_{\dim} \left( \frac{1 + \kappa^{-1}}{q} \right)^d k^{d+1} = C_{\dim} (2 + \eta)^d q^{-d} k^{d+1}.$$

Das beendet den Beweis der ersten Ungleichung in (4.63). Die zweite Ungleichung in (4.63) folgt aus der  $L^2(\Gamma)$ -Stabilität der  $L^2(\Gamma)$ -Orthogonalprojektion.

## 5 Approximation von inversen Matrizen

In diesem Abschnitt werden die Hauptresultate, die Existenz von  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximationen an die inversen Matrizen der Modellprobleme aus Abschnitt 3, gezeigt.

Betrachtet man ein zulässiges Cluster-Paar  $\tau \times \sigma$  mit Bounding-Boxen  $B_{R_{\tau}}$ ,  $B_{R_{\sigma}}$  und den zugehörigen Matrixblock  $\mathbf{A}^{-1}|_{\tau \times \sigma}$ , so kann eine Approximation an diesen Block wegen

$$\begin{pmatrix}
 & \tau & \boxed{\phantom{a}} \\
 & \sigma
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0 \\
\vdots \\
0 \\
\mathbf{f}
\end{pmatrix} = \phi_h$$

aus einer Approximation an die Galerkin-Lösung  $\phi_h = \sum \phi_h^i \psi_i$  eingeschränkt auf  $B_{R_{\tau}}$  für rechte Seiten f mit Träger in  $B_{R_{\sigma}}$  konstruiert werden. Eine geeignete Approximation an die Galerkin-Lösungen mit exponentieller Konvergenz wurde in Abschnitt 4 für die Modellprobleme angegeben. Wir müssen also noch die Approximationsresultate auf Matrizen übertragen, was mit Hilfe von lokalen Varianten der Isomorphismen (2.8) und (2.11) geschieht. Die grundlegenden Ideen hierfür finden sich in [Bör10a]. Schlussendlich liefert das Zusammensetzen der blockweisen Approximationen dann die gewünschten  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximationen an die Inversen.

# 5.1 Inverse FEM-Matrizen für elliptische partielle Differentialoperatoren

In diesem Kapitel wird das Approximationsresultat aus Proposition 4.1 verwendet, um eine Niedrigrangfaktorisierung für zulässige Matrixblöcke der inversen Galerkin-Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  aus (3.7) zu konstruieren. Die Existenz und exponentielle Konvergenz der Faktorisierung ist im nachfolgenden Satz 5.1 formuliert.

**Satz 5.1.** Sei der Zulässigkeitsparameter  $\eta > 0$  fixiert,  $q \in (0,1)$  und das Cluster-Paar  $\tau \times \sigma$   $\eta$ -zulässig. Dann existieren für jedes  $k \in \mathbb{N}$  Matrizen  $\mathbf{X}_{\tau\sigma} \in \mathbb{R}^{|\tau| \times r}$ ,  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} \in \mathbb{R}^{|\sigma| \times r}$  mit maximalem Rang  $r \leq C_{\text{dim}}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ , sodass

$$\|\mathbf{A}^{-1}|_{\tau \times \sigma} - \mathbf{X}_{\tau \sigma} \mathbf{Y}_{\tau \sigma}^{T}\|_{2} \le C_{\text{apx}} N_{\Omega} q^{k}. \tag{5.1}$$

Die Konstanten  $C_{apx}$ ,  $C_{dim} > 0$  hängen nur vom Randwertproblem (3.3),  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab.

 $\begin{array}{l} \textit{Beweis.} \; \text{Falls} \; C_{\dim}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1} \geq \min\{|\tau|\,, |\sigma|\}, \, \text{verwenden wir den exakten Matrixblock} \\ \mathbf{X}_{\tau\sigma} = \mathbf{A}^{-1}|_{\tau\times\sigma} \; \text{und} \; \mathbf{Y}_{\tau\sigma} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{|\sigma|\times|\sigma|} \; \text{im Fall } \min\{|\tau|\,, |\sigma|\} = |\sigma| \; \text{und} \; \mathbf{X}_{\tau\sigma} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{|\tau|\times|\tau|} \\ \text{und} \; \mathbf{Y}_{\tau\sigma} = \mathbf{A}^{-1}|_{\tau\times\sigma} \; \text{für } \min\{|\tau|\,, |\sigma|\} = |\tau|. \end{array}$ 

Falls  $C_{\dim}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1} < \min\{|\tau|, |\sigma|\}$ , werden die Faktoren  $\mathbf{X}_{\tau\sigma}$ ,  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma}$  mit Hilfe des Approximationsresultats von Proposition 4.1 konstruiert. Hierbei definieren wir für einen Cluster  $\tau \subset \mathcal{I}$ 

$$\mathbb{R}^{\tau} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_{\Omega}} : \mathbf{x}_{i} = 0 \,\forall i \notin \tau \right\}, \tag{5.2}$$

und wir schreiben  $\mathbf{x}|_{\tau}$  für den Vektor in  $\mathbb{R}^{|\tau|}$ , der nur die zu  $\tau$  gehörigen Einträge von  $\mathbf{x}$  enthält. Weiters seien  $\lambda_i$  stetige lineare Funktionale mit  $\lambda_i(\psi_j) = \delta_{i,j}$ , wobei  $\delta_{i,j}$  das Kronecker-Delta bezeichnet. Wir verlangen zusätzlich die lokale Stabilitätseigenschaft

$$\|\lambda_i(w)\psi_i\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|w\|_{L^2(\operatorname{supp}\psi_i)} \tag{5.3}$$

für  $w \in L^2(\Omega)$ , wobei die versteckte Konstante nur von der Formregularität der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  abhängt. Für die Existenz von derartigen Funktionalen verweisen wir auf [SZ90]. Wir definieren Abbildungen

$$\Phi_{\tau}: \mathbb{R}^{\tau} \to S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D), \quad \mathbf{x} \mapsto \sum_{j \in \tau} \mathbf{x}_j \psi_j, \quad \text{und} \quad \Lambda_{\tau}: L^2(\Omega) \to \mathbb{R}^{\tau}, \quad w \mapsto \overline{\mathbf{w}}, \quad (5.4)$$

wobei  $\overline{\mathbf{w}}$  gegeben ist durch  $\overline{\mathbf{w}}_i = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_i(w) & \text{falls } i \in \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right.$ . Die Komposition  $\Phi_\tau \Lambda_\tau$  ist die

Einschränkung eines Interpolationsoperators mit Bild  $S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h;\Gamma_D)$  auf  $\omega_{\tau}$  gegeben durch (2.33). Also folgt speziell für eine stückweise polynomielle Funktion  $\widetilde{\phi} \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h;\Gamma_D)$ , dass  $\Phi_{\tau}(\Lambda_{\tau}\widetilde{\phi}) = \widetilde{\phi}|_{\omega_{\tau}}$ . Aus der Stabilitätseigenschaft (5.3) folgt die  $L^2(\Omega)$ -Stabilität des Interpolationsoperators  $\Phi_{\mathcal{I}}\Lambda_{\mathcal{I}}$ .

Für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\tau}$  liefert (2.8) dann

$$Ch^{d/2} \|\mathbf{x}\|_{2} \le \|\Phi_{\tau}(\mathbf{x})\|_{L^{2}(\Omega)} \le \widetilde{C}h^{d/2} \|\mathbf{x}\|_{2}.$$
 (5.5)

Die Adjungierte  $\Lambda_{\mathcal{I}}^*: \mathbb{R}^{N_{\Omega}} \to L^2(\Omega)' \simeq L^2(\Omega)$  von  $\Lambda_{\mathcal{I}}$  erfüllt wegen (2.8) und der  $L^2$ -Stabilität von  $\Phi_{\mathcal{I}}\Lambda_{\mathcal{I}}$ , dass

$$\begin{split} \|\Lambda_{\mathcal{I}}^* \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)} &= \sup_{w \in L^2(\Omega)} \frac{\langle \mathbf{b}, \Lambda_{\mathcal{I}} w \rangle_2}{\|w\|_{L^2(\Omega)}} \lesssim \|\mathbf{b}\|_2 \sup_{w \in L^2(\Omega)} \frac{h^{-d/2} \|\Phi_{\mathcal{I}} \Lambda_{\mathcal{I}} w\|_{L^2(\Omega)}}{\|w\|_{L^2(\Omega)}} \\ &\lesssim h^{-d/2} \|\mathbf{b}\|_2 \,. \end{split}$$

Sei  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N_{\Omega}}$  beliebig, dann definieren wir  $f := \Lambda_{\mathcal{I}}^* \mathbf{b}|_{\sigma}$  und erhalten  $b_i = \langle f, \psi_i \rangle_{L^2(\Omega)}$  für  $i \in \sigma$  sowie supp  $f \subset \overline{B_{R_{\sigma}} \cap \Omega}$ . Proposition 4.1 liefert einen endlich dimensionalen Raum  $\widehat{W}_k$  und eine Funktion  $\widehat{w} \in \widehat{W}_k$ , die die Galerkin-Lösung  $\phi_h|_{B_{R_{\tau}} \cap \Omega}$  auf der Box  $B_{R_{\tau}}$  gut approximiert. Hierbei sei erwähnt, dass für die Konstruktion des Raumes  $\widehat{W}_k$  die Funktion f irrelevant ist, der Raum hängt nur vom Cluster-Paar  $\tau \times \sigma$  ab. Die Abschätzung (5.5), das Approximationsresultat aus Proposition 4.1 und  $\|\Pi^{L^2} f\|_{L^2(\Omega)} = \|\Lambda_{\mathcal{I}}^* \mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^{-d/2} \|\mathbf{b}\|_2$  liefern

$$\|\Lambda_{\tau}\phi_{h} - \Lambda_{\tau}\widehat{w}\|_{2} \lesssim h^{-d/2} \|\Phi_{\tau}(\Lambda_{\tau}\phi_{h} - \Lambda_{\tau}\widehat{w})\|_{L^{2}(\Omega)} \lesssim h^{-d/2} \|\phi_{h} - \widehat{w}\|_{L^{2}(B_{R_{\tau}}\cap\Omega)}$$
$$\lesssim h^{-d/2} q^{k} \|\Pi^{L^{2}} f\|_{L^{2}(\Omega)} \lesssim h^{-d} q^{k} \|\mathbf{b}\|_{2}.$$

Wir definieren den Raum

$$\mathcal{W} := \{ \Lambda_{\tau} \widehat{w} : \widehat{w} \in \widehat{W}_k \}$$

und setzen die Spalten von  $\mathbf{X}_{\tau\sigma}$  aus einer Orthogonalbasis von  $\mathcal{W}$  zusammen. Dann ist der Rang von  $\mathbf{X}_{\tau\sigma}$  beschränkt durch  $C_{\dim}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ . Da  $\mathbf{X}_{\tau\sigma} \mathbf{X}_{\tau\sigma}^T$  die Orthogonalprojektion auf  $\mathcal{W}$  ist, erhalten wir die Bestapproximation von  $\Lambda_{\tau}\phi_h$  in  $\mathcal{W}$  durch  $\mathbf{z} := \mathbf{X}_{\tau\sigma} \mathbf{X}_{\tau\sigma}^T \Lambda_{\tau}\phi_h$ , was auf

$$\|\Lambda_{\tau}\phi_{h} - \mathbf{z}\|_{2} \leq \|\Lambda_{\tau}\phi_{h} - \Lambda_{\tau}\widehat{w}\|_{2} \lesssim h^{-d}q^{k} \|\mathbf{b}\|_{2} \simeq N_{\Omega}q^{k} \|\mathbf{b}\|_{2}$$

$$(5.6)$$

führt. Da  $\Lambda_{\tau}\phi_h = \mathbf{A}^{-1}|_{\tau\times\sigma}\mathbf{b}|_{\sigma}$ , liefert die Definition  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} := \mathbf{A}^{-1}|_{\tau\times\sigma}^T\mathbf{X}_{\tau\sigma}$ , dass  $\mathbf{z} = \mathbf{X}_{\tau\sigma}\mathbf{Y}_{\tau\sigma}^T\mathbf{b}|_{\sigma}$ . Mittels der Schranke (5.6) erhalten wir nun

$$\|\left(\mathbf{A}^{-1}|_{\tau \times \sigma} - \mathbf{X}_{\tau \sigma} \mathbf{Y}_{\tau \sigma}^{T}\right) \mathbf{b}|_{\sigma}\|_{2} \lesssim N_{\Omega} q^{k} \|\mathbf{b}\|_{2}. \tag{5.7}$$

Der Raum W hängt nur vom Cluster-Paar  $\tau \times \sigma$  ab, und da  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N_{\Omega}}$  beliebig gewählt war, ist somit die gewünschte Aussage gezeigt.

Beweis von Satz 3.1. Satz 5.1 liefert Matrizen  $\mathbf{X}_{\tau\sigma} \in \mathbb{R}^{|\tau| \times r}$ ,  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} \in \mathbb{R}^{|\sigma| \times r}$ , und somit kann eine  $\mathcal{H}$ -Matrix  $\mathbf{B}_{\mathcal{H}}$  blockweise definiert werden mittels

$$\mathbf{B}_{\mathcal{H}}|_{\tau \times \sigma} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{X}_{\tau \sigma} \mathbf{Y}_{\tau \sigma}^T & \text{falls } \tau \times \sigma \in P_{\text{far}}, \\ \mathbf{A}^{-1}|_{\tau \times \sigma} & \text{sonst.} \end{array} \right.$$

Auf jedem zulässigen Block  $\tau \times \sigma \in P_{\text{far}}$  kann man die blockweisen Abschätzungen von Satz 5.1 verwenden und erhält

$$\|(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}_{\mathcal{H}})|_{\tau \times \sigma}\|_{2} \le C_{\mathrm{apx}} N_{\Omega} q^{k}.$$

Auf nicht zulässigen Blöcken besteht  $\mathbf{B}_{\mathcal{H}}$  aus dem exakten Matrixblock der inversen Matrix, und somit ist der Fehler gleich Null. Mit Lemma 2.15 folgt aus den blockweisen Abschätzungen schlussendlich eine Abschätzung für die gesamte Matrix als

$$\|\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}_{\mathcal{H}}\|_{2} \leq C_{\mathrm{sp}} \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \max\{ \|(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}_{\mathcal{H}})|_{\tau \times \sigma} \|_{2} : \tau \times \sigma \in P, \operatorname{level}(\tau) = \ell \} \right)$$

$$\leq C_{\mathrm{apx}} C_{\mathrm{sp}} N_{\Omega} q^{k} \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}).$$

Da  $r = C_{\text{dim}}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ , erhält man mittels der Definition  $b = -\frac{\ln(q)}{C_{\text{dim}}^{1/(d+1)}} q^{d/(d+1)} (2+\eta)^{-d/(1+d)} > 0$ , dass  $q^k = e^{-br^{1/(d+1)}}$ , und somit

$$\|\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}_{\mathcal{H}}\|_{2} \le C_{\mathrm{apx}} C_{\mathrm{sp}} N_{\Omega} \mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}}$$

was den Beweis beendet.

In den Beweisen von Satz 5.1 sowie Satz 3.1 treten die betrachteten Randbedingungen nur in der Definition der lokalen Isomorphismen in (5.4) sowie bei der Anwendung des Approximationsresultats aus Proposition 4.1 auf. Klarerweise lassen sich für das Neumann-Problem und einer Basis von  $S^{p,1}(\mathcal{T}_h)$  lineare Funktionale  $\lambda_i$  sowie Abbildungen  $\Phi_{\tau}$ ,  $\Lambda_{\tau}$  in gleicher Weise konstruieren. Proposition 4.5 liefert ein analoges Approximationsresultat an die Galerkin-Lösung wie Proposition 4.1, womit die algebraischen Argumente aus dem Beweis von Satz 5.1 auch ein Blockapproximationsresultat für einen zulässigen Teilblock von  $\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{-1}|_{N_{\mathcal{N}}\times N_{\mathcal{N}}}$  liefern. Diese blockweise Niedrigrangfaktorisierung liefert wie im Beweis von Satz 3.1 die gewünschte  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation in Satz 3.3.

### 5.2 Inverse FEM-Matrizen für die Lamé-Gleichung

In diesem Abschnitt wird, ähnlich zum vorherigen Abschnitt 5.1, die Existenz einer  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an die inverse FEM-Matrix für die Lamé-Gleichung, formuliert in Satz 3.6, gezeigt. Wir starten mit einer Niedrigrangapproximation an einen zulässigen Teilblock von  $\mathbf{A}^{-1}$ .

**Satz 5.2.** Sei der Zulässigkeitsparameter  $\eta > 0$  fixiert,  $q \in (0,1)$  und das Cluster-Paar  $\tau \times \sigma$   $\eta$ -zulässig. Dann existieren für jedes  $k \in \mathbb{N}$  Matrizen  $\mathbf{X}_{\tau\sigma} \in \mathbb{R}^{|\tau| \times r}$ ,  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} \in \mathbb{R}^{|\sigma| \times r}$  mit Rang  $r \leq C_{\text{dim}}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ , sodass

$$\left\| \mathbf{A}^{-1} \right\|_{\tau \times \sigma} - \mathbf{X}_{\tau \sigma} \mathbf{Y}_{\tau \sigma}^{T} \right\|_{2} \le C_{\text{apx}} h^{-d} q^{k}. \tag{5.8}$$

Die Konstanten  $C_{apx}$ ,  $C_{dim} > 0$  hängen nur von  $\Omega$ , d, p, den Lamé-Konstanten  $\lambda$ ,  $\mu$  und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab.

 $\begin{array}{l} \textit{Beweis.} \; \text{Falls} \; C_{\dim}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1} \geq \min\{|\tau|\,, |\sigma|\}, \, \text{verwenden wir den exakten Matrixblock} \\ \mathbf{X}_{\tau\sigma} = \mathbf{A}^{-1}|_{\tau\times\sigma} \; \text{und setzen} \; \mathbf{Y}_{\tau\sigma} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{|\sigma|\times|\sigma|} \; \text{im Fall } \min\{|\tau|\,, |\sigma|\} = |\sigma| \; \text{und} \; \mathbf{X}_{\tau\sigma} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{|\tau|\times|\tau|} \; \text{und} \; \mathbf{Y}_{\tau\sigma} = \mathbf{A}^{-1}|_{\tau\times\sigma} \; \text{für } \min\{|\tau|\,, |\sigma|\} = |\tau|. \end{array}$ 

Falls  $C_{\dim}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1} < \min\{|\tau|, |\sigma|\}$ , konstruieren wir eine Niedrigrangfaktorisierung mit Hilfe des Approximationsresultats aus Proposition 4.7. Seien hierfür  $\lambda_i : L^2(\Omega)^d \to \mathbb{R}$  stetige, lineare Funktionale mit  $\lambda_i(\psi_j) = \delta_{i,j}$  und  $\|\lambda_i(\mathbf{w})\psi_i\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{w}\|_{L^2(\text{supp}|\psi_i|)}$  für  $\mathbf{w} \in L^2(\Omega)^d$ , wobei die versteckte Konstante nur von der Formregularität der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  abhängt. Mit  $\mathbb{R}^\tau := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{dN_\Omega} : \mathbf{x}_i = 0 \ \forall \ i \notin \tau \}$  definieren wir die Abbildungen

$$\Lambda_{\tau} : L^{2}(\Omega)^{d} \to \mathbb{R}^{\tau}, \mathbf{v} \mapsto \overline{\mathbf{w}}, \text{ mit } \overline{\mathbf{w}}_{i} = \begin{cases} \lambda_{i}(\mathbf{v}) & \text{falls } i \in \tau \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\Phi_{\tau} : \mathbb{R}^{\tau} \to S_{0}^{p,1}(\mathcal{T}_{h})^{d}, \mathbf{x} \mapsto \sum_{j \in \tau} \mathbf{x}_{j} \psi_{j}.$$

Weiters ist  $\Phi_{\tau}\Lambda_{\tau}$  ein Interpolationsoperator, der auf die Einschränkung von  $S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d$  auf  $\omega_{\tau} := \operatorname{interior}\left(\bigcup_{i \in \tau} \operatorname{supp} |\psi_i|\right)$  abbildet. Speziell folgt für  $\widetilde{\mathbf{w}} \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d$ , dass  $\Phi_{\tau}(\Lambda_{\tau}(\widetilde{\mathbf{w}})) = \widetilde{\mathbf{w}}|_{\omega_{\tau}}$ . Für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\tau}$  liefert (2.8)

$$Ch^{d/2} \|\mathbf{x}\|_{2} \le \|\Phi_{\tau}(\mathbf{x})\|_{L^{2}(\Omega)} \le \widetilde{C}h^{d/2} \|\mathbf{x}\|_{2},$$
 (5.9)

was mit der  $L^2$ -Stabilität von  $\Phi_{\mathcal{I}}\Lambda_{\mathcal{I}}$  auf die Abschätzung  $\|\Lambda_{\mathcal{I}}^*\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)} \leq h^{-d/2} \|\mathbf{b}\|_2$  für den adjungierten Operator  $\Lambda_{\mathcal{I}}^* : \mathbb{R}^{dN_{\Omega}} \to (L^2(\Omega)^d)' \simeq L^2(\Omega)^d$  von  $\Lambda_{\mathcal{I}}$  führt.

Sei  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{dN_{\Omega}}$  beliebig. Definiert man  $\mathbf{f} := \Lambda_{\mathcal{I}}^* \mathbf{b}|_{\sigma}$ , so folgt supp  $|\mathbf{f}| \subset \overline{B_{R_{\sigma}} \cap \Omega}$ . Proposition 4.7 liefert nun einen endlich dimensionalen Raum  $\widehat{\mathbf{W}}_k$  und eine gute Approximation  $\widehat{\mathbf{w}} \in \widehat{\mathbf{W}}_k$  an die Galerkin-Lösung  $\mathbf{u}_h|_{B_{R_{\tau}} \cap \Omega}$ . Die Konstruktion des Raumes  $\widehat{\mathbf{W}}_k$  ist hierbei unabhängig von  $\mathbf{f}$  und hängt nur vom Cluster-Paar  $\tau \times \sigma$  ab. Mit (5.9), dem Approximationsresultat aus Proposition 4.7 und  $\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Lambda_{\mathcal{I}}^*\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^{-d/2} \|\mathbf{b}\|_2$  erhalten wir

$$\begin{split} \|\Lambda_{\tau}\mathbf{u}_{h} - \Lambda_{\tau}\widehat{\mathbf{w}}\|_{2} &\lesssim h^{-d/2} \|\Phi_{\tau}(\Lambda_{\tau}\mathbf{u}_{h} - \Lambda_{\tau}\widehat{\mathbf{w}})\|_{L^{2}(\Omega)} \leq h^{-d/2} \|\mathbf{u}_{h} - \widehat{\mathbf{w}}\|_{L^{2}(B_{R_{\tau}}\cap\Omega)} \\ &\lesssim h^{-d/2}q^{k} \|\mathbf{f}\|_{L^{2}(\Omega)} \lesssim h^{-d}q^{k} \|\mathbf{b}\|_{2} \,. \end{split}$$

Um dies nun auf Matrizen zu übertragen, definieren wir

$$\mathcal{W} := \{ \Lambda_{\tau} \widehat{\mathbf{w}} : \widehat{\mathbf{w}} \in \widehat{\mathbf{W}}_k \}.$$

Seien nun die Spalten von  $\mathbf{X}_{\tau\sigma}$  eine Orthogonalbasis des endlich dimensionalen Raumes  $\mathcal{W}$ . Dann ist der Rang von  $\mathbf{X}_{\tau\sigma}$  beschränkt durch  $C_{\dim}(2+\eta)^dq^{-d}k^{d+1}$ . Da  $\mathbf{X}_{\tau\sigma}\mathbf{X}_{\tau\sigma}^T$  die Orthogonalprojektion auf  $\mathcal{W}$  ist, erhalten wir, dass  $\mathbf{z} := \mathbf{X}_{\tau\sigma}\mathbf{X}_{\tau\sigma}^T\Lambda_{\tau}\mathbf{u}_h$  die Bestapproximation an  $\Lambda_{\tau}\mathbf{u}_h$  in  $\mathcal{W}$  ist, und es folgt

$$\|\Lambda_{\tau}\mathbf{u}_h - \mathbf{z}\|_2 \leq \|\Lambda_{\tau}\mathbf{u}_h - \Lambda_{\tau}\widehat{\mathbf{w}}\|_2 \lesssim h^{-d}q^k \|\mathbf{b}\|_2$$
.

Wir definieren  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} := \mathbf{A}^{-1}|_{\tau\times\sigma}^T \mathbf{X}_{\tau\sigma}$ , was mit  $\Lambda_{\tau}\mathbf{u}_h = \mathbf{A}^{-1}|_{\tau\times\sigma}\mathbf{b}|_{\sigma}$  auf  $\mathbf{z} = \mathbf{X}_{\tau\sigma}\mathbf{Y}_{\tau\sigma}^T\mathbf{b}|_{\sigma}$  und somit auf

$$\left\| \left( \mathbf{A}^{-1} |_{\tau \times \sigma} - \mathbf{X}_{\tau \sigma} \mathbf{Y}_{\tau \sigma}^{T} \right) \mathbf{b} |_{\sigma} \right\|_{2} \lesssim h^{-d} q^{k} \left\| \mathbf{b} \right\|_{2}$$
 (5.10)

führt. Der Raum W hängt nur vom Cluster-Paar  $\tau \times \sigma$  ab, und die Abschätzung (5.10) gilt für beliebiges **b**, womit der Beweis beendet ist.

Für das reine Neumann-Problem kann mit Hilfe von Proposition 4.10 in gleicher Weise eine blockweise Niedrigrangfaktorisierung für einen zulässigen Block der Inversen  $\mathbf{A}_{\mathcal{N}}^{-1}|_{N_{\mathcal{N}}\times N_{\mathcal{N}}}$ konstruiert werden. Somit können wir schlussendlich unsere Hauptresultate, Satz 3.6 und Satz 3.8, zeigen.

Beweis von Satz 3.6 und Satz 3.8. Der vorherige Satz 5.2 liefert Rang-r-Matrizen  $\mathbf{X}_{\tau\sigma} \in \mathbb{R}^{|\tau| \times r}$  und  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} \in \mathbb{R}^{|\sigma| \times r}$ . Somit können wir eine  $\mathcal{H}$ -Matrix  $\mathbf{B}_{\mathcal{H}}$  definieren durch

$$\mathbf{B}_{\mathcal{H}}|_{\tau \times \sigma} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{X}_{\tau \sigma} \mathbf{Y}_{\tau \sigma}^{T} & \text{falls } \tau \times \sigma \in P_{\text{far}}, \\ \mathbf{A}^{-1}|_{\tau \times \sigma} & \text{sonst.} \end{array} \right.$$

Auf jedem zulässigen Block  $\tau \times \sigma \in P_{\text{far}}$  verwenden wir die Abschätzung aus Satz 5.2 und erhalten

$$\|(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}_{\mathcal{H}})|_{\tau \times \sigma}\|_{2} \le C_{\mathrm{apx}} h^{-d} q^{k}.$$

Auf allen nicht zulässigen Blöcken ist der Fehler auf Grund der Definition von  $\mathbf{B}_{\mathcal{H}}$  gleich Null. Daher folgt mit Lemma 2.15

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}_{\mathcal{H}} \right\|_{2} &\leq C_{\mathrm{sp}} \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \max \{ \left\| (\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}_{\mathcal{H}}) |_{\tau \times \sigma} \right\|_{2} : \tau \times \sigma \in P, \operatorname{level}(\tau) = \ell \} \right) \\ &\leq C_{\mathrm{apx}} C_{\mathrm{sp}} h^{-d} q^{k} \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}). \end{aligned}$$

Mit  $r = C_{\text{dim}}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ , definieren wir  $b := -\frac{\ln(q)}{C_{\text{dim}}^{1/(d+1)}} q^{d/(d+1)} (2+\eta)^{-d/(d+1)} > 0$ , womit  $q^k = e^{-br^{1/(d+1)}}$  folgt, und somit

$$\|\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}_{\mathcal{H}}\|_2 \le C_{\mathrm{apx}} C_{\mathrm{sp}} h^{-d} \mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}}$$

was den Beweis beendet.

### 5.3 Inverse BEM-Matrizen für den Einfachschichtoperator

In ähnlicher Weise wie in Abschnitt 5.1– 5.2 wird mit Hilfe der niedrigdimensionalen Approximationen an die Galerkin-Lösung aus Abschnitt 4.4 eine  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an die inverse Galerkin-Matrix  $\mathbf{V}^{-1}$  aus (3.40) konstruiert. Im Gegensatz zu den Finite Elemente Diskretisierungen aus den vorherigen Abschnitten werden hier lokale Versionen des Basisisomorphismus (2.11) verwendet.

**Satz 5.3.** Sei der Zulässigkeitsparameter  $\eta > 0$  fixiert,  $q \in (0,1)$  und das Cluster-Paar  $\tau \times \sigma$   $\eta$ -zulässig. Dann existieren für jedes  $k \in \mathbb{N}$  Matrizen  $\mathbf{X}_{\tau\sigma} \in \mathbb{R}^{|\tau| \times r}$ ,  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} \in \mathbb{R}^{|\sigma| \times r}$  mit maximalem Rang  $r \leq C_{\dim}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ , sodass

$$\left\| \mathbf{V}^{-1} \right\|_{\tau \times \sigma} - \mathbf{X}_{\tau \sigma} \mathbf{Y}_{\tau \sigma}^{T} \right\|_{2} \le C_{\text{apx}} N_{\Gamma}^{(d+1)/(d-1)} q^{k}. \tag{5.11}$$

Die Konstanten  $C_{apx}$ ,  $C_{dim} > 0$  hängen nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  ab.

Beweis. Falls  $C_{\dim}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1} \ge \min\{|\tau|, |\sigma|\}$ , verwenden wir den exakten Matrixblock  $\mathbf{X}_{\tau\sigma} = \mathbf{V}^{-1}|_{\tau\times\sigma}$  und  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{|\sigma|\times|\sigma|}$  im Fall  $\min\{|\tau|, |\sigma|\} = |\sigma|$  und  $\mathbf{X}_{\tau\sigma} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{|\tau|\times|\tau|}$  und  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} = \mathbf{V}^{-1}|_{\tau\times\sigma}$  für  $\min\{|\tau|, |\sigma|\} = |\tau|$ .

und  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} = \mathbf{V}^{-1}|_{\tau\times\sigma}$  für  $\min\{|\tau|, |\sigma|\} = |\tau|$ . Für den Fall  $C_{\dim}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1} < \min\{|\tau|, |\sigma|\}$  definieren wir zunächst stetige lineare Funktionale  $\lambda_i$  mit  $\lambda_i(\xi_j) = \delta_{i,j}$  und der Stabilitätseigenschaft  $\|\lambda_i(w)\xi_i\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim \|w\|_{L^2(\operatorname{supp}\xi_i)}$  für  $w \in L^2(\Gamma)$ , wobei die versteckte Konstante nur von der Formregularität der Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  abhängt. Mit  $\mathbb{R}^{\tau} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma}} : \mathbf{x}_i = 0 \, \forall i \notin \tau\}$  definieren wir die Abbildungen

$$\Phi_{\tau}: \mathbb{R}^{\tau} \to S^{p,0}(\mathcal{E}_h), \quad \mathbf{x} \mapsto \sum_{j \in \tau} \mathbf{x}_j \xi_j, \quad \text{und} \quad \Lambda_{\tau}: L^2(\Gamma) \to \mathbb{R}^{\tau}, \quad w \mapsto \overline{\mathbf{w}},$$

wobei der Vektor  $\overline{\mathbf{w}}$  gegeben ist durch  $\overline{\mathbf{w}}_i = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_i(w) & \text{falls } i \in \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right.$ . Die Komposition  $\Phi_\tau \Lambda_\tau$  ist abermals die Einschränkung eines Interpolationsoperators mit Bild  $S^{p,0}(\mathcal{E}_h)$  auf  $\Gamma_\tau$  gegeben durch (2.34). Also folgt speziell für eine stückweise polynomielle Funktion  $\widetilde{\phi} \in S^{p,0}(\mathcal{E}_h)$ , dass  $\Phi_\tau (\Lambda_\tau \widetilde{\phi}) = \widetilde{\phi}|_{\Gamma_\tau}$ . Für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\tau$  liefert (2.11) dann

$$Ch^{(d-1)/2} \|\mathbf{x}\|_{2} \leq \|\Phi_{\tau}(\mathbf{x})\|_{L^{2}(\Gamma)} \leq \widetilde{C}h^{(d-1)/2} \|\mathbf{x}\|_{2}.$$
 (5.12)

Die Adjungierte  $\Lambda_{\mathcal{I}}^*: \mathbb{R}^{N_{\Gamma}} \to L^2(\Gamma)' \simeq L^2(\Gamma)$  von  $\Lambda_{\mathcal{I}}$  erfüllt wegen (2.11) und der  $L^2$ -Stabilität von  $\Phi_{\mathcal{I}}\Lambda_{\mathcal{I}}$ , dass

$$\|\Lambda_{\mathcal{I}}^* \mathbf{b}\|_{L^2(\Gamma)} = \sup_{w \in L^2(\Gamma)} \frac{\langle \mathbf{b}, \Lambda_{\mathcal{I}} w \rangle_2}{\|w\|_{L^2(\Gamma)}} \lesssim \|\mathbf{b}\|_2 \sup_{w \in L^2(\Gamma)} \frac{h^{-(d-1)/2} \|\Phi_{\mathcal{I}} \Lambda_{\mathcal{I}} w\|_{L^2(\Gamma)}}{\|w\|_{L^2(\Gamma)}}$$
$$\lesssim h^{-(d-1)/2} \|\mathbf{b}\|_2.$$

Sei  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma}}$  beliebig, dann definieren wir  $f := \Lambda_{\mathcal{I}}^* \mathbf{b}|_{\sigma}$  und erhalten  $b_i = \langle f, \xi_i \rangle_{L^2(\Gamma)}$  für  $i \in \sigma$  sowie supp  $f \subset \overline{B_{R_{\sigma}} \cap \Gamma}$ . Proposition 4.12 liefert einen endlich dimensionalen Raum  $\widehat{W}_k$  und

eine gute Approximation  $\widehat{w} \in \widehat{W}_k$  an die Galerkin-Lösung  $\phi_h|_{B_{R_\tau}\cap\Gamma}$  auf der Box  $B_{R_\tau}$ . Die Abschätzung (5.12), das Approximationsresultat aus Proposition 4.12 und  $\left\|\Pi^{L^2}f\right\|_{L^2(\Gamma)} = \|\Lambda_T^*\mathbf{b}\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim h^{-(d-1)/2} \|\mathbf{b}\|_2$  liefern

$$\begin{split} \|\Lambda_{\tau}\phi_{h} - \Lambda_{\tau}\widehat{w}\|_{2} &\lesssim h^{-(d-1)/2} \|\Phi_{\tau}(\Lambda_{\tau}\phi_{h} - \Lambda_{\tau}\widehat{w})\|_{L^{2}(\Gamma)} \lesssim h^{-(d-1)/2} \|\phi_{h} - \widehat{w}\|_{L^{2}(B_{R_{\tau}}\cap\Gamma)} \\ &\lesssim h^{-(d-1)/2-2}q^{k} \|\Pi^{L^{2}}f\|_{L^{2}(\Gamma)} \lesssim h^{-(d+1)}q^{k} \|\mathbf{b}\|_{2} \,. \end{split}$$

Weiters definieren wir den Raum

$$\mathcal{W} := \{ \Lambda_{\tau} \widehat{w} : \widehat{w} \in \widehat{W}_k \}$$

und setzen die Spalten von  $\mathbf{X}_{\tau\sigma}$  aus einer Orthogonalbasis des Raumes  $\mathcal{W}$  zusammen. Dann ist der Rang von  $\mathbf{X}_{\tau\sigma}$  beschränkt durch  $C_{\dim}(2+\eta)^dq^{-d}k^{d+1}$ . Da  $\mathbf{X}_{\tau\sigma}\mathbf{X}_{\tau\sigma}^T$  die Orthogonalprojektion auf  $\mathcal{W}$  ist, erhalten wir die Bestapproximation von  $\Lambda_{\tau}\phi_h$  in  $\mathcal{W}$  durch  $\mathbf{z} := \mathbf{X}_{\tau\sigma}\mathbf{X}_{\tau\sigma}^T\Lambda_{\tau}\phi_h$ , was auf

$$\|\Lambda_{\tau}\phi_h - \mathbf{z}\|_2 \le \|\Lambda_{\tau}\phi_h - \Lambda_{\tau}w\|_2 \lesssim h^{-(d+1)}q^k \|\mathbf{b}\|_2 \simeq N_{\Gamma}^{(d+1)/(d-1)}q^k \|\mathbf{b}\|_2$$

führt. Da  $\Lambda_{\tau}\phi_h = \mathbf{V}^{-1}|_{\tau\times\sigma}\mathbf{b}|_{\sigma}$ , liefert die Definition  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} := \mathbf{V}^{-1}|_{\tau\times\sigma}^T\mathbf{X}_{\tau\sigma}$ , dass  $\mathbf{z} = \mathbf{X}_{\tau\sigma}\mathbf{Y}_{\tau\sigma}^T\mathbf{b}|_{\sigma}$ . Somit folgt

$$\| \left( \mathbf{V}^{-1} |_{\tau \times \sigma} - \mathbf{X}_{\tau \sigma} \mathbf{Y}_{\tau \sigma}^{T} \right) \mathbf{b} |_{\sigma} \|_{2} \lesssim N_{\Gamma}^{(d+1)/(d-1)} q^{k} \| \mathbf{b} \|_{2}. \tag{5.13}$$

Der Raum  $\widehat{W}_k$  hängt nur vom Cluster-Paar  $\tau \times \sigma$  ab, und da  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma}}$  beliebig gewählt war, ist somit die gewünschte Aussage gezeigt.

Beweis von Satz 3.12. Satz 5.3 liefert Matrizen  $\mathbf{X}_{\tau\sigma} \in \mathbb{R}^{|\tau| \times r}$ ,  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} \in \mathbb{R}^{|\sigma| \times r}$ , und somit kann eine  $\mathcal{H}$ -Matrix  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$  definiert werden mittels

$$\mathbf{W}_{\mathcal{H}}|_{\tau \times \sigma} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{X}_{\tau \sigma} \mathbf{Y}_{\tau \sigma}^{T} & \text{falls } \tau \times \sigma \in P_{\text{far}}, \\ \mathbf{V}^{-1}|_{\tau \times \sigma} & \text{sonst.} \end{array} \right.$$

Auf jedem zulässigen Block  $\tau \times \sigma \in P_{\text{far}}$  kann man die blockweisen Abschätzungen von Satz 5.3 anwenden und erhält

$$\|(\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{W}_{\mathcal{H}})|_{\tau \times \sigma}\|_{2} \le C_{\text{apx}} N_{\Gamma}^{(d+1)/(d-1)} q^{k}.$$

Auf nicht zulässigen Blöcken verwendet man den exakten Matrixblock, wodurch kein Fehler gemacht wird. Somit folgt mit Lemma 2.15, dass

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{W}_{\mathcal{H}} \right\|_{2} &\leq C_{\mathrm{sp}} \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \max \{ \left\| (\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}_{\mathcal{H}}) \right|_{\tau \times \sigma} \right\|_{2} : \tau \times \sigma \in P, \operatorname{level}(\tau) = \ell \} \right) \\ &\leq C_{\mathrm{apx}} C_{\mathrm{sp}} N_{\Gamma}^{(d+1)/(d-1)} q^{k} \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}). \end{aligned}$$

Mit  $r = C_{\text{dim}}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ , erhält man mittels der Definition  $b = -\frac{\ln(q)}{C_{\text{dim}}^{1/(d+1)}} q^{d/(d+1)} (2+\eta)^{-d/(1+d)} > 0$ , dass  $q^k = e^{-br^{1/(d+1)}}$ , und somit

$$\left\|\mathbf{V}^{-1}-\mathbf{W}_{\mathcal{H}}\right\|_{2} \leq C_{\mathrm{apx}}C_{\mathrm{sp}}N_{\Gamma}^{(d+1)/(d-1)}\mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}})e^{-br^{1/(d+1)}}$$

was den Beweis beendet.

# 5.4 Inverse BEM-Matrizen für den hypersingulären Integraloperator

In ähnlicher Weise wie in den Abschnitten 5.1-5.3 wird mit Hilfe von Proposition 4.20 eine  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an die inverse Galerkin-Matrix  $\mathcal{W}^{-1}$  aus (3.48) konstruiert. Die Argumente verlaufen analog zum Beweis von Satz 5.3, weshalb der nachfolgende Beweis verkürzt geführt wird.

**Satz 5.4.** Sei der Zulässigkeitsparameter  $\eta > 0$  fixiert,  $q \in (0,1)$  und das Cluster-Paar  $\tau \times \sigma$   $\eta$ -zulässig. Dann existieren für jedes  $k \in \mathbb{N}$  Matrizen  $\mathbf{X}_{\tau\sigma} \in \mathbb{R}^{|\tau| \times r}$ ,  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} \in \mathbb{R}^{|\sigma| \times r}$  mit maximalem Rang  $r \leq C_{\text{dim}}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ , sodass

$$\|\boldsymbol{\mathcal{W}}^{-1}|_{\tau \times \sigma} - \mathbf{X}_{\tau \sigma} \mathbf{Y}_{\tau \sigma}^{T}\|_{2} \le C_{\text{apx}} N_{\Gamma}^{(2d-1)/(2d-2)} q^{k}. \tag{5.14}$$

Die Konstanten  $C_{\rm apx}$ ,  $C_{\rm dim} > 0$  hängen nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  ab.

Beweis. Falls  $C_{\dim}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1} \ge \min\{|\tau|, |\sigma|\}$ , verwenden wir den exakten Matrixblock  $\mathbf{X}_{\tau\sigma} = \mathbf{\mathcal{W}}^{-1}|_{\tau\times\sigma}$  und  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{|\sigma|\times|\sigma|}$  im Fall  $\min\{|\tau|, |\sigma|\} = |\sigma|$  und  $\mathbf{X}_{\tau\sigma} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{|\tau|\times|\tau|}$  und  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} = \mathbf{\mathcal{W}}^{-1}|_{\tau\times\sigma}$  für  $\min\{|\tau|, |\sigma|\} = |\tau|$ .

Falls  $C_{\text{dim}}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1} < \min\{|\tau|, |\sigma|\}$ , definieren wir die Abbildungen

$$\Phi_{\tau}: \mathbb{R}^{\tau} \to S^{p,1}(\mathcal{E}_h), \quad \mathbf{x} \mapsto \sum_{j \in \tau} \mathbf{x}_j \xi_j, \quad \text{und} \quad \Lambda_{\tau}: L^2(\Omega) \to \mathbb{R}^{\tau}, \quad w \mapsto \overline{\mathbf{w}},$$

wobei der Vektor  $\overline{\mathbf{w}}$  gegeben ist durch  $\overline{\mathbf{w}}_i = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_i(w) & \text{falls } i \in \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right.$ mit linearen Funktionalen  $\lambda_i$  wie im Beweis von Satz 5.3.

Sei  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma}}$  und definiere  $f := \Lambda_{\mathcal{I}}^* \mathbf{b}|_{\sigma}$ . Proposition 4.20 liefert einen endlich dimensionalen Raum  $\widehat{W}_k$  und ein Element  $\widehat{w} \in \widehat{W}_k$ , das  $\phi_h|_{B_{R_{\tau}} \cap \Gamma}$  gut approximiert. Mit (2.11), dem Approximationsresultat aus Proposition 4.20 und  $\|\Lambda_{\mathcal{I}}^* \mathbf{b}\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim h^{-(d-1)/2} \|\mathbf{b}\|_2$  folgt

$$\begin{split} \|\Lambda_{\tau}\phi_{h} - \Lambda_{\tau}\widehat{w}\|_{2} &\lesssim h^{-(d-1)/2} \|\Phi_{\tau}(\Lambda_{\tau}\phi_{h} - \Lambda_{\tau}\widehat{w})\|_{L^{2}(\Gamma)} \leq h^{-(d-1)/2} \|\phi_{h} - \widehat{w}\|_{L^{2}(B_{R_{\tau}} \cap \Gamma)} \\ &\lesssim h^{-(d-1)/2 - 1/2} q^{k} \|\Pi^{L^{2}}f\|_{L^{2}(\Gamma)} \lesssim h^{-(2d-1)/2} q^{k} \|\mathbf{b}\|_{2} \,. \end{split}$$

Wählt man die Spalten von  $\mathbf{X}_{\tau\sigma}$  als Orthogonalbasis von  $\mathcal{W} := \{\Lambda_{\tau}\widehat{w} : \widehat{w} \in \widehat{W}_k\}$  und definiert man  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} := \mathcal{W}^{-1}|_{\tau\times\sigma}^T \mathbf{X}_{\tau\sigma}$ , dann folgt das gewünschte Resultat analog zum Beweis von Satz 5.3.

Mit Hilfe dieser Faktorisierungen von zulässigen Blöcken folgt schlussendlich das Hauptresultat, Satz 3.14.

Beweis von Satz 3.14. Satz 5.4 liefert die Existenz von Matrizen  $\mathbf{X}_{\tau\sigma} \in \mathbb{R}^{|\tau| \times r}$ ,  $\mathbf{Y}_{\tau\sigma} \in \mathbb{R}^{|\sigma| \times r}$ , womit wir eine  $\mathcal{H}$ -Matrix  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$  blockweise definieren können durch

$$\mathbf{W}_{\mathcal{H}}|_{\tau \times \sigma} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{X}_{\tau \sigma} \mathbf{Y}_{\tau \sigma}^T & \text{falls } \tau \times \sigma \in P_{\text{far}}, \\ \boldsymbol{\mathcal{W}}^{-1}|_{\tau \times \sigma} & \text{sonst.} \end{array} \right.$$

Mit dem blockweisen Approximationsresultat aus Satz 5.4 folgt mit Lemma 2.15

$$\begin{aligned} \left\| \boldsymbol{\mathcal{W}}^{-1} |_{N_{\Gamma} \times N_{\Gamma}} - \mathbf{W}_{\mathcal{H}} \right\|_{2} & \leq C_{\mathrm{sp}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \max \{ \left\| (\boldsymbol{\mathcal{W}}^{-1} - \mathbf{W}_{\mathcal{H}}) |_{\tau \times \sigma} \right\|_{2} : \tau \times \sigma \in P, \mathrm{level}(\tau) = \ell \} \\ & \leq C_{\mathrm{apx}} C_{\mathrm{sp}} N_{\Gamma}^{(2d-1)/(2d-2)} q^{k} \mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}). \end{aligned}$$

 $\text{Mit } r = C_{\dim}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1} \text{ liefert die Definition } b = -\frac{\ln(q)}{C_{\dim}^{1/(d+1)}} q^{d/(d+1)} (2+\eta)^{-d/(1+d)} > 0, \\ \text{dass } q^k = e^{-br^{1/(d+1)}}, \text{ und somit }$ 

$$\|\boldsymbol{\mathcal{W}}^{-1}|_{N_{\Gamma}\times N_{\Gamma}} - \mathbf{W}_{\mathcal{H}}\|_{2} \leq C_{\mathrm{apx}}C_{\mathrm{sp}}N_{\Gamma}^{(2d-1)/(2d-2)}\mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}})e^{-br^{1/(d+1)}},$$

womit das gewünschte Resultat gezeigt ist.

### 5.5 Der Poincaré-Steklov-Operator

Bei Randintegralgleichungen ist man oftmals interessiert an einer Darstellung der Neumann-Randdaten  $\gamma_1^{\rm int}u$  mit Hilfe der Dirichlet-Daten  $\gamma_0^{\rm int}u$ . Dies führt auf den so genannten inneren Poincaré-Steklov-Operator  $S^{\rm int}:H^{1/2}(\Gamma)\to H^{-1/2}(\Gamma)$  (Dirichlet-zu-Neumann-Abbildung) definiert durch  $S^{\rm int}:=V^{-1}\left(\frac{1}{2}I+K\right)$ . Analog dazu kann man den äußeren Poincaré-Steklov-Operator  $S^{\rm ext}$  definieren als  $S^{\rm ext}=-V^{-1}\left(\frac{1}{2}I-K\right)$ .

Diskretisiert man die Randintegraloperatoren, wie in Abschnitt 3.3 beschrieben, so erhält man die diskreten Poincaré-Steklov-Operatoren als  $\mathbf{S}^{\text{int}} = \mathbf{V}^{-1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{M} + \mathbf{K} \right)$  und  $\mathbf{S}^{\text{ext}} = -\mathbf{V}^{-1} \left( \frac{1}{2} \mathbf{M} - \mathbf{K} \right)$ , wobei  $\mathbf{M}$  die Massematrix bezeichnet.

Mit der Hilfe der  $\mathcal{H}$ -Matrix-Arithmetik aus Abschnitt 2.3.2 erhält man aus dem Approximationsresultat aus Satz 3.12 direkt eine  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an den diskreten Poincaré-Steklov-Operator, was im folgenden Theorem formuliert ist.

**Satz 5.5.** Sei der Zulässigkeitsparameter  $\eta > 0$  fixiert und P eine zulässige Partition von  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$  basierend auf einem Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  generiert durch den geometrischen Clustering-Algorithmus aus [Hac09, Abschnitt 5.4.2]. Sei  $\mathbf{S} \in \{\mathbf{S}^{\text{int}}, \mathbf{S}^{\text{ext}}\}$ . Dann existiert eine blockweise Rang-r-Matrix  $\mathbf{S}_{\mathcal{H}}$ , sodass

$$\|\mathbf{S} - \mathbf{S}_{\mathcal{H}}\|_{2} \le C_{PS} N^{(d+1)/(d-1)} \log N \exp\left(-b \left(\frac{r}{\log N + 1}\right)^{1/(d+1)}\right).$$
 (5.15)

Die Konstante  $C_{PS} > 0$  hängt nur von  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab, die Konstante b > 0 hängt zusätzlich noch von  $\eta$  ab.

Beweis. Mittels  $\mathcal{H}$ -Matrix-Arithmetik, siehe [GH03, Theorem 2.24], folgt, dass der Rang bei der Multiplikation von  $\mathcal{H}$ -Matrizen maximal mit einem Faktor  $C_{\mathrm{id}}C_{\mathrm{sp}}(\mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}})+1)$  wächst, wobei die auftretende Idempotenzkonstante  $C_{\mathrm{id}}$  in [GH03] definiert ist und gleichmäßig in N beschränkt ist für geometrisch balancierte Cluster-Bäume.

Bemerkung 5.6. Üblicherweise verwendet man in numerischen Simulationen aus Stabilitätsgründen die symmetrische Formulierung des Poincaré-Steklov-Operators

$$S_{\text{symm}}^{\text{int}} := W + \left(\frac{1}{2}I + K'\right)V^{-1}\left(\frac{1}{2}I + K\right)$$

mit dem hypersingulären Integraloperator W und dem adjungierten Doppelschichtoperator K', siehe z.B. [Ste08]. Mittels  $\mathcal{H}$ -Matrix-Arithmetik kann ebenfalls eine Approximation für diese Repräsentation gefunden werden, diese führt aber auf einen zusätzlichen logarithmischen Faktor im Exponentialterm in (5.15).

## 6 Vorkonditionierung mit $\mathcal{H}$ -Matrizen

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Black-Box-Vorkonditionierung von gewissen linearen Gleichungssystemen  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}$  mit Hilfe von hierarchischen LU-Zerlegungen.

LU-Zerlegungen sind ein wichtiges Hilfsmittel in der numerischen linearen Algebra, da das sukzessive Lösen der Gleichungssysteme mit Dreiecksmatrizen einfach und mit geringen Kosten  $(\mathcal{O}(N^2))$  durchgeführt werden kann. Allerdings ist die Berechnung der LU-Zerlegung verhältnismäßig teuer  $(\mathcal{O}(N^3))$ . Falls man allerdings das System nicht direkt löst sondern mit Hilfe von iterativen Verfahren, wie CG oder GMRES, so kann die Konvergenz des Lösers durch den Einsatz eines guten Vorkonditionierers beschleunigt werden. Wie in der Einführung beschrieben, ist dies eine Matrix  $\mathbf{P}_{\text{HLU}}$ , sodass die Konditionszahl von  $\mathbf{P}_{\text{HLU}}^{-1}\mathbf{A}$  nahe bei 1 liegt, und man löst dann das äquivalente System  $\mathbf{P}_{\text{HLU}}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{P}_{\text{HLU}}^{-1}\mathbf{f}$ . Sofern die Berechnung der Inversen  $\mathbf{P}_{\text{HLU}}^{-1}$  verhältnismäßig günstig ist, erhält man eine approximative Lösung in einem reduzierten Gesamtaufwand.

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass eine hierarchische LU-Zerlegung, also eine Faktorisierung der Form  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{L}_{\mathcal{H}} \mathbf{U}_{\mathcal{H}} =: \mathbf{P}_{\mathrm{HLU}}$  mit unteren und oberen Dreiecksmatrizen  $\mathbf{L}_{\mathcal{H}}$  und  $\mathbf{U}_{\mathcal{H}}$  existiert. Da für den Einsatz der  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegung als Vorkonditionierer generell sehr kleine Blockränge verwendet werden können, ist sowohl das Aufstellen der  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegung, beispielsweise mittels den in [Lin04, Beb05] vorgestellten Algorithmen, als auch die Inversion der LU-Faktoren mit geringem Rechen- und Speicheraufwand verbunden. Für den numerischen Erfolg von  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegungen mit kleinem Rang als Vorkonditionierer verweisen wir unter anderem auf [Beb05, Gra05, GHK08, GKLB08].

Die grundlegende Beobachtung für die theoretische Existenz einer hierarchischen LUZerlegung, siehe [Beb07] für elliptische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, ist die Zurückführung auf die Approximierbarkeit gewisser Schurkomplemente mittels Niedrigrangfaktorisierungen. Die bestehenden Aussagen in der Literatur [Beb07, GKLB09] haben hierfür die Existenz einer  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an die Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  mit beliebiger
Genauigkeit gefordert, was durch die Hauptresultate aus Abschnitt 3 gewährleistet wird.

In Abschnitt 6.1 werden die benötigten Schurkomplemente eingeführt und eine Darstellung dieser Schurkomplemente mittels Orthogonalisierung bezüglich gewisser Freiheitsgrade angegeben. Abschnitt 6.2 fasst zusammen, wie aus einer Approximation an die Schurkomplemente approximative LU-Faktoren konstruiert werden, Referenzen hierfür sind [Beb07, GKLB09]. Die Hauptresultate dieses Abschnittes finden sich in den Abschnitten 6.3–6.6, wo die Existenz einer Approximation an die Schurkomplemente für die Galerkin-Matrizen aus Abschnitt 3 mit beliebiger Genauigkeit und somit die Existenz einer hierarchischen LU-Zerlegung bewiesen wird.

### 6.1 Darstellung von Schurkomplementen

Wir werden in weiterer Folge großteils positiv definite Galerkin-Matrizen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , im Sinne  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$  für alle  $\mathbf{x} \neq 0$ , betrachten. Dann existiert eine LU-Zerlegung  $\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{U}$  für jede beliebige Nummerierung der Freiheitsgrade. Mit [HJ13, Cor. 3.5.6] folgt daraus die Existenz der Inversen  $\mathbf{A}|_{\rho \times \rho}$  für jede Teilmenge  $\rho := \{1, \ldots, n\}$  mit  $n \leq N$ . Somit ist das nachfolgende Schurkomplement wohldefiniert.

**Definition 6.1** (Schurkomplement). Für ein Cluster-Paar  $\tau \times \sigma$  und eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  definieren wir

$$\rho := \{ i \in \{1, \dots, N\} : i < \min(\tau \cup \sigma) \}$$
(6.1)

und das Schurkomplement  $\mathbf{S}(\tau, \sigma) \in \mathbb{R}^{|\tau| \times |\sigma|}$  durch

$$\mathbf{S}(\tau,\sigma) = \mathbf{A}|_{\tau \times \sigma} - \mathbf{A}|_{\tau \times \rho} (\mathbf{A}|_{\rho \times \rho})^{-1} \mathbf{A}|_{\rho \times \sigma}.$$
 (6.2)

Da die Schurkomplemente  $\mathbf{S}(\tau,\sigma)$  in (6.2) aus arithmetischen Operationen von Untermatrizen von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{A}^{-1}$  gebildet werden, kann eine  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an  $\mathbf{S}(\tau,\sigma)$  mittels  $\mathcal{H}$ -Matrix-Arithmetik und den Approximationsresultaten aus Abschnitt 3 gewonnen werden. Wir präsentieren hier allerdings einen anderen Ansatz, der auf die in den Abschnitten 4.2–4.5 entwickelten Techniken zurückgreift und dadurch eine schärfere Abschätzung im Blockrang der Approximation erzielt. Die Grundidee ist, eine Darstellung des Schurkomplements als Orthogonalisierung bezüglich den zu  $\rho$  gehörigen Freiheitsgraden, wie in Lemma 6.2 beschrieben, zu verwenden, wodurch eine Orthogonalität ähnlich zu den Orthogonalitäten in den Abschnitten 4.2–4.5 gegeben ist.

Das nachfolgende Lemma liefert diese Darstellung des Schurkomplements, wofür wir beispielsweise auf [Bre99] verweisen. Weiters zeigt das Lemma, dass durch Addition einer Matrix mit niedrigem Rang ein Stabiliserungsterm, der beispielsweise beim reinen Neumann-Problem oder bei der Stabilisierung des hypersingulären Integraloperators auftritt, in der Orthogonalität vermieden werden kann. Da in diesen Stabilisierungstermen nicht-lokale Terme wie das Integralmittel auftreten, ist eine Orthogonalität bezüglich der stabilisierten Bilinearform für lokale Approximationen nutzlos, was somit umgangen wird.

**Lemma 6.2** (Schurkomplement und Orthogonalität). Sei  $a(\cdot, \cdot): V_h \times V_h \to \mathbb{R}$  eine Bilinearform,  $V_h$  ein endlich dimensionaler Raum der Dimension N sowie  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  die Galerkin-Matrix zu  $a(\cdot, \cdot)$  nach Wahl einer geeigneten Basis von  $V_h$ . Sei  $\tau \times \sigma$  ein Cluster-Paar und  $\rho \subset \mathcal{I}$  und das Schurkomplement  $\mathbf{S}(\tau, \sigma)$  für  $\mathbf{A}$  definiert durch (6.2).

Die Funktion  $\phi \in V_h$  mit  $\phi = \phi + \phi_\rho$ , wobei  $\phi \in V_h$ , supp  $\phi \subset \overline{\omega_\tau}$  und  $\phi_\rho \in V_h$ , supp  $\phi_\rho \subset \overline{\omega_\rho}$ , mit  $\omega_\tau, \omega_\rho$  von der Form (2.33) (für Finite Elemente Diskretisierungen) oder (2.34) (für Randelementdiskretisierungen), erfülle die Orthogonalität

$$a(\widetilde{\phi}, \widehat{\psi}) = 0 \quad \forall \widehat{\psi} \in V_h \text{ mit supp } \widehat{\psi} \subset \overline{\omega_{\rho}}.$$
 (6.3)

Dann gilt für  $\psi \in V_h$  und die Vektoren  $\phi \in \mathbb{R}^{|\tau|}$ ,  $\psi \in \mathbb{R}^{|\sigma|}$ , dass

$$a(\widetilde{\phi}, \psi) = \phi^T \mathbf{S}(\tau, \sigma) \psi \tag{6.4}$$

mit  $\phi = \sum_{j=1}^{|\tau|} \phi_j \xi_{j\tau}$ , wobei  $\xi_{j\tau}$  die j-te Basisfunktion von  $V_h$  zugehörig zu dem Cluster  $\tau$  bezeichnet, und  $\psi = \sum_{j=1}^{|\sigma|} \psi_j \xi_{j\sigma}$ .

Seien  $\alpha > 0$  und die stabilisierte Matrix  $\mathbf{A}^{\mathrm{st}} := \mathbf{A} + \alpha \mathbf{P} \mathbf{P}^T$  mit dem Vektor  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  mit  $\mathbf{P}_j = \langle \xi_j, 1 \rangle$  gegeben. Sei zusätzlich angenommen, dass  $\mathbf{A}|_{\rho \times \rho}$  invertierbar ist, und sei  $\mathbf{S}^{\mathrm{st}}(\tau, \sigma)$  das Schurkomplement zu  $\mathbf{A}^{\mathrm{st}}$ . Dann existiert eine Matrix  $\mathbf{D}$  mit maximalem Rang von 3, die unabhängig von  $\phi$  und  $\psi$  ist, sodass für die stabilisierte Bilinearform folgt

$$a(\widetilde{\phi}, \psi) + \alpha \left\langle \widetilde{\phi}, 1 \right\rangle \left\langle \psi, 1 \right\rangle = \phi^T \left( \mathbf{S}^{\text{st}}(\tau, \sigma) + \mathbf{D} \right) \psi.$$
 (6.5)

Beweis. Für gegebenes  $\phi$  ist  $\widetilde{\phi}$  eindeutig definiert: Aus der Definition von  $\widetilde{\phi}$  erhalten wir, da **A** die Galerkin-Matrix zur Bilinearform  $a(\cdot,\cdot)$  ist, dass

$$0 = a(\widetilde{\phi}, \widehat{\psi}) = a(\phi + \phi_{\rho}, \widehat{\psi}) = (\phi^T \mathbf{A}|_{\tau \times \rho} + \phi_{\rho}^T \mathbf{A}|_{\rho \times \rho})\widehat{\psi}$$

für  $\widehat{\psi} \in V_h$ , supp  $\widehat{\psi} \subset \overline{\omega_\rho}$  und den zugehörigen Vektor  $\widehat{\psi} \in \mathbb{R}^{|\rho|}$ . Laut Voraussetzung (Wohldefiniertheit des Schurkomplements) ist die Matrix  $\mathbf{A}|_{\rho \times \rho}$  invertierbar, was auf

$$\boldsymbol{\phi}_{\rho}^{T} = -\boldsymbol{\phi}^{T} \mathbf{A}|_{\tau \times \rho} \mathbf{A}|_{\rho \times \rho}^{-1}$$

führt. Somit erhält man für beliebiges  $\psi \in V_h$  mit supp  $\psi \subset \overline{\omega_\sigma}$ 

$$a(\widetilde{\phi}, \psi) = (\phi^T \mathbf{A}|_{\tau \times \sigma} + \phi_o^T \mathbf{A}|_{\rho \times \sigma}) \psi = \phi^T \mathbf{S}(\tau, \sigma) \psi,$$

was die erste Gleichheit (6.4) zeigt.

Für die stabilisierte Bilinearform folgt

$$a(\widetilde{\phi}, \psi) + \alpha \left\langle \widetilde{\phi}, 1 \right\rangle \left\langle \psi, 1 \right\rangle = \phi^{T} \left( \mathbf{A}|_{\tau \times \sigma} + \alpha \mathbf{P} \mathbf{P}^{T}|_{\tau \times \sigma} \right) \psi + \phi_{\rho}^{T} \left( \mathbf{A}|_{\rho \times \sigma} + \alpha \mathbf{P} \mathbf{P}^{T}|_{\rho \times \sigma} \right) \psi$$
$$= \phi^{T} \left( \mathbf{A}^{\text{st}}|_{\tau \times \sigma} - \mathbf{A}|_{\tau \times \rho} \mathbf{A}|_{\rho \times \sigma}^{-1} \mathbf{A}^{\text{st}}|_{\rho \times \sigma} \right) \psi. \tag{6.6}$$

Mit der Sherman-Morrison-Woodbury-Formel (siehe z.B. [HJ13, Ch. 0.7.4]) kann das Schurkomplement  $\mathbf{S}^{\mathrm{st}}(\tau,\sigma)$ , da  $\mathbf{A}|_{\rho\times\rho}$  laut Voraussetzung invertierbar ist, geschrieben werden als

$$\mathbf{S}^{\mathrm{st}}(\tau,\sigma) = \mathbf{A}^{\mathrm{st}}|_{\tau\times\sigma} - \mathbf{A}^{\mathrm{st}}|_{\tau\times\rho} (\mathbf{A}^{\mathrm{st}}|_{\rho\times\rho})^{-1} \mathbf{A}^{\mathrm{st}}|_{\rho\times\sigma}$$

$$= \mathbf{A}^{\mathrm{st}}|_{\tau\times\sigma} - (\mathbf{A}|_{\tau\times\rho} + \alpha \mathbf{P}\mathbf{P}^{T}|_{\tau\times\rho}) (\mathbf{A}|_{\rho\times\rho}^{-1} - \widehat{\mathbf{P}}) \mathbf{A}^{\mathrm{st}}|_{\rho\times\sigma}, \qquad (6.7)$$

wobei  $\widehat{\mathbf{P}}$  eine Matrix mit Rang 1 ist mit  $\widehat{\mathbf{P}} = \mathbf{A}|_{\rho \times \rho}^{-1} \alpha \mathbf{P}|_{\rho} \left(1 + \alpha \mathbf{P}|_{\rho}^{T} \mathbf{A}|_{\rho \times \rho}^{-1} \mathbf{P}|_{\rho}\right)^{-1} \mathbf{P}|_{\rho}^{T} \mathbf{A}|_{\rho \times \rho}^{-1}$ . Vergleicht man die Matrizen in (6.6) und (6.7), so beobachtet man

$$a(\widetilde{\phi}, \psi) + \alpha \left\langle \widetilde{\phi}, 1 \right\rangle \left\langle \psi, 1 \right\rangle = \phi^T \left( \mathbf{S}^{\text{st}}(\tau, \sigma) + \mathbf{D} \right) \psi$$

mit einer Matrix **D** mit Rang 3.

Bemerkung 6.3. In der zweiten Aussage von Lemma 6.2 tritt die zusätzliche Annahme auf, dass  $\mathbf{A}|_{\rho\times\rho}$  invertierbar ist. Für die positiv semidefinite Matrix  $\mathbf{A}_{\mathcal{N}}$  aus (3.11) ist dies erfüllt, da  $\mathbf{A}_{\mathcal{N}}|_{\rho\times\rho}$  wegen  $\rho\subsetneq\mathcal{I}$  eine Galerkin-Matrix zu einem gemischten Dirichlet-Neumann-Randwertproblem ist und somit positiv definit ist. Für die positiv semidefinite Matrix  $\mathbf{W}$  aus 3.49 ist die Annahme ebenfalls erfüllt, da  $\mathbf{W}|_{\rho\times\rho}$  eine BEM-Matrix zu einem Screen-Problem auf  $\Gamma_{\rho}\subsetneq\Gamma$  ist, und daher ebenfalls positiv definit ist, siehe beispielsweise [SS11].

# 6.2 Existenz approximativer LU-Zerlegungen mittels approximativer Schurkomplemente

In diesem Kapitel wird vorgestellt, wie aus Approximationen an die im vorigen Abschnitt definierten Schurkomplemente eine approximative  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegung konstruiert werden kann. Die grundlegenden Ideen hierfür finden sich in [Beb07, GKLB09].

Für die Schurkomplemente aus (6.2) gilt die folgende hierarchische Relation: Die Schurkomplemente  $\mathbf{S}(\tau,\tau)$  für einen Block  $\tau \in \mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  können, sofern  $\tau$  kein Blatt ist, aus den Schurkomplementen der Söhne  $\tau_1, \tau_2$  von  $\tau$  konstruiert werden mit Hilfe der Formel

$$\mathbf{S}(\tau,\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{S}(\tau_1,\tau_1) & \mathbf{S}(\tau_1,\tau_2) \\ \mathbf{S}(\tau_2,\tau_1) & \mathbf{S}(\tau_2,\tau_2) + \mathbf{S}(\tau_2,\tau_1)\mathbf{S}(\tau_1,\tau_1)^{-1}\mathbf{S}(\tau_1,\tau_2) \end{pmatrix}.$$

Für den rein algebraischen Beweis sei auf [Beb07, Lemma 3.1] verwiesen. Hierbei sei erwähnt, dass in dem Beweis nur die Wohldefiniertheit der Schurkomplemente, also die Existenz der Inversen der ersten quadratischen Teilblöcke der ursprünglichen Matrix  $\mathbf{A}$ , sowie die Existenz einer LU-Faktorisierung gefordert wird, was für sämtliche Modellprobleme zutrifft.

Falls  $\tau$  keine Söhne hat, also ein Blatt in  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  ist, erhalten wir die LU-Zerlegung von  $\mathbf{S}(\tau,\tau)$  durch die klassische LU-Faktorisierung für vollbesetzte Matrizen. Diese existiert, da  $\mathbf{A}$  laut Voraussetzung eine LU-Zerlegung hat. Falls  $\tau$  kein Blatt ist, erhält man rekursiv mittels der obigen hierarchischen Relation der Schurkomplemente die LU-Faktoren

$$\mathbf{L}(\tau) := \begin{pmatrix} \mathbf{L}(\tau_1) & 0 \\ \mathbf{S}(\tau_2, \tau_1)\mathbf{U}(\tau_1)^{-1} & \mathbf{L}(\tau_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}(\tau) := \begin{pmatrix} \mathbf{U}(\tau_1) & \mathbf{L}(\tau_1)^{-1}\mathbf{S}(\tau_1, \tau_2) \\ 0 & \mathbf{U}(\tau_2) \end{pmatrix}$$
(6.8)

aus der Faktorisierung der Söhne  $\mathbf{S}(\tau_1, \tau_1) = \mathbf{L}(\tau_1)\mathbf{U}(\tau_1)$ ,  $\mathbf{S}(\tau_2, \tau_2) = \mathbf{L}(\tau_2)\mathbf{U}(\tau_2)$ . Man rechnet nach, dass  $\mathbf{S}(\tau, \tau) = \mathbf{L}(\tau)\mathbf{U}(\tau)$ . Aus der Eindeutigkeit der LU-Zerlegung folgt, dass  $\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{A} = \mathbf{S}(\mathcal{I}, \mathcal{I}) = \mathbf{L}(\mathcal{I})\mathbf{U}(\mathcal{I})$ , und somit  $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathcal{I})$  sowie  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathcal{I})$ .

Die Existenz der Inversen  $\mathbf{L}(\tau_1)^{-1}$  und  $\mathbf{U}(\tau_1)^{-1}$  folgt aus der Darstellung (6.8) und Induktion über alle Stufen des Baumes, da auf den Blättern die Existenz trivial ist und  $\mathbf{L}(\tau)$ ,  $\mathbf{U}(\tau)$  Block-Dreiecksmatrizen sind. Also existiert auch die Inverse von  $\mathbf{S}(\tau,\tau)$ .

Schränkt man den unteren Dreiecksblock  $\mathbf{S}(\tau_2, \tau_1)\mathbf{U}(\tau_1)^{-1}$  der Matrix  $\mathbf{L}(\tau)$  auf einen Teilblock  $\tau_2' \times \tau_1'$  ein, wobei  $\tau_i'$  ein Sohn von  $\tau_i$  ist, so erhält man

$$\left(\mathbf{S}(\tau_2, \tau_1)\mathbf{U}(\tau_1)^{-1}\right)|_{\tau_2' \times \tau_1'} = \mathbf{S}(\tau_2', \tau_1')\mathbf{U}(\tau_1')^{-1},$$

siehe beispielsweise [GKLB09, Lemma 22]. Der obere Dreiecksblock von  $\mathbf{U}(\tau)$  erfüllt eine analoge Relation.

Das folgende Lemma zeigt, dass die Spektralnorm der Inversen  $\mathbf{L}(\tau)^{-1}$ ,  $\mathbf{U}(\tau)^{-1}$  abgeschätzt werden kann durch die Spektralnormen der gesamten Inversen  $\mathbf{L}(\mathcal{I})^{-1}$ ,  $\mathbf{U}(\mathcal{I})^{-1}$ .

**Lemma 6.4.** Seien die LU-Faktoren  $\mathbf{L}(\tau)$ ,  $\mathbf{U}(\tau)$  für einen Cluster  $\tau \in \mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  gegeben durch (6.8). Dann gilt

$$\begin{aligned} \max_{\tau \in \mathbb{T}_{\mathcal{I}}} \left\| \mathbf{L}(\tau)^{-1} \right\|_2 &= \left\| \mathbf{L}(\mathcal{I})^{-1} \right\|_2, \\ \max_{\tau \in \mathbb{T}_{\mathcal{I}}} \left\| \mathbf{U}(\tau)^{-1} \right\|_2 &= \left\| \mathbf{U}(\mathcal{I})^{-1} \right\|_2. \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen nur das Resultat für  $\mathbf{L}(\tau)$ , die Aussage für  $\mathbf{U}(\tau)$  folgt analog. Auf Grund der Blockstruktur in (6.8) erhält man die Inverse

$$\mathbf{L}(\tau)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}(\tau_1)^{-1} & 0\\ -\mathbf{L}(\tau_2)^{-1}\mathbf{S}(\tau_2, \tau_1)\mathbf{U}(\tau_1)^{-1}\mathbf{L}(\tau_1)^{-1} & \mathbf{L}(\tau_2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Wählt man einen Vektor  $\mathbf{x}$  so, dass  $\mathbf{x}_i = 0$  für alle  $i \in \tau_1$ , dann erhält man

$$\left\| \mathbf{L}(\tau)^{-1} \right\|_{2} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|\tau|}, \left\| \mathbf{x} \right\|_{2} = 1} \left\| \mathbf{L}(\tau)^{-1} \mathbf{x} \right\|_{2} \ge \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|\tau_{2}|}, \left\| \mathbf{x} \right\|_{2} = 1} \left\| \mathbf{L}(\tau_{2})^{-1} \mathbf{x} \right\|_{2} = \left\| \mathbf{L}(\tau_{2})^{-1} \right\|_{2}.$$

Die selbe Argumentation für  $(\mathbf{L}(\tau)^{-1})^T$  mit  $\mathbf{x}$  so, dass  $\mathbf{x}_i = 0$  für alle  $i \in \tau_2$ , führt auf

$$\|\mathbf{L}(\tau)^{-1}\|_{2} = \|(\mathbf{L}(\tau)^{-1})^{T}\|_{2} \ge \|\mathbf{L}(\tau_{1})^{-1}\|_{2}.$$

Also haben wir 
$$\|\mathbf{L}(\tau)^{-1}\|_2 \ge \max_{i=1,2} \|\mathbf{L}(\tau_i)^{-1}\|_2$$
 und daher  $\max_{\tau \in \mathbb{T}_{\mathcal{I}}} \|\mathbf{L}(\tau)^{-1}\|_2 = \|\mathbf{L}(\mathcal{I})^{-1}\|_2$ .

Eine zulässige Partition P basierend auf dem Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  induziert eine Blockstruktur, welche sich auf untere und obere Dreiecksmatrizen vererbt, wobei hier Blöcke, die oberhalb beziehungsweise unterhalb der Diagonale liegen, nur Nulleinträge enthalten. Wir sprechen hierbei von blockweisen unteren und oberen Dreiecksmatrizen.

Das nachfolgende Theorem zeigt ein Existenzresultat für  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximationen an die LU-Faktoren der Ausgangsmatrix, wobei nur die Existenz der klassischen LU-Zerlegung sowie einer geeigneten Approximation an die Schurkomplemente gefordert wird.

Satz 6.5. Sei  $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$  die LU-Zerlegung von  $\mathbf{A}$ . Sei der Zulässigkeitsparameter  $\eta > 0$  fixiert und eine zulässige Partition P von  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$  basierend auf dem Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  gegeben. Sei  $\varepsilon > 0$  und angenommen, dass für jedes  $\eta$ -zulässige Cluster-Paar  $\tau \times \sigma$  eine Rang-r-Approximation  $\mathbf{S}_r(\tau,\sigma)$  an  $\mathbf{S}(\tau,\sigma)$  mit  $\|\mathbf{S}(\tau,\sigma) - \mathbf{S}_r(\tau,\sigma)\| \le \varepsilon \|\mathbf{A}\|_2$  existiert, wobei r von  $\varepsilon$  abhängt. Dann existieren blockweise untere und obere Dreiecksmatrizen  $\mathbf{L}_{\mathcal{H}}, \mathbf{U}_{\mathcal{H}}$  mit maximalem blockweisen Rang r, sodass

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{L} - \mathbf{L}_{\mathcal{H}}\|_2 & \leq & C_{\mathrm{sp}}\varepsilon \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) \|\mathbf{U}^{-1}\|_2 \|\mathbf{A}\|_2, \\ & \|\mathbf{U} - \mathbf{U}_{\mathcal{H}}\|_2 & \leq & C_{\mathrm{sp}}\varepsilon \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) \|\mathbf{L}^{-1}\|_2 \|\mathbf{A}\|_2, \end{aligned}$$

wobei  $C_{\rm sp}$  die Schwachbesetztheitskonstante aus (2.26) ist.

Beweis. Da laut Voraussetzung eine Approximation  $\mathbf{S}_r(\tau', \sigma')$  an das Schurkomplement existiert, erhält man eine Niedrigrangapproximation eines zulässigen Unterblocks  $\tau' \times \sigma'$  des unteren Dreiecksblocks von  $\mathbf{L}(\tau)$  mittels

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{S}(\tau,\sigma)\mathbf{U}(\sigma)^{-1} \right\|_{\tau'\times\sigma'} - \mathbf{S}_r(\tau',\sigma')\mathbf{U}(\sigma')^{-1} \right\|_2 &= \left\| \mathbf{S}(\tau',\sigma')\mathbf{U}(\sigma')^{-1} - \mathbf{S}_r(\tau',\sigma')\mathbf{U}(\sigma')^{-1} \right\|_2 \\ &\leq \varepsilon \left\| \mathbf{U}(\sigma')^{-1} \right\|_2 \left\| \mathbf{A} \right\|_2. \end{aligned}$$

Da  $\mathbf{S}_r(\tau', \sigma')\mathbf{U}(\sigma')^{-1}$  eine Rang-r-Matrix ist und der zulässige Block  $\tau' \times \sigma'$  beliebig war, erhält man rekursiv aus der Definition von  $\mathbf{L}(\mathcal{I})$  eine  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation  $\mathbf{L}_{\mathcal{H}}$  des LU-Faktors  $\mathbf{L}(\mathcal{I}) = \mathbf{L}$ . Daher gilt mit Lemma 2.15 und Lemma 6.4, dass

$$\|\mathbf{L} - \mathbf{L}_{\mathcal{H}}\|_{2} \leq C_{\mathrm{sp}} \varepsilon \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) \|\mathbf{U}^{-1}\|_{2} \|\mathbf{A}\|_{2},$$

und mit der selben Argumentation eine  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation  $\mathbf{U}_{\mathcal{H}}$  an  $\mathbf{U}(\mathcal{I}) = \mathbf{U}$  mit

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_{\mathcal{H}}\|_{2} \leq C_{\mathrm{sp}} \varepsilon \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) \|\mathbf{L}^{-1}\|_{2} \|\mathbf{A}\|_{2}$$

womit die gewünschten Abschätzungen gezeigt sind.

# 6.3 Elliptische partielle Differentialgleichungen - $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegung

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass mit Hilfe einer Approximation an die Schurkomplemente eine  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an die LU-Faktoren gefunden werden kann. Um also eine approximative LU-Zerlegung zu erhalten, muss noch eine Approximation an die Schurkomplemente konstruiert werden, was in diesem Abschnitt für elliptische partielle Differentialoperatoren aus (3.3) behandelt wird.

Das Hauptresultat, die Existenz einer approximativen *LU*-Zerlegung, ist im folgenden Satz formuliert und erweitert die bisherigen Aussagen in [Beb07] auf generellere Randbedingungen, speziell auch auf das reine Neumann-Problem.

Satz 6.6. Sei  $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$  die LU-Zerlegung von  $\mathbf{A}$ , wobei hier  $\mathbf{A}$  entweder die Matrix aus (3.7) oder die Matrix  $\mathbf{A}^{\mathrm{st}}$  aus (3.14) bezeichnet. Sei der Zulässigkeitsparameter  $\eta > 0$  fixiert und eine zulässige Partition P von  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$  basierend auf dem Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  gegeben. Dann existieren blockweise untere und obere Dreiecksmatrizen  $\mathbf{L}_{\mathcal{H}}, \mathbf{U}_{\mathcal{H}}$  mit maximalem blockweisen Rang r (für (3.7)) bzw. Rang r + 4 (für (3.14)), sodass

• 
$$\frac{\|\mathbf{L} - \mathbf{L}_{\mathcal{H}}\|_2}{\|\mathbf{L}\|_2} \le C_{\mathrm{LU}} h^{-1} \mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}};$$

• 
$$\frac{\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_{\mathcal{H}}\|_2}{\|\mathbf{U}\|_2} \le C_{\mathrm{LU}} h^{-1} \mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}};$$

• 
$$\frac{\|\mathbf{A} - \mathbf{L}_{\mathcal{H}}\mathbf{U}_{\mathcal{H}}\|_{2}}{\|\mathbf{A}\|_{2}} \le 2C_{\mathrm{LU}}h^{-1}\operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}})e^{-br^{1/(d+1)}} + C_{\mathrm{LU}}^{2}h^{-2}\operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}})^{2}e^{-2br^{1/(d+1)}}.$$

Die Konstante  $C_{LU}$  ist gegeben durch  $C_{LU} = C_{sp}C_{sc} (\kappa_2(\mathbf{L}) + \kappa_2(\mathbf{U}))$  mit der Schwachbesetztheitskonstante  $C_{sp}$  aus (2.26) und den Konditionszahlen  $\kappa_2(\mathbf{L}), \kappa_2(\mathbf{U})$  in der Spektralnorm. Die Konstante  $C_{sc} > 0$  hängt nur vom Randwertproblem (3.3),  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab. Die Konstante b > 0 hängt zusätzlich noch von  $\eta$  ab.

Der Beweis wird am Ende dieses Abschnittes geführt. Wie im vorigen Kapitel beschrieben, genügt es, eine gute Approximation an das Schurkomplement  $\mathbf{S}(\tau, \sigma)$  zu finden, was im folgenden Lemma formuliert ist.

Lemma 6.7. Für ein  $\eta$ -zulässiges Cluster-Paar  $\tau \times \sigma$  sei  $\mathbf{S}(\tau, \sigma)$  das in (6.2) definierte Schurkomplement für die Matrix  $\mathbf{A}$  aus (3.7). Es existiert eine Rang-r-Matrix  $\mathbf{S}_r(\tau, \sigma)$ , sodass

$$\|\mathbf{S}(\tau,\sigma) - \mathbf{S}_r(\tau,\sigma)\|_2 \le C_{\text{sc}} h^{-1} e^{-br^{1/(d+1)}} \|\mathbf{A}\|_2$$

wobei die Konstante  $C_{\rm sc} > 0$  nur vom Randwertproblem (3.3),  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Form-regularität von  $\mathcal{T}_h$  abhängt. Die Konstante b > 0 hängt zusätzlich noch von  $\eta$  ab.

Beweis. Seien  $B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}$  zulässige Bounding-Boxen für die Cluster  $\tau$  und  $\sigma$  und  $\omega_{\rho} = \operatorname{interior}\left(\bigcup_{i \in \rho} \operatorname{supp} \psi_i\right) \subset \Omega$ . Wir beginnen mit der Darstellung des Schurkomplements  $\mathbf{S}(\tau, \sigma)$  als Orthogonalisierung bezüglich der Freiheitsgrade in  $\rho$ , wie in Lemma 6.2 beschrieben. Mit der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  aus (3.4) und der zugehörigen Galerkin-Matrix (3.7) kann Lemma 6.2 mit  $V_h = S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D)$  angewendet werden, und für  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{|\tau|}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{|\sigma|}$  folgt aus (6.4), dass

$$\mathbf{u}^T \mathbf{S}(\tau, \sigma) \mathbf{w} = a(\widetilde{u}, w), \tag{6.9}$$

wobei  $w = \sum_{j=1}^{|\sigma|} \mathbf{w}_j \psi_{j\sigma}$ . Die Funktion  $\widetilde{u} \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D)$  ist hierbei definiert als  $\widetilde{u} = \sum_{j=1}^{|\tau|} \mathbf{u}_j \psi_{j\tau} + u_\rho$  mit supp  $u_\rho \subset \overline{\omega_\rho}$ , sodass

$$a(\widetilde{u}, \widehat{w}) = 0 \quad \forall \widehat{w} \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h; \Gamma_D) \text{ mit supp } \widehat{w} \subset \overline{\omega_\rho}.$$
 (6.10)

Um also das Schurkomplement  $\mathbf{S}(\tau, \sigma)$  zu approximieren, wird eine niedrigdimensionale Approximation an die Funktion  $\widetilde{u}$  konstruiert. Dies geschieht mittels der in Kapitel 4.2 eingeführten Techniken mit Hilfe der Orthogonalität (6.10). Da für den Träger von  $\widetilde{u}$  gilt, dass supp  $\widetilde{u} \subset \overline{B_{R_{\tau}}} \cup \overline{\omega_{\rho}}$ , erhalten wir für Funktionen w mit supp  $w \subset \overline{B_{R_{\sigma}}}$  aus der Zulässigkeitsbedingung, dass

$$a(\widetilde{u}, w) = a(\widetilde{u}|_{\operatorname{Supp} w}, w) = a(\widetilde{u}|_{B_{B_{\sigma}} \cap \omega_{\alpha}}, w).$$

Wir suchen also nur auf dem Schnitt  $B_{R_{\sigma}} \cap \omega_{\rho}$  eine Approximation an  $\widetilde{u}$ . Die Trägereigenschaften und die Orthogonalität (6.10) implizieren, dass  $\widetilde{u} \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\kappa)R_{\sigma}},\omega_{\rho})$  für ein genügend kleines  $\kappa > 0$ .

Daher kann Lemma 4.2 auf  $\widetilde{u}$  angewendet werden, und in weiterer Folge liefert Lemma 4.4 einen niedrigdimensionalen Raum  $V_k$ , dessen Dimension mit der Wahl  $\kappa = \frac{1}{1+\eta}$  beschränkt ist durch dim  $V_k \leq C_{\dim}(2+\eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ . Die Bestapproximation  $\widetilde{v} = \Pi_{V_k} \widetilde{u} \in V_k$  an  $\widetilde{u}$  im Raum  $V_k$  erfüllt weiters

$$\|\widetilde{u} - \widetilde{v}\|_{h,R_{\sigma}} \le q^k \|\widetilde{u}\|_{h,(1+\kappa)R_{\sigma}}.$$

Damit erhält man schließlich, dass

$$\begin{split} |a(\widetilde{u},w)-a(\widetilde{v},w)| & \lesssim & \|\widetilde{u}-\widetilde{v}\|_{H^1(B_{R_\sigma}\cap\omega_\rho)} \, \|w\|_{H^1(B_{R_\sigma}\cap\Omega)} \\ & \lesssim & \frac{R_\sigma}{h} \, \|\widetilde{u}-\widetilde{v}\|_{h,R_\sigma} \, \|w\|_{H^1(\Omega)} \lesssim h^{-1}q^k \, \|\widetilde{u}\|_{H^1(\Omega)} \, \|w\|_{H^1(\Omega)} \, . \end{split}$$

Da supp $(\widetilde{u} - u) = \text{supp}(u_{\rho}) \subset \overline{\omega_{\rho}}$  mit  $u = \sum_{j=1}^{|\tau|} \mathbf{u}_{j} \psi_{j_{\tau}}$ , führen die Koerzivität (3.6) und Orthogonalität (6.10) auf

$$\|\widetilde{u} - u\|_{H^1(\Omega)}^2 \lesssim a(\widetilde{u} - u, \widetilde{u} - u) = a(-u, \widetilde{u} - u) \lesssim \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\widetilde{u} - u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Somit liefert die inverse Ungleichung  $||u||_{H^1(\Omega)} \lesssim h^{-1} ||u||_{L^2(\Omega)}$ , siehe auch Lemma 2.5, und die Abschätzung (2.8), dass

$$|a(\widetilde{u}, w) - a(\widetilde{v}, w)| \lesssim h^{-1} q^k \left( \|\widetilde{u} - u\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right) \|w\|_{H^1(\Omega)}$$
  
$$\lesssim h^{-1} q^k \|u\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} \lesssim h^{d-3} q^k \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{w}\|_2.$$

Die lineare Abbildung  $\mathcal{E}: u \mapsto \widetilde{v}$  mit endlich dimensionalem Bild dim ran  $\mathcal{E} \leq C_{\dim}(2 + \eta)^d q^{-d} k^{d+1}$  hat eine Matrixdarstellung  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{B}_r \mathbf{u}$ , wobei der Rang von  $\mathbf{B}_r$  beschränkt ist durch  $r \leq C_{\dim}(2 + \eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ . Daher erhalten wir  $a(\mathcal{E}u, w) = \mathbf{u}^T \mathbf{B}_r^T \mathbf{A}|_{\tau \times \sigma} \mathbf{w}$ . Die Definition  $\mathbf{S}_r(\tau, \sigma) := \mathbf{B}_r^T \mathbf{A}|_{\tau \times \sigma}$  führt schlussendlich auf eine Matrix  $\mathbf{S}_r(\tau, \sigma)$  mit Rang  $r \leq C_{\dim}(2 + \eta)^d q^{-d} k^{d+1}$ , sodass

$$\|\mathbf{S}(\tau,\sigma) - \mathbf{S}_r(\tau,\sigma)\|_2 = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{|\tau|}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{|\sigma|}} \frac{\left|\mathbf{u}^T(\mathbf{S}(\tau,\sigma) - \mathbf{S}_r(\tau,\sigma))\mathbf{w}\right|}{\|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{w}\|_2} \le Ch^{d-3}e^{-br^{1/(d+1)}},$$

und mit der Abschätzung  $\frac{1}{\|\mathbf{A}\|_2} \lesssim h^{2-d}$  aus [EG06, Theorem 2] ist das Lemma gezeigt.  $\square$ 

Für das reine Neumann-Problem aus Abschnitt 3.1.2 lässt sich das Schurkomplement der stabilisierten Galerkin-Matrix mit Hilfe der zweiten Aussage (6.5) aus Lemma 6.2 in ähnlicher Weise approximieren.

**Lemma 6.8.** Für ein  $\eta$ -zulässiges Cluster-Paar  $\tau \times \sigma$  sei  $\mathbf{S}^{\mathrm{st}}(\tau, \sigma)$  das in (6.2) definierte Schurkomplement für die Matrix  $\mathbf{A}^{\mathrm{st}}$  aus (3.14). Es existiert für jedes  $r \geq 0$  eine Matrix  $\mathbf{S}_r(\tau, \sigma)$  mit maximalem Rang r + 4, sodass

$$\|\mathbf{S}^{\text{st}}(\tau,\sigma) - \mathbf{S}_r(\tau,\sigma)\|_2 \le C'_{\text{sc}} h^{d-3} e^{-br^{1/(d+1)}},$$

wobei die Konstante  $C'_{\rm sc} > 0$  nur vom Randwertproblem (3.3),  $\Omega$ , d, p und der  $\gamma$ -Form-regularität von  $\mathcal{T}_h$  abhängt. Die Konstante b > 0 hängt zusätzlich noch von  $\eta$  ab. Weiters existiert eine Konstante  $C_{\rm sc} > 0$ , die zusätzlich zu den Abhängigkeiten von  $C'_{\rm sc}$  noch vom Stabilisierungsparameter  $\alpha > 0$  abhängt, sodass

$$\|\mathbf{S}^{\text{st}}(\tau,\sigma) - \mathbf{S}_r(\tau,\sigma)\|_2 \le C_{\text{sc}} h^{-1} e^{-br^{1/(d+1)}} \|\mathbf{A}^{\text{st}}\|_2$$
.

Beweis. Mit Hilfe der Darstellung (6.5) lässt sich obiger Beweis direkt auf das stabilisierte reine Neumann-Problem aus (3.13) übertragen. Da  $\mathbf{A}^{\mathrm{st}}$  positiv definit ist, sind alle Untermatrizen  $\mathbf{A}^{\mathrm{st}}|_{\rho\times\rho}$  invertierbar, und wie in Bemerkung 6.3 beschrieben folgt auch die Invertierbarkeit von  $\mathbf{A}|_{\rho\times\rho}$ . Somit sind die Voraussetzungen von Lemma 6.2 erfüllt, und es gilt die Darstellung

$$a(\widetilde{u}, w) + \alpha \langle \widetilde{u}, 1 \rangle_{L^{2}(\Omega)} \langle w, 1 \rangle_{L^{2}(\Omega)} = \mathbf{u}^{T} \left( \mathbf{S}^{\text{st}}(\tau, \sigma) + \mathbf{D} \right) \mathbf{w}, \tag{6.11}$$

wobei  $\widetilde{u}$ 

$$a(\widetilde{u}, \widehat{w}) = 0 \quad \forall \widehat{w} \in S^{p,1}(\mathcal{T}_h) \text{ mit supp } \widehat{w} \subset \overline{\omega_{\varrho}}$$
 (6.12)

erfüllt. Da also die selbe Orthogonalität wie in Lemma 6.7 gilt, kann  $\tilde{u}$  in gleicher Weise approximiert werden, und es existiert ein  $\hat{v}$  aus einem r-dimensionalen Raum, sodass

$$|a(\widetilde{u}, w) - a(\widehat{v}, w)| \le h^{-1} e^{-br^{1/(d+1)}} \|u\|_{H^{1}(\Omega)} \|w\|_{H^{1}(\Omega)}.$$

Somit ist  $a(\widehat{v}, w) + \alpha \langle \widetilde{u}, 1 \rangle_{L^2(\Omega)} \langle w, 1 \rangle_{L^2(\Omega)}$  eine Approximation an die stabilisierte Bilinearform auf der linken Seite in (6.11), deren Matrixdarstellung auf eine Matrix  $\widehat{\mathbf{S}}_r(\tau, \sigma)$  mit

Rang r + 1 führt, mit

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{S}^{\text{st}}(\tau,\sigma) + \mathbf{D} - \widehat{\mathbf{S}}_r(\tau,\sigma) \right\|_2 &= \sup_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{|\tau|}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{|\sigma|}} \frac{\left| \mathbf{u}^T (\mathbf{S}^{\text{st}}(\tau,\sigma) + \mathbf{D} - \widehat{\mathbf{S}}_r(\tau,\sigma)) \mathbf{w} \right|}{\left\| \mathbf{u} \right\|_2 \left\| \mathbf{w} \right\|_2} \\ &\leq C h^{d-3} e^{-br^{1/(d+1)}}, \end{aligned}$$

und die Matrix  $\mathbf{S}_r(\tau, \sigma) := \widehat{\mathbf{S}}_r(\tau, \sigma) - \mathbf{D}$  ist daher die gesuchte Rang-(r+4)-Approximation an  $\mathbf{S}^{\mathrm{st}}(\tau, \sigma)$ . Die zweite Aussage folgt schlussendlich aus der Abschätzung  $\frac{1}{\|\mathbf{A}^{\mathrm{st}}\|} \lesssim h^{2-d}$ , wobei die versteckte Konstante zusätzlich von  $\alpha$  abhängt.

Mit Hilfe der Approximationen an die Schurkomplemente können wir nun Satz 6.6 zeigen.

Beweis von Satz 6.6. Lemma 6.7 und Lemma 6.8 liefern Approximationen  $\mathbf{S}_r$  an die Schurkomplemente  $\mathbf{S}(\tau,\sigma)$  und  $\mathbf{S}^{\mathrm{st}}(\tau,\sigma)$ , und gemeinsam mit Satz 6.5 und  $\|\mathbf{A}\|_2 \leq \|\mathbf{L}\|_2 \|\mathbf{U}\|_2$  führt das auf die ersten beiden Abschätzungen für  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{U}$ .

Da  $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ , liefert die Dreiecksungleichung schlussendlich

$$\begin{split} \|\mathbf{A} - \mathbf{L}_{\mathcal{H}} \mathbf{U}_{\mathcal{H}} \|_{2} & \leq \|\mathbf{L} - \mathbf{L}_{\mathcal{H}} \|_{2} \|\mathbf{U}\|_{2} + \|\mathbf{U} - \mathbf{U}_{\mathcal{H}} \|_{2} \|\mathbf{L}\|_{2} + \|\mathbf{L} - \mathbf{L}_{\mathcal{H}} \|_{2} \|\mathbf{U} - \mathbf{U}_{\mathcal{H}} \|_{2} \\ & \lesssim (\kappa_{2}(\mathbf{U}) + \kappa_{2}(\mathbf{L})) \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) h^{-1} e^{-br^{1/(d+1)}} \|\mathbf{A}\|_{2} \\ & + \kappa_{2}(\mathbf{U}) \kappa_{2}(\mathbf{L}) \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}})^{2} h^{-2} e^{-2br^{1/(d+1)}} \frac{\|\mathbf{A}\|_{2}^{2}}{\|\mathbf{L}\|_{2} \|\mathbf{U}\|_{2}}, \end{split}$$

und die Abschätzung  $\|\mathbf{A}\|_2 \leq \|\mathbf{L}\|_2 \|\mathbf{U}\|_2$  beendet den Beweis.

Im symmetrischen Fall kann man die schwächere Zulässigkeitsbedingung (2.27) statt (2.24) fordern und erhält zudem ein analoges Resultat zu Satz 6.6 für die Cholesky-Zerlegung.

Korollar 6.9. Sei die Galerkin-Matrix  $\mathbf{A}$  symmetrisch und positiv definit und  $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$  mit einer unteren Dreiecksmatrix  $\mathbf{C}$  mit positiven Diagonaleinträgen  $\mathbf{C}_{jj} > 0$  die Cholesky-Zerlegung von  $\mathbf{A}$ . Dann existiert eine blockweise untere Dreiecksmatrix  $\mathbf{C}_{\mathcal{H}}$  mit maximalem blockweisen Rang r, sodass

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}} \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^T\|_{2} \leq \left( C_{\text{Ch}} h^{-1} \text{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}} + C_{\text{Ch}}^2 h^{-2} \text{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}})^2 e^{-2br^{1/(d+1)}} \right) \|\mathbf{A}\|_{2},$$
(6.13)

wobei die Konstanten  $C_{\rm sc}$ , b > 0 wie in Lemma 6.7 gegeben sind, und  $C_{\rm Ch} = 2C_{\rm sp}C_{\rm sc}\sqrt{\kappa_2(\mathbf{A})}$ .

Beweis. Die Symmetrie und positive Definitheit von **A** impliziert die Symmetrie und positive Definitheit aller Schurkomplemente  $\mathbf{S}(\tau,\tau)$ , und daher folgt  $\mathbf{D}(\tau)\mathbf{L}(\tau) = \mathbf{C}(\tau)$  in (6.8), wobei  $\mathbf{D}(\tau)$  eine Diagonalmatrix ist und  $\mathbf{D}(\tau)^2$  die Diagonaleinträge von  $\mathbf{U}(\tau)$  enthält. Weiters folgt  $\|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{C}\|_2^2$  und  $\kappa_2(\mathbf{C}) = \|\mathbf{C}^{-1}\|_2 \|\mathbf{C}\|_2 = \sqrt{\kappa_2(\mathbf{A})}$ .

# 6.4 Die Lamé-Gleichung - $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegung

In diesem Abschnitt werden wir für die Lamé-Gleichung aus (3.16) die Existenz einer Niedrigrangapproximation an das Schurkomplement zeigen, und somit mit Hilfe von Abschnitt 6.2 eine approximative Cholesky-Zerlegung erhalten. Das Hauptresultat, die Existenz dieser Zerlegung, ist im folgenden Satz formuliert.

Satz 6.10. Sei  $\mathbf{A} = \mathbf{CC}^T$  die Cholesky-Zerlegung, wobei die Matrix  $\mathbf{A}$  entweder durch (3.19) oder  $\mathbf{A}^{\mathrm{st}}$  aus (3.29) gegeben ist. Sei der Zulässigkeitsparameter  $\eta > 0$  fixiert und eine zulässige Partition P von  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$  basierend auf einem Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  gegeben. Dann existiert eine blockweise untere Dreiecksmatrix  $\mathbf{C}_{\mathcal{H}}$  mit maximalem blockweisen Rang r (für (3.19)) bzw. Rang  $r + 4 \dim \mathcal{R}_d$  (für (3.29)), sodass

• 
$$\frac{\|\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}}\|_2}{\|\mathbf{C}\|_2} \le C_{\text{Chol}} h^{-1} \text{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}};$$

$$\bullet \frac{\|\mathbf{A} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}} \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^T\|_2}{\|\mathbf{A}\|_2} \le 2C_{\text{Chol}} h^{-1} \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}} + C_{\text{Chol}}^2 h^{-2} \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}})^2 e^{-2br^{1/(d+1)}}$$

Die Konstante  $C_{\text{Chol}}$  ist gegeben durch  $C_{\text{chol}} = 2C_{\text{sp}}C_{\text{sc}}\sqrt{\kappa_2(\mathbf{A})}$  mit der Schwachbesetztheitskonstante  $C_{\text{sp}}$  aus (2.26). Die Konstante  $C_{\text{sc}} > 0$  hängt nur von  $\Omega$ , d, p, den Lamé-Konstanten  $\lambda$ ,  $\mu$  und der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab. Die Konstante b > 0 hängt zusätzlich noch von  $\eta$  ab.

Der Beweis wird am Ende dieses Abschnittes geführt und basiert abermals auf einer Approximation des Schurkomplements  $S(\tau, \sigma)$ .

Lemma 6.11. Für ein  $\eta$ -zulässiges Cluster-Paar  $\tau \times \sigma$  sei  $\mathbf{S}(\tau, \sigma)$  das in (6.2) definierte Schurkomplement für die Matrix  $\mathbf{A}$  aus (3.19). Dann existiert eine Rang-r-Matrix  $\mathbf{S}_r(\tau, \sigma)$ , sodass

$$\|\mathbf{S}(\tau,\sigma) - \mathbf{S}_r(\tau,\sigma)\|_2 \le C_{\rm sc} h^{-1} e^{-br^{1/(d+1)}} \|\mathbf{A}\|_2$$

wobei die Konstante  $C_{sc} > 0$  nur von  $\Omega$ , p, d, den Lamé-Konstanten  $\lambda$ ,  $\mu$  und der  $\gamma$ -Formregularität von  $\mathcal{T}_h$  abhängt. Die Konstante b > 0 hängt zusätzlich noch von  $\eta$  ab.

Beweis. Der Beweis wird identisch zum Beweis von Lemma 6.7 geführt. Mit Hilfe der Darstellung

$$\mathbf{u}^T \mathbf{S}(\tau, \sigma) \mathbf{w} = a(\widetilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}),$$

wobei  $\widetilde{\mathbf{u}}$  die Orthogonalität

$$a(\widetilde{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{w}}) = 0 \quad \forall \widehat{\mathbf{w}} \in S_0^{p,1}(\mathcal{T}_h)^d \text{ mit supp } \widehat{\mathbf{w}} \subset \overline{\omega_\rho}$$
 (6.14)

erfüllt, folgt  $\widetilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+\kappa)R_{\sigma}}, \omega_{\rho})$ . An dieser Stelle wird die Definition von supp  $\widehat{\mathbf{w}} \subset \overline{\omega_{\rho}}$  sowie die Aufspaltung von  $\omega_{\rho}$  aus (4.27) benötigt, da der Cluster  $\rho$  nicht notwendigerweise die gleiche Anzahl an Freiheitsgraden für jede Komponente enthalten muss.

Iteration des Approximationsresultats aus Lemma 4.9, wie im Beweis von Proposition 4.7, führt dann auf eine niedrigdimensionale Approximation an  $\tilde{\mathbf{u}}$  und somit, wie in Lemma 6.7, an  $\mathbf{S}(\tau, \sigma)$ .

Bemerkung 6.12. Analog zur Gleichung (6.5) lässt sich eine Darstellung für das Schurkomplement mit einer Matrix **D** von maximalem Rang  $3 \dim \mathcal{R}_d$  finden, sodass die Schurkomplemente der stabilisierten Matrix  $\mathbf{A}^{\mathrm{st}}$  aus (3.29) wie in Lemma 6.8 approximiert werden können.

Beweis von Satz 6.10. Lemma 6.11 und Bemerkung 6.12 liefern Approximationen  $\mathbf{S}_r$  an die Schurkomplemente  $\mathbf{S}(\tau, \sigma)$  und  $\mathbf{S}^{\mathrm{st}}(\tau, \sigma)$ , und gemeinsam mit Satz 6.5 und  $\|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{C}\|_2^2$  führt das auf die erste Abschätzung für  $\mathbf{C}$ .

Da  $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$ , liefert die Dreiecksungleichung schlussendlich

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{A} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}} \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^{T} \right\|_{2} &\leq \left\| \mathbf{C} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}} \right\|_{2} \left\| \mathbf{C}^{T} \right\|_{2} + \left\| \mathbf{C}^{T} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^{T} \right\|_{2} \left\| \mathbf{C} \right\|_{2} + \left\| \mathbf{C} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}} \right\|_{2} \left\| \mathbf{C}^{T} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^{T} \right\|_{2} \\ &\lesssim 2\kappa_{2}(\mathbf{C}) \mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) h^{-1} e^{-br^{1/(d+1)}} \left\| \mathbf{A} \right\|_{2} \\ &+ \kappa_{2}(\mathbf{C})^{2} \mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}})^{2} h^{-2} e^{-2br^{1/(d+1)}} \frac{\left\| \mathbf{A} \right\|_{2}^{2}}{\left\| \mathbf{C} \right\|_{2}^{2}} \end{aligned}$$

und mit  $\|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{C}\|_2^2$  und  $\kappa_2(\mathbf{C}) = \|\mathbf{C}^{-1}\|_2 \|\mathbf{C}\|_2 = \sqrt{\kappa_2(\mathbf{A})}$  ist der Beweis beendet.  $\square$ 

### 6.5 Die schwach-singuläre Integralgleichung - $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegung

In diesem Abschnitt wird eine Niedrigrangapproximation an die Schurkomplemente für die schwach-singuläre Integralgleichung konstruiert. Das Hauptresultat in diesem Abschnitt ist der nachfolgende Satz 6.13, der die Existenz einer hierarchischen Cholesky-Zerlegung für die Galerkin-Matrix  ${\bf V}$  des Einfachschichtoperators zeigt. Für Randelementdiskretisierungen der schwach-singulären und der hypersingulären Integralgleichung ist die Existenz einer derartigen Zerlegung bisher nicht bekannt.

Satz 6.13. Sei  $V = CC^T$  die Cholesky-Zerlegung von V mit einer unteren Dreiecksmatrix C. Sei der Zulässigkeitsparameter  $\eta > 0$  fixiert und eine zulässige Partition P von  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$  basierend auf einem Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  gegeben. Dann existiert für jedes  $r \geq 0$  eine blockweise untere Dreiecksmatrix  $C_{\mathcal{H}}$  mit maximalem blockweisen Rang r + 1, sodass

• 
$$\frac{\|\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}}\|_{2}}{\|\mathbf{C}\|_{2}} \le C_{\text{chol}} N_{\Gamma}^{5/(2d-2)} \text{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}};$$

$$\bullet \frac{\left\| \mathbf{V} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}} \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^T \right\|_2}{\left\| \mathbf{V} \right\|_2} \le 2C_{\text{chol}} N_{\Gamma}^{5/(2d-2)} \text{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}}$$

$$+ C_{\text{chol}}^2 N_{\Gamma}^{5/(d-1)} \text{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}})^2 e^{-2br^{1/(d+1)}}$$

Die Konstante  $C_{\text{Chol}}$  ist gegeben durch  $C_{\text{chol}} = C_{\text{sp}}C_{\text{sc}}\sqrt{\kappa_2(\mathbf{V})}$  mit der Schwachbesetztheitskonstante  $C_{\text{sp}}$  aus (2.26). Die Konstanten  $C_{\text{sc}}$ , b > 0 hängen nur von  $\Omega$ , d, p, der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  und  $\eta$  ab.

Der Beweis wird am Ende dieses Abschnittes angegeben und folgt mittels Approximation von Schurkomplementen und Satz 6.5. Die angewendeten Techniken zur Approximation der Schurkomplemente sind ähnlich zu jenen im Beweis von Lemma 6.7. Dennoch ist der Beweis

technisch aufwändiger, da in Lemma 6.7 die Lokalität von Finite Elemente Diskretisierungen ausgenutzt wurde, was für Randelementdiskretisierungen auf Grund der Nicht-Lokalität der Randintegraloperatoren nicht möglich ist.

Wir werden dieses Problem mit Hilfe einer degenerierten Approximation an die asymptotisch glatte Kernfunktion  $\kappa(x,y):=G(x,y)$  des Einfachschichtoperators  $V\phi(x):=\int_{\Gamma}G(x,y)\phi(y)ds_y$  auf einer geeigneten Box umgehen. Dieses klassische Resultat kann auf verschiedene Arten gezeigt werden, beispielsweise mittels Taylorentwicklung oder Interpolation. Wir werden im folgenden Lemma tensorielle Chebyshev-Interpolation verwenden, wofür wir auf [BG04] verweisen.

**Lemma 6.14.** Sei  $\widetilde{\eta} > 0$  und fixiere  $\eta' \in (0, 2\widetilde{\eta})$ . Sei  $B_Y \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{2, 3\}$  eine beliebige Box und eine abgeschlossene Menge  $D_X \subset \mathbb{R}^d$  mit  $\operatorname{dist}(D_X, B_Y) \geq \widetilde{\eta} \operatorname{diam}(B_Y)$  gegeben. Dann existieren für jedes  $r \in \mathbb{N}$  Funktionen  $g_{1,i}, g_{2,i}, i = 1, \ldots, r$  sowie eine Konstante C > 0, die nur von der Wahl von  $\eta' \in (0, 2\widetilde{\eta})$  abhängt, sodass

$$\left\| \kappa(x,\cdot) - \sum_{i=1}^{r} g_{1,i}(x) g_{2,i}(\cdot) \right\|_{L^{\infty}(B_Y)} \le C \frac{(1+1/\widetilde{\eta})}{\operatorname{dist}(\{x\}, B_Y)^{d-2}} (1+\eta')^{-r^{1/d}} \qquad \forall x \in D_X.$$
 (6.15)

Beweis. Die Green'sche Funktion für den Laplace-Operator ist asymptotisch glatt (siehe [Hac09, Definition 4.2.5] mit Konstante  $c_{as}(\nu) = C\nu!$ ).

Sei  $I_k^y: C(\overline{B_Y}) \to \mathcal{Q}_k$  der Tensorprodukt-Interpolationsoperator vom Grad k definiert auf  $C(\overline{B_Y})$ , welcher auf den Raum  $\mathcal{Q}_k$  von Polynomen vom Grad k in jeder Variable abbildet. Für die Dimension dieses Raumes folgt dim  $\mathcal{Q}_k = (k+1)^d =: r$ . Wir definieren die Approximation  $G_r(x,y) := \sum_{i=1}^r g_{1,i}(x)g_{2,i}(y)$  mit Hilfe des Interpolationsoperators  $I_k^y$  als  $G_r(x,\cdot) := I_k^y G(x,\cdot)$ , und die gewünschte Fehlerabschätzung folgt aus Standardresultaten für Chebyshev-Interpolation: Tensorielle Interpolation aus [BG04] liefert mit der asymptotischen Glattheit, dass

$$||G(x,\cdot) - I_k^y G(x,\cdot)||_{L^{\infty}(B_Y)} \lesssim \frac{1}{\operatorname{dist}(\{x\}, B_Y)^{d-2}} \left(1 + \frac{\operatorname{diam}(B_Y)}{\operatorname{dist}(\{x\}, B_Y)}\right) \Lambda_k^d r^{1/d} \cdot \left(1 + \frac{2\operatorname{dist}(\{x\}, B_Y)}{\operatorname{diam}(B_Y)}\right)^{-r^{1/d}},$$

wobei  $\Lambda_k \leq 1 + \frac{2}{\pi} \ln(k+1)$  die Lebesgue-Konstante der Chebyshev-Interpolation ist, siehe z.B. [Riv74]. Die Beobachtung  $\operatorname{dist}(\{x\}, B_Y) \geq \operatorname{dist}(B_Y, D_X) \geq \widetilde{\eta} \operatorname{diam}(B_Y)$  gemeinsam mit der Wahl  $\eta' < 2\widetilde{\eta}$  beendet den Beweis.

Auf Grund der positiven Definitheit der Galerkin-Matrix V aus (3.40) sind die Schurkomplemente  $S(\tau, \sigma)$  für beliebige Cluster  $\tau, \sigma \subset \mathcal{I}$  wohldefiniert. Das nachfolgende Theorem zeigt, dass für diese Schurkomplemente eine Niedrigrangapproximation existiert, wobei der Fehler exponentiell mit dem Blockrang fällt.

Satz 6.15. Sei  $\tau \times \sigma$  ein  $\eta$ -zulässiges Cluster-Paar und das Schurkomplement  $\mathbf{S}(\tau, \sigma)$  für die Matrix  $\mathbf{V}$  aus (3.40) definiert durch (6.2). Dann existiert für jedes  $r \geq 0$  eine Rang-(r+1)-Matrix  $\mathbf{S}_r(\tau, \sigma)$ , sodass

$$\|\mathbf{S}(\tau,\sigma) - \mathbf{S}_r(\tau,\sigma)\|_2 \le C_{\rm sc} N_{\Gamma}^{5/(2d-2)} e^{-br^{1/(d+1)}} \|\mathbf{V}\|_2,$$

wobei die Konstanten  $C_{sc}$ , b > 0 nur von  $\Omega$ , d, p, der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  und  $\eta$  abhängen.

Beweis. Seien  $B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}$  Bounding-Boxen für die Cluster  $\tau, \sigma$ , die die Zulässigkeitsbedingung (2.24) erfüllen. Mit  $\rho$  aus (6.1) sei  $\Gamma_{\rho} \subset \Gamma$  definiert durch (2.34). Wir wenden Lemma 6.2 mit der Bilinearform  $\langle V \cdot, \cdot \rangle_{L^{2}(\Gamma)}$  und dem Raum  $V_{h} = S^{p,0}(\mathcal{E}_{h})$  an. Für Vektoren  $\phi \in \mathbb{R}^{|\tau|}$ ,  $\psi \in \mathbb{R}^{|\sigma|}$  gilt also die Darstellung

$$\phi^T \mathbf{S}(\tau, \sigma) \psi = \left\langle V \widetilde{\phi}, \psi \right\rangle_{L^2(\Gamma)}.$$
 (6.16)

Die Funktion  $\psi$  ist hierbei gegeben als  $\psi = \sum_{j=1}^{|\sigma|} \psi_j \xi_{j\sigma}$ , wobei  $\xi_{j\sigma}$  die j-te Basisfunktion zugehörig zum Cluster  $\sigma$  bezeichnet, und die Funktion  $\widetilde{\phi} \in S^{p,0}(\mathcal{E}_h)$  ist definiert durch  $\widetilde{\phi} = \phi + \phi_\rho$  mit  $\phi = \sum_{j=1}^{|\sigma|} \phi_j \xi_{j\tau}$  und supp  $\phi_\rho \subset \overline{\Gamma_\rho}$ , sodass

$$\left\langle V\widetilde{\phi}, \widehat{\psi} \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = 0 \quad \forall \widehat{\psi} \in S^{p,0}(\mathcal{E}_h) \text{ mit supp } \widehat{\psi} \subset \overline{\Gamma_\rho}.$$
 (6.17)

Unsere Niedrigrangapproximation an das Schurkomplement  $\mathbf{S}(\tau,\sigma)$  wird in zwei Schritten konstruiert. Zunächst wird auf einer Box  $B_{(1+\delta)R_{\sigma}}$  mit Hilfe der in Abschnitt 4.4 eingeführten Techniken und der Orthogonalität (6.17) ein niedrigdimensionaler Raum  $\widetilde{W}_k$  konstruiert, aus dem die Funktion  $\widetilde{\phi}$  für jedes  $\phi$  gut approximiert werden kann. Außerhalb von  $B_{(1+\delta)R_{\sigma}}$  nutzen wir die Trägereigenschaft supp  $\psi \subset \overline{B_{R_{\sigma}}}$  der Funktion  $\psi$  aus (6.16) und verwenden Lemma 6.14.

Seien  $\delta = \frac{1}{1+\eta}$  und  $B_{R_{\sigma}}$ ,  $B_{(1+\delta)R_{\sigma}}$ ,  $B_{(1+2\delta)R_{\sigma}}$  konzentrische Boxen gemäß Definition 2.10. Die Wahl von  $\delta$  und die Zulässigkeitsbedingung (2.24), wobei wir auf Grund der Symmetrie  $\mathbf{S}(\tau,\sigma) = \mathbf{S}(\sigma,\tau)^T$  annehmen können, dass  $\min\{\operatorname{diam}(B_{R_{\tau}}), \operatorname{diam}(B_{R_{\sigma}})\} = \sqrt{d}R_{\sigma}$ , implizieren

$$\operatorname{dist}(B_{(1+2\delta)R_{\sigma}}, B_{R_{\tau}}) \ge \operatorname{dist}(B_{R_{\sigma}}, B_{R_{\tau}}) - \sqrt{d\delta}R_{\sigma} \ge \sqrt{dR_{\sigma}}(\eta^{-1} - \delta) > 0. \tag{6.18}$$

Die Symmetrie des Randintegraloperators V und supp  $\widetilde{\phi} \subset \overline{B_{R_{\tau}}} \cup \overline{\Gamma_{\rho}}$  führen somit auf

$$\left\langle V\widetilde{\phi}, \psi \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} = \left\langle \widetilde{\phi}, V\psi \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} 
= \left\langle \widetilde{\phi}, V\psi \right\rangle_{L^{2}(B_{(1+\delta)}R_{\sigma}\cap\Gamma_{\rho})} + \left\langle \widetilde{\phi}, V\psi \right\rangle_{L^{2}(\Gamma\setminus B_{(1+\delta)}R_{\sigma})}.$$
(6.19)

Wir betrachten zunächst den ersten Term auf der rechten Seite von (6.19). Wegen (6.18) folgt  $\widetilde{\phi}|_{B_{(1+2\delta)R_{\sigma}}\cap\Gamma_{\rho}} = \phi_{\rho}|_{B_{(1+2\delta)R_{\sigma}}\cap\Gamma_{\rho}}$  und die Orthogonalität (6.17) gilt auf der Box  $B_{(1+2\delta)R_{\sigma}}$ . Somit liegt das Potential  $\widetilde{V}\widetilde{\phi}$  im Raum  $\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R_{\sigma}},\Gamma_{\rho})$ .

Es kann also Lemma 4.19 auf  $\widetilde{V}\widetilde{\phi}$  angewendet werden mit  $R:=(1+\delta)R_{\sigma}$  und  $\kappa:=\frac{1}{2+\eta}=\frac{\delta}{1+\delta}$ . Hierbei sei erwähnt, dass  $(1+\kappa)(1+\delta)=1+2\delta$  und  $1+\kappa^{-1}=3+\eta$ . Lemma 4.19 liefert somit einen niedrigdimensionalen Raum  $\widetilde{W}_k$  mit Dimension dim  $\widetilde{W}_k \leq C_{\dim}(3+\eta)^d q^{-d} k^{d+1} =: \lceil \frac{r}{2} \rceil$ , und die Bestapproximation  $\widehat{\phi}=\Pi_{\widetilde{W}_k}\widetilde{\phi}$  an  $\widetilde{\phi}$  aus dem Raum

 $\widetilde{W}_k$  erfüllt

$$\left\|\widetilde{\phi} - \widehat{\phi}\right\|_{L^{2}(B_{(1+\delta)R_{\sigma}} \cap \Gamma_{\rho})} \lesssim R_{\sigma} h^{-3/2} q^{k} \left\|\widetilde{V}\widetilde{\phi}\right\|_{h,(1+2\delta)R_{\sigma}}$$
$$\lesssim h^{-3/2} e^{-b_{1}r^{1/(d+1)}} \left\|\widetilde{\phi}\right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)},$$

wobei wir  $b_1 := -2^{-(d+1)} \frac{\ln(q)}{C_{\text{dim}}^{1/(d+1)}} q^{d/(d+1)} (3+\eta)^{-d/(1+d)} > 0$  definiert haben, um  $q^k \le e^{-b_1 r^{1/(d+1)}}$  zu erhalten. Somit folgt

$$\left| \left\langle \widetilde{\phi} - \widehat{\phi}, V\psi \right\rangle_{L^{2}(B_{(1+\delta)R_{\sigma}} \cap \Gamma_{\rho})} \right| \lesssim h^{-3/2} e^{-b_{1}r^{1/(d+1)}} \left\| \widetilde{\phi} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|V\psi\|_{L^{2}(\Gamma)}. \tag{6.20}$$

Die Elliptizität von V, die Trägereigenschaft  $\operatorname{supp}(\widetilde{\phi} - \phi) = \operatorname{supp} \phi_{\rho} \subset \overline{\Gamma_{\rho}}$  und die Orthogonalität (6.17) liefern

$$\begin{split} \left\| \widetilde{\phi} - \phi \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^{2} \lesssim \left\langle V(\widetilde{\phi} - \phi), \widetilde{\phi} - \phi \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} &= -\left\langle V\phi, \widetilde{\phi} - \phi \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} \\ \lesssim \left\| V\phi \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \left\| \widetilde{\phi} - \phi \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \lesssim \left\| \phi \right\|_{L^{2}(\Gamma)} \left\| \widetilde{\phi} - \phi \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \end{split}$$
(6.21)

Schlussendlich erhält man mittels Dreiecksungleichung, (6.21) und der Stetigkeit von V:  $L^2(\Gamma) \to H^1(\Gamma)$  aus Satz 3.11 eine Abschätzung für (6.20) durch

$$\begin{split} \left| \left\langle \widetilde{\phi} - \widehat{\phi}, V \psi \right\rangle_{L^{2}(B_{(1+\delta)R_{\sigma}} \cap \Gamma_{\rho})} \right| &\lesssim h^{-3/2} e^{-br^{1/(d+1)}} \left( \left\| \widetilde{\phi} - \phi \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|V\psi\|_{L^{2}(\Gamma)} \right. \\ &+ \left\| \phi \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|V\psi\|_{L^{2}(\Gamma)} \right) \\ &\lesssim h^{-3/2} e^{-br^{1/(d+1)}} \left\| \phi \right\|_{L^{2}(\Gamma)} \|\psi\|_{L^{2}(\Gamma)} \,. \end{split}$$

Für den zweiten Term in (6.19) nützen wir die asymptotische Glattheit der Green'schen Funktion  $G(\cdot, \cdot)$  aus. Es kann Lemma 6.14 angewendet werden mit  $B_Y = B_{R_{\sigma}}$  und  $D_X = \overline{\Gamma \setminus B_{(1+\delta)R_{\sigma}}}$ , wobei für alle  $x \in D_X$  die Wahl von  $\delta$  impliziert, dass

$$\operatorname{dist}(\{x\}, B_Y) \ge \operatorname{dist}(D_X, B_Y) \ge \frac{1}{2\sqrt{d}(1+n)} \operatorname{diam}(B_Y) = \frac{\delta R_{\sigma}}{2}.$$
 (6.22)

Daher erhalten wir eine Approximation  $G_{\widetilde{r}}(x,y) = \sum_{i=1}^{\widetilde{r}} g_{1,i}(x)g_{2,i}(y)$ , wobei  $\widetilde{r} = \lceil \frac{r}{2} \rceil$ , mit

$$||G(x,\cdot) - G_{\widetilde{r}}(x,\cdot)||_{L^{\infty}(B_{R_{\sigma}})} \lesssim \frac{1}{\operatorname{dist}(\{x\}, B_{R_{\sigma}})^{d-2}} e^{-b_2 r^{1/d}} \,\forall x \in \overline{\Gamma \setminus B_{(1+\delta)R_{\sigma}}}.$$
 (6.23)

Hierbei hängt die Konstante  $b_2 > 0$  nur von d und  $\eta$  ab. Aus (6.22) und (6.23) sowie  $|\Gamma \cap B_{R_{\sigma}}| \lesssim R_{\sigma}^{d-1}$  folgt nun, dass der Rang- $\widetilde{r}$ -Operator  $V_{\widetilde{r}}$  gegeben durch  $V_{\widetilde{r}}\psi(x) :=$ 

 $\int_{B_R \cap \Gamma} G_{\widetilde{r}}(x,y)\psi(y)ds_y$  die Abschätzung

$$\begin{split} \left| \left\langle \widetilde{\phi}, (V - V_{\widetilde{r}}) \psi \right\rangle_{L^{2}(\Gamma \backslash B_{(1+\delta)R_{\sigma}})} \right| \\ &= \left| \int_{\Gamma \backslash B_{(1+\delta)R_{\sigma}}} \widetilde{\phi}(x) \int_{B_{R_{\sigma}} \cap \Gamma} (G(x, y) - G_{\widetilde{r}}(x, y)) \psi(y) ds_{y} ds_{x} \right| \\ &\lesssim \left\| \widetilde{\phi} \right\|_{L^{2}(\Gamma)} \sqrt{|\Gamma \cap B_{R_{\sigma}}|} \left\| G - G_{\widetilde{r}} \right\|_{L^{\infty}\left((\Gamma \backslash B_{(1+\delta)R_{\sigma}}) \times (B_{R_{\sigma}} \cap \Gamma)\right)} \left\| \psi \right\|_{L^{2}(\Gamma)} \\ &\lesssim \delta^{2-d} R_{\sigma}^{(3-d)/2} e^{-b_{2}r^{1/d}} \left\| \widetilde{\phi} \right\|_{L^{2}(\Gamma)} \left\| \psi \right\|_{L^{2}(\Gamma)} \\ &\lesssim h^{-1/2} e^{-b_{2}r^{1/d}} \left\| \widetilde{\phi} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \left\| \psi \right\|_{L^{2}(\Gamma)} \lesssim h^{-1/2} e^{-b_{2}r^{1/d}} \left\| \phi \right\|_{L^{2}(\Gamma)} \left\| \psi \right\|_{L^{2}(\Gamma)} \end{split}$$

erfüllt, wobei die letzten beiden Ungleichungen aus der inversen Ungleichung aus Lemma 2.5, den Annahmen  $d \leq 3$  und  $R_{\sigma} \leq \eta \operatorname{diam}(\Omega)$ , der Wahl  $\delta = \frac{1}{1+\eta}$  sowie der Stabilitätsabschätzung (6.21) für die Abbildung  $\phi \mapsto \widetilde{\phi}$  folgen. Hier hängt die versteckte Konstante zusätzlich von  $\eta$  ab. Wir erhalten also mit  $b := \min\{b_1, b_2\}$ , dass

$$\begin{split} \left| \left\langle V \widetilde{\phi}, \psi \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} - \left\langle \widehat{\phi}, V \psi \right\rangle_{L^{2}(B_{(1+\delta)R_{\sigma}} \cap \Gamma_{\rho})} - \left\langle \widetilde{\phi}, V_{\widetilde{r}} \psi \right\rangle_{L^{2}(\Gamma \setminus B_{(1+\delta)R_{\sigma}})} \right| \\ \lesssim h^{-3/2} e^{-br^{1/(d+1)}} \, \|\phi\|_{L^{2}(\Gamma)} \, \|\psi\|_{L^{2}(\Gamma)} \, . \end{split}$$

Da die Abbildung  $(\phi, \psi) \mapsto \left\langle \widehat{\phi}, V \psi \right\rangle_{L^2(B_{(1+\delta)R_{\sigma}} \cap \Gamma_{\rho})} + \left\langle \widetilde{\phi}, V_{\widetilde{r}} \psi \right\rangle_{L^2(\Gamma \setminus B_{(1+\delta)R_{\sigma}})}$  eine beschränkte Bilinearform auf  $L^2(\Gamma)$  definiert, existiert ein linearer Operator  $\widehat{V}_r : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ , sodass

$$\left\langle \widehat{\phi}, V\psi \right\rangle_{L^2(B_{(1+\delta)R_{\sigma}}\cap\Gamma_{\rho})} + \left\langle \widetilde{\phi}, V_{\widetilde{r}}\psi \right\rangle_{L^2(\Gamma\setminus B_{(1+\delta)R_{\sigma}})} = \left\langle \widehat{V}_r\phi, \psi \right\rangle_{L^2(\Gamma)},$$

und die Dimension des Bildes von  $\widehat{V}_r$  ist beschränkt durch  $2\widetilde{r} \leq r+1$ . Daher erhalten wir eine Matrix  $\mathbf{S}_r(\tau, \sigma)$  von maximalem Rang r+1, sodass

$$\|\mathbf{S}(\tau,\sigma) - \mathbf{S}_r(\tau,\sigma)\|_2 = \sup_{\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^{|\tau|}, \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^{|\sigma|}} \frac{\left| \boldsymbol{\phi}^T (\mathbf{S}(\tau,\sigma) - \mathbf{S}_r(\tau,\sigma)) \boldsymbol{\psi} \right|}{\|\boldsymbol{\phi}\|_2 \|\boldsymbol{\psi}\|_2}$$
$$\leq C h^{d-5/2} e^{-br^{1/(d+1)}},$$

wobei wir (2.11) verwendet haben. Die Abschätzung  $\frac{1}{\|\mathbf{V}\|_2} \lesssim h^{-d}$  aus [Ste08, Lemma 12.6] sowie  $h \simeq N_{\Gamma}^{-1/(d-1)}$  beenden schlussendlich den Beweis.

Beweis von Satz 6.13. Lemma 6.15 liefert eine Approximation  $\mathbf{S}_r(\tau, \sigma)$  and as Schurkomplement  $\mathbf{S}(\tau, \sigma)$ , und gemeinsam mit Satz 6.5 führt das auf die erste Abschätzung für  $\mathbf{C}$ .

Da  $\mathbf{V} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$ , folgt mit der Dreiecksungleichung schlussendlich

$$\begin{split} \left\| \mathbf{V} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}} \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^{T} \right\|_{2} &\leq \left\| \mathbf{C} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}} \right\|_{2} \left\| \mathbf{C}^{T} \right\|_{2} + \left\| \mathbf{C}^{T} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^{T} \right\|_{2} \left\| \mathbf{C} \right\|_{2} \\ &+ \left\| \mathbf{C} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}} \right\|_{2} \left\| \mathbf{C}^{T} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^{T} \right\|_{2} \\ &\leq 2 C_{\text{sc}} C_{\text{sp}} \kappa_{2}(\mathbf{C}) \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) N_{\Gamma}^{5/(2d-2)} e^{-br^{1/(d+1)}} \left\| \mathbf{V} \right\|_{2} \\ &+ \kappa_{2}(\mathbf{C})^{2} C_{\text{sc}}^{2} C_{\text{sp}}^{2} \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}})^{2} N_{\Gamma}^{5/(d-1)} e^{-2br^{1/(d+1)}} \frac{\left\| \mathbf{V} \right\|_{2}^{2}}{\left\| \mathbf{C} \right\|_{2}^{2}}, \end{split}$$

und mit  $\kappa_2(\mathbf{V}) = \kappa_2(\mathbf{C})^2$  ist der Beweis beendet.

# 6.6 Die hypersinguläre Integralgleichung - $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegung

In diesem Abschnitt wird die Existenz einer approximativen Cholesky-Zerlegung für die hypersinguläre Integralgleichung bewiesen. Der nachfolgende Satz zeigt, dass der Cholesky-Faktor  $\mathbf{C}$  der stabilisierten Galerkin-Matrix  $\mathbf{W}^{\mathrm{st}}$  aus (3.51) durch eine blockweise untere Dreiecksmatrix mit Blockrang r approximiert werden kann, sowie, dass eine hierarchische LU-Zerlegung für die Matrix  $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}$  der Sattelpunktformulierung aus (3.48) existiert.

Satz 6.16. Sei  $\mathbf{W}^{\mathrm{st}} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$  die Cholesky-Zerlegung mit einer unteren Dreiecksmatrix  $\mathbf{C}$ . Sei der Zuverlässigkeitsparameter  $\eta > 0$  fixiert und eine zulässige Partition P von  $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$  basierend auf dem Cluster-Baum  $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$  gegeben. Dann existieren für jedes  $r \geq 0$  blockweise untere Dreiecksmatrizen  $\mathbf{C}_{\mathcal{H}}, \mathbf{L}_{\mathcal{H}}$  und eine blockweise obere Dreiecksmatrix  $\mathbf{U}_{\mathcal{H}}$  mit maximalem blockweisen Rang r + 5, sodass

1. 
$$\frac{\|\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}}\|_{2}}{\|\mathbf{C}\|_{2}} \leq C_{\text{chol}} N_{\Gamma}^{\frac{2}{d-1}} \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}};$$
2. 
$$\frac{\|\mathbf{W}^{\text{st}} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}} \mathbf{C}_{\mathcal{H}}\|_{2}}{\|\mathbf{W}^{\text{st}}\|_{2}} \leq 2C_{\text{chol}} N_{\Gamma}^{\frac{2}{d-1}} \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}}$$

$$+ C_{\text{chol}}^{2} N_{\Gamma}^{\frac{4}{d-1}} \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}})^{2} e^{-2br^{1/(d+1)}};$$
3. 
$$\frac{\|\widehat{\mathbf{W}} - \mathbf{L}_{\mathcal{H}} \mathbf{U}_{\mathcal{H}}\|_{2}}{\|\widehat{\mathbf{W}}\|_{2}} \leq 2C_{\text{chol}} N_{\Gamma}^{\frac{2}{d-1}} \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}}$$

$$+ C_{\text{chol}}^{2} N_{\Gamma}^{\frac{4}{d-1}} \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}})^{2} e^{-2br^{1/(d+1)}}.$$

Die Konstante  $C_{\rm chol}$  ist gegeben durch  $C_{\rm chol} = C_{\rm sp}C_{\rm sc}\sqrt{\kappa_2(\mathbf{W}^{\rm st})}$  mit der Schwachbesetztheitskonstante  $C_{\rm sp}$  aus (2.26). Die Konstante b > 0 hängt nur von  $\Omega$ , d, p, der  $\gamma$ -Form-regularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  und  $\eta$  ab. Die Konstante  $C_{\rm sc}$  hängt zusätzlich noch vom Stabilisierungsparameter  $\alpha$  ab.

Wir werden abermals die Repräsentation des Schurkomplements  $\mathbf{S}(\tau, \sigma)$  aus (6.5) verwenden, um eine Niedrigrangapproximation an  $\mathbf{S}(\tau, \sigma)$  zu konstruieren, was im nachfolgenden Satz formuliert ist.

**Satz 6.17.** Sei  $\tau \times \sigma$  ein  $\eta$ -zulässiges Cluster-Paar und das Schurkomplement  $\mathbf{S}(\tau, \sigma)$  für die Matrix  $\mathbf{W}^{\mathrm{st}}$  aus (3.51) definiert durch (6.2). Dann existiert für jedes  $r \geq 0$ , eine Rang-(r+5)-Matrix  $\mathbf{S}_r(\tau, \sigma)$ , sodass

$$\|\mathbf{S}(\tau,\sigma) - \mathbf{S}_r(\tau,\sigma)\|_2 \le C_{sc}' h^{d-3} e^{-br^{1/(d+1)}},$$

wobei die Konstanten  $C'_{sc}$ , b > 0 nur von  $\Omega$ , d, p, der  $\gamma$ -Formregularität der quasiuniformen Triangulierung  $\mathcal{E}_h$  und  $\eta$  abhängen. Weiters existiert eine Konstante  $C_{sc}$ , die zusätzlich noch vom Stabilisierungsparameter  $\alpha > 0$  abhängt, sodass

$$\|\mathbf{S}(\tau,\sigma) - \mathbf{S}_r(\tau,\sigma)\|_2 \le C_{\rm sc} N_{\Gamma}^{2/(d-1)} e^{-br^{1/(d+1)}} \|\mathbf{W}^{\rm st}\|_2.$$

Beweis. Seien  $B_{R_{\tau}}, B_{R_{\sigma}}$  Bounding-Boxen zu den Clustern  $\tau, \sigma$ , die die Zulässigkeitsbedingung (2.24) erfüllen, und  $\rho \subset \mathcal{I}$  sowie  $\Gamma_{\rho} \subset \Gamma$  definiert durch (6.1) und (2.34). Lemma 6.2, angewendet mit der stabilisierten Bilinearform  $\langle W \cdot, \cdot \rangle_{L^{2}(\Gamma)} + \alpha \langle \cdot, 1 \rangle_{L^{2}(\Gamma)} \langle \cdot, 1 \rangle_{L^{2}(\Gamma)}$ , der zugehörigen Galerkin-Matrix  $\mathbf{W}^{\text{st}}$  und  $V_{h} = S^{p,1}(\mathcal{E}_{h})$ , liefert eine Repräsentation des Schurkomplements als Orthogonalisierung bezüglich Freiheitsgraden in  $\Gamma_{\rho}$  mit

$$\phi^{T}\left(\mathbf{S}(\tau,\sigma)+\mathbf{D}\right)\psi=\left\langle W\widetilde{\phi},\psi\right\rangle_{L^{2}(\Gamma)}+\alpha\left\langle \widetilde{\phi},1\right\rangle_{L^{2}(\Gamma)}\left\langle \psi,1\right\rangle_{L^{2}(\Gamma)}.$$
(6.24)

Die Funktion  $\psi$  ist hierbei gegeben als  $\psi = \sum_{j=1}^{|\sigma|} \psi_j \xi_{j\sigma}$  und die Funktion  $\widetilde{\phi} \in S^{p,1}(\mathcal{E}_h)$  ist definiert durch  $\widetilde{\phi} = \phi + \phi_\rho$  mit  $\phi = \sum_{j=1}^{|\tau|} \phi_j \xi_{j\tau}$  und supp  $\phi_\rho \subset \overline{\Gamma_\rho}$ , sodass

$$\left\langle W\widetilde{\phi}, \widehat{\psi} \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = 0 \quad \forall \widehat{\psi} \in S^{p,1}(\mathcal{E}_h) \text{ mit supp } \widehat{\psi} \subset \overline{\Gamma_{\rho}}.$$
 (6.25)

Unsere Approximation des Schurkomplements  $\mathbf{S}(\tau,\sigma)$  wird ähnlich wie in Abschnitt 6.5 auf zwei Teilprobleme aufgeteilt: Zunächst wird mit Hilfe der Orthogonalität (6.25) und in weiterer Folge mit den Resultaten aus Abschnitt 4.5 ein niedrigdimensionaler Unterraum  $\widetilde{W}_k$  konstruiert, aus dem für jedes  $\phi$  die zugehörige Funktion  $\widetilde{\phi}$  gut approximiert werden kann. Weiters verwenden wir die Trägereigenschaft der Funktion  $\psi$  in (6.24), also supp  $\psi \subset \overline{B_{R_{\sigma}}}$ , und können daher Lemma 6.14 anwenden.

Seien  $\delta = \frac{1}{1+\eta}$  und  $B_{R_{\sigma}}$ ,  $B_{(1+\delta)R_{\sigma}}$ ,  $B_{(1+2\delta)R_{\sigma}}$  konzentrische Boxen. Auf Grund der Symmetrie des Schurkomplements  $\mathbf{S}(\tau,\sigma) = \mathbf{S}(\sigma,\tau)^T$  können wir diam  $B_{R_{\sigma}} \leq \operatorname{diam} B_{R_{\tau}}$  und somit  $\min\{\operatorname{diam}(B_{R_{\tau}}), \operatorname{diam}(B_{R_{\sigma}})\} = \sqrt{d}R_{\sigma}$  annehmen, was mit der Wahl von  $\delta$  sowie der Zulässigkeitsbedingung  $\operatorname{dist}(B_{(1+2\delta)R_{\sigma}}, B_{R_{\tau}}) > 0$  impliziert.

Die Symmetrie von W und die Trägereigenschaft supp  $\widetilde{\phi} \subset \overline{B_{R_{\tau}}} \cup \overline{\Gamma_{\rho}}$  führen auf

$$\begin{split} \left\langle W\widetilde{\phi}, \psi \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} + \alpha \left\langle \widetilde{\phi}, 1 \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} \left\langle \psi, 1 \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} &= \left\langle \widetilde{\phi}, W\psi \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} + \alpha \left\langle \widetilde{\phi}, 1 \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} \left\langle \psi, 1 \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} \\ &= \left\langle \widetilde{\phi}, W\psi \right\rangle_{L^{2}(B_{(1+\delta)R_{\sigma}} \cap \Gamma_{\rho})} + \left\langle \widetilde{\phi}, W\psi \right\rangle_{L^{2}(\Gamma \setminus B_{(1+\delta)R_{\sigma}})} + \alpha \left\langle \widetilde{\phi}, 1 \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} \left\langle \psi, 1 \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)}. \end{split}$$

$$\tag{6.26}$$

Wir werden zunächst den ersten Term auf der rechten Seite von (6.26) behandeln. Aus der Definition von  $\widetilde{\phi}$  folgt  $\widetilde{\phi}|_{B_{(1+2\delta)R_{\sigma}}\cap\Gamma_{\rho}} = \phi_{\rho}|_{B_{(1+2\delta)R_{\sigma}}\cap\Gamma_{\rho}}$ . Die Orthogonalität (6.25)

gilt auf der Box  $B_{(1+2\delta)R_{\sigma}}$ , womit für das Doppelschichtpotential  $\widetilde{K}\widetilde{\phi}$  folgt, dass  $\widetilde{K}\widetilde{\phi}\in\mathcal{H}_{h,0}(B_{(1+2\delta)R_{\sigma}},\Gamma_{\rho},0)$ .

Daher kann Lemma 4.26 auf das Doppelschichtpotential  $\widetilde{K}\widetilde{\phi}$  mit  $R:=(1+\delta)R_{\sigma}$  und  $\kappa:=\frac{1}{2+\eta}=\frac{\delta}{1+\delta}$  angewendet werden. Die Wahl von  $\kappa$  und  $\delta$  impliziert  $(1+\kappa)(1+\delta)=1+2\delta$  und  $1+\kappa^{-1}=3+\eta$ . Wir erhalten also einen niedrigdimensionalen Raum  $\widetilde{W}_k$  mit Dimension dim  $\widetilde{W}_k \leq C_{\dim}(3+\eta)^d q^{-d} k^{d+1} =: \lceil \frac{r}{2} \rceil$ , und die Bestapproximation  $\widehat{\phi}=\Pi_{\widetilde{W}_k}\widetilde{\phi}$  an  $\widetilde{\phi}$  aus dem Raum  $\widetilde{W}_k$  hat die Eigenschaft

$$\left\|\widetilde{\phi} - \widehat{\phi}\right\|_{L^2(B_{(1+\delta)R_{\sigma}}\cap\Gamma_{\rho})} \lesssim R_{\sigma}h^{-1/2}q^k \left\|\widetilde{K}\widetilde{\phi}\right\|_{h,(1+2\delta)R_{\sigma}}.$$

Mit  $\|\widetilde{K}\widetilde{\phi}\|_{h,(1+2\delta)R_{\sigma}} \lesssim (1+R_{\sigma}^{-1}) \|\widetilde{\phi}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$  und der Definition  $b_1 := -2^{-(d+1)} \frac{\ln(q)}{C_{\dim}^{1/(d+1)}} q^{d/(d+1)}$   $(3+\eta)^{-d/(1+d)} > 0$ , womit  $q^k \leq e^{-b_1 r^{1/(d+1)}}$  gilt, folgt somit

$$\left| \left\langle \widetilde{\phi} - \widehat{\phi}, W \psi \right\rangle_{L^{2}(B_{(1+\delta)R_{\sigma}} \cap \Gamma_{\rho})} \right| \lesssim R_{\sigma} h^{-1/2} q^{k} \left\| \widetilde{K} \widetilde{\phi} \right\|_{h, (1+2\delta)R_{\sigma}} \left\| W \psi \right\|_{L^{2}(\Gamma)}$$

$$\lesssim h^{-1/2} e^{-b_{1}r^{1/(d+1)}} \left\| \widetilde{\phi} \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \left\| W \psi \right\|_{L^{2}(\Gamma)}. \quad (6.27)$$

Die Elliptizität des hypersingulären Integraloperators auf dem Screen  $\Gamma_{\rho} \subsetneq \Gamma$ , siehe beispielsweise [SS11], supp $(\widetilde{\phi} - \phi) = \text{supp } \phi_{\rho} \subset \overline{\Gamma_{\rho}}$  und die Orthogonalität (6.25) führen auf

$$\begin{split} \left\|\widetilde{\phi} - \phi\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 &\lesssim \left\langle W(\widetilde{\phi} - \phi), \widetilde{\phi} - \phi \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = -\left\langle W\phi, \widetilde{\phi} - \phi \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \\ &\lesssim \left\|W\phi\right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \left\|\widetilde{\phi} - \phi\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \left\|\phi\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \left\|\widetilde{\phi} - \phi\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. (6.28) \end{split}$$

Mit der Stabilität des hypersingulären Integraloperators  $W: H^1(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$  aus Satz 3.11, der Dreiecksungleichung, der Abschätzung (6.28) und der inversen Abschätzung (2.12) können wir nun (6.27) abschätzen mittels

$$\left| \left\langle \widetilde{\phi} - \widehat{\phi}, W \psi \right\rangle_{L^{2}(B_{(1+\delta)R_{\sigma}} \cap \Gamma_{\rho})} \right| \lesssim h^{-1/2} e^{-b_{1}r^{1/(d+1)}} \left\| \widetilde{\phi} \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|\psi\|_{H^{1}(\Gamma)} 
\lesssim h^{-1/2} e^{-b_{1}r^{1/(d+1)}} \left( \left\| \widetilde{\phi} - \phi \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right) \|\psi\|_{H^{1}(\Gamma)} 
\lesssim h^{-2} e^{-b_{1}r^{1/(d+1)}} \|\phi\|_{L^{2}(\Gamma)} \|\psi\|_{L^{2}(\Gamma)}.$$
(6.29)

Für den zweiten Term in (6.26) nützen wir die asymptotische Glattheit der Green'schen Funktion  $G(\cdot, \cdot)$  aus. Hierbei verwenden wir zunächst eine klassische Darstellung des hypersingulären Integraloperators mit Hilfe des Einfachschichtoperators (siehe beispielsweise [Ste08, Kap. 6]) gegeben durch

$$\left\langle \widetilde{\phi}, W \psi \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = \left\langle \operatorname{rot}_{\Gamma} \widetilde{\phi}, V \operatorname{rot}_{\Gamma} \psi \right\rangle_{L^2(\Gamma)},$$
 (6.30)

wobei für eine skalare Funktion v definiert auf  $\Gamma$ , einen Fortsetzungsoperator  $\mathcal{L}$  und den äußeren Normalvektor n die Oberflächenrotation definiert ist durch

$$\operatorname{rot}_{\Gamma} v = n \times \gamma_0^{\operatorname{int}}(\nabla \mathcal{L} v), \qquad \text{für } d = 3, 
\operatorname{rot}_{\Gamma} v = n \cdot \gamma_0^{\operatorname{int}}(\nabla^T \mathcal{L} v), \quad \nabla^T v = (\partial_2 v, -\partial_1 v)^T \qquad \text{für } d = 2$$

Die Repräsentation (6.30) ist notwendig, da die Kernfunktion des hypersingulären Integraloperators, also die Normalenableitung der Green'schen Funktion, nicht asymptotisch glatt ist auf nicht glatten Oberflächen  $\Gamma$ .

Mit Hilfe dieser Darstellung kann Lemma 6.14 mit  $B_Y = B_{R_{\sigma}}$  und  $D_X = \overline{\Gamma \setminus B_{(1+\delta)R_{\sigma}}}$  angewendet werden, wobei für  $x \in D_X$  die Wahl von  $\delta$  impliziert, dass

$$\operatorname{dist}(\{x\}, B_Y) \ge \operatorname{dist}(D_X, B_Y) \ge \frac{1}{2\sqrt{d}(1+\eta)} \operatorname{diam}(B_Y) = \frac{\delta R_{\sigma}}{2}.$$
 (6.31)

Wir erhalten daher eine separable Approximation  $G_{\widetilde{r}}(x,y) = \sum_{i=1}^{\widetilde{r}} g_{1,i}(x)g_{2,i}(y)$ , wobei  $\widetilde{r} = \lceil \frac{r}{2} \rceil$  mit

$$||G(x,\cdot) - G_{\widetilde{r}}(x,\cdot)||_{L^{\infty}(B_{R_{\sigma}})} \lesssim \frac{1}{\operatorname{dist}(\{x\}, B_{R_{\sigma}})^{d-2}} e^{-b_2 r^{1/d}}$$
$$\lesssim (\delta R)^{2-d} e^{-b_2 r^{1/d}} \quad \forall x \in \overline{\Gamma \setminus B_{(1+\delta)R_{\sigma}}}. \tag{6.32}$$

Die Konstante  $b_2 > 0$  hängt hier nur von d und  $\eta$  ab. Auf Grund von (6.31) und (6.32) gilt für den Rang- $\tilde{r}$ -Operator  $W_{\tilde{r}}$  gegeben durch

$$\left\langle \widetilde{\phi}, W_{\widetilde{r}} \psi \right\rangle_{L^2(\Gamma \setminus B_{(1+\delta)R\sigma})} := \int_{\Gamma \setminus B_{(1+\delta)R\sigma}} \operatorname{rot}_{\Gamma} \widetilde{\phi}(x) \int_{B_{R\sigma} \cap \Gamma} G_{\widetilde{r}}(x, y) \operatorname{rot}_{\Gamma} \psi(y) ds_y ds_x$$

mit  $B := (\Gamma \setminus B_{(1+\delta)R_{\sigma}}) \times (B_{R_{\sigma}} \cap \Gamma)$  und  $|B| \lesssim R_{\sigma}^{d-1}$ , dass

$$\left| \left\langle \widetilde{\phi}, (W - W_{\widetilde{r}}) \psi \right\rangle_{L^{2}(\Gamma \setminus B_{(1+\delta)R_{\sigma}})} \right| \lesssim \left\| \operatorname{rot}_{\Gamma} \widetilde{\phi} \right\|_{L^{2}(\Gamma)} \sqrt{|B|} \left\| G - \widetilde{G}_{\widetilde{r}} \right\|_{L^{\infty}(B)} \left\| \operatorname{rot}_{\Gamma} \psi \right\|_{L^{2}(\Gamma)} 
\lesssim \delta^{2-d} R_{\sigma}^{(3-d)/2} e^{-b_{2}r^{1/d}} \left\| \operatorname{rot}_{\Gamma} \widetilde{\phi} \right\|_{L^{2}(\Gamma)} \left\| \operatorname{rot}_{\Gamma} \psi \right\|_{L^{2}(\Gamma)} 
\lesssim h^{-3/2} e^{-b_{2}r^{1/d}} \left\| \widetilde{\phi} \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \left\| \psi \right\|_{L^{2}(\Gamma)} \lesssim h^{-2} e^{-b_{2}r^{1/d}} \left\| \phi \right\|_{L^{2}(\Gamma)} \left\| \psi \right\|_{L^{2}(\Gamma)}, \quad (6.33)$$

wobei die letzten beiden Ungleichungen aus den inversen Ungleichungen (2.12) und (2.15), der Stabilitätsabschätzung (6.28) für die Abbildung  $\phi \mapsto \widetilde{\phi}$ , den Annahmen  $d \leq 3$  und  $R_{\sigma} \leq \eta \operatorname{diam}(\Omega)$  sowie der Wahl  $\delta = \frac{1}{1+\eta}$  folgen. Die versteckte Konstante hängt hier noch zusätzlich von  $\eta$  ab. Da die Abbildung

$$(\phi, \psi) \mapsto \left\langle \widehat{\phi}, W \psi \right\rangle_{L^{2}(B_{(1+\delta)}B_{\sigma} \cap \Gamma_{\rho})} + \left\langle \widetilde{\phi}, W_{\widetilde{r}} \psi \right\rangle_{L^{2}(\Gamma \setminus B_{(1+\delta)}B_{\sigma})} + \alpha \left\langle \widetilde{\phi}, 1 \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} \left\langle \psi, 1 \right\rangle_{L^{2}(\Gamma)}$$

eine beschränkte Bilinearform auf  $L^2(\Gamma)$  definiert, existiert ein linearer Operator  $\widehat{W}_r: L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ , sodass

$$\begin{split} \left\langle \widehat{W}_r \phi, \psi \right\rangle_{L^2(\Gamma)} &= \left\langle \widehat{\phi}, W \psi \right\rangle_{L^2(B_{(1+\delta)R_\sigma} \cap \Gamma_\rho)} + \left\langle \widetilde{\phi}, W_{\widetilde{r}} \psi \right\rangle_{L^2(\Gamma \backslash B_{(1+\delta)R_\sigma})} \\ &+ \alpha \left\langle \widetilde{\phi}, 1 \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \left\langle \psi, 1 \right\rangle_{L^2(\Gamma)}, \end{split}$$

und die Dimension des Bildes von  $\widehat{W}_r$  ist beschränkt durch  $2\widetilde{r}+1\leq r+2$ . Daher erhalten wir aus (6.29) und (6.33)

$$\left|\left\langle W\widetilde{\phi},\psi\right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} + \alpha\left\langle \widetilde{\phi},1\right\rangle_{L^{2}(\Gamma)}\left\langle \psi,1\right\rangle_{L^{2}(\Gamma)} - \left\langle \widehat{W}_{r}\phi,\psi\right\rangle_{L^{2}(\Gamma)}\right| \lesssim h^{-2}e^{-br^{1/(d+1)}}\left\|\phi\right\|_{L^{2}(\Gamma)}\left\|\psi\right\|_{L^{2}(\Gamma)}$$

mit  $b := \min\{b_1, b_2\}$ . Der endlich dimensionale Operator  $\widehat{W}_r$  induziert schließlich eine Matrix  $\widehat{\mathbf{S}_r}(\tau, \sigma)$  mit maximalem Rang r + 2, sodass

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{S}(\tau, \sigma) + \mathbf{D} - \widehat{\mathbf{S}_r}(\tau, \sigma) \right\|_2 &= \sup_{\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^{|\tau|}, \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^{|\sigma|}} \frac{\left| \boldsymbol{\phi}^T (\mathbf{S}(\tau, \sigma) + \mathbf{D} - \widehat{\mathbf{S}_r}(\tau, \sigma)) \boldsymbol{\psi} \right|}{\|\boldsymbol{\phi}\|_2 \|\boldsymbol{\psi}\|_2} \\ &\leq C h^{d-3} e^{-br^{1/(d+1)}}, \end{aligned}$$

wobei wir (2.11) angewendet haben. Somit existiert eine Matrix  $\mathbf{S}_r(\tau, \sigma) := \widehat{\mathbf{S}_r}(\tau, \sigma) - \mathbf{D}$  mit maximalem Rang r + 5, sodass

$$\|\mathbf{S}(\tau,\sigma) - \mathbf{S}_r(\tau,\sigma)\|_2 \le Ch^{d-3}e^{-br^{1/(d+1)}}$$
.

Die Abschätzung  $\frac{1}{\|\mathbf{W}^{\text{st}}\|_2} \lesssim h^{-d+1}$ , wobei die versteckte Konstante zusätzlich von  $\alpha$  abhängt, siehe auch [Ste08, Lemma 12.9], und  $h \simeq N_{\Gamma}^{-1/(d-1)}$  beenden den Beweis.

Mit Hilfe der Approximation an die Schurkomplemente können wir nun wie in den vorigen Abschnitten die Existenz einer hierarchischen LU-Zerlegung aus Satz 6.16 zeigen.

Beweis von Satz 6.16. Satz 6.5 liefert gemeinsam mit Lemma 6.17, dass

$$\|\mathbf{C} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}}\|_{2} \le C_{\mathrm{sc}} C_{\mathrm{sp}} N_{\Gamma}^{2/(d-1)} \operatorname{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) e^{-br^{1/(d+1)}} \|\mathbf{C}^{-1}\|_{2} \|\mathbf{W}^{\mathrm{st}}\|_{2},$$

womit mittels  $\|\mathbf{W}^{\text{st}}\|_{2} = \|\mathbf{C}\|_{2}^{2}$  die erste Aussage gezeigt ist.

Da  $\mathbf{W}^{\mathrm{st}} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$ , erhält man mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{W}^{\mathrm{st}} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}} \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^{T} \right\|_{2} &\leq \left\| \mathbf{C} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}} \right\|_{2} \left\| \mathbf{C}^{T} \right\|_{2} + \left\| \mathbf{C}^{T} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^{T} \right\|_{2} \left\| \mathbf{C} \right\|_{2} \\ &+ \left\| \mathbf{C} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}} \right\|_{2} \left\| \mathbf{C}^{T} - \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^{T} \right\|_{2} \\ &\leq 2C_{\mathrm{sc}} C_{\mathrm{sp}} \kappa_{2}(\mathbf{C}) \mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}}) N_{\Gamma}^{2/(d-1)} e^{-br^{1/(d+1)}} \left\| \mathbf{W}^{\mathrm{st}} \right\|_{2} \\ &+ \kappa_{2}(\mathbf{C})^{2} C_{\mathrm{sc}}^{2} C_{\mathrm{sp}}^{2} \mathrm{depth}(\mathbb{T}_{\mathcal{I}})^{2} N_{\Gamma}^{4/(d-1)} e^{-2br^{1/(d+1)}} \frac{\left\| \mathbf{W}^{\mathrm{st}} \right\|_{2}^{2}}{\left\| \mathbf{C} \right\|_{2}^{2}}, \end{aligned}$$

und mit  $\kappa_2(\mathbf{W}^{\mathrm{st}}) = \kappa_2(\mathbf{C})^2$  folgt der Beweis der zweiten Aussage.

Die approximativen LU-Faktoren  $\mathbf{L}_{\mathcal{H}}, \mathbf{U}_{\mathcal{H}}$  für die dritte Aussage können aus  $\mathbf{C}_{\mathcal{H}}$  konstruiert werden mittels

$$\mathbf{L}_{\mathcal{H}}\mathbf{U}_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\mathcal{H}} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\ell}^T & -|\boldsymbol{\ell}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^T & \boldsymbol{\ell} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\mathcal{H}}\mathbf{C}_{\mathcal{H}}^T & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $\ell \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma}}$  das Gleichungssystem  $\mathbf{C}_{\mathcal{H}}\ell = \mathbf{B}$  löst. Die gewünschte Fehlerabschätzung folgt direkt aus der zweiten Aussage.

### 6.7 FEM-BEM-Kopplung

Eine Anwendung der  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegungen aus den vorigen Abschnitten findet sich beispielsweise bei der Black-Box-Vorkonditionierung von Transmissionsproblemen. Wir werden hierbei zur Diskretisierung eine Kopplung von Finiten Elementen (im Innenraum) und Randelementen (im Außenraum) betrachten und einen Blockdiagonal-Vorkonditionierer mit Hilfe der hierarchischen LU-Zerlegungen definieren. Erste theoretische Resultate für die Anwendung von Blockdiagonal-Vorkonditionierern für symmetrische FEM-BEM-Kopplungen finden sich in [MS98]. Für die hier betrachtete Johnson-Nédélec-FEM-BEM-Kopplung verweisen wir auf [Füh14], wo sich unter anderem auch eine Schranke für die Konditionszahl des vorkonditionierten Systems findet.

Das Modellproblem hierbei ist das folgende Transmissionsproblem

$$-\operatorname{div}(\mathbf{C}\nabla u) = f \text{ in } \Omega,$$

$$-\Delta u^{\operatorname{ext}} = 0 \text{ in } \Omega^{\operatorname{ext}},$$

$$u - u^{\operatorname{ext}} = u_0 \text{ auf } \Gamma$$

$$\mathbf{C}(\nabla u - \nabla u^{\operatorname{ext}}) \cdot n = \phi_0 \text{ auf } \Gamma,$$

$$u^{\operatorname{ext}} = \mathcal{O}(|x|^{-1}) \text{ für } |x| \to \infty,$$

wobei  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $\phi_0 \in H^{-1/2}(\Gamma)$  und  $\mathbf{C} \in L^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  punktweise symmetrisch und positiv definit ist.

Mit der Darstellungsformel (3.31) für die Außenraumlösung  $u^{\text{ext}} = -V\phi + (K + \frac{1}{2})u^{\text{ext}}$  mit  $\phi = \gamma_1^{\text{ext}}u^{\text{ext}}$  erhält man die so genannte Johnson-Nédélec-FEM-BEM-Kopplung, eingeführt in [JN80], bei der  $u \in H^1(\Omega)$  und  $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$  gesucht sind, sodass

$$\langle \mathbf{C} \nabla u, \nabla v \rangle_{L^{2}(\Omega)} - \langle \phi, v \rangle_{L^{2}(\Gamma)} = \langle f, v \rangle_{L^{2}(\Gamma)} + \langle \phi_{0}, v \rangle_{L^{2}(\Gamma)} \quad \forall v \in H^{1}(\Omega)$$

$$\langle (1/2 - K)u, \psi \rangle_{L^{2}(\Gamma)} + \langle V \phi, \psi \rangle_{L^{2}(\Gamma)} = \langle (1/2 - K)u_{0}, \psi \rangle_{L^{2}(\Gamma)} \quad \forall \psi \in H^{-1/2}(\Gamma).$$
(6.34b)

Wir betrachten eine Galerkin-Diskretisierung in  $S^{1,1}(\mathcal{T}_h)$  für u sowie  $S^{0,0}(\mathcal{E}_h)$  für  $\phi$ . Hierbei sei das Gitter  $\mathcal{E}_h$  das Spurgitter von  $\mathcal{T}_h$ , also jedes  $E \in \mathcal{E}_h$  ist eine Kante bzw. Fläche eines Elements in  $\mathcal{T}_h$ . Die Galerkin-Diskretisierung von (6.34) führt auf eine Matrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(N_{\Omega}+N_{\Gamma})\times(N_{\Omega}+N_{\Gamma})}$  mit

$$\mathbf{B} := egin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{M}^T \ rac{1}{2}\mathbf{M} - \mathbf{K} & \mathbf{V} \end{pmatrix},$$

wobei  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_{\Omega} \times N_{\Omega}}$  eine FEM-Matrix zu einem homogenen Neumann-Problem mit  $\mathbf{A}_{jk} = \langle \mathbf{C} \nabla \psi_k, \nabla \psi_j \rangle_{L^2(\Omega)}$  und  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma} \times N_{\Gamma}}$  eine BEM-Diskretisierung des Einfachschichtoperators mit  $\mathbf{V}_{jk} = \langle V \xi_k, \xi_j \rangle_{L^2(\Gamma)}$  sind. Die Kopplungsmatrizen setzen sich aus einer Diskretisierung des Doppelschichtoperators  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma} \times N_{\Omega}}$  mit  $\mathbf{K}_{jk} = \langle K \psi_k, \xi_j \rangle_{L^2(\Gamma)}$  sowie der Massematrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N_{\Gamma} \times N_{\Omega}}$  mit  $\mathbf{M}_{jk} = \langle \psi_k, \xi_j \rangle_{L^2(\Gamma)}$  zusammen.

Wir werden einen Vorkonditionierer für das stabilisierte lineare System

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{st}} & -\mathbf{M}^T \\ \frac{1}{2}\mathbf{M} - \mathbf{K} & \mathbf{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix},$$

wobei  $\mathbf{A}^{\mathrm{st}} := \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B} \mathbf{B}^T$ , siehe auch (3.14), mit Hilfe der hierarchischen LU-Zerlegungen aus den vorherigen Abschnitten angeben. Hierfür betrachten wir einen Blockdiagonal-Vorkonditionierer

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_A & 0\\ 0 & \mathbf{P}_V \end{pmatrix},\tag{6.35}$$

wobei  $\mathbf{P}_A$  ein guter Vorkonditionierer für die (stabilisierte) FEM-Matrix  $\mathbf{A}^{\mathrm{st}}$  und  $\mathbf{P}_V$  ein guter Vorkonditionierer für die BEM-Matrix  $\mathbf{V}$  ist. In [Füh14, Satz 7.5] wird gezeigt, dass, sofern die Vorkonditionierer  $\mathbf{P}_A$  und  $\mathbf{P}_V$  hinreichend gute Vorkonditionierer sind in dem Sinn, dass die spektralen Äquivalenzen

$$c_A \mathbf{x}^T \mathbf{P}_A \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A}^{\text{st}} \mathbf{x} \leq C_A \mathbf{x}^T \mathbf{P}_A \mathbf{x}$$
 (6.36)

$$c_V \mathbf{x}^T \mathbf{P}_V \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x} \leq C_V \mathbf{x}^T \mathbf{P}_V \mathbf{x}$$
 (6.37)

gelten, der Vorkonditionierer  $\mathbf{P}$  dann ein guter Vorkonditionierer für das gesamte Blocksystem ist. Speziell gilt für die Konditionszahl von  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$  in der Spektralnorm, dass

$$\kappa_2(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}) \le C \frac{\max\{C_A, C_V\}}{\min\{c_A, c_V\}},$$

wobei die Konstante C nur von den Koeffizienten im Transmissionsproblem abhängt. Damit ist auch die Anzahl der Iterationen eines iterativen Lösers, wie beispielsweise des GMRES-Algorithmus, beschränkt. Eine natürliche Wahl im Kontext der hierarchischen Matrizen für  $\mathbf{P}_A$  und  $\mathbf{P}_V$  sind die  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegungen aus den Abschnitten 6.3 und 6.5, also

$$\mathbf{P}_A := \mathbf{L}_{\mathcal{H}}^A \mathbf{U}_{\mathcal{H}}^A, \quad \mathbf{P}_V := \mathbf{L}_{\mathcal{H}}^V \mathbf{U}_{\mathcal{H}}^V$$

mit  $\mathbf{A}^{\mathrm{st}} \approx \mathbf{L}_{\mathcal{H}}^{A}\mathbf{U}_{\mathcal{H}}^{A}$  und  $\mathbf{V} \approx \mathbf{L}_{\mathcal{H}}^{V}\mathbf{U}_{\mathcal{H}}^{V}$ . Die Fehlerabschätzungen aus Satz 6.6 und Satz 6.13 implizieren die spektralen Äquivalenzen (6.36). Für  $\|\mathbf{P}_{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{st}}\|_{2} \leq \varepsilon_{A} \|\mathbf{A}^{\mathrm{st}}\|_{2}$  folgt

$$\left|\mathbf{x}^{T}\mathbf{P}_{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^{T}\mathbf{A}^{\mathrm{st}}\mathbf{x}\right| \leq \left\|\mathbf{x}\right\|_{2}^{2} \left\|\mathbf{P}_{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{st}}\right\|_{2} \leq \varepsilon_{A} \left\|\mathbf{x}\right\|_{2}^{2} \left\|\mathbf{A}^{\mathrm{st}}\right\|_{2} \leq C_{1}\varepsilon_{A}h^{-d}\mathbf{x}^{T}\mathbf{A}^{\mathrm{st}}\mathbf{x}, \quad (6.38)$$

wobei wir im letzten Schritt (2.8) sowie die positive Definitheit von  $\bf A$  verwendet haben. Analog folgt für  ${\bf P}_V$ 

$$|\mathbf{x}^T \mathbf{P}_V \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}| \le ||\mathbf{x}||_2^2 ||\mathbf{P}_V - \mathbf{V}||_2 \le \varepsilon_V ||\mathbf{x}||_2^2 ||\mathbf{V}||_2 \le C_2 \varepsilon_V h^{-d+1} \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}.$$
(6.39)

Wählt man also den Rang r der  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegungen groß genug, sodass beispielsweise  $C_1\varepsilon_A h^{-d} = \frac{1}{2}$  und  $C_2\varepsilon_V h^{-d+1} = \frac{1}{2}$ , dann erhält man  $C_A = C_V = 2$  und  $c_A = c_V = \frac{2}{3}$  und somit eine Schranke  $\kappa_2(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}) \leq 3C$ .

Für numerische Beispiele, die den effizienten Einsatz des obig vorgestellten Blockdiagonal-Vorkonditionierers untermauern, sei auf den nächsten Abschnitt verwiesen.

# 7 Numerische Experimente

Wir werden in diesem Abschnitt numerische Beispiele angeben, die die Existenz von  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximationen an inverse Galerkin-Matrizen mit exponentiell konvergierendem Fehler untermauern, was in den vorigen Abschnitten dieser Arbeit theoretisch untersucht worden ist, sowie  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegungen zur Vorkonditionierung linearer Systeme bestimmen.

Die Berechnungen wurden auf einem Dell PowerEdge 910 Rack Server durchgeführt bestehend aus 4 Intel(R) Xeon(R) E7-4860 CPUs mit jeweils 10 Kernen, welche mit einer Frequenz von 2.26 GHz getaktet sind, sowie einem Arbeitsspeicher von 512 GB RAM. Für die Berechnungen der exakten FEM-Matrizen sowie deren  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximationen wird die C-Bibliothek HLiB, siehe [BG99], benutzt. Für die BEM-Matrizen wird für den Einfachschichtoperator sowie bei der FEM-BEM-Kopplung abermals HLiB verwendet. Diskretisierungen des hypersingulären Integraloperators werden mit Hilfe des in C++ verfassten Softwarepakets BEM++, siehe [ŚBA<sup>+</sup>15], assembliert. Die Approximationen im  $\mathcal{H}$ -Matrix-Format werden hierbei mittels des in BEM++ integrierten Softwarepakets AHMED, siehe [Beb12], bestimmt.

Für sämtliche nachfolgende Berechnungen wählen wir den Zulässigkeitsparameter  $\eta$  als  $\eta=2$  sowie die minimale Blattgröße  $n_{\rm blatt}$  als  $n_{\rm blatt}=25$  und konstruieren eine zulässige Partition mit Hilfe des geometrischen Clustering-Verfahrens, welches in Abschnitt 2.3 vorgestellt wurde.

# 7.1 Numerische Resultate für Finite Elemente Diskretisierungen

In diesem Abschnitt werden wir numerische Beispiele für Finite Elemente Diskretisierungen aus Abschnitt 3.1 in zwei und drei Raumdimensionen betrachten.

Für weitere numerische Beispiele zu homogenen Dirichlet-Randbedingungen für elliptische partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung verweisen wir auf [Gra01, BH03] sowie auf [Sch06] für elliptische Systeme.

#### 2D-Diffusion

Unser erstes und einfachstes numerisches Beispiel behandelt den Laplace-Operator auf dem Einheitsquadrat  $\Omega = (0,1)^2$ , also in der schwachen Formulierung die Bilinearform

$$a(u,v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}$$
 (7.1)

Wir betrachten zunächst gemischte, homogene Dirichlet-Neumann-Randbedingungen, wobei der Rand  $\Gamma = \partial \Omega$  aufgeteilt ist in den Dirichlet-Rand  $\Gamma_D := \{ \mathbf{x} \in \Gamma : \mathbf{x}_1 = 0 \lor \mathbf{x}_2 = 0 \}$ 

und den Neumann-Rand  $\Gamma_{\mathcal{N}} = \Gamma \setminus \overline{\Gamma_D}$ , und wählen eine Galerkin-Diskretisierung niedrigster Ordnung in  $S_0^{1,1}(\mathcal{T}_h;\Gamma_D)$ . Andererseits betrachten wir das reine Neumann-Problem, also  $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{N}}$ , und eine stabilisierte Galerkin-Diskretisierung von

$$a_{\mathcal{N}}(u,v) := \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^{2}(\Omega)} + \langle u, 1 \rangle_{L^{2}(\Omega)} \langle v, 1 \rangle_{L^{2}(\Omega)}$$
(7.2)

in  $S^{1,1}(\mathcal{T}_h)$ .

Eine  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation  $\mathbf{B}_{\mathcal{H}}$  an die Inversen  $\mathbf{A}^{-1}$  und  $(\mathbf{A}^{\mathrm{st}})^{-1}$  wird wie in Abschnitt 2.3.2 beschrieben mit Hilfe von Formel (2.32) konstruiert: Zunächst wird eine genaue  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an die Matrix  $\mathbf{A}$  bestimmt und anschließend mit Formel (2.32) und  $\mathcal{H}$ -Matrix-Arithmetik eine approximative Inverse berechnet. Schlussendlich wird mit Hilfe der abgeschnittenen Singulärwertzerlegung aus Abschnitt 2.3.2 eine blockweise Bestapproximation für den jeweilig vorgeschriebenen Rang r bestimmt. Als Fehlermaß betrachten wir  $\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B}_{\mathcal{H}}\|_2$ , was wegen

$$\frac{\left\|\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}_{\mathcal{H}}\right\|_{2}}{\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_{2}} \leq \frac{\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_{2}\left\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B}_{\mathcal{H}}\right\|_{2}}{\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_{2}} = \left\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B}_{\mathcal{H}}\right\|_{2}$$

eine obere Schranke für den relativen Fehler liefert. Diese Schranke kann berechnet werden, ohne die Matrix  $\mathbf{A}$  exakt zu invertieren.

In Abbildung 7.1 vergleichen wir das Abfallen des Fehlers  $\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B}_{\mathcal{H}}\|_2$  für wachsenden maximalen Blockrang r der  $\mathcal{H}$ -Matrix  $\mathbf{B}_{\mathcal{H}}$ . Hierbei betrachten wir eine fixierte Anzahl an Freiheitsgraden N = 262.144, wobei der größte Block von  $\mathbf{B}_{\mathcal{H}}$  eine Größe von  $32.768^2$  hat.

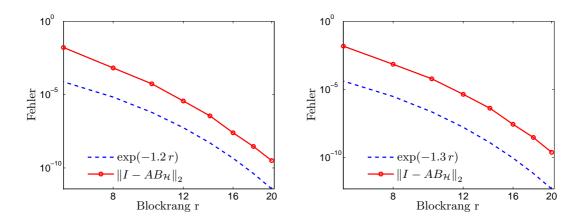


Abbildung 7.1: Fehler gegen Blockrang - Gemischtes Randwertproblem (links), stabilisiertes Neumann-Randwertproblem (rechts) in 2D.

Die numerischen Experimente zeigen, wie theoretisch bewiesen, exponentielle Konvergenz im Blockrang r. Man erkennt allerdings in den doppelt logarithmischen Plots in Abbildung 7.1 die Rate  $\exp(-br)$ . Also konvergiert die hier konstruierte Approximation sogar schneller als die theoretischen Resultate aus Satz 3.1 und Korollar 3.5 garantieren, in denen eine Rate von  $\exp(-br^{1/3})$  gezeigt wird.

Hält man nicht die Anzahl der Freiheitsgrade N fest sondern den Blockrang r, so kann man den Anstieg der oberen Schranke des relativen Fehlers mit wachsenden Freiheitsgraden betrachten. In der nachfolgenden Abbildung 7.2 wird dies für festes r=10 für beide obigen Modellprobleme betrachtet.

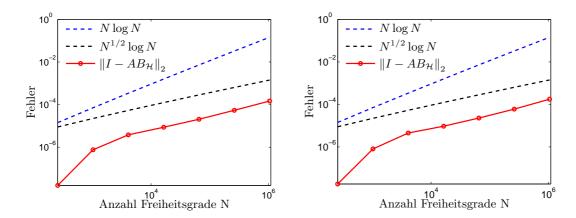


Abbildung 7.2: Fehler gegen Freiheitsgrade - Gemischtes Randwertproblem (links), stabilisiertes Neumann-Randwertproblem (rechts) in 2D.

Man erkennt einen Anstieg des Fehlers mit der Rate  $N^{1/2}\log N$ . Da unsere Cluster-Bäume balanciert sind, gilt depth( $\mathbb{T}_{\mathcal{I}}$ )  $\sim \log N$  und Satz 3.1 bzw. Korollar 3.5 würde einen maximalen theoretischen Anstieg von  $N\log N$  für den Fehler  $\|\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}_{\mathcal{H}}\|_2$  erlauben. Wegen

$$\left\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B}_{\mathcal{H}}\right\|_{2} \leq \left\|\mathbf{A}\right\|_{2} \left\|\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}_{\mathcal{H}}\right\|_{2} \lesssim \left\|\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}_{\mathcal{H}}\right\|_{2},$$

da in zwei Raumdimensionen  $\|\mathbf{A}\|_2 \leq C$  gilt, sind die Abschätzungen aus Satz 3.1 bzw. Korollar 3.5 also nicht scharf in N.

Als abschließendes Beispiel zu 2D-Diffusionsgleichungen betrachten wir die Modellprobleme (7.1) und (7.2) auf dem L-Gebiet  $\Omega=(0,1)\times(0,\frac{1}{2})\cup(0,\frac{1}{2})\times[\frac{1}{2},1)$ . Beim gemischten Randwertproblem (7.1) ist hierbei der Neumann-Rand gegeben durch  $\Gamma_{\mathcal{N}}:=\{\mathbf{x}\in\Gamma:\mathbf{x}_2=0\ \lor\ \mathbf{x}_1=1\}$ .

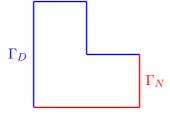
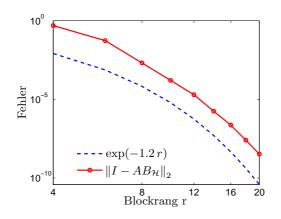


Abbildung 7.3: Das L-Gebiet.

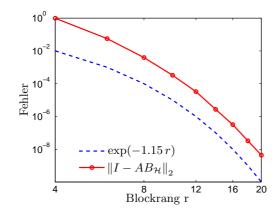
Die nachfolgende Graphik zeigt für eine fixierte Anzahl an Freiheitsgraden von N=785.920 abermals exponentielle Konvergenz mit Rate  $\exp(-br)$ , also das selbe asymptotische Verhalten wie für das Einheitsquadrat und eine geringere Anzahl an Freiheitsgraden. Zusätzlich zeigt Tabelle 7.1 den Speicherbedarf sowie die Kompressionsraten für die approximative Inverse  $\mathbf{B}_{\mathcal{H}}$ . Für die Speicherung der vollen Inversen würden hier über 4 Terabyte benötigt werden, da diese im Gegensatz zu  $\mathbf{A}$  nicht schwach besetzt ist.



	Speicherbedarf	Komprimiert
r	$\mathbf{B}_{\mathcal{H}} (MB)$	auf $(\%)$
4	6828	0.1
6	10064	0.2
8	13299	0.3
10	16535	0.35
12	19770	0.4
14	23006	0.5
16	26242	0.55
18	29477	0.6
20	32713	0.7

Abbildung 7.4: Gemischtes Randwertproblem (L-Gebiet) - Exponentielle Tabelle 7.1: Speicheraufwand (MB) für  $\mathbf{B}_{\mathcal{H}}$ . Konvergenz im Blockrang.

Für den Speicherbedarf der Matrix  $\mathbf{B}_{\mathcal{H}}$  erkennt man in Tabelle 7.1 lineares Wachstum im Blockrang r, was mit der theoretischen Speicherkomplexität von  $\mathcal{O}(rN\log N)$  übereinstimmt. Da für kleine Blockränge bereits gute Genauigkeiten erreicht werden, sind die Kompressionsraten in zwei Raumdimensionen sehr zufriedenstellend.



	Speicherbedarf	Komprimiert
r	$\mathbf{B}_{\mathcal{H}} (MB)$	auf (%)
4	6849	0.1
6	10090	0.2
8	13334	0.3
10	16564	0.35
12	19822	0.4
14	23066	0.5
16	26310	0.55
18	29554	0.6
20	32798	0.7

Abbildung 7.5: Neumann-Problem (L-Gebiet)

- Exponentielle Konvergenz im Tabelle 7.2: Speicheraufwand (MB) für  $\mathbf{B}_{\mathcal{H}}$ . Blockrang.

Für das stabilisierte reine Neumann-Problem aus (7.2) auf dem L-Gebiet mit N=788.481 Freiheitsgraden zeigen Abbildung (7.5) und Tabelle 7.2 abermals exponentielle Konvergenz im Blockrang sowie lineares Wachstum im Speicherbedarf bei guten Kompressionsraten. Die Wahl der Geometrie, der Randbedingungen sowie die Stabilisierung der Bilinearform haben also, wie auch theoretisch gezeigt, minimalen Einfluss auf die  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximationen.

#### 2D-Konvektion-Diffusion

Bei den obigen numerischen Beispielen haben wir Diffusionsgleichungen mit der Diffusionsmatrix  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$  betrachtet. Wir werden hier einerseits Diffusionsmatrizen  $\mathbf{C}$  mit springenden Koeffizienten sowie Probleme mit dominantem Konvektionsterm  $\mathbf{b}$  untersuchen.

Als Geometrie wählen wir abermals das L-Gebiet  $\Omega = (0,1) \times (0,\frac{1}{2}) \cup (0,\frac{1}{2}) \times [\frac{1}{2},1)$ , wobei der Rand  $\Gamma = \partial \Omega$  aufgeteilt ist in den Neumann-Rand  $\Gamma_{\mathcal{N}} := \{ \mathbf{x} \in \Gamma : \mathbf{x}_2 = 0 \lor \mathbf{x}_1 = 1 \}$  sowie den Dirichlet-Rand  $\Gamma_D = \Gamma \setminus \overline{\Gamma_{\mathcal{N}}}$ .

Wir betrachten die Bilinearform  $a(\cdot,\cdot): H_0^1(\Omega;\Gamma_D) \times H_0^1(\Omega;\Gamma_D) \to \mathbb{R}$  gegeben durch

$$a(u,v) := \langle \mathbf{C}\nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \mathbf{b} \cdot \nabla u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$
(7.3)

und verwenden eine Galerkin-Diskretisierung in  $S_0^{1,1}(\mathcal{T}_h;\Gamma_D).$ 

Für die Koeffizienten wählen wir einerseits  $\mathbf{C}_1 := \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b}_1 := (1,1)^T$  sowie  $\mathbf{C}_2 := 10^{-2}\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{b}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := (-\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)^T$  und  $\mathbf{C}_3 := c\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{b}_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := (1,1)^T$  mit  $c = \begin{cases} 10^{-2} & \text{für } (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$ 

Die nachfolgenden Graphiken zeigen die Konvergenz des Fehlermaßes  $\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B}_{\mathcal{H}}\|_2$  für eine fixierte Anzahl an Freiheitsgraden N = 785.920.

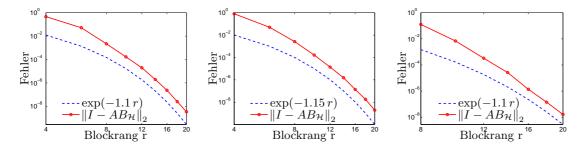


Abbildung 7.6: 2D Konvektion-Diffusion - Parameter  $C_1$ ,  $b_1$  (links), Parameter  $C_2$ ,  $b_2$  (mitte), Parameter  $C_3$ ,  $b_3$  (rechts).

Für sämtliche Wahlen der Parameter  $\mathbf{C}_i$ ,  $\mathbf{b}_i$  erkennt man abermals exponentielle Konvergenz im Blockrang, einzig die Konstanten  $C_{\mathrm{apx}}$ , b unterscheiden sich. Die Kompressionsraten sowie das Wachstum des Fehlers mit steigender Anzahl der Freiheitsgrade verhalten sich identisch zu den Resultaten des vorigen Abschnittes.

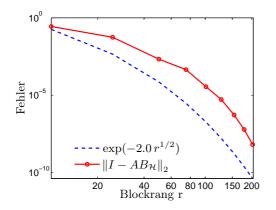
#### 3D-Diffusion

Wir betrachten in diesem Abschnitt Finite Elemente Diskretisierungen in drei Raumdimensionen. Auf dem Einheitswürfel  $\Omega=(0,1)^3$  mit dem Dirichlet-Rand  $\Gamma_D:=\{\mathbf{x}\in\Gamma:\exists i\in\{1,2,3\}:\mathbf{x}_i=0\}$  und dem Neumann-Rand  $\Gamma_{\mathcal{N}}=\Gamma\backslash\overline{\Gamma_D}$  wählen wir abermals eine Diskretisierung des Laplace-Operators

$$a(u,v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} \tag{7.4}$$

niedrigster Ordnung in  $S_0^{1,1}(\mathcal{T}_h;\Gamma_D)$ .

In Abbildung 7.7, vergleichen wir abermals das Fehlermaß  $\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B}_{\mathcal{H}}\|_2$  mit dem Anstieg des Blockrangs r für eine fixe Anzahl N=262.144 an Freiheitsgraden. Tabelle 7.3 zeigt Speicherbedarf und Kompressionsraten, wobei die unkomprimierte Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  hier 512 Gigabyte Speicher benötigen würde.



	Speicherbedarf	Komprimiert
r	$\mathbf{B}_{\mathcal{H}} (\mathrm{MB})$	auf (%)
10	5631	1.1
25	12939	2.5
50	23309	4.4
75	32698	6.2
101	41456	7.9
127	49042	9.4
154	55157	10.5
179	59618	11.4
203	62716	12.0

Abbildung 7.7: Exponentielle Konvergenz im Blockrang - 3D FEM.

Tabelle 7.3: Speicheraufwand (MB) für  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$ .

Abbildung 7.7 zeigt exponentielle Konvergenz mit Rate  $\exp(-br^{1/2})$ , welche abermals schneller ist als  $\exp(-br^{1/4})$ , was unser theoretisches Resultat aus Satz 3.1 liefert. Im Vergleich zum zweidimensionalen Fall erkennt man schlechtere Kompressionsraten bei vergleichbarer Genauigkeit, was auf ebendieses Konvergenzverhalten von  $\exp(-br^{1/2})$  an Stelle von  $\exp(-br)$  im zweidimensionalen Fall zurückgeführt werden kann.

Schlussendlich betrachten wir den Anstieg des Fehlermaßes  $\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B}_{\mathcal{H}}\|_2$  bei festem Rang von r = 50. In Abbildung 7.8 erkennt man asymptotisch einen Anstieg von  $N^{2/3} \log N$ . Da in drei Raumdimensionen  $\|\mathbf{A}\|_2 \lesssim N^{-1/3}$  gilt, stimmt dies mit dem theoretischen Anstieg aus Satz 3.1 überein.

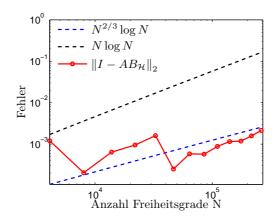


Abbildung 7.8: Fehler gegen Freiheitsgrade - Gemischtes Randwertproblem in 3D.

#### 3D-FEM $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegung

In diesem Abschnitt werden numerische Beispiele zu hierarchischen Cholesky- und LU-Zerlegungen angegeben. Für das symmetrische Problem (7.4) auf dem Einheitswürfel mit gemischten Dirichlet-Neumann-Randbedingungen wie im vorherigen Abschnitt wird eine  $\mathcal{H}$ -Cholesky-Zerlegung  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{C}_{\mathcal{H}} \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^T$  bestimmt. Zusätzlich betrachten wir ein nichtsymmetrisches Problem

$$a(u,v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^{2}(\Omega)} + \langle \mathbf{b} \cdot \nabla u, v \rangle_{L^{2}(\Omega)}$$
(7.5)

mit zusätzlichem Konvektionsterm mit  $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$ , wofür eine  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegung  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{L}_{\mathcal{H}} \mathbf{U}_{\mathcal{H}}$  berechnet wird.

Die  $\mathcal{H}$ -Cholesky- und  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegungen werden in HLiB folgendermaßen aufgestellt: Zunächst wird eine  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an  $\mathbf{A}$  mit Hilfe von ACA, siehe [Beb00], und einer relativen Genauigkeit von  $\varepsilon = 10^{-16}$  für den ACA-Algorithmus berechnet. Die gewünschte hierarchische Faktorisierung erhalten wir schließlich mit Hilfe des in [Beb05] vorgestellten Algorithmus, der auf  $\mathcal{H}$ -Matrix-Arithmetik basiert, sowie abschließend mittels blockweiser Projektion auf den gewünschten Rang r.

Die nachfolgende Abbildung 7.9 zeigt die Konvergenz der oberen Schranken  $\|\mathbf{I} - (\mathbf{C}_{\mathcal{H}}\mathbf{C}_{\mathcal{H}}^T)^{-1}\mathbf{A}\|_2$  und  $\|\mathbf{I} - (\mathbf{L}_{\mathcal{H}}\mathbf{U}_{\mathcal{H}})^{-1}\mathbf{A}\|_2$  des relativen Fehlers der  $\mathcal{H}$ -Cholesky- und  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegung bei wachsendem maximalen Blockrang und einer fixen Anzahl N=262.144 an Freiheitsgraden. Die Inversionen der Dreiecksmatrizen werden hierbei exakt durchgeführt. Wie in Satz 6.6 und Korollar 6.9 theoretisch gezeigt, erkennt man exponentielle Konvergenz im Blockrang. Wie auch bei den Inversionen in den vorigen Abschnitten erkennt man sogar eine schnellere Rate von  $\exp(-br^{1/2})$  im Vergleich zur theoretischen Rate von  $\exp(-br^{1/4})$ .

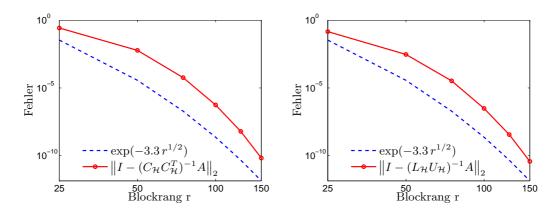


Abbildung 7.9: Fehler gegen Blockrang- $\mathcal{H}$ -Cholesky-Zerlegung (7.4),  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegung (7.5).

Schlussendlich betrachten wir die Bilinearform (7.4) sowie die rechte Seite f=1. Eine Diskretisierung in  $S_0^{1,1}(\mathcal{T}_h;\Gamma_D)$  führt auf das lineare System

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}$$
.

Wir werden dieses System mit Hilfe des iterativen GMRES-Verfahrens ohne Vorkonditionierer und mit Hilfe des Vorkonditionierers  $\mathbf{P}_A := \mathbf{C}_{\mathcal{H}} \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^T$  mit der hierarchischen Cholesky-Zerlegung aus Abschnitt 6.3 lösen. Die  $\mathcal{H}$ -Cholesky-Zerlegung wird hierbei wie zuvor beschrieben berechnet, wobei hier der Parameter  $\varepsilon = 10^{-2}$  für den ACA-Algorithmus sowie (falls notwendig) eine blockweise Projektion auf maximalen Rang von r=10 verwendet werden. Die gesamte Rechenzeit, die für das Aufstellen der hierarchischen Cholesky-Zerlegung benötigt wird, ist in der letzten Spalte der nachfolgenden Tabelle festgehalten. Zusätzlich zeigt die nachfolgende Tabelle die Anzahl der Iterationen für das nichtvorkonditionierte und das vorkonditionierte System, die benötigt werden, bis das relative Residuum im GMRES-Verfahren kleiner als  $10^{-8}$  ist, sowie die Rechenzeiten für das Lösen.

FEM	Iterationen	Iterationen	Zeit (s) Lösen   Zeit (s) Lösen		Zeit (s)
DOFs	(ohne $\mathbf{P}_A$ )	$(\min \mathbf{P}_A)$	(ohne $\mathbf{P}_A$ )	$(\min \mathbf{P}_A)$	Aufstellen $\mathbf{P}_A$
85184	2580	50	15.2	5.7	8.2
262144	5093	273	160	68	12
512000	7675	274	488	160	26
1000000	11601	419	1648	552	83

Tabelle 7.4: Iterationszahlen und Rechenzeiten für das Lösen ohne/mit Vorkonditionierer.

Auf Grund des geringen Ranges von r=10 ist die Berechnung des Vorkonditionierers "billig" im Verhältnis zu den Rechenzeiten für das Lösen des linearen Systems. Ist man an der Lösung des Systems für viele verschiedene rechte Seiten interessiert, so ist es sinnvoller, einen größeren Blockrang zu wählen. Die Iterationszahlen für das vorkonditionierte System steigen im Vergleich zum nicht-vorkonditionierten System moderat an. Möchte man diese gleichmäßig in den Freiheitsgraden N beschränken, so muss der Blockrang abhängig von N gewählt werden, siehe auch die spektralen Äquivalenzen aus Abschnitt 6.7.

### 7.2 Numerische Resultate für Randelementdiskretisierungen

In diesem Abschnitt betrachten wir numerische Beispiele für Randelementdiskretisierungen der schwach-singulären Integralgleichung aus Abschnitt 3.3.2 sowie der hypersingulären Integralgleichung aus Abschnitt 3.3.3. Für die BEM-Matrix V benutzen wir für Beispiele in 2D und 3D abermals die Bibliothek HLiB. Für Diskretisierungen (höherer Ordnung) des hypersingulären Integraloperators W verwenden wir das Software-Paket BEM++. Für weitere numerische Beispiele, die die Existenz einer inversen Matrix im  $\mathcal{H}$ -Matrix-Format unterstützen sowie den erfolgreichen Einsatz von  $\mathcal{H}$ -Matrizen als Vorkonditionierer belegen, verweisen wir unter anderem auf [Gra01, Beb05, Gra05, Bör10b].

#### 7.2.1 Der Einfachschichtoperator

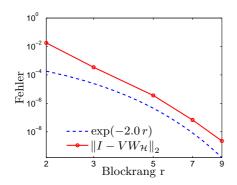
#### Beispiele in zwei Raumdimensionen

Auf dem L-Gebiet  $\Omega=(0,\frac{1}{2})\times(0,\frac{1}{4})\cup(0,\frac{1}{4})\times[\frac{1}{4},\frac{1}{2})$  betrachten wir eine Diskretisierung von

$$\langle V\phi,\psi\rangle_{L^2(\Gamma)}$$
 (7.6)

niedrigster Ordnung in  $S^{0,0}(\mathcal{E}_h)$  und berechnen eine approximative Inverse  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$  wie in Abschnitt 7.1 beschrieben.

In Abbildung 7.10 vergleichen wir abermals die Konvergenz des Fehlermaßes  $\|\mathbf{I} - \mathbf{V} \mathbf{W}_{\mathcal{H}}\|_2$  des relativen Fehlers für wachsende r. Hier ist die Anzahl der Freiheitsgrade fixiert als N=65.536 und der größte Block der  $\mathcal{H}$ -Matrix  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$  hat eine Größe von  $8.192^2$ . Weiters zeigt Tabelle 7.5 den Speicheraufwand der Matrix  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$  für wachsende r und die jeweiligen Kompressionsraten. Unkomprimiert würde eine Speicherung der Matrix  $\mathbf{V}$  32.8 Gigabyte benötigen.



	Speicherbedarf	Komprimiert
r	$\mathbf{W}_{\mathcal{H}} (MB)$	auf $(\%)$
2	109	0.3
3	148	0.5
5	226	0.7
7	305	0.9
9	383	1.2

Abbildung 7.10: Exponentielle Konvergenz Tabelle 7.5: Speicheraufwand (MB) für  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$ . im Blockrang - 2D BEM ( $\mathbf{V}$ ).

Wir erkennen abermals exponentielle Konvergenz im Blockrang bei linearem Wachstum im Speicheraufwand. Die beobachtete Rate von  $\exp(-br)$  ist erneut schneller als die theoretische Rate von  $\exp(-br^{1/3})$  aus Satz 3.12.

Betrachtet man den Anstieg des Fehlers  $\|\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{W}_{\mathcal{H}}\|_2$  bei einer wachsenden Anzahl an Freiheitsgraden und einem fixierten Blockrang von r = 5, so erkennt man in nachfolgender Abbildung 7.11 bestenfalls einen logarithmischen Anstieg. Somit ist die Abschätzung in Satz 3.12 nicht scharf in N.

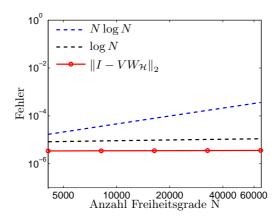


Abbildung 7.11: Fehler gegen Freiheitsgrade - BEM in 2D.

#### Beispiele in drei Raumdimensionen

In 3D betrachten wir als Geometrie eine Kurbelwelle, generiert durch das Softwarepaket NETGEN, siehe [Sch97], welche in folgender Graphik 7.12 visualisiert ist.

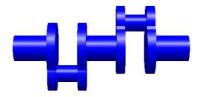
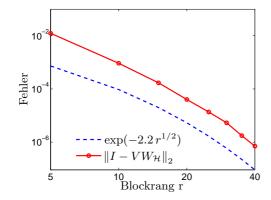


Abbildung 7.12: Eine Kurbelwelle.

Wir wählen erneut eine Diskretisierung des Einfachschichtoperators V niedrigster Ordnung in  $S^{0,0}(\mathcal{E}_h)$  auf einem quasiuniformen regulären Gitter  $\mathcal{E}_h$  auf der Oberfläche der Kurbelwelle. Eine  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$  an  $\mathbf{V}^{-1}$  wird mit Hilfe von HLiB und in gleicher Weise wie in Abschnitt 7.1 bestimmt.

Abbildung 7.13 vergleicht das Fehlermaß  $\|\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{W}_{\mathcal{H}}\|_2$  für den relativen Fehler für eine fixierte Anzahl an Freiheitsgraden N = 38.656 mit wachsendem Blockrang r. Der größte Block von  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$  hat hierbei eine Größe von  $4.832^2$  und eine Speicherung der exakten Inversen  $\mathbf{V}^{-1}$  würde über 11 Gigabyte benötigen. Der Speicherbedarf sowie die Kompressionsraten für die Matrix  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$  sind in Tabelle 7.6 angeführt. Wie auch bei den Beispielen zu den



	Speicherbedarf	Komprimiert
r	$\mathbf{W}_{\mathcal{H}} (\mathrm{MB})$	auf $(\%)$
5	585	5.1
10	964	8.5
15	1333	11.7
20	1672	14.7
25	1979	17.4
30	2258	19.8
35	2515	22.1
40	2752	24.1

Abbildung 7.13: Exponentielle Konvergenz im Blockrang - 3D BEM Tabelle 7.6: Speicheraufwand (MB) für  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$ . (Einfachschichtoperator  $\mathbf{V}$ ).

FEM-Matrizen in Abschnitt 7.1 erkennt man in drei Raumdimensionen exponentielle Konvergenz mit einer Rate von  $\exp(-br^{1/2})$ , womit wir schnellere Konvergenz als unsere theoretische Rate von  $\exp(-br^{1/4})$  aus Satz 3.12 beobachten.

Schlussendlich betrachten wir abermals den Anstieg des Fehlermaßes  $\|\mathbf{I} - \mathbf{V} \mathbf{W}_{\mathcal{H}}\|_2$  für festen Rang r=5 und eine wachsende Anzahl an Freiheitsgraden. In Abbildung 7.14 erkennt man einen Anstieg mit Rate  $N^{1/3} \log N$ , also erneut einen langsameren Anstieg als die theoretische Schranke aus Satz 3.12 liefert.

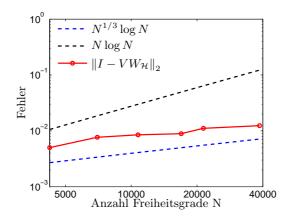


Abbildung 7.14: Fehler gegen Freiheitsgrade - BEM in 3D.

Numerische Beispiele zu anderen Geometrien, wie den Einheitswürfel oder den Fichera-Würfel, zeigen analoge Resultate, exponentielle Konvergenz im Blockrang mit schnellerer Rate und langsameres Wachstum in den Freiheitsgraden als in Satz 3.12 bewiesen, und werden somit nicht angeführt. Wie bei den FEM-Diskretisierungen in Abschnitt 7.1 hat die Geometrie nur einen Einfluss auf die Konstanten.

#### 3D-BEM $\mathcal{H}$ -Cholesky-Zerlegung

Als abschließendes Beispiel für den Einfachschichtoperator betrachten wir die exponentielle Konvergenz im Blockrang einer  $\mathcal{H}$ -Cholesky-Zerlegung sowie die Vorkonditionierung der schwach-singulären Integralgleichung mittels der  $\mathcal{H}$ -Cholesky-Faktorisierung. Die  $\mathcal{H}$ -Cholesky-Zerlegung wird wie in Abschnitt 7.1 mit HLiB berechnet.

Die folgende Abbildung 7.15 zeigt für eine feste Anzahl an Freiheitsgraden N=38.656 exponentielle Konvergenz der oberen Schranke des relativen Fehlers  $\|\mathbf{I} - (\mathbf{C}_{\mathcal{H}}\mathbf{C}_{\mathcal{H}}^T)^{-1}\mathbf{V}\|_2$  mit einer Rate  $\exp(-br^{1/2})$ , welche erneut schneller ist als die theoretische Rate von  $\exp(-br^{1/4})$  aus Satz 6.13.

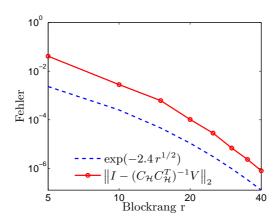


Abbildung 7.15: Fehler gegen Blockrang - H-Cholesky-Zerlegung BEM in 3D.

Um die gute Anwendbarkeit der  $\mathcal{H}$ -Cholesky-Zerlegung als Vorkonditionierer zu demonstrieren, betrachten wir das lineare System

$$\mathbf{V}\mathbf{x}=\mathbf{f}$$

mit  $\mathbf{f} = \mathbf{V}\mathbf{1}$ . Die nachfolgende Tabelle zeigt Iterationszahlen und Rechenzeiten für das Lösen dieses Systems mit Hilfe des GMRES-Verfahrens (bis zu einer relativen Genauigkeit von  $\varepsilon = 10^{-8}$ ) mit und ohne Vorkonditionierer. Als Vorkonditionierer wird die  $\mathcal{H}$ -Cholesky-Zerlegung  $\mathbf{P}_V := \mathbf{C}_{\mathcal{H}} \mathbf{C}_{\mathcal{H}}^T$  aus Abschnitt 6.5 mit maximalem Blockrang von r=3 verwendet.

BEM	Iterationen	Iterationen	Zeit (s) Lösen	Zeit (s) Lösen	Zeit (s)
DOFs	(ohne $\mathbf{P}_V$ )	$(\min \mathbf{P}_V)$	(ohne $\mathbf{P}_V$ )	$(\min  {f P}_V)$	Aufstellen $\mathbf{P}_V$
5248	248 872 9		54.5	0.7	14.6
6992	1161	10	135	1.3	23
10744	2926	13	798	5.1	40
21392	3382	15	4358	21.7	77
38656	6561	16	24167	76.3	161

Tabelle 7.7: Iterationszahlen und Rechenzeiten für das Lösen ohne/mit Vorkonditionierer.

Die Iterationszahlen für das vorkonditionierte System wachsen abermals sehr langsam, und auf Grund des geringen Ranges von r=3 lässt sich der Vorkonditionierer  $\mathbf{P}_V$  schnell berechnen. Trotzdem wachsen auch die Zeiten für das Lösen nur langsam an,  $\mathbf{P}_V$  ist also ein guter Vorkonditionierer für das lineare System.

#### 7.2.2 Der hypersinguläre Integraloperator

Schlussendlich betrachten wir noch numerische Beispiele für die hypersinguläre Integralgleichung aus Abschnitt 3.3.3.

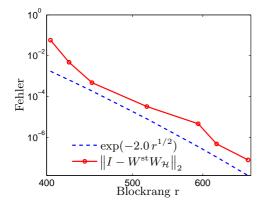
Als Geometrie wählen wir wie im vorigen Abschnitt die Kurbelwelle, dargestellt in Abbildung 7.12. Für die stabilisierte Bilinearform

$$\langle W\phi, \psi \rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle \phi, 1 \rangle_{L^2(\Gamma)} \langle \psi, 1 \rangle_{L^2(\Gamma)}$$

mit Stabilisierungsparameter  $\alpha = 1$  wählen wir eine Galerkin-Diskretisierung mit  $\mathbf{W}^{\text{st}}$  gegeben durch (3.51) in  $S^{p,1}(\mathcal{E}_h)$  mit verschiedenen Polynomgraden p.

Eine  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation an  $\mathbf{W}^{\mathrm{st}}$  wird in BEM++ mit Hilfe von ACA und einer relativen Genauigkeit von  $\varepsilon = 10^{-14}$  bestimmt. In BEM++ wird eine approximative Inverse  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$  im  $\mathcal{H}$ -Matrix-Format mit Hilfe der Inversion einer hierarchischen LU-Zerlegung bestimmt, also  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}} = (\mathbf{L}_{\mathcal{H}}\mathbf{U}_{\mathcal{H}})^{-1}$ . Im Gegensatz zu den numerischen Beispielen aus den vorherigen Abschnitten wird hier keine blockweise Bestapproximation mit festem Rang bestimmt, was die großen (maximalen) Blockränge in den Approximationen erklärt.

Wir wählen zunächst eine feste, quasiuniforme Triangulierung der Oberfläche der Kurbelwelle bestehend aus 5.393 Knoten und 6.992 Elementen. Betrachtet man den Polynomgrad p=2, so erhält man N=13.986 Freiheitsgrade, und der größte Block der  $\mathcal{H}$ -Matrix  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$  hat eine Größe von  $1.746^2$  Elementen. In Abbildung 7.16 vergleichen wir den Abfall des Fehlermaßes  $\|\mathbf{I} - \mathbf{W}^{\text{st}}\mathbf{W}_{\mathcal{H}}\|_2$  bei ansteigendem Blockrang r für die  $\mathcal{H}$ -Matrix  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$ . Tabelle 7.8 zeigt den Speicheraufwand der berechneten  $\mathcal{H}$ -Matrix-Approximation in Megabyte und die Kompressionsraten. Eine Speicherung der vollen Matrix würde 1.492 MB benötigen.



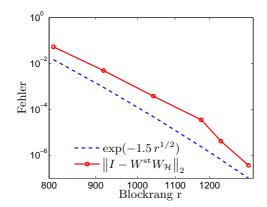
	Speicherbedarf	Komprimiert
Fehler	$\mathbf{W}_{\mathcal{H}} (MB)$	auf (%)
6e-2	342	22.9
5e-3	385	25.8
5e-4	421	28.2
3e-5	457	30.6
5e-6	492	33.0
5e-7	535	35.9
8e-8	592	39.6

Abbildung 7.16: Exponentielle Konvergenz Tabelle 7.8: Speicheraufwand (MB) für  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$ . im Blockrang -  $\mathbf{W}^{\text{st}}$ , p=2.

Wir erkennen abermals exponentielle Konvergenz des relativen Fehlers im Blockrang mit Rate  $\exp(-br^{1/2})$ , welche schneller ist als die theoretische Rate von  $\exp(-br^{1/4})$  aus Satz 3.14, sowie lineares Wachstum des Speicherbedarfs bei exponentieller Konvergenz des Fehlers.

Erhöht man den Polynomgrad auf p=4, so erhält man N=55.938 Freiheitsgrade, und eine exakte Speicherung der Inversen würde 7,4 Gigabyte benötigen. Der größte Block in der  $\mathcal{H}$ -Matrix  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$  hat hierbei eine Größe von  $6.922^2$ .

In Abbildung 7.17 beobachten wir abermals exponentielle Konvergenz des Fehlermaßes  $\|\mathbf{I} - \mathbf{W}^{\text{st}}\mathbf{W}_{\mathcal{H}}\|_2$  im Blockrang, einzig die Konstanten  $b, C_{\text{apx}}$  in der Approximation sind unterschiedlich zum Fall p = 2.



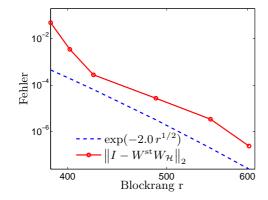
	Speicherbedarf	Komprimiert
Fehler	$\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$ (MB)	auf (%)
5e-2	3066	12.8
5e-3	3406	14.3
4e-4	3742	15.7
4e-5	4062	17.0
4e-6	4298	18.0
4e-7	4685	19.6

Abbildung 7.17: Exponentielle Konvergenz Tabelle 7.9: Speicheraufwand (MB) für  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$ . im Blockrang -  $\mathbf{W}^{\text{st}}$ , p=4.

Trotz der großen maximalen Blockränge sind die Kompressionsraten der hier bestimmten Approximation nicht viel schlechter als die Kompressionsraten aus dem vorigen Abschnitt für den Einfachschichtoperator, welche mit Hilfe der Bibliothek HLiB berechnet worden sind.

Schlussendlich betrachten wir eine uniforme Verfeinerung des obigen Gitters auf der Kurbelwelle. Für einen Polynomgrad p=1 liefert dies N=13.986 Freiheitsgrade und eine exakte Speicherung der Inversen von  $\mathbf{W}^{\text{st}}$  würde etwa 1,4 Gigabyte benötigen.

Die nachfolgende Abbildung 7.18 zeigt abermals exponentielle Konvergenz mit Rate  $\exp(-br^{1/2})$  sowie vergleichbare Kompressionsraten zu dem obigen Fall p=2 auf dem gröberen Gitter auf der Kurbelwelle mit der selben Anzahl an Freiheitsgraden.

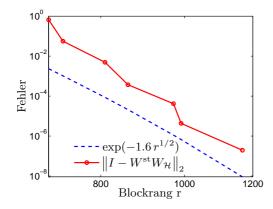


	Speicherbedarf	Komprimiert
Fehler	$\mathbf{W}_{\mathcal{H}} (MB)$	auf $(\%)$
5e-2	327	21.9
4e-3	368	24.7
3e-4	404	27.1
3e-5	439	29.4
3e-6	472	31.6
2e-7	515	34.5

Abbildung 7.18: Exponentielle Konvergenz Tabelle 7.10: Speicheraufwand (MB) für im Blockrang -  $\mathbf{W}^{\text{st}}$ , p = 1.  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$ .

Erhöht man den Polynomgrad auf p=2, so erhält man N=55.938 Freiheitsgrade und eine Speicherung der exakten Inversen würde etwa 23,3 Gigabyte benötigen.

In Abbildung 7.19 erkennt man für diesen Fall ebenfalls exponentielle Konvergenz des relativen Fehlers mit wachsendem Blockrang und Tabelle 7.11 zeigt lineares Wachstum des Speicherbedarfs für die  $\mathcal{H}$ -Matrix  $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$  bei exponentiell fallendem Fehler.



	Speicherbedarf	Komprimiert
Fehler	$\mathbf{W}_{\mathcal{H}}$ (MB)	auf (%)
6e-1	2340	9.8
5e-2	2658	11.1
4e-3	2989	12.5
4e-4	3326	13.9
4e-5	3642	15.3
4e-6	3955	16.6
2e-7	4329	18.1

Abbildung 7.19: Exponentielle Konvergenz Tabelle 7.11: Speicheraufwand (MB) für im Blockrang -  $\mathbf{W}^{\mathrm{st}}, p = 2.$   $\mathbf{W}_{\mathcal{H}}.$ 

# 7.3 Vorkonditionierung für FEM-BEM-Kopplung

In diesem Abschnitt werden numerische Beispiele für den erfolgreichen Einsatz der  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegung als Blockdiagonal-Vorkonditionierer für die FEM-BEM-Kopplung-Diskretisierung des Transmissionsproblems aus Abschnitt 6.7 vorgestellt.

Wir betrachten das Problem (6.34) auf dem Einheitswürfel  $\Omega = (0,1)^3$  mit  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ , was auf das lineare System

$$\mathbf{B} := egin{pmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{st}} & -\mathbf{M}^T \ rac{1}{2}\mathbf{M} - \mathbf{K} & \mathbf{V} \end{pmatrix} egin{pmatrix} \mathbf{x} \ \phi \end{pmatrix} = egin{pmatrix} \mathbf{f} \ \mathbf{g} \end{pmatrix}$$

führt. Hier ist die rechte Seite gegeben durch  $\mathbf{f} := \mathbf{A}^{\mathrm{st}}\mathbf{1} + \mathbf{M}^T\mathbf{1}$  und  $\mathbf{g} := \left(\frac{1}{2}\mathbf{M} - \mathbf{K}\right)\mathbf{1}$ . Wir wählen den Blockdiagonal-Vorkonditionierer

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{\mathcal{H}}^{A} \mathbf{U}_{\mathcal{H}}^{A} & 0\\ 0 & \mathbf{L}_{\mathcal{H}}^{V} \mathbf{U}_{\mathcal{H}}^{V} \end{pmatrix}$$
(7.7)

mit den hierarchischen LU-Zerlegungen  $\mathbf{A}^{\mathrm{st}} \simeq \mathbf{L}_{\mathcal{H}}^A \mathbf{U}_{\mathcal{H}}^A$  und  $\mathbf{V} \simeq \mathbf{L}_{\mathcal{H}}^V \mathbf{U}_{\mathcal{H}}^V$ . Die  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegungen werden hierbei, wie in Abschnitt 7.1 beschrieben, mit Hilfe der Bibliothek HLiB berechnet. Das theoretische Resultat aus Abschnitt 6.7 zeigt, dass, sofern die  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegungen mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden, das Spektrum von  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$  nahe bei 1 liegt, und somit der Blockdiagonal-Vorkonditionierer aus (7.7) ein guter Vorkonditionierer für das gesamte System ist.

Die nachfolgende Tabelle zeigt Iterationszahlen für das Lösen des nicht-vorkonditionierten sowie des vorkonditionierten Systems mit Hilfe des GMRES-Verfahrens, wobei als Abbruch-kriterium die Schranke  $10^{-3}$  für das relative Residuum gewählt wird, sowie die Rechenzeit für das jeweilige Lösen und Aufstellen des Vorkonditionierers. Der Blockrang der hierarchischen LU-Zerlegungen ist hierbei als r=1 gewählt.

	h	FEM	BEM	Iterationen	Iterationen	Zeit Lösen	Zeit Lösen	Zeit
		DOFs	DOFs	$(ohne \mathbf{P})$	$(\text{mit } \mathbf{P})$	$(ohne \mathbf{P})$	$(\text{mit } \mathbf{P})$	Aufstellen ${f P}$
ĺ	$2^{-3}$	729	768	679	3	2.8	0.03	2.6
ĺ	$2^{-4}$	4913	3072	3565	4	315	0.9	12.2
ĺ	$2^{-5}$	35937	12288	11979	5	35254	30	51.9

Tabelle 7.12: Iterationszahlen und Rechenzeiten (in Sekunden) für das Lösen ohne und mit Vorkonditionierer mit Blockrang 1.

Wie man erkennen kann, sind die Iterationszahlen bei der vorkonditionierten Variante deutlich geringer und steigen nur sehr moderat an. Die Berechnung des Vorkonditionierers  $\mathbf{P}$  ist auf Grund der Wahl von r=1 (speziell bei größeren Anzahlen an Freiheitsgraden) mit Aufwand  $\mathcal{O}(r^3N\log^3N)$  wesentlich günstiger als die Berechnung der exakten blockweisen LU-Zerlegungen.

Die nachfolgende Tabelle zeigt die selben Größen, wobei die hierarchischen LU-Zerlegungen mit einem Blockrang r=10 bestimmt wurden.

h	FEM	BEM	Iterationen	Iterationen	Zeit Lösen	Zeit Lösen	Zeit
	DOFs	DOFs	$(ohne \mathbf{P})$	$(\min \mathbf{P})$	$(ohne \mathbf{P})$	$(\text{mit } \mathbf{P})$	Aufstellen <b>P</b>
$2^{-3}$	729	768	679	2	3.7	0.02	5.8
$2^{-4}$	4913	3072	3565	2	315	0.48	24.6
$2^{-5}$	35937	12288	11979	2	35254	15.7	243.7

Tabelle 7.13: Iterationszahlen und Rechenzeiten (in Sekunden) für das Lösen ohne und mit Vorkonditionierer mit Blockrang 10.

Die höhere Genauigkeit bei der Berechnung des Vorkonditionierers liefert klarerweise geringere Iterationszahlen und Rechenzeiten zum Lösen des Systems, wobei die Rechenzeit für die Berechnung des Vorkonditionierers im Vergleich zum Fall r=1 deutlich ansteigt.

In beiden Fällen r=1 und r=10 konvergiert der GMRES-Algorithmus sehr schnell für die betrachteten Diskretisierungen, die Konditionszahl des vorkonditionierten Systems ist somit klein. Die Genauigkeit der berechneten  $\mathcal{H}$ -LU-Zerlegungen ist also ausreichend, dass die Konstanten in den spektralen Äquivalenzen aus (6.38) und (6.39) klein genug sind. Mittels hierarchischen LU-Zerlegungen mit sehr kleinem Rang erhält man also einen einfach und schnell berechenbaren Blockdiagonal-Vorkonditionierer, der das Lösen des Systems deutlich beschleunigt.

# Literaturverzeichnis

- [Ada75] R. A. Adams. Sobolev spaces. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [AFK<sup>+</sup>13] M. Aurada, M. Feischl, J. Kemetmüller, M. Page, and D. Praetorius. Each  $H^{1/2}$ -stable projection yields convergence and quasi-optimality of adaptive FEM with inhomogeneous Dirichlet data in  $\mathbb{R}^d$ . ESAIM Math. Model. Numer. Anal., 47(4):1207–1235, 2013.
- [Beb00] M. Bebendorf. Approximation of boundary element matrices. *Numer. Math.*, 86(4):565–589, 2000.
- [Beb05] M. Bebendorf. Hierarchical LU decomposition-based preconditioners for BEM. Computing, 74(3):225–247, 2005.
- [Beb07] M. Bebendorf. Why finite element discretizations can be factored by triangular hierarchical matrices. SIAM J. Numer. Anal., 45(4):1472–1494, 2007.
- [Beb08] M. Bebendorf. Hierarchical Matrices, volume 63 of Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer, Berlin, 2008.
- [Beb12] Μ. Bebendorf. Anothersoftwarehierarchilibraryoncalmatricesellipticdifferentialequations(AHMED).forhttp://bebendorf.ins.uni-bonn.de/AHMED.html, 2012.
- [BG99] S. Börm and L. Grasedyck. *H-Lib a library for*  $\mathcal{H}$  *and*  $\mathcal{H}^2$ *-matrices.* available at http://www.hlib.org, 1999.
- [BG04] S. Börm and L. Grasedyck. Low-rank approximation of integral operators by interpolation. *Computing*, 72(3-4):325–332, 2004.
- [BG05] S. Börm and L. Grasedyck. Hybrid cross approximation of integral operators. Numer. Math., 101(2):221–249, 2005.
- [BG13] S. Börm and J. Gördes. Low-rank approximation of integral operators by using the Green formula and quadrature. *Numer. Algorithms*, 64(3):567–592, 2013.
- [BH03] M. Bebendorf and W. Hackbusch. Existence of  $\mathcal{H}$ -matrix approximants to the inverse FE-matrix of elliptic operators with  $L^{\infty}$ -coefficients. Numer. Math., 95(1):1–28, 2003.
- [Bör10a] S. Börm. Approximation of solution operators of elliptic partial differential equations by  $\mathcal{H}$  and  $\mathcal{H}^2$ -matrices. Numer. Math., 115(2):165–193, 2010.

- [Bör10b] S. Börm. Efficient numerical methods for non-local operators, volume 14 of EMS Tracts in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2010.
- [Bra07] D. Braess. Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. Springer-Lehrbuch. Springer London, 2007.
- [Bre99] S. C. Brenner. The condition number of the Schur complement in domain decomposition. *Numer. Math.*, 83(2):187–203, 1999.
- [BS02] S. C. Brenner and L. R. Scott. The mathematical theory of finite element methods, volume 15 of Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [Cia78] P. G. Ciarlet. The finite element method for elliptic problems. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.
- [CMZ15] E. Corona, P. G. Martinsson, and D. Zorin. An O(N) direct solver for integral equations on the plane. Appl. Comput. Harmon. Anal., 38(2):284–317, 2015.
- [DFG<sup>+</sup>01] W. Dahmen, B. Faermann, I. G. Graham, W. Hackbusch, and S. A. Sauter. Inverse inequalities on non-quasiuniform meshes and application to the mortar element method. *Math. Comp.*, 73:1107–1138, 2001.
- [DKP<sup>+</sup>08] L. Demkowicz, J. Kurtz, D. Pardo, M. Paszyński, W. Rachowicz, and A. Zdunek. Computing with hp-adaptive finite elements. Vol. 2. Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008. Frontiers: three dimensional elliptic and Maxwell problems with applications.
- [EG06] A. Ern and J.-L. Guermond. Evaluation of the condition number in linear systems arising in finite element approximations. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 40(1):29–48, 2006.
- [FMP14] M. Faustmann, J. M. Melenk, and D. Praetorius. A new proof for existence of H-matrix approximants to the inverse of FEM matrices: the Dirichlet problem for the Laplacian. In Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations - ICOSAHOM 2012, pages 249–259. Springer Lect. Notes Comput. Sci. Eng. 95, 2014.
- [FMP15a] M. Faustmann, J. M. Melenk, and D. Praetorius. Existence of  $\mathcal{H}$ -matrix approximants to the inverses of BEM matrices: the hyper singular integral operator.

  ASC Report 08/2015, Institute for Analysis and Scientific Computing, Vienna University of Technology, Wien, 2015. arXiv:1503.01943 [math.NA].
- [FMP15b] M. Faustmann, J. M. Melenk, and D. Praetorius. Existence of  $\mathcal{H}$ -matrix approximants to the inverses of bem matrices: the simple-layer operator. to appear in Math. Comp., 2015. arXiv:1311.5028 [math.NA].

- [FMP15c] M. Faustmann, J. M. Melenk, and D. Praetorius. *H*-matrix approximability of the inverse of FEM matrices. *to appear in Numer. Math.*, 2015. arXiv:1308.0499 [math.NA].
- [Füh14] T. Führer. Zur Kopplung von finiten Elementen und Randelementen. PhD thesis, TU Wien, 2014.
- [GH03] L. Grasedyck and W. Hackbusch. Construction and arithmetics of  $\mathcal{H}$ -matrices. Computing, 70(4):295–334, 2003.
- [GHK08] L. Grasedyck, W. Hackbusch, and R. Kriemann. Performance of  $\mathcal{H}$ -LU preconditioning for sparse matrices. *Comput. Methods Appl. Math.*, 8(4):336–349, 2008.
- [GHS05] I. G. Graham, W. Hackbusch, and S. A. Sauter. Finite elements on degenerate meshes: inverse-type inequalities and applications. *IMA J. Numer. Anal.*, 25(2):379–407, 2005.
- [Gie01] K. Giebermann. Multilevel approximation of boundary integral operators. Computing, 67(3):183–207, 2001.
- [GKLB08] L. Grasedyck, R. Kriemann, and S. Le Borne. Parallel black box  $\mathcal{H}$ -LU preconditioning for elliptic boundary value problems. *Comput. Vis. Sci.*, 11(4-6):273–291, 2008.
- [GKLB09] L. Grasedyck, R. Kriemann, and S. Le Borne. Domain decomposition based  $\mathcal{H}$ -LU preconditioning. *Numer. Math.*, 112(4):565–600, 2009.
- [GM14] A. Gillman and P. G. Martinsson. A direct solver with O(N) complexity for variable coefficient elliptic PDEs discretized via a high-order composite spectral collocation method. SIAM J. Sci. Comput., 36(4):A2023–A2046, 2014.
- [GR97] L. Greengard and V. Rokhlin. A new version of the fast multipole method for the Laplace in three dimensions. In Acta Numerica 1997, pages 229–269. Cambridge University Press, 1997.
- [Gra01] L. Grasedyck. Theorie und Anwendungen Hierarchischer Matrizen. PhD thesis, Universität Kiel, 2001.
- [Gra05] L. Grasedyck. Adaptive recompression of  $\mathcal{H}$ -matrices for BEM. Computing, 74(3):205–223, 2005.
- [Hac99] W. Hackbusch. A sparse matrix arithmetic based on  $\mathcal{H}$ -matrices. Introduction to  $\mathcal{H}$ -matrices. Computing, 62(2):89–108, 1999.
- [Hac09] W. Hackbusch. Hierarchische Matrizen: Algorithmen und Analysis. Springer, 2009.
- [HB02] W. Hackbusch and S. Börm.  $\mathcal{H}^2$ -matrix approximation of integral operators by interpolation. *Appl. Numer. Math.*, 43(1-2):129–143, 2002.

- [HJ13] R. A. Horn and Ch. R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2013.
- [HK00a] W. Hackbusch and B. N. Khoromskij. A sparse  $\mathcal{H}$ -matrix arithmetic: general complexity estimates. J. Comput. Appl. Math., 125(1-2):479–501, 2000.
- [HK00b] W. Hackbusch and B. N. Khoromskij. A sparse  $\mathcal{H}$ -matrix arithmetic. II. Application to multi-dimensional problems. *Computing*, 64(1):21–47, 2000.
- [HKS00] W. Hackbusch, B. Khoromskij, and S. A. Sauter. On  $\mathcal{H}^2$ -matrices. Lectures on Applied Mathematics, pages 9–29, 2000.
- [HN89] W. Hackbusch and Z. P. Nowak. On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering. *Numer. Math.*, 54:463–491, 1989.
- [HS93] W. Hackbusch and S. A. Sauter. On the efficient use of the Galerkin method to solve Fredholm integral equations. In *Proceedings of ISNA '92—International Symposium on Numerical Analysis, Part I (Prague, 1992)*, volume 38, pages 301–322, 1993.
- [HW08] G. C. Hsiao and W. L. Wendland. *Boundary integral equations*, volume 164 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [HY13a] K. L. Ho and L. Ying. Hierarchical interpolative factorization for elliptic operators: differential equations. Technical report, 2013. arXiv:1307.2895 [math.NA].
- [HY13b] K. L. Ho and L. Ying. Hierarchical interpolative factorization for elliptic operators: integral equations. Technical report, 2013. arXiv:1307.2666 [math.NA].
- [JN80] C. Johnson and J.-C. Nédélec. On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Math. Comp.*, 35(152):1063–1079, 1980.
- [KS99] G. E. Karniadakis and S. J. Sherwin. Spectral/hp Element Methods for CFD. Oxford University Press, 1999.
- [LBG06] S. Le Borne and L. Grasedyck. *H*-matrix preconditioners in convection-dominated problems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 27(4):1172–1183 (electronic), 2006.
- [LGWX12] S. Li, M. Gu, C. J. Wu, and J. Xia. New efficient and robust HSS Cholesky factorization of SPD matrices. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 33(3):886–904, 2012.
- [Lin04] M. Lintner. The eigenvalue problem for the 2D Laplacian in  $\mathcal{H}$ -matrix arithmetic and application to the heat and wave equation. Computing, 72(3-4):293–323, 2004.

- [Mar09] P. G. Martinsson. A fast direct solver for a class of elliptic partial differential equations. J. Sci. Comput., 38(3):316–330, 2009.
- [McL00] W. McLean. Strongly elliptic systems and boundary integral equations. Cambridge University Press, 2000.
- [MR05] P. G. Martinsson and V. Rokhlin. A fast direct solver for boundary integral equations in two dimensions. *J. Comput. Phys.*, 205(1):1–23, 2005.
- [MS98] P. Mund and E. P. Stephan. The preconditioned GMRES method for systems of coupled FEM-BEM equations. *Adv. Comput. Math.*, 9(1-2):131–144, 1998. Numerical treatment of boundary integral equations.
- [Neč67] J. Nečas. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1967.
- [NH88] Z. P. Novak and W. Hackbusch. O cloznosti metoda panelej. In *Vycislitel'nye* prozessy i sistemy, pages 233–244. Nauka, Moscow, 1988.
- [NS74] J. A. Nitsche and A. H. Schatz. Interior estimates for Ritz-Galerkin methods. *Math. Comp.*, 28:937–958, 1974.
- [Rat98] A. Rathsfeld. A wavelet algorithm for the boundary element solution of a geodetic boundary value problem. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 157(3-4):267–287, 1998. Seventh Conference on Numerical Methods and Computational Mechanics in Science and Engineering (NMCM 96) (Miskolc).
- [Rat01] A. Rathsfeld. On a hierarchical three-point basis in the space of piecewise linear functions over smooth surfaces. In *Problems and methods in mathematical physics (Chemnitz, 1999)*, volume 121 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 442–470. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [Riv74] Th. J. Rivlin. The Chebyshev polynomials. Wiley-Interscience, New York, 1974.
- [Rok85] V. Rokhlin. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. J. Comput. Phys., 60:187–207, 1985.
- [Sau92] S. A. Sauter. Über die effiziente Verwendung des Galerkinverfahrens zur Lösung Fredholmscher Integralgleichungen. PhD thesis, Universität Kiel, 1992.
- [ŚBA<sup>+</sup>15] W. Śmigaj, T. Betcke, S. Arridge, J. Phillips, and M. Schweiger. Solving boundary integral problems with BEM++. *ACM Trans. Math. Software*, 41(2):Art. 6, 40, 2015.
- [Sch97] J. Schöberl. NETGEN An advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules. *Comput. Visual.Sci*, (1):41–52, 1997.
- [Sch98a] R. Schneider. Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression: Analysisbasierte Methoden zur effizienten Lösung großer vollbesetzter Gleichungssysteme. Advances in Numerical Mathematics. Teubner, 1998.

- [Sch98b] Ch. Schwab. p- and hp-finite element methods. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. Theory and applications in solid and fluid mechanics.
- [Sch06] R. Schreittmiller. Zur Approximation der Lösungen elliptischer Systeme partieller Differentialgleichungen mittels Finiter Elemente und H-Matrizen. PhD thesis, Technische Universität München, 2006.
- [SS11] S. A. Sauter and Ch. Schwab. Boundary element methods, volume 39 of Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2011. Translated and expanded from the 2004 German original.
- [Ste70] E. M. Stein. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press, 1970.
- [Ste08] O. Steinbach. Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems. Springer, New York, 2008.
- [SY12] P. G. Schmitz and L. Ying. A fast direct solver for elliptic problems on general meshes in 2D. J. Comput. Phys., 231(4):1314–1338, 2012.
- [SZ90] L. R. Scott and S. Zhang. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Math. Comp.*, 54(190):483–493, 1990.
- [Tau03] J. Tausch. Sparse BEM for potential theory and Stokes flow using variable order wavelets. *Comput. Mech.*, 32(4-6):312–318, 2003.
- [TW03] J. Tausch and J. White. Multiscale bases for the sparse representation of boundary integral operators on complex geometry. SIAM J. Sci. Comput., 24(5):1610–1629, 2003.
- [Ver84] G. Verchota. Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domains. J. Funct. Anal., 59(3):572–611, 1984.
- [vPSS97] T. von Petersdorff, Ch. Schwab, and R. Schneider. Multiwavelets for second-kind integral equations. SIAM J. Numer. Anal., 34(6):2212–2227, 1997.
- [Wah91] L. Wahlbin. Local behavior in finite element methods. In P.G. Ciarlet and J.L. Lions, editors, *Handbook of numerical analysis*. *Volume II: Finite element methods (Part 1)*, pages 353–522. North Holland, 1991.
- [XCGL09] J. Xia, S. Chandrasekaran, M. Gu, and X. S. Li. Superfast multifrontal method for large structured linear systems of equations. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 31(3):1382–1411, 2009.
- [Xia13] J. Xia. Efficient structured multifrontal factorization for general large sparse matrices. SIAM J. Sci. Comput., 35(2):A832–A860, 2013.

# Markus Faustmann

Geburtsdatum 21.08.1987

Geburtsort Neunkirchen (NÖ)

Nationalität Österreich

E-Mail markus.faustmann@tuwien.ac.at

Homepage http://www.asc.tuwien.ac.at/~mfaustmann



# **Ausbildung**

Seit 10/2011 **Doktoratsstudium**, Mathematik, TU Wien.

10/2009–10/2011 Masterstudium, Technische Mathematik, *TU Wien*. 10/2006–10/2009 Bachelorstudium, Technische Mathematik, *TU Wien*.

10/2005–09/2006 Zivildienst, JA Josefstadt.

09/1997–06/2005 Schule, BG Zehnergasse, Wiener Neustadt.

#### **Publikationen**

- M. Faustmann, J. M. Melenk und D. Praetorius. A new proof for existence of  $\mathcal{H}$ -matrix approximants to the inverse of FEM matrices: the Dirichlet problem for the Laplacian. In Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations ICOSAHOM 2012, pages 249–259. Springer Lect. Notes Comput. Sci. Eng. 95, 2014.
- M. Faustmann, J. M. Melenk und D. Praetorius. *H-matrix approximability of the inverse of FEM matrices*. to appear in Numer. Math., 2015.
- M. Faustmann, J. M. Melenk und D. Praetorius. Existence of H-matrix approximants to the inverses of BEM matrices: the simple-layer operator. to appear in Math. Comp., 2015.
- M. Faustmann, J. M. Melenk und D. Praetorius. Existence of H-matrix approximants to the inverses of BEM matrices: the hyper singular integral operator. ASC Report 08/2015, Institute for Analysis and Scientific Computing, Vienna University of Technology, Wien, 2015.