TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

D I P L O M A R B E I T

PRÄFERENZEN, AUSWAHLFUNKTIONEN UND DEREN DIDAKTISCHE KONZEPTION

Ausgeführt am Institut für

Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von Em.Univ.Prof. Dr.phil. Dietmar Dorninger

durch

Nikolaus Schillhammer

Hasnerstraße 80/13
1160 Wien

26. November 2014

Mein herzlicher Dank gilt Prof. Dr. Dietmar Dorninger für die umfangreichen Hilfestellungen zur Konzeption und Ausfertigung dieser Diplomarbeit.

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT

Diese Arbeit befasst sich inhaltlich einerseits mit der mathematischen Modellierung individueller Präferenzen, andererseits mit der Frage, wie von mehreren vorliegenden individuellen Präferenzen in einem Kollektiv auf die Präferenz des gesamten Kollektivs geschlossen werden kann.

Diese Inhalte sind grundsätzlich nicht neu und auch in der entsprechenden Fachliteratur zu finden. Eine Schwierigkeit bei der Herangehensweise zu diesem Thema ist, dass es interdisziplinär zwischen Mathematik, Volkswirtschaftslehre und Politikwissenschaft angesiedelt ist. Alle diese Wissenschaften haben jeweils ihre eigenen üblichen Notationen und Bezeichnungen.

Die *zentrale Forschungsfrage* dieser Arbeit ist die folgende:
Wie ist es möglich, eine durchgängige, didaktisch aufbereitete Konzeption zum Thema „Präferenzen und Auswahlfunktionen" aus mathematischer Sicht zu erstellen?

Hierbei erscheint es besonders wichtig, die Notationen und Bezeichnungen zu vereinheitlichen, und in der durchgängigen didaktischen Konzeption auch beizubehalten.

Diese Diplomarbeit richtet sich primär an Lehrende höherer Schulen, die daran interessiert sind, die Inhalte dieser Arbeit didaktisch für den Schulunterricht im Unterrichtsfach Mathematik aufzubereiten. Dabei sollen die vorliegenden Kapitel nicht als geschlossenes Konzept vom Anfang bis zum Ende verstanden werden, sondern eher Anregungen und Beispiele bieten. Außerdem erhebt die Arbeit keinen Anspruch auf Vollständigkeit, darüber hinausgehende Anregungen sind im Ausblick am Ende dieser Arbeit gegeben.

Obwohl die didaktische Konzeption *durchgängig* ist, also die gesamte Diplomarbeit umfasst, wurde eine Aufteilung in einen mathematisch-theoretischen Teil (Kapitel 1-4) und einen anwendungsbezogenen Teil (Kapitel 5-8) gewählt, wobei sich Theorie und Praxis im Hinblick auf die Didaktik nicht immer streng trennen lassen. Deshalb finden sich auch im ersten Teil gewisse Anwendungen und umgekehrt wird im zweiten Teil, sofern nötig, die entsprechende Theorie kurz angegeben. Viele der Inhalte im ersten Teil sind im Schulunterricht nur für die Lehrenden relevant, die, wenn sie zum Thema unterrichten möchten, selbstverständlich ein höheres Niveau benötigen als diejenigen, für die sie den Stoff didaktisch aufbereiten.

Die einzelnen Abschnitte dieser Arbeit sind nicht immer didaktisch streng aufeinander aufbauend, beispielsweise ist es für das Studium des Kapitels 5 (Verhältniswahlen) nicht unbedingt notwendig, die Inhalte aus den Kapiteln 1-4 zu kennen, und somit kann Kapitel 5 auch für sich genommen im Unterricht verwendet werden. Wo die einzelnen Kapitel auf Inhalte in vorhergehenden Abschnitten aufbauen, ist dies in der jeweiligen Vorbemerkung angegeben.

Ganz besonders auf den Schulunterricht hin konzipiert ist Kapitel 8, wo drei konkrete Anwendungsbeispiele zu den in dieser Arbeit gebrachten Inhalten angegeben sind. Es ist im Unterricht auch durchaus denkbar, mit solchen oder ähnlichen Anwendungsaufgaben in die Thematik einzusteigen und die Theorie gleichzeitig mit der Lösung der Aufgaben zu erarbeiten. Ebenso finden sich in den Kapiteln 1 bis 7 gelegentlich speziell gekennzeichnete exemplarische Aufgaben für die Schule.

Wien, im Oktober 2014 Nikolaus Schillhammer

A Die Mathematik kollektiver und individueller Entscheidungen

1 PRÄFERENZRELATIONEN

Vorbemerkung

Wie bereits im Vorwort erwähnt, befassen sich viele Wissenschaften mit Präferenzen und gerechter Auswahl. Von daher sind auch stets Notationen, Bezeichnungen und Definitionen in der Literatur nicht einheitlich, und dies erschwert eine Herangehensweise an diese Thematik aus didaktischer Sicht enorm. Mit dem Anspruch dieser Diplomarbeit, für Lehrende im Unterrichtsfach Mathematik eine Grundlage für ihren Unterricht zu diesem Thema zu bieten, soll dieser Arbeit ein Kapitel mit anschaulich motivierten Begriffsdefinitionen vorangestellt werden. Wo es in der Literatur abweichende Bezeichnungen gibt, wird, soweit möglich, speziell darauf hingewiesen.

Grundlegende Begriffe wie „Menge", „Funktion", etc. werden als bekannt vorausgesetzt, einige andere Bezeichnungen wie „Relation" oder „Halbordnung" aber in diesem Kapitel definiert und im Hinblick auf Präferenzrelationen präzisiert.

1.1 Binäre (zweistellige) Relationen

Definition:

Unter eine *binären Relation* R verstehen wir anschaulich eine Beziehung zwischen gewissen Paaren von Elementen x und y aus zwei Grundmengen X und Y, wie zum Beispiel im Fall von X={Mädchen einer Schulklasse} und Y={Burschen einer Schulklasse} die Beziehung „x ist befreundet mit y". R ist dann die Menge aller Paare (x,y), welche in dieser Beziehung zueinander stehen.

Wir definieren nun mathematisch exakt: Eine Relation R von X nach Y ist eine Teilmenge von X×Y, also der Menge {(x,y) | $x \in X$, $y \in X$ }. Stimmen die Grundmengen überein (X=Y), spricht man von einer Relation *in* der Menge X, das heißt R ist eine Teilmenge von X×Y.

Wir interessieren uns nun hauptsächlich für Relationen *in* einer Menge und versuchen, von alltäglichen Begebenheiten ausgehend, auf einen präzisen Begriff einer speziellen Relation, nämlich der *Präferenzrelation*, zu kommen.

Aus dem Alltag sind uns folgende Aussagen geläufig:
„Ich lerne Mathematik lieber als Geographie.“
„Auf dem Weg x kommen wir schneller ans Ziel als über Weg y.“
„Partei a halten wir für besser als Partei b.“

Alle diese Aussagen beziehen sich auf binäre Relationen in einer Menge X: Die Grundmenge X ist immer eine Menge von individuell wählbaren Objekten, die Elemente der Relation sind einzelne Paare von Objekten, und die Beziehung zwischen Objekten wird dadurch hergestellt, dass eine Person oder eine Personengruppe ein Objekt einem anderen vorzieht, oder zwei Objekte als gleichwertig erachtet.

Mit diesen Überlegungen können wir nun auch den Begriff der Präferenzrelation mathematisch sinnvoll, aber dennoch praxisbezogen definieren.

1.2 Präferenzrelationen

Definition:
Als *Präferenzrelation* wird eine binäre Relation bezeichnet, bei der die Grundmenge X die Menge aller wählbaren Objekte in einer bestimmten Situation ist, für die folgende Beziehungen gelten können:

1. Ein Objekt $x \in X$ wird definitiv einem anderen Objekt $y \in X$ vorgezogen.
2. Zwei Objekte werden als gleichwertig erachtet.

Wir für Relationen üblich, schreiben wir hierfür $(x, y) \in R$ und kurz xRy .

Die beiden genannten Beziehungen wollen wir ebenfalls speziell bezeichnen:

Definition:
Wird ein Objekt x einem anderen Objekt y definitiv („strikt“) vorgezogen, d.h. betrachten wir nur jene Teilmenge P von R, die aus den Paaren (x,y) besteht, welche die Forderung 1. von oben erfüllt, sprechen wir von einer *strikten Präferenzrelation.* Wir schreiben dann: xPy , und dies wird gelesen als „x ist besser als y“ oder „x wird gegenüber y präferiert“.
Sind zwei Objekte x und y jedoch gleichwertig, so nennt man diese dadurch definierte Relation eine *Indifferenzrelation,* und schreibt dafür xIy , gesprochen als „x ist gleich gut wie y“.

Im oben angegebenen Beispiel „Auf dem Weg x kommen wir schneller ans Ziel als über Weg y“ würde dies also bedeuten, dass alle möglichen Wege als Grundmenge mit den einzelnen Wegen als Elemente und dem Vergleich „schneller ans Ziel kommen“ eine Präferenzrelation bilden.
Im konkreten Fall ist x definitiv besser („schneller“) als y, damit sind diese beiden Elemente Paare einer strikten Präferenzrelation. Es wäre aber genauso denkbar, dass zwei Wege gleich gut sind, dann sind solche Paare Elemente einer Indifferenzrelation.
Die bisherigen Überlegungen waren recht allgemein, ab jetzt sollen hingegen im Hinblick auf konkrete Anwendungen in der Praxis nur ganz bestimmte Präferenzrelationen betrachtet werden.

1.3 Präferenzordnung

Definition:
Eine Präferenzrelation heiße *vollständig*, wenn für alle Paare von Elementen (x,y) aus der Menge XxX genau eine der folgenden Bedingungen gilt:
xPy , yPx oder xIy .
Eine Präferenzrelation R ist *transitiv*, wenn $\forall x, y, z \in X \ : \ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.
Ist eine Präferenzrelation vollständig und transitiv, nennt man sie *Präferenzordnung*.

Anmerkung:
Die Transitivität überträgt sich, wie leicht zu zeigen ist, auch auf die strikte Präferenzrelation und die Indifferenzrelation. Zusätzlich ist die Indifferenzrelation reflexiv, wie unmittelbar aus der Vollständigkeit und der Definition der Präferenzrelation folgt, und auch symmetrisch, denn wenn x mit y gleichwertig ist, muss auch y mit x gleichwertig sein.

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt eine *Äquivalenzrelation*, folglich ist die Indifferenzrelation eine Äquivalenzrelation. Mit diesem Wissen können wir ganz allgemeine Präferenzrelationen leicht graphisch darstellen, denn jede Äquivalenzrelation induziert eine Klasseneinteilung oder Partition.

Beispiel:
Wir gehen von einer Grundmenge acht verschiedener Objekte aus, und bezeichnen diese mit Kleinbuchstaben a bis h. Es soll a gleichwertig zu b sein, ebenso g gleichwertig zu h, außerdem sind d, e und f einander gleichwertig. Jeweils zueinander gleichwertige, also indifferente Objekte können wir nun als Äquivalenzklassen darstellen, und zwar folgendermaßen: Wir erstellen einen Graphen,

in dem alle Objekte jeweils als Buchstaben dargestellt sind, gleichwertige Objekte zusätzlich horizontal auf einer Linie. (Abb.1)

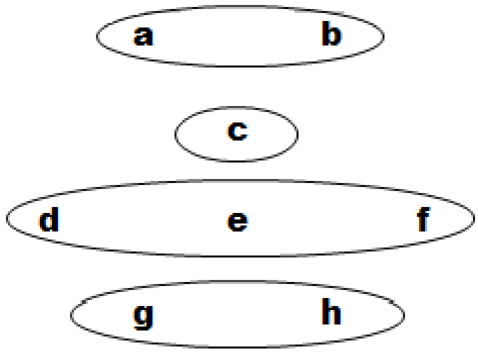


Abb.1

Aus der Definition der Präferenzrelation wissen wir, dass zwischen den Objekten entweder Indifferenzen oder strikte Präferenzen bestehen. Nachdem im konkreten Beispiel die Indifferenzen bereits hervorgehoben sind, müssen wir, um eine Präferenzrelation zu erhalten, das Beispiel erweitern. Es soll dafür Objekt a besser als c sein, c besser als d, und d besser als g. Wir erweitern unser Diagramm also, indem wir vereinbaren, wie in Abb.1 schon angedeutet, dass ein Element, das für *besser* als ein anderes gehalten wird, *höher* als dieses andere steht. Im Folgenden wird dies immer dadurch verdeutlicht, dass die Elemente, zwischen denen strikte Präferenzrelationen bestehen, durch Linienzüge in eine Richtung vertikal verbunden sind.
Zusätzlich wird von einer Präferenzordnung verlangt, dass sie vollständig ist. Also müssen im Graphen auch alle Elemente entweder in einer gemeinsamen Horizontalen stehen (Indifferenz), oder aber (direkt oder indirekt vertikal) verbunden sein. Die folgende Abbildung zeigt dies:

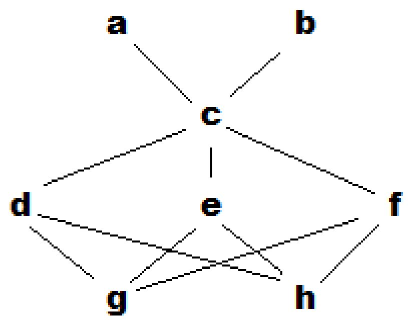


Abb. 2

Das ist also ein Graph einer Präferenzordnung mit 8 Elementen. Eine solche graphische Darstellung wird auch als *Hasse-Diagramm* bezeichnet. Die Begründung für diese Bezeichnung folgt in Kapitel 1.5.
Aus didaktischer Sicht ist es günstig, zu Präferenzordnungen viele Anwendungsbeispiele zu kennen. Im zweiten Teil dieser Arbeit werden hierfür noch einige Beispiele folgen, hier sei aber schon ein einfaches Beispiel aus der Praxis angeführt, wo die Präferenzordnung durch das in Abb. 2 veranschaulichte Diagramm dargestellt werden kann.

<u>Beispiel:</u>
Man möchte ein bestimmtes Produkt kaufen und vergleicht die Preise dieses Produkts in acht verschiedenen Verkaufsstellen. In einer der Verkaufsstellen, in der das Produkt am billigsten ist, wird es gekauft.
Die Preise seien folgende: In den Verkaufsstellen „a“ und „b“ 5 EUR, in der Verkaufsstelle „c“ 7 EUR, in den Stellen „d“, „e“ und „f“ 8 EUR und bei „g“ und „h“ 8,50 EUR.

Dieses Beispiel wird nun, ähnlich wie im Beispiel der „Wege“ oben, anhand einer Präferenzordnung exakter modelliert. Die Grundmenge besteht aus den 8 Verkaufsstellen, die Objekte sind die einzelnen Verkaufsstellen, bei denen man das Produkt kaufen kann und in der Präferenzrelation werden jeweils zwei Verkaufsstellen nach dem Preis dieses Produkts miteinander verglichen. Das *Hasse-Diagramm* dieser konkreten Präferenzordnung ist genau das aus Abb. 2. Verkaufsstellen „a“ und „b“ stehen ganz oben, weil das Produkt dort am billigsten ist.

1.4 Alternative Bezeichnungen

Wie bereits in der Vorbemerkung zu Präferenzrelationen erwähnt, sind die Notationen und Bezeichnungen in der Literatur uneinheitlich. Für die Didaktik ist die Kenntnis dieser alternativen Bezeichnungen bedeutsam, auch im Hinblick auf weiterführende Studien. Deshalb sind in diesem Kapitel kurz nachstehende andere Zugänge und Bezeichnungen angeführt.

Präferenzrelationen, wie sie oben definiert sind, heißen in der Literatur auch manchmal „schwache Präferenzrelationen“ ([4], S.3) oder „Präferenz-Indifferenz-Relationen“ ([3], S.49).
Die hier als *strikten Präferenzrelationen* bezeichneten Relationen werden in dann oft einfach nur „Präferenzrelationen“ genannt und müssen dann von den *Präferenzrelationen* in dieser Arbeit unterschieden werden.

Darüber hinaus unterscheiden wir den aus *Halbordnungen* abgeleiteten Begriff der Präferenzrelation, den wir im Folgenden angeben.

1.5 Halbordnungsrelationen

Eine *Halbordnungsrelation* ist eine binäre Relation in einer Menge X, die reflexiv, transitiv, und antisymmetrisch ist. Üblich ist bei Halbordnungsrelationen die Notation mit dem Zeichen „$\leq$". Nimmt man zu der oben definierten *strikten Präferenzrelation* die Gleichheit zweier Elemente dazu, erhält man zunächst noch keine Halbordnungsrelation, da wir an die Relation „x wird definitiv y" vorgezogen" noch keinerlei Forderungen gestellt haben. Erst wenn wir auch verlangen, dass diese Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, wird sie zu einer Halbordnungsrelation. Eine solche ergibt zusammen mit der *Indifferenzrelation* eine *Präferenzordnung* im ursprünglich angegebenen Sinn, wenn man ferner von der Indifferenzrelation verlangt, dass sie eine Äquivalenzrelation ist. In der Algebra ist es üblich, Halbordnungen mithilfe von *Hasse-Diagrammen* darzustellen, und tatsächlich handelt es sich bei den oben eingeführten Graphen um *Hasse-Diagramme* von Halbordnungen, was die Verwendung der Bezeichnung rechtfertigt. Auch für Halbordnungen ist die Notation in der Literatur nicht einheitlich, eine Halbordnung wird auch als „partielle Ordnung" bezeichnet. ([4], S.4)

Bei der Definition von Präferenzordnungen über Halbordnungsrelationen ist allerdings Vorsicht geboten, weil hier Verwechslungsgefahr besteht: Die Gleichheit von Elementen ist von der Gleich*wertigkeit* im Sinne der Indifferenz zu unterscheiden!

Jede Präferenzordnung lässt sich, wie in Kap. 1.3 beschrieben, in einem *Hasse-Diagramm* darstellen. Umgekehrt muss aber nicht jedes Hasse-Diagramm einer Halbordnung eine Präferenzordnung darstellen, wie wir an einem praktischen Beispiel aus der Schule zeigen können.

<u>Beispiel:</u>
5 Schülerinnen (wieder bezeichnet mit Kleinbuchstaben von a bis e) sollen in Mathematik beurteilt werden. Ihre Lehrerin vergleicht die erbrachten Leistungen und stellt fest: Schülerin „a" ist besser als alle anderen. Schülerin „b" ist besser als „e", „c" und „d" auch jeweils besser als „e", „c" außerdem ein wenig besser als „d". Das zugehörige Hasse-Diagramm können wir mit diesen Informationen schon zeichnen. (Abb.3)

Die Lehrerin steht aber vor dem Problem, dass sie die Schülerinnen „c“ und „d“ nicht gut mit „b“ vergleichen kann, weil „c“ und „d“ freiwillige schriftliche Arbeiten abgegeben haben, „b“ dagegen eine (ebenso freiwillige) mündliche Prüfung abgelegt hat. Sie beschließt, Schülerin „a“ ein „Sehr gut“ zu geben, der Schülerin „e“ hingegen ein „Genügend“. Die anderen Schülerinnen sollen Noten dazwischen bekommen.

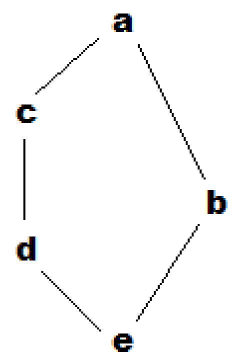


Abb.3

Welche Noten soll sie nun den Schülerinnen „b“, „c“ und „d“ geben? Klar ist, dass die Note von „c“ nach Möglichkeit besser sein sollte als von „d“. Also bieten sich ein „Gut“ für „c“ und ein „Befriedigend“ für „d“ an. Bleibt das Problem der Note für „b“. Intuitiv entscheidet sich die Lehrerin für ein „Befriedigend“. Wir stellen diese Benotungen graphisch dar:

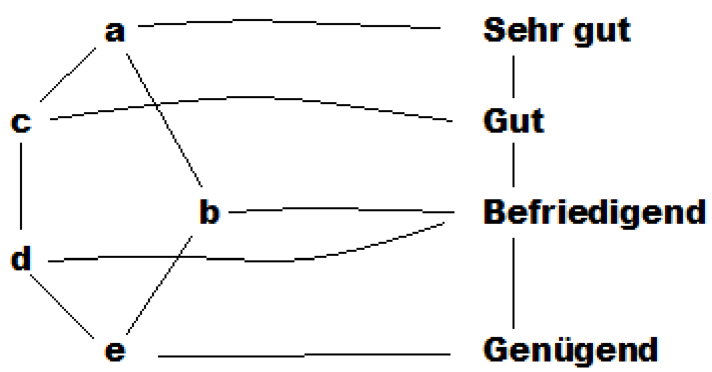


Abb.4

Wir sehen, die Lehrerin hätte der Schülerin „b“ auch ein „Gut“ geben können, ohne, dass dies im Widerspruch zu Halbordnungen aus dem Hasse-Diagramm in Abb. 3 stünde.

Es ist leicht ersichtlich, dass Abb. 3 *keine* Präferenzordnung darstellt. Dies lässt sich auch mit den bisher definierten Eigenschaften von Relationen begründen: Offensichtlich gilt weder bPc noch bPd, sonst wären diese Elemente jeweils im Hasse-Diagramm miteinander verbunden. Eine

Präferenzordnung setzt aber *Vollständigkeit* voraus, folglich müsste cIb und bId gelten, aufgrund der *Transitivität* damit auch cId . Das ist aber sicher widersprüchlich, denn aus dem Diagramm ersichtlich ist cPd , und diese beiden Relationen schließen einander aus, folglich kann hier keine Präferenzordnung vorliegen.
Das ist auch die Begründung dafür, weshalb zueinander indifferente Elemente einer Präferenzordnung im Hasse-Diagramm „in einer Horizontalen“ stehen müssen.

Abb. 4 macht außerdem eine weitere Behauptung plausibel. Wir haben hier durch die Notenvergabe versucht, eine Abbildung der Halbordnung in Abb. 3 in einer Notenskala von 1 bis 5 zu generieren. Dies ist zwar gelungen, sogar ordnungserhaltend, aber vom Standpunkt der Schülerin „b“ aus etwas unbefriedigend, weil es für sie zwei mögliche Beurteilungen gibt, was im Allgemeinen ungünstig ist, wenn man eindeutige und vergleichbare Beurteilungen haben möchte.

Was schiefgegangen ist, ist, dass vom Standpunkt der vergebenen Noten aus „Note für Schülerin „x“ ist besser als Note für Schülerin „y““ nicht folgt, dass „x“ besser zu beurteilen wäre als „y“. Bezeichnen wir die obige Abbildung als θ, so folgt z.B. aus $\theta(b)<\theta(c)$ nicht $b<c$. Aus Gerechtigkeitsgründen würde man sich wünschen, dass $\theta(x)<\theta(y)$ nach sich zieht, dass $x<y$ ist und dass aus $\theta(x)=\theta(y)$ auch folgt $x=y$.

Man kann folgenden Satz auch beweisen:
Eine endliche Halbordnung H mit der Relation „≤“ ist genau dann eine Präferenzordnung, wenn es eine ordnungstreue Abbildung θ von H in $\mathbb{Z}$, mit der Relation „≤“, gibt, so dass $\forall x, y \in H : x < y \Leftrightarrow \theta(x) < \theta(y)$.

2 KOLLEKTIVE AUSWAHLREGELN

Vorbemerkung

Im vorhergehenden Kapitel ist es auf abstrakte Weise gelungen, die erste Fragestellung dieser Arbeit, nämlich das Problem der mathematischen Modellierung individueller Präferenzen hinreichend zu lösen, nämlich über Präferenzrelationen. Auch wurde in den Hasse-Diagrammen von Halbordnungsrelationen eine Veranschaulichung gefunden, welche das Verständnis fördert. Ein Problem ist bis jetzt nur aufgetreten, wenn die Präferenzen, wie im Beispiel der Mathematiklehrerin, keine Präferenzordnung ergaben.

Bisher haben wir allerdings nur individuelle Präferenzen betrachtet. Weitere Probleme Fragestellungen ergeben sich, falls mehrere Präferenzen vorliegen und wir aus einer Menge dieser individuellen Präferenzen auf die Präferenz des gesamten Kollektivs schließen wollen. Welche Möglichkeiten es dafür gibt, wird in den folgenden Kapiteln beschrieben, und auch gleich hier in diesem Kapitel wird ein einfaches Beispiel dafür angegeben.

2.1 Individuelle und kollektive Präferenzen

<u>Beispiel</u>[1]:
Aus sechs Kandidatinnen und Kandidaten, die für einen Posten in Frage kommen, und mit den Buchstaben „a" bis „f" bezeichnet seien, soll ein Dreiervorschlag erstellt werden. Dafür wird eine Kommission aus vierzehn Mitgliedern eingesetzt, die diesen Dreiervorschlag erstellen soll.

Aus einer Gruppe von 6 Personen sollen also drei ausgewählt werden. Die individuellen Präferenzen können ganz analog wie in Kap. 1 modelliert werden. Hier sind prinzipiell für einen Dreiervorschlag zwei Möglichkeiten denkbar, nämlich a) ungereiht und b) gereiht, wobei im Falle von a) zwischen den drei ausgewählten Personen Indifferenzrelationen bestehen und im Fall von b) eine strikte Präferenzrelation. Die Hasse-Diagramme für diese beiden Fälle sind leicht zu erstellen. Jedes Mitglied wählt also 3 Personen aus und ordnet ihnen zusätzlich noch die Plätze 1 bis 3 zu. Das Ergebnis der 14 abgegebenen Dreiervorschläge ist in der folgenden Tabelle angegeben.

1 Dieses Beispiel hat sich in dieser Form tatsächlich einmal bei einem Auswahlverfahren an einer Universität ereignet und passt auch gut für einen didaktischen Einstieg zum Thema der kollektiven Auswahlregeln. Weitere Beispiele hierfür folgen im didaktischen Teil.

Wie in der letzten Spalte von Tab.1 ersichtlich, wurden anschließend außerdem noch Punkte vergeben, wobei Erstplatzierte 3 Punkte, Zweitplatzierte 2 Punkte, und Drittplatzierte 1 Punkt von einzelnen Kommissionsmitgliedern erhalten haben.

Kandidat/ Kandidatin	*Anzahl der Reihungen insgesamt*	*Anzahl der Reihungen auf den 1.Platz*	*Anzahl der Reihungen auf dem 2. Platz*	*Anzahl der Reihungen auf dem 3.Platz*	*Punkteanzahl bei Vergabe von 3,2,1 Pkt.*
a	8	-	4	4	12
b	6	3	3	-	15
c	5	4	1	-	14
d	8	-	3	5	11
e	8	-	3	5	11
f	7	7	-	-	21

Tab.1

Wie kann man aus solch einem Ergebnis nun durch ein *Auswahlverfahren* drei Personen auswählen? Oder, allgemeiner gefragt, wie ist die Ermittlung einer *kollektiven Präferenz* aus *Präferenzen von Individuen* möglich?

Wir kehren zum Beispiel zurück und schlagen der Kommission nun drei Auswahlverfahren zu Auswahl für einen Dreiervorschlag vor:

1. Es sollen die Personen ausgewählt werden, die am häufigsten gereiht wurden.
2. Diejenigen mit den meisten Erstplatzierungen werden ausgewählt.
3. Die Auswahl erfolgt nach der Gesamtpunkteanzahl.

Wir erhalten folgendes Ergebnis: Im Falle von 1. (häufigste Reihung) werden „a", „d" und „e" für den Dreiervorschlag ausgewählt, bei 2. (Erstplatzierte) „f", „c" und „b" und wenn wir 3. (Punkteanzahl) betrachten, „f", „b" und „c".

Erstaunlich ist, dass die Ergebnisse aus dem 1. und dem 2. Auswahlverfahren sogar *disjunkt* sind. Man stelle sich die Bedeutung dieser Tatsache noch einmal vor: *Obwohl die individuellen Präferenzen nicht verändert wurden, haben wir alleine durch die Änderung des Auswahlverfahrens von 1. zu 2. erreicht, dass genau die jeweils anderen Kandidatinnen bzw. Kandidaten ausgewählt wurden!* Und auch wenn wir die Verfahren 2. und 3. vergleichen, ergibt sich immerhin innerhalb des

Dreiervorschlags noch eine andere Reihung. In diesem Beispiel zeigt sich also, dass, sobald die individuellen Präferenzen ermittelt wurden, es alleine auf das *Auswahlverfahren* ankommt, welche Personen letztlich in den Dreiervorschlag aufgenommen werden.

Das Beispiel kann man auch verallgemeinern: Die kollektive Präferenz, welche aus individuellen Präferenzen ermittelt wird, ist alles andere als eindeutig. Im Folgenden soll erörtert werden, welche die wichtigsten Möglichkeiten zur Ermittlung von kollektiven Präferenzen aus individuellen Präferenzen sind.

2.2 Auswahlregeln für ein Kollektiv

Für die später folgenden Beispiele zu kollektiven Auswahlregeln soll die schon im Kapitel 1 eingeführte Notation nun beibehalten werden. Die Grundmenge aller wählbaren Objekte wird weiterhin mit „X“ bezeichnet, und die Elemente von X mit Kleinbuchstaben {a,b,c,...}. X kann z.B. eine Menge von Skirennläufern sein, unter denen die einzelnen Rennen Präferenzen ergeben, es kann sich aber auch um Waren handeln, für die sich Personen entscheiden, oder aber wie im obigen Beispiel um Kandidatinnen und Kandidaten bei einer Wahl. Aus den individuellen Präferenzen wird eine Auswahl ermittelt, welche möglichst wieder in Form einer Präferenzrelation vorliegen soll. Zur Veranschaulichung wählen wir stets die Sprechweise von Wahlen. Die Menge X bezeichnen wir darum als „Kandidatenmenge“ und die Menge $M=\{1,2,3,...,m\}$ zu deren Elementen Präferenzrelationen auf X gebildet werden können, als „Wahlberechtigte“.

Wir vereinbaren, dass wir ab jetzt nur mehr solche Präferenzrelationen betrachten, welche endliche Halbordnungen sind und sich daher für kleine Mengen X als Hasse-Diagramme visualisieren lassen.

Für jedes einzelne Individuum $n \in M$ aus der Menge der Wahlberechtigten soll dessen Präferenz in Form einer *Präferenzrelation* R_n vorliegen. R_X soll die Menge aller möglichen Präferenzrelationen auf X sein, und mit $R_X(w)$ bezeichnen wir die *zulässigen* Präferenzrelationen bei einem bestimmten Auswahlverfahren w.

Wir vereinbaren nun, eine Abbildung α_W, welche jedem m-Tupel von individuellen Präferenzen $(R_1,...,R_n)$ eine binäre Relation von X zuordnet, als *kollektive Auswahlregel* zu bezeichnen.
Ist das Ergebnis $\alpha_W(R_1,...,R_n)$ einer kollektiven Auswahlregel für alle $(R_1,...,R_n)$ in der Menge aller

möglichen Präferenzrelationen R_X enthalten, wird α_W als eine *soziale Wohlfahrtsfunktion* bezeichnet ([8], S.48). Dieser Begriff scheint ein wenig eigentümlich, ist aber in der Volkswirtschaftslehre üblich und wird auch in dieser Arbeit übernommen.

Für kollektive Auswahlregeln werden nun drei Beispiele für Auswahlverfahren angegeben, die Auswahlregel im ersten Beispiel, welche bei österreichischen Nationalratswahlen Anwendung findet, bezeichnen wir mit w=N wie Nationalratswahl, das zweite Beispiel bezieht sich auf das Verfahren von Mehrheitsentscheidungen (w=m) und das dritte legt die „Rangordnungsmethode“ (w=r) zugrunde. Im Prinzip sind uns diese Verfahren schon aus dem Beispiel in Kap. 2.1 bekannt.

2.2.a Nationalratswahl (N)

Für diese Methode soll es nur zwei zulässige Arten für Präferenzrelationen $R_X(N)$ auf X geben: Entweder wird ein Element von X (d.h. bei Nationalratswahlen eine Partei) allen anderen gegenüber strikt präferiert, wobei die übrigen Elemente (d.h. Parteien) als gleichwertig erachtet werden, oder aber sämtliche Elemente werden als paarweise indifferent betrachtet. Anders gesprochen, im Falle einer Wahl: Man hat genau zwei Optionen: entweder man wählt ein x (Partei) aus, oder aber man gibt kein Element als (einzige) Präferenz an (ungültige Stimme).

Wir stellen uns vor, die Anzahl der Wahlberechtigten sei n=7, und es stehen drei Parteien a,b und c zur Auswahl. Die *kollektive Auswahlregel* α_N lautet im Allgemeinen und damit insbesondere in dem Fall so: es gilt genau dann $x\alpha_N y$, wenn die Anzahl, wie oft x als bestes, d.h. oberstes Element in den einzelnen Präferenzrelationen R_n erscheint, größer ist als dieselbe Anzahl für y, oder falls y=x.

Ein möglicher Wahlgang wird jetzt in Abb. 5 mittels Hasse-Diagrammen illustriert:

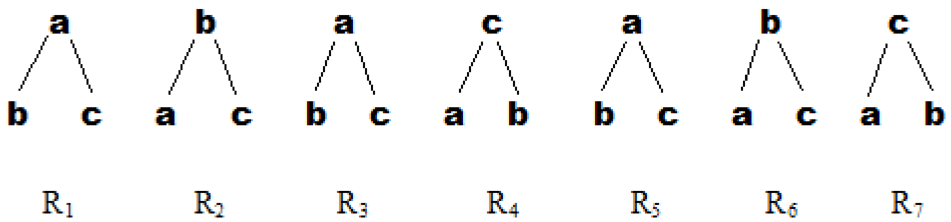


Abb.5

Wir sehen, dass niemand von den Wahlberechtigten eine ungültige Stimme abgegeben hat. Dreimal liegt „a“ an erster Stelle, und jeweils zweimal „b“ beziehungsweise „c“. Wenden wir auf dieses Ergebnis die *kollektive Auswahlregel* α_N an, liegt im Ergebnis „a“ vor „b“ und „c“, wobei letztere einander gleichwertig sind.

Die Auswahlregel N wird zumeist häufig bei Wahlen in Demokratien angewandt und liefert, wenn die Menge X der Wahlberechtigten groß genug ist, im Allgemeinen eine Vollordnung: „beste“, „zweitbeste“, „drittbeste“ Wahl, etc.

Wir wir aber schon am Beispiel der Postenbesetzung in Kapitel 2.1 gesehen haben, kann eine Einschränkung auf zwei mögliche Arten von Präferenzrelationen bei kleinen Kollektiven höchst problematisch sein.

Es wäre außerdem denkbar, dass die „wahren Präferenzen“ der Wahlberechtigten des Wahlgangs in Abb.5 folgendermaßen ausgesehen haben, wenn die Wahlberechtigten ihre Präferenz in Form von Präferenzrelationen angeben hätten können, welche hier (zufällig) Vollordnungen sind:

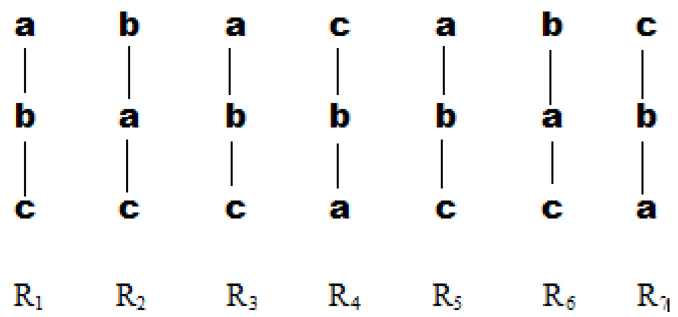


Abb.6

In Abb.6 sieht man leicht, dass vier Wahlberechtigte die Partei „b“ besser bewerten als Partei „a“, hingegen nur drei Wahlberechtigte Partei „a“ besser als Partei „b“. Dennoch liegt im Endergebnis nach der Auswahlregel „Nationalratswahl“ die Partei „a“ vor der Partei „b“, obwohl die relative Mehrheit der Wahlberechtigten diese beiden Parteien im direkten Vergleich genau umgekehrt bewertet! Damit drängt sich die Frage auf, ob dieses Auswahlverfahren nicht vielleicht ungerecht sei. Ausgehend von dieser Überlegung, betrachten wir ein alternatives Auswahlverfahren.

2.2.b Mehrheitsentscheidung (m)

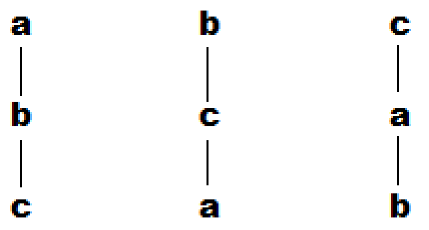
Wie wir schon am vorherigen Beispiel gesehen haben, liefert die Anwendung der Auswahlregel „Nationalratswahl“ zwar in der Regel eine Präferenzrelation, oft sogar eine Vollordnung, verzerrt aber möglicherweise den Willen des Kollektivs, weil jene Präferenzrelationen, welche die Wahlberechtigten abgegeben haben, nicht zwingend ihren tatsächlichen Präferenzen entsprechen müssen. Nun wird auf das Beispiel, das in Abb. 6 gezeigt wird, näher eingegangen. Man kann nämlich aus genau den Überlegungen, die bei der Methode „Nationalratswahl“ entscheidend für die Verzerrung des Willens des Wahlkollektivs waren, eine Auswahlregel konstruieren und zwar folgendermaßen:

Zugelassen sind bei der Methode der *Mehrheitsentscheidung* nun alle möglichen Präferenzrelationen, die Einschränkung, die wir bei der „Nationalratswahl“ gemacht haben, fällt weg. Damit ist $R_X(m)=R_X$. Die kollektive Auswahlregel lautet nun: $x\alpha_m y$ gilt genau dann, wenn die Anzahl der Wahlberechtigten, die x vor y gereiht haben, größer ist, also die Anzahl jener, die y vor x wählten, oder falls x=y ist.

Wenden wir α_m auf das Beispiel in Abb.6 an, erhalten wir also ein anderes Ergebnis, als bei der „Nationalratswahl“. In der kollektiven Präferenz wird „b“ häufiger vor „a“ und „c“ gereiht, und „a“ ist außerdem häufiger vor „c“. Damit muss nach der Mehrheitsentscheidung im Ergebnis „b“ besser als „c“ und dieses wiederum besser als „a“ sein.

Nun könnte jemand einwenden, warum nach diesen Überlegungen nicht bei sämtlichen Wahlen und Abstimmungen die Methode der Mehrheitsentscheidung anstatt der „Nationalratswahl“ zur Anwendung kommt. Das lässt sich einfach damit begründen, dass auch die Mehrheitsentscheidung zu Problemen führen kann, wie anhand des folgenden Beispiels gezeigt wird:

Wir gehen diesmal von bloß drei Wahlberechtigten, „1“,“2“ und „3“ aus, die 3 Parteien {a,b,c} zur Wahl haben. Es werden die Präferenzen in Abb. 7 bekanntgegeben. Wir sehen, dass nach der Mehrheitsentscheidung im Kollektiv „a“ besser als „b“ ist, „b“ besser als „c“ und „c“ besser als „a“. Das verletzt aber die Transitivität, folglich liegt hier als kollektive Auswahlregel keine Präferenzordnung vor, sondern wir erhalten eine „zirkuläre“ Relation. Solche Fälle werden als *Abstimmungsparadoxon* bezeichnet und treten bei der Methode der Mehrheitsentscheidung häufig auf.



R_1 R_2 R_3

Abb.7

2.2.c Rangordnungsmethode (r)

In Kapitel 2.1 wurde anhand des Beispiels gezeigt, dass sich auch die Möglichkeit einer „Punktevergabe“ anbietet, um die Präferenz eines Kollektivs zu ermitteln. Im Folgenden formulieren wir eine dafür geeignete allgemeine Auswahlregel.

Auch bei der *Rangordnungsmethode* sind die zugelassenen Präferenzrelationen alle möglichen, also $R_X(r)=R_X$. Die zugehörige kollektive Auswahlregel α_r wird so definiert: in jeder individuellen Präferenzordnung erhalten die maximalen, das sind die Elemente x, zu denen es kein $y \in X$ gibt mit y>x und die daher im Hasse-Diagramm ganz oben stehen, eine feste Punkteanzahl Z, und die direkten unteren Nachbarn im Diagramm einen Punkt weniger, Z-1, und so weiter. Dabei heißt ein Element y unterer Nachbar von x, wenn y≤x ist und es kein z gibt mit y<z<x. Ein Spezialfall, der leicht verallgemeinert werden kann ist, wenn man Z=|X| wählt, also die höchste Punkteanzahl, die vergeben werden kann, der Anzahl der zur Wahl stehenden Elemente der „Kandidatenmenge“ entspricht. Die so aus den individuellen Präferenzen erhaltenen Punkte werden für jedes $x \in X$ addiert.

Als Beispiel geben wir diesmal zwei Wahlgänge an, wobei X wieder gleich {a,b,c} sei, und es drei Wahlberechtigte geben soll. In Abb.8 sind die zugehörigen Diagramme gezeichnet.

Es ist aus den Hasse-Diagrammen ersichtlich, dass die Personen „2“ und „3“ bei beiden Wahlen gleich abgestimmt haben, Person „1“ hingegen hat beim zweiten Wahlgang „a“ und „c“ anders gereiht als im ersten. Wenden wir mit diesen Informationen die Rangordnungsmethode mit Z=3 an, ergibt sich folgendes Ergebnis: Im ersten Wahlgang erhalten „a“ und „b“ jeweils 7 Punkte, und „c“

4 Punkte. Im zweiten Wahlgang dagegen hat „a“ 8 Punkte, „b“ 7 Punkte“ und „c“ 3 Punkte. Die Platzierungen von „a“ und „b“ sind also in der kollektiven Präferenz bei den beiden Wahlgängen *unterschiedlich*, obwohl die Reihung von „a“ und „b“ untereinander völlig gleich bleibt!

Das Problem bei der Rangordnungsmethode ist damit leicht ersichtlich: Das Ergebnis der Wahl, eingeschränkt auf „a“ und „b“ hängt nicht nur von den individuellen Präferenzen bezüglich „a“ und „b“, sondern auch noch von der Reihung von „c“ ab.

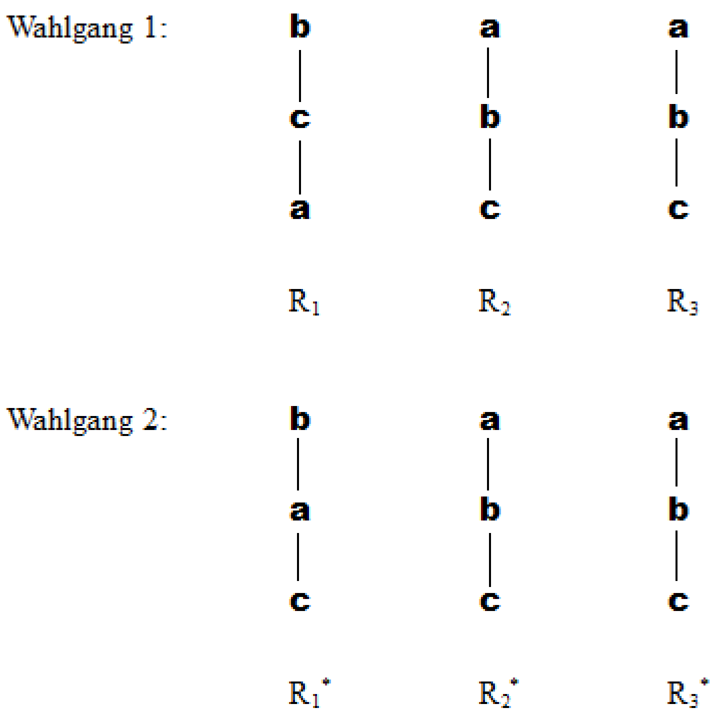


Abb. 8

Ein Beispiel aus dem Sport zu Abb.8 verdeutlicht das Paradoxon: Die beiden „Wahlgänge“ seien sportliche Wettkämpfe, bei denen es auf Schnelligkeit ankommt, jeweils drei Läuferinnen (a,b,c) messen sich in diesen Wettkämpfen in jeweils drei Laufrunden. In den Runden zwei und drei sind die Ergebnisse in beiden Wettkämpfen gleich, in Runde eins dagegen ist Läuferin „c“ aufgrund einer plötzlich auftretenden Verletzung deutlich langsamer und fällt hinter „a“, wobei sich die Laufzeiten von „a“ und „b“ gegenüber dem ersten Wettkampf nicht signifikant verändert haben. Im Ergebnis liegt im zweiten Wettkampf, wie oben beschrieben, plötzlich „a“ vor „b“, ohne dass sich an deren Leistungen etwas geändert hätte.

3 DER SATZ VON ARROW

Vorbemerkung

In Kapitel zwei wurden nach der mathematischen Modellierung individueller Präferenzen auch Möglichkeiten aufgezeigt, wie von individuellen Präferenzen auf die Präferenz eines Kollektivs geschlossen werden kann, und damit der zweite zentrale Aspekt dieser Diplomarbeit abgehandelt. Was aber bisher offen blieb: Sind diese Auswahlverfahren, die wir vorgeschlagen haben, auch „gerecht" sind in dem Sinne, dass die individuellen Präferenzen im Endergebnis sinnvoll abgebildet sind? Und falls nicht, welche Alternativen sind möglich?

Was unter einem gerechten Auswahlverfahren zu verstehen ist, wird in diesem Kapitel erörtert, außerdem bringt uns die Suche nach diesem universalen, „gerechten" Auswahlverfahren auf ein überraschendes Ergebnis.

3.1 Gerechte Auswahlverfahren

Anmerkung: Dieser Abschnitt bezieht sich zum Großteil auf ein Standardlehrbuch aus der Volkswirtschaftslehre, „Logik kollektiver Entscheidungen" von Kern und Nida-Rümelin (siehe [4]), die Bezeichnungen und Notationen sind dort allerdings teilweise anders. In dieser Arbeit werden die in Kapitel 1 und 2 eingeführten Bezeichnungen beibehalten.

In Kapitel 2 wurden bereits drei konkrete Auswahlverfahren zur Ermittlung einer kollektiven Präferenz vorgeschlagen, bezeichnet mit „Nationalratswahl", „Mehrheitsentscheidung" und „Rangordnungsmethode". Es hat sich aber gezeigt, dass jedes dieser Verfahren gewisse Nachteile mit sich bringt. Betrachten wir nun die Politik hinter diesen Verfahren, genauer gesagt, die konkrete Anwendung in der Demokratie. Der Prozess demokratischer Entscheidungen kann stets als Auswahlverfahren zur Ermittlung kollektiver Präferenzen aus individuellen gesehen werden.

Im Zentrum einer solchen Entscheidung steht dabei eine kollektive Auswahlregel α_W, von der man wünscht, dass sie gewisse Eigenschaften habe, bezogen auf gerechte Wahlen und Entscheidungen. Unter gerechten Auswahlverfahren sollen ab jetzt allgemein jene Verfahren verstanden werden, bei denen die einzelnen individuellen Präferenzen weitgehend in der kollektiven Präferenz abgebildet sind, vor allem soll es keine Paradoxa geben, und außerdem soll diese Auswahlfunktion gewisse Bedingungen erfüllen, die als unerlässlich in einer Demokratie angesehen werden.

Im vorigen Kapitel ist ein Paradoxon aufgetreten, das schon im Jahre 1785 erstmals vom französischen Mathematiker Marquis de Concorcet (1743-1794) als *Abstimmungsparadoxon* entdeckt wurde ([4], S.29), und im Abschnitt 2.2.b bei der Methode der Mehrheitsentscheidung beschrieben ist. Die Frage nach der Häufigkeit des Auftretens eines solchen Abstimmungsparadoxons lässt sich mit stochastischen Methoden beantworten, und ist jedenfalls bei modernen Wahlen und Abstimmungen nicht zu vernachlässigen. (in [4], S 30-31 wird dieser Umstand ausführlich beschrieben). Im Rahmen dieser Arbeit soll darauf aber nicht näher eingegangen werden, alleine das Vorkommen von Abstimmungsparadoxa soll genügen.

Concordet schon schlug zur Vermeidung des Abstimmungsparadoxons vor, dass sichergestellt werden müsse, dass im Ergebnis jeweils ein bestes Element allen anderen gegenüber präferiert wird. ([4], S. 8) Obgleich wir das nicht fordern und nur verlangen, dass keine Paradoxa auftreten, scheidet aber die Methode der Mehrheitsentscheidung als gerechtes Auswahlverfahren aus, weil damit „zyklischen" Präferenzen entstehen können.

Der Ökonom und Nobelpreisträger Kenneth Arrow (*1921) präzisierte in seiner Doktorarbeit von 1951, aufbauend auf Concordets Überlegungen, Anforderungen an ein gerechtes Auswahlverfahren (siehe [1]). Diese sollen nun hier, mit abweichenden Bezeichnungen, wiedergegeben werden.

- Arrows erste Forderung ist jene, dass jede beliebige Präferenzstruktur zulässig sein soll. Das bedeutet, dass alle Individuen frei in der Angabe ihrer Präferenz sind, sofern es sich um eine Präferenzordnung handelt. Weiters soll das Verfahren immer eine *soziale Wohlfahrtsfunktion* sein.
- Die zweite Forderung besagt, dass es keinen *Diktator* geben soll, was hier bedeutet, dass kein einzelnes Individuum mit dessen individueller Präferenzordnung die kollektive Ordnung alleine festlegt, unabhängig davon, wie die anderen Individuen abgestimmt haben. Diese Forderung bezeichnen wir als Bedingung (D) – Ausschluss der Diktatur.
- Die dritte Forderung wird *Pareto-Prinzip* (P) genannt: Sollten sämtliche Individuen x vor y den Vorzug geben, so muss auch in der kollektiven Präferenz x dem y vorgezogen sein.
- Außerdem soll, wie schon in Kapitel zwei genannt, das *Unabhängigkeitsaxiom* (U) gelten: Im Hinblick auf eine beliebige Teilmenge T von Kandidatinnen bzw. Kandidaten darf das kollektive Resultat nur von den individuellen Präferenzen bezüglich der Elemente aus T abhängig sein und nicht von der Reihung von x, die außerhalb dieser Menge T sind.

Arrow versuchte, eine kollektive Auswahlregel zu finden, die stets eine soziale Wohlfahrtsfunktion ist und auch die Bedingungen (D), (P) und (U) erfüllt. Die Methode der Mehrheitsentscheidung erfüllt, wie schon gezeigt wurde, die Anforderungen einer derartigen Auswahlregel deshalb nicht, weil sie zwar (D), (P) und (U) erfüllt, aber im Allgemeinen das Ergebnis *keine* soziale Wohlfahrtsfunktion ist. Die Rangordnungsmethode verletzt das Unabhängigkeitsaxiom, bei der „Nationalratswahl" sind die Wahlberechtigten nicht frei in der Angabe ihrer Präferenz.

Nun könnte man weiter nach kollektiven Auswahlregeln suchen, die sämtliche Bedingungen von Arrow immer erfüllen. Eine solche Auswahlregel wird man aber niemals finden, wie wir im folgenden Abschnitt zeigen.

3.2 Satz von Arrow (Arrow's Impossibility Theorem)

Wir wählen die Bezeichnungen aus Kapitel 2, also X für die „Kandidatenmenge", M={1,2,3,...,m} für die Menge der Wahlberechtigten usw.

Satz (von Arrow):

Für |X|≥3 und |M|≥2 gibt es keine soziale Wohlfahrtsfunktion, die alle drei Bedingungen (P), (D) und (U) zugleich erfüllt.

Für den Beweis ist der Begriff der Entscheidungsmenge zentral. Eine Teilmenge M_0(a,b) von M, heißt *Entscheidungsmenge* für $a \in X$ gewinnt gegenüber $b \in X$ falls für *jede* Wahl (R_1,...R_n), wo $aP_j b$ für *alle* j aus M_0(a,b) gilt, folgt, dass auch in der kollektiven Präferenz $a \alpha b$ ist.
Für die Beweisskizze von Arrow's Impossibility Theorem benötigen wir drei Hilfssätze, die wir teilweise ohne Beweis angeben, die aber für didaktische Zwecke plausibel gemacht werden können.

Lemma 3.1:

Für eine soziale Wohlfahrtsfunktion α soll das Unabhängigkeitsaxiom (U) gelten. Falls bei einer bestimmten Wahl (R_1,...R_n) für $a, b \in X$ (a ungleich b) und für eine Menge $J \subseteq M$ gilt, dass $aP_j b$ für alle j aus J, und $bP_k a$ für alle k aus der Komplementärmenge M\J, und überdies im Endergebnis $a \alpha b$, dann muss J eine Entscheidungsmenge M_0(a,b) für $a, b \in X$ sein.

Lemma 3.2:

Sei α eine soziale Wohlfahrtsfunktion, welche das Unabhängigkeitsaxiom (U) und das Pareto-Prinzip (P) erfüllt und $a, b, c \in X$ seien paarweise verschieden. Gilt dann für eine Teilmenge J aus M, dass $J=M_0(a,b)$ ist, so folgt daraus, dass auch $J=M_0(a,c)$ und $J=M_0(c,b)$ ist.

Beweis zu Lemma 3.2:

Sei $J=M_0(a,b)$. Wir betrachten nun eine Wahl $(R_1,...R_n)$ folgendermaßen: $aP_j bP_j c$ für j aus J und $bP_k cP_k a$ für k aus der Komplementärmenge M\J. Dann muss, da $J=M_0(a,b)$, auch $a \alpha b$ gelten. Weil aber für *alle* Wahlberechtigten bPc gilt, folgt aufgrund des Pareto-Prinzips, auch $b \alpha c$. Daraus folgt sofort $a \alpha c$.

Aus Lemma 3.1, $a \alpha c$, $aP_j c$ für alle j aus J und $cP_k a$ für alle k der Komplementärmenge folgt $J=M_0(a,c)$, was zu zeigen war.

Ganz analog beweist man, dass $J=M_0(c,b)$ ist.

Aus Lemma 3.2. kann man folgern

Lemma 3.3:

Es soll $|X|\geq 3$ sein, a,b,u,v aus X, außerdem a ungleich b und u ungleich v. Gelten wie oben das Unabhängigkeitsaxiom (U) und das Pareto-Prinzip (P), und ist $J=M_0(a,b)$, so muss auch $J=M_0(u,v)$ gelten.

Mithilfe dieser drei Hilfssätze gelingt uns nun der Beweis des Satzes von Arrow.

Beweis des Satzes:

Wie in Lemma 3.2 setzen wir für eine soziale Wohlfahrtsfunktion α das Pareto-Prinzip (P) und das Unabhängigkeitsaxiom (U) voraus.

Aus der Menge X wählen wir drei paarweise verschiedene, mit a,b und c bezeichnete Elemente. I_0 sei eine Entscheidungsmenge $M_0(a,b)$, mit der *kleinstmöglichen Anzahl* an Elementen.

Schließlich wählen wir folgendermaßen ein Tupel von Präferenzrelationen $(R_1,...,R_n)$:

- Für alle $j \in I_0$ gelte $a P_j b$.
- Für *ein* $i_0 \in I_0$ gelte $a P_{i_0} b P_{i_0} c$.
- Für *alle* $i \in I_0 \setminus \{i_0\}$ gelte aber $c P_i a P_i b$.
- Alle $k \in M \setminus I_0$ haben folgende Präferenz: $b P_k c P_k a$.

Weil I_0 eine Entscheidungsmenge ist, muss für das Kollektiv $a \alpha b$ gelten. Da α als soziale Wohlfahrtsfunktion angenommen wurde, liegt im Endergebnis eine Präferenzrelation vor. Wie schon in Kapitel 1.5 bewiesen wurde, kann, falls aPb ist, unmöglich aIc *und* bIc gelten, da dies die Transitivität der Indifferenzrelation verletzen würde. Daher muss entweder $a \alpha c$ oder $c \alpha b$ sein.

Wir betrachten diese beiden Möglichkeiten nacheinander:

- Es gelte $a \alpha c$. Weil auch $a P_{i_0} c$ für i_0, und $c P_i a$ für alle alle übrigen i aus der Entscheidungsmenge gilt und außerdem $c P_k a$ für alle $k \in M \setminus I_0$ gilt, folgt aus Lemma 3.1 sofort, dass die Entscheidungsmenge $M_0(a,c)$ nur aus $\{i_0\}$ bestehen kann. Dann besteht aber nach Lemma 3.3 auch für alle u und v aus der Menge X die Menge $M_0(u,v)$ *ausschließlich* aus dem Element i_0.
- Nun gelte $c \alpha b$. Laut Voraussetzung ist $c P_i b$ für alle $i \in I_0 \setminus \{i_0\}$, und für alle k aus $M \setminus I_0$ gilt $b P_k c$. Dann müsste aber nach Lemma 3.1 die Menge $I_0 \setminus \{i_0\}$ eine Entscheidungsmenge $M_0(a,b)$ sein, die *weniger* Elemente hat als die Entscheidungsmenge I_0 selbst, was einen Widerspruch ergibt, denn wir haben für die Menge I_0 vorausgesetzt, dass sie bereits *kleinstmöglich* ist. Aus diesen Überlegungen folgt, dass mit den für diesen Satz getroffenen Voraussetzungen nur der erste Fall eintreten kann. Wenn die Entscheidungsmenge aber *ausschließlich aus einem Element* besteht, ist das Prinzip vom Ausschluss eines Diktators (D) verletzt. Vorausgesetzt wurden für eine soziale Wohlfahrtsfunktion das Pareto-Prinzip (P) und das Unabhängigkeitsaxiom (U).

Wir sehen: *Gelten für eine soziale Wohlfahrtsfunktion für* $|X| \geq 3$ *und* $n \geq 2$ *stets (P) und (U), ist das Prinzip (D) verletzt, und es gibt einen Diktator.* Deshalb ist ersichtlich, dass es hier keine soziale Wohlfahrtsfunktion geben kann, die immer (D), (P) und (U) zugleich erfüllt, und damit ist auch der Satz von Arrow bewiesen.

Literaturhinweis: Der vollständige Beweis findet sich u.a. in [4], S. 35ff., als zentrale Aussage in Arrow's Doktorarbeit 1951, sowie in unzähligen Varianten und mit den verschiedensten Bezeichnungen im Internet, zum Beispiel in dem Skriptum [10].

4 WEITERE AUSWAHLMÖGLICHKEITEN UND -EIGENSCHAFTEN

Vorbemerkung

Der Satz von Arrow hat gezeigt: Es gibt kein allgemeines, als gerecht angesehenes Auswahlverfahren, für das gewisse, allgemein anerkannte und für notwendig befundene Voraussetzungen gelten. Die abstrakte mathematische Formulierung des Satzes aus Kap. 3.2 hat weitreichende politische und juristische Konsequenzen. In einem kurzen Exkurs am Beginn dieses Abschnitts wird dargestellt, wie diese Konsequenzen sich in der Politik und in deren Verfahrens- und Auswahlnormen, d.h. letztlich wieder mathematisch interpretierbar, auswirken.

Weiters wird in diesem Abschnitt erläutert, wie es trotz der Kenntnis des Satzes von Arrow möglich ist, aus dem gegebenenfalls nicht als gerecht empfundenen Ergebnis „beste“ Elemente auszuwählen, und welche sich Möglichkeiten für eine „gerechte“ Auswahl anbieten. Dies wird direkt zu den didaktischen Überlegungen im zweiten Teil überleiten.

4.1 Konsequenzen aus dem Satz von Arrow für Wahlen und Politik

Bei der Formulierung des Satzes von Arrow, dass *es keine soziale Wohlfahrtsfunktion gibt, die alle drei Bedingungen (P), (D) und (U) stets, d.h. zugleich und für alle Tupel von Präferenzen* $(P_1,..,P_n)$ *erfüllt,* ist die Gefahr groß (vor allem für die Mathematikdidaktik), dass nicht sämtliche Prämissen beachtet werden. Es ist nämlich durchaus so, dass man für einen *ganz bestimmte* Wahlmodus eine soziale Wohlfahrtsfunktion finden kann, welche die Forderungen von Arrow's Impossibility Theorem erfüllt.[2] Es ist nur ausgeschlossen, dass es eine soziale Wohlfahrtsfunktion gibt, die immer*, also für jede Art von Wahl,* Arrows Bedingungen genügt.

In Arrows Doktorarbeit findet man hauptsächlich volkswirtschaftliche Aspekte, bedeutend ist der Satz aber auch für die Politik, und zwar mehr, als man vielleicht glauben möchte, denn die Bedingungen von Arrow erscheinen auf den ersten Blick an sich nicht sehr stark: Ausgeschlossen wird nur *ein* Diktator, also ein einziges Element aus dem Kollektiv, das den übrigen Elementen seine Entscheidung „aufzwingt“. Die stärkere Voraussetzung, dass es *mehrere* Elemente gibt, die dies tun, ist von Arrow's Impossibility Theorem nicht erfasst. Darüber hinaus stellt sich die Frage,

2 Didaktische Anmerkung hierzu: Für den Schulunterricht empfiehlt es sich deshalb, einfache Beispiele (kleines |X|, kleines n) zu konstruieren, bei denen der Satz von Arrow sehr wohl erfüllt ist.

ob es überhaupt relevant sei, dass es nicht *immer* ein gerechtes Auswahlverfahren gibt, und man nicht auch darauf hoffen könne, dass ein Auswahlverfahren „möglichst oft" gerecht ist. In diesem Falle müssten wir Abstimmungsparadoxa und Verstöße gegen den Satz von Arrow mithilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie auf ihre Häufigkeit hin untersuchen, wie schon in Kap. 3.1 erläutert.

Wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen können in der Politik aber sehr problematisch sein, denn ein Wahl- oder Abstimmungsverfahren wird wohl kaum jemand gutheißen, wenn dabei ein „ungerechtes" Ergebnis bloß selten auftritt.

Man könnte jederzeit argumentieren, dass Arrows Betrachtungen rein theoretischer Natur sind und man die Verletzung von Arrows Prinzipien (gemeint ist hier fast immer das Unabhängigkeitsprinzip oder der Wahlmodus) akzeptieren könnte. Dies trifft aber in der Praxis nicht zu: In der Regel wird von der Gesetzgebung verlangt, dass Wahlen und Abstimmungen, also politische Entscheidungsverfahren, gewisse Grundvoraussetzungen erfüllen, wie vor allem die *„Freiheit der Wahl"* und die möglichst weitreichende *„Neutralität des Verfahrens"*. ([4], S. 39) Daraus ergibt sich ein unmittelbarer Zusammenhang mit dem Satz von Arrow.

Als „Neutralität des Verfahrens" versteht man im Allgemeinen genau die Aussage des Unabhängigkeitsaxioms (U). „Freiheit der Wahl" ist bei einem Diktator (D) selbstverständlich nicht gegeben, und auch, wenn das Pareto-Prinzip (P) verletzt ist, greift gewissermaßen eine äußere Instanz in den Entscheidungsprozess ein. Genauso ist die Forderung nach einer sozialen Wohlfahrtsfunktion der Freiheit der Wahl geschuldet, weil die Individuen keinen willkürlichen Auswahlmodus beim Endergebnis haben wollen. (Liegt das Ergebnis in Form einer Präferenzrelation vor, so ist diese Willkür eingeschränkt.)

Die Existenz eines Diktators oder der Eingriff einer äußeren Instanz sind ohne Zweifel als prinzipiell *undemokratisch* zu klassifizieren. Dass also die Prinzipien (D) und (P) von Arrow bei einer in Wahl einer Demokratie verletzt sind, muss ausgeschlossen sein.

Die Verletzung des Unabhängigkeitsaxioms (U) wird dagegen häufig in gewissen Grenzen toleriert ([4], S. 41), und wie wir später im didaktischen Teil sehen werden, ist es sogar in modernen Abstimmungsverfahren (nämlich bei jenen, die keine Mehrheitswahlen sind) häufig nicht der Fall, dass dieses Prinzip vorausgesetzt wird. Damit geht eine gewisse „Fairness" verloren, weil Verschiebungen in der Präferenzstruktur unter wohl irrelevanten Alternativen, wie im Beispiel in

Kapitel 2.2.c beschrieben, zu Veränderungen bei (für einen bestimmten Aspekt des Wahlergebnisses) wesentlichen Alternativen führen kann. Es gibt zwar Auswahlregeln wie die in Kapitel 2.2.a beschriebene „Nationalratswahl“, die ein solches Phänomen ausschließen, was jedoch nur für Mehrheitswahlen und nicht für Verhältniswahlen gilt.

Auf die oft in Kauf genommene Verletzung des Unabhängigkeitsaxioms und vergleichbarer Voraussetzungen bei Wahlen und Abstimmungen kommen wir später in Kapitel fünf noch ausführlich zu sprechen. Es ist in diesem Fall zu beobachten, dass, ganz im Gegensatz zur Verletzung der Prinzipien (P) und (D), eine nicht unabhängige, also nicht „neutrale“ Wahl, häufig nicht grundsätzlich als undemokratisch empfunden wird, sondern eher Unzulänglichkeiten der Mathematik zugeschrieben wird. Formulierungen wie „Dieses bemerkenswerte Ergebnis der Wahl liegt in der komplizierten Wahlarithmetik begründet“ deuten darauf hin.

4.2 Auswahleigenschaften

In Kapitel zwei sind bereits drei verschiedene kollektive Auswahlregeln beschrieben. Womit wir uns bisher noch nicht genauer befasst haben ist, welche Eigenschaften Auswahlregeln im Allgemeinen haben müssen, damit sie zu einer Präferenzordnung führen. Hierbei ist noch *nicht* vorausgesetzt, dass die Auswahlfunktion eine soziale Wohlfahrtsfunktion ist, oder, dass Arrows Bedingungen gelten. Wenn man diese Voraussetzungen abschwächt, möchte man zumindest *konsistente* Auswahlen erhalten.

Unser Ziel ist es jetzt also, *„beste“ Elemente* zu finden. Das gelingt dann jedenfalls eher, wenn das „Ergebnis“ einer kollektiven Auswahlregel als Präferenzordnung, im günstigsten Fall als Vollordnung vorliegt, dann kann man die maximalen Elemente, bzw. im Fall der Vollordnung das größte Element, auswählen. Liegt keine Präferenzordnung vor, hat man größere Schwierigkeiten, eine sinnvolle Auswahl zu treffen (siehe Kap. 1.5 – Probleme der Notenvergabe).

Was fordern wir von der Auswahlfunktion im Hinblick auf die Eigenschaften des Wahlergebnisses? Wichtig ist jedenfalls, dass ein Element, welches das „beste“ in einer Gesamtmenge ist, auch in jeder Teilmenge, welche das Element enthält, das beste ist. Auf das Beispiel aus Kapitel eins der Läuferinnen bezogen, sollte eine schwedische Läuferin, die weltweit die beste Läuferin ist, auch die beste schwedische Läuferin sein. Außerdem: Bei zwei Läuferinnen, die in Schweden jeweils die besten sind und wovon eine zur Weltspitze gehört, sollen auch beide zu den weltweit besten gehören. Also sollten bei zwei besten Elementen einer Teilmenge auch *beide* beste Elemente in der Obermenge sein.

Ein derartige „*Konsistenz*", so kann man auch beweisen, besteht ausschließlich dann, wenn die zugehörige Präferenzrelation eine Präferenzordnung ist ([4], S.11). Arrow hat diese Bedingung in seiner Doktorarbeit formuliert. Deshalb wird sie häufig *Arrow-Bedingung für Auswahlfunktionen* genannt.

Die Bedingung, dass überhaupt zumindest ein „bestes Element" existieren soll, stammt von Marquis de Concordet (siehe Kap. 3.1), schließt für eine Auswahl von zuoberst gereihten Elementen das Abstimmungsparadoxon aus, und wird als *Concordet-Bedingung* bezeichnet.

Auf einer Präferenzrelation im Sinn von Kap. 1 kann man also dann eine vernünftige Auswahlfunktion definieren, wenn die Concordet-Bedingung erfüllt ist. Ist darüber hinaus die Arrow-Bedingung erfüllt, ist die aus einer Auswahlfunktion ableitbare Präferenzrelation eine Präferenzordnung. Wenn es eine wohldefinierte Auswahlfunktion gibt, die konsistent ist, kann man auch immer beste Elemente bestimmen. Daraus folgt aber natürlich im Allgemeinen *nicht*, dass damit auch Arrows Anforderungen an ein gerechtes Auswahlverfahren (P), (D) und (U) erfüllt sind.

4.3 Beste, größte und maximale Elemente

Auf eine Verwechslungsgefahr sei in diesem Zusammenhang hingewiesen: Wenn man, wie oben beschrieben, von *besten Elemente* spricht, könnten Laien meinen, dass es jeweils *nur ein* bestes Element geben kann. Das ist aber in Concordets Forderung nicht enthalten. Weil Präferenzordnungen Halbordnungen sind, kann man die von Halbordnungen bekannten Definitionen „größtes Element" und „maximales Element" auch hier in Zusammenhang mit Präferenzordnungen verwenden. Es ist in der Literatur nicht einheitlich, ob man nur das größte Element einer Halbordnung als „bestes Element" bezeichnet, oder ob man auch maximale Elemente als „beste" betrachtet. Abb. 9 veranschaulicht das Problem.

In der Präferenzrelation (Halbordnung) R_1 ist „a" das größte Element und damit auch das einzige maximale Element. Es ist daher in diesem Fall konsequent, dieses Element als das „beste" zu bezeichnen.

R_1 R_2

Abb. 9

Schwieriger gestaltet sich die Frage der Bezeichnung in der Relation R_2. Hier gibt es aus algebraischer Sicht kein größtes Element, wohl aber zwei maximale, in diesem Fall indifferente Elemente. In einer Halbordnung ist es ein Unsinn, von zwei größten Elementen zu sprechen. Nachdem bei Präferenzordnungen aber gefordert ist, dass die Indifferenzrelation eine Äquivalenzrelation ist, rechtfertigt dies, sowohl „a“ als auch „b“ als *beste* Elemente zu bezeichnen. Einfacher ist es bei Vollordnungen, dann existiert nur ein maximales Element, welches als größtes Element unschwer als bestes angesehen werden kann.

4.4 Verhältniswahlen

Bevor wir konkrete Anwendungen betrachten, soll noch auf eine weitere Möglichkeit der Auswahl eingegangen werden, die dann in Kapitel fünf ausführlich beschrieben wird. Bisher zielten alle Auswahlregeln darauf ab, lediglich individuelle Präferenzen in eine kollektive Präferenz abzubilden. Wie man *beste Elemente* auswählen kann, wurde bereits erläutert, jedenfalls führten alle sinnvollen kollektiven Auswahlregeln wieder auf eine Präferenzrelation des Kollektivs.

Gewissermaßen ergibt die Präferenzrelation, die das Wahlergebnis darstellt, eine „Reihung“ von Kandidatinnen und Kandidaten nach ihrer Stellung in der Präferenzrelation des Kollektivs. Manchmal genügt eine solche Reihung aber nicht, man wünscht mehr als eine einfache Reihung von Indifferenzklassen, man möchte auch eine gewisse *Gewichtung* in der „Kandidatenmenge“ erreichen. Es ist durchaus denkbar, dass beispielsweise bei drei Elementen „a“, „b“ und „c“, für die die Präferenzordnung $a\,P\,b\,P\,c$ gilt, „a“ *sehr viel* besser ist als „b“, „b“ hingegen nur *eher wenig* besser als „c“, fast indifferent, aber dennoch ein wenig besser. Hier kommt also eine *Quantifizierung* von Elementen dazu.

Benötigt wird eine solche Quantifizierung, die wir bisher nicht beachtet haben, beispielsweise bei Mandatszuteilungsverfahren, sofern Parteien in einem Entscheidungsgremium entsprechend ihrem Stimmenanteil bei einer Wahl Mandate erhalten sollen. Es kommt dann nicht bloß darauf an, wie das Kollektiv die einzelnen Parteien qualitativ „reiht", sondern auch quantitativ. Dieser quantitative Unterschied drückt sich in Mandats*zahlen* aus. Man könnte daher Wahlen zur Bestimmung von Mandaten als *quantitative Auswahlverfahren* bezeichnen. Das folgende Kapitel wird anhand praktischer Beispiele zeigen, dass auch bei solchen Mandatszuteilungsverfahren recht ähnliche Probleme auftreten, wie bei bloß qualitativen Auswahlregeln.

B Anwendungen und didaktische Konzeptionen

5 SITZZUTEILUNGSVERFAHREN

Vorbemerkung

Als erste Anwendung von Präferenzstrukturen in der Praxis werden in diesem Abschnitt Verfahren betrachtet, die der Ermittlung von Mandatszahlen dienen. Ausgehend von der Präferenz eines Kollektivs – in diesem Fall besteht das Kollektiv aus wahlberechtigten Personen, die unter mehreren Optionen, also Parteien auswählen – sollen diese Parteien je nach „Stärke" der Präferenz im Kollektiv mit einer bestimmten Anzahl von Sitzen in einem Gremium vertreten sein. (siehe Kapitel 4.4)

Mathematisch formuliert bedeutet dies, dass eine Präferenzrelation auf eine Menge von Parteien vorliegt, wobei die einzelnen Elemente der Präferenzrelation nach erhaltenen Stimmenanzahlen gewichtet sind. Bei großen Kollektiven wird sich dadurch im Allgemeinen eine Vollordnung ergeben. Die Frage ist dann, wie die erhaltenen Stimmenanteile der Parteien auf Mandatszahlen abzubilden sind. Auch hier gilt die Vorgabe, dass dies nach möglichst „gerechten" Auswahlkriterien geschehen soll. Im folgenden Abschnitt wird beschrieben, welche Möglichkeiten es für solche Verfahren gibt, wobei eine allzu „formale" Beschreibung der Algorithmen vermieden wird und im Hinblick auf eine didaktische Umsetzung eine eher allgemein verständliche, verbale Beschreibung versucht wird.

5.1 Das D'Hondt-Verfahren

Anmerkung: Alle in diesem Kapitel beschriebenen Sitzzuteilungsverfahren sind ausführlich in der Literatur sowie im Internet beschrieben, wo die Algorithmen zum Teil auch sehr anschaulich dargestellt sind. Eine gute Darstellung aus mathematisch-didaktischer Sicht bietet beispielsweise der Artikel „Sind Wahlen undemokratisch" des Mathematikers Bodo Pareigis (siehe [5]). Die Beschreibung der Verfahren hier in Kapitel 5 bezieht sich teilweise auf diesen Artikel.

In Kapitel 2.2 sind Beispiele für Auswahlregeln beschrieben worden, sowie deren Vor- und Nachteile. Häufig findet in einer Demokratie die Methode der „Nationalratswahl" Anwendung. Jedes Individuum kann entweder eine ungültige Stimme abgeben, oder aber aus einer Liste von

Parteien genau *eine* auswählen, welche dann allen anderen gegenüber strikt präferiert wird. Wir interessieren uns nun ausschließlich für *gültige Stimmen*. Im Folgenden bezeichnen wir die zur Auswahl stehenden Parteien mit Kleinbuchstaben. Wie oben erwähnt, liegt das Ergebnis einer Wahl dann (zumeist) in Form einer nach Stimmenzahlen geordneten Vollordnung auf der Menge {a,b,c,...} vor.

Die *quantitative* Präferenzstruktur des Kollektivs lässt sich bei einer Verhältniswahl oft auch besser in Kreis- oder Balkendiagrammen darstellen. (Wie diese gestaltet sind, soll hier nicht näher erläutert werden, derartige Diagramme sind aus Wahlberichterstattungen der Medien bekannt.) Im Folgenden wird es stets genügen, die absoluten beziehungsweise relativen Stimmenanteile von Parteien anzugeben.

<u>Beispiel:</u>
In einem Parlament seien 12 Sitze zu vergeben. Einem Kollektiv von 200 Personen stehen vier Parteien a, b, c und d zur Auswahl. Alle 200 Wahlberechtigten geben gültige Stimmen ab. Diese verteilen sich auf die Parteien wie folgt:

Partei	*a*	*b*	*c*	*d*
Stimmenanteil absolut (relativ)	85 (42,5%)	51 (25,5%)	42 (21%)	22 (11%)

Tab. 2

Nun ist ein Verfahren gesucht, dass dieses Ergebnis möglichst gut in der Sitzverteilung eines Parlaments abbildet. Ein erster Versuch könnte beispielsweise darin bestehen, den *Idealanspruch* zu bestimmen, also die Mandatszahl jeweils mit den relativen Stimmenanteilen zu multiplizieren. Im Beispiel bringt dies folgendes Ergebnis:

Partei	*a*	*b*	*c*	*d*
Idealanspruch an Sitzen	5,1	3,06	2,52	1,32

Tab. 3

Hier kommen wir aber nicht weiter, denn als Mandatszahlen von Parteien kommen nur ganze Zahlen infrage, schließlich müssen die Sitze mit einer ganzzahligen Anzahl an Abgeordneten besetzt werden. Eine Aussage wie „Partei b erhält 3,06 Sitze von 12 Sitzen“ ist daher Unsinn. Dass die Methode der Berechnung mithilfe des Idealanspruchs auf ganzzahlige Mandatszahlen führt, ist höchst unwahrscheinlich, insbesondere wenn die Zahl der Wahlberechtigten sehr groß wird. Also beschäftigen wir uns nun mit einem Verfahren, welches nur ganzzahlige Ergebnisse generiert.

Der belgische Jurist Victor D'Hondt (1841-1901) beschrieb im Jahre 1882 ein nach ihm benanntes Sitzzuteilungsverfahren, das *D'Hondt-Verfahren* (siehe [5]), welches heute noch sehr häufig zur Anwendung kommt. Dieses wird im Folgenden als so genanntes *Höchstzahlverfahren* beschrieben.

Die absoluten Stimmenanteile sämtlicher Parteien werden jeweils hintereinander durch Zahlen eine aufsteigende Folge von natürlichen Zahlen 1,2,...,n geteilt, wobei n höchstens so groß ist, wie die Anzahl der insgesamt zu vergebenen Sitze. Dabei erhält man als Quotienten Dezimalzahlen größer null, die als *Höchstzahlen* bezeichnet werden. Diese Höchstzahlen reiht man dann absteigend nach ihrer Größe, und an dieser Reihenfolge liest man auch die Reihenfolge der Sitzvergabe ab. Dabei finden so viele Höchstzahlen Berücksichtigung, wie Sitze im Gremium zu vergeben sind, und jede Partei bekommt so viele Sitze, wie viele Höchstzahlen auf sie entfallen.

Wir führen diesen Algorithmus am Beispiel der Wahl oben in Tabelle 2, mit $n \leq 12$ durch, Quotienten auf 2 Dezimalstellen gerundet.

Partei \ m	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
a	85	42,5	28,33	21,25	17	14,17	12,14
b	51	25,5	17	12,75	10,2	8,5	7,29
c	42	21	14	10,5	8,4	7	6
d	22	11	7,33	5,5	4,4	3,67	3,14

Tab. 4

Wenden wir die Regel des D'Hondt-Verfahrens wie oben beschrieben an, erhalten wir folgende Höchstzahlen: 85 (a), 51 (b). 42,5 (a), 42 (c), 28,33 (a), 25,5 (b), 22 (d), 21,25 (a), 21 (c), 17 (a), 17 (b), 14,17 (a). Zählt man zusammen, erhält man folgendes ganzzahliges Ergebnis:

Partei	*a*	*b*	*c*	*d*
Sitze nach D'Hondt	6	3	2	1

Tab. 5

Man erkennt leicht, dass schon bei diesem einfachen Beispiel die Zahl der nach D'Hondt vergebenen Sitze vom Idealanspruch recht deutlich abweichen kann. Die stärkste Partei „a“ erhält etwa 118% ihres Idealanspruchs an Sitzen, die schwächeren Parteien deutlich weniger, bei Partei „d“ etwa bloß 72%.

Wir sehen schon an diesem Beispiel: Das D'Hondt-Verfahren benachteiligt *systematisch* schwächere Parteien. Das lässt sich allgemein beweisen, der Beweis ist aber umfangreich und wird deshalb hier vorerst nicht angegeben. Ein Extrembeispiel zur Verdeutlichung sei aber angeführt:

<u>Beispiel</u>:
Wir modifizieren das obige Beispiel folgendermaßen: Es gebe, so wie oben, 200 Wahlberechtigte in einem Wahlkreis. Nunmehr seien aber 8 Sitze zu vergeben und neun Parteien treten an, von denen Partei „a“ 55% der Stimmen erreicht und die anderen acht Parteien zusammen 45%, wobei keine von diesen jeweils acht übrigen Parteien mehr als 6,5% erreicht. Es ist leicht nachzuprüfen (Aufgabe für die Schule!), dass in diesem Fall die starke Partei „a“ durch das D'Hondt-Verfahren *alle* (!) 8 Sitze erhält und das bei gerade einmal knapp über 50% Stimmenanteil.

Als *Quotenbedingung* (siehe [5], S.3) bezeichnet man die Forderung, dass ein Sitzzuteilungsverfahren für jede Partei eine Mandatszahl ergibt, die nicht kleiner oder größer ist als die Mandatszahl, die man erhält, wenn man die Quote, d.h. den Idealanspruch an Sitzen ab- bzw. aufrundet. Im erstgenannten Beispiel ist das zwar gerade noch der Fall, es würde aber schon genügen, das Beispiel leicht zu modifizieren, dass das Quotenkriterium nicht mehr erfüllt ist Im zweiten Beispiel ist dieses Kriterium sogar krass missachtet.

In Kapitel sieben wird gezeigt, dass das Höchstzahlverfahren von D'Hondt auch als so genanntes „Zweischrittverfahren“ oder „Divisorverfahren mit Abrundung“ zur Anwendung kommen kann, und dass diese Verfahren zu denselben Ergebnissen führen müssen. Die beiden äquivalenten Verfahren wird dann noch anschaulicher deutlich machen, *warum* kleine Parteien bei der Anwendung des D'Hondt-Verfahrens benachteiligt sind.

Die Verletzung des Quotenkriteriums ist also eine Tatsache, die sich beim D'Hondt-Verfahren nicht vermeiden lässt. Betrachtet man dieses Kriterium als unerlässlich, muss man ein alternatives Sitzzuteilungsverfahren anwenden.

5.2 Das Hare-Niemeyer-Verfahren

Beim Sitzzuteilungsverfahren nach D'Hondt haben wir gesehen, dass die Quotenbedingung häufig verletzt ist, und, dass große Parteien stark begünstigt werden. Möchte man diese Probleme bereinigen, muss man ein Verfahren suchen, dass sich bei der Sitzzuteilung neutral in Bezug auf die Größe der Stimmenzahlen für die einzelnen Parteien verhält.

Im ersten Beispiel aus Kapitel 5.1 sah die Stimmenverteilung auf die Parteien bei 200 abgegebenen gültigen Stimmen so aus:

Partei	*a*	*b*	*c*	*d*
Stimmenanteil absolut (relativ)	85 (42,5%)	51 (25,5%)	42 (21%)	22 (11%)

Tab. 6

Außerdem haben wir den Idealanspruch bei 12 Sitzen berechnet: „a“ erhält 5,1 Sitze, „b“ 3,06. „c“ bekommt 2,52 Sitze und „d“ 1,32. Beim D'Hondt-Verfahren bekommt „a“ 6 Sitze zugeteilt, was den Idealanspruch um 0,9 Sitze übersteigt, also damit fast einen ganzen Sitz „zu viel“ erhält. Im Folgenden bleiben wir bei dem Beispiel in Tabelle 6, und ausgehend davon, dass die Quotenbedingung *immer* erfüllt sein soll, konstruieren wir ein neues Sitzzuteilungsverfahren.

Der einfachste Weg hierfür besteht darin, dass man die Einhaltung der Quotenbedingung derart fordert, dass zunächst alle Parteien so viele Sitze erhalten, wie es ihrem *abgerundeten* Idealanspruch entspricht (Tabelle 7). Nun wurde allerdings ein Sitz zu wenig vergeben. Die Summe der vergebenen Sitze beträgt nur 11. Eine Partei muss also den verbliebenen Sitz erhalten. Welcher Partei soll man den übrigen Sitz zuteilen? Welche Regel wäre „gerecht“? Ein gutes Argument wäre, den Sitz an jene Partei zu vergeben, die in ihrem Idealanspruch der nächsthöheren Sitzzahl gewissermaßen *am nächsten* kommt. Im Beispiel wäre das die Partei „c“ mit ihrem Idealanspruch von 2,52 Sitzen.

Partei	*a*	*b*	*c*	*d*
Idealanspruch	5,1	3,06	2,52	1,32
Idealanspruch (abger.)	5	3	2	1

Tab. 7

Verallgemeinert man diese Regel, ergibt sich das im Jahre 1790 erstmals propagierte *Hare-Niemeyer-Verfahren:* Alle Parteien erhalten zunächst jene Anzahl an Sitzen, die ihrem *abgerundeten Idealanspruch* entspricht. Danach werden die restlichen zu vergebenen Mandate in der Reihenfolge der höchsten Nachkommareste des Idealanspruchs vergeben, wobei wir annehmen, dass es keine zwei Parteien mit denselben höchsten Nachkommastellen gibt, was weitere Überlegungen nach sich zieht.

Im Beispiel oben erhält Partei „c" den restlichen Sitz, damit ergibt sich folgende Sitzverteilung nach Hare-Niemeyer:

Partei	*a*	*b*	*c*	*d*
Sitze nach Hare-Niemeyer	5	3	3	1

Tab. 8

Offensichtlich ist damit das Quotenkriterium immer erfüllt, wie aus der Definition des Hare-Niemeyer-Verfahrens folgt. Interessanterweise haben wir mit diesem Verfahren auch, ohne es explizit zu fordern, das zweite Problem der Bevorzugung starker Parteien bereinigt. Denn die Restmandate werden nach der Größe der Nachkommareste verteilt, und diese sind von der Parteienstärke nicht abhängig, sondern verteilen sich anschaulich gewissermaßen „zufällig" auf die Parteien.

Hat man damit das „ideale", widerspruchsfreie Sitzzuteilungsverfahren gefunden? Die Antwort lautet auch hier: Nein. Bei der Anwendung des Hare-Niemeyer-Verfahrens können zahlreiche Paradoxa auftreten, von denen im Folgenden einige beschrieben werden.

<u>Beispiel:</u> (aus [5])

An fünf Parteien sollen 656 Sitze vergeben werden. Die Mandate der Parteien werden zweimal bestimmt: einmal als vorläufiges und dann als endgültiges Ergebnis (zum Beispiel inklusive in fremden Wahlkreisen abgegebener Wahlkarten, Berichtigung von falsch ausgezählten Stimmen):

Partei	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
Stimmen	17140354	16082960	3427196	3424315	3265407
Sitze	260	243	52	52	49

Tab. 9

Tabelle 9 zeigt das *vorläufige Endergebnis*. Das *endgültige Ergebnis* ist in Tabelle 10 gezeigt:

Partei	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
Stimmen	17166354	16106960	3452196	3452196	3260407
Sitze	259	243	52	52	50

Tab. 10

Aus den Tabellen ist ersichtlich, dass alle Parteien, bis auf Partei „e“ im endgültigen Ergebnis zugelegt haben. Partei „e“ hat deutlich an Stimmen verloren, aber dennoch erhält „e“ in der zweiten, endgültigen Auszählung ein Mandat von „a“. Dies wird als *Stimmenzuwachsparadoxon* bezeichnet. (In den meisten Demokratien bedeutet dies aber keine Probleme mehr, seitdem Mandatsverschiebungen durch Hochrechnungen den Wahlberechtigten geläufig sind.)

Beispiel:

Nicht ausschließlich bei der Variation von Stimmenanteilen treten Paradoxa auf. Ein ähnlicher Fall kann auftreten, wenn sich die Anzahl der Mandate ändert. Das bezeichnet man als *Mandatszuwachsparadoxon* oder auch *Alabama-Paradoxon* (siehe [5]).

Dieses Paradoxon hat seinen Namen von einem Fall aus dem Jahr 1880 in den USA (siehe [5], S.4). Durch eine Volkszählung wurde die Größe des Repräsentantenhauses ermittelt. Jeder Bundesstaat erhielt eine bestimmte Sitzanzahl, bestimmt nach dem Hare-Niemeyer-Verfahren. Hierbei sollte die Mandatszahl zwischen 275 und 350 liegen. Bei 299 Sitzen hätte der Staat Alabama acht Sitze erhalten, bei 300 Sitzen jedoch nur sieben.

Aus politischer Sicht ist die Verletzung von Monotoniegesetzen problematisch. Weder ein Zuwachs an Stimmen, noch eine Vergrößerung der Mandatszahl sollte zu einer Verringerung an Mandaten für eine bestimmte Partei führen. Es gibt noch andere Paradoxa, die das Hare-Niemeyer-Verfahren nicht ausschließen kann. Mit dem Mandatszuwachsparadoxon verletzt das Hare-Niemeyer-Verfahren die sog. *Hausmonotonie*, im Falle des Stimmenzuwachsparadoxons ist die *Stimmenmonotonie* nicht gegeben. Diese beiden Bedingungen gemeinsam kann man (ganz analog zur Forderung de Erfüllung der Arrow-Bedingung) zur Bedingung der *Konsistenz* eines Sitzzuteilungsverfahrens zusammenfassen.

Offensichtlich ist das Hare-Niemeyer-Verfahren nicht konsistent. Betrachtet man aber die Konsistenz für ein Verfahren als unerlässlich, müsste man beispielsweise wieder auf das D'Hondt-Verfahren zurückgreifen. Es ist leicht plausibel zu machen, dass das D'Hondt-Verfahren die Konsistenzbedingung erfüllt. (Aufgabe für die Schule!)

Das Problem der Bevorzugung großer Parteien beim D'Hondt'schen Algorithmus ist damit aber immer noch nicht gelöst. Möchte man ein in diesem Sinne „gerechtes“ Verfahren finden, muss man das D'Hondt-Verfahren also zwingend modifizieren.

5.3 Das Sainte-Laguë-Verfahren

Das Extrembeispiel in Kapitel 5.1 bei D'Hondt hat gezeigt, dass es sich nicht neutral zur Stimmenstärke der Parteien verhält. Wir bleiben beim eingangs angeführten Beispiel:

Partei	*a*	*b*	*c*	*d*
Stimmenanteil absolut (relativ)	85 (42,5%)	51 (25,5%)	42 (21%)	22 (11%)

Tab. 11

Das D'Hondt-Verfahren als Höchstzahlverfahren teilt die Stimmenanteile der Parteien nacheinander durch die Folge der natürlichen Zahlen. Dabei entsteht für jede Partei eine Folge von Höchstzahlen. Dies Folgen sind streng monoton fallend, allerdings fallen sie bei schwächeren Parteien im Vergleich zu ihrer Parteistärke viel mehr als bei starken Parteien. Das ist auch die Begründung für die Bevorzugung stärkerer Parteien bei D'Hondt. Mathematisch lässt sich das auch direkt beweisen, der Beweis wird aber erst später angeführt, beim Nachweis der Äquivalenz von Divisor- und Höchstzahlverfahren, in Kapitel 7.

Teilt man die Stimmen der Parteien nicht durch die Folge der natürlichen Zahlen, sondern durch die Folge der *ungeraden* natürlichen Zahlen, erhält man das Sainte-Laguë-Verfahren. Anschließend werden die Sitze wieder absteigend nach der Größe der erhaltenen Höchstzahlen verteilt.

Wie schon beim D'Hondt-Verfahren ist auch das Sainte-Laguë-Verfahren in mehreren äquivalenten Varianten möglich. Neben der Anwendung als Höchstzahlverfahren kommt auch hier ein Zweischrittverfahren beziehungsweise Divisorverfahren zur Anwendung (siehe Kapitel 7), im Falle des Sainte-Laguë-Verfahrens allerdings mit *Standardrundung* anstatt Abrundung.

Wir berechnen nun beim Beispiel aus Tabelle 11 die Höchstzahlen gemäß dem Sainte-Laguë-Verfahren.

Partei \ m	*1*	*3*	*5*	*7*	*9*	*11*	*13*
a	85	28,33	17	12,14	9,44	7,73	6,54
b	51	17	10,2	7,29	5,67	4,64	3,92
c	42	14	8,4	6	4,67	3,82	3,23
d	22	7,33	4,4	3,14	2,44	2	1,69

Tab. 12

Man sieht, dass die Höchstzahlen tatsächlich schneller klein werden als beim D'Hondt-Verfahren, und außerdem wird anschaulich klar, dass sich die Höchstzahlen auch schrittweise schneller zwischen starken und schwachen Parteien angleichen.

Wenden wir die Regel des Sainte-Laguë-Verfahrens bei unserem Beispiel an, ergibt sich bei 12 Sitzen folgende Sitzverteilung: 85 (a), 51 (b), 42 (c), 28,33 (a), 22 (d), 17 (a), 17 (b), 14 (c), 12,14 (a), 10,2 (b), 9,44 (a), 8,4 (c).

Das ganzzahlige Ergebnis zeigt folgende Tabelle 13: Tatsächlich ist die Bevorzugung der starken Partei „a“ nun ausgeglichen.

Partei	*a*	*b*	*c*	*d*
Sitze nach Sainte-Laguë	5	3	3	1

Tab. 13

Es lohnt sich (Aufgabe für die Schule!), Extrembeispiele wie das zweite Beispiel in Kapitel 5.1 auch mit dem Sainte-Laguë-Verfahren durchzurechnen. Dabei zeigt sich im Allgemeinen, dass es leichter ist für kleine Parteien, auch bei sehr ungleichen Parteistärken, zumindest einen Sitz zu erhalten, weil auch die Höchstzahlen der größten Partei rasch kleiner werden.

Paradoxa wie beim Hare-Niemeyer-Verfahren können beim Sainte-Laguë-Verfahren nicht auftreten, dieses Verfahren kann die Hausmonotonie sowie die Stimmenmonotonie nicht verletzen. Die grundsätzliche Schwierigkeit, dass der Idealanspruch in der Regel keine ganze Zahl ist, bleibt aber auch hier wirksam, die Bevorzugung einer oder mehrerer Parteien unvermeidbar. Der Vorteil des Sainte-Laguë-Verfahrens gegenüber dem D'Hondt-Verfahren ist aber, dass die Bevorzugung von Parteien für jede erdenkliche Wahl völlig zufällig ist und nicht immer tendenziell die stärkeren Parteien betrifft.

5.4 Der Satz von Balinksi und Young

Unter einer Mehrheitswahl versteht man ein Verfahren zur Auswahl eines Vorschlages aus einer Reite vorgegebener Alternativen durch die Mehrheit einer Gruppe von Personen, d.h. es ist ein Verfahren zur direkten Wahl von Vertreterinnen und Vertreter. Befasst man sich eingehend mit Mehrheitswahlen und entsprechenden Auswahlverfahren (siehe Kapitel 2 und 3), stellt man rasch fest, dass bei allen Methoden zur Auswahl gewisse Ungereimtheiten auftreten. Der Satz von Arrow zeigt, dass sich diese auch nie in allen Fällen verhindern lassen.

Auch die bisher in diesem Kapitel beschriebenen Methoden zur Sitzzuteilung bei einer Verhältniswahl generieren ähnliche Paradoxa. Das D'Hondt-Verfahren und das Sainte-Laguë-Verfahren verletzen gelegentlich das Quotenkriterium, das Hare-Niemeyer-Verfahren ist inkonsistent.

Sitzzuteilungsverfahren, welche die Quotenbedingung erfüllen, nennt man sinnvollerweise *Quotenverfahren*. Jene Verfahren, die sich als Höchstzahlverfahren durchführen lassen und damit konsistent sind, werden als *Divisorverfahren* bezeichnet. Es ist möglich, Höchstzahlverfahren noch weiter zu modifizieren, denn als Divisoren kommen verschiedenste Folgen von natürlichen Zahlen in Betracht. Dennoch stellt man fest, dass anscheinend keines der Divisorverfahren immer die Quotenbedingung erfüllt. Auch die Quotenverfahren lassen sich modifizieren, indem man die nach dem Abrunden übriggebliebenen Sitze nach den unterschiedlichsten Regeln auf die Parteien verteilt. Ein stets konsistentes Verfahren findet man dadurch aber anscheinend auch nicht. Diese Überlegungen legen eine dem Satz von Arrow sehr ähnliche Vermutung nahe.

Im Jahre 1982 publizierten die Mathematiker Peyton Young und Michel Balinski den nach ihnen benannten *Unmöglichkeitssatz: Demnach ist es nicht möglich, dass ein Sitzzuteilungsverfahren immer konsistent ist und die Quotenbedingung erfüllt, sofern die Anzahl der Parteien größer als 3 und die Anzahl der Wahlberechtigten größer als 6 ist.* (siehe [2])

Ganz analog zum Satz von Arrow lässt sich also sagen, dass es ein stets „gerechtes“ Sitzzuteilungsverfahren nicht geben kann. Allerdings ist es möglich, wie bereits gezeigt wurde, dass die Bevorzugung von Parteien *zufällig* geschieht, wie es beim Sainte-Laguë-Verfahren der Fall ist. In vielen europäischen Staaten findet derzeit dennoch das D'Hondt-Verfahren Anwendung. (siehe [9]) Wie wir zuvor schon gesehen haben, bevorzugt dieses Verfahren stimmenstarke Parteien. Es ist daher nicht weiter verwunderlich, dass die Anwendung des D'Hondt-Verfahrens immer noch recht häufig ist, denn eine Änderung des Wahlrechts muss in Demokratien von den stimmenstarken Parteien mitgetragen werden, die dann Mandatsverluste zu befürchten hätten.

In den europäischen Medien, von politischen Parteien etc. wird viel über Wahlrecht debattiert. Interessanterweise beschränken sich diese Diskussionen häufig auf die Frage, ob ein Mehrheitswahlrecht oder ein Verhältniswahlrecht zur Anwendung kommen soll. Debatten über die Sinnhaftigkeit des D'Hondt-Verfahrens finden derzeit (Stand: Juli 2014) kaum statt, mit Ausnahme der Bundesrepublik Deutschland, wo das D'Hondt-Verfahren und das Hare-Niemeyer-Verfahren bei bundesweiten Wahlen mittlerweile vom Bundesverfassungsgericht für verfassungswidrig erklärt wurden. Im Jahr 2009 hat Deutschland das Sainte-Laguë-Verfahren eingeführt. (siehe [9]) Eine interessante Frage ist hier immer, nachdem ein „gerechtes“ System nach Balinski und Young nicht existiert, welche Paradoxa die Rechtsprechung als gerade noch akzeptabel betrachtet.

6 ANWENDUNGEN IN DER VOLKSWIRTSCHAFTSLEHRE

Vorbemerkung

„Präferenzen“ und „Auswahlfunktionen“ sind Begriffe, die ursprünglich von der Volkswirtschaftslehre eingeführt wurden. Die Begrifflichkeiten führten zur „Entscheidungslogik“, welche im Grenzbereich zwischen Volkswirtschaftslehre und angewandter Mathematik angesiedelt ist. In dieser Diplomarbeit steht der mathematische beziehungsweise *algebraische* Aspekt klar im Vordergrund. In diesem Kapitel soll aber nun auch eine typische Anwendung in der Volkswirtschaftslehre aufgezeigt werden. Das Lehrbuch „Logik kollektiver Entscheidungen“ von Kern und Nida-Rümelin, auf das sich diese Arbeit teilweise im theoretischen Abschnitt bezieht, ist beispielsweise ein Standardlehrbuch der Volkswirtschaftslehre, obwohl die thematische Überschneidung mit Algebra unübersehbar ist.

Für die didaktische Konzeption von *Input-Output-Analysen*, die in diesem Kapitel im Vordergrund stehen, wird in der Schule der Begriff der *Vollordnung* benötigt, außerdem sollten Kenntnisse über einen Algorithmus zur Bestimmung aller Permutationen einer Menge vermittelt werden. Deshalb sind diese Aspekte ebenso in diesem Abschnitt angeführt.

6.1 Vollordnung

In Kapitel 4.3 wurde eine Vollordnung dadurch definiert, dass die Äquivalenzklassen der Indifferenzrelationen jeweils nur aus einem Element bestehen. Eine andere Möglichkeit wäre, falls Halbordnungen im Schulunterricht behandelt wurden, dass die Definition einer Vollordnung folgendermaßen lautet:

<u>Definition</u>: Eine *Vollordnung* ist eine Halbordnung, in der je zwei Elemente miteinander vergleichbar sind.

Wie bereits in Kapitel 1 beschrieben, kann man didaktisch auf die Einführung des Halbordnungsbegriffs auch verzichten, dann lautet eine mögliche Definition so:

Definition: Eine Menge H, deren Elemente durch $\leq$ („kleiner oder gleich") geordnet sind, so dass für alle $x, y \in H$ $x \leq y$ oder aber $y \leq x$ ist, heißt *Vollordnung* oder *Kette*.

Typische, aus der Schule bekannte Beispiele sind $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ allerdings können nicht mehr so wie $\mathbb{R}$ angeordnet werden.

Jede Vollordnung ist eine Halbordnung, somit kann man auch jede Vollordnung durch ein *Hasse-Diagramm* darstellen. Das Diagramm einer Vollordnung mit vier Elementen a, b, c und d, für das gilt, dass a das größte und d das kleinste Element ist, sieht beispielsweise so aus:

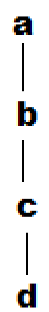


Abb. 10

Hier wird auch plausibel, warum eine Vollordnung auch als *Kette* bezeichnet wird. Sehr häufig wird in der Literatur auch die Bezeichnung *lineare* Ordnung verwendet. ([4], S.5) Beispiele von Vollordnungen finden sich bereits in Kapitel 2, wo wir individuelle Präferenzen als Vollordnung dreier Elemente modelliert haben.

Der Spezialfall, dass eine Präferenzordnung eine Vollordnung ist, spielt bei rein algebraischen Betrachtungen über Präferenzrelationen keine so große Rolle (eine Ausnahme hiervon ist das Beispiel der Notenvergabe in Kapitel 1). In der Volkswirtschaftslehre hingegen ist es aber oftmals wesentlich, dass für die Beurteilung von Situationen Vollordnungen vorliegen.

Das Wort „Präferenz" hat im alltäglichen Sprachgebrauch auch mehrere synonyme Bedeutungen. Statt „ist besser als" kann man die strikte Präferenzrelation auch als „steht höher als" oder Ähnliches lesen, im Sinne einer einfachen Rangordnung. Im Folgenden Kapitel über *Input-Output-Analysen* wird dies verdeutlicht.

6.2 Input-Output-Analyse

Anmerkung: Die Input-Output-Analyse ist eine klassische Disziplin in der Volkswirtschaftslehre. Es gibt etliche Standardlehrbücher zu diesem Thema. Der folgende Abschnitt bezieht sich teilweise auf das Buch „Input-Output-Analyse“ von H. Platt (siehe [6]), mit geänderten Bezeichnungen und für den Schulunterricht stark vereinfacht. Die Darstellung ist hier in dieser Diplomarbeit kurz, weil das nötige (volkswirtschaftliche) Hintergrundwissen in der entsprechenden Literatur nachgeschlagen werden kann.

Das wichtigste Modell zu Input-Output-Analysen in der Volkswirtschaftslehre wurde bereits im Jahre 1931 von dem russischen Wirtschaftswissenschaftler Wassily Leontief erstellt. ([6], S. 16) Dabei unterteilt man eine Volkswirtschaft in n Sektoren, zwischen denen Transaktionen stattfinden. Die Mengenflüsse aller Transaktionen misst man in Währungseinheiten für einen bestimmten Zeitraum.

Bezeichnet man die einzelnen Sektoren mit Zahlen von 1 bis n, so kann man eine entsprechende *Input-Output-Tabelle* aufstellen. Die einzelnen Einträge x_{ij} der Tabelle sind jene Mengen, welcher der Sektor i an den Sektor j liefert.

Beispiel:
Eine einfache Input-Output-Tabelle könnte für eine Volkswirtschaft mit drei Sektoren folgendermaßen aussehen (Einträge in Milliarden EUR, gerundet, angegeben):

i \ j	*1*	*2*	*3*
1	0	14	27
2	12	0	0
3	30	2	0

Tab. 14

Realistisch wären diese Zahlen beispielsweise dann, wenn Sektor „1“ private Unternehmungen darstellen, „2“ die öffentliche Hand und „3“ das Ausland. Binnenmärkte wie die Euro-Zone sind hier unberücksichtigt.

Leontief interessierte sich nun für die Hierarchie der einzelnen Sektoren in Form einer *Vollordnung*. Dabei sollte der Rückfluss von Gütern, die auf einer „höheren Stufe“ stehen, wie z.B.

Fertigprodukte, zu Gütern auf einer „niedrigeren Stufe“, z.B. Rohstoffe, möglichst gering sein, das heißt, in der Hierarchie weiter oben gereihte Sektoren sollten möglichst wenige Güter an weiter unten befindliche liefern, während im umgekehrten Fall der Güterfluss möglichst groß sein soll.

Eine mögliche mathematische Modellierung sieht so aus: Die Input-Output-Tabelle wird als Input-Output-Matrix[3] interpretiert. Gewünscht ist als Endergebnis eine Vollordnung der Sektoren von 1 bis n, wobei wir die Sektoren zunächst willkürlich so wählen, dass der Sektor 1 zuunterst und der Sektor n zuoberst steht. Im Falle einer Vollordnung ist dann die Gesamtmenge des Güterflusses von Sektor i zu j, wobei i kleiner als j sein soll, durch die Summe S aller Elemente oberhalb der Hauptdiagonale der Input-Output-Matrix (bzw. -Tabelle) gegeben. Beim Übergang zu einer anderen Vollordnung der Sektoren muss man in der Tabelle gleichzeitig die jeweiligen Zeilen und Spalten vertauschen. Gesucht ist als Ergebnis jene Vollordnung, bei der die Summe aller Elemente oberhalb der Hauptdiagonale maximal ist.

Kehren wir zum Beispiel in Tab. 14 zurück: Die Summe S aller Elemente oberhalb der Hauptdiagonale ist 41. Vertauschen wir die einzelnen Sektoren, beispielsweise die Sektoren 1 und 2 nach der oberen Vorschrift, entsteht folgende, neue Input-Output-Tabelle:

i \ j	*2*	*1*	*3*
2	0	12	0
1	14	0	27
3	2	30	0

Tab. 15

Berechnet man für diese Tabelle die Summe S, ergibt sich 39. Das ist kleiner als das Ergebnis in der Tabelle 14. Folglich kann die Reihung der Sektoren {2,1,3} wie in Tabelle 15 nicht die optimale Lösung sein. Um eine Lösung zu finden, muss man sechs Tabellen erstellen, denn mathematisch besteht das Problem darin, alle Permutationen der Menge {1,2,3} zu finden. Mehr dazu in Kapitel 6.3.

3 Trotz der Bezeichnung „Matrix“ wird in dieser Diplomarbeit die Darstellung als Tabelle beibehalten, weil nicht in allen Schulformen Matrizenrechnung auf dem Lehrplan steht. Abstrakt steht aber das Vertauschen von Zeilen und Spalten in Matrizen dahinter, was zumindest für die Lehrperson günstig zu wissen ist.

Im Folgenden sind die übrigen Input-Output-Tabellen für alle Permutationen dieser Menge angegeben:

i \ j	*3*	*1*	*2*
3	0	30	2
1	27	0	14
2	0	12	0

Tab. 16

i \ j	*1*	*3*	*2*
1	0	27	14
3	30	0	2
2	12	0	0

Tab. 17

i \ j	*2*	*3*	*1*
2	0	0	12
3	2	0	30
1	14	27	0

Tab. 18

i \ j	*3*	*2*	*1*
3	0	2	30
2	0	0	12
1	27	14	0

Tab. 19

Vergleicht man die S-Werte der einzelnen Tabellen, stellt man fest, dass S in Tabelle 16 mit einem Wert von 46 am größten ist. Damit ist die hierarchische Ordnung der Sektoren 2 < 1 < 3. Für den optimalen Fall haben wir eine Vollordnung erhalten, die in Abb. 11 dargestellt ist.

Da man für die Lösung des Problems gewissermaßen das rechte obere Teildreieck der Tabelle bzw. Matrix betrachtet, ist dieses Problem in der Volkswirtschaftslehre auch als *Triangulierungsproblem* von Input-Output-Matrizen bekannt.

Abb. 11

Die Lösung des Triangulierungsproblems muss nicht eindeutig sein, es kann mehrere Permutationen geben, die zur Lösung führen. Für großes n (in der Praxis wird n zwischen 50 und 100 angenommen) ist das Triangulierungsproblem jedenfalls kaum exakt zu lösen, denn die Anzahl aller Permutationen einer Menge mit n Elementen ist n!. Für kleine n gibt es die Möglichkeit, durch direkte Rechnung eine Tabelle zu triangulieren; allerdings trifft man schon bei $n \geq 4$ auf das Problem, alle Permutationen zu finden.

6.3 Algorithmus zur Bestimmung aller Permutationen einer Menge

Im Beispiel zum vorigen Kapitel waren drei Sektoren gegeben, die zu permutierende Menge beim Triangulierungsproblem bestand also aus drei Elementen. Wir verallgemeinern die Art und Weise, wie wir alle 6 Permutationen aufgestellt haben, auf n Elemente. Gegeben sei die Menge $\{1, \ldots, n\}$. Wenden wir auf $\{1, \ldots, n\}$ eine Permutation π an, so sei das Ergebnis das geordnete n-Tupel $[\pi(1),\pi(2),\ldots, \pi(n)]$.

Ausgehend von einer vorhergehenden Permutation $[\pi(1),\pi(2),\ldots, \pi(n)]$ ist der Nachfolger dieser Permutation π bezüglich der *lexikographischen Ordnung* gesucht. Für den Schulunterricht ist dieser Begriff auch anschaulich zu erklären: Die Elemente sind unter dieser Ordnung analog zur Ordnung in einem Lexikon angeordnet.

Definition: Die *lexikographische Ordnung* $\leq_{lex}$ ist eine partielle Ordnung, wobei $x \leq_{lex} y$ genau dann gilt, wenn $x=y$ (also $x_i=y_i$ für alle i) oder wenn $x_k<y_k$ für den kleinsten Index k mit $x_k \neq y_k$ ist.

Der Nachfolger von [$\pi(1),\pi(2),\ldots, \pi(n)$] bezüglich der lexikographischen Ordnung kann wie folgt erhalten werden:

1. Man bestimmt denjenigen Index i, für den diese zwei Bedingungen gelten: $\pi(i) < \pi(i+1)$ und außerdem $\pi(i+1) > \pi(i+2) > \ldots > \pi(n)$.
2. Unter den Elementen $\pi(i+1), \ldots, \pi(n)$ sucht man das zuletzt stehende Element, welches > $\pi(i)$ ist und vertauscht es mit $\pi(i)$. Dies ergibt eine neue Liste π'.
3. In der neuen Liste π' kehrt man die Ordnung der Elemente $\pi'(i+1), \ldots, \pi'(n)$ um.

<u>Beispiel:</u>

Gegeben ist die folgende Permutation: [6,3,2,5,4,1].

Wir führen Schritt 1. durch: $\pi(i)=3$.

Das letzte Element, das größer als dieses ist, ist 4. Wir vertauschen diese Elemente: [6,4,2,5,3,1].

Die Umordnung der Elemente gemäß 3. ergibt [6,4,1,3,5,2].

Der Nachfolger von [6,3,2,5,4,1] nach der lexikographischen Ordnung ist also [6,4,1,3,5,2].

Den Nachfolger von [6,4,1,3,5,2] wird nach dem gleichen Schema bestimmt:

Schritt 1. ergibt für $\pi(i)=1$.

Vertauschung mit dem letzten Element, das größer als dieses ist, führt auf die neue Liste [6,4,2,3,5,1].

Umordnung nach Schritt 3. liefert das Ergebnis: [6,4,2,1,5,3].

Analog sind die weiteren Nachfolger zu bestimmen, bis man wieder bei der ursprünglichen Permutation angelangt ist.

Es ist möglich, mathematisch zu beweisen, dass dieser Algorithmus *alle* Permutationen einer Menge n liefert. Für den Schulunterricht erscheint es nicht notwendig, diesen Beweis zu führen, wichtig ist, den Algorithmus nachvollziehen zu können. Eventuell ist es auch sinnvoll, bei entsprechenden Vorkenntnissen, diesen Algorithmus zu programmieren, weil dadurch anschaulich gezeigt werden kann, dass für wachsende n die Anzahl der Permutationen und damit die Anzahl der Rechenschritte sehr schnell wächst.

Zu Übungszwecken lässt sich der Algorithmus mit einfachen Beispielen, bei einer geringen Anzahl an Permutationen, sehr gut nachvollziehen, beispielsweise im Beispiel zu Kap. 6.2 mit drei Elementen.

7 DIVISORVERFAHREN

Vorbemerkung

Im Abschnitt über Sitzzuteilungsverfahren wurden die Grundzüge zweier Divisorverfahren zur Mandatsermittlung bei einer Verhältniswahl bereits vorgestellt. Offen geblieben ist die Frage, warum das D'Hondt-Verfahren starke Parteien systematisch bevorzugt.

In diesem Kapitel, das an Kapitel 5 anschließt und die Inhalte über das D'Hondt-Verfahren voraussetzt, wird dieser Beweis nachgeliefert. Die Kenntnis des Beweises ist aber zum grundsätzlichen Verständnis der einzelnen vorgestellten Verfahren nicht notwendig. Ebenso benötigt man die Inhalte aus den Kapiteln 5.2 und 5.3 für den Beweis nicht unbedingt. Den Divisorverfahren ist hier noch einmal ein eigenes Kapitel gewidmet, unter anderem deshalb, weil das Zweischrittverfahren etwas anspruchsvollere Mathematik benötigt.

7.1 Zweischrittverfahren

Beispiel:
Wir bleiben im Folgenden bei dem schon in Kapitel 5 eingeführten Beispiel einer Verhältniswahl. Es sind insgesamt 12 Sitze auf vier antretende Parteien zu vergeben, bei 200 abgegebenen gültigen Stimmen, die sich auf die Parteien wie folgt verteilen:

Partei	*a*	*b*	*c*	*d*
Stimmenanteil absolut (relativ)	85 (42,5%)	51 (25,5%)	42 (21%)	22 (11%)

Tab. 20

Das D'Hondt-Verfahren lieferte, durchgeführt als Höchstzahlverfahren, als Ergebnis die Sitzverteilung in Tab. 21. Es ist dabei aufgefallen, dass die Anzahl der Sitze der stimmenstärksten Partei deutlich höher ist, als der ihr zustehende Idealanspruch. Die Vermutung bestand, dass dies systematisch geschieht (vgl. dazu das in Kapitel 5.1 angegebene Extrembeispiel).

Partei	*a*	*b*	*c*	*d*
Sitze nach D'Hondt	6	3	2	1

Tab. 21

Man kann das D'Hondt-Verfahren, wie alle Divisorverfahren, auch als so genanntes *Zweischrittverfahren* durchführen. Dass dieses immer dasselbe Ergebnis liefert, wie das zugehörige Höchstzahlverfahren, wird in Kapitel 7.2 bewiesen und näher erläutert.

Am eben genannten Beispiel wird an dieser Stelle die Funktionsweise des Zweischrittverfahrens bei D'Hondt erklärt. Man sucht einen *geeigneten Divisor,* teilt die absoluten Stimmenanteile jeweils durch diesen Divisor, *rundet die jeweiligen Ergebnisse ab* und überprüft, ob die Summe der Sitze insgesamt die Sitzanzahl der zu vergebenden Sitze ergibt. Andernfalls variiert man den Divisor, und überprüft wieder auf die selbe Weise.

Wie kann man einen geeigneten Divisor finden? In Kapitel 5 wurde bereits beschrieben, was unter dem *Idealanspruch* von Sitzen zu verstehen ist. Der Idealanspruch im konkreten Beispiel ist hier noch einmal angegeben.

Partei	*a*	*b*	*c*	*d*
Idealanspruch an Sitzen	5,1	3,06	2,52	1,32

Tab. 21

Der Divisor, welcher für jede Partei genau zum Idealanspruch an Sitzen führt, muss immer das Verhältnis der insgesamt abgegebenen Stimmen zur Gesamtsitzanzahl sein. (Beweis: Aufgabe für die Schule!) Im konkreten Fall beträgt er 16,67 (gerundet). Bei der Abrundung gemäß D'Hondt aller Idealansprüche an Sitzen ergäbe sich eine Gesamtsitzanzahl von elf (5+3+2+1). Das ist aber zu wenig. Um die richtige Sitzanzahl zu erhalten, muss man die Stimmenanzahl also durch einen anderen Divisor, in diesem konkreten Fall einen *kleineren* Divisor teilen (Aufgabe für die Schule: warum?).

Es ist naheliegend, als nächsten Divisor die nächstkleineren, ganzen Zahlen zu probieren.

Partei	*a*	*b*	*c*	*d*
Anspruch bei Divisor 16,67	5,1	3,06	2,52	1,32
Anspruch bei Divisor 16	5,31	3,19	2,63	1,38
Anspruch bei Divisor 15	5,67	3,4	2,8	1,47
Anspruch bei Divisor 14	6,07	3,64	3	1,57

Tab. 22

Bei Divisor 15 ist die Sitzanzahl zu klein, bei Divisor 14 dagegen zu groß. Also muss ein Divisor zwischen 14 und 15 gewählt werden:

Partei	*a*	*b*	*c*	*d*
Anspruch bei Divisor 14,1	6,03	3,62	2,98	1,56

Tab. 23

Damit ist ein „richtiger“ Divisor gewählt, denn bei Abrundung der jeweiligen Ansprüche auf ganze Zahlen ergibt sich genau als Summe die Gesamtsitzanzahl 12. Die Bevorzugung großer Parteien sieht man an diesem Ergebnis besonders gut. Schrittweise wird der Divisor verkleinert, bis nach Abrundung eine der Parteien gewissermaßen die nächste „Mandatshürde“ genommen hat. Das gelingt aber am ehesten der stärksten Partei, weil deren Idealanspruch mit wachsendem Divisor am schnellsten wächst, während der hohe Nachkommaanteil derjenigen Partei, der (bei größerer Sitzanzahl) der nächste Sitz zustünde, durch die Abrundung irrelevant wird. Die Mandatshürden sind durch die Abrundung für kleine Parteien besonders groß. Dies erklärt die Bevorzugung großer Parteien bei D'Hondt.

7.2 Äquivalenz von Höchstzahl- und Zweischrittverfahren

Es ist kein Zufall, dass der passende Divisor 14,1 im Beispiel zu Kapitel 7.1 nur ein wenig kleiner als die letzte Höchstzahl ist, die nach dem Höchstzahlverfahren zum letzten Mandat geführt hat (siehe Kapitel 5.1). Diese „letzte“ Höchstzahl ist auch der größtmögliche Divisor, der zum richtigen Ergebnis führen kann, weil er gewissermaßen die Kennzahl dafür ist, wie viele Stimmen ein Mandat „kostet“. Im Folgenden wird nun exemplarisch gezeigt, dass für das D'Hondt-Verfahren das Höchstzahl- und das Zweischrittverfahren zwangsläufig auf das gleiche Ergebnis führen müssen.

In Kapitel 5.1 wurde das D'Hondt-Verfahren als Höchstzahlverfahren durchgeführt. Davon ausgehend, kann man zeigen, dass die Folge der Höchstzahlen genau die selbe Sitzzuteilungsvorschrift angibt, die beim Zweischrittverfahren durch schrittweises „Vergrößern“ des Gremiums (siehe Kapitel 7.1) entsteht, womit auch die Äquivalenz der Verfahren bewiesen ist.

Allgemein seien mittels Höchstzahlverfahren nach D'Hondt eine bestimmte Anzahl an Sitzen an eine nicht näher bestimmte Anzahl von Parteien, absteigend nach Größe der Stimmenanteile geordnet (a,b,c,...) mit den Stimmenanteilen (m_a, m_b, m_c, ...) zugeteilt worden. Das geschieht, wie bereits beschrieben, dadurch, dass die Höchstzahlen der Größe nach absteigend gereiht werden und die Sitze entsprechend zugeteilt werden.

Partei\Divisor n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	...
a	m_a	$m_a/2$	$m_a/3$	$m_a/4$	$m_a/5$	$m_a/6$	...
b	m_b	$m_b/2$	$m_b/3$	$m_b/4$	$m_b/5$	$m_b/6$	...
c	m_c	$m_c/2$	$m_c/3$	$m_c/4$	$m_c/5$	$m_c/6$	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Tab. 24

Ist zunächst nur ein einziger Sitz zu besetzen, erhält ihn nach dem D'Hondt-Höchstzahlverfahren die stärkste Partei a, denn offensichtlich muss m_a in der Tabelle die größte vorkommende Höchstzahl sein. Der zweite Sitz geht an die Partei, in deren Zeile die nächstkleinere Höchstzahl steht, und so weiter.

Man betrachte nun das Zweischrittverfahren wie in Kapitel 7.1 (siehe dort) beschrieben und wähle zunächst einen Divisor, der *größer* als m_a ist. Dann erhält keine einzige Partei einen Sitz, weil alle Quotienten kleiner 1 sein müssen, und durch die Abrundungsregel kann demnach keine Partei einen Sitz erhalten. Der erste Sitz nach dem Zweischrittverfahren wird erst zugeteilt, wenn durch kontinuierliche Verkleinerung des Divisors für eine Partei „die Mandatshürde übersprungen wird“, also der *Quotient genau 1 beträgt.* Das ist genau dann der Fall, wenn der Divisor m_a ist. Dann ist ein passender Divisor für das Zweischrittverfahren gefunden, wenn nur ein Sitz zuzuteilen ist, und dieser geht ebenso an die stärkste Partei a, denn dieser wird dann genau der Quotient 1 zugeordnet, alle anderen, kleineren Quotienten verfallen durch Abrundung.

Nun argumentiert man induktiv: Angenommen, man habe r Sitze nach dem Höchstzahlverfahren verteilt und auch das Zweischrittverfahren habe bis zu diesen r Sitzen (mit der letzten Höchstzahl, die zu einem Sitz geführt hat, als Divisor) die gleiche Verteilung ergeben. Der nächste Sitz geht dann nach dem Höchstzahlverfahren an die Partei, in deren Zeile in Tab. 24 die nächstkleinere Höchstzahl steht. Zur Ermittlung des nächsten Sitzes nach dem Zweischrittverfahren verkleinert man den Divisor ausgehend von der letzten Höchstzahl, bis eine Partei die nächste Mandatshürde übersprungen hat. Die nächste Mandatshürde (ganze Zahl) wird bei Verkleinerung des Divisors genau dann erreicht, wenn der Divisor gleich der nächstkleineren Höchstzahl ist. Denn nur bei Division durch eine Höchstzahl können (und müssen!) die Quotienten ganzzahlig sein, wie in Tab. 24 ersichtlich. Alle möglichen ganzzahligen Quotienten des Zweischrittverfahrens sind in der Tabelle bereits enthalten, sie entsprechen den Divisoren des Höchstzahlverfahrens.

Sollten auf zwei oder mehrere Parteien der jeweils gleiche Stimmenanteil entfallen, muss in beiden Fällen gelegentlich das Los entscheiden, welche Partei einen bestimmten Sitz zuerst erhält.

Damit ist gezeigt, dass die Sitze in beiden Fällen absteigend in der Reihenfolge der Höchstzahlen verteilt werden. *Höchstzahl- und Zweischrittverfahren bei D'Hondt generieren stets die gleiche Sitzverteilung.*

Aufgabe für die Schule: Man argumentiere analog, dass das Sainte-Laguë-Verfahren ebenso als Zweischrittverfahren durchgeführt werden kann, wenn die Quotienten der *Standardrundung* unterworfen werden. Hinweis hierzu: Als Divisorfolge beim Höchstzahlverfahren kann auch die Folge [1/2, 3/2, 5/2, 7/2, …] verwendet werden.

8 DIDAKTISCHE UNTERRICHTSKONZEPTE UND BEISPIELE

Vorbemerkung

Im letzten Teil dieser Arbeit folgen nun drei konkrete Anwendungsaufgaben, die einerseits (gemeinsam mit dem entsprechenden theoretischen Hintergrund aus den Kapiteln 1-7) als didaktisch konzipierte Einführung in das Stoffgebiet im Schulunterricht dienen können, andererseits auch der fachlichen Vertiefung. Der Schwerpunkt in diesem Abschnitt liegt noch mehr auf der Praxis und den Anwendungen als in den Kapiteln zuvor, im Gegensatz zu den *konstruierten* Aufgaben bisher sind alternativ nun *praktische* Beispiele aus der Politik und anderen alltäglichen Anwendungen für den Unterricht angegeben.

Das erste Beispiel ist eine konkrete Anwendungsaufgabe aus der Praxis zu Verhältniswahlen, die zweite Aufgabe befasst sich mit Präferenzermittlung in der wirtschaftlichen Praxis und das letzte Beispiel zeigt eine Anwendung für kollektive Auswahlregeln und Arrow's Impossibility Theorem.

8.1 Wahlen zum Europäischen Parlament

Am 25. Mai 2014 fand in Österreich die Wahl der österreichischen Abgeordneten zum Europäischen Parlament statt. Es standen neun Parteien bundesweit in einem einzigen Wahlkreis zur Wahl. Insgesamt wurden 2823561 gültige Stimmen abgegeben. Diese Stimmen verteilten sich auf die Parteien wie in Tabelle 25 angegeben (Quelle: siehe [11]).

18 Mandate waren zu verteilen. Nachdem es nur einen einzigen Wahlkreis, nämlich das gesamte Bundesgebiet gab, gab es auch nur ein einziges Ermittlungsverfahren. Die Mandate wurden auf die Parteien nach dem D'Hondt-Verfahren verteilt, allerdings galt eine *Sperrklausel* von 4% der Stimmen, also wurden jene Parteien, die weniger als 4% Stimmenanteil erreichten, bei der Sitzzuteilung nicht berücksichtigt. Im Übrigen war die Vergabe einer Vorzugsstimme möglich, was für die *Anzahl* der erreichten Mandate für eine Partei aber irrelevant ist.

Die Sitzverteilung, die das Bundesministerium für Inneres nach der Auszählung aller Stimmen bekanntgab, ist in Tabelle 26 angegeben.

Parteiname	*Bezeichnung*	*Stimmenanteil*
Österreichische Volkspartei – Liste Othmar Karas	ÖVP	761896 (27,0%)
Sozialdemokratische Partei Österreichs	SPÖ	680180 (24,1%)
Freiheitliche Partei Österreichs (FPÖ) – Die Freiheitlichen	FPÖ	556835 (19,7%)
Die Grünen – Die Grüne Alternative	GRÜNE	410089 (14,5%)
BZÖ – Liste Mag. Werthmann	BZÖ	13208 (0,5%)
NEOS Das neue Österreich und Liberales Forum	NEOS	229781 (8,1%)
Die Reformkonservativen – Liste Ewald Stadler	REKOS	33224 (1,2%)
Europa anders – KPÖ, Piratenpartei, Wandel und Unabhängige	ANDERS	60451 (2,1%)
EU-Austritt, Direkte Demokratie, Neutralität (EU-Stop)	EUSTOP	77897 (2,8%)

Tab. 25

Partei	*ÖVP*	*SPÖ*	*FPÖ*	*GRÜNE*	*NEOS*
Mandate	5	5	4	3	1

Tab. 26

Aufgaben:

- Überprüfe, ob das Innenministerium die Mandate nach D'Hondt korrekt vergeben hat (unter Beachtung der Sperrklausel).
- Berechne die Sitzverteilung außerdem mittels Hare-Niemeyer-Verfahren beziehungsweise Sainte-Laguë-Verfahren (jeweils ebenfalls mit 4%-Sperrklausel), vergleiche und diskutiere die Ergebnisse.

Musterlösung:

Zur Lösung der ersten Aufgabe benötigen wir die Kenntnisse über das D'Hondt-Verfahren aus Kapitel 5. Wir führen das Verfahren hier als Höchstzahlverfahren durch. Zu beachten bei der Verteilung der Mandate nach D'Hondt ist, dass jene Parteien unberücksichtigt bleiben müssen, welche einen Stimmenanteil von unter 4% aufweisen. Nach Tabelle 25 sind das EUSTOP, ANDERS, REKOS und BZÖ. Die übrigen Parteien sind berücksichtigt. Wie schon in Kapitel 5 angegeben, werden die Stimmenanteile der Parteien nacheinander durch die natürlichen Zahlen dividiert (in diesem Fall auf ganze Zahlen gerundet):

Partei\Divisor	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
ÖVP	761896	380948	253965	190474	152379	126983
SPÖ	680180	340090	226727	170045	136036	113363
FPÖ	556835	278418	185612	139209	111367	92806
GRÜNE	410089	205045	136696	102522	82018	68348
NEOS	229781	114891	76594	57445	45956	38297

Tab. 27

Die Mandatsvergabe nach der absteigenden Reihenfolge der Höchstzahlen aus Tabelle 27 lautet so: 1. ÖVP, 2. SPÖ, 3. FPÖ, 4. GRÜNE, 5. ÖVP, 6. SPÖ, 7. FPÖ, 8. ÖVP, 9. NEOS, 10. SPÖ, 11. GRÜNE, 12. ÖVP, 13. FPÖ, 14. SPÖ, 15. ÖVP, 16. FPÖ, 17. GRÜNE, 18. SPÖ. Damit ergebt sich tatsächlich die Sitzverteilung aus Tabelle 26, nämlich ÖVP 5, SPÖ 5, FPÖ 4, GRÜNE 3, NEOS 1. Das Innenministerium hat die Berechnung also korrekt durchgeführt.

Um die zweite Aufgabe zu lösen, führen wir zunächst das *Hare-Niemeyer-Verfahren* unter Beachtung der Sperrklausel durch. Dazu wird wie in Kapitel 5 der Idealanspruch an Sitzen für die Parteien berechnet (gerundet auf 3 Nachkommastellen), wobei die Gesamtstimmenzahl um die Anzahl der Stimmen der Parteien vermindert ist, welche die 4%-Hürde nicht erreicht haben:

Partei	*ÖVP*	*SPÖ*	*FPÖ*	*GRÜNE*	*NEOS*
Anspruch	5,197	4,640	3,798	2,797	1,567

Tab. 28

Der Idealanspruch aller Parteien wird zunächst abgerundet: ÖVP 5, SPÖ 4, FPÖ 3, GRÜNE 2, NEOS 1. Insgesamt sind das 14 Sitze, also müssen noch 3 Sitze in der Reihenfolge der höchsten Nachkommaanteile vergeben werden, in diesem Fall sind das Sitze an FPÖ, GRÜNE und SPÖ. Insgesamt ergibt sich nach Hare-Niemeyer folgende Sitzverteilung:

Partei	*ÖVP*	*SPÖ*	*FPÖ*	*GRÜNE*	*NEOS*
Mandate	5	5	4	3	1

Tab. 29

Nun berechnen wir die Verteilung auch noch nach *Sainte-Laguë*. Dazu werden die Stimmenanteile wie in Kapitel 5 schrittweise durch die ungeraden natürlichen Zahlen dividiert und gerundet:

Partei\Divisor	*1*	*3*	*5*	*7*	*9*	*11*
ÖVP	761896	253965	152379	108842	84655	69263
SPÖ	680180	226727	136036	97169	75576	61835
FPÖ	556835	185612	111367	79548	61871	50621
GRÜNE	410089	136696	82018	58584	45565	37281
NEOS	229781	76594	45956	32826	25531	20889

Tab. 30

Die Mandate werden absteigend nach Größe der Höchstzahlen vergeben: 1. ÖVP, 2. SPÖ, 3. FPÖ, 4. GRÜNE, 5. ÖVP, 6. NEOS, 7. SPÖ, 8. FPÖ, 9. ÖVP, 10. GRÜNE, 11. SPÖ, 12. FPÖ, 13. ÖVP, 14. SPÖ, 15. ÖVP 16. GRÜNE, 17. FPÖ, 18. NEOS. Damit ergibt sich nach Sainte-Laguë diese Sitzverteilung:

Partei	*ÖVP*	*SPÖ*	*FPÖ*	*GRÜNE*	*NEOS*
Mandate	5	4	4	3	2

Tab. 31

In Tabelle 32 sind die Ergebnisse nochmals vergleichend zusammengefasst:

Verfahren\Partei	*ÖVP*	*SPÖ*	*FPÖ*	*GRÜNE*	*NEOS*
D'Hondt	5	5	4	3	1
Hare-Niemeyer	5	5	4	3	1
Sainte-Laguë	5	4	4	3	2

Tab. 32

Man sieht also, dass bei Anwendung des Sainte-Laguë-Verfahrens NEOS einen Sitz mehr und SPÖ einen weniger als bei D'Hondt erhalten hätte. Bei Anwendung des Hare-Niemeyer-Verfahrens ergäbe sich bei diesem Wahlausgang hingegen kein Unterschied zum D'Hondt-Verfahren.

8.2 Experimente zur Präferenzermittlung

Beispiel 1 (siehe [7])

An einer deutschen Universität werden 37 Studierende beauftragt, zehn Werbungen für Cognac-Hersteller (bezeichnet mit a bis j) paarweise miteinander zu vergleichen und zu entscheiden, welche Werbung sie als jeweils ansprechender empfinden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 33 dargestellt:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
a	-	16	11	15	7	11	17	12	11	8
b	21	-	14	15	9	14	21	13	10	8
c	26	23	-	26	12	26	26	24	22	20
d	22	22	11	-	13	20	21	13	16	12
e	30	28	25	24	-	27	28	25	24	20
f	26	23	10	17	10	-	21	15	15	12
g	20	16	11	16	9	16	-	11	15	11
h	25	24	13	24	12	22	26	-	20	15
i	26	27	15	21	13	22	22	17	-	16
j	29	29	17	25	17	25	26	22	21	-

Tab. 33

Die Tabelle ist folgendermaßen zu lesen: Eine Zahl steht für die Anzahl der Studierenden, welche der Werbung des Herstellers in der Zeile derjenigen in der Spalte den Vorzug geben.

Aufgaben:

- Auf welche Weise könnte man feststellen, welche Werbung insgesamt allen anderen gegenüber am besten bewertet wird? Welcher Hersteller hat nach dieser Methode die beste Werbung?
- Interpretiere die Ergebnisse.

Musterlösung:

Ein geeignetes Lösungsverfahren besteht darin, eine Vollordnung aller Hersteller zu finden. In dieser Vollordnung soll der beste Hersteller jener sein, den die Studierenden als Kollektiv allen anderen gegenüber bevorzugen. Eine solche Vollordnung liegt dann vor, wenn die Tabelle beziehungsweise die zugehörige Matrix trianguliert ist. Durch die hohe Anzahl an Zeilen und Spalten existieren insgesamt 10! verschiedene Permutationen und damit auch 10! mögliche Vollordnungen als Lösung. Mit einem entsprechenden Programm kann man diese Permutationen durchführen und sie nach der Größe der Summe aller Elemente oberhalb der Hauptdiagonale ordnen.

Bemerkung: Falls kein entsprechendes Programm zur Verfügung steht, ist es auch zielführend, das Ergebnis in Form der triangulierten Tabelle anzugeben und sich lediglich mit der Interpretation zu befassen beziehungsweise durch Probieren einiger anderer Möglichkeiten die Lösung plausibel zu machen. Vom Standpunkt der Mathematikdidaktik kommt es ohnehin mehr auf die Interpretation des Ergebnisses als auf den Algorithmus selbst an.

Es ergibt sich als Lösung die Reihenfolge [e,c,j,h,i,d,f,b,g,a]. Ordnet man die Zeilen und Spalten in dieser Reihenfolge an, ist die Tabelle trianguliert und die Summe oberhalb der Hauptdiagonale maximal. Daher kommt als beste Werbung diejenige des Herstellers „e“ infrage.

<u>*Beispiel 2*</u> (siehe [7])

Im folgenden Experiment wurden sechs Personen beauftragt, zehn Sorten von Bier, bezeichnet mit griechischen Buchstaben (α bis κ) paarweise zu vergleichen. Sie wussten zum Zeitpunkt des Tests nicht, um welche Sorten es sich handelte. Anschließend gaben alle sechs Personen ihre individuellen Präferenzen bekannt:

	α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ
α	-	2	2	3	3	5	5	5	4	4
β	4	-	3	3	4	3	2	3	2	2
γ	4	3	-	3	5	4	3	2	4	4
δ	3	3	3	-	5	6	3	4	4	3
ε	3	2	1	1	-	1	4	4	5	3
ζ	1	3	2	0	5	-	5	4	1	4
η	1	4	3	3	2	1	-	2	1	3
θ	1	3	4	2	2	2	4	-	4	2
ι	2	4	2	2	1	5	5	2	-	4
κ	2	4	2	3	3	2	3	4	2	-

Tab. 34

Auch in diesem Fall bedeutet eine Zahl in der Tabelle jene Anzahl von Personen, die der Biersorte in der Zeile derjenigen Sorte in der Spalte den Vorzug gaben.

Aufgaben:

- Es ist eine triangulierte Tabelle anzugeben um herauszufinden, welche Biersorte von den sechs Personen als die beste empfunden wird.
- Interpretation des Ergebnisses.

Musterlösung:

Unternimmt man hier mithilfe eines Programmes analog zu Beispiel 1 den Versuch der Triangulierung, stellt man fest, dass die Lösung des Problems nicht eindeutig ist. Es existieren insgesamt 29 verschiedene triangulierte Tabellen, deren Summe der Elemente oberhalb der Hauptdiagonale maximal ist. Diese hohe Anzahl an Lösungen liegt unter anderem daran, dass die Einträge in der Tabelle recht klein sind und häufig ein „Gleichstand“ von 3:3 erzielt wurde, wie an Tabelle 34 ersichtlich ist.

Zwei mögliche Lösungen sind beispielsweise [γ,α,δ,ι,ζ,κ,ε,θ,η,β] sowie [δ,γ,ε,α,ι,ζ,κ,θ,η,β]. Nach diesen Lösungen wären also die Biersorten „γ“ beziehungsweise „δ“ die besten.

Nachdem es in diesem Fall mehrere Vollordnungen gibt, die zur Lösung führen, ist die Angabe einer eindeutigen, „besten“ Biersorte nicht möglich. Falls man dennoch ein eindeutiges Ergebnis wünscht, wäre ein möglicher Ansatz die Wiederholung dieses Versuchs mit einer größeren Anzahl an Personen.

8.3 Abstimmung im Deutschen Bundestag

Am 5. April 1974 fand im Deutschen Bundestag eine Abstimmung über eine Reform des § 218 des bundesdeutschen Strafgesetzbuches statt. Inhalt dieser Abstimmung war die strafrechtliche Bewertung des Schwangerschaftsabbruchs (siehe [8]).

Insgesamt standen den 492 Abgeordneten fünf Optionen zur Auswahl. Als gültiger Wahlmodus wurde vorab folgender vereinbart: Alle Abgeordneten mussten bekanntgeben, welche Option sie allen anderen gegenüber bevorzugen. Danach wurde über die meistgewählten zwei Varianten abgestimmt.

Als Optionen wurden festgelegt:

- Option „a“: Gänzliche Entkriminalisierung des Schwangerschaftsabbruchs in den ersten drei Monaten der Schwangerschaft.
- Option „b“: Ein so genanntes „weites“ Indikationenmodell
- Option „c“: Ein enges Indikationenmodell.
- Option „d“: Kleine Modifikation der bisherigen rechtlichen Lage
- Option „e“: Keine gesetzliche Änderung.

Die individuellen Präferenzen der Abgeordneten waren bereits vor der Abstimmung, für die der Fraktionszwang aufgehoben wurde, bekannt. In der folgenden Abbildung sind die individuellen Präferenzen der Abgeordneten in Form der jeweiligen Präferenzrelationen angegeben, zusätzlich noch die Information, wie viele Abgeordnete die jeweilige Präferenz hatten, in Klammern (Abb. 12, nächste Seite).

Nach dem tatsächlich bei dieser Abstimmung gewählten Wahlmodus wurde letztlich die Option „a“ zum Gesetz, nachdem eine Stichwahl unter den Varianten „a“ und „c“ stattgefunden hatte.

Aufgaben:

- Welche Option wäre nach der Methode der „Nationalratswahl“ (Kap. 2.2.a) gewählt worden? Anleitung: Zähle, wie oft jede Variante auf den ersten Platz gewählt wurde.
- Bestimme das Ergebnis nach der Methode der Mehrheitsentscheidung (Kap. 2.2.b).
- Ermittle die Präferenz des Kollektivs mittels Rangordnungsmethode (Kap. 2.2.c), wobei in den individuellen Präferenzen an die erstgereihte Option 5 Punkte vergeben werden sollen und an die übrigen Optionen entsprechend 4, 3, 2, und 1 Punkt(e).
- Vergleiche, und interpretiere die Ergebnisse. Kann man feststellen, welche Auswahlmethode die beste ist?

Musterlösung:

Bei Anwendung der „Nationalratswahl“ wird die letzte Präferenzrelation vernachlässigt, bei allen anderen Präferenzrelationen wird das jeweils größte Element als das ausgewählte festgelegt. Auf diese Weise erhält die Option „a“ 233, „c“ 161, „d“ 56, „b“ 35 und „e“ 0 erste Plätze. Nach dieser Methode wird also Option „a“ ausgewählt. (Zu beachten ist insbesondere, dass die 7 Strukturen R_9 nach dieser Auswahlmethode ungültige Stimmen sind.)

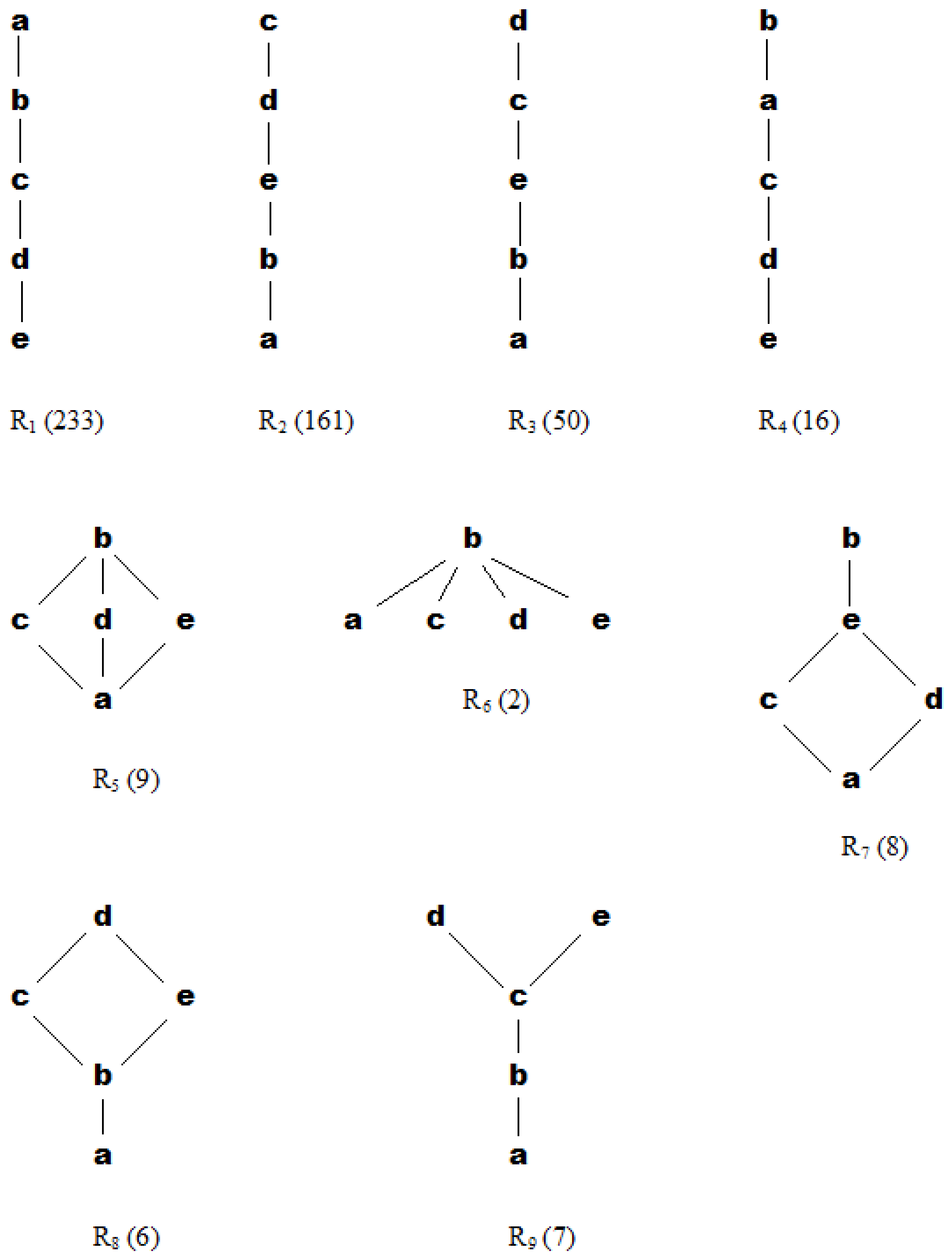


Abb. 12

Anmerkung: Im Prinzip entspricht diese Auswahlregel „Nationalratswahl“ der tatsächlich angewandten, mit dem Unterschied, dass man sich nicht mit relativen Mehrheiten begnügte, sondern eine Stichwahl zwischen den beiden meistgewählten Optionen durchgeführt wurde. Im Ergebnis änderte das in diesem Fall im Vergleich zur „Nationalratswahl“ aber nichts.

Nun bestimmen wir das Ergebnis nach der Methode der Mehrheitsentscheidung. Hierfür ist es bei einer recht großen Anzahl an Abstimmenden günstig, die einzelnen Optionen in eine Tabelle einzutragen (analog den Tabellen in Kapitel 8.2): Am Schnittpunkt einer Zeile mit einer Spalte ist eingetragen, wie oft die Option in der Zeile derjenigen in der Spalte vorgezogen wurde.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
a	-	233	249	249	249
b	259	-	268	268	268
c	241	224	-	410	460
d	241	224	63	-	466
e	241	224	15	8	-

Tab. 35

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass „b“ nach der Mehrheitsentscheidung vor allen anderen Optionen gereiht ist, dahinter folgt „a“, dann „c“, „d“ und „e“. Nach der Mehrheitsentscheidung wird die Option „b“ gewählt.

Betrachten wir die Rangordnungsmethode: Vergibt man die Punkte wie in der Aufgabenstellung beschrieben und gewichtet die Punktezahl jeweils mit der Anzahl der Abgeordneten, welche die entsprechenden Präferenzen haben, ergibt sich diese Punkteverteilung: „a“ 1517 Punkte, „b“ 1568, „c“ 1872, „d“ 1525 und „e“ 1017 Punkte. Mit dieser Auswahlregel müsste „c“ zum Gesetz werden.

Es ist auffällig, dass das Ergebnis der Abstimmung bei den gleichen Präferenzen der Abgeordneten *alleine* vom Auswahlverfahren abhängt. Bei jeder der drei Methoden wäre ein jeweils anderes Gesetz zustande gekommen.

Im Allgemeinen ist es nicht möglich festzustellen, welche von diesen Auswahlregeln die „beste“ ist. Das hängt davon ab, welche Voraussetzungen für ein Auswahlverfahren verlangt werden. Nicht möglich ist es jedenfalls, das Arrow's Bedingungen für ein gerechtes Auswahlverfahren immer gelten (siehe Kapitel 3). Das Beispiel zeigt diesen Umstand besonders gut. In der tatsächlich durchgeführten Abstimmung besteht die Problematik beispielsweise darin, dass die Präferenzstruktur nicht frei wählbar war.

Weiters sieht man an diesem Beispiel gut, wie sehr die Anwendung verschiedener mathematischer Modelle politische Entscheidungen beeinflussen. Aus politischer Sicht sind die Optionen „a“, also die völlige Freigabe des Schwangerschaftsabbruchs in den ersten 3 Monaten, und „e“, also überhaupt keine Änderung des Gesetzes, die weitreichendsten und radikalsten Forderungen, während die übrigen Optionen gewissermaßen Kompromisslösungen darstellen.

Mit der tatsächlich angewandten Methode wurde offensichtlich bei den vorhandenen Präferenzstrukturen eine klare Richtungsentscheidung begünstigt. In Anbetracht der großen Anzahl an Abgeordneten, welche die „radikale“ Forderung „a“ erstgereiht hatten, ist das nicht überraschend. Hingegen ist es auch kein Zufall, dass bei der Rangordnungsmethode, die das Unabhängigkeitsaxiom verletzt (Kap. 3), eine Kompromisslösung „c“ als optimale Lösung gewählt würde. Das liegt daran, dass Kompromisslösungen aus politischen Gründen selten letztgereiht sind, denn in diesem Fall müsste man konträre Optionen möglicherweise nahe aneinander reihen, was unwahrscheinlich ist. Dies könnte auch ein Grund dafür sein, warum die Rangordnungsmethode selten als Auswahlverfahren in der Legislative gewählt wird, denn solche Verfahren, welche Kompromisse stark begünstigen, könnten politische Prozesse auf Dauer lähmen.

AUSBLICK

Das Ziel dieser Diplomarbeit, eine didaktische Konzeption zum Thema „Präferenzen und Auswahlfunktionen“ zu erstellen, wurde großteils erreicht. Allerdings musste aus Zeit- und Platzgründen vieles ausgespart werden, was für den Schulunterricht womöglich interessant gewesen wäre.

Im Folgenden sind exemplarisch einige Fragen zum Thema gestellt, die sich aus der vorliegenden Arbeit ergeben und in deren Rahmen nicht behandelt werden konnten.

- Ist die mathematische Modellierung individueller Präferenzen auch auf anderem Wege didaktisch sinnvoll und möglich, eventuell mit ähnlichen algebraischen Strukturen?
- Welche anderen kollektiven Auswahlregeln als die in Kap. 2.2 genannten sind gelegentlich üblich und könnten in die Konzeption einbezogen werden?
- Wie kann der Satz von Arrow (Kap. 3.2) aus einer mehr didaktischen Perspektive heraus bewiesen werden?
- Ist es auf sinnvolle Weise möglich, stochastische Überlegungen zu den genannten Paradoxa in Kap. 3.1 und 4.2 didaktisch aufzubereiten?
- Welche (möglicherweise weniger üblichen) Sitzzuteilungsverfahren, die in Kap. 5 nicht behandelt wurden, wären für den Schulunterricht eventuell interessant?
- Wie könnte der Satz von Balinski und Young (Kap. 5.4) didaktisch für den Unterricht formuliert, bewiesen und aufbereitet werden?
- Kann man – im Rahmen des Schulunterrichts – beweisen, dass *jedes beliebige* Zweischrittverfahren mit einer bestimmten Rundungsregel zu einem bestimmten Höchstzahlverfahren äquivalent ist? (Verallgemeinerung der Verfahren in Kap. 7)
- Wie könnte generell ein eher an der Volkswirtschaftslehre orientierter Zugang für die Schule zum Thema aussehen? (ähnlich wie in Kap. 6)
- Welche anderen konkreten Beispiele (wie in Kap. 8) wären ebenso zum Einstieg in die Thematik für den Schulunterricht geeignet?

LITERATURHINWEISE

[1] Arrow, Kenneth J.: Social Choice and Individual Values. 1. Aufl. Wiley, New York 1951

[2] Balinski Michel, Young Peyton: Fair Representation. Meeting the Ideal of One Man, One Vote. Yale University Press, New Haven CT u. a. 1982

[3] Endres, Alfred/Martiensen, Jörn: Mikroökonomik. Eine integrierte Darstellung traditioneller und moderner Konzepte in Theorie und Praxis. W. Kohlhammer 2007

[4] Kern, Lucian/ Nida-Rümelin, Julian: Logik kollektiver Entscheidungen. Oldenburg 1994

[5] Pareigis, Bodo: Sind Wahlen undemokratisch? http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~pareigis/Papers/Wahlen.pdf (abgerufen am 25.7.2014)

[6] Platt, Heinz: Input-Output-. Analyse. Schriften zur wirtschaftlichen. Forschung, Band 6. Verlag Anton Hain KG 1957

[7] Reinelt, Gerhard: The linear ordering problem:algorithms and applications: Heldermann, Berlin, 1985

[8] Van der Bellen, Alexander: Mathematische Auswahlfunktionen und gesellschaftliche Entscheidungen. Springer Basel AG 1976

[9] Zicht, W./ Fehndrich, M./ Cantow, M.: Wahlen, Wahlrecht und Wahlsysteme http://www.wahlrecht.de. (abgerufen am 30.7.2014)

[10] Skriptum: Heismann, Olga/ Mattauch, Linus: Arrows Unmöglichkeitssatz http://www.mcc-berlin.net/fileadmin/data/pdf/Skript_Seminar_zur_Sozialwahltheorie_Sose_2012.pdf (abgerufen am 22.7.2014)

[11] Bundesministerium für Inneres, http://euwahl2014.bmi.gv.at/ (abgerufen am 20.8.2014)