Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

Diplomarbeit

Lavaldüse zur Gasabsaugung

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. DI Dr. Herbert Steinrück
E322
Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung

eingereicht an der technischen Universität Wien
Fakultät Maschinenbau

von

Matthias Kornfeld
0325795
2380 Perchtoldsdorf, Wüstenrotstraße 26

Wien, im Oktober 2007

Inhaltsverzeichnis

1 EINLEITUNG 2

1.1 PROBLEMSTELLUNG 4

2 EINDIMENSIONALE STATIONÄRE SIMULATION 5

2.1 MODELL 5
2.2 NUMERIK 13
2.3 ERGEBNISSE 25

3 EINDIMENSIONALE INSTATIONÄRE SIMULATION 36

3.1 MODELL 36
3.2 NUMERIK 38
3.3 ERGEBNISSE 47

4 2D - ROTATIONSSYMMETRISCHE SIMULATION 52

4.1 MODELL 52
4.2 NUMERISCHE ASPEKTE & GEOMETRIE 53
4.3 ERGEBNISSE 54

5 SCHLUSSFOLGERUNGEN 70

A LISTE DER VERWENDETEN VARIABLEN 71

LITERATURVERZEICHNIS 74

Kapitel 1

Einleitung

Kolbenkompressoren werden heute in vielfältigen Anwendungsgebieten eingesetzt. Ein wichtiger Anwendungsbereich liegt dabei in der Verdichtung und Förderung von Erdgas.

Da viele Industrien, ein großer Teil der Energieversorgung und auch viele Haushalte heute nicht mehr ohne Erdgas auskommen und die Erdgasvorkommen oft in großer Entfernung liegen, sind umfangreiche Maßnahmen zur Förderung, Transport oder Speicherung von Erdgas notwendig. So kommen Technologien wie die Verflüssigung oder Komprimierung auf hohen Druck zur besseren Handhabbarkeit von Erdgas zum Einsatz.

Diese Kompression erfolgt in den meisten Fällen durch Kolbenkompressoren. Hierbei wird das Erdgas durch einen Kolben, der über eine Kolbenstange und einen Antriebsmotor bewegt wird, verdichtet. Die Abdichtung des Kolbenraums zur Umgebung im Bereich der oszillierenden Kolbenstange erfolgt bisweilen durch sogenannte Packungsringe. Diese besitzen die Aufgabe den Druck zwischen Kolbengehäuse und Umgebung abzubauen und dabei möglichst wenig Leckagegas (Flaregas) an die Umgebung abzugeben. Dargestellt ist dieser Aufbau schematisch in Abbildung 1.1.

Ein möglichst geringer Leckagegasstrom hat gerade bei Kompressoren für Erdgas eine besondere Bedeutung aufgrund des hohen CO_2 Äquivalent – Wertes von Erdgas. Einerseits hat dies einen umwelttechnischen Aspekt aufgrund des damit emittierten Treibhausgases und andererseits einen wirtschaftlichen Aspekt hinsichtlich der dafür benötigten CO_2 – Zertifikate.

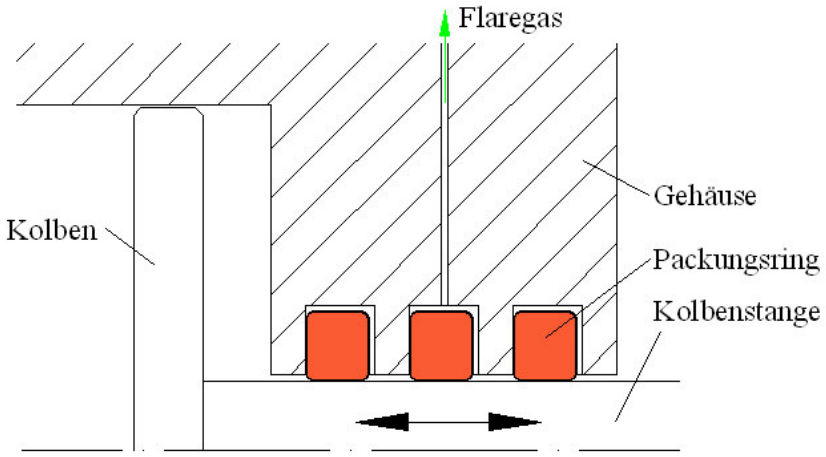


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung eines Kolbenkompressors

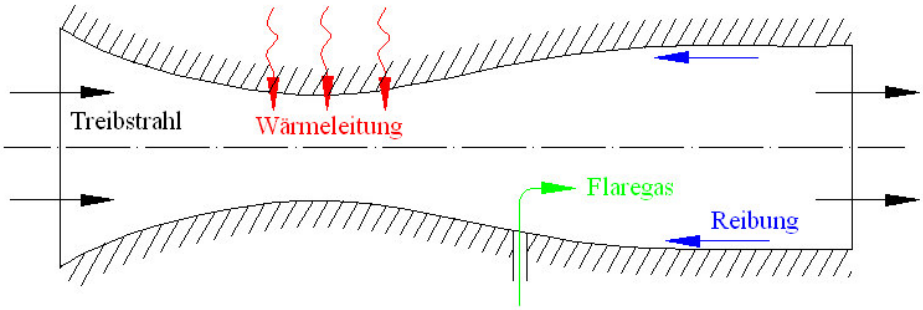


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung einer Lavaldüse mit Flaregaszumischung

Das Flaregas soll nun möglichst einfach, ohne großen technischen Aufwand, bereits aus der Packungskammer abgesaugt und somit die Emission in die Umgebung verhindert werden.

Die Idee ist nun eine Lavaldüse als Gasstrahlpumpe, wie in Abbildung 1.2 ersichtlich, dazu zu verwenden, das Flaregas aus einer Packungskammer eines Kolbenkompressors abzusaugen. Der Treibstrahl soll vom verdichteten Gas nach der 1. Stufe abgezweigt werden und nach dem Absaugvorgang auf den Druck der Saugstufe gebracht werden.
Dabei wird sich im allgemeinen in der Düse ein Verdichtungsstoß ausbilden. Um diesen Stoß von der Zumischstelle fern zuhalten wird auch auf modifizierte Düsengeometrien mit doppelt-konvergent-divergenten Abschnitten zurückgegriffen.

1.1 Problemstellung

Die Auslegung und Simulation der Lavaldüse zur Flaregasabsaugung richtet sich nach den Daten des Kompressors, für den die Absaugung eingesetzt werden soll. Um einen wirtschaftlichen Betrieb zu ermöglichen, sollte mit einem möglichst geringen Treibmassenstrom ein möglichst hoher Leckagemassenstrom abgesaugt werden können.

Typische Förder-Volumenströme und Leckagen für die zum Einsatz kommenden Kompressoren sind in Tabelle 1.1 aufgelistet.

Förder-Volumenstrom Kompressor	5000 Norm - m³/h
Leckage:	5 Norm - m³/h obere Grenze
	1 Norm - m³/h untere Grenze
Druck nach der 1. Stufe	12 bar
Druck Saugstufe	4 bar
Fördermedium	Erdgas

Tabelle 1.1: Typischer Fördervolumenstrom und Leckage eines Kompressors

Bei einem vertretbaren Treibvolumenstrom von 1 – 3 % des Fördervolumenstrom des Kompressors kann nun mit den in Tabelle 1.2 aufgelisteten Betriebsparametern die Simulation der Flaregaszumischung in der Lavaldüse gestartet werden. Dabei wird mit einem Flaregas-Volumenstrom von 10 Norm – m³/h, der zugemischt werden soll, gerechnet. Dies entspricht einer Leckage von 2‰ und beinhaltet somit eine weitere Sicherheit gegenüber den Vorgabewerten.

Treibvolumenstrom	100 Norm - m³/h (0.02kg/s)
Flaregasvolumenstrom	10 Norm - m³/h
Flaregaszumischung	xF = 10 %

Tabelle 1.2: Betriebsparameter Lavaldüse

Kapitel 2

Eindimensionale stationäre Simulation

2.1 Modell

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die verwendeten mathematischen Modelle zur Beschreibung der Strömungsvorgänge in der Lavaldüse. Für eine genaue Herleitung der Systemgleichungen wird auf die Behandlung eindimensionaler Strömungen von A. H. Shapiro [1] verwiesen.

Folgende Näherungen und Vereinfachungen erscheinen für die gegebenen Vorraussetzungen für eine Strömungsberechnung als sinnvoll:

- Die Strömung wird als stationär vorrausgesetzt. Die physikalischen Größen werden als zeitunabhängig angesehen.

- Die Strömung wird als quasieindimensional behandelt, d.h. die physikalischen Größen werden über den Düsenquerschnitt, der mit der Lauflänge der Düse schwach veränderlich ist, als konstant angenommen. Für Rohrströmungen mit hohen Reynoldszahlen trifft dies für die Kernströmung gut zu. Die Randzone, in der große Geschwindigkeits- und Temperaturgradienten auftreten, wird gesondert in der Berechnung des Reibungseinflusses und Wärmeüberganges berücksichtigt.

- Die Strömung wird als lokal ausgebildete, turbulente Rohrströmung angesehen, Einlaufeffekte werden daher vernachlässigt.

- Das strömende Medium wird als ideales Gas mit temperaturabhängigen spezifischer Wärmekapazitäten behandelt.

- Auf Reibung basierende Druckverluste werden nach der Theorie für ausgebildete turbulente Strömungen in Rohren kreisförmigen Querschnitts bestimmt.

- Am strömenden Medium wird keine makroskopische mechanische Arbeit verrichtet.

- Die Materialparameter dynamische Viskosität , Wärmeleitfähigkeit und spezifische Wärmekapazität werden als temperatur-, aber nicht als druckabhängig betrachtet.

2.1.1 Modellgleichungen

Nach den oben genannten Modellvoraussetzungen anwendbaren Stromfadentheorie ergeben sich aus den Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Energie die im folgenden angegebenen Gleichungen, [2].
Die physikalischen Größen Dichte ρ, Geschwindigkeit V, Druck p, Temperatur T und der Querschnitt A hängen im allgemeinen von der Ortskoordinate x ab. In der folgenden Formulierung wird die Zumischung von Flaregas vorerst nicht berücksichtigt.

Thermische Zustandsgleichung für ideale Gase

Die thermische Zustandsgleichung für ideale Gase wird angeschrieben als

$$p = \rho \cdot R \cdot T$$

bzw. (2.1)

$$\frac{p}{\rho} = \frac{c_p(\kappa - 1)}{\kappa} \cdot T ,$$

wobei T die absolute Temperatur, c_p die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck, p der Druck, ρ die Dichte und κ der Isentropenexponent.

Der Isentropenexponent κ wird dabei wie folgt eingeführt

$$\kappa(T) = \frac{c_p(T)}{c_v(T)} \text{, mit } c_v(T) = c_p(T) - R ,$$

wobei c_v die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen und R die spez. Gaskonstante bezeichnet.

Definition der Schallgeschwindigkeit

Für ein ideales Gas ist die Schallgeschwindigkeit gegeben durch

$$c = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T} = \sqrt{c_p(\kappa - 1) \cdot T}, \tag{2.2}$$

Definition der Machzahl

Die Machzahl kann mittels Gleichung (2.2) als

$$M = \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{\kappa \cdot R \cdot T}} = \frac{V}{\sqrt{c_p(\kappa - 1) \cdot T}} \tag{2.3}$$

angeschrieben werden.

Kontinuitätsgleichung

Bei einer stationären Strömung ist der Massenstrom durch einen Düsenquerschnitt konstant.

$$\dot{m} = \rho \cdot A \cdot V = const, \tag{2.4}$$

wobei ρ die Dichte, A die Querschnittsfläche und V die Geschwindigkeit bezeichnet.

Durch logarithmieren und differenzieren von Gleichung (2.4) erhält man die folgende differenzielle Formulierung

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 . \tag{2.5}$$

Bewegungsgleichung

Wird vorrausgesetzt, dass die Neigung der Wand klein ist, kann die Impulsbilanz wie folgt aufgeschrieben werden.

$$pA + pdA - (p + dp)(A + dA) - \tau_W dA_W = \dot{m}(V + dV) - \dot{m}V , \tag{2.6}$$

wobei p den Druck und τ_W die Wandschubspannung bezeichnet.

Die Wandschubspannung wird mittels des Druckverlustbeiwertes λ

$$\tau_W = \frac{\lambda}{4}\frac{V^2\rho}{2}, \tag{2.7}$$

ausgedrückt. Mit der Definition des mittleren hydraulischen Durchmessers

$$\frac{dA_W}{A} = \frac{4 \cdot dx}{D}, \tag{2.8}$$

erhält man die differentiellen Formulierung der Impulsbilanz

$$\frac{dp}{p} + \frac{\kappa M^2}{2}\frac{dV^2}{V^2} + \frac{\kappa \cdot M^2}{2}\lambda\frac{dx}{D} = 0 . \tag{2.9}$$

Energiegleichung

Für die Strömung durch die Kontrollfläche erhält man

$$\dot{m} \cdot dq = \dot{m}(h + dh) - \dot{m} \cdot h + \dot{m}\left(\frac{V^2}{2} + d\frac{V^2}{2}\right) - \dot{m}\frac{V^2}{2}, \tag{2.10}$$

wobei q die pro Masseneinheit zugeführte Wärme und h die Enthalpie pro Masseneinheit bezeichnet.

In differentieller Formulierung kann Gleichung (2.10) wie folgt angeschrieben werden

$$dq = dh + d\frac{V^2}{2}. \tag{2.11}$$

Für die Änderung der Enthalpie aufgrund der Temperaturänderung kann die Beziehung

$$dh = c_p \cdot dT \tag{2.12}$$

verwendet werden. Durch Umformung und Einsetzen von Gleichung (2.11) und Gleichung (2.12) in Gleichung (2.10) erhält man die bekannte Form

$$dq = c_p \cdot dT + d\frac{V^2}{2}. \tag{2.13}$$

Durch Division durch c_p T kann Gleichung (2.10) wie folgt geschrieben werden.

$$\frac{dq}{c_p \cdot T} = \frac{dT}{T} + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \frac{dV^2}{V^2} \tag{2.14}$$

2.1.2 Zusammenfassung der Modellgleichungen

Die die Strömung beschreibenden Differentialgleichungen erhält man durch Differentiation der Grundgleichungen (2.5), (2.9) und (2.14) nach der Ortskoordinate x und einigen Umformungen. Man erhält damit nach A.H. Shapiro [1] ein System von 4 gewöhnlichen Differentialgleichungen für M, p, ρ und T.

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{dx} = \frac{1}{1-M^2}\left[\frac{1+\kappa \cdot M^2}{2}\frac{1}{c_p \cdot T}\frac{dq}{dx} - \left(1+\frac{\kappa-1}{2}M^2\right)\frac{1}{A}\frac{dA}{dx} + \kappa \cdot M^2\left(1+\frac{\kappa-1}{2}M^2\right)\frac{\lambda}{D_h} - \left(1-M^2\right)\frac{1}{\kappa}\frac{d\kappa}{dx}\right], \tag{a}$$

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} = \frac{\kappa \cdot M^2}{1-M^2}\left[\frac{1}{A}\frac{dA}{dx} - \frac{1}{c_p \cdot T}\frac{dq}{dx} - \frac{1+(\kappa-1)M^2}{2}\frac{\lambda}{D_h}\right], \tag{b}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{1-M^2}\left[M^2\frac{1}{A}\frac{dA}{dx} - \frac{1}{c_p \cdot T}\frac{dq}{dx} - \frac{\kappa \cdot M^2}{2}\frac{\lambda}{D_h}\right], \tag{c} \tag{2.15}$$

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dx} = \frac{1}{1-M^2}\left[(\kappa-1)M^2\frac{1}{A}\frac{dA}{dx} + \left(1-\kappa \cdot M^2\right)\frac{1}{c_p \cdot T}\frac{dq}{dx} - \frac{\kappa(\kappa-1)M^4}{2}\frac{\lambda}{D_h}\right]. \tag{d}$$

Bemerkung: Gleichung (2.15a) und (2.15d) können unabhängig von Gleichung (2.15b) und (2.15c) integriert werden.

2.1.3 Randbedingungen

Die in Gleichung (2.15) angegebenen Differentialgleichungen werden durch die folgenden Randbedingungen vervollständigt.

Zur vollständigen Festlegung der Randbedingungen am Eintritt bei Unterschallströmung werden zwei Strömungskenngrößen benötigt. In unserem Fall wird der Druck und die Temperatur vorgegeben. Für die Randbedingung am Austritt wird bei Unterschallströmung, wie sie nach einem Stoß in der Düse vorliegt, eine Strömungskenngröße benötigt. In diesem Fall wird der Druck vorgeschrieben. Bei einem Überschallaustritt wird keine Strömungskenngröße vorgegeben. Eine genauere Diskussion der Randbedingung wird in Kapitel 3.2.2 durchgeführt.

Randbedingungen am Düseneintritt

Als Eingabeparameter für die Simulation wird der Ruhedruck $p_1^{(0)}$ und die Ruhetemperatur $T_1^{(0)}$ angegeben.
Für die Strömungsgrößen am Düseneintritt kann nach der Theorie der reibungsfreien Strömungen folgende Beziehung verwendet werden, wobei der Zustand am Düseneintritt mit 1 bezeichnet wird.

$$T_1 = T_1^{(0)} \frac{1}{1+\frac{(\kappa-1)M_1^{\,2}}{2}} \tag{2.16}$$

$$p_1 = p_1^{(0)} \left(\frac{1}{1+\frac{(\kappa-1)M_1^{\,2}}{2}} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \;,\; \rho_1 = \frac{R \cdot T_1}{p_1} \tag{2.17}$$

Die Eintrittsmachzahl M1 muss dabei so gewählt werden, dass im kritischen Querschnitt M=1 erreicht wird. Eine genauere Diskussion erfolgt in Kapitel 2.2.1.

Randbedingungen am Düsenaustritt

Am Düsenaustritt wird der Druck p_e vorgegeben.

Die Einhaltung der Randbedingungen, besonders jene am Düsenaustritt wird im Zuge der numerischen Implementierung in Kapitel 2.3 diskutiert.

2.1.4 Verdichtungsstoß

Unter gewissen Bedingungen kann in der Düse ein Verdichtungsstoß auftreten, der einen verlustbehafteten, sprungartigen Übergang der Geschwindigkeit von Überschall auf Unterschall bedeutet. Im Rahmen der hier beschriebenen eindimensionalen Theorie können nur senkrechte Verdichtungsstöße behandelt werden. Die Beziehungen für die Zustandsänderungen bei einem Verdichtungsstoß können aus den Grundgleichungen in integraler Form (Gleichungen (2.4),(2.6) und (2.10)) gewonnen werden. Dabei wird jedoch die Wärmezufuhr wie auch die Reibung nicht berücksichtigt ($q=\lambda=0$), da die im Stoßquerschnitt zugeführte Wärme und der durch Reibung dissipierte Impuls wegen der äußerst geringen Ausdehnung des Stoßes in Achsrichtung nahezu verschwindet.

Für konstante spezifische Wärmekapazitäten folgen aus den genannten Beziehungen die Prandtl-Stoßrelationen, wie sie K. Oswatitsch [3] zusammengefasst hat. Für temperaturabhängige spezifische Wärmekapazitäten müssen die angeführten Gleichungen gelöst werden. Eine genaue Diskussion des verwendeten Lösungsverfahrens erfolgt in Kapitel 2.3.

2.1.5 Mischen mit dem Flaregasstrom

Für die Flaregaszumischung wird angenommen, dass diese nur auf einen Punkt begrenzt erfolgt. Daher wurde in den oben beschriebenen Grundgleichungen die Zumischung eines Gasmassenstroms nicht berücksichtigt.

Für die Zumischung werden folgende Annahmen getätigt:

- Der Zustand vor der Mischung, der im vorigen Abschnitt bestimmt wurde, wird als bekannt angenommen.

- Der Flaregasmassenstrom $\dot{m}_F$ und der thermodynamische Zustand des Flaregases (Ruhetemperatur T_F) wird als bekannt angenommen.

- Die Zumischung des Flaregasmassenstroms wird senkrecht zur Hauptstromrichtung angenommen.

- Die Querschnittsfläche ändert sich über die Mischzone nicht und somit liefert der Druck and den Wänden keinen Beitrag zur Impulsbilanz in Strömungsrichtung. Diese Annahme ist aufgrund der geringen Ausdehnung der Zumischstelle und den schwachen Querschnittsänderungen entlang der Düsenachse gerechtfertigt.

Modellgleichung für die Flaregaszumischung

Auf den Querschnitt bezogene Erhaltungsgleichungen erhalten damit folgende Form, wobei der Zustand vor der Mischung mit 3 und nach der Mischung mit 4 gekennzeichnet wird.

Massenbilanz:

$$V_3 \cdot \rho_3 (1 + x_F) = V_4 \cdot \rho_4 , \tag{2.18}$$

wobei x_F die Flaregaszumischverhältnis $x_F = \frac{\dot{m}_F}{\dot{m}}$ und $\dot{m}_F$ den zugemischten Flaregasmassenstrom bezeichnet.

Impulsbilanz:

$$\rho_3 \cdot V_3^{\,2} + p_3 = \rho_4 \cdot V_4^{\,2} + p_4 , \tag{2.19}$$

Energiegleichung:

$$c_p(T_3) \cdot T_3 + \frac{V_3^{\,2}}{2} + x_F \cdot c_p(T_F) \cdot T_F = (1 + x_F) \left[c_p(T_4) \cdot T_4 + \frac{V_4^{\,2}}{2} \right] . \tag{2.20}$$

2.1.6 Modellierung von Reibung und Wärmeübergang

Bestimmung der Rohrreibzahl λ

Für die Berechnung der Rohrreibzahl λ wird die implizite Beziehung von Colebrook, wie in [4] beschrieben, für ausgebildete turbulente Rohrströmung herangezogen. Nach den obigen Vorraussetzungen, dass der Querschnittsverlauf entlang der Düsenachse nur schwach veränderlich ist, kann in guter Näherung von einer ausgebildeten, turbulenten Rohrströmung ausgegangen werden.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left[\frac{2.51}{\mathrm{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3.71 D_h} \right] , \qquad 2300 < \mathrm{Re} < 10^6 , \tag{2.21}$$

mit der Reynoldszahl Re gebildet mit dem hydraulischen Durchmesser D_h

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot D_h}{\nu} = \frac{V \cdot D_h \cdot \rho}{\mu} . \tag{2.22}$$

Der in Gleichung (2.21) beschriebene implizite Zusammenhang wird mittels Fixpunktiteration gelöst. Als Startwert für die Iteration wird $\lambda = 1$ gewählt. Als Abbruchbedingung wird für das Residuum

$$\mathrm{Re}\, s = \left| \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + 2\log_{10}\left[\frac{2.51}{\mathrm{Re}\cdot\sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3.71 D_h} \right] \right| \leq 10^{-8}, \tag{2.23}$$

eine Schranke vorgegeben.

Wärmeübergang

Die turbulente Kernströmung in der Düse bedeutet eine starke Durchmischung des Gases und hat daher dort einen Temperaturausgleich zur Folge. Dies entspricht auch der Modellvorstellung einer eindimensionalen Strömung. In einer dünnen Schicht an der Düsenwand fehlt dieser Austauschmechanismus, es können daher hohe Temperaturgradienten auftreten. Für die Berechnung des Wärmeüberganges zwischen Düsenwand und Gasströmung sind die Vorgänge in dieser Randzone von entscheidender Bedeutung.
Geht man in dieser Schicht von einem logarithmischen Geschwindigkeits- und Temperaturprofil aus, erhält man den als „Reynolds-Analogie“ bekannten Zusammenhang, [3]

$$St = \frac{\dot{q}_w}{\rho \cdot V \cdot c_p (T_w - T)} = \frac{\frac{\lambda}{8}}{1.07 + \sqrt{\frac{\lambda}{8}}\left(12.8(\mathrm{Pr})^{0.68} - 13.2\right)}. \tag{2.24}$$

mit $\mathrm{Pr} = \dfrac{\mu \cdot c_p}{\lambda_{th}}$.

Die auf der Düsenlänge 0 – x der Strömung zugeführte Wärmemenge pro Masseneinheit q erhält man aus der Summe der Beiträge durch die Mantelfläche der Düse.

$$q = \frac{\sqrt{4\pi}}{\dot{m}} \int_0^x \dot{q}_w \sqrt{A}\, dx'. \tag{2.25}$$

2.2 Numerik

Die Berechnung der Strömungskenngrößen erfolgt durch numerische Integration der Grundgleichungen in differenzieller Form entlang der Düsenachse.

2.2.1 Integration der Machzahlableitung

Zur Integration der Machzahlableitung und somit zur Berechnung der Geschwindigkeit der Strömung wird ein Einschrittverfahren 4. Ordnung, das Runge - Kutta Verfahren, wie in [10] beschrieben, verwendet.
Das Verfahren 4. Ordnung wird zur Berechnung der Machzahl verwendet, da diese in den weiteren Integrationsschritten für die Strömungsgrößen Druck, Temperatur und Dichte wieder benötigt wird. Somit kann der Fehler dort gering gehalten werden.

$$M(x+1) = M(x) + dx \cdot F(x), \tag{2.26}$$

mit

$$F(x) = \frac{1}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right), \tag{2.27}$$

wobei

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{dM}{dx}(x, M(x)), \\ K_2 &= \frac{dM}{dx}(x + \frac{dx}{2}, M(x) + \frac{dx}{2}K_1), \\ K_3 &= \frac{dM}{dx}(x + \frac{dx}{2}, M(x) + \frac{dx}{2}K_2), \\ K_4 &= \frac{dM}{dx}(x + dx, M(x) + dx \cdot K_3), \end{aligned} \tag{2.28}$$

ist.

Für die Berechnung der benötigten Werte an den Zwischengitterstellen werden, wenn die entsprechenden Größen nicht durch eine analytische Funktion beschrieben werden, diese durch lineare Interpolation ermittelt.

Startwerte

Der Startwert für die Machzahl M(0) kann nicht beliebig hoch gewählt werden. Wird die Machzahl am Düseneintritt zu hoch gewählt, kommt es zur Hemmung der Strömung (choking). Unterhalb des kritischen Massenstroms, bei entsprechend geringer Eintrittsmachzahl, wird die Düse im reinen Unterschall betrieben. Dieser kritische Massenstrom und damit die Eintrittsmachzahl M(0) muss iterativ bestimmt werden.

Dies erfolgt durch folgendes Bisectionsverfahren (Intervallhalbierungsverfahren). Hierbei werden für die Machzahl eine obere Intervallgrenze M_o und eine untere Intervallgrenze M_u vorgegeben. Die Iteration wird mit den Werten $M_o = 1$ und $M_u = 0$ gestartet.

Für die Eintrittsmachzahl ergibt sich dann

$$M(0)^{\langle i \rangle} = \frac{M_o + M_u}{2}, \tag{2.29}$$

wobei die eckigen Klammern den Iterationsschritt andeuten.

Für den Betrieb der Düse im Überschallbereich ist der folgende Ablauf notwendig.
Da der Übergang von Unterschall auf Überschall im minimalen, kritischen Querschnitt stattfinden muss, ergibt sich daraus folgende Vorschrift:

Für $M < 1$ muss gelten $\frac{dA}{dx} < 0$, ansonsten ist die Eintrittsmachzahl M(0) zu groß gewählt. Andererseits muss für $M > 1$, $\frac{dA}{dx} > 0$ gelten, da ansonsten die Eintrittsmachzahl zu klein gewählt wurde.

Damit ergibt sich folgendes Iterationsschema

$$M < 1 \text{ und } \frac{dA}{dx} > 0 : \; M_u = M(0)^{\langle i-1 \rangle}, \tag{2.30}$$

$$M > 1 \text{ und } \frac{dA}{dx} < 0 : \; M_o = M(0)^{\langle i-1 \rangle}. \tag{2.31}$$

Durch Reibungseinflüsse und Wärmezufuhr kommt es zu einer Verschiebung des effektiven kritischen Querschnittes vom geometrisch minimalem Querschnitt. Es ist daher notwendig mit dem effektiven Querschnitt A_{eff} bzw. dessen Ableitungen zu rechnen. Unter Berücksichtigung von Reibung und Wärmezufuhr erhält man für die Ableitung des effektiven Querschnittes nach der Ortskoordinate x folgende Beziehung.

$$\frac{dA_{eff}}{dx} = A\left[\frac{1}{A}\frac{dA}{dx} - \kappa \cdot M^2 \frac{\lambda}{D_h} - \frac{1+\kappa \cdot M^2}{2\left(1+\frac{\kappa-1}{2}M^2\right)}\frac{1}{c_p T}\frac{dq}{dx} + \frac{1-M^2}{2\left(1+\frac{\kappa-1}{2}M^2\right)}\frac{1}{\kappa}\frac{d\kappa}{dx}\right]. \tag{2.32}$$

Es zeigt sich, dass für einen „glatten“ Übergang von Unterschall auf Überschall die Eintrittsmachzahl bis auf 12 signifikante Stellen genau berechnet werden muss.

Wird die Düse im reinen Unterschall betrieben, so muss die Eintrittsmachzahl so gewählt werden, dass der Druck am Düsenende jenen Wert, der durch die Randbedingung vorgegeben ist, erreicht.

Die Vorgangsweise ist ähnlich jener im Überschallbetrieb und sieht wie folgt aus:

Ist der Druck am Düsenende $p(x=L)$ größer als jener der durch die Randbedingung vorgegeben ist, so muss die Eintrittsmachzahl M(0) angehoben werden. Liegt der Druck unterhalb jenes der durch die Randbedingung vorgeschrieben ist, so muss die Eintrittsmachzahl verringert werden.

$$p(x=L) > p_e : M_u = M(0)^{\langle i-1 \rangle}, \tag{2.33}$$

$$p(x=L) < p_e : M_o = M(0)^{\langle i-1 \rangle}. \tag{2.34}$$

Als Abbruchbedingung wird für die Abweichung des Drucks $p(x=L)$ am Düsenende vom Druck p_e, der durch die Randbedingung vorgegeben ist,

$$\Delta p = \left| p(x=L)^{\langle i \rangle} - p_e \right| \leq 10Pa \tag{2.35}$$

eine Schranke, wie angeführt, vorgegeben.

2.2.2 Integration der restlichen Strömungsgrößen

Für die Integration der restlichen Strömungsgrößen, vereinfacht mit S(x) bezeichnet, wird ein Euler-Cauchy Verfahren verwendet, dass um einen Zwischengitterpunkt in der Intervallhälfte formuliert wird. Dadurch erhält man ein Verfahren 2. Ordnung, wie in [10] beschrieben.

$$S(x) = S\left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{dS}{dx}\left(x+\frac{1}{2}\right), \tag{2.36}$$

$$S(x+1) = S\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{dS}{dx}\left(x+\frac{1}{2}\right), \tag{2.37}$$

bzw. mit $\Delta = \frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\frac{dx}{2}$ folgt

$$S(x+1) = S(x)\frac{1+\Delta}{1-\Delta}. \tag{2.38}$$

Startwerte

Die Startwerte für die Integration können direkt aus den Randbedingungen, Gleichungen (2.16) und (2.17), übernommen werden. Dabei wird angenommen, dass die Temperaturdifferenz zwischen Ruhetemperatur und Temperatur in der Strömung am Düseneintritt gering ist. Somit kann näherungsweise die spezifische Wärmekapazität für diesen Vorgang als konstant angesehen werden. Es ergeben sich somit folgende Anfangswerte für Druck, Temperatur und Dichte.

$$p(0) = p_1^{(0)}\left(\frac{1}{1+\frac{(\kappa-1)M_1^{\,2}}{2}}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \tag{2.39}$$

$$T(0) = T_1^{(0)}\frac{1}{1+\frac{(\kappa-1)M_1^{\,2}}{2}}. \tag{2.40}$$

Den Wert für die Dichte ρ erhält man aus der thermischen Zustandsgleichung für ideale Gase nach Gleichung (2.1), wie folgt.

$$\rho(0) = \frac{p(0)}{R\cdot T(0)}. \tag{2.41}$$

2.2.3 Verdichtungsstoß

Für temperaturabhängige, spezifische Wärmekapazitäten werden im folgenden die Grundgleichungen, wie sie in Kapitel 2.1 beschrieben wurden, durch Fixpunktiteration gelöst.

Hierbei ist darauf zu achten, dass der Startwert und die Iterationsschleife korrekt gewählt wird um den gewünschten Lösungsast zu treffen. Es ergibt sich dafür folgender Ablauf, wobei der Zustand nach dem Verdichtungsstoß mit ^ bezeichnet wird.

Als Startwert werden die Dichte und die Temperatur, wobei die Dichte durch eine kleine Störung aus der Dichte am vorigen Gitterpunkt hervorgeht, vorgegeben. Die Werte in den eckigen Klammern bezeichnen den Iterationsschritt.

$$\hat{\rho}^{\langle 0\rangle} = \rho \cdot 1.01\,,\ T^{\langle 0\rangle} = T\,. \tag{2.42}$$

Damit ergibt sich folgende Iterationsschleife

$$\hat{V}^{\langle i\rangle} = \frac{V \cdot \rho}{\hat{\rho}^{\langle i-1\rangle}}\,, \qquad \text{(a)}$$

$$\hat{T}^{\langle i\rangle} = \frac{c_p(T)\cdot T + \frac{V^2}{2} - \frac{\hat{V}^{2\langle i\rangle}}{2}}{c_p(\hat{T})^{\langle i-1\rangle}}\,, \qquad \text{(b)}$$

$$\hat{p}^{\langle i\rangle} = \rho \cdot V^2 + p - \hat{\rho}^{\langle i-1\rangle} \cdot \hat{V}^{2\langle i\rangle}\,, \qquad \text{(c)} \tag{2.43}$$

$$\hat{\rho}^{\langle i\rangle} = \frac{\hat{p}^{\langle i\rangle}}{R \cdot \hat{T}^{\langle i\rangle}}\,. \qquad \text{(d)}$$

Wie sich zeigt, konvergiert bei dieser Vorgangsweise für $i \to \infty$ die Lösung in Richtung der gewünschten Stoßlösung. Als Abbruchbedingung wird für die Abweichung der Geschwindigkeit

$$\Delta V = \left|\hat{V}^{\langle i\rangle} - \hat{V}^{\langle i-1\rangle}\right| \le 10^{-8}\, m/s$$

eine Schranke, wie angeführt, vorgegeben.

Festlegen der Stoßlage

Die Stoßlage ist im allgemeinen a priori nicht bekannt, sie hängt unter anderem vom Druck am Düsenaustritt p_e ab und muss daher iterativ bestimmt werden.

Dies erfolgt durch ein Bisectionsverfahren. Hierbei wird für den Stoßquerschnitt A_s eine obere Intervallgrenze A_o und eine untere Intervallgrenze A_u bzw. der Index der zugehörigen Kontenpunkte n_o und n_u vorgegeben. Die Iteration wird mit den Werten $A_o(x(n_o)) = A_E$ bzw. und $A_u(x(n_u)) = A_{eff}^*$ gestartet.

Für die Position der Stoßlage bzw. den Index des zugehörigen Knotenpunktes ergibt sich dann

$$n_s^{\langle i \rangle} = \frac{n_o + n_u}{2}. \tag{2.44}$$

Es ist hierbei zu beachten, dass der Wert n_s wieder ein Integer – Wert sein muss, da dieser einen Knotenindex darstellt.

Wird nun der sich einstellende Druck $p(x = L)$ am Düsenende, sowie der durch die Randbedingung vorgeschriebene Druck p_e betrachtet ergibt sich folgende Iterationsvorschrift.

Liegt der Druck $p(x = L)$ am Düsenende unter jenem der durch die Randbedingung vorgeschrieben ist, so liegt die Stoßlage zu nah am kritischen Querschnitt, der Stoß muss Richtung Düsenende wandern. Liegt der Druck am Düsenende über jenem durch der durch die Randbedingung vorgeschrieben ist, so liegt der Stoß zu nah am Düsenende und muss Richtung kritischen Querschnitt wandern.

$$\begin{aligned} &p(x = L) > p_e : \; n_u = n_s^{\langle i-1 \rangle}, \\ &p(x = L) < p_e : \; n_o = n_s^{\langle i-1 \rangle}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Die Iteration wird beendet, wenn sich die beiden Intervallgrenzen n_o und n_u an benachbarten Knotenpunkten befinden.

$$n_o - n_u \leq 1 \tag{2.46}$$

Die Genauigkeit des erreichten Düsenenddruckes hängt damit von der Anzahl der Knotenpunkte und somit von der Gitterfeinheit ab.

2.2.4 Mischung mit dem Flaregasmassenstrom

Die Mischung mit dem Flaregasmassenstrom wird wie in Kapitel 2.1 durch die Erhaltungsgleichungen (2.18) bis (2.20) und der thermischen Zustandgleichung (2.12) beschrieben.
Die Lösung der genannten Gleichungen erfolgt durch Fixpunktiteration nach folgendem Schema, wobei die Werte in den eckigen Klammern den Iterationsschritt bezeichnen.

$$V_2^{\langle 0\rangle} = V_1\,,\; T_2^{\langle 0\rangle} = T_1\,. \tag{2.47}$$

Für die Iterationsschleife erhält man

$$\rho_2^{\langle i\rangle} = \frac{V_1 \cdot \rho_1 (1 + x_F)}{V_2^{\langle i-1\rangle}}\,, \tag{a}$$

$$T_2^{\langle i\rangle} = \left[\frac{c_p(T_1)\cdot T_1 + \frac{V_1^2}{2} + x_F \cdot c_p(T_F) T_F}{1 + x_F} - \frac{V_2^2}{2} \right] \frac{1}{c_p(T_2^{\langle i-1\rangle})}\,, \tag{b}$$

$$p_2^{\langle i\rangle} = \rho_2^{\langle i\rangle} \cdot R \cdot T_2^{\langle i\rangle}\,, \tag{c}$$

(2.48)

$$V_2^{\langle i\rangle} = \sqrt{\frac{\rho_1 \cdot V_1^2 + p_1 - p_2^{\langle i\rangle}}{\rho_2^{\langle i\rangle}}}\,. \tag{d}$$

Als Abbruchbedingung wird für die Abweichung der Geschwindigkeit

$$\Delta V = \left| V_2^{\langle i\rangle} - V_2^{\langle i-1\rangle} \right| \le 10^{-8}\, m/s \tag{2.49}$$

eine Schranke, wie angeführt, vorgegeben.

2.2.5 Bestimmen des Betriebszustands der Lavaldüse

Der gesamte Programmablauf setzt aus mehreren Teilabläufen zusammen. Durch die Bestimmung von Grenzwerten für die vorgeschriebenen Drücke, wie in Abbildung 2.1 beispielhaft dargestellt, und der Ermittlung des Betriebszustandes der Düse, können nicht notwendige Iterationsläufe vermieden werden und die Rechenzeit verkürzt.

1. Eintrittsmachzahl für Überschallbetrieb bestimmen

Die Eintrittsmachzahl wird, wie in Kapitel 2.2.1 beschrieben, so lange iteriert, bis ein „glatter“ Übergang von Unterschall zu Überschall im kritischen Querschnitt erreicht wurde. Im gesamten divergenten Teil der Lavaldüse liegt eine Überschallströmung vor. Der Druck am Düsenende $p(x = L)$ und die Eintrittsmachzahl M(0) werden für eine weitere Verwendung vorerst zwischengespeichert.

$p_{E,UES} = p(x = L)$,
$M_{UES} = M(0)$.

2. Grenze für Überschall bestimmen

In diesem Teilablauf wird die Eintrittsmachzahl geringfügig verringert und somit ein reiner Unterschallbetrieb realisiert. Der Druck am Düsenende wird wieder für eine weitere Verwendung zwischengespeichert.

Für $M(0) = 0.9999 \cdot M_{UES}$ wird der Druck am Düsenende $p_{E,US} = p(x = L)$ bestimmt und gespeichert.

3. Berechnung der Düsenströmung

Da mit den ermittelten Grenzdrücken am Düsenende der Betriebszustand der Düse festgelegt ist, können die entsprechenden Programmteile aufgerufen werden.

a) $p_e > p_{E,US}$ - reine Unterschallströmung
Die Intervallgrenzen für die Eintrittsmachzahl werden wie folgt gesetzt

$M_u = 0$, $M_o = 0.9999 \cdot M_{UES}$

und die Iteration wird wie in Kapitel 2.2.1 beschrieben solange durchgeführt bis die Druckrandbedingung am Austritt hinreichend erfüllt ist.

b) $p_{E,US} > p_e > p_{E,UES}$ - Überschallströmung mit Stoß in der Düse

Die Eintrittsmachzahl kann wie bereits für den Überschallbetrieb berechnet übernommen werden. Die Stoßlage muss wie in Kapitel 2.2.3 beschrieben bestimmt werden.

c) $p_e > p_{E,US}$ - stoßfreier Überschallbetrieb

Es muss kein weiterer Rechendurchlauf durchgeführt werden, da der stoßfreie Überschallbetrieb bereits unter Punkt 1 berechnet wurde.

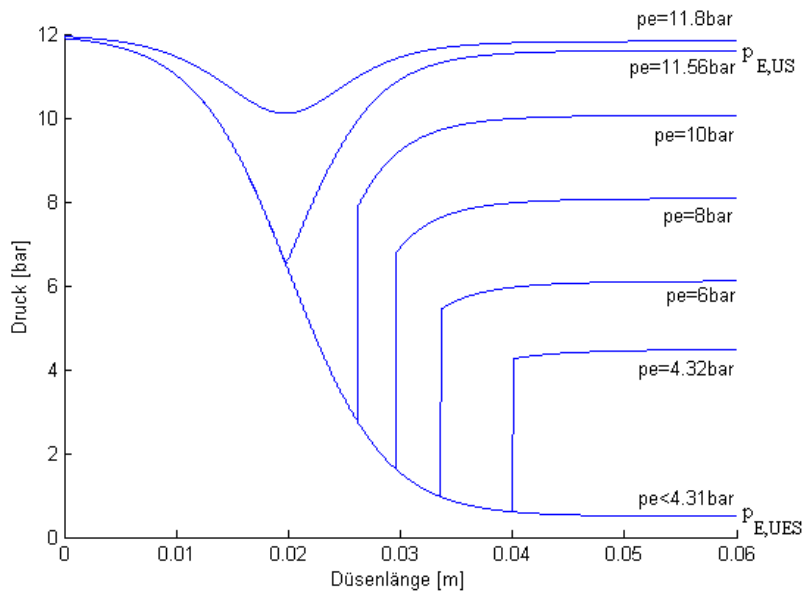


Abbildung 2.1: Beispielhafte Darstellung der Betriebszustände mit den zugehörigen Drücken am Düsenaustritt

2.2.6 Ein –und Ausgabe der Simulationsdaten

Die Ein- und Ausgabe wird grundsätzlich über Datenfiles gesteuert. Neben dem Ausgabefile, in dem die gesammelten Strömungskenngrößen ausgegeben werden, wird im Ausgabefenster eine kurze Zusammenfassung des Simulationslaufes angezeigt.

Eingabe der Simulationsparameter

Die Eingabe der Betriebsparameter, der Stoffdaten und der Düsengeometrie erfolgt über separate Datenfiles.

Die Betriebsparameter sind im Parameterfile *„nozzle_data.in“* in einer zeilenweisen Struktur, wie sie in Tabelle 2.1 dargestellt ist, aufgelistet und werden aus diesem für die Simulation übernommen. Dabei muss die Zeile mit dem Wert des zu definierenden Parameters beginnen. Anschließend kann nach einem Leerzeichen noch ein Kommentar in selbiger Zeile angefügt werden.

Zeilen Nr.	Bezeichnung	Symbol	Einheit
1	Ruhedruck Eintritt	p0	bar
2	Druck Austritt	pe	bar
3	leer	-	-
4	leer	-	-
5	Ruhetemperatur Eintritt	T0	K
6	Düsenlänge	L	m
7	Wandrauhigkeit	k	m
8	Wandtemperatur	T_wall	K
9	leer	-	-
10	Leerschritte im Ausgabefile	s_steps	-
11	Formfaktor Querschnitt	FAC	1
12	Stoffdatenfile	-	-
13	Schalter für Reibung und Wärme	λ/q	1
14	Zumischposition Flaregas	x_mix	m
15	Zumischrate Flaregas	xF	1
16	Temperatur Flaregas	TF	K

Tabelle 2.1: Datenstruktur für die Eingabedatei *„nozzle_data.in“*

Die Stoffdaten werden aus jenem Datenfile, dass im Betriebsparameterfile in Zeile 12 angegeben ist, eingelesen. Die Zeilenstruktur entspricht jener im Betriebsparameterfile und ist in Tabelle 2.2 ersichtlich.

Zeilen Nr.	Bezeichnung	Symbol	Einheit
1	Konstante A - spez. Wärmekapazität	cp_A	J/(kgK)
2	Konstante B - spez. Wärmekapazität	cp_B	J/(kgK²)
3	Konstante A - Wärmeleitfähigkeit	th_c_A	W/(m $K^{th_c_\exp}$)
4	Konstante B - Wärmeleitfähigkeit	th_c_B	W/(mK)
5	Exponent - Wärmeleitfähgikeit	th_c_exp	-
6	Konstante A - Viskosität	mu_A	kg/(msK²)
7	Konstante B - Viskosität	mu_B	kg/(msK)
8	Konstante C - Viskosität	mu_C	kg/(ms)
9	spez. Gaskonstante	R	J/kgK

Tabelle 2.2: Datenstruktur für das Stoffdatenfile

Die temperaturabhängigen Stoffparameter wie die spezifische Wärmekapazität, die Wärmeleitfähigkeit und die Viskosität werden wie folgt angeschrieben:

$$c_p(T) = c_p_A + c_p_B \cdot T$$

$$a(T) = th_c_B + th_c_A \cdot T^{th_c_\exp}$$

$$\mu_{th}(T) = mu_A \cdot T^2 + mu_B \cdot T + mu_C$$

Die Geometrie der Düse wird über das Datenfile „*geo.out*“ eingelesen. Jede Zeile des Files beinhaltet die Koordinate in Achsrichtung der Düse x, den Querschnitt A(x) und wenn vorhanden die Querschnittsableitung $\frac{dA(x)}{dx}$. Damit ergibt sich folgende Struktur für das Geometriedatenfile.

x- Koordinate x=[m]	Querschnitt [A(x)]=m²	Querschnittsableitung [dA/dx] = m
0	5.1375e-5	-0.00238193
1.0e-5	5.1374e-5	-0.00238193
…	…	…

Tabelle 2.3: Datenstruktur für das Geometriedatenfile „*geo.out*“

Ausgabe der Simulationsergebnisse

Im Ausgabefenster wird eine kurze Zusammenfassung der Betriebsparameter und der wichtigsten Ergebnisse ausgegeben. So wird der Betriebszustand in dem die Düse betrieben wird, nämlich reiner Unterschall, reiner Überschall oder Verdichtungsstoß in der Düse, ausgegeben sowie der Massenstrom. Tritt ein Verdichtungsstoß in der Düse auf, so wird dessen Position mitausgegeben bzw. eine Warnung falls dieser im Bereich vor der Flaregaszumischstelle liegt.

Die Ausgabe der berechneten Strömungskenngrößen erfolgt in das Datenfile *„nozzle3.out“*. Jede Zeile beinhaltet alle Strömungskenngrößen für einen Koordinatenpunkt. Die einzelnen Kenngrößen, wie Koordinate, Querschnitt, Querschnittsableitung, Druck, Geschwindigkeit, Machzahl, Temperatur, Dichte und der hydr. Durchmesser werden Spaltenweise ausgegeben.

Es ergibt sich somit folgende Struktur für das Ausgabedatenfile.

Koord. [x]=m	Querschnitt [A]=m²	Quers.ableitung [dA/dx]=m	Druck [p]=bar	Geschw. [V]=m/s	Machzahl [M]=1	Temperatur [υ]=°C	Dichte [ρ]=kg/m³	hydr.Durchm. [Dh]=m
0	5.1375e-5	-0.00238193	11.9087	48.9344	0.108261	26.3148	7.60644	0.00404391
1.0e-5	5.1374e-5	-0.00238078	11.9086	48.9573	0.108312	26.3143	7.6064	0.00404297
…	…	…	…	…	…	…	…	…

Tabelle 2.4: Datenstruktur für das Ausgabedatenfile *„nozzle3.out“*

Durch die zeilenweise Struktur des Datenausgabefiles können Verläufe der Kenngrößen einfach in kommerziellen Kalkulationsprogrammen eingelesen und Verläufe der entsprechenden Größen geplottet werden.

2.3 Ergebnisse

2.3.1 Randbedingungen

Als Randbedingungen werden, wie schon in Kapitel 2.1.2 diskutiert, am Eintritt der Ruhedruck $p_1^{(0)}$ und die Temperatur T_1 vorgeschrieben. Am Düsenaustritt wird der Druck p_e vorgeschrieben.
Für die Flaregaszumischung wird die Zumischrate x_F und die Temperatur T_F des zugemischten Flaregases vorgegeben.
In Tabelle 2.5 sind die für die durchgeführten Simulationen verwendeten Parameterwerte aufgelistet.

Ruhedruck am Düseneintritt $p_1^{(0)}$	12 bar
Temperatur Eintritt T_1	300 K
Druck Düsenaustritt p_e	4 bar
Zumischrate Flaregas x_F	10 %
Temperatur Flaregas T_F	300 K
Position der Flaregaszumischung x_{mix}	80 mm

Tabelle 2.5: Simulationsparameter

2.3.2 Stoffeigenschaften

Als Treibmassenstrom der Lavaldüse wird Erdgas eingesetzt. Für die stoffspezifischen Kenngrößen erhält man laut VDI Wärmeatlas [5] folgende Werte.

Für die dynamische Zähigkeit wird die Entwicklung

$$\mu_{th}(T) = mu_A \cdot T^2 + mu_B \cdot T + mu_C$$

verwendet, mit den in Tabelle 2.6 gegeben Parameterwerten.

Die Wärmeleitfähigkeit wird in der Form

$$a(T) = th_c_B + th_c_A \cdot T^{th_c_\exp}$$

dargestellt.

Für die spezifische Wärmekapazität wird der Ansatz

$$c_p(T) = c_p_A + c_p_B \cdot T$$

verwendet.

dyn. Viskosität Koeff. mu_A	0 Pa s/K²	Wärmeleitfähigkeit Koeff. th_c_A	0.30328 W/(mK)
dyn. Viskosität Koeff. mu_B	0 Pa s/K	Wärmeleitfähigkeit Koeff. th_c_B	0 W/(m $K^{th_c_\exp}$)
dyn. Viskosität Koeff. mu_C	1.02 10-5 Pa s	Wärmeleitfähigkeit Exp. th_c_exp	0
		Wärmekapazität Koeff. cp_A	1088 J/(kgK)
		Wärmekapazität Koeff cp_B	3.77 J/(kg(K²)

Tabelle 2.6: Parameterwerte der Stoffeigenschaften von Erdgas

2.3.3 Parameter für Reibung und Wärmeübergang

Für die Berechnung des Wärmeüberganges und des Reibungseinflusses werden noch die Wandrauhigkeit sowie die Wandtemperatur benötigt. Diese sind in Tabelle 2.7 zusammengefasst.

Wandtemperatur T_W	300 K
Wandrauhigkeit k	5. 10-6 m

Tabelle 2.7: Parameterwerte Wärmeübergang und Reibung

2.3.4 Düsengeometrie

Die Vorgabe der Düsengeometrie erfolgt durch eine erste Vorauslegung mit dem Programm „nozzle3.c“ von S. Braun. Hierbei wird der Massenstrom und ein gewünschter Druckverlauf in der Düse vorgegeben. Effekte wie die Flaregaszumischung und Verdichtungsstöße werden hierbei nicht berücksichtigt.
Für den Druckverlauf zwischen dem Eintrittsdruckniveau und dem Druck am Düsenende wird der stetige Verlauf gemäß

$$p(x) = a \cdot \tanh[b(x_0 - x)] + c\,, \qquad (a, b, c, x_0) = const \tag{2.50}$$

vorgeschrieben.

Der Druck am Düsenende wird bei der Vorauslegung der Düsengeometrie so gering gewählt, dass eine Überschallströmung ohne Stoß in der Düse auftritt.

Die erhaltene Geometrie, wie sie in Abbildung 2.2 dargestellt ist, wird im weiteren als Ausgangsgeometrie für alle weiteren Variationen der Düsengeometrie verwendet.

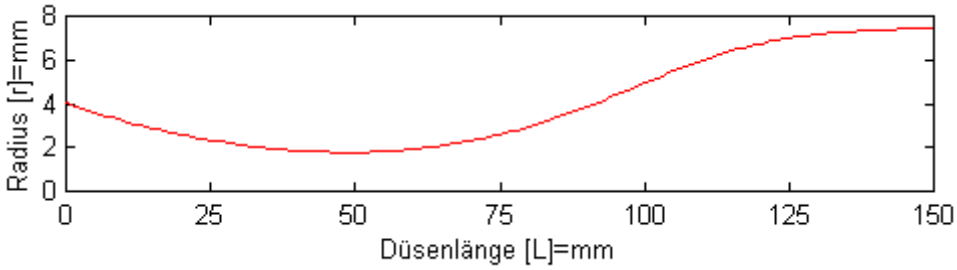


Abbildung 2.2: Düsengeometrie der einfachen Lavaldüse

Die wichtigsten Geometriekenndaten sind in Tabelle 2.8 zusammengefasst.

minimaler Durchmesser	3.55 mm
Durchmesser Eintritt	8.08 mm
maximaler Durchmesser	14.9 mm (Austritt)
Düsenlänge	150 mm

Tabelle 2.8: Düsengeometrie

2.3.5 Simulationsergebnisse – einfache Lavaldüse

Variation der Flaregaszumischung

In einer ersten Untersuchung wird die Auswirkung der Flaregaszumischung auf die Position des Verdichtungsstoßes untersucht. Um die Ergebnisse gut herausarbeiten zu können, wird der Druck am Düsenende p_e auf 6 bar gesetzt und die Flaregaszumischung erfolgt bei einer Koordinate in Achsensichtung x_{mix} von 80mm.

Wie in Abbildung 2.3 zu erkennen ist, läuft der Verdichtungsstoß mit Erhöhung der Flaregas-Zumischrate in Richtung der Zumischstelle. Weiters steigt der Mischungsenddruck, jener Druck, der sich nach der Mischung einstellt, an.
Die Distanz zwischen Flaregaszumischung und Verdichtungsstoß beträgt dabei maximal nur rund 6 mm.

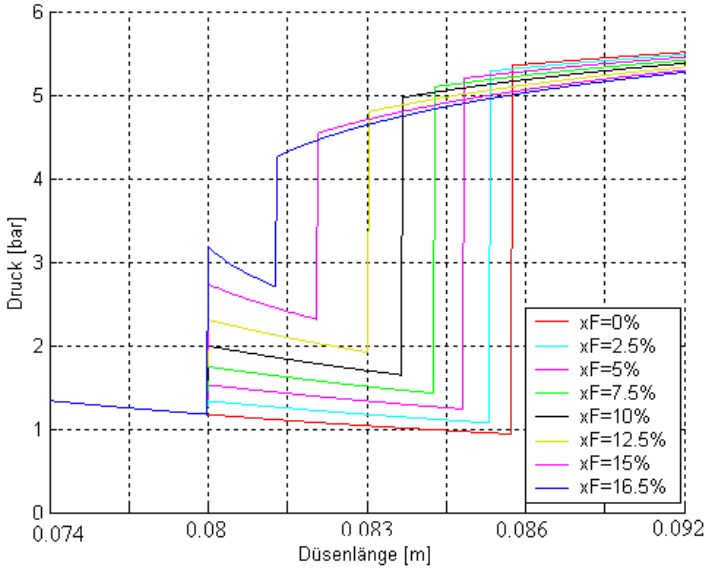


Abbildung 2.3: Einfluss der Variation des Flaregaszumischung auf den Druckverlauf

Um mit Sicherheit aus der Packungskammer, die sich auf Umgebungsdruck befindet, Flaregas absaugen zu können, wird als Kriterium der Mischungsenddruck herangezogen. Für diesen muss gelten,

$$p_{mix_end} < p_u \,, \tag{2.51}$$

d.h. der Mischungsenddruck muss unter dem Umgebungsdruckniveau liegen, damit Flaregas angesaugt wird.
Wie aus Abbildung 2.3 ersichtlich stellt dies somit eine Beschränkung der Flaregaszumischung dar.

Simulation der einfachen Lavaldüse

Die Simulation für die in Kapitel 1.1 angegebenen Daten unter Berücksichtigung des oben angegebenen Kriteriums nach Gleichung (2.51) für den Mischungsenddruck liefert die in Abbildung 2.4 angegebene stationäre Lösung für den Druckverlauf.

Um das Kriterium für den Mischungsendruck einhalten zu können muss die Flaregas – Zumischrate auf 5% reduziert werden.

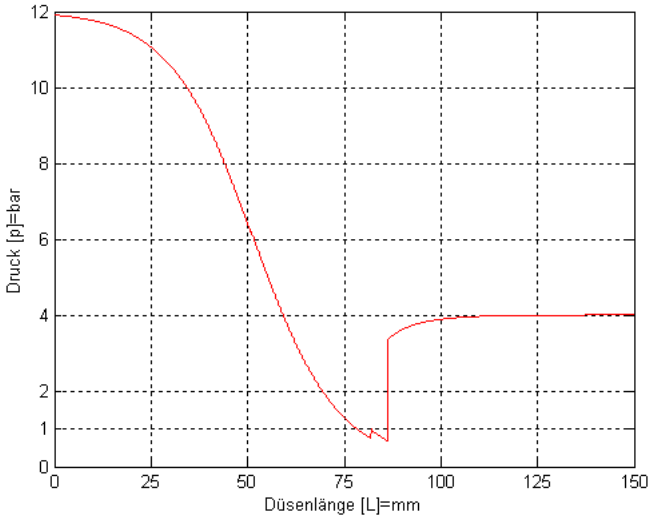


Abbildung 2.4: Druckverlauf bei einer Flaregaszumischrate x_F=5%

Aus den obigen Resultaten sind folgende kritische Bereiche hinsichtlich Betriebsstabilität und –verhalten ersichtlich:

- Der Mischungsendruck muss unter dem Umgebungsdruckniveau liegen und dabei soll jedoch ein möglichst hoher Flaregas-Massenstrom zugemischt werden.

- Die Distanz zwischen der Zumischstelle und der Verdichtungsstoßposition muss größer sein als die Mischungslänge um wieder einen eindimensionalen Zustand vor dem Verdichtungsstoß zu erreichen. Weiters soll verhindert werden, dass bei geringen Schwankungen des Düsenenddruckes sich die Stoßlage in Richtung Zumischstelle bewegt. Dies hätte im schlechtesten Fall die Auswirkung, dass Flaregas zurück in die Packung gedrückt wird, wenn der Verdichtungsstoß über die Zumischstelle hinweg läuft.

2.3.6 Düsenmodifikationen

Um den oben beschriebenen kritischen Bereich hinsichtlich der Betriebsstabilität erweitern zu können, werden im folgenden Möglichkeiten diskutiert wie die Düsengeometrie modifiziert werden muss um dies zu erreichen.

Verringerung des Mischungsenddruckes

Der Mischungsenddruck, jener Druck der sich nach vollständiger Mischung des Flaregases mit dem Treibmassenstrom einstellt, soll nun möglichst unter dem Umgebungsdruckniveau gehalten werden. Dabei soll die Flaregaszumischung möglichst groß sein.

Betrachtet man die die Strömung beschreibenden Gleichungen (2.15) so kann der Zusammenhang

$$\frac{dp}{dx} = f\left(\frac{dA}{dx}\right) \tag{2.52}$$

gefunden werden.

Es ist daher naheliegend den Mischungsenddruck im Bereich der Zumischstelle durch eine Querschnittserweiterung, wie in Abbildung 2.5 dargestellt, zu reduzieren.

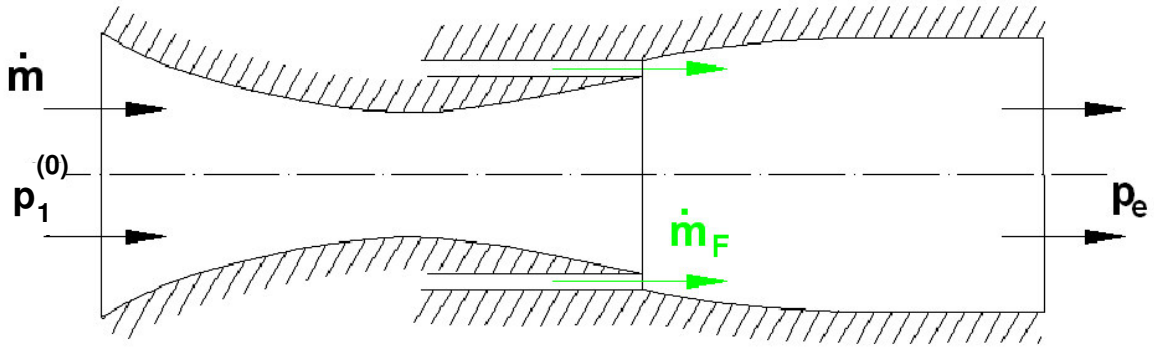


Abbildung 2.5: Lavaldüse mit Querschnittserweiterung zur Reduktion des Mischungsenddruckes

Bei einer optimalen Anpassung der Querschnittserweiterung an den zugemischte Flaregasmassenstrom kann der Druckanstieg bei der Zumischung auf jenen Wert der sich ohne Zumischung einstellen würde reduziert werden.

Die entstehende Kreisringfläche, die aus der Querschnittserweiterung entsteht, kann gleich als Zumischöffnung verwendet werden.

Abbildung 2.6 zeigt das Ergebnis der stationären Simulation für eine Düsengeometrie mit einer Querschnittserweiterung an der Flaregas-Zumischstelle. Die Simulationsparametern entsprechen jener Simulation aus Kapitel 2.3.5, wobei der Druck am Düsenaustritt auf 3 bar reduziert wurde um den Verdichtungsstoß weit genug von der Flaregaszumischstelle fern zu halten.
Die erkennbare Druckspitze im Bereich der Zumischstelle deutet den sich einstellenden Druck ohne Querschnittserweiterung an.
Es ist ersichtlich, dass der Druckverlauf in diesem Fall „glatt“ ohne Drucksprung über die Flaregaszumischung verläuft. Die angedeutete Druckspitze im Bereich der Zumischung, zeigt den sich einstellenden Mischungsendruck, der ohne Querschnittserweiterung erreicht werden würde.

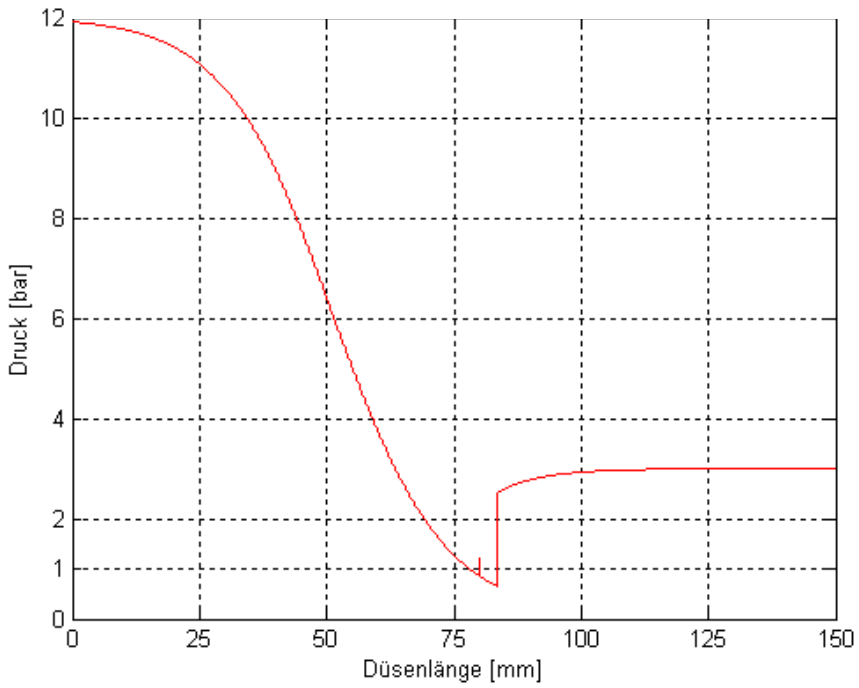


Abbildung 2.6: Druckverlauf bei einer Flaregaszumischrate x_F=5% bei einer Düsengeometrie mit Querschnittserweiterung

Positionierung der Verdichtungsstoßlage

Wie bereits in Kapitel 2.3.5 diskutiert wurde liegt der Verdichtungsstoß relativ knapp an der Flaregas-Zumischstelle. Bereits durch geringe Schwankungen des Drucks am Düsenaustritt kommt es zu einer Änderung der Stoßlage, die wenn sie sich über die Zumischstelle hinwegbewegt, Flaregas zurück in die Packungskammer drücken kann.
Weiters liegt kurz nach der Flaregaszumischung kein eindimensionaler Strömungszustand vor.

Um diese Effekte zu vermeiden, muss der Verdichtungsstoß weit genug von der Flaregas-Zumischstelle entfernt liegen.

Eine Möglichkeit den Verdichtungsstoß beliebig positionieren und dabei auch Druckschwankungen abfangen zu können, ergibt sich durch die Ausführung der Düse in einer „doppelt konvergent-divergenten“ Form, wie es in Abbildung 2.7 dargestellt ist.

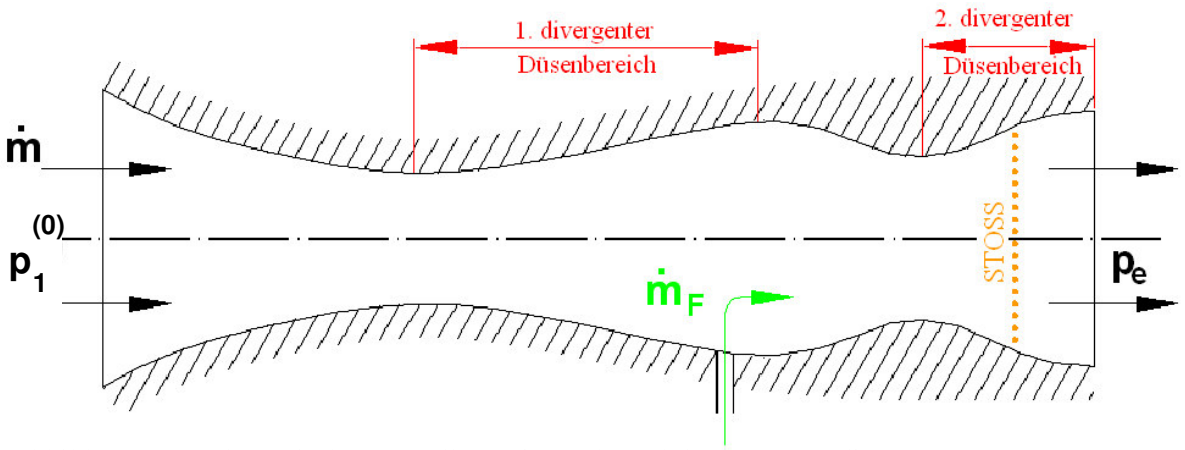


Abbildung 2.7: Schematische Darstellung einer „doppelt konvergent –divergenten“ Düse

Die zweite Verengung in der Düse hat die Aufgabe den Verdichtungsstoß gegen den vorderen divergenten Teil der Düse abzuschirmen und so ein Zurückwandern des Verdichtungsstoßes zu verhindern.

Mehrfachlösungen der stationären Verdichtungsstoßlage

Durch die Modifikation der Düsengeometrie wie sie in Abbildung 2.7 schematisch dargestellt ist, erhält man nun bei gegebenen Randbedingungen mehrere Lösungen für eine stationäre Verdichtungsstoßlage.

Grundsätzlich sind folgende stationäre Lösungen der Stoßlage möglich:

I. Der Verdichtungsstoß liegt im zweiten divergenten Teil der Düse

Im ersten divergenten Düsenbereich liegt eine reine Überschallströmung vor. Erst nach dem Stoß im zweiten Düsenteil liegt wieder eine Unterschallströmung vor.

II. Der Verdichtungsstoß liegt im ersten divergenten Teil der Düse

Abhängig von den Randbedingungen können sich nun folgende Zustände einstellen:

a) Nach dem Verdichtungsstoß im ersten divergenten Teil der Düse liegt im gesamten restlichen Düsenbereich eine Unterschallströmung vor.

b) Sinkt der Druck am Düsenaustritt unter einen Grenzwert, so kann im zweiten kritischen Querschnitt A_2* Schallgeschwindigkeit erreicht werden, indem sich die Stoßlage im ersten divergenten Düsenteil so einstellt, dass der Ruhedruckverlust jenen Wert erreicht mit dem ein kritischer Zustand im Querschnitt A_2* erreicht wird.
Im zweiten divergenten Düsenbereich kann nun wieder ein Verdichtungsstoß auftreten.

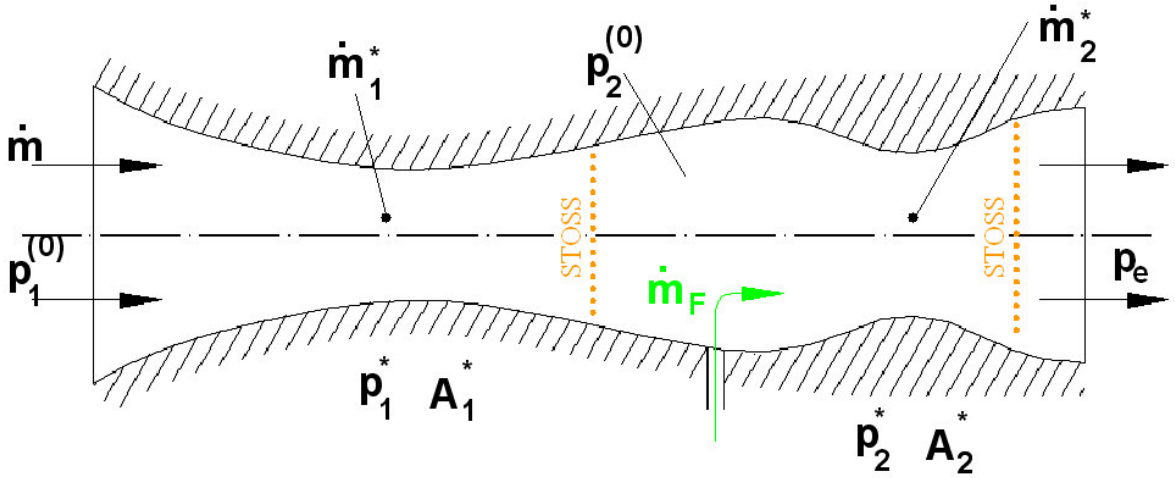


Abbildung 2.8: Schematische Darstellung einer „doppelt konvergent –divergente“ Düse mit den kritischen Querschnitten

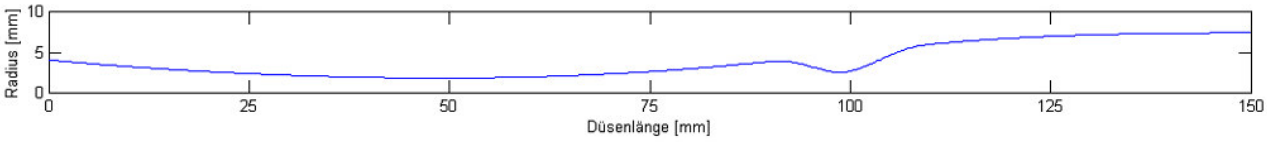


Abbildung 2.9: Geometrie einer Doppel-konvergent-divergenten Düse

Wird eine Geometrie wie sie in Abbildung 2.9 dargestellt für die Simulation herangezogen, so erhält man für die stationären Verdichtungsstoßlagen folgende Lösungen. Die Randbedingungen am Düseneintritt werden dabei konstant gehalten. Am Düsenaustritt werden jeweils die Lösungen für einen Austrittsdruck von 4 bar und 6 bar berechnet.

Liegt der Verdichtungsstoß im zweiten divergenten Düsenteil, wie unter Punkt I diskutiert, so kann, wie in Abbildung 2.10 ersichtlich ist, der Druckanstieg von 4 bar auf 6 bar am Düsenende abgefangen werden. Im ersten divergenten Teil der Düse liegt weiterhin eine Überschallströmung vor.
Diese Lösung der stationären Verdichtungsstoßlage entspricht dem gewünschten Betriebszustand.

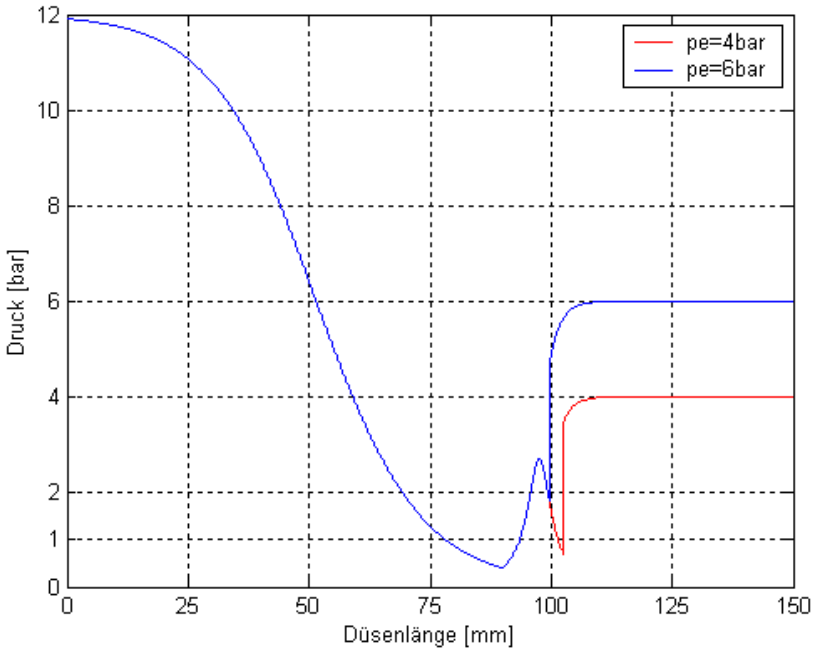


Abbildung 2.10: Druckverlauf für die „Doppel-konvergent-divergente“ Düse mit Verdichtungsstoß im zweiten divergenten Düsenteil.

Liegt der Verdichtungsstoß im ersten divergenten Teil so erhält man bei einem Düsenenddruck von 6 bar die in Punkt II a diskutierte Lösung. Diese ist in Abbildung 2.11 in rot dargestellt. Zum Vergleich ist in blau die Lösung bei der sich der Verdichtungsstoß im zweiten divergenten Teil befindet, dargestellt. Wird der Düsenenddruck auf 4 bar reduziert, so erhält man die in Punkt II b diskutierte Lösung. Es stellt sich ein zweiter kritischer Zustand im Querschnitt A_2* ein.

Wie aus Abbildung 2.11 ersichtlich ist, liegt der Verdichtungsstoß dabei vor der Flaregas-Zumischstelle. In diesem Zustand würde Flaregas zurück in die Packungskammer gedrückt werden. Dieser Betriebszustand ist auf jeden Fall zu vermeiden.

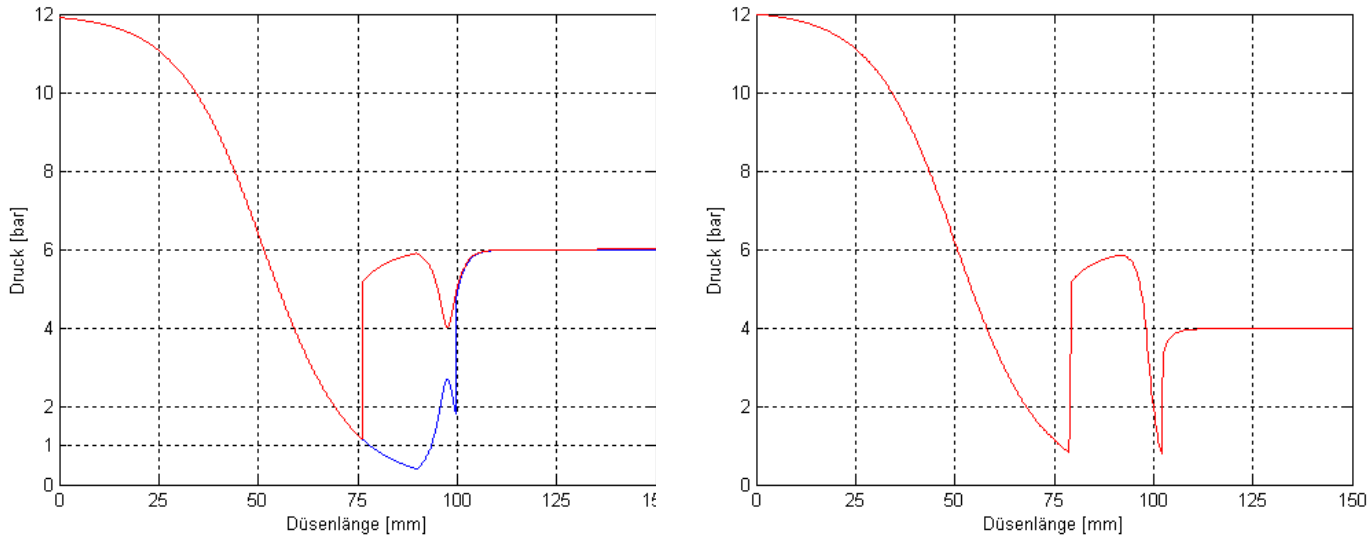


Abbildung 2.11: Druckverlauf für die „Doppel-konvergent-divergente“ Düse mit Verdichtungsstoß im ersten divergenten Düsenteil.

Kapitel 3

Eindimensionale instationäre Simulation

3.1 Modell

3.1.1 Modellgleichungen

Die in Kapitel 2.1 besprochenen Modellvoraussetzungen werden nun im Hinblick auf die Zeitabhängigkeit der physikalischen Größen verallgemeinert. Die Strömung wird als instationär vorrausgesetzt, die physikalischen Größen werden als zeitabhängig angesehen.

Die Massen-, Impuls- und Energieerhaltung in Divergenzform lautet dann nach R. J. Leveque [7]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot V) = \dot{m}_{F,dx}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot V) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot V^2 + p) = p\frac{dA}{dx} - \rho A \frac{\lambda}{D_h}\frac{V^2}{2}\frac{V}{|V|}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \cdot c_{V,m} \cdot T + \rho\frac{V^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \cdot V\left(c_{V,m} \cdot T + \frac{V^2}{2}\right) + V \cdot p\right) = q\rho A + \dot{m}_{F,dx} c_{p,m} T_F, \tag{3.3}$$

$$\text{mit } c_{V,m} = \frac{1}{T}\int_{T0}^{T} c_V(T)dT' \text{ bzw. } c_{p,m} = \frac{1}{T}\int_{T0}^{T} c_p(T)dT'. \tag{3.4}$$

Dabei sind die Erhaltungsgrößen die Masse m, der Impuls I und die Gesamtenergie E.

In kompakter Schreibweise erhält man für die Gleichungen (3.1)-(3.3)

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{u})}{\partial x} = \vec{Q}\,, \tag{3.5}$$

mit $\vec{u}$ als Erhaltungsgröße, $\vec{F}(\vec{u})$ als Flussgröße und $\vec{Q}$ als Quellterm,

$$\vec{u} = \rho A \begin{pmatrix} 1 \\ V \\ c_{V,m} \cdot T + \frac{V^2}{2} \end{pmatrix},\ \vec{F}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \rho A V \\ \rho A V^2 + pA \\ \rho A V \left(c_{V,m} \cdot T + \frac{V^2}{2} \right) + VpA \end{pmatrix},\ \vec{Q} = \begin{pmatrix} \dot{m}_{F,dx} \\ p\frac{dA}{dx} - \rho A \frac{\lambda}{D_h} \frac{V^2}{2} \frac{V}{|V|} \\ q\rho A + \dot{m}_{F,dx} c_{p,m} T_F \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Wird der Quellterm vorerst nicht berücksichtigt so erhält man unter Berücksichtigung des Gauss'schen Divergenzsatzes entlang einer geschlossenen Kurve im (x,t) Raum

$$\oint \left(\vec{u} dx - \vec{F} dt \right) = 0\,. \tag{3.7}$$

Diese Formulierung wird dann für die numerische Umsetzung wieder verwendet werden.

3.2 Numerik

3.2.1 Das Roe – Verfahren

Zur Berechnung einer numerischen Lösung des oben angegebenen Erhaltungsgesetzes wird das sogenannte Roe-Verfahren verwendet, ein Verfahren 1. Ordnung.

Dabei wird nicht das nichtlineare Problem aus Gleichung (3.5) selbst gelöst, sondern dieses in eine Abfolge von Riemann Problemen zerlegt. Diese grundsätzliche Idee stammt von Godunov, [7]. Wobei das erhaltene Riemannproblem nicht analytisch gelöst wird, sondern durch ein einfacheres Riemannproblem ersetzt wird.
Eine genaue Erklärung und Vorgehensweise beim Roe-Verfahren wird von R. J. Leveque [7] gegeben.

Im weiteren wird nur auf die numerische Umsetzung und die Konstruktion der Roe-Matrix genauer eingegangen.

Unter Verwendung der integralen Formulierung des Erhaltungsgesetzes in Gleichung (3.7) erhält man

$$\vec{u}_j^{n+1} = \vec{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\vec{F}\left(\vec{u}_j^n, \vec{u}_{j+1}^n\right) - \vec{F}\left(\vec{u}_{j-1}^n, \vec{u}_j^n\right)\right], \tag{3.8}$$

wobei $\vec{u}_j^n$ den Vektor der Erhaltungsgrößen zum Zeitpunkt $t = n \cdot \Delta t$ und mit der Ortskoordinate $x = j \cdot \Delta x$ sowie $\vec{F}$ den Vektor der Flussgrößen bezeichnet.

Verwendet man die Bezeichnung $\vec{u}_L = \vec{u}_j^n$ bzw. $\vec{u}_R = \vec{u}_{j+1}^n$, so kann der Fluss geschrieben werden als

$$\vec{F}(\vec{u}_L, \vec{u}_R) = \tilde{A}(\vec{u}_L, \vec{u}_R)\left[\vec{\hat{u}}(\vec{u}_L, \vec{u}_R) - \vec{u}_L\right] + \vec{f}_L, \text{ mit } \vec{f}_L = \vec{F}(\vec{u}_L, \vec{u}_L) \text{ bzw. } \vec{f}_R = \vec{F}(\vec{u}_R, \vec{u}_R), \tag{3.9}$$

wobei $\tilde{A}$ die Roe-Matrix bezeichnet.

Die Roe Matrix muss folgende Beziehungen erfüllen, [8]:

(ii) Die Matrix $\tilde{A}$ sei diagonalisierbar und habe m verschiedene Eigenwerte

(iii) $$\tilde{A}(\vec{u}_L, \vec{u}_R)(\vec{u}_L - \vec{u}_R) = \vec{f}_L - \vec{f}_R \tag{3.10}$$

(iv) $$\tilde{A}(\vec{u}, \vec{u}) = \frac{\partial \vec{f}(\vec{u})}{\partial \vec{u}} \tag{3.11}$$

Konstruktion der Roe - Matrix

Nach Roe wird nun ein Vektor

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \sqrt{\rho} \begin{pmatrix} 1 \\ V \\ h \end{pmatrix}, \text{ mit der Enthalpie } h = \frac{E + p}{\rho}, \tag{3.12}$$

definiert.

Man sucht nun die Komponenten jener Matrix $\tilde{B}$, die die Gleichung

$$\vec{u}_L - \vec{u}_R = \tilde{B}(\vec{w}_L - \vec{w}_R) \tag{3.13}$$

erfüllt. Für die Flussdifferenz gilt in analoger Weise

$$\vec{f}_L - \vec{f}_R = \tilde{C}(\vec{u}_L - \vec{u}_R). \tag{3.14}$$

Somit erhält man für die gesuchte Roe Matrix

$$\tilde{A} = \tilde{C}\tilde{B}^{-1}. \tag{3.15}$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren der Roe Matrix ergeben sich zu

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{u} - \tilde{c}\,, \quad \tilde{\lambda}_2 = \tilde{u}\,, \quad \tilde{\lambda}_3 = \tilde{u} + \tilde{c}$$

und die zugehörigen Eigenvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c} \\ \tilde{h} - \tilde{u}\tilde{c} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \frac{\tilde{u}^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c} \\ \tilde{h} + \tilde{u}\tilde{c} \end{pmatrix},$$

wobei ~ die Roe-gemittelten Größen und der Querstrich das arithmetische Mittel ziwschen den rechts- und linksseitigen Größen bezeichnet.

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} = \frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1},\ \tilde{h} = \frac{\sqrt{\rho_L}h_L + \sqrt{\rho_R}h_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} = \frac{\overline{w}_3}{\overline{w}_1},\ \tilde{c} = (\overline{\kappa} - 1)\left(\tilde{h} - \frac{\tilde{u}^2}{2}\right) = \frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}. \tag{3.16}$$

Sind die spezifische Wärmekapazitäten nicht konstant, so muss die Roe-Matrix modifiziert werden. Es zeigt sich, dass sich dies nur in Änderung in der Schallgeschwindigkeit $\tilde{c}$ auswirkt. Diese ist anstatt mit dem Isentropenexponenten κ mit einem gemittelten Exponenten

$$\overline{\kappa} = \frac{c_{p,m}}{c_{p,m} - R} \tag{3.17}$$

zu berechnen.

Sonic Entropie Fix

Bei linearen Problemen treten nur Stöße auf. Es ist daher damit zu rechnen, dass dieses Verfahren Lösungen liefert, die die Entropiebedingung verletzen.

Die Entropiebedingung besagt, dass die Entropie über einen Stoß hinweg nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik zunehmen muss. Die Zunahme der Entropie über einen Stoß hinweg sorgt dafür, dass man aus den möglichen schwachen Lösungen der Eulegleichungen die physikalisch richtige auswählen kann.

Es zeigt sich, dass dies nach J. R: Leveque [7] durch die Modifikation, die unter der Bezeichnung Sonic Entropy Fix, bekannt ist, erreicht wird.

Zusammengefasst erhält man für den benötigten Eigenwert

$$\lambda_i^* = \begin{cases} \tilde{\lambda}_i, \tilde{\lambda}_i < 0 \\ 0, \tilde{\lambda}_i > 0 \\ \lambda_{Li}\dfrac{\lambda_{Ri} - \tilde{\lambda}_i}{\lambda_{Ri} - \lambda_{Li}}, \lambda_{Li} < 0 < \lambda_{Ri} \end{cases} \tag{3.18}$$

und die Berechnung des Flusses

$$\vec{F}(\vec{u}_{j-1}^n, \vec{u}_j^n) = \vec{f}(\vec{u}_{j-1}^n) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^* \alpha_i \vec{e}_i\ . \tag{3.19}$$

Stabilitätsbedingung

Eine Stabilitätsbedingung kann aus der Tatsache, dass sich benachbarte Riemannprobleme nicht beeinflussen dürfen, abgeleiten werden. Dies ist dann der Fall, wenn folgende Bedingung

$$\left| \lambda_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \right| \tag{3.20}$$

gilt, wobei $\lambda_{\max}$ die maximale Wellenausbreitungsgeschwindigkeit bezeichnet.

Diese Bedingung ist auch unter dem Namen Courant – Friedrich – Lewy – Bedingung (CFL) bekannt.

Behandlung der Quellterme

Bei dem bis jetzt beschriebenen Verfahren wurde der Quellterm $\vec{Q}$ nicht berücksichtigt, siehe Gleichung (3.7). Die Lösung des Problems, beschrieben in Gleichung (3.5), kann so behandelt werden, dass zuerst ein Zeitschritt mittels eines Upwind Verfahrens, wie in Kapitel 3.2.1 beschrieben, ohne Berücksichtigung der Quellterme gelöst wird. Anschließend wird der Effekt der Quellterme einfach hinzugefügt. Man erhält damit folgende Formulierung, [9]

$$^{0}\vec{u}_j^{n+1} = \vec{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\vec{F}\left(\vec{u}_j^n, \vec{u}_{j+1}^n\right) - \vec{F}\left(\vec{u}_{j-1}^n, \vec{u}_j^n\right)\right], \tag{3.21}$$

$$\vec{u}_j^{n+1} = {}^{0}\vec{u}_j^{n+1} + \Delta t \vec{Q}, \tag{3.22}$$

wobei die Hochstellung 0 jene Lösung bezeichnet die die Effekte der Quellterme nicht beinhaltet.

3.2.2 Randbedingungen

Die beschreibenden Differentialgleichungen werden wieder durch die Randbedingungen am Düsenein- und austritt vervollständigt. Um die Randbedingungen in der numerischen Umsetzung implementieren zu können, werden an beiden Enden des Rechengebietes je ein Knotenpunkt angefügt, siehe [6].

Randbedingungen am Düseneintritt

Am Düseneintritt wird eine Unterschallrandbedingung vorgeschrieben. Betrachtet man die Charakteristiken auf denen sich die Strömungskenngrößen ausbreiten bzw. die Eigenwerte der Roe-Matrix, so erkennt man, dass am Düseneintritt zwei in das Rechengebiet laufende Charakteristiken bei Unterschallströmung vorliegen. Es sind daher zwei der drei benötigten Strömungskenngrößen vorzugeben.

Ähnlich wie schon in der stationären Simulation wird der Ruhedruck $p_1^{(0)}$ und die Temperatur T_1 vorgegeben. Zur Berechnung der benötigten Erhaltungsgrößen Masse, Impuls und Gesamtenergie werden die Strömungskenngrößen Dichte, Geschwindigkeit und Temperatur benötigt.

Die Dichte erhält man über die thermische Zustandsgleichung für ideale Gase nach Gleichung (2.1) zu

$$\rho_0^n = \frac{p_0^n}{R \cdot T_0^n} \text{ mit } p_0^n = p_1 \text{ und } T_0^n = T_1 \text{, wobei } p_1^n = p_1^{(0)} - V_1^n \text{ ist.} \tag{3.23}$$

Der statische Druck in der Strömung p_1 wird, wie angegeben, aus dem Ruhedruck berechnet. Für die benötigte Geschwindigkeit wird als gute Näherung die Geschwindigkeit der Strömung im rechtsseitig angrenzenden Knoten herangezogen, die für diesen Zeitschritt bereits bekannt ist.

Die Geschwindigkeit wird, da sie nicht vorgegeben ist, durch lineare Interpolation ermittelt.

$$V_0^n = 2 \cdot V_1^n - V_2^n \tag{3.24}$$

Damit erhält man zusammengefasst für die Erhaltungsgrößen im Randknoten am Eintritt

$$\vec{u}_0^n = \begin{pmatrix} \rho_0^n \cdot A_0 \\ \rho_0^n \cdot V_0^n \cdot A_0 \\ \rho_0^n \cdot A_0 \left(c_{V,m} \cdot T_0^n + \frac{V_0^{n\,2}}{2} \right) \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Randbedingungen am Düsenaustritt

Am Düsenaustritt ändert sich nun die Randbedingung mit dem Übergang von Unterschall zu Überschall. Betrachtet man wieder die Charakteristiken am Austritt, so erkennt man, dass bei einer Unterschallströmung sich eine Charakteristik in das Rechengebiet ausbreitet. Es ist daher eine Strömungskenngröße am Austritt vorzuschreiben. Bei Überschallströmung breitet sich keine Charakteristik in das Rechengebiet aus und daher dürfen keine Kenngrößen vorgeschrieben werden.

Das Roe-Verfahren selbst beruht bei der Berechnung der Flüsse auf der Ausbreitung der physikalischen Größen entlang Charakteristiken. Mit dem Übergang von Unter- auf Überschall kommt es auch zum Wechsel des Vorzeichens des Eigenwertes λ_1. Somit geht die Unterschallrandbedingung von selbst in eine Überschallrandbedingung über.

Für die Unterschallrandbedingung wird der Druck p_e vorgeschrieben. Die beiden weiteren Kenngrößen werden wieder durch lineare Interpolation ermittelt.

$$p_{N+1}^n = p_e\,, \tag{3.26}$$

$$V_{N+1}^n = 2 \cdot V_N^n - V_{N-1}^n\,, \tag{3.27}$$

$$T_{N+1}^n = 2 \cdot T_N^n - T_{N-1}^n\,. \tag{3.28}$$

Damit erhält man zusammengefasst für die Erhaltungsgrößen unter Berücksichtigung der thermischen Zustandsgleichung für ideale Gase in dem Randknoten am Austritt

$$\vec{u}_{N+1}^n = \begin{pmatrix} \rho_{N+1}^n \cdot A_{N+1} \\ \rho_{N+1}^n \cdot V_{N+1}^n \cdot A_{N+1} \\ \rho_{N+1}^n \cdot A_{N+1} \left(c_{V,m} \cdot T_{N+1}^n + \frac{{V_{N+1}^n}^2}{2} \right) \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Es zeigt sich jedoch, dass die Randbedingung am Austritt erweitert werden muss. Denn wenn am Austritt eine Überschallströmung vorliegt, kann aufgrund der aus dem Rechengebiet hinauslaufenden Charakteristiken keine Information von den Randbedingungen mehr in das Rechengebiet gelangen. Damit ist aber auch die Möglichkeit, dass ein Verdichtungsstoß wieder zurück in das Rechengebiet läuft, nicht mehr gegeben.

Dieses Verhalten wird dadurch korrigiert, indem ein „künstlicher“ Stoß an das Ende des Rechengebietes gesetzt wird. Ist der vorgegebene Druck am Düsenende groß genug, so läuft der Stoß wieder zurück in das Rechengebiet.

So werden zuerst die physikalischen Größen $\hat{p}_N^n, \hat{V}_N^n, \hat{\rho}_N^n$ und $\hat{T}_N^n$ nach einen Stoß am Düsenende, wie in Kapitel 2.2.3 beschrieben, berechnet. Wird nun die Bedingung

$$\hat{p}_N^n < p_e \tag{3.30}$$

erfüllt, so wird an das Düsenende ein „künstlicher Stoß“, mit

$$p_{N+1}^n = \hat{p}_N^n\,,\ \ V_{N+1}^n = \hat{V}_N^n\,,\ \ \rho_{N+1}^n = \hat{\rho}_N^n \text{ und } T_{N+1}^n = \hat{T}_N^n \tag{3.31}$$

gesetzt.

3.2.3 Anfangsbedingungen

Um die Simulation starten zu können werden noch Anfangsbedingungen benötigt. Jedem Knotenpunkt muss ein Wert für die oben beschriebenen Erhaltungsgrößen

$$\vec{u}_j^0 = \vec{u}_{start}(j)$$

zugeordnet werden.

Eine genauere Diskussion der Wahl der Anfangsbedingung bzw. die damit verbundenen Hochfahrvorgänge der Düse erfolgt in Kapitel 3.3.2.

3.2.4 Ein- und Ausgabe der Simulationsdaten

Eingabe der Simulationsparameter

Die Eingabe der Simulationsparameter für die instationäre Simulation ist ident mit der Dateneingabe der stationären Simulation.

Die Betriebsparameter werden wieder aus dem Parameterfile „*nozzle_data.in*“, wie bereits in Kapitel 2.2.6 beschrieben, eingelesen. Die Stoffparameter werden wiederum aus dem im Betriebparameterfile angegebenen Datenfile und die Geometrie der Düse über das Datenfile „*geo.out*“ eingelesen.

Es können grundsätzlich für die instationäre und die stationäre Simulation die selben Eingabedateien verwendet werden, da sie die selbe Struktur und Daten beinhalten. Es ist jedoch zu beachten, dass aufgrund der Rechenzeit es sinnvoll erscheint für die instationäre Simulation die Anzahl der Knotenpunkte zu reduzieren.

Ausgabe der Simulationsergebnisse

Die Ausgabe der zeitabhängigen Strömungskenngrößen Geschwindigkeit, Machzahl, Druck, Temperatur und Dichte erfolgt jeweils in eine eigene Ausgabedatei.

Die Ausgabedateien sind so strukturiert, dass jede Zeile die Werte für einen Zeitpunkt der Rechnung beinhaltet. In den Spalten sind die Werte der entsprechenden Strömungskenngröße zu den einzelnen Knotenpunkten aufgelistet, wobei die erste Spalte die vergangene Echtzeit der Strömungssimulation beinhaltet.

Zeit	Druck [p]=bar					
[t]=s	Knoten 1	Knoten 2	....	...	Knoten N-1	Knoten N
0	12.0	4.0	…	…	4.0	4.0
1.0e-5	12.0	12.03	...	...	4.0	4.0
…	…	…	…	…	…	…

Tabelle 3.1: Datenstruktur für das Ausgabedatenfile *„pressure.out“*

Die Strömungskenngrößen werden in die in Tabelle 3.2 aufgelistete Ausgabedateien geschrieben. Die Einheit der Ausgabewerte ist in der letzten Spalte angegeben.

Strömungskenngröße	Ausgabedatei	Einheit
Geschwindigkeit	velocity.out	[V]=m/s
Machzahl	mach.out	[M]=1
Druck	pressure.out	[p]=bar
Dichte	density.out	[ρ]=kg/m³
Temperatur	temperature.out	[υ]=°C

Tabelle 3.2: Ausgabedateien der instationären Simulation

3.3 Ergebnisse

3.3.1 Stabilität der Verdichtungsstoßlage

Um nun einen stabilen Betrieb gewährleisten zu können, ist es notwendig den Verdichtungsstoß auch bei kleineren Druckschwankungen am Düsenaustritt im zweiten divergenten Düsenbereich zu halten.
Hierzu wird eine instationäre Simulation durchgeführt. Am Düsenaustritt wird der Druck, wie in Abbildung 3.1 dargestellt mit $p = p_0 + \Delta p \cdot \sin(\omega t)$, variiert. Die zeitliche Variation des Drucks am Düsenaustritt erfolgt dabei so langsam ($\omega = \frac{2\pi}{5} 10^3 s^{-1}$), dass der Vorgang annähernd quasistationär abläuft.

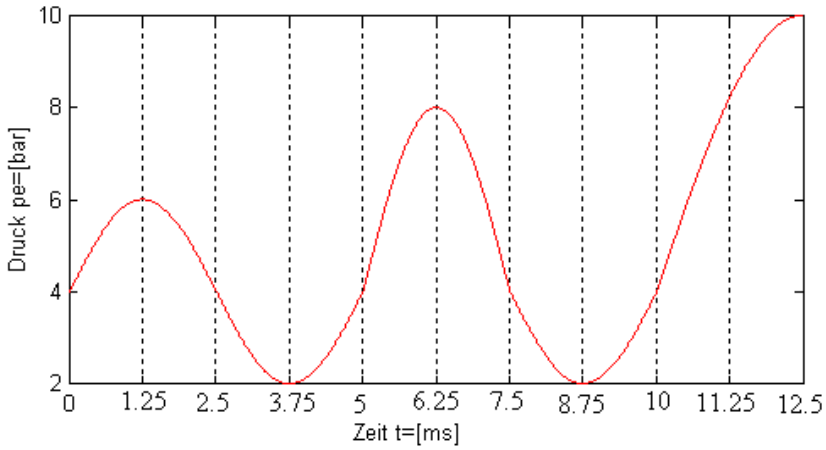
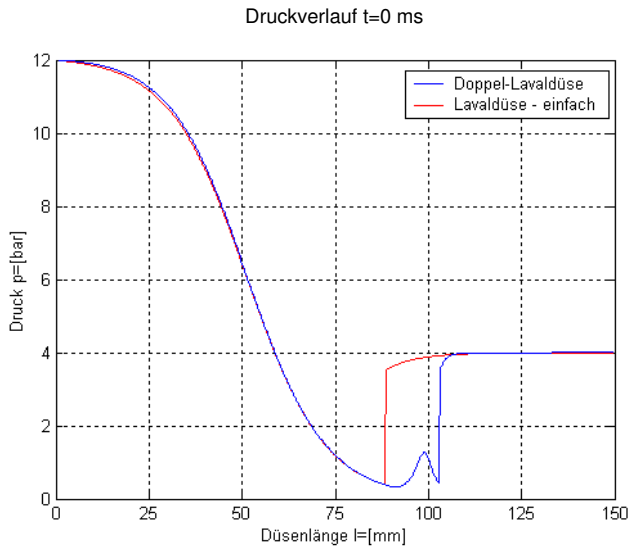
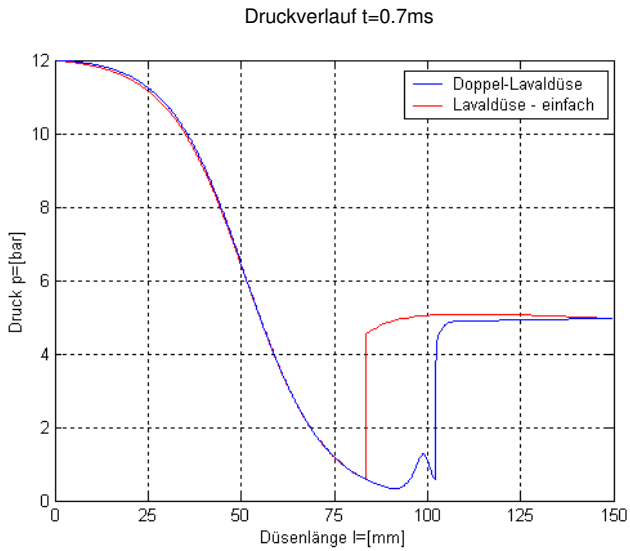


Abbildung 3.1: Zeitlicher Druckverlauf p_e am Düsenaustritt

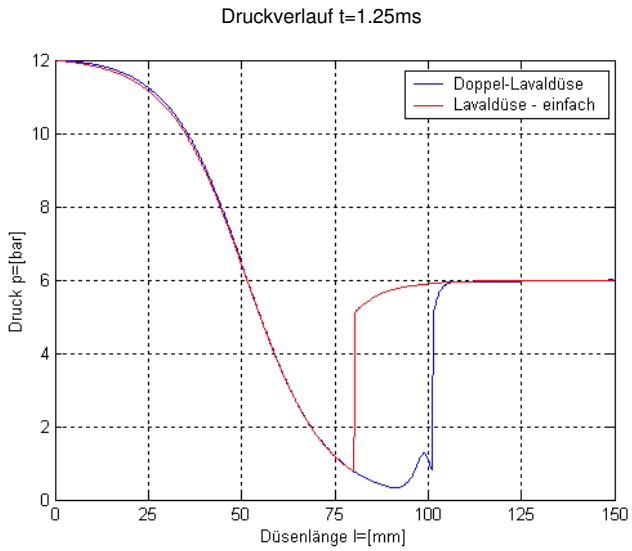
In der nachfolgenden Bildfolge, dargestellt in Abbildung 3.2, ist der Druckverlauf entlang der Düsenachse dargestellt. In rot ist der Druckverlauf für eine einfache Lavaldüse und in blau für eine Lavaldüse mit zusätzlicher Verengung, wie in Abbildung 2.9, dargestellt.
Man erkennt wie der Verdichtungsstoß durch Anheben des Düsenaustrittsdruckes stromaufwärts läuft. Durch die künstliche Verengung der doppelt-konvergenten-divergenten Lavaldüse auf den Querschnitt A_2* wird der Verdichtungsstoß im zweiten divergenten Düsenbereich gehalten. Bei der einfachen Lavaldüse wandert der Verdichtungsstoß weit in Richtung des kritischer Querschnittes A_1*. Für die simulierte Geometrie der doppelt-konvergent-divergenten Düse kann der Betriebsdruck von 4 bar am Düsenaustritt auf bis zu 8 bar (Abbildung 3.2.e) angehoben werden, ohne dass der Verdichtungsstoß über die Verengung springt.
Wird ein bestimmter Grenzdruck, hier knapp über 8bar, überschritten, so springt der Verdichtungsstoß in den ersten divergenten Düsenbereich (Abbildung 3.2.f). Sinkt der Druck am Düsenaustritt wieder ab so kann sich ein zweiter Verdichtungsstoß im zweiten divergenten Düsenteil ausbilden. Aufgrund der sich ausbildenden Überschallströmung zwischen erstem und zweitem divergenten Düsenbereich kann durch eine Änderung des Düsenaustrittsdrucks der erste Verdichtungsstoß nicht mehr an das Düsenende geschoben werden. Wie in Kapitel 3.3.2 noch genauer diskutiert wird, kann dieser Verdichtungsstoß nur durch eine Variation der Strömungsgrößen am Düseneintritt beeinflusst werden.



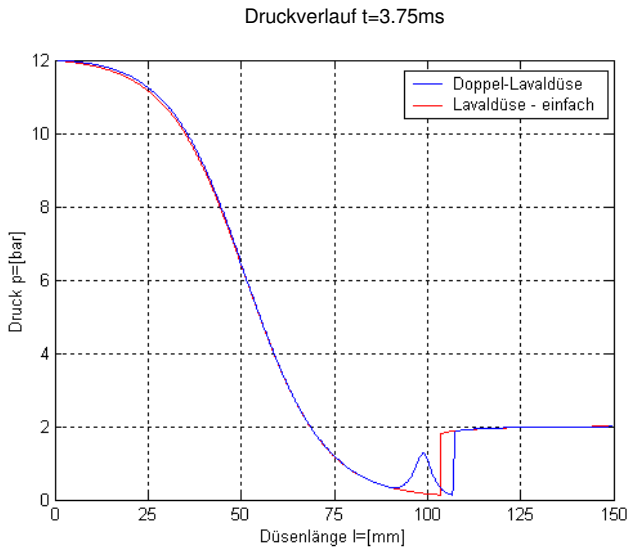
3.2.a



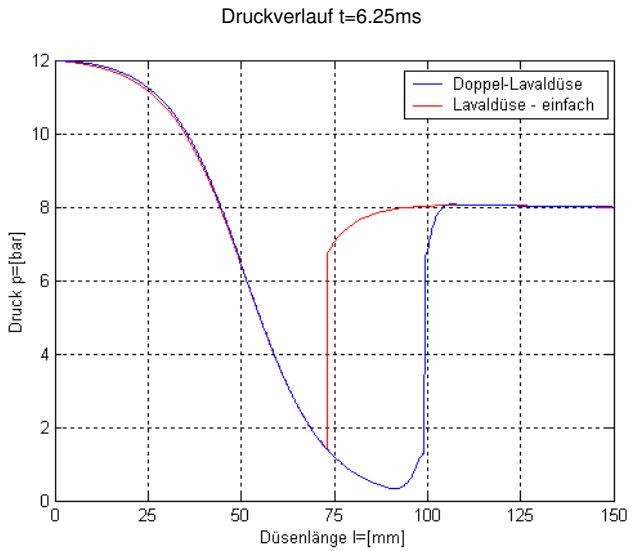
3.2.b



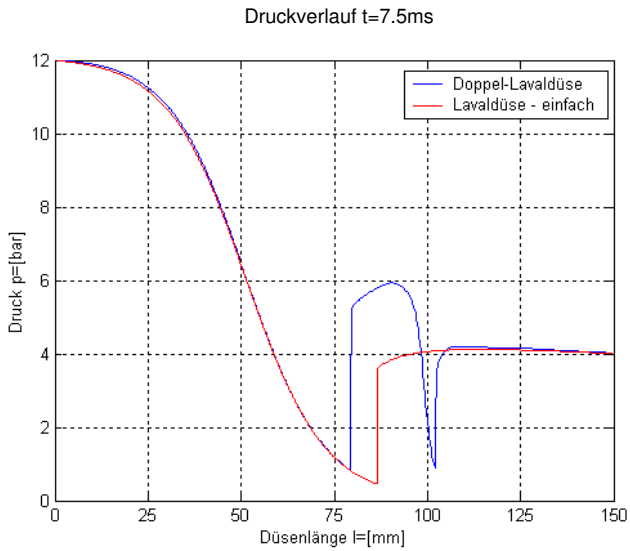
3.2.c



3.2.d



3.2.e

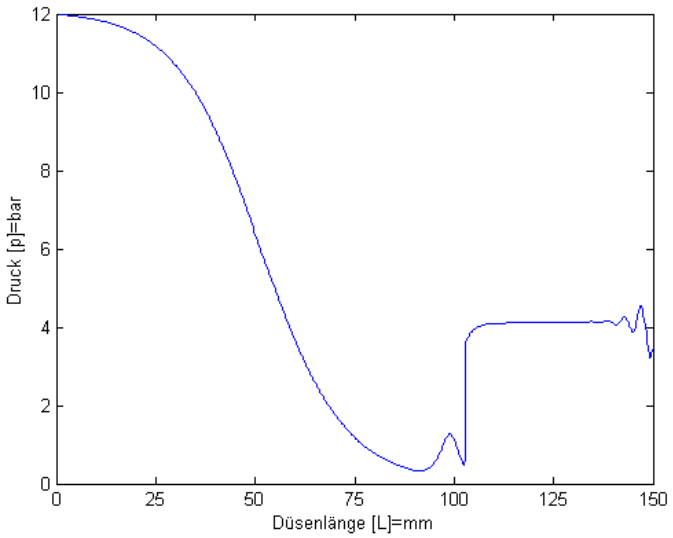


3.2.f

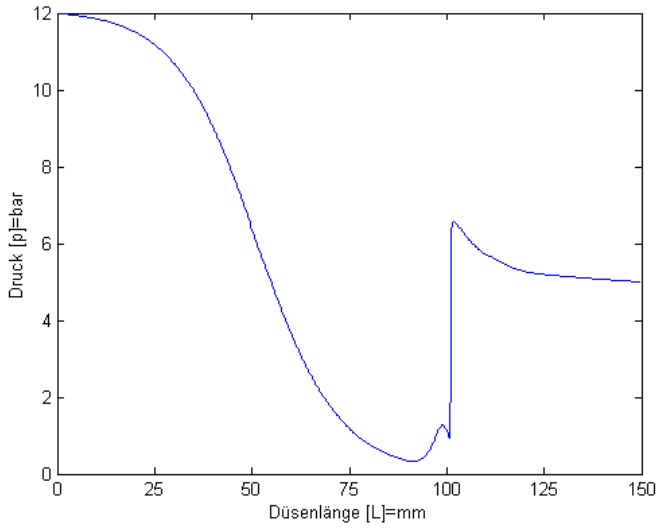
Abbildung 3.2: Druckverläufe entlang der Düsenachse zu verschiedenen Zeitpunkten

Es stellt sich nun die Frage, welche Auswirkung die Kreisfrequenz ω der Druckvariation auf den Druckverlauf hat. Bis jetzt wurde ein quasistationärer Anstieg des Druckes betrachtet.

Wird die Kreisfrequenz ω um den Faktor 100 gesteigert ($\omega = \frac{2\pi}{5} 10^5 s^{-1}$) kann nicht mehr von einer quasistatischen Drückänderung ausgegangen werden.
Für eine Druckamplitude Δp von 1 bar und der oben genannten Kreisfrequenz erhält man den in Abbildung 3.3.a dargestellten Druckverlauf. Es zeigt sich, dass eine derartige Druckvariation am Düsenende keinen merklichen Einfluss auf die Verdichtungsstoßlage hat. Die „Eindringtiefe“ dieser Druckstörung wird mit steigender Frequenz immer kleiner.



3.3.a



3.3.b

Abbildung 3.3: Druckverläufe bei schneller Variation des Düsenaustrittsdruckes im eindimensionalen, instationären Fall, Druckoszillation (3.3.a), Drucksprung (3.3.b)

Wesentlich kritischer ist jener Vorgang bei dem der Düsenendruck sprungartig angehoben wird. Für einen Drucksprung von 1 bar (4bar auf 5 bar) ist der kritische Druckverlauf in Abbildung 3.3.b dargestellt. Man erkennt, dass es durch diesen Drucksprung zu einer Druckerhöhung im Bereich des Verdichtungsstoßes bis auf ca. 6.6bar kommt. Derartige Drucksprünge können nun dazu führen, dass der Verdichtungsstoß trotz geringem Düsenenddruck über die Querschnittsverengung springt.

Eine genaue Diskussion von maximal zulässigen Druckanstiegsgeschwindigkeiten erfolgt in Kapitel 4.3.4.

3.3.2 Anfahrvorgänge der Lavaldüse

Wie in Kapitel 2.3.6 bereits gezeigt, gibt es für eine doppelt-konvergent-divergente Lavaldüse Mehrfachlösungen der Verdichtungsstoßlage. Für den technischen Einsatz zum Absaugen von Flaregas ist nur jener Betriebszustand erwünscht, bei dem sich der Verdichtungsstoß im zweiten divergenten Düsenteil befindet.
Es stellt sich nun die Frage unter welchen Bedingungen sich diese Lösung einstellt. Hierzu werden die folgenden Anfahrvorgänge untersucht:

A. Ventil am nach dem Düsenaustritt

Es befindet sich ein Ventil nach der Lavaldüse. Die gesamte Düse befindet sich somit auf dem Ruhedruckniveau $p_1^{(0)}$. Die Düse ist „gefüllt“, siehe Abbildung 3.4a.

B. Ventil vor dem Düseneintritt

Es befindet sich ein Ventil vor der Lavaldüse. Die gesamte Düse befindet sich auf dem Ruhedruckniveau $p_2^{(0)}$. Die Düse ist „leer“, siehe Abbildung 3.4b.

Als Drücke für die Simulation des Anfahrvorganges werden die zur Verfügung stehenden Betriebsdrücke von 12bar und 4bar sowie der Umgebungsdruck mit 1bar herangezogen. Weiters wird zum Anfahren ein Druckniveau von 1200 bar eingeführt.

Für die darauf resultierenden Anfahrmöglichkeiten erhält man nachstehende Resultate:

Fall A – Ventil nach dem Düsenaustritt:

Ruhedruckniveau $p_1^{(0)}$	Ruhedruckniveau $p_2^{(0)}$	Stoßlösung
12 bar	4 bar	Doppel-Verdichtungstoß
12 bar	1 bar	
1200 bar	4 bar	
1200 bar	1 bar	

Tabelle 3.3a: Simulationsergebnis Anfahrvorgang Fall A

Fall B – Ventil vor dem Düsenaustritt:

Ruhedruckniveau $p_1^{(0)}$	Ruhedruckniveau $p_2^{(0)}$	Stoßlösung
12 bar	4 bar	Doppel-Verdichtungsstoß
12 bar	1 bar	
1200 bar	4 bar	
1200 bar	1 bar	Verdichtungsstoß im 2.divergenten Teil

Tabelle 3.3b: Simulationsergebnis Anfahrvorgang Fall B

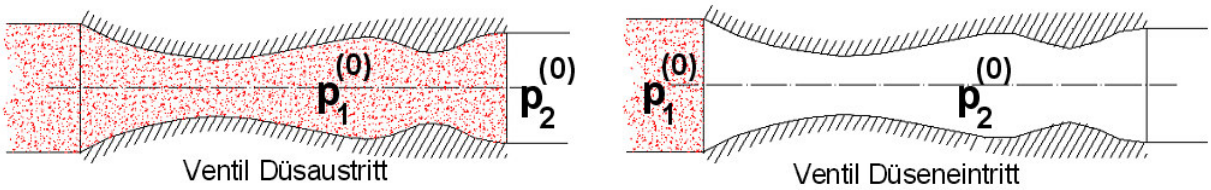


Abbildung 3.4: Varianten der Ventilanordnung beim Anfahrvorgang

Wie die in Tabelle 3.3 zusammengefassten Simulationsergebnisse zeigen, kann die gewünschte Lösung, bei der der Verdichtungsstoß im zweiten divergenten Düsenbereich liegt, nur erreicht werden, wenn sich das Öffnungsventil vor der Düse befindet. Die Düse muss sozusagen „leer“ sein vor dem Anfahrvorgang.

Aber auch bei „leerer“ Düse ist zum Anfahren ein Druckstoß notwendig um die gewünschte Lösung zu erreichen. Die Größe des Druckstoßes ist abhängig vom Verhältnis der beiden kritischen Querschnitte $\Pi = \frac{p_1^{(0)}}{p_2^{(0)}} = f(\frac{A_1*}{A_2*})$. Je näher das Verhältnis der Querschnitte gegen eins geht, umso größer muss der Anfahrdruckdruckstoß gewählt werden. Umgekehrt kann im Betrieb jedoch dann auch eine größere Druckvariation am Düsenende zugelassen werden, ohne dass der Verdichtungsstoß zurückspringt.
Dieser Druckstoß wird nur eine kurze Zeitdauer zum Anfahren der Lavaldüse benötigt. Danach kann der Druck wieder auf Betriebsniveau abgesenkt werden, ohne dass der Verdichtungsstoß aus dem zweiten Düsenteil zurückspringt.

Die gleiche Problematik, wie beim Anfahrvorgang, tritt auf, wenn der Verdichtungsstoß im Betrieb in den ersten divergenten Düsenbereich springt. Um den Verdichtungsstoß wieder in den hinteren Düsenteil zu bekommen sind folgende Maßnahmen vorstellbar:

- *Der Verdichtungsstoß wird durch einen Druckstoß am Düseneintritt hinausgeschoben*

  Diese Vorgangsweise wurde oben bereits diskutiert.

- *Variation des zweiten kritischen Querschnittes A_2**

  Durch Variation bzw. Vergrößerung des Querschnittes A_2* könnte die Doppel-Lavaldüse in eine einfache Lavaldüse übergeführt werden. Der Stoß würde sich von selbst an das Düsenende bewegen. Wird nun der Querschnitt wieder verengt, so bleibt der Verdichtungsstoß im zweiten divergenten Düsenteil stehen.
  Konstruktive Ausführungen bei denen die Düsenwand im Bereich des Querschnittes A_2* durch eine Membrane aufgeblasen und der Querschnitt somit verengt werden kann, wären möglich. Eine zweite Ausführung, bei der ein beweglicher Dorn in eine einfache Lavaldüse geschoben wird und somit bei Bedarf den Querschnitt verengt ist auch vorstellbar.

Kapitel 4

2D - rotationssymmetrische Simulation

Um vergleichen zu können ob die Näherung der Düsenströmung als 1D-Strömung gerechtfertigt ist und zweidimensionale Effekte genauer studieren zu können, wird eine 2D-Simulation mit dem Programmpaket FLUENT durchgeführt.

4.1 Modell

4.1.1 Gleichungslöser

Für die Berechnung der Strömung wird eine zweidimensionale – axialsymmetrische Simulation durchgeführt. Als Gleichungslöser wird der implizite „coupled solver“ verwendet. Dieser berechnet alle Strömungskenngrößen gekoppelt und eignet sich besonders für die Berechnung kompressibler Strömungen mit hoher Strömungsgeschwindigkeit.
Um eine Konvergenz der Lösung zu erreichen wird der Iterationsvorgang mit einem instationären Rechenlauf gestartet. Sobald sich nach ausreichend vielen Zeitschritten eine annähernd stationäre Lösung eingestellt hat, kann ein nachfolgender stationärer Rechenlauf gestartet werden.

4.1.2 Turbulenzmodell

Da die Strömung reibungsbehaftet gerechnet werden soll, muss ein Turbulenzmodell verwendet werden. Hierzu wird das einfache Eingleichungsmodell von Spalart-Allmaras herangezogen. Die Modellierung der Turbulenz erfolgt über die Lösung einer Transportgleichung für die Wirbelviskosität. Dieses Modell eignet sich aufgrund des einfachen Aufbaus auch für gröber strukturierte Netze und liefert für unsere Anforderungen befriedigende Ergebnisse.

4.1.3 Stoffeigenschaften

Als strömendes Medium wird wieder Erdgas verwendet, dass als ideales Gas modelliert wird. Die Stoffeigenschaften werden, wie bereits in Kapitel 2.3.2 angegeben, verwendet. Dabei werden die spezifische Wärmekapazitäten als temperaturabhängig modelliert.

4.1.4 Randbedingungen

Für die Randbedingungen werden die selben Bedingungen wie in der 1D-Simlation verwendet, wie sie in Abbildung 4.1 ersichtlich sind. Der vorgeschriebene Wert der einzelnen Randbedingungen wird dabei je nach Untersuchung ein wenig variiert.

4.2 Numerische Aspekte & Geometrie

4.2.1 Geometrie

Geometrie der einfachen Lavaldüse

Für eine erste Vergleichsrechnung wird die Geometrie der einfachen Lavaldüse, wie in Abbildung 2.2 dargestellt, verwendet. Die Zumischöffnung für den Flaregasmassenstrom wird mit einer Spaltweite von 1mm modelliert. Die Länge dieses Zumischkanals beträgt 10 Spaltweiten. Dies entspricht somit einem Kanal von 10mm Länge. Die Ausrichtung des Zumischkanals erfolgt quer zur Hauptströmungsrichtung.

Geometrie der doppelt-konvergent-divergenten Lavaldüse

Zur Simulation der doppelt-konvergent-divergenten Düse wird die Geometrie, wie sie in Abbildung 2.9 dargestellt ist, herangezogen. Die Spaltweite der Zumischöffnung beträgt dabei 1mm und die Länge des Kanals 20mm. Die Ausrichtung des Zumischkanals erfolgt in Richtung der Hauptströmungsrichtung.

4.2.2 Netzgenerierung

Zur Generierung des Rechennetzes wird die Software Gambit verwendet. Die Vernetzung der vorgegebenen Geometrie erfolgt durch Dreieckselemente.
Dabei wird das Netz in Wandnähe so weit verfeinert, dass die vorgegebenen Kriterien für die Verwendung von Wandfunktionen in der Turbulenzmodellierung eingehalten werden. Weiters wird im Bereich der Zumischung des Flaregases ein feiner strukturiertes Netz verwendet. Aus Gründen der Rechenzeit wird das Netz in Richtung des Düsenein- und austritts hin ein wenig gröber gestaltet.

4.3 Ergebnisse

4.3.1 Vergleich der Ergebnisse der 1D- und 2D Simulation

Um einen Eindruck über die Aussagekraft der eindimensionalen Ergebnisse zu bekommen, wird eine Vergleichsrechnung mit einer einfachen Lavaldüse durchgeführt.
Der Druck am Düsenaustritt wird vorerst so gering gewählt, dass eine reine Überschallströmung im divergenten Düsenteil entsteht, siehe Abbildung 4.1. Um die selben Bedingungen wie in der 1D-Rechnung zu erhalten, wird für die Flaregaszumischung ein Massenstrom von 0.002kg/s am Flaregaseintritt vorgegeben und dieser quer zur Hauptströmungsrichtung zugemischt.

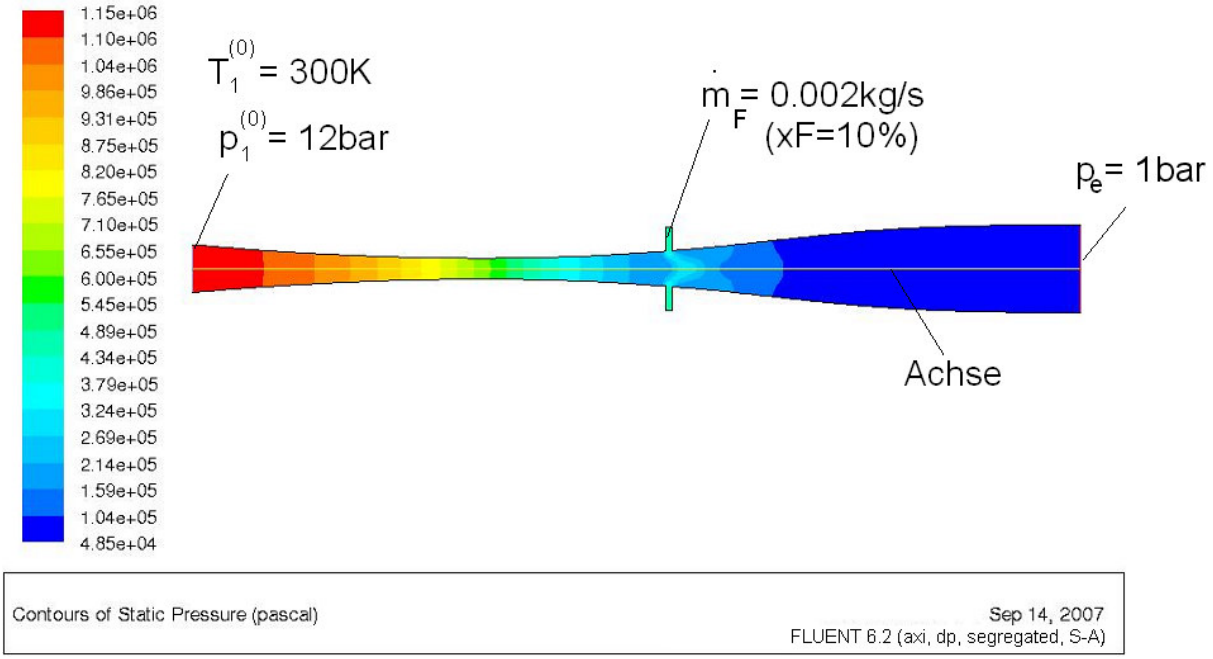


Abbildung 4.1: Randbedingungen und Rechengebiet der 2D –Simulation der einfachen Lavaldüse

Für den Vergleich der Druckverläufe der 1D- und der 2D Simulation wird der Druckverlauf der 2D-Rechnung entlang der Düsenachse ausgewertet.

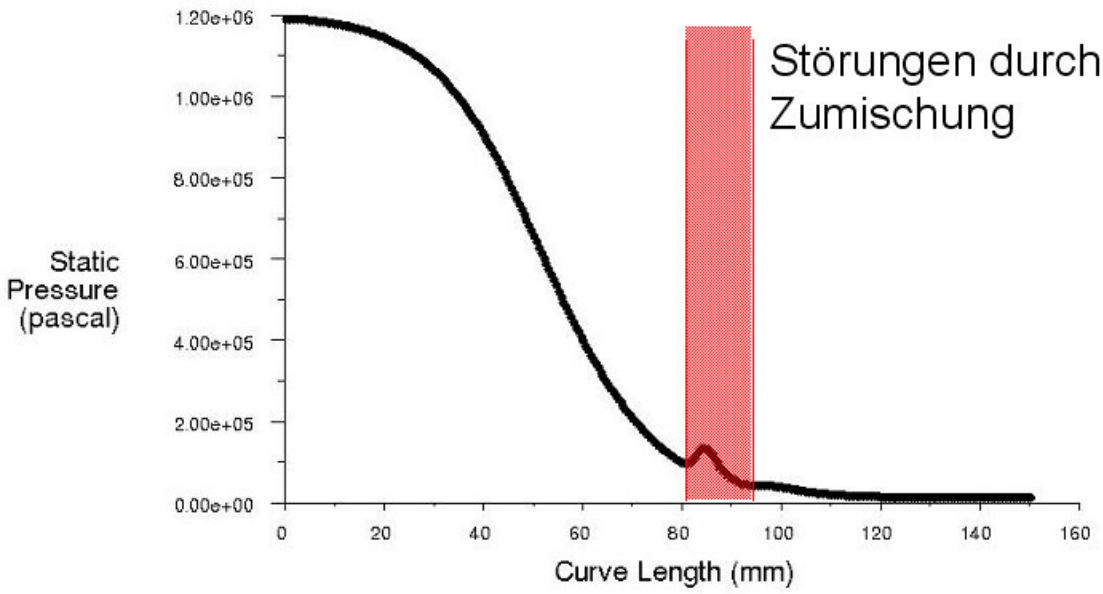


Abbildung 4.2: Druckverlauf entlang der Düsenachse

Aus Abbildung 4.2 ist der Einfluss der Zumischung des Flaregases auf die Strömung zu erkennen. Damit kann eine erste Abschätzung, wie weit der Verdichtungsstoß von der Zumischstelle entfernt sein muss um wieder auf eine über den Querschnitt gleichförmige (eindimensionale) Strömung zu treffen, durchgeführt werden. Diese Distanz entspricht in diesem Fall etwa 15 mm, das sind drei Düsendurchmesser an dieser Stelle.

Der Vergleich der beiden durchgeführten Simulationen ist nun in Abbildung 4.3 dargestellt. Man erkennt eine sehr gute Übereinstimmung in weiten Bereichen der Düse. Abweichungen sind wie zu erwarten war im Bereich der Flaregaszumischung, wo die 2D Effekte dominieren, zu erkennen.

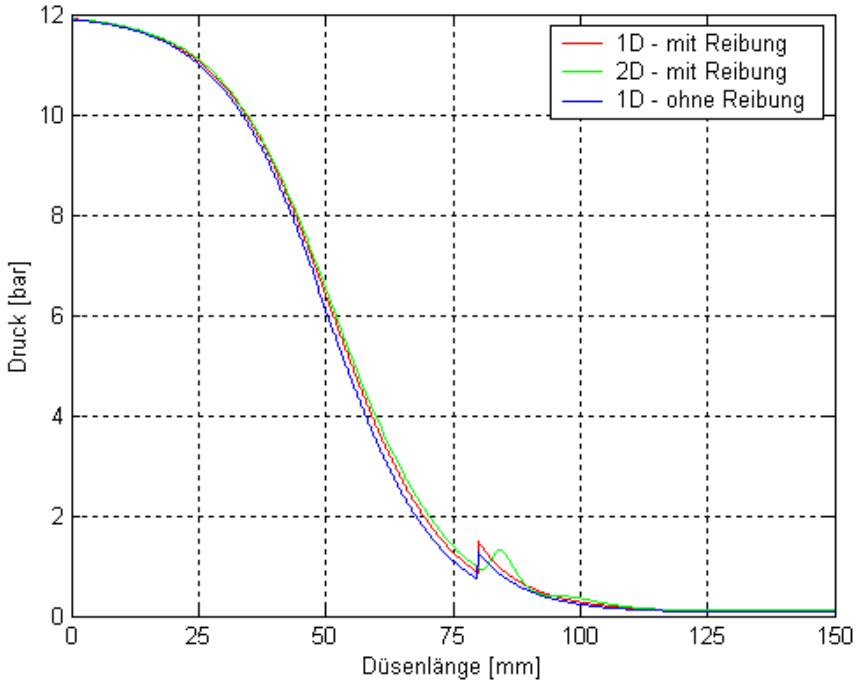


Abbildung 4.3: Vergleich der Druckverläufe der 1D- und 2D Simulation

4.3.2 Einfluss der Richtung der Flaregaszumischung

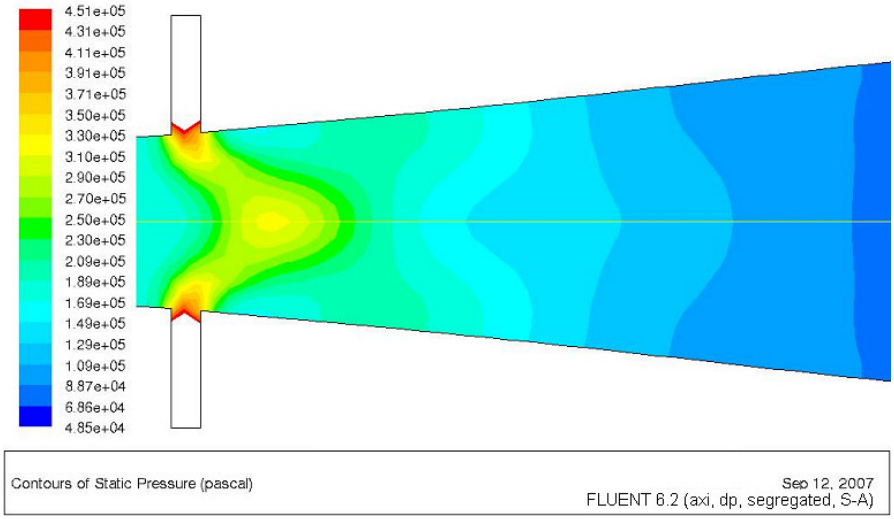


Abbildung 4.4: Detailansicht Contourplot statischer Druck im Bereich der Flaregaszumischung

Betrachtet man den Bereich der Flaregas-Zumischung genauer, erkennt man dass für die Zumischung des Flaregasmassenstroms von 0.002kg/s ein Druck von etwa 4.5bar notwendig ist. Um untersuchen zu können, welcher Massenstrom durch die Lavaldüse angesaugt wird, muss die Randbedingung am Flaregaseintritt auf eine Druckrandbedingung abgeändert werden.
So wird ein Ruhedruck $p_F^{(0)}$ von 0.9bar und eine Ruhetemperatur $T_F^{(0)}$ von 300K am Flaregaseintritt vorgeschrieben.

Weiters wird auch der Einfluss der Richtung der Flaregaszumischung untersucht. So werden die beiden grundsätzliche Varianten behandelt:

I. *Flaregaszumischung quer zur Hauptströmungsrichtung*

Die Flaregaszumischung kann beispielsweise über einzelne kleine Bohrungen in der Wand der Lavaldüse erfolgen.

II. *Flaregaszumischung in Richtung der Hauptströmungsrichtung*

Die Flaregaszumischung in Strömungsrichtung kann wie in Kapitel 2.3.6 bereits angedeutet erfolgen. Der durch die Querschnittserweiterung entstehende Ringspalt kann zur Zumischung verwendet werden.

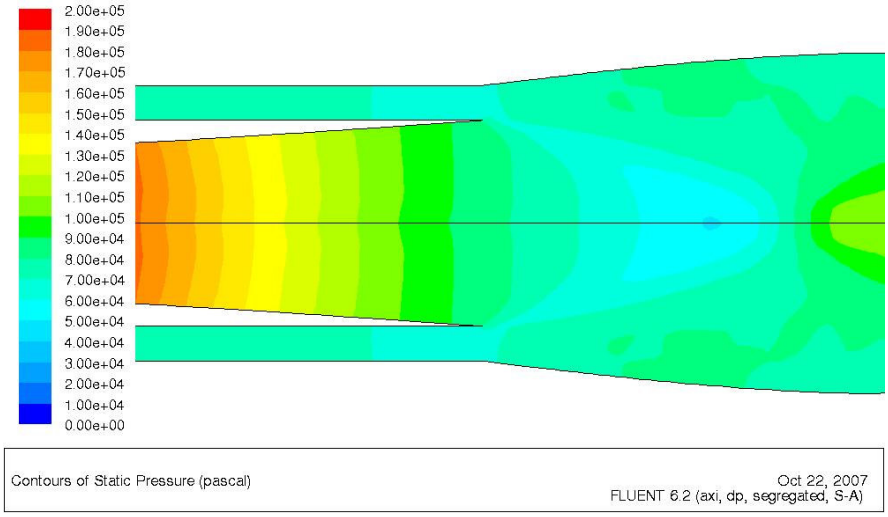


Abbildung 4.5: Detailansicht Contourplot statischer Druck bei Zumischung in Strömungsrichtung

Wird die Zumischöffnung nicht wie in Abbildung 4.4 dargestellt quer zur Strömungsrichtung sondern in Strömungsrichtung, siehe Abbildung 4.5, ausgerichtet, so erhält man für einen Ruhedruck $p_F^{(0)}$ von 0.9 bar einen wesentlich höheren Anteil an zugemischten Flaregas. Die Ergebnisse des Einflusses der Zumischrichtung sind in Tabelle 4.1 aufgelistet.

Zumischrichtung	Treibmassenstrom $\dot{m}$	angesaugter Flaregasms $\dot{m}_F$	Zumischverhältnis x_F
quer z. Strömung	0.01954 kg/s	0.000209 kg/s	1.07%
mit Strömung	0.01961 kg/s	0.002545 kg/s	12.97%

Tabelle 4.1: Einfluss der Zumischrichtung auf die Flaregaszumischung

Wie aus Tabelle 4.1 ersichtlich ist, kann ein technisch verwendbares Zumischverhältnis x_F nur bei einer Zumischung in Strömungsrichtung erreicht werden. Dabei wird bei den gegebenen Betriebsparametern ein Verhältnis von ca. 13% erreicht, dass oberhalb der gesetzten Zielmarke von 10% zugemischten Flaregases liegt.

4.3.3 Simulation der doppelt-konvergent-divergenten Lavaldüse

- Fall1: stationäre Lösung

Zur Verifikation der Funktionsweise auch mittels axialsymmetrischer 2D Simulation wird nun die gesamte doppelt-konvergent-divergente Lavaldüse mit dem Programmpaket Fluent berechnet. Dabei werden alle zuvor einzeln bereits untersuchten Modifikationen wie die Querschnittserweiterung mit Flaregaszumischung in Strömungsrichtung, berücksichtigt um eine abschließende Grundlage für die Funktionsbewertung der Düse zu bekommen.

Als Turbulenzmodell wird wieder ein Eingleichungsmodell nach Spalart Allmaras verwendet. Die Randbedingungen, werden wie in Abbildung 4.6 angegeben, vorgeschrieben.

Ruhedruck Düseneintritt $p_1^{(0)}$	12 bar
Ruhetemperatur Düseneintritt $T_1^{(0)}$	300 K
Druck am Düsenaustritt p_e	4 bar
Ruhedruck Flaregaseintritt $p_F^{(0)}$	0.9 bar
Ruhetemperatur Flaregas $T_F^{(0)}$	300 K

Tabelle 4.2: Randbedingungen 2D-Simulation in Fluent

Um die gewünschte stationäre Lösung, bei der der Verdichtungsstoß im zweiten divergenten Düsenbereich liegt, zu erreichen, wird eine instationäre Rechnung durchgeführt. Dabei wird zum Hochfahren der Düse der Ruhedruck $p_1^{(0)}$ am Eintritt auf 1200 bar und der Druck am Düsenaustritt p_e auf Umgebungsniveau von 1 bar gesetzt. Die Initialisierung der Anfangsbedingungen erfolgt indem der Druck in der Düse auf Umgebungsdruckniveau von 1bar, die Geschwindigkeit auf null und die Temperatur auf Eintrittstemperatur von 300K gesetzt wird. Diese Vorgangsweise wurde bereits in Kapitel 3.3.2 genauer diskutiert. Durch den entstehenden Druckstoß wird die gewünschte Lösung erreicht. Nach dem „Anfahrvorgang“ können die Drücke an die in Tabelle 4.2 angegeben Werte angeglichen und damit eine stationäre Simulation durchgeführt werden.

Wie auch aus Abbildung 4.6 ersichtlich ist, wird der Verdichtungsstoß durch die Verengung im zweiten divergenten Düsenteil gehalten und die Zumischung des Flaregases kann ungestört ablaufen. Die Distanz zwischen der Zumischung und dem Verdichtungsstoß beträgt etwa 20 mm. Im Bereich der Zumischung erkennt man aus Abbildung 4.7 einen Bereich sehr langsamer Strömung, der sich bis kurz über die Verengung ausdehnt. Dies ist auch in der Abflachung des Druckverlaufes entlang der Wand in Abbildung 4.8 zu erkennen. Erst ab diesem Bereich sind die Vorraussetzungen für eine eindimensionale Strömung wieder gegeben.

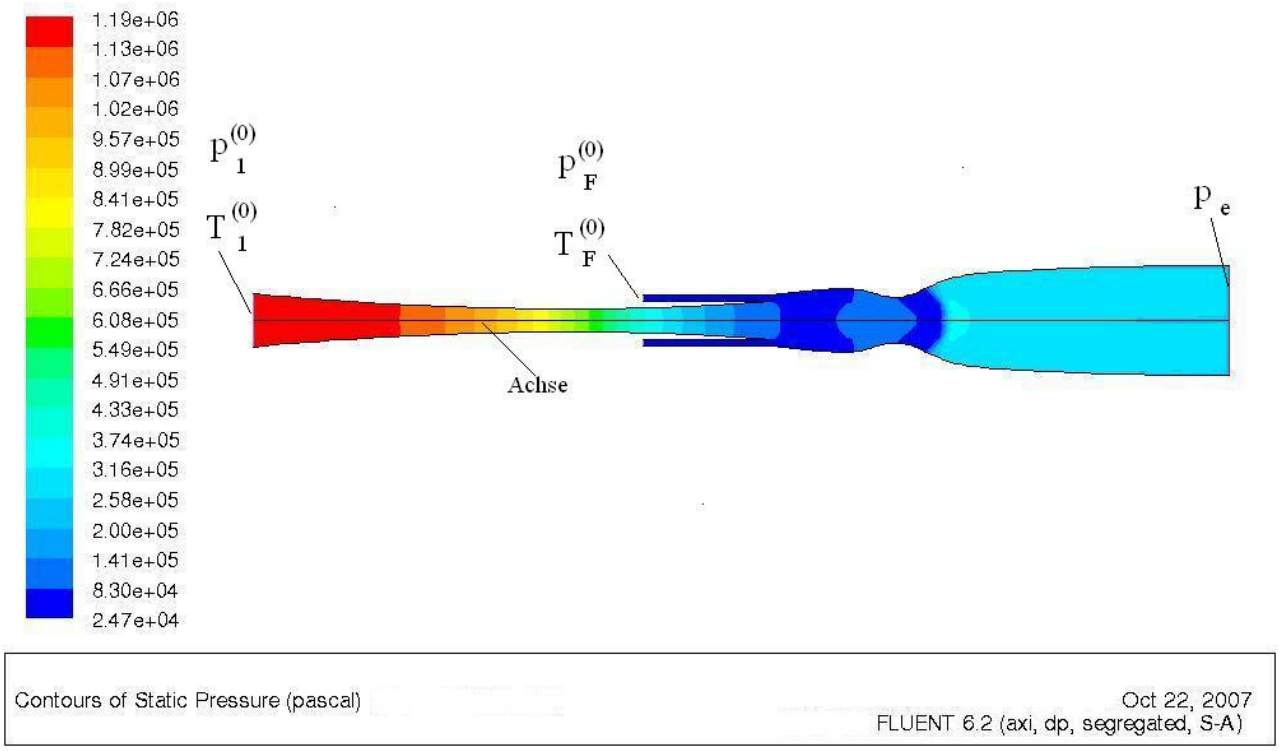


Abbildung 4.6: Contourplot statischer Druck mit angegebenen Randbedingungen

Zusammengefasst erhält man für die Simulationsresultate der doppelt-konvergent-divergenten Lavaldüse die in Tabelle 6.10 angegebenen Werte.

Durchmesser Düseneintritt D_1	8.08 mm
krit. Durchmesser D_1 *	3.55 mm
krit. Durchmesser D_2 *	5.60 mm
Durchmesser Düsenaustritt D_e	14.9 mm
Düsenlänge L	150 mm
Spalthöhe Flaregaszumischung s	1.0 mm
Position Flaregaszumischung x_{mix}	80 mm
Position Verdichtungsstoß x_s (Achse)	105 mm
Position Verdichtungsstoß x_s (Wand)	103 mm
Treibmassenstrom $\dot{m}$	0.0196 kg/s
Flaregasmassenstrom $\dot{m}_F$	0.00253 kg/s
Zumischverhältnis x_F	12.9 %

Tabelle 4.3: Simulationsergebnisse 2D Simulation

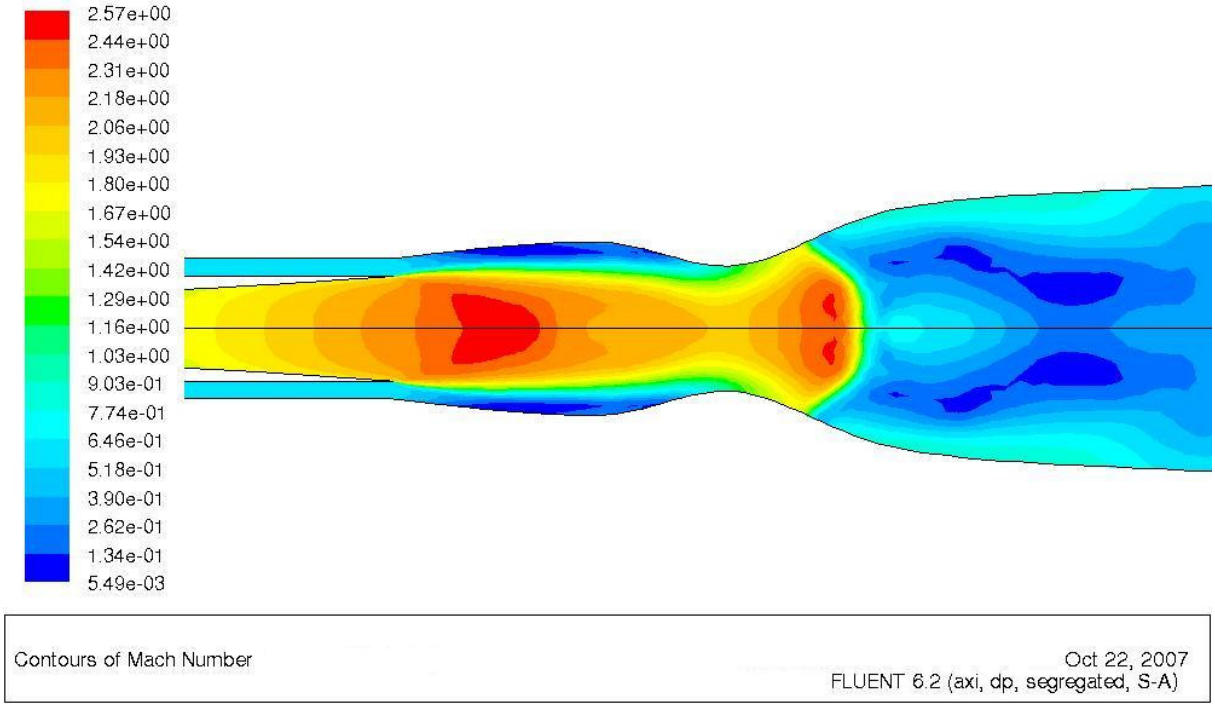


Abbildung 4.7: Fall 1: stationäre Lösung: Detailansicht Contourplot Machzahl im Bereich der Zumischung und des Verdichtungsstoßes

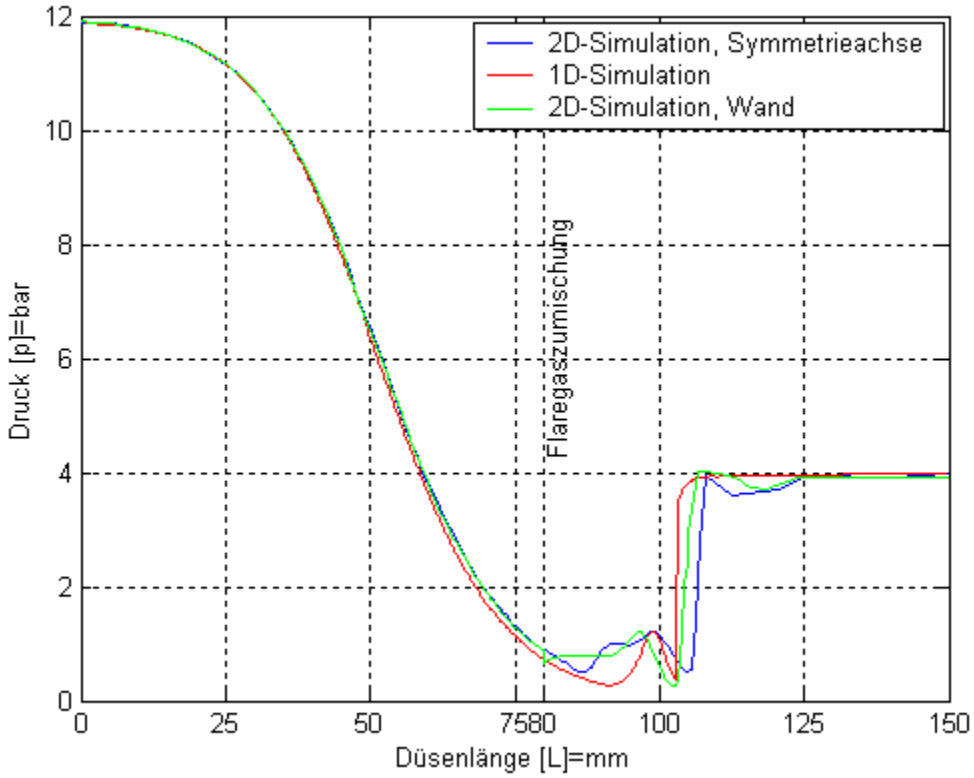


Abbildung 4.8: Fall 1: stationäre Lösung: Vergleich der Druckverläufe zwischen 1D- und 2D Simulation

Wie man aus dem Vergleich der Druckverläufe der eindimensionalen und der axialsymmetrischen 2D Simulation, siehe Abbildung 4.8, erkennt, zeigen die Verläufe, bis auf jene Bereiche in denen zweidimensionale Effekte dominieren, eine gute Übereinstimmung. Dabei ist zu beachten, dass der Druckverlauf bei der zweidimensionalen Simulation einerseits an der Düsenachse und andererseits an der Düsenwand ausgewertet wurde. Wie auch aus Abbildung 4.7 ersichtlich ist, variiert die Stoßposition über den Querschnitt, die Stoßfläche ist gekrümmt. Es ist somit, wie auch im Vergleich der beiden Rechnungen sichtbar, mit geringen Abweichungen in der Verdichtungsstoßposition zwischen der zweidimensionalen und der eindimensionalen Simulation zu rechnen.

- Fall2: quasistationäre Druckanhebung

Wie in Abbildung 4.7 und 4.8 und bereits kurz diskutiert wurde, liegt der Verdichtungsstoß im Bereich der Wand näher an der Verengung als im Bereich der Symmetrieachse. Dieser Effekt wird auf die nicht vollständige Durchmischung und Wiederherstellung einer eindimensionalen Strömung zurückgeführt. Weiters dürfte auch die durch die Flaregaszumischung entstehender Bereich der langsameren Strömung im Bereich der Wand einen Einfluss haben.

Es ist nun naheliegend, dass der Verdichtungsstoß durch diese Effekte bereits bei wesentlich geringeren Drücken, als in der eindimensionale Rechnung ermittelt, über die Verengung „schlüpfen“ kann.

Hierzu wird nun in der zweidimensionalen Simulation der Druck am Düsenaustritt so lange gesteigert bis der Verdichtungsstoß in den ersten divergenten Düsenbereich gesprungen ist. Der Druck wird dabei quasistationär, ausgehend von 4bar mit einer Geschwindigkeit von 0.1bar/ms, gesteigert und alle 0.2 bar für eine Zeit von 0.5ms gehalten um eine stationäre Lösung zu erhalten.

Als charakterirische Größe wird die stationäre Verdichtungsstoßposition x_s in Abhängigkeit vom Druck am Düsenaustritt p_e herangezogen. Der Verlauf der Stoßposition ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Man erkennt, dass in der zweidimensionalen Simulation der Verdichtungsstoß bei bereits ca. 6 bar über die Verengung springt. Nach der eindimensionalen Simulation sollte dies erst bei einem Druck von ca. 8bar geschehen.

Weiters ist zu erkennen, dass sich mit steigenden Drücken die Differenz der Stoßlage zwischen Symmetrieachse und Wand vergrößert. Dies ist ein erstes Indiz dafür, dass das „Durchschlüpfen“ des Verdichtungsstoßes von der Wand ausgeht. Nachdem der Stoß in den ersten divergenten Düsenbereich gesprungen ist, sind die Stoßlagen von Achse und Wand wieder deckungsgleich.

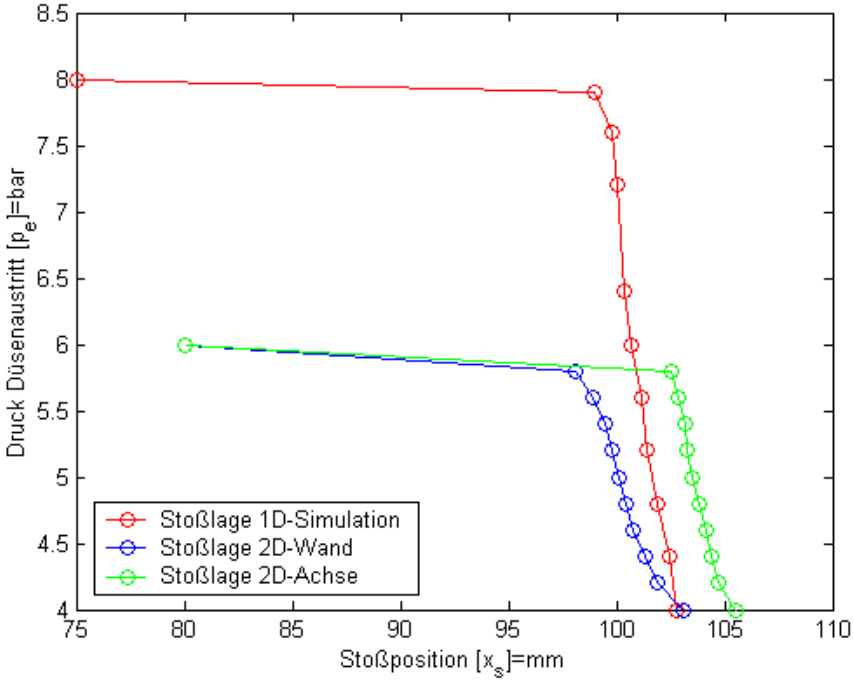
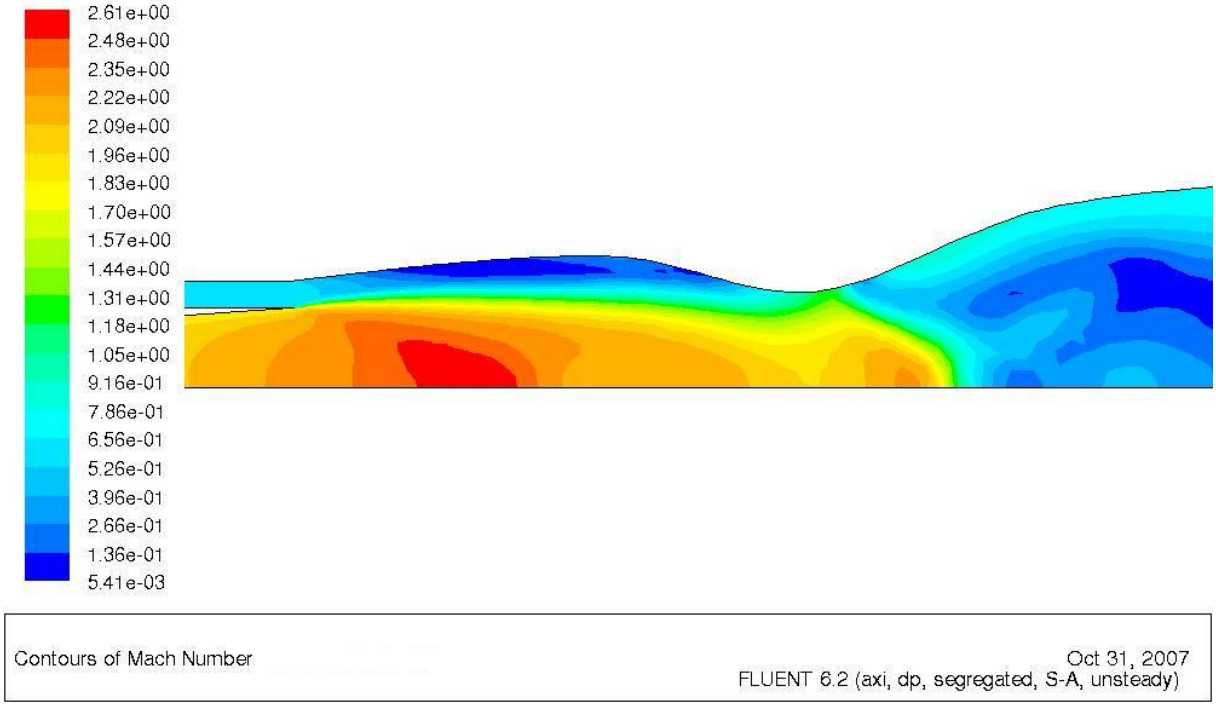


Abbildung 4.9: Lage der stationären Verdichtungsstoßlage in Abhängigkeit vom Düsenaustrittsdruck

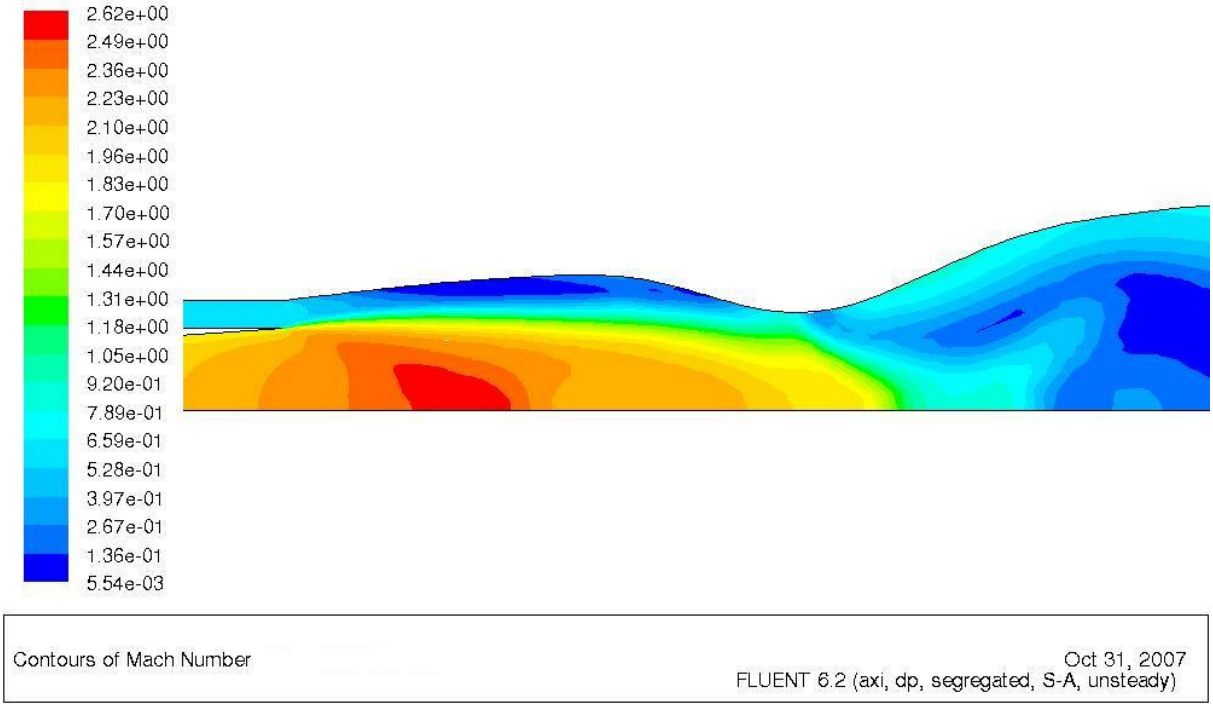
Die Auswertung der Entwicklung des Druckverlaufes bei einem Düsenenddruck von 6bar, wie in Abbildung 4.11a-d dargestellt, erfolgt zu verschiedenen Zeitpunkten an der Düsenwand sowie an der Symmetrieachse. In Abbildung 4.11.d ist zusätzlich noch als Vergleich das Ergebnis der eindimensionalen Simulation eingetragen.

Wie in Abbildung 4.11.c ersichtlich ist, sollte der Verdichtungsstoß nach der eindimensionalen Simulation durch die Verengung jedoch zurückgehalten werden.
Ganz deutlich ist auch zu erkennen, dass dieser Effekt von der Düsenwand ausgeht. So ist in der Bildfolge 4.11 zu erkennen, dass der Verdichtungsstoß im Bereich der Düsenwand sich in Richtung Verengung bewegt, während auf er auf der Symmetrieachse kaum eine Änderung erfährt. Dieser Effekt ist für den Zeitpunkt kurz nach dem „Durchschlüpfen“ des Verdichtungsstoßes in Abbildung 4.10 dargestellt.

Wie sich daher zeigt, wird durch die zweidimensionalen Effekte im Bereich der Flaregaszumischung und der Querschnittsverengung die Rückhaltewirkung des Stoßes der Verengung herabgesetzt.

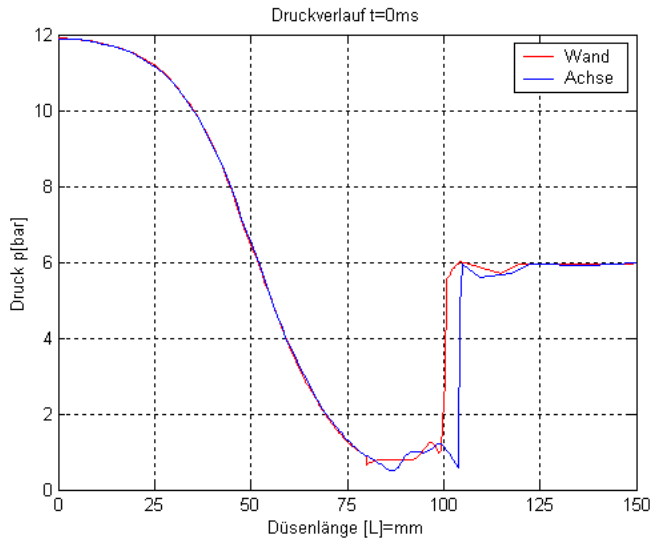


4.10.a: (vgl. 4.11.a)

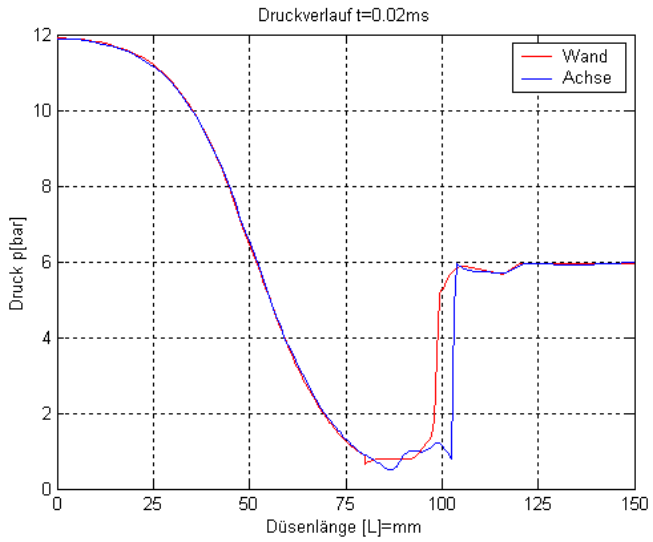


4.10.b: (vgl. 4.11.b)

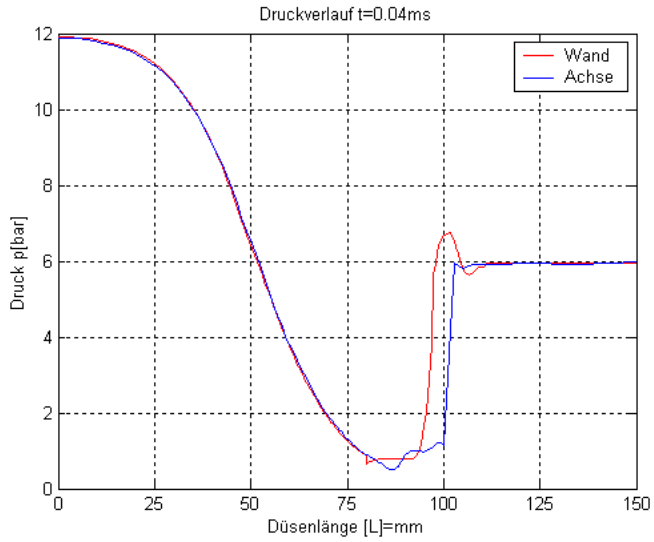
Abbildung 4.10: Fall2: quasistationäre Druckanhebung; Machzahlverlauf kurz vor (4.10.a) und nach (4.10.b) dem „Durchschlüpfen“ des Verdichtungsstoßes an der Düsenwand



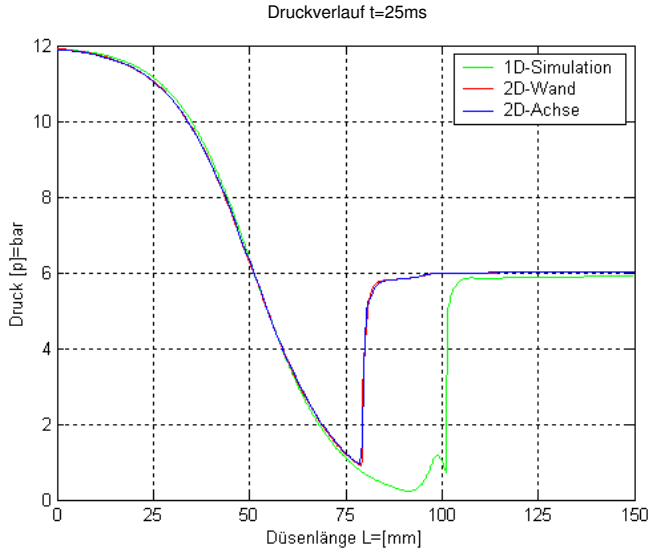
4.11.a



4.11.b



4.11.c



4.11.d

Abbildung 4.11: Fall2: quasistationäre Druckanhebung; Druckverlauf beim „Durchschlüpfen“ des Verdichtungsstoßes durch den zweiten kritischen Querschnitt

4.3.4 Stabilität der Stoßlage in der doppelt-konvergent-divergenten Lavaldüse

Wie bereits in Kapitel 3.3.1 diskutiert wurde, können schnelle Druckvariationen am Düsenaustritt dazu führen, dass der Verdichtungsstoß trotz geringem Düsenaustrittsdruck über die Querschnittsverengung in den ersten divergenten Düsenteil springt.

Wie bereits gezeigt, haben oszillierende Drücke keinen merklichen Einfluss auf die Stoßlage. Kritisch sind jedoch sprungartige Änderungen des Druckes.

Daher werden die folgenden Parameter einer sprunghaften Druckänderung untersucht:

- *Druckanstiegsgeschwindigkeit*: Es wird untersucht wie sich die Geschwindigkeit der Druckänderung bei einer Druckanhebung von 4 auf 5 bar auf die Verdichtungsstoßlage auswirkt. Hierzu wird der Druck am Düsenaustritt variiert, wie in Abbildung 4.12.a. dargestellt.

- *Dauer des Druckimpulses*: Es wird untersucht wie sich die Dauer eines Druckimpulses auf die Verdichtungsstoßlage auswirkt. Hierbei wird wieder ein Drucksprung von 4 bar 5 bar mit einer Dauer des Impulses von Δt durchgeführt.

Für die angesprochenen Untersuchungen wird die in Abbildung 4.6 gegebene Geometrie der doppelt-konvergent-divergenten Lavaldüse verwendet.

<u>Druckanstiegsgeschwindigkeit:</u>

Der Druckverlauf am Düsenaustritt wird bis zum Erreichen des Enddruckes von 5 bar linear mit $p = p_0 + \Delta p' \cdot (t - t_0)$ gesteigert, wobei p_0 den Ausgangsdruck (4bar), $\Delta p'$ die Druckanstiegsgeschwindigkeit und t_0 den Anfangszeitpunkt bezeichnet, siehe auch Abbildung 4.12a.

Wie zu erwarten war springt der Verdichtungsstoß bei einer sprungartigen Druckänderung in den ersten divergenten Düsenteil.
Als Grenzwert für die Druckanstiegsgeschwindigkeit $\Delta p_{krit}'$ erhält man einen Wert von 10bar/ms. Der Druck darf somit nicht schneller als 10bar/ms ansteigen um den Verdichtungsstoß im zweiten divergenten Düsenteil zu halten.

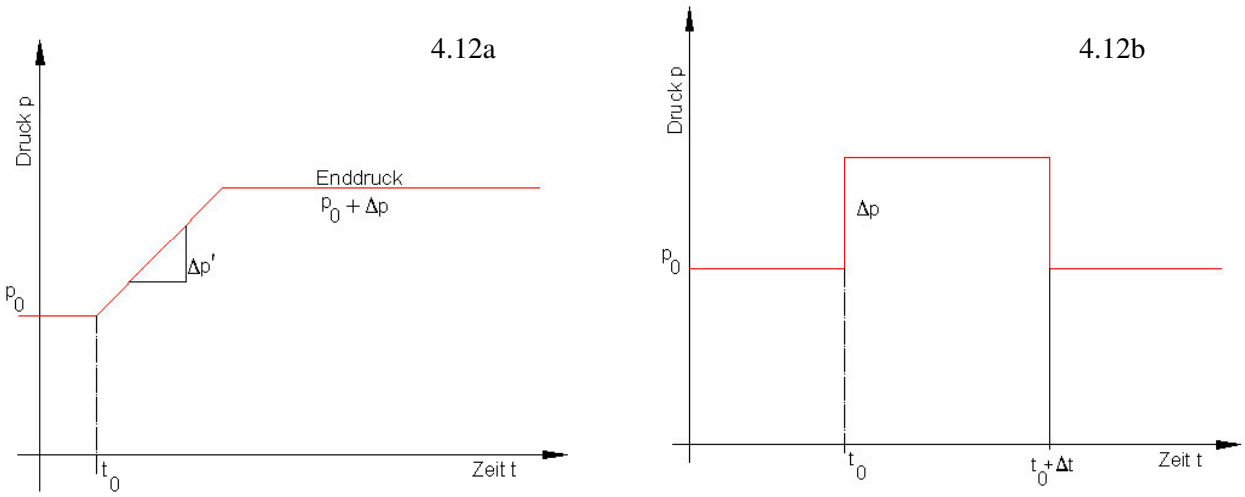


Abbildung 4.12a&b: Schematischer Verlauf des Drucks am Düsenaustritt zur Bestimmung der Grenzparameter für einen störungsfreien Betrieb.

<u>Dauer des Druckimpulses:</u>

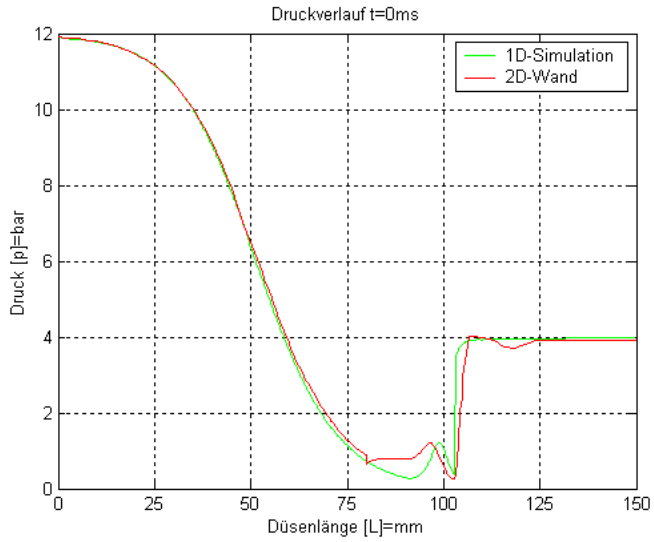
Am Düsenende wird ein Druckverlauf, wie in Abbildung 4.12.b dargestellt, vorgegeben. Die Druckdifferenz Δp beträgt 1 bar ausgehend vom Druck p_0 mit 4 bar.

Vor der Bestimmung der kritischen Impulsdauer, bei der der Verdichtungsstoß noch im zweiten divergenten Düsenbereich gehalten wird, wird eine Abschätzung durch eine eindimensionale, instationäre Simulation durchgeführt. Hierbei werden für das Kriterium, dass der Stoß in den ersten Düsenteil springt, die Erkenntnisse aus Kapitel 4.3.3 zur Hilfe genommen. Demnach „schlüpft“ der Verdichtungsstoß bei einem Druck an der Stoßfront von ca. 6 bar in den ersten Düsenbereich. Mit diesem Kriterium lässt sich aus der eindimensionalen Simulation ein sehr guter Wert für die genaue Bestimmung der kritischen Impulsdauer in der zweidimensionalen Simulation ermitteln.

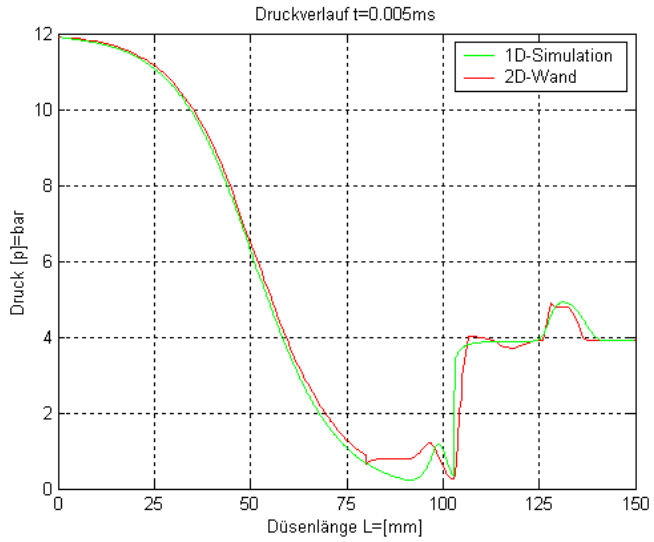
Als kritische Impulsdauer Δt_{krit} wird ein Wert von 0.02 ms gefunden.

In der Bildfolge 4.13. sind die Simulationsergebnisse für eine Impulsdauer $\Delta t < \Delta t_{krit}$ von 0.02ms dargestellt. Man erkennt wie sich der Druck bis auf ca. 5.8bar aufbaut, der Verdichtungsstoß die Verengung jedoch nicht passieren kann und wieder abfällt.

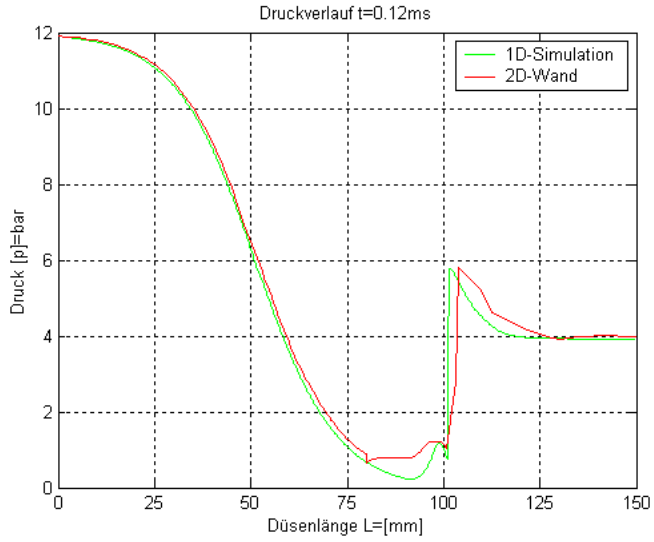
In der Bildfolge 4.14 ist jener Fall, bei dem die Impulsdauer $\Delta t > \Delta t_{krit}$ von 0.05ms größer ist als der kritische Wert, dargestellt. Man erkennt einen Druckanstieg bis auf ca. 6.2 bar. Der Verdichtungsstoß kann nicht mehr zurückgehalten werden und springt in den ersten divergenten Düsenteil.



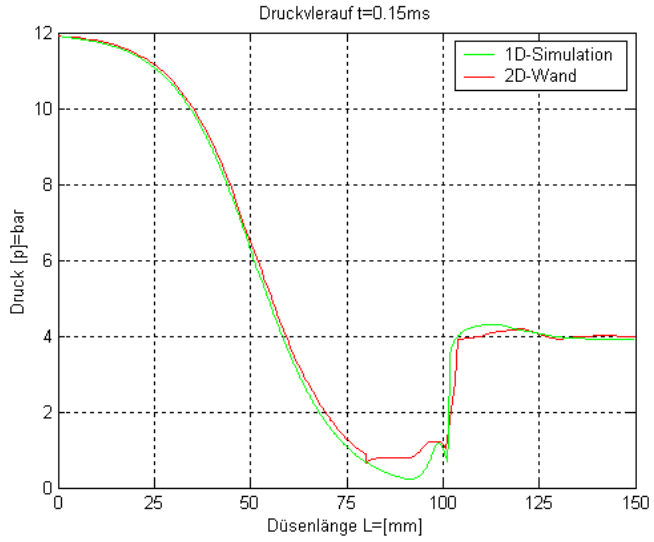
4.13.a



4.13.b

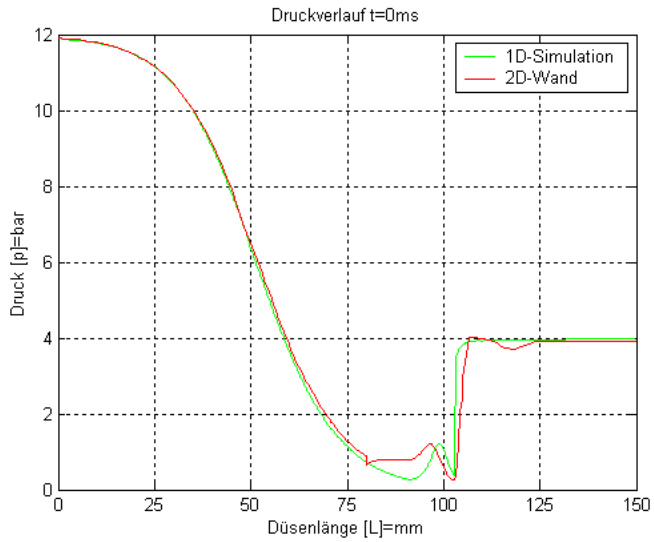


4.13.c

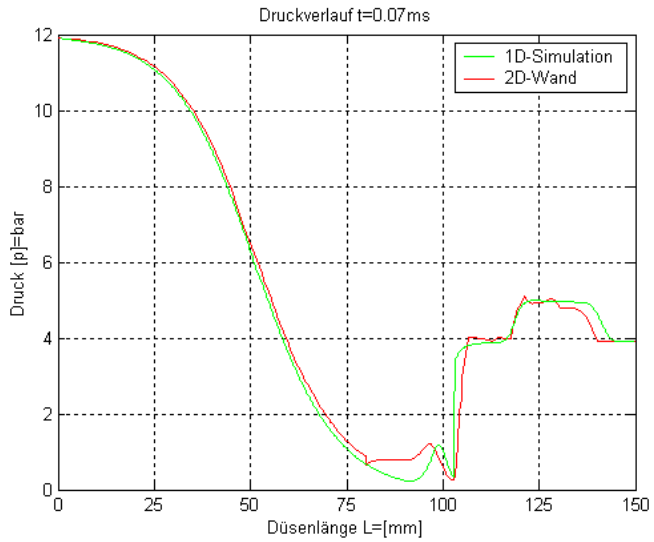


4.13.d

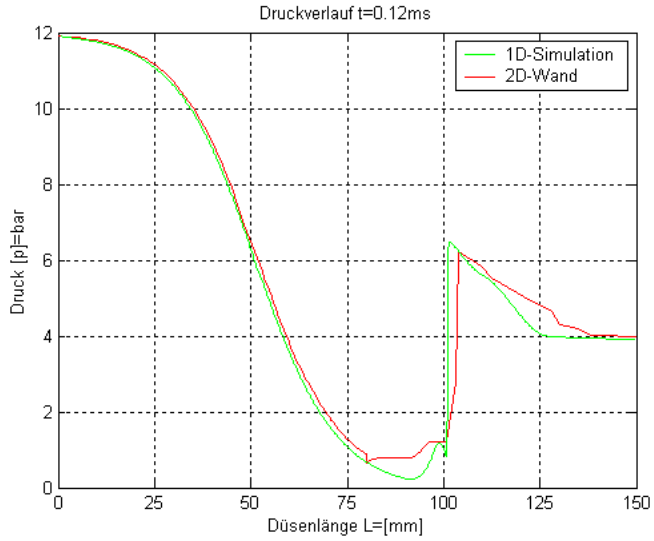
Abbildung 4.13: Druckverlauf für einen Druckimpuls mit einer Dauer von 0.02ms ($\Delta t < \Delta t_{krit}$), der Verdichtungsstoß springt nicht in den ersten divergenten Düsenteil



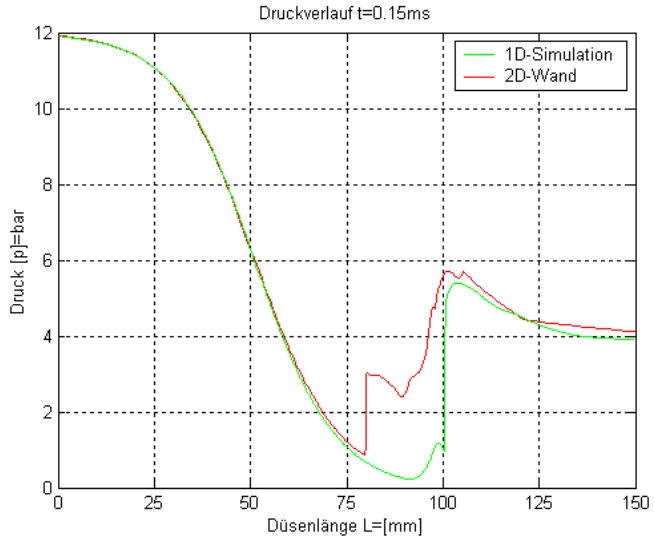
4.14.a



4.14.b



4.14.c



4.14.d

Abbildung 4.14: Druckverlauf für einen Druckimpuls mit einer Dauer von 0.05ms ($\Delta t > \Delta t_{krit}$), der Verdichtungsstoß springt in den ersten divergenten Düsenteil

Werden die kritischen Druckanstiegsgeschwindigkeiten $\Delta p'_{krit}$ und Impulsdauern Δt_{krit} nun für mehrere Druckamplituden Δp bestimmt, so erhält man die entsprechenden Grenzkurven für einen Betriebszustand. Für die Berechnung der Grenzkurven wird hierfür nur eine eindimensionale Simulation durchgeführt. Wie sich bei der Bestimmung der Grenzwerte bei einer Druckamplitude von 1 bar gezeigt hat, stimmen die zweidimensionalen mit den eindimensionalen Ergebnissen sehr gut überein, wenn folgendes, heuristisches Kriterium angewendet wird. In der zweidimensionalen Simulation springt der Verdichtungsstoß bei einem Druck am Düsenaustritt von 4 bar in den ersten divergenten Düsenbereich wenn in der eindimensionalen Simulation an der Stoßfront eine Druckspitze von 6 bar erreicht wird.

Für den vorliegenden Betriebszustand mit einem Druck am Düsenende von 4bar sind die Grenzkurven für die Druckanstiegsgeschwindigkeit und die Impulsdauer für einen stabilen Betrieb in Abbildung 4.15 dargestellt.
Man erkennt, dass für eine Druckamplitude Δp von unter 0.8 bar ein uneingeschränkt stabiler Betriebszustand vorliegt. In diesem Fall kann der Verdichtungsstoß auch bei beliebiger Variation der Druckanstiegsgeschwindigkeit und der Impulsdauer nicht in den ersten divergenten Düsenbereich springen. Erst ab einer Druckamplitude über 0.8 bar müssen die Anstiegsgeschwindigkeiten bzw. die Impulsdauer begrenzt bleiben um ein Überspringen des Stoßes zu vermeiden. Wie bereits aus den obig diskutierten Ergebnissen bekannt ist, liegt ab einer Druckamplitude von 2 bar bei einer sprungartigen Druckänderung, dies entspricht in diesem Fall einem Druck am Düsenende von 6 bar, kein stabiler Betrieb mehr vor. Der Verdichtungsstoß springt auch bei quasistatischer Druckanhebung in den ersten Düsenbereich.
Für sehr kurze Druckimpulse darf die Druckamplitude sogar größer als der Grenzdruck bei quasistationärer Druckerhöhung sein. Ein ähnlicher Effekt wurde bereits in Kapitel 3.3.1 diskutiert als der Einfluss von Druckoszillationen am Düsenaustritt untersucht wurde.

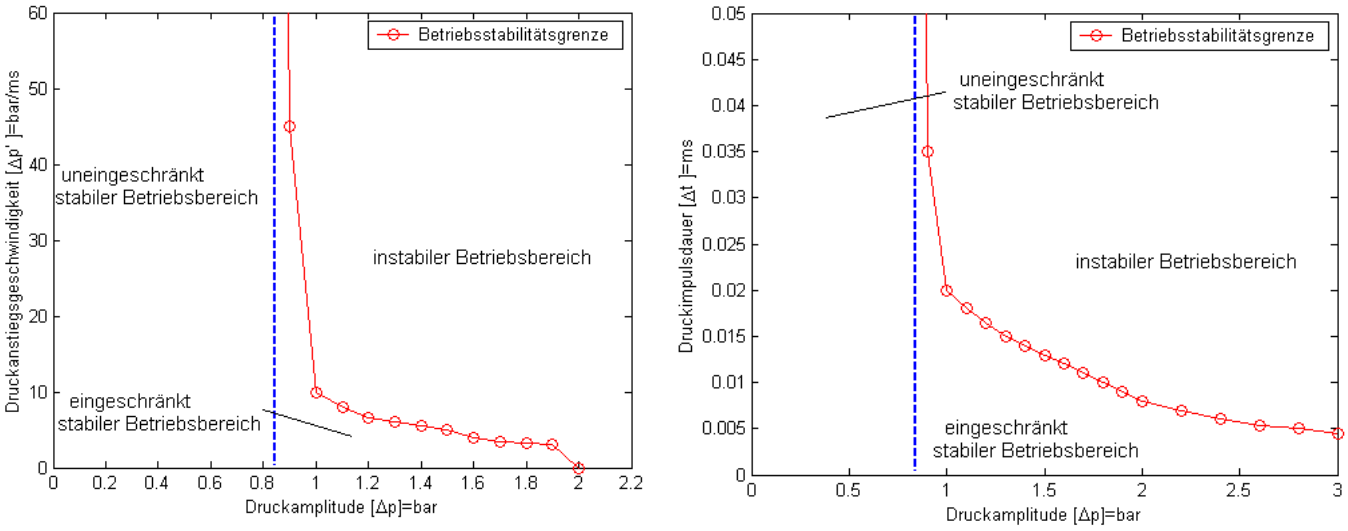


Abbildung 4.15: Betriebsstabilitätsgrenzen für einen Düsenaustrittsdruck von 4bar laut eindimensionaler Simulation mit genanntem Kriterium

Kapitel 5

Schlussfolgerungen

Aus den durchgeführten Untersuchungen erkennt man, dass es in einem technisch vertretbaren Betriebsbereich nicht möglich ist eine einfache Lavaldüse zur Absaugung von Erdgas (Flaregas) aus einer Packungskammer eines Kolbenkompressors zu verwenden. Die Distanz zwischen dem auftretenden Verdichtungsstoß und der Position der Flaregaszumischung ist zu gering, wie auch die mögliche Zumischrate an Flaregas zum Treibmassenstrom.

Jedoch kann durch eine geeignete Ausformung der Düse in Form einer „doppelt-konvergent-divergenten“ Lavaldüse und durch eine Anordnung der Flaregaszumischung in Strömungsrichtung die geforderten Vorgaben erreicht werden.
Aus den numerischen Simulationen ist jedoch ersichtlich, dass diese Düsenform im Gegensatz zur „einfachen“ Lavaldüse nicht beliebig hochgefahren werden kann, sondern dass ein bestimmter Anfahrzyklus vollzogen werden muss.

Mit den durch diese Arbeit gewonnenen Ergebnissen, stellt sich diese Art der Flaregasabsaugung als durchaus praktikable dar, wobei sich noch weitere Möglichkeiten der Gestaltung der Lavaldüse zeigen, wenn eine variablen Düsengeometrie in Betracht gezogen wird.

Anhang A

Liste der verwendeten Variablen und Konstanten

A.1 Variablen

x	Koordinate in Strömungsrichtung, Abstand zum Koordinatenursprung,
y	Koordinate quer zur Strömungsrichtung, Abstand zum Koordinatenursprung
t	Zeit
ρ	Dichte des Fluids
V	Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung
T	absolute Temperatur
υ	Temperatur lt. Celsiusskala
p	statischer Druck
S	allgemeine Variable stellvertretend für die Strömungskenngrößen Dichte, Temperatur und Druck
c	Schallgeschwindigkeit
$\dot{m}$	Massenstrom
h	spez. Enthalpie
q	pro Masseneinheit zugeführte Wärme
$c_p(T)$	spez. Wäremkapazität bei konstantem Druck
$c_v(T)$	spez. Wärmekapazität bei konstantem Volumen
$\kappa(T)$	Isentropenexponent
$\lambda_{th}(T)$	Wärmeleitfähigkeit
$\mu(T)$	dynamische Viskosität
$\nu(T)$	kinematische Viskosität
τ_W	Wandschubspannung
λ	Rohrreibzahl

A.2 Konstanten

R	spez. Gaskonstante
k	absolute Wandrauhigkeit

A.3 Geometrie

A(x)	Querschnittsfläche
D	Durchmesser
D_h	hydraulischer Durchmesser
L	Düsenlänge

A.4 Dimensionslose Kennzahlen

M	Machzahl
Re	Reynoldszahl
St	Stantonzahl
Pr	Prandtlzahl
x_F	Zumischverhältnis Flaregas

A.5 Indizes und Hochstellungen

$(\ )_W$	Wand
$(\ )_F$	Flaregas
$(\ )_{mix}$	Flaregaszumischposition
$(\ )_s$	Verdichtungsstoß
$(\ )_1$	Düseneintritt, erster divergenter Düsenbereich
$(\ )_2$	zweiter divergenter Düsenbereich
$(\ )_3$	Zustand vor der Flaregaszumischung
$(\ )_4$	Zustand nach der Flaregaszumischung
$(\ )_e$	Düsenaustritt
$(\ )_{US}$	Unterschall
$(\ )_{UES}$	Überschall
$(\ )_{,m}$	gemittelte Größe
$(\ )^{(0)}$	Ruhezustand
$\hat{(\ )}$	Größe nach dem Verdichtungsstoß
$(\ )^*$	kritische Größe

A.5 Numerik

n	Knotenpunktnummerierung
N	Knotenpunktanzahl
$\vec{u}$	Vektor der Erhaltungsgrößen
$\vec{F}$	Vektor der Flussgrößen
$\vec{Q}$	Vektor der Quellterme
$\tilde{A}$	Roe-Matrix
$\tilde{B}, \tilde{C}$	Konstruktionsmatrizen
$\vec{w}$	Vektor der transformierten Erhaltungsgrößen
$\vec{f}$	Vektor der transformierten Flüsse
$\vec{e}$	Eigenvektor, der Roe gemittelten Größen
$\tilde{\lambda}$	Eigenwert, der Roe gemittelten Größen
α	Koeffizient der Sprungzerlegung

$(\ )^{\langle i \rangle}$	i-ter Iterationsschritt
$(\ )_o, (\ )_u$	obere bzw. untere Indexgrenze
$(\ )_j^n$	n-ter Zeitschritt und j-ter Knoten
$(\ )_L, (\ )_R$	Größe des links- bzw. rechtsseitigen Knotens
$(\ )_{\max}$	Maximalwert
${}^0(\ )$	ohne Berücksichtigung der Quellterme

Literaturverzeichnis

[1] A. H. Shapiro, *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Flow*, Band 1, The Ronald Press Company, New York.1953

[2] K. Oswatitsch, *Gasdynamik*, Springer, Wien, 1952.

[3] L. Prandtl, K. Oswatitsch und K. Wieghardt, *Führer durch die Strömungslehre*, Vieweg, Braunschweig, 9. Auflage, 1990.

[4] E. Becker, *Technische Strömungslehre*, Teubner, Stuttgart, 1974.

[5] VDI-Gesellschaft Verfahrenstechnik und Chemieingenieurwesen, *VDI-Wärmeatlas Berechnungsblätter für den Wärmeübergang*, 6. Auflage, 1991.

[6] J. D. Anderson, *Computational Fluid Dynamics*, McGraw-Hill Book, International Edition, New York, 1995.

[7] R. J. Leveque, *Numerical methods for conservation laws*, Birkhäuser, Berlin, 1992.

[8] P. L. Roe, *Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes*, Academic Press, Bedford, 1981

[9] P.L. Roe, *Charateristic-based schemes for the euler equations*, Annual Reviews Fluid Mechanics, 1986.

[10] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling und B. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge 1995