



Diplomarbeit

# Erstellung eines MATLAB Simulationsprogrammes zur Bestimmung des rotordynamischen Verhaltens von hydraulischen Maschinensätzen

ausgeführt zum Zweck der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs unter  
der Leitung von

Univ.Prof.Dipl.-Ing.Dr.-Ing. Christian Bauer

E302

Institut für Energietechnik und Thermodynamik  
Forschungsbereich Strömungsmaschinen

eingereicht an der Technischen Universität Wien

**Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften**

von

Alexander Mayrdorfer  
1029092

Hietzinger Hauptstraße 124A  
1130 Wien

Wien, am 29. August 2015

## **Vorwort**

Die vorliegende Diplomarbeit entstand am Institut für Energietechnik und Thermodynamik an der Technischen Universität Wien. Bedanken möchte ich mich bei meinem Hauptbetreuer Univ.Prof.Dipl.-Ing.Dr-Ing. Christian Bauer, der mit seinen anregenden Vorträgen das Interesse an hydraulischen Maschinen geweckt hat, und somit eine große Entscheidungshilfe für das Thema meiner Diplomarbeit war.

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Mitbetreuer Ass.Prof.Dipl.-Ing.Dr.techn. Eduard Doujak besonders bedanken. Da er stets Zeit fand sein kompetentes Wissen, nicht nur im Bereich hydraulische Maschinen, in die Diplomarbeit einfließen zu lassen.

Eine weitere Danksagung gebührt Ao.Univ.Prof.Dipl.-Ing.Dr.techn. Horst Ecker, der mit seinen spannenden Vorträgen über die Schwingungslehre und Rotordynamik das fundamentale Wissen lehrte, um diese Problemstellung zu bewältigen.

Zu guter Letzt steht meinen Eltern Brigitte & Gerhard Mayrdorfer ein herzliches Danke zu. Diese haben mich in jeder Lebenslage unterstützt, immer wieder neu motiviert und haben vor allem nie an meinen Fähigkeiten gezweifelt.

## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich primär mit der Bestimmung des rotordynamischen Verhaltens von Rotoren, beziehungsweise hydraulischen Maschinensätzen. Das Übertragungsmatrizenverfahren dient dabei als grundlegendes Konzept. Hauptziel des Verfahrens ist die Ermittlung von Eigenkreisfrequenzen und Eigenformen bei Biege- und Torsionsschwingungen im eingeschwungenen Zustand. Weitere Ergebnisse sind Absenkung, Neigung, Moment und Querkraft am Anfang und Ende jedes Elementes. Die Methode der Übertragungsmatrizen zerlegt das System in Elemente, die anschließend mit Matrizen beschrieben werden können. Hergeleitet wurden Matrizen für ein masseloses und massebehaftetes Balkenelement mit konstanter Steifigkeit. Für Biegeschwingungen wurde eine Massenmatrix abgeleitet, die Massen mit Exzentrizität und Kreiseffekten, sowie anisotroper Lagerung berücksichtigt. Im Fall von Torsionsschwingungen wurde eine Massenmatrix, die Masse beachtet, erstellt.

Das programmierte Simulationsprogramm HydroVib beinhaltet das Übertragungsmatrizenverfahren. Daher können Eigenkreisfrequenzen und Eigenformen von beliebig langen rotierenden Maschinensätzen ohne Dämpfung berechnet werden. Weiter können Resonanzkurven, Schwingungsformen und Orbits von Systemen mit Dämpfung ermittelt werden. Ein System unter Kreiseinfluss bewirkt, dass die Eigenkreisformen nicht konstant sind. Im Campbell Diagramm können die Eigenkreisfrequenzkurven berechnet werden.

## **Abstract**

The following thesis primary deals with determination of rotordynamic behaviour of rotors or rather hydraulic machine sets. The whole concept is based on the transfer matrix method. Principal purpose is to determine eigenfrequencies and eigenmodes of bending and torsional vibrations at steady-state condition. Further solutions are deflection, deviation, moment and shearing force at the beginning and ending of every element. The transfer matrix method disassemble the whole system by elements. Those elements can be described by matrices. A matrix was derived from a beam element with and without mass. For bending vibration, a matrix which considered excentric mass with gyro effect and anisotropic bearings, was derived. In case of torsional vibration a matrix, which consideres the mass, was derived.

The programmed simulation program HydroVib includes the transfer matrix method. So eigenfrequencies and eigenmodes of machine sets with any length without damping, can be calculated. Further resonance curves, modes of vibrations and orbits of systems with damping can be detected. For gyro effect a Campbell digramm can be generated.

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort . . . . .	I
Kurzfassung . . . . .	II
Abstract . . . . .	III
Nomenklatur . . . . .	VI
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Allgemeines . . . . .	1
1.2 Aufgabenstellung . . . . .	2
<b>2 Hydraulische Maschinensätze und deren Einfluss auf das Simulationsmodell</b>	<b>3</b>
2.1 Turbine . . . . .	3
2.2 Generator . . . . .	3
2.3 Wellensegment . . . . .	4
2.4 Lager . . . . .	4
2.5 Pumpen . . . . .	4
2.6 Hydraulischer Wandler . . . . .	5
2.7 Kräfte . . . . .	6
2.8 Berührungslose Flüssigkeitsdichtungen . . . . .	7
<b>3 Auswahl des Berechnungsverfahrens</b>	<b>8</b>
3.1 Finite Elemente Verfahren . . . . .	8
3.2 Übertragungsmatrizenverfahren . . . . .	9
3.3 Gegenüberstellung und Auswahl . . . . .	11
<b>4 Theorie des Übertragungsmatrizenverfahrens</b>	<b>13</b>
4.1 Koordinatensystem . . . . .	13
4.2 kinematische Beziehungen eines Rotors . . . . .	14
4.3 Übertragungsmatrizen für Biegeschwingungen . . . . .	17
4.3.1 Massenpunkt . . . . .	17
4.3.2 Masseloser Balken konstanter Steifigkeit . . . . .	25
4.3.3 Massebehafteter Balken konstanter Steifigkeit . . . . .	34
4.4 Übertragungsmatrizen für Torsionsschwingungen . . . . .	48
4.4.1 Massenpunkt . . . . .	48
4.4.2 Drehfeder mit kontinuierlicher Massenverteilung . . . . .	49
4.4.3 Masselose Drehfeder mit Dämpfung . . . . .	52
4.5 Das Übertragungsmatrizenverfahren . . . . .	53

<b>5</b>	<b>HydroVib das Simulationsprogramm</b>	<b>58</b>
5.1	Allgemeines . . . . .	58
5.2	Dateneingabe . . . . .	58
5.3	Programmbeschreibung . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Validation</b>	<b>75</b>
6.1	Biegeschwingungen . . . . .	75
6.1.1	Lavallrotor in starren Lagern . . . . .	75
6.1.2	Lavallrotor in isotropen Lagern . . . . .	76
6.1.3	Lavallrotor in anisotropen Lagern . . . . .	77
6.1.4	Lavallrotor in starren Lagern mit äußerer Dämpfung . . . . .	80
6.1.5	Lavallrotor in isotropen Lagern mit Kreiselwirkung . . . . .	82
6.2	Torsionsschwingungen . . . . .	86
6.2.1	Eingespannter masseloser Torsionsstab mit Scheibe . . . . .	86
6.2.2	Eingespannter massebehafteter Balken . . . . .	87
<b>7</b>	<b>Bestimmung des rotordynamischen Verhaltens einer bestehenden Wasserkraftanlage</b>	<b>90</b>
7.1	Randbedingungen . . . . .	92
7.2	Berechnungen der Biegeschwingungen . . . . .	93
7.2.1	Turbinenbetrieb . . . . .	95
7.2.2	Pumpbetrieb . . . . .	104
7.3	Berechnung der Torsionsschwingungen . . . . .	112
7.3.1	Turbinenbetrieb . . . . .	112
7.3.2	Pumpbetrieb . . . . .	115
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>118</b>
<b>9</b>	<b>Anhang</b>	<b>121</b>
9.1	Lavallrotor in isotropen Lagern . . . . .	121
9.2	Lavallrotor in anisotropen Lagern . . . . .	122
9.3	Bestimmung aller relevanten Größen für die Schwingungsberechnung von Kops II	124
9.3.1	Berechnungen rund um den Turbinebetrieb . . . . .	125
9.3.2	Berechnung rund um den Generator . . . . .	134
9.3.3	Berechnung rund um den Pumpbetrieb . . . . .	135
9.3.4	Berechnung rund um das Axiallager . . . . .	142

# Nomenklatur

## Variablen mit lateinischer Notation

$c_{yy}$	$\frac{N}{m}$	Federsteifigkeit in y-Richtung
$c_{yz}$	$\frac{N}{m}$	Federsteifigkeit in z-Richtung
$c_{zz}$	$\frac{N}{m}$	Federsteifigkeit in z-Richtung
$c_{zy}$	$\frac{N}{m}$	Federsteifigkeit in y-Richtung
$c$	$Nm$	Federsteifigkeit für Torsion
$d_{yy}$	$\frac{Ns}{m}$	Dämpfungskonstante in y-Richtung
$d_{yz}$	$\frac{Ns}{m}$	Dämpfungskonstante in z-Richtung
$d_{zz}$	$\frac{Ns}{m}$	Dämpfungskonstante in z-Richtung
$d_{zy}$	$\frac{Ns}{m}$	Dämpfungskonstante in y-Richtung
$d$	$Nms$	Dämpfungskonstante für Torsion
$e$	$m$	Exzentrizität des Massenpunktes
$E$	$\frac{N}{m^2}$	Elastizitätsmodul
$F$	$m^2$	Querschnittfläche
$F$	$N$	Fliehkraft
$G$	$\frac{N}{m^2}$	Schubmodul
$I$	$m^4$	Flächenträgheitsmoment
$I_p$	$m^4$	polares Flächenträgheitsmoment
$L$	$m$	Länge
$m$	$kg$	Masse
$m_r$	$kg$	mitrotierende Massen
$M$	$Nm$	Moment
$M_{Err}$	$Nm$	erregendes Moment für Torsion
$M_y$	$Nm$	Biegemoment um die y-Achse

$M_z$	$Nm$	Biegemoment um die z-Achse
$M_{y1}, M_{z1}$	$Nm$	Sinusanteil
$M_{y2}, M_{z2}$	$Nm$	Kosinusanteil
$n$		Konstante des Separationsansatzes
$P$		Lastenvektor
$P_y$	$N$	Amplitude der Erregerkraft in y-Richtung
$P_z$	$N$	Amplitude der Erregerkraft in z-Richtung
$q_y$	$\frac{N}{m}$	Linienlast in y-Richtung
$q_z$	$\frac{N}{m}$	Linienlast in z-Richtung
$Q$	$N$	Querkraft
$Q_y$	$N$	Querkraft in y-Richtung
$Q_z$	$N$	Querkraft in z-Richtung
$Q_{y1}, Q_{z1}$	$N$	Sinusanteil
$Q_{y2}, Q_{z2}$	$N$	Kosinusanteil
$t$	$s$	Zeit
$T$		Matrix des Übertragungsmatrizenverfahren
$x$		Vektor des Übertragungsmatrizenverfahren
$v_1, w_1$	$m$	Sinusanteil
$v_2, w_2$	$m$	Kosinusanteil
$v$	$m$	Durchbiegung in y-Richtung
$v_s$	$m$	Durchbiegung des Rotors in y-Richtung bezogen auf den Scheibenschwerpunkt
$w$	$m$	Durchbiegung in z-Richtung
$w_s$	$m$	Durchbiegung des Rotors in z-Richtung bezogen auf den Scheibenschwerpunkt
$x, y, z$		Koordinatenrichtungen

## Variablen mit griechischer Notation

$\alpha$		Abklingfaktor
$\varepsilon$	$rad$	Winkellage der Unucht für Biegung
$\varepsilon$	$rad$	Winkellage des erregenden Moments für Torsion
$\Theta_a$	$kgm^2$	äquatoriales Massenträgheitsmoment
$\Theta_p$	$kgm^2$	polares Massenträgheitsmoment
$\kappa$		Balkenkrümmung
$\lambda$		Eigenwert
$\mu$		Massenebelegung
$\pi$		Kreiszahl
$\rho$	$\frac{kg}{m^3}$	Dichte
$\Sigma$	$\frac{N}{m^2}$	Normalspannung
$\varphi$	$rad$	Neigung
$\varphi_{y1}, \varphi_{z1}$	$rad$	Sinusanteil
$\varphi_{y2}, \varphi_{z2}$	$rad$	Kosinusanteil
$\omega$	$\frac{rad}{s}$	Eigenkreisfrequenz
$\Omega_{Erregung}$	$\frac{rad}{s}$	Frequenz der Krafterregung
$\Omega$	$\frac{rad}{s}$	Winkelgeschwindigkeit des Läufers

## Abkürzungen

$GG$	Gegenlauf
$GL$	Gleichlauf
$S$	Scheibenschwerpunkt
$W$	Wellendurchstoßpunkt

# 1 Einleitung

## 1.1 Allgemeines

Eine gelungene Berechnung von hydraulischen Maschinensätzen umfasst die Berücksichtigung einer Vielzahl von unterschiedlichen Themen. Unerlässlich oder hoch riskant wäre, wenn der Rotordynamik nicht die notwendige Beachtung zugeteilt wird. Werden Wasserkraftmaschinen in deren kritischen Frequenzen erregt, treten enorme Vibrationen auf, die einen Betrieb der gesamten Anlage gefährden. Nicht nur Eigenfrequenzen bedrohen einen sicheren Arbeitszustand, sondern auch Instabilitäten führen zu Schwingungen jenseits jeder zulässigen Norm. Bei größeren Maschinensätzen, wie sie üblich in Wasserkraftwerken vorkommen, wären katastrophale Schäden die Folge, die nicht nur Anlagen sondern auch Menschenleben bedrohen.

Abgesehen vom Fall, dass der Auslegungspunkt eines hydraulischen Maschinensatzes mit einer kritischen Frequenz übereinstimmt, können auch noch weitere Resonanzbetriebe auftreten. So führt ein Netzausfall einer Wasserkraftanlage dazu, dass der Generator seine Bremswirkung verliert, der Maschinensatz erreicht dabei eine enorm hohe Drehzahl, die sogenannte Durchlaufdrehzahl. In diesem Zustand treten immense Belastungen für die gesamte Anlage auf. Befindet sich nun eine anfachende Eigenfrequenz in diesem Zustand, steigen die ohnehin enormen Belastungen weiter an.

Falls eine Wasserkraftanlage in Resonanzbetrieb gerät, werden Auslenkungen des ganzen Systems beträchtlich anwachsen. Um größere Schäden zu vermeiden, soll der Abstand zwischen Rotor und Stator abgeschätzt und so gewählt werden, dass kein Kontakt besteht.

Alle negativen Auswirkungen aufzulisten, soll jedoch nicht Inhalt dieser Arbeit sein. Es steht jedoch fest, dass hydraulische Maschinensätze nicht in Resonanz betrieben werden sollen.

## 1.2 Aufgabenstellung

Wichtigster Bestandteil dieser Diplomarbeit ist die Ermittlung kritischer Frequenzen von hydraulischen Maschinensätzen. Verschiedenste Anordnungen, sowie häufige Variation der Eigenschaften des Systems, stellt dabei die Nebenbedingung einer schnellen Evaluierung der Eigenkreisfrequenzen. Um dies zu gewährleisten, soll ein Simulationsprogramm in MATLAB erstellt werden.

Folgende Anforderungen des Berechnungsprogrammes werden dabei berücksichtigt:

- Unterscheidung zwischen Biege- und Torsionsschwingungen
- Berechnung der Eigenkreisfrequenzen
- Visualisierung der Eigenformen
- Abschätzen der Auslenkung

## **2 Hydraulische Maschinensätze und deren Einfluss auf das Simulationsmodell**

In den folgenden Unterpunkten werden die für die Berechnung erforderlichen Elemente bzw. Baugruppen von hydraulischen Maschinensätze angeführt. Anschließend wird aufgelistet, welche Anforderungen diese an das Simulationsmodell stellen. Dies soll einen groben Überblick über die auftretenden physikalischen Eigenschaften geben, die das Simulationsmodell beeinflussen.

Es sei zu erwähnen, dass Eigenfrequenzen eines Systems maßgeblich von dessen Masse, Federsteifigkeit und Dämpfung abhängen. Hierbei ist zu erwähnen, dass geringe Dämpfungen, welche in hydraulischen Maschinen auftreten, wenig Einfluss auf Eigenkreisfrequenzen verfügen.

### **2.1 Turbine**

Die Turbine beeinflusst maßgeblich die Eigenfrequenzen eines Systems aufgrund ihrer rotierenden Masse. Je nach Füllung der Turbine verändert sich die Gesamtmasse des Systems und somit auch ihre kritischen Frequenzen, deren Ausmaß aber ungewiss ist.

In der Rotordynamik können Bauelemente wie Pelton, Francis oder Kaplan als Scheibe betrachtet werden. Diese werden auf einen Massenpunkt reduziert und besitzen folglich Massenmittelpunkt und äquatoriales, sowie polares Massenträgheitsmoment.

### **2.2 Generator**

Der Generator weist ähnliche Eigenschaften wie eine rotierende Turbine auf, abgesehen von deren mitführenden Wassermassen. Jedoch trägt der Generator einen wesentlich größeren Anteil zur Gesamtmasse bei, welche wiederum

entscheidenden Einfluss auf das rotordynamische Verhalten hat. Generatoren können von sehr schmaler Ausführung (Scheibenform) bis zu sehr breiter Ausführung (Walzenform) realisiert werden. Dass der Kreiseffekt direkt im Zusammenhang mit Scheiben- bzw. Walzenform und somit auch der Eigenkreisfrequenz steht, wird in Literatur [1] erläutert.

## 2.3 Wellensegment

Bezogen auf das rotordynamische Verhalten unterscheidet sich ein Wellenstücke maßgeblich von Turbine und Generator. Die Nachgiebigkeit eines Wellensegmentes unter Belastung, die eine rein elastische Verformung bewirkt, kann als Steifigkeit interpretiert werden. Dabei bestimmen Länge, Flächenträgheitsmoment und Elastizitätsmodul des Wellenstücks den Wert der Steifigkeit.

Unter Annahme, dass die Wellenmasse zur Rotormasse vergleichbar klein ist, kann die Wellenmasse mit gutem Gewissen vernachlässigt werden. Bei hydraulischen Maschinen ist diese Vereinfachung jedoch meist nicht zulässig, weshalb das Simulationsmodell die Wellenmasse berücksichtigen sollte.

## 2.4 Lager

Lager können in der Rotordynamik als Feder- und Dämpferelemente beschrieben werden. Dabei sei zu beachten, dass bei horizontaler Ausrichtung der Wasserkraftanlage die Federsteifigkeit ungleiche Werte aufweist. Daher muss im Simulationsmodell das rotordynamische Verhalten in zwei unterschiedliche Ebenen prognostiziert werden.[1]

Weiter sollte zwischen der Walzlagertheorie und der anspruchsvollen Gleitlagertheorie unterschieden werden, um genauere Ergebnisse zu erhalten.

## 2.5 Pumpen

Es gibt eine Vielzahl von Pumpentypen, in diesem Unterkapitel wird jedoch lediglich die Kreiselpumpe näher erläutert. Sie besitzt ähnlich wie eine Wasserkraftturbine Wellensegmente und ein Element zur Umwandlung von kinetischer in potentielle Energie. Bei Kreiselpumpen können jedoch mehrere Scheiben auf

einer Welle angebracht sein, was man in der Rotordynamik als Mehrscheibenrotor bezeichnet. Diese Bauweise sollte im Simulationsmodell ebenfalls berücksichtigt werden.

## 2.6 Hydraulischer Wandler

Ein hydraulischer Wandler arbeitet im hydraulischen Kurzschluss mit einer Pumpe und einer Turbine. Die mit der Kraftmaschine verbundene Pumpe treibt die mit der Arbeitsmaschine gekoppelte Turbine an. [2] Ist die Drehzahl von Arbeitsmaschine gleich der Kraftmaschine wird der hydraulische Wandler weggeschaltet und stattdessen das System mechanisch gekuppelt. Dies ist notwendig, da im Dauerbetrieb der hydraulische Wandler, aufgrund seiner Flüssigkeitsreibung, unzulässige Temperaturen erreicht. Für die Berechnung der Eigenfrequenzen stellt sich nun die Frage, wie mit einem hydraulischen Wandler umzugehen ist. Es ist erforderlich, dass die mitrotierenden Massen und deren Schwerpunkte für den gekoppelten, sowie entkoppelten Betrieb, gefunden werden und in die Berechnung mit einfließen.

Abgesehen von den mitrotierenden Massen muss beachtet werden, welchen Einfluss die Kupplung der Systeme auf das rotordynamische Verhalten hat. Sind Kraftmaschine und Arbeitsmaschine mittels hydraulischen Wandler gekuppelt, so werden keine Querkräfte und Biegemomente übertragen, da die Maschinensätze nicht direkt verbunden sind. Jedoch können Torsionsmomente, Absenkungen und Winkel zum Teil übertragen werden. Wesentlich interessanter ist jedoch der Betrieb, bei denen die Arbeitsmaschine und Kraftmaschine mechanisch gekuppelt sind, da hier wesentlich längere Betriebszeiten zu erwarten sind und somit keinesfalls Resonanz auftreten sollte. Im mechanisch gekuppelten System wird angenommen, dass keine Querkräfte und Biegemomente übertragen werden. Jedoch werden Torsionsmomente, Absenkungen und Winkel vollständig übertragen. Sind die Eigenkreisfrequenzen im Fall von Biegeschwingungen zu ermitteln, so müssen vorerst die Eigenkreisfrequenzen von den getrennten Systemen erforscht werden. Das heißt, dass die Eigenkreisfrequenzen der Kraftmaschine, sowie die Eigenkreisfrequenzen der Arbeitsmaschine allein berechnet werden. Im Fall von Torsion wird das Torsionsmoment und der Winkel zwischen Arbeitsmaschine und Kraftmaschine übertragen. Werden nun die torsionalen

Eigenkreisfrequenzen ermittelt so wird das vollständige System herangezogen, also Arbeitsmaschine gekoppelt mit Kraftmaschine.

## 2.7 Kräfte

Kräfte sind eine wesentliche Ursache für Auslenkungen und Schwingungen eines vibrationsfähigen Systems. In hydraulischen Maschinensätzen sollten dabei alle auftretenden Kräfte sorgfältig untersucht und, wenn von Bedeutung in der Simulationsberechnung berücksichtigt werden. Stimmen nämlich Erregerfrequenz und Eigenkreisfrequenz eines Systems überein, wird das System also mit einer seiner Eigenfrequenzen erregt, tritt Resonanz auf. Auch ein ganzzahliges Vielfaches der Erregerfrequenz, die mit einer Eigenkreisfrequenz nahezu identisch ist, kann Resonanz hervorrufen.

Eine enorme Belastung für rotierende Maschinensätze ist die drehfrequente Unwuchtkraft, vor allem, wenn die Rotation eine Eigenkreisfrequenz des Systems anfacht. Besteht eine maßgebliche Exzentrizität des Rotors, ist stark zu empfehlen, diese in der Simulationsberechnung zu berücksichtigen.

Das Eigengewicht von Turbine, Generator, Welle und sonstigen massebehafteten Elementen können für die Ermittlung von Amplituden in Resonanz vernachlässigt werden, da sie nicht drehfrequent sind, und somit keine Eigenkreisfrequenz des Systems anregen.

Hydraulische Erregungen, die von Turbinen oder Pumpen abstammen, können mit der kritischen Eigenfrequenz der Anlage in Resonanz geraten. Auch hier sollte überprüft werden, ob die Grundfrequenz, also die Drehzahl mal Laufschaufelzahl mit einer Eigenkreisfrequenz übereinstimmen.

Äußere Erregungen, die auf das System einwirken, können ebenso das rotordynamische Verhalten negativ beeinflussen. Wird zum Beispiel eine anregende Frequenz über das Fundament in das System eingebracht, können diese Schwingungen ebenfalls Resonanz hervorrufen.

Unter Belastung stehende Turbinen verursachen erregende Momente, die ebenso Eigenkreisfrequenzen zur Schwingung anregen können, allerdings handelt es sich hierbei um Torsionsschwingungen.[3]

## 2.8 Berührungslose Flüssigkeitsdichtungen

Bei berührungslosen Flüssigkeitsdichtungen, wie sie zum Beispiel bei Kreiselpumpen vorkommen, treten Wechselwirkungen zwischen mechanischer Struktur und Fluid auf. Diese beeinflussen das rotordynamische Verhalten des Systems maßgeblich. Das System wird aufgrund von den berührungslosen Flüssigkeitsdichtungen steifer und instabil.[1]

Diese Eigenschaft in das Modell einzubinden, ist schwierig, da mitrotierende Massen, Federsteifigkeiten und Dämpfungswerte zu bestimmen sind. Da diese jedoch nicht mehr konstant sind, sondern von der Drehzahl des rotierenden Systems abhängen, wird die Identifizierung aufwändig und schwierig.

## 3 Auswahl des Berechnungsverfahrens

Im Kapitel 2 wurden weitgehendst alle Einflüsse die das rotordynamische Verhalten von hydraulischen Maschinensätzen prägen, angeführt. In diesem Kapitel soll nun ein Verfahren ausgewählt werden, das den Anforderung am Besten erfüllt. Dabei wurden zwei qualifizierte Methoden ausgewählt und gegenübergestellt. Diese Methoden erfüllen die Bedingung einer Ermittlung von Eigenfrequenzen und Eigenformen eines Systems, sowie die Möglichkeit ein rechnerunterstütztes Simulationsprogramm zu erstellen.

Tabelle 3.1 umfasst grob die wesentlichsten Eigenschaften beider Methoden. Dabei sei zu erwähnen, dass in den folgenden drei Abschnitten inhaltlich auf Literatur [4] zurückgegriffen wurde.

### 3.1 Finite Elemente Verfahren

Die Methode der Finiten Elemente zur Berechnung von Eigenfrequenzen und Eigenformen beruht auf dem Prinzip der virtuellen Verrückung, oder einer gleichwertigen Energieaussage. Für weitere Verwendung muss das Prinzip der virtuellen Verschiebung also die Differentialgleichungen, die das System beschreibt in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem der Form

$$M * \ddot{\tilde{u}} + D * \dot{\tilde{u}} + S * \tilde{u} = \tilde{p} \quad (3.1)$$

überführt werden. Ermöglicht wird dies durch Approximation von auftretenden, unabhängigen Verschiebungszuständen mittels lokaler Ansatzfunktionen. Bei Formel 3.1 sei angemerkt, dass  $M$  die Massenmatrix,  $D$  die Dämpfungsmatrix,  $S$  die Steifigkeitsmatrix,  $u$  der Verschiebungsvektor und  $p$  der Belastungsvektor sei. Das Symbol  $\tilde{\phantom{x}}$  welches in  $\tilde{p}$  enthalten ist, steht für eine zeitlich veränderliche Funktion. Das Symbol der Form  $\dot{\phantom{x}}$ , welches etwa in  $\dot{\tilde{u}}$  enthalten ist,

beschreibt die Zeitableitung dieser Funktion.

Ein Grund für die Beliebtheit des Finite Elemente Verfahrens ist, dass es nahezu ohne Beschränkung auf jedes beliebige System angewendet werden kann. Dabei können komplexe Geometrien in allen Dimensionen ebenso dreidimensionale Kontinua behandelt werden. Randbedingungen, sowie der Verlauf von Steifigkeit und Massenbelegung unterliegen nahezu keiner Einengung.

Eine präzise Berechnung jedoch verlangt einen dementsprechend größeren Rechenaufwand, speziell bei der Untersuchung mit dreidimensionalen Elementen. Daher sollte zuerst hinterfragt werden mit welcher Genauigkeit das finite Elemente Verfahren angewendet wird, um ein ausreichend korrektes Ergebnis zu erhalten. Oft genügen eindimensionale oder zweidimensionale Elemente, sowie eine kleine Anzahl von Elementen, um eine Problemstellung hinreichend zu klären.

Lösung einer Eigenschwingungsberechnung mittels der Finiten Elemente Methode sind Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen des betrachteten Systems. Falls weitere Aussagen über das System verlangt werden, wie etwa die Ermittlung von Schnittkräften, können zusätzliche Berechnungen dies ermöglichen. Darüber hinaus verfügt das Finite Elemente Verfahren zwei bedeutende positive Eigenschaften. Wenn Dämpfung das System beeinflusst, findet die Methode ohne größeren Aufwand korrekte Ergebnisse. Auch Erregerkräfte im Zeitbereich sowie Frequenzbereich mit beliebigen Zeitverläufen können berücksichtigt und untersucht werden.

## 3.2 Übertragungsmatrizenverfahren

Bei diesem Verfahren wird die Struktur in Teilabschnitte zerlegt und anschließend werden Differentialgleichungen für jedes Element aufgestellt und gelöst, wobei die Zeitabhängigkeit eliminiert werden kann. Die Ergebnisse werden in sogenannte Übertragungsmatrizen und Zustandsvektoren umgeformt und in ein lineares Gleichungssystem der Form

$$x_1 = T(\omega) * x_0 \tag{3.2}$$

gebracht.

In Formel 3.2, ist anzumerken, dass der Vektor  $x_0$  den Anfangszustand des Elementes beschreibt.  $x_1$  beschreibt den Endzustand des Elementes und  $T(\omega)$  ist die Übertragungsmatrix des Elementes mit Abhängigkeit von  $\omega$ .

Werden alle Teilabschnitte bzw. Elemente der Struktur unter Verwendung der Randbedingungen zusammengefügt, erhält man ein homogenes Gleichungssystem, welches besonders numerisch ökonomisch ist. Dies tritt jedoch nur ein, wenn unverzweigte Strukturen betrachtet werden. Bei verzweigten Strukturen verliert das Verfahren seine Eleganz.

Der Rechenaufwand ist aufgrund des reduzierten Systems gering. Die Ordnung des Gleichungssystems kann jedoch je nach Element variieren. Werden etwa Kreiseffekt, anisotrope Lagerung oder sogar Gleitlagertheorie berücksichtigt, wird die Ordnung des Gleichungssystems deutlich ansteigen und somit auch die benötigte Berechnungszeit.

Eine besonders nützliche Eigenschaft des Übertragungsmatrizenverfahren ist dass neben der ursprünglichen Lösung, also die Ermittlung von Eigenfrequenzen und Eigenformen des Systems, beiläufig noch Verschiebungen, Neigungen, Momente und Querkräfte jedes Elementes, ermittelt werden können.

Schwierigkeiten treten auf, wenn in einem System dämpfende Elemente einwirken. Hier ist nicht ohne weiteres eine Lösung zu erwarten, da komplexe Übertragungsmatrizen und Zustandsvektoren das Lösen des Gleichungssystems erschweren. Die Eigenwertberechnung mit dem Ansatz  $e^{\lambda t}$  wird aus numerischer ökonomischer Perspektive kostspielig. Da im Eigenwert

$$\lambda = \alpha + i\omega \tag{3.3}$$

nun zwei unbekannte Parameter  $\alpha$  und  $\omega$  vorkommen, sind in der Berechnung folglich beide Parameter durchzuprobieren.  $\alpha$  sei hier als Abklingfaktor,  $\omega$  als Frequenz und  $i$  als imaginäre Zahl bezeichnet werden.

Im Übertragungsmatrizenverfahren können erzwungene harmonische Schwingungen gut implementiert und untersucht werden. Bei beliebigen Zeitverläufen der Erregerkraft im Zeitbereich sowie Frequenzbereich ist jedoch eine weitere Grenze des Verfahrens erreicht.

### 3.3 Gegenüberstellung und Auswahl

In diesem Kapitel werden die wesentlichsten Aspekte des Finiten Elemente Verfahrens und Übertragungsmatrizenverfahrens gegenübergestellt. Dabei soll berücksichtigt werden, welche Eigenschaften der Verfahren am besten geeignet sind, um ein computerbasiertes Simulationsmodell zur Bestimmung des rotordynamischen Verhaltens von hydraulischen Maschinensätzen zu entwickeln. Abschließend wird das vorteilhaftere Verfahren ausgewählt, welches als Basis für das Simulationsmodell dienen soll.

Aus Tabelle 3.1 wird ersichtlich, dass die Methode der Finiten Elemente klare Vorteile gegenüber dem Übertragungsmatrizenverfahren aufweist. Es ist nahezu auf jedes beliebige System anwendbar und es existieren Lösungsmöglichkeiten, auch wenn Dämpfungselemente oder zeitlich beliebige Erregerkräfte vorhanden sind.

Das Übertragungsmatrizenverfahren verfügt ebenfalls über entsprechende Eigenschaften, um das rotordynamische Verhalten von hydraulischen Maschinensätzen ausreichend zu bestimmen.

Um die Eigenschwingungen einer gesamten Wasserkraftmaschine zu ermitteln, kann ein unverzweigtes Modell mittels Balken- und Massenelementen erstellt werden. Diese Anforderung erfüllt das Übertragungsmatrizenverfahren zur Gänze. Weiter treten bei hydraulischen Maschinensätzen so geringe Dämpfungen auf, dass Eigenfrequenzen nahezu nicht verschoben werden. Folglich entfällt die überaus rechenintensive Ermittlung der Eigenfrequenz mit zwei unbekanntem Parameter, da schlicht die Dämpfung null gesetzt wird.

Im Übertragungsmatrizenverfahren können lediglich erzwungene harmonische Schwingungen behandelt werden. Das Verfahren könnte hier an seine Grenzen stoßen, da hydraulische Maschinensätze eine Vielzahl von unterschiedlichen Kräften hervorrufen. Allerdings ist eine der relevantesten Kräfte die Unwuchtkraft, eine umlauffrequente Erregerkraft und folglich eine harmonische Schwingung.

Das Übertragungsmatrizenverfahren wurde als Basis für das Simulationsmodell gewählt, da weitgehendst alle Anforderungen erfüllt werden konnten. Weiters

wird die Implementierung des Übertragungsmatrizenverfahrens im MATLAB weniger aufwendig und anspruchsvoll als mit dem Finite Elemente Verfahren. Weiters spricht der geringe Berechnungsaufwand um Eigenfrequenzen zu ermitteln, ebenfalls für dieses Verfahren.

	Finite Elemente Verfahren	Übertragungsmatrizenverfahren
Lösungsansatz	Prinzip der virtuellen Verrückung oder einer gleichwertigen Energieaussage, anschließende Überführung in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen	Differentialgleichungsverfahren, welches Randwertproblem zu Anfangswertproblem konvertiert
Anwendungsmöglichkeiten	nahezu ohne Beschränkung	nur bei unverzweigten Strukturen effizient einsetzbar
Rechenaufwand	mittel bis hoch	gering
Ergebnisse	Eigenfrequenzen und Eigenformen (weiterführende Berechnungen ermöglichen zusätzliche Ergebnisse)	Eigenfrequenzen, Eigenformen, Verschiebung, Neigung, Moment und Querkraft
Dämpfung im System	gut lösbar	überaus rechenintensiv
Erregerkräfte	beliebige Zeitverläufe der Erregerkraft in Zeitbereich sowie Frequenzbereich sind möglich	Berechnung von erzwungenen harmonischen Schwingungen realisierbar

**Tabelle 3.1:** Gegenüberstellung vom Finite Elemente Verfahren und Übertragungsmatrizenverfahren

## 4 Theorie des Übertragungsmatrizenverfahrens

In diesem Kapitel soll wesentlich auf die Theorie des Übertragungsmatrizenverfahrens eingegangen werden. Eine kurze Einführung in die Rotordynamik wird im Abschnitt 4.2 gegeben, welche notwendig ist um die benötigten Übertragungsmatrizen zu erstellen. Folgend werden die Matrizen für Biege- und Torsionsschwingungen abgeleitet und anschließend das grundlegende Konzept erläutert.

Inhaltlich wurde im Kapitel 4 auf die Literatur [4] und [5] zurückgegriffen.

### 4.1 Koordinatensystem

In Abbildung 4.1 ist das verwendete Koordinatensystem bildhaft dargestellt. Das System wird als rechtshändiges System festgelegt, wobei die x-Achse als Rotationsachse angenommen wird. Werden z-Achse zu x-Achse, x-Achse zu y-Achse und y-Achse zu z-Achse im Uhrzeigersinn bzw. im mathematisch negativen Sinn gedreht, wird die Richtung der Winkel als positiv angesehen.

Die Durchbiegung wird in z-Richtung als  $w$  und y-Richtung als  $v$  bezeichnet.[5] Schwerkraft wirkt in positiver z-Richtung.

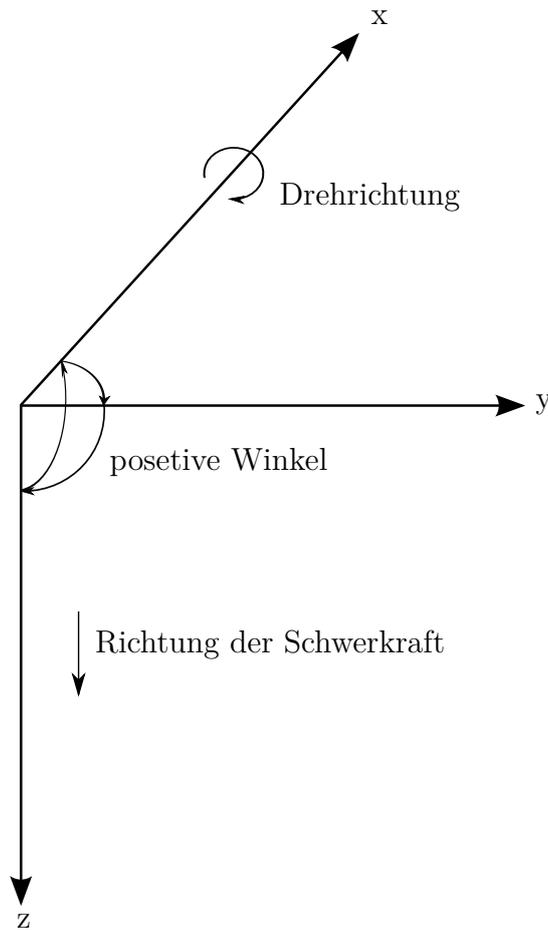


Abbildung 4.1: Bestimmung des Koordinatensystems (vgl. Abb. in [5])

## 4.2 kinematische Beziehungen eines Rotors

Inhalt dieses Abschnittes ist die kinematischen Zusammenhänge eines Rotors zu finden. Dabei wird auf die Literatur [1] zurückgegriffen. Falls Unklarheiten hinsichtlich der Rotordynamik auftreten, ist dieses Fachbuch sehr zu empfehlen.

Zu Beginn wird eines der einfachsten Modelle der Lavallrotor betrachtet. Der Lavallrotor besitzt eine massebehaftete Scheibe mit einer elastischen masselosen Welle. Lager werden als starr angenommen und im System soll keine Dämpfung vorhanden sein. Abbildung 4.2 und 4.3 veranschaulichen dies. (vgl. Abbildung 4.2 und 4.3 in [1] und [5])

Angesichts der exzentrischen Scheibe treten bei einer Rotation Fliehkräfte in

Form von

$$F = em\Omega^2 \quad (4.1)$$

auf, die den Rotor auslenken. Abstand der Exzentrizität wird mit  $e$  bezeichnet,  $m$  steht für die Masse der Scheibe und  $\Omega$  ist die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Systems. Die Bewegungsgleichungen verlangen nun den kinematischen Zusammenhang von Wellendurchstoßpunkt  $W$  und Scheibenschwerpunkt  $S$  zu berücksichtigen. Mit  $v$  und  $w$  werden die Auslenkungen des Rotors, bezogen auf

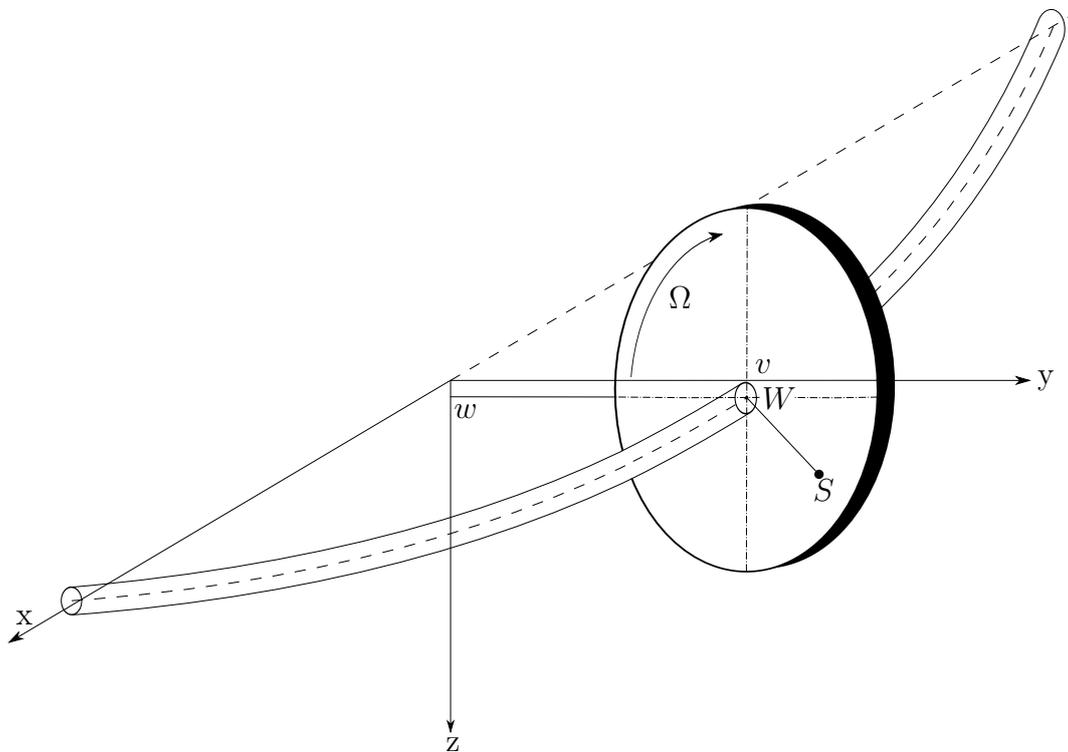


Abbildung 4.2: Ausgelenkter Rotor

den Wellendurchstoßpunkt  $W$ , deklariert. In Abbildung 4.3 ist das Modell in der  $yz$  Ebene abgebildet.  $v_s$  und  $w_s$  legen die Koordinaten des Schwerpunktes fest. Dabei ist  $e$  die Exzentrizität und  $\varepsilon$  die Winkellage der Unwucht.

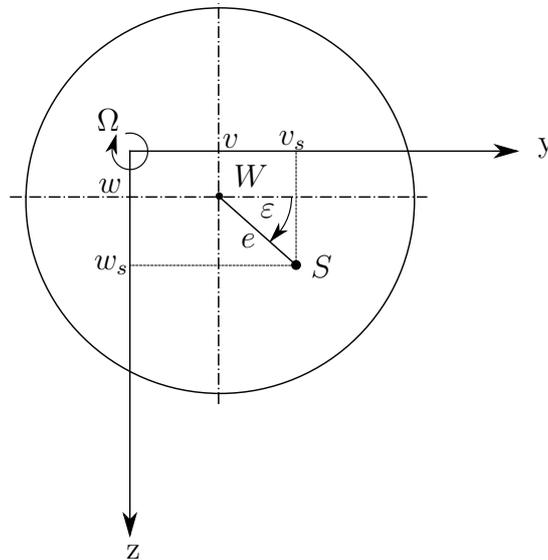


Abbildung 4.3: Rotorscheibe mit Unwucht

Zwischen Wellendurchstoßpunkt und Scheibenschwerpunkt bestehen folgende kinematische Beziehungen:

$$w_s = w + e \sin(\Omega t + \varepsilon) \quad (4.2)$$

$$v_s = v + e \cos(\Omega t + \varepsilon) \quad (4.3)$$

mit deren ersten zeitlichen Ableitungen:

$$\dot{w}_s = \dot{w} + e \Omega \cos(\Omega t + \varepsilon) \quad (4.4)$$

$$\dot{v}_s = \dot{v} - e \Omega \sin(\Omega t + \varepsilon) \quad (4.5)$$

und zweiten zeitlichen Ableitungen:

$$\ddot{w}_s = \ddot{w} - e \Omega^2 \sin(\Omega t + \varepsilon) \quad (4.6)$$

$$\ddot{v}_s = \ddot{v} - e \Omega^2 \cos(\Omega t + \varepsilon) \quad (4.7)$$

## 4.3 Übertragungsmatrizen für Biegeschwingungen

Um Biegeschwingungen mittels Übertragungsmatrizenverfahren ausreichend zu bestimmen, werden zwei bis drei unterschiedliche Matrizen benötigt. Um alle Einflüsse, wie zum Beispiel Kreiseffekt und anisotrope Lagerung zu berücksichtigen, müssen Gleichungen in zwei Ebenen aufgestellt, gelöst und in Matrixform gebracht werden.

Inhaltlich wurde in diesem Kapitel auf [5] und [4] zurückgegriffen, ebenfalls besteht eine Anlehnung an die dort verwendeten Abbildungen.

### 4.3.1 Massenpunkt

In der Massenmatrix werden folgende physikalische Effekte eingebunden:

- einfache Punktmasse
- Masse in Scheibenform
- Kreiseffekt
- Feder- und Dämpferelemente
- erzwungene Erregung zufolge Unwucht

Diese Massenmatrix wird nun die Modellierung von Lager, Turbinen und Generatoren und andere mit-rotierende Massen ermöglichen. In den folgenden zwei Unterkapiteln werden die Massenmatrizen in zx- sowie yx-Ebene aufgestellt.

### Biegung um die y-Achse

In Abbildung 4.4 sind die einwirkenden Kräfte und Momente am Element eingetragen.  $m$  bezeichnet die Rotormasse,  $\Theta_a$  das äquatoriale Massenträgheitsmoment,  $\Theta_p$  das polare Massenträgheitsmoment. Die Federkraft in z-Richtung wird durch die Federsteifigkeit in z-Richtung  $c_{zz}$  multipliziert mit deren Auslenkung  $Z$  bestimmt. Wird Dämpfungskonstante  $d_{zz}$  mit  $\dot{Z}$  multipliziert, wirkt eine dämpfende Kraft in z-Richtung. Eine Koppelung der Ebenen tritt auf, wenn die Federkraft  $c_{zy} * Y$  oder Dämpfungskraft  $d_{zy} * \dot{Y}$  existieren.  $Q_z$  ist die Querkraft am Ende und Anfang des Massenelementes in z-Richtung.  $M_y$  hingegen ist das

Biegemoment am Ende und Anfang des Elementes um die y-Achse. Interessant ist der Term  $\Theta_p \Omega \varphi_y$ , welcher den Kreiseffekt beschreibt. Wird  $\Omega$  die Drehfrequenz des Systems variiert, so verändert sich natürlich auch der gesamte Term. Später zeigt sich, dass zufolge dieser Eigenschaft die Eigenfrequenzen nicht mehr konstant sind, sondern von der Drehfrequenz  $\Omega$  des rotierenden Systems abhängen.

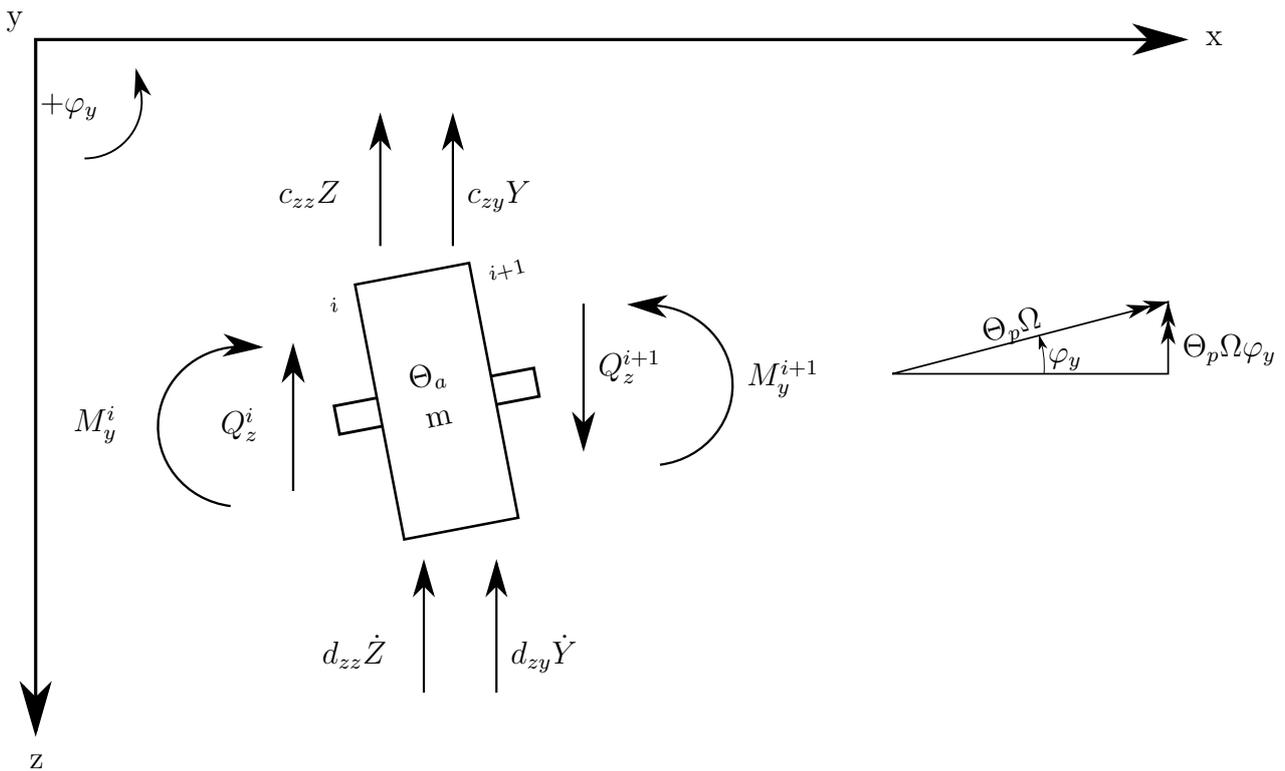


Abbildung 4.4: auftretende Kräfte und Momente am Massenelement in der zx-Ebene

### Bewegungsgleichung der Translation

Zuerst werden alle Kräfte in die Bewegungsgleichung der Translation eingetragen.

$$m \ddot{Z}_s = -Q_z^i + Q_z^{i+1} - c_{zz} Z - c_{zy} Y - d_{zz} \dot{Z} - d_{zy} \dot{Y} \quad (4.8)$$

Dabei steht der Index s bei  $\ddot{Z}_s$  für Schwerpunkt. Nun wird die Schreibweise von der Rotordynamik übernommen.

$$Z \rightarrow w \quad \dot{Z} \rightarrow \dot{w} \quad Y \rightarrow v \quad \dot{Y} \rightarrow \dot{v} \quad \ddot{Z}_s \rightarrow \ddot{w}_s \quad (4.9)$$

daraus folgt:

$$m \ddot{w}_s = -Q_z^i + Q_z^{i+1} - c_{zz} w - c_{zy} v - d_{zz} \dot{w} - d_{zy} \dot{v} \quad (4.10)$$

Da  $\ddot{w}_s$  noch auf den Schwerpunkt bezogen ist, wird die Beziehung (4.6) eingesetzt, um diese zu eliminieren. Daraus folgt:

$$m (\ddot{w} - e \Omega^2 \sin(\Omega t + \varepsilon)) = -Q_z^i + Q_z^{i+1} - c_{zz} w - c_{zy} v - d_{zz} \dot{w} - d_{zy} \dot{v} \quad (4.11)$$

weiter umgeformt ergibt sich die Gleichung:

$$m \ddot{w} = -Q_z^i + Q_z^{i+1} - c_{zz} w - c_{zy} v - d_{zz} \dot{w} - d_{zy} \dot{v} + m e \Omega^2 \sin(\Omega t + \varepsilon) \quad (4.12)$$

Die Drehfrequenz  $\Omega$  des rotierenden Systemes wird durch  $\omega$  einer Drehfrequenz ersetzt. Aufgrund der Aufspaltung mittels Summensatzes folgt:

$$\sin(\omega t + \varepsilon) = \sin(\omega t) \cos(\varepsilon) + \cos(\omega t) \sin(\varepsilon) \quad (4.13)$$

und den Eigenschwingsansätzen:

$$w = w_1 \sin(\omega t) + w_2 \cos(\omega t) \quad (4.14)$$

$$v = v_1 \sin(\omega t) + v_2 \cos(\omega t) \quad (4.15)$$

$$Q_z = Q_{z1} \sin(\omega t) + Q_{z2} \cos(\omega t) \quad (4.16)$$

und deren zeitlichen Ableitungen:

$$\dot{w} = w_1 \omega \cos(\omega t) - w_2 \omega \sin(\omega t) \quad (4.17)$$

$$\ddot{w} = -w_1 \omega^2 \sin(\omega t) - w_2 \omega^2 \cos(\omega t) \quad (4.18)$$

$$\dot{v} = v_1 \omega \cos(\omega t) - v_2 \omega \sin(\omega t) \quad (4.19)$$

$$\ddot{v} = -v_1 \omega^2 \sin(\omega t) - v_2 \omega^2 \cos(\omega t) \quad (4.20)$$

folgt unmittelbar aus Gleichung 4.12 und 4.13:

$$\begin{aligned} m (-w_1 \omega^2 \sin(\omega t) - w_2 \omega^2 \cos(\omega t)) = \\ -Q_{z1}^i \sin(\omega t) - Q_{z2}^i \cos(\omega t) + Q_{z1}^{i+1} \sin(\omega t) + Q_{z2}^{i+1} \cos(\omega t) \\ -c_{zz} (w_1 \sin(\omega t) + w_2 \cos(\omega t)) - c_{zy} (v_1 \sin(\omega t) + v_2 \cos(\omega t)) \\ -d_{zz} (w_1 \omega \cos(\omega t) - w_2 \omega \sin(\omega t)) - d_{zy} (v_1 \omega \cos(\omega t) - v_2 \omega \sin(\omega t)) \\ + m e \omega^2 * (\sin(\omega t) \cos(\varepsilon) + \cos(\omega t) \sin(\varepsilon)) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird nun in zwei Gleichungen aufgeteilt. Sämtliche Glieder, die mit  $\sin(\omega t)$  vernetzt sind, werden zusammengefasst, ebenso wird mit den  $\cos(\omega t)$  Anteilen verfahren.

$$-m w_1 \omega^2 = -Q_{z1}^i + Q_{z1}^{i+1} - c_{zz} w_1 - c_{zy} v_1 + d_{zz} w_2 \omega + d_{zy} v_2 \omega + m e \omega^2 \cos(\varepsilon) \quad (4.21)$$

$$-m w_2 \omega^2 = -Q_{z2}^i + Q_{z2}^{i+1} - c_{zz} w_2 - c_{zy} v_2 + d_{zz} w_1 \omega + d_{zy} v_1 \omega + m e \omega^2 \sin(\varepsilon) \quad (4.22)$$

### Bewegungsgleichung der Rotation

Sämtliche auf das Massenelement einwirkende Momente werden in der Bewegungsgleichung für Rotation eingetragen.

$$M_y^{i+1} - M_y^i = \Theta_a \ddot{\varphi}_y + \Theta_p \Omega \dot{\varphi}_z \quad (4.23)$$

Die Eigenschwungsansätze:

$$\varphi_y = \varphi_{y1} \sin(\omega t) + \varphi_{y2} \cos(\omega t) \quad (4.24)$$

$$\varphi_z = \varphi_{z1} \sin(\omega t) + \varphi_{z2} \cos(\omega t) \quad (4.25)$$

$$M_y = M_{y1} \sin(\omega t) + M_{y2} \cos(\omega t) \quad (4.26)$$

und deren zeitlichen Ableitungen von  $\varphi_y$  und  $\varphi_z$ :

$$\dot{\varphi}_y = \varphi_{y1} \omega \cos(\omega t) - \varphi_{y2} \omega \sin(\omega t) \quad (4.27)$$

$$\ddot{\varphi}_y = -\varphi_{y1} \omega^2 \sin(\omega t) - \varphi_{y2} \omega^2 \cos(\omega t) \quad (4.28)$$

$$\dot{\varphi}_z = \varphi_{z1} \omega \cos(\omega t) - \varphi_{z2} \omega \sin(\omega t) \quad (4.29)$$

$$\ddot{\varphi}_z = -\varphi_{z1} \omega^2 \sin(\omega t) - \varphi_{z2} \omega^2 \cos(\omega t) \quad (4.30)$$

werden in Gleichung (4.23) eingesetzt

$$\begin{aligned} M_{y1}^{i+1} \sin(\omega t) + M_{y2}^{i+1} \cos(\omega t) - M_{y1}^i \sin(\omega t) - M_{y2}^i \cos(\omega t) = \\ \Theta_a (-\varphi_{y1} \omega^2 \sin(\omega t) - \varphi_{y2} \omega^2 \cos(\omega t)) \\ + \Theta_p \Omega (\varphi_{z1} \omega \cos(\omega t) - \varphi_{z2} \omega \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird nun in zwei Gleichungen aufgeteilt. Sämtliche Glieder die mit  $\sin(\omega t)$  vernetzt sind werden zusammengefasst, ebenso wird mit den

$\cos(\omega t)$  Anteilen verfahren.

$$M_{y1}^{i+1} - M_{y1}^i = -\Theta_a \omega^2 \varphi_{y1} - \Theta_p \Omega \omega \varphi_{z2} \quad (4.31)$$

$$M_{y2}^{i+1} - M_{y2}^i = -\Theta_a \omega^2 \varphi_{y2} - \Theta_p \Omega \omega \varphi_{z1} \quad (4.32)$$

### Biegung um die z-Achse

Abgesehen von der Biegeachse, ist die Vorgehensweise für die Herleitung und Lösung der Bewegungsgleichungen, verglichen mit der Biegung um die y-Achse identisch. Daher wird auf eine genaue Schilderung verzichtet.

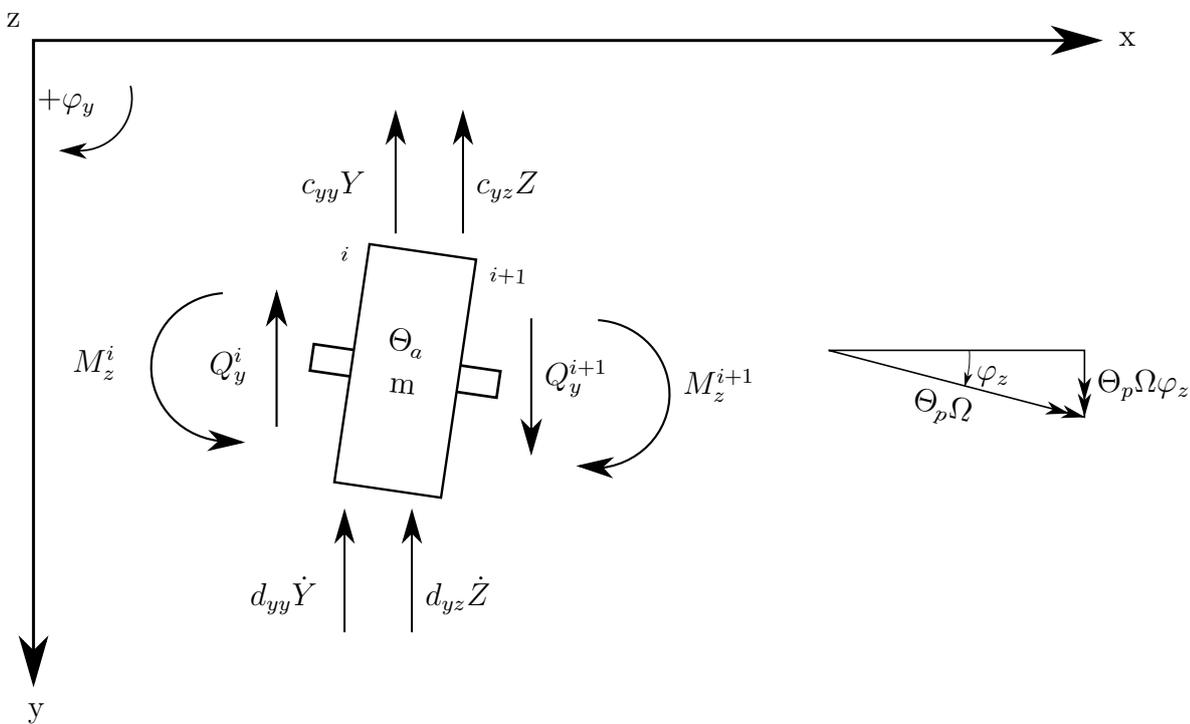


Abbildung 4.5: auftretende Kräfte und Momente am Massenelement in der yx-Ebene

### **Bewegungsgleichung der Translation**

Es werden erneut alle Kräfte in die Bewegungsgleichung der Translation eingetragen.

$$m \ddot{Y}_s = -Q_y^i + Q_y^{i+1} - c_{yy} \dot{Y} - c_{yz} \dot{Z} - d_{yy} \dot{Y} - d_{yz} \dot{Z} \quad (4.33)$$

Anschließend wird die Notation der Rotordynamik übernommen. Gleichungen 4.9 werden in 4.33 eingefügt:

$$m \ddot{v}_s = -Q_y^i + Q_y^{i+1} - c_{yy} v - c_{yz} w - d_{yy} \dot{v} - d_{yz} \dot{w} \quad (4.34)$$

$\ddot{v}_s$  wird durch Gleichung 4.7 ersetzt und anschließend umgeformt auf

$$m \ddot{v} = -Q_y^i + Q_y^{i+1} - c_{yy} v - c_{yz} w - d_{yy} \dot{v} - d_{yz} \dot{w} + m e \Omega^2 \cos(\Omega t + \varepsilon) \quad (4.35)$$

mit  $\Omega = \omega$  und den Summensatz

$$\cos(\omega t + \varepsilon) = \cos(\omega t) \cos(\varepsilon) - \sin(\omega t) \sin(\varepsilon) \quad (4.36)$$

und unter Berücksichtigung der Eigenschwingungsansätze (Gleichungen 4.14 bis 4.20) folgt unmittelbar aus Gleichung 4.35.

$$\begin{aligned} & m (-v_1 \omega^2 \sin(\omega t) - v_2 \omega^2 \cos(\omega t)) = \\ & -Q_{y1}^i \sin(\omega t) - Q_{y2}^i \cos(\omega t) + Q_{y1}^{i+1} \sin(\omega t) + Q_{y2}^{i+1} \cos(\omega t) \\ & -c_{yy} (v_1 \sin(\omega t) + v_2 \cos(\omega t)) - c_{yz} (w_1 \sin(\omega t) + w_2 \cos(\omega t)) \\ & -d_{yy} (v_1 \omega \cos(\omega t) - v_2 \omega \sin(\omega t)) - d_{yz} (w_1 \omega \cos(\omega t) - w_2 \omega \sin(\omega t)) \\ & + m e \omega^2 * (\cos(\omega t) \cos(\varepsilon) - \sin(\omega t) \sin(\varepsilon)) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird nun in zwei Gleichungen aufgetrennt. Sämtliche Glieder die mit  $\sin(\omega t)$  vernetzt sind werden zusammengefasst, ebenso wird mit den  $\cos(\omega t)$  Anteilen verfahren.

$$-m v_1 \omega^2 = -Q_{y1}^i + Q_{y1}^{i+1} - c_{yy} v_1 - c_{yz} w_1 + d_{yy} v_2 \omega + d_{yz} w_2 \omega - m e \omega^2 \sin(\varepsilon) \quad (4.37)$$

$$-m v_2 \omega^2 = -Q_{y2}^i + Q_{y2}^{i+1} - c_{yy} v_2 - c_{yz} w_2 - d_{yy} v_1 \omega - d_{yz} w_1 \omega + m e \omega^2 \cos(\varepsilon) \quad (4.38)$$

## Bewegungsgleichung für Rotation

Sämtliche auf das Massenelement einwirkende Momente werden in der Bewegungsgleichung für Rotation eingetragen.

$$M_z^{i+1} - M_z^i = \Theta_a \ddot{\varphi}_z - \Theta_p \Omega \dot{\varphi}_y \quad (4.39)$$

Mit den Eigenschwingungsansätzen und deren zeitlichen Ableitungen also Gleichungen 4.24 bis 4.30 ergibt sich aus 4.39 zu

$$\begin{aligned} M_{z1}^{i+1} \sin(\omega t) + M_{z2}^{i+1} \cos(\omega t) - M_{z1}^i \sin(\omega t) - M_{z2}^i \cos(\omega t) = \\ \Theta_a(-\varphi_{z1} \omega^2 \sin(\omega t) - \varphi_{z2} \omega^2 \cos(\omega t)) \\ - \Theta_p \Omega (\varphi_{y1} \omega \cos(\omega t) - \varphi_{y2} \omega \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird nun in zwei Gleichungen aufgeteilt. Sämtliche Glieder die mit  $\sin(\omega t)$  vernetzt sind, werden zusammengefasst, ebenso wird mit den  $\cos(\omega t)$  Anteilen verfahren.

$$M_{z1}^{i+1} - M_{z1}^i = -\Theta_a \omega^2 \varphi_{z1} + \Theta_p \Omega \omega \varphi_{y2} \quad (4.40)$$

$$M_{z2}^{i+1} - M_{z2}^i = -\Theta_a \omega^2 \varphi_{z2} - \Theta_p \Omega \omega \varphi_{y1} \quad (4.41)$$

### Übertragungsmatrix für das Massenelement

Die Bewegungsgleichungen für ein Massenelement konnten in zx- und yx-Ebene erfolgreich aufgestellt und gelöst werden. Folglich lässt sich das Biegeverhalten für ein Massenelement zu jedem Zeitpunkt bestimmen. Wobei sich der Index  $i$  auf die Zustandswerte vor und  $i+1$  nach dem Element beziehen.

Nun werden die Gleichungen 4.21, 4.22, 4.31, 4.32, 4.37, 4.38, 4.40 und 4.41 in Matrixform der Gestalt

$$x^{i+1} = T * x^i \quad (4.42)$$

gebracht.  $T$  ist dabei die Übertragungsmatrix und  $x$  der Zustandsvektor.

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \varphi_{y1} \\ M_{y1} \\ Q_{z1} \\ w_2 \\ \varphi_{y2} \\ M_{y2} \\ Q_{z2} \\ v_1 \\ \varphi_{z1} \\ M_{z1} \\ Q_{y1} \\ v_2 \\ \varphi_{z2} \\ M_{z2} \\ Q_{y2} \\ 1 \end{pmatrix}^{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Theta_a \omega^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zz} - m\omega^2 & 0 & 0 & 1 & -d_{zz}\omega & 0 & 0 & 0 & c_{zy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m\epsilon\omega^2 \cos(\epsilon) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Theta_a \omega^2 & 1 & 0 & 0 & \Theta_p \Omega \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{zz}\omega & 0 & 0 & 0 & c_{zz} - m\omega^2 & 0 & 0 & 1 & d_{zy}\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m\epsilon\omega^2 \sin(\epsilon) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_p \Omega \omega & 0 & 0 & -\Theta_a \omega^2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{yz} & 0 & 0 & 0 & d_{yz}\omega & 0 & 0 & 0 & c_{yy} - m\omega^2 & 0 & 0 & 1 & -d_{yy}\omega & 0 & 0 & 0 & m\epsilon\omega^2 \sin(\epsilon) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Theta_p \Omega \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Theta_a \omega^2 & 1 & 0 \\ d_{yz}\omega & 0 & 0 & 0 & c_{yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{yy}\omega & 0 & 0 & 0 & c_{yy} - m\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} w_1 \\ \varphi_{y1} \\ M_{y1} \\ Q_{z1} \\ w_2 \\ \varphi_{y2} \\ M_{y2} \\ Q_{z2} \\ v_1 \\ \varphi_{z1} \\ M_{z1} \\ Q_{y1} \\ v_2 \\ \varphi_{z2} \\ M_{z2} \\ Q_{y2} \\ 1 \end{pmatrix}^i$$

(4.43)

In der letzten Spalte der Übertragungsmatrix befinden sich die Erregerkräfte in Form von  $m\omega^2$  mal einer Sinus- oder Kosinusfunktion wieder.

### 4.3.2 Masseloser Balken konstanter Steifigkeit

Ein masseloses Balkenelement kann dazu verwendet werden, ein Wellenstück zu beschreiben. Dabei wird die Masse der Welle entweder vollkommen vernachlässigt, oder sie wird der Rotorscheibe aufgetragen. Bei größerer Feldlänge eines Balkenelementes kann ein Massenelement eingefügt werden, welche die Masse der Welle berücksichtigt.

Aufgrund des Kreiseffektes und anisotroper Lagerung in der Massenmatrix müssen für das Balkenelement ebenfalls die physikalischen Zusammenhänge in der  $zx$ - und  $yx$ - Ebene gefunden werden.

#### Biegung um die $y$ -Achse

In Abbildung 4.6 wurden Kräfte und Momente die auf ein Balkenelement einwirken dargestellt. Dabei wird die Querkraft  $Q_z$  und Linienlast  $q_z$  in  $z$ -Richtung sowie Moment  $M_y$  um die  $y$ -Achse beachtet.

Aus dem Kräftegleichgewicht

$$-Q_z + q_z dx + Q_z + dQ_z = 0 \quad (4.44)$$

folgt

$$q_z = \frac{-dQ_z}{dx} = -Q'_z \quad (4.45)$$

und dem Momentengleichgewicht

$$-M_y - Q_z dx + M_y + dM_y = 0 \quad (4.46)$$

folgt

$$Q_z = \frac{dM_y}{dx} = M'_y \quad (4.47)$$

Für eine weitere Berechnung wird die Biegedifferentialgleichung des Balkenelements benötigt. Dabei wurde auf die Literatur [6] zurückgegriffen. Mit der

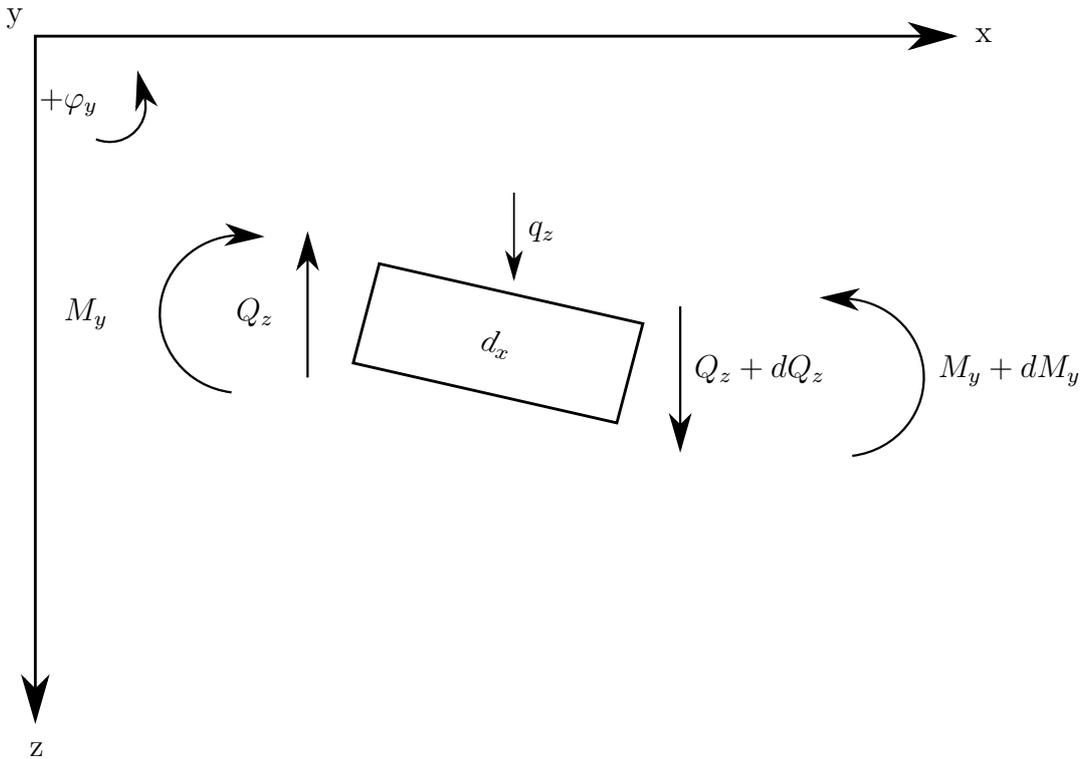


Abbildung 4.6: Kräfte und Momente eines masselosen Balkenelements in  $xz$ -Ebene

Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.48)$$

und dem Elastizitätsgesetz

$$\sigma = E \varepsilon \quad (4.49)$$

folgt

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.50)$$

Aufgrund des kinematischen Zusammenhang

$$u = \varphi_y z \quad (4.51)$$

wird aus Gleichung 4.50 die Beziehung.

$$\sigma = E \varphi_y' z \quad (4.52)$$

Das Biegemoment  $M$  wird bestimmt durch Bildung der Normalspannung  $\sigma$  in x-Richtung über den gesamten Querschnitt.

$$M_y = \int_A \sigma z dA \quad (4.53)$$

Mit Verwendung der Gleichung 4.52 folgt.

$$M_y = \int_A E \varphi'_y z^2 dA \quad \rightarrow \quad M_y = E \varphi'_y \int_A z^2 dA \quad (4.54)$$

Nützt man das Flächenträgheitsmoment  $I = I_y = \int z^2 dA$  und die Beziehung  $\varphi_y = -w'$  aus, ergibt sich die Differentialgleichung der Biegelinie zu

$$M_y = -E I w'' \quad (4.55)$$

Zwei mal nach x abgeleitet erhält man

$$M_y'' = -E I w'''' \quad (4.56)$$

Da aber

$$M_y'' = Q'_z = -q_z \quad (4.57)$$

ist, und  $q_z$  null wird da keine Streckenlast vorhanden sein soll, kann Gleichung (4.56) vereinfacht werden zu.

$$E I w'''' = 0 \quad (4.58)$$

Diese Gleichung wird nun integriert. Die anfallenden Konstanten können mittels Anfangsrandbedingungen bestimmt werden.

$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (4.59)$$

$$w(x)' = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 \quad (4.60)$$

$$w(x)'' = 2 a_2 + 6 a_3 x \quad (4.61)$$

$$w(x)''' = 6 a_3 \quad (4.62)$$

Gleichungen können weiter umgeformt werden. Verwendet man

$$w(x)' = -\varphi ; w(x)'' = -\frac{M_y}{E I} ; w(x)''' = -\frac{Q_z}{E I} \quad (4.63)$$

so ergibt sich.

$$\varphi_y = -a_1 - 2 a_2 x - 3 a_3 x^2 \quad (4.64)$$

$$M_y = -2 EI a_2 - 6 EI a_3 x \quad (4.65)$$

$$Q_z = -6 EI a_3 \quad (4.66)$$

Für  $x = 0$  gelten die Anfangsbedingungen

$$w = w_0 ; \varphi_y = \varphi_{y0} ; M_y = M_{y0} ; Q_z = Q_{z0}$$

mit denen die Konstanten bestimmt werden können zu.

$$a_0 = w_0 \quad (4.67)$$

$$a_1 = -\varphi_{y0} \quad (4.68)$$

$$a_2 = -\frac{M_{y0}}{2 EI} \quad (4.69)$$

$$a_3 = -\frac{Q_{z0}}{6 EI} \quad (4.70)$$

Werden diese in Gleichungen 4.59 und 4.64 bis 4.66 eingefügt erhält man.

$$w = w_0 - \varphi_{y0} x - \frac{M_{y0}}{2 EI} x^2 - \frac{Q_{z0}}{6 EI} x^3$$

$$\varphi_y = \varphi_{y0} + \frac{M_{y0}}{EI} x + \frac{Q_{z0}}{2 EI} x^2$$

$$M_y = M_{y0} + Q_{z0} x$$

$$Q_z = Q_{z0}$$

Sie beschreiben den Zustand also  $w$ ,  $\varphi_y$ ,  $M_y$ ,  $Q_z$  an jeder beliebigen Stelle des Biegebalkens. Das Übertragungsmatrizenverfahren verlangt jedoch nur die Zusammenhänge vom Anfang und Ende eines Elementes. Daher wird für  $x$  die Länge  $L$  des Balkenelementes ersetzt. Der Zustandswert an der Stelle  $x = 0$  wird mit dem Index  $i$  und  $x = L$  mit Index  $i+1$  bezeichnet. Werden die Gleichungen

nun in Matrixform geschrieben, so erhält man die Übertragungsmatrix für ein masseloses Biegeelement mit konstanter Steifigkeit in xz-Ebene.

$$\begin{pmatrix} w \\ \varphi_y \\ M_y \\ Q_z \end{pmatrix}^{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & -L & -\frac{L^2}{2EI} & -\frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} w \\ \varphi_y \\ M_y \\ Q_z \end{pmatrix}^i \quad (4.71)$$

### Biegung um die z-Achse

Abgesehen von der Biegeachse ist die Vorgehensweise verglichen mit der Biegung um die y-Achse identisch. Aus diesem Grunde wird nicht mehr auf jedes Detail eingegangen, stattdessen werden die notwendigsten Beziehungen ergänzt. Aus Abbildung 4.7 kann die Kräftebilanz abgeleitet

$$-Q_y + q_y dx + Q_y + dQ_y = 0 \quad (4.72)$$

und umgeformt werden zu

$$q_y = \frac{-dQ_y}{dx} = -Q'_y \quad (4.73)$$

Weiters wird die Momentenbilanz aufgestellt

$$-M_z + Q_y dx + M_z + dM_z = 0 \quad (4.74)$$

und umgeformt zu

$$Q_y = -\frac{dM_z}{dx} = -M'_z \quad (4.75)$$

Die Herleitung der Biegedifferentialgleichung des Balkenelements ist nahezu identisch wie zuvor. Die Gleichung (4.51) wird zu

$$u = -\varphi_z z \quad (4.76)$$

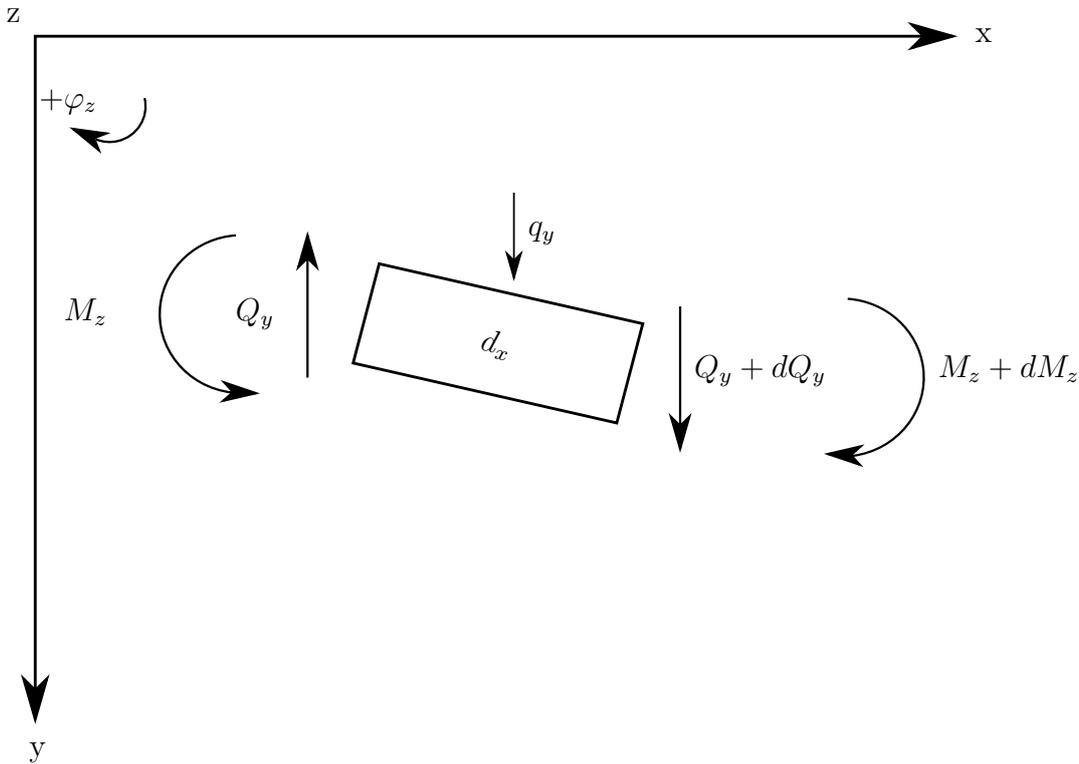


Abbildung 4.7: Kräfte und Momente eines masselosen Balkenelements in yx-Ebene

somit wird das Elastizitätsgesetz zu

$$\sigma = E \varphi'_z y \quad (4.77)$$

Das Biegemoment wird angeschrieben als

$$M_z = - \int_A \sigma y dA \quad (4.78)$$

und Gleichung (4.77) eingefügt.

$$M_z = \int_A E \varphi'_z y^2 dA \quad \rightarrow \quad M_z = E \varphi'_z \int_A y^2 dA \quad (4.79)$$

Nützt man das Flächenträgheitsmoment  $I = I_y = \int y^2 dA$  und die Beziehung  $\varphi_z = v'$  aus, so ergibt sich die Differentialgleichung der Biegelinie zu.

$$M_z = E I v'' \quad (4.80)$$

Zwei mal nach  $x$  abgeleitet erhält man.

$$M_z'' = E I v'''' \quad (4.81)$$

Da aber

$$-M_z'' = Q_y' = -q_y \quad (4.82)$$

ist, und  $q_y$  zu null wird, da keine Streckenlast vorhanden sein soll, kann Gleichung (4.81) vereinfacht werden zu

$$E I v'''' = 0 \quad (4.83)$$

Die Gleichung wird nun integriert. Die anfallenden Konstanten können mittels Anfangsrandbedingungen bestimmt werden.

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (4.84)$$

$$v(x)' = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 \quad (4.85)$$

$$v(x)'' = 2 a_2 + 6 a_3 x \quad (4.86)$$

$$v(x)''' = 6 a_3 \quad (4.87)$$

Diese Gleichungen können weiter umgeformt werden. Verwendet man

$$v(x)' = \varphi ; v(x)'' = \frac{M_z}{E I} ; v(x)''' = -\frac{Q_y}{E I} \quad (4.88)$$

so ergibt sich

$$\varphi_z = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 \quad (4.89)$$

$$M_z = 2 E I a_2 + 6 E I a_3 x \quad (4.90)$$

$$Q_y = -6 E I a_3 \quad (4.91)$$

Für  $x = 0$  gelten die Anfangsbedingungen

$$v = v_0 ; \varphi_z = \varphi_{z0} ; M_z = M_{z0} ; Q_y = Q_{y0}$$

mit denen die Konstanten bestimmt werden können zu

$$a_0 = v_0 \quad (4.92)$$

$$a_1 = \varphi_{z0} \quad (4.93)$$

$$a_2 = \frac{M_{z0}}{2 EI} \quad (4.94)$$

$$a_3 = -\frac{Q_{y0}}{6 EI} \quad (4.95)$$

Werden diese in die Gleichungen 4.84 und 4.89 und 4.91 eingefügt erhält man

$$v = v_0 + \varphi_{z0} x + \frac{M_{z0}}{2 EI} x^2 - \frac{Q_{y0}}{6 EI} x^3$$

$$\varphi_z = \varphi_{z0} + \frac{M_{z0}}{EI} x - \frac{Q_{y0}}{2 EI} x^2$$

$$M_z = M_{z0} - Q_{z0} x$$

$$Q_y = Q_{y0}$$

und die daraus resultierende Matrixformulierung

$$\begin{pmatrix} v \\ \varphi_z \\ M_z \\ Q_y \end{pmatrix}^{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2 EI} & -\frac{L^3}{6 EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & -\frac{L^2}{2 EI} \\ 0 & 0 & 1 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v \\ \varphi_z \\ M_z \\ Q_y \end{pmatrix}^i \quad (4.96)$$

### Übertragungsmatrix für ein masseloses Biegeelement

Das Ergebnis für den Zeitverlauf lässt sich mit den Gleichungen ermitteln

$$\begin{aligned} w(x, t) &= w_1 \sin(\omega t) + w_2 \cos(\omega t) & ; & & v(x, t) &= v_1 \sin(\omega t) + v_2 \cos(\omega t) \\ \varphi_y(x, t) &= \varphi_{y1} \sin(\omega t) + \varphi_{y2} \cos(\omega t) & ; & & \varphi_z(x, t) &= \varphi_{z1} \sin(\omega t) + \varphi_{z2} \cos(\omega t) \\ M_y(x, t) &= M_{y1} \sin(\omega t) + M_{y2} \cos(\omega t) & ; & & M_z(x, t) &= M_{z1} \sin(\omega t) + M_{z2} \cos(\omega t) \\ Q_z(x, t) &= Q_{z1} \sin(\omega t) + Q_{z2} \cos(\omega t) & ; & & Q_y(x, t) &= Q_{y1} \sin(\omega t) + Q_{y2} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Werden diese abermals in eine Matrix umgeschrieben, erhält man die Übertragungsmatrix für ein masseloses Biegeelement mit konstanter Steifigkeit.

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \varphi_{y1} \\ M_{y1} \\ Q_{z1} \\ w_2 \\ \varphi_{y2} \\ M_{y2} \\ Q_{z2} \\ v_1 \\ \varphi_{z1} \\ M_{z1} \\ Q_{y1} \\ v_2 \\ \varphi_{z2} \\ M_{z2} \\ Q_{y2} \\ 1 \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} 1 - L - \frac{L^2}{2EI} - \frac{L^3}{6EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - L - \frac{L^2}{2EI} - \frac{L^3}{6EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L^2}{2EI} - \frac{L^3}{6EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{EI} - \frac{L^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L^2}{2EI} - \frac{L^3}{6EI} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{EI} - \frac{L^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^* \quad (4.97)$$

### 4.3.3 Massebehafteter Balken konstanter Steifigkeit

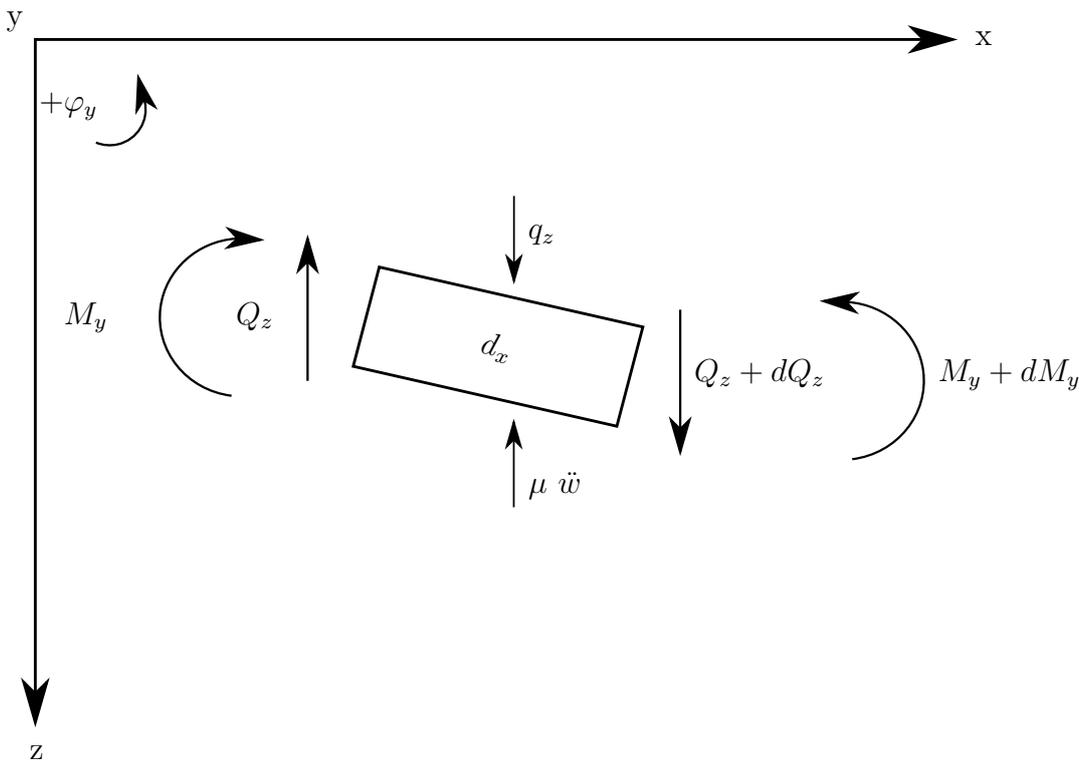
Ein massebehaftetes Balkenelement kann verwendet werden, um ein Wellenstück zu beschreiben. Anders als beim masselosen Balkenelement wird die Masse

des Balkens berücksichtigt, folglich lassen sich Schwingungsformen des Balken behandeln.

Zusätzliche Effekte könnten miteinbezogen werden, um das reale System detaillierter abzubilden. In Literatur [4] wurden Biegebalken mit axialer Normalkraft, elastische Bettung oder Drehträgheit und Schubelastizität (Timoshenko-Balken) hergeleitet. Keiner dieser ergänzenden Effekte wurde in das Simulationsprogramm mit einbezogen, da angenommen wurde, dass das rotordynamische Verhalten von hydraulischen Maschinen nicht von diesen Effekten beeinflusst wird.

### Biegung um die y-Achse

In Abbildung 4.8 sind alle einwirkenden Kräfte und Momente in z-Richtung die auf das massebehaftete Balkenelement einwirken, dargestellt. Dabei wird  $\mu$  als Massenbelegung bezeichnet.



**Abbildung 4.8:** Kräfte und Momente eines massebehafteten Balkenelementes in  $zx$ -Ebene

Mit Forderung, dass die Summe aller Kräfte gleich null sind folgt

$$-Q_z - \mu \ddot{w} \, dx + q_z \, dx + Q_z + dQ_z = 0 \quad (4.98)$$

zusammengefasst ergibt

$$dQ_z + q_z \, dx - \mu \ddot{w} \, dx = 0 \quad \rightarrow \quad Q'_z + q_z - \mu \ddot{w} = 0 \quad (4.99)$$

Weiter gilt Summe aller Momente gleich null

$$-M_y - Q_z \, dx + M_y + dM_y = 0 \quad (4.100)$$

gekürzt resultiert

$$dM_y - Q_z \, dx = 0 \quad \rightarrow \quad Q_z = \frac{dM_y}{dx} = M'_y \quad (4.101)$$

Wird Gleichung 4.101 nach x abgeleitet und in 4.99 eingesetzt, ergibt das

$$M''_y + q_z - \mu \ddot{w} = 0 \quad (4.102)$$

Mit dem Elastizitätsgesetz

$$M = EI \, \kappa \quad (4.103)$$

und der kinematischen Beziehung  $\kappa = -w''$  folgt

$$M = -EI \, w'' \quad (4.104)$$

Hinsichtlich diesem Zusammenhang kann Gleichung 4.102 umgeformt werden zu

$$EI \, w'''' + \mu \ddot{w} = q_z \quad (4.105)$$

Da keine Linienlast  $q_z$  vorhanden ist, genügt die Lösung der homogenen, partiellen Bewegungsdifferentialgleichung

$$EI \, w'''' + \mu \ddot{w} = 0 \quad (4.106)$$

Mit dem Produktansatz von Bernoulli kann der Bewegungsverlauf  $w(x, t)$  als Produkt einer ortsabhängigen Biegelinie  $w(x)$  und einer Zeitfunktion  $q(t)$  formuliert werden.

$$w(x, t) = w(x) \, q(t) \quad (4.107)$$

Mit deren Ableitungen

$$w(x, t)'''' = w(x)'''' q(t) \quad ; \quad \ddot{w}(x, t) = w(x) \ddot{q}(t) \quad (4.108)$$

entwickelt sich Gleichung 4.106 zu

$$\frac{EI w(x)''''}{\mu w(x)} = -\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = const = \omega^2 \quad (4.109)$$

Wobei die Konstante mit  $\omega^2$  bezeichnet wird. Idee dieses Separationsansatzes ist, aus einer partiellen Differentialgleichung zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zu bilden.

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad (4.110)$$

$$EI w(x)'''' - \omega^2 \mu w(x) = 0 \quad (4.111)$$

Die Lösung der Gleichung 4.110, also dem Zeitverlauf, kann direkt hingeschrieben werden.

$$q = q_1 \sin(\omega t) + q_2 \cos(\omega t) \quad (4.112)$$

Wobei  $q_1$  und  $q_2$  mit den Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Wird Gleichung 4.111 umgeschrieben mit der Abkürzung

$$k^4 = \frac{\mu \omega^2}{EI} \quad (4.113)$$

so erhält man

$$w(x)'''' - k^4 w(x) = 0 \quad (4.114)$$

Unter Verwendung des Exponentialansatzes

$$w(x) = \sum_{i=1}^4 a_i e^{\lambda_i x} \quad (4.115)$$

und mittels charakteristischer Gleichung

$$\lambda^4 = k^4 \quad (4.116)$$

und dessen Lösungen

$$\lambda_{(1,2)} = \pm k \quad \lambda_{(3,4)} = \pm i k \quad (4.117)$$

ergibt sich

$$w(x) = \hat{a}_1 e^{kx} + \hat{a}_2 e^{-kx} + \hat{a}_3 e^{ikx} + \hat{a}_4 e^{-ikx} \quad (4.118)$$

Unter Verwendung von hyperbolischen und trigonometrischen Funktionen resultiert

$$w(x) = a_1 \sin(kx) + a_2 \cos(kx) + a_3 \sinh(kx) + a_4 \cosh(kx) \quad (4.119)$$

Mit den Randbedingungen bei  $x = 0$  lassen sich die Konstanten  $a_1, a_2, a_3$  und  $a_4$  bestimmen. Für besseren Überblick werden

$$s = \sin(kx) ; c = \cos(kx) ; S = \sinh(kx) ; C = \cosh(kx) \quad (4.120)$$

abgekürzt. Wird Gleichung 4.119 mehrmals nach  $x$  abgeleitet

$$w(x) = a_1 s + a_2 c + a_3 S + a_4 C \quad (4.121)$$

$$w(x)' = a_1 k c - a_2 k s + a_3 k C + a_4 k S \quad (4.122)$$

$$w(x)'' = -a_1 k^2 s - a_2 k^2 c + a_3 k^2 S + a_4 k^2 C \quad (4.123)$$

$$w(x)''' = -a_1 k^3 c + a_2 k^3 s + a_3 k^3 C + a_4 k^3 S \quad (4.124)$$

mit den Beziehungen

$$w(x) = \frac{w(x, t)}{q(t)} = w \quad (4.125)$$

$$(4.126)$$

$$w(x)' = \frac{w(x, t)'}{q(t)} = -\varphi_y \quad (4.127)$$

$$(4.128)$$

$$w(x)'' = \frac{w(x, t)''}{q(t)} = -\frac{M_y}{EI} \quad (4.129)$$

$$(4.130)$$

$$w(x)''' = \frac{w(x, t)'''}{q(t)} = -\frac{Q_z}{EI} \quad (4.131)$$

und bei  $x = 0$  gilt

$$s = 0 \quad ; \quad c = 1 \quad ; \quad S = 0 \quad ; \quad C = 1 \quad (4.132)$$

$$w = w_0 \quad ; \quad \varphi_y = \varphi_{y0} \quad ; \quad M_y = M_{y0} \quad ; \quad Q_z = Q_{z0} \quad (4.133)$$

können die Konstanten  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  und  $a_4$  ermittelt werden. Dazu muss nur dieses lineare Gleichungssystem erster Ordnung gelöst werden:

$$\begin{aligned} w_0 &= a_2 + a_4 \\ -\varphi_0 &= a_1 k + a_3 k \\ -\frac{M_{y0}}{EI} &= -a_2 k^2 + a_4 k^2 \\ -\frac{Q_{z0}}{EI} &= -a_1 + k^3 + a_3 k^3 \end{aligned}$$

Nach längerer Umformung sind die Konstanten

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\varphi_{y0}}{2k} + \frac{Q_{z0}}{2EI k^3} \\ a_2 &= \frac{w_0}{2} + \frac{M_{y0}}{2EI k^2} \\ a_3 &= -\frac{\varphi_{y0}}{2k} - \frac{Q_{z0}}{2EI k^3} \\ a_4 &= \frac{w_0}{2} - \frac{M_{y0}}{2EI k^2} \end{aligned}$$

bestimmt. Werden diese nun in die Gleichungen 4.125 bis 4.131 eingesetzt, ist die Lösung der homogenen Differentialgleichung bestimmt. Nach Vereinfachung lassen sich die Gleichungen darstellen als:

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{w_0}{2} (c + C) - \frac{\varphi_{y0}}{2k} (s + S) + \frac{M_{y0}}{2EI k^2} (c - C) + \frac{Q_{z0}}{2EI k^3} (s - S) \\ \varphi(x) &= -k \left[ \frac{w_0}{2} (S - s) - \frac{\varphi_{y0}}{2k} (c + C) - \frac{M_{y0}}{2EI k^2} (s + S) + \frac{Q_{z0}}{2EI k^3} (c - C) \right] \\ M_y(x) &= -EI k^2 \left[ \frac{w_0}{2} (C - c) + \frac{\varphi_{y0}}{2k} (s - S) - \frac{M_{y0}}{2EI k^2} (c + C) - \frac{Q_{z0}}{2EI k^3} (s + S) \right] \\ Q_z(x) &= -EI k^3 \left[ \frac{w_0}{2} (s + S) + \frac{\varphi_{y0}}{2k} (c - C) + \frac{M_{y0}}{2EI k^2} (s - S) - \frac{Q_{z0}}{2EI k^3} (c + C) \right] \end{aligned}$$

Sie gelten für den massebehafteten Balken mit konstanter Biegesteifigkeit. Da im Übertragungsmatrizenverfahren aber nur die Anfangs- und Endzustände benötigt werden, wird  $x$  durch die Länge  $L$  des Balkenelementes ersetzt und in Matrixform gebracht. Dabei werden

$$\begin{aligned} E &= \frac{\cos(kL) + \cosh(kL)}{2} & F &= \frac{\sin(kL) + \sinh(kL)}{2} \\ G &= \frac{\cos(kL) - \cosh(kL)}{2} & H &= \frac{\sin(kL) - \sinh(kL)}{2} \end{aligned}$$

ersetzt und die Übertragungsmatrix ist

$$\begin{pmatrix} w \\ \varphi_y \\ M_y \\ Q_z \end{pmatrix}^{i+1} = \begin{pmatrix} E & -\frac{F}{k} & \frac{G}{EI k^2} & -\frac{H}{EI k^3} \\ Hk & E & \frac{F}{EI k} & -\frac{G}{EI k^2} \\ GEI k^2 & -HEI k & E & \frac{F}{k} \\ -FEI k^3 & -GEI k^2 & -Hk & E \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} w \\ \varphi_y \\ M_y \\ Q_z \end{pmatrix}^i \quad (4.134)$$

Die Lösung beinhaltet ausschließlich die Ortsabhängigkeit der partiellen Differentialgleichung also  $w(x)$ . Um die gesamte Antwort, ergo auch die Zeitfunktion  $q(t)$  zu berücksichtigen, muss  $w(x)$  mit der Lösung von  $q(t)$  multipliziert werden (vergleiche Formel 4.107).

$$\begin{aligned} w(x, t) &= w (q_1 \sin(\omega t) + q_2 \cos(\omega t)) & \rightarrow & w_1 \sin(\omega t) + w_2 \cos(\omega t) \\ \varphi_y(x, t) &= \varphi_y (q_1 \sin(\omega t) + q_2 \cos(\omega t)) & \rightarrow & \varphi_{y1} \sin(\omega t) + \varphi_{y2} \cos(\omega t) \\ M_y(x, t) &= M_y (q_1 \sin(\omega t) + q_2 \cos(\omega t)) & \rightarrow & M_{y1} \sin(\omega t) + M_{y2} \cos(\omega t) \\ Q_z(x, t) &= Q_z (q_1 \sin(\omega t) + q_2 \cos(\omega t)) & \rightarrow & Q_{z1} \sin(\omega t) + Q_{z2} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

In Matrixform

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \varphi_{y1} \\ M_{y1} \\ Q_{z1} \\ w_2 \\ \varphi_{y2} \\ M_{y2} \\ Q_{z2} \end{pmatrix}^{i+1} = \begin{pmatrix} E & -\frac{F}{k} & \frac{G}{EI k^2} & \frac{H}{EI k^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Hk & E & \frac{F}{EI k} & -\frac{G}{EI k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ GEI k^2 & -HEI k & E & \frac{F}{k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -FEI k^3 & -GEI k^2 & -Hk & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & -\frac{F}{k} & \frac{G}{EI k^2} & \frac{H}{EI k^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Hk & E & \frac{F}{EI k} & -\frac{G}{EI k^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & GEI k^2 & -HEI k & E & \frac{F}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -FEI k^3 & -GEI k^2 & -Hk & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \varphi_{y1} \\ M_{y1} \\ Q_{z1} \\ w_2 \\ \varphi_{y2} \\ M_{y2} \\ Q_{z2} \end{pmatrix}^i$$

Es sei anzumerken, dass in der Übertragungsmatrix bloß  $\omega$  unbekannt ist. Sind Anfangsbedingungen gegeben, kann der Zustandsvektor  $x^i$  ermittelt werden. Später wird gezeigt das zur Ermittlung der Eigenfrequenz jedoch der Zustandsvektor  $x^i$  nicht notwendig ist, sondern ausschließlich die Randbedingungen des gesamten Systems.

### Biegung um die y-Achse

Die Vorgehensweise ist abgesehen von der Biegeachse identisch, verglichen mit der Biegung um die z-Achse. Es wird daher auf eine genauere Erklärung verzichtet.

Summe aller Kräfte gleich null

$$dQ_y + q_y dx - \mu \ddot{v} dx = 0 \quad \rightarrow \quad Q'_y + q_y - \mu \ddot{v} = 0 \quad (4.135)$$

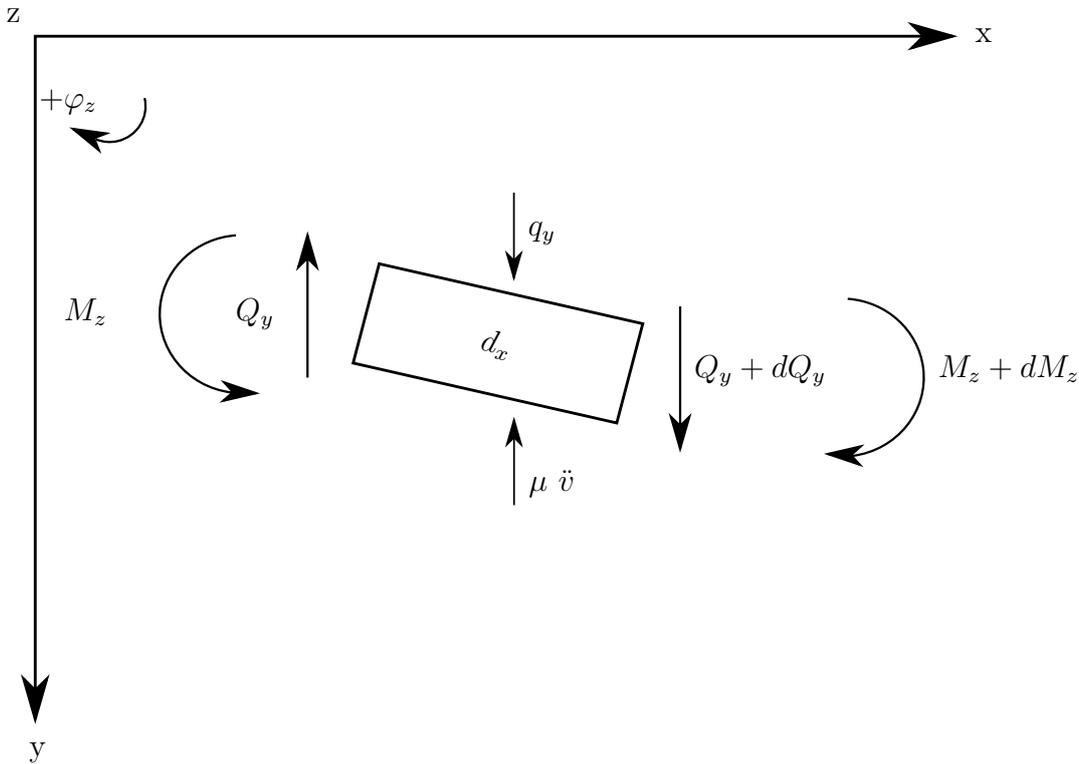


Abbildung 4.9: Kräfte und Momente eines massebehafteten Balkenelements in yx-Ebene

Summe aller Momente gleich null.

$$dM_z + Q_y dx = 0 \quad \rightarrow \quad Q_y = -\frac{dM_z}{dx} = -M'_z \quad (4.136)$$

Wird Gleichung 4.136 nach x Abgeleitet und in 4.135 eingesetzt, ergibt das

$$-M''_z + q_y - \mu\ddot{v} = 0 \quad (4.137)$$

Mit dem Elastizitätsgesetz und der kinematischen Beziehung  $\kappa = v''$  folgt:

$$M = EI v'' \quad (4.138)$$

Zwei mal nach x abgeleitet in Gleichung 4.137 eingesetzt und umgeformt, erschließt sich die homogene partielle Bewegungsdifferentialgleichung. Wobei die Linienlast  $q_y = 0$  ist.

$$EI v'''' + \mu\ddot{v} = 0 \quad (4.139)$$

Mit dem Produktansatz von Bernoulli entstehen zwei gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$q''(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad (4.140)$$

$$EI v(x)'''' - \omega^2 \mu v(x) = 0 \quad (4.141)$$

Lösung der ersten homogenen Differentialgleichung ist

$$q = q_1 \sin(\omega t) + q_2 \cos(\omega t) \quad (4.142)$$

Die Gleichung 4.141 lässt sich mittels Exponentialansatzes und weitere Umformungen wieder in Gestalt von hyperbolischen und trigonometrischen Funktionen schreiben:

$$v(x) = a_1 \sin(kx) + a_2 \cos(kx) + a_3 \sinh(kx) + a_4 \cosh(kx) \quad (4.143)$$

Mit den Randbedingungen bei  $x = 0$  lassen sich die Konstanten  $a_1, a_2, a_3$  und  $a_4$  bestimmen. Für besseren Überblick werden

$$s = \sin(kx) ; c = \cos(kx) ; S = \sinh(kx) ; C = \cosh(kx) \quad (4.144)$$

abgekürzt.

$$v(x) = a_1 s + a_2 c + a_3 S + a_4 C = v \quad (4.145)$$

$$v(x)' = a_1 k c - a_2 k s + a_3 k C + a_4 k S = \varphi_z \quad (4.146)$$

$$v(x)'' = -a_1 k^2 s - a_2 k^2 c + a_3 k^2 S + a_4 k^2 C = \frac{M_z}{EI} \quad (4.147)$$

$$v(x)''' = -a_1 k^3 c + a_2 k^3 s + a_3 k^3 C + a_4 k^3 S = -\frac{Q_y}{EI} \quad (4.148)$$

Bei  $x = 0$  gilt.

$$s = 0 \quad ; \quad c = 1 \quad ; \quad S = 0 \quad ; \quad C = 1 \quad (4.149)$$

$$v = v_0 \quad ; \quad \varphi_z = \varphi_{z0} \quad ; \quad M_z = M_{z0} \quad ; \quad Q_y = Q_{y0} \quad (4.150)$$

Eingesetzt in den Gleichungen 4.145 bis 4.148 kann das lineare Gleichungssys-

tem gelöst werden und die Koeffizienten werden zu

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\varphi_{z0}}{2k} + \frac{Q_{y0}}{2EI k^3} \\ a_2 &= \frac{v_0}{2} - \frac{M_{z0}}{2EI k^2} \\ a_3 &= \frac{\varphi_{z0}}{2k} - \frac{Q_{y0}}{2EI k^3} \\ a_4 &= \frac{v_0}{2} + \frac{M_{z0}}{2EI k^2} \end{aligned}$$

Werden diese nun in die Gleichungen 4.145 bis 4.148 eingesetzt, ist die Lösung der homogenen Differentialgleichung bestimmt. Nach Vereinfachung lassen sich die Gleichungen darstellen als.

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{v_0}{2} (c + C) + \frac{\varphi_{z0}}{2k} (s + S) + \frac{M_{z0}}{2EI k^2} (-c + C) + \frac{Q_{y0}}{2EI k^3} (s - S) \\ \varphi_z(x) &= k \left[ \frac{v_0}{2} (S - s) + \frac{\varphi_{z0}}{2k} (c + C) + \frac{M_{z0}}{2EI k^2} (s + S) + \frac{Q_{y0}}{2EI k^3} (c - C) \right] \\ M_z(x) &= EI k^2 \left[ \frac{v_0}{2} (C - c) + \frac{\varphi_{y0}}{2k} (-s + S) + \frac{M_{z0}}{2EI k^2} (c + C) - \frac{Q_{y0}}{2EI k^3} (s + S) \right] \\ Q_y(x) &= -EI k^3 \left[ \frac{v_0}{2} (s + S) + \frac{\varphi_{z0}}{2k} (-c + C) + \frac{M_{z0}}{2EI k^2} (-s + S) - \frac{Q_{y0}}{2EI k^3} (c + C) \right] \end{aligned}$$

Sie gelten für den massebehafteten Balken mit konstanter Biegesteifigkeit. Da im Übertragungsmatrizenverfahren aber nur die Anfangs- und Endzustände benötigt werden, wird  $x$  durch die Länge  $L$  des Balkenelements ersetzt und in Matrixform gebracht. Dabei werden

$$\begin{aligned} E &= \frac{\cos(kL) + \cosh(kL)}{2} & F &= \frac{\sin(kL) + \sinh(kL)}{2} \\ G &= \frac{\cos(kL) - \cosh(kL)}{2} & H &= \frac{\sin(kL) - \sinh(kL)}{2} \end{aligned}$$

ersetzt und die Übertragungsmatrix mit der Zeitabhängigkeit ist.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \varphi_{z1} \\ M_{z1} \\ Q_{y1} \\ v_2 \\ \varphi_{z2} \\ M_{z2} \\ Q_{y2} \end{pmatrix}^{i+1} = \begin{pmatrix} E & \frac{F}{k} & -\frac{G}{EI k^2} & \frac{H}{EI k^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Hk & E & \frac{F}{EI k} & \frac{G}{EI k^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -GEI k^2 & -HEI k & E & -\frac{F}{k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -FEI k^3 & GEI k^2 & Hk & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & \frac{F}{k} & -\frac{G}{EI k^2} & \frac{H}{EI k^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Hk & E & \frac{F}{EI k} & \frac{G}{EI k^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -GEI k^2 & -HEI k & E & -\frac{F}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -FEI k^3 & GEI k^2 & Hk & E \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1 \\ \varphi_{z1} \\ M_{z1} \\ Q_{y1} \\ v_2 \\ \varphi_{z2} \\ M_{z2} \\ Q_{y2} \end{pmatrix}^i$$

### Übertragungsmatrix für ein masseloses Biegeelement

Um die gesamte Übertragungsmatrix für ein massebehaftetes Biegeelement um die y- sowie z-Achse zu erhalten, werden die zwei Matrizen einfach zusammengesetzt.



## 4.4 Übertragungsmatrizen für Torsionsschwingungen

Um Torsionsschwingungen mittels Übertragungsmatrizenverfahren ausreichend zu bestimmen, werden zwei bis drei unterschiedliche Matrizen benötigt. Weiter treten keine Terme auf, die eine Koppelung der Ebenen verursachen, wie zum Beispiel der Kreiseffekt oder anisotrope Lagerung bei den Biegeschwingungen. Somit genügt die Herleitung der Gleichungen in einer Ebene. Zurückgegriffen wurde in diesem Unterkapitel dabei wieder auf [5].

### 4.4.1 Massenelement

Abbildung 4.10 zeigt ein Massenelement auf dem Momente einwirken.  $M_{Err}$  ist das erregende Moment,  $M$  das Moment,  $c$  die Torsionssteifigkeit,  $d$  die Dämpfungskonstante und  $\Theta_p$  das polare Massenträgheitsmoment.

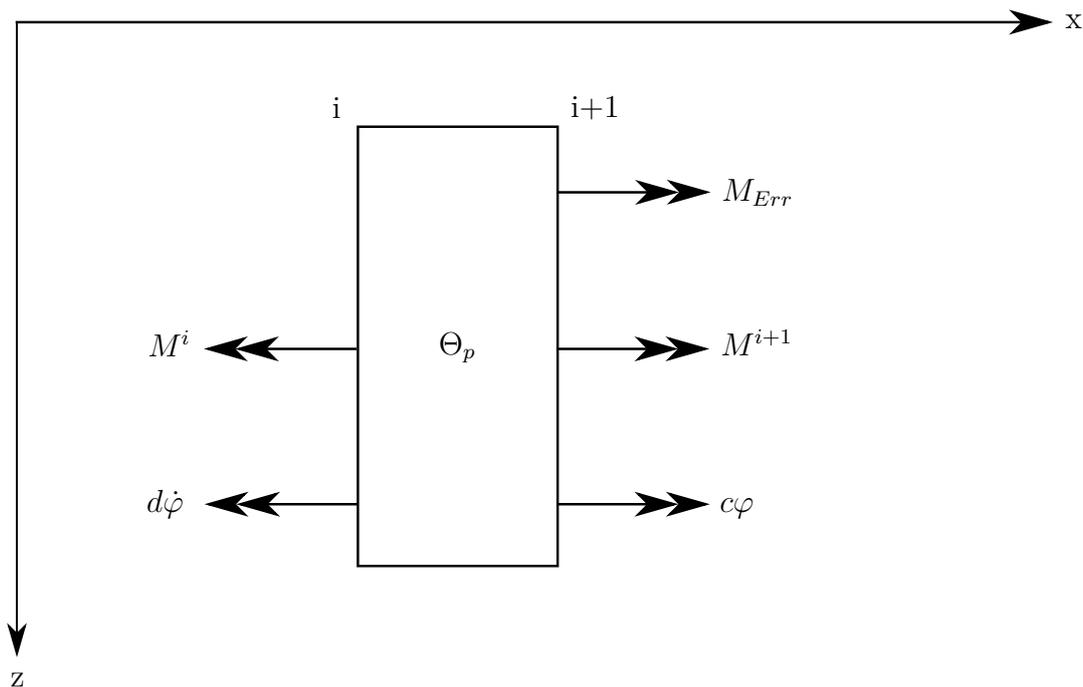


Abbildung 4.10: Momente am Massenelement bei Torsion

Die Bewegungsgleichung der Translation ist

$$\Theta_p \ddot{\varphi} = M^{i+1} - M^i - d\dot{\varphi} - c\varphi + M_{Err} \quad (4.151)$$

Mit den Ansätzen

$$\varphi = \varphi_1 \sin(\omega t) + \varphi \cos(\omega t) \quad (4.152)$$

$$M = M_1 \sin(\omega t) + M_2 \cos(\omega t) \quad (4.153)$$

$$M_{Err} = M_{Err} (\sin(\omega t) \cos(\varepsilon) + \cos(\omega t) \sin(\varepsilon)) \quad (4.154)$$

und deren zeitlichen Ableitungen  $\dot{\varphi}$  und  $\ddot{\varphi}$  erhält man aus Gleichung 4.151, wenn die Kosinus- und Sinusterme getrennt werden.

$$M_1^{i+1} = -\Theta_p \omega^2 \varphi_1 + M_1^i - d\omega \varphi_2 + c \varphi_1 - M_{Err} \cos(\varepsilon) \quad (4.155)$$

$$M_1^{i+1} = -\Theta_p \omega^2 \varphi_2 + M_2^i + d\omega \varphi_1 + c \varphi_2 + M_{Err} \sin(\varepsilon) \quad (4.156)$$

In Matrixform werden die zwei Gleichungen zu

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ M_1 \\ \varphi_2 \\ M_2 \\ 1 \end{pmatrix}^{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c - \Theta_p \omega^2 & 1 & -d\omega & 0 & -M_{Err} \cos(\varepsilon) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d\omega & 0 & c - \Theta_p \omega^2 & 1 & M_{Err} \sin(\varepsilon) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ M_1 \\ \varphi_2 \\ M_2 \\ 1 \end{pmatrix}^i$$

#### 4.4.2 Drehfeder mit kontinuierlicher Massenverteilung

Abbildung 4.11 zeigt Momente, die auf ein Drehfederelement mit kontinuierlicher Massenverteilung wirken. Wird nun wieder die Bewegungsgleichung der Translation

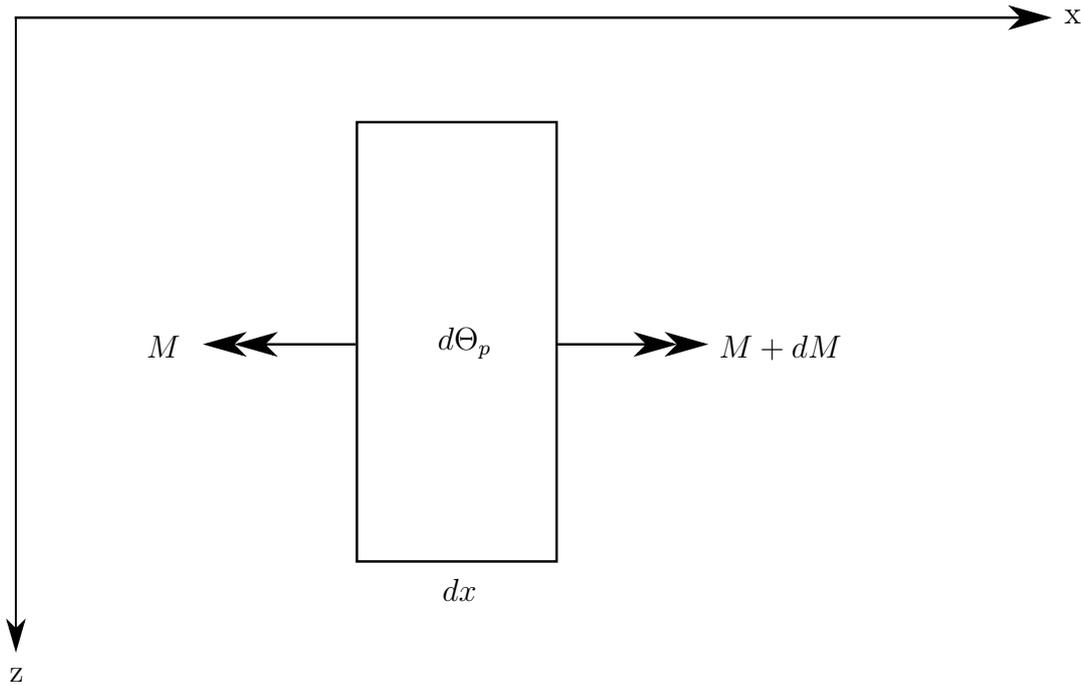
$$\ddot{\varphi} d\Theta_p = M + dM - M \quad (4.157)$$

mit

$$d\Theta_p = \rho I_p dx \quad (4.158)$$

aufgestellt, kann die Gleichung umgeschrieben werden zu

$$\ddot{\varphi} \rho I_p dx = dM \quad (4.159)$$



**Abbildung 4.11:** Momente an der Drehfeder mit kontinuierlicher Massenverteilung bei Torsion

Mit der Beziehung und dessen Ableitung nach  $x$

$$M = G I_p \varphi' \quad \frac{dM}{dx} = G I_p \varphi'' \quad (4.160)$$

kann weiter umgeformt werden zu

$$\ddot{\varphi} \rho I_p = G I_p \varphi'' \quad \rightarrow \quad \ddot{\varphi} = \frac{G}{\rho} \varphi'' \quad (4.161)$$

Mit dem Separationsansatz und der Abkürzung  $a^2 = \frac{G}{\rho}$  folgt

$$\frac{X(x)''}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = -n^2 \quad (4.162)$$

und die zwei resultierenden Gleichungen sind:

$$\ddot{T}(t) + a^2 n^2 T(t) = 0 \quad (4.163)$$

$$X(x)'' + a^2 n^2 X(x) = 0 \quad (4.164)$$

Weiter folgt

$$T(t) = A_1 \sin(an t) + A_2 \cos(an t) \quad (4.165)$$

$$X(x) = B_1 \sin(n x) + B_2 \cos(n x) \quad (4.166)$$

dabei sei  $an = \omega$ . Mit der Anfangsbedingung  $x = 0$  gilt  $\varphi = \varphi_0$  und  $M = M_0$  und längerer Umformung sind die Konstanten  $B_1$  und  $B_2$

$$B_1 = \frac{\overline{M_0}}{G I_p \frac{w}{a}} \quad B_2 = \overline{\varphi_0} \quad (4.167)$$

Mit den Gleichungen für  $\varphi(x)$  und 4.160 und der Bedingung das  $x = L$  sowie der Abkürzung

$$\lambda = \frac{\omega}{a} L \quad (4.168)$$

ist die Übertragungsmatrix für eine Drehfeder mit kontinuierlicher Massenverteilung. Die Lösung der Zeitfunktion ist ebenfalls schon enthalten.

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ M_1 \\ \varphi_2 \\ M_2 \\ 1 \end{pmatrix}^{i+1} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & \frac{L \sin(\lambda)}{G I_p \lambda} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda G I_p \sin(\lambda)}{L} & \cos(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\lambda) & \frac{L \sin(\lambda)}{G I_p \lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda G I_p \sin(\lambda)}{L} & \cos(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ M_1 \\ \varphi_2 \\ M_2 \\ 1 \end{pmatrix}^i$$

### 4.4.3 Masselose Drehfeder mit Dämpfung

In Abbildung 4.12 ist eine masselose Drehfeder dargestellt. Feder und Dämpfer werden parallel angenommen.

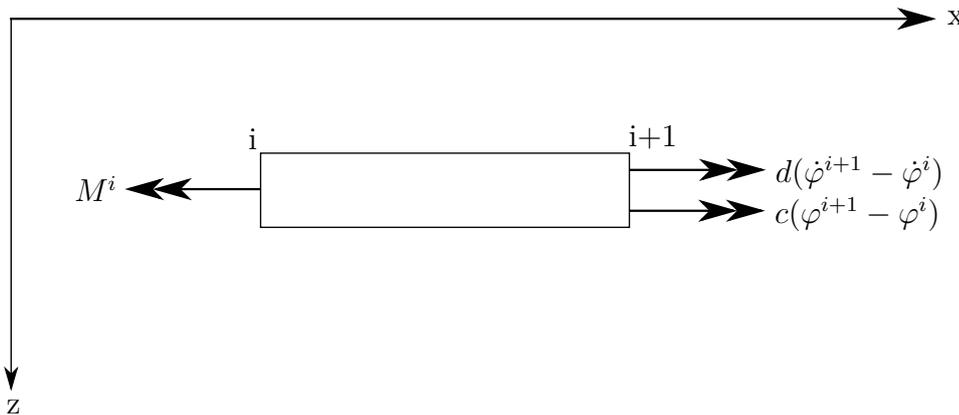


Abbildung 4.12: Momente an der masselosen Drehfeder mit Dämpfung bei Torsion

Aus dem Momentengleichgewicht

$$M^i = d (\dot{\varphi}^{i+1} - \dot{\varphi}^i) + c (\varphi^{i+1} - \varphi^i) \quad (4.169)$$

und den Ansätzen

$$\varphi = \varphi_1 \sin(\omega t) + \varphi_2 \cos(\omega t) \quad (4.170)$$

$$M = M_1 \sin(\omega t) + M_2 \cos(\omega t) \quad (4.171)$$

erhält man ein Gleichungssystem. Trennt man Sinus- und Kosinusterme in zwei Gleichungen auf, erhält man

$$-d\omega\varphi_2^{i+1} + c\varphi_1^{i+1} + d\omega\varphi_2^i - c\varphi_1^i = M_1^i \quad (4.172)$$

$$d\omega\varphi_1^{i+1} + c\varphi_2^{i+1} - d\omega\varphi_1^i - c\varphi_2^i = M_2^i \quad (4.173)$$

Löst man die Gleichung so ergibt sich

$$\varphi_1^{i+1} = \frac{M_1^i c}{c^2 + d^2\omega^2} + \frac{M_2^i d\omega}{c^2 + d^2\omega^2} + \varphi_1^i \quad (4.174)$$

$$\varphi_2^{i+1} = \frac{M_2^i c}{c^2 + d^2\omega^2} - \frac{M_1^i d\omega}{c^2 + d^2\omega^2} + \varphi_2^i \quad (4.175)$$

Umgeschrieben in Matrixform erhält man

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ M_1 \\ \varphi_2 \\ M_2 \\ 1 \end{pmatrix}^{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{c^2+d^2\omega^2} & 0 & \frac{d\omega}{c^2+d^2\omega^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d\omega}{c^2+d^2\omega^2} & 1 & \frac{c}{c^2+d^2\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ M_1 \\ \varphi_2 \\ M_2 \\ 1 \end{pmatrix}^i$$

wobei die Belastungsspalte bereits angehängt wurde.

## 4.5 Das Übertragungsmatrizenverfahren

In den letzten Unterkapiteln wurden einige Übertragungsmatrizen hergeleitet ohne dabei einen genaueren Grund dafür zu kennen. Folgender Abschnitt soll Abhilfe schaffen und das Übertragungsschema zur Ermittlung von Eigenfrequenzen und Eigenformen ausführlichst erläutern. Zurückgegriffen wurde dabei auf die Literatur [4].

Abbildung 4.13 zeigt eine gelagerte Welle mit massebehafteter Scheibe. Das System wurde in sieben Abschnitte zerlegt und jeden Element wurde eine Übertragungsmatrix zugewiesen. Die Wellenstücke  $T_1, T_3, T_5$  und  $T_7$  können mit der Übertragungsmatrix für ein masseloses Biegeelement beschrieben werden. Die massebehaftete Scheibe  $T_4$  wird mit der Übertragungsmatrix eines Massenpunktes modelliert. Lagerungen  $T_2$  und  $T_6$  können als Federelement interpretiert werden, welche wiederum mit der Übertragungsmatrix für einen Massenpunkt beschrieben werden.

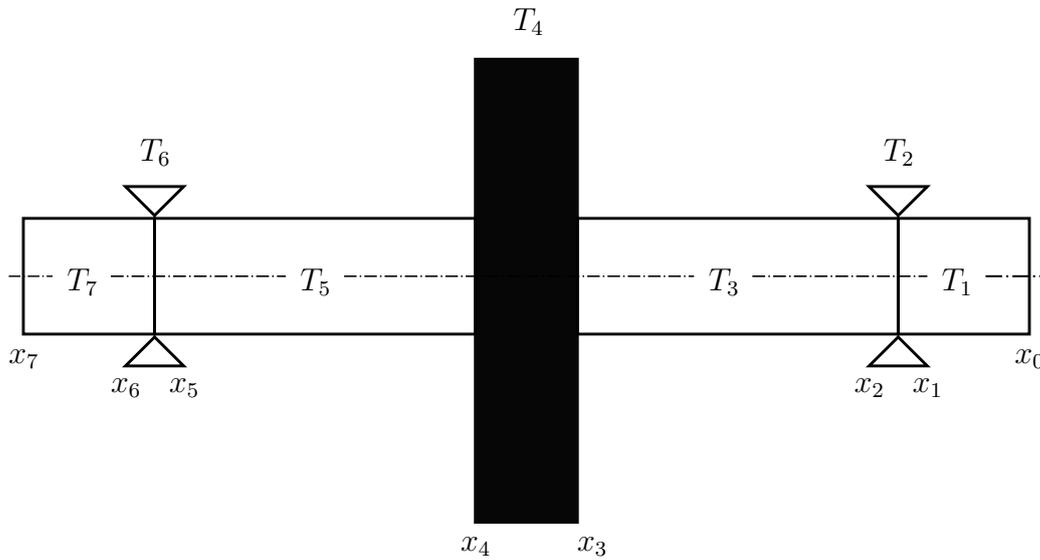


Abbildung 4.13: gelagerte Welle mit massebehafteter Scheibe

Wird nun für jedes Element die Gleichung von der Übertragungsmatrix hingeschrieben so erhält man.

$$x_7 = T_7 x_6 ; x_6 = T_6 x_5 ; x_5 = T_5 x_4 ; x_4 = T_4 x_3 ; x_3 = T_3 x_2 ; x_2 = T_2 x_1 ; x_1 = T_1 x_0$$

Werden nun die Zwischenvektoren substituiert, bleiben lediglich Anfangsvektor, Endvektor und eine Matrix  $T_{ges}$  über. Wobei  $T_{ges}$  eine Multiplikation von allen Übertragungsmatrizen ist und von  $\omega$  abhängt.

$$x_7 = \underbrace{T_{7(\omega)} T_{6(\omega)} T_{5(\omega)} T_{4(\omega)} T_{3(\omega)} T_{2(\omega)} T_{1(\omega)}}_{T_{ges(\omega)}} x_0$$

Betrachtet man diese Gleichung nun in Matrixform und fügt dazu die Randbe-

dingungen  $M = 0$  und  $Q = 0$  ein so erhält man.

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \varphi_{y_1} \\ 0 \\ 0 \\ w_2 \\ \varphi_{y_2} \\ 0 \\ 0 \\ v_1 \\ \varphi_{z_1} \\ 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \varphi_{z_2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ T_{3,1} & T_{3,2} & * & * & T_{3,5} & T_{3,6} & * & * & T_{3,9} & T_{3,10} & * & * & T_{3,13} & T_{3,14} & * & * & T_{3,17} \\ T_{4,1} & T_{4,2} & * & * & T_{4,5} & T_{4,6} & * & * & T_{4,9} & T_{4,10} & * & * & T_{4,13} & T_{4,14} & * & * & T_{4,17} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ T_{7,1} & T_{7,2} & * & * & T_{7,5} & T_{7,6} & * & * & T_{7,9} & T_{7,10} & * & * & T_{7,13} & T_{7,14} & * & * & T_{7,17} \\ T_{8,1} & T_{8,2} & * & * & T_{8,5} & T_{8,6} & * & * & T_{8,9} & T_{8,10} & * & * & T_{8,13} & T_{8,14} & * & * & T_{8,17} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ T_{11,1} & T_{11,2} & * & * & T_{11,5} & T_{11,6} & * & * & T_{11,9} & T_{11,10} & * & * & T_{11,13} & T_{11,14} & * & * & T_{11,17} \\ T_{12,1} & T_{12,2} & * & * & T_{12,5} & T_{12,6} & * & * & T_{12,9} & T_{12,10} & * & * & T_{12,13} & T_{12,14} & * & * & T_{12,17} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ T_{15,1} & T_{15,2} & * & * & T_{15,5} & T_{15,6} & * & * & T_{15,9} & T_{15,10} & * & * & T_{15,13} & T_{15,14} & * & * & T_{15,17} \\ T_{16,1} & T_{16,2} & * & * & T_{16,5} & T_{16,6} & * & * & T_{16,9} & T_{16,10} & * & * & T_{16,13} & T_{16,14} & * & * & T_{16,17} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} w_1 \\ \varphi_{y_1} \\ 0 \\ 0 \\ w_2 \\ \varphi_{y_2} \\ 0 \\ 0 \\ v_1 \\ \varphi_{z_1} \\ 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \varphi_{z_2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^0$$

Das Symbol  $*$  beschreibt Matrixeinträge die keine weitere Bedeutung auf die Eigenfrequenzberechnung haben. Da erzwungene Erregungen keinen Einfluss auf die Eigenfrequenz haben, wird die Belastungsspalte und Zeile weggelassen. Falls andere Randbedingungen vorhanden sind, müssen Startvektor, Endvektor und die Matrix  $T_{ges}$  angepasst werden. Einen Überblick verschafft Abbildung 4.15 (vgl. Abb. 4.15 mit [4]). Führt man nur die relevanten Terme in der Matrix an, so erhält man ein homogenes Gleichungssystem der Form.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,5} & T_{3,6} & T_{3,9} & T_{3,10} & T_{3,13} & T_{3,14} \\ T_{4,1} & T_{4,2} & T_{4,5} & T_{4,6} & T_{4,9} & T_{4,10} & T_{4,13} & T_{4,14} \\ T_{7,1} & T_{7,2} & T_{7,5} & T_{7,6} & T_{7,9} & T_{7,10} & T_{7,13} & T_{7,14} \\ T_{8,1} & T_{8,2} & T_{8,5} & T_{8,6} & T_{8,9} & T_{8,10} & T_{8,13} & T_{8,14} \\ T_{11,1} & T_{11,2} & T_{11,5} & T_{11,6} & T_{11,9} & T_{11,10} & T_{11,13} & T_{11,14} \\ T_{12,1} & T_{12,2} & T_{12,5} & T_{12,6} & T_{12,9} & T_{12,10} & T_{12,13} & T_{12,14} \\ T_{15,1} & T_{15,2} & T_{15,5} & T_{15,6} & T_{15,9} & T_{15,10} & T_{15,13} & T_{15,14} \\ T_{16,1} & T_{16,2} & T_{16,5} & T_{16,6} & T_{16,9} & T_{16,10} & T_{16,13} & T_{16,14} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} w_1 \\ \varphi_{y_1} \\ w_2 \\ \varphi_{y_2} \\ v_1 \\ \varphi_{z_1} \\ v_2 \\ \varphi_{z_2} \end{pmatrix}^0$$

$$x_7 \qquad \qquad \qquad T_{red(\omega)} \qquad \qquad \qquad x_0$$

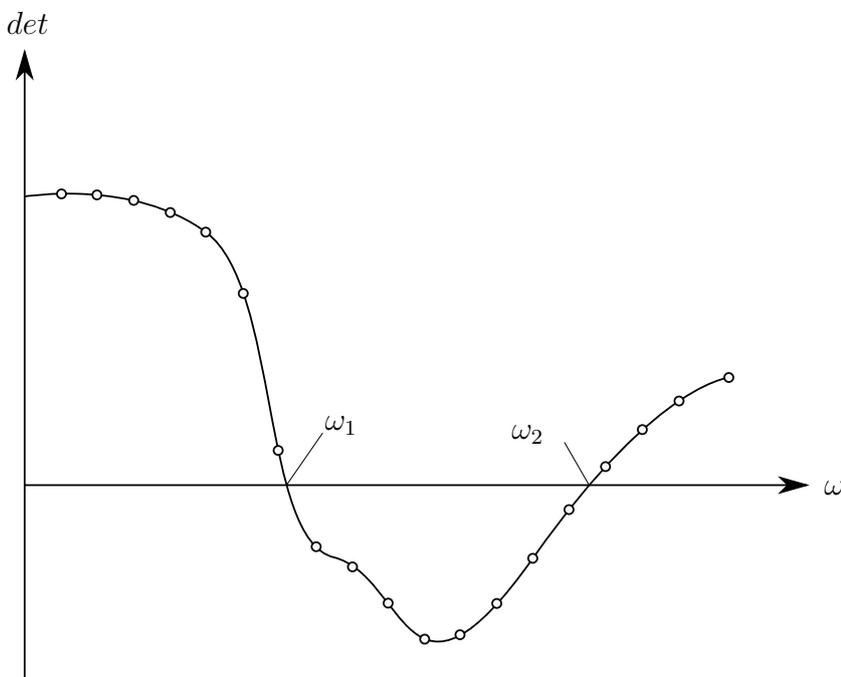
Die Matrix  $T_{red}$  hängt ausschließlich von der Variable  $\omega$  ab. Setzt man nun

irgendeine Frequenz  $\omega$  ein, dann wird das homogene Gleichungssystem üblicherweise nicht erfüllt sein. Wenn aber eine Eigenkreisfrequenz  $\omega_i$  des Systems eingesetzt wird, ist das homogene Gleichungssystem erfüllt. In diesen Fall wird die Determinante von  $T_{red}$  zu null.

Zusammengefasst lässt sich sagen, wenn  $\det(T_{red(\omega)}) = 0$  dann liegt eine Eigenkreisfrequenz des Systems vor.

In Abbildung 4.14 wurde die Determinante von  $T_{red}$  für einige Frequenzen  $\omega$  berechnet und anschließend in ein Diagramm eingetragen. Zwei Eigenfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  bzw. Nullstellen der Determinante  $T_{red}$  liegen vor.

Bei der numerischen Berechnung der Nullstellen gibt es folgende Vorgehensweise. Man setzt in die Übertragungsmatrizen  $T_1$  bis  $T_7$  eine Frequenz  $\omega$  ein. Dabei soll  $\omega$  so gewählt werden, dass  $\omega$  vor der zu ermittelnden Eigenfrequenz liegt, in unserem Fall  $\omega < \omega_1$ . Anschließend wird mittels Matrizenmultiplikation  $T_{red}$  gebildet und davon die Determinante  $\det(T_{ges})$ . Diese Vorgehensweise wird durch schrittweises erhöhen der Frequenz  $\omega$  fortgesetzt. Wird dabei ein Vorzeichenwechsel der Determinante festgestellt, befindet sich zwischen dieser Frequenz und der Frequenz davor eine Eigenkreisfrequenz des Systems.



**Abbildung 4.14:** Determinantenverlauf und Eigenfrequenzen (Nullstellen)  $\omega_1$  und  $\omega_2$

Sind die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_i$  gefunden, können die zugehörigen Eigenfor-

men ermittelt werden. In ihrer Form sind sie genau definiert jedoch in einer Größe noch frei. Setzt man beim Startvektor  $x_0$  eine beliebige Größe ungleich null, so kann der gesamte Startvektor  $x_0$  bestimmt werden. Ist dies geschehen, kann mit dem bestimmten Startvektor  $x_0$  und der ersten Übertragungsmatrize  $T_{1(\omega_i)}$  der Zwischenvektor  $x_1$  bestimmt werden.

$$x_1 = T_{1(\omega)} x_0 \quad (4.176)$$

Dies kann sukzessive fortgesetzt werden, bis der Endvektor  $x_7$  erreicht wird. Wurden alle Vektoren berechnet, ist die Eigenform des System bei der Eigenfrequenz  $\omega_i$  definiert. Abgesehen von den Durchbiegungen und Neigungen werden zusätzlich die zugehörigen Momente und Querkräfte berechnet.

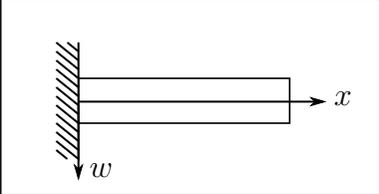
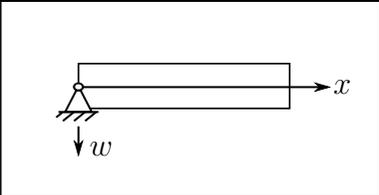
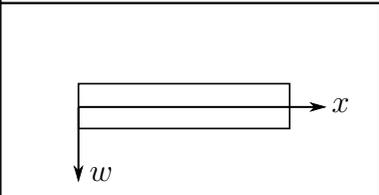
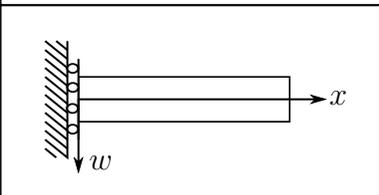
	<i>eingespannt</i>	$w(0, t) = \varphi(0, t) = 0$
	<i>gelenkig gelagert</i>	$w(0, t) = M(0, t) = 0$
	<i>frei</i>	$M(0, t) = Q(0, t) = 0$
	<i>querkraftfrei</i>	$w'(0, t) = Q(0, t) = 0$

Abbildung 4.15: Randbedingungen

# 5 HydroVib das Simulationsprogramm

## 5.1 Allgemeines

Der Name des Simulationsprogrammes HydroVib entstand aus Kombination von den Begriffen *Hydropower plant* und *Vibration*. *Hydropower plant* steht für Wasserkraftanlagen und *Vibration* für Schwingungen in diesen Maschinen.

Geschrieben wurde das Programm, wie bereits erwähnt, in Matlab (Version R2011b). Startet man das Programm mit der Ausführung des MATLAB Codes HydroVib so erscheint Abbildung 5.1. Zu erwähnen sei, dass auf der verwendeten Rechenmaschine Matlab installiert sein muss, um HydroVib zu booten. Später soll eine EXE Datei, also ein selbständiges ausführbares Programm erstellt werden. Dies soll ermöglichen das HydroVib ohne Unterstützung von Matlab betrieben werden kann.

Eine weitere Forderung, um das Simulationsprogramm erfolgreich anzuwenden ist, dass auf der Rechenmaschine Microsoft Excel installiert ist. Denn die Dateneinlese erfolgt über eine Microsoft Excel Datei.

## 5.2 Dateneingabe

Der erste Schritt, um das rotordynamische Verhalten von Systemen mittels HydroVib zu bestimmen ist, dass alle relevanten Daten in die Excel-Datei „Datenblatt für HydroVib“ eingetragen werden. Diese Datei besteht aus drei Blättern, die im folgenden Absatz erklärt werden. Es sei erwähnt das eine Umbenennung der Blätter Programmfehler verursachen. Vor allem das Blatt Matritze soll nicht verändert werden, da dieser Begriff von einem Befehl in Matlab benötigt wird. Erstellt wurde die Excel-Datei in Excel 2007 und sie enthält außerdem einen VBA-Code. Daher sollte die Verwendung von Makros bzw. VBA-Code im benutzten Excel-Programm erlaubt sein.

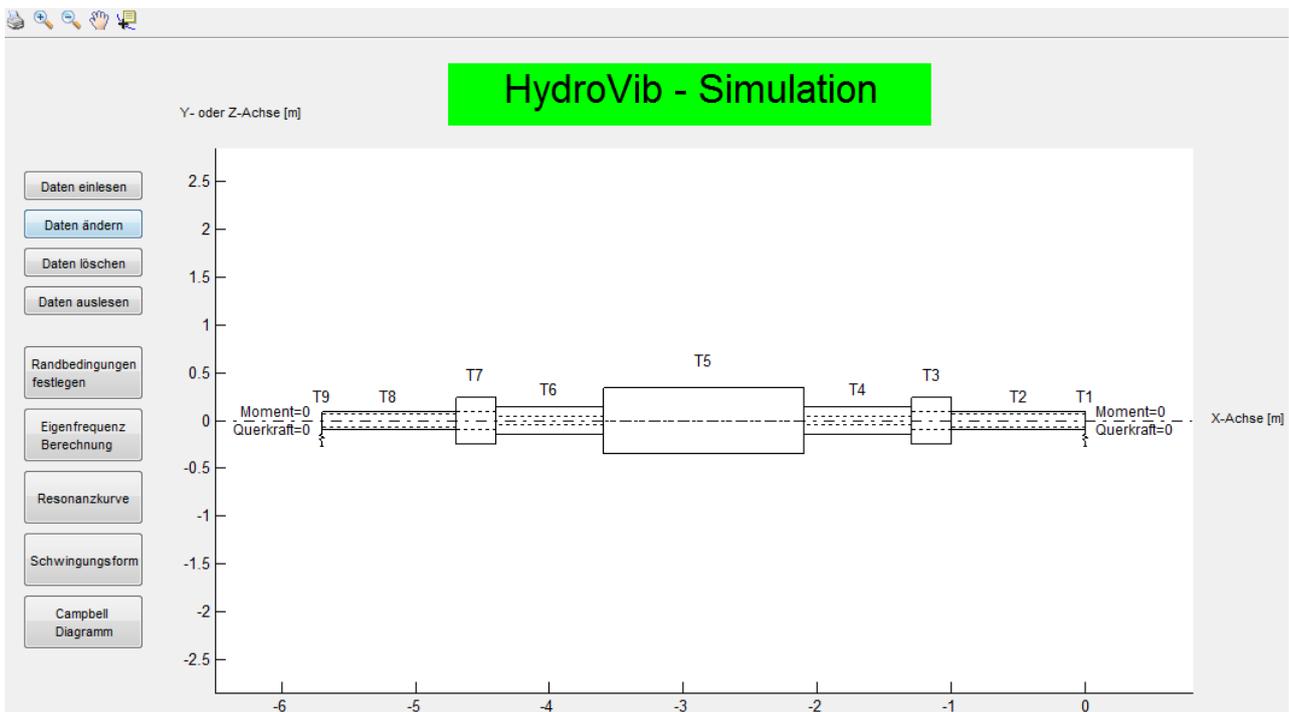


Abbildung 5.1: HydroVib das Simulationsprogramm

## Eingabeblatt

Wird unter der Zelle Auswahl ein Element bzw. eine Übertragungsmatrize ausgewählt, so erscheinen die zugehörigen Elementeigenschaften. Nach und nach werden so alle Elemente ausgewählt und die zugehörigen Dateien eingetragen bis das zu berechnende System vollständig definiert ist. Zu beachten sei dabei, dass die Reihenfolge eine entscheidende Rolle spielt, da später aus diesen Daten Matrizen in der gleichen Reihenfolge gebildet und anschließend auch so multipliziert werden. Die Zellen Dichte, E-Modul und G-Modul werden auf das ganze Blatt angewandt, können aber wenn nötig für jedes Element separat eingetragen werden. In Tabelle 5.1 sind alle Übertragungsmatrizen aufgelistet.

## Matritze

Die im Eingabeblatt eingetragenen Elemente und Elementeigenschaften werden im Blatt Matritze übertragen. Außerdem wird das Blatt in Matlab eingelesen mit dem anschließend die Matrizen gebildet werden.

Typ	Element	Übertragungsmatrize	Eingabeparameter	Daten ändern
1	Massenpunkt-Biegung	Massenpunkt-Biegeschwingung	$m, m_r, \Theta_a, \Theta_p, c_{zz}, c_{yy}, d_{zz}, d_{yy}, e, \varepsilon, P_z, P_y, \omega_{erregung}, GL$	Spalten 7-24
1	Massenpunkt-reduziert-Biegung	Massenpunkt-Biegeschwingung	$m, m_r, \Theta_a, \Theta_p, e, GL$	Spalten 7-10, 19 und 24
7	Feder-Dämpfer-Element	Massenpunkt-Biegeschwingung	$c_{zz}, c_{yy}, d_{zz}, d_{yy}$	Spalten 11, 12, 15 und 16
3	Welle-massebehaftet-Biegung	massebehafteter Balken konstanter Steifigkeit	$\varnothing_a, \varnothing_i, L, E\text{-Modul}, \rho$	Spalten 2-6
2	Welle-masselos-Biegung	masseloser Balken konstanter Steifigkeit	$\varnothing_a, \varnothing_i, L, E\text{-Modul}$	Spalten 2-5
4	Massepunkt-Torsion	Massenpunkt-Torsion	$\Theta_p, c, d, M_e, \varepsilon$	Spalten 25-29
5	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	Drehfeder mit kontinuierlicher Massenverteilung	$\varnothing_a, \varnothing_i, L, G\text{-Modul}, \rho$	Spalten 6, 30-33
6	Drehfeder-masselos-Torsion	masselose Drehfeder mit Dämpfung	$\varnothing_a, \varnothing_i, L, G\text{-Modul}, d$	Spalten 30-33 und 26

**Tabelle 5.1:** Auswahlmöglichkeiten von Übertragungsmatrizen

## Sonstiges

Im Blatt Sonstiges befinden sich nur die benötigten Werte für den Sverweis.

## 5.3 Programmbeschreibung

In den nächsten Unterkapitel soll das Simulationsprogramm HydroVib genau erklärt werden. Dazu gehören unter anderem die Bedienung, sowie die verwendeten Algorithmen des Simulationsprogrammes. In Abbildung 5.1 ist das Startmenü dargestellt. Im oberen linken Bereich befinden sich die Schaltflächen, um Daten einzulesen, zu ändern, zu löschen oder auszulesen. Direkt darunter können die Randbedingungen für die Berechnungen festgelegt werden. Auch die Berechnungen von Eigenfrequenzen, Resonanzkurven, Schwingungsformen und dem Campbell Diagramm können vorgenommen werden. Mittig befindet sich die Visualisierung der eingegebenen Daten.

### Daten einlesen

Die zuvor eingetragenen Daten im Datenblatt können nun mittels „Daten einlesen“ in das Simulationsprogramm eingelesen werden. Geschieht dies, werden aus den Daten die Übertragungsmatrizen in der zuvor eingegebenen Reihenfolge gebildet. Weiter findet eine Visualisierung statt, wie in Abbildung 5.1 ersichtlich ist. Anzumerken sei, dass die erstellte Grafik in HydroVib maßstabsgetreu ist. Längen und Durchmesser der Biegeelemente werden korrekt dargestellt. Die Pfeile mit der Kennzeichnung "T" weisen auf Übertragungsmatrizen und deren Position hin.

### Daten ändern

Besteht die Notwendigkeit ein Element in HydroVib zu verändern, einzufügen oder zu löschen so verschafft dieses Menü Abhilfe. Es sei dabei zu beachten die passenden Werte zu den jeweiligen Elementen einzutragen. Erwähnt sei hier erneut Tabelle 5.1. Wird ein Element eingefügt oder verändert, so muss im

„Daten ändern“ Menü der Typ in der ersten Spalte angegeben oder aktualisiert werden. Es dürfen ausschließlich Daten in Spalten eingetragen werden, welche die Tabelle vorschlägt. Fügt man zum Beispiel ein Feder-Dämpfer-Element ein, so wird im Daten ändern Menü in der ersten Spalte der Wert 7 eingetragen. Die Spalten 11,12,15 und 16 dürfen ebenfalls besetzt werden, alle anderen Spalten sind irrelevant und werden mit null besetzt. Mit „Schließen!“ werden die Änderungen aktualisiert.

### **Daten löschen**

Alle Daten im Simulationsprogramm HydroVib werden gelöscht.

### **Daten auslesen**

Wird diese Funktion angewendet, so wird eine Excel Datei erstellt. Diese beinhaltet die berechneten Eigenfrequenzen und deren verwendeten Optionen. Ein Bild der Visualisierung wird ebenfalls eingefügt. Interessant ist ebenfalls, dass alle aktuellen Daten in HydroVib der Datei hinzugefügt werden. So besteht nun die Möglichkeit veränderte Daten in HydroVib auszulesen und bei Bedarf neu einzulesen.

### **Randbedingungen festlegen**

Im Kapitel 4.5 wurde bereits erwähnt, dass im Übertragungsmatrizenverfahren die Randbedingungen am Anfang (rechte RB) und Ende (linke RB) des unverzweigten Systems benötigt werden. In diesem Menü können die Randbedingungen für Biegeschwingungen oder Torsionsschwingungen an das System angepasst werden. Erwähnt sei hier nochmals Abbildung 4.15. Als Grundeinstellung wurde gewählt, dass kein Moment und/oder keine Querkraft am Anfang oder Ende des Systemes wirkt, da diese Randbedingungen für hydraulische Maschinensätze häufig zutreffen.

Der Startvektor  $x_0$  beschreibt den Zustand am Anfang, also am rechten Rand des Systems. Alle Einträge im Startvektor sind Null bis auf einen Wert und dieser ist in seiner Größe frei wählbar.

## Eigenfrequenz Berechnung

In diesem Menü werden die Eigenfrequenzen des System sowie deren zugehörige Eigenformen bzw. Zwischenvektoren berechnet. Mit welchem Konzept dies geschieht, wurde bereits im Kapitel 4.5 dargestellt. Es wird durch Matrizenmultiplikation die Matrix  $T_{ges}$  gebildet, mittels Randbedingungen ergibt sich die Matrix  $T_{red}$ . Wenn die Determinanten von  $T_{red}$  zu null wird, liegt eine Eigenfrequenz des Systemes vor. In Abbildung 5.2 ist der schematische Aufbau der Eigenfrequenzberechnung dargestellt.

Zuerst wird  $\omega$  mit dem Startwert  $\omega$  und der Schrittweite gebildet. Beide Werte können im Menü Berechnung der Eigenfrequenzen unter Optionen variiert werden. Auch Endwert  $\omega$  und Genauigkeit können angepasst werden.

Im nächsten Schritt berechnet das Simulationsprogramm mit dem zuvor bestimmten  $\omega$  die Matrix  $T_{ges}$ . Dies geschieht mittels Matrizenmultiplikation. Zu erwähnen sei, dass die Matrix  $T_{ges}$  eine 16x16 Matrix ist. Grund dafür ist, dass bei der Eigenfrequenzberechnung der Lastenvektor weggelassen wird und somit die 17x17 Matrizen auf 16x16 Matrizen reduziert werden. Im Fall der Übertragungsmatrix für ein Massenelement gilt  $\Omega = \omega$ . Weiter sei darauf hingewiesen, dass für die Ermittlung der Eigenfrequenzen die Dämpfungen ignoriert werden sollen. Dementsprechend werden die Dämpfungen null gesetzt. Dies kann mit gutem Gewissen gemacht werden, denn bei hydraulischen Maschinensätzen treten so geringe Dämpfungen auf, dass die Eigenfrequenzen nicht gravierend beeinflusst werden.

Wurde die Matrix  $T_{ges}$  berechnet, werden mithilfe den zuvor gewählten Randbedingung die jeweiligen überflüssigen Spalten und Zeilen entfernt. Als Ergebnis erhält man die 8x8 Matrix  $T_{red}$ , aus dieser nun die Determinante gebildet werden soll.

Matlab bietet mit dem Befehl  $det()$  eine Möglichkeit die Determinante von  $T_{red}$  zu bilden. Jedoch sind alle berechneten Determinanten  $det(T_{red})$  positiv, es können keine Nullstelle gefunden werden. Eine andere Möglichkeit zur Berechnung der Determinante ist, dass eine obere Dreiecksmatrix von  $T_{red}$  gebildet wird. Dies wurde mit einer QR-Zerlegung erreicht.

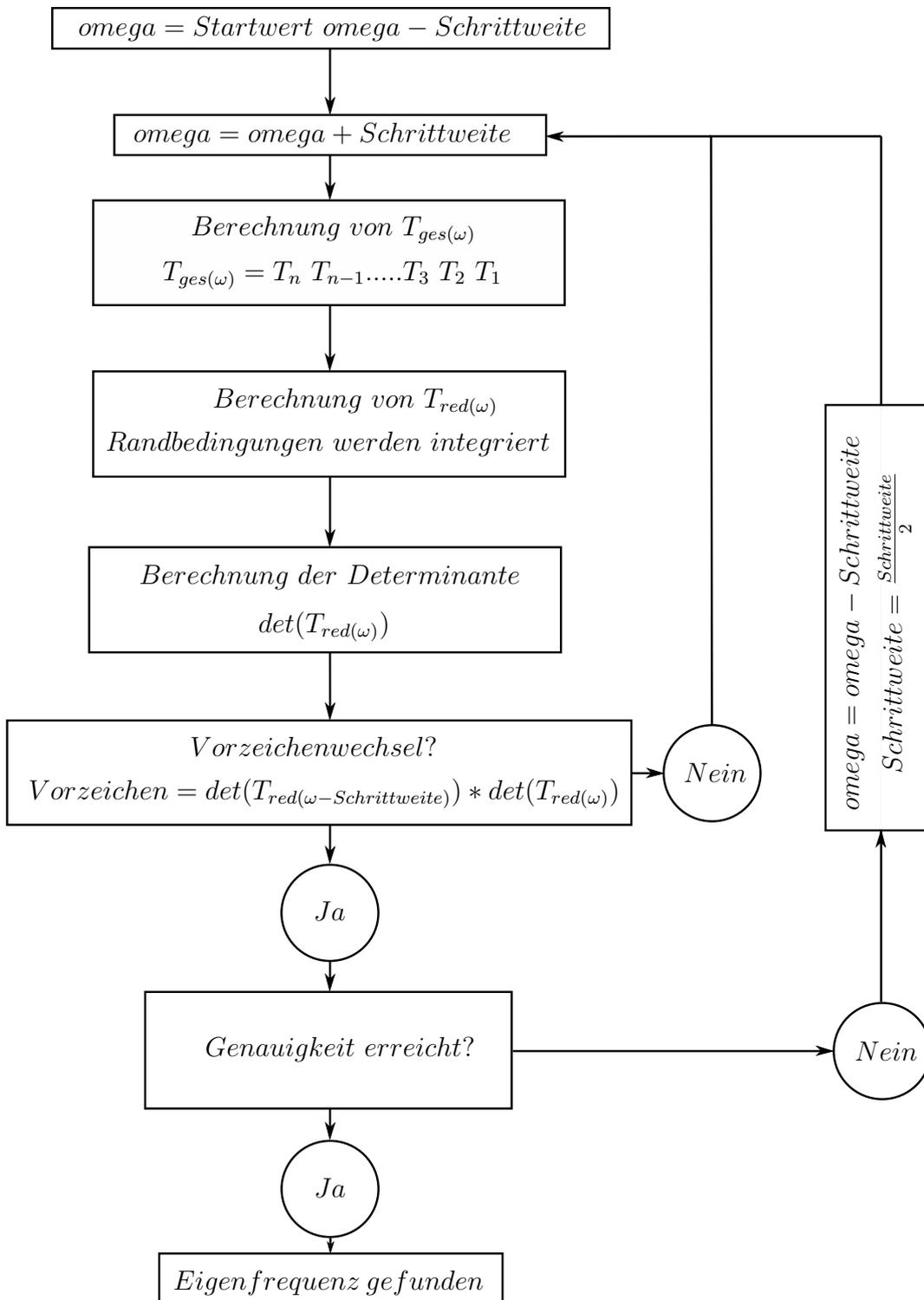
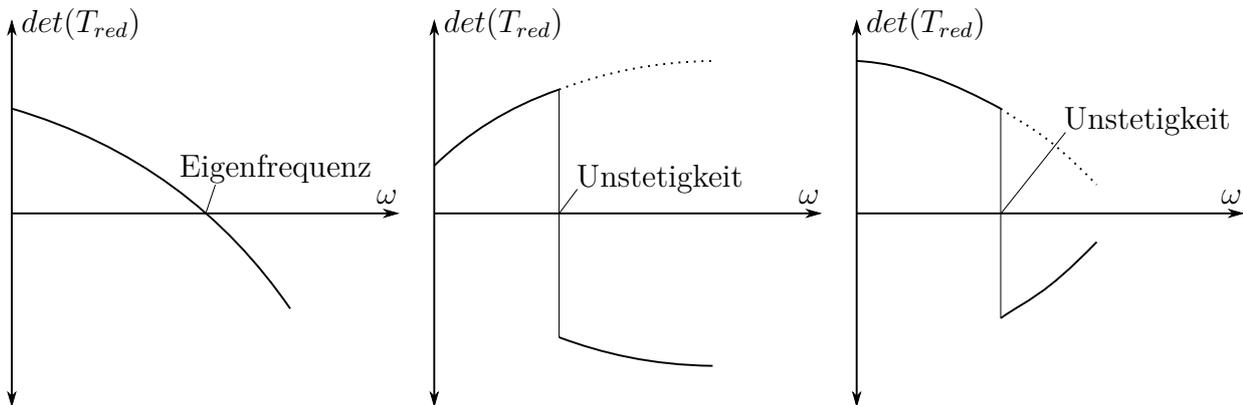


Abbildung 5.2: Algorithmus zur Berechnung von Eigenfrequenzen

Multipliziert man nun die Diagonalelemente der oberen Dreiecksmatrix, erhält man als Ergebnis die Determinante von  $T_{red}$ . Das letzte Element aller Diagonalelemente wird verwendet, um das Vorzeichen der Determinanten zu bestimmen. Die Nullstellensuche des Determinantenverlaufes wurde mit einem Bisektionsverfahren realisiert. Es überprüft ständig die letzten zwei Vorzeichen des Determinantenverlaufes. Liegt ein Vorzeichenwechsel vor, so ist eine mögliche Nullstelle gefunden. Ist die Genauigkeit noch nicht erreicht, wird der letzte Berechnungsschritt zurückgesetzt und mit einer kleineren Schrittweite durchgerechnet. Dies geschieht solange bis die gewünschte Genauigkeit erreicht wurde, als Ergebnis erhält man die Eigenfrequenz. Dieser Vorgang wird so oft wiederholt bis der *Endwert omega* erreicht wird.

Bisher nicht erwähnt wurde eine Problematik bei der QR-Zerlegung für die Berechnung der Determinante von  $T_{red}$ . Denn es besteht die Möglichkeit, dass der Determinantenverlauf ein unerwarteten Vorzeichenwechsel durchführt. Tritt dieser Fall ein, ändert sich nach dem Vorzeichenwechsel das Vorzeichen des Determinantenverlaufes. Die mittige und rechte Grafik von Abbildung 5.3 zeigt charakteristisch die zwei möglichen Vorzeichenwechsel. Als Schlussfolgerung des Vorzeichenwechsel tritt nun das programmierte Bisektionsverfahren ein und berechnet die Nullstellen. Problematisch ist nun, dass im Simulationsprogramm die unerwarteten Vorzeichenwechsel des Determinantenverlaufes ermittelt und als Eigenfrequenzen ausgegeben werden. Somit besteht die Möglichkeit, dass unter den berechneten Eigenfrequenzen sich auch falsche Eigenfrequenzen befinden.

Um dem entgegenzuwirken wurde ein Algorithmus entwickelt, der diese unerwarteten Vorzeichenwechsel identifiziert und den Determinantenverlauf korrekt fortsetzt. Mit diesem Algorithmus sollen in HydroVib nun ausschließlich richtige Eigenfrequenzen ermittelt werden. Zur manuellen Überprüfung wird der Determinantenverlauf in einem Diagramm dargestellt. Mit der Zoomfunktion lässt sich einfach untersuchen ob Eigenfrequenzen des Systems vorliegen, oder ob es sich lediglich um einen unerwarteten Vorzeichenwechsel handelt.



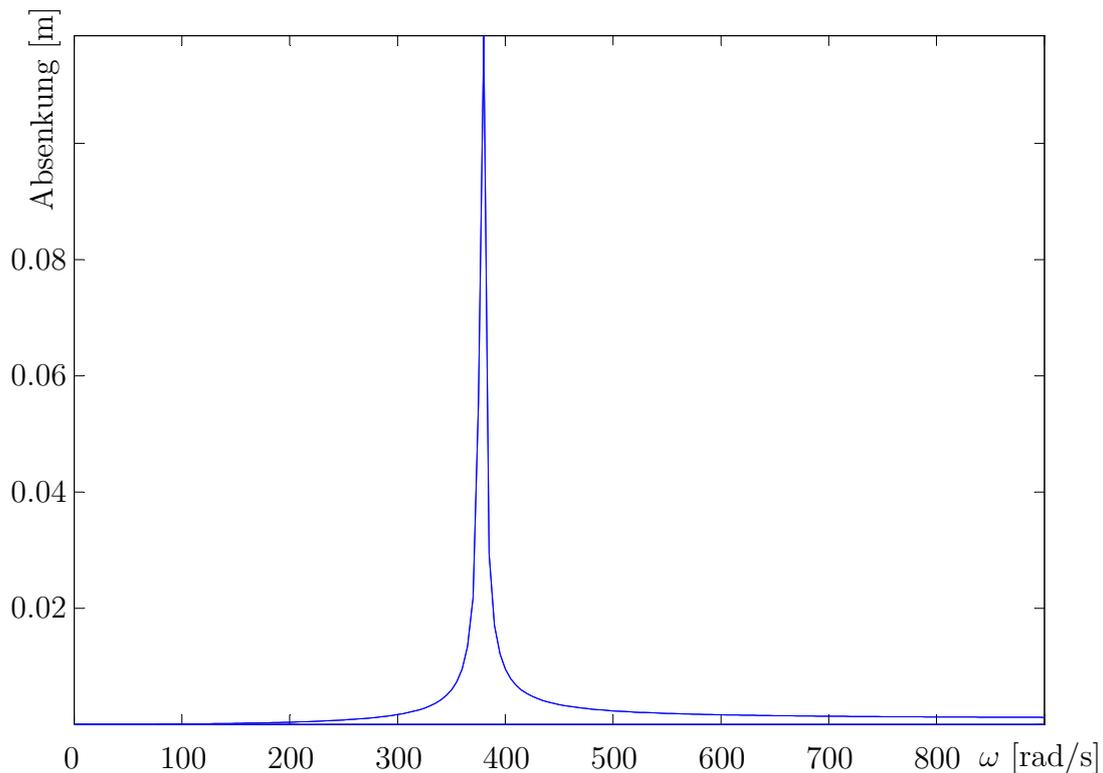
**Abbildung 5.3:** links-Nullstelle, mittig-Vorzeichenwechsel - keine Nullstelle, rechts - Vorzeichenwechsel - keine Nullstelle

Sind alle Eigenfrequenzen des Systemes im gewünschten Frequenzbereich gefunden, werden die zugehörigen Eigenformen berechnet. Dabei wird folgendermaßen Vorgegangen: Zuerst wird der Startvektor  $x_0$  bestimmt. Mithilfe der zuvor gewählten Größe des Startvektors  $x_0$  im Menü Randbedingungen können alle anderen Größen des Startvektors  $x_0$  berechnet werden. Ist letztendlich der Startvektor  $x_0$  bekannt, werden alle weiteren Vektoren mit Gleichung 4.176 berechnet. Um die gesamte Lösung zu erhalten, werden alle Vektoren  $w_1, v_1, \varphi_{y1}, \varphi_{z1}, M_{y1}, M_{z1}, Q_{z1}, Q_{y1}$  mit  $\sin(\omega t)$  multipliziert und  $w_2, v_2, \varphi_{y2}, \varphi_{z2}, M_{y2}, M_{z2}, Q_{z2}, Q_{y2}$  mit  $\cos(\omega t)$ . Dies wird mit allen Vektoren durchgeführt.

## Resonanzkurve

In der Resonanzkurve werden die Amplituden von Absenkung, Steigung, Moment und Querkraft aller Vektoren für einen definierten Frequenzbereich berechnet und in einem Diagramm dargestellt. Abbildung 5.4 zeigt eine berechnete Resonanzkurve, die anschließend in ein Diagramm übertragen worden ist. Aus dieser Darstellung gut ersichtlich ist, dass knapp unter  $\omega=400$  rad/s eine Eigenfrequenz des Systems angeregt wird.

Anders als bei der Berechnung von Eigenfrequenzen wird hier die Dämpfung nicht vernachlässigt. Erhöht man die Dämpfung im System, so werden die Amplituden kleiner und die Resonanzkurve wird abflachen.



**Abbildung 5.4:** Resonanzkurve - Amplituden werden über  $\omega$  aufgetragen

Ein wesentlicher Grund für die Größe der Amplituden ist, dass der Lastenvektor in die Berechnung mit eingebunden wird. Würde man den Lastenvektor null setzen, so wären alle Amplituden null und die Resonanzkurve wäre nicht vorhanden. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass für eine Berechnung der Resonanzkurve die Erregerkräfte unbedingt angegeben werden müssen.

Weiter sind die berechneten Amplituden ein Ergebnis der Übertragungsmatrizen. Werden alle notwendigen Eigenschaften, die ein System beschreiben berücksichtigt, so sind die Amplituden korrekte Ergebnisse des Systems.

In Abbildung 5.5 ist der schematische Aufbau für die Berechnung der Resonanzkurve dargestellt. Es wird hier kurz erklärt, wie der Algorithmus für Biegeschwingungen funktioniert. Zuerst wird mit  $\omega$  die 17x17 Matrix  $T_{ges(\omega)}$  gebildet. Dies erfolgt durch Matrixmultiplikation. Der Lastenvektor  $P$  wird nun

aus der Matrix  $T_{ges(\omega)}$  extrahiert.

$$\underbrace{x_{ende}}_{17*1} = \underbrace{T_{ges(\omega)}}_{17*17} \underbrace{x_{start}}_{17*1} \rightarrow \underbrace{x_{ende}}_{16*1} = \underbrace{T_{ges(\omega)}}_{16*16} \underbrace{x_{start}}_{16*1} + \underbrace{P}_{16*1} \quad (5.1)$$

Mit den Randbedingungen werden die nicht benötigten Spalten und Zeilen des Gleichungssystems entfernt. Bei der Berechnung von Eigenfrequenzen wurde an dieser Stelle ein homogenes Gleichungssystem gebildet, da der Lastenvektor P null gesetzt wurde. Für die Berechnung der Resonanzkurve wird der Lastenvektor berücksichtigt und somit entsteht ein inhomogenes Gleichungssystem der Form.

$$0 = \underbrace{T_{ges(\omega)}}_{8*8} \underbrace{x_{start}}_{8*1} + \underbrace{P}_{8*1} \quad (5.2)$$

nach weiterer Umformung

$$x_{start} = inv(T_{ges(\omega)}) * (-P) \quad (5.3)$$

kann der Startvektor  $x_{start}$  bzw.  $x_0$  berechnet werden. Mit den Randbedingungen wird der Startvektor wieder auf seine ursprüngliche Größe 17x1 gebracht. Um die gesamte Lösung zu erhalten wird die Zeitabhängigkeit eingefügt.

$$x_{start(t)} = x_{start}(1 : 4, 9 : 12) * sin(\omega t) + x_{start}(5 : 11, 13 : 1) * cos(\omega t) \quad (5.4)$$

$t$  ist dabei so festgelegt, dass genau eine volle Periode berechnet wird. Im Menü Optionen kann der Zeitschritt  $t$  bestimmt werden, dieser mit der Unterteilung der Periode zusammenhängt. Wird für  $t=1$  gewählt so wird die Periode nicht unterteilt. Wählt man hingegen  $t=0,1$  so wird die Periode in 10 Teile zerlegt. Der Startvektor  $x_{start}$  hat 8 Reihen und Zeilen abhängig von dem gewählten Zeitschritt  $t$ .

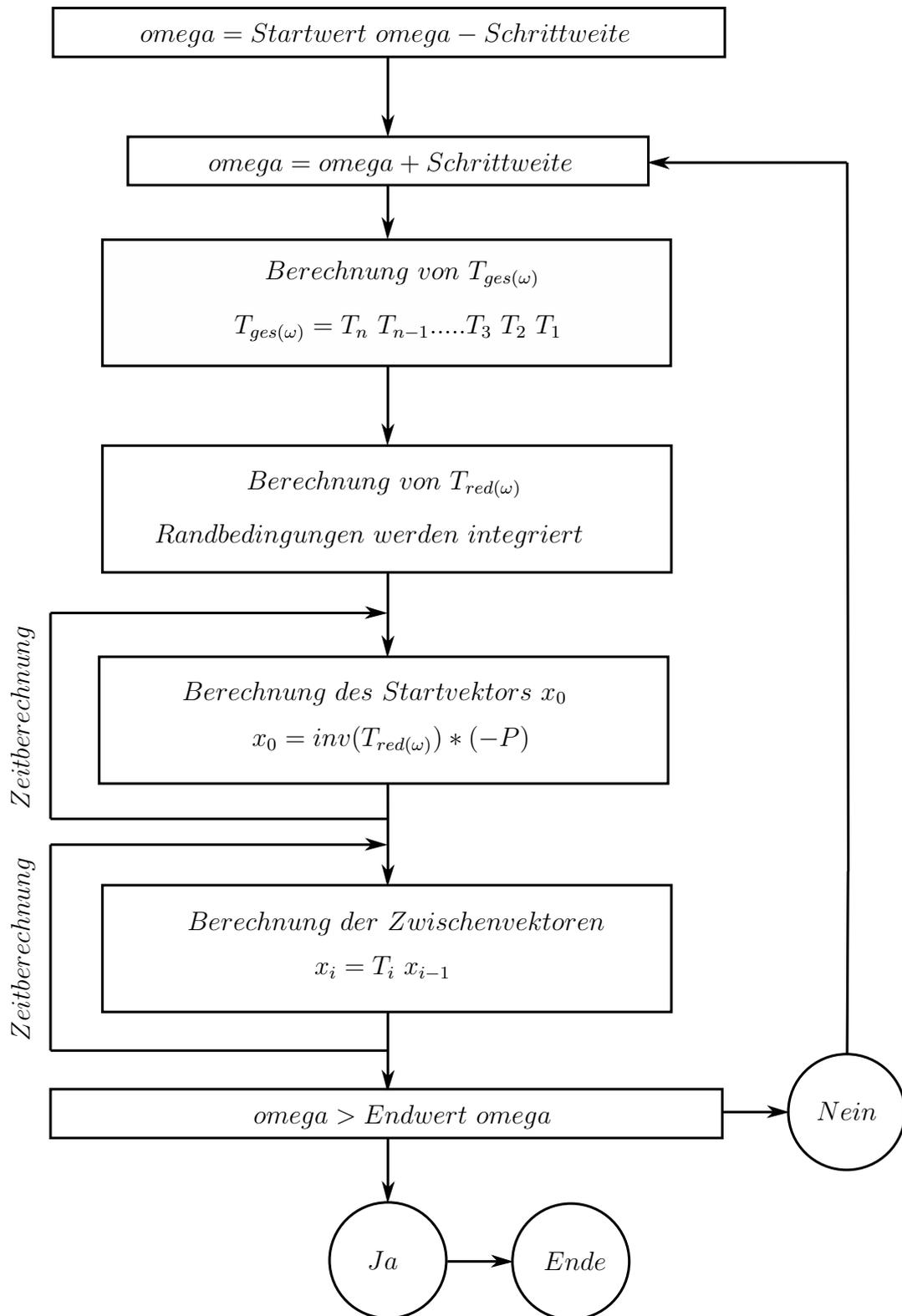


Abbildung 5.5: Algorithmus der Berechnung von Resonanzkurve

$$x_{start(t)} = \begin{pmatrix} w & w & w & \dots & w \\ w' & w' & w' & \dots & w' \\ M_y & M_y & M_y & \dots & M_y \\ Q_z & Q_z & Q_z & \dots & Q_z \\ v & v & v & \dots & v \\ v' & v' & v' & \dots & v' \\ M_z & M_z & M_z & \dots & M_z \\ Q_y & Q_y & Q_y & \dots & Q_y \end{pmatrix}$$

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{2 \pi}{\omega}$$

Vereint man die zwei Ebenen mittels Pythagoras, so erhält man den Absolutbetrag der Amplituden.

$$|x_{start(t)}| = \sqrt{x_{start(t)y}^2 + x_{start(t)z}^2}$$

Ist letztendlich der Startvektor  $x_0$  berechnet so werden mit den Übertragungsmatrizen alle weiteren Zwischenvektoren  $x_n$  berechnet. Anschließend wird die Zeitabhängigkeit wieder eingefügt.

Dieser Vorgang wird so oft wiederholt bis der Endwert omega erreicht wurde.

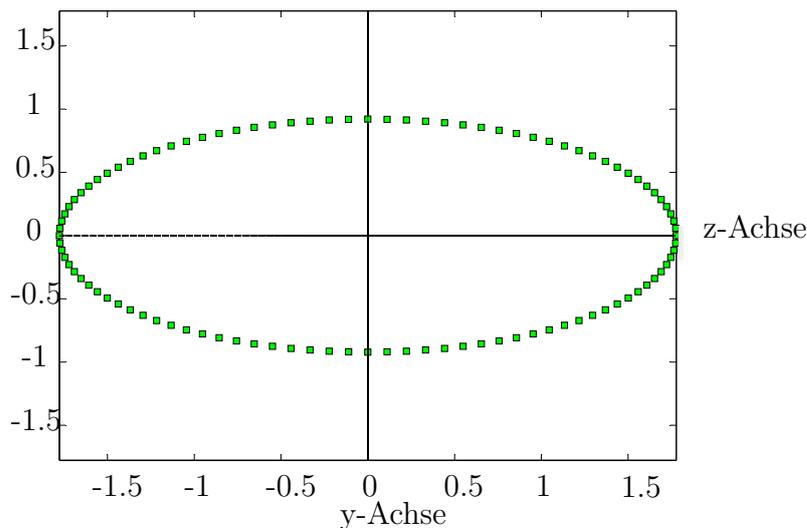
Im Menü Resonanzkurve kann nun die Resonanzkurve von den Vektorgrößen Absenkung, Steigung, Moment und Querkraft für den jeweiligen Zustandsvektor ausgewählt werden. Mit den Einstellungen zeitlich unabhängig, abhängig und Absolutbetrag kann die Zeitabhängigkeit bestimmt werden. Der Schiebepalken ermöglicht die Visualisierung der ausgewählten Einstellungen.

## Schwingungsform

Die Berechnung von Schwingungsformen ist nahezu identische wie die Berechnung von Resonanzkurven. Dämpfung und Lastenvektor werden nicht vernachlässigt. Auch der programmierte Algorithmus weist keine größeren Verände-

rungen auf, daher wurde auf eine detaillierte Beschreibung des Algorithmus verzichtet.

Es werden die Amplituden von Absenkung, Steigung, Moment und Querkraft für jeden Vektor bei einer zuvor bestimmten Frequenz berechnet. Nach der Berechnung können die zwei Diagramme Schwingungsform und Orbit erzeugt werden.

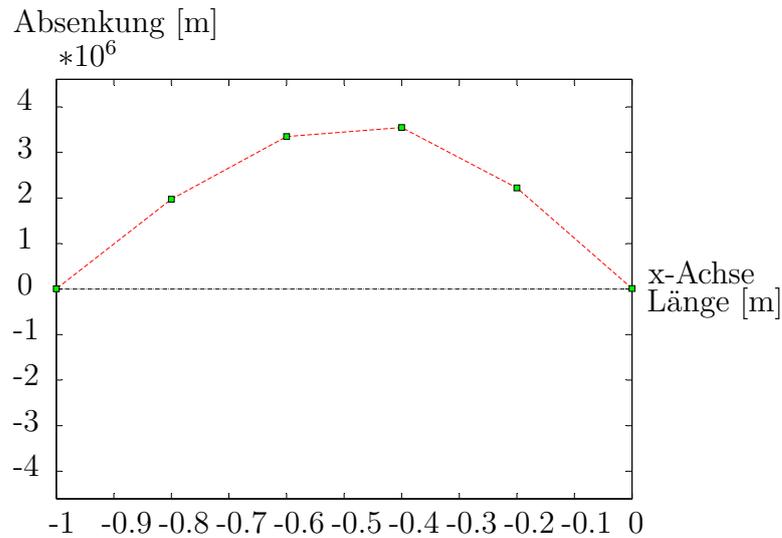


**Abbildung 5.6:** Orbit einer Größe und Vektors bei einer Frequenz  $\omega$

Abbildung 5.6 zeigt ein Diagramm mit einem Orbit. Um diesen Verlauf zu erstellen, muss eine Frequenz, Vektor und Vektorgröße ausgewählt werden. Anschließend wird der Schiebepalken von  $0^\circ$  auf  $360^\circ$  bewegt.

Erwähnt sei, dass in diesem Diagramm ein Vektor mit Zeitabhängigkeit abgebildet wird. Hingewiesen sei auf Formel 5.4.

In Abbildung 5.7 ist die Schwingungsform eines System abgebildet. Um diesen Verlauf zu erstellen, muss eine Frequenz, Vektorgröße und Ebene ausgewählt werden. Anschließend kann der Schiebepalken zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  bewegt werden um eine Animation des Diagrammes hervorzurufen. Wurde die Berechnung der Schwingungsform mit einer Eigenfrequenz des Systems durchgeführt, so zeigt das Diagramm deren Eigenform.

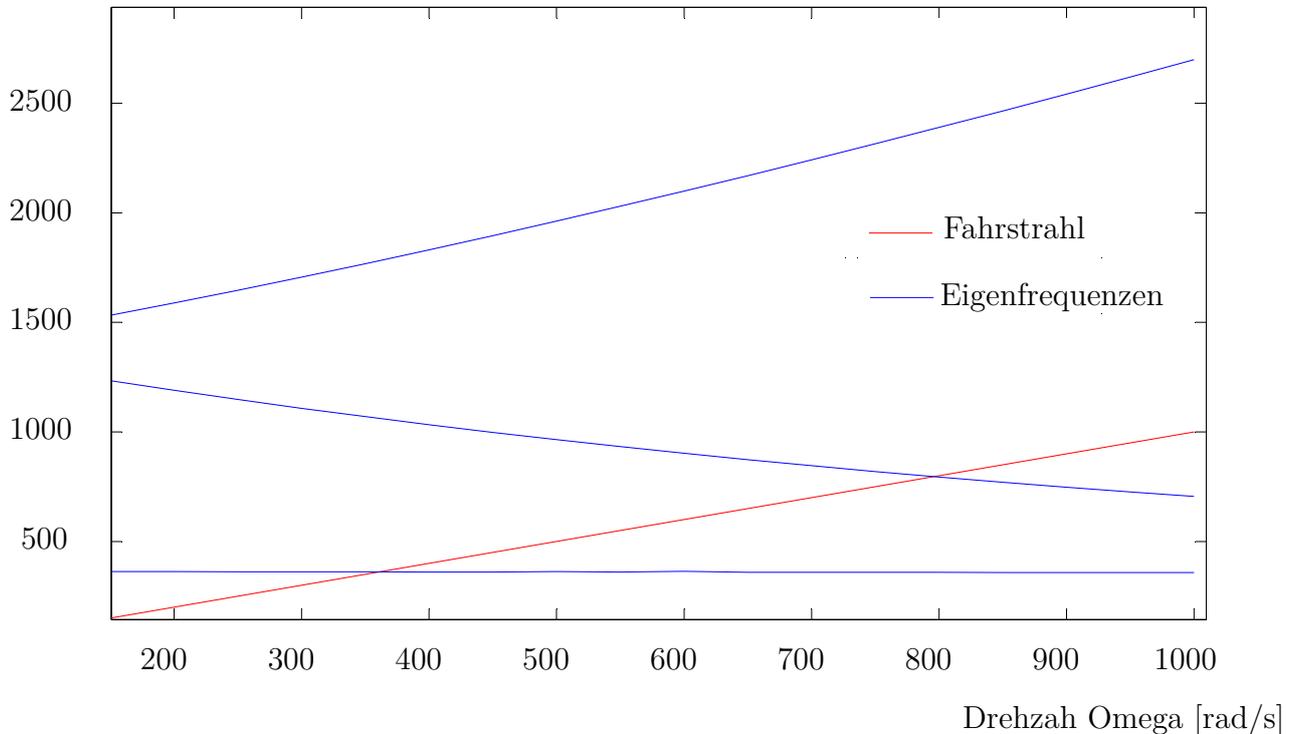


**Abbildung 5.7:** Schwingungsform - Für die sechs Vektoren wurde die Vektorgröße Absenkung gewählt

## Campbell Diagramm

In diesem Diagramm kann der Einfluss der Kreiselwirkung beobachtet werden. Wie bereits in Kapitel 4.3.1 erwähnt, sind manche Eigenfrequenzen nicht mehr konstant wenn im System ein Kreiseffekt vorhanden ist. In Abbildung 5.8 wurde mittels HydroVib ein Campbell Diagramm erstellt. Dabei ist gut ersichtlich, dass die niedrigste Eigenfrequenz nahezu konstant ist, die zwei höheren Eigenfrequenzen hingegen von der Drehzahl  $\Omega$  des rotierenden Systems abhängig sind. Schneidet der Fahrstrahl eine Eigenfrequenzkurve so tritt bei dieser Drehzahl  $\Omega$  Resonanz ein. Dabei gibt die Frequenz der Erregerkraft die Steigung des Fahrstrahles an. So ist bei der Unwuchterregung die Steigung des Fahrstrahles 1, da bei jeder Umdrehung die Unwuchtkraft einmal auftritt. Bei hydraulischen Wasserkraftanlagen treten jedoch weitere Erregungen auf. Wird zum Beispiel eine Pelton-Turbine mit neun Laufschaufeln im gleichem Abstand betrachtet, so tritt pro Umdrehung die Erregung neun mal auf. Die Steigung des Fahrstrahles ist daher neun.

Eigenfrequenz [rad/s]



**Abbildung 5.8:** Campbell Diagramm - Resonanzfall beim Schnittpunkt von Fahrstrahl und Resonanzkurve bei Drehzahl  $\Omega$  des rotierenden Systems

Erwähnt sei hier nochmals, dass Drehzahl  $\Omega$  die Drehzahl des rotierenden Systems ist. Für jede Drehzahl  $\Omega$  wurden nun dessen Eigenfrequenzen bestimmt, da diese eventuell nicht mehr konstant sind. Hingewiesen sei abermals auf den Term  $\Theta_p \Omega \dot{\varphi}$  in Formel 4.40, der den Kreiseffekt beschreibt.

Kreiselwirkung tritt dann ein, wenn die Masse nicht als Punktmasse sondern als Scheibe mit äquatorialen- und vor allem mit polaren Massenträgheitsmoment modelliert wird und eine Schrägstellung der Scheibe vorhanden ist [1]. Weiter kommt dieser Effekt nur bei Biegeschwingungen zur Geltung, Torsionsschwingungen sind frei von Kreiswirkung. Für ein tiefgreifendes Verständnis zu diesem Thema sei auf die Literatur [1] hingewiesen.

Für die numerische Berechnung des Campbell Diagrammes wurde nahezu der selbe Algorithmus verwendet, wie bei der Berechnung von Eigenfrequenzen. Lediglich die Bedienung  $\Omega = \omega$  für den Term  $\Theta_p \Omega \omega$  in der Übertragungsmatrix für ein Massenelement gilt nicht mehr. Die Drehzahl  $\Omega$  wird durch eine Start-

wert bestimmt und anschließend werden dessen Eigenfrequenzen ermittelt. Dies wird so oft mit der gewählten Schrittweite wiederholt bis der Endwert von  $\Omega$  erreicht wurde.

Besteht das System aus sehr vielen Elementen bzw. Übertragungsmatrizen, ist eine Berechnung der Eigenfrequenzen schon recht langwierig. Um ein Campbell Diagramm zu erstellen muss dieser Vorgang mehrmals wiederholt werden. Erwähnt sei hier, dass ein Campbell Diagramm unter gewissen Umständen sehr viel Rechenzeit in Anspruch nehmen kann.

## 6 Validation

In diesem Kapitel werden einige Systeme mit HydroVib berechnet und anschließend mit einer analytischen Lösung verglichen. Dies soll Gewissheit schaffen, ob beziehungsweise wie genau die Ergebnisse von HydroVib zutreffen. Die analytischen Lösungen wurden großteils aus der Literatur [1] entnommen. Zum Teil wird auch genauer auf die Bedienung des Simulationsprogrammes eingegangen, um vielleicht noch offene Lücken zur Handhabung von HydroVib zu schließen.

### 6.1 Biegeschwingungen

#### 6.1.1 Lavallrotor in starren Lagern

In diesem System sei die Welle masselos und starr gelagert. Zwischen der Lagerung befindet sich mittig die Masse  $m$ . Abstand der Lager ist  $L$ . Der Läufer rotiert mit der Drehzahl  $\Omega$ .

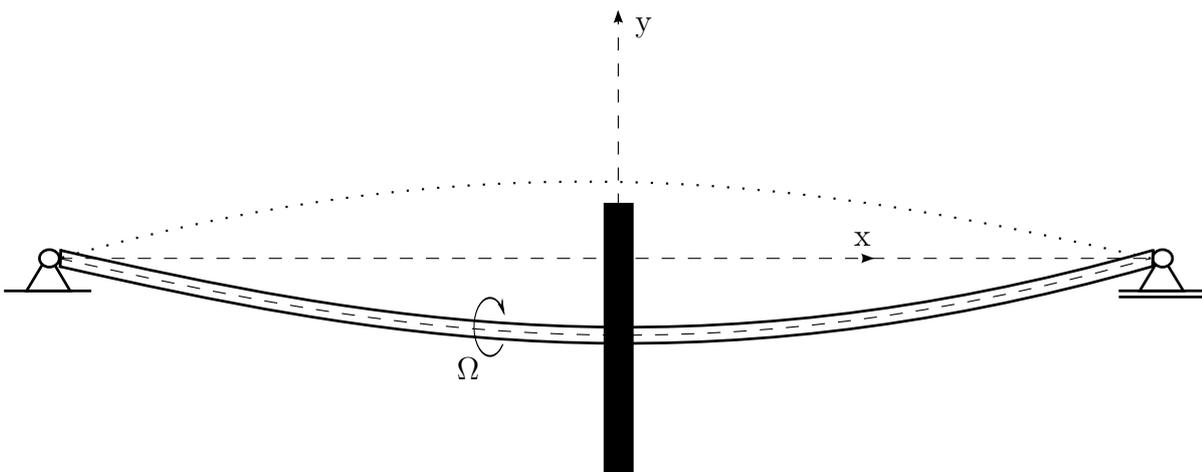


Abbildung 6.1: Lavallläufer - masselose Welle mit starrer Lagerung. Mittig befindet sich eine Scheibe mit deren Masse  $m$

Folgende Daten wurden in HydroVib eingelesen. Angaben in SI-Einheiten.

Welle-masselos-Biegung	$\varnothing_a$	$\varnothing_i$	$L$	$E - Modul$		
	0,15	0	0,5	$2,1E + 11$		
Massenpunkt-Biegung-reduziert	$m$	$m_r$	$\Theta_a$	$\Theta_p$	$e$	$GL$
	500	0	0	0	0	1
Welle-masselos-Biegung	$\varnothing_a$	$\varnothing_i$	$L$	$E - Modul$		
	0,15	0	0,5	$2,1E + 11$		

**Tabelle 6.1:** Daten für Lavallläufer mit starrer Lagerung

Die linke und rechte RB sind Absenkung=0 und Moment=0. Das Simulationsprogramm HydroVib berechnet die Eigenfrequenz zu  $\omega_{krit} = 707,804 \frac{rad}{s}$ . Die analytische Lösung kann berechnet werden mit

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad k = \frac{48 E I}{L^3} \quad I = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\varnothing_a}{2}\right)^4 \quad (6.1)$$

Werden die Werte eingesetzt erhält man  $\omega_{krit} = 707,796 \frac{rad}{s}$ . Die mit HydroVib berechnete Eigenfrequenz stimmt fast mit der analytischen Lösung überein.

### 6.1.2 Lavallrotor in isotropen Lagern

Genügt starre Lagerung nicht so kann eine elastische Lagerung verwendet werden. Es werden Feder-Dämpfer Elemente an den Lagerstellen eingefügt. Die Lagersteifigkeiten in z- sowie y-Richtung sind gleich, somit liegt isotrope Lagerung vor. Es wird eine Exzentrizität von  $e = 0,001$  m für die Berechnung von Orbits, Schwingungsformen und Resonanzkurven angenommen. Dies kann mit gutem Gewissen gemacht werden, da die Exzentrizität die Eigenkreisfrequenz nicht beeinflusst. Werden die Daten von Tabelle 6.2 in HydroVib eingelesen und berechnet, kann die Eigenkreisfrequenz  $\omega_{krit} = 192,471 \frac{rad}{s}$  bestimmt werden. Die linke und rechte RB wurden so gewählt, dass Moment= 0 und Querkraft= 0 ist. Die analytische Berechnung im Anhang 9.1 hat die Lösung  $\omega_{krit} = 192,464 \frac{rad}{s}$ . Zusammengefasst ergibt sich, dass weiche Lagerung bei gleichbleibenden Systeme

meigenschaften die Eigenfrequenz des Systemes sinken.

Feder-Dämpfer-Element	$c_{zz}$	$c_{yy}$	$d_{zz}$	$d_{yy}$		
	$1,00E + 7$	$1,00E + 7$	0	0		
Welle-masselos	$\varnothing_a$	$\varnothing_i$	$L$	$E - Modul$		
	0,15	0	0,5	$2,1E + 11$		
Massenpunkt-reduziert	$m$	$m_r$	$\Theta_a$	$\Theta_p$	$e$	$GL$
	500	0	0	0	0,001	1
Welle-masselos	$\varnothing_a$	$\varnothing_i$	$L$	$E - Modul$		
	0,15	0	0,5	$2,1E + 11$		
Feder-Dämpfer-Element	$c_{zz}$	$c_{yy}$	$d_{zz}$	$d_{yy}$		
	$1,00E + 7$	$1,00E + 7$	0	0		

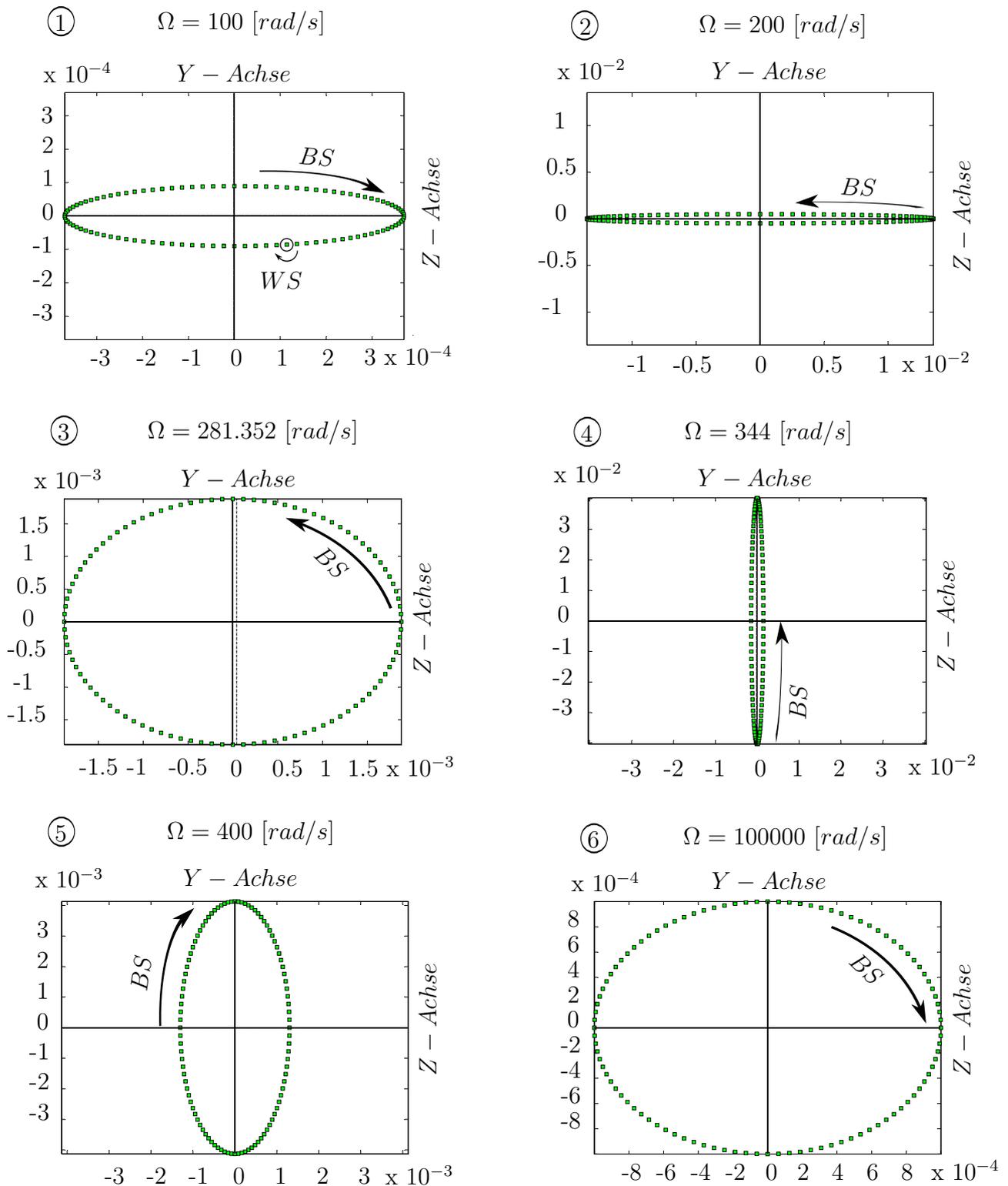
**Tabelle 6.2:** Daten für Lavallläufer mit isotroper Lagerung

### 6.1.3 Lavallrotor in anisotropen Lagern

Ist die Lagersteifigkeit in z- und y-Richtung ungleich, so spricht man von anisotroper Lagerung. Werden alle Daten von Tabelle 6.2 beibehalten bis auf die Lagersteifigkeiten  $c_{yy} = 4,00E + 7 \frac{N}{m}$  in beiden Feder-Dämpfer-Elementen, so werden mit HydroVib zwei Eigenfrequenzen  $\omega_{krit1} = 192,471 \frac{rad}{s}$  und  $\omega_{krit2} = 348,243 \frac{rad}{s}$  gefunden. Im Anhang 9.2 befindet sich die analytische Lösung, die erneut sehr gut mit den Ergebnissen aus HydroVib übereinstimmt.

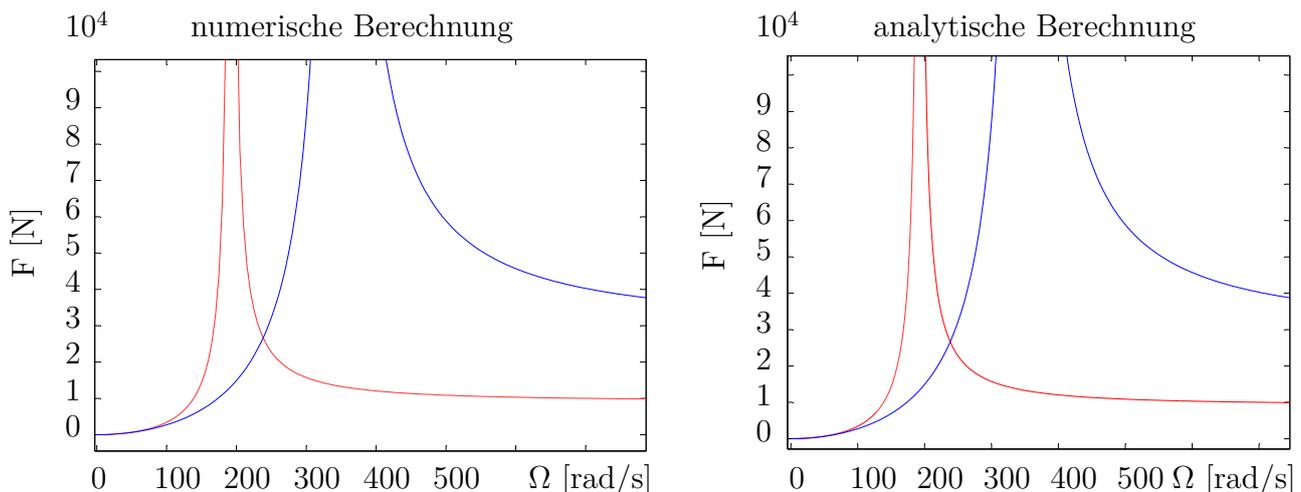
Nach Literatur [1] tritt bei anisotroper Lagerung neben Gleichlauf auch Gegenlauf ein. Bei Gleichlauf ist der Wellendreh Sinn und der Bahnumlauf Sinn ident. Hingegen ist bei Gegenlauf der Bahnumlauf Sinn zum Wellendreh Sinn unterschiedlich. Bis zur ersten Eigenfrequenz  $\omega_{krit1}$  herrscht Gleichlauf. Zwischen  $\omega_{krit1}$  und  $\omega_{krit2}$  existiert Gegenlauf. Wird die Drehzahl  $\Omega$  über  $\omega_{krit2}$  erhöht, setzt sich Gleichlauf wieder durch.

HydroVib bietet die Möglichkeit Orbits vom System bei unterschiedlichen Drehzahlen  $\Omega$  zu generieren. In Abbildung 6.2 wurden Umlaufbahnen vom Massenmittelpunkt der Rotorscheibe bei unterschiedlichen Drehzahlen  $\Omega$  mittels



**Abbildung 6.2:** Lavallläufer mit isentroper Lagerung - Bild 1 Gleichlauf - Drehzahl  $\Omega < \omega_{krit1}$ ; Bild 2 Gegenlauf - Drehzahl  $\omega_{krit1} < \Omega < \omega_{krit2}$ ; Bild 3 Gegenlauf - Umlaufbahn ist kreisförmig -  $\Omega = \sqrt{(\omega_{krit1}^2 + \omega_{krit2}^2)}/2$ ; Bild 4 Gegenlauf - Drehzahl  $\Omega < \omega_{krit1}$ ; Bild 5 Gleichlauf - Drehzahl  $\Omega > \omega_{krit2}$ ; Bild 6 Gleichlauf  $\Omega \gg \omega_{krit2}$

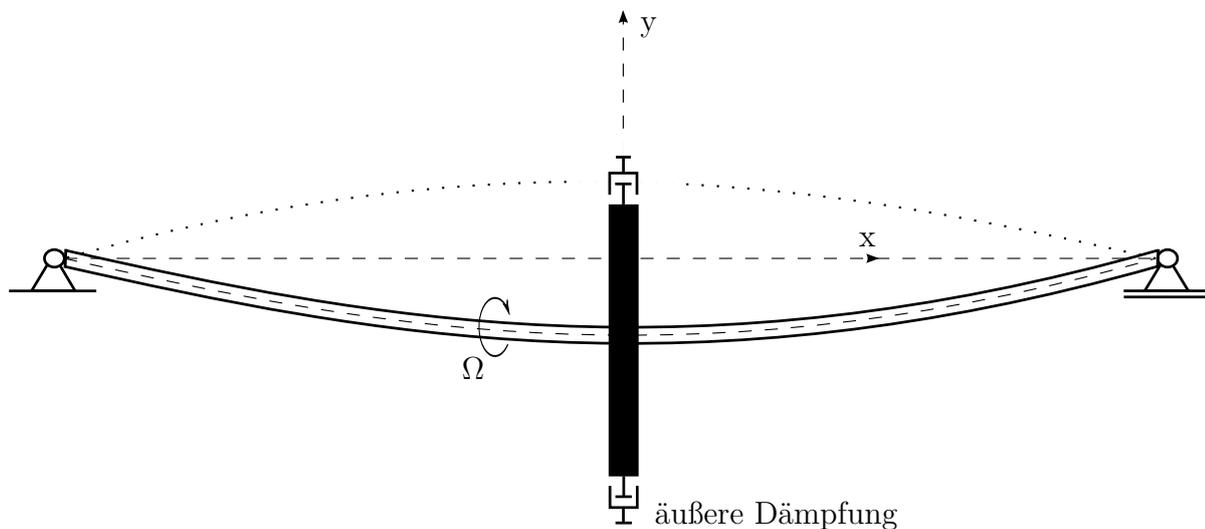
HydroVib berechnet und visualisiert. Bild Nr.1 wurde mit einer Drehzahl von  $\Omega = 100 \frac{rad}{s}$  berechnet. Der Bahnumlaufsinn BF ist mit dem Wellendreh Sinn WS ident, es herrscht Gleichlauf. Aufgrund anisotroper Lagerung ist die Umlaufbahn ellipsenförmig. Erhöht man die Drehzahl über  $\Omega > \omega_{krit1}$ , dann wendet der Bahnumlaufsinn und es herrscht Gegenlauf, was in Bild Nr.2 veranschaulicht ist. Je näher die Drehzahl zu der Eigenkreisfrequenz  $\omega_{krit1}$  wandert, desto größer werden die Ausschläge in z-Achse und die Ellipse wirkt schmaler. In Bild Nr.3 wurde der Orbit von der Drehzahl  $\Omega = \sqrt{(\omega_{krit}^2 + \omega_{krit}^2)}/2$  berechnet. Der Rotor befindet sich nach wie vor in Gegenlauf, jedoch ist bei dieser Drehzahl die Umlaufbahn kreisförmig. Wird die Drehzahl weiter erhöht bis diese kurz vor  $\omega_{krit2}$  ist, herrscht immer noch Gegenlauf. Nun sind die Ausschläge aber in y-Richtung ausgeprägter, was aus Bild Nr.4 entnommen werden kann. Ist  $\Omega > \omega_{krit2}$ , dominiert Gleichlauf das Laufverhalten des Rotors. Je weiter die Drehzahl erhöht wird, desto kreisförmiger wird die Umlaufbahn vom Massenmittelpunkt des Rotors was in Bild Nr.5 gut ersichtlich ist. Die Auslenkung der Eigenfrequenzschwingung  $\omega_{krit2}$  klingen also ab. In Bild Nr.6 ist die Drehzahl  $\Omega \gg \omega_{krit}$ . Die Umlaufbahn wird kreisförmig und nähert sich der Exzentrizität  $e$  an, wie es für einen Lavalläufer üblich ist. Vergleicht man die berechneten Orbits von HydroVib mit der analytischen Lösung von der Literatur [1] stimmen diese überein.



**Abbildung 6.3:** Bild links - numerische Berechnung der Kräfte; Bild rechts - analytische Berechnung der Kräfte

HydroVib ermöglicht die Berechnung von Querschnittkräften und Momenten. Im linken Diagramm in Abbildung 6.3 wurden die Querkräfte numerisch mittels Resonanzkurve in HydroVib berechnet. Das rechte Diagramm beschreibt die analytische Lösung der Kräfteberechnung. Die rote Kurve ist die Querkraft in z-Richtung, die blau Kurve hingegen ist die Querkraft in y-Richtung. Die Kurven der Kräfte in y- und z-Richtung wurden bei ihrer maximalen Amplitude abgebildet. Gut zu erkennen ist, dass die numerische Berechnung ausgezeichnet mit der analytischen Lösung übereinstimmt. Aus der Literatur [1] wurde die analytische Lösung entnommen. Erwähnt sei, dass die Berechnung der Querkräfte und Momente in HydroVib ausschließlich die Belastung durch die Exzentrizität der Massen berücksichtigen. Eigengewicht bei horizontaler Ausrichtung oder auch zum Beispiel die Belastung von Wassermassen bei hydraulischen Maschinen werden nicht behandelt.

#### 6.1.4 Lavallrotor in starren Lagern mit äußerer Dämpfung



**Abbildung 6.4:** Lavallläufer - masselose Welle mit starrer Lagerung und äußerer Dämpfung

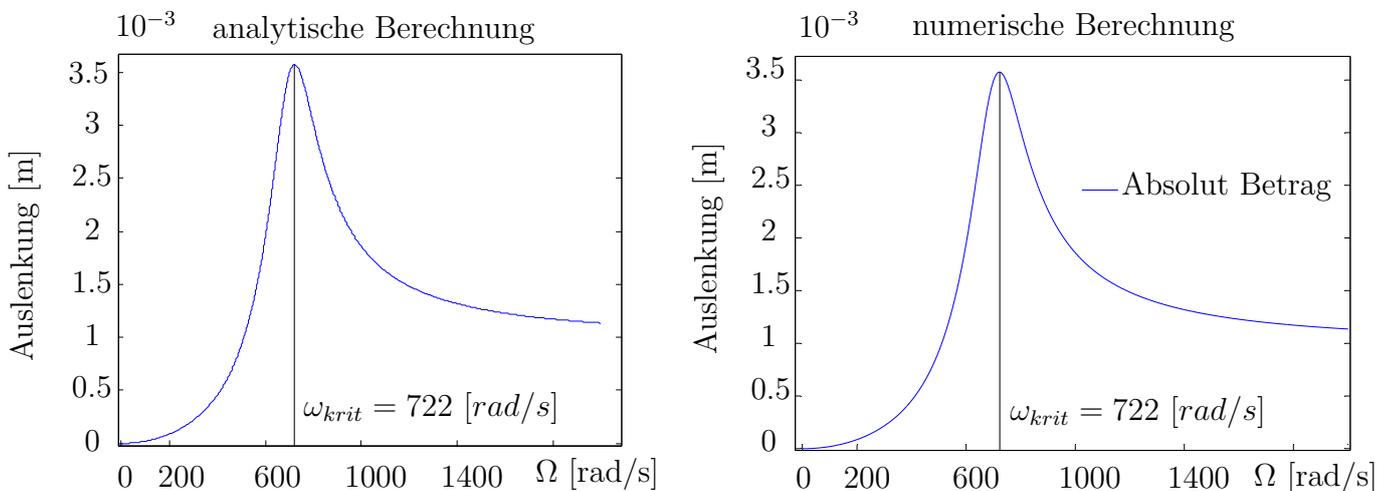
Es soll gezeigt werden, wie Dämpfung die Berechnungen in HydroVib beeinflussen. Dazu wird am Lavallrotor eine äußere Dämpfung an der Scheibe angenommen, vergleiche Abbildung 6.4. Die Werte von Tabelle 6.1 können fast identisch übernommen werden. Das Element Massenpunkt-Biegung-reduziert

wird durch das Element Massenpunkt-Biegung ersetzt. Folgende Daten werden in das Element eingetragen.

$$m = 500 \text{ kg}; d_{zz} = 1,00E + 5 \frac{Ns}{m}; d_{yy} = 1,00E + 5 \frac{Ns}{m}; e = 0,001 \text{ m}$$

Wird nun die Eigenfrequenz mittels HydroVib berechnet so erhalten wir  $\omega_{krit} = 707,804 \frac{rad}{s}$ . Diese ist identisch mit der Eigenfrequenz des Lavallrotors in starren Lagern ohne äußere Dämpfung. Grund dafür ist, dass bei der Berechnung der Eigenfrequenz sowie der Erstellung eines Campbell Diagrammes in HydroVib die Dämpfungen vernachlässigt werden.

Soll die wahre Eigenfrequenz des Lavallrotors mit äußerer Dämpfung gefunden werden so kann die Resonanzkurve Abhilfe verschaffen. Denn in dieser Berechnung werden, die Dämpfungen berücksichtigt. Im rechten Bild von Abbildung 6.5 wurde eine Resonanzkurve mittels HydroVib erstellt. Die Rotorausschläge erreichen bei ca.  $722 \frac{rad}{s}$  ihr Maximum. Die Eigenfrequenz hat sich Aufgrund von äußerer Dämpfung leicht erhöht. Das linke Bild zeigt die analytische Lösung

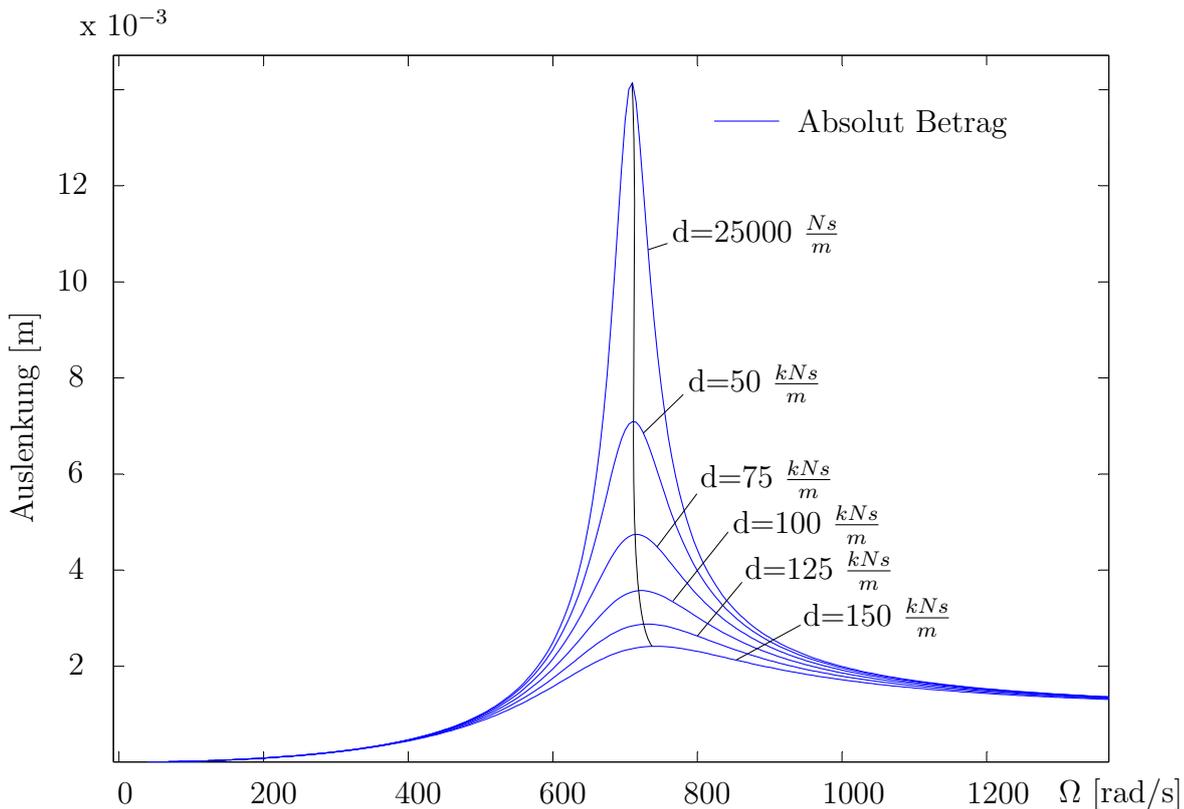


**Abbildung 6.5:** Bild links - Resonanzkurve analytische berechnet; Bild rechts - Resonanzkurve numerische berechnet

des Lavallläufers in starren Lagern mit äußerer Dämpfung. Die Eigenfrequenz liegt wie bei der numerischen Berechnung bei ca.  $722 \frac{rad}{s}$ . Ein weiterer Vorteil der Berechnung von Resonanzkurven, Schwingungsformen oder Orbits ist, dass die Absenkungen, Steigungen, Momente und Querkräfte mit dem wahren Modell übereinstimmen. Die analytische Lösung wurde aus der Literatur [1]

entnommen.

In Abbildung 6.6 wurden Resonanzkurven für den Rotor mit unterschiedlicher äußerer Dämpfung berechnet. Wie erwartet werden die Auslenkungen mit zunehmender äußerer Dämpfung kleiner. Die Eigenkreisfrequenz hingegen steigt bei kontinuierlicher Erhöhung der äußeren Dämpfung an.



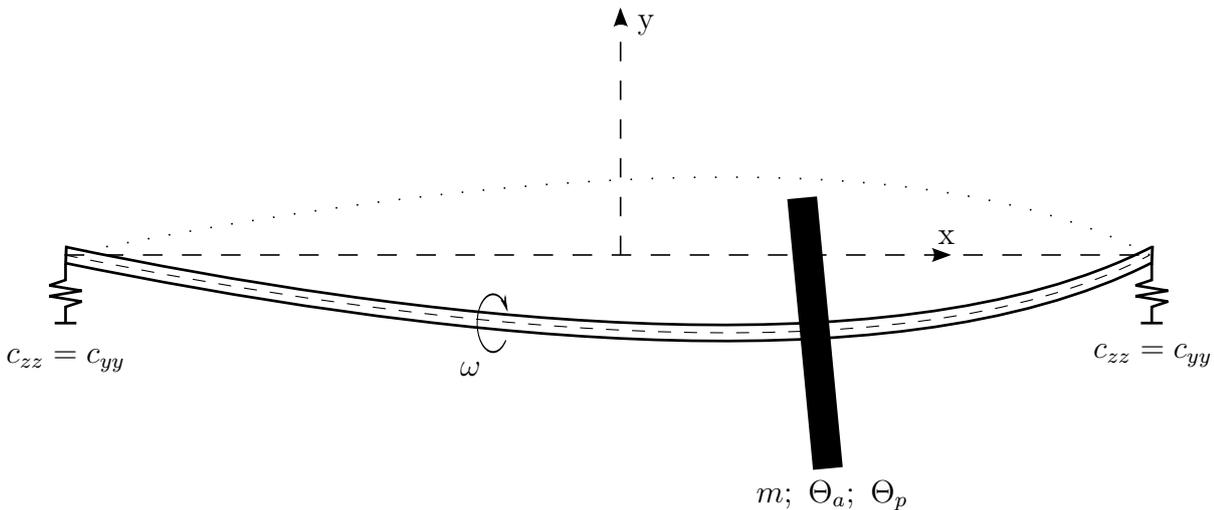
**Abbildung 6.6:** Resonanzkurve eines Lavallrotors in starren Lagern mit unterschiedlicher äußerer Dämpfung

Die innere Dämpfung, die eine Instabilität des Rotors hervorruft wird nicht beachtet, da die Instabilität im überkritischen Bereich auftritt und hydraulische Maschinen im unterkritischen Bereich betrieben werden.

### 6.1.5 Lavallrotor in isotropen Lagern mit Kreiselwirkung

Es soll gezeigt werden, welchen Einfluss ein äquatoriales Flächenträgheitsmoment  $\Theta_a$  und/oder ein polares Flächenträgheitsmoment  $\Theta_p$  auf eine stillstehende bzw. rotierende Masse ausüben. Um dessen Auswirkungen zu zeigen, muss ei-

ne Schrägstellung der Rotorscheibe vorhanden sein. Ein außermittiger Sitz der Rotorscheibe zwischen den Lagern soll eine Kippung der Scheibe gewährleisten, vergleiche Abbildung 6.7.



**Abbildung 6.7:** Lavallrotor in isotropen Lagern mit Kreiselmoment

Es werden die Daten aus Tabelle 6.2 übernommen. Lediglich die Längen und Federsteifigkeiten werden verändert. Im ersten Element für Welle-masselos wird eine Länge von 0,3 m und im zweiten Element 0,7 m eingetragen. Weiter werden die Federsteifigkeiten  $c_{yy} = c_{zz} = 1 * 10^{10} \text{ Nm}$  gewählt. Sind die Trägheitsmomente  $\Theta_a$  und  $\Theta_p$  noch null so berechnet HydroVib die Eigenfrequenz zu  $834,08 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

Bei stillstehender Welle, also  $\Omega = 0$  und einer Schrägstellung der Rotorscheibe besitzt das System bereits eine weitere Eigenfrequenz. Wird für  $\Theta_a = 100 \text{ kgm}^2$  eingetragen so berechnet HydroVib zwei Eigenfrequenzen  $\omega_{krit1} = 559,746 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  und  $\omega_{krit2} = 1260,790 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

Rotiert der Läufer, so muss das polare Flächenträgheitsmoment  $\Theta_p$  beachtet werden. Die Eigenkreisfrequenzen sind nun nicht mehr konstant, sondern sind von der Drehzahl  $\Omega$  abhängig. Wird  $\Theta_p = 200 \text{ kgm}^2$  gesetzt und  $\Theta_a = 100 \text{ kgm}^2$  natürlich beibehalten so werden drei Eigenkreisfrequenzen berechnet  $\omega_{krit1} = 357,671 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ;  $\omega_{krit2} = 989,721 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  und  $\omega_{krit3} = 1139,170 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Um ein besseres Verständnis von der Lösung zu bekommen, wurde in Abbildung 6.8 ein

Campbell Diagramm mit HydroVib erstellt. An dem Punkt wo der Fahrstrahl eine Eigenfrequenzkurve schneidet, tritt bei dieser Drehzahl Resonanz auf. Die Steigung des Fahrstrahles hängt von der Erregung pro Umdrehung ab. Zum Beispiel besitzt der Fahrstrahl der Unwuchterregung die Steigung 1, da diese einmal pro Umdrehung auftritt.

Die berechneten Ergebnisse von der Eigenfrequenzberechnung also  $\omega_{krit1}$ ,  $\omega_{krit2}$  und  $\omega_{krit3}$  sind die Schnittpunkte mit dem Fahrstrahl bei einer Steigung von 1, gut ersichtlich im Diagramm. Wird die Steigung des Fahrstrahles erhöht so treten weitere Eigenfrequenzen auf. Es sei angenommen, dass die Scheibe eine Pelton-Turbine mit 4 Schaufeln sei, also die Steigung des Fahrstrahles ist 4. Die Schnittpunkte im Campbell Diagramm sind weitere Eigenfrequenzen  $\omega_{krit4} = 481,445 \frac{rad}{s}$ ;  $\omega_{krit5} = 679,557 \frac{rad}{s}$ ;  $\omega_{krit6} = 1196,966 \frac{rad}{s}$  und  $\omega_{krit7} = 1468,852 \frac{rad}{s}$ .

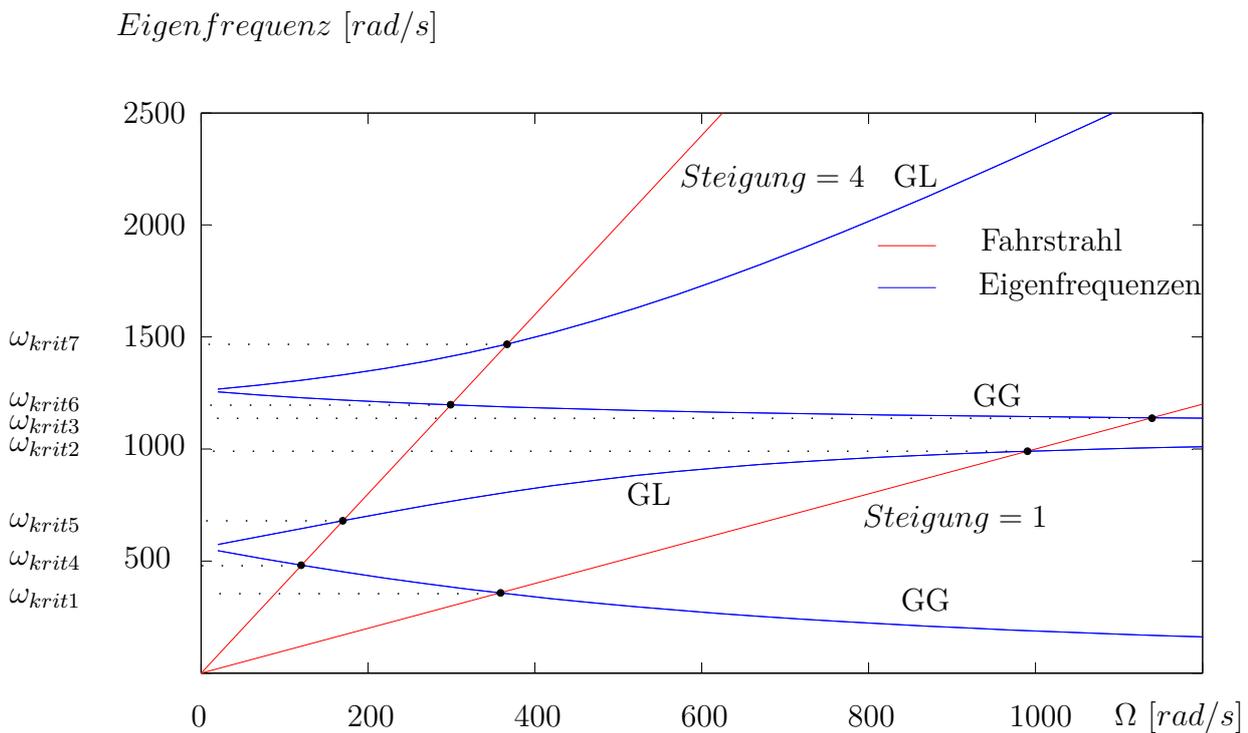
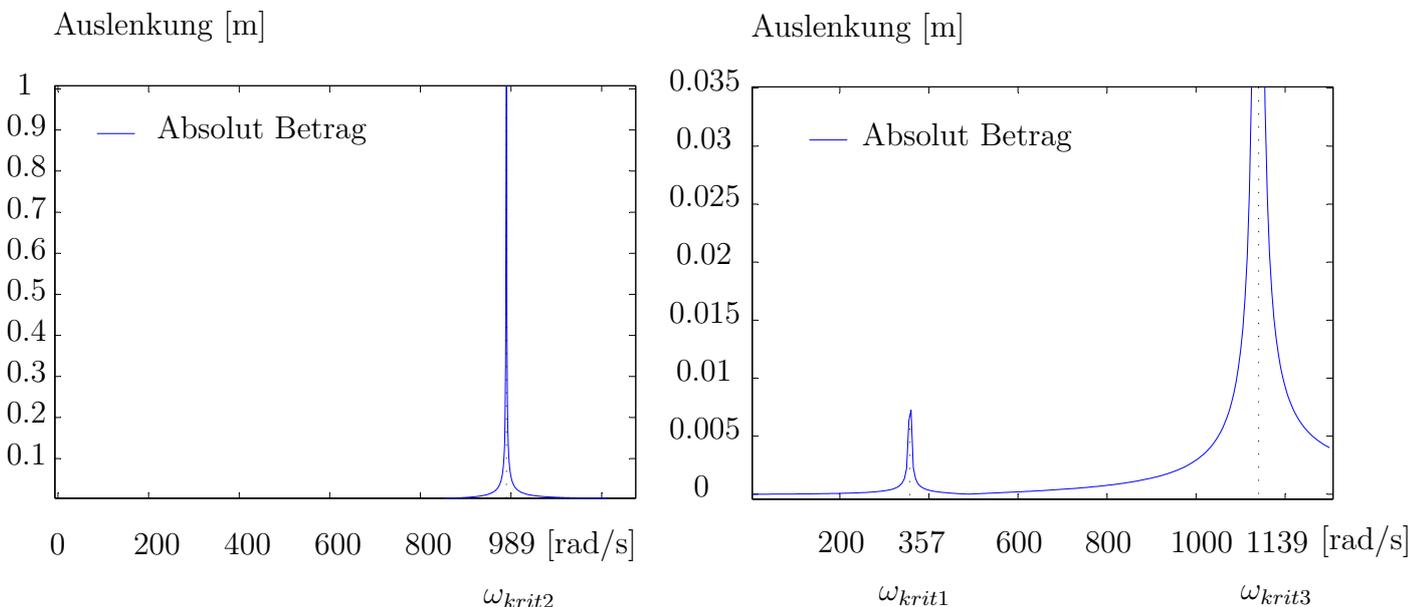


Abbildung 6.8: Campbell Diagramm - Fahrstrahl mit Steigung 1 und 4

Ist ein Kreiseffekt im System vorhanden so tritt ein weiterer Effekt auf. Da die

Eigenkreisfrequenzen nicht mehr konstant sind, treten bei Gleichlauferregung und Gegenlauferregung andere Eigenfrequenzen auf. Die in HydroVib im Menü Eigenfrequenz Berechnung oder Campbell Diagramm ermittelten Eigenfrequenzen sind also Lösungen von Gleichlauferregung und Gegenlauferregung. Welche Eigenkreisfrequenz nun bei Gleichlauf- oder Gegenlauferregung auftritt, kann ohne weitere Berechnungen nicht bestimmt werden.

Eine Möglichkeit der Identifizierung von Eigenfrequenz der Gleichlauferregung oder Gegenlauferregung bietet die Resonanzkurve. In Tabelle 6.2 beim Element Massenpunkt-reduziert befindet sich eine Eingabeoption GL welche für Gleichlauf steht. Wird die Resonanzkurve mit  $GL=1$  berechnet so sind ausschließlich die Eigenfrequenzen des Gleichlaufs mit einer Steigung von 1 sichtbar. Wählt man hingegen  $GL=-1$  so wird das System mit Gegenlauferregung mit einer Steigung von 1 durchgerechnet. Das linke Bild in Abbildung 6.9 ist das Ergebnis der Resonanzkurve des Systems mit  $GL=1$ . Eine Eigenkreisfrequenz der Gleichlauferregung beim Ausschlag  $\omega = 989 \frac{rad}{s}$  ist ersichtlich. Das rechte Bild zeigt die Resonanzkurve bei Gegenlauferregung also  $GL=-1$ . Hier können zwei Ausschläge bei  $\omega = 357 \frac{rad}{s}$  und  $\omega = 1139 \frac{rad}{s}$  der Gegenlauferregung beobachtet werden.



**Abbildung 6.9:** linkes Bild - Gleichlauferregung  $GL=1$  ; rechtes Bild - Gegenlauferregung  $GL=-1$

Zusammengefasst ergibt, dass  $\omega_{krit2}$  eine Eigenkreisfrequenz der Gleichlauferregung ist und  $\omega_{krit1}, \omega_{krit3}$  Eigenkreisfrequenzen der Gegenlauferregung sind.

Es wurden eventuell nicht alle Aspekte dieses Themas besprochen. Für eine gründliche Erklärung sei unbedingt auf Literatur [1] hingewiesen.

## 6.2 Torsionsschwingungen

### 6.2.1 Eingespannter masseloser Torsionsstab mit Scheibe

In diesem Beispiel soll überprüft werden, ob die Matrizen für einen masselosen Balken und einem Massenpunkt im Fall von Torsion korrekte Ergebnisse liefern.

In Abbildung 6.10 ist ein masseloser Balken mit Länge  $L = 1 \text{ m}$ ,  $G = 8,796 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$  und einem Durchmesser von  $D = 0,1 \text{ m}$  fest eingespannt. Auf der gegenüberliegenden Seite befindet sich eine Scheibe mit  $\Theta_p = 2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ . Die Berechnung der Eigenkreisfrequenz wurde aus Literatur [7] entnommen.

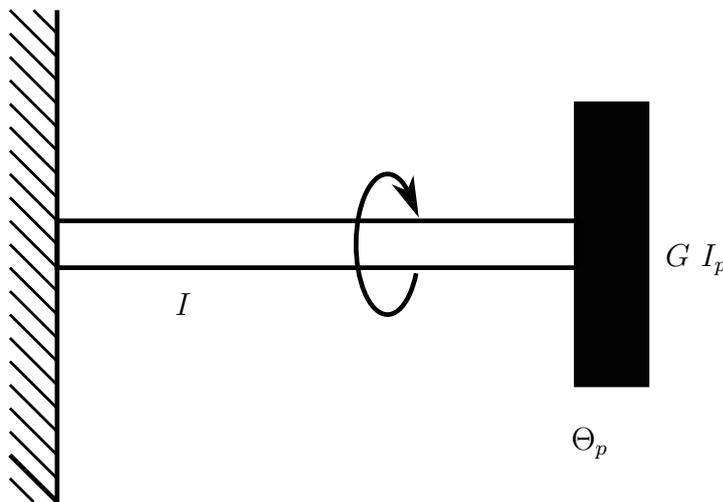


Abbildung 6.10: eingespannter masseloser Torsionsstab mit Scheibe

Mit dem Durchmesser wird zuerst das Torsionsträgheitsmoment  $I_T$  berechnet.

Für kreisförmige Querschnitte gilt  $I_T = I_p$ .

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad (6.2)$$

Mit der Formel für  $c_T$  lässt sich die Eigenfrequenz  $\omega$  bestimmen.

$$c_T = \frac{G I_T}{l} \quad \omega = \sqrt{\frac{c_T}{\Theta_p}} \quad (6.3)$$

Werden die Gleichungen mit den angegebenen Werten berechnet so erhält man eine Eigenfrequenz von  $\omega = 657,102 \frac{rad}{s}$ .

Tabelle 6.3 zeigt Werte die in das Datenblatt von HydroVib eingetragen wurden. Die Randbedingung sind für die linke Seite Winkel=0 und für die rechte Seite Moment=0. Wird das Datenblatt in HydroVib eingelesen und die Eigenkreis-

Massenpunkt-Torsion	$\Theta_p$	$c$	$d$	$Me$	$\varepsilon$
	2	0	0	0	0
Drehfeder-masselos-Torsion	$\varnothing_a$	$\varnothing_i$	$L$	$G - Modul$	$d$
	0,1	0	1	$8,8E + 10$	0

**Tabelle 6.3:** Daten für masselosen Balken und Scheibe

frequenz berechnet so erhält man  $\omega = 657,102 \frac{rad}{s}$ . Vergleicht man analytische Lösung mit der HydroVib ermittelten Eigenfrequenz so sind diese komplett ident.

### 6.2.2 Eingespannter massebehafteter Balken

In diesem Beispiel soll überprüft werden ob die Matrize für einen massebehafteten Balken im Fall von Torsion korrekte Ergebnisse liefert.

In Abbildung 6.11 ist ein einseitig eingespannter massebehafteter Balken dargestellt mit einer Länge  $L = 3 m$ ,  $G = 8,8 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2}$ ,  $\rho = 7850 \frac{kg}{m^3}$  und einem

Durchmesser von  $D = 0,1 \text{ m}$ . Die analytische Lösung lautet

$$\omega = \frac{\sqrt{G}}{2L} \rho (1 + 2n) \pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.4)$$

Werden nun die Werte in die analytische Lösung eingesetzt und die ersten vier Eigenfrequenzen ermittelt so erhält man  $\omega_0 = 1752,715 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $\omega_1 = 5258,145 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $\omega_2 = 8763,578 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $\omega_3 = 12268,006 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

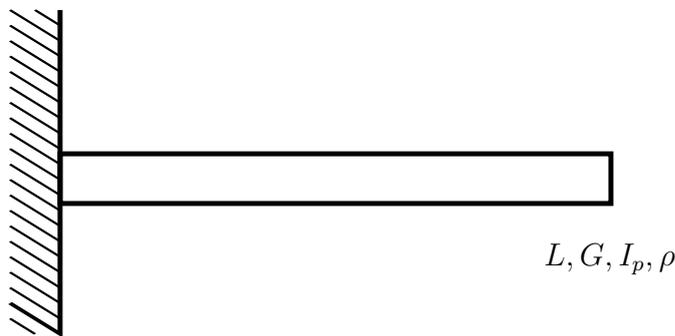


Abbildung 6.11: eingespannter massebehafteter Balken

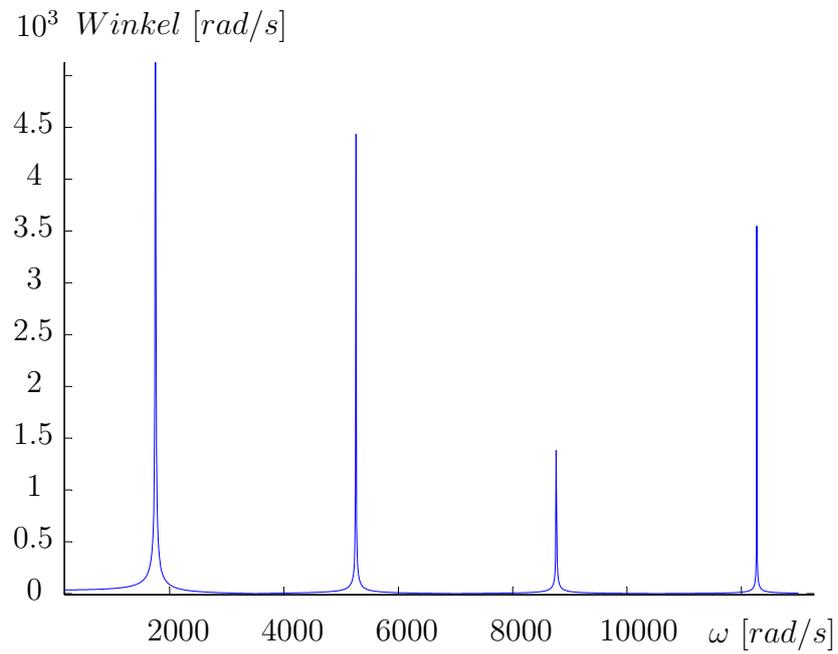
Werden nun die Daten von Tabelle 6.4 in HydroVib eingelesen und die Randbedingungen bestimmt zu, linke Seite Moment=0 und rechte Seite Winkel=0, können die Eigenkreisfrequenzen berechnet werden.

Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\varnothing_a$	$\varnothing_i$	$L$	$G - Modul$	$\rho$
	0,1	0	3	$8,8E + 10$	7850

Tabelle 6.4: Daten für massebehafteter Balken

Die ersten vier Eigenkreisfrequenzen sind  $\omega_0 = 1752,715 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $\omega_1 = 5258,145 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $\omega_2 = 8763,578 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $\omega_3 = 12268,006 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

Wird am rechten Ende ein erregendes Moment beaufschlagt so steigen die Amplituden erheblich an. In Abbildung 6.12 ist eine Resonanzkurve dargestellt, die mit HydroVib berechnet wurde. Gut ersichtlich sind die Ausschläge der Winkel, die bei den Eigenkreisfrequenzen gegen unendlich gehen.



**Abbildung 6.12:** Resonanzkurve eines massebehafteten Balken mit erregendem Moment

# 7 Bestimmung des rotordynamischen Verhaltens einer bestehenden Wasserkraftanlage

In diesem Kapitel wird eine bestehende Wasserkraftanlage abstrahiert und anschließend das rotordynamische Verhalten des Systems mittels HydroVib ermittelt. Um möglichst viele rotordynamische Eigenschaften einzubinden, soll ein Dreimaschinensatz also Generator, Turbine und Pumpe gewählt werden. Weitere Besonderheit dieser Maschinenkonstellation ist die Implementierung eines hydraulischen Wandler, welcher entscheidenden Einfluss auf das rotordynamische Verhalten hat.

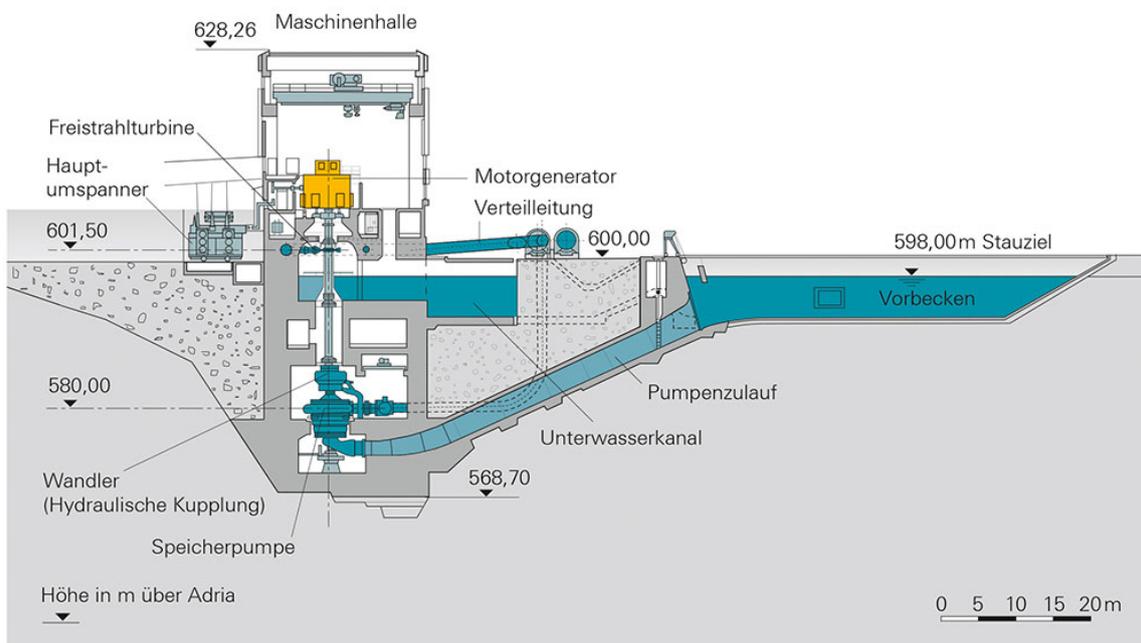


Abbildung 7.1: Querschnitt der Maschinenkaverne von Malta [8]

In Abbildung 7.1 ist ein Maschinensatz des Pumpspeicherkraftwerkes Malta

schematisch dargestellt. Der Motorgenerator mit einer Leistung von 220 MVA ist an der oberen Position des Maschinensatzes angebracht. Darunter befindet sich eine sechsdüsige Pelton-Turbine mit einer Leistung von 182,5 MW. Die Speicherpumpe kann mit dem hydraulischen Wandler an den Maschinensatz angeschlossen werden. Die Länge des gesamten Maschinensatzes wurde abgeschätzt zu ca. 30 m [9]. Dieser Maschinensatz von der Wasserkraftanlage Malta wäre durchaus geeignet für die folgende Berechnung.

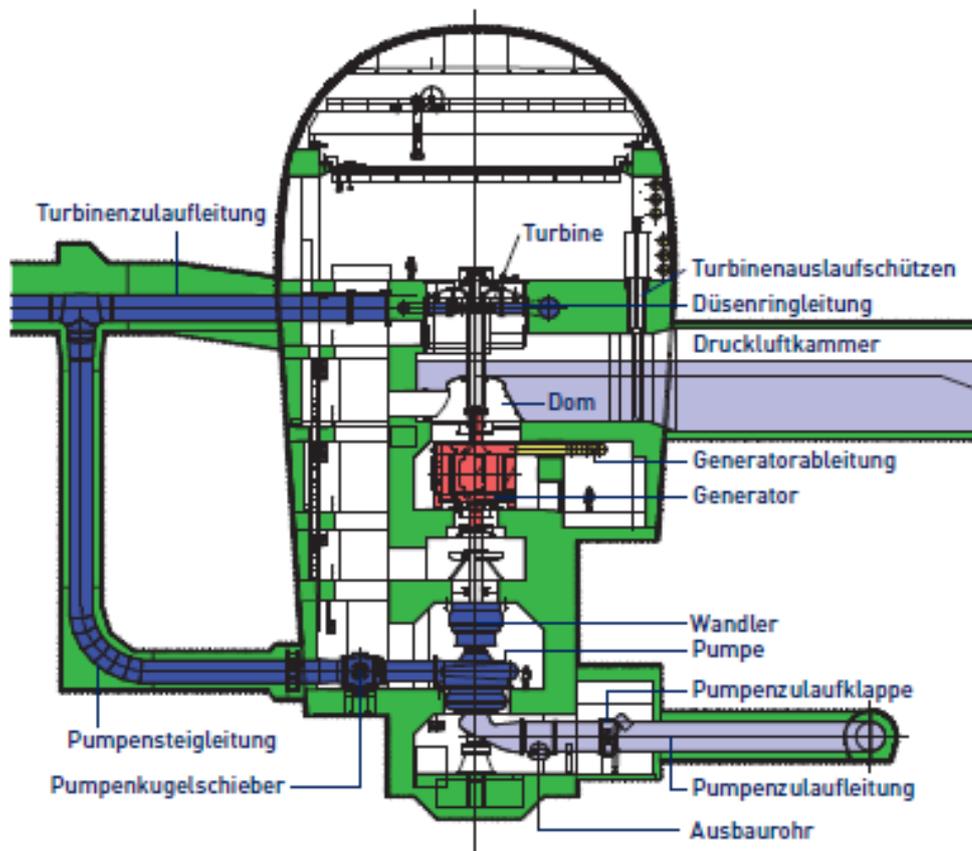


Abbildung 7.2: Querschnitt von Kops II [10]

Ausgewählt wurde jedoch das Pumpspeicherkraftwerke Kops II. Der Aufbau des Dreimaschinensatzes ist untypisch für Speicherkraftwerke, denn die Freistrahlturbine befindet sich über dem Generator, vergleiche Abbildung 7.2. Grund

dafür ist, dass der Luftverlust in der Druckluftwasserschlosskammer mit dieser Maschinenkonstellation sehr gering gehalten werden kann, was hohen Eigenbedarf und Betriebskosten senkt [11]. Es soll nun das rotordynamische Verhalten dieser außergewöhnlichen Bauweise überprüft werden. Eigenkreisfrequenzen und Eigenformen von Turbinenbetrieb und Pumpbetrieb sind zu ermitteln. Anschließend soll überprüft werden, ob bei einem Betriebsmodus die Erregerfrequenzen eine Resonanz hervorrufen.

## 7.1 Randbedingungen

Es wurden einige Vereinfachungen getroffen, da ohnehin keine genauen Daten von einem Maschinensatz der Kops II Anlage vorliegen und somit keine exakten Ergebnisse zu erwarten sind. Es sei jedoch erwähnt, dass für eine brauchbare Schwingungsberechnung alle Elemente bzw. Komponenten genauestens beschrieben werden müssen.

Bei den radialen Führungslagern wurden die mitrotierenden Massen und Massenträgheitsmomente nicht berücksichtigt. Auch Federsteifigkeiten der radialen Führungslager konnten nicht berechnet werden. In Literatur [5] wurde für ein reales rotierendes Modell eine Federsteifigkeit bei den radialen Lagern in der Größenordnung von ca.  $5 \cdot 10^8$  angenommen. Für Kops II wird vermutet dass die Federsteifigkeit bei der radialen Lagerung größer ist, als die aus der Literatur.

Beim Generator (Joch und Pole) und Turbine (Laufrad) wird die Masse auf einen Punkt reduziert. Massenschwerpunkte wurden mittig der beiden Komponenten angenommen. Um die Steifigkeit von Länge der Turbine und Generator nicht zu vernachlässigen, werden masselose Balkenelemente eingefügt. Ergänzend sei darauf hingewiesen, dass massebehaftete Balkenelemente nicht verwendet werden dürfen, da die Masse der Balkenelemente bereits in der Masse für Generator und Turbine enthalten sind.

Der Angriffspunkt des Massenschwerpunktes von Spurlager, Wandler oben, Wandler unten und Pumpenlaufräder wurde mittig gewählt. Um die Steifigkeit von Länge dieser Komponenten zu berücksichtigen, werden massebehaftete Balkenelemente eingefügt. Es dürfen keine masselosen Balkenelemente benutzt werden, da die Masse der Balken nicht in der Masse der jeweiligen Komponente

enthalten ist.

Die mitrotierenden Wassermassen bei der mehrstufigen Radialpumpe konnten nicht integriert werden da keine vernünftige Literatur gefunden wurde. Alle weiteren Berechnungen und Annahmen befinden sich im Anhang 9.3.

Hinweis: Für Komponenten wie Spurlager oder Pumpenlaufrad, die nicht direkt mit der Welle verbunden sind, also keine Momente und Kräfte übertragen und nur mitrotieren, ist zu empfehlen, dass vor und nach diesen Komponenten massebehafete Balkenelemente verwendet werden. Natürlich sind die Massen dieser Bauteile dann ohne der dementsprechenden Wellenmasse zu berücksichtigen.

Anders ist dies jedoch beim Laufrad oder Generator. Diese Elemente sind direkt mit der Welle verbunden. Sie übertragen Kräfte und Momente von einer Seite bis zur anderen. Hier sind masselose Balkenelemente für die Länge dieser Komponenten zu empfehlen.

### **Skizze eines Maschinensatzes von Kops II**

Mit allen gegebenen bzw. berechneten Daten, die im Anhang 9.3 vorzufinden sind, wurde eine Skizze eines Maschinensatzes von Kops II angefertigt. In den Berechnungen wurden nahezu keine Längen des Maschinensatzes bestimmt. Alle verwendeten Längen wurden aus Abbildung 7.2 abgeschätzt.

Die Skizze in Abbildung 7.3 umfasst alle notwendigen Daten um eine Schwingungsberechnung des stark reduzierten und vereinfachten Modelles durchzuführen.

Es sei erwähnt, dass die mit HydroVib ermittelten Ergebnisse nicht mit der bestehenden Wasserkraftanlage Kops II übereinstimmen. Um korrekte Ergebnisse zu erhalten, müssten alle Eigenschaften der Anlage genauestens bekannt sein und dies trifft nicht zu.

## **7.2 Berechnungen der Biegeschwingungen**

Zuerst wird das rotordynamische Verhalten des Maschinensatzes für Biegeschwingungen ermittelt, dabei wird folgendermaßen vorgegangen: Es werden in einem definierten Frequenzbereich alle Eigenfrequenzen und deren zugehörige

KAPITEL 7. BESTIMMUNG DES ROTORDYNAMISCHEN VERHALTENS EINER BESTEHENDEN WASSERKRAFTANLAGE

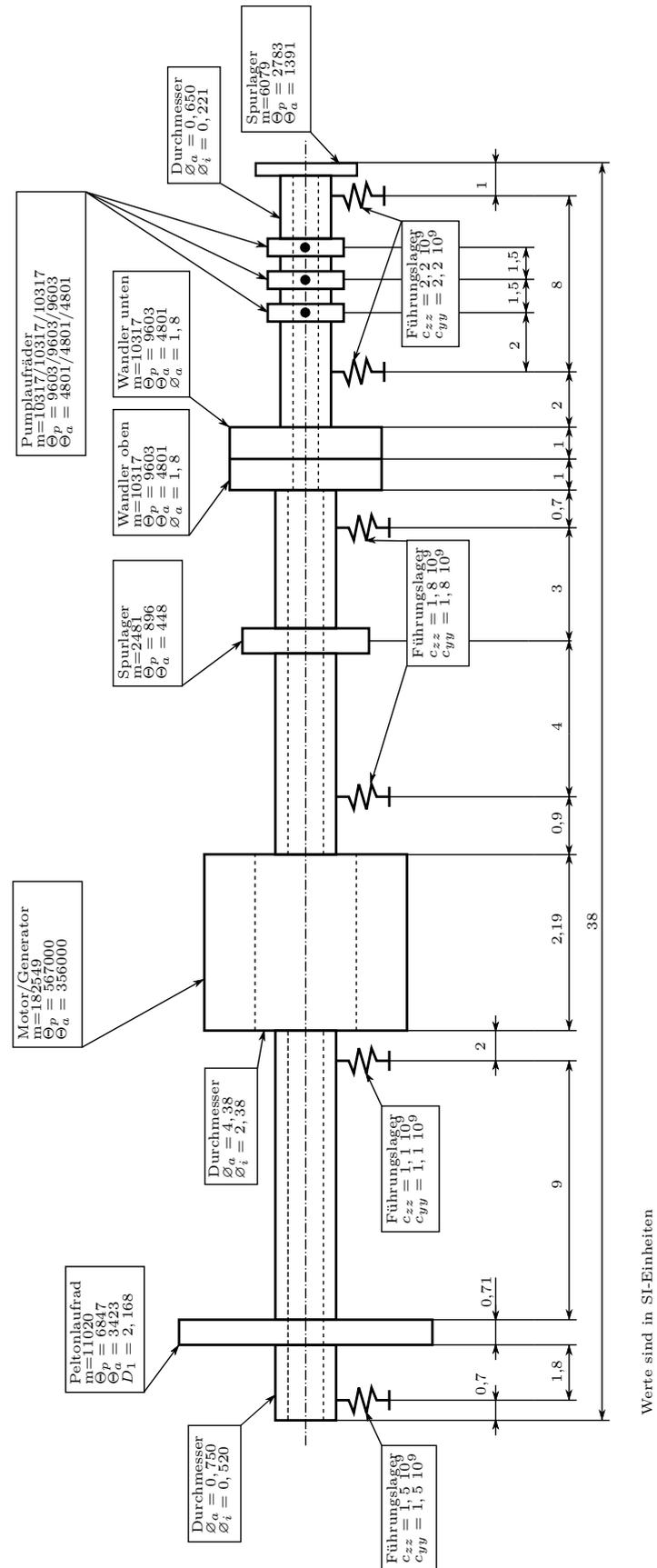


Abbildung 7.3: schematische Skizze eines Maschinensatzes von Kops II

Eigenformen berechnet. Anschließend wird bestimmt, welche Eigenfrequenzen des Gleichlaufs bzw. des Gegenlaufs sind. Im Campbell Diagramm wird untersucht, ob eine Erregerfrequenz einen Resonanzbetrieb hervorruft.

Diese Vorgehensweise muss für den Turbinenbetrieb und Pumpbetrieb durchgeführt werden. Im Anhang befinden sich die verwendeten bzw. eingelesenen Daten.

### 7.2.1 Turbinenbetrieb

Zum Turbinenbetrieb gehören alle Komponenten von der Turbine bis zum "Wandler oben". Die daraus resultierenden Daten (siehe Anhang „Datenblatt: Turbinenbetrieb Biegung“) werden in HydroVib eingelesen. Folgende Randbedingungen wurden gewählt.

Linke Randbedingung	Moment=0	Querkraft=0
Rechte Randbedingung	Moment=0	Querkraft=0
Startvektor $x_0$	$w_1=0.01$	

**Tabelle 7.1:** Randbedingungen

In HydroVib werden nun im Menü „Eigenfrequenz Berechnung“ mit folgenden Optionen die Eigenfrequenzen berechnet.

Startwert Omega	0
Endwert Omega	1000
Schrittweite	1
Genauigkeit	0,001

**Tabelle 7.2:** Eigenfrequenzen - Optionen

Um im Campbell Diagramm die Eigenkreisfrequenzen der GL- und GG-Erregungen zu bestimmen, wurde ein Endwert Omega von 1000 rad/s gewählt.

Um sicherzustellen, dass der Algorithmus zur Identifizierung von Nullstellen alle Lösungen gefunden hat, wurde der Determinantenverlauf mit der Zoomfunktion auf ungewöhnliche Stellen überprüft. Gegebenenfalls muss bei Verdacht auf weitere Nullstellen die Schrittweite verkleinert und der Suchbereich angepasst

werden. In Tabelle 7.3 wurden anschließend alle gefundenen Eigenkreisfrequenzen eingetragen.

Ordnung	Eigenkreisfrequenz			Ordnung	Eigenkreisfrequenz		
	[rad/s]	[U/min]	[Hz]		[rad/s]	[U/min]	[Hz]
1.	90,34	863	14,4	10.	275,93	2635	43,9
2.	92,88	887	14,8	11.	276,9	2644	44,1
3.	94,742	905	15,1	12.	478,83	4572	76,2
4.	102,96	983	16,4	13.	531,75	5078	84,6
5.	106,73	1019	17,0	14.	561,72	5364	89,4
6.	122,33	1168	19,5	15.	747,89	7142	119,0
7.	125,97	1203	20,0	16.	803,19	7670	127,8
8.	255,59	2441	40,7	17.	873,524	8342	139,0
9.	256,27	2447	40,8	18.	989,67	9451	157,5

**Tabelle 7.3:** Eigenkreisfrequenzen im Turbinenbetrieb für Biegeschwingungen

Die zugehörigen Eigenformen wurden in Abbildungen 7.4 und 7.5 dargestellt. Gut ersichtlich sind die Auslenkungen bei den verschiedenen Eigenformen.

KAPITEL 7. BESTIMMUNG DES ROTORDYNAMISCHEN VERHALTENS EINER  
BESTEHENDEN WASSERKRAFTANLAGE

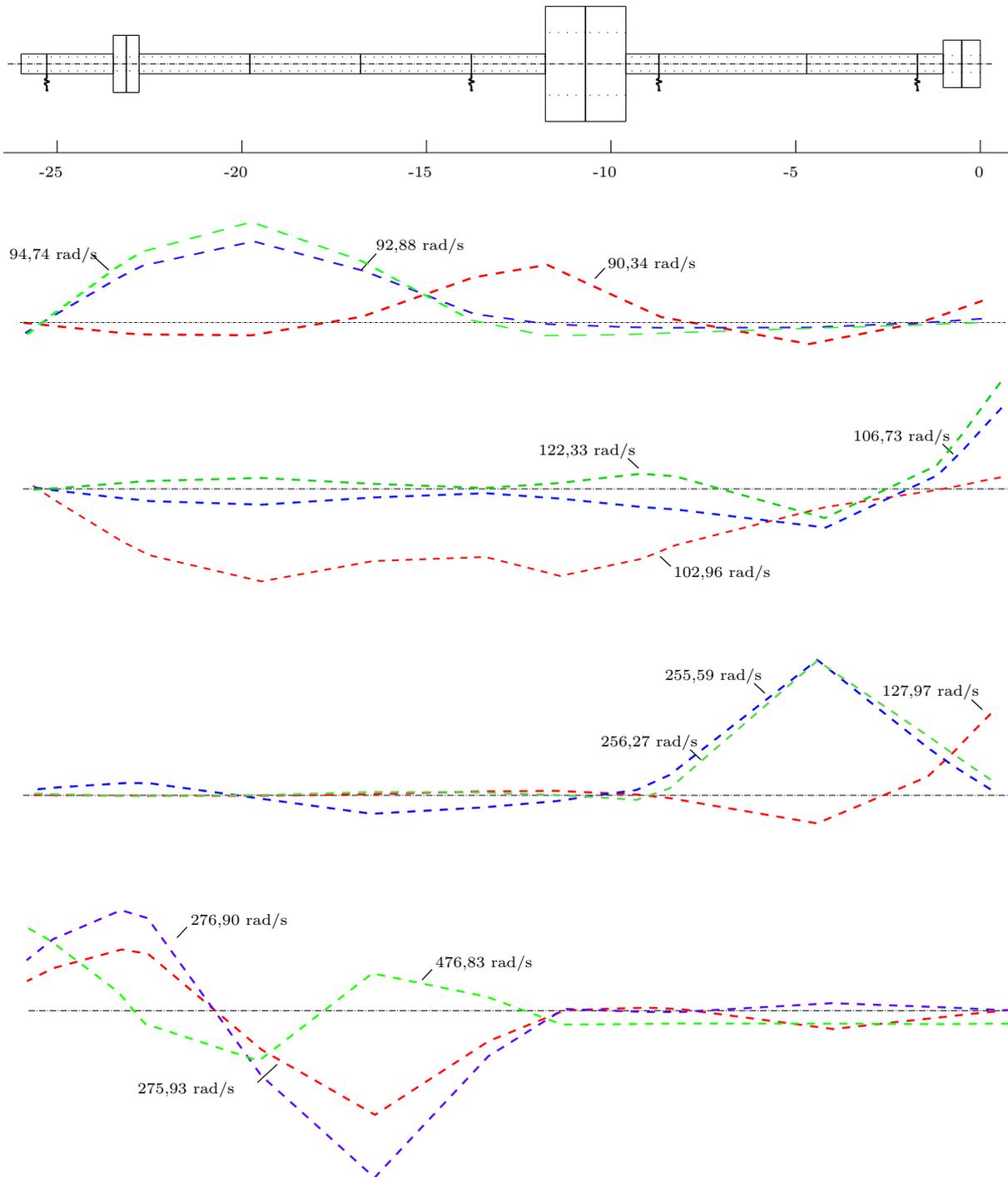
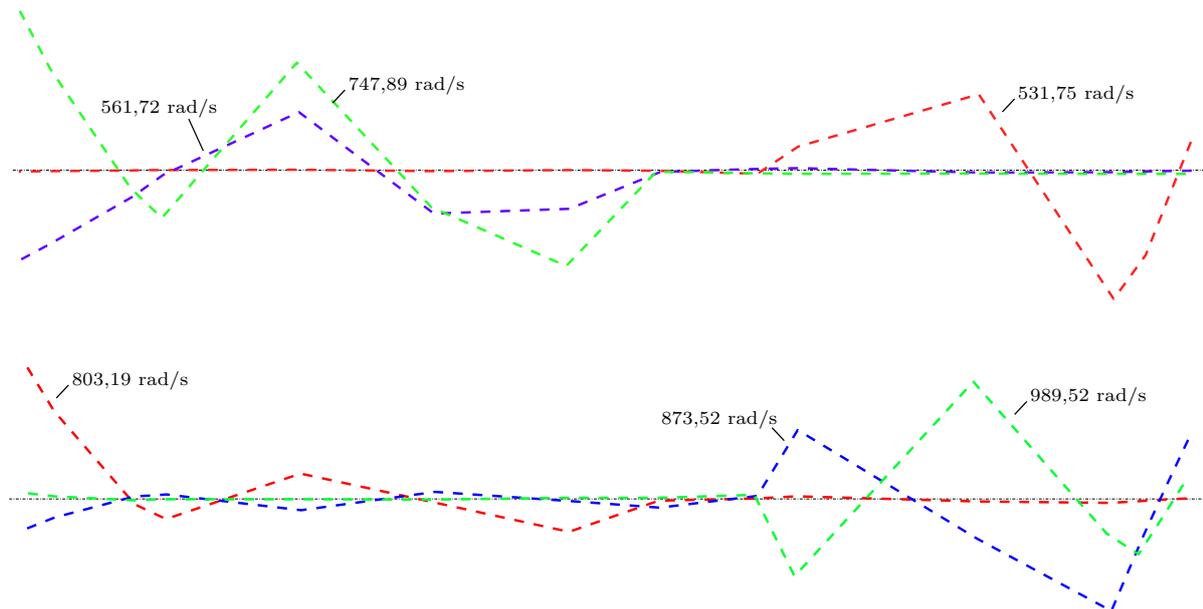


Abbildung 7.4: Eigenformen im Turbinenbetrieb für Biegeschwindigkeiten



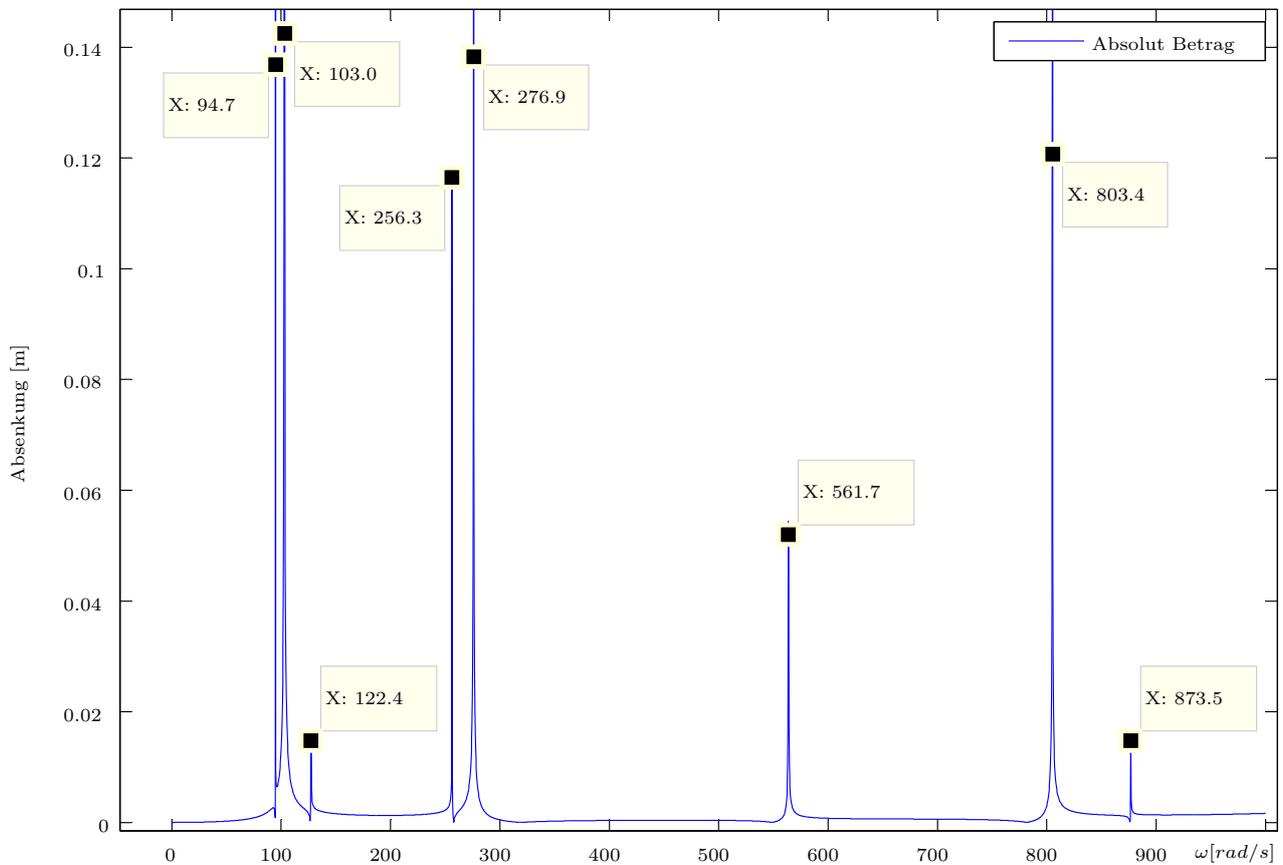
**Abbildung 7.5:** weitere Eigenformen im Turbinenbetrieb für Biegeschwindigkeiten

Es sollen die Eigenkreisfrequenzen der Gleichlauf- und Gegenläuferregung extrahiert werden. In der Resonanzkurve sind nur die Eigenkreisfrequenzen der Gleichläuferregung sichtbar, wenn in den eingelesenen Daten jedes Massenelement mit einer Exzentrizität und einer Gleichläuferregung von 1 versehen ist. In Tabelle 7.4 sind die verwendeten Optionen von der Berechnung der Resonanzkurven eingetragen. Es wird eine sehr kleine Schrittweite empfohlen, da dies die Identifizierung von den Eigenkreisfrequenzen gewährleistet.

Startwert Omega	0
Endwert Omega	1000
Schrittweite	0,1
Genauigkeit	0,001

**Tabelle 7.4:** Resonanzkurve - Optionen

In Abbildung 7.6 sind Ausschläge bei den Eigenkreisfrequenzen der Gleichläuferregung sichtbar.



**Abbildung 7.6:** Resonanzkurve von Kops II im Turbinenbetrieb - Gleich-  
lauferregung und Exzentrizität

Werden nun nur die Eigenkreisfrequenzen aus der vorherigen Abbildung herangezogen, so erhält man in Tabelle 7.5 nur die Eigenkreisfrequenzen der Gleichlauferregung.

KAPITEL 7. BESTIMMUNG DES ROTORDYNAMISCHEN VERHALTENS EINER  
BESTEHENDEN WASSERKRAFTANLAGE

---

Ordnung	Eigenkreisfrequenz des GL			Ordnung	Eigenkreisfrequenz des GL		
	[rad/s]	[U/min]	[Hz]		[rad/s]	[U/min]	[Hz]
1.	94,74	905	15,1	5.	276,90	2644	44,1
2.	102,96	983	16,4	6.	561,72	5364	89,4
3.	122,33	1203	20,0	7.	803,19	7670	127,8
4.	256,27	2447	40,8	8.	873,52	8342	139,0

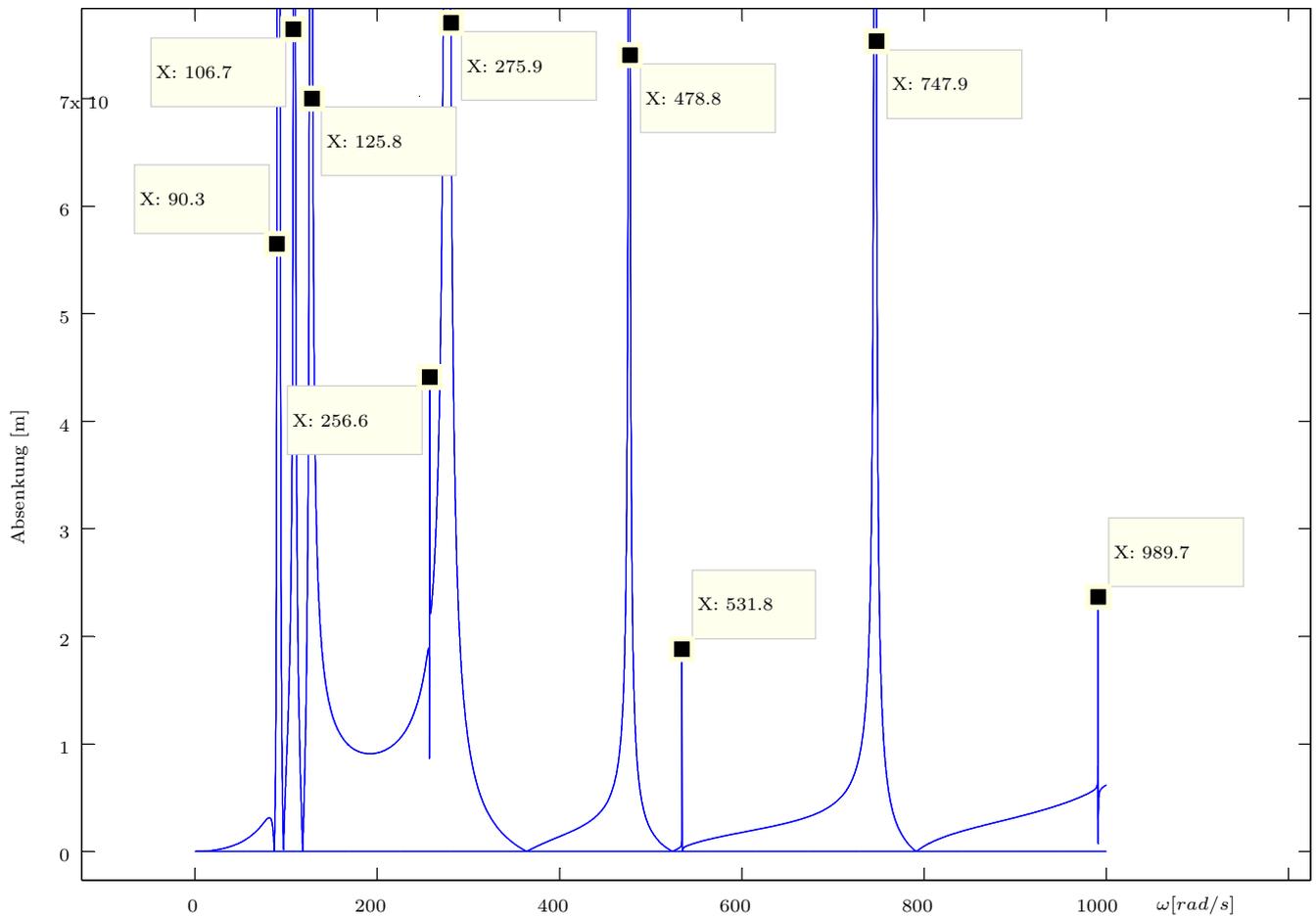
**Tabelle 7.5:** Eigenkreisfrequenzen der GL-Erregung im Turbinenbetrieb  
für Biegeschwingungen

Sollen die Eigenkreisfrequenzen der Gegenlauferregung berechnet werden, so müssen alle Massenelemente mit einer Exzentrizität und Gleichlauferregung von -1 (also Gegenlauferregung) versehen werden. In Abbildung 7.7 wurde mit der zuvor verwendeten Option die Resonanzkurve bestimmt. Die Ergebnisse wurden in Tabelle 7.6 eingetragen.

Ordnung	Eigenkreisfrequenz des GG			Ordnung	Eigenkreisfrequenz des GG		
	[rad/s]	[U/min]	[Hz]		[rad/s]	[U/min]	[Hz]
1.	90,34	863	14,4	6.	275,93	2635	43,9
2.	92,88	887	14,8	7.	478,83	4572	76,2
3.	106,73	1019	17,0	8.	531,75	5078	84,6
4.	125,97	1168	19,5	9.	747,89	7142	118,0
5.	255,59	2441	40,7	10.	989,67	9451	157,5

**Tabelle 7.6:** Eigenkreisfrequenzen der GG-Erregung im Turbinenbetrieb  
für Biegeschwingungen

-3



**Abbildung 7.7:** Resonanzkurve von Kops II im Turbinenbetrieb - Gegenlauferregung und Exzentrizität

Da nun alle Eigenkreisfrequenzen für Biegeschwingungen im Turbinenbetrieb bis  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$  bekannt sind, muss nun kontrolliert werden, ob Resonanz auftritt. Mit den Ergebnissen von der Berechnung des Campbell Diagrammes aus Hydro-Vib, wurde die Abbildung 7.8 erstellt. Die verwendeten Optionen der Berechnung für das Campbell Diagramm wurden in Tabelle 7.7 eingetragen.

Startwert Eigenfrequenz	0	Startwert Omega	30
Endwert Eigenfrequenz	1450	Endwert Omega	1000
Schrittweite	1	Schrittweite	30
Genauigkeit	0,001		

**Tabelle 7.7:** Campbell Diagramm - Optionen

Im schraffierten Bereich traten so viele Eigenkreisfrequenzkurven auf, dass eine übersichtliche Darstellung nicht mehr gewährleistet werden konnte. Dieser Bereich wurde daher aus dem Diagramm entfernt. Bei manchen Eigenkreisfrequenzkurven konnte die Kurve nicht fortgeführt werden, da der Algorithmus der Nullstellensuche keine Lösungen fand.

Die Schnittpunkte des Anfahrstrahles mit einer Steigung von eins und den Eigenkreisfrequenzkurven sind bereits die bekannten Lösungen aus Tabelle 7.3. Die durchgehend linierten Kurven sind Eigenkreisfrequenzen der Gleichlauferregung, hingegen sind die strichlierten Linien die Eigenkreisfrequenzen der Gegenlauferregung.

Im Turbinenbetrieb verursacht der Wasserstrahl von der Düse Biegeschwingungen. Der Wasserstrahl trifft pro Umdrehung auf 20 Becher des Peltonlaufrades. Die Steigung des Anfahrstrahles ist somit 20. Die Schnittpunkte des Anfahrstrahles mit einer Steigung von 20 und den Eigenkreisfrequenzkurven sind also weitere Resonanzbetriebe. Interessant ist, dass ein Schnittpunkt sehr nahe der Nenndrehzahl liegt. Es wird demnach im Auslegungspunkt des Turbinenbetriebs Resonanz auftreten.

Es konnte nicht festgestellt werden, ob bei Durchgangsdrehzahl mit einer Gleichlauferregung von 20, eine Resonanz hervortritt, da das Diagramm endet. Hydro-Vib stößt in diesem Modell ab einer Eigenkreisfrequenzsuche von 1200 rad/s an seine Grenzen. Bestätigt kann dies durch den Determinantenverlauf werden, der ungewöhnliche Werte aufweist.

Der Anfahrstrahl des zweiten und dritten Drehklanges der Bechererregung wurden im Campbell Diagramm nicht mehr eingefügt, da ohnehin keine Ergebnisse für so hohe Eigenkreisfrequenzen bei Nenndrehzahl bzw. Durchgangsdrehzahl vorliegen.

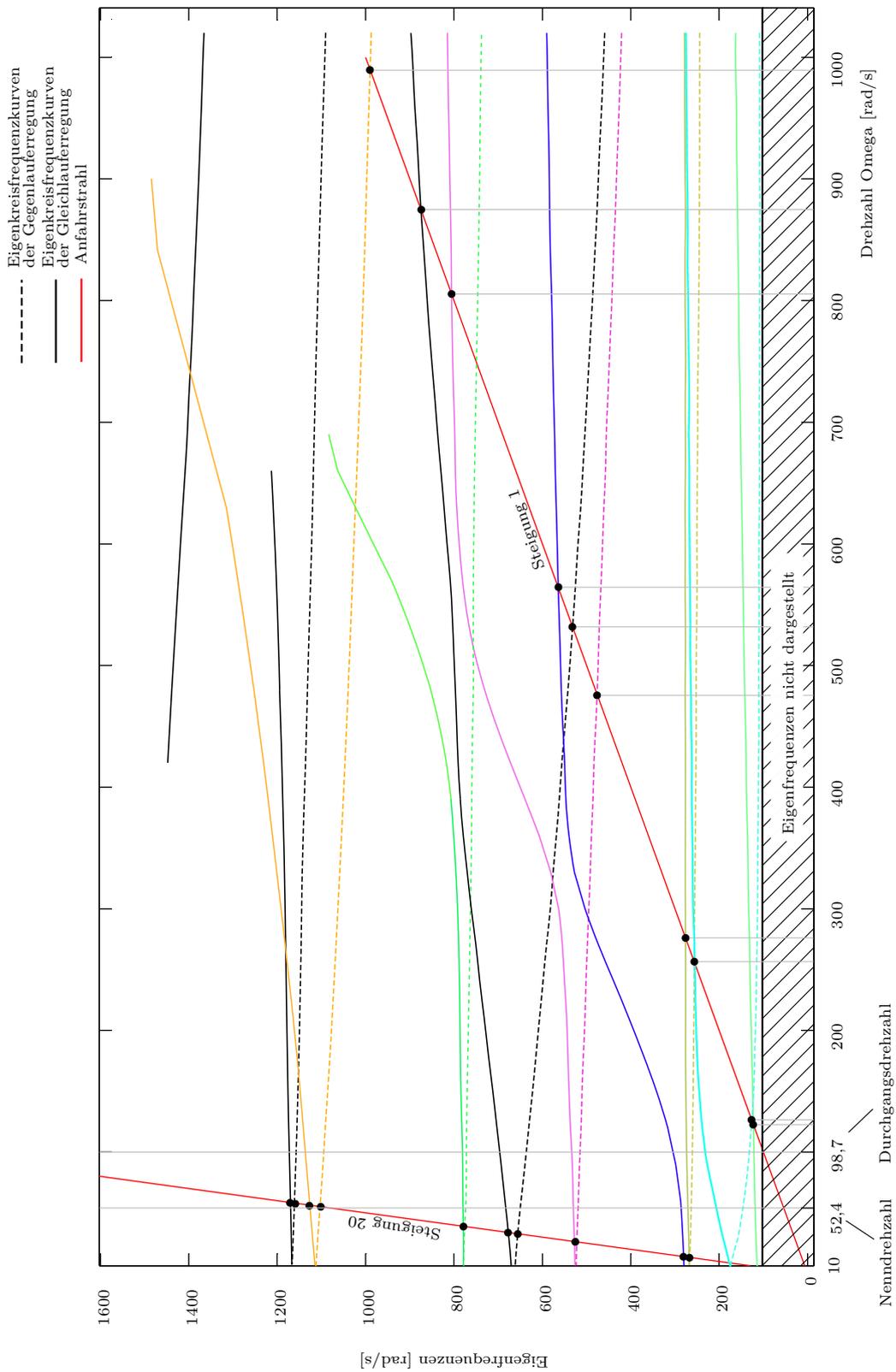


Abbildung 7.8: Campbell Diagramm

## 7.2.2 Pumpbetrieb

Zum Pumpbetrieb gehört der gesamte Maschinensatz. Die Daten im „Datenblatt: Pumpbetrieb Biegung“ aus dem Anhang, wurden in HydroVib eingelesen. Interessant wird sein, wie sich der Maschinensatz beim Übergang zwischen den Pumpenstrang und Turbinenstrang verhält, da hier ein hydraulischer Wandler implementiert wurde. An dieser Stelle wurde angenommen das die Absenkung vor und nach dem hydraulischen Wandler gleich ist, aber es werden unterschiedliche Winkel erwartet. Außerdem wurde angenommen, dass keine Querkraft und kein Biegemoment übertragen werden kann. Die Randbedingungen wurden identisch wie bei der Ermittlung von Biegeschwingungen im Turbinenbetrieb gewählt. Folgende Optionen wurden bei der Berechnung von den Eigenkreisfrequenzen verwendet.

Startwert Omega	0
Endwert Omega	1000
Schrittweite	1
Genauigkeit	0,01

**Tabelle 7.8:** Eigenfrequenzen - Optionen

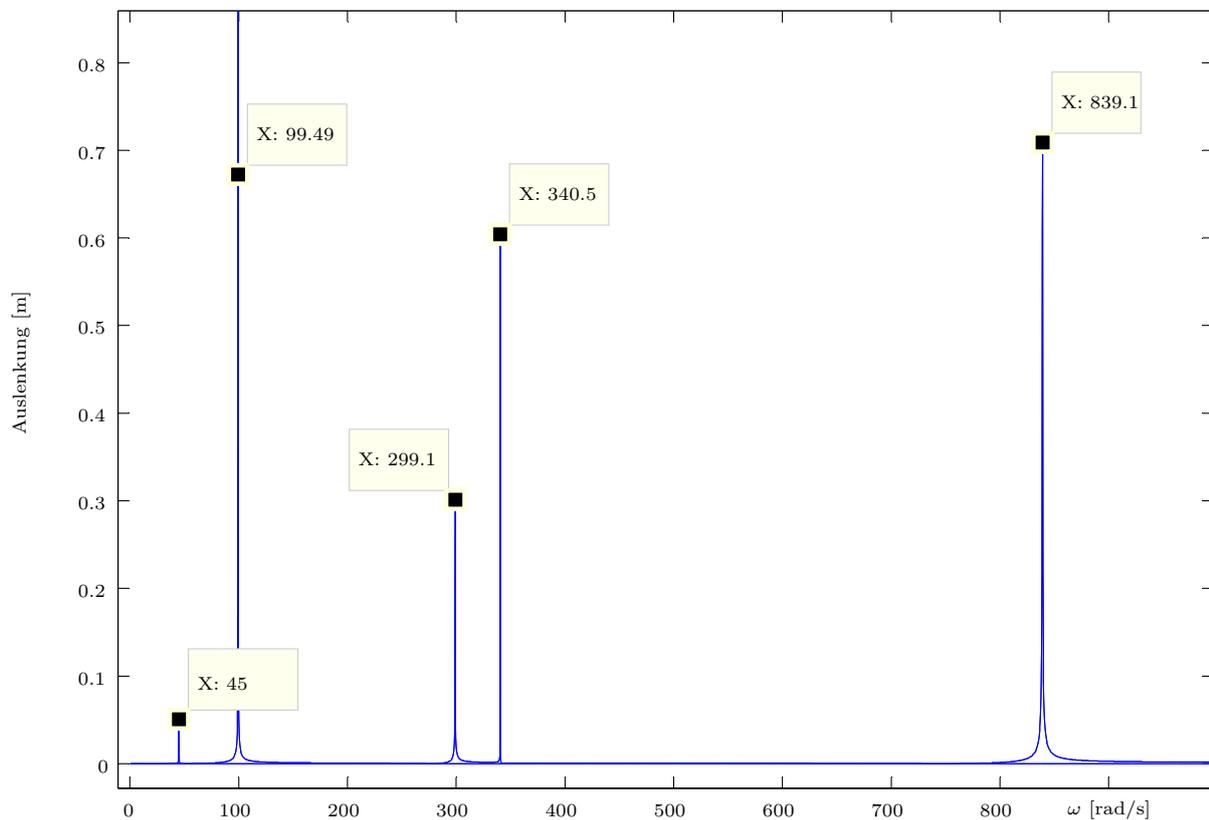
Die gefunden Eigenkreisfrequenzen sind in Tabelle 7.9 ersichtlich. Es wurden bereits die Eigenkreisfrequenzen für Gleichlauf- und Gegenlauferregung, die in der kommenden Berechnung evaluiert werden, eingetragen. Die Eigenkreisfrequenzen aus Tabelle 7.3 vom Turbinenbetrieb, sind natürlich in Tabelle 7.9 enthalten.

Ordnung	Eigenkreisfrequenz			Ordnung	Eigenkreisfrequenz		
	[rad/s]	[U/min]	[Hz]		[rad/s]	[U/min]	[Hz]
1.O. GG	42,89	410	6,8	16.O. GL	276,9	2644	44,1
2.O. GL	45,09	431	7,2	17.O. GG	287,49	2745	45,8
3.O. GG	90,34	863	14,4	18.O. GL	299,04	2856	47,6
4.O. GG	92,88	887	14,8	19.O. GL	340,5	3252	54,2
5.O. GL	94,74	905	15,1	20.O. GG	389,36	3718	62,0
6.O. GG	94,80	905	15,1	21.O. GG	458,68	4380	73,0
7.O. GL	99,57	951	15,8	22.O. GG	478,83	4572	76,2
8.O. GL	102,9	983	16,4	23.O. GG	531,75	5078	84,6
9.O. GG	106,73	1019	17,0	24.O. GG	557,69	5326	88,8
10.O. GL	122,32	1168	19,5	25.O. GL	561,72	5364	89,4
11.O. GG	125,97	1203	20,0	26.O. GG	747,89	7142	119,0
12.O. GG	235,8	2252	37,5	27.O. GL	803,19	7670	127,8
13.O. GG	255,59	2441	40,7	28.O. GL	838,97	8012	133,5
14.O. GL	256,27	2447	40,8	29.O. GL	873,52	8342	139,0
15.O. GG	275,93	2635	43,9	30.O. GG	989,67	9451	157,5

**Tabelle 7.9:** Eigenkreisfrequenzen im Pumpbetrieb für Biegeschwingungen

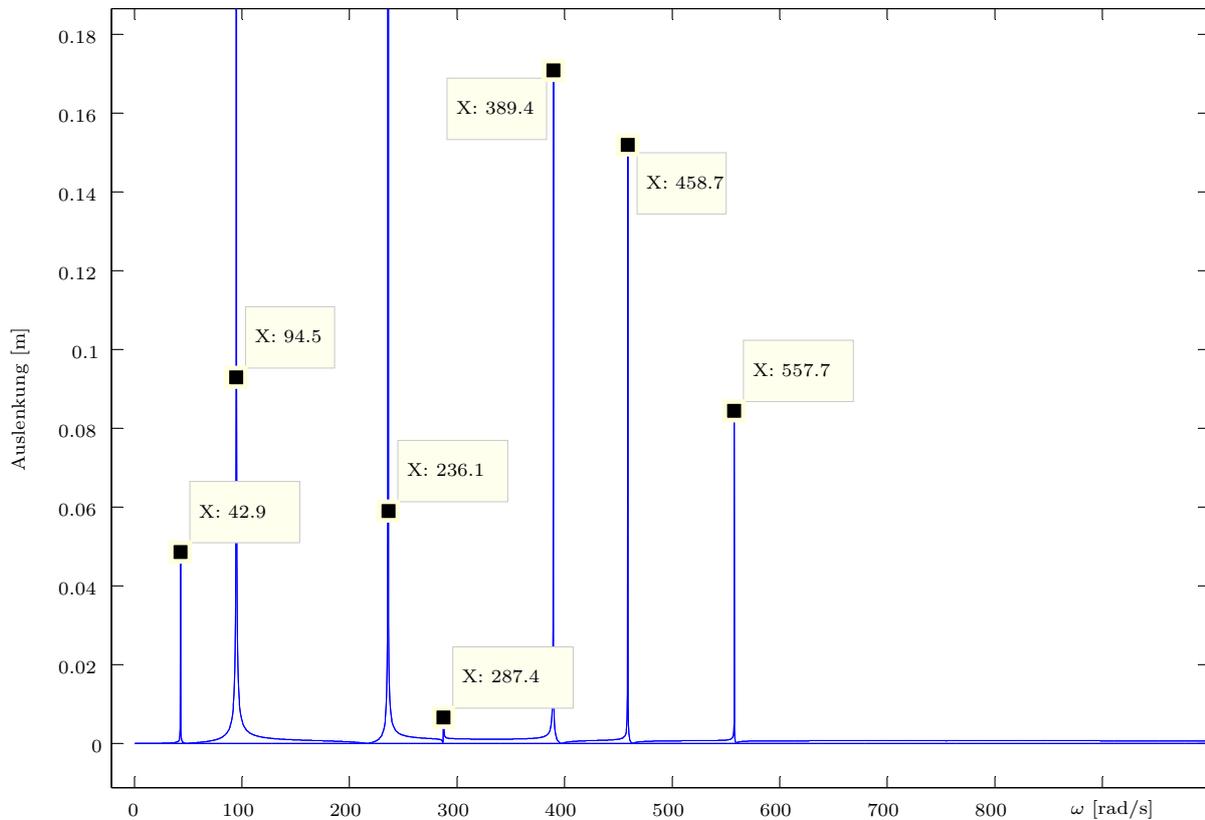
Es werden die Eigenkreisfrequenzen der Gleichlauf- und Gegenläuferregung extrahiert. Leider ist es mit HydroVib nicht ohne weiteres möglich eine Resonanzkurve zu erstellen, wenn ein hydraulischer Wandler im System implementiert ist. Da aber angenommen wurde, dass beim Übergangspunkt keine Querkraft und Biegemoment existiert, kann an dieser Stelle das System getrennt werden. Es wird eine Resonanzkurve von Pumpe bis "Wandler unten" und eine von "Wandler oben" bis Turbine erstellt. Anschließend können die Eigenkreisfrequenzen der GG- und GL - Erregung identifiziert werden. In Abbildung 7.9 und 7.10 sind die Resonanzkurven für das getrennte System von Pumpe bis „Wandler unten“ ersichtlich. Die Resonanzkurven von „Wandler oben“ bis Turbine sind dieselben wie in Abbildung 7.6 und 7.7. Man beachte, dass in den eingelesenen Daten bei jedem Massenelement eine Exzentrizität und eine GL-Erregung von 1 (Resonanzkurve für Gleichläufer-

regung) bzw. -1 (Resonanzkurve für Gegenlauferregung) eingetragen sein muss. Verwendete Optionen wie zuvor bei Turbinenbetrieb. Die Daten im „Datenblatt: Turbine Biegung“ und „Datenblatt: Pumpe Biegung“ aus dem Anhang wurden für die Berechnung verwendet.



**Abbildung 7.9:** Resonanzkurve der Pumpe von Kops II im Pumpbetrieb - Gleichlauferregung

Die Eigenkreisfrequenzen der Gleichlauferregung und der Gegenlauferregung, die in den Abbildungen gut zu erkennen sind, wurden in Tabelle 7.9 eingetragen. Es konnten somit alle Eigenkreisfrequenzen der Gleichlauf- bzw. Gegenlauferregung bestimmt werden.



**Abbildung 7.10:** Resonanzkurve der Pumpe von Kops II im Pumpbetrieb  
- Gegenlauferregung

Um zu überprüfen ob Resonanz im Pumpbetrieb auftritt wurde ein Campbell Diagramm erstellt. Das Diagramm wurde in den Abbildungen 7.11, 7.12 und 7.13 eingefügt. Der Anfahrstrahl mit einer Steigung von 1 rührt von der Unwuchterregung her. Die Anzahl der Schaufeln der Pumpe erzeugt einen Anfahrstrahl mit einer Steigung von 7. Wird der zweite Drehklang berücksichtigt, so erhält man einen weiteren Anfahrstrahl mit einer Steigung von 14.

In Abbildung 7.13 ist ersichtlich, dass der Anfahrstrahl mit einer Steigung von eins, zwei Eigenkreisfrequenzkurven unter der Nenndrehzahl schneidet. Das System oder dessen Eigenschaften sollten so verändert werden, dass die erste Eigenkreisfrequenz mit ausreichendem Abstand, über dem Betriebsmodus liegt.

In der Abbildung 7.12 ist ersichtlich, dass der Anfahrstrahl mit einer Steigung von sieben, eine Resonanz hervorrufen könnte. Denn  $\omega_1$  ist nahe der Nenndrehzahl. Der Anfahrstrahl mit einer Steigung von 14 ruft im Auslegungspunkt mehrere Resonanzen hervor, wie in Abbildung 7.11 erkenntlich ist.

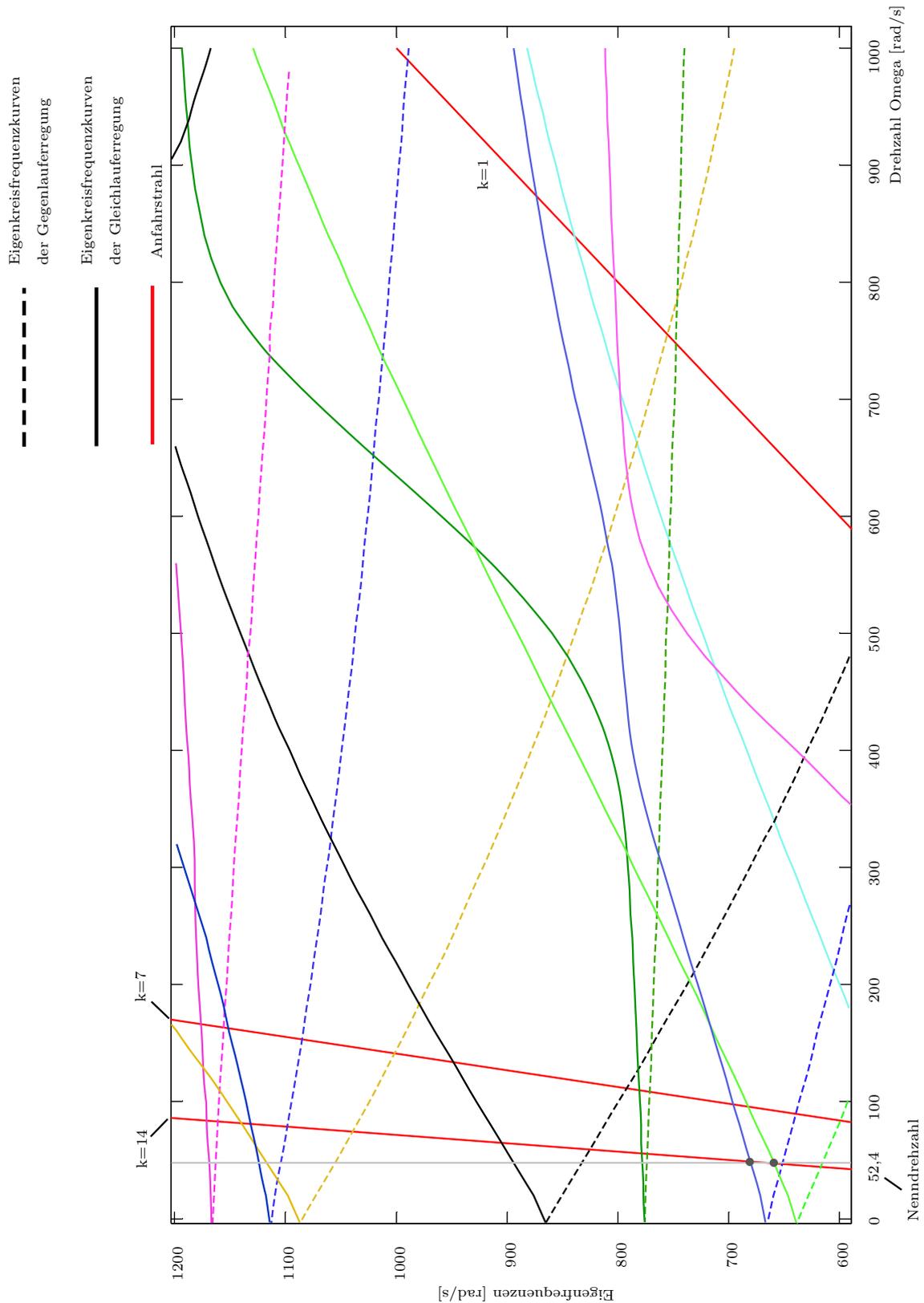


Abbildung 7.11: Campbell Diagramm des Eigenkreisfrequenzbereich 600 -1200 rad/s

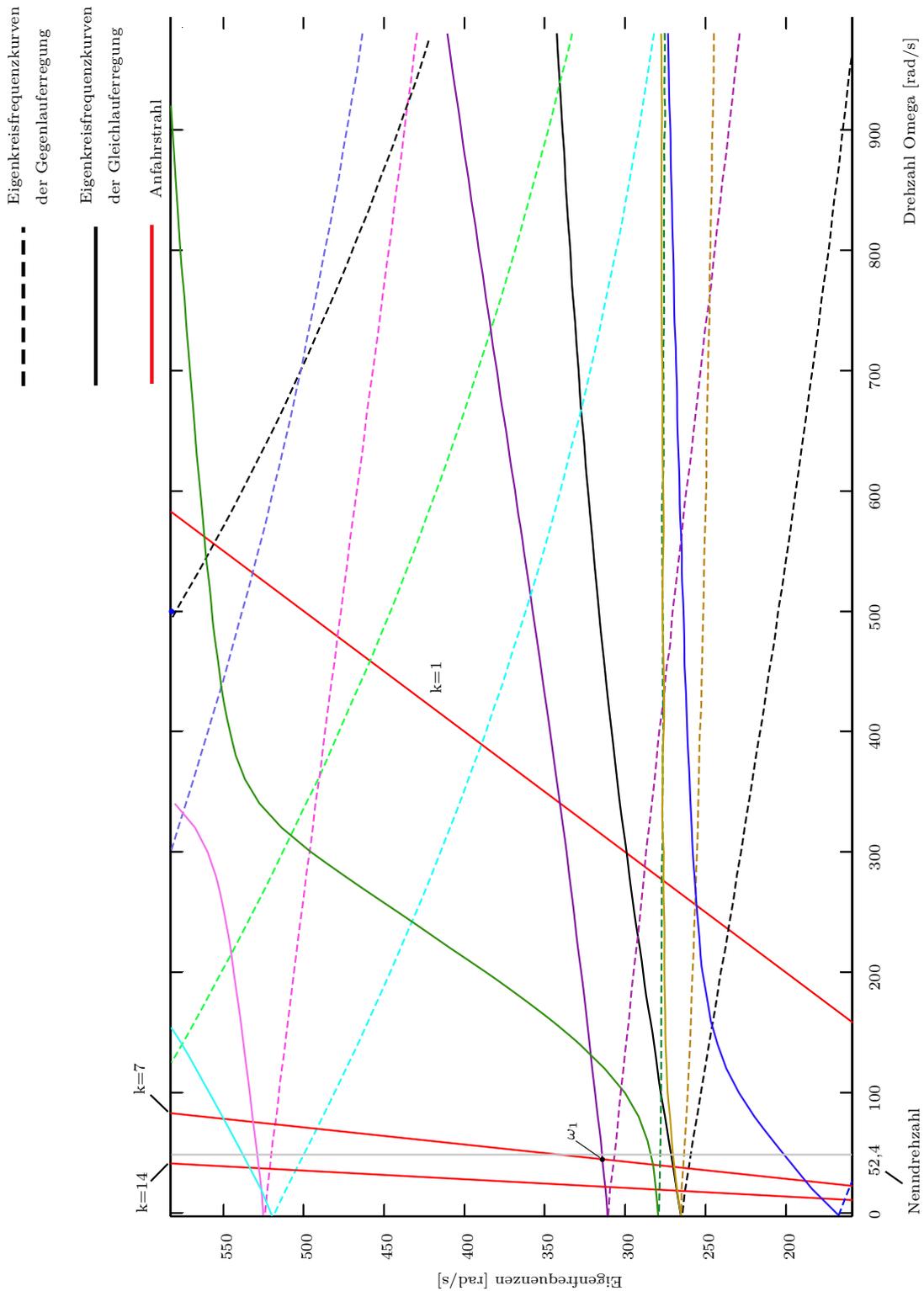


Abbildung 7.12: Campbell Diagramm des Eigenkreisfrequenzbereich 180 - 600 rad/s

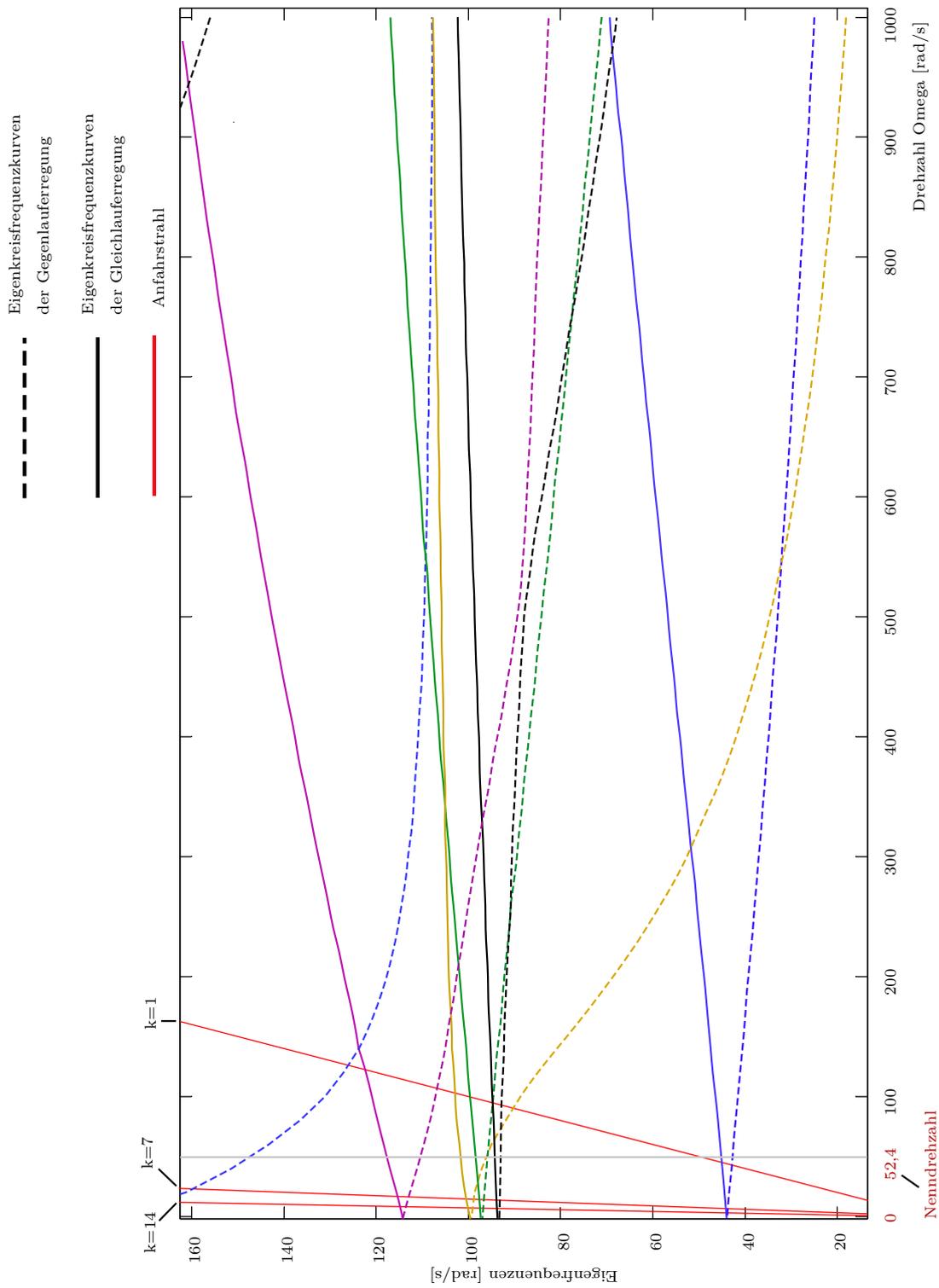
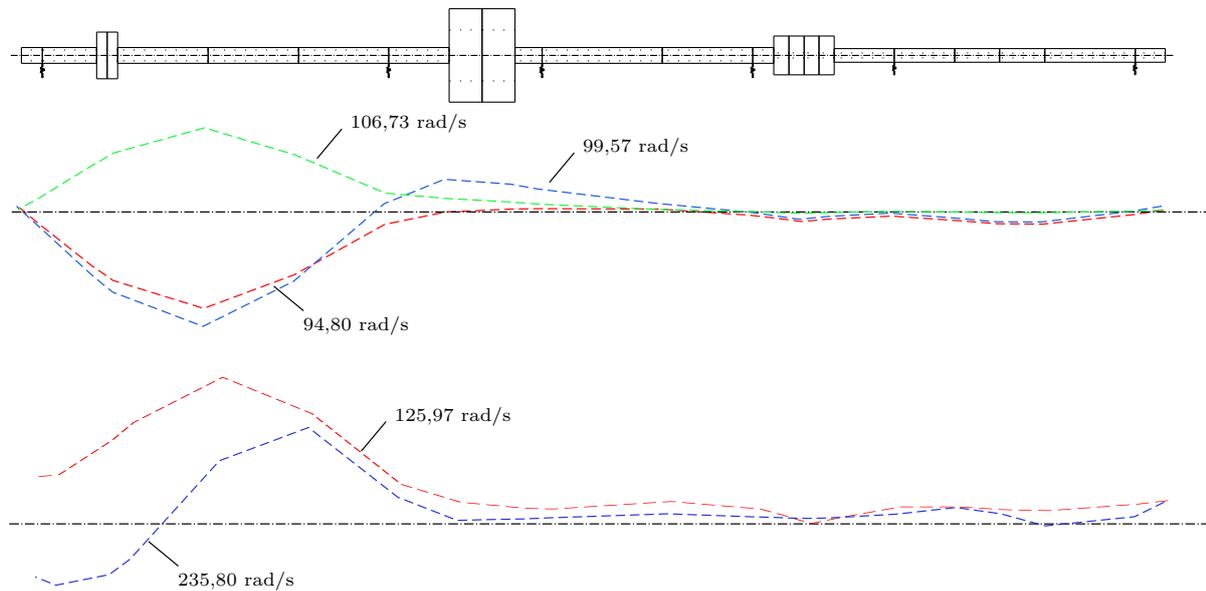


Abbildung 7.13: Campbell Diagramm des Eigenkreisfrequenzbereich 0 -180 rad/s



**Abbildung 7.14:** Eigenforemen im Pumpbetrieb

In Abbildung 7.14 sind einige Eigenformen im Pumpbetrieb dargestellt. Beim Übergang zwischen Antrieb- und Abtriebstrang, also beim hydraulischen Wandler, sind Absenkung identisch. Die Steigung vor und nach dem hydraulischen Wandler sind jedoch unterschiedlich und beeinflussen sich nicht. Der Verlauf ist unterbrochen.

## 7.3 Berechnung der Torsionsschwingungen

Es wird das rotordynamische Verhalten des Maschinensatzes für Torsionsschwingungen ermittelt. Anders als bei den Biegeschwingungen muss hier nicht auf GL- und GG-Erregung geachtet werden. Es werden schlicht die Eigenfrequenzen und Eigenformen für den Turbinen- und Pumpbetrieb berechnet.

### 7.3.1 Turbinenbetrieb

Zum Turbinenbetrieb gehören alle Komponenten von der Turbine bis zum „Wandler oben“. Die daraus resultierenden Daten (siehe Anhang „Datenblatt: Turbinenbetrieb Torsion“) werden in HydroVib eingelesen. Folgenden Randbedingungen wurden gewählt.

Linke Randbedingung	Moment=0
Rechte Randbedingung	Moment=0
Startvektor $x_0$	$\phi_{i1}=0.01$

**Tabelle 7.10:** Randbedingungen

In HydroVib werden nun im Menü "Eigenfrequenz Berechnung" mit folgenden Optionen

Startwert Omega	0
Endwert Omega	6500
Schrittweite	1
Genauigkeit	0,01

**Tabelle 7.11:** Eigenfrequenzen - Optionen

die Eigenfrequenzen berechnet. Der Endwert Omega wird von der maximalen Erregerfrequenz im Turbinenbetrieb beschränkt. Diese ergibt sich aus der maximalen Durchgangsdrehzahl, Becheranzahl der Turbine und harmonischen Drehklang. Es wurde bis zum dritten harmonischen Drehklang  $k_{Dreh3}$  die Berechnungen durch-

geführt.

$$f_{err,max} = z_{Turbine} \cdot n_{max} \cdot k_{Dreh} = \quad (7.1)$$

$$f_{err,max} = 20 \cdot 942,4 \cdot 3 = 56544 U/min \rightarrow 5921 rad/s \quad (7.2)$$

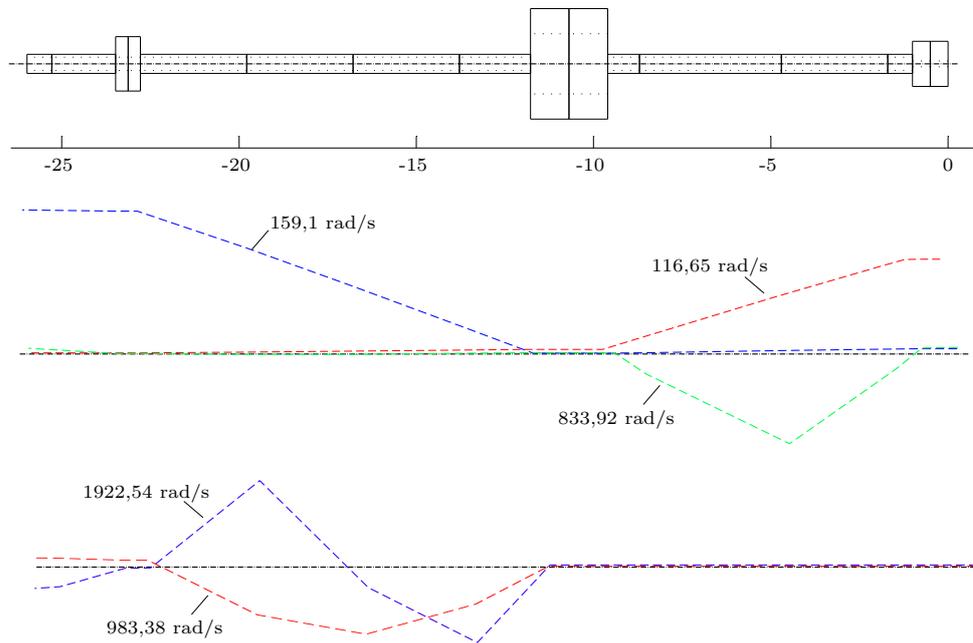
Die Ergebnisse aus der Berechnung wurden in Tabelle 7.12 eingetragen.

Ordnung	Eigenkreisfrequenz			Ordnung	Eigenkreisfrequenz		
	[rad/s]	[U/min]	[Hz]		[rad/s]	[U/min]	[Hz]
1.	116,65	1114	18,6	9.	3059,46	29216	486,9
2.	159,1	1519	25,3	10.	3830,32	36577	609,6
3.	833,92	7963	132,7	11.	4397,19	41990	699,8
4.	983,38	9391	156,5	12.	4784,28	45687	761,4
5.	1922,54	18359	306,0	13.	5738,74	54801	913,3
6.	2162,38	20649	344,2	14.	5772,33	55122	918,7
7.	2290,17	21870	364,5	15.	6320,93	60360	1006,0
8.	2877,76	27481	458,0	16.			

**Tabelle 7.12:** Eigenkreisfrequenzen im Turbinenbetrieb für Torsionsschwingungen

Deren dazugehörige Eigenformen sind in Abbildung 7.15 dargestellt. Gut ersichtlich ist, dass bei den Wellenelemente zwischen Turbine und Generator oder Wandler und Generator die größeren Winkeländerungen stattfinden. An diesen Positionen werden bei Resonanzbetrieb die größten Spannungen auftreten. Es wurde darauf verzichtet alle Eigenformen abzubilden.

Es wird nun überprüft ob eine Erregerfrequenz mit einer Eigenkreisfrequenz übereinstimmt. Torsionale Erregerkräfte im Turbinenbetrieb werden primär von der Turbine und den Generator verursacht. Die Erregerfrequenzen setzen sich aus Drehzahl, deren Erregung pro Umdrehung und des Drehklanges zusammen. Im



**Abbildung 7.15:** Eigenformen von Torsionsschwingungen im Turbinenbetrieb

Fall des Normalbetriebes ergeben sich folgende Erregerfrequenzen.

$$f_1 = n \cdot 1 = 8,33Hz$$

$$f_2 = n \cdot z_{Turbine,Becher} \cdot k_{Dreh1} = 8,33 \cdot 20 \cdot 1 = 166,6Hz$$

$$f_3 = n \cdot z_{Turbine,Becher} \cdot k_{Dreh2} = 8,33 \cdot 20 \cdot 2 = 333,33Hz$$

$$f_4 = n \cdot z_{Turbine,Becher} \cdot k_{Dreh3} = 8,33 \cdot 20 \cdot 3 = 500Hz$$

$$f_5 = \text{Netzfrequenz} = 50Hz$$

$$f_5 = \text{doppelte Netzfrequenz} = 100Hz$$

Keiner der anregenden Frequenzen stimmt mit einer der Eigenkreisfrequenzen direkt überein. Somit wird in Turbinenbetrieb bei Nenndrehzahl für Torsionsschwingungen keine Resonanz hervorgerufen.

Soll bei Durchgangsdrehzahl ebenfalls keine Resonanz hervortreten so dürfen folgenden anregende Frequenzen nicht im Einklang mit den Eigenkreisfrequenzen

geraten.

$$f_1 = n_{max} \cdot 1 = 15,72Hz$$

$$f_2 = n_{max} \cdot z_{Turbine,Becher} \cdot k_{Dreh1} = 15,72 \cdot 20 \cdot 1 = 314,4Hz$$

$$f_3 = n_{max} \cdot z_{Turbine,Becher} \cdot k_{Dreh2} = 15,72 \cdot 20 \cdot 2 = 628,8Hz$$

$$f_4 = n_{max} \cdot z_{Turbine,Becher} \cdot k_{Dreh3} = 15,72 \cdot 20 \cdot 3 = 943,2Hz$$

Nach Kontrolle mit den Eigenkreisfrequenzen tritt auch bei Durchgangsdrehzahl keine Resonanz auf.

### 7.3.2 Pumpbetrieb

Zum Pumpbetrieb gehört der gesamte Maschinensatz. Die Daten im „Datenblatt: Pumpbetrieb Torsion“ aus dem Anhang, wurden in HydroVib eingelesen und für die Berechnung verwendet. Anders als bei den Biegeschwingungen verursacht der hydraulische Wandler für Torsionsschwingungen keine Spaltung des Systems. Da Winkel und Torsionsmomente übertragen werden, trennt sich das gesamte System hier nicht auf. Es wurden die gleichen Randbedingungen sowie Optionen wie bei der Berechnung der Eigenfrequenzen von Torsionsschwingungen im Turbinenbetrieb verwendet. Die gefundene Eigenkreisfrequenzen sind in Tabelle 7.13 ersichtlich.

Ordnung	Eigenkreisfrequenz			Ordnung	Eigenkreisfrequenz		
	[rad/s]	[U/min]	[Hz]		[rad/s]	[U/min]	[Hz]
1.	56,59	540	9	13.	2694,51	25731	428,8
2.	141,08	1355	22,6	14.	2877,76	27481	458,0
3.	159,08	1519	25,3	15.	2903,64	27728	462,1
4.	307,45	2936	48,9	16.	3454,27	32986	549,8
5.	430,46	4112	68,5	17.	3830,32	36577	609,6
6.	569,25	5436	90,6	18.	4331,53	41363	689,4
7.	581,60	5554	92,6	19.	4784,28	45687	761,4
8.	983,37	9390	156,5	20.	5262,65	50255	837,6
9.	1922,53	18359	306,0	21.	5291,38	50529	842,1
10.	2162,38	20549	344,2	22.	5715,67	54581	909,7
11.	2214,44	20649	344,2	23.	6320,38	60355	1005,9
12.	2634,5	25158	419,3	24.	6464,23	61729	1028,8

**Tabelle 7.13:** Eigenkreisfrequenzen im Pumpbetrieb für Torsionsschwingungen

Die Erregerkräfte werden maßgeblich von Generator, Wandler und Pumpe bestimmt. Bei Betrieb im Auslegungspunkt treten folgenden Erregerfrequenzen auf.

$$f_1 = n = 8,33Hz$$

$$f_2 = n \cdot z_p \cdot k_{Dreh1} = 8,33 \cdot 7 \cdot 1 = 58,31Hz$$

$$f_3 = n \cdot z_p \cdot k_{Dreh2} = 8,33 \cdot 7 \cdot 2 = 116,62Hz$$

$$f_4 = n \cdot z_p \cdot z_{p,Leit} = 8,33 \cdot 7 \cdot 12 = 699,72Hz$$

$$f_5 = \text{Netzfrequenz} = 50Hz$$

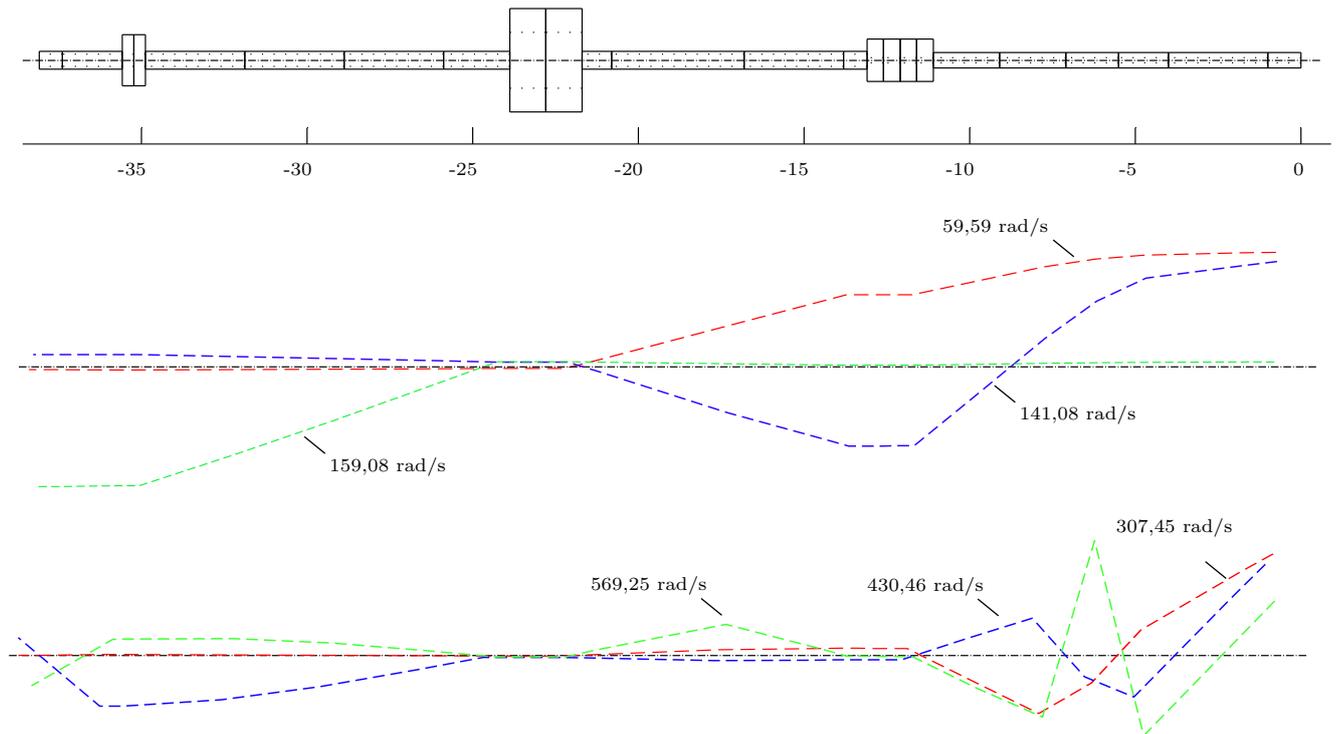
$$f_6 = \text{doppelte Netzfrequenz} = 100Hz$$

Die Erregerfrequenz von den Schaufeln des hydraulischen Wandlers wurde wie bei der Pumpe identisch angenommen.

Werden Eigenkreisfrequenzen und anregenden Frequenzen verglichen, so stellt man fest, dass die 1. und 4. Eigenkreisfrequenz sich sehr nahe an Erregerfre-

quenzen befinden. Es könnte also im Pumpbetrieb Resonanz auftreten.

In Abbildung 7.16 wurden die ersten sechs Eigenformen für den Pumpbetrieb dargestellt.



**Abbildung 7.16:** Eigenformen von Torsionsschwingungen im Pumpbetrieb

## 8 Zusammenfassung

Um zu gewährleisten, dass keine Eigenkreisfrequenzen bzw. erhöhte unzulässige Vibrationen in einem Betriebszustand bei hydraulischen Maschinensätzen vorliegen, muss das rotordynamische Verhalten bestimmt werden. Wird dieses Verhalten bei der Auslegung von Wasserkraftanlagen ignoriert, so ist ein einwandfreier Betrieb der gesamten Anlage gefährdet. Erhöhter Verschleiß, störende Geräuschentwicklung oder sogar totale Zerstörung der gesamten Wasserkraftanlage, wodurch nicht nur Umwelt sondern auch Menschenleben gefährdet werden, sind mögliche Auswirkungen.

Somit wurde das Hauptziel dieser Arbeit bestimmt: Alle Eigenfrequenzen für Biege- und Torsionsschwingungen in hydraulischen Maschinensätzen sollten identifiziert werden. Für Biegeschwingungen in Wasserkraftanlagen gilt ein unterkritischer Betrieb, also all die zu erreichenden Betriebspunkte sollen sich wesentlich unterhalb der ersten Eigenkreisfrequenz befinden. Für Torsionsschwingungen gilt, in den Betriebspunkten soll keine Eigenkreisfrequenz angeregt werden.

Weiteres Ziel der vorliegenden Arbeit war die Bestimmung der maximalen Auslenkung des hydraulischen Maschinensatzes bei der jeweiligen Eigenfrequenz. Diese Problemstellung sollte dadurch bewältigt werden, dass die Ermittlung von Eigenformen alle notwendigen Informationen liefert.

Die gegenseitige Beeinflussung der unterschiedlichen Berechnungsverfahren bei der Auslegung von hydraulischen Maschinensätzen bzw. Wasserkraftanlagen fordert eine Flexibilität des Berechnungsverfahrens. Mithilfe eines computergestützten Berechnungsprogrammes bzw. Simulationsprogrammes sollen diese Voraussetzungen erfüllt werden.

Das Simulationsprogramm soll all jene Eigenschaften des realen Systems einbinden, um die berechneten Eigenkreisfrequenzen so genau wie nötig zu bestimmen. Turbine, Generator, Pumpe und andere mitrotierende Massen werden als Scheiben mit Masse sowie äquatorialem und polarem Massenträgheitsmoment modelliert, sodass auch der Kreiseffekt berücksichtigt werden kann. Der Wellenstrang wird in Wellensegmente mit oder ohne Masse unterteilt. Isotrope und sogar anisotrope

Lagerung werden als Feder- Dämpferelemente beschrieben. Ist ein hydraulischer Wandler im System vorhanden, so kann bzw. muss dieser ebenfalls miteinbezogen werden. Kräfte veranlassen das System zu Schwingung und sind somit Hauptursache für Vibrationen, verändern aber Eigenkreisfrequenzen nicht maßgeblich. Daher wurde ausschließlich die drehfrequente Unwuchtkraft in das Simulationsprogramm implementiert.

Da das Übertragungsmatrizenverfahren alle notwendigen Anforderungen erfüllt und die Einbindung in ein computerunterstützendes Simulationsprogramm einfach ist, wurde es gegenüber den Finite-Elemente Verfahren bevorzugt ausgewählt. Das Übertragungsmatrizenverfahren wurde in MATLAB implementiert und benannt nach HydroVib.

Mit den hergeleiteten Übertragungsmatrizen für Biegeschwingungen und Torsionschwingungen können hydraulische Maschinensätze vollständig modelliert und mit HydroVib simuliert werden. Das ursprüngliche Ergebnis vom Übertragungsmatrizenverfahrens ist die Lösung des homogenen Gleichungssystems (in HydroVib umgesetzt in "Eigenfrequenz Berechnung" und "Campbell Diagramm") und diese sind Eigenkreisfrequenzen, Eigenformen sowie Schnittgrößen bei jedem Elementübergang. Wird aber das inhomogene Gleichungssystem gelöst (in HydroVib umgesetzt in "Resonanzkurve" und "Orbits und Schwingungsformen") so werden Unwuchtkräfte und Dämpfungen berücksichtigt. Dadurch lassen sich Amplituden der Schnittgrößen vom gedämpften System mit erzwungener Erregung (Unwuchtkraft) berechnen.

Um die Korrektheit der Ergebnisse von HydroVib zu überprüfen, wurden analytische Lösungen von einfachen Systemen berechnet und mit den Ergebnissen vom Simulationsprogramm verglichen. Die Validierung konnte positiv abgeschlossen werden. Lediglich vom hydraulischen Wandler, konnte keine analytische Lösung gefunden werden, wodurch keine Validierung stattfinden konnte.

Ein hydraulischer Maschinensatz von der Wasserkraftanlage Kops II wurde herangezogen, um ein reales System zu modellieren und simulieren. Da das Pumpspeicherkraftwerk Kops II in Pump- sowie Turbinenbetrieb betrieben werden kann, musste auch in beiden Betriebsarten das rotordynamische Verhalten bestimmt werden. Zuerst wurden einige hydraulische Berechnungen durchgeführt, um das Pumpspeicherkraftwerk Kops II zu abstrahieren. Anschließend wurden alle Daten in HydroVib eingelesen und Simulationen durchgeführt. Die Ergebnisse waren nicht zur Gänze plausibel, weshalb ein Fehler in der Berechnung anzunehmen war. Mit extrem hoher Wahrscheinlichkeit kann angenommen werden, dass der

Fehler in der Abstrahierung von Kops II entstand. Einige wichtige Parameter konnten nicht zur Gänze identifiziert werden, die aber wesentlichen Einfluss auf das rotordynamische Verhalten haben und somit auch die Simulationsberechnung in HydroVib negativ beeinflussen.

Sind alle für die Berechnung erforderlichen Daten und Parameter genauestens bekannt, kann HydroVib realistische Ergebnisse berechnen.

Obwohl HydroVib bereits sehr genau Simulationen von hydraulischen Maschinensätzen sowie vielen anderen rotierenden Systemen ermöglicht, und die Codierung robust gegen Anwenderfehler ist, sind Optimierungen möglich.

Die Dauer der Simulationsberechnung könnte eventuell verkürzt werden, wenn die Zeitabhängigkeit in den Übertragungsmatrizen eliminiert wird. Dadurch wird eine Visualisierung jedoch nicht mehr möglich.

Bei hydraulischen Maschinen befinden sich im Betrieb mitrotierende Wassermassen, welche die Eigenkreisfrequenzen beeinflussen. Es konnten leider keine realistischen Werte gefunden werden. Hierzu wäre eine Literaturrecherche oder sogar eine Forschungsarbeit notwendig.

Das Simulationsmodell berücksichtigt keine berührungslosen Flüssigkeitsdichtungen, welche z.B. bei Radialpumpen eingesetzt werden. Würde die Eigenschaft der berührungslosen Flüssigkeitsdichtungen in HydroVib implementiert werden, so könnten genauere Simulationen erstellt werden.

Eines der größten Probleme bei der Erstellung eines Simulationsprogrammes ist die Validierung. Ab einer gewissen Modellkomplexität ist eine analytische Validierung nicht mehr möglich. Ab diesem Punkt ist ein rotordynamischer Prüfstand nötig. Hydraulische Wandler, mitrotierende Wassermassen, berührungslose Flüssigkeitsdichtungen und viele weitere Aspekte könnten einfach überprüft werden. Leider sind diese Prüfstände kostspielig und die dafür benötigten Ressourcen stehen nur selten zur Verfügung.

# 9 Anhang

## 9.1 Lavallrotor in isotropen Lagern

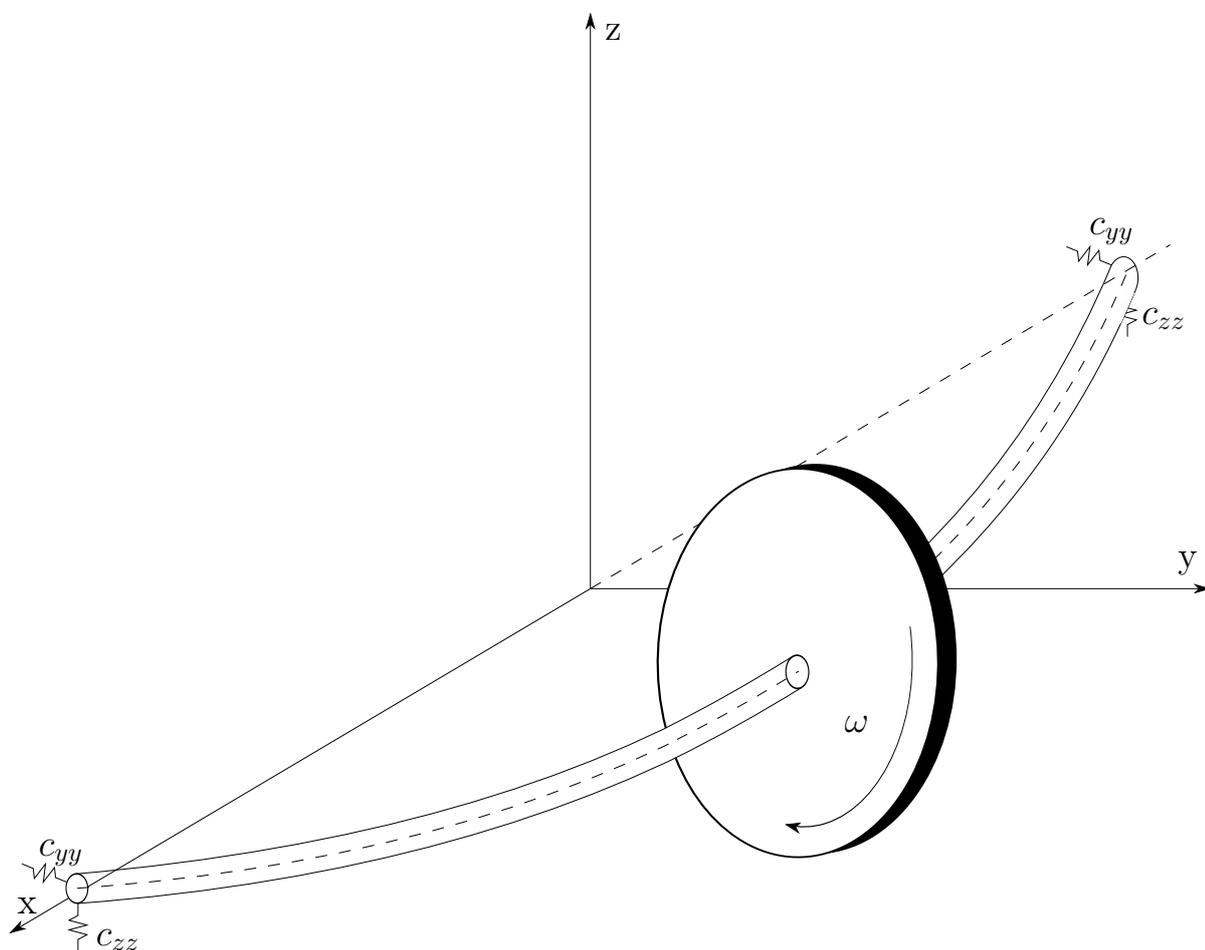


Abbildung 9.1: Lavallläufer in isotropen Lagern

In Abbildung 9.1 ist ein Lavallrotor in isotropen Lagern abgebildet. Daten des

Rotors sind

$$\begin{aligned}
 c_{zz} = c_{yy} &= 1,00E + 7 \frac{N}{m} \\
 \varnothing_a &= 0,15 \text{ m} \\
 \varnothing_i &= 0 \text{ m} \\
 L &= 1 \text{ m} \\
 E - \text{Modul} &= 2,1E + 11 \frac{N}{m^2} \\
 e &= 0,001 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Die Eigenkreisfrequenz nach Literatur [1] ist

$$\omega_z = \sqrt{\frac{s_z}{m}}$$

dabei ist

$$s_z = \frac{2 c_{zz} c}{2 c_{zz} + c} \quad c = \frac{48 E I}{L^3} \quad I = \left( \left( \frac{\varnothing_a}{2} \right)^4 - \left( \frac{\varnothing_i}{2} \right)^4 \right) \frac{\pi}{4}$$

werden nun die bekannten Werte eingesetzt, so erhält man

$$I = 2,485 E - 5 \text{ m}^4 \quad (9.1)$$

$$c = 2,500 E + 8 \frac{N}{m} \quad (9.2)$$

$$s_z = 1,852 E + 7 \frac{N}{m} \quad (9.3)$$

$$\omega_z = 192,464 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (9.4)$$

## 9.2 Lavallrotor in anisotropen Lagern

Der Rotor in anisotropen Lagern hat die gleichen Eigenschaften wie der Rotor in isotropen Lagern. Lediglich die Federsteifigkeit in y-Richtung besitzt nun folgen-

den Wert.

$$c_{yy} = 4,00E + 7 \frac{N}{m}$$

Da die Federsteifigkeiten in den Ebenen nun unterschiedlich ist, gilt nun  $c_{yy} = c_{zz}$  nicht mehr. Formeln wurden aus der Literatur [1] entnommen.

$$\omega_z = \sqrt{\frac{s_z}{m}} \qquad \omega_y = \sqrt{\frac{s_y}{m}}$$

Werden nun die Werte wieder in die Formeln eingesetzt so erhält man

$$\begin{aligned} I &= 2,485 E - 5 m^4 \\ c &= 2,500 E + 8 \frac{N}{m} \\ s_z &= 1,852 E + 7 \frac{N}{m} & s_y &= 6,667 E + 7 \frac{N}{m} \\ \omega_z &= 192,464 \frac{rad}{s} & \omega_y &= 348,237 \frac{rad}{s} \end{aligned}$$

## 9.3 Bestimmung aller relevanten Größen für die Schwingungsberechnung von Kops II

Da keine genaueren Daten vom Maschinensatz der Kops II Anlage vorliegen, müssen die notwendigen Werte abgeschätzt bzw. berechnet werden. Aus der Literatur [11] konnten für Kops II folgende Werte entnommen werden.

### Allgemeine Daten zu Kops II

Maschinenanzahl  $z_{\text{Maschine}}$ : 3  
Länge des Maschinensatzes  $L$ : 38 m  
max. Höhe der Staumauer  $H_{st}$ : 122 m  
Kopssee Stauziel: 1809 m  
Unterbecken Rifa (Kote): 1005 m

### Turbine

gesamte Leistung im Turbinenbetrieb  $P$ : 525 MW  
Leistung pro Turbine  $P_T$ : 175 MW  
Düsenanzahl  $z_{\text{düse}}$ : 6  
Nennzahl  $n$ : 500  $\text{min}^{-1}$   
max. Bruttofallhöhe  $H_{\text{max,brutto}}$ : 818 m  
gesamter Durchfluss im Turbinenbetrieb: 75,9 m/s  
Durchfluss pro Turbine  $Q_T$ : 25,3  $\text{m}^3/\text{s}$   
max. Geschwindigkeit Düsenaustritt  $c_0$ : 127,7 m/s

### Generator

Leistung pro Generator  $P_G$ : 200 MVA  
Durchgangsdrehzahl  $n_{\text{Durchgang}}$ : 943  $\text{min}^{-1}$   
Polpaare  $z_{\text{pol}}$ : 6

### Pumpe

Leistung pro Pumpe  $P_P$ : 150 MW  
max. Durchfluss pro Pumpe  $Q_{P,\text{max}}$ : 19,3  $\text{m}^3/\text{s}$   
Stufen pro Pumpe  $z_{P,\text{stufe}}$ : 3

**Druckstollen Versallstollen**Länge  $L_{st}$ : 5552 minnerer Durchmesser  $D_{st}$ : 4,9 m**Druckschacht**Länge  $L_{sch}$ : 1135 minnerer Durchmesser  $D_{sch}$ : 3,8 m**9.3.1 Berechnungen rund um den Turbinebetrieb**

Eine Pelton turbine ist charakterisiert durch Durchfluss  $Q$ , Nenndrehzahl  $n$  und Fallhöhe  $H_T$ . Die ersten beiden Parameter sind vom Hersteller bereits ausgelegt worden und somit vorgegeben. Für weitere Berechnungen muss nun die Nettofallhöhe  $H_{netto}$  bestimmt werden. In Abbildung 9.2 gut ersichtlich, wurden die bekannten Daten des Pumpspeicherkraftwerkes Kops II eingetragen. Angenommen wurde, dass sich die Fallhöhe im Auslegungspunkt  $H_{nenn}$  bei einem halbvollen Stausee befindet.

$$H_{nenn} = H_{max} - \frac{H_{st}}{2} = 818 - \frac{122}{2} = 757m \quad (9.5)$$

Diese Fallhöhe steht jedoch den Pelton turbinen nicht zur Verfügung, da Verlust im Druckstollen und Druckschacht, sowie andere Verluste die Fallhöhe reduzieren. Dementsprechend wird eine Verlusthöhe berechnet, um die Nettofallhöhe im Auslegungspunkt zu bestimmen. Die meisten verwendeten Formeln wurden aus der Literatur [2] entnommen.

Zuerst wird die Verlusthöhe im Druckstollen ermittelt. Mit Durchfluss und Querschnitt lässt sich die Geschwindigkeit im Druckstollen ermitteln.

$$c_{T,stollen} = \frac{Q}{A} = \frac{Q_T \cdot 3}{\frac{D_{st}^2 \cdot \pi}{4}} = \frac{25,3 \cdot 3}{\frac{4,9^2 \cdot \pi}{4}} = 4,025 \frac{m}{s} \quad (9.6)$$

Weiter folgt die Berechnung der dimensionslosen Reynolds-Zahl  $Re$

$$Re = \frac{c_{T,stollen} \cdot D_{st}}{\nu} = \frac{4,025 \cdot 4,9}{1 \cdot 10^{-6}} = 1,9 \cdot 10^7 \quad (9.7)$$

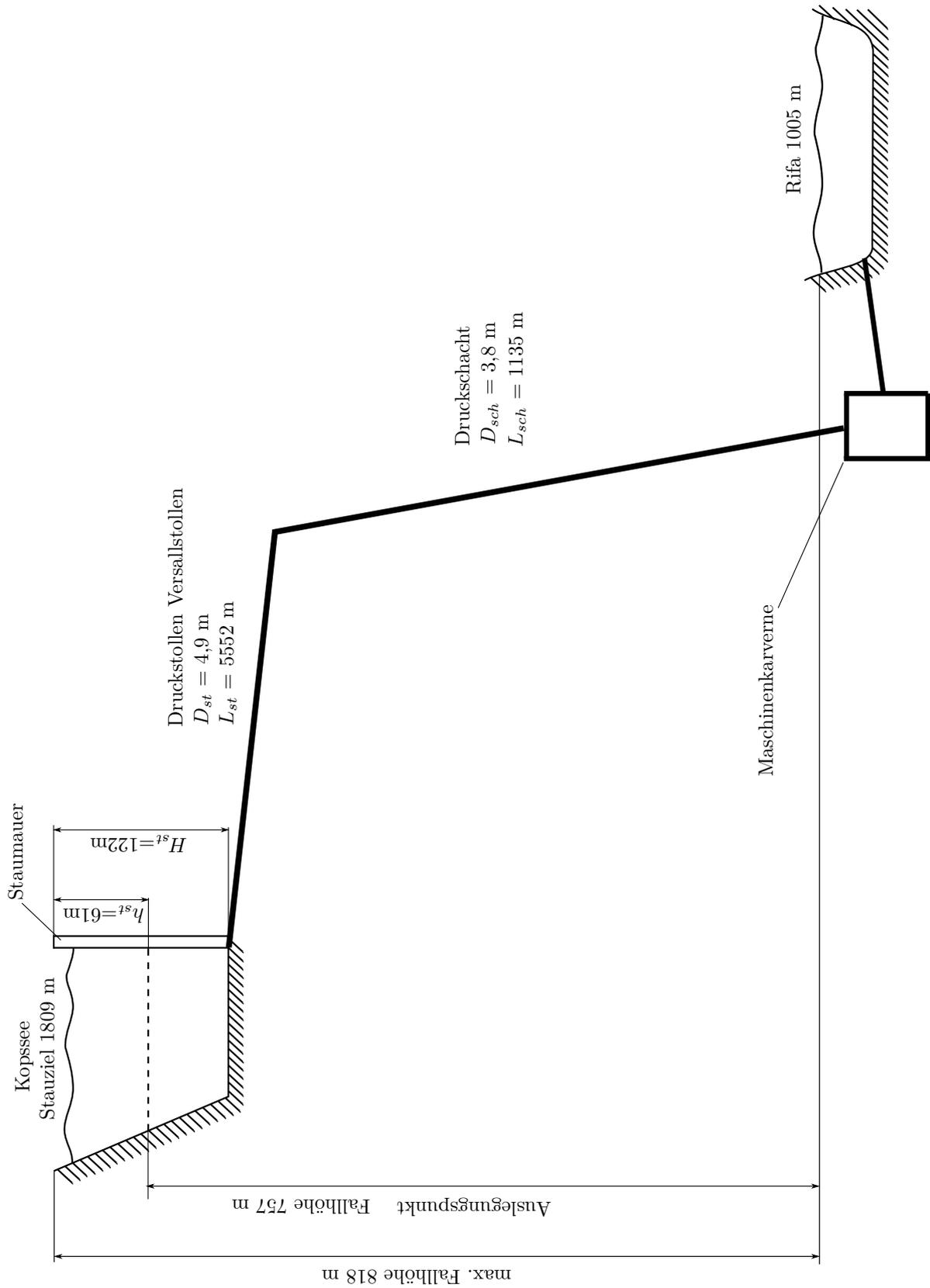


Abbildung 9.2: Pumpspeicherkraftwerk Kops II

Anschließend wird das Verhältnis

$$\frac{D_{st}}{k} = \frac{4900}{0,1} = 49000 \quad (9.8)$$

gebildet, wobei  $k=0,1$  für Stahlbeton aus Literatur [2] entnommen wurde. Unter Verwendung des Colebrooke Diagrammes, ebenfalls aus Literatur [2] entnommen, wurde  $\lambda = 0,0095$  mithilfe von  $Re$  und  $\frac{d}{k}$  bestimmt. Nun kann die Verlusthöhe  $H_{T,v,stellen}$  berechnet werden:

$$H_{T,v,stellen} = \lambda \cdot \frac{L_{st}}{D_{st}} \cdot \frac{c_{T,stellen}^2}{2g} = 0,0095 \cdot \frac{5552}{4,9} \cdot \frac{4,025^2}{2 \cdot 9,81} = 8,89m \quad (9.9)$$

Die Verlusthöhe  $H_{T,v,schacht}$  im Druckschacht lässt sich äquivalent bestimmen. Zuerst wird die mittlere Geschwindigkeit  $c_{T,schacht}$  berechnet.

$$c_{T,schacht} = \frac{Q}{A} = \frac{Q_T \cdot 3}{\frac{D_{sch}^2 \cdot \pi}{4}} = \frac{25,3 \cdot 3}{\frac{3,8^2 \cdot \pi}{4}} = 6,692 \frac{m}{s} \quad (9.10)$$

Die Reynolds-Zahl  $Re$  ist

$$Re = \frac{c_{T,schacht} \cdot D_{sch}}{\nu} = \frac{6,692 \cdot 3,8}{1 \cdot 10^{-6}} = 2,5 \cdot 10^7 \quad (9.11)$$

Das Verhältnis  $d/k$  ist

$$\frac{D_{sch}}{k} = \frac{3800}{0,01} = 38000 \quad (9.12)$$

wobei der Wert  $k=0,01$  für ein Stahlrohr aus Literatur [2] entnommen wurde. Aus dem Colebrooke Diagramm wurde  $\lambda = 0,007$  bestimmt. Die Verlusthöhe des Druckschachts ist

$$H_{T,v,schacht} = \lambda \cdot \frac{L_{sch}}{D_{sch}} \cdot \frac{c_{T,schacht}^2}{2g} = 0,007 \cdot \frac{1135}{3,8} \cdot \frac{6,692^2}{2 \cdot 9,81} = 4,77m \quad (9.13)$$

Somit ergibt sich eine gesamte Verlusthöhe von

$$H_{T,v} = H_{T,v,stellen} + H_{T,v,schacht} = 8,89 + 4,77 = 13,66m \quad (9.14)$$

Die Nettofallhöhe  $H_T$  im Auslegungspunkt ist nun die Bruttofallhöhe  $H_{nenn}$  im

Auslegungspunkt minus der Verlusthöhe  $H_{T,v}$ .

$$H_T = H_{nenn} - H_{T,v} = 757 - 13,66 = 743,34m \quad (9.15)$$

Erwähnt sei, dass sämtliche andere Verluste, wie zum Beispiel die Einbauten nicht berücksichtigt wurden.

### Durchflusses Q

Mit Turbinenleistung  $P_T$  und der Fallhöhe lässt sich der Durchfluss Q überprüfen.

$$Q_T = \frac{P_T}{g \cdot \rho \cdot H_T \cdot \eta} = \frac{175 \cdot 10^6}{9,81 \cdot 1000 \cdot 743,34 \cdot 0,94} = 26,09 \frac{m^3}{s} \quad (9.16)$$

wobei  $\eta = 0,94$  gewählt wurde. Der berechnete Durchfluss  $Q_T$  stimmt mit guter Näherung überein. Wird der Durchfluss pro Düse  $Q_{T,Düse}$  berechnet

$$Q_{T,Düse} = \frac{Q_T}{z_{Düse}} = \frac{25,3}{6} = 4,21 \frac{m^3}{s} \quad (9.17)$$

so kann die spezifische Drehzahl  $n_{q,Düse}$  berechnet werden

$$n_{q,Düse} = n \cdot \frac{\sqrt{Q_{T,Düse}}}{H_T^{(\frac{3}{4})}} = 500 \cdot \frac{\sqrt{4,21}}{743,34^{(\frac{3}{4})}} = 7,21 \frac{U}{min} \quad (9.18)$$

Nach Literatur [2] auf Seite 211 nach Abbildung 9.9 ist eine spezifische Drehzahl von  $n_{q,Düse} = 6,5$  anzustreben. Die Differenz zwischen der berechneten und der anzustrebenden spezifischen Drehzahl ist gering. Anzumerken sei, dass die Möglichkeit besteht eine geringe spezifische Drehzahl zu erreichen, indem die Polpaarzahl erhöht wird. Diese ist jedoch vorgegeben und kann nicht variiert werden.

### Wellenberechnung im Turbinenbetrieb

Bei maximaler Fallhöhe

$$H_{max,netto} = H_{max,brutto} - H_{T,v} = 818 - 13,66 = 804,34m \quad (9.19)$$

und bei Nenndrehzahl tritt im Turbinenbetrieb das maximale Torsionsmoment

auf. Die maximale Leistung und Torsionsmoment ist daher

$$P_{T,max} = \rho g H_{max,netto} Q_T = 9,81 \cdot 1000 \cdot 804,34 \cdot 25,3 = 200MW \quad (9.20)$$

$$M_t = \frac{P}{2 \pi n} = \frac{200 \cdot 10^6}{2 \cdot \pi \cdot 8,33} = 3819kNm \quad (9.21)$$

wobei die Verluste vernachlässigten wurden. Bei einer dynamischen Beanspruchung liegen nach Literatur [12] die zulässigen Spannungen  $\tau_{zul}$  für einen üblichen Wellenstahl etwa bei 40-60  $\frac{N}{mm^2}$ . Somit kann das erforderliche Widerstandsmoment  $W_p$  berechnet werden zu

$$W_p = \frac{M_t}{\tau_{zul}} = \frac{3819000000}{60} = 6,37 \cdot 10^7 mm^3 \quad (9.22)$$

Wobei wiederum für einen Querschnitt ein Kreisringes das polare Widerstandsmoment

$$W_p = \pi \cdot \frac{Da^4 - Di^4}{16Da} \quad (9.23)$$

ist. Setzt man  $Di = 0$  so erhält man den kleinstmöglichen Außendurchmesser

$$Da = \sqrt[3]{\frac{16 W_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 6,37 \cdot 10^7}{\pi}} = 687mm \quad (9.24)$$

Gewählt wurde jedoch ein Außendurchmesser von  $Da = 750mm$ , sodass ein Innendurchmesser von

$$Di = \sqrt[4]{Da^4 - \frac{16 W_p Da}{\pi}} = \sqrt[4]{750^4 - \frac{16 \cdot 6,37 \cdot 10^7 \cdot 750}{\pi}} = 520mm \quad (9.25)$$

entsteht. Man versucht den Außendurchmesser und somit den Innendurchmesser zu erhöhen, sodass Gewicht eingespart werden kann. Jedoch wird dies zum Teil durch andere Eigenschaften beschränkt, zum Beispiel vom Strahlkreisdurchmesser der Pelton-Turbine. Detailliertere Auslegungen werden hier nicht weiter angeführt.

### Abmessung des Peltonlaufrades

Ziel der gesamten Berechnung ist, dass die rotierende Masse sowie das polare und äquatoriale Massenträgheitsmoment des Laufrades ermittelt wird. Folglich werden einige wichtige Abmessungen des Laufrades bestimmt um anschließend die

benötigten Massen und Massenträgheitsmomente abzuschätzen.

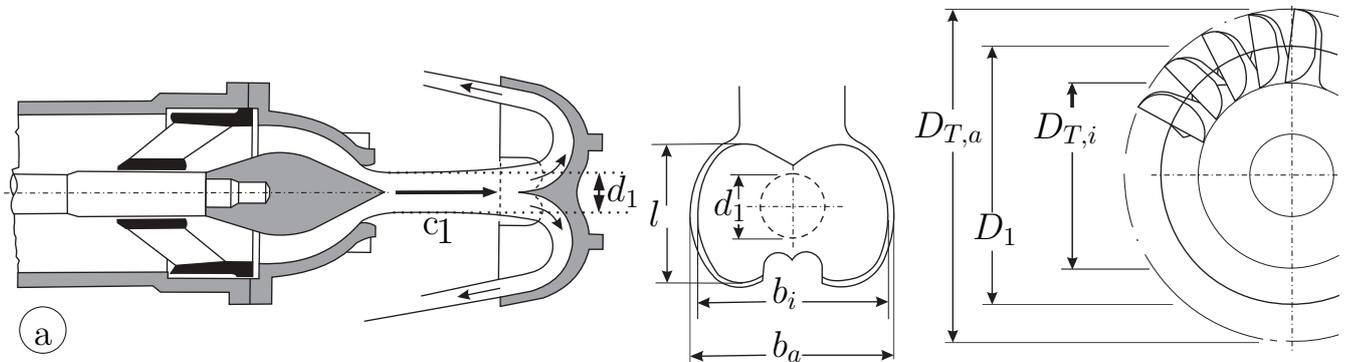


Abbildung 9.3: Abmessung eines Peltonlaufrades [13]

Zuerst wird die Absolutgeschwindigkeit  $c_1$  berechnet, dabei wird  $k_c = 0,98$  aus Literatur [2] gewählt.

$$c_1 = k_c \cdot \sqrt{2gH_T} = 0,98 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 743,34} = 118,35 \frac{m}{s} \quad (9.26)$$

Die Umfangsgeschwindigkeit wird mit dem Beiwert aus Literatur [2] zu  $k_u = 0,47$  bestimmt

$$u_1 = k_u \cdot \sqrt{2gH_T} = 0,47 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 743,34} = 56,76 \frac{m}{s} \quad (9.27)$$

Folglich kann bereits der Strahlkreisdurchmesser  $D_1$  festgelegt

$$D_1 = \frac{u_1 \cdot 60}{\pi \cdot n} = \frac{56,76 \cdot 60}{\pi \cdot 500} = 2,168m \quad (9.28)$$

und auch der Strahldurchmesser  $d_1$  bestimmt werden

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot Q_{T,Düse}}{\pi \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4,34}{\pi \cdot 118,35}} = 0,216m \quad (9.29)$$

Wird das Verhältnis  $\frac{d_1}{D_1}$  gebildet so lässt sich nach Tabelle 9.2 auf S. 212 in Lite-

ratur [2] die Becheranzahl abschätzen.

$$\frac{d_1}{D_1} = \frac{0,216}{2,168} = 0,0996 \rightarrow 19 - 24 \text{ Becher} \quad (9.30)$$

Die Becherlänge  $l$  lässt sich mit folgender Formel berechnen

$$l = (2,1 \dots 2,7) \cdot d_1 = 2,5 \cdot 0,216 = 0,54m \quad (9.31)$$

somit ist der äußerste Durchmesser  $D_{T,a}$  und innere Durchmesser  $D_{T,i}$

$$D_{T,a} = D_1 + l = 2,168 + 0,54 = 2,708m \quad (9.32)$$

$$D_{T,i} = D_1 - l = 2,168 - 0,54 = 1,628m \quad (9.33)$$

$$(9.34)$$

Die innere Becherbreite  $b_i$  wird berechnet zu

$$b_i = (2,5 \dots 3,6) \cdot d_1 = 3,1 \cdot 0,216 = 0,67m \quad (9.35)$$

Anschließend wird die äußere Becherbreite  $b_a$  abgeschätzt mit einer Becherwandstärke von 20 mm, so dass

$$b_a = 0,67 + 0,04 = 0,71m \quad (9.36)$$

ist.

Wird das Peltonlaufrad als Scheibe mit  $D_{T,a}$  als äußeren Durchmesser und  $b_a$  als Scheibendicke betrachtet, so lässt sich dessen Masse berechnen zu

$$m_{Scheibe} = \frac{D_{T,a}^2 \cdot \pi}{4} \cdot b_a \cdot \rho = \frac{2,708^2 \cdot \pi}{4} \cdot 0,71 \cdot 7850 = 32236kg \quad (9.37)$$

Üblicherweise besitzen Peltonlaufräder in der Mitte ein Loch, sodass die Scheibenform zu einer Kreisscheibenform übergeht. Wird die Masse dieses Loches berechnet, muss diese von der Masse der Scheibe  $m_{Scheibe}$  abgezogen werden.

$$m_{Loch} = \frac{D_i^2 \cdot \pi}{4} \cdot b_a \cdot \rho = \frac{0,520^2 \cdot \pi}{4} \cdot 0,71 \cdot 7850 = 1188kg \quad (9.38)$$

Außerdem ist die Becherbreite nicht die Breite des gesamten Peltonlaufrades. Vom

Zentrum des Laufrades bis annähernd zum Becher ist die Breite wesentlich geringer. Hier wird eine Differenz von  $\frac{b_a}{2}$  angenommen. Die Masse lässt sich berechnen zu

$$m_{Breite} = (D_{T,i}^2 - D_a^2) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b_a}{2} \cdot \rho \quad (9.39)$$

$$m_{Breite} = (1,628^2 - 0,750^2) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{0,713}{2} \cdot 7850 = 4589kg \quad (9.40)$$

Die Massen der Becher am Peltonlaufrad müssen ebenfalls noch einer Korrektur unterzogen werden. Wird das Volumen der Kreisscheibenform mit Innendurchmesser  $D_{T,i}$  und Außendurchmesser  $D_{T,a}$  und breite  $b_a$ , welches das Bechervolumen darstellen soll, mit dem tatsächlichen Bechervolumen verglichen, so stellt man schnell fest, dass hier ein große Differenz existiert. Um dies auszugleichen wird das Kreisscheibenvolumen mit einem Faktor von  $3/4$  multipliziert.

$$m_{Becher} = (D_{T,a}^2 - D_{T,i}^2) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot b_a \cdot \rho \cdot \frac{3}{4} \quad (9.41)$$

$$m_{Becher} = ((2,708^2 - 1,628^2) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,713 \cdot 7850 \cdot \frac{3}{4}) = 15439kg \quad (9.42)$$

Die Gesamtmasse der Turbine kann nun berechnet bzw. abgeschätzt werden zu

$$m_T = m_{Scheibe} - m_{Loch} - m_{Breite} - m_{Becher} \quad (9.43)$$

$$m_T = 32236 - 1188 - 4589 - 15439 = 11020kg \quad (9.44)$$

Das Turbinengewicht würde mit einem Diagramm aus Literatur [14] überprüft. Mit dem maximalen Außendurchmesser wurde die Gesamtmasse der Turbine zu ca. 11 t abgeschätzt, welche mit der Berechnung gut übereinstimmt.

Da nun die Masse des Peltonlaufrades abgeschätzt wurde, kann das polare und äquatoriale Massenträgheitsmoment bestimmt werden. Das Laufrad wird als Hohlzylinder angenommen. Mit den bekannten Formeln lassen sich  $\Theta_a$  und  $\Theta_p$  berechnen. Für den äußeren Durchmesser des Hohlzylinder wird  $D_1$  anstatt  $D_{T,a}$  angenommen, da die Becher ohnehin relativ wenig Masse besitzen und der äußerer

Durchmesser somit etwas kleiner zu wählen ist.

$$\Theta_p = m_T \cdot \frac{\left(\frac{D_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{D_i}{2}\right)^2}{2}$$

$$\Theta_p = 11020 \cdot \frac{\left(\frac{2,168}{2}\right)^2 + \left(\frac{0,520}{2}\right)^2}{2} = 6847 \text{kgm}^2$$

Für dünne Scheiben gilt die Beziehung

$$\Theta_a = \frac{\Theta_p}{2} = 3423 \text{kgm}^2 \quad (9.45)$$

### Maximale Durchgangsdrehzahl

Die maximale Durchgangsdrehzahl  $n_{max}$  ist bereits vorgegeben. Aufgrund Ihrer enormen Relevanz bezüglich der Schwingungsberechnung wird diese nachberechnet und verglichen. Die max. Nettofallhöhe  $H_{max,netto}$  ist die max. Bruttofallhöhe weniger der Verlusthöhe

$$H_{max,netto} = H_{max,brutto} - H_{T,v} = 818 - 13,66 = 804,34 \text{m} \quad (9.46)$$

Dadurch ergibt sich die max. Absolutgeschwindigkeit

$$c_1 = kc \cdot \sqrt{2gH_{max,brutto}} = 0,98 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 804,34} = 123,11 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (9.47)$$

sowie ein maximales  $n_{q,Düse,max}$

$$n_{q,Düse,max} = n \frac{\sqrt{Q_{T,Düse}}}{H_{max,netto}^{\frac{3}{4}}} = 8,33 \frac{\sqrt{4,22}}{804,34^{\frac{3}{4}}} = 0,113 \frac{\text{U}}{\text{s}} \quad (9.48)$$

Folgenden Formeln für die Berechnung der max. Durchgangsdrehzahl wurde aus Literatur [15] entnommen.

$$k_{R0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\arccos\left(\frac{1}{1+2 \cdot n_{q,Düse,max}}\right)}{\sqrt{n_{q,Düse,max} \cdot (1 + n_{q,Düse,max})}}$$

$$k_{R0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\arccos\left(\frac{1}{1+2 \cdot 0,113}\right)}{\sqrt{0,113 \cdot (1 + 0,113)}} = 0,8697$$

Somit kann die maximale Durchgangsdrehzahl berechnet werden zu

$$n_{max} = k_{R0} \frac{c_1}{\pi \cdot D_1} = 0,869 \frac{123,11}{\pi \cdot 2,168} = 15,70 \frac{U}{s} = 942,4 \frac{U}{s}$$

### 9.3.2 Berechnung rund um den Generator

Aus Literatur [13] wurden Formeln entnommen um Außendurchmesser, Länge sowie Masse des Generators zu berechnen. Nach Abbildung 16.18 in Literatur [13] auf Seite 658 wurde die Essonsche Ausnutzungsziffer zu  $C = 9,5 kVA_{min}/m^3$  bei einer Scheinleistung von 200 MVA abgelesen. Daraus lässt sich der Außendurchmesser des Generators berechnen zu

$$D_a = \sqrt[3]{\frac{P_i}{n_{syn} \lambda C}} = \sqrt[3]{\frac{200000}{500 \cdot 0,5 \cdot 9,5}} = 4,38m \quad (9.49)$$

wobei  $\lambda = 0,5$  gewählt wurde. Die Länge des Generators kann bestimmt werden zu

$$L = \lambda D = 0,5 \cdot 4,38 = 2,19m \quad (9.50)$$

Um die Gesamtmasse des Generators zu minimieren, sind diese als Hohlzylinder ausgeführt. Der Innendurchmesser wurde zu 2,38 m gewählt, sodass sich das polare Widerstandsmoment kaum verändert. Die Masse des Generators (nur Läufer) wird berechnet zu

$$m_{Generator} = (D_a^2 - D_i^2) \frac{\pi}{4} L \rho = (4,38^2 - 2,38^2) \frac{\pi}{4} \cdot 2,19 \cdot 7850 = 182549kg$$

Eine weitere Abschätzung der Masse von Generator konnte nach Literatur [16] durchgeführt werden.

$$m_{alt} = 50 \left( \frac{MVA}{\sqrt{n}} \right)^{0,74} = 50 \left( \frac{200}{\sqrt{500}} \right)^{0,74} = 253000kg \quad (9.51)$$

Da diese Berechnung bzw. Literatur aus dem Jahre 1978 stammt, sind diese Werte nach heutiger Stand der Technik nicht mehr aktuell. Für die Berechnung der Eigenfrequenzen wird daher die Masse  $m_{Generator}$  verwendet, die realistischer ist.

Nun kann polares und äquatoriales Massenträgheitsmoment berechnet werden.

$$\begin{aligned}\Theta_p &= \frac{m_{Generator}}{2} \left( \left( \frac{D_a}{2} \right)^2 + \left( \frac{D_i}{2} \right)^2 \right) \\ \Theta_p &= \frac{182549}{2} \left( \left( \frac{4,38}{2} \right)^2 + \left( \frac{2,38}{2} \right)^2 \right) = 5,67 \cdot 10^5 \text{kgm}^2 \\ \Theta_a &= m_{Generator} \left( \frac{ra^2 + ri^2}{4} + \frac{L^2}{12} \right) \\ \Theta_a &= 182549 \left( \frac{2,19^2 + 1,19^2}{4} + \frac{2,19^2}{12} \right) = 3,56 \cdot 10^5 \text{kgm}^2\end{aligned}$$

### 9.3.3 Berechnung rund um den Pumpbetrieb

Hauptziel der folgenden Berechnung ist, dass Massen sowie polare und äquatoriale Massenträgheiten der Pumpenlaufräder von der mehrstufigen Radialpumpe abgeschätzt werden. Ebenfalls soll der Innen- und Außendurchmesser der Welle ausgelegt werden. Begonnen wird wieder mit der Bestimmung der Verlusthöhe  $H_{P,v}$  die, sich aus der Verlusthöhe vom Druckstollen  $H_{P,v,stollen}$  und Druckschacht  $H_{P,v,schacht}$  zusammensetzt.

Um die maximale Verlusthöhe vom Druckstollen zu ermitteln, wird zunächst die mittlere Geschwindigkeit berechnet.

$$c_{P,stollen} = \frac{Q}{A} = \frac{Q_P \cdot 3}{\frac{D_{st}^2 \cdot \pi}{4}} = \frac{19,3 \cdot 3}{\frac{4,9^2 \cdot \pi}{4}} = 3,07 \frac{m}{s} \quad (9.52)$$

Daraus lässt sich die Reynold-Zahl ermitteln.

$$Re = \frac{c_{P,stollen} \cdot D_{st}}{\nu} = \frac{3,07 \cdot 4,9}{1 \cdot 10^{-6}} = 1,5 \cdot 10^7 \quad (9.53)$$

Unter Verwendung des Verhältnisses  $d/k=49000$  und der Reynolds-Zahl wurde folgendes Lambda  $\lambda$  aus dem Colebrooke Diagramm bestimmt.

$$\lambda = 0,0095 \quad (9.54)$$

Nun kann die Verlusthöhe  $H_{P,v,stollen}$  bestimmt werden.

$$H_{P,v,stollen} = \lambda \cdot \frac{L_{st}}{D_{st}} \cdot \frac{c_{P,stollen}^2}{2g} = 0,0095 \cdot \frac{5552}{4,9} \cdot \frac{3,07^2}{2g} = 5,17m \quad (9.55)$$

Die Verlusthöhe im Druckschacht  $H_{P,v,schacht}$  wird identisch berechnet. Mittlere Geschwindigkeit im Schacht bei Pumpbetrieb.

$$c_{P,schacht} = \frac{Q}{A} = \frac{Q_P \cdot 3}{\frac{D_{sch}^2 \cdot \pi}{4}} = \frac{19,3 \cdot 3}{\frac{3,8^2 \cdot \pi}{4}} = 5,11 \frac{m}{s} \quad (9.56)$$

Daraus resultiert die Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{c_{P,schacht} \cdot D_{sch}}{\nu} = \frac{5,11 \cdot 3,8}{1 \cdot 10^{-6}} = 1,9 \cdot 10^7 \quad (9.57)$$

Aus dem Colebrooke Diagramm lässt sich ein Lambda  $\lambda$  mit dem Verhältnis  $d/k=380000$  und der Reynolds-Zahl bestimmen zu

$$\lambda = 0,008 \quad (9.58)$$

Die Verlusthöhe  $H_{P,schacht}$  berechnet sich zu

$$H_{P,v,schacht} = \lambda \cdot \frac{L_{sch}}{D_{sch}} \cdot \frac{c_{P,sch}^2}{2g} = 0,008 \cdot \frac{1135}{3,8} \cdot \frac{5,11^2}{2g} = 3,18m \quad (9.59)$$

Werden nun Verlusthöhe des Druckstollen und Druckschachts addiert, so ergibt sich die gesamte Verlusthöhe im Pumpbetrieb.

$$H_{P,v} = H_{P,v,stollen} + H_{P,v,schacht} = 5,17 + 3,18 = 8,35m \quad (9.60)$$

Erwähnt sei, dass sämtliche andere Verluste, wie zum Beispiel die Einbauten nicht berücksichtigten wurden. **Berechnung der Pumpenleistung**

Zuerst wird die Pumpenleistung für den Auslegungspunkt nachgerechnet. Dabei wird die Förderhöhe  $H_{nenn}$  als Ausgangspunkt verwendet. Jedoch muss noch die Verlusthöhe  $H_{P,v}$  addiert werden, um die endgültige Förderhöhe  $H_P$  zu bestimmen.

$$H_P = H_{nenn} + H_{P,v} = 757 + 8,35 = 765,35m \quad (9.61)$$

Die Nennleistung der Pumpe beträgt somit

$$P_{P,nenn} = \frac{H_P \cdot \rho \cdot g \cdot Q_P}{\eta} = \frac{765,35 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 19,3}{0,92} = 157MW \quad (9.62)$$

Verglichen mit dem vorgegebenen Daten ist diese annähernd gleich.

Wesentlich interessanter ist jedoch die max. Pumpenleistung, da diese später den Innen- bzw. Außendurchmesser der Welle bestimmt. Die Differenz zwischen den Kopssee Stauziel (1809 m) und dem Rifa-Becken (1005 m) beträgt 804 m. Wird nun die Verlusthöhe  $H_{P,v}$  dazu addiert, so erhält man die max. Pumpenförderhöhe  $H_{P,max} = 812,35m$ . Die maximale Pumpenleistung ist somit

$$P_{P,max} = \frac{H_{P,max} \cdot \rho \cdot g \cdot Q_P}{\eta} = \frac{812,35 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 19,3}{0,92} = 167MW \quad (9.63)$$

### Wellenberechnung bei Pumpbetrieb

Die erzeugte Leistung im Motorgenerator wird der mehrstufigen Radialpumpe übertragen. Die dabei entstehenden Torsionsmomente werden ermittelt und anschließend werden Außen- und Innendurchmesser bestimmt, sodass die zulässige Spannung nicht überschritten wird. Das maximale Drehmoment wird bei maximaler Pumpleistung  $P_{P,max}$  erreicht.

$$M_t = \frac{P_{P,max}}{2 \cdot \pi \cdot n} = \frac{167 \cdot 10^6}{2 \cdot \pi \cdot 8,33} = 3190kNm \quad (9.64)$$

Bei einer dynamischen Beanspruchung liegen nach Literatur [12] die zulässigen Spannungen  $\tau_{zul}$  für einen üblichen Wellenstahl etwa bei 40-60  $\frac{N}{mm^2}$ . Somit kann das erforderliche Widerstandsmoment  $W_p$  berechnet werden zu

$$W_p = \frac{M_t}{\tau_{zul}} = \frac{3192000000}{60} = 5,32 \cdot 10^7 mm^3 \quad (9.65)$$

Wobei wiederum für einen Querschnitt ein Kreisringes das polare Widerstandsmoment  $W_p$

$$W_p = \pi \cdot \frac{Da^4 - Di^4}{16Da} \quad (9.66)$$

ist. Setzt man  $Di = 0$  so erhält man den kleinstmöglichen Außendurchmesser

$$Da = \sqrt[3]{\frac{16 W_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5,32 \cdot 10^7}{\pi}} = 647mm \quad (9.67)$$

Gewählt wurde jedoch ein Außendurchmesser von  $Da = 650mm$ , sodass ein In-

nendurchmesser von

$$D_i = \sqrt[4]{D_a^4 - \frac{16 W_p D_a}{\pi}} = \sqrt[4]{650^4 - \frac{16 \cdot 5,32 \cdot 10^7 \cdot 650}{\pi}} = 221\text{mm} \quad (9.68)$$

entsteht. Die Kreisringfläche verschafft eine Reduzierung der Querschnittfläche von ca. 10% verglichen mit der Kreisfläche von  $D_a = 647\text{mm}$ , was wiederum die Masse der Pumpenwelle positiv beeinflusst.

### Abmessung der Pumpenlaufräder

Nun werden essenzielle Abmessungen der Pumpenlaufräder bestimmt, sodass anschließend die Massen sowie polare und äquatoriale Massenträgheiten bestimmt werden können.

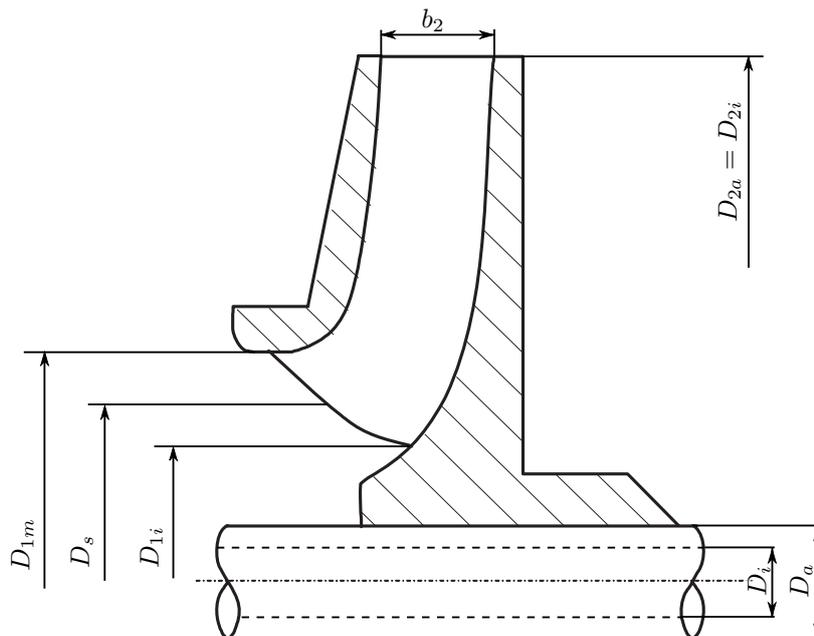


Abbildung 9.4: Abmessung eines radialen Kreiselpumpe [17]

Die spezifische Drehzahl pro Stufe für eine Radialpumpe ist

$$n_{q,stufe} = n \cdot \frac{\sqrt{Q_P}}{H_{P,stufe}^{\frac{3}{4}}} = 500 \cdot \frac{\sqrt{19,3}}{255,11^{\frac{3}{4}}} = 34,41 \frac{U}{min} \quad (9.69)$$

wobei  $H_{P,stufe} = \frac{H_P}{z_{P,stufe}}$  ist. Somit kann die Druckziffer und darauffolgende Formeln nach Literatur [18] berechnet werden zu

$$\psi = \frac{2}{n_q^{1/5}} = \frac{2}{34,41^{1/5}} = 0,987 \quad (9.70)$$

und der Laufradaußendurchmesser ist

$$D_{2a} = 0,45 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{H_{P,stufe} \cdot g}{\psi}} = 0,45 \cdot \frac{1}{8,33} \cdot \sqrt{\frac{255,11 \cdot 9,81}{0,987}} = 2,72m \quad (9.71)$$

sowie

$$D_{1i} = 0,35D_{2a} = 0,35 \cdot 2,72 = 0,952m \quad (9.72)$$

$$D_s = 0,5D_{2a} = 0,5 \cdot 2,72 = 1,36m \quad (9.73)$$

$$D_{1m} = \frac{D_{1i} + D_s}{2} = \frac{0,952 + 1,36}{2} = 1,16m \quad (9.74)$$

Die Geschwindigkeit  $c_{m1}$  kann ebenfalls berechnet werden. Wobei  $k_{m1} = 0,17$  ebenfalls aus Literatur [18] entnommen wurde.

$$c_{m1} = k_{m1} \sqrt{2gH_{P,stufe}} = 0,17 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 255,11} = 12,03 \frac{m}{s} \quad (9.75)$$

Die Laufradbreite  $b_1$  wird abgeschätzt mit

$$b_1 = k_1 \cdot \frac{Q_P}{D_{1m} \cdot \pi \cdot c_{m1}} = 1,09 \cdot \frac{19,3}{1,16 \cdot \pi \cdot 12,03} = 0,4798m \quad (9.76)$$

wobei  $k_1$  zuerst angenommen wurde zu 1,09. Dieser Beiwert muss und wird später iterativ bestimmt.

Aus Literatur [18] wurden folgende Werte entnommen  $k_{m2} = 0,135$ ,  $\beta_2 = 14^\circ - 21^\circ$  und der Beiwert  $k_2 = 1,05$  wurde zuerst frei abgeschätzt, muss aber später neu

bestimmt werden. Somit sind

$$u_1 = D_{1m} \pi n = 1,16 \cdot \pi \cdot 8,33 = 30,35 \frac{m}{s} \quad (9.77)$$

$$c_{m2} = k_{m2} \sqrt{2g H_{P,stufe}} = 0,135 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 255,11} = 9,55 \frac{m}{s} \quad (9.78)$$

$$b_2 = \frac{Q_P}{D_{2m} \cdot \pi \cdot c_{m2}} \quad k_2 = \frac{19,3}{2,72 \cdot \pi \cdot 9,55} \quad 1,05 = 0,25m \quad (9.79)$$

$$z_P = \frac{\beta_2}{3} = 20/3 = 6,66 \approx 7 \quad (9.80)$$

Nach Literatur [17] ist bei einer Schaufelzahl von  $z_P = 7$  eine Leitschaufelzahl von  $z_{P,Leit} = 12$  zu empfehlen.

Der Beiwert  $k_1$  wurde zuerst zu 1,09 angenommen. Dieser wird jedoch iterativ bestimmt. Führt man eine Iteration durch, so erhalten wir eine neue Laufradbreite.

$$\beta_1 = \arctan\left(\frac{c_{m1}}{u_1}\right) = \arctan\left(\frac{12,03}{30,35}\right) = 21,62 \quad (9.81)$$

$$k_1 = \frac{D_{1m} \cdot \pi}{D_{1m} \pi - z_P \frac{s}{\sin(\beta_1)}} = \frac{1160 \cdot \pi}{1160 \pi - 7 \frac{10}{\sin(21,62)}} = 1,055 \quad (9.82)$$

$$c_{m1} = k_1 \frac{Q}{\pi D_{1m} b_1} = 1,055 \frac{19,3}{\pi \cdot 1,16 \cdot 0,4798} = 11,64m/s \quad (9.83)$$

$$b_1 = k_1 \cdot \frac{Q_P}{D_{1m} \cdot \pi \cdot c_{m1}} = 1,055 \cdot \frac{19,3}{1,16 \cdot \pi \cdot 11,64} = 0,48m \quad (9.84)$$

Die Schaufelstärke  $s$  wurde zu 10mm gewählt. Der Beiwert  $k_2$  muss ebenfalls neu bestimmt werden.

$$k_2 = \frac{D_{2a} \pi}{D_{2a} \pi - z_P \frac{s}{\sin(\beta_2)}} = \frac{2720 \pi}{2720 \pi - 7 \frac{10}{\sin(20)}} = 1,025 \quad (9.85)$$

Aus Literatur [18] folgen diese Beziehungen.

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{1+p} = \frac{1}{1+0,28} = 0,78 \\ Y_{th\infty} &= \frac{Y}{\mu \cdot \eta_i} = \frac{255,11 \cdot 9,81}{0,78 \cdot 0,94} = 3413 J/kg \\ u_2 &= D_{2a} \cdot \pi \cdot n = 2,72 \cdot \pi \cdot 8,33 = 71,18 m/s \\ c_{u2\infty} &= \frac{Y_{th\infty}}{u_2} = \frac{3413}{71,18} = 47,94 m/s \\ c_{m2} &= (u_s - c_{u2\infty}) \cdot \tan(\beta_2) = (71,18 - 47,94) \cdot \tan(20) = 8,45 m/s\end{aligned}$$

Da keine genaueren Daten zum inneren Wirkungsgrad  $\eta_i$  vorliegen, wurde dieser zu 0,94 gewählt. Der Beiwert p wurde nach Literatur [18] bestimmt, und somit ergibt sich eine neue Austrittsbreite

$$b_2 = k_2 \cdot \frac{Q}{\pi \cdot D_{2m} \cdot c_{m2}} = 1,025 \cdot \frac{19,3}{\pi \cdot 2,72 \cdot 8,45} = 0,27 m \quad (9.86)$$

Da nun die entscheidenden Abmessungen des Pumpenlaufrades bestimmt wurden, kann die Masse und das polare sowie äquatoriale Massenträgheitsmoment abgeschätzt werden.

Zur Bestimmung der Pumpenlaufradmasse wurde angenommen, dass das Pumpenlaufrad ein Hohlzylinder mit Außendurchmesser  $D_{2a}$ , Innendurchmesser  $D_a$  und Breite  $b_1$  ist. Um diese Näherung zu optimieren, wird ein Faktor von  $\frac{1}{2}$  der Gleichung zugefügt. Der Faktor lässt sich vom Querschnitt eines Pumpenlaufrades für Mitteldruck ( $n_q = 40$ ) ableiten. Vergleicht man den Querschnitt des Hohlzylinders und Pumpenlaufrades, so stellt man eine Differenz von ca. 50% fest. Somit ergibt sich eine Gesamtmasse eines Pumpenlaufrades zu

$$m_{pu} = (D_{2a}^2 - D_a^2) \frac{\pi}{4} b_1 \rho \frac{2}{3} = (2,72^2 - 0,65^2) \frac{\pi}{4} \cdot 0,48 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7850 = 10317 kg \quad (9.87)$$

und polares und äquatoriales Massenträgheitsmoment

$$\Theta_p = \frac{m}{2} ((D_{2a})^2 + (\varnothing_i)^2) = \frac{10317}{2} \left( \left(\frac{2,72}{2}\right)^2 + \left(\frac{0,22}{2}\right)^2 \right) = 9603 kgm^2 \quad (9.88)$$

$$\Theta_a = \frac{\Theta_p}{2} = \frac{7480}{2} = 4801 kgm^2 \quad (9.89)$$

Da eine Kreiselpumpe ähnlich aufgebaut ist wie eine Francis Turbine wird zur Überprüfung der Gesamtmasse das Diagramm aus Literatur [14] verwendet. Mit dem maximalen Außendurchmesser ist die Pumpenmasse ca. 11 t, was gut übereinstimmt mit der Berechnung.

### 9.3.4 Berechnung rund um das Axiallager

Ziel dieser Berechnung ist, dass die Massen sowie polare und äquatoriale Massenträgheiten der Axiallager abgeschätzt werden. Da sich der Maschinensatz in vertikaler Position befindet, müssen alle Kräfte in vertikaler Richtung z.B. Gewichtskräfte oder Axial Schub im Pumpbetrieb vom Axiallager aufgenommen werden. Ein "Ring" wurde am Generatorstrang fixiert, dieser leitete alle vertikalen Kräfte über das Axiallager in das Fundament ein. Beim Pumpenstrang nimmt ebenfalls ein "Ring" alle vertikalen Kräfte auf. Nun ist zu bestimmen, welchen Innen- und Außendurchmesser, sowie Breite dieser "Ring" hat, um anschließend Masse und Massenträgheitsmoment zu berechnen.

Nach Literatur [2] werden Spurlager (Axiallager) als Kippsegmentlager bei Wasserkraftmaschinen eingesetzt. Dabei ist eine spezifische Pressung von maximal  $4N/mm^2$  erreichbar. Die folgende Formeln für die Berechnung der Axiallager wurde aus Literatur [19] entnommen.

#### Axiallager bei Generatorstrang

In Abbildung 7.2 ist ersichtlich, dass sich unterhalb des Generators das Axiallager befindet. Die Axialkraft, welche auf das Axiallager wirkt, setzt sich aus der Gewichtskraft von Turbine, Generator, dem Axiallager selbst und dem gesamten Wellengewicht bis zum Wandler zusammen. Alle anderen Massen wurden vernachlässigt, da diese nicht weiter identifizierbar sind.

$$F_{Turbine} = m_T g = 11020 \cdot 9,81 = 1,08 \cdot 10^5 N$$

$$F_{Generator} = m_G g = 166666 \cdot 9,81 = 1,79 \cdot 10^6 N$$

$$F_{Welle} = (Da^2 - Di^2) \frac{\pi}{4} L g \rho = (0,750^2 - 0,520^2) \frac{\pi}{4} 26 \cdot 9,81 \cdot 7850 = 4,68 \cdot 10^5 N$$

$$F_{Wandler} = m_P g = 10317 \cdot 9,81 = 1,02 \cdot 10^5 N$$

L ist die Länge von der Turbine bis zum Wandler und wurde aus Skizze 7.2 abgeschätzt. Da keine näheren Informationen bzw. Berechnungen möglich waren, wurde

eine Hälfte des hydraulischen Wandlers mit den gleichen Massen und Massenträgheiten versehen wie ein Pumpenlaufrad. Die daraus resultierende Axialkraft ist

$$F_{a,Turbine} = F_{Turbine} + F_{Generator} + F_{Welle} + F_{Wandler} = 2,47 \cdot 10^6 N \quad (9.90)$$

Der innere Durchmesser wurde mit  $D_{i,Lager} = 0,8m$  und der äußere Durchmesser  $D_{a,Lager} = 1,5m$  angenommen. Anzahl der Kippsegmente soll nach Literatur [19] zwischen 4-12 liegen, gewählt wurde  $z_k = 10$ . Somit lassen sich folgende Werte des Lagers berechnen.

$$\text{Breite } b = \frac{D_{a,Lager} - D_{i,Lager}}{2} = \frac{1,5 - 0,8}{2} = 0,35m$$

$$\text{Länge } l = \frac{b}{4} \left( \frac{D_{a,Lager}}{b} - 1 \right) = \frac{0,35}{4} \left( \frac{1,5}{0,35} - 1 \right) = 0,2875m$$

$$\text{gedrückte Fläche } AL = z_k b l = 10 \cdot 0,35 \cdot 0,2875 = 1,00m^2$$

Somit liegt die spezifische Flächenpressung

$$p = \frac{F_{a,Turbine}}{AL} = \frac{2,47 \cdot 10^6}{1,00} = 2,47 \cdot 10^6 N/m^2 = 2,47 N/mm^2 \quad (9.91)$$

unterhalb der zulässigen spezifischen Flächenpressung von  $4 N/mm^2$ . Für genauere Werte der Axiallager müssten weitere Berechnungen durchgeführt werden. Dies würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Es sei jedoch auf die sehr umfangreiche Literatur [20] hingewiesen.

Da Innen- und Außendurchmesser ausgelegt wurden, muss die Dicke des "Ringes" bestimmt werden. Die spezifische Flächenpressung wird den Ring abhängig von seiner Dicke elastisch verformen bzw. Absenken. Die Literatur [21] beschreibt dieses Problem relativ passend. Absenkung, Biegemoment und Querkraft wurden mithilfe folgendem Matlabskriptes berechnet.[21]

```
% Kreisringplatte ,
%konstante Flaechenlast ,
%am Innenrand eingespannt
clear all
ri = 400;
ra =750;
t = 300;
E = 2.1e5;
```

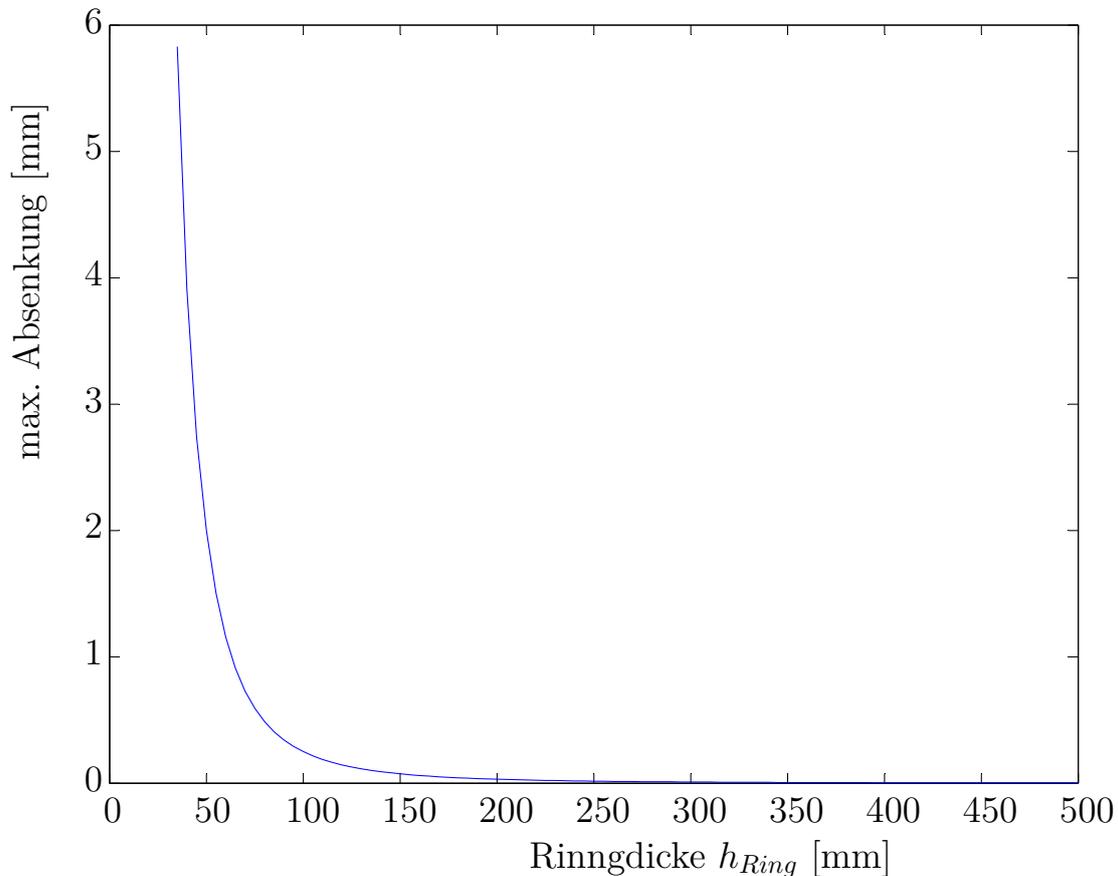
```

ny = 0.3;
p0 = 2,47;
K = E*t^3/(12*(1-ny^2));
A = [ 1 log(ri/ra) ri^2 ri^2*log(ri/ra);
      0 1/ri 2*ri ri*(2*log(ri/ra)+1);
      0 -(1-ny)/ra^2 2*(1+ny) 3+ny;
      0 0 0 4/ra ];
b = - [ ri^4 ; 4*ri^3 ; 4*(3+ny)*ra^2 ; 32*ra ] * p0/(64*K) ;
x = A \ b; % Loesung des Gleichungssystems
C1 = x(1);
C2 = x(2);
C3 = x(3);
C4 = x(4);
r = ri:(ra-ri)/100:ra;
w = p0*r.^4/(64*K) + C1 + C2*log(r/ra) +
    C3*r.^2 + C4*r.^2.*log(r/ra);
mr = -K*((3+ny)*p0*r.^2/(16*K) - C2*(1-ny)./r.^2 +
    C3*2*(1+ny) + C4*(3+ny+2*(1+ny)*log(r/ra)));
qr = -K*(p0*r/(2*K) + C4*4./r);

subplot(3,1,1);plot(r,w),axis ij,grid on,title('w(r)'),
    xlim([0 ra])
subplot(3,1,2);plot(r,mr),grid on,title('m_r(r)'),xlim([0 ra])
subplot(3,1,3);plot(r,qr),grid on,title('q_r(r)'),xlim([0 ra])
disp(['Maximale Durchbiegung:w_max=',num2str(max(w))]);
disp(['Maximales Biegemoment:mr_max=',num2str(max(abs(mr)))]);
disp(['Maximale Querkraft:qr_max=',num2str(max(abs(qr)))]);

```

Es wurde ein Diagramm erstellt (vgl. Abbildung 9.5) in dem sich zeigt welche maximale Absenkung sich bei einer bestimmten Ringdicke einstellt. Gut ersichtlich ist, dass bei  $h_{Ring} = 150mm$  die Absenkung mit steigender Ringdicke stagniert.



**Abbildung 9.5:** Absenkung des Ringes bei bestimmter Ringdicke.  
 $R_i=400\text{mm}$ ,  $R_a=750\text{mm}$ ,  $p_0=2.47\text{N/mm}^2$

Gewählt wurde jedoch eine Ringdicke von  $h_{Ring} = 250\text{mm}$ , um ausreichende Sicherheit zu gewährleisten. Somit kann die Masse und Massenträgheiten des Axiallagers bzw. des Ringes sofort berechnet werden zu

$$m_{TG,Axiallager} = (D_a^2 - D_i^2) \frac{\pi}{4} h_{Ring} \rho = (1,5^2 - 0,8^2) \frac{\pi}{4} \cdot 0,25 \cdot 7850 = 2481\text{kg}$$

$$\Theta_p = \frac{m_{TG,Axiallager}}{2} \left( \left( \frac{D_a}{2} \right)^2 + \left( \frac{D_i}{2} \right)^2 \right) = \frac{2481}{2} \left( \left( \frac{1,5}{2} \right)^2 + \left( \frac{0,8}{2} \right)^2 \right) = 896\text{kgm}^2$$

$$\Theta_a = \frac{\Theta_p}{2} = \frac{896}{2} = 448\text{kgm}^2$$

### Axiallager bei Pumpenstrang

Hier liegt eine nahezu identische Vorgehensweise wie beim Axiallager für den Generatorstrang vor. Jedoch ist die Axialkraft nun nicht mehr die Summe aller

Gewichtskräfte. Die mehrstufige Radialpumpe besitzt einen Axial Schub der nicht vernachlässigt werden sollte. Hierzu wird eine Faustformel aus Literatur [17] verwendet, die die Axialkraft der Pumpe abschätzt.

$$F_{ax} = (0,7 - 0,9) \rho g H_{P,max} A \quad (9.92)$$

$$F_{ax} = 0,9 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 812,35 \cdot (1,36^2 - 0,95^2) \frac{\pi}{4} = 5,34 \cdot 10^6 N \quad (9.93)$$

Die Gewichtskraft des Pumpenstranges bis zum Wandler ist

$$F_{Gewichtskraft} = [(D_a^2 - D_i^2) \frac{\pi}{4} L \rho + 3 m_{Pumpe} + m_{Wandler}] g$$

$$F_{Gewichtskraft} = [(0,65^2 - 0,221^2) \frac{\pi}{4} 12 \cdot 7850 + 3 \cdot 10317 + 10317] 9,81 = 6,76 \cdot 10^5 N$$

Die Masse des Wandlers wurde dem eines Pumpenlaufrades angenommen, da keine weiteren Daten vorliegen. Die Länge des Pumpenstranges bis zum Wandler wurde aus Abbildung 7.2 entnommen. Für die gesamte Axialkraft werden beide Kräfte addiert.

$$F_{axial,Pumpe} = F_{ax} + F_{Gewichtskraft} = 5,34 \cdot 10^6 + 6,76 \cdot 10^5 = 6,02 \cdot 10^6 N \quad (9.94)$$

Parameter des Axiallagers werden festgelegt.  $D_{i,Lager} = 0,650m$ ,  $D_{a,Lager} = 1,8m$  und  $z_k = 10$ . Länge, Breite und gedrückte Flächen können festgelegt werden zu

$$\text{Breite } b = \frac{D_{a,Lager} - D_{i,Lager}}{2} = \frac{1,8 - 0,65}{2} = 0,575m$$

$$\text{Länge } l = \frac{b}{4} \left( \frac{D_{a,Lager}}{b} - 1 \right) = \frac{0,575}{4} \left( \frac{1,8}{0,575} - 1 \right) = 0,306m$$

$$\text{gedrückte Fläche } AL = z_k b l = 10 \cdot 0,575 \cdot 0,306 = 1,76m^2$$

Somit kann die spezifische Flächenpressung ermittelt werden zu

$$p = \frac{F_{axial,Pumpe}}{AL} = \frac{6,02 \cdot 10^6}{1,76} = 3,48 N/mm^2 \quad (9.95)$$

die unterhalb der zulässigen spezifischen Flächenpressung liegt. Werden die bestimmten Lagerdaten wieder in das Matlabskript eingefügt, so kann die Ringdicke mit  $h_{Ring} = 350mm$  abgeschätzt werden. Masse und Massenträgheitsmoment sind

daher

$$m_{TG,Axiallager} = (D_a^2 - D_i^2) \frac{\pi}{4} h_{Ring} \rho = (1,8^2 - 0,65^2) \frac{\pi}{4} \cdot 0,35 \cdot 7850 = 6079,8kg$$
$$\Theta_p = \frac{m_{TG,Axiallager}}{2} \left( \left( \frac{D_a}{2} \right)^2 + \left( \frac{D_i}{2} \right)^2 \right) = \frac{6079}{2} \left( \left( \frac{1,8}{2} \right)^2 + \left( \frac{0,65}{2} \right)^2 \right) = 2783kgm^2$$
$$\Theta_a = \frac{\Theta_p}{2} = \frac{896}{2} = 1391kgm^2$$

Datenblatt: Turbinenbetrieb Biegung

Datenblatt für  
HydroVib

Dichte :=	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
E-Modul :=	2,10E+11	[N/m <sup>2</sup> ]
G-Modul :=	8,80E+10	[N/m <sup>2</sup> ]

Position	Auswahl	Øa :=	Øi :=	Ø1 :=	Ø2 :=	L :=	Øa :=	Øi :=	Ø1 :=	Ø2 :=	E-Modul :=	ρ :=	GL :=
1	Welle-massebehafte-Biegung	1,80	0,75	0,22	0	0,50	4801	0,50	0,22	0	2,1E+11	7850	1
2	Massenpunkt-reduziert-Biegung	1,0E+04	0,75	0	0	Øa =	Øa =	Øi =	Ø1 =	Ø2 =	Øp =	e :=	
3	Welle-massebehafte-Biegung	1,80	0,75	0,22	0	0,50	4801	0,50	0,22	0	2,1E+11	7850	1
4	Welle-massebehafte-Biegung	0,75	0,75	0,52	0	0,70	0,70	0,70	0,52	0	2,1E+11	7850	
5	Feder-Dämpfer-Element-Biegung	1,8E+09	0,75	1,8E+09	0	dzz :=	dzz :=	cyy :=	cyy :=	dyy :=	dyy :=		
6	Welle-massebehafte-Biegung	0,75	0,75	0,52	0	0,70	0,70	0,70	0,52	0	2,1E+11	7850	
7	Massenpunkt-reduziert-Biegung	2481	0,75	0	0	Øa =	Øa =	Øi =	Ø1 =	Ø2 =	Øp =	e :=	
8	Welle-massebehafte-Biegung	0,75	0,75	0,52	0	0,70	0,70	0,70	0,52	0	2,1E+11	7850	
9	Feder-Dämpfer-Element-Biegung	1,8E+09	0,75	1,8E+09	0	dzz :=	dzz :=	cyy :=	cyy :=	dyy :=	dyy :=		
10	Welle-massebehafte-Biegung	0,75	0,75	0,52	0	0,70	0,70	0,70	0,52	0	2,1E+11	7850	
11	Welle-massebehafte-Biegung	4,38	0,75	2,38	0	0,90	1,09	1,09	2,38	0	2,1E+11	7850	
12	Massenpunkt-reduziert-Biegung	1,8E+05	0,75	0	0	Øa =	Øa =	Øi =	Ø1 =	Ø2 =	Øp =	e :=	
13	Welle-massebehafte-Biegung	4,38	0,75	2,38	0	0,90	1,09	1,09	2,38	0	2,1E+11	7850	
14	Welle-massebehafte-Biegung	0,75	0,75	0,52	0	0,70	0,70	0,70	0,52	0	2,1E+11	7850	
15	Feder-Dämpfer-Element-Biegung	1,1E+09	0,75	1,1E+09	0	dzz :=	dzz :=	cyy :=	cyy :=	dyy :=	dyy :=		
16	Welle-massebehafte-Biegung	0,75	0,75	0,52	0	0,70	0,70	0,70	0,52	0	2,1E+11	7850	
17	Welle-massebehafte-Biegung	0,75	0,75	0,52	0	0,70	0,70	0,70	0,52	0	2,1E+11	7850	
18	Welle-massebehafte-Biegung	0,75	0,75	0,52	0	0,70	0,70	0,70	0,52	0	2,1E+11	7850	
19	Welle-massebehafte-Biegung	2,17	0,75	0,52	0	0,35	0,35	0,35	0,52	0	2,1E+11	7850	
20	Massenpunkt-reduziert-Biegung	1,1E+04	0,75	0	0	Øa =	Øa =	Øi =	Ø1 =	Ø2 =	Øp =	e :=	
21	Welle-massebehafte-Biegung	2,17	0,75	0,52	0	0,35	0,35	0,35	0,52	0	2,1E+11	7850	
22	Welle-massebehafte-Biegung	0,75	0,75	0,52	0	0,70	0,70	0,70	0,52	0	2,1E+11	7850	
23	Feder-Dämpfer-Element-Biegung	1,1E+09	0,75	1,1E+09	0	dzz :=	dzz :=	cyy :=	cyy :=	dyy :=	dyy :=		
24	Welle-massebehafte-Biegung	0,75	0,75	0,52	0	0,70	0,70	0,70	0,52	0	2,1E+11	7850	

Datenblatt: Pumpe Biegung

Datenblatt für  
HydroVib

Dichte :=	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
E-Modul :=	2,10E+11	[N/m <sup>2</sup> ]
G-Modul :=	8,80E+10	[N/m <sup>2</sup> ]

Position	Auswahl		m :=	6079	[kg]	$\Theta_a :=$	1391	[kg*m <sup>2</sup> ]	$\Theta_p :=$	2783	[kg*m <sup>2</sup> ]	e :=	1,0E-03	[m]	GL :=	1			
1	Massenpunkt-reduziert-Biegung	$\Phi_a :=$	0,65	[m]	$\Phi_i :=$	0,22	[m]	E-Modul :=	2,1E+11	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho :=$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]						
2	Welle-massebehaftet-Biegung	czz :=	2,2E+09	[N/m]	cyy :=	2,2E+09	[N/m]	dzz :=	0	[N*s/m]									
3	Feder-Dämpfer-Element-Biegung	$\Phi_a :=$	1,0E+04	[kg]	$\Phi_i :=$	0,22	[m]	$\Theta_a :=$	4801	[kg*m <sup>2</sup> ]	$\Theta_p :=$	9603	[kg*m <sup>2</sup> ]	$\rho :=$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]			
4	Welle-massebehaftet-Biegung	m :=	1,0E+04	[kg]	mr :=	0	[kg]	$\Theta_a :=$	4801	[kg*m <sup>2</sup> ]	$\Theta_p :=$	9603	[kg*m <sup>2</sup> ]	e :=	1,0E-03	[m]	GL :=	1	
5	Massenpunkt-reduziert-Biegung	$\Phi_a :=$	0,65	[m]	$\Phi_i :=$	0,22	[m]	$\Theta_a :=$	1,50	[m]	E-Modul :=	2,1E+11	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho :=$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]			
6	Welle-massebehaftet-Biegung	m :=	1,0E+04	[kg]	mr :=	0	[kg]	$\Theta_a :=$	4801	[kg*m <sup>2</sup> ]	$\Theta_p :=$	9603	[kg*m <sup>2</sup> ]	e :=	1,0E-03	[m]	GL :=	1	
7	Massenpunkt-reduziert-Biegung	$\Phi_a :=$	0,65	[m]	$\Phi_i :=$	0,22	[m]	$\Theta_a :=$	1,50	[m]	E-Modul :=	2,1E+11	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho :=$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]			
8	Welle-massebehaftet-Biegung	m :=	1,0E+04	[kg]	mr :=	0	[kg]	$\Theta_a :=$	4801	[kg*m <sup>2</sup> ]	$\Theta_p :=$	9603	[kg*m <sup>2</sup> ]	e :=	1,0E-03	[m]	GL :=	1	
9	Massenpunkt-reduziert-Biegung	$\Phi_a :=$	0,65	[m]	$\Phi_i :=$	0,22	[m]	$\Theta_a :=$	4801	[kg*m <sup>2</sup> ]	$\Theta_p :=$	9603	[kg*m <sup>2</sup> ]	$\rho :=$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]			
10	Welle-massebehaftet-Biegung	m :=	1,0E+04	[kg]	mr :=	0	[kg]	$\Theta_a :=$	4801	[kg*m <sup>2</sup> ]	$\Theta_p :=$	9603	[kg*m <sup>2</sup> ]	e :=	1,0E-03	[m]	GL :=	1	
11	Feder-Dämpfer-Element-Biegung	czz :=	2,2E+09	[N/m]	cyy :=	2,2E+09	[N/m]	dzz :=	0	[N*s/m]									
12	Welle-massebehaftet-Biegung	$\Phi_a :=$	0,65	[m]	$\Phi_i :=$	0,22	[m]	$\Theta_a :=$	2	[m]	E-Modul :=	2,1E+11	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho :=$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]			
13	Welle-massebehaftet-Biegung	m :=	1,80	[m]	mr :=	0	[kg]	$\Theta_a :=$	0,50	[m]	E-Modul :=	2,1E+11	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho :=$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]			
14	Massenpunkt-reduziert-Biegung	$\Phi_a :=$	1,80	[m]	$\Phi_i :=$	0,22	[m]	$\Theta_a :=$	4801	[kg*m <sup>2</sup> ]	$\Theta_p :=$	9603	[kg*m <sup>2</sup> ]	e :=	1,0E-03	[m]	GL :=	1	
15	Welle-massebehaftet-Biegung	m :=	1,80	[m]	mr :=	0	[kg]	$\Theta_a :=$	0,50	[m]	E-Modul :=	2,1E+11	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho :=$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]			

# Datenblatt: Pumpbetrieb Biegung

Datenblatt für  
HydroVib

Dichte :=	7850	kg/m <sup>3</sup>
E-Modul :=	2,10E+11	N/m <sup>2</sup>
G-Modul :=	8,80E+10	N/m <sup>2</sup>

Positior	Auswahl	m :=	kg	mr :=	0	kg	Θ <sub>a</sub> =	1391	kg*m <sup>2</sup>	Θ <sub>p</sub> =	2783	kg*m <sup>2</sup>	e :=	1,0E-03	in	GL :=	1	
1	Massenpunkt-reduziert-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	0,65	m	Øi :=	0,22	m	L :=	1	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
2	Welle-massehaftet-Biegung	czz :=	2,2E+09	N/m	Øi :=	0,22	m	L :=	1	m	dyy :=	0	N*s/m					
3	Feder-Dämpfer-Element-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	0,65	m	Øi :=	0,22	m	L :=	3	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
4	Welle-massehaftet-Biegung	m :=	1,0E+04	kg	mr :=	0	kg	Θ <sub>a</sub> =	4801	kg*m <sup>2</sup>	Θ <sub>p</sub> =	9603	kg*m <sup>2</sup>	e :=	1,0E-03	in	GL :=	1
5	Massenpunkt-reduziert-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	0,65	m	Øi :=	0,22	m	L :=	1,50	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
6	Welle-massehaftet-Biegung	m :=	1,0E+04	kg	mr :=	0	kg	Θ <sub>a</sub> =	4801	kg*m <sup>2</sup>	Θ <sub>p</sub> =	9603	kg*m <sup>2</sup>	e :=	1,0E-03	in	GL :=	1
7	Massenpunkt-reduziert-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	0,65	m	Øi :=	0,22	m	L :=	1,50	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
8	Welle-massehaftet-Biegung	m :=	1,0E+04	kg	mr :=	0	kg	Θ <sub>a</sub> =	4801	kg*m <sup>2</sup>	Θ <sub>p</sub> =	9603	kg*m <sup>2</sup>	e :=	1,0E-03	in	GL :=	1
9	Massenpunkt-reduziert-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	0,65	m	Øi :=	0,22	m	L :=	2	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
10	Welle-massehaftet-Biegung	czz :=	2,2E+09	N/m	Øi :=	0,22	m	L :=	2	m	dyy :=	0	N*s/m					
11	Feder-Dämpfer-Element-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	0,65	m	Øi :=	0,22	m	L :=	2	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
12	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	1,80	m	Øi :=	0,22	m	L :=	0,50	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
13	Welle-massehaftet-Biegung	m :=	1,0E+04	kg	mr :=	0	kg	Θ <sub>a</sub> =	4801	kg*m <sup>2</sup>	Θ <sub>p</sub> =	9603	kg*m <sup>2</sup>	e :=	1,0E-03	in	GL :=	1
14	Massenpunkt-reduziert-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	1,80	m	Øi :=	0,22	m	L :=	0,50	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
15	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	1,80	m	Øi :=	0,22	m	L :=	0,50	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
16	Wandler																	
17	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	1,80	m	Øi :=	0,22	m	L :=	0,50	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
18	Massenpunkt-reduziert-Biegung	m :=	1,0E+04	kg	mr :=	0	kg	Θ <sub>a</sub> =	4801	kg*m <sup>2</sup>	Θ <sub>p</sub> =	9603	kg*m <sup>2</sup>	e :=	1,0E-03	in	GL :=	1
19	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	1,80	m	Øi :=	0,22	m	L :=	0,50	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
20	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	0,75	m	Øi :=	0,52	m	L :=	0,70	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
21	Feder-Dämpfer-Element-Biegung	czz :=	1,8E+09	N/m	Øi :=	1,8E+09	N/m	dzz :=	0	N*s/m	dyy :=	0	N*s/m					
22	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	0,75	m	Øi :=	0,52	m	L :=	3	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
23	Massenpunkt-reduziert-Biegung	m :=	2481	kg	mr :=	0	kg	Θ <sub>a</sub> =	448	kg*m <sup>2</sup>	Θ <sub>p</sub> =	896	kg*m <sup>2</sup>	e :=	1,0E-03	in	GL :=	1
24	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	1,8E+09	N/m	Øi :=	0,52	m	L :=	4	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
25	Feder-Dämpfer-Element-Biegung	czz :=	1,8E+09	N/m	Øi :=	1,8E+09	N/m	dzz :=	0	N*s/m	dyy :=	0	N*s/m					
26	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	0,75	m	Øi :=	0,52	m	L :=	0,90	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
27	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	4,38	m	Øi :=	2,38	m	L :=	1,10	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
28	Massenpunkt-reduziert-Biegung	m :=	1,8E+05	kg	mr :=	0	kg	Θ <sub>a</sub> =	3,7E+05	kg*m <sup>2</sup>	Θ <sub>p</sub> =	5,7E+05	kg*m <sup>2</sup>	e :=	1,0E-03	in	GL :=	1
29	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	4,38	m	Øi :=	2,38	m	L :=	1,10	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
30	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	0,75	m	Øi :=	0,52	m	L :=	2	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
31	Feder-Dämpfer-Element-Biegung	czz :=	1,1E+09	N/m	Øi :=	1,1E+09	N/m	dzz :=	0	N*s/m	dyy :=	0	N*s/m					
32	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	0,75	m	Øi :=	0,52	m	L :=	3	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
33	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	0,75	m	Øi :=	0,52	m	L :=	3	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
34	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	0,75	m	Øi :=	0,52	m	L :=	3	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
35	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	2,17	m	Øi :=	0,52	m	L :=	0,35	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
36	Massenpunkt-reduziert-Biegung	m :=	1,1E+04	kg	mr :=	0	kg	Θ <sub>a</sub> =	3423	kg*m <sup>2</sup>	Θ <sub>p</sub> =	6487	kg*m <sup>2</sup>	e :=	1,0E-03	in	GL :=	1
37	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	2,17	m	Øi :=	0,52	m	L :=	0,35	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
38	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	0,75	m	Øi :=	0,52	m	L :=	1,80	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		
39	Feder-Dämpfer-Element-Biegung	czz :=	1,1E+09	N/m	Øi :=	1,1E+09	N/m	dzz :=	0	N*s/m	dyy :=	0	N*s/m					
40	Welle-massehaftet-Biegung	Q <sub>a</sub> :=	0,75	m	Øi :=	0,52	m	L :=	0,70	m	E-Modul :=	2,1E+11	N/m <sup>2</sup>	ρ =	7850	kg/m <sup>3</sup>		

Datenblatt: Turbinenbetrieb Torsion

Datenblatt für  
HydroVib

Dichte :=	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
E-Modul :=	2,10E+11	[N/m <sup>2</sup> ]
G-Modul :=	8,80E+10	[N/m <sup>2</sup> ]

Position	Auswahl	$\varnothing_a$ :=	[m]	$\varnothing_i$ :=	[m]	$\varnothing_a$ :=	[m]	$\varnothing_i$ :=	[m]	L :=	[m]	G :=	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho$ :=	[kg/m <sup>3</sup> ]
1	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\varnothing_p$ :=	1,80	$c$ :=	0,22	$\varnothing_a$ :=	0,22	$\varnothing_i$ :=	0	L :=	0,50	G :=	8,8E+10	$\rho$ :=	7850
2	Massenpunkt-Torsion	$\varnothing_p$ :=	9603	$c$ :=	0	$\varnothing_a$ :=	0	$\varnothing_i$ :=	0	d :=	0	Me :=	10	$\varepsilon$ :=	0
3	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\varnothing_a$ :=	1,80	$\varnothing_i$ :=	0,22	$\varnothing_a$ :=	0,22	$\varnothing_i$ :=	0,22	L :=	0,50	G :=	8,8E+10	$\rho$ :=	7850
4	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\varnothing_a$ :=	0,75	$\varnothing_i$ :=	0,52	$\varnothing_a$ :=	0,52	$\varnothing_i$ :=	0,52	L :=	0,70	G :=	8,8E+10	$\rho$ :=	7850
5	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\varnothing_a$ :=	0,75	$\varnothing_i$ :=	0,52	$\varnothing_a$ :=	0,52	$\varnothing_i$ :=	0,52	L :=	3	G :=	8,8E+10	$\rho$ :=	7850
6	Massenpunkt-Torsion	$\varnothing_p$ :=	896	$c$ :=	0	$\varnothing_a$ :=	0	$\varnothing_i$ :=	0	d :=	0	Me :=	10	$\varepsilon$ :=	0
7	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\varnothing_a$ :=	0,75	$\varnothing_i$ :=	0,52	$\varnothing_a$ :=	0,52	$\varnothing_i$ :=	0,52	L :=	4	G :=	8,8E+10	$\rho$ :=	7850
8	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\varnothing_a$ :=	0,75	$\varnothing_i$ :=	0,52	$\varnothing_a$ :=	0,52	$\varnothing_i$ :=	0,52	L :=	0,90	G :=	8,8E+10	$\rho$ :=	7850
9	Drehfeder-masselos-Torsion	$\varnothing_a$ :=	4,38	$\varnothing_i$ :=	2,38	$\varnothing_a$ :=	2,38	$\varnothing_i$ :=	2,38	L :=	1,09	G :=	8,8E+10	d :=	0
10	Massenpunkt-Torsion	$\varnothing_p$ :=	5,7E+05	$c$ :=	0	$\varnothing_a$ :=	0	$\varnothing_i$ :=	0	d :=	0	Me :=	10	$\varepsilon$ :=	0
11	Drehfeder-masselos-Torsion	$\varnothing_a$ :=	4,38	$\varnothing_i$ :=	2,38	$\varnothing_a$ :=	2,38	$\varnothing_i$ :=	2,38	L :=	1,09	G :=	8,8E+10	d :=	0
12	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\varnothing_a$ :=	0,75	$\varnothing_i$ :=	0,52	$\varnothing_a$ :=	0,52	$\varnothing_i$ :=	0,52	L :=	2	G :=	8,8E+10	$\rho$ :=	7850
13	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\varnothing_a$ :=	0,75	$\varnothing_i$ :=	0,52	$\varnothing_a$ :=	0,52	$\varnothing_i$ :=	0,52	L :=	3	G :=	8,8E+10	$\rho$ :=	7850
14	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\varnothing_a$ :=	0,75	$\varnothing_i$ :=	0,52	$\varnothing_a$ :=	0,52	$\varnothing_i$ :=	0,52	L :=	3	G :=	8,8E+10	$\rho$ :=	7850
15	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\varnothing_a$ :=	0,75	$\varnothing_i$ :=	0,52	$\varnothing_a$ :=	0,52	$\varnothing_i$ :=	0,52	L :=	3	G :=	8,8E+10	$\rho$ :=	7850
16	Drehfeder-masselos-Torsion	$\varnothing_a$ :=	2,17	$\varnothing_i$ :=	0,52	$\varnothing_a$ :=	0,52	$\varnothing_i$ :=	0,52	L :=	0,35	G :=	8,8E+10	d :=	0
17	Massenpunkt-Torsion	$\varnothing_p$ :=	6487	$c$ :=	0	$\varnothing_a$ :=	0	$\varnothing_i$ :=	0	d :=	0	Me :=	10	$\varepsilon$ :=	0
18	Drehfeder-masselos-Torsion	$\varnothing_a$ :=	2,17	$\varnothing_i$ :=	0,52	$\varnothing_a$ :=	0,52	$\varnothing_i$ :=	0,52	L :=	0,35	G :=	8,8E+10	d :=	0
19	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\varnothing_a$ :=	0,75	$\varnothing_i$ :=	0,52	$\varnothing_a$ :=	0,52	$\varnothing_i$ :=	0,52	L :=	1,80	G :=	8,8E+10	$\rho$ :=	7850
20	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\varnothing_a$ :=	0,75	$\varnothing_i$ :=	0,52	$\varnothing_a$ :=	0,52	$\varnothing_i$ :=	0,52	L :=	0,70	G :=	8,8E+10	$\rho$ :=	7850

# Datenblatt: Pumpbetrieb Torsion

Datenblatt für  
Hydro Vib

Dichte :=	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
E-Modul :=	2,10E+11	[N/m <sup>2</sup> ]
G-Modul :=	8,80E+10	[N/m <sup>2</sup> ]

Position	Auswahl	$\Theta_p =$	2783	[kg*m <sup>2</sup> ]	c :=	0	[Nm]	d :=	0	[Nms]	Me :=	10	[Nm]	$\epsilon :=$	0	[rad]
1	Massenpunkt-Torsion	$\Theta_a :=$	0,65	[m]	$\Theta_i :=$	0,22	[m]	L :=	1	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
2	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_a :=$	0,65	[m]	$\Theta_i :=$	0,22	[m]	L :=	3	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
3	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_p =$	9603	[kg*m <sup>2</sup> ]	c :=	0	[Nm]	d :=	0	[Nms]	Me :=	10	[Nm]	$\epsilon :=$	0	[rad]
4	Massenpunkt-Torsion	$\Theta_a :=$	0,65	[m]	$\Theta_i :=$	0,22	[m]	L :=	1,50	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
5	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_p =$	9603	[kg*m <sup>2</sup> ]	c :=	0	[Nm]	d :=	0	[Nms]	Me :=	10	[Nm]	$\epsilon :=$	0	[rad]
6	Massenpunkt-Torsion	$\Theta_a :=$	0,65	[m]	$\Theta_i :=$	0,22	[m]	L :=	1,60	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
7	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_p =$	9603	[kg*m <sup>2</sup> ]	c :=	0	[Nm]	d :=	0	[Nms]	Me :=	10	[Nm]	$\epsilon :=$	0	[rad]
8	Massenpunkt-Torsion	$\Theta_a :=$	0,65	[m]	$\Theta_i :=$	0,22	[m]	L :=	2	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
9	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_a :=$	0,65	[m]	$\Theta_i :=$	0,22	[m]	L :=	2	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
10	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_a :=$	1,80	[m]	$\Theta_i :=$	0,22	[m]	L :=	0,50	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
11	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_p =$	9603	[kg*m <sup>2</sup> ]	c :=	0	[Nm]	d :=	0	[Nms]	Me :=	10	[Nm]	$\epsilon :=$	0	[rad]
12	Massenpunkt-Torsion	$\Theta_a :=$	1,80	[m]	$\Theta_i :=$	0,22	[m]	L :=	0,50	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
13	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_a :=$	1,80	[m]	$\Theta_i :=$	0,22	[m]	L :=	0,50	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
14	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_p =$	9603	[kg*m <sup>2</sup> ]	c :=	0	[Nm]	d :=	0	[Nms]	Me :=	10	[Nm]	$\epsilon :=$	0	[rad]
15	Massenpunkt-Torsion	$\Theta_a :=$	1,80	[m]	$\Theta_i :=$	0,22	[m]	L :=	0,50	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
16	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_a :=$	0,75	[m]	$\Theta_i :=$	0,52	[m]	L :=	0,70	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
17	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_a :=$	0,75	[m]	$\Theta_i :=$	0,52	[m]	L :=	3	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
18	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_p =$	2481	[kg*m <sup>2</sup> ]	c :=	0	[Nm]	d :=	0	[Nms]	Me :=	10	[Nm]	$\epsilon :=$	0	[rad]
19	Massenpunkt-Torsion	$\Theta_a :=$	0,75	[m]	$\Theta_i :=$	0,52	[m]	L :=	4	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
20	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_a :=$	0,75	[m]	$\Theta_i :=$	0,52	[m]	L :=	0,90	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
21	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_a :=$	4,38	[m]	$\Theta_i :=$	2,38	[m]	L :=	1,09	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	d :=	0	[Nms]
22	Drehfeder-masselos-Torsion	$\Theta_p =$	5,8E+05	[kg*m <sup>2</sup> ]	c :=	0	[Nm]	d :=	0	[Nms]	Me :=	10	[Nm]	$\epsilon :=$	0	[rad]
23	Massenpunkt-Torsion	$\Theta_a :=$	4,38	[m]	$\Theta_i :=$	2,38	[m]	L :=	1,09	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	d :=	0	[Nms]
24	Drehfeder-masselos-Torsion	$\Theta_a :=$	0,75	[m]	$\Theta_i :=$	0,52	[m]	L :=	2	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
25	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_a :=$	0,75	[m]	$\Theta_i :=$	0,52	[m]	L :=	3	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
26	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_a :=$	0,75	[m]	$\Theta_i :=$	0,52	[m]	L :=	3	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
27	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_a :=$	0,75	[m]	$\Theta_i :=$	0,52	[m]	L :=	3	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
28	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_a :=$	2,17	[m]	$\Theta_i :=$	0,52	[m]	L :=	0,35	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	d :=	0	[Nms]
29	Drehfeder-masselos-Torsion	$\Theta_p =$	6487	[kg*m <sup>2</sup> ]	c :=	0	[Nm]	d :=	0	[Nms]	Me :=	10	[Nm]	$\epsilon :=$	0	[rad]
30	Massenpunkt-Torsion	$\Theta_a :=$	2,17	[m]	$\Theta_i :=$	0,52	[m]	L :=	0,35	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	d :=	0	[Nms]
31	Drehfeder-masselos-Torsion	$\Theta_a :=$	0,75	[m]	$\Theta_i :=$	0,52	[m]	L :=	1,80	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
32	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_a :=$	0,75	[m]	$\Theta_i :=$	0,52	[m]	L :=	0,70	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]
33	Drehfeder-massebehaftet-Torsion	$\Theta_a :=$	0,75	[m]	$\Theta_i :=$	0,52	[m]	L :=	0,70	[m]	G :=	8,8E+10	[N/m <sup>2</sup> ]	$\rho =$	7850	[kg/m <sup>3</sup> ]

# Literaturverzeichnis

- [1] GASCH, Robert: *Rotordynamik*. Berlin : Springer, 2006. – ISBN 3–540–41240–9
- [2] UNIV.PROF.DIPL.-ING.DR.-ING. CHRISTIAN BAUER: *Hydraulische Maschinen und Anlagen I & II: Vorlesungsskriptum: Lehrveranstaltung 302.673 & 302.677*. 3.0. Wien, 2012
- [3] W.POHLENZ: *Pumpen Für Flüssigkeiten und Gase*. Berlin : VEB Verlag Technik Berlin, 1970
- [4] GASCH, Robert ; KNOTHE, Klaus: *Strukturodynamik*. Bd. / Robert Gasch; Klaus Knothe ; Bd. 2: *Kontinua und ihre Diskretisierung*. Berlin : Springer, 1989. – ISBN 3–540–50771–X
- [5] HERBERT REITMAYER: *Entwicklung eines Übertragungsmatrizenverfahrens zur Biegeschwingungsberechnung von Turbomaschinenläufern*. Graz, TU Graz, Diss., Jänner 2000. [http://www.ttm.tugraz.at/arno/DA\\_Herbert.pdf](http://www.ttm.tugraz.at/arno/DA_Herbert.pdf)
- [6] *Technische Mechanik*. 6. Aufl. Berlin and Heidelberg [u.a.] : Springer, 1998 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 3–540–64147–5
- [7] GROSS, Dietmar ; WRIGGERS, Peter ; EHLERS, Wolfgang: *Kinetik, Hydrodynamik*. Bd. 3. 8., vollst. neu bearb. Aufl. Berlin [u.a.] : Springer, 2007. – ISBN 978–3–540–70769–1
- [8] VERBUND: *Querschnitt durch das Krafthaus Rottau*. <http://www.verbund.com/pp/de/pumpspeicherkraftwerk/malta-hauptstufe>
- [9] VERBUND: *Pumpspeicherkraftwerk Malta Hauptstufe*. <http://www.verbund.com/pp/de/pumpspeicherkraftwerk/malta-hauptstufe>

- [10] ILLWERKE VKW: *Maschinenkaverne Querschnitt*. <http://www.kopswerk2.at/inhalt/at/48.htm>
- [11] ILLWERKE VKW: Kopswerk2. <http://www.kopswerk2.at/inhalt/at/121.htm>
- [12] *Das Techniker-Handbuch: Grundlagen und Anwendungen der Maschinenbau-Technik*. 15., überarb. & erw. Leverkusen : Fr. Vieweg & Sohn, 1999. – ISBN 3-528-34053-3
- [13] GIESECKE, Jürgen ; MOSONYI, Emil ; HEIMERL, Stephan: *Wasserkraftanlagen: Planung, Bau und Betrieb*. 5., aktualis. u. erw. Aufl. Berlin : Springer Berlin, 2009. – ISBN 978-3-540-88988-5
- [14] *Research Project 2602-2*. Bd. Volume 1: *Hydropower Plant Modernization Guide: Volume 1: HYdroplant Modernization: Research Project 2602-2*. GS-641. 1989
- [15] ZHANG, Zheng-Ji: *Freistrahlturbinen: Hydromechanik und Auslegung*. Berlin and Heidelberg : Springer, 2009. – ISBN 978-3-540-70771-4
- [16] J.L. GORDON: Estimating hydro powerhouse crane capacity
- [17] GÜLICH, Johann F.: *Kreiselpumpen: Handbuch für Entwicklung, Anlagenplanung und Betrieb*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. – ISBN 978-3-642-05478-5
- [18] *Hydraulische Maschinen und Anlagen I: Übung*. 2012
- [19] DECKER, Karl-Heinz ; KABUS, Karlheinz ; RIEG, Frank ; WEIDERMANN, Frank ; ENGELKEN, Gerhard ; HACKENSCHMIDT, Reinhard: *Maschinenelemente*. 19., aktualisierte Aufl. München : Hanser, 2014. – ISBN 978 3446 43856 9
- [20] BARTZ, Wilfried J.: *Gleitlagertechnik: Auslegung, Konstruktion, Werkstoffwahl u. Schmierung*. Bd. 163. Grafenau/Württ. : Expert-Verl., 1986. – ISBN 3-88508-787-1
- [21] Rotationssymmetrische Kreisringplatte: Beispiel. <http://www.tm-mathe.de/Themen/html/gewdglkreisringplattebsp.html>