Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

DIPLOMARBEIT

Eine Untersuchung von Multi-Scaling in superlinearen Ornstein-Uhlenbeck-Modellen

Ausgeführt am Institut für
Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek

durch

Amide Dervisi
85, route d'Arlon
L-7513 Mersch
Luxemburg

Datum

Unterschrift

Danksagungen

In dieser Form möchte ich mich zunächst bei all denjenigen bedanken, die mich beim Verfassen dieser Arbeit unterstützt haben. Ganz besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Professor Friedrich Hubalek, für das Bereitstellen dieses Themas und der Betreuung sowie der Korrekturlesung meiner Arbeit. Herrn Professor Oleksandr Iena danke ich auch für das Korrekturlesen.

Nicht zuletzt gilt mein besonderer und tiefer Dank meinen Eltern, die mir mein Studium finanziert und ermöglicht haben, sowie meinem Onkel und seiner Familie die während meines Aufenthaltes in Wien immer für mich da waren.

Abschließend bedanke ich mich bei meinem Ehemann Genci für seine Geduld, er ist mir während des ganzen Studiums zur Seite gestanden und hat mich immer wieder ermutigt und begleitet.

Abstract

Let $(X_t)_{t\geq 0}$ be a continuous time martingale with stationary increments. We consider a group of stochastic volatility models for which the moments of the increments give rise to an uncommon scaling, i.e. in the limit as $h \to 0$ we have that $\mathbf{E}(\mid X_{t+h} - X_t \mid^q) \sim h^{A(q)}$, where $A(q)$ is not linear. This is what we call multiscaling of moments, which we can find in time series of financial assets. We are interested in the class of stochastic volatility models in the following form: $dX_t = \sigma_t dW_t$, $dV_t = -f(V_t)dt + dL_t$, $V_t = \sigma_t^2$, where $(W_t)_{t\geq 0}$ is the standard Brownian motion, L_t a Levy subordinator and $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ the stationary volatility process, independent of $(W_t)_{t\geq 0}$. If $f(\cdot)$ has linear growth, then multiscaling doesn't occurr. But if $f(\cdot)$ behaves as Cx^γ as $x \to +\infty$, with $C > 0$ and $\gamma > 1$, then multiscaling occurs. Thus the concrete results are given by $A(q) = \lim_{h\to 0} \frac{\log \mathbf{E}(|X_{t+h} - X_t|^q)}{\log h}$.

Zusammenfassung

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein zeitstetiges Martingal mit stationären Inkrementen. Wir betrachten eine Gruppe von stochastischen Volatilitätsmodellen, für welche die Momente der Inkremente eine ungewöhnliche Skalierung hervorrufen, i.e. im Limes h gegen 0 haben wir $\mathbf{E}(\mid X_{t+h} - X_t \mid^q) \sim h^{A(q)}$, wobei $A(q)$ nicht linear ist. In diesem Fall tritt Multi-Scaling der Momente auf, welches man in Zeitreihen von Finanzanlagen vorfindet. Wir interessieren uns für die Gruppe der stochastischen Volatilitätsmodelle in folgender Form: $dX_t = \sigma_t dW_t$, $dV_t = -f(V_t)dt + dL_t$, $V_t = \sigma_t^2$ mit $(W_t)_{t\geq 0}$ die standard Brown'sche Bewegung, L_t ein Lévy Subordinator und $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ der stationäre Volatilitätsprozess, unabhängig von $(W_t)_{t\geq 0}$. Falls $f(\cdot)$ die lineare Wachstumsbedingung erfüllt, so tritt zunächst kein Multi-Scaling auf. Falls $f(\cdot)$ sich jedoch verhält wie Cx^γ im Limes zu $x \to +\infty$, mit $C > 0$ und $\gamma > 1$, dann tritt Multi-Scaling auf. Somit ergeben sich dann unter Betrachtung von Fallunterscheidungen die konkreten Resultate von $A(q) = \lim_{h\to 0} \frac{\log \mathbf{E}(|X_{t+h}-X_t|^q)}{\log h}$.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **8**

2 Definitionen und Wiederholungen **10**
2.1 Das stochastische Integral 10
2.2 Lévy-Prozess 10
2.2.1 Poisson-Prozess 11
2.3 Ungleichungen 13
2.3.1 Die Hölder-Ungleichung 13
2.3.2 Die Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung 13
2.3.3 Die Young-Ungleichung 14

3 Multi-Scaling in stochastischen Volatilitätsmodellen **15**
3.1 Annahmen zur Volatilität 15
3.2 Bedingungen zum Erhalt von Multi-Scaling 17
3.3 Eine weitere Annahme von Multi-Scaling 19

4 Superlineare Ornstein-Uhlenbeck Volatilität **21**
4.1 Funktionen mit linearem Wachstum 21
4.2 Funktionen mit superlinearem Wachstum 23

Literaturverzeichnis **37**

1 Einleitung

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein zeitstetiges Martingal mit stationären Inkrementen, welches im Finanzbereich identifiziert wird als der trendbereinigte log-Preis eines Assets. Trend in einer Zeitreihe ist eine langsame, allmähliche Veränderung in einer bestimmten Eigenschaft der Reihe über das ganze Intervall. Trendbereinigung ist die statistische oder mathematische Operation des Entfernens vom Trend aus der Reihe.
Insbesondere haben uns Anwendungen in der Finanzmathematik der stochastischen Dierentialgleichungen, welche von Lévy-Prozessen angetrieben werden, motiviert. Diese Arbeit befasst sich mit einem Verhalten, welches in Zeitreihen von Assets beobachtet wird und als Skalierungsverhalten oder auch Multiscaling von Momenten definiert ist. Eine Übersicht über Scaling und Multi-Scaling von Finanzzeitreihen findet sich in [3]. Multi-Scaling der Momente besteht genau dann, wenn

$$\limsup_{h\to 0} \frac{\log \mathbf{E}(\mid X_{t+h} - X_t \mid^q)}{\log h} =: A(q) \tag{1}$$

von der Menge $\{q \geq 1 :\mid A(q) \mid< +\infty\}$ nicht linear ist. Im Fall wo X_t ein Brown'sches Martingal ist (i.e. ein stochastisches Integral bezüglich einer Brown'schen Bewegung), würde man erwarten, dass $A(q) = \frac{q}{2}$ zumindest für q ausreichend klein. In diesem Fall kann Multi-Scaling als Abweichung von dieser diffusiven Skalierung identifiziert werden, auftretend bei q über einer gegebenen Schwelle. Diese Art von Multi-Scaling wird in der Tat in den Werten vieler Finanzindizes und Wechselkursen beobachtet.
Eine Klasse von stochastischen Prozessen, die das Multi-Scaling für eine eher willkürliche Skalierungsfunktion $A(q)$ ausstellt, sind die sogenannten *Multifraktalmodelle*. In diesen Modellen ist der Prozess X_t als zufälliger Zeitwechsel einer Brown'schen Bewegung gegeben, i.e.

$$X_t := W_{I(t)}, \tag{2}$$

wobei $(W_t)_{t\geq 0}$ die standard Brown'sche Bewegung ist und $I(t)$ ein stochastischer Prozess, oft auch unabhängig von W, mit stetigen und wachsenden Pfaden, manchmal auch als *Handelszeiten* bezeichnet. In Multifraktalmodellen ist jedoch die Handelszeit $I(t)$ ein Prozess mit nicht absolut stetigen Pfaden. Dies hat zur Folge, dass X_t nicht als ein stochastisches Volatilitätsmodell geschrieben werden kann, i.e nicht in der Form $dX_t = \sigma_t dB_t$, mit B_t eine Brown'sche Bewegung. Dies erschwert die Analyse von Multifraktalmodellen, da die herkömmlichen Rechnungsverfahren der stochastischen Integration nicht verwendet werden können.
Das Ziel dieser Arbeit ist das Skalierungsverhaten in allgemeineren Klassen von stochastischen Volatilitätsmodellen zu analysieren, nähmlich die der Form $dX_t = \sigma_t dB_t$, wobei der Volatilitätsprozess σ_t unabhängig ist von der Brown'schen Bewegung B_t. Diese Prozesse sind genau diejenigen, die sich in der Form von (2) schreiben lassen, mit Handelszeit $I(t)$ unabhängig von W_t und mit absolut stetigen Pfaden. Wir widmen besonderes Augenmerk auf die Modelle in denen $V_t := \sigma_t^2$ eine stationäre Lösung von der stochastischen Differentialgleichung der Form

$$dV_t = -f(V_t)dt + dL_t \tag{3}$$

ist, mit L_t ein Lévy Subordinator, dessen charakteristisches Maß *power law tails in* ∞ hat und mit $f(\cdot)$ eine Funktion, so dass eine stationäre Lösung existiert und sie eindeutig in Verteilung ist.
Zuerst zeigen wir, dass Multi-Scaling nicht möglich ist falls $f(\cdot)$ keine Funktion mit linearem Wachstum ist. Somit sind die *heavy tails*, welche von dem Lévy Prozess erzeugt werden, nicht aussreichend um Multi-Scaling hervor zu bringen. Andererseits, falls die Funktion $f(\cdot)$ sich verhält wie Cx^γ zu $x \to +\infty$, mit $C > 0$ und $\gamma > 1$, dann stellt der Volatilitätsprozess, dessen Volatilität eine stationäre Lösung von (3) ist, Multi-Scaling aus. In dieser Gruppe von Modellen wird Multi-Scaling durch die Kombination von den heavy tails von L_t und der superlinearen *mean reversion (Mittelwertrückkehr)* hervorgerufen; technisch gesehen ist der entscheindende Punkt der, dass die Verteilung von V_t *leichtere* tails hat als die von L_t. Die Gruppe von Prozessen die hier in Betracht gezogen werden, sind von der selben Form wie (2), wo der Zeitwechsel $I(t) = \int_0^t \sigma_s^2 ds$ absolut stetige Pfade hat. Dieser Aufbau liefert Vorteile beim Anwenden in der Finanzmathematik, wie z.B. bei Option Pricing.

Um Multi-Scaling ausführlicher zu erfassen, betrachte man [5] wo einige der Modelle veranschaulicht werden, die eingeführt wurden, um die Skalierungseigenschaften von Finanzdaten zu übernehmen. Das Buch [6] macht die Theorie auch für praktische Anwender zugänglich. Desweiteren wird in [7] Portfolioallokation unter dem Aspekt des Multi-Scalings behandelt und die quantative Erfassung von Multi-Scaling-Effekten behandelt [4].

Diese Arbeit ist nun folgendermaßen aufgegliedert. In Abschnitt 2 folgen ein paar Wiederholungen und einige Resultate. Abschnitt 3 liefert grundliegende Tatsachen über stochastische Volatilitätsmodelle, sowie notwendige Bedingungen für Multi-Scaling, in den Ausführungen folgen wir weitgehend der Arbeit [1] . Abschnitt 4 beinhaltet spezifischere Resultate für Modelle dessen Volatilität gegeben ist durch (3).

2 Definitionen und Wiederholungen

2.1 Das stochastische Integral

Zeitwechsel für Brown'sche Bewegung
Sei $\xi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ eine messbare Funktion und B die Brown'sche Bewegung auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$.
ξ ist ein deterministischer Prozess, unabhängig von Ω. Falls $\theta(t) = \int_0^t \xi^2 ds$ endlich ist $\forall t > 0$, dann existiert das stochastische Integral $X = \int \xi dB$.
Um einen stochastischen Zeitwechsel zu definieren benötigen wir eine Menge von Stoppzeiten $\{\tau_t : t \geq 0\}$, so dass $\tau_s \leq \tau_t$ für $s \leq t$. Dann definiert $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{\tau t}$ eine neue 'Zeit veränderte' Filtration.
Wendet man den gleichen Zeitwechsel auf den Prozess X an, so bekommt man den neuen Zeit veränderten Prozess $\tilde{X}_t = X_{\tau t}$. Durch die Eigenschaften der quadratischen Variation beschreibt das folgende einen stetigen Zeitwechsel.

Theorem 2.1. *Jedes stetige lokale Martingal X mit $X_0 = 0$ ist ein stetiger Zeitwechsel der Brown'schen Bewegung. Genauer gesagt, es gibt eine Brown'sche Bewegung B bezüglich einer Filtration $\{G_t\}_{t\geq 0}$, so dass für jedes $t \geq 0$, $\omega \mapsto [X]_t(\omega)$ eine Stoppzeit ist bezüglich G und $X_t = B_{[X]_t}$.*
Insbesondere dann, wenn W eine Brown'sche Bewegung und ξ W-integrierbar ist, dann kann man das Ergebnis auf $X = \int \xi dW$ anwenden.
Falls $[X]_t = \int_0^t \xi_s^2 ds$, dann ergibt dies $\int_0^t \xi dW = B_{\int_0^t \xi_s^2 ds}$ für eine Brown'sche Bewegung B.

Lemma 2.2. *Sei X ein Semimartingal und ξ ein vorhersehbarer, X-integrierbarer Prozess. Angenommen $\{\tau_t\}_{t\geq 0}$ sind endliche Stoppzeiten, so dass $t \to \tau_t$ stetig und wachsend ist.*
Man definiere die Zeitwechsel $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{\tau t}$, $\tilde{X}_t = X_{\tau t}$ und $\tilde{\xi}_t = \xi_{\tau t}$.
Bezüglich der Filtration $\tilde{\mathcal{F}}_t$ ist $\tilde{X}$ ein Semimartingal, $\tilde{\xi}$ ist vorhersehbar und $\tilde{X}$-integrierbar und

$$\int_0^t \tilde{\xi} d\tilde{X} = \int_{\tau 0}^{\tau t} \xi dX.$$

2.2 Lévy-Prozess

Wir definieren eine allgemeine Gruppe von stochastischen Prozessen, die Lévy-Prozesse heißen.

Definition 2.3. *Ein stochastischer Prozess $\{X_t : t \geq 0\}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Werten in $\mathbf{R}^d$, heißt Lévy-Prozess wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$X_0 = 0$ f.s.*
2. *Unabhängige Inkremente, d.h.: $\forall n \geq 1$, und $0 \leq t_0 < t_1 \cdots < t_n$ sind $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ unabhängig.*

3. *Stationäre Inkremente, d.h.: die Verteilung von $X_{t+h} - X_t$ ist nicht abhängig von t.*

4. *Stochastische Stetigkeit:* $\forall \epsilon > 0, \lim_{h\to 0} \mathbf{P}(\mid X_{t+h} - X_t \mid \geq \epsilon) = 0$.

5. $\forall \omega \in \Omega$ *ist* $X_t(\omega)$ *rechtsstetig in* $t \geq 0$ *mit Grenzwerten von links in* $t > 0$

Nun definieren und konstruieren wir Poisson-Prozesse.

2.2.1 Poisson-Prozess

Definition 2.4. *Ein stochastischer Prozess* $\{X_t : t \geq 0\}$*, definiert auf dem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *mit Werten in* $\mathbf{R}$*, ist ein Poisson-Prozess mit Parameter* $\lambda > 0$ *und* X_t *ist Poisson-verteilt mit Parameter* λt.

Theorem 2.5 (Konstruktion)**.** *Sei* $\{W_n : n = 0, 1, \dots\}$ *ein Random Walk in* $\mathbf{R}$ *auf dem Wahrescheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$*, so dass* $T_n = W_n - W_{n-1}$ *eine Exponentialverteilung hat mit Parameter* $\lambda > 0$*. Sei* $X_t(\omega) = n$ *dann und genau dann wenn* $W_n(\omega) \leq t < W_{n+1(\omega)}$ $\forall \omega \in \Omega$*. Dann ist* $\{X_t\}$ *ein Poisson-Prozess mit Parameter* λ.

Dieses Theorem wird angenommen, der Beweis ist unter [14] zu finden.

Bemerkung 2.6. *Eine charakteristische Eigenschaft vom Random Walk* T*, mit Exponentialverteilung, ist die sogenannte Gedächtnislosigkeit:*

$$\mathbf{P}[T > s + t \mid T > s] = \mathbf{P}[T > t], \quad s \geq 0, t \geq 0.$$

Betrachten wir nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $W_1, \dots, W_n$ in $[0, t]$ bedingt auf $X_t = n$. Für jedes Interval J ist die Anzahl der Sprünge von $X_t(\omega)$, mit $t \in J$, gegeben durch $I(J) = I(J)(\omega)$.

Proposition 2.7. *Für* $0 < s < t$ *und* $n \geq 1$ *ist die Verteilung von* X_s *bedingt auf* $X_t = n$ *binomial mit Parametern* n *und* s/t*. Für* $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t$ *und* $J_m = (t_{m-1}, t_m]$ *ist die Verteilung von* $(I(J_1), \dots, I(J_k))$ *bedingt auf* $X_t = n$ *multinomial mit Parametern* n *und* $(t_1 - t_0)/t, \dots, (t_k - t_{k-1})/t$*, i.e.*

$$P[I(J_1) = n_1, \dots, I(J_k) = n_k \mid X_t = n] = \frac{n!}{(n_1!) \dots (n_k!)} \left(\frac{t_1 - t_0}{t}\right)^{n_1} \dots \left(\frac{t_k - t_{k-1}}{t}\right)^{n_k}$$

für jede nicht negative ganze Zahl $n_1 \dots n_k$ *mit* $n_1 + \dots + n_k = n$.

Der Beweis dieser Proposition ist unter [14] zu finden. Weiteres führen wir den Begriff von *charakteristischer Funktion* und von *zusammengesetzten Poisson-Prozessen* ein.

Definition 2.8. *Die charakteristische Funktion* $\hat{\mu}(z)$ *eines Wahrscheinlichkeitsmaßes* μ *aus* $\mathbf{R}^d$ *ist*

$$\hat{\mu}(z) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{i\langle z, x\rangle} \mu(dx), \quad z \in \mathbf{R}^d$$

Definition 2.9. *Eine Verteilung μ in $\mathbf{R}^d$ ist zusammengesetzt Poisson-verteilt, falls für $\lambda > 0$ und für eine Verteilung σ in $\mathbf{R}^d$, mit $\sigma(\{0\}) = 0$, gilt, dass*

$$\hat{\mu}(z) = exp(\lambda(\hat{\sigma}(z) - 1)), \quad z \in \mathbf{R}^d,$$

wobei $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}$ die charakteristischen Funktionen von μ respektiv σ sind. Die Poisson-verteilung ist ein Spezialfall mit $d = 1$ und $\sigma = \delta_1$ ($\hat{=}$Verteilung konzentriert auf 1).

Definition 2.10. *Sei $\lambda > 0$ und sei σ eine Verteilung in $\mathbf{R}^d$ mit $\sigma(\{0\}) = 0$. Ein stochastischer Prozess $\{X_t : t \geq 0\}$ in $\mathbf{R}^d$ ist zusammengesetzt Poisson-verteilt mit λ und σ falls er ein Lévy-Prozess ist und, für $t > 0$ hat X_t eine zusammengesetzte Poissonverteilung*

$$\mathbf{E}[e^{i\langle z, X(t)\rangle}] = exp(t\lambda(\hat{\sigma}(z) - 1)), z \in \mathbf{R}^d.$$

λ und σ sind eindeutig bestimmt durch $\{X_t\}$.

Jetzt schauen wir uns die Bedeutung von *unendlicher Teilbarkeit* für Lévy-Prozesse an und darauf folgend die Lévy-Khintchine Formel.

Definition 2.11. *Eine Verteilung μ in $\mathbf{R}^d$ ist unendlich teilbar falls $\forall$ positive ganze Zahl n, $\exists$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_n auf $\mathbf{R}^d$, so dass $\mu = \mu_n^n$, mit $\mu^n = \mu^{n*} = \underbrace{\mu * \cdots * \mu}_{n}$ die n-fache Faltung von dem Wahrscheinlichkeitsmaß μ mit sich selbst.*

Theorem 2.12 (Lévy-Khintchine Formel)**.** *Sei $D = \{x :\mid x \mid\leq 1\}$ eine geschlossene Einheitskugel. Falls eine Wahrscheinlichkeitsverteilung μ undendlich teilbar ist auf $\mathbf{R}^d$, dann*

$$\hat{\mu(z)} = exp\left[-\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle + i\langle\gamma, z\rangle + \int_{\mathbf{R}^d}(e^{i\langle z,x\rangle} - 1 - i\langle z, x\rangle \mathbf{1}_D(x))\nu(dx)\right], z \in \mathbf{R}^d$$

wobei A ist eine symmetrische nicht negativ definite $d \times d$ Matrix, ν ein Maß auf $\mathbf{R}^d$ mit

$$\nu(\{0\}) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbf{R}}(1 \wedge x^2)\nu(dx) < \infty,$$

und $\gamma \in \mathbf{R}^d$.

Definition 2.13. *Wir nennen (A, ν, γ) aus Theorem 2.12 das Lévy-Tripel von μ. A bezeichnet man als Gauss'sche Kovarianz Matrix und ν heißt das Lévy-Maß von μ.*

Definition 2.14 (Pfad-Eigenschaften von Lévy-Prozessen)**.** *Sei $\{X_t\}$ ein Lévy-Prozess auf $\mathbf{R}^d$ mit Tripel (A, ν, γ). Man sagt $\{X_t\}$ ist vom:*

Typ A *falls $A = 0$ und $\nu(\mathbf{R}^d) < \infty$,*

Typ B *falls $A = 0$, $\nu(\mathbf{R}^d) = \infty$ und $\int_{|x|\leq 1} \mid x \mid \nu(dx) < \infty$,*

Typ C *falls* $A \neq 0$ *oder* $\int_{|x|\leq 1} \mid x \mid \nu(dx) = \infty$.

Definition 2.15. *Einen Lévy-Prozess* $\{X_t\}$ *auf* $\mathbf{R}^d$ *bezeichnet man als wachsend, falls* $X_t(\omega)$ *wachsend ist als Funktion von* t*, f.s. Einen wachsenden Lévy-Prozess bezeichnet man als einen Subordinator.*

Definition 2.16 (Variation). *1. Angenommen* $\{X_t\}$ *ist vom Typ A oder B. Dann hat* $X_t(\omega)$ *f.s. eine endliche Variation auf* $(0,t]$ $\forall t \in (0,\infty)$*; die Variationsfunktion* V_t *von* $X_(\omega)$ *ist ein Subordinator mit*

$$\mathbf{E}[e^{-uV_t}] = exp\left[t\left(\int_{\mathbf{R}^d}(e^{-u|x|}-1)\nu(dx) - u \mid \gamma_0 \mid\right)\right], u \geq 0;$$

der stetige Teil von $X_t(\omega)$ *ist* $t\gamma_0$*, f.s., wobei* $\gamma_0 \in \mathbf{R}^d$ *der Drift von* μ.

2. Falls $\{X_t\}$ *vom Typ C ist, dann hat* $X_t(\omega)$ *f.s. eine unendliche Variation auf* $(0,t]$ $\forall t \in (0,\infty)$.

Zusätzlich betrachten wir noch das Konzept der *gleichgeradigen Integrierbarkeit.*

Definition 2.17. *Eine Familie* $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *von reellen Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$*, wobei* Λ *die Menge der Parameter ist, heißt gleichgeradig integrierbar, wenn* $sup_{\lambda\in\Lambda}\mathbf{E}[\mid X_\lambda \mid; \mid X_\lambda \mid > a] \to 0$ *wenn* $a \to \infty$.

2.3 Ungleichungen

2.3.1 Die Hölder-Ungleichung

Definition 2.18. *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *ein Messraum und sei* $f \in L^p$*,* $g \in L^q$ *mit* $0 < p, q \leq \infty$ *so dass* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Dann gilt* $fg \in L^1$ *und*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

2.3.2 Die Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung

Die Burkholder-Davis-Gundy-Ungleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen der Größenordnung eines Martingals und seiner quadratischen Variation.

Theorem 2.19. *Für* $p > 1$ *existieren die Konstanten* $c_p > 0$ *und* $C_p > 0$*, so dass für jedes Martingal* M *gilt*

$$c_p\mathbf{E}[< M, M >_t^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbf{E}[\sup_{s\leq t} \mid M_s \mid^p] \leq C_p\mathbf{E}[< M, M >_t^{\frac{p}{2}}]$$

,
dabei ist $< M, M >_t$ *die quadratische Variation von* M.

Mehr dazu ist in [16] zu finden.

2.3.3 Die Young-Ungleichung

Definition 2.20. *Sei gegeben $\alpha, \beta \geq 0$ und $1 < r', r < \infty$ mit $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Dann ist die Young'sche Ungleichung folgendermaßen definiert:*

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^r}{r} + \frac{\beta^{r'}}{r'}.$$

Wir erhalten eine Gleichung wenn $\alpha^r = \beta^{r'}$.

Beweis. Der Beweis ergibt sich durch die strikte Konvexität von der Exponentialfunktion, d.h.

$$\alpha\beta = e^{\log \alpha\beta} = e^{(1/r)\log \alpha^r + (1/r')\log \beta^{r'}} < \frac{1}{r} e^{\log \alpha^r} + \frac{1}{r'} e^{\log \beta^{r'}} = \frac{\alpha^r}{r} + \frac{\beta^{r'}}{r'}$$

$\forall \alpha, \beta > 0$ und $\alpha^r \neq \beta^{r'}$. □

Nebenbei noch eine weitere Definition, die der *lokalen Lipschitz-stetigen Funktion*, die wir später verwenden.

Definition 2.21. *Ist $C \subset \mathbf{R}^n$ nichtleer und $f : \mathbf{R}^n \to \bar{\mathbf{R}}$, dann heißt f lokal Lipschitz-stetig auf C, wenn es zu jedem $z \in C$ ein $\delta = \delta(z) > 0$ und ein $L = L(z) \geq 0$ gibt, so dass*

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq L \|x - y\| \, \forall x, y \in B(z, \delta),$$

d.h. f ist Lipschitz-stetig auf $B(z, \delta)$.

3 Multi-Scaling in stochastischen Volatilitätsmodellen

In den Ausführungen folgen wir weitgehend der Arbeit [1].
Wir nehmen an, dass der Logarithmus X_t vom Preis des Underlyings Index, nach der Trendbereinigung, gegeben ist durch

$$dX_t = \sigma dW_t,$$

wobei σ (Volatilität) ist eine Konstante und $(W_t)_{t\geq 0}$ die standard Brown'sche Bewegung. Dieses Model ist jedoch nicht konsistent mit einer Reihe von Fakten, welche empirisch in vielen Echtzeitreihen nachgewiesen werden können. Einige dieser Fakten sind die folgenden:

- die Volatilität ist nicht konstant
- auf der empirische Verteilung (Wahrscheinlichkeitsverteilung mit einer unendlichen Varianz) der Inkremente $X_{t+h} - X_t$ vom Logarithmus des Preises liegt mehr Masse auf den Tails als bei der Normalverteilung
- log - Returns entsprechend disjunkter Zeitintervalle sind unkorreliert, aber nicht unabhängig: in der Tat, die Korrelation zwischen den Beträgen $\mid X_{t+h} - X_t \mid$ und $\mid X_{s+h} - X_s \mid$ hat einen langsamen Abfall in $\mid t - s \mid$.

Um reele Daten besser anzupassen, werden viele verschiedene Modelle vorgeschlagen um die Volatilität und den Preis Prozess zu beschreiben. In stetiger Zeit, wird das Grundmodell modifiziert indem $\sigma = \sigma_t$ ein stochastischer Prozess ist, oft auch ist sie die Lösung einer stochastischen Differentialgleichung durch Lévy-Prozesse angetrieben. Wird die definierende Differentialgleichung nicht von einer Brown'schen Bewegung, sondern von einem Lévy-Prozess angetrieben, so erhält man einen (nicht-gauss'schen) Ornstein-Uhlenbeck-Prozess. Mehr zu den Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen sehen wir unter Abschnitt 4.

Betrachten wir also den stochastischen Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ in folgender Form:

$$dX_t = \sigma_t dW_t, \tag{4}$$

wobei $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ stationär, $[0, +\infty)$-wertiger Prozess, unabhängig von $(X_t)_{t\geq 0}$, genannt Volatilitätsprozess.
Folgende Annahmen werden zur der Volatilität $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ gestellt:

3.1 Annahmen zur Volatilität

Annahme 3.1.

$$\frac{1}{h}\int_0^h (\sigma_s - \sigma_0)^2 ds$$

konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen 0 für $h \to 0$.

Wir beginnen mit einem grundlegenden Ergebnis zur Skalierungsfunktion $A(q)$, welche in (1) definiert ist. Es besagt, dass unter der *gleichgradigen Integrierbarkeit* auf der integrierten quadrierten Volatilität, die diffusive Skalierung weiterhin besteht. Somit ist die notwendige Bedingung für die Ausstellung für Multiscaling die Aufhebung der gleichmäßigen Integrierbarkeit.

Proposition 3.2. *Angenommen $p > 1$, dann gilt*

$$\limsup_{h\to 0} \mathbf{E}[(\frac{1}{h}\int_0^h \sigma_s^2 ds)^{p/2}] < +\infty \tag{5}$$

Unter Annahme 3.1 gilt $A(q) = \frac{q}{2}$ für alle $q < p$.

Beweis. Man beachte, dass

$$\frac{X_h - X_0}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}\int_0^h \sigma_s dW_s = \int_0^1 \sigma_{uh} dB_u^h,$$

wobei $B_u^h := \frac{1}{\sqrt{h}} W_{hu}$ ist auch eine standard Brown'sche Bewegung. Somit hat $\frac{X_h - X_0}{\sqrt{h}}$ die gleiche Verteilung wie $\int_0^1 \sigma_{uh} dB_u$, wobei B ist irgendeine Brown'sche Bewegung die unabhängig vom Volatilitätsprozess $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ ist. Aus Annahme 3.1 und aus der Isometrie Eigenschaft des stochastischen Integrals, folgt dass

$$\int_0^1 \sigma_{uh} dB_u \to \sigma_0 B_1 \tag{6}$$

in L^2 und deshalb auch in Wahrscheinlichkeit, wenn $h \to 0$. Mit (5) und mit der Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung (siehe 2.3.2),

$$\mathbf{E}\left[\left|\int_0^1 \sigma_{uh} dB_u\right|^p\right] \leq C_p \mathbf{E}\left[\left(\int_0^1 \sigma_{uh}^2 du\right)^{p/2}\right] = \mathbf{E}\left[\left(\frac{1}{h}\int_0^h \sigma_s^2 ds\right)^{p/2}\right],$$

ist die Familie der Zufalllsvariablen $\{\int_0^1 \sigma_{uh} dB_u : h > 0\}$ beschränkt in L^p. Somit folgt, dass die Konvergenz in (6) auch eine Konvergenz in L^q ist, für jedes $q < p$.
Man erhält

$$\mathbf{E}\left[\left|\frac{X_h - X_0}{\sqrt{h}}\right|^q\right] = \mathbf{E}\left[\left|\int_0^1 \sigma_{uh} dB_u\right|^q\right] \to \mathbf{E}\left[|\ \sigma_0\ |^q\right] \mathbf{E}[|\ B_1\ |^q]$$

wenn $h \to 0$, insbesondere für $\mathbf{E}(\sigma_0^q) < \infty$. Der Betrag in $\mathbf{E}[|\ \sigma_0\ |^q]$ verschwindet da σ_t $[0, +\infty)$-wertiger Prozess ist, daher kriegen wir:

$$\mathbf{E}\left[\left|\frac{X_h - X_0}{\sqrt{h}}\right|^q\right] = \mathbf{E}\left[\left|\int_0^1 \sigma_{uh} dB_u\right|^q\right] \to \mathbf{E}\left[\sigma_0^q\right] \mathbf{E}[|\ B_1\ |^q]$$

Nehme man nun den Logarithmus im oberen Limes, so erhält man $A(q) = \frac{q}{2}$. □

Bemerkung 3.3. *Sei* $1 \leq q < p$, $h > 0$ *und* $\mathbf{E}[(x)^q]^{1/q} = \|x\|_q$ *mit*

$$\log \mathbf{E}(\mid X_{t+h} - X_t \mid^q)^{1/q} = \frac{\log \mathbf{E}(\mid X_{t+h} - X_t \mid^q)}{q} = log\|X_{t+h} - X_t\|_q$$

steigend in q, *so dass* $\frac{\log \mathbf{E}(|X_{t+h}-X_t|^q)}{q \log h}$ *fallend in* q *für alle* $0 < h < 1$, *dann folgt dass*

$$\frac{A(p)}{p} \leq \frac{A(q)}{q}.$$

Für das Folgende werden für die Modelle der Form (4) folgende weitere Bedingungen angenommen.

Annahme 3.4.

$$\mathbf{E}[\sigma_0^2] < +\infty.$$

Unter dieser Annahme ist die Gleichung in (5) gültig für $p = 2$. Unter Proposition 3.2 und unter Bemerkung 3.3 erhalten wir $A(q) = \frac{q}{2}$ für $1 \leq q < 2$ und $\frac{q}{2} \geq A(q) \geq -\infty$ für $q \geq 2$. Dies führt uns zur folgenden Definition von Multi-Scaling und den erforderlichen Bedingungen.

3.2 Bedingungen zum Erhalt von Multi-Scaling

Definition 3.5. *Unter Annahme 3.1 und 3.4 können wir behaupten, dass dann Multiscaling auftritt, falls die Menge* $\{q : -\infty < A(q) < \frac{q}{2}\}$ *ein nicht leeres Inneres hat.*

Für jedes $h > 0$ erhält man nun mit Hilfe der Burkholder-Davis-Gundy-Ungleichung und den Konstanten c_p, C_p gilt

$$c_p \mathbf{E}\left[\left(\int_0^h \sigma_t^2 dt\right)^{p/2}\right] \leq \mathbf{E}\left[|X_h - X_0|^p\right] = \mathbf{E}\left[\left|\int_0^h \sigma_s dW_s\right|^p\right] \leq C_p \mathbf{E}\left[\left(\int_0^h \sigma_t^2 dt\right)^{p/2}\right]. \tag{7}$$

Somit ist die Bedingung, dass

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{1}{h}\int_0^h \sigma_s^2 ds\right)^{q/2}\right] < +\infty$$

für jedes $h > 0$, notwendig für $A(q) > -\infty$.
Auch mit Jensens Ungleichung bekommt man

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{1}{h}\int_0^h \sigma_s^2 ds\right)^{q/2}\right] \leq \frac{1}{h}\int_0^h \mathbf{E}\left[\sigma_s^q\right] ds = \mathbf{E}\left[\sigma_0^q\right], \tag{8}$$

für $q \geq 2$.
Also ist die Aussage von Proposition 3.2 bestätigt für $\mathbf{E}[\sigma_0^q] < +\infty$.

Korollar 3.6. *Eine notwendige Vorraussetzung für Multi-Scaling in* (4) *ist, dass es ein* $p > 2$ *gibt, so dass*

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{1}{h}\int_0^h \sigma_s^2 ds\right)^{p/2}\right] < +\infty$$

$\forall h > 0$, *jedoch*

$$\mathbf{E}[\sigma_0^p] = +\infty.$$

Dieser Korollar erlaubt uns eine alternative notwendige Vorraussetzung zum Herleiten von Multi-Scaling, welches manchmal den Vorteil hat, dass es sich leichter in bestimmten Modellen prüfen lässt.

Korollar 3.7. *Eine notwendige Vorraussetzung von Multi-Scaling in* (4) *ist, dass es für ein* $h > 0$ *ein* $p \geq 2$ *gibt, so dass*

$$\mathbf{E}[\sigma_0^p] < +\infty$$

$$\mathbf{E}[\sup_{0\leq t\leq h} \sigma_t^p] = +\infty.$$

Beweis. Sei $q^* := \inf\{q : \mathbf{E}[\sigma_0^q] = +\infty\}$ und man nehme an Multi-Scaling ist möglich. Nach Korollar 3.6 haben wir $q^* < +\infty$, und nach Annahme 3.4 ist $q^* \geq 2$. Darüberhinaus erhalten wir durch Proposition 3.2 $A(q) = \frac{q}{2}$ für $q < q^*$. Somit liefert Definition 3.5, dass $A(q)$ endlich ist für irgendwelches $q > q^*$; insbesondere erhalten wir wie auch schon oben beobachtet

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{1}{h}\int_0^h \sigma_s^2 ds\right)^{q/2}\right] < +\infty$$

für $h > 0$.
Sei nun l, r, so dass $q^* < l < r < q$ und setzte $M_h := \sup_{0\leq t\leq h} \sigma_t$. Nun bekommen wir

$$\frac{1}{h}\int_0^h \sigma_s^l ds \leq M_h^{l-2}\frac{1}{h}\int_0^h \sigma_s^2 ds.$$

Mit Anwendung der Hölder Ungleichung (siehe Definition 2.18), wobei hier $p = \frac{r}{2}$ und $q = \frac{r/2}{r/2-1}$ und mit Anwendung der Stationarität von σ_t erhält man

$$\mathbf{E}\left[\sigma_0^l\right] \leq \left[\mathbf{E}\left(M_h^{r\frac{l/2-1}{r/2-1}}\right)\right]^{1-\frac{2}{r}}\left[\mathbf{E}\left[\left(\frac{1}{h}\int_0^h \sigma_s^2 ds\right)^{r/2}\right]\right]^{2/r}.$$

Es folgt $\mathbf{E}[\sigma_0^l] = +\infty$, da $l > q^*$. Für $r < q$, gilt

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{1}{h}\int_0^h \sigma_s^2 ds\right)^{r/2}\right] < +\infty.$$

Daher ist notwendigerweise

$$\mathbf{E}\left(M_h^{r\frac{l/2-1}{r/2-1}}\right) = +\infty.$$

Falls l und q^* nahe genug beianander ausgewählt werden, so lässt sich leicht überprüfen, dass folgendes gilt

$$\tilde{r} := r\frac{l/2-1}{r/2-1} < q^*,$$

dies führt zu

$$\mathbf{E}(\sigma_0^{\tilde{r}}) < +\infty.$$

Sei nun $p := \max(\tilde{r}, 2)$. Dies vervollständigt den Beweis. □

Zum Abschluß dieses Abschnittes betrachten wir noch eine weitere Eigenschaft der Skalierungsfunktion $A(q)$. Dabei benutzen wir die sogenannte *Young'sche Ungleichung* (siehe 2.20).

3.3 Eine weitere Annahme von Multi-Scaling

Bemerkung 3.8. *$\forall h > 0$ nehmen wir an, dass die integrierte Volatilität Momente von jedem Grad besitzt.*
In anderen Worten

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h \sigma_t^2 dt\right)^q\right] < +\infty \qquad \forall q \geq 1. \tag{9}$$

Wir werden nun sehen, dass unter dieser Annahme, $A(q)$ steigend in q ist. Später werden wir ein Beispiel betrachten, in dem die integrierte Volatilität heavy tails hat, somit widerstellt es sich (9) und $A(\cdot)$ ist dann fallend in jedem Intervall.
Erinnern wir uns wieder an die Gleichung (7)

$$c_p\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h \sigma_t^2 dt\right)^{p/2}\right] \leq \mathbf{E}[\mid X_h - X_0 \mid^p] = \mathbf{E}\left[\left|\int_0^h \sigma_s dW_s\right|^p\right] \leq C_p\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h \sigma_t^2 dt\right)^{p/2}\right]$$

mit der wir beobachten, dass

$$A(q) = \limsup_{h\to 0} \frac{\log \mathbf{E}\left[\left(\int_0^h \sigma_t^2 dt\right)^{p/2}\right]}{\log h}. \tag{10}$$

Daraus folgt

$$\liminf_{h\to 0} \frac{\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h \sigma_t^2 dt\right)^{p/2}\right]}{h^\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda \leq A(q), \tag{11}$$

und

$$\lambda < A(q) \Rightarrow \liminf_{h\to 0} \frac{\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h \sigma_t^2 dt\right)^{p/2}\right]}{h^\lambda} = 0. \tag{12}$$

Sei $\epsilon > 0$,$p > q \geq 1$ und wähle $l < q$, so dass $[A(q) - \epsilon]\frac{q}{l} < A(q)$.
Setze

$$a_h := \left(\int_0^h \sigma_t^2 dt \right)^{1/2}.$$

Mit Hilfe der Young'schen Ungleichung, indem wir $\alpha = \frac{a_h^l}{h^{A(q)-\epsilon}}$, $\beta = a_h^{p-l}$ und $r = \frac{q}{l}$ setzen, bekommen wir

$$\frac{a_h^p}{h^{A(q)-\epsilon}} \leq \frac{l}{q} \frac{a_h^q}{h^{(A(q)-\epsilon)\frac{q}{l}}} + \frac{q-l}{q} a_h^{q\frac{p-l}{q-l}}.$$

Man ersetze a_h wieder und ziehe noch den Erwartungswert darüber:

$$\frac{\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h \sigma_t^2 dt\right)^{p/2}\right]}{h^{A(q)-\epsilon}} \leq \frac{l}{q} \frac{\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h \sigma_t^2 dt\right)^{q/2}\right]}{h^{(A(q)-\epsilon)\frac{q}{l}}} + \frac{q-l}{q} \mathbf{E}\left[\left(\int_0^h \sigma_t^2 dt\right)^{q\frac{p-l}{2(q-l)}}\right]. \tag{13}$$

Benutze nun $[A(q) - \epsilon]\frac{q}{l} < A(q)$ und (12), dann ist

$$\liminf_{h \to 0} \frac{\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h \sigma_t^2 dt\right)^{q/2}\right]}{h^{(A(q)-\epsilon)\frac{q}{l}}} = 0. \tag{14}$$

Außerdem ist durch (9) und durch den Satz der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{h \to 0} \mathbf{E}\left[\left(\int_0^h \sigma_t^2 dt\right)^{q\frac{p-l}{2(q-l)}}\right] = 0. \tag{15}$$

Mit (13), (14) und (15) erhalten wir

$$\liminf_{h \to 0} \frac{\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h \sigma_t^2 dt\right)^{p/2}\right]}{h^{A(q)-\epsilon}} = 0,$$

welches in Verbindung mit (11), $A(p) \geq A(q) - \epsilon$ folgert. Da ϵ willkürlich gewählt werden kann, schlußfolgern wir, dass $A(p) \geq A(q)$.

4 Superlineare Ornstein-Uhlenbeck Volatilität

In diesem Abschnitt behandeln wir eine spezielle Klasse von stochastischen Volatilitätsmodellen, und zwar die der Form

$$\begin{aligned} dX_t &= \sigma_t dB_t \\ dV_t &= -f(V_t)dt + dL_t \\ V_t &= \sigma_t^2, \end{aligned} \tag{16}$$

wobei $(B_t)_{t\geq 0}$ ist die standard Brown'sche Bewegung,
$f(\cdot)$ ist eine lokal Lipschitz-stetige und nicht negative Funktion mit $f(0) = 0$ (somit ist $V_t \geq 0$ falls $V_0 \geq 0$).
Es werden einige Eigenschaften von $f(\cdot)$ benötigt damit (16) eine stationäre Lösung hat. Diese Tatsache wird allerdings später genauer angesprochen.

Wir gehen davon aus, dass V_0 unabhängig ist von $(L_t)_{t\geq 0}$. Dabei ist $(L_t)_{t\geq 0}$ ein Lévy-Prozess (siehe Definition 2.3). Dieser Lévy-Prozess hat wachsende Pfade, also ein *Subordinator*, unabhängig von $(B_t)_{t\geq 0}$.
Desweiteren ist $L_0 = 0$ und

$$\mathbf{E}[\exp(-\lambda L_t)] = \exp[-t\Psi(\lambda)]$$

mit

$$\Psi(\lambda) = m\lambda + \int_{(0,+\infty)} (1 - e^{-\lambda x})\nu(dx),$$

wobei $m \geq 0$ der *Drift* des Prozesses ist, und ν ist ein positives Maß auf $(0, +\infty)$ ist, welches als *das charakteristische Maß* bezeichnet wird.
Es erfüllt die Bedingung

$$\int_{(0,+\infty)} (1 \wedge x)\nu(dx) < +\infty.$$

Einige Bedingungen von $f(\cdot)$ müssen erfüllt sein, so dass (16) eine stationäre Lösung haben kann. Dazu später mehr. Zudem nehmen wir immer an, dass V_0 unabhängig von $(L_t)_{t\geq 0}$ ist. Wir bemerken nun, dass für die 'natürlichen' Auswahlen von f Multi-Scaling nicht erstellt wird. Vor allem ist Multi-Scaling in den Ornstein-Uhlenbeck Modellen nicht vorhanden.

4.1 Funktionen mit linearem Wachstum

Proposition 4.1. *Angenommen die Funktion $f(\cdot)$ erfüllt die lineare Wachstumsbedingung*

$$\mid f(v) \mid \leq Av + B$$

für $A, B > 0$ und $\forall v > 0$. Zudem nehme man an (16) hat eine Lösung, für die $(V_t)_{t\geq 0}$ stationnär, nicht negativ und integrierbar ist, so dass Annahme 3.1 und 3.4 gelten. Dann kommt Multi-Scaling nicht vor.

Beweis. Die Bemerkung 3.3 liefert $A(q) \leq q/2$.
Somit müssen wir die umgekehrte Ungleichung zeigen.
Sei $(V_t')_{t\geq 0}$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} dV_t' &= -(AV_t' + 2B)dt + dL_t \\ V_0' &= V_0. \end{aligned} \tag{17}$$

Außerdem

$$d(V_t - V_t') = -[f(V_t) - AV_t' - 2B]dt.$$

Dazu ist $V_t - V_t'$ stetig differenzierbar und $V_0 - V_0' = 0$. Es folgt, dass $V_t - V_t' \geq 0$ $\forall$ $t \geq 0$, tatsächlich kann der Pfad von $V_t - V_t'$ nach unten nicht den Wert 0 überqueren, da falls $V_{\bar{t}} = V_{\bar{t}}' = v$ für ein $\bar{t}$, dann

$$\frac{d}{dt}(V_{\bar{t}} - V_{\bar{t}}') = -f(v) + Av + 2B \geq B > 0.$$

Somit ist $\forall$ $t \geq 0$

$$V_t \geq V_t' = V_0 e^{-At} + \frac{2B}{A}(e^{-At} - 1) + \int_0^t e^{-A(t-s)} dL_s \geq V_0 e^{-At} + e^{-t\frac{A}{2}} L_{\frac{t}{2}} - \frac{2B}{A}.$$

Andererseits haben wir

$$V_t = V_0 - \int_0^t f(V_s)ds + L_t \leq V_0 + L_t,$$

worauf folgt, dass

$$\sup_{t\in[0,h]} V_t \leq V_0 + L_h.$$

Alles zusammen ergibt

$$V_0 e^{-Ah} + e^{-A\frac{h}{2}} L_{\frac{h}{2}} - \frac{2B}{A} \leq V_h \leq \sup_{t\in[0,h]} V_t \leq V_0 + L_h. \tag{18}$$

Da

$$V_0 e^{-Ah} + e^{-A\frac{h}{2}} L_{\frac{h}{2}} - \frac{2B}{A} \in L^p \Longleftrightarrow V_0 + L_h \in L^p,$$

folgt das Resultat nun aus (18) un aus Korollar 3.7.

□

Um bei den Modellen der Form (16) Multi-scaling auszustellen, zeigt Proposition 4.1 die Notwendigkeit eines Drifts $f(.)$ mit superlinearem Wachstum.

4.2 Funktionen mit superlinearem Wachstum

Definition 4.2. *Eine Funktion $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ mit Exponent $\alpha \in \mathbf{R}$ ist von regulär variirend in ∞, falls $\forall x > 0$*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^{\alpha}.$$

Sei $\alpha = 0$, dann ist f *langsam variierend in* ∞. Man bemerke, f ist genau dann regulär variierend in ∞ mit Exponenet α falls $f(u) = u^{\alpha} l(u)$, wobei l langsam variierend in ∞ ist.
Im Folgenden betrachten wir Modelle der Form (16), für die folgende Annahmen gelten:

(i) $(B_t)_{t \geq 0}$ ist eine standard Brown'sche Bewegung.

(ii) $(L_t)_{t \geq 0}$ ist ein Lévy Subordinator mit charakteristischem Maß ν. Zudem sind $(B_t)_{t \geq 0}$ und $(L_t)_{t \geq 0}$ unabhängig voneinander. Der Subordinator wird die zufällige Anzahl der 'Zeitschritte' festlegen, die innerhalb des Subordinator Prozesses auftreten, für eine gegebene Einheit der chronologischen Zeit.

(iii) Die Funktion $u \mapsto \nu((u, +\infty))$ ist regulär variieren in ∞ mit Exponent $-\alpha < 0$.

(iv) $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ist wachsend, lokal Lipschitz, $f(0) = 0$ und regulär variieren in ∞ mit Exponent $\gamma > 1$.

Theorem 4.3. *Unter den Annahmen $(ii) - (iv)$, nimmt die Gleichung $dV_t = -f(V_t)dt + dL_t$ eine eindeutige stationäre Verteilung μ an. Darüber hinaus ist $\mu((u, +\infty))$ regulär variierend in ∞ mit Exponent $-\alpha - \gamma + 1$.*

Dieses Resultat wird angenommen. Der vollständige Beweis wird in [10] aufgeführt. Im Folgenden nehmen wir an, dass V_0 unabhängig ist von $(B_t)_{t \geq 0}$ und $(L_t)_{t \geq 0}$, mit Verteilung μ. Theorem 4.3 zeigt, dass falls $\gamma > 1$, dann hat V_t eine Verteilung mit leichteren Tails als die vom Lévy-Prozess L_t.
Nun widmen wir uns dem wichtigsten Resultat dieser Arbeit.

Theorem 4.4. *Angenommen $(i) - (iv)$ sind erfüllt, und sei $\alpha + \gamma > 2$ (Dies impliziert die Annahme 3.4).*
Dann gelten folgende Aussagen:
(1) Falls $\gamma \geq 2$, dann

$$A(q) = \begin{cases} \frac{q}{2} & \text{für } 1 \leq q < 2(\alpha + \gamma - 1) \\ \frac{\gamma - 2}{2(\gamma - 1)} q + \frac{\alpha + \gamma - 1}{\gamma - 1} & \text{für } q > 2(\alpha + \gamma - 1). \end{cases}$$

(2) Falls $1 < \gamma < 2$, dann

$$A(q) = \begin{cases} \frac{q}{2} & \text{für } 1 \leq q < 2(\alpha + \gamma - 1) \\ \frac{\gamma - 2}{2(\gamma - 1)} q + \frac{\alpha + \gamma - 1}{\gamma - 1} & \text{für } 2(\alpha + \gamma - 1) < q < \frac{2\alpha}{2 - \gamma} \\ -\infty & \text{für } q > \frac{2\alpha}{2 - \gamma}. \end{cases}$$

Für $q \neq 2(\alpha+\gamma-1)$, $\frac{2\alpha}{2-\gamma}$, kann das $A(q)$ in (1) mit einem Limes anstelle von limsup definiert werden.

Beachte, dass im Fall $1 < \gamma < 2$, $A(\cdot)$ fallend ist für $2(\alpha+\gamma-1) < q < \frac{2\alpha}{2-\gamma}$. Dies steht auf keinen Fall in Widerspruch mit Bemerkung 3.8 steht, da Annahme (9) nicht erfüllt ist.

Bemerkung 4.5. *Durch ein Vergleichsargument ergibt sich eine Konsequenz aus Theorem 4.4, und zwar dass sich die Proposition 4.1 erweitern lässt auf jedes f, welches regulär variierend in ∞ ist mit Exponent 1.*

Der Beweis von Theorem 4.4 wird in mehreren Schritten aufgeteilt. Wir beginnen mit dem Fall $f(v) = Cv^\gamma$, wobei $C > 0$, und L_t ist ein zusammengesetzter Poisson Prozess.

Proposition 4.6. *Die Folgerung von Theorem 4.4 gilt falls $f(v) = Cv^\gamma$, mit $C > 0$ und L_t ist ein Lévy Subordinator mit Null Drift und endlichem charakteristischen Maß ν.*

Beweis. Man beachte, $\mathbf{E}[V_0^{q/2}] < +\infty$ nach Theorem 4.3 für $q < (\alpha+\gamma-1)$, so dass nach Proposition 3.2 und nach (8), $A(q) = \frac{q}{2}$. Somit reicht dies aus um den Fall $q > 2(\alpha+\gamma-1)$ zu betrachten. Im Folgenden schreiben wir $a_h \sim h^u$ anstelle von

$$lim_{h\to 0}\frac{\log a_h}{\log h} = u. \tag{19}$$

Wir werden wiederholt das Resultat (19) anwenden, welches folgt, falls $\forall\epsilon > 0$, $\exists C_\epsilon > 1$, so dass

$$\tfrac{1}{C_\epsilon}h^{u+\epsilon} < a_h < C_\epsilon h^{u-\epsilon}.$$

In dem was folgt, basieren alle Annahmen auf $A(q)$ auf die Tatsache (siehe (10)), dass

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log \mathbf{E}\left[\left(\int_0^h \sigma_t^2 dt\right)^{\frac{p}{2}}\right]}{\log h}$$

dann, und nur dann existiert, falls

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log \mathbf{E}(|X_{t+h}-X_t|^q)}{\log h}$$

existiert und sie in diesem Fall überein stimmen.

1. Teil: $\gamma > 2$

Durch die Annahme, dass ν endlich ist, springt (L_t) endlich viele Male in jedem kompakten Intervall.

Sei $(T_k)_{k\geq 1}$ die (geordnete) Menge von positiven Sprungzeiten, mit $T_0 = 0$.

Sei $h > 0$, dann bezeichnet $i(h)$ die zufällige Anzahl von Sprungzeiten im Intervall $(0, h]$.

Man betrachte den *Fall i(h)=0*. Falls $i(h) = 0$, dann löst V_t, für $t \in [0, h]$, die Differentialgleichung $\frac{d}{dt}V_t = -CV_t^\gamma$, deren Lösung

$$V_t = \left(V_0^{1-\gamma} + (\gamma-1)Ct\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

ist. Nach dem Integrieren, bekommt man

$$\int_0^h V_t dt = \frac{\gamma-2}{\gamma-1}\left[\left(V_0^{1-\gamma}+(\gamma-1)\,Ch\right)^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} - (V_0^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}})\right]. \tag{20}$$

Man beachte, dass für $\lambda =: \nu([0,+\infty))$,

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=0\}}\right] = \mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2} \mid i(h)=0\right] e^{-\lambda h}.$$

Der Faktor $e^{-\lambda h}$ steuert keinen Beitrag bei zum Verhalten von $\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=0\}}\right]$ zu $h \to 0$, somit kann es vernachlässigt werden. Darüber hinaus, nach (20) und unter Ausnutzung der Tatsache, dass V_0 und $\{i(h)=0\}$ unabhängig sind, ist
$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2} \mid i(h)=0\right] =$

$$= \left(\frac{\gamma-2}{\gamma-1}\right)^{q/2}((\gamma-1)Ch)^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q}\mathbf{E}\left[\left[\left(\frac{V_0^{1-\gamma}}{(\gamma-1)Ch}+1\right)^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} - \left(\frac{V_0^{1-\gamma}}{(\gamma-1)Ch}\right)^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}\right]^{q/2}\right]. \tag{21}$$

Für $0 < a < 1$ und $z > 0$ betrachte man folgende Ungleichung

$$a(z+1)^{a-1} \le (z+1)^a - z^a \le (z+1)^{a-1} \tag{22}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
& a(z+1)^{a-1} \le && (z+1)^a - z^a \le && (z+1)^{a-1} \mid : (z+1)^a \\
\iff\quad & \frac{a}{z+1} \le && 1-\left(\frac{z}{z+1}\right)^a \le && \frac{1}{z+1} \mid \frac{z}{1+z} = 1-\frac{1}{z+1} \\
\iff\quad & a\frac{1}{z+1} \le && 1-(1-\frac{1}{z+1})^a \le && \frac{1}{z+1} \mid u = \frac{1}{z+1} \text{ ,mit} u \in (0,1) \\
\iff\quad & au \le && 1-(1-u)^a \le && u \mid \cdot(-1), +1 \\
\iff\quad & 1-u \le && (1-u)^a \le && 1-au
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow f(u) &= (1-u)^a - 1 + u \ge 0 \qquad u \in [0,1] \text{ , und} \\
g(u) &= 1 - au - (1-u)^a \ge 0 \qquad u \in [0,1]
\end{aligned}$$

□

Um den Limes $\lim_h \dfrac{\log \mathbf{E}\left[(\int_0^h V_t dt)^{q/2}\right]}{\log h}$ zu berechnen, nimmt man die rechte Seite von (21) und ersetzt sie durch (in dem man $a = \frac{\gamma-2}{\gamma-1}$ in der Ungleichung (22) einsetzt; zur Erinnerung $\gamma > 2$)

$$h^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q}\mathbf{E}\left[\left[\left(\frac{V_0^{1-\gamma}}{(\gamma-1)Ch}+1\right)^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}-1}\right]^{q/2}\right] = h^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q}\mathbf{E}\left[\left(\frac{V_0^{1-\gamma}}{(\gamma-1)Ch}+1\right)^{-\frac{q}{2(\gamma-1)}}\right]. \tag{23}$$

In anderen Worten:

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=0\}}\right] \sim h^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q}\mathbf{E}\left[\left(\frac{V_0^{1-\gamma}}{(\gamma-1)Ch}+1\right)^{-\frac{q}{2(\gamma-1)}}\right] \tag{24}$$

Um die rechte Seite von (24) zu schätzen, bemerke man zunächst einmal:
Für $y > 0$ und $0 < u < r$ hat man folgende Ungleichung

$$\frac{1}{2^r}\mathbf{1}_{\{y<1\}} \leq (1+y)^{-r} \leq (1+y)^{-u} \leq y^{-u}. \tag{25}$$

Diese Ungleichung lässt sich rasch überprüfen.
Setze nun $r := \dfrac{q}{2(\gamma-1)}$, $Y := \dfrac{V_0^{1-\gamma}}{(\gamma-1)Ch}$ und mit (25) erhält man

$$\frac{1}{2^r}\mathbf{P}(Y<1) \leq \mathbf{E}\left[\left(\frac{V_0^{1-\gamma}}{(\gamma-1)Ch}+1\right)^{-\frac{q}{2(\gamma-1)}}\right] \leq \mathbf{E}(Y^{-u}) \tag{26}$$

$\forall u < \frac{q}{2(\gamma-1)}$.
Sei $\xi := \frac{\alpha+\gamma-1}{\gamma-1}$. Man bemerke, $\xi < r$ für $q > 2(\alpha+\gamma-1)$.
Nach Theorem 4.3:

$$\mathbf{P}(Y<1) = \\ = \mathbf{P}\left(V_0 > \left(\frac{1}{(\gamma-1)Ch}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right) \sim \left[\left(\frac{1}{(\gamma-1)Ch}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]^{\alpha+\gamma-1} \sim h^{\xi}, \tag{27}$$

Sei nun $u < \xi$. Man bekommt

$$\mathbf{E}(Y^{-u}) = [(\gamma-1)Ch]^u\mathbf{E}[V_0^{u(\gamma-1)}] \leq Ah^u, \tag{28}$$

für irgendein $A > 0$ welches von u abhängen könnte, aber nicht von h, wobei die Tatsache, dass $\mathbf{E}[V_0^{u(\gamma-1)}] < +\infty$ verwenden wird, da $u(\gamma-1) < \alpha+\gamma-1$. Da u beliebig nahe an ξ gewählt werden kann, und nach (26), (27) und (28) erhält man

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{V_0^{1-\gamma}}{(\gamma-1)Ch}+1\right)^{-\frac{q}{2(\gamma-1)}}\right] \sim h^{\xi}, \tag{29}$$

was wiederum

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2} \mathbf{1}_{\{i(h)=0\}}\right] \sim h^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+\frac{\alpha+\gamma-1}{\gamma-1}} \tag{30}$$

ergibt.
Um den Beweis für $\gamma > 2$ zu vervollständigen, reicht es aus für jedes $u < \frac{\alpha+\gamma-1}{\gamma-1}$ zu zeigen, dass

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2} \mathbf{1}_{\{i(h)\geq 1\}}\right] \leq A h^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+u} \tag{31}$$

für irgendein $A > 0$, welches von u abhängen könnte, aber nicht von h.

Fall i(h)=0.
Sei

$$V_t = \begin{cases} \left(V_0^{1-\gamma} + (\gamma-1)Ct\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \\ \left(V_{T_1}^{1-\gamma} + (\gamma-1)C(t-T_1)\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} & \text{für } T_1 \leq t \leq h, \end{cases}$$

dies ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^h V_t dt =& \frac{\gamma-2}{\gamma-1}\left[(V_0^{1-\gamma} + (\gamma-1)CT_1)^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} - (V_0^{1-\gamma})^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}\right] \\ &+ \frac{\gamma-2}{\gamma-1}\left[(V_{T_1}^{1-\gamma} + (\gamma-1)C(h-T_1))^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} - (V_{T_1}^{1-\gamma})^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}\right] \\ =:& P(h) + Q(h), \end{aligned} \tag{32}$$

und deshalb

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2} \mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right] \leq 2^{q-1}\left[\mathbf{E}\left(P^{q/2}(h)\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right) + \mathbf{E}\left(Q^{q/2}(h)\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right)\right] \tag{33}$$

Woher kommt der Faktor 2^{q-1} in (33) her?
Sei $f(x) = x^{q/2}$ eine konvexe Funktion mit $q \geq 2$,
sei $x = P(h)\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}$ und $y = Q(h)\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}$, somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} & f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) \\ \Longleftrightarrow & \left(\frac{x+y}{2}\right)^{q/2} \leq \frac{1}{2}x^{q/2} + \frac{1}{2}y^{q/2} \\ \Longleftrightarrow & (x+y)^{q/2} \leq 2^{\frac{q}{2}-1}(x^{q/2} + y^{q/2}) \leq 2^{q-1}(x^{q/2} + y^{q/2}) \\ \Longrightarrow & (x+y)^{q/2} \leq 2^{q-1}(x^{q/2} + y^{q/2}), \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}^{q/2} = \mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}$. Zeigen wir nun, dass $\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2} \mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right]$ sowie in (31) nach oben beschränkt werden kann:

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2} \mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right] \leq Ah^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+u}, \tag{34}$$

für jedes $u < \frac{\alpha+\gamma-1}{\gamma-1}$. Nach (33) reicht es aus zu zeigen, dass beide $\mathbf{E}\left(P^{q/2}(h)\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right)$ und $\mathbf{E}\left(Q^{q/2}(h)\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right)$ eine obere Schranke der selben Form haben. Man bemerke zuerst, dass

$$P(h) \leq \frac{\gamma-2}{\gamma-1}\left[(V_0^{1-\gamma} + (\gamma-1)Ch)^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} - (V_0^{1-\gamma})^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}\right], \tag{35}$$

welches überienstimmt mit (20), dessen Skalierung bereits ermittelt wurde.
Da $\mathbf{P}(i(h) = 1) \sim h$, habe wir dass $\mathbf{E}\left(P^{q/2}(h)\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right)$ skaliert wie der Term im Fall $i(h) = 0$, aber mit einem zusätzlichen Faktor h,
i.e.

$$\mathbf{E}\left(P^{q/2}(h)\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right) \leq Ah^{1+\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+u} \leq Ah^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+u}. \tag{36}$$

Für den Term $\mathbf{E}\left(Q^{q/2}(h)\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right)$ wiederholen wir die Schritte von Fall $i(h) = 0$ (man bemerke, dass alle dort benutzten Ungleichungen punktweise gelten) mit V_{T_1} anstelle von V_0 und $h - T_1$ anstelle von h (siehe (24)), man erhält

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(Q^{q/2}(h)\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right) \\
&\leq \mathbf{E}\left[(h-T_1)^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q}\left(\frac{V_{T_1}^{1-\gamma}}{(\gamma-1)C(h-T_1)}+1\right)^{-\frac{q}{2(\gamma-1)}}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right] \\
&\leq h^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q}\mathbf{E}\left[\left(\frac{V_{T_1}^{1-\gamma}}{(\gamma-1)C(h-T_1)}+1\right)^{-\frac{q}{2(\gamma-1)}}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right]
\end{aligned} \tag{37}$$

Für $u < \frac{q}{2(\gamma-1)}$ und mit $V_{T_1} \leq V_0 + L_h$, kann man den letzten Term von oben beschränken

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\left(\frac{V_{T_1}^{1-\gamma}}{(\gamma-1)C(h-T_1)}+1\right)^{-\frac{q}{2(\gamma-1)}}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right] \\
&\qquad \leq \mathbf{E}\left[\left(\frac{V_{T_1}^{1-\gamma}}{(\gamma-1)C(h-T_1)}+1\right)^{-u}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right] \\
&\qquad \leq \mathbf{E}\left[\left(\frac{V_{T_1}^{1-\gamma}}{(\gamma-1)C(h-T_1)}\right)^{-\mathbf{u}}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right] \\
&\qquad \leq \mathbf{E}\left[\left(\frac{V_{T_1}^{1-\gamma}}{(\gamma-1)Ch}\right)^{-\mathbf{u}}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right] \\
&\qquad \leq Ah^u\mathbf{E}\left[(V_0+L_h)^{u(\gamma-1)}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right]
\end{aligned} \tag{38}$$

mit Konstante $A > 0$. Man bemerke V_0 ist unabhängig von $\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}$, L_h hat Verteilung ν bedingt auf $\{i(h) = 1\}$ und $\mathbf{P}(i(h) = 1) \leq \lambda h$. Für eine bestimmte Konstante $C > 0$, folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[(V_0 + L_h)^{u(\gamma-1)}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right] \\
&\qquad \leq CP(i(h) = 1)\left[\mathbf{E}\left(V_0^{u(\gamma-1)}\right) + \mathbf{E}\left(L_h^{u(\gamma-1)} \mid i(h) = 1\right)\right] \\
&\qquad = CP(i(h) = 1)\left[\int v^{u(\gamma-1)}\mu(dv) + \int l^{u(\gamma-1)}\nu(dl)\right]. \qquad (39)
\end{aligned}$$

Da nach Theorem 4.3 die Tails von μ leichter sind als die von ν, sind beide Integrale endlich dann und genau dann wenn $\int v^{u(\gamma-1)}\nu(dv) < +\infty$. Dies gilt für $u < \alpha/(\gamma - 1)$ (Annahme (iii)). Also ist für jedes $u < \alpha/(\gamma - 1)$,

$$\mathbf{E}\left[(V_0 + L_h)^{u(\gamma-1)}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right] \leq Ah \qquad (40)$$

für irgendein $A > 0$.
Nach (37), (38), (39), und (40) ist $\mathbf{E}\left(P^{q/2}(h)\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right)$ nach oben beschränkt durch

$$Bh^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+u+1}$$

für jedes $u < \alpha/(\gamma - 1)$ und irgendwelches $B > 0$, möglicherweise abhängend von u. In äquivalenter Weise ist

$$\mathbf{E}\left(Q^{q/2}(h)\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right) \leq Bh^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+u} \qquad (41)$$

$\forall\ u < \frac{\alpha+\gamma-1}{\gamma-1}$. Deswegen ist (34) durch (36) und (41) gegeben.
Fall $i(h) \geq 2$.
Um (31) zu beweisen, und somit den ganzen Beweis vervollständigen, bleibt noch zu zeigen, dass

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)\geq 2\}}\right] \leq Ah^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+u} \qquad (42)$$

$\forall\ u < \frac{\alpha+\gamma-1}{\gamma-1}$ und $A > 0$.
Sei $n \geq 2$ und auf das Ereignis $\{i(h) = n\}$ beschränkt. Man bekommt

$$V_t = \begin{cases}
\left(V_0^{1-\gamma} + (\gamma-1)Ct\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} & \text{für } 0 \leq t \leq T_1 \\
\left(V_{T_1}^{1-\gamma} + (\gamma-1)C(t-T_1)\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} & \text{für } T_1 \leq t \leq T_2 \\
\vdots & \\
\left(V_{T_n-1}^{1-\gamma} + (\gamma-1)C(t-T_{n-1})\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} & \text{für } T_{n-1} \leq t \leq T_n \\
\left(V_{T_n}^{1-\gamma} + (\gamma-1)C(t-T_n)\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} & \text{für } T_n \leq t \leq h,
\end{cases}$$

so dass (32) folgendes ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^h V_t dt =& \frac{\gamma-2}{\gamma-1}\sum_{k=1}^{n}\left[(V_{k-1}^{1-\gamma}+(\gamma-1)C(T_k-T_{k-1}))^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}-(V_{k-1}^{1-\gamma})^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}\right]\\ &+\frac{\gamma-2}{\gamma-1}\left[(V_{T_n}^{1-\gamma}+(\gamma-1)C(h-T_n))^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}-(V_{T_n}^{1-\gamma})^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}\right]\\ =:& \sum_{k=1}^{n}P_k(h)+P_{n+1}(h), \end{aligned} \tag{43}$$

Jeder einzelne Term $\mathbf{E}\left[P_k^{q/2}(h)\mathbf{1}_{\{i(h)=n\}}\right]$ kann geschätzt werden wie in (37) und (38), man bekommt

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[P_k^{q/2}(h)\mathbf{1}_{\{i(h)=n\}}\right]\\ &\leq Ch^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+u}\mathbf{E}\left[(V_0+L_h)^{u(\gamma-1)}\mathbf{1}_{\{i(h)=n\}}\right]\\ &\leq C'h^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+u}\mathbf{P}(i(h)=n)\left[\mathbf{E}\left(V_0^{u(\gamma-1)}\right)+\mathbf{E}\left(L_h^{u(\gamma-1)}\mid i(h)=n\right)\right]\end{aligned} \tag{44}$$

für $u<\frac{q}{2(\gamma-1)}$ und den Konstanten C, C', die möglicherweise von u abhängen aber nicht von n und h.
Die Verteilung von L_h bedingt auf $\{i(h)=0\}$ ist gegeben durch die n-fache Faltung ν^{*n}. In an deren Worten, wenn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen sind mit Verteilung ν,

$$\mathbf{E}\left(L_h^{u(\gamma-1)}\mid i(h)=n\right)=\mathbf{E}\left[(X_1+X_2+\ldots+X_n)^{u(\gamma-1)}\right]\leq n^{u(\gamma-1)-1}\mathbf{E}\left[X_1^{u(\gamma-1)}\right].$$

Für $u<\alpha/(\gamma-1)$,

$$\mathbf{E}\left[X_1^{u(\gamma-1)}\right]<+\infty \text{ und } \mathbf{E}\left(V_0^{u(\gamma-1)}\right)<+\infty.$$

Somit

$$\mathbf{E}\left[P_k^{q/2}(h)\mathbf{1}_{\{i(h)=n\}}\right]\leq Ch^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+u}n^{u(\gamma-1)-1}\mathbf{P}(i(h)=n), \tag{45}$$

mit Konstante C unabhängig von n, h und k.
Sei $u<\frac{q}{2(\gamma-1)}$, so erält man nach (43), (44) und (45)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=n\}}\right]\leq& n^{q/2}\sum_{k=1}^{n+1}\mathbf{E}\left[P_k^{q/2}(h)\mathbf{1}_{\{i(h)=n\}}\right]\\ \leq& Ch^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+u}n^{u(\gamma-1)+q/2}\mathbf{P}(i(h)=n).\end{aligned} \tag{46}$$

Unter Bebobachtung der Tatsache, dass $\mathbf{P}(i(h)=n)\leq\frac{\lambda^n h^n}{n!}$, können wir über $n\geq 2$ summieren:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 2}\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=n\}}\right]\leq& Ch^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+u+2}\sum_{n\geq 2}n^{u(\gamma-1)+q/2}\frac{\lambda^n h^{n-2}}{n!}\\ \leq& C'h^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+u+2}.\end{aligned} \tag{47}$$

Da $\frac{q}{2(\gamma-1)}+2>\frac{\alpha+\gamma-1}{\gamma-1}$ (zur Erinnerung $q>2(\alpha+\gamma-1)$), ergibt sich, dass

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)\geq 2\}}\right]$$

vernachlässigbar ist in Bezug auf (30).
Dies vervollständigt den Beweis für den Fall $\gamma>2$.

Teil 2: $1<\gamma<2$
Fall $i(h)=0$.
Formel (20) gilt immer noch, doch jetzt hat man $\gamma-2<0$. So wird aus (21) folgendes:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}&\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=0\}}\right]\\ &=\left(\frac{2-\gamma}{\gamma-1}\right)^{q/2}((\gamma-1)Ch)^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q}\\ &\qquad\cdot\mathbf{E}\left[\left[\left(\frac{V_0^{1-\gamma}}{(\gamma-1)Ch}\right)^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}-\left(\frac{V_0^{1-\gamma}}{(\gamma-1)Ch}+1\right)^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}\right]^{q/2}\right]e^{-\lambda h}.\end{aligned}\tag{48}$$

Um diesen letzten Ausdruck zu schätzen, unternehme man folgende Veränderung auf (22), geltend für $z>0$ und zudem setze man $a:=\frac{2-\gamma}{\gamma-1}$:

$$\begin{aligned}a(z+1)^{-1}z^{-a}\leq\quad & z^{-a}-(z+1)^{-a}\leq(z+1)^{-1}z^{-a} && \text{für } 0<a\leq 1\\ (z+1)^{-1}z^{-a}\leq\quad & z^{-a}-(z+1)^{-a}\leq a(z+1)^{-1}z^{-a} && \text{für } a>1.\end{aligned}\tag{49}$$

Bei Verwendung dieser Ungleichungen, wie in (21), bekommt man für $C>1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C}\mathbf{E}\left[\left(\frac{V_0^{\gamma-1}h}{1+V_0^{\gamma-1}h}V_0^{2-\gamma}\right)^q\right]&\leq\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=0\}}\right]\\ &\leq C\mathbf{E}\left[\left(\frac{V_0^{\gamma-1}h}{1+V_0^{\gamma-1}h}V_0^{2-\gamma}\right)^q\right].\end{aligned}\tag{50}$$

Wir stellen nun fest, dass

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[\left(\frac{V_0^{\gamma-1}h}{1+V_0^{\gamma-1}h}V_0^{2-\gamma}\right)^{q/2}\right]\\ &=\mathbf{E}\left[\left(\frac{V_0^{\gamma-1}h}{1+V_0^{\gamma-1}h}V_0^{2-\gamma}\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{V_0^{\gamma-1}h\leq 1\}}\right]+\mathbf{E}\left[\left(\frac{V_0^{\gamma-1}h}{1+V_0^{\gamma-1}h}V_0^{2-\gamma}\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{V_0^{\gamma-1}h>1\}}\right]\\ &\sim h^{q/2}\mathbf{E}\left[V_0^{q/2}\mathbf{1}_{\{V_0^{\gamma-1}h\leq 1\}}\right]+\mathbf{E}\left[V_0^{\frac{q}{2}(2-\gamma)}\mathbf{1}_{\{V_0^{\gamma-1}h>1\}}\right].\end{aligned}\tag{51}$$

Um die zwei Summanden der rechten Seite von (51) zu schätzen, benutzen wir folgende Tatsache: Sei μ eine Wahrscheinlichkeit auf $[0,+\infty)$, so dass $\mu((u,+\infty))$ regulär variierend ist mit Exponent $-\xi<0$.
Dann gilt

$$\int_0^x u^p\mu(du) \sim x^{p-\xi} \text{ für } p>\xi \tag{52}$$

$$\int_x^{+\infty} u^p\mu(du) \sim x^{p-\xi} \text{ für } p<\xi. \tag{53}$$

Sei μ nun die Verteiling von V_0, so dass, nach Theorem 4.3, $\xi=\alpha+\gamma-1$. Da $q>2(\alpha+\gamma-1)$, haben wir nach (52)

$$\mathbf{E}\left[V_0^{q/2}\mathbf{1}_{\{V_0^{\gamma-1}h\le 1\}}\right] \sim h^{-\frac{1}{\gamma-1}(\frac{q}{2}-\alpha-\gamma+1)},$$

und somit

$$h^{q/2}\mathbf{E}\left[V_0^{q/2}\mathbf{1}_{\{V_0^{\gamma-1}h\le 1\}}\right] \sim h^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+\frac{\alpha+\gamma-1}{\gamma-1}} \tag{54}$$

Darüber hinaus, nach (53), gilt

$$\mathbf{E}\left[V_0^{\frac{q}{2}(2-\gamma)}\mathbf{1}_{\{V_0^{\gamma-1}h>1\}}\right] \sim h^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+\frac{\alpha+\gamma-1}{\gamma-1}}. \tag{55}$$

für $\frac{q}{2}(2-\gamma)<\alpha+\gamma-1$, währenddessen

$$\mathbf{E}\left[V_0^{\frac{q}{2}(2-\gamma)}\mathbf{1}_{\{V_0^{\gamma-1}h>1\}}\right] = +\infty \tag{56}$$

für $\frac{q}{2}(2-\gamma)>\alpha+\gamma-1$. Zusammengefasst haben wir gezeigt, dass

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=0\}}\right] \sim h^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+\frac{\alpha+\gamma-1}{\gamma-1}} && \text{für } 2(\alpha+\gamma-1)<q<\frac{2(\alpha+\gamma-1)}{2-\gamma}\\
&\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=0\}}\right] = +\infty && \text{für } q>\frac{2(\alpha+\gamma-1)}{2-\gamma}.
\end{aligned} \tag{57}$$

Fall $i(h)=1$.
Dieser Fall wird behandelt wie der für $\gamma>2$ und unter Verwendung des gleichen Arguments führt es zu (50), somit ist der zu schätzende Term

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{V_{T_1}^{\gamma-1}(h-T_1)}{1+V_{T_1}^{\gamma-1}(h-T_1)}V_{T_1}^{2-\gamma}\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right]. \tag{58}$$

Da $V_{T_1}\ge L_{T_1}$, kann somit (58) nach unten beschränkt werden mit

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{L_{T_1}^{\gamma-1}(h-T_1)}{1+L_{T_1}^{\gamma-1}(h-T_1)}L_{T_1}^{2-\gamma}\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right]$$

welches unendlich ist sobald $\mathbf{E}\left[\left(L_{T_1}^{2-\gamma}\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right]=+\infty$.
Zur Erinnerung, L_{T_1} ist unabhängig von $\{i(h)=1\}$ und hat Verteilung ν, unter $q>\frac{2\alpha}{2-\gamma}$. Dies impliziert

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right]=+\infty \text{ für } q>\frac{2\alpha}{2-\gamma}. \tag{59}$$

Man vergleiche mit (57) und bemerke dass, $\frac{2\alpha}{2-\gamma}<\frac{2(\alpha+\gamma-1)}{2-\gamma}$. Somit wird angenommen $2(\alpha+\gamma-1)<q<\frac{2\alpha}{2-\gamma}$ (man beachte, dass durch Annahme, $\alpha+\gamma>2$, in der Tat $2(\alpha+\gamma-1)<\frac{2\alpha}{2-\gamma}$). Eine obere Schranke für (58) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\left(\frac{V_{T_1}^{\gamma-1}(h-T_1)}{1+V_{T_1}^{\gamma-1}(h-T_1)}V_{T_1}^{2-\gamma}\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right]\\
&\leq \mathbf{E}\left[\left(\frac{(V_0+L_{T_1})^{\gamma-1}h}{1+(V_0+L_{T_1})^{\gamma-1}h}(V_0+L_{T_1})^{2-\gamma}\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right]\\
&=\mathbf{E}\left[\left(\frac{(V_0+L_{T_1})^{\gamma-1}h}{1+(V_0+L_{T_1})^{\gamma-1}h}(V_0+L_{T_1})^{2-\gamma}\right)^{q/2}\right]\mathbf{P}(i(h)=1),
\end{aligned} \tag{60}$$

wobei die Tatsache benutzt wurde, dass V_0 und L_{T_1} unabhängig von $\{i(h)=1\}$ sind. Nun wird (60) genau wie (51) geschätzt, doch mit $V_0+L_{T_1}$ anstelle von V_0. Da die Tails von $V_0+L_{T_1}$ gleich sind wie die von L_{T_1}, d.h. regulär variierend mit Exponent α, währenddessen $\mathbf{P}(i(h)=1)\sim h$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\left(\frac{(V_0+L_{T_1})^{\gamma-1}h}{1+(V_0+L_{T_1})^{\gamma-1}h}(V_0+L_{T_1})^{2-\gamma}\right)^{q/2}\right]&\sim h^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+\frac{\alpha}{\gamma-1}}\mathbf{P}(i(h)=1)\\
&\sim h^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+\frac{\alpha+\gamma-1}{\gamma-1}}.
\end{aligned} \tag{61}$$

Zusammengefasst haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right]&\sim h^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma-1)}q+\frac{\alpha+\gamma-1}{\gamma-1}} && \text{für } 2(\alpha+\gamma-1)<q<\frac{2\alpha}{2-\gamma}\\
\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2}\mathbf{1}_{\{i(h)=1\}}\right]&=+\infty && \text{für } q>\frac{2\alpha}{2-\gamma}.
\end{aligned} \tag{62}$$

Fall $i(h)\geq 2$.
Dieser Fall verläuft genau so wie der Fall für $\gamma>2$, unter Verwendung der oberen Schranke, die im Fall $i(h)=1$ erhalten wurde.
Somit ist der Beweis für $1<\gamma<2$ vervollständigt.

Teil 3: $\gamma = 2$
In diesem Fall bekommen wir im Fall wo es keine Sprünge gibt, d.h. wenn i(h)=0,

$$V_t = (V_0^{-1} + Ct)^{-1}$$

und somit

$$\int_0^h V_t = \frac{1}{C}\left[\log(V_0^{-1} + Ch) - \log(V_0^{-1})\right] = \frac{1}{C}\left[\log(1 + ChV_0)\right]. \tag{63}$$

Eine obere Schranke für $\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2} \mathbf{1}_{\{i(h)=0\}}\right]$ bekommt man mit (63) und mit der Ungleichung

$$\log(1+y) \leq \frac{1}{r} y^r,$$

für $y, r > 0$.
Diese Ungleichung lässt sich einfach nachvollziehen.

Beweis.

$$\begin{aligned} &\log(1+y) \leq \frac{1}{r} y^r && \mid \cdot r > 0 \\ \Longleftrightarrow &r \log(1+y) \leq y^r \\ \Longleftrightarrow &\log^r(1+y) \leq y^r && \mid \sqrt[r]{} \\ \Longleftrightarrow &\log(1+y) \leq y \end{aligned}$$

□

Es ergibt sich dann

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2} \mathbf{1}_{\{i(h)=0\}}\right] \leq \frac{1}{C^{q/2}} C^{r\frac{q}{2}} h^{r\frac{q}{2}} \mathbf{E}\left(V_0^{r\frac{q}{2}}\right).$$

Da $\mathbf{E}\left(V_0^{r\frac{q}{2}}\right) < +\infty$ für $\frac{rq}{2} < \alpha + 1$ und mit $\frac{rq}{2} \uparrow \alpha + 1$ ergibt sich

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2} \mathbf{1}_{\{i(h)=0\}}\right] \leq C h^{r\frac{q}{2}}, \tag{64}$$

mit $C > 0$ und für jedes r, so dass $\frac{rq}{2} < \alpha + 1$. Eine untere Schranke erhält man mit folgender Ungeichung

$$\log(1+y) \geq \tfrac{1}{2}\mathbf{1}_{(1,+\infty)}(y),$$

dies ergibt

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2} \mathbf{1}_{\{i(h)=0\}}\right] \geq \frac{1}{(2C)^{q/2}} \mathbf{P}(ChV_0 > 1) \sim h^{\alpha+1}, \tag{65}$$

wobei wir für die letzte Ungleichung das Theorem 4.3 angewedet haben.

Nach (64) und (65) ergibt sich

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2} \mathbf{1}_{\{i(h)=0\}}\right] \sim h^{\alpha+1}.$$

Die Fälle mit $i(h) \geq 1$ sind ähnlich wie die in Teil 1 und 2, und werden somit weggelassen. □

Beweis. von Theorem 4.4
Um Theorem 4.4 zu beweisen, müssen wir die Proposition 4.6 in 2 Richtungen erweitern:

(a) Verallgemeinerung von $f(v) = Cv^\gamma$ auf jedes f, welches die Annahme (iv) erfüllt, und

(b) Erweiterung auf Lévy Subordinatoren, die die Annahme (ii) und (iv) erfüllen, somit ergibt sich ein unendlich charakteristisches Maß ν.

Schritt 1
Alle Annahmen von Proposition 4.6 werden beibehalten, zusätzlich wird verlangt, dass $f(v) = Cv^\gamma$ gilt nur für $v > \epsilon$, $\epsilon > 0$, und dass f die Annahme (iv) erfüllen muss. In anderen Worten, sei V die Lösung der Gleichung

$$dV_t = -f(V_t)dt + dL_t$$

und V' die von

$$dV'_t = -CV_t'^\gamma + dL_t.$$

Man nimmt an $V_0 = V'_0 = v > 0$.
Wir behaupten, dass

$$\mid V_t - V'_t \mid \leq 2\epsilon \tag{66}$$

f.s. für jedes $t \geq 0$. Dies ergibt sich wegen folgender Tatsache: $\exists$ Konstante $\delta > 0$, derart, dass, sobald $\mid V_t - V'_t \mid \geq 2\epsilon$,

$$\frac{d}{dt} \mid V_t - V'_t \mid \leq -\delta. \tag{67}$$

Um (67) zu sehen, nimmt man zunächst an, dass $V_t - V'_t \geq 2\epsilon$. Insbesondere ist $V_t \geq \epsilon$, somit ist

$$\frac{d}{dt}[V_t - V'_t] = -C\left(V_t^\gamma - V_t'^\gamma\right) < -C(2\epsilon)^\gamma,$$

wobei die Tatsache benutzt wurde, dass für $c > 0$, die Funktion $(x+c)^\gamma - x^\gamma$ wachsend ist für $x > 0$. Nun nehmen wir an, dass $V'_t - V_t \geq 2\epsilon$. Falls $V_t \geq \epsilon$, dann

$$\frac{d}{dt}[V'_t - V_t] = -C\left(V_t'^\gamma - V_t^\gamma\right) < -C(2\epsilon)^\gamma;$$

Falls $V_t < \epsilon$, und da f wachsend, ergibt sich

$$\frac{d}{dt}[V'_t - V_t] = -CV_t'^\gamma + f(V_t) \leq -C(2\epsilon)^\gamma + C\epsilon^\gamma < 0.$$

Somit ist (67) bewiesen, und anschließend auch (66). Insbesondere ist die Verteilung von V_t im Mittel kleiner als die von $V_t' + 2\epsilon$, was bedeuted, dass für jedes g wachsend und beschränkt, haben wir $\mathbf{E}\left[g(V_t)\right] \leq \mathbf{E}\left[g(V_t' + 2\epsilon)\right]$. Wendet man einen Limes mit $t \to +\infty$ auf diese Ungleichung an, so bekommt man eine stochastische Ungleichung zwischen den stationären Verteilungen von V und V'. Dies bedeutet, dass wir, in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum, zwei Zufallsvariablen V_0 und V_0' erkennen können, die unabhängig vom Lévy-Prozess L sind und gemäß der stationären Verteilungen der entsprechenden Prozessen verteilt sind, so dass $V_0 \leq V_0' + 2\epsilon$. Durch Wiederholen des oberen Arguments, erkennt man, dass die Ungleichung $V_t \leq V_t' + 2\epsilon$ fast sicher $\forall\ t > 0$ beibehalten wird, auch für die stationären Prozessen. Es folt

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2}\right] \\
&\quad \leq \mathbf{E}\left[\left(\int_0^h [V_t' + 2\epsilon] dt\right)^{q/2}\right] \leq 2^{\frac{q}{2}-1}\left[\mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t' dt\right)^{q/2}\right] + (2\epsilon h)^{q/2}\right]. \qquad (68)
\end{aligned}$$

Da

$$A(q) = \limsup_{h \to 0} \frac{\log \mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t dt\right)^{q/2}\right]}{\log h}, \qquad (69)$$

und

$$A'(q) = \lim_{h \to 0} \frac{\log \mathbf{E}\left[\left(\int_0^h V_t' dt\right)^{q/2}\right]}{\log h} \leq \frac{q}{2}, \qquad (70)$$

nach (68) erhalten wir

$$A(q) \geq A'(q).$$

In dem die Rollen von V und V' ausgetauscht werden, erhalten wir $A(q) = A'(q)$. Die Existenz des Limes (70), welches sich aus der Proposition 4.6 ergibt, impliziert darüber hinaus, dass auch (69) ein Limes besitzt.
Die erste Verlängerung des Theorems 4.4 ist somit erlangt ,da $A'(q)$ gegeben ist durch 4.6.

Die zweite Erweiterung wird in dieser Arbeit nicht bewiesen. Einige Argumente von diesem Teil des Beweises findet man in [10], [11] und [13]. □

Literatur

[1] A. Andreoli, F. Caravenna, P. Dai Pra, G. Posta, *Scaling and multiscaling in financial series: a simple model.* Advanced in Applied Probability, 44(4) (2012), 1018-1051.

[2] P.Dai Pra, P.Pigato, Multiscaling of moments in stochastic volatility models, *Stochastic Processes and their Applications*, 125(10):3725-3747, 2015.

[3] T. di Matteo, Multi-scaling in finance, *Quantative Finance*, 7(1):21-36, 2007.

[4] R. Junior Buonocore, T. Aste, and T. di Matteo, *Measuring multiscaling in financial time-series*, ArXiv e-prints, September 2015.

[5] Giulia Iori, *Scaling and multiscaling in financial markets*, In Disordered and complex systems (London, 2000), Volume 553 of AIP Conf. Proc,. pages 297-302, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2001.

[6] Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, Ronnie Sircar, and Knut Solna, *Multiscale stochastic volatility for equity, interest rate, and credit derivatives*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[7] Sangbae Kim and Francis In, *Portfolio allocation and the investment horizon: a multiscaling approach*, Quantative Finance, 10(4):443-453, 2010.

[8] Walter Alt, *Numerische Verfahren der konvexen, nichtglatten Optimierung* , Teubner, 2004, p 39.

[9] *Time-Changed Brownian Motion*, `https://almostsure.wordpress.com/2010/04/20/time-changed-brownian-motion/` , 09.01.2016

[10] G. Samorodnitsky, M. Grigoriu, *Tails of solutions of certain nonlinear stochastic differential equations driven by heavy tailed Levy motions*, Stochastic processes and their apllications 105.1 (2003): 69-97

[11] V. Fasen, C. Klüppelberg, A. Lindner, *Extremal behavior of stochastic volatility models*, In stochastic finance (pp. 107-155). Springer US, 2006.

[12] C. Klüppelberg, A. Lindner, R. A. Maller, *Continuous time volatility modelling: COGARCH versus Ornstein- Uhlenbeck models*, in From Stochastic Calculus to Mathematical Finance, Yu. Kabanov, R. Lipster and J. Stoyanov (Eds.) Springer, 2007

[13] S.J. Wolfe, *On moments of infinitely divisible distribution functions*, the Annals of Mathematical Statistics, Vol. 42 no. 6, pp. 2036-2043, 1971.

[14] Ken-iti Sato, *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013, p 3-142, 245.

[15] T. Tao, *An Epsilon of Room, 1 : Real Analysis*, American Mathematical Society, Volume 117 2010.

[16] L. Rüschendorf, *Mathematische Statistik*, Springer, 2014, p 372.

[17] Lars-Erik Persson, *Convex Functions and their Applications*, Springer, 2006, p 14-15.