



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

Vienna University of Technology

Technische Universität Wien

INSTITUT FÜR STOCHASTIK UND  
WIRTSCHAFTSMATHEMATIK

**Anwendung adaptierter  
Abhängigkeit bei der  
fondsgebundenen  
Lebensversicherung**

Diplomarbeit

von

Julija Spacsenko

Betreuer: Univ.-Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. habil. Uwe Schmock



## **Zusammenfassung**

Diese Arbeit basiert zum Großteil auf ausgewählten Ergebnissen der Dissertation von Frau Dr. Karin Hirhager „Adapted Dependence with Applications to Financial and Actuarial Risk Management“. Es werden notwendige Begriffe aus der Finanzmathematik erläutert, wie die Doob-Zerlegung, das Binomialmodell von Cox-Ross-Rubinstein und die Black-Scholes-Formel. In der Lebensversicherung wird in der Regel davon ausgegangen, dass die finanziellen und biometrischen Risiken unabhängig sind, die adaptierte Abhängigkeit bietet in diesem Sinne eine Lösung, bei der diese Risiken abhängig sein können. Der Fondsentwicklung wird die logarithmische Normalverteilung zugrunde gelegt. Es wird gezeigt, wie die adaptierte Abhängigkeit bei der Untersuchung der Fondsentwicklung eines Lebensversicherungsvertrages angewendet werden kann. Die Stoppzeitproblematik spielt dabei eine wichtige Rolle.

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all jenen danken, die durch ihre fachliche und persönliche Unterstützung zum Gelingen dieser Diplomarbeit beigetragen haben.

Mein großer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Uwe Schmock für das Bereitstellen dieses interessanten Themas der Diplomarbeit und die freundliche Hilfsbereitschaft, die er mir entgegenbrachte.

Ich bedanke mich sowohl bei der Frau Christiane Elgert für ihre hilfreichen Anregungen und ihre konstruktive Kritik bei der Erstellung dieser Arbeit, als auch bei der Frau Dr. Karin Hirhager für ihre freundliche Unterstützung in fachlichen Fragen.

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie, die mir mein Studium ermöglicht und mich in all meinen Entscheidungen unterstützt hat.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Einführung in die Finanzmathematik</b>	<b>4</b>
2.1	Doob'sche Zerlegung . . . . .	4
2.2	Cox - Ross - Rubinstein - Modell . . . . .	6
2.3	Stoppzeit-Problem . . . . .	12
2.3.1	Stoppzeit . . . . .	12
2.3.2	Snell'sche Einhüllende . . . . .	13
2.3.3	Anwendung auf amerikanische Optionen . . . . .	16
2.4	Black - Scholes - Formel . . . . .	18
2.5	Bewertung von amerikanischen Optionen . . . . .	23
2.5.1	Amerikanische Call-Option . . . . .	23
2.5.2	Amerikanische Put-Option . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Normalverteilung</b>	<b>30</b>
3.1	Definition der Normalverteilung . . . . .	30
3.2	Mehrdimensionale Normalverteilung . . . . .	32
3.3	Die logarithmische Normalverteilung . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Adaptierte Abhängigkeit</b>	<b>36</b>
4.1	Expected Shortfall . . . . .	38
4.2	Gierige - Strategie . . . . .	39
4.3	Adaptierte Abhängigkeit bei der fondsgebundenen Lebensversicherung . . .	42

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	1
4.4 Schlussbemerkungen . . . . .	58
<b>A MATLAB-Code</b>	<b>60</b>
A.1 Beispiel 1 . . . . .	60
A.2 Beispiel 2 . . . . .	63
A.3 Beispiel 3 . . . . .	66
<b>B Rententafel</b>	<b>78</b>
B.1 Rententafel AVÖ 2005R . . . . .	78
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>81</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Die Versicherung ist eine wichtige Branche der Wirtschaft. Insbesondere in der Lebensversicherung stellt sich heutzutage die Frage wie man die Entwicklung eines Lebensversicherungsvertrages richtig prognostizieren kann. Durch Senkung der Garantieverzinsung in der klassischen Lebensversicherung, spielt die fondsgebundene Lebensversicherung keine untergeordnete Rolle mehr. Die langfristige Bewertung der Lebensversicherungsverträge stellt in der Praxis eine Herausforderung dar. Die Fondsentwicklung wird durch einen stochastischen Prozess dargestellt. Das Stoppzeitproblem wird als wichtiger Teil der Arbeit in Betracht kommen. Es wird im Gegenteil zum standardisierten Stoppzeitproblem eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Stoppzeit angegeben. Da die Wahrscheinlichkeitsverteilung dabei eine wichtige Rolle spielt, wird ein besonderer Akzent auf die ausgewählte Verteilung, die dem Prozess zugrunde gelegt wurde, gemacht. Aufgrund spezifischer Eigenschaften wird die logarithmische Normalverteilung für die Entwicklung des Fonds ausgesucht.



# Kapitel 2

## Einführung in die Finanzmathematik

### 2.1 Doob'sche Zerlegung

Wie sich auf der Wikipedia-Seite [1] und [13, Seite 207] nachlesen lässt, gibt in der Theorie der stochastischen Prozesse in diskreter Zeit, die ein Teil der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie ist, der Doob'sche Zerlegungssatz, der eine eindeutige Zerlegung jedes adaptierten und integrierbaren stochastischen Prozesses als Summe von einem Martingal und einem vorhersehbaren stochastischen Prozess, beginnend zum Zeitpunkt  $t = 0$ , vorweist. Der Satz wurde vom Joseph L. Doob bewiesen und nach ihm benannt.

**Satz 1.** Sei  $(\Omega, F, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$  mit  $I \subset \mathbb{N}$  oder  $I \subset \mathbb{N}_0$  eine endliche oder unendliche Indexmenge,  $(\mathcal{F}_n)_{n \in I}$  eine Filtrierung von  $F$  und  $X = (X_n)_{n \in I}$  ein adaptierter stochastischer Prozess mit  $\mathbb{E}[|X_n|] \leq \infty$  für alle  $n \in I$ . Dann existiert ein Martingal  $M = (M_n)_{n \in I}$  und ein integrierbarer vorhersehbarer Prozess  $A = (A_n)_{n \in I}$  beginnend mit  $A_0 = 0$ , sodass  $X_n = M_n + A_n$  für jedes  $n \in I$ . Vorhersehbar bedeutet, dass  $A_n$   $\mathcal{F}_{n-1}$ -messbar für alle  $n \in I$  ist und diese Zerlegung ist fast sicher eindeutig. Sh. [1].

*Beweis.* Mithilfe der bedingten Erwartungen werden für jedes  $n \in I$  die Prozesse  $A$  und  $M$  definiert,

$$A_n = \sum_{k=1}^n (\mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}) \quad (2.1)$$

und

$$M_n = X_0 + \sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_{k-1}]), \quad (2.2)$$

wobei die Summen für  $n = 0$  leer und als 0 definiert sind. Aufgrund dieser Definitionen,  $A_{n+1}$  (wenn  $n \in I$ ) und  $M_n$  sind  $\mathcal{F}_n$ -messbar, da Prozess  $X$  adaptiert ist;  $\mathbb{E}[|A_n|] < \infty$

und  $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ , da der Prozess  $X$  integrierbar ist und diese Zerlegung  $X_n = M_n + A_n$  für alle  $n \in I$  gilt. Die Martingal-Eigenschaft

$$\mathbb{E}[M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = 0 \quad (2.3)$$

ergibt sich auch aus der obigen Definition, für jedes  $n \in I \setminus \{0\}$ . Vgl. [1]. □

Es folgt ein Korollar.

**Korollar 1.** *Ein reellwertiger stochastischer Prozess  $X$  ist ein Submartingal genau dann, wenn bei Doob'scher Zerlegung in ein Martingal  $M$  und einen integrierbaren vorhersehbaren Prozess  $A$ , Prozess  $A$  monoton wachsend ist; und ist ein Supermartingal, wenn Prozess  $A$  monoton fallend ist, vgl. [1]*

## 2.2 Cox - Ross - Rubinstein - Modell

Wie in [15] schon erwähnt wurde, ist das Cox–Ross–Rubinstein–Modell eine Version von Black–Scholes–Modell in diskreter Zeit. Das Cox–Ross–Rubinstein–Modell berücksichtigt nur ein riskantes Asset, dessen Preis zum Zeitpunkt  $n$  ( $0 \leq n \leq N$ )  $S_n$  ist, und ein risikoloses Asset, deren Rendite über eine Zeitdauer  $r$  ist. Es wird angenommen, dass  $S_n^0 = (1 + r)^n$  ist.

Das riskante Asset wird wie in [15, S.12] modelliert: zwischen zwei aufeinanderfolgenden Perioden ist der relative Preis entweder  $a$  oder  $b$  mit  $-1 < a < b$ :

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n(1 + a) \\ S_n(1 + b) \end{cases} \quad (2.4)$$

Der anfängliche Aktienkurs  $S_0$  ist gegeben. Die Menge der möglichen Zustände wird  $\Omega = \{1 + a, 1 + b\}^N$ . Jedes  $N$ -Tupel repräsentiert die aufeinanderfolgenden Werte des Verhältnisses  $S_{n+1}/S_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ . Es wird davon ausgegangen, dass  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  und  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Für  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_n$  ist gleich  $\sigma(S_1, \dots, S_n)$ , generiert von den Zufallsvariablen  $S_1, \dots, S_n$ . Die Annahme, dass jedes Element eine streng positive Wahrscheinlichkeit in  $\Omega$  hat bedeutet, dass  $\mathbb{P}$  eindeutig definiert ist. Es werden folgende Variablen eingeführt  $T_n = S_n/S_{n-1}$ , für  $n = 0, 1, \dots, N$ . Wenn  $(x_1, \dots, x_N)$  ein Element aus  $\Omega$  ist, dann  $P\{(x_1, \dots, x_N)\} = \mathbb{P}(T_1 = x_1, \dots, T_N = x_N)$ . Das resultiert, dass  $P$  äquivalent zur Verteilung von  $N$ -Tupel  $(T_1, T_2, \dots, T_N)$  und  $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \dots, T_n)$  für  $n \geq 1$  ist.

1. [15, S.12] Der diskontierte Preis ( $\tilde{S}_n$ ) ist ein Martingal unter  $\mathbb{P}$  nur wenn

$$\mathbb{E}[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1 + r, \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}.$$

Die Gleichung  $\mathbb{E}[\tilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \tilde{S}_n$  ist äquivalent zu  $\mathbb{E}[\tilde{S}_{n+1}/\tilde{S}_n|\mathcal{F}_n] = 1$ , wenn  $\tilde{S}_n$   $\mathcal{F}_n$ -messbar ist und die letzte Gleichung tatsächlich äquivalent zu  $\mathbb{E}[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1 + r$  ist.

2. [15, S.12] Annahme, dass  $r$  immer zu  $(a, b)$  gehören muss, damit der Markt Arbitragefrei bleibt.

Wenn der Markt lebensfähig ist, gibt es eine Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}^*$ , die äquivalent zu  $\mathbb{P}$  ist, unter

welcher  $(\tilde{S}_n)$  ein Martingal ist. Somit wird gemäß 1.

$$\mathbb{E}[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1 + r$$

und deshalb  $\mathbb{E}^*[T_{n+1}] = 1 + r$ . Da  $T_{n+1}$  mit positiver Wahrscheinlichkeit entweder gleich  $1 + a$  oder  $1 + b$  ist, ist notwendig, dass  $(1 + r)$  ein Wert aus dem Intervall  $(1 + a, 1 + b)$  annimmt.

3. [15, S.13] Ein Beispiel für Strategien, wenn die Bedingung der Arbitragefreiheit in Punkt 2. nicht erfüllt ist.

Es wird angenommen, dass  $r \leq a$ . Durch Kreditaufnahme in Höhe von  $S_0$  zum Zeitpunkt 0, kann eine Aktie erworben sein. Zum Zeitpunkt  $N$  wird das Darlehen zurückgezahlt und das risikobehaftete Asset verkauft. Der Gewinn wird durch  $S_N - S_0(1 + r)^N$  realisiert und wird immer positiv, wenn  $S_N \geq S_0(1 + a)^N$ . Der Gewinn ist strikt positiv und das ist die Arbitrage. Wenn  $r \geq b$  ist, kann es durch Leerverkauf des Risiko-Assets ein risikoloser Gewinn erreicht werden.

4. [15, S.13] Und jetzt wird angenommen, dass  $r \in (a, b)$  und  $p = (b - r)/(b - a)$ . Zu zeigen ist, dass  $(\tilde{S}_n)$  ein  $\mathbb{P}$ -Martingal ist, wenn die Zufallsvariablen  $T_1, \dots, T_n$  unabhängig und identisch verteilt sind und ihre Verteilung durch:  $\mathbb{P}(T_1 = 1 + a) = p = 1 - \mathbb{P}(T_1 = 1 + b)$  gegeben ist. Schließlich ist der Markt arbitragefrei und vollständig.

Wenn  $T_i, i \in \{1, \dots, n\}$  unabhängig sind und die Bedingung  $\mathbb{P}(T_i = 1 + a) = p = 1 - \mathbb{P}(T_i = 1 + b)$  erfüllt ist, dann gilt

$$\mathbb{E}[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[T_{n+1}] = p(1 + a) + (1 - p)(1 + b) = 1 + r$$

und somit ist  $(\tilde{S}_n)$  ein  $\mathbb{P}$ -Martingal, nach dem Punkt 1.

Umgekehrt, wenn für  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  und  $\mathbb{E}[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1 + r$  ist, so ergibt sich

$$(1 + a)\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_n] + (1 + b)\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_n] = 1 + r.$$

Dann wird die folgende Gleichung

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_n] = 1$$

bedeuten, dass  $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_n] = p$  und  $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_n] = 1 - p$ . Durch Induktion, wurde bewiesen, dass für jede  $x_i \in \{1 + a, 1 + b\}$  gilt

$$\mathbb{P}(T_1 = x_1, \dots, T_n = x_n) = \prod_{i=1}^n p_i,$$

wobei

$$p_i = \begin{cases} p, & \text{falls } x_i = 1 + a \\ 1 - p, & \text{falls } x_i = 1 + b. \end{cases}$$

Das zeigt, dass die Variablen  $T_i$  unabhängig und identisch verteilt unter dem Maß  $\mathbb{P}$  ( $\mathbb{P}(T_i = 1 + a) = p$ ) sind. Es wurde auch gezeigt, dass  $(\tilde{S}_n)$  ein  $\mathbb{P}$ -Martingal ist und bestimmt eindeutig die Verteilung von  $N$ -Tupel  $(T_1, T_2, \dots, T_N)$  unter  $\mathbb{P}$  und daher das Maß  $\mathbb{P}$  selbst ist. Daher ist der Markt arbitragefrei und vollständig.

5. [15, S.13] Sei  $C_n$  bezeichnet den Wert einer europäischen Calloption eines Anteils der Aktien zum Zeitpunkt  $n$ , mit Ausübungspreis  $K$  und Fälligkeit  $N$ .

(a) Die Call/Put-Parität-Gleichung

$$C_n - P_n = S_n - K(1 + r)^{-(N-n)}.$$

Jetzt bezeichnet  $\mathbb{E}^*$  die Erwartung des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mathbb{P}^*$  und  $(\tilde{S}_n)$  ein Martingal ist, sodass

$$\begin{aligned} C_n - P_n &= (1 + r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^* [(S_N - K)_+ - (K - S_N)_+ | \mathcal{F}_n] \\ &= (1 + r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^* [S_N - K | \mathcal{F}_n] \\ &= S_n - K(1 + r)^{-(N-n)} \end{aligned}$$

die letzte Gleichung folgt aus dem Fakt, dass  $(\tilde{S}_n)$  ein  $\mathbb{P}^*$ -Martingal ist.

(b) Es kann auch angenommen werden, dass  $C_n = c(n, S_n)$ , wobei  $c$  eine Funktion von  $K$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $r$  und  $p$  ist.

Wenn  $S_N = S_n \prod_{i=n+1}^N T_i$  ist, dann ergibt sich, dass

$$C_n = (1 + r)^{-(N-n)} \mathbb{E}^* [(S_n \prod_{i=n+1}^N T_i - K)_+ | \mathcal{F}_n].$$

Da unter der Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}^*$ , die Zufallsvariable  $\prod_{i=n+1}^N T_i$  unabhängig von  $\mathcal{F}_n$  ist und  $S_n$   $\mathcal{F}_n$ -messbar ist, ist  $c$  folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned} \frac{c(n, x)}{(1+r)^{-(N-n)}} &= \mathbb{E}^* \left[ x_n \prod_{i=n+1}^N T_i - K \right]_+ \\ &= \sum_{j=0}^{N-n} \frac{(N-n)!}{(N-n-j)!j!} (1-p)^{N-n-j} (x(1+a)^j (1+b)^{N-n-j} - K)_+ \end{aligned}$$

6. [15, S.14] Hier wird gezeigt, dass die Call-Replikationsstrategie zur Zeit  $n$  von einer Menge  $H_n = \Delta(n, S_n)$  gekennzeichnet wird, wobei  $\Delta$  wird in Funktion  $c$  ausgedrückt.

$H_n^0$  bezeichnet die Zahl der risikolosen Assets in replizierendem Portfolio. Dann ergibt sich

$$H_n^0(1+r)^n + H_n S_n = c(n, S_n).$$

Da  $H_n^0$  und  $H_n$   $\mathcal{F}_{n-1}$ -messbar sind und auch die Funktionen von  $S_1, \dots, S_{n-1}$  sind und da  $S_n$  gleich  $S_{n-1}(1+a)$  oder  $S_{n-1}(1+b)$  ist, so impliziert die vorherige Gleichung

$$H_n^0(1+r)^n + H_n S_{n-1}(1+a) = c(n, S_{n-1}(1+a))$$

und

$$H_n^0(1+r)^n + H_n S_{n-1}(1+b) = c(n, S_{n-1}(1+b)).$$

Nach dem Subtrahieren stellt sich heraus, dass

$$\Delta(n, x) = \frac{c(n, x(1+b)) - c(n, x(1+a))}{x(b-a)}.$$

7. [15, S.14-16] Nun wird das Model für Call- oder Putpreis mit Laufzeit  $T$  auf einen einzigen Aktienkurs angewendet. Um das zu tun, wird der asymptotische Fall betrachtet, wobei  $N$  bis unendlich konvergiert und  $r = RT/N$ ,  $\log((1+a)/(1+r)) = -\sigma/\sqrt{N}$  und  $\log((1+b)/(1+r)) = -\sigma/\sqrt{N}$ . Die reelle Zahl  $R$  wird als momentane Rate zur Zeit zwischen 0 und  $T$  interpretiert, da  $e^{RT} = \lim_{N \rightarrow \infty} (1+r)^N \cdot \sigma^2$  erscheint als Grenzwert-Varianz unter dem Maß  $\mathbb{P}^*$  von Variable  $\log S_N$ , wobei  $N$  bis unendlich konvergiert.

(a) Sei  $(Y_N)_{N \geq 1}$  eine Folge von Zufallsvariablen

$$Y_N = X_1^N + X_2^N + \dots + X_N^N$$

wobei für alle  $N$ , die Zufallsvariablen  $X_i^N$  unabhängig und identisch verteilt sind und Werte aus der Menge

$$\left\{ -\sigma/\sqrt{N}, \sigma/\sqrt{N} \right\}$$

annehmen. Ihr Mittelwert ist gleich  $\mu_N$  und  $\lim_{N \rightarrow \infty} (N\mu_N) = \mu$ . Die Folge  $Y_N$  konvergiert zu einer Variable mit dem Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ .

Die Konvergenz der charakteristischen Funktion  $\phi_{Y_N}$  von  $Y_N$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} \phi_{Y_N}(u) &= \mathbb{E}[\exp(iuY_N)] = \prod_{j=1}^N \mathbb{E}[\exp(iuY_j^N)] \\ &= (\mathbb{E}[\exp(iuY_1^N)])^N \\ &= (1 + iu\mu_N - \sigma^2 u^2 / 2N + o(1/N))^N. \end{aligned}$$

Daher  $\lim_{N \rightarrow \infty} \phi_{Y_N}(u) = \exp(iu\mu - \sigma^2 u^2 / 2)$ , was die Konvergenz in Verteilung beweist.

(b) Die expliziten asymptotischen Preise der Put- und Call-Option zum Zeitpunkt 0.

Für einen bestimmten  $N$ , ist der Preis für Put-Option zum Zeitpunkt 0 als

$$\begin{aligned} P_0^{(N)} &= (1 + RT/N)^{-N} \mathbb{E}^* \left[ K - S_0 \prod_{n=1}^N T_n \right]_+ \\ &= \mathbb{E}^* \left[ (1 + RT/N)^{-N} K - S_0 \exp(Y_N) \right]_+ \end{aligned}$$

mit  $Y_N = \sum_{n=1}^N \log(T_n / (1 + r))$  gegeben. Unter den Annahmen, dass die Variablen  $X_j^N = \log(T_j / (1 + r))$  die Werte aus dem Intervall  $\left\{ -\sigma/\sqrt{N}, \sigma/\sqrt{N} \right\}$  annehmen und unabhängig und identisch verteilt unter Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}^*$  sind, ergibt sich

$$\mathbb{E}^*[X_j^N] = (1 - 2p) \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{2 - e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Daher erfüllt die Folge  $(Y_N)$  die Bedingungen im Punkt 7.(a) mit  $\mu = -\sigma^2/2$ . Wenn es angenommen wird, dass  $\psi(y) = (Ke^{-RT} - S_0 e^y)_+$ , dann

$$\begin{aligned} \left| P_0^{(N)} - \mathbb{E}^*[\psi(Y_N)] \right| &= \left| \mathbb{E}^* \left[ ((1 + RT/N)^{-N} K - S_0 \exp(Y_N))_+ \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (Ke^{-RT} - S_0 \exp(Y_N))_+ \right] \right| \\ &\leq K \left| (1 + RT/N)^{-N} - e^{-RT} \right|. \end{aligned}$$

Da  $\psi$  eine beschränkte und stetige Funktion ist, und da die Folge  $(Y_N)$  in Verteilung konvergiert, kommt es heraus, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_0^{(N)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}^*[\psi(Y_N)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (Ke^{-RT} - S_0 e^{-\sigma^2/2 + \sigma y})_+ e^{-y^2/2} dy.$$

Das Integral kann hinsichtlich der kumulativen Normalverteilung  $\Phi$  ausgedrückt werden, so dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_0^{(N)} = Ke^{-RT} F(-d_2) - S_0 F(-d_1),$$

wobei  $d_1 = (\log(x/K) + RT + \sigma^2/2)/\sigma$  und  $d_2 = d_1 - \sigma$  sowie

$$F(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-x^2/2} dx, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Der Preis für Call-Option folgt aus dem Put-Call-Parität

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_0^{(N)} = S_0 F(d_1) - Ke^{-RT} F(d_2).$$

## 2.3 Stoppzeit-Problem

Der Zweck dieses Kapitels ist es, wie in [15, S.17] die Preisgestaltung und Absicherung von amerikanischen Optionen anzugehen um den Zusammenhang zwischen diesen Fragen und dem optimalen Stoppzeit-Problem festzustellen. Um die Ausübungsstrategien für das amerikanische Optionsmodell zu definieren, brauchen wir den Begriff der optimalen Stoppzeit. Wir werden auch die Snell-Einhüllenden definieren, die als grundlegendes Konzept beim Lösen des optimalen Stoppzeitproblem verwendet werden.

### 2.3.1 Stoppzeit

Der Käufer von amerikanischen Option hat das Recht, diese Option jederzeit bis zur Fälligkeit auszuüben. Die Entscheidung, die Option zur Zeit  $n$  ausüben oder nicht, wird entsprechend der verfügbaren Informationen bis zur Zeit  $n$  fallen. In einem Modell in diskreter Zeit auf einem endlichen gefilterten Raum  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}, \mathbb{P})$  wird die Ausübung der Option von einer Zufallsvariable beschrieben und als Stoppzeit genannt, sh. [15, S.17].

**Definition 1.** [15, S.17] Die Zufallsvariable  $\nu$ , die Werte aus dem Intervall  $\{0, 1, \dots, N\}$  annimmt, nennt man Stoppzeit, wenn für jedes  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$

$$\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n$$

gilt.

**Bemerkung 1.** [15, S.17]  $\nu$  ist nur dann eine Stoppzeit, wenn für jedes  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ , gilt

$$\{\nu \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Wir werden die äquivalente Definition verwenden, um das Konzept der Stoppzeit auf das zeitstetige Modell zu verallgemeinern.

Sei  $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$  eine an die Filtrierung  $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$  adaptierte Folge und  $\nu$  ist die Stoppzeit.

Die Folge, die zum Zeitpunkt  $\nu$  gestoppt ist, wird als

$$X_n^\nu(\omega) = X_{\nu(\omega) \wedge n(\omega)},$$

definiert, das heißt, bei der Menge  $\{\nu = j\}$  haben wir

$$X_n^\nu = \begin{cases} X_j & \text{falls } j \leq n \\ X_n & \text{falls } j > n. \end{cases}$$

Es ist zu beachten, dass  $X_N^\nu(\omega) = X_{\nu(\omega)}(\omega)$  und ( $= X_j$  bei der  $\{\nu = j\}$ ).

**Satz 2.** [15, S.18] Es wird angenommen, dass  $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$  eine adaptierte Folge und  $\nu$  die Stoppzeit ist. Die gestoppte Folge  $(X_n^\nu)_{0 \leq n \leq N}$  ist adaptiert. Außerdem, wenn  $(X_n)$  ein Martingal ist, dann ist  $(X_n^\nu)$  auch ein Martingal.

*Beweis.* [15, S.18] Für  $n \geq 1$ , haben wir

$$X_{\nu \wedge n} = X_0 + \sum_{j=1}^n \phi_j (X_j - X_{j-1}),$$

wobei  $\phi_j = 1_{\{j \leq \nu\}}$ . Da die Menge  $\{j \leq \nu\}$  eine komplemente Menge zu Menge  $\{\nu < j\} = \{\nu \leq j-1\}$  ist, Prozess  $(\phi_n)_{0 \leq n \leq N}$  ein vorhersehbarer Prozess ist.

Es ist klar, dass die Folge  $(X_{\nu \wedge n})_{0 \leq n \leq N}$  an die Filtrierung  $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$  adaptiert ist. Darüber hinaus, wenn  $(X_n)$  ein Martingal ist, dann  $(X_{\nu \wedge n})$  auch ein Martingal ist.

□

### 2.3.2 Snell'sche Einhüllende

In diesem Kapitel betrachten wir eine adaptierte und integrierbare Folge  $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$  und definieren die Folge  $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$  wie folgt:

$$U_n = \begin{cases} Z_N & \text{für } n = N, \\ \max \{Z_n, \mathbb{E}[U_{n+1} | \mathcal{F}_n]\} & \text{für } n \in \{0, \dots, N-1\}. \end{cases}$$

Und wie es schon im Buch [15, S.18] beschrieben wurde, nennen wir sie Snell'sche Einhüllende der Folge  $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ .

**Satz 3.** [11, S.43]  $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$  ist das kleinste Supermartingal, das die Folge  $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$  dominiert.

*Beweis.* [11, S.43] Wir nehmen an, dass der Prozess adaptiert und integrierbar ist. Laut Definition ist  $U_n \geq Z_n$  für alle  $n = 0, \dots, N$  und  $U_n \geq \mathbb{E}[U_{n+1} | \mathcal{F}_n]$  fast sicher für alle  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ .

Daher  $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$  ein Supermartingal ist.

Es wird angenommen, dass  $(V_n)_{0 \leq n \leq N}$  ein Supermartingal ist, das die Folge  $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$  dominiert. Dann kommt heraus, dass  $V_n \geq Z_n = U_n$ . Wenn  $V_{n+1} \geq U_{n+1}$  fast sicher, dann  $V_n \geq \mathbb{E}[V_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq \mathbb{E}[U_{n+1} | \mathcal{F}_n]$  fast sicher und auch  $V_n \geq Z_n$ . Daraus folgt

$$V_n \geq \max \{Z_n, \mathbb{E}[U_{n+1} | \mathcal{F}_n]\} = U_n \quad \text{fast sicher.}$$

Nach Rückwärtsinduktion,  $(V_n)_{0 \leq n \leq N}$  dominiert  $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$  und  $U_n$  ist das kleinste Supermartingal, das  $Z_n$  dominiert.

□

Laut Definition,  $U_n$  ist größer als  $Z_n$  (wenn  $n = N$ ) und im Falle strenger Ungleichheit gilt  $U_n = \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ . Durch das Stoppen der Folge  $(U_n)$ , wie der nächste Satz zeigt, ist es möglich ein Martingal zu erhalten.

**Satz 4.** [15, S.19] Die Zufallsvariable

$$\nu_0 = \inf \{n \geq 0 \mid U_n = Z_n\}$$

ist eine Stoppzeit und die gestoppte Folge  $(U_{n \wedge \nu_0})_{0 \leq n \leq N}$  ist ein Martingal.

*Beweis.* Da  $U_N = Z_N$ ,  $\nu_0$  ein Element aus der Menge  $\{0, 1, \dots, N\}$  ist und

$$\{\nu_0 = 0\} = \{U_0 = Z_0\} \in \mathcal{F}_0,$$

dann gilt für alle  $k \in \{1, \dots, N\}$

$$\{\nu_0 = k\} = \{U_0 > Z_0\} \cap \dots \cap \{U_{k-1} > Z_{k-1}\} \cap \{U_k = Z_k\} \in \mathcal{F}_k.$$

Um zu zeigen, dass  $(U_n^{\nu_0})$  ein Martingal ist, betrachten wir wie im Beweis des vorigen Satzes:

$$U_n^{\nu_0} = U_{n \wedge \nu_0} = U_0 + \sum_{j=1}^n \phi_j \Delta U_j,$$

wobei  $\phi_j = 1_{\{\nu_0 \geq j\}}$ . Für  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  gilt

$$\begin{aligned} U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0} &= \phi_{n+1}(U_{n+1} - U_n) \\ &= 1_{\{n+1 \leq \nu_0\}}(U_{n+1} - U_n). \end{aligned}$$

Laut Definition  $U_n = \max \{Z_n, \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n]\}$  und auf der Menge  $\{n+1 \leq \nu_0\}$  ist  $U_n$  größer als  $Z_n$ . Daraus folgt, dass  $U_n = \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n]$  und wir können ableiten, dass

$$U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0} = 1_{\{n+1 \leq \nu_0\}}(U_{n+1} - \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n]),$$

so ergibt sich die bedingte Erwartung auf beiden Seiten der Gleichheit

$$\mathbb{E}[(U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0})|\mathcal{F}_n] = 1_{\{n+1 \leq \nu_0\}}\mathbb{E}[(U_{n+1} - \mathbb{E}[U_{n+1}|\mathcal{F}_n])|\mathcal{F}_n]$$

weil  $\{n+1 \leq \nu_0\} \in \mathcal{F}_n$  (und die Menge  $\{\nu_0 \leq n\}$  die Komplement-Menge zu Menge  $\{n+1 \leq \nu_0\}$  ist).

Daher

$$\mathbb{E}[(U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0})|\mathcal{F}_n] = 0,$$

was beweist, dass  $U^{\nu_0}$  ein Martingal ist. Vgl. [15, S.19].  $\square$

Im Folgenden legen wir fest, dass  $\mathcal{T}_{n,N}$  die Menge aller Stoppzeiten mit Werten aus dem Intervall  $\{n, n+1, \dots, N\}$  ist. Die Martingal-Eigenschaft der Folge  $U^{\nu_0}$  liefert folgendes Ergebnis, das sich auf das Konzept der Snell-Einhüllenden zur Lösung des optimalen Stoppzeitproblem bezieht und auch in [7, Appendix A.5] nachlesbar ist.

**Korollar 2.** [15, S.19] Die Stoppzeit  $\nu_0$  erfüllt die Gleichung

$$U_0 = \mathbb{E}[Z_{\nu_0}|\mathcal{F}_0] = \operatorname{ess\,sup}_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}[Z_\nu|\mathcal{F}_0] \quad f.s.$$

Wenn wir das  $Z_n$  als den Gesamtgewinn eines Spielers nach  $n$  Spielen betrachten, sehen wir, dass das Anhalten zum Zeitpunkt  $\nu_0$  den erwarteten Gewinn maximiert.

*Beweis.* Dadurch, dass  $U^{\nu_0}$  ein Martingal ist, haben wir

$$U_0 = U_0^{\nu_0} = \mathbb{E}[U_N^{\nu_0}|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_{\nu_0}|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[Z_{\nu_0}|\mathcal{F}_0].$$

Andererseits, wenn  $\nu \in \mathcal{T}_{0,N}$ , dann ist die gestoppte Folge  $U^\nu$  ein Supermartingal. Sodass

$$\begin{aligned} U_0 &\geq \mathbb{E}[U_N^\nu|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_0] \\ &\geq \mathbb{E}[Z_\nu|\mathcal{F}_0], \end{aligned}$$

was zu dem Ergebnis führt. □

**Bemerkung 2.** [15, S.19] Daraus ergibt sich eine unmittelbare Verallgemeinerung von Korollar 2.

$$U_n = \operatorname{ess\,sup}_{\nu \in \mathcal{T}_{n,N}} \mathbb{E}[Z_\nu|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Z_{\nu_n}|\mathcal{F}_n], \quad f.s. \quad (2.5)$$

wobei  $\nu_n = \inf \{j \geq n \mid U_j = Z_j\}$ .

**Definition 2.** [15, S.19] Die Stoppzeit  $\nu$  heißt optimale Stoppzeit für die Folge  $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$  wenn

$$\mathbb{E}[Z_\nu|\mathcal{F}_0] = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}[Z_\nu|\mathcal{F}_0].$$

Folgendes Ergebnis liefert eine Charakterisierung der optimalen Stoppzeiten, die zeigt, dass  $\nu_0$  die kleinste optimale Stoppzeit ist.

**Satz 5.** [15, S.19] Die Stoppzeit  $\nu$  ist die optimale Stoppzeit dann und nur dann, wenn

$$\begin{cases} Z_\nu = U_\nu \\ \text{und } (U_{\nu \wedge n})_{0 \leq n \leq N} \text{ ein Martingal ist.} \end{cases}$$

*Beweis.* Wenn die gestoppte Folge  $U^\nu$  ein Martingal ist und  $U_0 = \mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_0]$  und Satz 4. gilt, dann ist  $U_0 = \mathbb{E}[Z_\nu|\mathcal{F}_0]$ . Optimalität von  $\nu$  wird bei Korollar 2. sichergestellt.

Umgekehrt, wenn  $\nu$  optimal ist, haben wir

$$U_0 = \mathbb{E}[Z_\nu|\mathcal{F}_0] \leq \mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_0].$$

Aber, da  $U^\nu$  ein Supermartingal ist

$$\mathbb{E}[U_\nu|\mathcal{F}_0] \leq U_0.$$

Deshalb

$$\mathbb{E}[U_\nu | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[Z_\nu | \mathcal{F}_0].$$

Da  $\mathbb{E}[U_\nu | \mathcal{F}_0] = U_0$ , erhalten wir aus der folgenden Ungleichung

$$U_0 \geq \mathbb{E}[U_{\nu \wedge n} | \mathcal{F}_0] \geq \mathbb{E}[U_\nu | \mathcal{F}_0] = U_0$$

(bezogen auf die Supermartingaleigenschaft der  $(U_n^\nu)$ ), da

$$\mathbb{E}[U_{\nu \wedge n} | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_\nu | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}(\mathbb{E}[U_\nu | \mathcal{F}_n | \mathcal{F}_0]).$$

Wir haben  $U_{\nu \wedge n} \geq \mathbb{E}[U_\nu | \mathcal{F}_n]$  deshalb  $U_{\nu \wedge n} = \mathbb{E}[U_\nu | \mathcal{F}_n]$  und dies beweist, dass  $(U_n^\nu)$  ein Martingal ist.  $\square$

### 2.3.3 Anwendung auf amerikanische Optionen

Folgender Satz wird eingeführt, damit die Zerlegung von Supermartingals verständlicher wird.

**Satz 6.** [15, S.21] *Jedes Supermartingal  $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$  hat eine eindeutige Zerlegung:*

$$U_n = M_n - A_n,$$

wobei  $(M_n)$  ein Martingal und  $(A_n)$  ein nicht-fallender, vorhersehbarer Prozess mit  $A_0 = 0$  ist.

Beweis zu diesem Satz sh. [15, S.21].

Wir nehmen an, wie in [15, S.23] dass der Markt vollständig ist. Die Modellierung wird sich auf dem gefilterten Raum  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}, \mathbb{P})$  basieren und die Wahrscheinlichkeiten, unter denen die diskontierten Anlagenpreise Martingale sind, werden durch  $\mathbb{P}^*$  ausgedrückt.

Wir definieren den Wertprozess  $(U_n)$ , wie auch in [15, S. 23] steht, einer amerikanischen Option, die durch die Folge  $(Z_n)$  wie folgt

$$\begin{cases} U_N &= Z_N \\ U_n &= \max(Z_n, S_n^0 \mathbb{E}^*[U_{n+1}/S_{n+1}^0 | \mathcal{F}_n]) \quad \forall n \leq N-1. \end{cases} \quad (2.6)$$

beschrieben ist.

Somit die Folge  $(\tilde{U}_n)$ , definiert durch  $\tilde{U}_n = U_n/S_n^0$  (diskontierter Preis der Option) ist Snell-Einhüllende der Folge  $(\tilde{Z}_n)$  unter  $\mathbb{P}^*$ , wobei  $S_n^0 = (1+r)^n$  ist.

Wir können aus der Bemerkung 2 vom oberen Abschnitt ebenfalls erhalten, dass

$$\tilde{U}_n = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{n,N}} \mathbb{E}^*[\tilde{Z}_\nu | \mathcal{F}_n], \quad n \in \{0, \dots, N\}$$

und damit

$$U_n = S_n^0 \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{n,N}} \mathbb{E}^* \left[ \frac{Z_\nu}{S_\nu^0} \middle| \mathcal{F}_n \right] \quad n \in \{0, \dots, N\}.$$

Laut dem Satz 6, können wir schreiben

$$\tilde{U}_n = \tilde{M}_n - \tilde{A}_n, \quad n \in \{0, \dots, N\}$$

wobei  $(\tilde{M}_n)$  ein  $\mathbb{P}^*$ -Martingal und  $(\tilde{A}_n)$  ein vorhersehbarer wachsender Prozess ist, mit  $\tilde{A}_0 = 0$ . Da der Markt vollständig ist, gibt es eine selbstfinanzierende Strategie  $\phi$ , so dass

$$V_N(\phi) = S_N^0 \tilde{M}_N,$$

das heißt,  $\tilde{V}_N(\phi) = \tilde{M}_N$ . Für die Folge  $(\tilde{V}_n(\phi))$  haben wir

$$\begin{aligned} \tilde{V}_n(\phi) &= \mathbb{E}^* \left[ \tilde{V}_N(\phi) \middle| \mathcal{F}_n \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[ \tilde{M}_N \middle| \mathcal{F}_n \right] \\ &= \tilde{M}_n, \quad \text{für } n \in \{0, \dots, N\}, \end{aligned}$$

und damit

$$\tilde{U}_n = \tilde{V}_n(\phi) - \tilde{A}_n \quad \text{für alle } n \in \{0, \dots, N\}.$$

Deshalb

$$U_n = V_n(\phi) - A_n, \quad n \in \{0, \dots, N\}$$

wobei  $A_n = S_n^0 \tilde{A}_n$ . Aus der vorherigen Gleichung ist es offensichtlich, dass sich der Verkäufer einer Option perfekt absichern kann, wenn er die Prämie  $U_0 = V_0(\phi)$  wünscht, so kann er ein Kapital gleich  $V_n(\phi)$  zum Zeitpunkt  $n$  erzeugen, welches größer als  $U_n$  ist und heißt *fortiori* zu  $Z_n$ .

Wann ist der optimale Zeitpunkt, um die Option auszuüben? Der Ausübungszeitpunkt muss unter den Stoppzeiten gewählt werden. Für den Käufer der Option hat die Ausübung der Option zum Zeitpunkt  $n$  keinen Sinn, wenn  $U_n > Z_n$  ist. Damit ist  $\tau$  ein optimaler Zeitpunkt zur Ausübung, wenn  $U_\tau = Z_\tau$ . Andererseits, macht es keinen Sinn die Ausübung der Option nach der Zeit

$$\nu_{\max} = \inf \{j, A_{j+1} \neq 0\}$$

(welche gleich  $\inf \{j, \tilde{A}_{j+1} \neq 0\}$ ) durchzuführen. Zu dieser Zeit der Verkauf der Option bietet dem Inhaber die Möglichkeit, dass er ein Portfolio schaffen kann, dessen Wert streng größer als der Optionswert zum Zeitpunkt  $\nu_{\max} + 1, \nu_{\max} + 2, \dots, N$  ist. Deshalb setzen wir als zweite Bedingung,  $\tau \leq \nu_{\max}$ , die uns ermöglicht zu sagen, dass  $\tilde{U}^\tau$  ein Martingal ist. Daraus folgt, dass die optimale Zeiten - optimale Anhaltezeiten für die Folge  $(\tilde{Z}_n)$  unter der Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}^*$  sind. Um diesen Punkt deutlicher zu machen, betrachten wir die Sicht des Stillhalters. Wenn er sich mit Hilfe der Strategie  $\phi$  sichert, wie oben definiert ist, und wenn der Käufer die Option zur Zeit  $\tau$  ausübt, die nicht optimal ist, dann ist  $U_\tau > Z_\tau$  oder  $A_\tau > 0$ . In beiden Fällen erzielt der Stillhalter einen positiven Gewinn  $V_\tau(\phi) - Z_\tau = U_\tau + A_\tau - Z_\tau$ .

## 2.4 Black - Scholes - Formel

Jetzt wird gezeigt, dass die klassische Black-Scholes Optionsbewertungsformel vom Cox-Ross-Rubinstein-Optionsbewertungsergebnis mit einem asymptotischen Verfahren, sh. [16, Seite 51-55], mittels geeignet gewählter Reihenfolge von Binomialmodellen erhalten werden kann. Zu diesem Zweck werden die asymptotischen Eigenschaften des Cox-Ross-Rubinstein-Modells untersucht, wenn die Anzahl der Schritte gegen unendlich strebt, und die Größe von Zeit- und Raumschritten gleichzeitig in geeigneter Weise gegen Null streben.

Im Gegensatz zu dem vorherigen Abschnitt, sei  $T > 0$  eine feste, aber beliebige reelle Zahl. Für alle  $n$  der Form  $n = 2^k$  wird das Intervall  $[0, T]$  in  $n$  gleichgroße Zeitintervalle  $I_j$  der Länge  $\Delta_n = T/n$  aufgeteilt, nämlich  $I_j = [j\Delta_n, (j+1)\Delta_n]$  für  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Es ist aber zu beachten, dass  $n$  eine natürliche Zahl ist.

Es wird zunächst der geänderte Akkumulationsfaktor eingeführt.  $r_n$  bezeichnet die risikofreie Rendite über jedes Intervall  $I_j = [j\Delta_n, (j+1)\Delta_n]$ ,  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ . Daher ist auch der Preis der risikofreien Anlage  $B^n$  gleich

$$B_{j\Delta_n}^n = (1 + r_n)^j, \quad \forall j = 0, \dots, n$$

Für jedes  $n$ , wird angenommen, dass der Anstieg des Aktienkurses  $S^n$  über den Zeitraum  $I_j$  durch  $u_n$  geschätzt werden kann und der Rückgang durch  $d_n$ . Insbesondere wird gesetzt, dass  $S_{(j+1)\Delta_n}^n = \xi_{j+1}^n S_{j\Delta_n}^n$  für  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , wobei für jedes  $n$  und  $j$  die Zufallsvariable  $\xi_j^n$  die Werte aus der Menge  $\{u_n, d_n\}$  annimmt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, kann angenommen werden, dass für alle  $n$ , die Zufallsvariablen  $\xi_j^n$   $j = 0, 1, \dots, n$  auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega_n, F_n, \mathbb{P})$  definiert und voneinander unabhängig sind, und dass

$$\mathbb{P}_n \{ \xi_j^n = u_n \} = p_n = 1 - \mathbb{P}_n \{ \xi_j^n = d_n \}, \quad \forall j = 0, \dots, n$$

für eine Zahl  $p_n \in (0, 1)$ . Es ist zu erwähnen, dass die Wahl des Parameters  $p_n \in (0, 1)$  unter dem Gesichtspunkt des Arbitragepreises nicht relevant ist.

Um die Konvergenz der Cox-Ross-Rubinstein Optionsbewertungsformel auf die Black-Scholes-Formel zu gewährleisten, wird es zusätzlich erforderlich bestimmte Beschränkungen für das asymptotische Verhalten der Mengen  $r_n$ ,  $u_n$  und  $d_n$  einzuführen. Es wird angenommen

$$(1 + r_n) = e^{r\Delta_n}, \quad u_n = e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}}, \quad d_n = u_n^{-1},$$

wobei  $r \geq 0$  und  $\sigma > 0$  gegebene reelle Zahlen sind. Es ist erwähnenswert, dass für jedes  $n > r^2\sigma^{-2}T$  gilt, dass  $d_n = u_n^{-1} < 1 + r_n < u_n$  und damit haben wir die Arbitragefreiheit des Cox-Ross-Rubinstein-Modell für  $n$  hinreichend groß. Durch einfache Argumente, erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{*,n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + r_n - d_n}{u_n - d_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{r\Delta_n} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{p}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{*,n} u_n}{1 + r_n} = 1/2.$$

Wie bereits erwähnt wurde, wird der asymptotische Wert des Call-Option-Preises gesucht, wenn die Anzahl von Zeitperioden nach Endlichkeit strebt. Angenommen, dass  $t = jT/2^k$  für  $j, k \in \mathbb{N}$ ; das heißt,  $t$  ist eine beliebige dyadische Zahl aus dem Intervall  $[0, T]$ . Für jede solche Zahl wird die Folge  $m_n(t)$  durch

$$m_n(t) = n(T - t)/T, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

definiert.

Dann hat die Folge  $m_n(t)$  für  $n = 2^l$  hinreichend große natürliche Werte.

Ferner, ist  $T - t = m_n(t)\Delta_n$ , so dass  $m_n(t)$  die Anzahl der Handelszeiten im Intervall  $[t, T]$  repräsentiert, zumindest für  $n = 2l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . Zu beachten ist auch, dass

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + r_n)^{-m_n(t)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-r\Delta_n m_n(t)} = e^{-r(T-t)}.$$

Für einen generischen Wert des Aktienkurses  $S_t = S_{T-m_n(t)\Delta_n} = s$  zum Zeitpunkt  $t$ , wird definiert

$$b_n = \inf \left\{ j \in \mathbb{N}^* \mid s u_n^j d_n^{m_n(t)-j} > K \right\}.$$

Der nächste Satz stellt die Herleitung der klassischen Black - Scholes Optionsbewertungsformel durch asymptotisches Verfahren dar.

**Satz 7.** [16, Seite 53] Für jedes dyadische  $t$ , gilt die folgende Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=b_n(t)}^{m_n(t)} \binom{m_n(t)}{j} S_t \bar{p}_n^j \bar{q}_n^{m_n(t)-j} - K \hat{r}_n^{-m_n(t)} p_{*,n}^j q_{*,n}^{m_n(t)-j} = C_t,$$

wobei  $q_{*,n} = 1 - p_{*,n}$ ,  $\bar{q}_n = 1 - \bar{p}_n$  und  $C_n$  durch die Black - Scholes - Formel

$$C_t = S_t N(d_1(S_t, T - t)) - K e^{-r(T-t)} N(d_2(S_t, T - t)), \quad (2.7)$$

gegeben ist, wobei

$$d_1(s, t) = \frac{\ln(s/k) + (r + 1/2\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2(s, t) = d_1(s, t) - \sigma\sqrt{t} = \frac{\ln(s/k) + (r - 1/2\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

und  $N$  ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Es sollen noch einige Bemerkungen gemacht werden. Wir möchten klarstellen, dass die Grenze des Cox - Ross - Rubinstein Optionspreis wesentlich von der Wahl der Folgen  $u_n$  und  $d_n$  abhängt.

Die asymptotische Dynamik des Aktienkurses ist gleich mit der geometrischen Brown'schen Bewegung (bekannt auch als geometrischer Wiener - Prozess). Dies bedeutet insbesondere, dass die asymptotische Entwicklung des Aktienkurses unter dem Martingalmaß durch einen stochastischen Prozess, dessen Pfade fast sicher stetige Funktionen sind, beschrieben werden kann; darüber hinaus ist die risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsverteilung des zeitstetigen Aktienkurses zu jedem Zeitpunkt  $t$  lognormal.

*Beweis.* [16, Seite 53-55] Sei  $S_t = s$  ein generierter Wert des Stockpreises zum Zeitpunkt  $t$ . Das erste Ziel ist es zu überprüfen, dass

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=b_n(t)}^{m_n(t)} \binom{m_n(t)}{j} \bar{p}_n^j (1 - \bar{p}_n)^{m_n(t)-j} = N(d_1(s, T - t)). \quad (2.8)$$

Es ist wichtig zu bemerken, dass

$$\sum_{j=b_n(t)}^{m_n(t)} \binom{m_n(t)}{j} \bar{p}_n^j (1 - \bar{p}_n)^{m_n(t)-j} = \mathbb{Q} \{b_n(t) \leq \gamma_n \leq m_n(t)\},$$

wobei für jedes  $n$  die Zufallsvariable  $\gamma_n$ , unter  $\mathbb{Q}$ , die Binomialverteilung mit Parametern  $m_n(t)$  und  $\bar{p}_n$  hat.

Wir schreiben  $\sigma_n = \sqrt{\bar{p}_n(1 - \bar{p}_n)}$  und führen eine normierte Folge  $\bar{\gamma}_n$  ein

$$\bar{\gamma}_n = \frac{\gamma_n - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\gamma_n)}{\sqrt{\text{Var}_{\mathbb{Q}}(\gamma_n)}} = \frac{\gamma_n - m_n(t)\bar{p}_n}{\sqrt{m_n(t)\bar{p}_n(1 - \bar{p}_n)}} = \frac{\sum_{j=1}^{m_n(t)} (\zeta_j^n - \bar{p}_n)}{\sigma_n \sqrt{m_n(t)}},$$

wobei  $\zeta_j^n$ ,  $j = 1, \dots, n$  unabhängig, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Bernoulli-Verteilung und Parameter  $\bar{p}_n$  sind

$$\mathbb{Q} \{ \zeta_j^n = 1 \} = \bar{p}_n = 1 - \mathbb{Q} \{ \zeta_j^n = 0 \}.$$

Zuerst wird überprüft, ob die Folge von Zufallsvariablen  $\bar{\gamma}_n$  in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung konvergiert. Zu diesem Zweck wird mit  $\tilde{f}_n$  die charakteristische Funktion der Zufallsvariable  $\tilde{\zeta}_j^n = \zeta_j^n - \bar{p}_n$  beschrieben.

Es ist nicht schwer zu überprüfen, dass

$$\tilde{f}_n(z) = 1 - \frac{\sigma_n^2 z^2}{2} + o(z^2),$$

wobei das Symbol  $o(z^2)$  die Menge  $\lim_{z \rightarrow 0} o(z^2)/z^2 = 0$  bezeichnet.

Folglich kann die charakteristische Funktion  $g_n(z) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{iz\tilde{\gamma}_n})$  der Zufallsvariable  $\tilde{\gamma}_n$  aufgrund der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen  $\tilde{\zeta}_j^n$ ,  $j = 1, \dots, n$  wie folgt dargestellt werden:

$$g_n(z) = \left\{ \tilde{f}_n \left( \frac{z}{\sigma_n \sqrt{m_n(t)}} \right) \right\}^{m_n(t)} = \left\{ 1 - \frac{z^2}{2m_n(t)} + o \left( \frac{z^2}{m_n(t)} \right) \right\}^{m_n(t)}.$$

Aus dem letzten Ausdruck ist es offensichtlich, dass die folgende Konvergenz gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = e^{-z^2/2}, \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Eine bekannte Tatsache ist, dass die Funktion  $e^{-z^2/2}$  die charakteristische Funktion der Standardnormalverteilung  $\mathcal{N}(0, 1)$  ist.

Die Verteilungskonvergenz der normierten Folge  $\tilde{\gamma}_n$  der Standardnormalverteilung folgt nun aus der punktweisen Annäherung an die entsprechende Folge  $(g_n)$  der charakteristischen Funktion an die charakteristische Funktion der Standardnormalverteilung.

Darüber hinaus ist es klar, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n(t) - m_n(t)\bar{p}_n}{\sqrt{m_n(t)\bar{p}_n(1 - \bar{p}_n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\bar{m}_n(t)\bar{p}_n^{-1}(1 - \bar{p}_n)} = +\infty.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n(t) - m_n(t)\bar{p}_n}{\sqrt{m_n(t)\bar{p}_n(1 - \bar{p}_n)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(K/s) + m_n(t)\sigma\sqrt{\Delta_n}}{2\sigma\sqrt{\Delta_n}} - m_n(t)\bar{p}_n}{\sqrt{m_n(t)\bar{p}_n(1 - \bar{p}_n)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(K/s) + \sigma_n(t)\sqrt{\Delta_n}(1 - 2\bar{p}_n)}{2\sigma\sqrt{m_n(t)\Delta_n}\bar{p}_n(1 - \bar{p}_n)} \\ &= \frac{\ln(K/s) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ &= -d_1(s, T - t), \end{aligned}$$

da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(t) \sqrt{\Delta_n} (1 - 2\bar{p}_n) = -(T - t) \left( \frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right).$$

Die Verteilungskonvergenz der Folge  $(\gamma_n)$  zur Standardnormalverteilung  $\mathcal{N}(0, 1)$  liefert folgende Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{Q} \{b_n(t) \leq \gamma_n \leq m_n(t)\} = 1 - N(-d_1(s, T - t)) = N(d_1(s, T - t)).$$

Damit ist der Beweis der Gleichheit 2.8 komplett.

Ähnlicherweise wird auch bei der nächsten Gleichung argumentiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=b_n(t)}^{m_n(t)} \binom{m_n(t)}{j} p_{*,n}^j (1 - p_{*,n})^{m_n(t)-j} = N(d_2(s, T - t))$$

Die Summe auf der rechten Seite dieser Formel ist gleich der Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{Q} \{b_n(t) \leq \gamma_n^* \leq m_n(t)\}$ , wobei für jedes  $n$  die Zufallsvariable  $\gamma_n^*$  unter  $\mathbb{Q}$  binomialverteilt mit Parameter  $m_n(t)$  und  $p_{*,n}$  ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n(t) - m_n(t)p_{*,n}}{\sqrt{m_n(t)p_{*,n}(1 - p_{*,n})}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(K/s) + m_n(t)\sigma\sqrt{\Delta_n}}{2\sigma\sqrt{\Delta_n}} - m_n(t)p_{*,n}}{\sqrt{m_n(t)p_{*,n}(1 - p_{*,n})}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(K/s) + \sigma_n(t)\sqrt{\Delta_n}(1 - 2p_{*,n})}{2\sigma\sqrt{m_n(t)\Delta_n p_{*,n}(1 - p_{*,n})}} \\ &= \frac{\ln(K/s) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ &= -d_2(s, T - t) \end{aligned}$$

da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(t) \sqrt{\Delta_n} (1 - 2p_{*,n}) = (T - t) \left( \frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} \right).$$

Deshalb

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{Q} \{b_n(t) \leq \gamma_n^* \leq m_n(t)\} = 1 - N(-d_2(s, T - t)) = N(d_2(s, T - t)).$$

□

## 2.5 Bewertung von amerikanischen Optionen

In diesem Abschnitt, wie es auch im [16, Seite 56] beschrieben wurde, beschäftigen wir uns mit der Arbitrage-Bewertung der amerikanischen Optionen an einem Stock  $S$  im Rahmen des Cox-Ross-Rubinstein-Binomialmodells eines Aktienpreises. Durch die Möglichkeit der vorzeitigen Ausübung einer amerikanischen Option kann das Problem der Preisbildung und Absicherung dieser Forderungen nicht auf eine einfache Replikation des Zahlungsanspruches zum Fälligkeitstermin der Option (terminal payoff) reduziert werden. Dennoch wird sich die Bewertung der amerikanischen Option auf die arbitragefreie Argumente stützen.

### 2.5.1 Amerikanische Call-Option

Es wird zunächst der Fall, [16, Seite 56] der amerikanischen Kaufoption betrachtet - das heißt, die Möglichkeit, eine bestimmte Anzahl von Aktien zu kaufen, die zu jeder Zeit vor dem Verfallsdatum  $T$  oder an diesem Tag ausgeübt werden können. Die Ausübungspolitik des Optionsinhabers basiert sich notwendigerweise auf den bisher angesammelten Informationen und nicht auf die künftigen Preise der Aktien. Wie im vorigen Kapitel bezeichnet  $C_t^a$  den Arbitrage-Preis einer amerikanischen Kaufoption zum Zeitpunkt  $t$ . Das erste Ziel ist es zu zeigen, dass der Preis einer amerikanischen Call-Option in dem Cox - Ross - Rubinstein arbitragefreien Marktmodell mit dem Arbitrage-Preis einer europäischen Kaufoption mit dem gleichen Verfallsdatum und Basispreis (strike price) übereinstimmt. Zu diesem Zweck ist es ausreichend zu zeigen, wie in [16, Seite 56-58] dass die amerikanische Call-Option niemals vor Fälligkeit ausgeübt werden sollte, sonst könnte der Stillhalter einen risikolosen Gewinn erwirtschaften. Das Argument hängt von der folgenden einfachen Ungleichung ab

$$C_t \geq (S_t - K)^+, \quad \forall t \leq T, \quad (2.9)$$

die auf verschiedene Weise gerechtfertigt werden kann. Zum Beispiel, kann die explizite Cox-Ross-Rubinstein-Bewertungsformel oder die risikoneutrale Bewertungsformel verwendet werden. Beim letzten Verfahren wird die Jensen'sche bedingte Ungleichung der konvexen Funktion  $f(x) = (x - K)^+$  verwendet. In der Tat haben wir (zur Erinnerung,  $t = T - m$ )

$$\mathbb{E}_p^*[\hat{r}^{-m}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t^S] \geq (\mathbb{E}_p^*[\hat{r}^{-m} S_T | \mathcal{F}_t^S] - \hat{r}^{-m} K) \geq (S_t - K)^+,$$

wobei die erste Ungleichung die Jensen'sche bedingte Ungleichung  $K/\hat{r}^m \leq K$  ist (die Annahme, dass  $r \geq 0$  ist hier wichtig). Eine intuitive Art der Herleitung basiert sich auf arbitragefreien Argumenten. Zu beachten ist, dass seitdem der Optionspreis  $C_t$  nicht negativ ist, genügt es den Fall zu prüfen, wenn der aktuelle Aktienkurs größer als der Ausübungspreis ist - das heißt, wenn  $S_t - K > 0$ . Im Gegenteil wird angenommen, dass  $C_t < S_t - K$  für einige  $t$ ,  $S_t - C_t > K$ . Es wäre mit Null-Netto-Investition möglich, zum Zeitpunkt  $t$  eine Call-Option zu kaufen, (short a stock)

und die Summe  $S_t - C_t$  in ein Sparkonto zu investieren. Wenn dieses Portfolio unverändert bis zum Ende der Laufzeit  $T$  (maturity date) bleibt, würde das einen risikolosen Gewinn bedeuten. In der Tat, würde der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt  $T$ : ( $r \geq 0$ )

$$\hat{r}^{T-t}(S_t - C_t) + C_T - S_T > \hat{r}^{T-t}K + (S_T - K)^+ - S_T \geq 0.$$

Die Ungleichung (2.19) ist für den Ausschluß von Arbitrage-Möglichkeiten notwendig.

Da die Gleichung (2.19) selbstverständlich ist, kann die Eigenschaft  $C_t^a = C_t$  durch einfache No-Arbitrage-Argumente abgeleitet werden. Wird im Gegensatz angenommen, dass der Stillhalter (Verkäufer einer amerikanischen Call-Option) in der Lage ist, die Option zum Zeitpunkt 0 zu dem Preis  $C_0^a > C_0$  zu verkaufen (es ist offensichtlich, dass eine amerikanische Option zu jeder Zeit mindestens von so viel Wert wie eine europäische Option mit der gleichen Vertragsmerkmale ist, insbesondere  $C_0^a > C_0$ ). Um von dieser Transaktion zu profitieren, baut der Stillhalter ein dynamisches Portfolio, repliziert den Wertprozess der europäischen Call und investiert die restlichen Mittel in die risikolose Anleihen. Angenommen zum Beispiel, dass der Inhaber der Option beschließt, diese zum Zeitpunkt  $t$  vor dem Ablauf  $T$  auszuüben, dann bleibt der Stillhalter bei einem risikofreien Gewinn und der Wert des Portfolios ist

$$C_t - (S_t - K)^+ + \hat{r}^{T-t}(C_0^a - C_0) > 0, \quad \forall t \leq T. \quad (2.10)$$

Die obige Argumentation impliziert, dass die europäischen und amerikanischen Call-Optionen aus der Sicht der Arbitragepreistheorie äquivalent sind; das heißt, beide Optionen haben den gleichen Preis, und eine amerikanische Call-Option sollte nie von seinem Inhaber vor dem Ablauf ausgeübt werden. Das bedeutet auch, dass für einen risikoneutralen Investor, der Long mit einer amerikanischen Call-Option geht, sollte es gleichgültig sein - der Verkauf vor dem Ablaufdatum und das Aufhalten bis zum Optionenablaufdatum (vorausgesetzt, dass der Markt effizient ist - das heißt, Optionen sind weder unterbewertet noch übersteuert).

Es wird durch eine intuitive Argumentation gezeigt, dass ein Inhaber einer amerikanischen Call-Option diese Option nie vor ihrer Ablaufdatum ausüben sollte. Betrachten wir einen Investor, der die Ausübung einer amerikanischen Kaufoption zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t < T$  vor hat. Eine bessere Lösung ist es, eine Aktie zu verkaufen und die Option bis zu ihrem Ablaufdatum zu halten. Tatsächlich, die Ausübung der Option ergibt  $S_t - K$  zum Zeitpunkt  $t$  - somit,  $\hat{r}^{T-t}(S_t - K)$  - ist das Bargeld zum Ablauf der Option. Die zweite Handelsstrategie ergibt die Auszahlung  $\hat{r}^{T-t}S_t - S_T + (S_T - K)^+$  zu einem Zeitpunkt  $T$ , d.h. entweder  $\hat{r}^{T-t}S_t - K$  (wenn  $S_T \geq K$ ) oder  $\hat{r}^{T-t}S_t - S_T$  (wenn  $S_T < K$ ).

In allen Fällen also entwickelt sich das zweite Portfolio besser als das erste, wenn  $r \geq 0$ . Es ist interessant zu beobachten, dass dieses Argument leicht auf den Fall der ungewissen zukünftigen Zinsen erweitert werden kann.

Nicht zuletzt muss die folgende Lemma erwähnt werden.

**Lemma 1.** [15, S.24] Wir betrachten den Markt mit einer einzigen riskanten Anlage, die zum Zeitpunkt  $n$  einen Preis  $S_n$  hat, mit einem konstanten risikolosen Zinssatz  $r \geq 0$  in jeder Periode, so dass  $S_n^0 = (1+r)^n$ . Wir nehmen an, dass  $Z_n = (S_n - K)^+$ , wobei  $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$  eine adaptierte Folge ist und  $c_n$  der Preis einer europäischen Kaufoption zum Zeitpunkt  $n$  mit Fälligkeit  $N$  und Ausübungspreis  $K$  ist,  $C_n$  ist der Preis der entsprechenden amerikanischen Kaufoption. Unter Verwendung der Martingaleigenschaften von  $(\tilde{S}_n)$  haben wir

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= (1+r)^{-N} \mathbb{E}^*[(S_N - K)_+ | \mathcal{F}_n] \\ &\geq \mathbb{E}^*[(\tilde{S}_N - K(1+r)^{-N})_+ | \mathcal{F}_n] \\ &= \tilde{S}_n - K(1+r)^{-N}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Daher  $c_n \geq S_n - K(1+r)^{-(N-n)} \geq S_n - K$  für  $r \geq 0$ . Da  $c_n \geq 0$ , haben wir  $c_n \geq (S_n - K)_+$  und laut dem [15, Satz 2.5.1] haben wir  $C_n = c_n$ . Das ist die Gleichung zwischen dem Preis der europäischen Kaufoption und dem Preis der entsprechenden amerikanischen Kaufoption.

## 2.5.2 Amerikanische Put-Option

In diesem Abschnitt werden wir uns auf die Rechtfertigung der Bewertungsformel konzentrieren, wie in [16, Seite 58]. Bezeichne  $\mathcal{T}$  die Menge der *Stoppzeiten*, die auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind, wobei  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S$  für alle  $t = 0, \dots, T^*$ .

Die Abbildung  $\tau : \Omega \rightarrow \{0, \dots, T^*\}$  heißt  $\mathbb{F}$ -Stoppzeit, falls für alle  $t \in \{0, \dots, T^*\}$  gilt  $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ . Intuitiv bedeutet diese Eigenschaft, dass die Entscheidung, ob ein Prozess zur Zeit  $t$  gestoppt wird (das heißt, ob man eine Option zum Zeitpunkt  $t$  ausüben soll oder nicht) ist abhängig von den Kursschwankungen bis zur Zeit  $t$ . Es wird auch angenommen, dass  $\mathcal{T}_{[t, T]}$  eine Unterklasse von diesen Stoppzeiten  $\tau$  ist, wenn die Ungleichung  $t \leq \tau \leq T$  erfüllt ist.

**Satz 8.** [16, Seite 58] Der arbitragefreie Preis  $P_t^a$  der amerikanischen Verkaufsoption ist gleich

$$P_t^a = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{[t, T]}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\hat{r}^{-(\tau-t)}(K - S_t)^+ | \mathcal{F}_t], \quad \forall t \leq T. \tag{2.12}$$

Darüber hinaus ist für jedes  $t \leq T$  die Stoppzeit  $\tau_t^*$ , die das essentielle Supremum in 2.12 realisiert, durch den folgenden Ausdruck (mit Konvention  $\min \emptyset = T$ ) gegeben

$$\tau_t^* = \min \{u \in \{t, \dots, T\} \mid (K - S_u)^+ \geq P_u^a\}.$$

Als Beweis dazu werden wir folgende Bemerkung und den Satz betrachten:

**Bemerkung 3.** Sei  $V$  ein nichtnegativer adaptierter Prozess, der durch

$$V_t = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{[t, T]}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left[ e^{-r(\tau-t)} g(S_\tau, \tau) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

für eine Preisfunktion  $g$  definiert ist. Dann gibt es eine zulässige Handelsstrategie  $(\phi, A)$ , so dass  $V_t = V_t(\phi, A)$  für alle  $t \in [0, T]$ .

**Definition 3.** Eine zulässige Handelsstrategie  $(\phi, A)$  heißt eine perfekte Absicherung gegen die amerikanischen Eventualforderung  $X^a$  mit Preisfunktion  $g$ , wenn

$$V_t(\phi, A) \geq g(S_t, t), \quad \forall t \in [0, T]$$

mit Wahrscheinlichkeit 1.

**Satz 9.** [16, Seite 179] Die Arbitragefreiheit im Marktmodell mit Handel von amerikanischen Forderungen wird dann und nur dann gegeben sein, wenn der Preis  $\pi_0(X^a)$  durch die Formel

$$\pi_0(X^a) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{[t, T]}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [e^{-r\tau} g(S_\tau, \tau)]$$

gegeben ist.

Allgemein ist der arbitragefreie Preis einer amerikanischen Forderung mit Preisfunktion  $g$  zum Zeitpunkt  $t$  gleich

$$\pi_0(X^a) = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{[t, T]}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} [e^{-r(\tau-t)} g(S_\tau, \tau) | \mathcal{F}_t].$$

*Beweis.* [16, Seite 179-180] Wir nehmen an, dass der „Marktpreis“  $U_0$  der Option die Ungleichung  $U_n > V_0$  erfüllt. Es wird gezeigt, dass in diesem Fall die amerikanische Forderung überteuert ist, das heißt, eine Arbitrage ist möglich. Sei  $(\phi, A)$  eine Handelsstrategie. Wir nehmen an, dass der Optionskäufer eine beliebige Stoppzeit  $\tau \in \mathcal{T}_{[0, T]}$  als seine Ausübungspolitik wählt. Wir betrachten die folgende Strategie  $(\hat{\phi}, \hat{A}, -1, \tau)$  (zu beachten ist, dass bei der Umsetzung dieser Strategie, die Ausübungszeit  $T$  nicht im Voraus berechnet sein muss). Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_t^1 &= \phi_t^1 \mathbf{1}_{[0, \tau]}(t), \\ \hat{\phi}_t^2 &= \phi_t^2 \mathbf{1}_{[0, \tau]}(t) + (\phi_t^2 + \phi_t^1 S_\tau B_\tau^{-1} - g(S_\tau, \tau) B_\tau^{-1}) \mathbf{1}_{[\tau, T]}(t), \end{aligned}$$

und  $\hat{A}_t = A_{t \wedge \tau}$ . Durch Annahme, dass  $(\phi, A)$  eine perfekte Absicherung ist, haben wir  $\hat{\phi}_\tau^1 S_\tau + \hat{\phi}_\tau^2 B_\tau \geq g(S_\tau, \tau)$ , so dass  $\hat{\phi}_T^2 B_T \geq 0$ ,  $\mathbb{P}^*$ -fast sicher. Darüber hinaus erfüllt das Anfangsvermögen von  $(\hat{\phi}, \hat{A}, -1, \tau)$  durch Konstruktion  $\hat{\phi}_0^1 S_0 + \hat{\phi}_0^2 - U_0 = V_0 - U_0 < 0$ . Wir schließen daraus, dass die Strategie  $(\hat{\phi}, \hat{A}, -1, \tau)$  eine (kurze) Arbitragemöglichkeit bietet, das heißt, eine risikolose profitable Strategie für den Verkäufer der amerikanischen Forderung  $X^a$  darstellt. Jetzt wird angenommen, dass  $U_0 < V_0$ , sodass die amerikanische Forderung unterbewertet ist. Eine Arbitragemöglichkeit für den Käufer dieser Forderung kann wie folgt konstruiert werden. In diesem Fall können wir davon ausgehen, dass er sich für die Stoppzeit  $\tau_0$  als Ausübungszeit entscheidet. Zusätzlich nehmen wir an, dass er über ein dynamisches Portfolio  $(-\hat{\phi}, -\hat{A})$  verfügt. Zu beachten ist, dass der Prozess  $\hat{A}$  monoton fallend ist, wenn  $\tau = \tau_0$ . Ferner erfüllt das Anfangsvermögen seines Portfolios die Gleichung

$$-\hat{\phi}_0^1 S_0 - \hat{\phi}_0^2 + U_0 = U_0 - V_0 < 0$$

und das Endvermögen ist Null, da der Wert des Portfolios zum Ausübungszeit  $\tau_0$  verschwindet. Dies zeigt, dass nach geschickter Wahl der Ausübungspolitik, ist der Käufer der amerikanischen Forderungen in der Lage einen risikofreien Gewinn zu erzielen. Schließlich wird der arbitragefreie Preis  $\pi_0(X^a)$  mit  $V_0$  zusammenfallen, sonst würde eine Arbitragemöglichkeit im Marktmodell existieren.  $\square$

Die Stoppzeit  $\tau_t^*$  bezeichnet die rationale Ausübungszeit einer amerikanischen Put-Option, die noch zum Zeitpunkt  $t$  existiert. Und es wird betont, dass die Stoppzeit  $\tau_t^*$  das optimale Stopp-Problem nicht für jede Person lösen kann, sondern nur für jene Anleger, die risikoneutral sind.

Zur Erinnerung: der Aktienkurs  $S$  ist Markov unter  $\mathbb{P}^*$ . Eine Anwendung des Bellman - Prinzips reduziert das optimale Stopp-Problem 2.12 auf eine explizite rekursive Prozedur, die die Ableitung der Wertfunktion  $V^P$  ermöglicht. Diese Beobachtung führt zum folgenden Korollar.

**Korollar 3.** [16, Seite 59] *Wir nehmen an, dass ein nichtnegativer adaptierter Prozess  $V_t^P, t \leq T$  rekursiv definiert wird, indem  $V_T^P = (K - S_T)^+$  und*

$$V_t^P = \max \{K - S_t, \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\hat{r}^{-1}V_{t+1}^P | \mathcal{F}_t]\}, \quad \forall t \leq T - 1.$$

*Dann entspricht der Arbitragepreis  $P_t^a$  einer amerikanischen Put-Option zum Zeitpunkt  $t$  gerade dem  $V_t^P$ . Darüber hinaus ist die rationale Ausübungszeit nach der Zeit  $t$  gleich*

$$\tau_t^* = \min \{u \in \{t, \dots, T\} | K - S_u \geq V_u^P\}.$$

Umgekehrt ist es auch möglich, zuerst direkt zu zeigen, dass der Preis  $P_t^a$  rekursiven Bedingung genügen muss

$$P_t^a = \max \{K - S_t, \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\hat{r}^{-1}P_{t+1}^a | \mathcal{F}_t]\}, \quad \forall t \leq T - 1, \quad (2.13)$$

und die Bedingung  $P_T^a = (K - S_T)^+$  anschließend die äquivalente Darstellung wie in der Formel 2.12 erfüllt. Im Falle des Cox-Ross-Rubinstein-Modells (ein Preismodell in diskreter Zeit), wird die letzte Vorgehensweise einfacher für die Schätzung der amerikanischen Optionen erschienen. Der Hauptgrund dafür ist, dass ein scheinbar schwieriger Bewertungsproblem auf den einfachen Ein-Perioden-Fall reduziert werden kann. Dazu werden wir, wie üblich, durch Widerspruch argumentieren. Zu Beginn nehmen wir an, dass 2.13 nicht für  $t = T - 1$  gilt. Wenn dies der Fall ist, kann man leicht zu dem Zeitpunkt  $T - 1$  ein Portfolio mit risikolosem Gewinn zum Zeitpunkt  $T$  konstruieren. Daraus folgt, dass die folgende Bedingung unbedingt erforderlich ist

$$P_{T-1}^a = \max \{K - S_{T-1}, \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\hat{r}^{-1}(K - S_T)^+ | \mathcal{F}_t]\}.$$

Der nächste Schritt besteht darin, die Zeitperiode  $[T - 2, T - 1]$  zu betrachten, wobei  $T - 1$  nun die Rolle des Termintages und  $P_{T-1}^a$  die Terminauszahlung darstellt. Dieses Verfahren kann wiederholt werden. Zusammenfassend, lässt sich im Falle des Cox-Ross-Rubinstein-Modells die Arbitrage-Pricing einer amerikanischen Put-Option auf die folgende einfache rekursive Formel reduzieren

$$P_t^a = \max \left\{ K - S_t, \hat{r}^{-1} (p_* P_{t+1}^{au} + (1 - p_*) P_{t+1}^{ad}) \right\}, \forall t \leq T - 1,$$

mit  $P_T^a = (K - S_T)^+$ . Es wird hingewiesen, dass  $P_{t+1}^{au}$  und  $P_{t+1}^{ad}$  den Wert der amerikanischen Put-Option im nächsten Schritt, entsprechend der Auf- und Abwärtsbewegung des Aktienkurses ab einem bestimmten Gitterpunkt darstellen.



# Kapitel 3

## Normalverteilung

Wie es auch in [9] erwähnt wurde, spielt die Normalverteilung eine zentrale Rolle in der Methoden der angewandten Statistik. In 1774, Pierre Laplace hat die Normalverteilung als eine Annäherung an die hypergeometrische Verteilung erhalten. Carl Gauss hat die Normalverteilung als Fehlergesetz der Methode der kleinsten Quadrate in 1809 verwendet. Obwohl Gauss selbst nicht das normale Gesetz als sehr wichtig bewertet hat, half seine Arbeit bei der Nutzung der Normalverteilung und wurde später popularisiert. Oft wird die Normalverteilung auch als Gauß-Verteilung bezeichnet.

### 3.1 Definition der Normalverteilung

Eine Zufallsvariable  $X$  ist normalverteilt, wenn sie eine Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^2/\sigma^2\right), \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

besitzt, wobei  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma > 0$  die Parameter sind. Üblicherweise wird  $\sigma^2$  statt  $\sigma$  als zweiter Parameter definiert und die Normalverteilung mit

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (3.2)$$

bezeichnet. Im Zusammenhang mit dieser Bezeichnung wird der zweite Parameter immer  $\sigma^2$  sein.

Die normale Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x)$  ist symmetrisch über  $x = \mu$  und hat oft zitierte Glockenform. Sie ist auch als Glockenkurve bekannt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist unimodal und weist Wendepunkte bei  $\mu - \sigma$  und  $\mu + \sigma$  auf.

Wie es in [4] beschrieben wurde, nennt man eine Verteilungsfunktion der Form

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}(t - \mu)^2/\sigma^2\right) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

die Verteilungsfunktion einer Gauß-Verteilung oder Normalverteilung.

Im Falle einer standardisierten Normalverteilung mit  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  schaut die Verteilungsfunktion folgend aus:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Setzen wir formal  $\sigma = 0$ , erhalten wir sogenannte *ausgeartete* Normalverteilung  $N(\mu, 0)$ , die durch die Fourier-Transformierte des Dirac-Maßes dargestellt werden kann, vgl. [5, S.192-193].

Das Problem, dass Gaus'sche Glockenkurven 3.1 keine elementare Stammfunktionen haben und die Werte  $F(x)$  von Verteilungsfunktionen 3.3 von Normalverteilung nicht durch bequeme Integration numerisch berechnet werden können, wird durch den folgenden Transformationssatz auf die numerische Berechnung der Verteilungsfunktion einer einzigen Normalverteilung, nämlich der sogenannten normierten Normalverteilung  $\mathcal{N}(0; 1)$  oder Standardnormalverteilung reduziert.

**Satz 10.** (Transformationssatz) [4, S.118] *Es sei  $F$  die Verteilungsfunktion einer nach der Normalverteilung  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  verteilten Zufallsvariablen. Dann gilt für jedes  $x \in \mathbb{R}$*

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad (3.4)$$

wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der sogenannten normierten Normalverteilung  $\mathcal{N}(0; 1)$  bezeichnet.

*Beweis.* [4, S.118] Ersetzt man in der Formel 3.4  $\frac{x-\mu}{\sigma}$  durch eine neue Variable  $z$ , so erhält man nach der einfachen Regeln einer solchen Variablentransformation

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

□

Für die numerische Berechnung der Werte  $F(x)$  für die Verteilungsfunktionen von Normalverteilungen mit beliebigen Parameterwerten  $\mu$  und  $\sigma^2$  reicht es wegen 3.4 aus, die Verteilungsfunktion  $\Phi$  von  $\mathcal{N}(0; 1)$  einmal durch numerische Integration zu berechnen und zu tabellieren. Dabei braucht man  $\Phi$  nur für positive  $x$ -Werte zu tabellieren; denn: wegen der Symmetrie der normierten Gaußschen Glockenkurve gilt für jedes  $x \in \mathbb{R}$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x),$$

da nämlich der Flächeninhalt  $\Phi(-x)$  von  $-\infty$  bis zur Stelle  $-x$  unter der normierten Glockenkurve genauso groß ist wie der Flächeninhalt von der Stelle  $+x$  bis  $+\infty$  und letzter beträgt  $1 - \Phi(+x)$ , vgl. [4, S.118].

Die Funktion  $\Phi$  kann nicht in Bezug auf elementare Funktionen ausgedrückt werden [9, S.51], aber der folgende Satz beschreibt die kumulative Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

**Satz 11.** [9, S.51] (Laplace, 1895) Die kumulative Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung  $\Phi(x)$  kann für  $x \geq 0$  wie folgt dargestellt werden

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)2^n}.$$

Mithilfe der Funktion  $\Phi$  kann die kumulative Verteilungsfunktion für jede Normalverteilung berechnet werden.

**Satz 12.** [9] Es sei  $X$  normalverteilt mit  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Die kumulative Verteilungsfunktion  $F(x)$  von  $X$  für  $x \in \mathbb{R}$  ist dann durch

$$F(x) = \Phi[(x - \mu)/\sigma]$$

gegeben.

Wie bereits erwähnt wurde, kann der obige Satz 12 zur Berechnung der Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsvariable von  $\Phi(x)$  verwendet werden.

Die folgende Abschätzung ist für viele Zwecke nützlich.

**Satz 13.** [5, S.30-31] Ist  $X$  eine  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -verteilte reelle Zufallsvariable, so gilt für alle  $\eta > 0$ :

$$(2\pi)^{-1/2} \frac{\sigma\eta}{\sigma^2 + \eta^2} \exp(-\eta^2/2\sigma^2) < \mathbb{P}\{X \geq \eta\} < (2\pi)^{-1/2} \frac{\sigma}{\eta} \exp(-\eta^2/2\sigma^2)$$

Beweis ebenso dort [5, S.31].

## 3.2 Mehrdimensionale Normalverteilung

In der Finanzmathematik spielt die mehrdimensionale Normalverteilung eine wichtige Rolle.

**Definition 4.** [17, Seite 7] Ein Zufallsvektor  $X = (X_1, \dots, X_d)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist  $d$ -dimensional standardnormalverteilt und wir schreiben  $X \sim \mathcal{N}(0, I_d)$  als auch  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0, I_d)$  wenn

$$\varphi_{0, I_d}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \exp\left(-\frac{1}{2} \|x\|_2^2\right), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

eine Dichte von diesen Verteilungen hinsichtlich des Lebesgue-Maßes auf  $\mathbb{R}^d$  ist. Hier bedeutet 0 den Ursprung in  $\mathbb{R}^d$  und  $I_d$  die  $d$ -dimensionale Einheitsmatrix. Zu beachten ist, dass

$$(2\pi)^d = \det(2\pi I_d).$$

**Bemerkung 4.** [17, Seite 7] Die kontinuierliche Dichte  $\varphi_{0, I_d}$  ist hochsymmetrisch in dem Sinne, dass  $\varphi_{0, I_d}(Ox) = \varphi_{0, I_d}(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  und alle Matrix  $O \in \mathbb{R}^{d \times d}$  und  $O^T O = I_d$ , gemeint für alle  $d$ -dimensionale orthogonale Matrix  $O$ .

**Bemerkung 5.** (Unabhängige Komponenten) [17, Seite 7] Die stetige Dichte  $\varphi_{0,I_d}$  ist ein Produkt der Dichten

$$\varphi_{0,I_d}(x) = \prod_{i=1}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_i^2\right), \quad x = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d,$$

was bedeutet, dass die Komponenten des Vektors unabhängig sind.

**Bemerkung 6.** [17, Seite 7] Durch Verwendung des Fubini-Satzes und zwei-dimensionale Änderung von Variablen zu polaren Koordinaten mit  $x(r, \varphi) = r \cos \varphi$  und  $y(r, \varphi) = r \sin \varphi$  und dem Determinant von Jacobi-Matrix

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \varphi) & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(r, \varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \varphi) & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(r, \varphi) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r,$$

folgt, dass

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \right)^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) d(x, y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r dr}_{=-\exp(-r^2/2)|_0^{\infty}=1} d\varphi = 1. \end{aligned}$$

Daher  $\varphi_{0,I_d}$  tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

**Definition 5.** [17, Seite 8] Es sei  $\mu \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$  und  $X \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ . Dann die Verteilung von  $Y = AX + \mu$  heißt  $n$ -dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswert  $\mu$  und Kovarianzmatrix  $C := AA^T$ . Wir verwenden die Notation, dass  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, C)$  und  $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{N}(\mu, C)$ . Wenn  $\mu = 0$ , dann heißt die Normalverteilung zentriert.

### 3.3 Die logarithmische Normalverteilung

Eine positive Zufallsvariable  $X$  mit zwei Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$  heißt lognormalverteilt, wenn  $Y = \ln X$  normalverteilt mit Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  ist. Die zweiparametrische logarithmische Normalverteilung bezeichnen wir durch  $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ ; die entsprechende Normalverteilung bezeichnen wir durch  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von  $X$  unter  $\Lambda(\mu, \sigma^2)$  ist

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Die Verteilung ist unimodal und positiv schräg. Die Verteilungsfunktion schaut für  $x \geq 0$  folgendermaßen aus

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^x \frac{1}{t} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt. \quad (3.5)$$

Weiters, ein Vektor  $(X_1, \dots, X_n)'$  von positiven Zufallsvariablen, sodass  $(Y_1, \dots, Y_n)' = (\ln X_1, \dots, \ln X_n)'$  ist  $n$ -dimensional normalverteilt mit dem Mittelwertvektor  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$  und der Varianz-Kovarianzmatrix  $\Sigma = (\sigma_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , mit  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  und  $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ . Die Verteilung von  $(X_1, \dots, X_n)'$  heißt  $n$ -dimensionale logarithmische Normalverteilung mit Parametern  $\mu$  und  $\Sigma$  und wird durch  $\Lambda_n(\mu, \Sigma)$  bezeichnet. Die entsprechende  $n$ -dimensionale Normalverteilung bezeichnen wir durch  $\mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$ . Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von  $(X_1, \dots, X_n)'$  unter  $\Lambda_n(\mu, \Sigma)$  ist durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{|\Sigma|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\ln x - \mu)' \Sigma^{-1} (\ln x - \mu)\right\}, & x \in \mathbb{R}^{n+} \\ 0, & x \in (\mathbb{R}^{n+})^c \end{cases}$$

gegeben, wobei  $x = (x_1, \dots, x_n)'$ ,  $\ln x = (\ln x_1, \dots, \ln x_n)'$  und  $\mathbb{R}^{n+} = \{x \mid x_i > 0\}$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Vgl. [6].

**Definition 6.** [17, Seite 18] Es sei  $\mu \in \mathbb{R}^n$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiv semidefinit und sei  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T \sim \mathcal{N}(\mu, C)$ . Die Verteilung von  $Z := (\exp(Y_1), \dots, \exp(Y_n))^T$  heißt  $n$ -dimensionale logarithmische Normalverteilung mit Parametern  $\mu$  und  $C$  und wir werden die Bezeichnung  $Z \sim M\text{LogN}(\mu, C)$  verwenden. In dem eindimensionalen Fall der logarithmischen Normalverteilung, schreiben wir  $Z \sim \text{LogN}(\mu, C)$ .

In der Definition der Zufallsvektor mit  $n$ -dimensionaler logarithmischen Normalverteilung nimmt Werte aus dem  $(0, \infty)^n$ .

**Bemerkung 7.** [17, Seite 87] (Multivariate Brownsche Bewegung) Wir werden eine Anwendung der Ito - Formel in Finanzmathematik betrachten. Sei  $B = (B^1, \dots, B^d)$  die  $d$ -dimensionale Brownsche Bewegung. Wir modellieren den Preisprozess  $S^k$  einer Aktie,  $k \in \{1, \dots, n\}$  (ohne Dividendenzahlungen), mit einer Aufwertungsrate  $\mu_k \in \mathbb{R}$ , einem Volatilitätsvektor  $\sigma_k = (\sigma_{k,1}, \dots, \sigma_{k,d}) \in \mathbb{R}^d$ , einem  $\mathcal{F}_0$ -messbaren Anfangspreis  $S_0^k$  (der für die meisten Wirtschaftsin-terpretationen  $\mathbb{R}_+$ -wertig sein sollte) und definieren

$$S_t^k = S_0^k \exp\left(\left(\mu_k - \frac{1}{2} \|\sigma_k\|_2^2\right)t + \langle \sigma_k, B_t \rangle\right), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Jetzt werden wir die Ito - Formel an einem  $\mathbb{R}$ -wertigen Preisprozess  $S = (S^1, \dots, S^n)$  anwenden. Wir definieren  $f = (f_1, \dots, f_n)$  komponentenweise

$$f_k(t, x) = \exp\left(\left(\mu_k - \frac{1}{2} \|\sigma_k\|_2^2\right)t + \langle \sigma_k, x \rangle\right) \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Zu bemerken ist, dass  $f \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$  und  $f$  beinhaltet nicht den Anfangsvektor  $S_0 = (S_0^1, \dots, S_0^n)$ , da es angenommen wurde, dass  $f$  deterministisch ist.

**Bemerkung 8.** [17, Seite 89] Sei  $B$  die  $d$ -dimensionale Brownsche Bewegung. Es sei  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}^d$  und  $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathbb{R}^d$ , sowie reelle Zahlen  $S_0^1, \dots, S_0^n > 0$ .  $f = (S_0^1 f_1, \dots, S_0^n f_n)^T : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mit  $f_1, \dots, f_n$  sind wie in 7 gegeben. Der Preisvektor  $S_t := f(t, B_t)$  ist gemäß 6  $n$ -dimensional logarithmisch normalverteilt  $M\text{Log}N(\bar{\mu}t, AA^T t)$  mit

$$\bar{\mu} = \begin{pmatrix} \log S_0^1 + \mu_1 - \frac{1}{2} \|\sigma_1\|_2^2 \\ \vdots \\ \log S_0^n + \mu_n - \frac{1}{2} \|\sigma_n\|_2^2 \end{pmatrix}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix},$$

wobei  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  Zeilenvektoren sind.

Wie es sich auf der Wikipedia - Seite [3] nachlesen lässt, die kumulative Verteilungsfunktion ist durch

$$F_X(x; \mu, \sigma) = \int_0^x f_X(\xi; \mu, \sigma) d\xi = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\ln x - \mu}{\sigma \sqrt{2}} \right) \right] = \Phi \left( \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right) \quad (3.6)$$

gegeben, wobei  $\Phi$  die kumulative Verteilungsfunktion von Standardnormalverteilung ist.

Die Teilerwartung oder gestutzte Erwartung einer Zufallsvariable  $X$  mit einem Schwellenwert  $k$  ist durch

$$g(k) = \int_k^\infty x f(x) dx$$

definiert, wobei  $f(x)$  die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von  $X$  ist.

Der Erwartungswert der logarithmischen Normalverteilung schaut folgendermaßen aus

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{+\infty} x \frac{e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{x} dx = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}. \quad (3.7)$$

Für eine lognormalverteilte Zufallsvariable die Teilerwartung oder gestutzter Erwartungswert ist durch

$$g(k) = \int_k^\infty x f(x) dx = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Phi \left( \frac{\mu + \sigma^2 - \ln k}{\sigma} \right) \quad (3.8)$$

gegeben. Wobei  $\Phi$  die kumulative Normalverteilungsfunktion ist.

# Kapitel 4

## Adaptierte Abhängigkeit

Bei der fondsgebundenen Lebensversicherung wird in der Regel davon ausgegangen, dass die finanziellen und biometrischen Risiken unabhängig sind, siehe [14, Seite 11]. In manchen Situationen ist es vorteilhafter, ohne Annahme der Unabhängigkeit zu handeln. Aus mathematischer Sicht ist dieser Fall ein spezieller Typ des optimalen Stopp-Problems. Hierbei wird, wie in [10, Seite 11], im Gegensatz zum standardisierten Stopp-Problem noch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Stoppzeit angegeben. Wir betrachten ein optimales Stopp-Problem, dessen Wert  $V$  durch

$$V := \sup_{\tau \in T_I} \mathbb{E}[Z_\tau]. \quad (4.1)$$

definiert ist.

Für einen nicht-negativen Prozess  $Z$  wird dieser Wert mit dem Wert einer amerikanischen Option ohne Absicherungsmöglichkeiten übereinstimmen.

Wenn die Stoppzeit in dem optimalen Stopp-Problem eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\nu$  hat, kann dieser Wert  $V$  geändert werden. Wir bezeichnen diesen neuen Wert als  $V(\nu)$ . Dann gilt für  $T_I^\nu \neq \emptyset$ , dass

$$V(\nu) := \sup_{\tau \in T_I^\nu} \mathbb{E}[Z_\tau]. \quad (4.2)$$

Falls  $T_I^\nu = \emptyset$ , setzen wir  $V(\nu) = -\infty$ . Wenn die Stoppzeit  $\tau \in T_I^\nu \neq \emptyset$  unabhängig vom adaptierten Prozess  $Z$  ist, wird die Bestimmung des Erwartungswertes  $\mathbb{E}(Z_\tau)$  wie folgt vereinfacht

$$V^{ind}(\nu) := \mathbb{E}[Z_\tau] = \sum_{t \in I} \mathbb{E}[Z_t \mathbf{1}_{\{\tau=t\}}] = \sum_{t \in I} \mathbb{E}[Z_t] \nu_t, \quad (4.3)$$

mit  $\nu_t := \mathbb{P}(\tau = t)$  für alle  $t \in I$ . Wenn eine solche unabhängige Stoppzeit  $\tau$  nicht existiert, setzen wir  $V^{ind}(\nu) := -\infty$ . Wenn wir diese drei Werte anschauen, sehen wir, dass  $V^{ind}(\nu) \leq V(\nu) \leq V$ . Wenn  $I \subset \mathbb{N}_0$  ein diskretes Intervall mit  $0 \in I$  ist und wenn der Prozess  $Z$  ein gleichmäßig integrierbares Martingal ist, und wenn  $T_I^\nu \neq \emptyset$ , dann ist  $V(\nu) = V$ , da nach dem Doob'schen Optional Sampling Theorem (siehe Satz 14)  $\mathbb{E}[Z_\tau] = \mathbb{E}[Z_0]$  für alle Stoppzeiten  $\tau$ . Wenn weiterhin eine Stoppzeit  $\tau \in T_I^\nu \neq \emptyset$  existiert, die unabhängig vom gleichmäßig integrierbaren

Martingale  $Z$  ist, dann beweist diese Stoppzeit, dass  $V^{ind}(\nu) = V(\nu) = V$ . Diese Gleichung gilt nur für diejenige Martingale  $Z$  und Stoppzeiten  $\tau$ , welche die notwendigen Voraussetzungen der Doob'schen Optional Sampling Theorem erfüllen.

**Satz 14.** [Doob's optional sampling theorem] [10, Seite 11-12]

(a) Sei  $I \subset \mathbb{N}_0$  mit  $0 \in I$ . Sei  $\tau$  eine Stoppzeit und  $Z$  ein Supermartingal. Dann ist  $Z_\tau$  integrierbar und  $\mathbb{E}[Z_\tau] \leq \mathbb{E}[Z_0]$  in jeder der folgenden Situationen:

1.  $\tau$  ist f.s. beschränkt, das heißt, für einige  $N \in \mathbb{N}$  gilt  $\mathbb{P}(\tau \leq N) = 1$ ,
2.  $\tau$  ist f.s. endlich und  $Z$  ist f.s. beschränkt, das heißt, für einige  $K > 0$  gilt  $\mathbb{P}(|Z_t| \leq K) = 1$  für alle  $t \in I$ ,
3.  $\mathbb{E}[\tau] < \infty$  und für einige  $K > 0$  gilt  $\mathbb{P}(|Z_t - Z_{t-1}| \leq K) = 1$  für alle  $t \in I \setminus \{0\}$ ,
4. Der Prozess  $Z$  ist gleichmäßig integrierbar. In diesem Fall ist  $Z$  abschließbar, das heißt,  $Z_\infty$  existiert und ist wohldefiniert. Somit auch  $Z_\tau$  wohldefiniert ist, wenn  $\tau = \infty$ .

(b) Wenn  $I \subset \mathbb{N}_0$  mit  $0 \in I$  und irgendeine der Bedingungen 1.-4. erfüllt ist und  $Z$  ein Martingal ist, dann  $\mathbb{E}[Z_\tau] = \mathbb{E}[Z_0]$ .

(c) Wenn  $I \subset \mathbb{Z}$  eine abzählbare unendliche Indexmenge,  $Z$  ein Martingal und  $\tau$  eine beschränkte Stoppzeit ist, dann ist  $Z_\tau$  integrierbar und  $\mathbb{E}[Z_\tau] = \mathbb{E}[Z_t]$  für alle  $t \in I$ .

*Beweis.* Für den Beweis von (a1), (a2) und (a3) verweisen wir auf [19] unter Beachtung, dass der Beweis auf die obigen Ausführungen angepasst werden kann. Die Bedingung (a4) wurde im [18, Korollar VII.2.2 und S.486] bewiesen. Die Tatsache, dass  $Z_\infty$  existiert und wohldefiniert ist, ist in [19, Theorem 11.5] beschrieben. (b) ist in [19] und [18] bewiesen. (c) folgt aus dem [12, Theorem 6.12]

□

## 4.1 Expected Shortfall

Analog zu [10] werden wir Folgendes definieren.

**Definition 7.** [10, Seite 34] Es sei eine Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\delta \in [0, 1]$  gegeben.

(a) Wir definieren das  $\delta$ -Quantil von  $X$  wie folgt

$$q_\delta(X) := \inf \{x \in \mathbb{R} | \mathbb{P}(X \leq x) \geq \delta\}. \quad (4.4)$$

Zu beachten ist, dass  $q_0(X) = -\infty$  und wenn  $\mathbb{P}(X \leq x) < 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , dann  $q_1(X) = \infty$ .

(b) Wir definieren  $f_{\delta,X} : \Omega \rightarrow [0, 1]$  wie folgt

$$f_{\delta,X} := \begin{cases} 0 & \text{falls } \delta = 1, \\ 1_{\{X > q_\delta(X)\}} + \beta_{\delta,X} 1_{\{X = q_\delta(X)\}} & \text{falls } \delta \in [0, 1), \end{cases}$$

wobei

$$\beta_{\delta,X} := \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(X \leq q_\delta(X)) - \delta}{\mathbb{P}(X = q_\delta(X))} & \text{falls } \mathbb{P}(X = q_\delta(X)) > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Expected Shortfall von  $X$  zum Niveau  $\delta$  ist als  $(1-\delta)ES_\delta(X) = \mathbb{E}[f_{\delta,X}X]$  gegeben. Zu beachten ist, dass  $ES_0(X) = \mathbb{E}[X]$  und  $ES_1(X) = 0$ , wenn  $\beta_{1,X} = f_{1,X} = 0$ .

**Bemerkung 9.** [10, Seite 34] (a) Zu beachten ist, dass  $\beta_{\delta,X} \in [0, 1]$ , weil

$$\mathbb{P}(X < q_\delta(X)) \leq \delta \leq \mathbb{P}(X \leq q_\delta(X)). \quad (4.5)$$

Deshalb wird  $f_{\delta,X}$  nur die Werte aus dem  $[0, 1]$  annehmen.

(b) Für  $\delta \in [0, 1]$  haben wir  $\mathbb{E}[f_{\delta,X}] = 1 - \delta$ . Und für  $\delta \in [0, 1)$

$$\mathbb{E}[f_{\delta,X}] = \mathbb{P}(X > q_\delta(X)) + \beta_{\delta,X} \mathbb{P}(X = q_\delta(X)).$$

## 4.2 Gierige - Strategie

Eine gierige Strategie bedeutet das Folgende: man möchte die Option nur dann ausüben, wenn unter den gegebenen Umständen der Wert des zugrunde liegenden Prozesses so groß wie möglich ist. Diese Strategie ist optimal, wenn das zugrunde liegende Verfahren unabhängig ist, was in dem nachstehenden Lemma, wie in [10], gezeigt wird.

**Lemma 2.** [10, Seite 69] *Es sei ein diskretes Zeitintervall  $I \subset \mathbb{N}_0$  und die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\nu$  auf  $I$  gegeben. Es wird angenommen, dass ein adaptierter Prozess  $Z = \{Z_t\}_{t \in I}$  ein Prozess mit unabhängigen Zufallsvariablen ist, sodass  $\mathbb{E}[\sup_{t \in I} |Z_t|] < \infty$ . Es wird auch angenommen, dass  $U = \{U_t\}_{t \in I}$  ein adaptierter Prozess mit unabhängigen Zufallsvariablen ist, der auf dem Intervall  $[0, 1]$  gleichverteilt ist, sodass  $Z$  und  $U$  unabhängig sind. Wir setzen*

$$\delta_t = 1 - \frac{\nu_t}{1 - \nu_{<t}} \quad (4.6)$$

für  $t \in I$  und

$$E_t := \{Z_t > q_{\delta t}(Z_t)\} \cup \{Z_t = q_{\delta t}(Z_t), 1 - \beta_{\delta t, Z_t} < U_t \leq 1\}$$

mit  $\beta_{\delta t, Z_t}$  wie in Definition 7(b). Dann ist die optimale Stoppzeit  $\tau^*$  zur Lösung folgender Gleichung

$$\sup_{\tau \in T_I^\nu} \mathbb{E}[Z_\tau] = \mathbb{E}[Z_{\tau^*}]$$

durch

$$\{\tau^* = t\} = \begin{cases} (\bigcap_{I < t} E_s^c) \cap E_t & \text{wenn } \nu_{\leq t} < 1, \\ \bigcap_{I < t} E_s^c & \text{wenn } \nu_{\leq t} = 1. \end{cases}$$

gegeben.

$\mathbb{E}[Z_{\tau^*}]$  kann wie folgt berechnet werden

$$\mathbb{E}[Z_{\tau^*}] = \sum_{t \in I} \mathbb{E}[Z_t \mathbf{1}_{\{\tau^*=t\}}] = \sum_{t \in I} \nu_t ES \left( Z_t; 1 - \frac{\nu_t}{1 - \nu_{<t}} \right). \quad (4.7)$$

*Beweis.* [10, Seite 70] Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Der Parameter wird sich von einem Induktionsschritt zum nächsten bis zum Endpunkt  $T$  des Zeitintervalls  $I = \{0, \dots, T\}$  ändern, damit können wir zeigen, dass diese Strategie optimal für jedes endliche Zeitintervall ist. Wir werden mit  $T = 0$  starten. Wenn  $T = 0$ , müssen wir den Prozess zum Zeitpunkt 0 stoppen, da dies der einzige mögliche Moment ist. Dadurch haben wir  $\nu_0 = 1$  und  $\tau^* = 0$ . Wir gehen nun davon aus, dass die Formel aus dem Lemma für  $T = t - 1$  gilt und werden zeigen, dass diese auch für  $T = t$  gilt.

Wir haben

$$\begin{aligned} V(\nu) &= \sup_{\tau \in T_{\{0, \dots, t\}}^\nu} \mathbb{E}[Z_\tau] = \sup_{\tau \in T_{\{0, \dots, t\}}^\nu} \mathbb{E}[Z_0 \mathbf{1}_{\{\tau=0\}} + Z_\tau \mathbf{1}_{\{\tau \geq 1\}}] \\ &\leq \underbrace{\sup_{\tau \in T_{\{0, \dots, t\}}^\nu} \mathbb{E}[Z_0 \mathbf{1}_{\{\tau=0\}}]}_* + \underbrace{\sup_{\tau \in T_I^\nu} \mathbb{E}[(Z_1 \mathbf{1}_{\{\tau=1\}} + \dots + Z_t \mathbf{1}_{\{\tau=t\}}) \mathbf{1}_{\{\tau \geq 1\}}]}_{**} \end{aligned}$$

Wenn wir (\*) anschauen, sehen wir, dass  $Z_0$  so groß wie möglich sein sollte. Das bedeutet, dass die optimale Stoppzeit zum Zeitpunkt 0 muss  $\{\tau^* = 0\} = E_0$  erfüllen.

Für die Berechnung von (\*\*) brauchen wir eine Maßänderung. Das Problem reduziert sich auf ein Problem mit Zeithorizont, für welches wir bereits das Ergebnis aufgrund unserer Annahme wissen. Das heißt

$$(**) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{\{1, \dots, t\}}^{\mu, \mathbb{Q}}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_{\tau}],$$

wobei  $\mathbb{Q}$  ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß zu  $\mathbb{P}$  und  $\mu$  die Verteilung der neuen Stoppzeit unter  $\mathbb{Q}$  mit  $\mu_i = \frac{\nu_i}{1-\nu_0}$  für  $i = 1, \dots, t$  ist.  $\mathcal{T}_{\{1, \dots, t\}}^{\mu, \mathbb{Q}}$  ist die Menge aller Stoppzeiten mit Werten aus dem  $\{1, \dots, t\}$ , die die Verteilung  $\mu$  unter  $\mathbb{Q}$  hat. Jetzt nutzen wir die in dem Lemma angegebene Formel, um die optimale Stoppzeit  $\tau^*$  zu berechnen, aber müssen wir mit der Menge  $E_0^c = \{\tau^* \geq 1\}$  abschneiden, da sich die Berechnung auf diese Menge beschränkt. Dann haben wir für jedes  $s \in \{1, \dots, t\}$

$$\{\tau^* = s\} = \left( \bigcap_{i=1}^{s-1} E_i^c \right) \cap E_0^c \cap E_s = \left( \bigcap_{i=1}^{s-1} E_i^c \right) \cap E_s.$$

Tatsächlich ist die Stoppzeit  $\tau^*$  nur eine Obergrenze, aber es kann leicht überprüft werden, dass  $\mathbb{P}(\tau = t) = \nu_t$  für alle  $t \in I$  und dass  $\tau^*$  eine wirkliche Stoppzeit ist.  $\square$

Damit die Grenzproblematik klarer wird, führen wir einige nützliche Behauptungen ein.

**Behauptung 1.** [10, Seite 44] *Es sei ein diskretes Zeitintervall  $I$  und die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\nu$  auf diesem Intervall gegeben. Wir nehmen an, dass es ein Prozess  $Z = \{Z_t\}_{t \in I}$  gibt, der die folgende Bedingungen*

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{t \in I} Z_t^- \right] < \infty$$

oder

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{t \in I} Z_t^+ \right] < \infty$$

erfüllt. Dann gilt

$$V^+(\nu) \leq \sum_{t \in I} \nu E S_{1-\nu_t}(Z_t). \quad (4.8)$$

Der Beweis in [10, Seite 44].

**Behauptung 2.** [10, Seite 45] *Es sei ein diskretes Zeitintervall  $I \subset \mathbb{N}_0$  und die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\nu$  auf diesem Intervall gegeben. Wir verwenden die Doob - Zerlegung bei einem adaptierten Prozess  $Z$  in  $L^1(\mathbb{P})$ . Wir nehmen an (sh. [19, Theorem 12.11]), dass der Martingal*

$M$  zusammen mit Verteilung  $\nu$  eine der Bedingungen [10, Satz 2.49] erfüllt. Es gilt für einen vorhersehbaren Prozess  $A$ , dass

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{t \in I} A_t^- \right] < \infty$$

oder

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{t \in I} A_t^+ \right] < \infty.$$

Dann gilt

$$V^+(\nu) \leq \mathbb{E} [M_0] + \sum_{t \in I} \nu ES_{1-\nu_t}(A_t). \quad (4.9)$$

Der Beweis in [10, Seite 45].

**Behauptung 3.** [10, Seite 45] Es sei ein diskretes Zeitintervall  $I \subset \mathbb{N}_0$  und die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\nu$  auf diesem Intervall gegeben. Bei einem adaptierten Prozess  $Z$  in  $L^1(\mathbb{P})$  verwenden wir die Doob - Zerlegung  $Z = M + A$ . Wir nehmen an, dass  $\mathbb{E} [\sup_{t \in I} A_t^-] < \infty$  oder  $\mathbb{E} [\sup_{t \in I} A_t^+] < \infty$  für den vorhersehbaren Prozess  $A$  gilt. Wenn wir  $\Delta A_t := A_t - A_{t-1}$  für  $t \in I \setminus \{0\}$  und  $\Delta A_0 := 0$  definieren, dann haben wir für alle  $\gamma \in \mathcal{M}_I^\nu$

$$\mathbb{E} [Z_\gamma] \leq \mathbb{E} [M_0] + \sum_{t \in I} \nu_{\geq t} ES_{\nu < t}(\Delta A_t). \quad (4.10)$$

Den Beweis sh. [10, Seite 46].

**Lemma 3.** [10, Seite 46] Es wird angenommen, dass  $I \subset \mathbb{N}_0$  und  $Z$  ein Martingal ist.

(a) Wenn  $\mathbb{E} [\sup_{t \in I} |Z_t|] < \infty$ , dann für jedes  $\gamma \in \mathcal{M}_I$  gilt

$$\mathbb{E} [Z_0] \leq \mathbb{E} [Z_\gamma] \leq \mathbb{E} [Z_\infty]. \quad (4.11)$$

(b) Wir verwenden die Doob - Zerlegung  $M + A$  vom Submartingal  $Z$  und nehmen an, dass  $M$  eine der Bedingungen [10, Satz 2.49] erfüllt. Dann

$$\mathbb{E} [M_0] \leq \mathbb{E} [Z_\gamma] \leq \mathbb{E} [M_0] + \mathbb{E} [A_\infty]. \quad (4.12)$$

Der Beweis in [10, Seite 46].

### 4.3 Adaptierte Abhängigkeit bei der fondsgebundenen Lebensversicherung

In der Versicherung stellt sich immer die Frage - wann tritt der Leistungsfall ein, wann muss der Versicherer auszahlen? Ein Versicherungsvertrag wird normalerweise nur auf einem endlichen Zeitintervall betrachtet. Deshalb werden wir, wie auch in [10, Seite 111] ein diskretes Zeitintervall nehmen. Auf diesem Intervall werden wir die Zeitpunkte, zu welchen die Auszahlungen auftreten könnten, modellieren. Wir gehen davon aus, dass  $I = \{0, \dots, T\}$  für einen  $T \in \mathbb{N}$  und  $Z = \{Z_t\}_{t \in I} \in L^1(\mathbb{P})$  ein adaptierter Prozess.  $Z$  beschreibt die Auszahlung im Leistungsfall.

Bei der fondsgebundenen Lebensversicherung wird die Auszahlung durch den Preis eines zugrunde liegenden finanziellen Vermögenswertes, Index oder eines Investmentfonds zu einem zufälligen Zeitpunkt bestimmt. Dieser zufällige Zeitpunkt kann abhängig von dem Moment des Todes des Versicherten sein. Bei der Betrachtung dieser Versicherungsverträge, wie in [10, Seite 112] gehen wir davon aus, dass der adaptierte Prozess  $Z = \{Z_t\}_{t \in I} \in L^1(\mathbb{P})$  die Auszahlung und dass die Stoppzeit  $\tau$  den Zeitpunkt einer Auszahlung modelliert, zum Beispiel das Ableben des Versicherten mittels einer Verteilung aus der Sterbetafel. Für jedes  $t \in I$  entspricht der Wert  $\gamma_t$  dem Anteil der Verträge, die eine Auszahlung zum Zeitpunkt  $t$  haben. Für diese Versicherungsverträge gilt die übliche Annahme, dass die biometrischen Risiken unabhängig von den bestehenden Finanzmärkten sind. Mit dieser Annahme, einer adaptierten Abhängigkeit zwischen den zugrunde liegenden Fonds und der Stoppzeit erhalten wir einen Wert für einen Versicherungsvertrag, der größer ist, als der von aktuariellen Standardverfahren unter der Unabhängigkeitsannahme berechnet wird. Auf diese Weise könnten unsere Werte bei der Modellierung des Worst-Case-Szenarios verwendet werden, die für die Versicherer von Interesse bei der Bewertung der Risiken des Versicherungsvertrages sind.

Wie kann man die Verteilung  $\nu$  für die Stoppzeit  $\tau \in \mathcal{T}_I^\nu$  für ein gegebenes diskretes Zeitintervall bestimmen?

Um die Verteilung  $\nu$  der Stoppzeit  $\tau$  zu bestimmen, müssen wir die Sterbetafel verwenden. Wir bezeichnen mit  ${}_n p_x$  die Wahrscheinlichkeit, daß eine  $x$ -jährige Person die nächsten  $n$  Jahre überlebt. Weiter, bezeichnen wir mit  ${}_n q_x = 1 - {}_n p_x$  die Wahrscheinlichkeit, daß eine  $x$ -jährige Person in den nächsten  $n$  Jahren stirbt. Für  $n = 1$  schreiben wir  $p_x$  und  $q_x$ . Wir setzen  $\nu_0 = 0$ . Das ist eine vernünftige Annahme, da es keine Auszahlung zu Beginn des Vertrages gibt, bzw. der Versicherungsnehmer zu Beginn des Vertrages lebendig ist. Zur Modellierung eines einzigen fondsgebundenen Lebensversicherungsvertrages mit Auszahlung am Ende des Todesjahres des Versicherten oder am Ende des Vertrages, setzen wir  $\nu_t$  gleich der Wahrscheinlichkeit, daß eine  $x$ -jährige Person die  $t - 1$  Jahre überlebt und im Jahr  $t$  stirbt. Für  $t \in \{1, \dots, T\}$  haben wir  $\nu_t = {}_{t-1} p_x \cdot q_{x+t-1}$ . Wir wählen  $\nu_T = {}_{T-1} p_x$ , damit gilt  $\sum_{t=0}^T \nu_t = 1$ .

Wir werden die Berechnung des Wertes  $V(\nu)$  für eine fondsgebundene Lebensversicherung in den folgenden Beispielen veranschaulichen. Um die Verteilung zu bestimmen, werden wir

die Werte  $q_x$  aus der österreichischen Rententafel, [2] AVÖ 2005R (2.Ordnung, Endresultat, Spalte  $(q(2001)\text{Einzel}(x))$  für Männer, verwenden. Die Überlebenswahrscheinlichkeit für einen 20-jährigen Mann war früher höher als heutzutage. Es wird auch angenommen, dass die Verzinsung  $r = 0$ . Damit wir Lemma (2) verwenden können, werden wir annehmen, dass  $Z$  ein Prozess mit unabhängigen Zufallsvariablen ist. Es wird weiters, für die Berechnung von  $V^{ind}(\nu)$  angenommen, dass der Prozess  $Z$  und die Stoppzeit  $\tau$  unabhängig sind.  $Z_t \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$  für alle  $t \in I$ , mit Parametern  $\mu = -0,02205$  und  $\sigma = 0,21$  und diese Parameter bleiben bei allen drei Beispielen gleich und  $\mathbb{E}[\exp(\sigma_t Z + \mu_t)] = \exp(\mu_t + \frac{\sigma_t^2}{2}) = 1$ , es folgt, dass  $-2\mu_t = \sigma_t^2$ . Es wurde der Preis eines fondsgebundenen Lebensversicherungsvertrages für einen 20-jährigen Mann für Laufzeit  $T = 10$  berechnet. Die Verteilung  $\nu$  ist gegeben wie oben.

**Beispiel 1.** Zuerst wurden die erforderliche Quantile und Expected Shortfall für die einfache Implementierung berechnet. Es wurde angenommen, dass  $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ , also logarithmisch normalverteilt ist. Dann, ist  $u_{(\delta)}$  das  $\delta$ -Quantil einer Standardnormalverteilung (d.h.  $\Phi(u_{(\delta)}) = \delta$ , wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist), so ist, laut Formel (4.4) das  $\delta$ -Quantil der logarithmischen Normalverteilung von  $X$  durch

$$q_{(\delta)}(X) = \exp(\mu + u_{(\delta)} \cdot \sigma)$$

gegeben. Der Expected Shortfall bei gegebenem  $\delta \in (0, 1)$  ist lt. der Definition (7) und unter Verwendung der Formel (3.8)

$$\begin{aligned} ES_{\delta}(X) &= \frac{1}{\mathbb{P}(X > q_{(\delta)}(X))} \mathbb{E} \left[ X \mathbf{1}_{\{X > q_{(\delta)}(X)\}} \right] = \frac{1}{1 - \delta} \int_{q_{(\delta)}(X)}^{\infty} x \cdot f(x) dx \\ &= \frac{1}{1 - \delta} \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{\mu + \sigma^2 - \ln q_{(\delta)}(X)}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{1 - \delta} \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{\mu + \sigma^2 - \ln(\exp(\mu + u_{(\delta)} \cdot \sigma))}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{1 - \delta} \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Phi(\sigma - u_{(\delta)}), \end{aligned}$$

wobei  $\delta_t$  wurde anhand der Formel (4.6) berechnet, genauer  $\delta_t = 1 - \frac{\nu_t}{1 - \nu_0 - \dots - \nu_{t-1}}$  für jeden  $t \in I$ .

Es ist zu beachten, dass bei  $\delta = 1$  Expected Shortfall wird folgendermaßen ausschauen

$$ES_{\delta}(X) = \frac{1}{1 - 1} \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Phi(\sigma - u_{(1)}) = 0$$

und bei  $\delta = 0$

$$ES_{\delta}(X) = \frac{1}{1 - 0} \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Phi(\sigma - u_{(0)}) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Phi(\sigma - 0.5),$$

wobei  $u_{(\delta)}$  das  $\delta$ -Quantil der Standardnormalverteilung ist.

Dann wurde  $V(\nu)$  mithilfe der Formel (4.2) zum Zeitpunkt  $T = 10$  unter Verwendung der österreichischen Rententafel, [2] AVÖ 2005R (2.Ordnung, Endresultat, Spalte  $(q(2001)\text{Einzel}(x))$  für Männer berechnet

$$V(\nu) = \sum_{t=0}^T ES_{1-\frac{\nu_t}{1-\nu_0-\dots-\nu_{t-1}}}(Z_t) \cdot \nu_t \approx 1,0060.$$

Unter der Annahme der Unabhängigkeit zwischen dem Prozess  $Z$  und Stoppzeit  $\tau$  wurde  $V^{ind}(\nu)$  nach der Formel (4.3) ausgerechnet, sodass  $V^{ind}(\nu) = 1$  für alle Laufzeiten  $T \in \mathbb{N}$ .

$V$  wurde laut Formel (4.1) mittels des Prinzips der Snell - Einhüllenden für amerikanische Option berechnet. Folgende Tabelle bietet einen kurzen Überblick über die Werte zu verschiedenen Zeitpunkten.

Laufzeit	T=10	T=30	T=60	T=80
$V^{ind}$	1	1	1	1
$V(\nu)$	1,0060	1,0319	1,2276	1,4858
$V$	1,2938	1,4383	1,5273	1,5636

Das Bild4.1 zeigt die Entwicklung des Fonds bei einem fondsgebundenen Lebensversicherungsvertrag für einen 20-jährigen Mann bei verschiedenen Laufzeiten. Es ist merkbar, dass die Fondsentwicklung im Laufe der Zeit deutlich unter dem Wert einer amerikanischen Option bleibt. Andererseits, im Vergleich zu [10, Seite 113], entwickelt sich der Fond mit der Zeit steigend, aber nicht so rasant wie bei [10, Seite 113], was bei Rückstellungen eines Versicherungsunternehmens von Bedeutung sein kann.

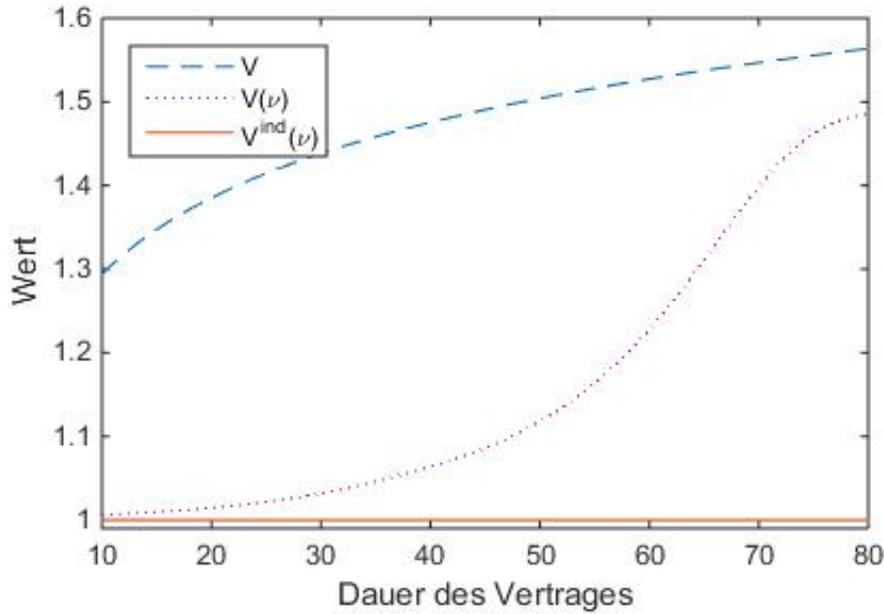


Bild 4.1: Werte  $V$ ,  $V(\nu)$  und  $V^{\text{ind}}(\nu)$  bei einem fondsgebundenem Vertrag für einen 20-jährigen Mann bei verschiedenen Laufzeiten, mit Parametern  $\mu = -0,02205$  und  $\sigma = 0,21$ , beim Beispiel 1.

**Beispiel 2.** Viel realistischer sind die Fälle, bei denen eine Garantie dabei ist. Es wurde angenommen, dass  $S = \{S_t\}_{t \in I}$  ein Prozess mit unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit  $S_t \sim \mathcal{LN}(\mu_t, \sigma_t^2)$  für alle  $t \in I$  ist. Der Prozess modelliert die Fondsentwicklung.  $G$  ist die Garantie. Der Prozess  $Z = \{Z_t\}_{t \in I}$  ist durch  $Z_t = \max\{S_t, G\} = G + \max\{S_t - G, 0\}$  für alle  $t \in I$  gegeben. Die Verteilung von  $Z_t$  ist durch

$$\mathbb{P}(Z_t \leq x) = \begin{cases} 0 & x < G; \\ \mathbb{P}(S_t \leq x) & x \geq G; \end{cases}$$

gegeben.

Die  $\delta$ -Quantile von  $Z_t$  für alle  $t \in I$  wurden mithilfe der Formel (4.4) berechnet

$$q_\delta(Z_t) = \begin{cases} -\infty & \delta = 0; \\ G & 0 < \delta \leq \mathbb{P}(S_t \leq G); \\ \exp(\mu + u_{(\delta)} \cdot \sigma) & \mathbb{P}(S_t \leq G) < \delta \leq 1; \end{cases}$$

gegeben, wobei  $u_{(\delta)}$  das  $\delta$ -Quantil der Standardnormalverteilung ist.

Der Expected Shortfall bei gegebenem  $\delta \in (0, 1)$  wurde laut Definition 7 und unter Verwendung der Formel (3.8) berechnet, es wird

$$\begin{aligned}
ES_\delta(S) &= \frac{1}{1-\delta} \int_{q_{(\delta)}(S)}^{\infty} x \cdot f(x) dx \\
&= \frac{1}{1-\delta} \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{\mu + \sigma^2 - \ln q_{(\delta)}(S)}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{1-\delta} \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{\mu + \sigma^2 - \ln(\exp(\mu + u_{(\delta)} \cdot \sigma))}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{1-\delta} \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Phi(\sigma - u_{(\delta)}),
\end{aligned}$$

falls  $q_\delta(Z_t) = \exp(\mu + u_{(\delta)} \cdot \sigma)$

und

$$\begin{aligned}
ES_\delta(S) &= \frac{1}{1-\delta} \int_G^{\infty} x \cdot f(x) dx \\
&= \frac{1}{1-\delta} \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{\mu + \sigma^2 - \ln G}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

falls  $q_\delta(Z_t) = G$  ist, wobei  $\delta_t$  wurde ebenso anhand der Formel (4.6) berechnet,  $\delta_t = 1 - \frac{\nu_t}{1-\nu_0-\dots-\nu_{t-1}}$  für jeden  $t \in I$ .

Es wurden zwei Fälle mit verschiedenen Garantiewerten betrachtet. Im ersten Fall:  $G = 0,5$ . Dann wurde der Wert von  $V(\nu)$  zum Zeitpunkt  $T = 10$  unter Verwendung der österreichischen Rententafel, [2] AVÖ 2005R (2.Ordnung, Endresultat, Spalte ( $q(2001)$ Einzel( $x$ ))) für Männer ausgerechnet

$$V(\nu) = \sum_{t=0}^T ES_{1-\frac{\nu_t}{1-\nu_0-\dots-\nu_{t-1}}}(Z_t) \cdot \nu_t \approx 1,0068$$

und  $V^{ind}(\nu) = 1,0003$  für alle Laufzeiten  $T \in \mathbb{N}$ . In der nachstehenden Tabelle werden die Werte zu verschiedenen Zeitpunkten kurz zusammengefasst.

Laufzeit	T=10	T=30	T=60	T=80
$V^{ind}$	1,0003	1,0003	1,0003	1,0003
$V(\nu)$	1,0068	1,0327	1,2283	1,4859
V	1,2938	1,4383	1,5273	1,5636

Im zweiten Fall:  $G = 1$ . Der Wert von  $V(\nu)$  zum Zeitpunkt  $T = 10$

$$V(\nu) = \sum_{t=0}^T ES_{1-\frac{\nu_t}{1-\nu_0-\dots-\nu_{t-1}}}(Z_t) \cdot \nu_t \approx 1,0895$$

und  $V^{ind}(\nu) = 1,0836$  für alle Laufzeiten  $T \in \mathbb{N}$ .

V wurde laut Formel (4.1) mittels des Prinzips der Snell - Einhüllenden für amerikanische Option berechnet. Folgende Tabelle zeigt die Entwicklung dieser Werte.

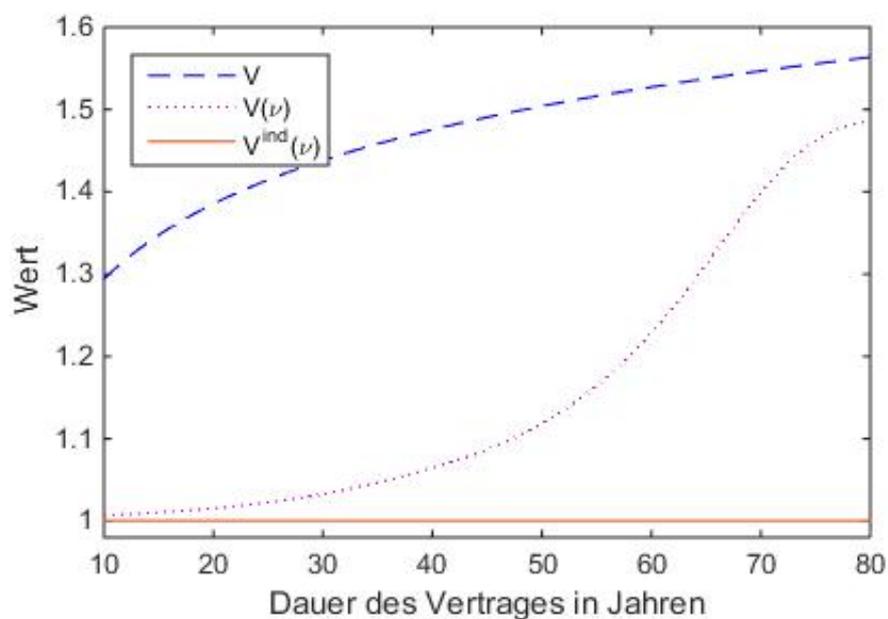


Bild 4.2: Werte  $V$ ,  $V(\nu)$  und  $V^{ind}(\nu)$  bei einem fondsgebundenem Vertrag mit Garantie ( $G = 0.5$ ) für einen 20-jährigen Mann bei verschiedenen Laufzeiten, mit Parametern  $\mu = -0,02205$  und  $\sigma = 0,21$ , beim Beispiel 2.

Laufzeit	T=10	T=30	T=60	T=80
$V^{ind}$	1,0836	1,0836	1,0836	1,0836
$V(\nu)$	1,0895	1,1131	1,2842	1,4874
$V$	1,2938	1,4383	1,5273	1,5636

Bilder 4.2 und 4.3 zeigen die Entwicklung eines fondsgebundenen Lebensversicherungsvertrages mit verschiedenen Garantiewerten. Je höher ist die Garantie, desto höher sind die Werte des fondsgebundenen Lebensversicherungsvertrages und im Laufe der Zeit wachsen, aber am Ende der Laufzeit unterscheiden sich kaum.

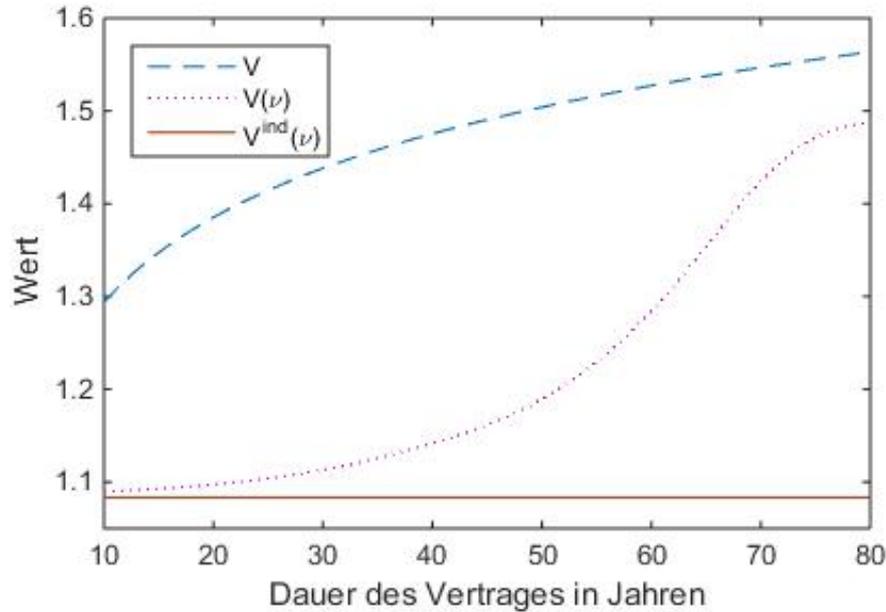


Bild 4.3: Werte  $V$ ,  $V(\nu)$  und  $V^{\text{ind}}(\nu)$  bei einem fondsgebundenem Vertrag mit Garantie ( $G = 1$ ) für einen 20-jährigen Mann bei verschiedenen Laufzeiten, mit Parametern  $\mu = -0,02205$  und  $\sigma = 0,21$ , beim Beispiel 2.

**Beispiel 3.** Es kann auch die Black-Scholes-Formel für die amerikanische Optionen bei der Berechnung des Wertes einer fondsgebundenen Lebensversicherung mit Garantie verwendet werden.

Es wurde  $X_0$  als Startwert betrachtet, wobei die Zufallsvariablen  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  unabhängig und logarithmisch normalverteilt mit Parametern  $\mu_t \in \mathbb{R}$  und  $\sigma_t^2 > 0$  sind und  $\mathbb{E}[X_t] = 1$ , also  $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\exp(\sigma_t Z + \mu_t)] = \exp(\mu_t + \frac{\sigma_t^2}{2}) = 1$ , es folgt, dass  $-2\mu_t = \sigma_t^2$ . Es wurde bei diesem Beispiel mit selben Parametern  $\mu = -0,02205$  und  $\sigma = 0,21$  gearbeitet. Die Filtrierung ist durch  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_t)$  für alle  $t \in \mathbb{N}_0$  bestimmt. Beispiele wurden mittels Programm Matlab R2014b gerechnet. Um die Glattheit der Ergebniskurven zu gewährleisten, wurden die Berechnungen mit 1.000.000 Simulationen durchgeführt. Die Fondsentwicklung  $S_t$  betrachten wir als Produkt  $S_t = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_t$  für  $t \in \mathbb{N}_0$ .

a) Laut Black-Scholes-Formel (2.4), haben wir  $Z_t = (S_t - G)^+$ , für alle  $t \in \mathbb{N}_0$ . Dabei verwenden wir die Doob-Zerlegung 1,  $Z_t = M_t + A_t$  für  $t \in \mathbb{N}_0$ , wobei  $M$  ein Martingal und  $A$  ein vorhersehbarer wachsender Prozess ist, der mit  $A_0 = 0$  beginnt. Uns interessiert, wann wir stoppen sollten, um die besten Ergebnisse erzielen zu können. Generell, stoppen wir, wenn der Erwartungswert von nächster möglichen Auszahlung kleiner als jetzige ist. In unserem Fall wird die Stoppzeit durch die Verteilung  $\nu$  bestimmt, die eine Sterblichkeitsverteilung ist. Diese Verteilung wurde mithilfe der österreichischen Rententafel, [2] AVÖ 2005R (2.Ordnung, Endresultat, Spalte  $(q(2001)\text{Einzel}(x))$  für Männer, zu jedem Zeitpunkt  $T$  ausgerechnet. Wir suchen

$\mathbb{E}[Z_{\mathcal{T}}] = \mathbb{E}[M_{\mathcal{T}}] + \mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}]$ , wobei  $\mathbb{E}[M_{\mathcal{T}}] = \mathbb{E}[M_0] = 1$ . Es bleibt nun den  $\mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}]$  auszurechnen. Dazu werden wir die Zuwächse  $\Delta A_t$  wie folgt definieren

$$\begin{aligned}
\Delta A_t &= \mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}] - Z_{t-1} \\
&= \mathbb{E}[(S_t - G)^+ | \mathcal{F}_{t-1}] - (S_{t-1} - G)^+ \\
&= \mathbb{E}[(S_{t-1} \cdot X_t - G)^+ | \mathcal{F}_{t-1}] - (S_{t-1} - G)^+ \\
&= S_{t-1} \mathbb{E}[(X_t - G/S_{t-1})^+ | \mathcal{F}_{t-1}] - (S_{t-1} - G)^+
\end{aligned} \tag{4.13}$$

und die Strategie in diesem Fall wird -stoppen, wenn  $\Delta A_t$  am kleinsten ist.

Da die  $X_t$  und  $\mathcal{F}_{t-1}$  unabhängig sind, können wir die Überlegungen über die Black-Scholes-Formel wie in Kapitel 2.4 anwenden und den bedingten Erwartungswert  $\mathbb{E}[(X_t - \frac{G}{S_{t-1}})^+ | \mathcal{F}_{t-1}]$  unter Verwendung von bekannten Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes (sh. [19, Section 9.10] ) folgendermaßen ausrechnen:

$$\mathbb{E} \left[ \left( X_t - \frac{G}{S_{t-1}} \right)^+ \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = H \left( \frac{G}{S_{t-1}}, t \right), \quad t \in \mathbb{N}$$

wobei die Funktion  $H(K, t)$  durch

$$H(K, t) = \mathbb{E}[(X_t - K)^+] = \mathbb{E}[(\exp(\sigma_t Z + \mu_t) - K)^+] \tag{4.14}$$

für jeden  $K \in \mathbb{R}_+$ ,  $t \in \mathbb{N}$  definiert ist. Wir haben

$$\mathbb{E}[(X_t - K)^+] = \mathbb{E}[X_t \mathbf{1}_{D_t}] - K \mathbb{E}[\mathbf{1}_{D_t}],$$

wobei  $D_t := \{\exp(\sigma_t Z + \mu_t) > K\}$ .

Dann wird

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbf{1}_{D_t}] &= \mathbb{P}(X_t > K) \\
&= \mathbb{P}(\exp(\sigma_t Z + \mu_t) > K) \\
&= \mathbb{P}(\sigma_t Z + \mu_t > \ln K) \\
&= \mathbb{P}\left(Z > \frac{\ln K - \mu_t}{\sigma_t}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{\ln K - \mu_t}{\sigma_t}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\ln K - \mu_t}{\sigma_t}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\mu_t - \ln K}{\sigma_t}\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t \mathbf{1}_{D_t}] &= \mathbb{E}[\exp(\sigma_t Z + \mu_t) \mathbf{1}_{\{\exp(\sigma_t Z + \mu_t) \geq K\}}] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp(\sigma_t Z + \mu_t) \mathbf{1}_{\left\{Z > \frac{\ln K - \mu_t}{\sigma_t}\right\}}\right] \\
&= \int_{\frac{\ln K - \mu_t}{\sigma_t}}^{\infty} \exp(\sigma_t y + \mu_t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\mu_t) \int_{\frac{\ln K - \mu_t}{\sigma_t}}^{\infty} \exp(\sigma_t y - y^2/2) dy \\
(\text{quadratische Ergänzung}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\mu_t) \int_{\frac{\ln K - \mu_t}{\sigma_t}}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y - \sigma_t)^2}{2} + \frac{(\sigma_t^2)}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\exp(\mu_t) \exp(\sigma_t^2/2)}_{=1} \int_{\frac{\ln K - \mu_t}{\sigma_t}}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y - \sigma_t)^2}{2}\right) dy \\
(\text{Substitution: } u = y - \sigma_t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln K - \mu_t}{\sigma_t} - \sigma_t}^{\infty} \exp(-u^2/2) du \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\ln K - \mu_t}{\sigma_t} - \sigma_t\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\mu_t - \ln K}{\sigma_t} + \sigma_t\right).
\end{aligned}$$

Daher wird die Formel (4.14) folgendermaßen ausssehen

$$H(K, t) = \Phi\left(\frac{\mu_t - \ln K}{\sigma_t} + \sigma_t\right) - K \cdot \Phi\left(\frac{\mu_t - \ln K}{\sigma_t}\right). \quad (4.15)$$

Nach dem Einsetzen in die Formel (4.13) wird es

$$\begin{aligned}
\Delta A_t &= S_{t-1} H\left(\frac{G}{S_{t-1}}, t\right) - (S_{t-1} - G)^+ \\
&= S_{t-1} \Phi\left(\frac{\mu_t - \ln(G/S_{t-1})}{\sigma_t} + \sigma_t\right) \\
&\quad - G \Phi\left(\frac{\mu_t - \ln(G/S_{t-1})}{\sigma_t}\right) - (S_{t-1} - G)^+.
\end{aligned} \quad (4.16)$$

Weiters nehmen wir an, dass  $\Delta A \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma)$ .

Dann definieren wir  $V^{\Delta A}(\nu) := \mathbb{E}[Z_{\mathcal{T}}] = \mathbb{E}[M_{\mathcal{T}}] + \mathbb{E}[A_{\mathcal{T}}]$ .

Damit wir  $V^{\Delta A}(\nu)$  ermitteln können, werden  $\Delta A_t$  nach Formel (4.16) ausgerechnet und dann 10.000 Simulationen durchgeführt.

Nachher werden die Simulationen für jedes Jahr aufsteigend sortiert und beginnend von minimalen Wert werden so viele Werte von  $\Delta A_t$  in Betracht genommen, sodass diese Menge der Größe der zugeordneten Wahrscheinlichkeit  $\nu_t$  entspricht.

Eine graphische Darstellung des Endresultats wurde mit verschiedenen Garantiewerten auf den Bildern 4.4 und 4.5 präsentiert.

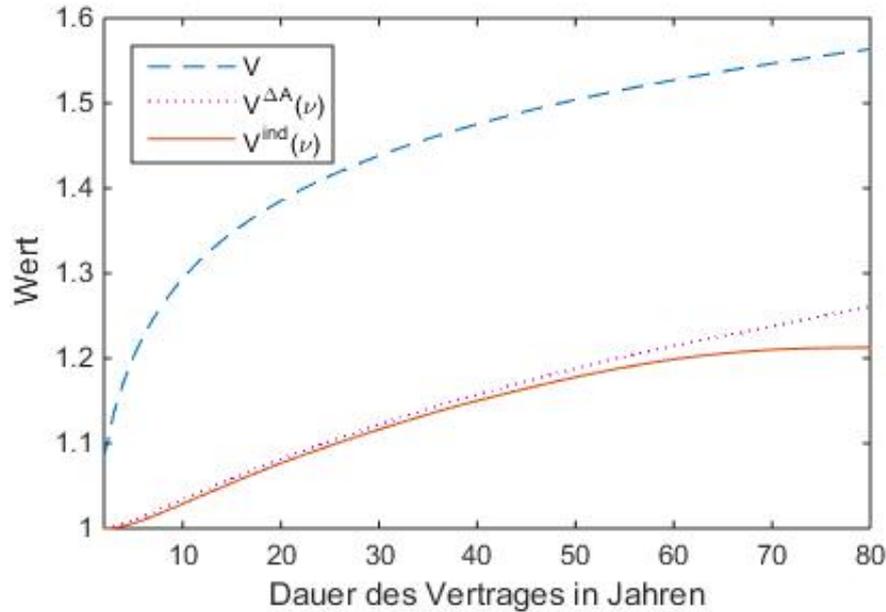


Bild 4.4: Werte  $V^{\Delta A}(\nu)$  und  $V$  im Beispiel 3.a) mit  $G = 0,5$  und Parametern  $\mu = -0,02205$  und  $\sigma = 0,21$ .

Diese Bilder zeigen die Entwicklung von  $V^{\Delta A}(\nu)$  und  $V$  bei Garantiewerten von 0,5 und 1.

In der Lebensversicherung, sowie in den anderen Versicherungssparten, sind außer jährlicher, noch andere Zahlungsweisen üblich. Dazu werden wir entsprechende unterjährige Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten brauchen. Diese werden wie in [8, Seite 22] ausgerechnet, sodass  ${}_u q_x = u q_x$  und  ${}_u p_x = 1 - u q_x$ , wobei  $0 \leq u \leq 1$ . Parameter  $\sigma$  wird entsprechend mit  $\sigma/\sqrt{2}$ ,  $\sigma/\sqrt{4}$  und  $\sigma/\sqrt{12}$  ersetzt.

Bild 4.6, zeigt den Verlauf des Wertes von  $V^{\Delta A}(\nu)$  bei monatlichen, vierteljährlichen und halbjährlichen Zahlungsweisen, sowie von  $V$ .

Dadurch, dass  $\mu = -\sigma^2/2$ , wird gezeigt, dass die Formel (4.16) sehr ähnlich zu Black-Scholes-Formel 2.7 ist. Es wird

$$\Delta A_t = S_{t-1} \Phi\left(\frac{\sigma_t^2 - 2 \ln(G/S_{t-1})}{2\sigma_t}\right) - G + G \Phi\left(\frac{\sigma_t^2 + 2 \ln(G/S_{t-1})}{2\sigma_t}\right) - (S_{t-1} - G)^+.$$

b) Unter den selben Annahmen wie im Punkt a) wurde die zweite Strategie ausgerechnet, wobei der Prozess  $Z$  erst dann gestoppt wird, wenn  $\Delta B_t$  am kleinsten ist. Wir definieren

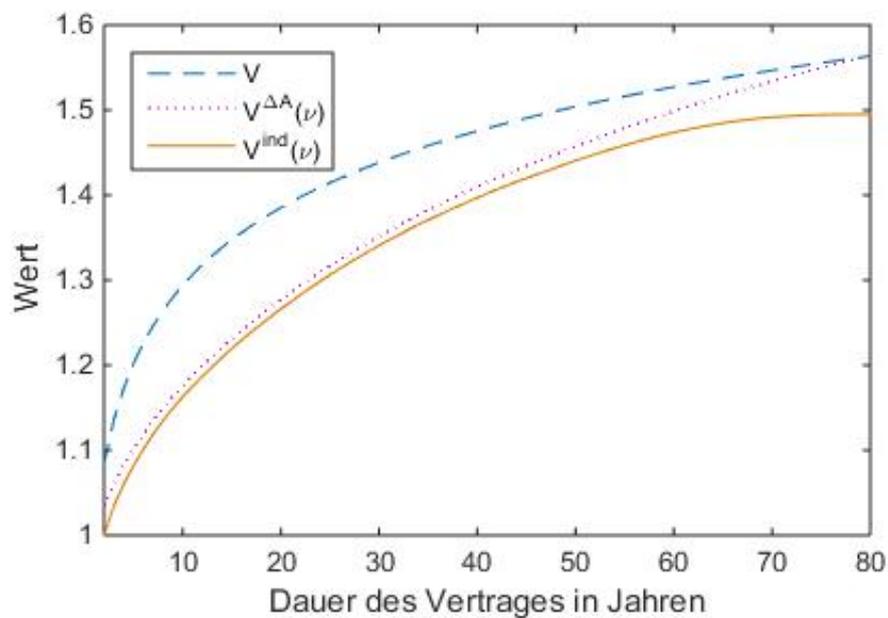


Bild 4.5: Beispiel 3 a). Werte  $V^{\Delta A}(\nu)$  und  $V$ , mit  $G = 1$  und Parametern  $\mu = -0,02205$  und  $\sigma = 0,21$ .

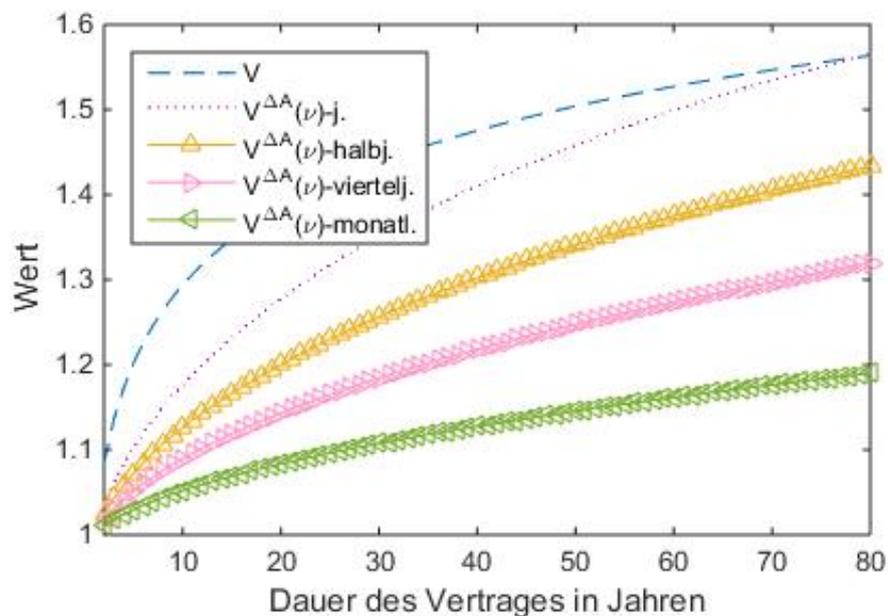


Bild 4.6: Werte  $V^{\Delta A}(\nu)$  mit  $G = 1$  bei verschiedenen Zahlungsweisen, mit Parametern  $\mu = -0,02205$  und  $\sigma = 0,21$ , Beispiel 3 a).

$$\begin{aligned}
\Delta B_t &= \mathbb{E}[Z_T | \mathcal{F}_t] - Z_t \\
&= \mathbb{E}[(S_T - G)^+ | \mathcal{F}_t] - (S_t - G)^+ \\
&= \mathbb{E}[(S_t X_{t+1} \dots X_T - G)^+ | \mathcal{F}_t] - (S_t - G)^+ \\
&= S_t \cdot \mathbb{E} \left[ \left( \prod_{n=t+1}^T X_n - G/S_t \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] - (S_t - G)^+.
\end{aligned}$$

Dann können wir den Erwartungswert folgendermaßen ausrechnen

$$\mathbb{E} \left[ \left( \prod_{n=t+1}^T X_n - G/S_t \right)^+ \right] = \underbrace{\mathbb{E} \left[ \prod_{n=t+1}^T X_n \mathbf{1}_{D_t} \right]}_* - \underbrace{G/S_t \cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}_{D_t}]}_{**}, \quad (4.17)$$

wobei  $D_t := \left\{ \prod_{n=t+1}^T \exp(\sigma_n Z + \mu_n) > G/S_t \right\}$ .

Mithilfe dieser Bemerkung und nach ähnlichen Überlegungen wie im Punkt a), wurden die nächsten Formeln für die Formel (4.17) ausgerechnet

$$\begin{aligned}
*) &= \mathbb{E} \left[ \prod_{n=t+1}^T X_n \mathbf{1}_{D_t} \right] = \mathbb{E} \left[ \prod_{n=t+1}^T \exp(\sigma_n Z + \mu_n) \mathbf{1}_{\left\{ \prod_{n=t+1}^T \exp(\sigma_n Z + \mu_n) \geq G/S_t \right\}} \right] \\
&= \Phi \left( \frac{\sum_{n=t+1}^T \mu_n - \ln G/S_t}{\sum_{n=t+1}^T \sigma_n} + \sum_{n=t+1}^T \sigma_t \right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
**) &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{D_t}] = \mathbb{P}(X_t > G/S_t) \\
&= \mathbb{P} \left( \prod_{n=t+1}^T \exp(\sigma_n Z + \mu_n) > G/S_t \right) \\
&= \Phi \left( \frac{\sum_{n=t+1}^T \mu_n - \ln G/S_t}{\sum_{n=t+1}^T \sigma_n} \right).
\end{aligned}$$

Daraus resultiert sich

$$\begin{aligned}
\Delta B_t &= S_t \cdot \Phi \left( \frac{\sum_{n=t+1}^T \mu_n - \ln(G/S_t)}{\sum_{n=t+1}^T \sigma_n} + \sum_{n=t+1}^T \sigma_t \right) \\
&\quad - G \cdot \Phi \left( \frac{\sum_{n=t+1}^T \mu_n - \ln(G/S_t)}{\sum_{n=t+1}^T \sigma_n} \right) - (S_t - G)^+.
\end{aligned} \quad (4.18)$$

Es wurde angenommen, dass die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  während des Experiments konstant bleiben, daher  $\sum_{n=t+1}^T \mu_n = (T-n) \cdot \mu$  und  $\sum_{n=t+1}^T \sigma_n = (T-n) \cdot \sigma$  wird. Die Formel (4.18) wird dann folgendermaßen ausschauen

$$\begin{aligned} \Delta B_t &:= S_t \cdot \Phi \left( \frac{(T-n)\mu_n - \ln(G/S_t)}{(T-n)\sigma_n} + (T-n)\sigma_n \right) \\ &\quad - G \cdot \Phi \left( \frac{(T-n)\mu_n - \ln(G/S_t)}{(T-n)\sigma_n} \right) - (S_t - G)^+. \end{aligned} \quad (4.19)$$

$V^{\Delta B}(\nu)$  wird ähnlich wie  $V^{\Delta A}(\nu)$  definiert. In diesem Fall werden die Werte  $V^{\Delta B}(\nu)$  gleich mit Werten aus dem Punkt a).

c) Bei der dritten Strategie werden wir die Summe der bedingten Erwartungswerte betrachten, es wird

$$\begin{aligned} \Delta C_t &= \sum_{u=t+1}^T \frac{\nu_u}{1 - (\nu_0 + \dots + \nu_t)} (\mathbb{E}[Z_u | \mathcal{F}_t] - Z_t) \\ &= \sum_{u=t+1}^T \frac{\nu_u}{1 - (\nu_0 + \dots + \nu_t)} (\mathbb{E}[(S_u - G)^+ | \mathcal{F}_t] - (S_t - G)^+) \\ &= \sum_{u=t+1}^T \frac{\nu_u}{1 - (\nu_0 + \dots + \nu_t)} (\mathbb{E}[(S_t \cdot X_{t+1} \cdots X_u - G)^+ | \mathcal{F}_t] - (S_t - G)^+) \quad (4.20) \\ &= \sum_{u=t+1}^T \frac{\nu_u}{1 - (\nu_0 + \dots + \nu_t)} \left( S_t \cdot \mathbb{E} \left[ \left( \prod_{n=t+1}^u X_n - G/S_t \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] - (S_t - G)^+ \right) \\ &= \sum_{u=t+1}^T \frac{\nu_u}{1 - \nu_{\leq t}} \left( S_t \cdot \mathbb{E} \left[ \left( \prod_{n=t+1}^u X_n - G/S_t \right)^+ \right] - (S_t - G)^+ \right). \end{aligned}$$

Der Erwartungswert wurde schon vorher, bei  $\Delta B$ , Formel (4.19), ausgerechnet, daher

$$\begin{aligned} \Delta C_t &= \sum_{u=t+1}^T \frac{\nu_u}{1 - (\nu_0 + \dots + \nu_t)} \cdot \left( S_t \cdot \Phi \left( \frac{\sum_{u=t+1}^T \mu_u - \ln(G/S_t)}{\sum_{u=t+1}^T \sigma_u} + \sum_{u=t+1}^T \sigma_u \right) - G \cdot \Phi \left( \frac{\sum_{u=t+1}^T \mu_u - \ln(G/S_t)}{\sum_{u=t+1}^T \sigma_u} \right) - (S_t - G)^+ \right) \quad (4.21) \end{aligned}$$

oder nach der Umsetzung der Summe

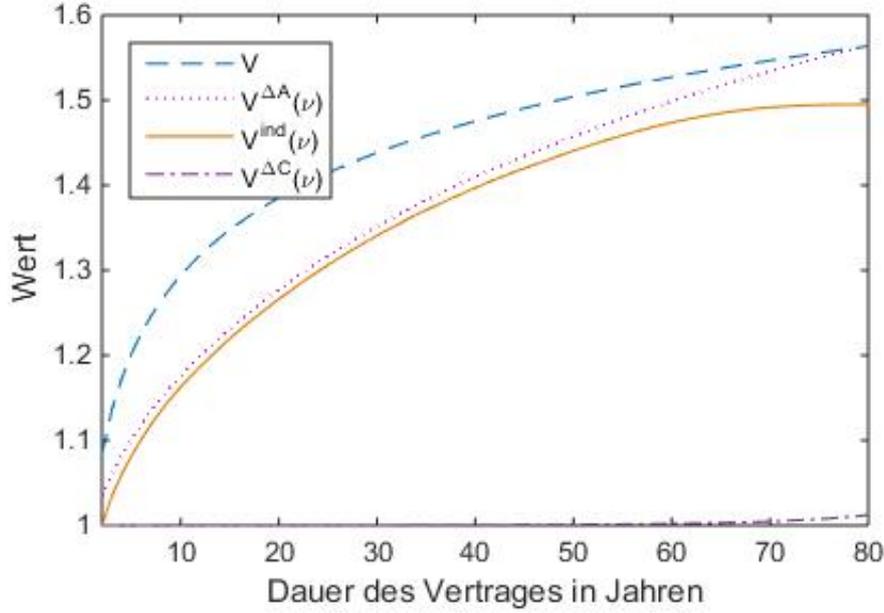


Bild 4.7: Werte  $V, V^{\Delta A}(\nu), V^{ind}(\nu)$  und  $V^{\Delta C}(\nu)$  beim Beispiel 3.c) mit  $G = 1$  und Parametern  $\mu = -0,02205$  und  $\sigma = 0,21$ , Formel 4.22.

$$\Delta C_t = \sum_{u=t+1}^T \frac{\nu_u}{1 - (\nu_0 + \dots + \nu_t)} \cdot \left( S_t \cdot \Phi \left( \frac{(T-u)\mu_u - \ln(G/S_t)}{(T-u)\sigma_u} + (T-u)\sigma_u \right) - G \cdot \Phi \left( \frac{(T-u)\mu_u - \ln(G/S_t)}{(T-u)\sigma_u} \right) - (S_t - G)^+ \right). \quad (4.22)$$

Das Bild (4.7) zeigt die Entwicklung des Lebensversicherungsvertrages unter Anwendung der letzten Formel (4.22). Da wir minimalen von maximalen Werten suchen, kann diese Strategie doch als bessere Strategie bezeichnet werden.

In diesem Fall wird der Wert der amerikanischen Option mit dem Wert der europäischen Option übereinstimmen, wie es auch im [15, S.24] und Lemma 1 schon gezeigt wurde.

Jetzt wird ausführlicher beschrieben wie eine amerikanische Option mit Snell-Einhüllenden zu berechnen ist.

#### Algorithmus zur Berechnung des Wertes einer amerikanischen Option mit Snell-Einhüllenden.

Laut Formel (2.6) ist  $U_N = Z_N$ . Mit  $c_t$  bezeichnen wir die Erwartungswerte von  $U_t$ , die zu berechnen sind.  $Z_t$  ist logarithmisch normalverteilt, also  $Z_t \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ . Es ist schon aus (4.15) bekannt, dass

$$\mathbb{E}[(Z_t - K)^+] = \Phi \left( \frac{\mu - \ln K}{\sigma} + \sigma \right) - K \cdot \Phi \left( \frac{\mu - \ln K}{\sigma} \right)$$

und

$$\mathbb{E}[Z_t \cdot \mathbf{1}_{\{Z_t > K\}}] = \Phi\left(\frac{\mu - \ln K}{\sigma} + \sigma\right).$$

Wir wollen mit einer Rekursion die  $c_t$  berechnen. Zunächst brauchen wir einen Startwert:

$$c_N = \mathbb{E}[U_N] = \mathbb{E}[Z_N] = 1.$$

Nun brauchen wir eine Rekursionsformel, mit der wir aus  $c_t$  das  $c_{t-1}$  berechnen können:

$$U_{t-1} = \max\{Z_{t-1}, \mathbb{E}[U_t]\} = \max\{Z_{t-1}, c_t\} = c_t + (Z_{t-1} - c_t)^+,$$

und

$$c_{t-1} = \mathbb{E}[U_{t-1}] = \mathbb{E}[c_t] + \mathbb{E}[(Z_{t-1} - c_t)^+] = c_t + \Phi\left(\frac{\mu - \ln c_t}{\sigma} + \sigma\right) - c_t \cdot \Phi\left(\frac{\mu - \ln c_t}{\sigma}\right).$$

Damit können wir von  $c_N = 1$  ausgehend, alle anderen  $c_t$  eines nach anderen berechnen.

Dann werden wir noch die Wahrscheinlichkeiten brauchen:

$$p_t := \mathbb{P}(Z_t < c_{t+1}) = \mathbb{P}(\exp(\sigma Z + \mu) < c_{t+1}) = \mathbb{P}(\sigma Z + \mu < \ln c_{t+1}) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{\ln c_{t+1} - \mu}{\sigma}\right),$$

schließlich wird

$$p_t := \Phi\left(\frac{\ln c_{t+1} - \mu}{\sigma}\right),$$

sowie die kumulierten Wahrscheinlichkeiten:

$$q_N := \mathbb{P}(\tau = N) = \mathbb{P}(Z_0 < c_1) \cdot \mathbb{P}(Z_1 < c_2) \cdots \mathbb{P}(Z_{N-1} < c_N) = p_0 \cdot p_1 \cdots p_{N-1},$$

wobei

$$q_0 := \mathbb{P}(\tau = 0) = \mathbb{P}(Z_0 < c_1) = 1 - p_0,$$

ansonsten

$$q_t := \mathbb{P}(\tau = t) = \mathbb{P}(Z_0 < c_1) \cdot \mathbb{P}(Z_1 < c_2) \cdots \mathbb{P}(Z_{t-1} < c_t) \cdot \mathbb{P}(Z_t \geq c_{t+1}) = p_0 \cdot p_1 \cdots p_{t-1} \cdot (1 - p_t).$$

Wir bezeichnen jetzt mit  $e_t$  die Erwartungswerte von  $Z_t$ .

Zum letzten Zeitpunkt  $\tau = N$  wissen wir, dass

$$e_N := \mathbb{E}[Z_t | \tau = N] = \mathbb{E}[Z_t] = 1,$$

ansonsten

$$e_t := \mathbb{E}[Z_t | \tau = t] = \frac{\mathbb{E}[Z_t \cdot \mathbf{1}_{Z_t \geq c_{t+1}}]}{\mathbb{P}(Z_t \geq c_{t+1})} = \frac{\Phi\left(\frac{\mu - \ln c_{t+1}}{\sigma} + \sigma\right)}{1 - p_t}.$$

Der Wert der Option ist dann:

$$\mathbb{E}[Z_\tau] = \sum_{t=0}^N \mathbb{E}[Z_t | \tau = t] \cdot \mathbb{P}(\tau = t) = \sum_{t=0}^N e_t \cdot q_t.$$

## 4.4 Schlussbemerkungen

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde die adaptierte Abhängigkeit bei der fondsgebundenen Lebensversicherung untersucht. Die Fondsentwicklung kann als stochastischer Prozess dargestellt werden. Da die logarithmische Normalverteilung nur positive Werte aufweist, wurde sie der Verteilung des Fonds zugrunde gelegt. Im ersten Beispiel wurden die Werte eines fondsgebundenen Lebensversicherungsvertrages berechnet und gezeigt, welche Auswirkung die adaptierte Abhängigkeit bei der Bewertung eines Lebensversicherungsvertrages hat. Sowie wurde dieses Modell mit anderen Berechnungsmöglichkeiten verglichen. Das zweite Beispiel wurde ausgehend vom Beispiel 1., nun mit Garantie betrachtet. Beim dritten Beispiel wurde die Stoppzeitproblematik mit verschiedenen Strategien untersucht und gezeigt, dass die letzte Strategie durch einen kleinen Unterschied die bessere wird. In diesem Fall wird der Wert einer europäischen Kaufoption mit dem Wert einer entsprechenden amerikanischen Kaufoption gleich sein.

Dadurch, dass die fondsgebundenen Lebensversicherungsverträge ein Teil des Bestandes eines Versicherungsunternehmens bilden, können diese Berechnungen bei der Bewertung der fondsgebundenen Lebensversicherungsverträge und Modellierung des Worst-Case-Szenarios für das Versicherungsunternehmen von Bedeutung sein.



# Anhang A

## MATLAB-Code

### A.1 Beispiel 1

Listing A.1: Berechnungen beim Beispiel 1.

```
clearvars;

sigma=0.21;
mju=-(sigma^2)/2;
T=80;
x=20;
gewichte = zeros(1, T+1);

for T = 2:80
    %Einlesen v. q (Rententafel AVÖ2005R, 1 Spalte)
    sterbe = dlmread('SterbewsMann.txt');
    % sterbe = dlmread('SterbewsFrau.txt');

    %Berechnung der Überlebenswahrscheinlichkeiten
    for i=1:121
        leben(i) = 1-sterbe(i);
    end

    %Vektor der multiplizierten Überlebenswahrscheinlichkeiten
    lebenmult(1)=leben(1);
    for i=2:121
        lebenmult(i)=lebenmult(i-1)*leben(i);
    end
end
```

```

%Berechnung von nu
nu(1)=0;
for i=2:T-1
    nu(i)=(lebenmult(x+i-1)/lebenmult(x))*sterbe(x+i);
end
nu(T)=lebenmult(x+T-1)/lebenmult(x);

%Berechnung eines kumulierten Vektors der nu
nu_kum(1) = nu(1);
for i=2:T
    nu_kum(i)=nu_kum(i-1)+nu(i);
end

%Berechnung der Gewichte für den Expected Shortfall
gewichte(1)=nu(1);
for i=2:T
    gewichte(i)=1-(nu(i)/(1-nu_kum(i-1)));
end

%Berechnung v. Quantil
for i=1:T
    quantil(i)=exp(mju+norminv(gewichte(i))*sigma);
end

%Berechnung P
for i=1:T
    P(i)=sigma-norminv(gewichte(i));
end

%Berechnung des Expected Shortfalls mit quantilen
for i=1:T
    es(i)=normcdf(P(i))/(1-gewichte(i));
end

%Berechnung des Wertes V(nu)
B_0(T) = es*nu';

%Berechnungen fuer V^(ind)
for i=1:T

```

```

        erwartungswerte(i)=exp(mju+(sigma^2)/2);
    end

    %Berechnung von V_ind
    for i=1:T
        V_ind(i)=1*erwartungswerte(i);
    end

        for i=1:T
            sumV_ind(i)=V_ind(i);
        end
end

% Berechnung v. amerik.Option mit Snell-Einhuellenden
for T = 80 : -1 : 2
    c(T)=1;
    e(T)=1;
    for i=T-1:-1:1
        c(i)=c(i+1)+normcdf((mju-log(c(i+1)))/sigma+sigma)
        -c(i+1)*normcdf((mju-log(c(i+1)))/sigma);
        p(i)=normcdf((log(c(i+1))-mju)/sigma);
        e(i)= normcdf((mju-log(c(i+1)))/sigma+sigma)/(1-p(i));
    end

    p_a(1) = p(1);
    for i = 2 : T-1
        p_a(i) = p_a(i-1)*p(i);
    end
    q(T) = p_a(T-1);
    q(1) = 1-p(1);
    for i = 2 : T-1
        q(i) = p_a(i-1)*(1-p(i));
    end

    for i = 1:T
        sumt = 0;
        for j = 1 : i
            sumt = sumt + e(j)*q(j);
        end
        asum(T) = sum(sumt);
    end
end

```

```

    end
    asum;
end

plot(10:80,asum(10:80),10:80,B_0(10:80),10:80,sumV_ind(10:80))

xlabel('Dauer des Vertrages ');
ylabel('Wert ');
legend('V', 'V(\nu)', 'V^{ind}(\nu)', 'Location', 'NorthWest');

```

## A.2 Beispiel 2

Listing A.2: Berechnungen beim Beispiel 2.

```

clearvars;

sigma=0.21;
mju=-(sigma^2)/2;
T=80;
x=20;
g=1; %0.5
rng(2);
gewichte = zeros(1, T+1);
for T = 2:80
    %Einlesen v. q (Rententafel AVÖ2005R, 1 Spalte)
    sterbe = dlmread('SterbewMann.txt');
    % sterbe = dlmread('SterbewFrau.txt');

    %Berechnung der Überlebenswahrscheinlichkeiten
    for i=1:121
        leben(i) = 1-sterbe(i);
    end

    %Vektor der multiplizierten Überlebenswahrscheinlichkeiten
    lebenmult(1)=leben(1);
    for i=2:121
        lebenmult(i)=lebenmult(i-1)*leben(i);
    end

    %Berechnung von nu
    nu(1)=0.0008;

```

```

for i=2:T-1
    nu(i)=(lebenmult(x+i-1)/lebenmult(x))*sterbe(x+i);
end
nu(T)=lebenmult(x+T-1)/lebenmult(x);

%Berechnung eines kumulierten Vektors der nu
%nu_kum(1) = 0;
nu_kum(1) = nu(1);
for i=2:T
    nu_kum(i)=nu_kum(i-1)+nu(i);
end

%Berechnung der Gewichte für den Expected Shortfall
gewichte(1)=nu(1);
%gewichte(1)=1;
for i=2:T
    gewichte(i)=1-(nu(i)/(1-nu_kum(i-1)));
end

%Berechnung v. Quantil
for i=1:T
    if normcdf((log(g)-mju)/sigma)<gewichte(i)
        quantil(i)=exp(mju+norminv(gewichte(i))*sigma);
    else quantil(i)=g;
    end
end

%Berechnung P
for i=1:T
    P(i)=sigma-norminv(gewichte(i));
end

%Berechnung R
for i=1:T
    R(i)=(mju+sigma^2-log(g))/sigma;
end

%Berechnung des Expected Shortfalls mit quantilen
for i=1:T
    if quantil(i)>g

```

```

        es(i)=normcdf(P(i))/(1-gewichte(i));
    else
        es(i)=(1*normcdf((log(g)-mju)/sigma)+
        normcdf(R(i)))/(1-gewichte(i));
    end
end

for i=1:T
    B_1(i)=es(i)*nu(i);
end
sumB_1(1)=B_1(1);

for i=2:T
    sumB_1(i)=sumB_1(i-1)+B_1(i);
end

B_0(T) = sumB_1(T);

% Berechnungen fuer V(ind)
for i=1:T
    erwartungswerte(i)=exp(mju+sigma^2/2)*
    normcdf((log(g)-mju)/sigma)+
    normcdf((mju+sigma^2-log(g))/sigma);
end
V_ind(T)=nu*erwartungswerte';
end

%Berechnung v. V (mit Snell-Einhuellenden)
for T = 80 : -1 : 2
    c(T)=1;
    e(T)=1;
    for i=T-1:-1:1
        c(i)=c(i+1)+normcdf((mju-log(c(i+1)))/sigma+sigma)-
        c(i+1)*normcdf((mju-log(c(i+1)))/sigma);
        p(i)=normcdf((log(c(i+1))-mju)/sigma);
        e(i)= normcdf((mju-log(c(i+1)))/sigma+sigma)/(1-p(i));
    end

    p_a(1) = p(1);
    for i = 2 : T-1
        p_a(i) = p_a(i-1)*p(i);
    end
end

```

```

end
q(T) = p_a(T-1);
q(1) = 1-p(1);
for i = 2 : T-1
    q(i) = p_a(i-1)*(1-p(i));
end

for i = 1:T
    sumt = 0;
    for j = 1 : i
        sumt = sumt + e(j)*q(j);
    end
    asum(T) = sum(sumt);
end
asum;
end

plot(10:80,asum(10:80),10:80,B_0(10:80),10:80,V_ind(10:80))

xlabel('Dauer des Vertrages in Jahren');
ylabel('Wert');
legend('V', 'V(\nu)', 'V^{ind}(\nu)', 'Location', 'NorthWest');

```

## A.3 Beispiel 3

Listing A.3: Berechnungen beim Beispiel 3.

```

%Berechnungen beim Beispiel 3.a)
clearvars;
sigma=0.21;
mju=-((sigma ^ 2)/2);
x=20;
u=1;
g=1%0.5
rng(2);
sim=10000;
T=80;
S=zeros(T,sim);
%profile on;

% %Einlesen der Sterbewahrscheinlichkeiten (aus Rententafel 2005)

```

```

sterbe = dlmread('SterbewMann.txt');
%%Berechnung der Ueberlebenswahrscheinlichkeiten
for i=1:121
    leben(i) = 1-u*sterbe(i);
end
%Vektor der multiplizierten Ueberlebenswahrscheinlichkeiten
lebenmult(1)=leben(1);
for i=2:121
    lebenmult(i)=lebenmult(i-1)*leben(i);
end
%Berechnung von nu
nu=0.0008;
for i=2:T-1
    nu(i)=(lebenmult(x+i-1)/lebenmult(x))*(u*sterbe(x+i));
end
nu(T)=lebenmult(x+T-1)/lebenmult(x);
%Test ob Summe=1
% sum(nu)
%Berechnung eines kumulierten Vektors der nus
nu_kum(1) = nu(1);
for i=2:T
    nu_kum(i)=nu_kum(i-1)+nu(i);
end

%Erzeugung v. Zufallszahlen u. Produktbildung
for j=1:sim
    X=lognrnd(mju, sigma, T, 1);
    S(1, j)=X(1);
    for i=2:T
        S(i, j)=S(i-1, j)*X(i);
    end
end
S(1, 1)=1;
%Fkt. f. grossPhi
Phi1(1, 1)=((mju-log(g))/(sigma))+(sigma);
Phi2(1, 1)=(mju-log(g))/(sigma);

for j=1:sim
    for i=2:T
        Phi1(i, j)=((mju-log(g/(S(i-1, j))))/(sigma))+(sigma);
    end
end

```

```

        Phi2(i , j)=(mju-log (g/(S(i -1,j))))/( sigma );
    end
end

%Berechnung v. Delta A
dA(1,1)=0;
A(1,1)=1;
nju(1) = 1;
for i=2:T+1
    nju(i)=round(nu(i-1)*sim);
end

normPhi1 = normcdf(Phi1);
normPhi2 = normcdf(Phi2);
for j=1:sim
    for i=2:T
        dA(i , j)=S(i -1,j)*normPhi1(i , j)-g*normPhi2(i , j)-max(S(i -1,j)-g , 0);
    end
end

for i = 2 : 80 % beginnen ab dem 1. Jahr (das 0 Jahr ist 0)
    nu_links = sum(nju(1:i-1));% nu-Aufteilung linke Grenze
    nu_rechts = sum(nju(1:i))-1;% nu-Aufteilung rechte Grenze
    tempdA = dA(i , nu_links:size(dA,2)) ;% Zwischenspeichern der i-ten
    %Reihe von nu_links bis Ende; size(dA,2) = Anzahl der Spalten in dA
    [tempdA, I] = sort(tempdA, 'ascend');% Sortierung aufsteigend;
    % tempdA - sortierte Folge, I - Indizen der Elemente in tempdA vor
    %Sortierung
    for sortindex = 1 : numel(tempdA) % von 1 bis Anzahl der Elemente in
        %tempdA
            dA(nu_links+sortindex-1) = dA(nu_links + I(sortindex)); %
            %(nu_links+i)-te Spalte vertauschen mit der (nu_links+sortIndex)-en
        end
        mindA(i) = mean(tempdA);% Mittelwert von i-tem nu-Intervall
        A(i) = A(i-1) + mindA(i);%Aufbau der Summe aller \Delta A
    end
end
A;
%-----
        %Berechnung  $V^{\text{ind}}(\nu)$ 
sumInd(1)=1;

```

```

for i=1:T
    Vimw(i)=mean(dA(i,:));
    sumInd(i+1)= sumInd(i)+Vimw(i);
end

%-----
%Berechnung v. V (mit Snell-Einhuellenden)
sigma=0.21;
mju=-((sigma ^ 2)/2);

for T = 80 : -1 : 2
    c(T)=1;
    e(T)=1;
    for i=T-1:-1:1
        c(i)=c(i+1)+normcdf((mju-log(c(i+1)))/sigma+sigma)-
            c(i+1)*normcdf((mju-log(c(i+1)))/sigma);
        p(i)=normcdf((log(c(i+1))-mju)/sigma);
        e(i)= normcdf((mju-log(c(i+1)))/sigma+sigma)/(1-p(i));
    end
    p_a(1) = p(1);
    for i = 2 : T-1
        p_a(i) = p_a(i-1)*p(i);
    end
    q(T) = p_a(T-1);
    q(1) = 1-p(1);
    for i = 2 : T-1
        q(i) = p_a(i-1)*(1-p(i));
    end
    for i = 1:T
        sumt = 0;
        for j = 1 : i
            sumt = sumt + e(j)*q(j);
        end
        asum(T) = sum(sumt);
    end
    asum;
end
plot(2:80,asum(2:80),2:80,A(2:80),2:80,sumInd(2:80))
xlabel('Dauer des Vertrages in Jahren');

```

```

ylabel('Wert')
legend('V', 'V^{\Delta A}(\nu)', 'V^{ind}(\nu)', 'Location', 'NorthWest');

%profile viewer;
%profile off;

```

Listing A.4: Berechnungen beim Beispiel 3.(unterjährige Zahlungen)

```

%Berechnungen beim Beispiel 3.a) unterjährige Zahlungen
%clearvars;
sigmas = [0.21, 0.21/(sqrt(2)), 0.21/(sqrt(4)), 0.21/(sqrt(12))];
x=20;
%u=1;%1/2; 1/4; 1/12;
us = [1, 0.5, 0.25, 1/12];

for alpha = 1:size(sigmas,2);
    sigma = sigmas(alpha);
    mju=-((sigma^2)/2);
    u = us(alpha);
    g=1;
    rng(2);
    sim=10000;
    T=80;
    S=zeros(T,sim);
    profile on;

    %%Einlesen der Sterbewahrscheinlichkeiten (aus Rententafel 2005)
    sterbe = dlmread('SterbewMann.txt');
    %%Berechnung der Ueberlebenswahrscheinlichkeiten
    for i=1:121
        leben(i) = 1-u*sterbe(i);
    end
    %Vektor der multiplizierten Ueberlebenswahrscheinlichkeiten
    lebenmult(1)=leben(1);
    for i=2:121
        lebenmult(i)=lebenmult(i-1)*leben(i);
    end
    %Berechnung von nu
    nu=0.0008;
    for i=2:T-1
        nu(i)=(lebenmult(x+i-1)/lebenmult(x))*(u*sterbe(x+i));
    end

```

```

end
nu(T)=lebenmult(x+T-1)/lebenmult(x);
%Test ob Summe=1
% sum(nu)
%Berechnung eines kumulierten Vektors der nus
nu_kum(1) = nu(1);
for i=2:T
    nu_kum(i)=nu_kum(i-1)+nu(i);
end

%Erzeugung v. Zufallszahlen u. Produktbildung
for j=1:sim
    X=lognrnd(mju, sigma, T, 1);
    S(1, j)=X(1);
    for i=2:T
        S(i, j)=S(i-1, j)*X(i);
    end
end

%Fkt. f. grossPhi
Phi1(1,1)=((mju-log(g/(S(1,1))))/(sigma))+(sigma);
Phi2(1,1)=(mju-log(g/(S(1,1))))/(sigma);

for j=1:sim
    for i=2:T
        Phi1(i, j)=((mju-log(g/(S(i-1, j))))/(sigma))+(sigma);
        Phi2(i, j)=(mju-log(g/(S(i-1, j))))/(sigma);
    end
end

%Berechnung v. Delta A
S(1,1)=1;
dA(1,1)=0;
A(1, alpha)=1;
nju(1) = 1;
for i=2:T+1
    nju(i)=round(nu(i-1)*sim);
end

normPhi1 = normcdf(Phi1);

```

```

normPhi2 = normcdf(Phi2);
for j=1:sim
    for i=2:T
        dA(i,j)=S(i-1,j)*normPhi1(i,j)-g*normPhi2(i,j)
            -max((S(i-1,j)-g),0);
    end
end

for i = 2 : 80
    nu_links = sum(nju(1:i-1));% nu-Aufteilung linke Grenze
    nu_rechts = sum(nju(1:i))-1;% nu-Aufteilung rechte Grenze
    tempdA = dA(i,nu_links:size(dA,2)) ;% Zwischenspeichern der
    %i-ten Reihe von nu_links bis Ende; size(dA,2) = Anzahl der
    %Spalten in dA
    [tempdA, I] = sort(tempdA,'ascend');% Sortierung aufsteigend;
    % tempdA - sortierte Folge, I - Indizen der Elemente in tempdA
    %vor Sortierung
    for sortindex = 1 : numel(tempdA) % von 1 bis Anzahl der Elemente
        %in tempdA
        dA(nu_links+sortindex-1) = dA(nu_links + I(sortindex));
    %
        %(nu_links+i)-te Spalte vertauschen mit der
        %(nu_links+sortIndex)-en
    end
    mindA(i) = mean(tempdA);% Mittelwert von i-tem nu-Intervall
    A(i, alpha) = A(i-1,alpha) + mindA(i);%Aufbau der Summe aller
    %\Delta A
end
end

%-----
%Berechnung v. V (mit Snell-Einhuellenden)
sigma=0.21;
mju=-((sigma^2)/2);

for T = 80 : -1 : 2
    c(T)=1;
    e(T)=1;
    for i=T-1:-1:1
        c(i)=c(i+1)+normcdf((mju-log(c(i+1)))/sigma+sigma)-

```

```

    c(i+1)*normcdf((mju-log(c(i+1)))/sigma);
    p(i)=normcdf((log(c(i+1))-mju)/sigma);
    e(i)= normcdf((mju-log(c(i+1)))/sigma+sigma)/(1-p(i));
end
p_a(1) = p(1);
for i = 2 : T-1
    p_a(i) = p_a(i-1)*p(i);
end
q(T) = p_a(T-1);
q(1) = 1-p(1);
for i = 2 : T-1
    q(i) = p_a(i-1)*(1-p(i));
end
for i = 1:T
    sumt = 0;
    for j = 1 : i
        sumt = sumt + e(j)*q(j);
    end
    asum(T) = sum(sumt);
end
asum;
end

plot(2:80,asum(2:80),2:80,A(2:80,1), 2:80,A(2:80,2), 2:80,A(2:80,3),
2:80,A(2:80,4))
xlabel('Dauer des Vertrages in Jahren');
ylabel('Wert')
legend('V', 'V^{\Delta\{A\}}(\nu)-j.', 'V^{\Delta\{A\}}(\nu)-halbj.',
'V^{\Delta\{A\}}(\nu)-viertelj.', 'V^{\Delta\{A\}}(\nu)-monatl.', 'Location',
'NorthWest');

profile viewer;
profile off;

```

Listing A.5: Berechnungen beim Beispiel 3.(c)

```

%Berechnungen beim Beispiel 3.c)
clearvars;
sigma=0.21;
mju=-((sigma^2)/2);
x=20;

```

```

u=1;
g=1;
rng(2);
sim=10000;
T=80;
S=zeros(T,sim);

%Erzeugung v. Zufallszahlen u. Produktbildung
for j=1:sim
    X=lognrnd(mju,sigma,T,1);
    S(1,j)=X(1);
    for i=2:T
        S(i,j)=S(i-1,j)*X(i);
    end
end
S(1,1)=1;
%Fkt. f. grossPhi
Phi1(1,1)=((mju-log(g))/(sigma))+(sigma);
Phi2(1,1)=(mju-log(g))/(sigma);

for j=1:sim
    for i=2:T
        Phi1(i,j)=((mju-log(g/(S(i-1,j)))))/(sigma))+(sigma);
        Phi2(i,j)=(mju-log(g/(S(i-1,j))))/(sigma);
    end
end

%Berechnung v. Delta A
dA(1,1)=0;
A(1,1)=1;
C(1,1)=1;

normPhi1 = normcdf(Phi1);
normPhi2 = normcdf(Phi2);
for j=1:sim
    for i=2:T
        dA(i,j)=S(i-1,j)*normPhi1(i,j)-g*normPhi2(i,j)-max(S(i-1,j)-g,0);
    end
end
sumInd(1)=1;

```

```

for T = 2 : 80 % beginnen ab dem 1. Jahr (das 0 Jahr ist 0)
    %Einlesen v. q (Rententafel AVÖ2005R, 1 Spalte)
    sterbe = dlmread('SterbeweMann.txt');
    % sterbe = dlmread('SterbeweFrau.txt');

    %Berechnung der Überlebenswahrscheinlichkeiten
    for i=1:121
        leben(i) = 1-u*sterbe(i);
    end

    %Vektor der multiplizierten Überlebenswahrscheinlichkeiten
    lebenmult(1)=leben(1);
    for i=2:121
        lebenmult(i)=lebenmult(i-1)*leben(i);
    end

    %Berechnung von nu
    nu(1)=0.0008;
    for i=2:T-1
        nu(i)=(lebenmult(x+i-1)/lebenmult(x))*(u*sterbe(x+i));
    end
    nu(T)=lebenmult(x+T-1)/lebenmult(x);

    %Berechnung eines kumulierten Vektors der nu
    %nu_kum(1) = 0;
    nu_kum(1) = nu(1);
    for i=2:T
        nu_kum(i)=nu_kum(i-1)+nu(i);
    end

    %Berechnung der Gewichte für Teil c)
    gewichteC(1)=nu(1);
    for i=2:T
        gewichteC(i)=(nu(i)/(1-nu_kum(i-1)));
    end

    nju(1) = 1;
    for i=2:T
        nju(i)=round(nu(i-1)*sim); %runden
    end

```

```

    nu_links = sum(nju(1:T-1));% nu-Aufteilung linke Grenze
    nu_rechts = sum(nju(1:T))-1;% nu-Aufteilung rechte Grenze
    tempdA = dA(T, nu_links:size(dA,2)) ;% Zwischenspeichern der i-ten Reihe von
    [tempdA, I] = sort(tempdA, 'ascend');% Sortierung aufsteigend;
    % tempdA - sortierte Folge, I - Indizen der Elemente in tempdA vor Sortierung
    for sortindex = 1 : numel(tempdA) % von 1 bis Anzahl der Elemente in tempdA
        dA(nu_links+sortindex-1) = dA(nu_links + I(sortindex));
    % (nu_links+i)-te Spalte vertauschen mit der (nu_links+sortIndex)-en
    end
    %tempdA = dA(T, nu_links:nu_rechts);
    tempdA = dA(T, nu_rechts:size(dA,2));
    mindA(T) = mean(tempdA);% Mittelwert von i-tem nu-Intervall
    A(T) = A(T-1) + mindA(T);% Aufbau der Summe aller \Delta A

    %gewichteC(i)=nu(i)/(1-nu_kum(i-1));
    mindC(T)= mindA(T)*gewichteC(T-1);
    C(T)=C(T-1)+mindC(T);

    %Berechnung v.  $V^{\{ind\}}(\backslash nu)$ 
    Vimw(T-1)=nu(T)*mean(dA(T-1, :));
    sumInd(T)= sumInd(T-1)+Vimw(T-1);
end
A;

%-----
%Berechnung v. V (mit Snell-Einhuellenden)
sigma=0.21;
mju=-((sigma^2)/2);

for T = 80 : -1 : 2
    c(T)=1;
    e(T)=1;
    for i=T-1:-1:1
        c(i)=c(i+1)+normcdf((mju-log(c(i+1)))/sigma+sigma)-c(i+1)*normcdf((mju-1
        p(i)=normcdf((log(c(i+1))-mju)/sigma);
        e(i)= normcdf((mju-log(c(i+1)))/sigma+sigma)/(1-p(i));
    end
    p_a(1) = p(1);
    for i = 2 : T-1

```

```

    p_a(i) = p_a(i-1)*p(i);
end
q(T) = p_a(T-1);
q(1) = 1-p(1);
for i = 2 : T-1
    q(i) = p_a(i-1)*(1-p(i));
end
for i = 1:T
    sumt = 0;
    for j = 1 : i
        sumt = sumt + e(j)*q(j);
    end
    asum(T) = sum(sumt);
end
asum;
end
plot(2:80,asum(2:80),2:80,A(2:80),2:80,sumInd(2:80),2:80,C(2:80))
%plot(2:80,asum(2:80),2:80,sumInd(2:80),2:80,C(2:80))
xlabel('Dauer des Vertrages in Jahren');
ylabel('Wert')
legend('V', 'V^{\Delta{A}}(\nu)', 'V^{ind}(\nu)', 'V^{\Delta{C}}(\nu)', 'Location', '
%legend('V', 'V^{\Delta{A}}(\nu)', 'V^{ind}(\nu)', 'V^{\Delta{C}}(\nu)', 'Location',

```

# Anhang B

## Rententafel

### B.1 Rententafel AVÖ 2005R

<b>Rententafel AVÖ 2005R</b>						
Endresultat, präsentiert am 12. 5. 2005 bei der Generalversammlung der AVÖ						
Alter	q(2001)Einzel(x)	q(2001)Gruppe(x)	Anfangstrend M	q(2001)Einzel(y)	q(2001)Gruppe(y)	Anfangstrend F
0	0,004274	0,004274	0,050000	0,003009	0,003009	0,050000
1	0,000276	0,000276	0,050000	0,000261	0,000261	0,050000
2	0,000211	0,000211	0,050000	0,000169	0,000169	0,050000
3	0,000159	0,000159	0,050000	0,000105	0,000105	0,050000
4	0,000121	0,000121	0,050000	0,000080	0,000080	0,050000
5	0,000104	0,000104	0,050000	0,000069	0,000069	0,050000
6	0,000098	0,000098	0,050000	0,000068	0,000068	0,050000
7	0,000094	0,000094	0,050000	0,000072	0,000072	0,048882
8	0,000088	0,000088	0,050000	0,000074	0,000074	0,044497
9	0,000089	0,000089	0,050000	0,000075	0,000075	0,041288
10	0,000091	0,000091	0,050000	0,000077	0,000077	0,039286
11	0,000090	0,000090	0,050000	0,000081	0,000081	0,037361
12	0,000092	0,000092	0,048545	0,000088	0,000088	0,035613
13	0,000114	0,000114	0,047108	0,000103	0,000103	0,034461
14	0,000177	0,000177	0,045472	0,000134	0,000134	0,033771
15	0,000294	0,000294	0,043282	0,000167	0,000167	0,033161
16	0,000450	0,000450	0,040634	0,000199	0,000199	0,032437
17	0,000620	0,000620	0,037323	0,000239	0,000239	0,031242
18	0,000758	0,000758	0,034190	0,000268	0,000268	0,031178
19	0,000817	0,000817	0,031815	0,000270	0,000270	0,031115
20	0,000821	0,000821	0,030207	0,000259	0,000259	0,031052
21	0,000819	0,000819	0,030157	0,000247	0,000247	0,030988
22	0,000813	0,000813	0,030107	0,000238	0,000238	0,030925
23	0,000805	0,000805	0,030058	0,000226	0,000226	0,030862
24	0,000800	0,000800	0,030008	0,000216	0,000216	0,030799
25	0,000798	0,000798	0,029958	0,000216	0,000216	0,030735
26	0,000788	0,000788	0,029909	0,000224	0,000224	0,030672
27	0,000770	0,000770	0,029859	0,000232	0,000232	0,030609
28	0,000743	0,000743	0,029809	0,000240	0,000240	0,030545
29	0,000717	0,000717	0,029760	0,000247	0,000247	0,030482
30	0,000703	0,000703	0,029710	0,000258	0,000258	0,030419
31	0,000712	0,000712	0,029661	0,000282	0,000282	0,030356
32	0,000747	0,000747	0,029611	0,000317	0,000317	0,030292
33	0,000793	0,000793	0,029561	0,000361	0,000361	0,030229
34	0,000842	0,000842	0,029512	0,000400	0,000400	0,030166
35	0,000893	0,000893	0,029462	0,000432	0,000432	0,030102
36	0,000958	0,000958	0,029412	0,000468	0,000468	0,030039
37	0,001053	0,001053	0,029363	0,000523	0,000523	0,029976
38	0,001176	0,001176	0,029313	0,000593	0,000593	0,029913
39	0,001318	0,001318	0,029263	0,000673	0,000673	0,029849
40	0,001472	0,001472	0,029214	0,000760	0,000760	0,029786
41	0,001601	0,001611	0,029164	0,000837	0,000842	0,029723
42	0,001725	0,001748	0,029114	0,000914	0,000923	0,029660
43	0,001852	0,001889	0,029065	0,000991	0,001007	0,029596
44	0,001991	0,002044	0,029015	0,001069	0,001093	0,029533
45	0,002146	0,002220	0,028966	0,001154	0,001186	0,029470
46	0,002321	0,002419	0,028916	0,001255	0,001297	0,029406
47	0,002512	0,002638	0,028866	0,001368	0,001424	0,029343
48	0,002724	0,002883	0,028817	0,001487	0,001557	0,029280
49	0,002961	0,003160	0,028767	0,001606	0,001693	0,029217
50	0,003221	0,003466	0,028717	0,001732	0,001838	0,029153
51	0,003495	0,003795	0,028668	0,001860	0,001987	0,029090
52	0,003769	0,004130	0,028618	0,001985	0,002136	0,029027
53	0,004034	0,004463	0,028568	0,002101	0,002278	0,028963
54	0,004285	0,004787	0,028519	0,002209	0,002414	0,028900
55	0,004521	0,005103	0,028469	0,002313	0,002547	0,028837
56	0,004747	0,005415	0,028420	0,002415	0,002680	0,028774
57	0,004967	0,005730	0,028370	0,002511	0,002811	0,028710
58	0,005187	0,006053	0,028320	0,002605	0,002941	0,028647
59	0,005416	0,006397	0,028271	0,002707	0,003084	0,028584
60	0,005669	0,006780	0,028221	0,002828	0,003253	0,028520

Bild B.1: Österreichische Rententafel

61	0,006140	0,007342	0,028171	0,003045	0,003501	0,028457
62	0,006700	0,008008	0,028122	0,003305	0,003798	0,028394
63	0,007367	0,008796	0,028072	0,003621	0,004159	0,028393
64	0,008146	0,009713	0,028022	0,004000	0,004589	0,028467
65	0,009033	0,010751	0,027973	0,004446	0,005094	0,028620
66	0,010028	0,011910	0,027923	0,004973	0,005689	0,028703
67	0,011137	0,013194	0,027873	0,005588	0,006381	0,028796
68	0,012373	0,014616	0,027824	0,006296	0,007173	0,028932
69	0,013747	0,016187	0,027774	0,007106	0,008078	0,029221
70	0,015275	0,017923	0,027725	0,008044	0,009121	0,029532
71	0,016979	0,019847	0,027675	0,009134	0,010326	0,029886
72	0,018887	0,021989	0,027625	0,010407	0,011730	0,030159
73	0,021041	0,024391	0,027576	0,011898	0,013367	0,030375
74	0,023487	0,027103	0,027540	0,013649	0,015282	0,030464
75	0,026281	0,030183	0,027540	0,015704	0,017519	0,030464
76	0,029487	0,033696	0,027540	0,018107	0,020124	0,030464
77	0,033173	0,037714	0,027540	0,020910	0,023149	0,030464
78	0,037423	0,042322	0,027526	0,024176	0,026657	0,030464
79	0,042336	0,047619	0,027250	0,027979	0,030723	0,030400
80	0,048029	0,053724	0,026806	0,032405	0,035431	0,030202
81	0,054635	0,060770	0,026236	0,037550	0,040879	0,029852
82	0,062310	0,068913	0,025545	0,043530	0,047180	0,029434
83	0,070771	0,077821	0,024823	0,050479	0,054468	0,028869
84	0,079759	0,087195	0,023997	0,058554	0,062896	0,028123
85	0,089559	0,097339	0,023033	0,067933	0,072639	0,027259
86	0,100315	0,108394	0,021936	0,078826	0,083901	0,026253
87	0,112297	0,120634	0,020782	0,090922	0,096330	0,025103
88	0,125780	0,134331	0,019608	0,104258	0,109952	0,023796
89	0,141175	0,149900	0,018474	0,119350	0,125288	0,022388
90	0,158740	0,167580	0,017422	0,136380	0,142509	0,020962
91	0,178703	0,187576	0,016402	0,155445	0,161689	0,019548
92	0,200998	0,209784	0,015464	0,176711	0,182974	0,018165
93	0,225437	0,233973	0,014490	0,200275	0,206437	0,016861
94	0,251801	0,259888	0,013443	0,226048	0,231961	0,015667
95	0,279916	0,287327	0,012229	0,253764	0,259249	0,014596
96	0,309689	0,316177	0,010891	0,283071	0,287923	0,013472
97	0,341090	0,346390	0,009502	0,313971	0,317970	0,012297
98	0,374103	0,377934	0,008327	0,346524	0,349439	0,011139
99	0,408723	0,410791	0,007312	0,380731	0,382317	0,010014
100	0,444942	0,444942	0,006365	0,416560	0,416560	0,008950
101	0,471086	0,471086	0,005540	0,443852	0,443852	0,007999
102	0,497257	0,497257	0,004822	0,471177	0,471177	0,007149
103	0,523434	0,523434	0,004198	0,498504	0,498504	0,006390
104	0,549612	0,549612	0,003654	0,525830	0,525830	0,005711
105	0,575790	0,575790	0,003180	0,553159	0,553159	0,005104
106	0,601969	0,601969	0,002768	0,580489	0,580489	0,004562
107	0,628148	0,628148	0,002410	0,607819	0,607819	0,004077
108	0,654329	0,654329	0,002097	0,635150	0,635150	0,003644
109	0,680513	0,680513	0,001826	0,662480	0,662480	0,003257
110	0,706699	0,706699	0,001589	0,689810	0,689810	0,002911
111	0,732889	0,732889	0,001383	0,717139	0,717139	0,002601
112	0,759082	0,759082	0,001204	0,744468	0,744468	0,002325
113	0,787559	0,787559	0,001048	0,777845	0,777845	0,002078
114	0,810683	0,810683	0,000912	0,803081	0,803081	0,001857
115	0,832543	0,832543	0,000794	0,826926	0,826926	0,001660
116	0,853040	0,853040	0,000691	0,849248	0,849248	0,001484
117	0,872094	0,872094	0,000602	0,869938	0,869938	0,001326
118	0,889648	0,889648	0,000524	0,888919	0,888919	0,001185
119	0,905666	0,905666	0,000456	0,906141	0,906141	0,001059
120	0,920139	0,920139	0,000397	0,921588	0,921588	0,000947

Bild B.2: Österreichische Rententafel



# Abbildungsverzeichnis

4.1	Werte $V$ , $V(\nu)$ und $V^{ind}(\nu)$ bei einem fondsgebundenem Vertrag für einen 20-jährigen Mann bei verschiedenen Laufzeiten, mit Parametern $\mu = -0,02205$ und $\sigma = 0,21$ , beim Beispiel 1. . . . .	45
4.2	Werte $V$ , $V(\nu)$ und $V^{ind}(\nu)$ bei einem fondsgebundenem Vertrag mit Garantie ( $G = 0.5$ ) für einen 20-jährigen Mann bei verschiedenen Laufzeiten, mit Parametern $\mu = -0,02205$ und $\sigma = 0,21$ , beim Beispiel 2. . . . .	47
4.3	Werte $V$ , $V(\nu)$ und $V^{ind}(\nu)$ bei einem fondsgebundenem Vertrag mit Garantie ( $G = 1$ ) für einen 20-jährigen Mann bei verschiedenen Laufzeiten, mit Parametern $\mu = -0,02205$ und $\sigma = 0,21$ , beim Beispiel 2. . . . .	48
4.4	Werte $V^{\Delta A}(\nu)$ und $V$ im Beispiel 3.a) mit $G = 0,5$ und Parametern $\mu = -0,02205$ und $\sigma = 0,21$ . . . . .	51
4.5	Beispiel 3 a). Werte $V^{\Delta A}(\nu)$ und $V$ , mit $G = 1$ und Parametern $\mu = -0,02205$ und $\sigma = 0,21$ . . . . .	52
4.6	Werte $V^{\Delta A}(\nu)$ mit $G = 1$ bei verschiedenen Zahlungsweisen, mit Parametern $\mu = -0,02205$ und $\sigma = 0,21$ , Beispiel 3 a). . . . .	52
4.7	Werte $V$ , $V^{\Delta A}(\nu)$ , $V^{ind}(\nu)$ und $V^{\Delta C}(\nu)$ beim Beispiel 3.c) mit $G = 1$ und Parametern $\mu = -0,02205$ und $\sigma = 0,21$ , Formel 4.22. . . . .	55
B.1	Österreichische Rententafel . . . . .	79
B.2	Österreichische Rententafel . . . . .	80



# Literaturverzeichnis

- [1] Wikipedia abgerufen am 21.10.2014, [http://en.wikipedia.org/wiki/Doob Decomposition Theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Doob_Decomposition_Theorem).
- [2] AVOe Internetseite abgerufen am 24.9.2015, <http://www.avoe.at/avoe-rechnungsgrundlagen.html>.
- [3] Wikipedia abgerufen am 7.9.2015, [http://en.wikipedia.org/wiki/Log-normal distribution](http://en.wikipedia.org/wiki/Log-normal_distribution).
- [4] Herbert Basler. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und statistischen Methodenlehre. (Fundamentals of Probability and Statistical Methodology).10., durchges. Aufl.* Heidelberg: Physica-Verlag, 1989.
- [5] Heinz Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie.5., durchges. u. verbess. Aufl.* Berlin: de Gruyter, 2002.
- [6] Edwin L. Crow and Kunio Shimizu, editors. *Lognormal Distributions. Theory and Applications.* New York etc.: Marcel Dekker, Inc., 1988.
- [7] Hans Föllmer and Alexander Schied. *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time.* Berlin: de Gruyter, 3rd revised and extended edition, 2011.
- [8] Hans U. Gerber. *Lebensversicherungsmathematik. Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, Zürich.* Berlin etc.: Springer-Verlag. XIII, 125 S. DM 98.00 (1986)., 1986.
- [9] Jürgen Groß. *A Normal Distribution Course.* Frankfurt am Main: Peter Lang, 2004.
- [10] Karin Hirhager. *Adapted Dependence with Applications to Financial and Actuarial Risk Management.* Dissertation. TU Wien, 2013.
- [11] Reinhold Kainhofer. *Einführung in die Finanzmathematik: Diskrete Modelle.* Skriptum zur Vorlesung. FAM TU Wien, 2007.
- [12] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability.* New York, NY: Springer, first edition, 1997.
- [13] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Berlin: Springer, 2nd revised edition, 2008.

- [14] Michael Koller. *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung*. Berlin: Springer, 2000.
- [15] Damien Lambertson and Bernard Lapeyre. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. Transl. from the French by Nicolas Rabeau a. François Mantion*. London: Chapman & Hall, first edition, 1995.
- [16] Marek Musiela and Marek Rutkowski. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Berlin: Springer, 2nd edition, 2005.
- [17] Uwe Schmock. *Stochastic Analysis for Financial and Actuarial Mathematics*. Skript. TU Wien, 2015.
- [18] Albert Nikolayevich Shiryaev. *Probability. Transl. from the Russian by R. P. Boas*. New York, NY: Springer-Verlag, 2nd ed. edition, 1995.
- [19] David Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1991.

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbstständig angefertigt habe und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.