Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.

http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.

http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

Diplomarbeit

# Über Portfolio-Resampling mit realistischen Nebenbedingungen

ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien
unter Anleitung von

**Ao. Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek**

durch

Nina Horvath
0125784, E873

1070 Wien, Lindengasse 31-33/3/2

16. Oktober 2013

# Inhaltsverzeichnis

**1 Grundlagen** **3**

1.1 Vorwort . . . . . 3

1.2 Portfolio . . . . . 5

1.3 Assetklassen . . . . . 6

1.4 Asset-Allokation und Portfoliomanagement . . . . . 8

**2 Traditionelle Portfolioauswahl** **10**

2.1 Erwartungswert und Varianz eines Portfolios . . . . . 12

2.2 Markowitz Effizienz . . . . . 13

2.3 Effiziente Portfolios . . . . . 14

2.4 Berechnung einer Effizienzgrenze . . . . . 15

2.4.1 Grenzwerte der Portfoliorendite . . . . . 18

2.4.2 Portfolios auf der Effizienzgrenze . . . . . 19

2.5 Referenzportfolios . . . . . 23

2.5.1 Gleichgewichtetes Portfolio . . . . . 23

2.5.2 Kapitalmarktlinie und Marktportfolio . . . . . 24

2.6 Resümee über die Markowitz-Effizienz . . . . . 28

**3 Portfolio Resampling** **30**

3.1 Schätzfehler . . . . . 30

3.2 Statistisch äquivalente Portfolios . . . . . 31
3.3 Resampling Prozedur nach Jobson und Korkie . . . . . 32
3.4 Rangzugeordnete Portfolios . . . . . 38
3.5 Resamplete Effizienzgrenze nach Michaud . . . . . 41
3.6 Eigenschaften der resampleten Effizienzgrenze . . . . . 45

**4 Anwendungen 48**
4.1 Inputdaten . . . . . 49
4.2 Linear beschränkte Effizienzgrenze nach Markowitz . . . . . 50
4.2.1 Kapitalmarktlinie . . . . . 56
4.2.2 Vergleich: Markowitz-Effizienz im beschränkten und unbeschränkten Fall . . . . . 57
4.3 Resampled Efficient Frontier nach Michaud . . . . . 61

**A Renditen, Duration und Kovarianzmatrix 69**
A.1 Renditevektor und Duration . . . . . 69
A.2 Varianz-Kovarianz-Matrix . . . . . 69

**B R-Codes 73**

# Kapitel 1

# Grundlagen

## 1.1 Vorwort

Eine Portfolioanalyse beginnt mit Informationen über einzelne Wertpapiere und endet mit Folgerungen über das gesamte Portfolio. Die Information über Wertpapiere kann einerseits auf Annahmen von Analysten über die zukünftige Performance oder andererseits auf der historischen Performance beruhen. Eine bekannte Eigenschaft des Wertpapierinvestments ist die Unsicherheit der Rendite von Wertpapieren. Wirtschaftliche und nichtökonomische Faktoren welche nicht ausreichend genau bekannt oder nicht vorhersehbar sind, beeinflussen die Entwicklung eines Wertpapiers, sodass eine fehlerfreie Prognose über seinen Rückfluss nicht getroffen werden kann.
Als weiteres Merkmal soll die Korrelation zwischen den Rückflüssen von Wertpapieren erwähnt werden. Die Renditen verschiedener Wertpapiere tendieren dazu, gemeinsam zu fallen oder zu steigen. Dies passiert nicht zu 100%, denn würden die Rückflüsse aller Wertpapiere vollkommen gleich schwanken, würde Diversifikation nichts zur Minimierung des Risikos beitragen. Tatsächlich korrelieren Renditen verschieden stark, aber eben nicht zu 100%, was

bedeutet, dass eine Diversifikation das Risiko zwar nicht eliminieren aber reduzieren kann.

Das Ziel einer Portfolioanalyse ist es ein Portfolio zu finden, das Kriterien, die die Interessen des Investors widerspiegeln, erfüllt. Diese Kriterien können sehr unterschiedlich sein, aber zwei gemeinsame Ziele haben wohl alle Investoren, nämlich hohe Kapitalrückflüsse und eine gewisse Stabilität und Sicherheit in diesen Rückflüssen. Ein Portfolio mit der höchsten wahrscheinlichen Rendite muss nicht jenes mit niedrigstem Risiko sein, es könnte sogar ein so hohes Risiko mit sich tragen, dass es für einen Investor inakzeptabel ist. Markowitz [3] unterscheidet effiziente von ineffizienten Portfolios, indem er alle verfügbaren Portfolios hinsichtlich ihres erwarteten Risikos und ihrer Rendite vergleicht und jene mit niedrigerem erwarteten Rückfluss und hohem Risiko streicht. Das heißt, werden zwei Portfolios gegeneinander abgewogen bei dem eines wahrscheinlich eine höhere Rendite mit niedrigerem Risiko erzielt als das andere, so wird zweiteres als ineffizient betrachtet und verworfen.

Die klassische Portfolioauswahl nach Markowitz [4] beginnt mit der Analyse der Inputs. Die Wertpapiere werden hinsichtlich ihres historischen Rückflusses geprüft und auch Annahmen von Wertpapieranalysten über die zukünftige Performance werden verwendet um zukünftige Renditen zu schätzen. Als Maß für das Risko eines Portfolios dient seine Standardabweichung. Sie hängt von der Standardabweichung jedes Wertpapiers, der Korrelation jedes Paares von Wertpapieren und natürlich von der in jedes Wertpapier investierten Geldmenge ab.

Nach der Bestimmung der Inputdaten wird im traditionellen Modell die Portfoliorendite maximiert, wobei vorausgesetzt wird, dass die Summe der investierten Anteile in die Wertpapiere 1 ergibt und Leerverkäufe nicht erlaubt sind, was bedeutet, dass die Gewichte in den Wertpapieren größer oder gleich

0 sein müssen. Diese lineare Optimierungsaufgabe kann mit Hilfe von Computeralgorithmen wie zum Beispiel der „Simplex-Methode“ von G. Dantzig gelöst werden. Jedoch wird jeder Algorithmus ohne weitere Einschränkungen des Optimierungsproblems immer das Portfolio, bei dem 100% in das Wertpapier mit dem höchsten zu erwarteten Rückfluss investiert wird, als optimale Lösung wählen. Es soll später noch ein wenig genauer auf die unbeschränkte Portfolio-Optimierung eingegangen und ihre fundamentalen Einschränkungen aufgezeigt werden.
Im ersten Abschnitt dieser Diplomarbeit wird das klassische Modell zur Portfolioauswahl nach Markowitz [4] vorgestellt und hinsichtlich seiner Eigenschaften analysiert. Zu Beginn sollen einige grundlegende Begriffe erklärt und die klassische Portfolioselektion anhand eines Beispiels durchgeführt werden. Im zweiten Teil dieser Arbeit wird auf das Problem des Schätzfehlers, der aus der Unsicherheit über die Input-Daten resultiert, näher eingegangen und eine robustere Methode der Portfolio-Optimierung, die von Michaud [5] entwickelte Methode des *Portfolio Resamplings*, welche zur Darstellung und möglichen Eindämmung des Schätzfehlers dient, vorgestellt.

## 1.2 Portfolio

Ein Asset-Portfolio stellt eine Zusammenfassung der Kapitalanlagen institutioneller Investoren wie zum Beispiel Banken, Pensionskassen oder Versicherungen dar. Die drei Kriterien *Rendite*, *Sicherheit* und *Liquidität*, welche die Ansprüche des Investors widerspiegeln, sollen vom Portfolio erfüllt werden.
Die *Rendite* stellt den Gewinn durch eine Geldanlage dar. Sie zeigt sich durch jährliche Ausschüttungen oder durch Kapitalwachstum.
Die *Sicherheit* einer Anlage soll möglichst hoch, das heißt ihr Risiko gering

oder zumindest begrenzt sein.
Die *Liquidität* ist die Möglichkeit das Wertpapier jederzeit zu veräußerlichen ohne große finanzielle Nachteile daraus zu ziehen.
Ein Portfolio ist im Bezug auf diese drei Kriterien unterschiedlich im Vergleich zu seinen Bestandteilen. Das Verständnis darüber, wie sich das Verhalten der einzelnen Komponenten eines Portfolios wie Wertpapiere, Kapitalanlagen oder Assetklassen bezüglich der drei Kriterien auf das gesamte Portfolio auswirkt, kann als Grundlage für die Zusammensetzung eines Portfolios gesehen werden. [9]

## 1.3 Assetklassen

Die Komponenten eines Portfolios, verschiedene *Assets*, werden aus Gründen der Übersichtlichkeit in *Assetklassen* zusammengefasst. Die Wertpapiere einer Klasse sollten in Hinblick auf Rendite, Sicherheit und Liquidität ähnliche Eigenschaften vorweisen, während die Unterschiede zwischen den Assetklassen sehr deutlich sein sollten.
Eine mögliche Einteilung von Assets in Klassen ist

- *Fixed Income*: Staats- und Unternehmensanleihen
- *Equity*: Aktien
- *Alternative Investments*: Hedge Funds, außerbörsliche Unternehmensbeteiligungen
- *Real Estate*: Anlage in Immobilien

Die Assets der *Fixed Income*-Klasse weisen, wie der Name schon vermuten lässt, größtenteils ein geringes Risiko im Vergleich zu Aktien auf, vor allem

wenn damit die täglichen Kursschwankungen gemeint sind, welche aus den in der Regel eher geringen Zinsänderungen resultieren. Jedoch tragen festverzinsliche Wertpapiere wie Staatsanleihen oft ein Bonitätsrisiko und auch bei Unternehmensanleihen spielt die Einschätzung der Bonität eine Rolle bei der Kursentwicklung. Bei Fremdwährungsanleihen fällt auch das Währungsrisiko ins Gewicht.

Die *Equity*-Klasse wird als riskant eingestuft, da die Kursschwankungen von zukünftigen Wirtschaftsgeschehnissen abhängen. Analysten und Aktionäre schätzen diese Ereignisse anhand von Informationen über die Aktiengesellschaft und deren wirtschaftliches Umfeld ab und bewerten so die Aktie. Da diese Informationen ständig präsent sind und sich schnell ändern, ändern sich auch Aktienkurse von einer Minute zur anderen.

Die Anlage in Immobilien wird in *direkt* (Kauf oder Errichtung von Immobilien) und *indirekt* (Beteiligung an einer Einrichtung, die *direkte* Anlage betreibt) unterschieden. Zu den indirekten Anlagen zählen Immobilienfonds und -aktien. Grundsätzlich wird das Risiko solcher Investitionen höher als das von *Fixed Income* eingestuft, da Wertschwankungen einerseits aufgrund der Zinsbewegungen, andererseits durch die Angebots- und Nachfrageschwankungen im Immobilienmarkt auftreten.

Obwohl durch die Zusammenfassung von Assets in Klassen deren Risiken abgewogen sind, variieren ihre Renditeerwartungen dennoch. Die Risikoaversion von Investoren führt dazu, dass risikobehaftete Anlagen einen geringeren Preis haben. Anlagen mit geringer Liquidität haben geringere Preise und lassen höhere Renditen erwarten als solche mit hoher Liqudität.

Die Unterschiede der Assetklassen hinsichtlich Rendite, Sicherheit und Liquidität zeigen auf, dass die Kapitalanlage in nur eine dieser Klassen nicht sinnvoll ist, da keine Klasse in allen drei Kriterien besser ist als eine an-

dere. Die Veranlagung des Kapitals in verschiedene Assetklassen führt zur *Diversifikation* des Schwankungsrisikos, das heißt negative gleichen sich mit zeitgleichen positiven Preisänderungen in den Anlagen aus. [9]

## 1.4 Asset-Allokation und Portfoliomanagement

Unter *Asset-Allokation* versteht man den Prozess, der die Gewichte, welche die einzelnen im Portfolio gewünschten Assets haben sollen bestimmt. Sie wird in *strategische* und *taktische* Asset-Allokation unterteilt.
Die *strategische* Asset-Allokation bezeichnet das Streben nach einer längerfristigen Festlegung der Gewichte in den einzelnen Assets oder Assetklassen. Hierfür werden die Eigenschaften der Geldanlagen auf lange Sicht beobachtet und berücksichtigt. Dadurch entsteht ein auf die Wünsche des Investors eingehendes, genau strukturiertes Portfolio.
Die *taktische* Asset-Allokation hingegen ist auf die augenblickliche Börsensituation ausgerichtet und kann dadurch augenblicklichen Wünschen des Investors nachgehen.
Die Aufgabe des *Portfoliomangements* ist, nachdem die Asset-Allokation festgelegt und das Portfolio bestimmt ist, die Beobachtung und zeitweise Anpassung des Portfolios. Hier wird zwischen *aktivem* und *passivem* Portfoliomanagement unterschieden.
Die strategische Asset-Allokation bedarf im Laufe der Zeit eher weniger Anpassungen des Portfolios, da sie nicht versucht, von aktuellen Marktsituationen zu profitieren, sondern die Gewichte der Assets längerfristig beizubehalten. Deshalb führt sie zu *passivem Portfoliomanagement.*
Demgegenüber verlangt die taktische Asset-Allokation *aktives Portfoliomanagement*, um aktuelle Informationen über die Marktsituation und Trends

kurzfristig in das Portfolio einfließen lassen zu können. [9]

# Kapitel 2

# Traditionelle Portfolioauswahl

Harry M. Markowitz hat im Jahr 1952 mit seinem Artikel „Portfolio Selection“ [3] den Grundstein zur modernen Portfoliotheorie gelegt. Vor der Publikation war die geläufigste Grundregel eines Investors für die Wahl eines Portfolios die Maximierung der Portfoliorendite. Diese Regel führt unweigerlich dazu, dass das gesamte verfügbare Kapital in jenes Wertpapier mit der höchsten erwarteten Rendite investiert wird. Existieren mehrere Wertpapiere mit demselben hohen Wert, ist ein Portfolio bestehend aus einem einzelnen Wertpapier genauso gut wie eines, welches aus Kombinationen der Wertpapiere mit derselben Rendite besteht.

Ein weiterer Leitfaden zur Wahl eines Portfolios war, dass ein Investor zusätzlich zur Maximierung der Rendite auch darauf achtet, verteilt zu veranlagen, da, so die Annahme, das Gesetz der großen Zahlen sicherstellt, dass die erwartete Rendite des Portfolios dann beinahe so hoch wie die effektive Rendite ist.

Markowitz zeigte auf, dass jede Verhaltensregel zur Bestimmung eines Portfolios verworfen werden muss, solange sie nicht Diversifikation impliziert. Demnach ist die erste Regel abzulehnen, da laut ihr ein Portfolio bestehend aus

dem Wertpapier mit höchster erwarteter Rendite genauso gut ist wie ein auf mehrere „gute“ Wertpapiere verteiltes Portfolio.
Zur zweiten Regel bemerkte Markowitz, dass die Anwendung des Gesetzes der großen Zahlen auf ein Portfolio nicht zulässig ist, da die Renditen von Wertpapieren untereinander korrelieren und Diversifikation die Varianz nicht komplett eliminieren kann.
Die Quintessenz der Forschungsarbeit war, dass ein Portfolio hinsichtlich seiner Rendite und Varianz untersucht werden muss. Die sture Wahl der Wertpapiere mit hoher Rendite und niedriger Varianz ohne Berücksichtigung der Gesamtrendite und der Varianz des Portfolios sowie nicht durchdachte Diversifikation führen zu Portfolios mit wenig Investmentwert.
Im Artikel „Portfolio Selection“ prägte Markowitz die Begriffe *effizientes Portfolio* und *Effizienzgrenze*, welche in diesem Kapitel erläutert werden sollen.

## 2.1 Erwartungswert und Varianz eines Portfolios

Es bezeichne $n$ die Anzahl der Assets in einem Portfolio. Weiters sei $Y$ resp. $Z$ die Menge der $k$ historischen Rendite-Beobachtungen des i-ten resp. j-ten Assets. Dann wird die *erwartete Rendite* $r_i$, die *Varianz* des i-ten Assets $\sigma_{ii}$ und die *Kovarianz* des i-ten und j-ten Assets $\sigma_{ij}$ wie folgt berechnet:

$$r_i = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} y^m \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ii} = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} (y^m - r_i)^2 \tag{2.2}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} (y^m - r_i)^2 (z^m - r_j)^2 \tag{2.3}$$

Sei weiters $X$ der Gewichtsvektor eines Portfolios und eine Komponente $x_i$ bezeichne das Gewicht der Investition in das i-te Asset.
Dann ist die *erwartete Rendite* $R$ des Portfolios $X$ bestehend aus $n$ Assets das gewichtete Mittel der erwarteten $n$ Assetrenditen, gegeben durch

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & \dots & r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

und kann auch durch $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ dargestellt werden.
Die *Varianz* $V$ des Gesamtportfolios $X$ beträgt

$$V = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

oder anders $\sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_{ij}$. Die Varianz-Kovarianz-Matrix der $n$ Assetrenditen wird auch mit $\Sigma$ bezeichnet und ist symmetrisch positiv-semidefinit. Die

Symmetrie ist gegeben, weil die Kovarianz zweier Zufallsvariablen symmetrisch ist. Wegen der Symmetrie ist jede Kovarianzmatrix mittels Hauptachsentransformation diagonalisierbar und die Diagonalmatrix ist wieder eine Kovarianzmatrix. Da ihre Eigenwerte auf der Diagonale Varianzen sind, ist die Diagonalmatrix positiv semidefinit und somit auch die ursprüngliche Matrix.

## 2.2 Markowitz Effizienz

Nach Markowitz [4] ist ein Portfolio *effizient*, wenn

- zu einer fest gewählten Portfoliorendite kein Portfolio mit kleinerer Varianz ohne Minimierung der Rendite oder
- zu einer fest gewählten Portfoliovarianz kein Portfolio mit größerer Rendite ohne Maximierung der Varianz

erreicht werden kann.
Als Lageparameter für die Rendite eines Assets wird der Mittelwert über historische Rückflüsse verwendet. Als Maß für das Risiko setzt Markowitz die Varianz ein, weshalb diese Portfolios auch oft als *Mittel-Varianz-* oder kurz *MV-effizient* bezeichnet werden. Auch die Verwendung der *Standardabweichung*, also die Wurzel aus der Varianz, oder des *Variationskoeffizienten*, das heißt die Standardabweichung dividiert durch den Mittelwert, als Risikomaß führt ebenso zu effizienten Portfolios.
Als *Effizienzgrenze* wird der geometrische Ort aller effizienten Portfolios, bei denen zu gegebenen Renditen kein Portfolio mit geringerer Varianz gefunden werden kann, bezeichnet. Sie reicht vom *Minimum-Varianz-Portfolio* bis zum

*Maximum-Rendite-Portfolio.*

## 2.3 Effiziente Portfolios

Ein effizientes Portfolio kann entweder durch

- Minimierung der Varianz zu einer festen erwarteten Rendite oder durch
- Maximierung der erwarteten Rendite zu vorgegebener Varianz

bestimmt werden.
In der Praxis beinhaltet diese Optimierungsaufgabe mehrere Nebenbedingungen, welche aus Beschränkungen über Budget oder über die Höhe der Veranlagung in einzelne Assets bzw. Assetklassen und anderen Restriktionen resultieren. Glücklicherweise sind es meist lineare Gleichungen und Ungleichungen, sodass sich schnell Optimierungsalgorithmen zur Lösung des Problems finden lassen.
Auch in der klassischen MV-Optimierung nach Harry M. Markowitz werden zwei lineare Nebenbedingungen berücksichtigt, nämlich eine Budget-Einschränkung und eine Bedingung, die besagt, dass keine Leerverkäufe getätigt werden dürfen. Diese beiden Bedingungen werden im weiteren Verlauf als *Standard-Nebenbedingungen* bezeichnet und kurz formal notiert.
Die sogenannte *Budget-Beschränkung* besagt, dass die Summe aller Asset-Gewichte 100% ergibt.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{2.6}$$

Die *keine-Leerverkäufe-Beschränkung* besagt, dass alle Gewichte größer oder gleich 0 sein müssen.

$$x_i \geq 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \tag{2.7}$$

Im Folgenden soll eine Effizienzgrenze unter Berücksichtigung der Standard-Nebenbedingungen optimiert werden. Die Wahl des Computeralgorithmus hängt von der Aufgabenstellung ab. Beinhaltet die Optimierung nur lineare Gleichungs-Nebenbedingungen, kann die Lösung mittels analytischer Verfahren leicht gefunden werden. Scheinen auch lineare Ungleichungen als Nebenbedingungen auf, wird die Aufgabe mithilfe numerischer Optimierungsalgorithmen gelöst.

## 2.4 Berechnung einer Effizienzgrenze

In diesem Abschnitt wird anhand eines Beispiels gezeigt, wie die auf der *Effizienzgrenze* liegenden effizienten Portfolios durch Minimierung der Varianz unter Einsatz eines quadratischen Optimierungsalgorithmus berechnet werden. Die Standard-Nebenbedingungen aus 2.6 und 2.7 sollen gelten und das Risiko eines Portfolios wird als Standardabweichung angegeben.
Die dazu benötigten Berechnungen wurden in der Open Source Programmiersprache *R* [7] durchgeführt. Für die quadratische Optimierung wurde das Paket *quadprog* [6] in Gebrauch genommen, welche auf der *Dual Active Set Method* nach Goldfarb und Idnani [1] basiert.

Der Renditevektor $r$ von 5 Assets und die dazugehörige Varianz-Kovarianz-Matrix $\Sigma$ sind gegeben durch

$$r = \begin{pmatrix} 0.084 \\ 0.0701 \\ 0.009 \\ 0.003 \\ 0.0645 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 0.029528 & 0.014517 & 0.001251 & 0.000356 & 0.013220 \\ 0.014517 & 0.010829 & -0.000188 & -0.000230 & 0.009272 \\ 0.001251 & -0.000188 & 0.001090 & 0.000428 & -0.000144 \\ 0.000356 & -0.000230 & 0.000428 & 0.000187 & -0.000102 \\ 0.013220 & 0.009272 & -0.000144 & -0.000102 & 0.010131 \end{pmatrix}$$

Das erste Portfolio auf der linken Seite der Effizienzgrenze soll das *Minimum-Varianz-Portfolio* sein, welches man durch Minimierung der Varianz unter Berücksichtigung der keine-Leerverkäufe- und der Budget-Beschränkung erhält.
Das *Maximum-Rendite-Portfolio* soll den Endpunkt auf der rechten Seite der Effizienzgrenze darstellen.
Dieses Beispiel ist aufgrund der geringen Anzahl von Wertpapieren leicht zu überblicken, weshalb zuerst ein paar Überlegungen angestellt werden aus welchen Assets sich diese Randportfolios zusammensetzen könnten bevor ein Optimierungsalgorithmus dafür eingesetzt wird.
Um minimale Varianz zu erhalten ist eine logische Schlussfolgerung das verfügbare Kapital in das Asset mit geringster Varianz zu investieren. Wie man aus der Varianz-Kovarianz-Matrix $\Sigma$ erkennen kann, trägt das Asset Nr. 4 von den fünf gegebenen das geringste Risiko. Da die Wertpapiere untereinander korrelieren, müssen auch die Kovarianzen betrachtet werden, bevor geradewegs 100% des Kapitals in dieses Asset veranlagt werden.
Ist die Kovarianz zweier Assets $A_1$, $A_2$ positiv, haben sie einen gleichsinnigen Zusammenhang, das heißt tendiert $A_1$ zu hohen Werten, neigt auch $A_2$ dazu. Die negative Kovarianz zweier Assets besagt, dass sie sich gegensinnig verhalten, also hohe Werte des einen gehen einher mit niedrigen Werten des anderen Wertpapiers.
Die Höhe der Kovarianz sagt nichts über die Stärke des Zusammenhangs aus, dafür wird der Korrelationskoeffizient benötigt, welcher als Maß für den linearen Zusammenhang dient.

Der *Korrelationskoeffizient* ist definiert als

$$\rho(A_1, A_2) = \frac{\sigma_{A_1,A_2}}{\sqrt{\sigma_{A_1,A_1}} \cdot \sqrt{\sigma_{A_2,A_2}}} \tag{2.8}$$

Er nimmt Werte zwischen -1 und 1 an. Bei einem Wert von -1 bzw. 1 besteht ein vollständiger negativer bzw. positiver Zusammenhang zwischen den zwei Assets. Ist der Korrelationskoeffizient zweier Wertpapiere 0, sind sie nicht korreliert.

Für eine durchdachte Diversifikation des Portfolios sollte in Assets, deren Korrelationskoeffizienten negativ sind, investiert werden. Besteht ein Portfolio nur aus Wertpapieren mit hohen positiven Korrelationskoeffizienten, würde die schlechte Performance eines Wertpapiers die schlechte Performance des gesamten Portfolios prognostizieren, da sich alle Wertpapiere dann eher schlecht entwickeln.

In diesem Beispiel beträgt der kleinste Korrelationskoeffizient $\rho_{A_2,A_4} = -0.1616266$, also ist zu erahnen, dass der Optimierungsalgorithmus für das Minimum-Varianz-Portfolio eine Kombination aus den Assets Nr.2 und Nr.4 wählen wird, um die Varianz des Portfolios zu minimieren.

Das Maximum-Rendite-Portfolio wird zu 100% aus Asset Nr. 1 bestehen, da dieses die höchste zu erwartende Rendite aufweist, wie der Renditevektor $r$ erkennen lässt. Dieses Asset trägt auch das höchste Risiko, da aber durch Kombination mehrerer Assets das Portfolio-Risiko nicht minimiert werden kann ohne auch zeitgleich die Rendite des Portfolios zu verringern, führt die Investition des gesamten verfügbaren Kapitals in dieses eine Asset zu einem effizienten Maximum-Rendite-Portfolio.

### 2.4.1 Grenzwerte der Portfoliorendite

Zuerst muss die Rendite des Minimum-Varianz- sowie die des Maximum-Rendite-Portfolios ermittelt werden, um weitere Portfolios auf der Effizienzgrenze bestimmen zu können. Um die Rendite des Minimum-Varianz-Portfolios zu finden, wird die Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} \min x^T \ \Sigma \ x \\ \text{unter} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \end{cases} \tag{2.9}$$

gelöst.

Hier beträgt die Portfoliorendite $ER_{min} = 0.54\%$ zu einer Varianz von 0.017%, was einer Standardabweichung von 1.31% entspricht. Die Verteilung des Kapitals liegt bei 3.63% in das zweite und 96.37% in das vierte Asset.

Für die Bestimmung der Rendite des Maximum-Rendite-Portfolios wird die Aufgabe

$$\begin{cases} \max x^T \ r \\ \text{unter} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \end{cases} \tag{2.10}$$

gelöst. In diesem nur durch die Standard-Nebenbedingungen beschränkten Beispiel liegt der erwartete Rückfluss des Maximum-Rendite-Portfolios trivialerweise bei 8.4%, da das gesamte verfügbare Kapital in Asset Nr. 1 - jenes mit höchster Rendite - investiert wird. Das Risiko zum Maximum-Rendite-Portfolio beträgt 17.18%.

### 2.4.2 Portfolios auf der Effizienzgrenze

Um weitere effiziente Portfolios zwischen dem Minimum-Varianz- und dem Maximum-Rendite-Portfolio berechnen zu können, werden gewünschte Portfoliorenditen vorgegeben. In diesem Beispiel soll die Effizienzgrenze durch insgesamt 20 Portfolios bestimmt sein. Die restlichen 18 Portfoliorenditen werden festgelegt indem der Abstand zwischen der erwarteten Rendite des Minimum-Varianz-Portfolios und des maximalen Portfoliorückflusses in gleichgroße Abschnitte unterteilt wird. Die 20 bestimmten Renditewerte für die Portfolios auf der Effizienzgrenze sind im Vektor $r^{var}$ dargestellt.

$$r^{var} = \begin{pmatrix} 0.005438 \\ 0.00957279 \\ \vdots \\ 0.07986421 \\ 0.084 \end{pmatrix}$$

Für jede Komponente $j$ des Vektors $r^{var}$ wird nun die Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} \min x^T \Sigma x \\ \text{unter} \\ x^T \ r = {r^{var}}_j \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \end{cases} \tag{2.11}$$

gelöst, wodurch man die Gewichtsvektoren 20 effizienter Portfolios erhält. Über 2.5 werden nun die Varianzen der Portfolios berechnet und durch Wurzelziehen kann die Standardabweichung, also das Risiko für jedes Portfolio angegeben und im Risiko-Rendite-Diagramm gezeichnet werden. Durch diese Punkte wird nun die Effizienzgrenze gelegt, dargestellt in Abbildung 2.1.

Weiters sind auch die 5 Assets über ihre Risiken und Renditen im Diagramm als Punkte eingezeichnet.

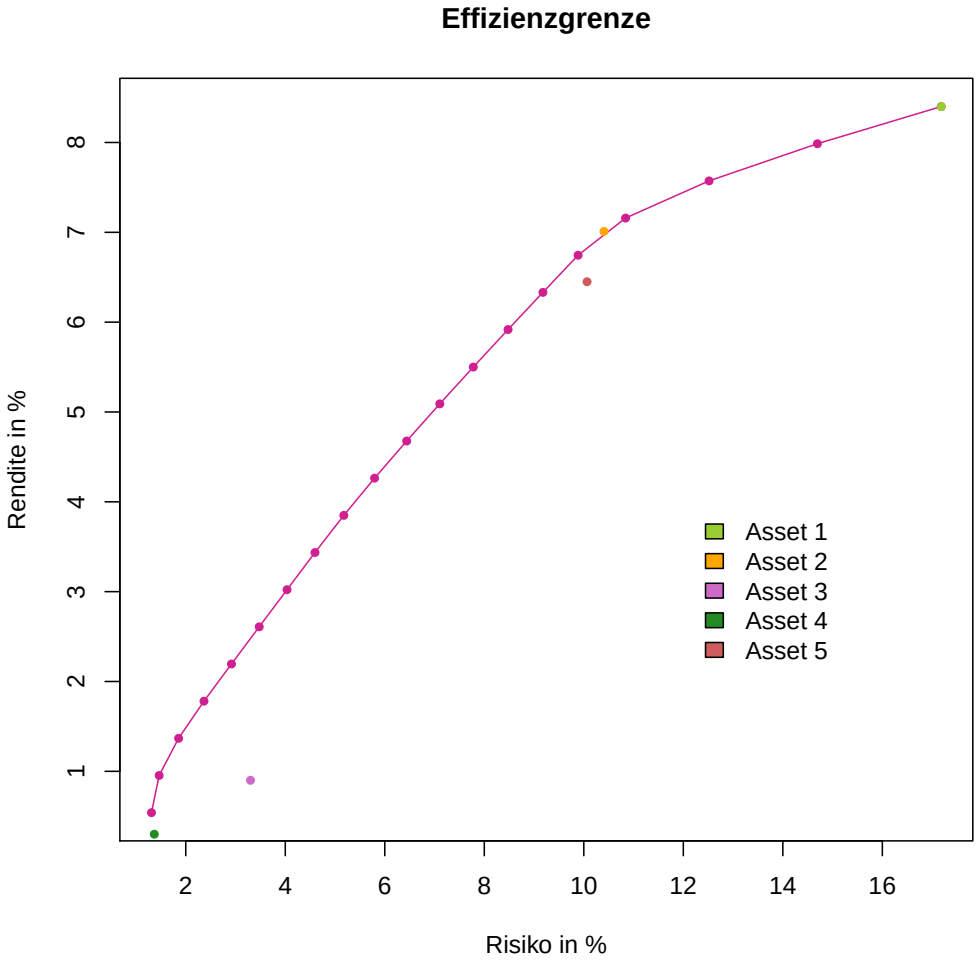


Abbildung 2.1: Effizienzgrenze und 5 Assets

Die Effizienzgrenze reicht vom Minimum-Varianz-Portfolio $(1.31\%, 0.54\%)$ bis zum Maximum-Rendite-Portfolio $(17.18\%, 8.4\%)$. Alle anderen Punkte auf der Effizienzgrenze liegen zwischen diesen beiden Extremfällen.
In Tabelle 2.1 ist die Verteilung des Kapitals sowie die Rendite und das Risiko zu jedem der 20 effizienten Portfolios gegeben.

| Portfolio Nr. | Asset 1 | Asset 2 | Asset 3 | Asset 4 | Asset 5 | Rendite | Risiko |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00% | 3.63% | 0.00% | 96.37% | 0.00% | 0.54% | 1.31% |
| 2 | 0.00% | 9.80% | 0.00% | 90.20% | 0.00% | 0.96% | 1.47% |
| 3 | 0.00% | 15.01% | 0.00% | 83.96% | 1.03% | 1.37% | 1.86% |
| 4 | 0.00% | 19.32% | 0.00% | 77.63% | 3.06% | 1.78% | 2.37% |
| 5 | 0.00% | 22.30% | 12.78% | 59.64% | 5.28% | 2.20% | 2.92% |
| 6 | 0.00% | 25.15% | 26.70% | 40.62% | 7.53% | 2.61% | 3.48% |
| 7 | 0.00% | 28.01% | 40.61% | 21.60% | 9.78% | 3.02% | 4.04% |
| 8 | 0.00% | 30.87% | 54.52% | 2.58% | 12.03% | 3.44% | 4.60% |
| 9 | 0.00% | 35.97% | 50.45% | 0.00% | 13.58% | 3.85% | 5.18% |
| 10 | 0.00% | 41.43% | 43.55% | 0.00% | 15.02% | 4.26% | 5.80% |
| 11 | 0.00% | 46.89% | 36.65% | 0.00% | 16.46% | 4.68% | 6.44% |
| 12 | 0.00% | 52.35% | 29.75% | 0.00% | 17.90% | 5.09% | 7.11% |
| 13 | 0.00% | 57.81% | 22.85% | 0.00% | 19.34% | 5.51% | 7.79% |
| 14 | 0.00% | 63.27% | 15.95% | 0.00% | 20.78% | 5.92% | 8.48% |
| 15 | 0.00% | 68.72% | 9.05% | 0.00% | 22.23% | 6.33% | 9.18% |
| 16 | 0.00% | 74.18% | 2.15% | 0.00% | 23.67% | 6.75% | 9.89% |
| 17 | 10.75% | 89.25% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 7.16% | 10.84% |
| 18 | 40.50% | 59.50% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 7.57% | 12.52% |
| 19 | 70.19% | 29.81% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 7.99% | 14.69% |
| 20 | 100.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 8.40% | 17.18% |

Tabelle 2.1: Gewichtsvektoren, Rendite und Risiko der 20 Portfolios

Abbildung 2.2 illustriert für jedes Portfolio seine Gewichtsverteilung in den einzelnen Assets. Man kann erkennen, dass die Allokationen sehr konzentriert um jene Assets ausfallen, welche „gute Eigenschaften“, also eine hohe Rendite und niedriges Risiko, besitzen.

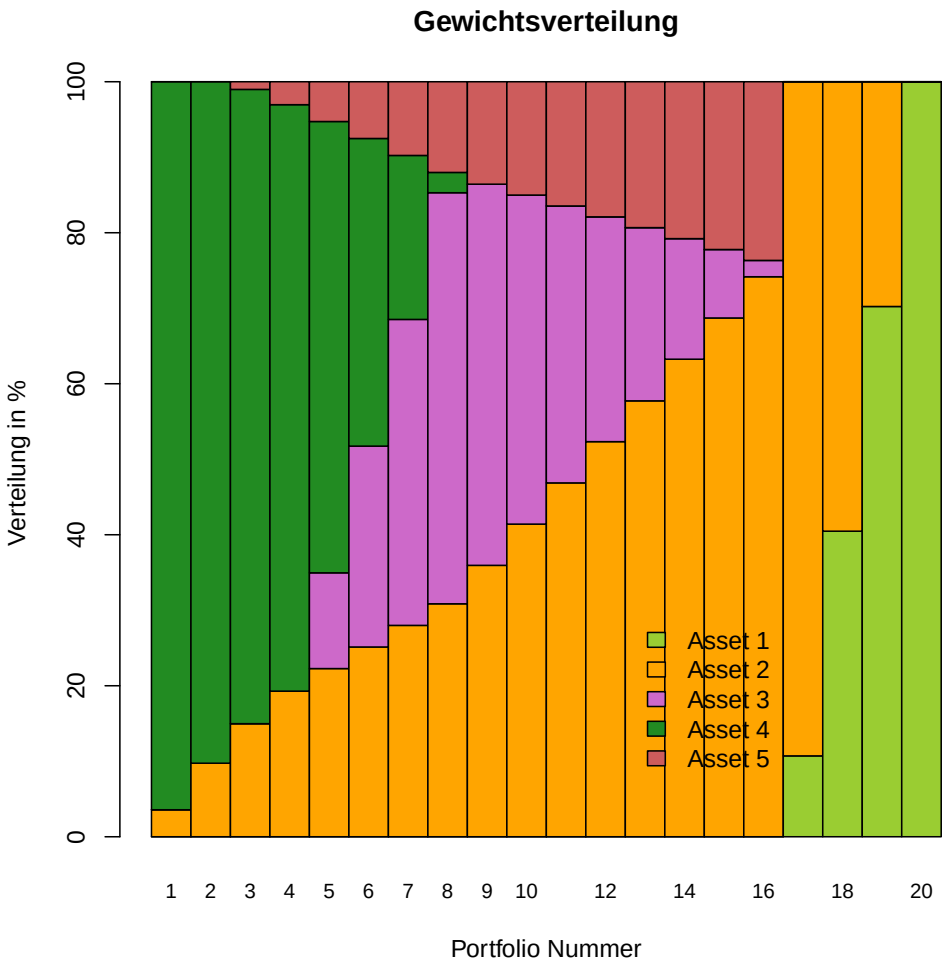


Abbildung 2.2: Zusammensetzung der effizienten Portfolios

Im nächsten Textabschnitt wird ein kleiner Exkurs in das Thema „Referenzportfolios“ gemacht.

## 2.5 Referenzportfolios

### 2.5.1 Gleichgewichtetes Portfolio

Richard O. Michaud [5] geht im Buch „Efficient Asset Management“ unter anderen auch auf ein *gleichgewichtetes* Referenzportfolio ein, welches als Wegweiser für den Vergleich alternativer Portfolios dient. In der nächsten Grafik 2.3 ist das gleichgewichtete Portfolio zu dem vorigen Beispiel eingezeichnet. Der Gewichtsvektor dieses Portfolios beträgt $X_g = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$, das heißt es werden 20% des verfügbaren Gesamtkapitals in jedes Asset im Portfoliorahmen investiert. Über die Formeln 2.4 und 2.5 werden die Rendite und die Varianz des Gleichgewichts-Portfolios ermittelt. Der Rückfluss beträgt 4.61% und das Risiko liegt bei 7.17%. Dieses Gleichgewichts-Portfolio ist in Abbildung 2.3 im Risiko-Rendite-Diagramm als Punkt $(7.17\%, 4.61\%)$ dargestellt. Da es sich unter der Effizienzgrenze befindet ist es nicht effizient, was bedeutet, dass man zu gleicher gewünschter Rendite ein Portfolio mit niedrigerem Risiko finden kann, nämlich jenes, welches auf der Efficient Frontier liegt. Das Portfolio, wessen Rendite am nächsten bei dem Gesamtrückfluss des gleichgewichteten Portfolios liegt, ist das optimierte effiziente Portfolio Nr. 11 mit einer erwarteten Rendite von rund 4.68%, es weist aber eindeutig ein niedrigeres Risiko von 6.44% auf. Obwohl diese Referenzportfolios immer unter, wenn auch nahe, an der Effizienzgrenze liegen, sind sie gut diversifiziert.

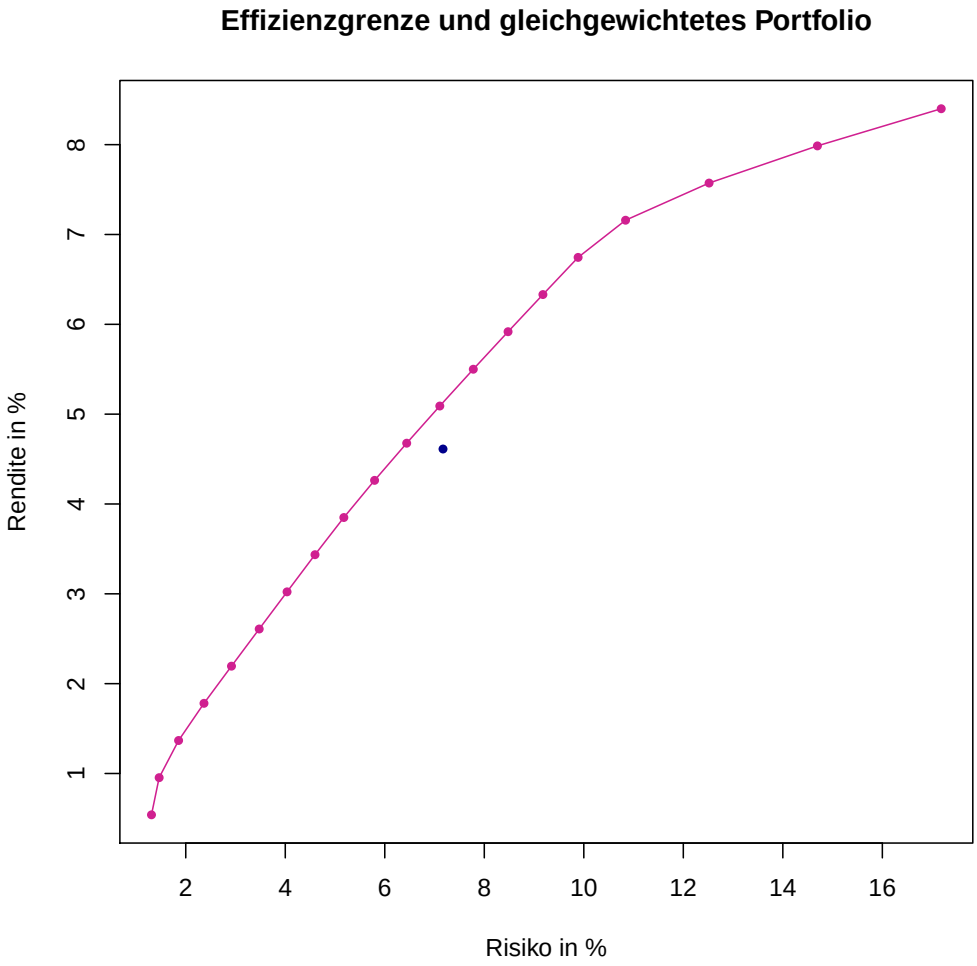


Abbildung 2.3: Effizienzgrenze und gleichgewichtetes Portfolio

### 2.5.2 Kapitalmarktlinie und Marktportfolio

Im Markowitz Modell werden nur risikobehaftete Einzelanlagen verwendet. James Tobin hat auch die Möglichkeit betrachtet, Geld *sicher*, das heißt zum Zinssatz, anzulegen. [9] Es werden alle nach Markowitz gefundenen, effizienten Portfolios mit einer risikolosen Anlage wie zum Beispiel *Bargeld* kombiniert. Die daraus resultierenden neuen Portfolios liegen alle auf einer

Geraden. Ist diese Gerade eine Tangente an die Effizienzkurve, so wird sie *Kapitalmarktlinie* (engl.: *Capital Market Line*, kurz *CML*) genannt. Der Tangentialpunkt von Effizienzgrenze und Kapitalmarktlinie wird als *Marktportfolio* bezeichnet.

Sei $r_0$ der risikolose Zinssatz und ${\sigma_0}^2$ die Varianz der risikolosen Anlage. Angenommen, es wird eines der vorher optimierten Portfolios $X$ mit dieser Anlage linear kombiniert. Dadurch erhält man ein neues Portfolio $Q$ dessen Rendite $R_Q$ und Varianz $V_Q$ gegeben sind durch

$$R_Q = w \cdot R_X + (1 - w) \cdot r_0 \tag{2.12}$$

$$V_Q = w^2 \cdot V_X + (1 - w) \cdot {\sigma_0}^2 + 2 \cdot w \cdot (1 - w) \cdot \sqrt{V_X} \cdot \sigma_0 \cdot \rho_{X,0} \tag{2.13}$$

wobei das Gewicht $w$ der Zusammensetzung aus dem risikobehafteten Portfolio und der risikolosen Anlage im Intervall $0 \leq w \leq 1$ liegt.

Die Varianz ${\sigma_0}^2$ der sicheren Anlage ist gleich 0 und folglich auch die Korrelation $\rho_{X,0}$ zwischen den Renditen $R_X$ und $r_0$, wodurch sich für die obige Formel der Varianz $V_Q$

$$V_Q = w^2 \cdot V_X \tag{2.14}$$

ergibt. Aus dieser Gleichung 2.14 folgt für das Gewicht der Kombination

$$w = \sqrt{\frac{V_Q}{V_X}}$$

und eingesetzt in der Gleichung für die Rendite aus 2.13 ergibt das

$$R_Q = r_0 + \sqrt{\frac{V_Q}{V_X}}(R_X - r_0).$$

Das Verhältnis $p$

$$p = \frac{R_X - r_0}{\sqrt{V_X}} \tag{2.15}$$

wird mit *Sharpe-Ratio* nach William F. Sharpe bezeichnet und gibt an, wie sich die Rendite aus den risikobehafteten Anlagen allein zu ihrem Risiko verhält. Drückt man die Rendite $R_Q$ des kombinierten Portfolios mithilfe von $p$ aus, entsteht die folgende Beziehung

$$R_Q = r_0 + p \cdot \sqrt{V_Q} \tag{2.16}$$

welche den Rückfluss des zusammengesetzten Portfolios $Q$ in Verbindung zu seinem Risiko setzt. Dieser Zusammenhang ist linear, woraus folgt, dass alle Kombinationsportfolios auf einer Geraden liegen, welche im Risiko-Rendite-Diagramm im Punkt des risikolosen Zinssatzes auf der Rendite-Achse beginnt und in dem Punkt der risikobehafteten Rendite endet. Kombiniert man jedes Portfolio $X$ aus Beispiel 2.4 mit einer risikolosen Anlage, entstehen Portfolios, die alle auf der jeweiligen Gerade positioniert sind.
Umso größer die Steigung einer Gerade, also ihr Sharpe-Ratio, ist, desto interessanter ist sie, da eine große Steigung niedrigeres Risiko bzw. höheren Rückfluss bedeutet. Jene Gerade mit dem maximalen Sharpe-Ratio ist tangential zur Effizienzkurve und somit die Kapitalmarktlinie. Der Berührungspunkt gibt das Marktportfolio an.

Für einen risikolosen Zinssatz $r_0 = 2\%$ soll im Folgenden die Kapitalmarktlinie zum Beispiel 2.4 gezeichnet und das Marktportfolio bestimmt werden. Zu jedem gefundenen Portfolio auf der Effizienzgrenze wird über 2.15 das Sharpe-Ratio berechnet. Das Maximum beträgt $sr_{max} = 0.480013$ und gehört zum sechzehnten Portfolio $X_{16}$. Also verläuft die Kapitalmarktlinie wie in Abbildung 2.4 dargestellt vom Punkt $(0, 2)$ bis zum Punkt $(9.89, 6.75)$, der das Risiko und die Rendite des Portfolios $X_{16}$ angibt. Dieses Tangentialportfolio ist das Marktportfolio. Alle effizienten Portfolios bezüglich der 5 Assets und der risikolosen Anlage liegen auf der Kapitalmarktlinie. Man sieht in der

Grafik, dass es zu jedem MV-effizienten Portfolio auf der Efficient Frontier, abgesehen vom Marktportfolio, ein dazugehöriges „neues“ Portfolio auf der Kapitalmarktlinie mit demselben Risiko aber höherer Rendite gibt. Erweitert man den Portfoliorahmen um den risikolosen Zinssatz $r_0$, sind die Portfolios auf der Effizienzgrenze nicht mehr effizient.

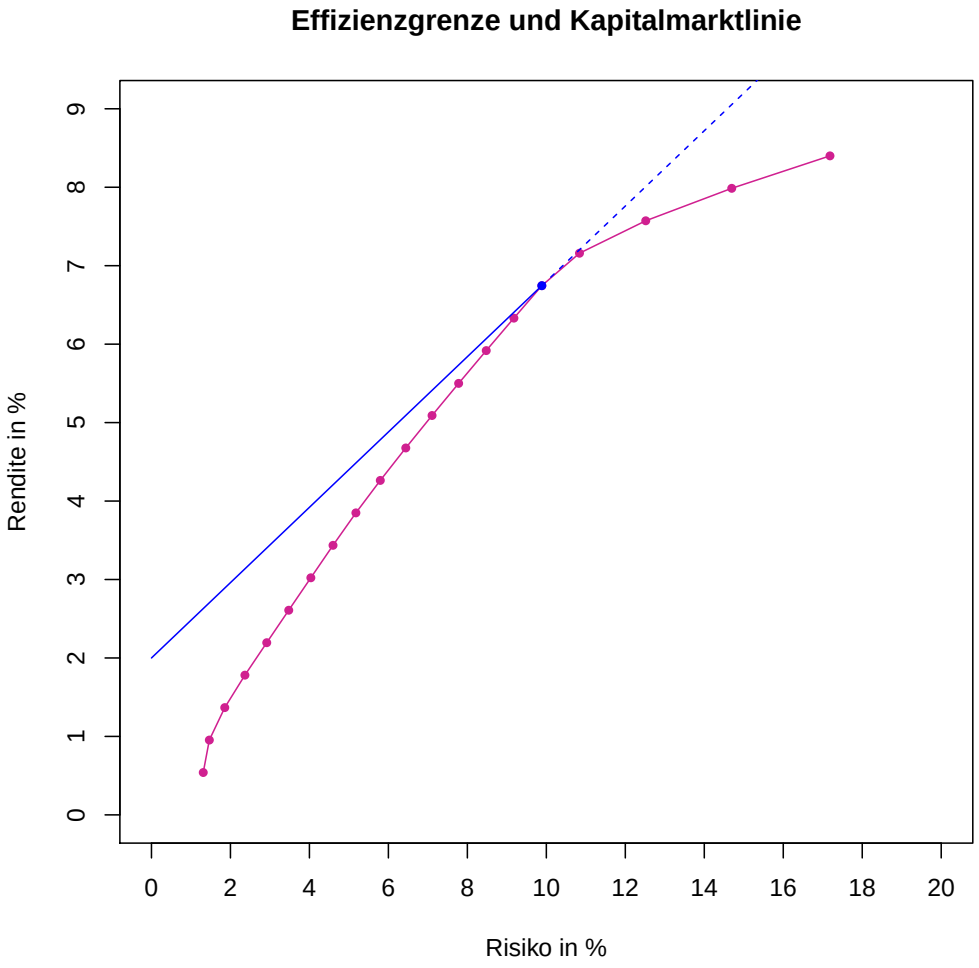


Abbildung 2.4: Kapitalmarktlinie und Marktportfolio

Wenn zum Zinssatz $r_0$ Kapital angelegt und Kredite aufgenommen wer-

den können, so ist die „neue“ Effizienzgrenze die Kapitalmarktlinie. Wenn zwar Mittel in $r_0$ angelegt werden können, jedoch aber kein Kredit aufgenommen werden darf, setzt sich die „neue“ Effizienzgrenze aus dem Abschnitt der Kapitalmarktlinie vom Punkt $(0, 2)$ bis zum Marktportfolio $X_{16}$ und dem Teilstück der Markowitz-Effizienzgrenze ab dem sechzehnten Portfolio zusammen.

## 2.6 Resümee über die Markowitz-Effizienz

Wie im Beispiel 2.4 zu erkennen war, tendiert der Optimierungsalgorithmus dazu, jene Assets mit den attraktivsten Eigenschaften zu wählen und solche mit schlechter Beschaffenheit, also niedriger Rendite und hohem Risiko, zu kürzen oder gar wegzulassen. Da aber genau diese Extremfälle am ehesten fehlerbehaftet sind, beansprucht die Optimierungsprozedur die statistisch geschätzte Information über wodurch die Auswirkung des Schätzfehlers in den Portfoliogewichten maximiert wird. Dies hat zur Folge, dass die optimierten Portfolios wenig oder keinen Wert für einen Investor haben.
Nach Michaud sind die wichtigsten Einschränkungen der MV-Optimierung ihre Instabilität und Mehrdeutigkeit. Kleine Änderungen in den Annahmen über den Input ziehen oft große Änderungen im optimierten Portfolio mit sich. Wie Michaud auch erwähnt, ist oft ein gleichverteiltes Portfolio näher bei der wirklichen MV-Optimalität als ein optimiertes Portfolio.
In der traditionellen Markowitz Effizienz dient die Varianz der Rendite als Maß für das Risiko eines Portfolios. Sie misst die Schwankung über und unter der erwarteten Rendite. Da für einen Investor aber Abweichungen über den Erwartungswert hinaus kein Risiko darstellen, ist die *Semi-Varianz* als geeignetes alternatives Risikomaß anwendbar, da sie nur Renditen, welche

unter der erwarteten Rendite liegen, misst.
Der Frage, ob die Semi-Varianz im Vergleich zur Varianz zu signifikant unterschiedlichen Portfolios führt, ist Michaud nachgegangen und stellte fest, dass sich die Effizienzgrenzen nur sehr wenig unterscheiden. Dieser Unterschied beruht auf der geringen Asymmetrie der Asset-Verteilungen. Wenn alle Assets einer Portfolio-Optimierung symmetrische Verteilungen besäßen, würde die Varianz sowie die Semi-Varianz als Maß für das Risiko zu identischen Ergebnissen führen. [4], [5]
Abschließend ist zu sagen, dass die klassische Portfolio-Effizienz nach Markowitz aufgrund ihrer Mehrdeutigkeit und Instabilität wenig Bedeutung für Finanzinstitutionen hat. Zusätzlich sind in der Praxis mehr als nur die Standard-Nebenbedinungen in der Optimierung inkludiert.

# Kapitel 3

# Portfolio Resampling

## 3.1 Schätzfehler

Bernd Scherer geht im Artikel „Portfolio Resampling: Review and Critique“ [8] zunächst darauf ein, dass der Optimierungsalgorithmus zu leistungsstark für die geschätzten Inputdaten ist, welches das Hauptproblem der traditionellen Portfolio-Optimierung darstellt. Der Algorithmus bevorzugt jene Assets mit den attraktivsten Eigenschaften (hohe Ertäge und geringes Risiko bzw. Korrelationen) während jene mit den schlechtesten Beschaffenheiten oft gar nicht gewählt werden. Da die Inputdaten für die Berechnung der Effizienzkurve statistische Parameter sind und diese mit Fehler geschätzt wurden, sind typischerweise jene Extremwerte, welche in der Optimierungsprozedur gewählt werden, die, in denen der *Schätzfehler* am ehesten hoch ist. Dadurch maximiert die Optimierung die Auswirkung des Schätzfehlers in den Portfolio-Gewichten. [8, p.98]

Zu dem Problem kommt hinzu, dass die Maschinengenauigkeit von Computern bei ungefähr 16 Dezimalstellen liegt. Da aber in der Praxis Assetrenditen öfter nur mit 2 Nachkommastellen angegeben werden, sind geschätzte

Renditen mit 16 Nachkommastellen eine unrealistische Annahme über die Sicherheit der Inputdaten. Dieses Problem leitet sich nicht unbedingt von der Wahl des Algorithmus selbst ab, vielmehr ruft es nach einer Verfeinerung und Analyse der Inputdaten. [5, p.31], [8, p.98]
Eine 1998 im Buch „Efficient Asset Management“ von Richard O. Michaud vorgestellte Methode, um das Problem dieser sogenannten Fehlermaximierung [5, p.36] einzudämmen, nennt sich „Resampled Efficiency“ und soll nachfolgend erörtert und mit der traditionellen Portfolioauswahl verglichen werden.

## 3.2 Statistisch äquivalente Portfolios

Die in der klassischen Mittelwert-Varianz-Optimierung verwendeten Schätzparameter sind meist Punktschätzungen von Mittelwert, Varianz und Korrelationen und beruhen auf nur einer Realisation von historischen Daten. Auch wenn Stationärität, also konstante Mittelwerte und Varianzen, vorausgesetzt wird, können die Punktschätzungen von Mittelwert und Varianz nur in sehr großen Stichproben den wahren Verteilungsparametern entsprechen.
Da die Punktschätzungen mittels Zufallsrenditen geschätzt wurden, können sie als Zufallsvariablen betrachtet werden. Folglich ergibt eine andere Stichprobe, welche aus derselben Renditeverteilung gezogen wurde, andere Schätzungen für Mittelwert und Varianz. Dieser Sachverhalt wird *Sampling-Fehler* genannt. [8, p.98]
Da verschiedene Stichproben derselben Renditeverteilung zu anderen Inputdaten führen, über jene man wieder neue, sogenannte *statistisch äquivalente* Effizienzgrenzen berechnen kann, kann man sagen, dass die Effizienzkurve eine Varianz besitzt. [5, p.37 ff] Zur Visualisierung des Schätzfehlers und

Abschätzung der Varianz einer Effizienzgrenze verwendeten J.D. Jobson und Bob Korkie im Jahr 1981 [5, p.32 ff] eine *Resampling Prozedur*, um statistisch äquivalente Effizienzgrenzen für die Optimierungsinputs zu berechnen.

## 3.3 Resampling Prozedur nach Jobson und Korkie

Jobson und Korkie [2] beschäftigten sich mit der nur durch die Standard-Nebenbedingungen bzw. nur durch eine der beiden beschränkten Portfolio-Optimierung.
Die Resampling Prozedur arbeitet wie nachfolgend beschrieben:
Aus der Renditeverteilung $(r, \Sigma)$ wird eine Stichprobe $\hat{Z} = (\hat{Z}_1, \ldots, \hat{Z}_n)$ von gleichem Umfang $k$ wie die Originalbeobachtungen $(Z_1, \ldots, Z_n)$ gezogen, wobei $\hat{Z}_i = (\hat{z}_{i,1}, \ldots, \hat{z}_{i,k})$ die Menge der simulierten Renditen des i-ten Assets angibt.
Zu diesen simulierten Renditedaten $(\hat{Z}_1, \ldots, \hat{Z}_n)$ werden die zur Optimierung benötigten Inputparameter wie der Erwartungswertvektor

$$\hat{r} = (\hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_n)$$

mit

$$\hat{r}_i = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} \hat{z}_{i,m}$$

als simulierten Erwartungswert des i-ten Assets der Beobachtungen $\hat{Z}_i$ und die Varianz-Kovarianz-Matrix

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \ldots & \hat{\sigma}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_{n1} & \ldots & \hat{\sigma}_{nn} \end{pmatrix}$$

wobei

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{ii} &= \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}(\hat{z}_{i,m}-\hat{r}_i)^2 \\ \hat{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}(\hat{z}_{i,m}-\hat{r}_i)^2(\hat{z}_{j,m}-\hat{r}_j)^2\end{aligned}$$

die Varianz des i-ten bzw. die Kovarianz des i-ten und j-ten Assets angibt, bestimmt. Mit diesen geschätzten Parametern wird eine simulierte Effizienzgrenze, welche den gleichen Standard-Bedingungen wie die „originale“ Effizienzgrenze unterliegt, berechnet und die Gewichtsvektoren $(\hat{x}^1,\ldots,\hat{x}^p)$ der $p$ Portfolios, wobei $\hat{x}^1 = (\hat{x}^1_1,\ldots,\hat{x}^1_n)$ der Gewichtsvektor des ersten Portfolios auf der simulierten Effizienzgrenze darstellt, auf ihr gespeichert. Diese Schritte werden t-mal wiederholt, das heißt es werden insgesamt $t$ Stichproben $\hat{Z}^{(1)},\ldots,\hat{Z}^{(t)}$ gezogen, sodass man am Ende $t$ simulierte Effizienzgrenzen erhält und auf jeder dieser Grenzen liegen $p$ Portfolios, deren insgesamt $p\cdot t$ Gewichtsvektoren gespeichert werden.

Bewertet man die aus den simulierten Daten $\hat{Z}^{(1)},\ldots,\hat{Z}^{(t)}$ resultierenden Portfolio-Gewichte $(\hat{x}^1,\ldots,\hat{x}^p)^{(1)},\ldots,(\hat{x}^1,\ldots,\hat{x}^p)^{(t)}$ mit den ursprünglichen Inputdaten $(r,\Sigma)$, was bedeutet, dass man zu jedem dieser simulierten Portfolios Rendite und Risiko berechnet, liegt jede der $t$ resampleten Effizienzgrenzen unter der Originalen. Der Grund dafür ist, dass kein Gewichtsvektor, welcher für die simulierten Mittelwerte und Varianzen optimal ist, für die originalen Inputdaten optimal sein kann. Definitionsgemäß ist jede simulierte Effizienzgrenze statistisch äquivalent zur jener, welche über die anfänglichen Inputdaten berechnet wurde. [5, p.37 ff]

Zur Analyse ihrer Resampling-Studien betrachteten Jobson und Korkie die Maximum-Sharpe-Ratio-Portfolios. Da die simulierten Daten variieren, variieren auch diese Portfolios. Jobson und Korkie verglichen das durchschnittliche maximale Sharpe-Verhältnis der simulierten Daten mit dem der origi-

nalen Inputparameter und kamen zu dem Ergebnis, dass Stichproben bestehend aus wenigen Beobachtungen großen Einfluss auf den Schätzfehler haben. Michaud gibt in [5, p.33] drei Gründe an, warum die Ergebnisse der Resampling Prozedur weniger schlecht im Vergleich zur traditionellen Mittelwert-Varianz-Optimierung angewandt auf die historischen Originalbeobachtungen sind:

- niedrigere Varianzen in den simulierten Daten verändern die Assetklasseneinteilung
- längere historische Beobachtungsperioden verfeinern die Schätzparameter
- kleinere Anzahl von Assets

Jobson und Korkies Studien über die nur durch die Standard-Nebenbedingungen beschränkte Optimierung führten zu dem Entschluss, dass diese wenig beschränkte Portfoliowahl keinen praktischen Wert für einen Investor hat, sie verleitet eher zu unglaubwürdigen Rückschlüssen. Außerdem zeigten die Analysen auf, dass für eine erfolgreiche Portfoliowahl die Unsicherheit in den Inputdaten auf keinen Fall ignoriert werden darf.
Um die Schwankungsbreite einer durch mehr als nur die Standard-Nebenbedingungen beschränkten Effizienzgrenze abzuschätzen, kann ebenso die vorher beschriebene Resampling-Prozedur verwendet werden. Der einzige Unterschied ist klarerweise die Einhaltung der linearen Nebenbedingungen bei der Berechnung der simulierten Effizienzgrenzen.
Eine Anwendung dieser Methode auf eine durch lineare Ungleichungen beschränkte Effizienzgrenze wird in Kapitel 4 gezeigt.
Die Resampling-Prozedur wird nun in Gebrauch genommen, um statistisch äquivalente Portfolios zu den in Beispiel 2.4 berechneten effizienten Portfolios

zu erhalten.

Die in der Statistik-Software R [7] geschriebene Funktion „Resampling“ (siehe Anhang B) benötigt als Eingabeparameter die Anzahl $k$ der Beobachtungen für jede zu ziehende Stichprobe, den Renditevektor $r$ und die Kovarianzmatrix $\Sigma$, die Matrix $A$, welche die Koeffizienten der Nebenbedingungen enthält, den Spaltenvektor $b$, der die rechten Seiten der Beschränkungen angibt sowie die Anzahl $t$ der gewünschten Stichproben-Ziehungen.

Mithilfe der Funktion *mvrnorm* des Pakets *MASS* werden $t$ multivariat normalverteilte Stichproben von gewünschtem Umfang $k$ generiert, gezogen aus der Renditeverteilung $(r, \Sigma)$. Aus diesen $t$ Stichproben erhält man die neuen Parameterschätzungen $(\hat{r}, \hat{\Sigma})^{(1)}, \ldots, (\hat{r}, \hat{\Sigma})^{(t)}$. Für jede dieser $t$ simulierten Inputdaten wird eine Effizienzgrenze bestehend aus $p$ Portfolios berechnet und deren Gewichtsvektoren gespeichert. Diese neuen $p \cdot t$ Gewichtsvektoren bewertet mit den originalen Inputdaten $(r, \Sigma)$ ergeben die Renditen und Risiken der simulierten statistisch äquivalenten Portfolios, welche im Risiko-Rendite-Diagramm abgetragen werden.

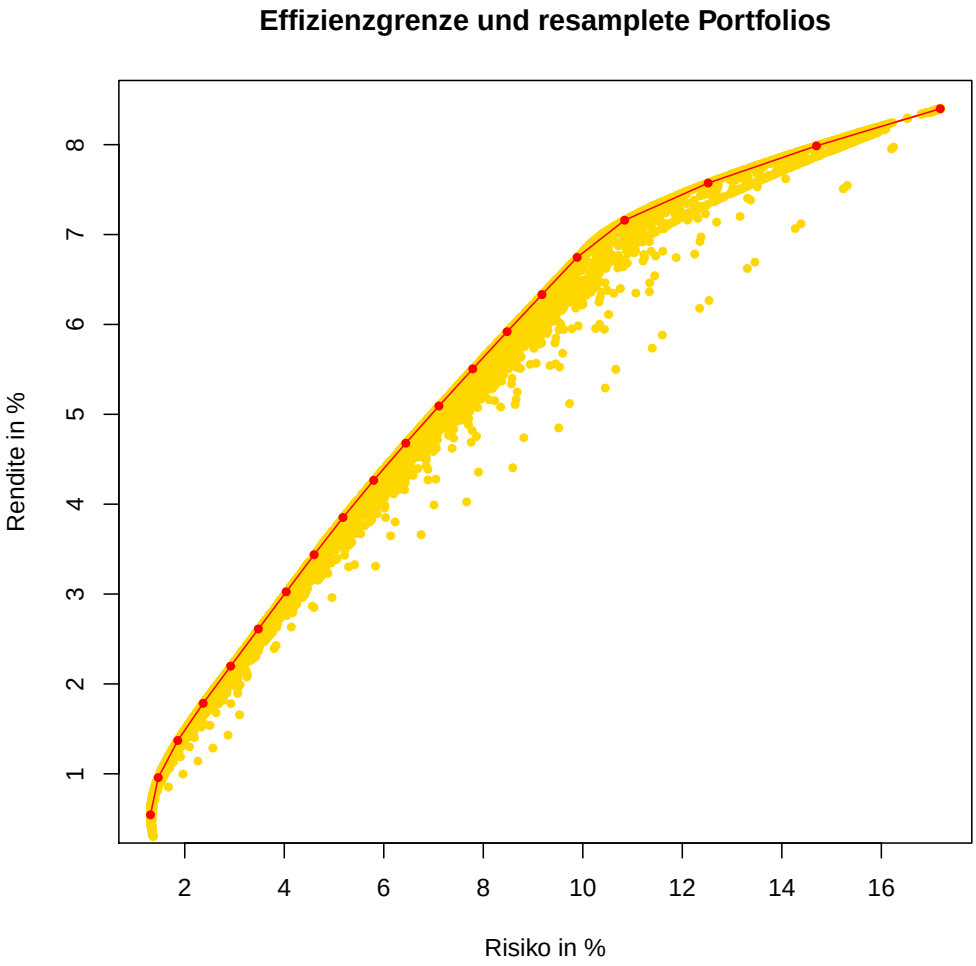


Abbildung 3.1: Effizienzgrenze und statistisch äquivalente Portfolios

Abbildung 3.1 zeigt die Effizienzgrenze aus Beispiel 2.4 und die statistisch äquivalenten Portfolios, welche aus der vorher beschriebenen Funktion resultieren. Es wurden $t = 500$ Stichproben mit jeweils $k = 52$ Beobachtungen, was einer einjährigen Beobachtung wöchentlicher Renditewerte entspricht, generiert. Es kann es passieren, dass zu manchen simulierten Inputdaten in der Optimierung keine Lösung gefunden wird, also keine Effizienzgrenze oder nicht alle $p = 20$ Portfolios auf ihr berechnet werden können. Diese nicht voll-

ständigen Berechnungen der Effizienzgrenze werden ganz aus der Menge der simulierten Effizienzgrenzen gestrichen. In diesem Resampling-Lauf konnte die Efficient Frontier zu 374 von 500 Stichproben berechnet werden.
Die gelben Punkte in der Grafik 3.1 repräsentieren die resampleten Portfolios. Die in rot eingezeichnete originale Effizienzgrenze kann als die Einhüllende der simulierten Portfolios gesehen werden. Die Streuung entsteht durch die Variation in den statistisch äquivalenten Gewichtsvektoren.
Erhöht man die Anzahl der Beobachtungen $k$, liegen die Datenpunkte näher an der originalen Frontier und die Streuung wird kleiner. In einem zweiten Resampling-Durchgang wurden wie auch zuvor $t = 500$ Stichproben kreiert, aber die Anzahl der Beobachtungen auf $k = 312$ erhöht, was einer sechsjährigen Beobachtung wöchentlicher Renditewerte entspricht. Die Fehlerquote lag bei nur noch 110 Effizienzgrenzen. In Abbildung 3.2 sind neuen statistisch äquivalenten Portfolios dargestellt, welche alle näher bei der originalen Effizienzgrenze liegen als die aus dem ersten Resampling-Lauf. Dieser Effekt, also die Erhöhung der Beobachtungen, ist äquivalent zur Reduktion bzw. Elimination des Sampling-Fehlers. Aber diese Analyse trifft keine Aussagen darüber, wo die neue resamplete Effizienzgrenze liegt.

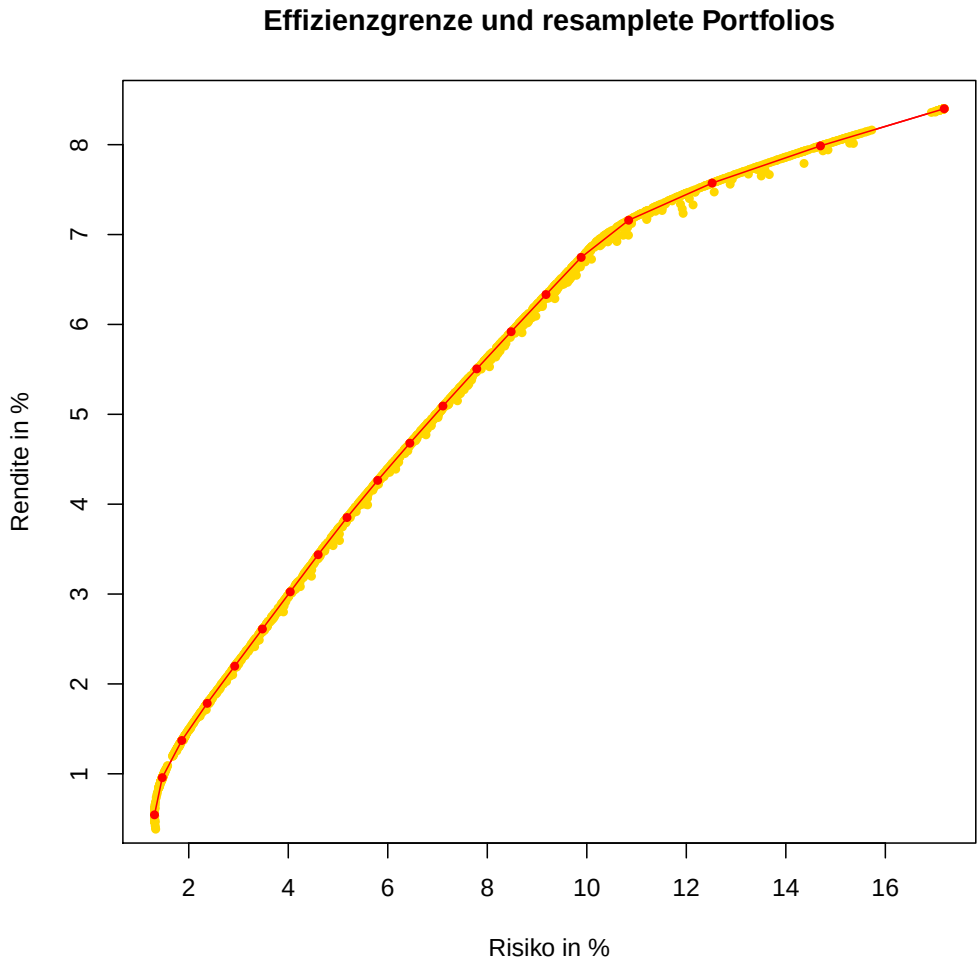


Abbildung 3.2: Effizienzgrenze und statistisch äquivalente Portfolios

## 3.4 Rangzugeordnete Portfolios

Die Grafiken aus dem vorangegangenen Abschnitt helfen, die Mehrdeutigkeit der Mittelwert-Varianz-Effizienz zu verdeutlichen. Aber welche resampleten Portfolios mit denen auf der Effizienzgrenze einhergehen wird aus der Abbildung nicht ersichtlich. Es stellt sich also nach Ermittlung der simulierten

effizienten Portfolios die Frage, welche statistisch äquivalenten Portfolios beispielsweise zu dem Minimum-Varianz-Portfolio, welches ganz links auf der Effizienzkurve liegt, zugehörig sind. Richard O. Michaud teilt dazu jedem Portfolio auf der Effizienzgrenze einen *Rang* zu, ausgehend von Rang 1 für das Minimum-Varianz-Portfolio bis hin zu Rang $p$ für das Maximum-Rendite-Portfolio. Da die Optimierungsaufgabe samt ihren Nebenbedingungen für jeden simulierten Datensatz die gleiche bleibt, kann ein Portfolio auf der Effizienzgrenze mit beliebigem Rang mit einem simulierten Portfolio gleichen Ranges in Verbindung gebracht werden. [5, p.39]
Für die effizienten Portfolios aus Beispiel 2.4 ist $p = 20$. Wird im weiteren Verlauf von dem mittleren Portfolio gesprochen ist das Portfolio mit Rang 10 gemeint.
In Abbildung 3.3 wurde zu dem Minimum-Varianz-, dem mittleren, dem Maximum-Rendite- und drei weiteren Portfolios auf der Effizienzgrenze die rangzugeordneten resampleten Portfolios des zweiten Resampling-Durchlaufs mit $k = 52$ Beobachtungen eingezeichnet. Es ist zu erkennen, dass die simulierten Portfolios sich in verschieden weitläufigen Bereichen unter der Effizienzgrenze befinden. Die Formen der Regionen der rangzugeordneten Portfolios variieren sehr unterschiedlich in Abhängigkeit von der Position des originalen Portfolios auf der Effizienzkurve. Die dem ersten Rang zugeordneten simulierten Portfolios sammeln sich so dicht rund um das originale Minimum-Varianz-Portfolio, dass eine Unterscheidung aus der Abbildung heraus nicht möglich ist. Umso näher das betrachtete Portfolio am Maximum-Rendite-Portfolio liegt, desto weitläufiger wird der Äquivalenzbereich der simulierten Portfolios.

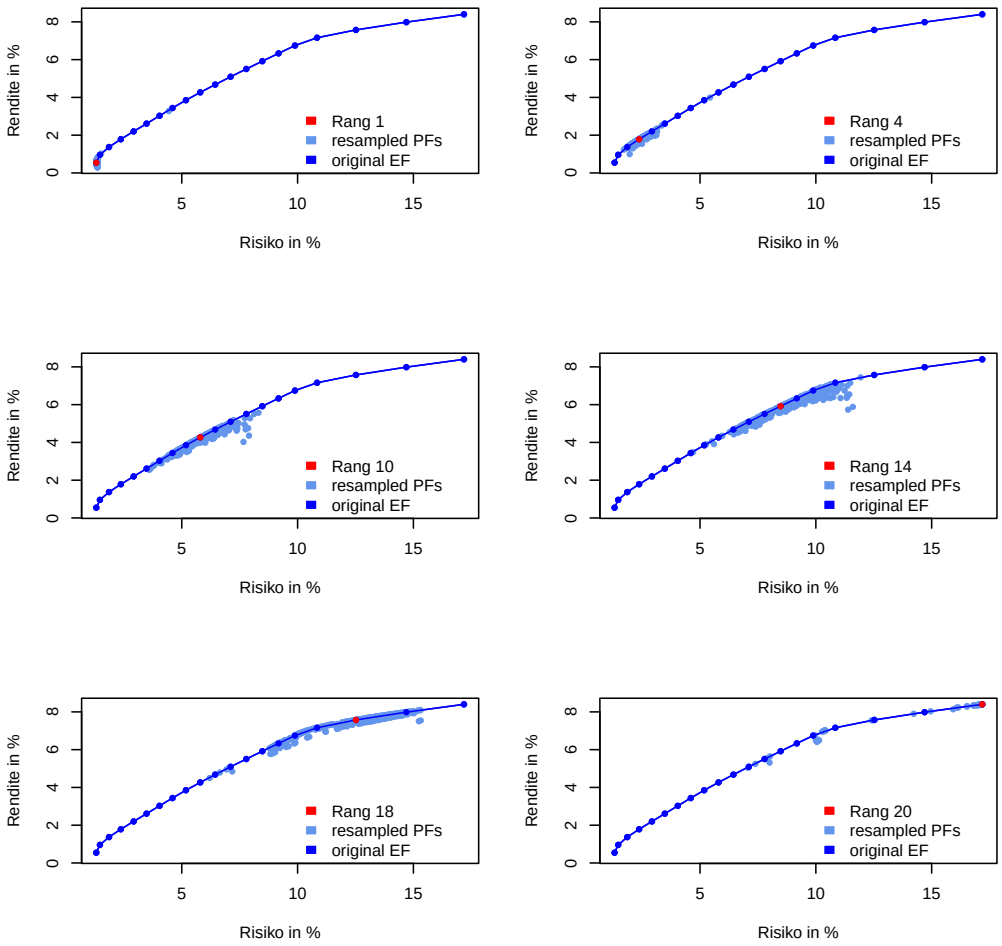


Abbildung 3.3: Rangzugeordnete Portfolios

Die Größe der statistischen Äquivalenzregionen deutet darauf hin, dass solche Resampling-Praktiken wenig dazu beitragen mit den Auswirkungen des Schätzfehlers auf die Portfolioauswahl umzugehen. Das Problem der Mehrdeutigkeit der traditionellen Mittelwert-Varianz-Optimierung, verursacht durch den Schätzfehler in den Inputdaten, erfordert eine statistische Wahrnehmung der Markowitz Effizienz. Die Methode der „Resampled Efficiency“ von Richard O. Michaud dient der Verbesserung von klassisch optimierten

Portfolios und wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

## 3.5 Resamplete Effizienzgrenze nach Michaud

Die „*Resampled Efficient Frontier Optimization*“ ist eine Verallgemeinerung der traditionellen Portfolio-Optimierung, da sie die Unsicherheit in den Inputparametern in die Optimierung miteinbezieht.
Da alle simulierten Effizienzgrenzen und somit alle rangzugeordneten Portfolios gleich wahrscheinlich sind, definiert die sogenannte „*Resampled Efficiency*“ das optimale Minimum-Varianz-Portfolio als den Durchschnitt der Portfoliogewichte aller simulierten Minimum-Varianz-Portfolios. [5, p.43]
Um die „*Resampled Efficient Frontier*“ zu erhalten, werden die Durchschnitte aller simulierten Portfolios zugehörig zu Rang 1 bis hin zu Rang $p$ berechnet. Der Gewichtsvektor $\bar{x}^i$ des resampleten Portfolios von Rang $i$ ist gegeben durch

$$\bar{x}^i = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^i \\ \vdots \\ \bar{x}_n^i \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

wobei das Anlagegewicht $\bar{x}_j^i$ des j-ten Assets im resampleten Portfolio von Rang $i$, durch

$$\bar{x}_j^i = \frac{1}{t} \sum_{m=1}^{t} \hat{x}_j^{i\,(t)} \tag{3.2}$$

berechnet wird. Durch diese Durchschnittsberechnung über alle $t$ Simulationen bleibt die Bedingung darüber, dass die Summe über die Gewichte eines Portfolios 100% ergibt, erhalten.
Die resamplete Effizienzgrenze bestehend aus $p$ resampleten Gewichtsvektoren $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^p)$ liegt unter der originalen Mittelwert-Varianz-Effizienzgrenze, wie in Abbildungen 3.4 und 3.5 zu den im vorigen Abschnitt simulierten Da-

ten gezeigt ist.

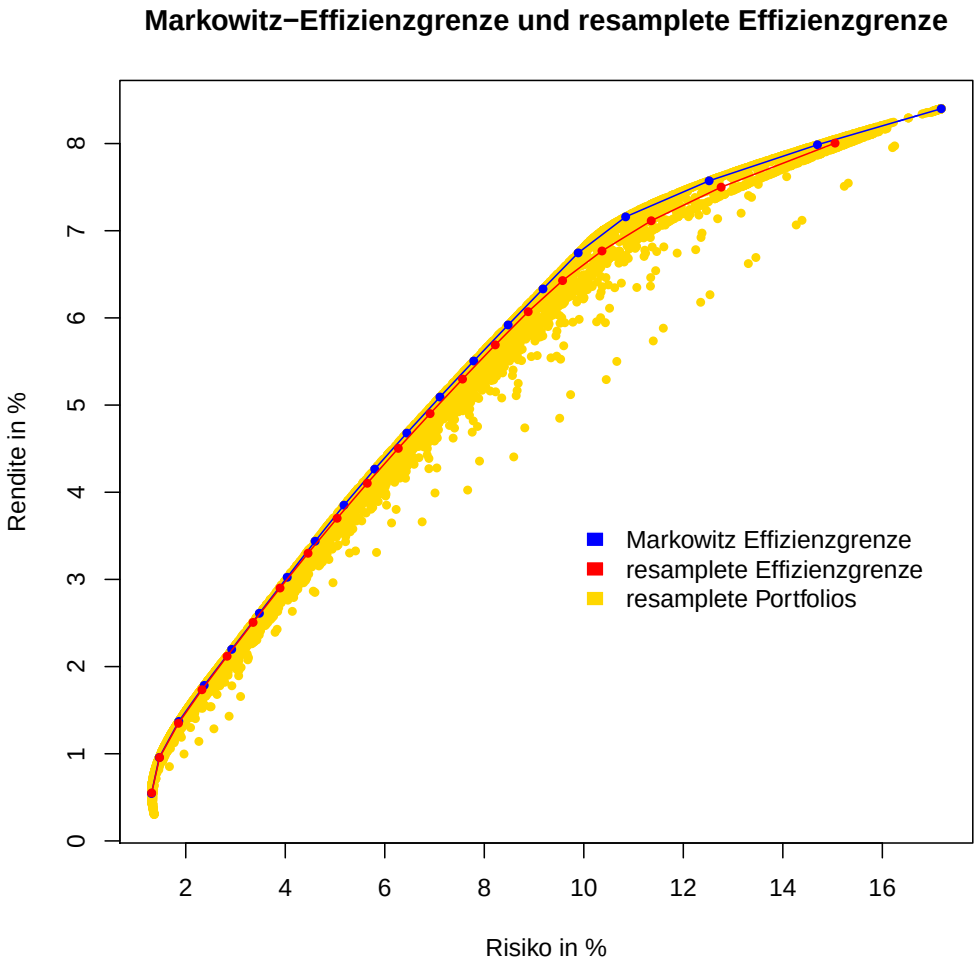


Abbildung 3.4: traditionelle und resamplete Effizienzgrenze zu Resampling-Lauf 1

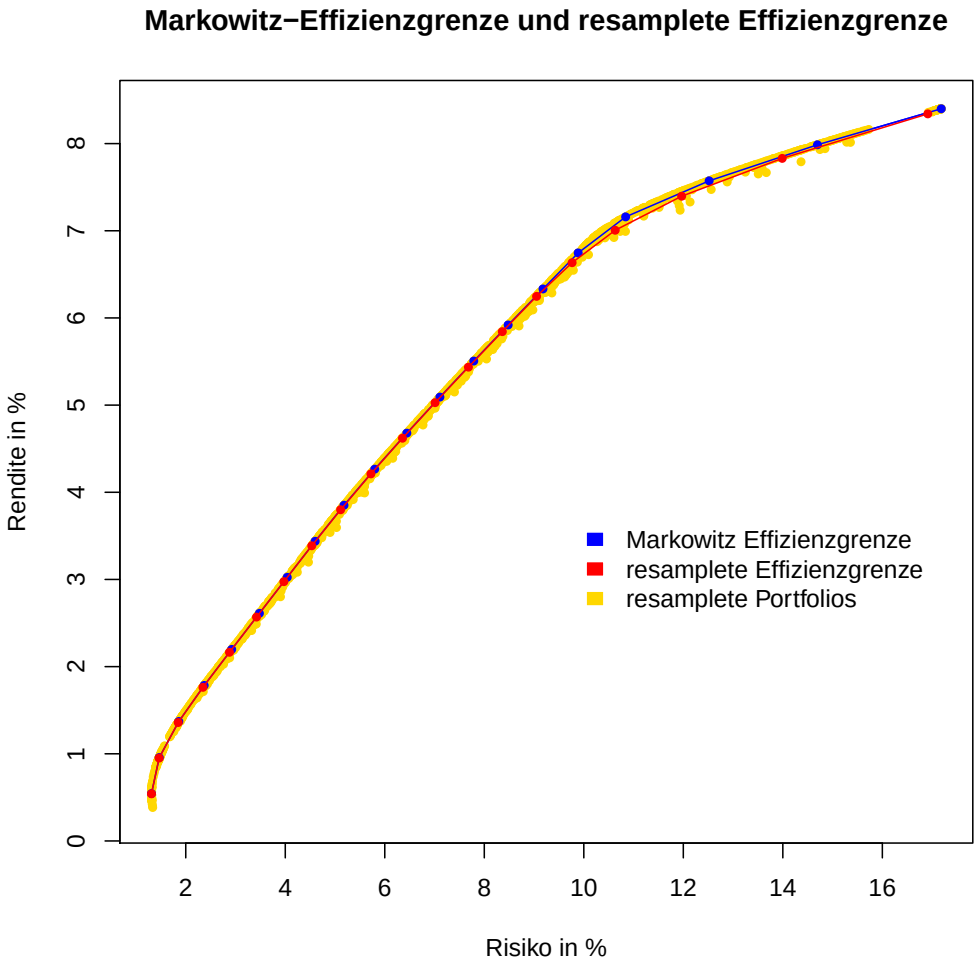


Abbildung 3.5: traditionelle und resamplete Effizienzgrenze zu Resampling-Lauf 2

Aus umso mehr Beobachtungen die simulierten Stichproben bestehen, desto näher liegt auch die resamplete Effizienzgrenze an der ursprünglichen Markowitz-Effizienzgrenze.

In der nächsten Grafik ist die Gewichtsverteilung der 20 resampleten effizienten Portfolios aus dem zweiten Resampling-Durchgang aus Kapitel 3.3 dargestellt. Die Zusammensetzung der resampleten Portfolios verläuft im Vergleich

zu denen in Grafik 2.2, welche die Gewichte der orginialen Effizienzgrenze zeigt, glatter. Es passieren nicht so viele plötzliche Sprünge von der Auswahl an Assets in einem Portfolio zur Wahl im nächsten Portfolio. Weiters gehen mehr Assets in die Optimierung ein, was zu der wünschenswerten Eigenschaft von mehr Diversifikation in der Portfolioauswahl führt.

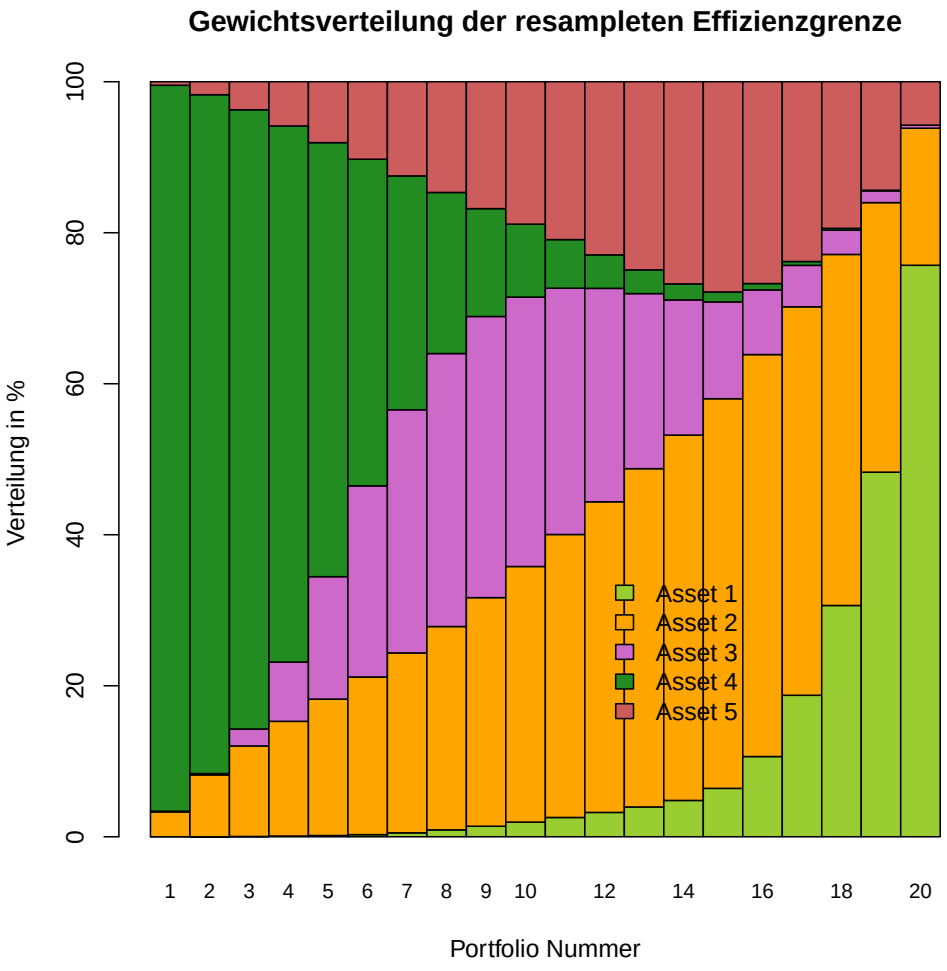


Abbildung 3.6: Zusammensetzung der resampleten Portfolios

Die Tabelle 3.1 zeigt die Gewichtsverteilungen der Minimum-Varianz-Portfolios, der mittleren und der Maximum-Rendite-Portfolios der traditionellen und

der resampleten Effizienzgrenze zu dem Resampling-Lauf mit $k = 52$ Beobachtungen und $t = 500$ Stichproben aus Kapitel 3.3. Man sieht in der

| | Minimum-Varianz | | Mittel | | Maximum-Rendite | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | MV | RE | MV | RE | MV | RE |
| Asset 1 | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 1.94% | 100.00% | 75.69% |
| Asset 2 | 3.63% | 3.30% | 41.43% | 33.86% | 0.00% | 18.15% |
| Asset 3 | 0.00% | 0.08% | 43.55% | 35.68% | 0.00% | 0.41% |
| Asset 4 | 96.37% | 96.15% | 0.00% | 9.65% | 0.00% | 0.00% |
| Asset 5 | 0.00% | 0.47% | 15.02% | 18.87% | 0.00% | 5.75% |
| Rendite | 0.54% | 0.55% | 4.27% | 4.10% | 8.40% | 8.01% |
| Risiko | 1.31% | 1.31% | 5.80% | 5.65% | 17.18% | 15.05% |

Tabelle 3.1: Vergleich Markowitz - resamplete Portfolios

Tabelle 3.1, dass sich die Gewichtsvektoren der Minimum-Varianz-Portfolios nach Markowitz und Michaud zwar nur sehr wenig unterscheiden, aber die Portfolios auf der resampleten Effizienzgrenze setzen sich im Allgemeinen aus mehr Assets zusammen, wie gut im Vergleich der Gewichtsvektoren von den mittleren und den Maximum-Rendite-Portfolios zu sehen ist. Auch die Renditen und Risiken der resampleten Portfolios liegen unter den Werten der „originalen“ Effizienzgrenze nach Markowitz.

## 3.6 Eigenschaften der resampleten Effizienzgrenze

Die resamplete Effizienzgrenze liegt unter der nach Markowitz optimierten Kurve was daraus resultiert, dass die Gewichtsvektoren der Portfolios auf der resampleten Effizienzgrenze mit den ursprünglichen Inputdaten bewer-

tet wurden und die für die simulierten Inputdaten optimalen Lösungen nicht optimal für die originalen Inputparameter sein können. Betrachtet man die resamplete Efficient Frontier oberflächlich, erscheint sie schlechter als die traditionelle Effizienzgrenze, da sie weniger erwartete Rendite erzielt. Diese Eigenschaft kommt daher, dass die resampleten Portfolios mehr Diversifikation aufweisen, das heißt durch die Verteilung des Kapitals auf mehr Assets erzielen die resampleten Portfolios weniger Rendite als jene Portfolios, welche auf der Markowitz-Effizienzgrenze liegen.

Auch wenn die beiden Kurven im Risiko-Rendite-Diagramm sehr ähnlich aussehen, unterscheiden sich die Gewichtsvektoren der zugehörigen Portfolios. Führt man eine nur durch die Standard-Nebenbedingungen beschränkte Portfolio-Optimierung durch und vergleicht die daraus resultierenden Ergebnisse mit denen aus der „Resampled Efficient Frontier Optimization“, sind die Unterschiede in der Zusammensetzung der Portfolios wie in Abschnitt 3.5 klar ersichtlich. Beispielsweise besteht das Maximum-Rendite-Portfolio auf der traditionellen Effizienzgrenze zu 100% aus dem Asset mit der höchsten Rendite, während das simulierte Maximum-Rendite-Portfolio hingegen mehr diversifiziert ist; es wird in definitiv mehr als ein Asset investiert.

Neben der Diversifikation erfüllt die resamplete Effizienzgrenze eine weitere wünschenswerte Eigenschaft, nämlich weniger sprunghafte Übergänge in den Assets eines Portfolios zu denen des nächsten wie im Vergleich der beiden Balkendiagramme in Abbildungen 2.2 und 3.6 zu sehen ist.

Die „Resampled Efficient Frontier Optimization“ spiegelt die traditionelle Portfolio-Optimierung im Zusammenhang mit Unsicherheit über die Inputdaten wider. Wenn sich ein Investor zu 100% sicher sein kann über die Renditen und Varianzen der in seinem Investitionsrahmen vorkommenden Assets, dann sollte er die klassische Portfolio-Optimierung nach Markowitz anwen-

den. Dieser Fall wird in der Praxis kaum auftreten, beruhen die erwarteten Renditen und Risiken tendenziell auf Annahmen, die aufgrund von Analysen der Historie von Wertpapieren und Prognosen von Asset-Managern über die zukünftige Performance getroffen wurden. Noch dazu kommt, dass die Sicherheit bis in die sechzehnte Nachkommastelle der Inputdaten für die Optimierung gelten müsste, da sonst der wegen der Computergenauigkeit zu leistungsstarke Algorithmus zur Fehlermaximierung führen würde.
Kann sich ein Investor nicht sicher sein über die Inputparameter, sollte er die „Resampled Efficient Frontier Optimization“ anwenden. An dieser Stelle muss ohnehin mit weniger erwarteter Rendite gerechnet werden und niedrigeres Risiko wird eher akzeptiert. [5]
Bernd Scherer sieht die Tatsache, dass die Budget-Beschränkung erfüllt ist als womöglich einzige Begründung, warum man die Resampling-Prozedur nach Michaud anwenden sollte und weist daraufhin, dass diese Methode auf keinem wirtschaftlichen Prinzip beruht, wonach er sie als Heuristik versteht. [8]

# Kapitel 4

# Anwendungen

In der klassischen Portfolio-Optimierung nach Markowitz werden nur die Standardnebenbedingungen (2.6, 2.7) inkludiert, was dazu führt, dass der Optimierungsalgorithmus jene Assets überwiegt, welche große geschätzte Renditen, negative Korrelationen und kleine Varianzen haben und Assets mit gegenteiligen Eigenschaften meidet. Durch die Einführung weiterer linearer Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen beispielsweise über die maximale Höhe der einzelnen Asset-Gewichte oder Einschränkungen über die Summe der Gewichte von Assets einer Klasse kann das sture Wählen des Algorithmus unterbunden und so die klassische MV-Optimierung robuster gemacht werden.

In diesem Kapitel werden die traditionelle Portfolioauswahl und die Methode des Portfolio-Resamplings auf Daten, welche von der Risk Management Abteilung der Generali Versicherungs AG zur Verfügung gestellt wurden, angewendet.

## 4.1 Inputdaten

Die bereitgestellten Inputdaten bestehen aus einem Renditevektor, einem Vektor, der die Duration zu jedem Asset angibt, die Kovarianzmatrix sowie verschiedene Beschränkungen über den Anteil des Kapitals, welcher in einzelne Assets aber auch in Klassen von Assets investiert werden darf.
Zu den Standard-Nebenbedingungen kommen weitere lineare Ungleichungs-Nebenbedingungen wie jene über die Veranlagung in jedes einzelne Asset der Form

$$b_i \leq x_i \leq B_i$$

hinzu. $b_i$ resp. $B_i$ sei die untere resp. obere Schranke des Gewichts $x_i$ investiert in das i-te Asset. Weiters sind Beschränkungen der Assetgruppen durch

$$b_{G_k} \leq \sum_{i \in G_k} x_i \leq B_{G_k}$$

gegeben, wobei $b_{G_k}$ die untere und $B_{G_k}$ die obere Schranke für den Anteil des Kapitals sind, welcher in die Assetgruppe $G_k \subseteq \{1, \ldots, n\}$ investiert werden darf. Die Duration-Nebenbedingung hat die Form

$$b_d \leq \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \leq B_d$$

und ist beschränkt durch $b_d$ und $B_d$, wobei $d_i$ die Duration des i-ten Assets angibt. Die 22 hier verwendeten Assets stammen aus den 4 großen Klassen *Fixed Income*, *Equity*, *Alternative Investment* und *Real Estate*. Die Klasse *Fixed Income* ist in zwei Gruppen unterteilt, *Government Bonds* und *Corporate Bonds*, für die unterschiedliche Vorgaben über die Veranlagung gelten sollen und eine dritte Gruppe *Alternative Investmentgroup* ist eine Zusammensetzung aus Assets der Klassen *Equity* und *Alternative Investment*.
Die genaue Auflistung der unteren und oberen Schranken sowie die Einteilung

in Gruppen ist in Tabelle 4.1 angegeben. Die Kovarianzmatrix, der Renditevektor und der Vektor der Duration sind im Anhang A gegeben.

## 4.2 Linear beschränkte Effizienzgrenze nach Markowitz

Die zu berechnende Effizienzgrenze soll aus 20 Portfolios bestehen und durch die Nebenbedingungen in Tabelle 4.1 beschränkt sein. Um die Portfolios berechnen zu können, muss ein Intervall für die gewünschten Portfolio-Renditen gewählt werden. Das erste Portfolio auf der Effizienzgrenze soll das Minimum-Varianz-Portfolio sein und als abschließendes wird das Maximum-Rendite-Portfolio berechnet.

Wie auch schon in Beispiel 2.4 gezeigt, müssen zuerst die Renditen zum Minimum-Varianz- und Maximum-Rendite-Portfolio bestimmt werden. Danach wird der Vektor $r^{var}$ erzeugt, der die 20 gewünschten Portfoliorenditen für die Effizienzgrenze ausgehend von $ER_{min}$ bis zu $ER_{max}$ in gleichen Abständen enthält.

$$r^{var} = \begin{pmatrix} 0.031655 \\ 0.032003105 \\ 0.032351211 \\ \vdots \\ 0.037572789 \\ 0.037920895 \\ 0.038269 \end{pmatrix}$$

| **Group** | **Asset Name** | **Lower Bound (%)** | **Upper Bound (%)** |
|---|---|---|---|
| | Liquidity and Government FRN bonds | 5 | 10 |
| | Inflation Linked | 0 | 2 |
| 1 | Government bonds FIX 1-3Y | 15 | 25 |
| 1 | Government bonds FIX 3-5Y | 5 | 10 |
| 1 | Government bonds FIX 5-7Y | 0 | 5 |
| 1 | Government bonds FIX 7-10Y | 20 | 25 |
| 1 | Government bonds FIX 10+Y | 10 | 15 |
| | Corporate bonds FRN | 0 | 2 |
| 3 | Corporate bonds FIX 1-3Y | 0 | 5 |
| 3 | Corporate bonds FIX 3-5Y | 5 | 10 |
| 3 | Corporate bonds FIX 5-7Y | 5 | 10 |
| 3 | Corporate bonds FIX 7-10Y | 0 | 5 |
| 3 | Corporate bonds FIX 10+Y | 0 | 5 |
| | Corporate High Yield | 0 | 1 |
| | Abs | 0 | 1 |
| | Msci EMU | 1 | 5 |
| | S&P 500 | 0 | 0.5 |
| | Topix | 0 | 0.5 |
| | Bric | 0 | 0.5 |
| | Real Estate | 0 | 2 |
| 2 | Hedge Fund | 0 | 0 |
| 2 | Private Equity | 0 | 0 |
| **Group-Constraints** | | | |
| 1 | Government bonds | 58 | 65 |
| 2 | Alternative Investmentgroup | 0 | 0 |
| 3 | Corporate bonds | 26 | 30 |
| **Duration** | | | |
| | Duration | 4.5 | 6 |

Tabelle 4.1: Nebenbedingungen

Nach Lösen der Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} \min x^T \ \Sigma \ x \\ \text{unter} \\ x^T r = r_j^{var} \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ b_i \leq x_i \leq B_i \\ b_{G_k} \leq \sum_{i \in G_k} x_i \leq B_{G_k} \\ b_d \leq \sum_{i=1}^n d_i x_i \leq B_d \end{cases} \tag{4.1}$$

für jedes Element $j$ des Vektors $r^{var}$ erhält man die 20 Gewichtsvektoren der Portfolios auf der Effizienzgrenze. Mithilfe der Formeln für die Portfoliovarianz und -rendite aus 2.4 und 2.5 können die Risiken und Renditen der einzelnen Portfolios bestimmt werden.

In Tabelle 4.2 sind die Gewichtsvektoren sowie die Risiken und Renditen des Minimum-Varianz-, des mittleren und des Maximum-Rendite-Portfolios sowohl die der Portfolios Nr. 4, 7, 13 und 16 gegeben.

Nachdem das Risiko und die Rendite zu jedem optimalen Portfolio berechnet wurde, kann die Effizienzgrenze im Risiko-Rendite-Diagramm wie in Abbildung 4.1 dargestellt werden.

| | PF Nr. 1 | PF Nr. 4 | PF Nr. 7 | PF Nr. 10 | PF Nr. 13 | PF Nr. 16 | PF Nr. 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Asset 1 | 10.00% | 8.88% | 6.26% | 5.00% | 5.00% | 5.00% | 5.00% |
| Asset 2 | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| Asset 3 | 23.00% | 23.00% | 23.00% | 17.80% | 15.00% | 15.00% | 15.00% |
| Asset 4 | 5.00% | 5.00% | 5.00% | 10.00% | 8.00% | 5.00% | 5.00% |
| Asset 5 | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 3.00% | 0.00% |
| Asset 6 | 20.00% | 20.00% | 20.00% | 20.20% | 25.00% | 25.00% | 23.08% |
| Asset 7 | 10.00% | 10.00% | 10.00% | 10.00% | 10.00% | 10.00% | 14.92% |
| Asset 8 | 1.28% | 1.29% | 2.00% | 2.00% | 1.44% | 0.00% | 0.00% |
| Asset 9 | 5.00% | 5.00% | 5.00% | 5.00% | 5.00% | 3.08% | 0.00% |
| Asset 10 | 10.00% | 10.00% | 10.00% | 10.00% | 10.00% | 10.00% | 9.00% |
| Asset 11 | 10.00% | 10.00% | 10.00% | 10.00% | 10.00% | 10.00% | 10.00% |
| Asset 12 | 1.00% | 1.00% | 1.00% | 2.00% | 2.56% | 5.00% | 5.00% |
| Asset 13 | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.92% | 5.00% |
| Asset 14 | 0.00% | 1.00% | 1.00% | 1.00% | 1.00% | 1.00% | 1.00% |
| Asset 15 | 1.00% | 1.00% | 1.00% | 1.00% | 1.00% | 1.00% | 1.00% |
| Asset 16 | 2.50% | 2.34% | 4.74% | 5.00% | 5.00% | 5.00% | 5.00% |
| Asset 17 | 0.50% | 0.50% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| Asset 18 | 0.21% | 0.50% | 0.50% | 0.50% | 0.50% | 0.50% | 0.50% |
| Asset 19 | 0.50% | 0.50% | 0.50% | 0.50% | 0.50% | 0.50% | 0.50% |
| Asset 20 | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| Asset 21 | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| Asset 22 | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| Rendite | 3.17% | 3.27% | 3.37% | 3.48% | 3.58% | 3.69% | 3.83% |
| Risiko | 3.13% | 3.16% | 3.23% | 3.38% | 3.56% | 3.79% | 4.19% |

Tabelle 4.2: Gewichtsvektoren, Rendite und Risiko zu 7 effizienten Portfolios

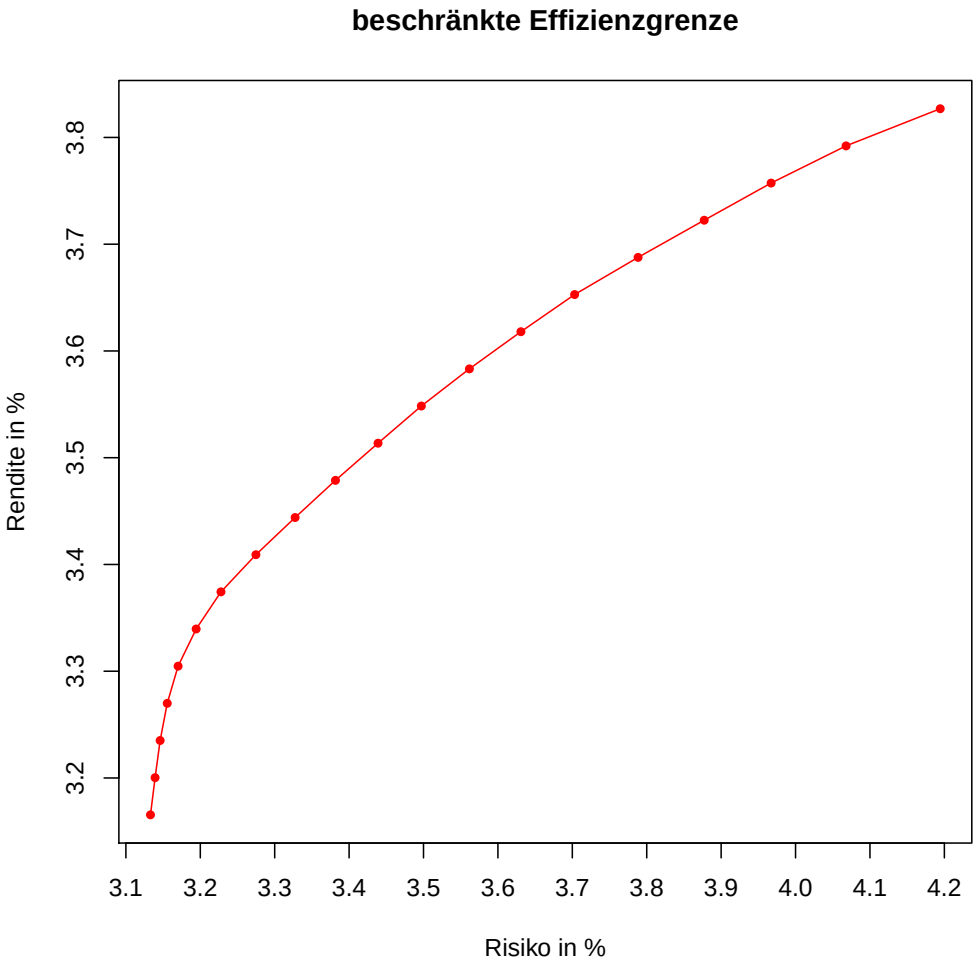


Abbildung 4.1: Effizienzgrenze

Ein gleichgewichtetes Portfolio wie zu Beispiel 2.4 in Abbildung 2.1 eingezeichnet, läge in dieser Aufgabe bei einer Rendite von 5.18% zu einem Risiko in der Höhe von 6.34%, was eine viel höhere Rendite als alle auf der Effizienzgrenze liegenden Portfolios hätte, aber da einzelne Nebenbedingungen über die Assetgewichte es verbieten, in jedes Asset 4.55% zu investieren, macht die Betrachtung des gleichgewichteten Portfolios in dieser linear beschränkten Portfolio-Optimierung wenig Sinn.

Im Balkendiagramm in Abbildung 4.2 werden die Assetallokationen der Portfolios entlang der Effizienzgrenze dargestellt.

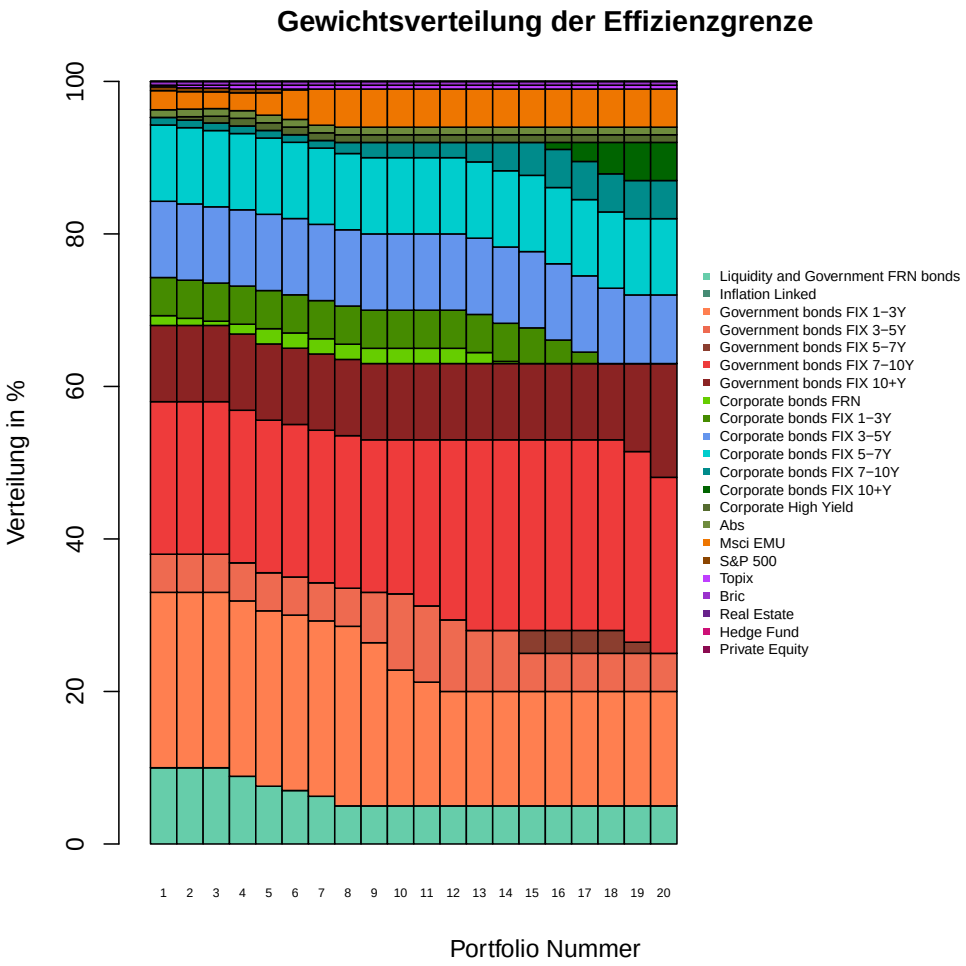


Abbildung 4.2: Zusammensetzung der 20 effizienten Portfolios

Man erkennt in 4.2 gut, dass die linearen Einschränkungen über einzelne Investitionen erfüllt sind. Es sind nicht alle Assets in jedem Portfolio eingegangen, da sie der Algorithmus ausgelassen hat. Einerseits liegt das an den „schlechten“ Eigenschaften mancher Assets, andererseits an den Beschränkungen, da manche Assets nur nach oben hin beschränkt sind, das heißt es

gibt keinen Mindestbetrag, der in sie investiert werden muss.
Die Gruppen-Bedingungen der Staatsanleihen sowie die der Unternehmensanleihen zeichnen sich in jedem Portfolio ab.

### 4.2.1 Kapitalmarktlinie

Auch für diese Inputdaten wird die Kapitalmarktlinie und das Marktportfolio zu einem risikolosen Zinssatz von $r_0 = 2\%$ bestimmt. Die zusätzlichen linearen Nebenbedingungen verändern die Berechnung der Sharpe-Ratio nicht. Über 2.15 werden die 20 Sharpe-Verhältnisse zu den Portfolios auf der Effizienzgrenze berechnet. Das Maximum beträgt 0.446344 und gehört zu Portfolio Nr. 15, welches somit das Marktportfolio bildet. Die Kapitalmarktlinie sowie das Marktportfolio sind in Abbildung 4.3 dargestellt.

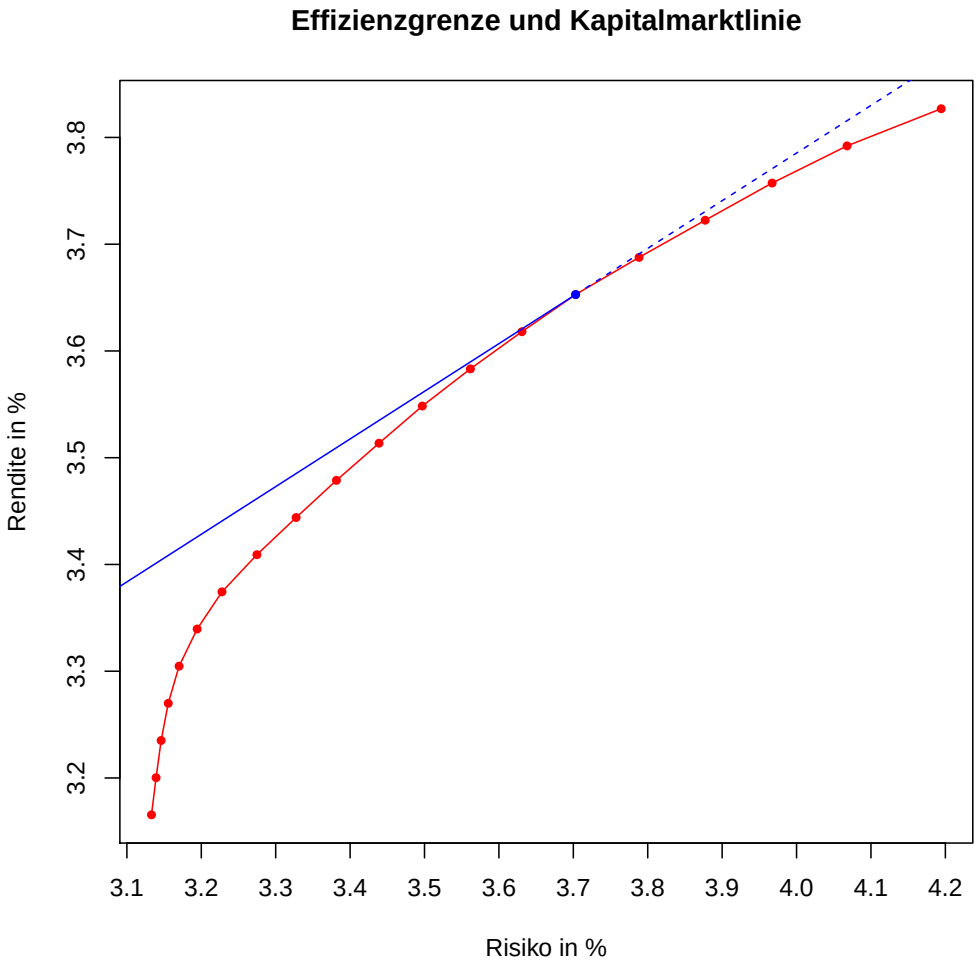


Abbildung 4.3: Kapitalmarktlinie und Marktportfolio

### 4.2.2 Vergleich: Markowitz-Effizienz im beschränkten und unbeschränkten Fall

Zum Vergleich wurden zu diesen Daten die Effizienzgrenze im nur durch die Standard-Nebenbedinungen beschränkten Fall berechnet, das heißt es wurden nur die Budget-Beschränkung und der Ausschluss der Leerverkaufsoption berücksichtigt.

In dieser Aufgabenstellung erhält man für das Minimum-Varianz-Portfolio eine Rendite von 0.95% zu einem Risiko von 0.19%. Der maximal erreichbare Rüchfluss des Maximum-Rendite-Portfolios liegt bei 13.71% und die Standardabweichung beträgt 20.45%.
Somit reichen die gewünschten Renditen für die 20 Portfolios auf der Effizienzgrenze von 0.95% bis 13.71%, was im Vergleich zum Vektor $r^{var}$ der linear beschränkten Optimierungsaufgabe aus dem vorherigen Abschnitt eine viel weitläufigere Spannweite ist. Dies resultiert daher, dass bis auf die Standard-Nebenbedingungen keine weiteren Beschränkungen gelten.
Doch durch die wenigen Einschränkungen und die Größe des Portfoliorahmens, im Unterschied zu Beispiel 2.4 mit 5 Assets sind hier 22 gegeben, findet der Algorithmus nicht zu jeder gewünschten Rendite eine Lösung für die Optimierungsaufgabe. Auch durch minimale Änderungen der gewünschten Portfoliorenditen, für die keine Lösung gefunden wurde, konnte die Problemstellung für die Portfolios Nr. 7, 13 und 14 nicht gelöst werden. Die unbeschränkte Effizienzgrenze ist in Abbildung 4.4 illustriert.

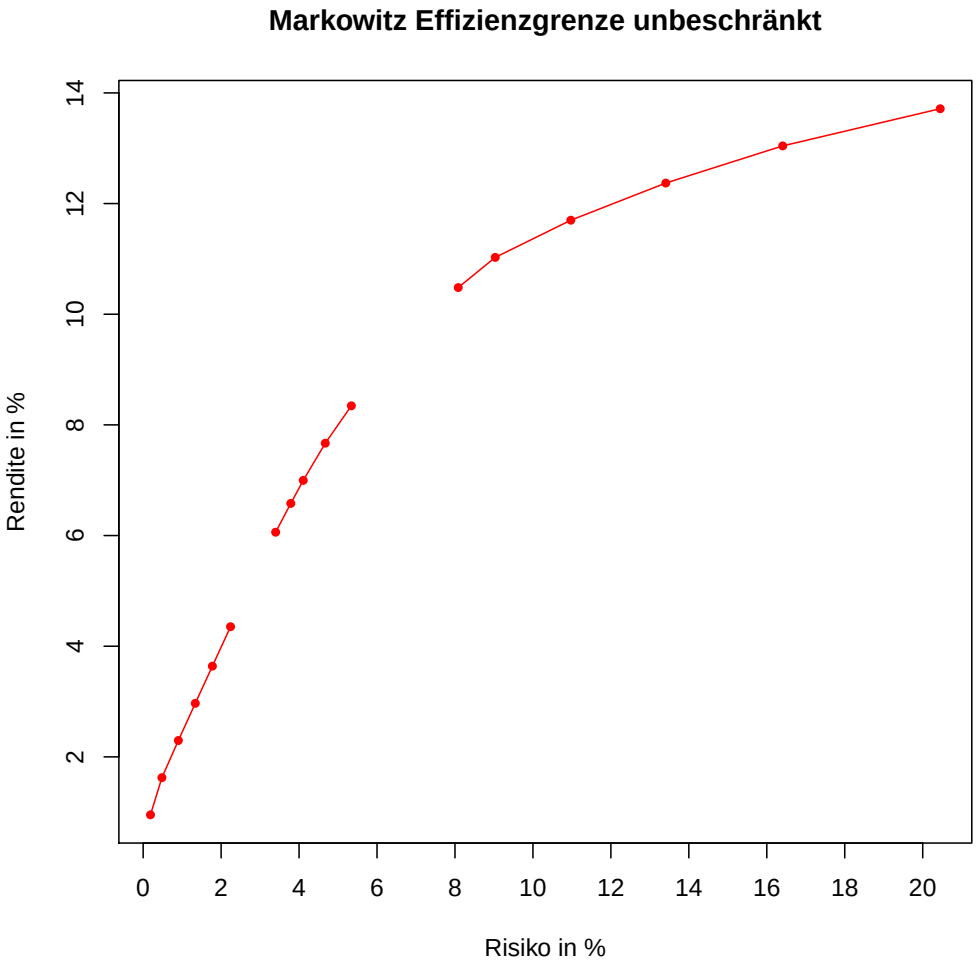


Abbildung 4.4: unbeschränkte Effizienzgrenze

In Tabelle 4.3 sind die Gewichtsvektoren, Rendite und Risiko vom Minimum-Varianz-, von dem mittleren und dem Maximum-Rendite-Portfolio der beschränkten und unbeschränkten Optimierung dargestellt.

Wie zu erwarten gehen in die unbeschränkte Portfolio-Optimierung weit weniger Assets ein. Der Algorithmus wählt den Gewichtsvektor zum Minimum-Varianz-Portfolio so, dass so viel Kapital wie möglich in das Asset mit kleinster Varianz investiert wird; in diesem Fall werden rund 97% in Asset Nr. 1

| | Minimum-Varianz | | Mittel | | Maximum-Rendite | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Asset 1 | 10.00% | 97.18% | 5.00% | 0.00% | 5.00% | 0.00% |
| Asset 2 | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| Asset 3 | 23.00% | 0.00% | 17.80% | 0.00% | 15.00% | 0.00% |
| Asset 4 | 5.00% | 0.00% | 10.00% | 0.00% | 5.00% | 0.00% |
| Asset 5 | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| Asset 6 | 20.00% | 0.00% | 20.20% | 32.90% | 23.08% | 0.00% |
| Asset 7 | 10.00% | 0.25% | 10.00% | 0.00% | 14.92% | 0.00% |
| Asset 8 | 1.28% | 1.48% | 2.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| Asset 9 | 5.00% | 0.00% | 5.00% | 5.19% | 0.00% | 0.00% |
| Asset 10 | 10.00% | 0.00% | 10.00% | 0.00% | 9.00% | 0.00% |
| Asset 11 | 10.00% | 0.00% | 10.00% | 0.00% | 10.00% | 0.00% |
| Asset 12 | 1.00% | 0.00% | 2.00% | 0.00% | 5.00% | 0.00% |
| Asset 13 | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 5.00% | 0.00% |
| Asset 14 | 0.00% | 0.11% | 1.00% | 19.73% | 1.00% | 0.00% |
| Asset 15 | 1.00% | 0.77% | 1.00% | 25.50% | 1.00% | 0.00% |
| Asset 16 | 2.50% | 0.00% | 5.00% | 0.00% | 5.00% | 0.00% |
| Asset 17 | 0.50% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| Asset 18 | 0.21% | 0.00% | 0.50% | 0.00% | 0.50% | 0.00% |
| Asset 19 | 0.50% | 0.00% | 0.50% | 1.68% | 0.50% | 11.09% |
| Asset 20 | 0.00% | 0.05% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| Asset 21 | 0.00% | 0.06% | 0.00% | 15.00% | 0.00% | 31.24% |
| Asset 22 | 0.00% | 0.10% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 57.66% |
| Rendite | 3.17% | 0.95% | 3.48% | 7.00% | 3.83% | 13.71% |
| Risiko | 3.13% | 0.19% | 3.38% | 4.11% | 4.19% | 20.45% |

Tabelle 4.3: Vergleich der beschränkten und unbeschränkten Portfolios

veranlagt.
Die Verteilung des Kapitals für das Maximum-Rendite-Portfolio wurde wieder unter Berücksichtigung der Korrelationen gewählt, somit werden nicht 100% in das Asset mit höchstem erwarteten Rückfluss investiert, sondern eine Kombination aus Assets mit hohen Renditen mit geringer Korrelation ausgesucht. Trotzdem treten nur 3 Assets im Gewichtsvektor des Maximum-Rendite-Portfolios auf.
Schlussendlich ist zu sagen, dass die Einschränkung der Optimierung durch lineare Ungleichungen und Gleichungen die traditionelle Portfolioauswahl verbessert. Die Fehlermaximierung des Algorithmus, welche durch die Überwertung von Assets mit guten Eigenschaften entsteht, wird durch die Beschränkungen eingedämmt, aber sie kann damit nicht verhindert werden.

## 4.3 Resampled Efficient Frontier nach Michaud

In diesem Unterkapitel wird die Methode der „Resampled Efficiency“ nach Michaud auf das durch lineare Nebenbedinungen beschränkte Beispiel aus 4.2 angewendet. Wie auch schon in Kapitel 3.5 zu dem kleinen Beispiel 2.4 werden auch hier für jede Simulation 52 bzw. 312 Beobachtungen pro Asset kreiert. Für jede Anzahl von Observationen wurden 500 Effizienzgrenzen optimiert. Der Durchschnitt einer dieser Mengen von resampleten Efficient Frontiers ergibt eine resamplete Effizienzgrenze nach Michaud. In Abbildung 4.5 sind die 10000 statistisch äquivalenten Portfolios und die Markowitz-Effizienzgrenze zu dem Resampling-Lauf mit 52 Beobachtungen dargestellt.

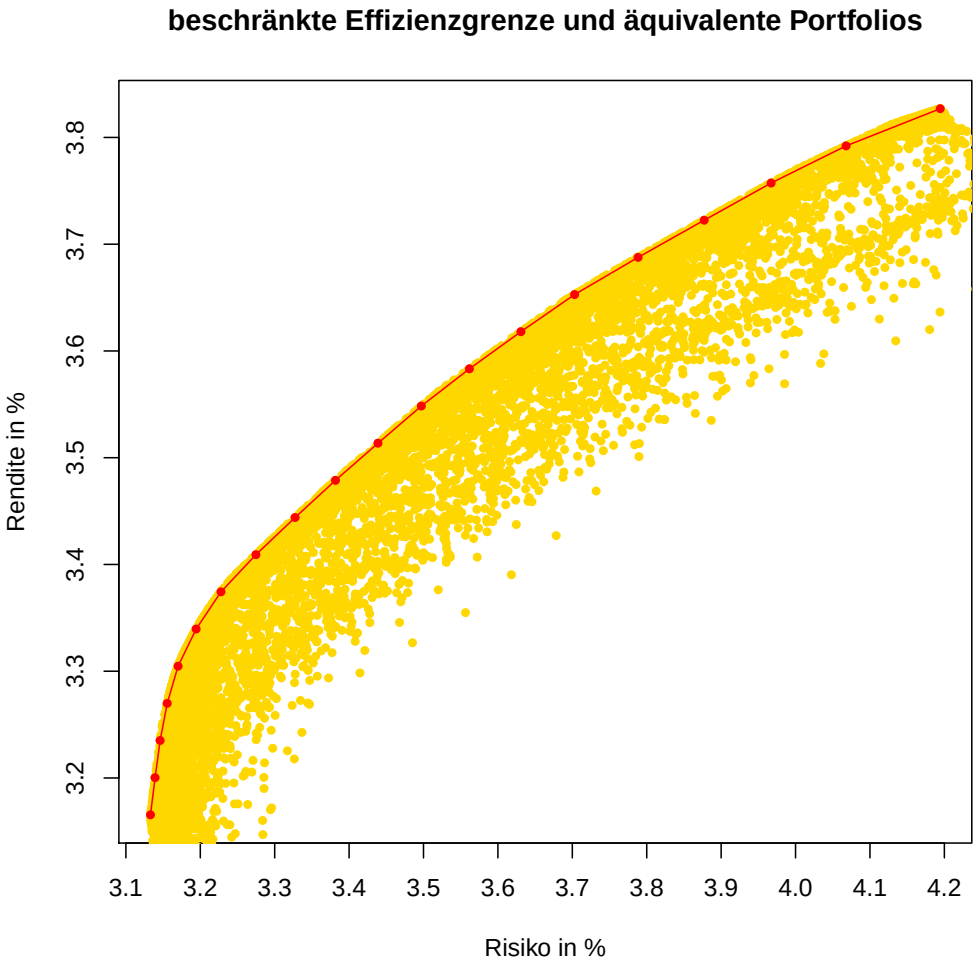


Abbildung 4.5: beschränkte Effizienzgrenze und statistisch äquivalente Portfolios

Im Vergleich dazu sieht man in der nächsten Grafik 4.6, dass die statistisch äquivalenten Portfolios durch die Verwendung von mehr Observationen, also hier 312, näher an die „originale“ Effizienzgrenze rücken.

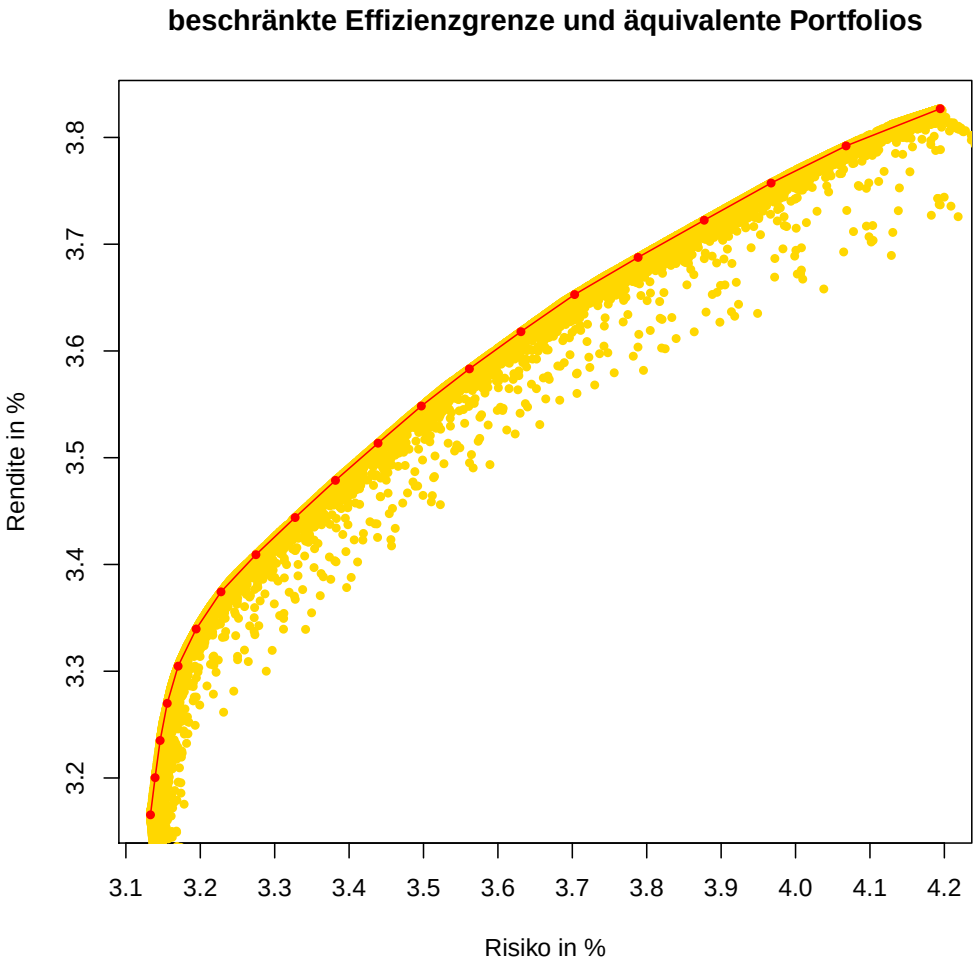


Abbildung 4.6: beschränkte Effizienzgrenze und statistisch äquivalente Portfolios

Mithilfe von 3.2 werden zu dem ersten Resampling-Lauf die Gewichtsvektoren der Portfolios auf der resampleten Effizienzgrenze nach Michaud berechnet und im Risiko-Rendite-Diagramm (Grafik 3.4) abgetragen.

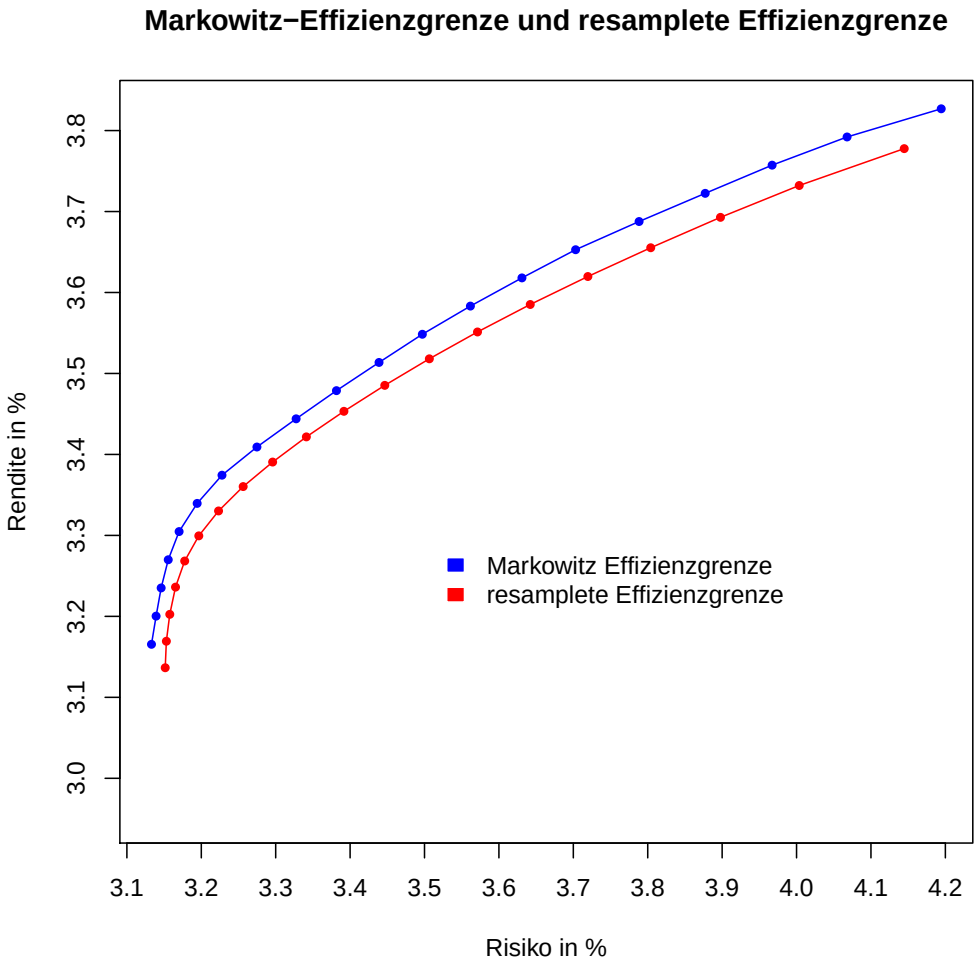


Abbildung 4.7: traditionelle und resamplete Effizienzgrenze zu Resampling-Lauf 1

Die Zusammensetzung der einzelnen resampleten Portfolios ist in dem nächsten Balkendiagramm dargestellt.

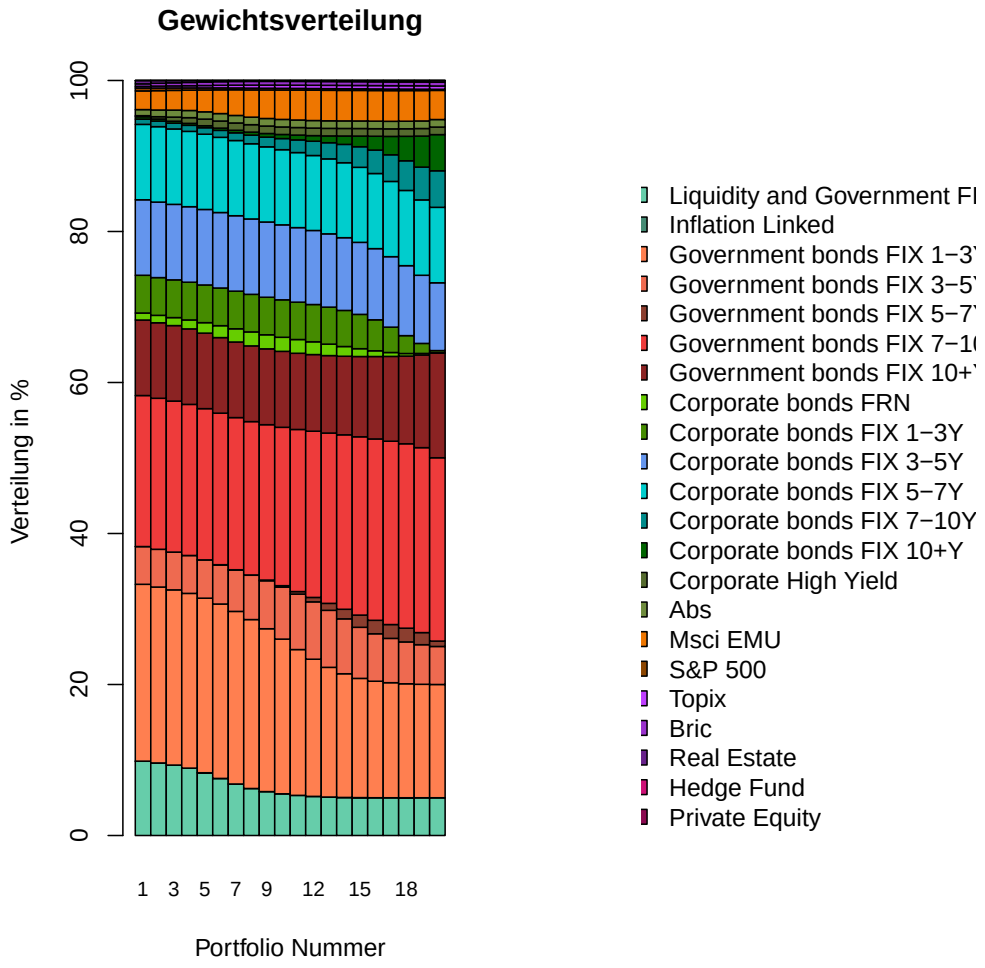


Abbildung 4.8: Zusammensetzung der resampleten Portfolios

Vergleicht man diese Abbildung 4.8 mit der Gewichtsverteilung der Markowitz-Effizienzgrenze (Grafik 4.2), kann man gut erkennen, dass die Übergänge von einem zum nächsten Portfolio viel weniger sprunghaft sind als bei der traditionellen Portfolioauswahl. Es gehen auch mehr Assets in die einzelnen Portfolios ein; die resamplete Effizienzgrenze ist besser diversifiziert, wie auch die nachfolgende Tabelle, in welcher die Gewichtsvektoren des Minimum-Varianz-, Mittel- und Maximum-Rendite-Portfolios gegenüberstellt.

| | Minimum-Varianz | | Mittel | | Maximum-Rendite | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Asset 1 | 10.00% | 9.84% | 5.00% | 5.52% | 5.00% | 5.00% |
| Asset 2 | 0.00% | 0.01% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| Asset 3 | 23.00% | 23.42% | 17.80% | 20.49% | 15.00% | 15.00% |
| Asset 4 | 5.00% | 5.00% | 10.00% | 6.87% | 5.00% | 5.03% |
| Asset 5 | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.21% | 0.00% | 0.71% |
| Asset 6 | 20.00% | 20.00% | 20.20% | 20.97% | 23.08% | 24.28% |
| Asset 7 | 10.00% | 10.00% | 10.00% | 10.06% | 14.92% | 13.86% |
| Asset 8 | 1.28% | 0.93% | 2.00% | 1.86% | 0.00% | 0.06% |
| Asset 9 | 5.00% | 5.00% | 5.00% | 4.96% | 0.00% | 0.28% |
| Asset 10 | 10.00% | 10.00% | 10.00% | 9.93% | 9.00% | 8.98% |
| Asset 11 | 10.00% | 9.99% | 10.00% | 9.95% | 10.00% | 9.99% |
| Asset 12 | 1.00% | 0.69% | 2.00% | 1.47% | 5.00% | 4.84% |
| Asset 13 | 0.00% | 0.32% | 0.00% | 0.54% | 5.00% | 4.79% |
| Asset 14 | 0.00% | 0.14% | 1.00% | 0.99% | 1.00% | 1.00% |
| Asset 15 | 1.00% | 0.80% | 1.00% | 1.00% | 1.00% | 1.00% |
| Asset 16 | 2.50% | 2.47% | 5.00% | 3.89% | 5.00% | 3.86% |
| Asset 17 | 0.50% | 0.38% | 0.00% | 0.23% | 0.00% | 0.15% |
| Asset 18 | 0.21% | 0.22% | 0.50% | 0.42% | 0.50% | 0.44% |
| Asset 19 | 0.50% | 0.33% | 0.50% | 0.50% | 0.50% | 0.49% |
| Asset 20 | 0.00% | 0.45% | 0.00% | 0.12% | 0.00% | 0.23% |
| Asset 21 | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| Asset 22 | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| Rendite | 3.17% | 3.14% | 3.48% | 3.42% | 3.83% | 3.78% |
| Risiko | 3.13% | 3.15% | 3.38% | 3.34% | 4.19% | 4.14% |

Tabelle 4.4: Vergleich Markowitz und Michaud Portfolios selben Ranges

# Literaturverzeichnis


[1] A. Idnani D. Goldfarb. A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs. *Mathematical Programming*, 27; p. 1-33, 1983.

[2] J. D. Jobson and Bob Korkie. Statistical inference in two-parameter portfolio theory with multiple regression software. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, issue 02; p. 189-197, 1983.

[3] Harry M. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7, No. 1; p. 77-91, 1952.

[4] Harry M. Markowitz. *Portfolio Selection.* FinanzBuch Verlag, München, 1. edition, 2008.

[5] Richard O. Michaud. *Efficient Asset Management.* Oxford University Press, New York, 1. edition, 2008.

[6] S original by Berwin A. Turlach R port by Andreas Weingessel <Andreas.Weingessel@ci.tuwien.ac.at>. *quadprog: Functions to solve Quadratic Programming Problems.*, 2011. R package version 1.5-4.

[7] R Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2010. ISBN 3-900051-07-0.

[8] Bernd Scherer. Portfolio resampling: Review and critique. *Financial Analysts Journal*, 58, No. 6; p. 98-109, 2002.

[9] Klaus Spremann. *Portfoliomanagement.* Oldenburg Wissenschaftsverlag, 2008.

# Anhang A

# Renditen, Duration und Kovarianzmatrix

## A.1 Renditevektor und Duration

## A.2 Varianz-Kovarianz-Matrix

Tabelle A.1: Asset-Renditen und Duration

| Nummer | Asset | Rendite | Duration |
|---|---|---|---|
| 1 | JPM Euro Cash 3M | 0.85% | 0.25 |
| 2 | Barclays Euro all infl gvt | 2.00% | 8.39 |
| 3 | Barclays Euro TSY 1-3Y | 1.55% | 1.9 |
| 4 | Barclays Euro TSY 3-5Y | 2.45% | 3.69 |
| 5 | Barclays Euro TSY 5-7Y | 3.10% | 5.3 |
| 6 | Barclays Euro TSY 7-10Y | 3.75% | 7.06 |
| 7 | Barclays Euro TSY 10+Y | 4.50% | 12.31 |
| 8 | Barclays Euro FRN Index | 2.30% | 0.11 |
| 9 | Barclays Euro AGG 1-3Y CORP. | 3.15% | 1.83 |
| 10 | Barclays Euro AGG 3-5Y CORP. | 3.85% | 3.51 |
| 11 | Barclays Euro AGG 5-7Y CORP. | 4.90% | 4.95 |
| 12 | Barclays Euro AGG 7-10Y CORP. | 5.30% | 6.4 |
| 13 | Barclays Euro AGG 10+Y CORP. | 5.35% | 9.68 |
| 14 | Barclays Pan-European high yield | 10.50% | 3.61 |
| 15 | Barclays Euro AGG ABS | 6.35% | 4.03 |
| 16 | MSCI EMU U$ | 5.00% | 0 |
| 17 | S&P 500 COMPOSITE | 2.00% | 0 |
| 18 | TOPIX | 6.00% | 0 |
| 19 | MSCI BRIC $ | 15.00% | 0 |
| 20 | FTSE EPRA/NAREIT Eurozone | 0.00% | 0 |
| 21 | C.S/TREMONT Hedge Fund | 11.05% | 0 |
| 22 | LPX 50 E | 14.91% | 0 |

Tabelle A.2: Varianz-Kovarianz-Matrix

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00044% | -0.00036% | 0.00073% | 0.00084% | 0.00082% | 0.00062% | -0.00078% | -0.00097% | -0.00017% | -0.00053% | -0.00175% |
| -0.00036% | 0.29812% | 0.04303% | 0.10657% | 0.17007% | 0.22642% | 0.40061% | 0.00691% | 0.05433% | 0.11363% | 0.18283% |
| 0.00073% | 0.04303% | 0.02528% | 0.04603% | 0.05949% | 0.06324% | 0.07860% | -0.00695% | 0.01995% | 0.03441% | 0.04282% |
| 0.00084% | 0.10657% | 0.04603% | 0.09548% | 0.13259% | 0.14992% | 0.20242% | -0.00770% | 0.04189% | 0.07973% | 0.11050% |
| 0.00082% | 0.17007% | 0.05949% | 0.13259% | 0.19448% | 0.23205% | 0.33370% | -0.00820% | 0.05779% | 0.11559% | 0.16973% |
| 0.00062% | 0.22642% | 0.06324% | 0.14992% | 0.23205% | 0.29594% | 0.45864% | -0.00953% | 0.06431% | 0.13398% | 0.20686% |
| -0.00078% | 0.40061% | 0.07860% | 0.20242% | 0.33370% | 0.45864% | 0.90060% | -0.01362% | 0.07970% | 0.18472% | 0.30471% |
| -0.00097% | 0.00691% | -0.00695% | -0.00770% | -0.00820% | -0.00953% | -0.01362% | 0.03920% | 0.02043% | 0.03823% | 0.06387% |
| -0.00017% | 0.05433% | 0.01995% | 0.04189% | 0.05779% | 0.06431% | 0.07970% | 0.02043% | 0.04368% | 0.07443% | 0.10872% |
| -0.00053% | 0.11363% | 0.03441% | 0.07973% | 0.11559% | 0.13398% | 0.18472% | 0.03823% | 0.07443% | 0.14138% | 0.21174% |
| -0.00175% | 0.18283% | 0.04282% | 0.11050% | 0.16973% | 0.20686% | 0.30471% | 0.06387% | 0.10872% | 0.21174% | 0.33408% |
| -0.00267% | 0.24213% | 0.04340% | 0.12732% | 0.20802% | 0.26817% | 0.42053% | 0.08611% | 0.13256% | 0.26481% | 0.42912% |
| -0.00189% | 0.29939% | 0.05774% | 0.15803% | 0.25769% | 0.34283% | 0.60179% | 0.05563% | 0.11641% | 0.24675% | 0.40050% |
| -0.00661% | -0.00368% | -0.03072% | -0.04222% | -0.06238% | -0.08763% | -0.14827% | 0.12249% | 0.08884% | 0.15070% | 0.24909% |
| -0.00382% | -0.00060% | -0.01303% | -0.01486% | -0.01521% | -0.01755% | -0.01827% | 0.03651% | 0.00992% | 0.02232% | 0.04707% |
| -0.00988% | -0.14763% | -0.13864% | -0.22421% | -0.29269% | -0.34234% | -0.34604% | 0.15762% | -0.01294% | -0.00302% | 0.03789% |
| -0.00458% | -0.34233% | -0.09429% | -0.16083% | -0.22556% | -0.28499% | -0.41094% | 0.11693% | -0.02008% | -0.03264% | -0.02374% |
| -0.00409% | -0.08193% | -0.05321% | -0.08136% | -0.11115% | -0.14349% | -0.13550% | 0.08584% | 0.01906% | 0.04452% | 0.09281% |
| -0.01112% | -0.41903% | -0.20863% | -0.36736% | -0.50984% | -0.63279% | -0.83728% | 0.27076% | -0.00029% | 0.01870% | 0.10451% |
| -0.01152% | -0.04380% | -0.10005% | -0.15246% | -0.19795% | -0.22948% | -0.26699% | 0.15467% | 0.01882% | 0.04759% | 0.13088% |
| -0.00225% | -0.07800% | -0.00655% | -0.00747% | -0.01000% | -0.02127% | -0.01057% | 0.04766% | 0.01663% | 0.03788% | 0.07739% |
| -0.01663% | -0.27790% | -0.15395% | -0.24369% | -0.33081% | -0.41361% | -0.56853% | 0.23665% | 0.05219% | 0.09366% | 0.21504% |

Tabelle A.3: Varianz-Kovarianz-Matrix Fortsetzung

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -0.00267% | -0.00189% | -0.00661% | -0.00382% | -0.00988% | -0.00458% | -0.00409% | -0.01112% | -0.01152% | -0.00225% | -0.01663% |
| 0.24213% | 0.29939% | -0.00368% | -0.00060% | -0.14763% | -0.34233% | -0.08193% | -0.41903% | -0.04380% | -0.07800% | -0.27790% |
| 0.04340% | 0.05774% | -0.03072% | -0.01303% | -0.13864% | -0.09429% | -0.05321% | -0.20863% | -0.10005% | -0.00655% | -0.15395% |
| 0.12732% | 0.15803% | -0.04222% | -0.01486% | -0.22421% | -0.16083% | -0.08136% | -0.36736% | -0.15246% | -0.00747% | -0.24369% |
| 0.20802% | 0.25769% | -0.06238% | -0.01521% | -0.29269% | -0.22556% | -0.11115% | -0.50984% | -0.19795% | -0.01000% | -0.33081% |
| 0.26817% | 0.34283% | -0.08763% | -0.01755% | -0.34234% | -0.28499% | -0.14349% | -0.63279% | -0.22948% | -0.02127% | -0.41361% |
| 0.42053% | 0.60179% | -0.14827% | -0.01827% | -0.34604% | -0.41094% | -0.13550% | -0.83728% | -0.26699% | -0.01057% | -0.56853% |
| 0.08611% | 0.05563% | 0.12249% | 0.03651% | 0.15762% | 0.11693% | 0.08584% | 0.27076% | 0.15467% | 0.04766% | 0.23665% |
| 0.13256% | 0.11641% | 0.08884% | 0.00992% | -0.01294% | -0.02008% | 0.01906% | -0.00029% | 0.01882% | 0.01663% | 0.05219% |
| 0.10091% | 0.08305% | -0.04411% | 0.11790% | -0.46581% | 0.65732% | 0.45006% | -0.24409% | -0.65561% | 1.91270% | 0.07988% |
| 0.26481% | 0.24675% | 0.15070% | 0.02232% | -0.00302% | -0.03264% | 0.04452% | 0.01870% | 0.04759% | 0.03788% | 0.09366% |
| 0.42912% | 0.40050% | 0.24909% | 0.04707% | 0.03789% | -0.02374% | 0.09281% | 0.10451% | 0.13088% | 0.07739% | 0.21504% |
| 0.58370% | 0.54032% | 0.36372% | 0.07600% | 0.14633% | 0.07039% | 0.17974% | 0.28106% | 0.25288% | 0.10091% | 0.40484% |
| 0.36372% | 0.18968% | 1.19900% | 0.15673% | 1.35670% | 0.98059% | 0.65479% | 2.07450% | 1.48640% | -0.04411% | 2.23460% |
| 0.54032% | 0.63203% | 0.18968% | 0.04271% | -0.05573% | -0.06509% | 0.04628% | -0.11153% | 0.03632% | 0.08305% | 0.03466% |
| 0.07600% | 0.04271% | 0.15673% | 0.40323% | 0.06294% | 0.03348% | -0.05152% | 0.11424% | 0.09444% | 0.11790% | 0.16566% |
| 0.14633% | -0.05573% | 1.35670% | 0.06294% | 4.88850% | 2.99150% | 1.72810% | 6.41070% | 3.97680% | -0.46581% | 5.22660% |
| 0.07039% | -0.06509% | 0.98059% | 0.03348% | 2.99150% | 3.97200% | 1.52440% | 4.64680% | 2.49360% | 0.65732% | 4.26310% |
| 0.17974% | 0.04628% | 0.65479% | -0.05152% | 1.72810% | 1.52440% | 3.10110% | 3.44700% | 1.56500% | 0.45006% | 2.70570% |
| 0.28106% | -0.11153% | 2.07450% | 0.11424% | 6.41070% | 4.64680% | 3.44700% | 13.72000% | 5.20350% | -0.24409% | 7.72920% |
| 0.25288% | 0.03632% | 1.48640% | 0.09444% | 3.97680% | 2.49360% | 1.56500% | 5.20350% | 6.15040% | -0.65561% | 5.26000% |
| 0.40484% | 0.03466% | 2.23460% | 0.16566% | 5.22660% | 4.26310% | 2.70570% | 7.72920% | 5.26000% | 0.07988% | 8.49720% |

# Anhang B

# R-Codes

```
#########################################################################
#   Funktion zum Verarbeiten der Informationen aus den Input-csv-Files   #
#   welche durch                                                         #
#   Daten<-read.csv("ret_cov.csv", head=FALSE, sep=";")                  #
#   Constraints<-read.csv("constraints.csv", head=TRUE, sep=";")         #
#   eingelesen werden.                                                   #
#########################################################################

handle<-function(Daten,Constraints){
n<<-0
r<<-Daten[,1]                              # Return-Vektor
r<<-as.vector(r)
Cov<<-Daten[,2:ncol(Daten)]                # Var-Cov-Matrix
Cov<<-as.matrix(Cov)
n<<-nrow(Cov)                              # Anzahl der Assets
k<<-Constraints[1:n,2]                     # Klassenvektor
k<<-as.vector(k)
nk<<-Constraints[1,12]
LB<<-Constraints[1:n,3]                    # Lower Bound-Vektor
LB<<-as.vector(LB)
UB<<-Constraints[1:n,4]                    # UB-Vektor
UB<<-as.vector(UB)
d<<-Constraints[1:n,5]                     # Durationvektor
d<<-as.vector(d)
dLB<<-Constraints[1,6]                     # LB fuer Duration
dUB<<-Constraints[1,7]                     # UB fuer Duration
```

```
kLB<<-Constraints[1:nk,9]                  # kLB-Vektor
kLB<<-as.vector(kLB)
kUB<<-Constraints[1:nk,10]                 # kUB-Vektor
kUB<<-as.vector(kUB)
nPF<<-Constraints[1,11]                    # Anzahl PF auf Effizienzgrenze

# NEBENBEDINGUNGEN: Ax >= b

# sum(xi) >= 1
A<<-matrix(1,n,1)                          # rechte Seite: sum(xi)
b<<-c(1)                                   # linke Seite: 1

# sum(-xi) >= -1
A<<-cbind(A,rep(-1,n))                     # rS: sum(-xi)
b[2]<<-c(-1)                               # lS: -1

# x*r >= gewuenschter expected return rvar
A<<-cbind(A,r)                             # rS: r
b[3]<<-1                                   # lS: wird spaeter geaendert

# x*-r >= -(gewuenschter expected return rvar)
A<<-cbind(A,-r)                            # rS: -r
b[4]<<- -1                                 # lS: wird spaeter geaendert

# x_i >= LB_i  bzw x_i >= -UB_i
E<<-matrix(0,n,n)
diag(E)<<- 1
A<<-cbind(A,E,-E)

b<<-c(b,LB,-UB)                            # lS: >= LB, >= -UB

# Group-Constraints
hv<<-rep(0,n)                              # Hilfsvektor

if(nk!=0){
  for(j in 1:nk){
    for (i in 1:n){
      if(k[i] == j){
      hv[i] <<- 1
      }
    }
```

```
    if (hv%*%hv !=0){
    A<<-cbind(A,hv)
    b<<-c(b,kLB[j])
    A<<-cbind(A,-hv)
    b<<-c(b,-kUB[j])
    hv<<-rep(0,n)
    }
  }
}
# Duration

d_minus_dLB<<-c()
dUB_minus_d<<-c()

if (!is.na(d[1])){
for (i in 1:n){
if (d[i]!=0){
d_minus_dLB[i]<<-d[i]-dLB
dUB_minus_d[i]<<-dUB-d[i]
} else {
d_minus_dLB[i]<<-0
dUB_minus_d[i]<<-0
}
}
A<<-cbind(A,d_minus_dLB)
b[length(b)+1] <<- 0
A<<-cbind(A,dUB_minus_d)
b[length(b)+1] <<- 0
}


}
```

```
#################################################################
# Funktion zur Berechnung der Grenzen fuer die                  #
# Effizienzgrenze unter Beruecksichtigung der Nebenbedingungen  #
# benoetigt PACKAGES: quadprog                                  #
#################################################################


ERlim<-function(CovMatrix,RenditeVektor,ConsMatrix,
+ ConsVektor,st=0.0001,silent=TRUE){

b1<<-ConsVektor
A1<<-ConsMatrix
dvec<<-rep(0,nrow(A1))

tERmin<<-RenditeVektor%*%LB            # theor exp return = r*LB
tERmax<<-RenditeVektor%*%UB            # theor exp return = r*UB
tERdif<<-tERmax - tERmin
ERstep<<-seq(from=0,to=tERdif,by=st)

A1[,3]<<-RenditeVektor
A1[,4]<<--RenditeVektor



# Rendite zum MinVar-Portfolio

risk1 <<- 1
risk0 <<- 0

for ( i in 1:length(ERstep)){
# rechte Seite von r*x >= y fuer y in [tERmin,tERmax]
b1[3]<<- tERmin + ERstep[i]
# rechte Seite von -r*x>= -y
b1[4]<<- -b1[3]
# Optimierungsaufgabe: min x'*Cov*x unter Nebenbedingungen A1x >= b1
NLP<<-try(solve.QP(CovMatrix,dvec,A1,b1),silent=TRUE)
   if (class(NLP)!="try-error"){
   # wird Loesung gefunden -> StAbw gespeichert in risk0
   risk0<<-sqrt(2*NLP$value)
   } else {
   # keine Loesung -> neue Rendite, neue Optimierung
```

```
   next
   }
   # wird Loesung gefunden -> Pruefung ob StAb kleiner als risk1=1
   if (risk0 <= risk1) {
   # wenn ja, dann wird risk1 mit neuer StAb ueberschrieben
   risk1 <<- risk0
   # kleinste StAb gefunden
   } else {
   # Rendite zur kleinstmoeglichen StAb retLB = b1[3] - st
   retLB<<-b1[3]-st;
   if (silent==FALSE){
   print(c("kleinste Rendite",b1[3]-st));
   }
   break
   }
}

# Maximal erreichbare Rendite

risk1 <<- 1
risk0 <<- 0

ret0 <<- 0
ret1 <<- 0

for ( i in 1:length(ERstep)){

b1[3]<<- tERmax - ERstep[i]
b1[4]<<- -(tERmax - ERstep[i])
NLP<<-try(solve.QP(CovMatrix,dvec,A1,b1),silent=TRUE)
    if (class(NLP)!="try-error"){
    risk0 <<- sqrt(2*NLP$value);
    ret0<<-NLP$solution%*%RenditeVektor;
    } else {
    next
    }
    if (risk0 <= risk1 & ret0 >= ret1) {
    risk1 <<- risk0;
    ret1 <<- ret0;
    } else {
    if (silent==FALSE){
```

```
    print(c("groesste Rendite:",b1[3]+st));
    }
    break
    }
}
}
}


#######################################################
# rvar-Vektor (nach Aufruf ERlim)                     #
# benoetigt die Ausgabewerte von ERlim    (retLB, ret1) #
#######################################################

VarRet<-function(ERmax=ret1,ERmin=retLB,AnzahlPF=nPF,silent=FALSE){

rvar<<-c()
rstep<<-(ERmax-ERmin)/(AnzahlPF-1)
for (i in 1:nPF){
rvar[i]<<-ERmin+rstep*(i-1)
}
if (silent==FALSE){
rvar
}
}
```

```
#####################################################################
#   Berechnung einer Effizienzgrenze                                #
#     min x'Covx unter Ax >= b                                      #
# Wird zu einer bestimmten Rendite aus dem Vektor rvar              #
# (Output der Funktion VarRet)keine Loesung gefunden, wird          #
# diese um rstep erhoeht und erneut versucht eine Loesung zu finden.  #
#####################################################################


markoEF<-function(ConsMatrix,ConsVektor,CovMatrix,
+ RenditeVektor,nPF,rstep=0.00005){
EF<<-matrix(ncol=nPF,nrow=nrow(CovMatrix))
riskEF<<-c()
retEF<<-c()
dvec<<-rep(0,length(RenditeVektor))
err2<<-c()
bef<<-ConsVektor

for (i in 1:nPF){
  bef[3]<<-rvar[i]
  bef[4]<<--rvar[i]
  DAS<-try(solve.QP(CovMatrix,dvec,ConsMatrix,bef),silent=TRUE)
    if (class(DAS)!="try-error"){
    EF[,i]<<-DAS$solution
    retEF[i]<<-DAS$solution%*%RenditeVektor
    riskEF[i]<<-sqrt(2*DAS$value)
    } else {
    rhilf<<-seq(from=rvar[i]+rstep,to=(rvar[i]+rvar[i+1])/2, by=rstep)
       for ( z in 1:length(rhilf)){
       bef[3]<<-rhilf[z]
       bef[4]<<- -bef[3]
      OPT<-try(solve.QP(CovMatrix,dvec,ConsMatrix,bef),silent=TRUE)
      if (class(OPT)!="try-error"){
      EF[,i]<<-OPT$solution
       retEF[i]<<- OPT$solution%*%RenditeVektor
       riskEF[i]<<-sqrt(2*OPT$value)
       break
     }
     }
    err2<<-c(err2,i)
    }
```

```
}
print(matrix(c("","efficient frontier matrix","return vector",
+ "risk vector", "PF Errornumber","Output in:","EF","retEF",
+ "riskEF","err2"),ncol=2))
}
```

```
#######################################################################
# Averaged Resampled Efficient Frontier nach Richard O. Michaud       #
# Zu multivariat normalverteilten Stichproben wird versucht eine EF   #
# zu bestimmen.                                                       #
# Obs.. Anzahl der Beobachtungen je Stichprobe                        #
# RetVec, CovMat.. Inputparameter (mu, sigma)                         #
# ConMat, ConVec.. Matrix und Vektor aus NB: Ax >= b fuer Optimierung #
# NoR, NoSim.. Stichprobenanzahl; NoR < NoSim                         #
# stR.. Stepweite fuer Fkt ERlim (default=0.0001, from 10^-7 on slow) #
#######################################################################

Resampling<-function(Obs,RetVec,CovMat,ConMat,ConVec,^
+ NoR,NoSim,stR=0.0001){
# Loesungsarray fuer die Gewichtsvektoren der resampled efs
ref<<-array(,c(length(RetVec),nPF,NoR))
# Indizes der Error-Stichproben
ne<<-c()
AS<<-ConMat
# Linearer Term der quad. Glg (Nullvektor; Laenge = AnzahlAssets)
dVec<<-rep(0,length(RetVec))
# Resampling-Loop
for (j in 1:NoR){
S<<-mvrnorm(Obs,RetVec,CovMat)                    # mvn Stichprobe S
Scov<<-var(S)                                     # Kov
Sr<<-apply(S,2,mean)                              # Mittelwert

# Aendere in ConstraintsMatrix AS Spalten 3,4 in Returnvektor Sr
AS[,3]<<- Sr
AS[,4]<<- -Sr
bS<<-ConVec

# Aufruf ERlim zur Bestimmung der expReturns der min var/max Portfolios
#fuer die Stichprobe S
ERlim(Scov,Sr,AS,bS,stR,silent=TRUE)

# Aufruf VarRet fuer neuen rvar-Vektor
VarRet(ret1,retLB,nPF,silent=TRUE)

  # Efficient Frontier
  for (p in 1:nPF){
  bS[3]<<- rvar[p]
```

```
  bS[4]<<- -rvar[p]
  OPTIM<-try(solve.QP(Scov,dVec,AS,bS),silent=TRUE)
  # Gewichtsvektor des Portfolios wird in ref gespeichert
    if (class(OPTIM) != "try-error"){
    ref[,p,j]<<-OPTIM$solution
    } else {
    # keine Loesung --> Index der Stichprobe wird gespeichert; neue SP
    ne<<-c(ne,j);
    break
    }
  }
}
# SP, zu denen nicht alle PFs gefunden wurden, werden aus ref geloescht
if (length(ne)!=0){
ref<<-ref[,,-ne];
print(c("Number of errors",ne));
}


dimref<<-c(dim(ref))
nor<<-dimref[3]
if (nor>NoSim){
ref<<-ref[,,1:NoSim];
nor<<-NoSim
}
# Matrix bestehend aus den Gewichtsvektoren der nPF Porfolios
# Averaged Resampled Efficient Frontier
AREF<<-matrix(nrow=length(RetVec),ncol=nPF)
for (i in 1:nPF){
for (j in 1:length(RetVec)){
#Berechnet die durchschnittlichen PF-Gewichte
AREF[j,i]<<-mean(ref[j,i,])
}
}

# Berechnung des risks und der expreturns der PFs auf der AREF
# mit den Input-Parametern RetVec, CovMat
AEFre<<-c()
AREFri<<-c()
for (i in 1:nPF){
AREFre[i]<<-AREF[,i]%*%RetVec
```

```
AREFri[i]<<-sqrt(AREF[,i]%*%CovMat%*%AREF[,i])
}

# Bewertung aller resampled PFs mit Input-Parametern
REFrisks<<-matrix(ncol=nor,nrow=nPF)
REFreturns<<-matrix(ncol=nor,nrow=nPF)

for (i in 1:nor){
        for (j in 1:nPF){
        REFrisks[j,i]<<-sqrt(ref[,j,i]%*%CovMat%*%ref[,j,i]);
        REFreturns[j,i]<<-ref[,j,i]%*%RetVec
        }
}
}
```