Diplomarbeit

Pariser Ruinwahrscheinlichkeiten / Parisian ruin mit unabhängigen Zuwächsen

ausgeführt am

Institut für Wirtschaftsmathematik

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek

durch

Harald Vybiral, BSc
Zehenthofgasse 4/31
1190 Wien

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit der Herleitung eines Ausdrucks für die Pariser Ruinwahrscheinlichkeit für Prozesse mit unabhängigen Inkrementen in stetiger bzw. diskreter Zeit. Im Gegensatz zur allgemein bekannten Ruinwahrscheinlichkeit tritt Pariser Ruin erst ein, sobald der Überschussprozess eine bestimmte Zeit r unter Null bleibt.

Der erste Teil der Arbeit beschäftigt sich mit Pariser Ruin für spectrally negative Lévy-Prozesse in stetiger Zeit, also Lévyprozesse ohne Sprünge nach oben. Dieser Abschnitt basiert auf den Arbeiten von R. Loeffen, I. Czarna und Z. Palmowski (siehe [7] und [8]). In Kapitel 2 werden die benötigten Eigenschaften von Lévy-Prozessen vorgestellt und in Kapitel 3 und 4 die Herleitung eines Ausdrucks für die Pariser Ruinwahrscheinlichkeit ausgeführt.

Der zweite Teil widmet sich der Suche nach der Herleitung eines ähnlichen Ausdrucks für Random Walks. Die Vorgehensweise folgt der Argumentation von [7] und [8], jedoch verlangen die Eigenschaften des Random Walks und Bedingungen auf einem diskreten Zeithorizont eine etwas andere Herangehensweise.
Um den Beweis führen zu können, werden in Kapitel 6 und 7 diskrete Versionen der Wiener-Hopf Zerlegung bzw. der q-Scale Function vorgestellt und schlussendlich in Kapitel 8 ein Ausdruck der Pariser Ruinwahrscheinlichkeit hergeleitet.

Kapitel 2

Lévyprozesse

Definition 2.1: (Lévy-Prozess) [5] Definition 1.3: Sei $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. X_t ist ein Lévy-Prozess genau dann, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $X_0 = 0$ f.s.

2. X besitzt unabhängige und stationäre Inkremente. D.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots < t_{n+1} < \infty$ gilt:

$$X_{t+1} - X_t, X_t - X_{t-1}, \ldots, X_1 - X_0 \text{ sind stochastisch unabhängig}$$

$$X_{t_{j+1}} - X_{t_j} \stackrel{d}{=} X_{t_{j+1} - t_j} - X_0$$

3. X ist stetig in der Wahrscheinlichkeit, d.h. $\forall a > 0$ und $\forall s \geq 0$ gilt:

$$\lim_{t \to s} \mathbb{P}(|X_t - X_s| > a) = 0.$$

Bemerkung: Bedingung 3 kann auf Grund von 1. und 2. auch durch

$$\lim_{t \to 0} \mathbb{P}(|X_t| > a) = 0$$

ersetzt werden.

Satz 2.2: (starke Markoveigenschaft) Sei τ eine Stoppzeit. Man sagt ein stochastischer Prozess $X = \{X_t : t \geq 0\}$ auf einem gefilterten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ besitzt die starke Markoveigenschaft genau dann, wenn für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $s, t \geq 0$ gilt

$$\mathbb{P}(X_{\tau+s} \in B | \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{P}(X_{\tau+s} \in B | \sigma(X_\tau)) \text{ auf } \{\tau < \infty\}.$$

Falls X ein Lévy Prozess ist, besitzt er immer die starke Markoveigenschaft und es gilt sogar

$$\widetilde{X}_t = X_{\tau+t} - X_\tau, t \geq 0 \quad \text{auf } \{\tau < \infty\}$$

ist unabhängig von $\mathcal{F}_\tau$ und $\widetilde{X} \overset{d}{=} X$ und $\widetilde{X}$ ist wieder ein Lévy Prozess.

Definition 2.3: Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\{\mathbb{P}_x : x \in \mathbb{R}\}$, sodass unter $\mathbb{P}_x$ fast sicher

$$X_0 = x$$

gilt. Weiters werden wir den Erwartungswert unter $\mathbb{P}_x$ mit $\mathbb{E}_x$ bezeichnen. P_0 und $\mathbb{E}_0$ werden wir mit $\mathbb{P}$ bzw. $\mathbb{E}$ bezeichnen.

Satz 2.4: (spatial homogeneity) Sei X_t ein Lévy Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\{\mathbb{P}_x : x \in \mathbb{R}\}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit $\mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}(A|X_0 = x), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dann gilt für $a, b \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}_a(X_t \in A) = \mathbb{P}_b(X_t \in A + b - a)$$

wobei $A + b = \{a + b : a \in A\}$.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t$. Es gelte o.B.d.A. $b > a$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_a(X_t \in A) &= \mathbb{P}(X_t \in A|X_0 = a) = \\
&= \mathbb{P}\left(a + \sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \in A|X_0 = a\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \in A - a|X_0 = a\right)
\end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse gilt:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \in A - a|X_0 = a\right) \quad =$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \in A - a\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \in A - a | X_0 = b\right) \\
&= \mathbb{P}\left(b + \sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \in A + b - a | X_0 = b\right) \\
&= \mathbb{P}_b(X_t \in A + b - a)
\end{aligned}
$$

$\square$

Definition 2.5: Man sagt $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ ist ein spectrally negative Lévy Prozess genau dann, wenn X keine Sprünge nach oben besitzt.

Kapitel 3

Vorbereitungen

In diesem Kapitel wollen wir zunächst einige Hilfsmittel und Sätze vorstellen, die zur Herleitung der Pariser Ruinwahrscheinlichkeit notwendig sind.

Definition 3.1: (Laplace Exponent) Der Laplace-Exponent $\psi(\theta)$ von X ist definiert durch

$$\psi(\theta) = \log \mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right].$$

$\psi(\theta)$ ist wohldefiniert für $\theta \geq 0$. Die Funktion $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist unendlich oft differenzierbar und konvex. Insbesondere gilt:

$$\psi'(0+) = \mathbb{E}\left[X_1\right].$$

Definieren wir die Rechts-Inverse durch

$$\Phi(\theta) = \sup\{\lambda \geq 0 : \psi(\lambda) = q\}$$

für $q \geq 0$. Falls $\psi'(0+) \geq 0$ gilt, dann ist $\lambda = 0$ die einzige Lösung von $\psi(\lambda) = 0$. Ansonsten existieren zwei Lösungen $\lambda_1 = \Phi(0) > 0$ und $\lambda_2 = 0$. Siehe [1].

Definition 3.2: Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die Stoppzeiten

$$\tau_a^+ = \inf\{t > 0 : X_t > a\}, \quad \tau_a^- = \inf\{t > 0 : X_n < a\}.$$

Satz 3.3: Für einen spectrally negative Lévy-Prozess gilt für $q \geq 0$

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-\theta \tau_a^+}\right] = e^{\Phi(\theta)(x-a)}, \quad x \leq a, \theta \geq 0,$$

Beweis: siehe [1], Satz 3.12.

Satz 3.4: Es existiert eine Familie von Funktionen $W^{(q)} : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ und

$$Z^{(q)}(x) = 1 + q \int_0^x W^{(q)}(y)dy, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

für alle $q \geq 0$ (für $q = 0$ schreiben wir $W(x)$ für $W^{(0)}(x)$). $W^{(q)}$ ist eindeutig durch seine Laplace-Transformierte bestimmt und es gilt:

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W^{(q)}(x)dx = \frac{1}{\psi(\beta) - q} \quad \beta > \Phi(q) \tag{3.1}$$

beziehungsweise $W^{(q)} = 0$ für alle $x < 0$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $q \geq 0$ gilt

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^-} \mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \right] = Z^{(q)}(x) - \frac{q}{\Phi(q) W^{(q)}(x)} \tag{3.2}$$

und für $q = 0$ und $\psi'(0+) \geq 0$ gilt

$$\mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty) = 1 - \psi'(0+) W(x). \tag{3.3}$$

Siehe [1], Satz 8.1.

Kapitel 4

Pariser Ruinwahrscheinlichkeit für Lévy-Prozesse

Wir wollen nun einen Ausdruck für die Pariser Ruinwahrscheinlichkeit herleiten. Der Beweis basiert auf der Beweisführung aus [7] und [8]. Wir werden in diesem Kapitel annehmen, dass X gegen ∞ driftet (dies ist äquivalent zu $\mathbb{E}[X_1] > 0$ bzw. $\psi'(0+) > 0$), da sonst Pariser Ruin mit Wahrscheinlichkeit eins eintritt.

Definition 4.1: Sei $r > 0$ und κ_r eine Stoppzeit, die definiert ist durch

$$\kappa_r = \inf\{t > r : t - g_t > r\}, \quad \text{mit } g_t = \sup\{0 \leq s \leq t : X_s \geq 0\}.$$

Die Stoppzeit κ_r gibt also an, wann der Prozess X zum ersten Mal unter null fällt und eine Zeit größer r unter 0 bleibt - also Pariser Ruin eintritt.

Satz 4.2: Sei $\mathbb{E}[X_1] > 0$, dann gilt für alle $x \geq 0$

$$\mathbb{P}_x(\kappa_r < \infty) = 1 - \mathbb{E}[X_1] \frac{\int_0^\infty W(x+z) z \mathbb{P}(X_r \in dz)}{\int_0^\infty z \mathbb{P}(X_r \in dz)}.$$

4.1 Vorbereitungen

In diesem Abschnitt wollen wir nun einige Hilfsmittel vorstellen, die wir benötigen um Satz 4.2 zu beweisen.

Gilt $\mathbb{E}[X_1] > 0$ dann folgt aus Gleichung 3.2, dass $W(x)$ durch $1/\mathbb{E}[X_1]$ beschränkt ist. Außerdem ist die Scale-Function W absolut stetig auf $(0, \infty)$

(siehe [1], Lemma 8.2). Somit können wir eine Version der Dichtefunktion von W durch W' definieren.
Besitzt X Pfade von unbeschränkter Variation so gilt $W(0) > 0$, ansonsten gilt $W(0) = 0$ (siehe [1], Lemma 8.6).

Satz 4.3: (Kendall's Identität) Sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein spectrally negative Lévy-Prozess, dann gilt $\forall y, s > 0$

$$\int_y^\infty \mathbb{P}(\tau_x^+ \leq s)\frac{dx}{x} = \int_0^s \mathbb{P}(X_t > y)\frac{dt}{t}$$

falls die Dichten $p_X(t,x)$ an x und $p_{\tau_x^+}(t,x)$ an t von X_t bzw. τ_x^+ existieren, gilt sogar:

$$\frac{1}{x}p_{\tau_x^+}(t,x) = \frac{1}{t}p_X(t,x).$$

auf einen Beweis wird an dieser Stelle verzichtet.

Lemma 4.4: Für $\theta > 0$ gilt:

$$\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} e^{\Phi(\theta)X_{\tau_0^-}}\right] = \frac{\theta}{\Phi(\theta)}\int_0^\infty e^{-\Phi(\theta)y}W'(x+y)dy, \tag{4.1}$$

$$\int_0^\infty e^{-\theta r}\int_y^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)dr = \frac{1}{\Phi(\theta)}e^{-\Phi(\theta)y}, \quad y \geq 0, \tag{4.2}$$

$$\int_0^\infty W(z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz) = 1 \tag{4.3}$$

Beweis: Wir verwenden die folgende Beziehung (siehe [6], Gleichung (35)) für $p > 0$:

$$\mathbb{E}_x\left[e^{pX_{\tau_0^-}}\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}}\right] = e^{px} - \psi(p)e^{px}\int_0^x e^{-pz}W(z)dz - \frac{\psi(p)}{p}W(x).$$

Setzt man in obiger Gleichung $p = \Phi(\theta)$, so erhält man:

$$\mathbb{E}_x\left[e^{\Phi(\theta)X_{\tau_0^-}}\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}}\right] \quad =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\Phi(\theta)x} - \psi(\Phi(\theta))e^{\Phi(\theta)x}\int_0^x e^{-\Phi(\theta)z}W(z)dz - \frac{\psi(\Phi(\theta))}{\Phi(\theta)}W(x) \\
&= e^{\Phi(\theta)x}\theta\left(\frac{1}{\theta} - \int_0^x e^{-\Phi(\theta)z}W(z)dz\right) - \frac{\theta}{\Phi(\theta)}W(x)
\end{aligned}$$

Aus der Definition von $W(x)$ durch die Laplace Transformierte (Gleichung 3.1) gilt:

$$\int_0^x e^{-\Phi(\theta)z}W(z)dz + \int_x^\infty e^{-\Phi(\theta)z}W(z)dz = \frac{1}{\theta}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&= \quad e^{\Phi(\theta)x}\theta\left(\int_x^\infty e^{-\Phi(\theta)z}W(z)dz\right) - \frac{\theta}{\Phi(\theta)}W(x) \\
&\overset{Substituiere\, y=z-x}{=} \quad \theta\left(\int_0^\infty e^{-\Phi(\theta)y}W(x+y)dy\right) - \frac{\theta}{\Phi(\theta)}W(x)
\end{aligned}$$

Durch Partielle Integration des obigen Ausdrucks erhalten wir Gleichung 4.1:

$$\mathbb{E}_x\left[e^{\Phi(\theta)X_{\tau_0^-}}\mathbf{1}_{\{\tau_0^-<\infty\}}\right] = \frac{\theta}{\Phi(\theta)}\int_0^\infty e^{-\Phi(\theta)y}W'(x+y)dy$$

Für die zweite Beziehung benützen wir Kendall's Identität 4.3:

$$\int_0^\infty e^{-\theta r}\int_y^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)dr = \int_0^\infty \int_y^\infty e^{-\theta r}\mathbb{P}(\tau_z^+ \in dr)dz$$

Wir verwenden nun den Satz von Fubini-Tonelli und ändern die Integrationsreihenfolge und erhalten somit:

$$\int_y^\infty \int_0^\infty e^{-\theta r}\mathbb{P}(\tau_z^+ \in dr)dz.$$

$\int_0^\infty e^{-\theta r}\mathbb{P}(\tau_z^+ \in dr)$ ist nichts anderes als $\mathbb{E}\left[e^{-\theta\tau_z^+}\right] = e^{-\Phi(\theta)z}$. Einsetzen und integrieren liefert schlussendlich:

$$\int_y^\infty e^{-\Phi(\theta)z}dz = \frac{1}{\Phi(\theta)}e^{-\Phi(\theta)y}$$

und 4.2 folgt.

Um die letzte Beziehung zu zeigen, verwenden wir wieder Kendall's Identität und den Satz von Fubini-Tonelli:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\theta r}\int_0^\infty W(z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r\in dz)dr &= \int_0^\infty e^{-\theta r}\int_0^\infty W(z)\mathbb{P}(\tau_z^+\in dr)dz\\ &= \int_0^\infty e^{-\Phi(\theta)z}W(z)dz\end{aligned}$$

Aus der Definition von $W(z)$ über die Laplacetransformierte folgt:

$$\int_0^\infty e^{-\Phi(\theta)z}W(z)dz=\frac{1}{\theta}$$

Also insgesamt:

$$\int_0^\infty e^{-\theta r}\int_0^\infty W(z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r\in dz)dr=\frac{1}{\theta}$$

Bilden wir auf beiden Seiten die Laplace Inverse so erhalten wir 4.3, da $\int_0^\infty e^{-\theta r}1dr=\frac{1}{\theta}$.

4.2 Beweis von Satz 4.2

Falls X Pfade von unbeschränkter Variation besitzt, werden wir den Ausdruck für die Pariser Ruinwahrscheinlichkeit über einen Grenzwert herleiten. Aus diesem Grund definieren wir die Stoppzeit κ_r^ϵ für alle $\epsilon\geq 0$

$$\kappa_r^\epsilon:=\inf\{t>r:t-g_t^\epsilon>r,X_{t-r}<0\},\quad \text{mit } g_t^\epsilon=\sup\{0\leq s\leq t:X_s\geq\epsilon\}.$$

Die Stoppzeit κ_r^ϵ gibt an, wann X zum ersten Mal unter null kommt und erst nach einer Zeit größer r wieder auf das Niveau ϵ zurückkehrt. Offensichtlich gilt $\kappa_r^0=\kappa_r$.

Für $x<0$ erhalten wir durch die starke Markov-Eigenschaft und dass X_t keine positiven Sprünge besitzt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\kappa_r^\epsilon<\infty) &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_x(\kappa_r^\epsilon<\infty|\mathcal{F}_{\tau_\epsilon^+})\right]\\ &= \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon^+>r\}}\underbrace{\mathbb{P}_x(\kappa_r^\epsilon<\infty|\mathcal{F}_{\tau_\epsilon^+})}_{\substack{=1\\ \text{da } X_0<0\wedge\tau_\epsilon^+>r}}]+\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon^+\leq r\}}\mathbb{P}_x(\kappa_r^\epsilon<\infty|\mathcal{F}_{\tau_\epsilon^+})\right]\\ &= \mathbb{P}_x(\tau_\epsilon^+>r)+\mathbb{P}_x(\tau_\epsilon^+\leq r)\mathbb{P}_\epsilon(\kappa_r^\epsilon<\infty)\\ &= 1-\mathbb{P}_x(\tau_\epsilon^+\leq r)+\mathbb{P}_x(\tau_\epsilon^+\leq r)\mathbb{P}_\epsilon(\kappa_r^\epsilon<\infty)\\ &= 1-\mathbb{P}_x(\tau_\epsilon^+\leq r)(1-\mathbb{P}_\epsilon(\kappa_r^\epsilon<\infty)).\end{aligned}$$

Mit obiger Tatsache und der starken Markov-Eigenschaft folgt für $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\kappa_r^\epsilon < \infty) &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_x(\kappa_r^\epsilon < \infty | \mathcal{F}_{\tau_0^-})\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\kappa_r^\epsilon < \infty)\right] + \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- = \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\kappa_r^\epsilon < \infty)\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\kappa_r^\epsilon < \infty)\right]
\end{aligned}$$

Wir verwenden nun das bereits gezeigte ($X_{\tau_0^-}$ ist ja negativ) und erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\kappa_r^\epsilon < \infty)\right] &= \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}}(1 - \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_\epsilon^+ \leq r)(1 - \mathbb{P}_\epsilon(\kappa_r^\epsilon < \infty)))\right] \\
&= \mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty) - (1 - \mathbb{P}_\epsilon(\kappa_r^\epsilon < \infty))\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_\epsilon^+ \leq r)\right]
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Erwartungswert $\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_\epsilon^+ \leq r)\right]$, so erhalten wir durch spatial homogeneity für $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_\epsilon^+ \leq r)\right] &= \int_{[0,\infty)} \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz\}} \mathbb{P}_{-z}(\tau_\epsilon^+ \leq r)\right] \\
&= \int_{[0,\infty)} \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty, -X_{\tau_0^-} \in dz\}} \mathbb{P}(\tau_{\epsilon+z}^+ \leq r)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\theta r} \mathbb{P}_0(\tau_{\epsilon+z}^+ \leq r) dr &= -\frac{1}{\theta} e^{-\theta r} \mathbb{P}_0(\tau_{\epsilon+z}^+ \leq r)|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{\theta} e^{-\theta r} \mathbb{P}_0(\tau_{\epsilon+z}^+ \in dr) \\
&= \frac{1}{\theta} \mathbb{E}_0\left[e^{-\theta \tau_{\epsilon+z}^+}\right] \\
&= \frac{1}{\theta} e^{-\Phi(\theta)(z+\epsilon)}
\end{aligned}$$

Mittels des Satzes von Fubini und den ersten beiden Eigenschaften des Lemmas erhalten wir für $\theta > 0$ und $x \geq 0$,

$$\int_0^\infty e^{-\theta r} \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_\epsilon^+ \leq r)\right] dr =$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^-<\infty\}}\int_0^\infty e^{-\theta r}\mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_\epsilon^+\le r)dr\right]\\
&= \frac{1}{\theta}e^{-\Phi(\theta)\epsilon}\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^-<\infty\}}e^{-\Phi(\theta)X_{\tau_0^-}}\right]dr\\
&= \frac{1}{\theta}e^{-\Phi(\theta)\epsilon}\frac{\theta}{\Phi(\theta)}\int_0^\infty e^{-\Phi(\theta)y}W'(x+y)dy\\
&= \int_0^\infty W'(x+y)\int_0^\infty e^{-\theta r}\int_y^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r\in dz)drdy.
\end{aligned}
$$

Nach weiterer Anwendung des Satzes von Fubini auf der rechten Seite erhalten wir:

$$
\int_0^\infty W'(x+y)\int_0^\infty e^{-\theta r}\int_{y+\epsilon}^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r\in dz)\,dr\,dy =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty e^{-\theta r}\int_0^\infty\int_y^\infty W'(x+y)\frac{z}{r}\,\mathbb{P}(X_r\in dz)\,dy\,dr\\
&= \int_0^\infty e^{-\theta r}\int_\epsilon^\infty\int_0^{z-\epsilon} W'(x+y)\frac{z}{r}dy\,\mathbb{P}(X_r\in dz)\,dr\\
&= \int_0^\infty e^{-\theta r}\int_\epsilon^\infty (W(x+z-\epsilon)-W(x))\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r\in dz)\,dr
\end{aligned}
$$

Durch die Laplace Inverse erhalten wir

$$
\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^-<\infty\}}\mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_\epsilon^+\le r)\right] = \int_\epsilon^\infty (W(x+z-\epsilon)-W(x))\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r\in dz).
$$

Als nächstes wollen wir $\mathbb{P}_x(\kappa_r<\infty) = 1-\mathbb{E}\left[X_1\right]\frac{\int_0^\infty W(x+z)z\mathbb{P}(X_r\in dz)}{\int_0^\infty z\mathbb{P}(X_r\in dz)}$ zeigen.

Wir unterscheiden die Fälle $x=0$ und $x>0$.

Sei nun $x=0$. Wir unterscheiden weiters die Fälle $W(0)>0$ (d.h. X hat Pfade von unbeschränkter Variation) und $W(0)=0$.
Betrachten wir zunächst den Fall $W(0)>0$. Dann gilt wegen

$$
\mathbb{P}_x(\tau_0^-<\infty) = 1-\mathbb{E}\left[X_1\right]W(x)
$$

$$\mathbb{P}(\tau_0^- < \infty) < 1$$

und daraus folgt weiters

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_\epsilon^+ \leq r)\right] < 1.$$

Denn

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_\epsilon^+ \leq r)\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}}\right] = \mathbb{P}(\tau_0^- < \infty) < 1.$$

Aus

$$\mathbb{P}_x(\kappa_r^\epsilon < \infty) = \mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty) - (1 - \mathbb{P}_\epsilon(\kappa_r^\epsilon < \infty))\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_\epsilon^+ \leq r)\right]$$

und

$$\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_\epsilon^+ \leq r)\right] = \int_\epsilon^\infty (W(x+z-\epsilon) - W(x))\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)$$

folgt mit $x = \epsilon = 0$:

$$\mathbb{P}(\kappa_r < \infty) = \mathbb{P}(\tau_0^- < \infty) - (1 - \mathbb{P}(\kappa_r < \infty)) \int_0^\infty (W(z) - W(0))\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)$$

Die ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\kappa_r < \infty)(1 - \int_0^\infty (W(z) - W(0))\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz))\\ &= \mathbb{P}(\tau_0^- < \infty) - \int_0^\infty (W(z) - W(0))\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)\end{aligned}$$

Durch Umformen und Ausdrücken von $\mathbb{P}(\kappa_r < \infty)$ erhalten wir für die Pariser Ruinwahrscheinlichkeit nun folgenden Term:

$$\mathbb{P}(\kappa_r < \infty) = \frac{\mathbb{P}(\tau_0^- < \infty) - \int_0^\infty (W(z) - W(0))\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}{1 - \int_0^\infty (W(z) - W(0))\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}.$$

Da $W(0) > 0$, gilt $\mathbb{P}(\tau_0^- < \infty) = 1 - \mathbb{E}[X_1]\, W(0)$. Einsetzen liefert:

$$\mathbb{P}(\kappa_r < \infty) = \frac{1 - \mathbb{E}[X_1]\, W(0) - \int_0^\infty (W(z) - W(0))\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}{1 - \int_0^\infty (W(z) - W(0))\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}$$

$$\mathbb{P}(\kappa_r < \infty) = \frac{1 - \mathbb{E}\left[X_1\right] W(0) + \int_0^\infty W(0)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz) - \int_0^\infty W(z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}{1 - \int_0^\infty W(z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz) + \int_0^\infty W(0)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}$$

Wie in Lemma 4.4 Gleichung 4.3 schon gezeigt, gilt

$$\int_0^\infty W(z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz) = 1.$$

Einsetzen in die obige Gleichung, liefert nun:

$$\mathbb{P}(\kappa_r < \infty) = \frac{-\mathbb{E}\left[X_1\right] W(0) + \int_0^\infty W(0)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}{\int_0^\infty W(0)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}.$$

Nach Kürzen von $W(0)$ erhalten wir den gewünschten Ausdruck:

$$\mathbb{P}(\kappa_r < \infty) = \frac{-\mathbb{E}\left[X_1\right] + \int_0^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}{\int_0^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}$$

Sei nun $W(0) = 0$ und $\epsilon > 0$. Mittels

$$\mathbb{P}_\epsilon(\tau_0^- < \infty) < 1$$

folgt:

$$\mathbb{P}_\epsilon(\kappa_r^\epsilon < \infty) = \frac{\mathbb{P}_\epsilon(\tau_0^- < \infty) - \int_\epsilon^\infty (W(z) - W(\epsilon))\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}{1 - \int_\epsilon^\infty (W(z) - W(\epsilon))\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}$$

$$\mathbb{P}_\epsilon(\kappa_r^\epsilon < \infty) = \frac{1 - \mathbb{E}\left[X_1\right] W(\epsilon) + \int_\epsilon^\infty W(\epsilon)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz) - \int_\epsilon^\infty W(z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}{1 - \int_\epsilon^\infty W(z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz) + \int_\epsilon^\infty W(\epsilon)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}$$

$$\mathbb{P}_\epsilon(\kappa_r^\epsilon < \infty) = \frac{\frac{1}{W(\epsilon)} - \mathbb{E}\left[X_1\right] + \int_\epsilon^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz) - \int_\epsilon^\infty \frac{W(z)}{W(\epsilon)}\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}{\frac{1}{W(\epsilon)} - \int_\epsilon^\infty \frac{W(z)}{W(\epsilon)}\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz) + \int_\epsilon^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}$$

Als nächstes wollen wir nun den Limes $\epsilon \searrow 0$ für beide Seiten berechnen. Betrachten wir zunächst den Ausdruck

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1 - \int_\epsilon^\infty W(z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}{W(\epsilon)}.$$

Aus Lemma 4.4 Gleichung 4.3 folgt

$$\int_0^\infty W(z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz) = 1 = \int_0^\epsilon W(z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz) + \int_\epsilon^\infty W(z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)$$

und somit

$$1 - \int_\epsilon^\infty W(z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz) = \int_0^\epsilon W(z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz).$$

Für den zu berechnenden Limes gilt also:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1 - \int_\epsilon^\infty W(z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}{W(\epsilon)} = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_0^\epsilon \frac{W(z)}{W(\epsilon)}\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz).$$

Partielle Integration ergibt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\epsilon \frac{W(z)}{W(\epsilon)}\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz) \quad &= \\
\\
= \quad & \int_0^\epsilon \frac{y}{r}\mathbb{P}(X_r \in dy) \cdot \left(\frac{W(\epsilon)}{W(\epsilon)} - \frac{W(0)}{W(\epsilon)}\right) - \int_0^\epsilon \frac{W'(z)}{W(\epsilon)} \int_0^z \frac{y}{r}\mathbb{P}(X_r \in dy)dz \\
= \quad & \int_0^\epsilon \frac{y}{r}\mathbb{P}(X_r \in dy) - \int_0^\epsilon \frac{W'(z)}{W(\epsilon)} \int_0^z \frac{y}{r}\mathbb{P}(X_r \in dy)dz.
\end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst das erste Integral:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_0^\epsilon \frac{y}{r}\mathbb{P}(X_r \in dy) = 0.$$

Für das zweite Integral erhalten wir:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} -\frac{\int_0^\epsilon W'(z) \int_0^z \frac{y}{r}\mathbb{P}(X_r \in dy)dz}{W(\epsilon)} = \frac{0}{0},$$

da $W(0) = 0$. Wir werden nun die Regel von l'Hospital anwenden und erhalten:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} -\frac{W'(\epsilon) \int_0^\epsilon \frac{y}{r}\mathbb{P}(X_r \in dy)}{W'(\epsilon)} = 0.$$

Also gilt ingesamt:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1 - \int_\epsilon^\infty W(z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}{W(\epsilon)} = 0.$$

und somit

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \mathbb{P}_\epsilon(\kappa_r^\epsilon < \infty) = \frac{-\mathbb{E}\left[X_1\right] + \int_0^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}{\int_0^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}.$$

Als nächstes betrachten wir den Limes von $\mathbb{P}_\epsilon(\kappa_r^\epsilon < \infty)$. Dazu definieren wir die Stoppzeit

$$\widetilde{\kappa_r}^\epsilon = \inf\{t > r : t - g_t > r, X_{t-r} < -\epsilon\}, \quad g_t = \sup\{0 \leq s \leq t : X_s \geq 0\}.$$

Für $0 < \epsilon' < \epsilon$ folgt offensichtlich $\{\widetilde{\kappa_r}^\epsilon < \infty\} \subset \{\widetilde{\kappa_r}^{\epsilon'} < \infty\}$ und somit

$$\bigcup_{\epsilon > 0} \{\widetilde{\kappa_r}^\epsilon < \infty\} = \{\kappa_r < \infty\}.$$

Aus der spatial homogeneity folgt weiters:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \mathbb{P}_\epsilon(\kappa_r^\epsilon < \infty) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \mathbb{P}_0(\widetilde{\kappa_r^\epsilon} < \infty) = \mathbb{P}_0(\kappa_r < \infty).$$

Setzen wir nun alles zusammen, ergibt sich für die Pariser Ruinwahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}(\kappa_r < \infty) = \frac{\int_0^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz) - \mathbb{E}\left[X_1\right]}{\int_0^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}.$$

Um nun den gewünschten Ausdruck für alle $x \geq 0$ zu zeigen, verwenden wir die Beziehungen

1. $\mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty) = 1 - \mathbb{E}\left[X_1\right] W(x)$
2. $\mathbb{P}(\kappa_r < \infty) = 1 - \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\int_0^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}$
3. $\mathbb{P}_x(\kappa_r^\epsilon < \infty) = \mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty) - (1 - \mathbb{P}_\epsilon(\kappa_r^\epsilon < \infty))\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}}\mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_\epsilon^+ \leq r)\right]$
4. $\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}}\mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_\epsilon^+ \leq r)\right] = \int_\epsilon^\infty (W(x + z - \epsilon) - W(x))\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)$

Sei nun $\epsilon = 0$, dann folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(\kappa_r < \infty) &= 1 - \mathbb{E}\left[X_1\right] W(x) - \left(1 - \left(1 - \frac{\mathbb{E}\left[X_1\right]}{\int_0^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz)}\right)\right) \\ &\quad \cdot \int_0^\infty (W(x+z) - W(x))\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r \in dz) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad 1-\mathbb{E}\left[X_1\right] W(x)-\frac{\mathbb{E}[X_1]}{\int_0^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r\in dz)} \\
&\quad \cdot \left(\int_0^\infty W(x+z)\tfrac{z}{r}\mathbb{P}(X_r\in dz)-W(x)\int_0^\infty \tfrac{z}{r}\mathbb{P}(X_r\in dz)\right) \\
&= 1-\mathbb{E}\left[X_1\right] W(x)-\frac{\mathbb{E}\left[X_1\right]\int_0^\infty W(x+z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r\in dz)}{\int_0^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r\in dz)}+W(x)\mathbb{E}\left[X_1\right]
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{P}_x(\kappa_r<\infty)=1-\frac{\mathbb{E}\left[X_1\right]\int_0^\infty W(x+z)\frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r\in dz)}{\int_0^\infty \frac{z}{r}\mathbb{P}(X_r\in dz)}.
$$

□

Kapitel 5

Random Walks

Definition 5.1: Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist ein Random Walk genau dann, wenn

$$X_0 = 0$$

und

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} U_i, \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

Dabei sind die Zuwächse U_i identisch und unabhängig verteilt (i.i.d.).

Definition 5.2: Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die Stoppzeiten

$$\tau_a^+ = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \geq a\}, \quad \tau_a^- = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \geq a\}.$$

Das Random Walk Analogon zum spectrally-negativ Lévy-Prozess ist der *skip-free-upward Random Walk*. Dies gilt genau dann, wenn alle U_i nur Werte in $\{1, 0, -1, -2, \ldots\}$ besitzen. Eine wichtige Folgerung dieser Eigenschaft ist, dass stets

$$x = X_{\tau_x^+} \text{ auf } \{\tau_x^+ < \infty\}$$

gilt. Im weiteren werden wir uns - wenn nicht anders angegeben- mit skip-free-upward Random Walks beschäftigen.

Definition 5.3: die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von X_1 wird mit

$$m(\beta) = \mathbb{E}\left[\beta^{X_1}\right]$$

bezeichnet. Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von X_n ergibt sich auf Grund der Unabhängigkeit der Zuwächse:

$$m_{X_n}(\beta) = \mathbb{E}\left[\beta^{X_n}\right] = \mathbb{E}\left[\beta^{U_1} \cdot \ldots \cdot \beta^{U_n}\right] = \mathbb{E}\left[\beta^{U_1}\right] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}\left[\beta^{U_n}\right] = m(\beta)^n.$$

Für $m(\beta)$ gilt insbesondere:

$$m'(1) = \mathbb{E}\left[X_1\right].$$

Es stellt sich hierbei die Frage unter welcher Bedingung $m(\beta)$ existiert, da X_1 Werte in $\{1, 0, -1, -2, \ldots\}$ besitzt.

Definition 5.4: (Laurentreihe)] [9] Die Laurentreihe ist eine Reihe ähnlich einer Potenzreihe, die aber zusätzlich negative Exponenten zulässt.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \beta^n$$

Die Laurentreihe konvergiert auf $A := \{\beta : r < |\beta| < R\}$, insbesondere also absolut und gleichmäßig mit $r \geq 0, R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Es gilt:

$$r = \limsup_{n \to \infty} |a_{-n}|^{\frac{1}{n}}$$

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

In unserem Kontext gilt $a_n = \mathbb{P}(X_1 = n)$ und somit gilt für r und R:

$$r = \limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_1 = -n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \to \infty} 1^{\frac{1}{n}} = 1$$

und

$$\limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_1 = n)^{\frac{1}{n}} = 0$$

Denn $\mathbb{P}(X_1 = n) = 0$ für alle $n > 1$ und somit $R = \infty$. Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $m(\beta)$ existiert also für alle β mit $1 < |\beta| < \infty$.

Definition 5.5: Wir definieren nun die Rechtsinverse für die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $m(\beta)$.

$$\Phi(\theta) := \sup\{\beta \geq 0 : m(\beta) = \theta\}$$

Falls $m'(1) \geq 0$ dann gilt stets

$$\Phi(1) = 1.$$

Satz 5.6: (Dwass und Dinges) Sei X ein skip-free-upward Random Walk $x \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, dann gilt:

$$\mathbb{P}(\tau_x^+ = n) = \frac{x}{n}\mathbb{P}(X_n = x).$$

Siehe [4] Kapitel 3, 3.8.

Satz 5.7: Für einen skip-free-upward Random Walk gilt für $q \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[q^{-\tau_x^+}\mathbf{1}_{\{\tau_x^+<\infty\}}\right] = \Phi(q)^{-x}$$

Der Beweis basiert auf dem allgemeineren Beweis in [1], Satz 3.12.

Beweis: Sei q fest gewählt. Aus der Eigenschaft Inkremente kleiner gleich 1 zu haben, können wir $x = X_{\tau_x^+}$ auf $\{\tau_x^+ < \infty\}$ schreiben. Wegen der starken Markov-Eigenschaft gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{\Phi(q)^{X_n}}{q^n}\middle|\mathcal{F}_{\tau_x^+}\right] &= \mathbf{1}_{\{\tau_x^+\geq n\}}\frac{\Phi(q)^{X_n}}{q^n} + \mathbf{1}_{\{\tau_x^+<n\}}\frac{\Phi(q)^{X_n}}{q^{\tau_x^+}}\mathbb{E}\left[\frac{\Phi(q)^{X_n-X_{\tau_x^+}}}{q^{\tau_x^+}}\middle|\mathcal{F}_{\tau_x^+}\right] \\
&= \frac{\Phi^{X_{n\wedge\tau_x^+}}}{q^{n\wedge\tau_x^+}}
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Tatsache, dass $\mathbb{E}\left[\frac{\Phi(q)^{X_n}}{q^n}\right] = 1$ für alle $n \geq 0$. Bilden wir nochmals den Erwartungswert erhalten wir

$$\mathbb{E}\left[\frac{\Phi(q)^{X_{n\wedge\tau_x^+}}}{q^{n\wedge\tau_x^+}}\right] = 1$$

Für den letzten Ausdruck gilt da $q \geq 1$:

$$\mathbb{E}\left[\frac{\Phi(q)^{X_{n\wedge\tau_x^+}}}{q^{n\wedge\tau_x^+}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\frac{\Phi(q)^x}{q^{n\wedge\tau_x^+}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\Phi(q)^x\right] = \Phi(q)^x.$$

Somit können wir den Satz der dominierten Konvergenz anwenden und erhalten:

$$\mathbb{E}\left[\frac{\Phi(q)^{X_{\tau_x^+}}}{q^{\tau_x^+}}\mathbf{1}_{\{\tau_x^+<\infty\}}\right] = 1 \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[q^{-\tau_x^+}\mathbf{1}_{\{\tau_x^+<\infty\}}\right] = \Phi(q)^{-x}$$

□

Korollar 5.8: Aus Satz 5.7 folgt mit $q = 1$,

$$\mathbb{P}(\tau_x^+ < \infty) = \Phi(1)^{-x}.$$

Gilt $\mathbb{E}[X_1] \geq 0$, dann gilt sogar

$$\mathbb{P}(\tau_x^+ < \infty) = 1.$$

Beweis: $\Phi(1) = 1$ gilt genau dann, wenn $m'(1) \geq 0$. Dies is äquivalent zu $\mathbb{E}[X_1] \geq 0$. □

Definition: 5.9: Die Escher Maß-Transformation ist definiert als

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^{(h)}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{h^{X_n}}{\mathbb{E}[h^{X_n}]} = \frac{h^{X_n}}{m(h)^n} =: \xi_t(h)$$

Der Prozess $\xi_t(h)$ ist ein Martingal. Ist X ein Random Walk unter $\mathbb{P}$, dann ist er sogar ein Random Walk unter $\mathbb{P}^{(h)}$.

Beweis: $X_n = \sum_{i=1}^n U_i$ ist ein Random Walk genau dann, wenn die Zuwächse U_i i.i.d. sind. Es genügt zu zeigen, dass die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion der Summe das Produkt der einzelnen Summanden ist:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{(h)}}\left[\beta_1^{U_1} \cdot \beta_2^{U_2} \cdot \ldots \cdot \beta_n^{U_n}\right] = m_{\mathbb{P}^{(h)}}(\beta_1) \cdot \ldots \cdot m_{\mathbb{P}^{(h)}}(\beta_n).$$

Im ersten Schritt berechnen wir die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von $X_1 = U_1$ unter $\mathbb{P}^{(h)}$:

$$m_{\mathbb{P}^{(h)}}(\beta) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{(h)}}\left[\beta^{X_1}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{h^{X_1}}{m(h)}\beta^{X_1}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[(h\beta)^{X_1}\right]}{m(h)}$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{(h)}}\left[\beta_1^{U_1} \cdot \ldots \cdot \beta_n^{U_n}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{h^{X_n}}{m(h)^n}\beta_1^{U_1} \cdot \ldots \cdot \beta_n^{U_n}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{h^{U_1}}{m(h)}\beta_1^{U_1} \cdot \ldots \cdot \frac{h^{U_n}}{m(h)}\beta_n^{U_n}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{h^{U_1}}{m(h)}\beta_1^{U_1}\right] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}\left[\frac{h^{U_n}}{m(h)}\beta_n^{U_n}\right]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{(h)}}\left[\beta_1^{U_1}\right] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{(h)}}\left[\beta_n^{U_n}\right]$$

Da die U_i i.i.d. sind und $U_1 = X_1$. □

Satz 5.10: Sei τ eine Stoppzeit und $\xi_t(h)$ der Prozess aus Satz 5.9, dann gilt auf $\{\tau < \infty\}$

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^{(h)}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_\tau} = \xi_\tau(h).$$

(siehe [1], Korrolar 3.11)

Beweis: Für $A \in \mathcal{F}_\tau$ gilt laut Definition auch $A \cap \{\tau < n\} \in \mathcal{F}_n$. Also gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(h)}(A \cap \{\tau < n\}) &= \mathbb{E}\left[\xi_t(h)\mathbf{1}_{\{A\cap\{\tau<n\}\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\xi_t(h)\mathbf{1}_{\{A\cap\{\tau<n\}\}}|\mathcal{F}_\tau\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\xi_t(h)\mathbf{1}_{\{A\cap\{\tau<n\}\}}\right] \end{aligned}$$

Für die dritte Gleichung haben wir die starke Markoveigenschaft benutzt bzw. dass $\xi(h)$ ein Martingal ist. Für $t \to \infty$ und mit dem Satz der monotonen Konvergenz folgt die Behauptung. □

Kapitel 6

Wiener-Hopf Zerlegung für Random Walks

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Wiener-Hopf Zerlegung für Random Walks. Der Beweis basiert auf [2]. Während dort allgemeine Random Walks behandelt werden, betrachten wir hier nur skip-free-upward Random Walks.

Definition 6.1: Sei Γ_p eine geometrische Verteilung mit Parameter $p \in (0,1)$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und Punktwahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(\Gamma_p = k) = p \cdot q^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit $q = 1-p$. Außerdem besitzt die geometrische Verteilung einige praktische Eigenschaften wie $\mathbb{P}(\Gamma_p \geq k) = q^k$ und die Gedächtnislosigkeit:

$$\mathbb{P}(\Gamma_p \geq n+m | \Gamma_p \geq m) = \mathbb{P}(\Gamma_p \geq n) \quad \forall n, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Definition 6.2: Für die Herleitung der Wiener-Hopf Zerlegung werden wir die unten angeführten Prozesse beötigen.

$$\begin{aligned}
\underline{X}_n &= \min\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}, \quad n \geq 0 \\
\underline{X}_\infty &= \inf\{X_0, X_1, \ldots\} \\
\overline{X}_n &= \max\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}, \quad n \geq 0 \\
\overline{X}_\infty &= \sup\{X_0, X_1, \ldots\}
\end{aligned}$$

Lemma 6.3: (Dualitäts Lemma) Sei $n > 0\,, n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Definiere nun den Prozess

$$\{X_{n-k} - X_n : 0 \leq k \leq n\}$$

und seinen dualen Prozess

$$\{-X_k : 0 \leq k \leq n\}.$$

Dann besitzen diese Prozesse die gleiche Verteilung unter $\mathbb{P}$ (siehe [1], Lemma 3.4).

Lemma 6.4: Sei $n > 0\, n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Dann besitzen die Paare $(\overline{X}_n, \overline{X}_n - X_n)$ und $(X_n - \underline{X}_n, -\underline{X}_n)$ die gleiche Verteilung unter $\mathbb{P}$ (siehe [1], Lemma 3.5).

Definition 6.5: Sei $p \in (0,1)$ fest und Γ_p die oben angeführte geometrische Verteilung, so definiere

$$\overline{G}_{\Gamma_p} = \sup\{k \leq \Gamma_p : \overline{X}_k = X_k\}$$
$$\underline{G}_{\Gamma_p} = \sup\{k \leq \Gamma_p : \underline{X}_k = X_k\}$$

mit Γ_p unabhängig von X.

Definition 6.6: (Ladder-Height-Prozess) Der bivariate Prozess $(T, H) := \{(T_n, H_n) : n = 0, 1, \ldots\}$ mit $(T_0, H_0) = (0, 0)$ und für $n \geq 1$

$$T_n = \begin{cases} \min\{k = 1, 2, \ldots : X_{T_{n-1}+k} > H_{n-1}\} & \text{wenn } T_{n-1} < \infty \\ \infty, & \text{wenn } T_{n-1} = \infty \end{cases}$$

und

$$H_n = \begin{cases} X_{T_n} & \text{wenn } T_n < \infty \\ \infty, & \text{wenn } T_n = \infty \end{cases}$$

Der Prozess H ist der Wert des Maximums von X bis zum Zeitpunkt n und T der Zeitpunkt, wann ein neues Maximum erreicht wird.

Im Falle eines skip-free-upwards Random-Walk gilt:

$$T_n = \tau_n^+ \quad \text{und} \quad H_n = n.$$

Definiere weiters die Stoppzeit

$$N = \inf\{n > 0 : X_n > 0\}.$$

Die ist der erste Zeitpunkt, wo der Random Walk 0 überschreitet.

Satz 6.7: (Wiener-Hopf Zerlegung) die Paare $(\overline{G}_{\Gamma_p}, \overline{X}_{\Gamma_p})$ und $(\Gamma_p - \overline{G}_{\Gamma_p}, \overline{X}_{\Gamma_p} - X_{\Gamma_p})$ sind unabhängig und es gilt:

$$\mathbb{E}\left[\alpha^{\Gamma_p}\beta^{X_{\Gamma_p}}\right] = \frac{p}{1 - q\alpha\mathbb{E}\left[\beta^{X_1}\right]} = \Psi_p^+(\alpha,\beta)\cdot\Psi_p^-(\alpha,\beta) \tag{6.1}$$

mit

$$\Psi_p^+(\alpha,\beta) = \mathbb{E}\left[\alpha^{\overline{G}_{\Gamma_p}}\beta^{\overline{X}_{\Gamma_p}}\right] \tag{6.2}$$

$$\Psi_p^-(\alpha,\beta) = \mathbb{E}\left[\alpha^{\underline{G}_{\Gamma_p}}\beta^{\underline{X}_{\Gamma_p}}\right] \tag{6.3}$$

$$(\overline{G}_{\Gamma_p}, \overline{X}_{\Gamma_p}) \stackrel{d}{=} (T_{\Gamma_\lambda}, H_{\Gamma_\lambda}),\ \text{mit}\ \lambda = 1 - \Phi(q^{-1})^{-1} \tag{6.4}$$

Beweis: Aus Satz 5.7 folgt:

$$\mathbb{P}(\overline{X}_{\Gamma_p} > k) = \mathbb{P}(\tau_k^+ < \Gamma_p) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{q}^{-\tau_k^+}\mathbf{1}_{\{\tau_k^+<\infty\}}\right] = \Phi(q^{-1})^{-k}$$

Weiters zeigen wir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\alpha^{\Gamma_p}\beta^{X_{\Gamma_p}}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\alpha\beta^{X_1}\right]^{\Gamma_p}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p(q\alpha\mathbb{E}\left[\beta^{X_1}\right])^k \\
&= \frac{p}{1 - q\alpha\mathbb{E}\left[\beta^{X_1}\right]}
\end{aligned}$$

Der Pfad des Random Walks kann in $\nu \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ vollständigen Exkursionen vom Maximum und eine zusätzliche Exkursion, die die zufällige Zeit Γ_p überbrückt, zerlegt. Wegen der starken Markov-Eigenschaft und der Gedächtnislosigkeit, müssen die vollständigen Exkursionen dieselbe Verteilung besitzen. Diese ist gleich einem Random-Walk auf den Zeitpunkten

$\{1,2,\dots,N\}$ bedingt auf das Ereignis $\{N \leq \Gamma_p\}$. Außerdem ist ν geometrisch verteilt mit Parameter $1-\mathbb{P}(N \leq \Gamma_p)$. Somit gilt:

$$(\overline{G}_{\Gamma_p}, \overline{X}_{\Gamma_p}) = \sum_{i=1}^{\nu} (N^{(i)}, S^{(i)})$$

wobei die $(N^{(i)}, S^{(i)}), i = 1,2,\dots$ paarweise unabhängig sind und

$$(N^{(i)}, S^{(i)}) \stackrel{d}{=} (N, X_N) \text{ bedingt auf } \{N \leq \Gamma_p\}$$

Somit ist $(\overline{G}_{\Gamma_p}, \overline{X}_{\Gamma_p})$ die geometrische Summe von i.i.d. Zufallsvariable. Die Unabhängigkeit von $(\overline{G}_{\Gamma_p}, \overline{X}_{\Gamma_p})$ und $(\Gamma_p - \overline{G}_{\Gamma_p}, \overline{X}_{\Gamma_p} - X_{\Gamma_p})$ folgt unmittelbar aus der oben angeführten Zerlegung.

Aus dem Dualitäts-Lemma 6.4 folgt:

$$(\Gamma_p - \overline{G}_{\Gamma_p}, \overline{X}_{\Gamma_p} - X_{\Gamma_p}) \stackrel{d}{=} (\underline{G}_{\Gamma_p}, \underline{X}_{\Gamma_p})$$

Da $(\overline{G}_{\Gamma_p}, \overline{X}_{\Gamma_p}) \stackrel{d}{=} (T_{\Gamma_\lambda}, H_{\Gamma_\lambda}),$ mit $\lambda = 1 - \Phi(q^{-1})^{-1}$ gilt, folgt für einen skip-free-upward Random-Walk, dass

$$(T_{\Gamma_\lambda}, H_{\Gamma_\lambda}) = (\tau^+_{\Gamma_\lambda}, \Gamma_\lambda).$$

Somit folgt also:

$$\mathbb{E}\left[\alpha^{\overline{G}_{\Gamma_p}} \beta^{\overline{X}_{\Gamma_p}}\right] = \mathbb{E}\left[\alpha^{\tau^+_{\Gamma_\lambda}} \beta^{\Gamma_\lambda}\right] = \frac{\lambda}{1-(1-\lambda)\beta\mathbb{E}\left[\alpha^{\tau_1^+}\right]}$$

und mit Hilfe von $\mathbb{E}\left[\alpha^{\tau_1^+}\right] = \Phi(\alpha^{-1})^{-1}$

$$\mathbb{E}\left[\alpha^{\overline{G}_{\Gamma_p}} \beta^{\overline{X}_{\Gamma_p}}\right] = \frac{\lambda}{1-(1-\lambda)\beta\Phi(\alpha^{-1})^{-1}}$$

Somit erhalten wir für die Wiener-Hopf Zerlegung folgende Faktoren

$$\Psi_p^+(\alpha,\beta) = \frac{\Phi(\frac{1}{q}) - 1}{\Phi(\frac{1}{q}) - \beta\Phi(\frac{1}{\alpha})^{-1}}$$

$$\Psi_p^-(\alpha,\beta) = \frac{p}{1-q\alpha m(\beta)} \frac{\Phi(\frac{1}{q}) - \beta\Phi(\frac{1}{\alpha})^{-1}}{\Phi(\frac{1}{q}) - 1}$$

□

Kapitel 7

q-Scale Function

Die Ergebnisse aus diesem Kapitel und die Herleitung basieren auf [1], Kapitel 8. Um den Lesefluss nicht zu hemmen, werden die Beweise eigens in Kapitel 9 angeführt.

Definition 7.1: (q-Scalefunction) Es existiert eine Familie von Funktionen $W^{(q)} : \mathbb{Z} \to [0, \infty)$ für $q \in (0, 1]$ und es gilt:

1. Für $q \in (0, 1]$ gilt $W^{(q)}(x) = 0$ falls $x < 0$ und $W^{(q)}(x)$ ist streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$

2.
$$\sum_{x=0}^{\infty} \beta^{-x} W^{(q)}(x) = \frac{\beta}{\Phi(q^{-1})(qm(\beta) - 1)} \tag{7.1}$$

3. Sei $x \in \mathbb{Z}$ und $q \in (0, 1)$

$$\mathbb{E}_x \left[q^{\tau_0^-} \mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \right] =$$

$$q^{-1} \left(1 + (1-q)\Phi(q^{-1}) \sum_{y=0}^{x} W^{(q)}(y) - \frac{1-q}{\Phi(q^{-1}) - 1} \Phi(q^{-1})^2 W^{(q)}(x) \right) \tag{7.2}$$

bzw. für $q = 1$

$$\mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty) = 1 - m'(1)W(x). \tag{7.3}$$

4. Für $x \leq a$ und für $q \in (0,1]$ gilt:

$$\mathbb{E}_x\left[q^{\tau_a^+}\mathbf{1}_{\{\tau_0^- > \tau_a^+\}}\right] = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)} \tag{7.4}$$

Wobei wir $W(x) := W^{(1)}(x)$ definieren.

Satz 7.2: Für $v > 1$ gilt

$$\mathbb{E}_x\left[v^{X_{\tau_0^-}}\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}}\right] = m(v)^{-1}\left(v^x + (1 - m(v))v^x \frac{1}{v}\sum_{y=0}^{x} v^{-y}W(y) - \frac{1 - m(v)}{1 - v}\frac{1}{v}W(x)\right).$$

Kapitel 8

Pariser Ruinwahrscheinlichkeit für Random Walks

In diesem Kapitel wollen wir nun eine Formel für die Pariser Ruinwahrscheinlichkeit eines skip-free-upward Random Walks mit Hilfe der q-Scalefunction herleiten.

Definition 8.1: Sei κ_n eine Stoppzeit mit

$$\kappa_n = \inf\{n > 0 : n - g_n > r\}, \text{ und } g_n = \sup\{0 \leq k \leq n : X_k \geq 0\}.$$

Die Stoppzeit κ_n ist der erste Zeitpunkt, wo der Prozess X zum ersten Mal unter 0 fällt und einen Zeitraum $> r$ unter 0 bleibt.
Dies ist genau der gesuchte Zeitpunkt für Pariser Ruin und somit ist die Pariser Ruinwahrscheinlichkeit gegeben durch:

$$\mathbb{P}(\kappa_n < \infty).$$

Satz 8.2: Sei $\mathbb{E}[X_1] > 0$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(\kappa_n < \infty) = 1 - \frac{\mathbb{E}[X_1] \sum_{y=1}^{\infty} W(x+y-1) \frac{y}{n} \mathbb{P}(X_n = y)}{\sum_{y=1}^{\infty} \frac{y}{n} \mathbb{P}(X_n = y)} \tag{8.1}$$

Für den Beweis benötigen wir zusätzlich noch weitere Lemmata, die im nächsten Abschnitt vorgestellt werden.

8.1 Vorbereitungen

Die Beweise in diesem Abschnitt werden eigens im Kapitel 10 angeführt.

Lemma 8.3: Für $\theta > 1$ gilt:

$$\mathbb{E}_x\left[\Phi(\theta)^{X_{\tau_0^-}}\mathbf{1}_{\{\tau_0^-<\infty\}}\right] = \frac{\theta-1}{\theta\Phi(\theta)}\sum_{y=0}^{\infty}\Phi(\theta)^{-y}\left(W(x+y)-W(x)\right). \quad (8.2)$$

Lemma 8.4: Sei $\theta > 1$ und X und τ_x^+ wie bisher definiert, dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\theta^{-n}\frac{y}{n}\mathbb{P}(X_n = y) = \Phi(\theta)^{-y} \quad (8.3)$$

$$\sum_{y=0}^{\infty}\frac{y+1}{n}W(y)\mathbb{P}(X_n = y+1) = 1 \quad (8.4)$$

Satz 8.5: Sei $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ dann gilt:

$$\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^-<\infty\}}\mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_0^+ \leq n)\right] = \sum_{y=0}^{\infty}(W(x+y)-W(x))\frac{y+1}{n}\mathbb{P}(X_n = y+1) \quad (8.5)$$

8.2 Beweis von Satz 8.2

Wir besitzen nun das notwendige Rüstzeug um Satz 8.2 zu beweisen. Sei zunächst $x < 0$. Mit Hilfe der starken Markoveigenschaft gilt für X:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\kappa_n < \infty) &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_x(\kappa_n < \infty|\mathcal{F}_{\tau_0^+})\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^+>r\}}\mathbb{P}_x(\kappa_n < \infty|\mathcal{F}_{\tau_0^+})\right] + \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^+\leq r\}}\mathbb{P}_x(\kappa_n < \infty|\mathcal{F}_{\tau_0^+})\right] \\
&= \mathbb{P}_x(\tau_0^+ > r) + \mathbb{P}_x(\tau_0^+ \leq r)\mathbb{P}(\kappa_n < \infty) \\
&= 1 - \mathbb{P}_x(\tau_0^+ \leq r) + \mathbb{P}_x(\tau_0^+ \leq r)\mathbb{P}(\kappa_n < \infty) \\
&= 1 - \mathbb{P}_x(\tau_0^+ \leq r)(1 - \mathbb{P}(\kappa_n < \infty)).
\end{aligned}$$

Die dritte Gleichheit folgt, da $\mathbb{P}_x(\kappa_n < \infty|\mathcal{F}_{\tau_0^+}) = 1$ auf $\tau_0^+ > r$ und $X_0 < 0$. Mit dem oben gezeigten und wieder wegen der starken Markoveigenschaft gilt für $x \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\kappa_n < \infty) &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_x(\kappa_n < \infty | \mathcal{F}_{\tau_0^-})\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\kappa_n < \infty)\right] + \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- = \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\kappa_n < \infty)\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\kappa_n < \infty)\right]
\end{aligned}
$$

Wir verwenden nun obige Tatsache ($X_{\tau_0^-}$ ist ja negativ) und erhalten:

$$
\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\kappa_n < \infty)\right] =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}}(1 - \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_0^+ \leq r)(1 - \mathbb{P}(\kappa_n < \infty)))\right] \\
&= \mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty) - (1 - \mathbb{P}(\kappa_n < \infty))\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_0^+ \leq r)\right]
\end{aligned}
$$

Laut Satz 8.5 gilt nun

$$
\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_0^+ \leq n)\right] = \sum_{y=0}^{\infty}(W(x+y) - W(x))\frac{y+1}{n}\mathbb{P}(X_n = y+1)
$$

und setzen wir alles zusammen, erhalten wir insgesamt:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\kappa_n < \infty) &= \mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty) - (1 - \mathbb{P}(\kappa_n < \infty)) \\
&\quad \cdot \sum_{y=0}^{\infty}(W(x+y) - W(x))\frac{y+1}{n}\mathbb{P}(X_n = y+1) \qquad (8.6)
\end{aligned}
$$

Sei zunächst $x = 0$ so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\kappa_n < \infty) &= \mathbb{P}(\tau_0^- < \infty) \\
&\quad -(1 - \mathbb{P}(\kappa_n < \infty))\sum_{y=0}^{\infty}(W(y) - W(0))\frac{y+1}{n}\mathbb{P}(X_n = y+1) \\
\mathbb{P}(\kappa_n < \infty) &= \frac{\mathbb{P}(\tau_0^- < \infty) - \sum_{y=0}^{\infty}(W(y) - W(0))\frac{y+1}{n}\mathbb{P}(X_n = y+1)}{1 - \sum_{y=0}^{\infty}(W(y) - W(0))\frac{y+1}{n}\mathbb{P}(X_n = y+1)}
\end{aligned}
$$

Laut Satz 7.1 Gleichung 7.3 gilt

$$
\mathbb{P}(\tau_0^- < \infty) = 1 - \mathbb{E}\left[X_1\right]W(0).
$$

In Lemma 8.4 Gleichung 8.4 wurde bereits gezeigt, dass

$$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{y+1}{n} W(y) \mathbb{P}(X_n = y+1) = 1.$$

Mit diesen beiden Tatsachen und nach verschieben des Summationsindexes y folgt nun

$$\mathbb{P}(\kappa_n < \infty) = \frac{-\mathbb{E}\left[X_1\right] + W(0) \sum_{y=1}^{\infty} W(0) \frac{y}{n} \mathbb{P}(X_n = y)}{\sum_{y=1}^{\infty} W(0) \frac{y}{n} \mathbb{P}(X_n = y)}.$$

Da $W(0) > 0$ gilt erhalten wir nach küzen von $W(0)$

$$\mathbb{P}(\kappa_n < \infty) = \frac{-\mathbb{E}\left[X_1\right] + \sum_{y=1}^{\infty} \frac{y}{n} \mathbb{P}(X_n = y)}{\sum_{y=1}^{\infty} \frac{y}{n} \mathbb{P}(X_n = y)}.$$

Sei nun $x > 0$. Wieder mit Satz 7.1 Gleichung 7.3 gilt

$$\mathbb{P}(\tau_0^- < \infty) = 1 - \mathbb{E}\left[X_1\right] W(x).$$

Setzen wir obigen Ausdruck für $\mathbb{P}(\kappa_n < \infty)$ in Gleichung 8.6 ein, erhalten wir

$$\mathbb{P}_x(\kappa_n < \infty) = 1 - \frac{\mathbb{E}\left[X_1\right] \sum_{y=1}^{\infty} W(x+y-1) \frac{y}{n} \mathbb{P}(X_n = y)}{\sum_{y=1}^{\infty} \frac{y}{n} \mathbb{P}(X_n = y)}$$

□

Kapitel 9

Beweise I

In diesem Kapitel werden nun die auständigen Beweise aus Kapitel 7 nachgereicht.

9.1 Beweis von Satz 7.1

Wir zeigen zunächst 7.4:

Sei $m'(1) > 0$. Dann ist $-\underline{X}_\infty$ fast sicher endlich. Definiere nun die steigende Funktion

$$W(x) = \begin{cases} \mathbb{P}_x(\underline{X}_\infty \geq 0) & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Aus dem Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit und der starken Markov-Eigenschaft folgt für $x \in [0, a)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(\underline{X}_\infty \geq 0) &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_x(\underline{X}_\infty \geq 0 | \mathcal{F}_{\tau_a^+})\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_a^+ < \tau_0^-\}} \mathbb{P}_a(\underline{X}_\infty \geq 0)\right] + \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_a^+ > \tau_0^-\}} \mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\underline{X}_\infty \geq 0)\right] \\ &= \mathbb{P}_a(\underline{X}_\infty \geq 0) \mathbb{P}_x(\tau_a^+ < \tau_0^-) \end{aligned}$$

Die erste Gleichheit folgt aus dem Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit. Die zweite Gleichheit folgt aus der starken Markov Eigenschaft. Das Verschwinden des zweiten Terms aus der dritten Gleichung folgt wegen $X_{\tau_0^-} < 0$ und somit $\mathbb{P}_x(\underline{X}_\infty \geq 0) = 0, \forall x < 0$.
Somit erhalten wir

$$\mathbb{P}_x(\tau_a^+ < \tau_0^-) = \frac{\mathbb{P}_x(\underline{X}_\infty \geq 0)}{\mathbb{P}_a(\underline{X}_\infty \geq 0)} = \frac{W(x)}{W(a)}$$

Sei nun $q \in (0, 1)$

Definiere:

$$W_{\Phi(q^{-1})}(x) = \mathbb{P}_x^{\Phi(q^{-1})}(\underline{X}_\infty \geq 0)$$

Mit der gleichen Argumentation wie zuvor gilt:

$$\mathbb{P}_x^{\Phi(q^{-1})}(\tau_a^+ < \tau_0^-) = \frac{W_{\Phi(q^{-1})}(x)}{W_{\Phi(q^{-1})}(a)}$$

Nach der Esscher-Maß-Transformation gilt:

$$\mathbb{P}_x^{\Phi(q^{-1})}(\tau_a^+ < \tau_0^-) = \mathbb{E}_x \left[\frac{\Phi(q^{-1})^{X_{\tau_a^+} - x}}{m(\Phi(q^{-1}))^{\tau_a^+}} \mathbf{1}_{\{\tau_a^+ < \tau_0^-\}} \right]$$

da $m(\Phi(q^{-1})) = q^{-1}$ gilt

$$\mathbb{P}_x^{\Phi(q^{-1})}(\tau_a^+ < \tau_0^-) = \Phi(q^{-1})^{a-x} \mathbb{E}_x \left[q^{\tau_a^+} \mathbf{1}_{\{\tau_a^+ < \tau_0^-\}} \right]$$

Aus diesen beiden Tatsachen folgt nun:

$$\Phi(q^{-1})^{a-x} \mathbb{E}_x \left[q^{\tau_a^+} \mathbf{1}_{\{\tau_a^+ < \tau_0^-\}} \right] = \frac{W_{\Phi(q^{-1})}(x)}{W_{\Phi(q^{-1})}(a)}$$

$$\mathbb{E}_x \left[q^{\tau_a^+} \mathbf{1}_{\{\tau_a^+ < \tau_0^-\}} \right] = \frac{\Phi(q^{-1})^x}{\Phi(q^{-1})^a} \frac{W_{\Phi(q^{-1})}(x)}{W_{\Phi(q^{-1})}(a)}$$

Setze nun $W^{(q)}(x) = \Phi(q^{-1})^x W_{\Phi(q)}(x)$. Offensichtlich gilt $W^{(q)} = 0$ auf $(-\infty, 0)$ und nicht fallend da $\Phi(q^{-1}) > 1$ und 7.4 folgt.

Um 7.1. zu beweisen, betrachten wir zunächst den zweiten Faktor der Wiener-Hopf-Zerlegung $\Psi_p^-(1, \beta) = \mathbb{E}\left[\beta^{\underline{X}_{\Gamma_p}}\right]$ und seinen Grenzwert für $p \to 0$:

$$\lim_{p \to 0} \Psi_p^-(1, \beta) = \mathbb{E}\left[\beta^{\underline{X}_\infty}\right] = \lim_{p \to 0} \frac{p}{\Phi(\frac{1}{q}) - 1} \frac{\Phi(\frac{1}{q}) - \beta}{1 - qm(\beta)}$$

Da für $p \to 0$ $q \to 1$ folgt und wegen $\Phi(1) = 1$, gilt für den zweiten Faktor:

$$\frac{1 - \beta}{1 - m(\beta)}.$$

Für den ersten Faktor gilt:

$$\lim_{p \to 0} \frac{p}{\Phi(\frac{1}{q}) - 1} = \frac{0}{0}.$$

Aus $m(\Phi(\frac{1}{q})) = \frac{1}{q}$ folgt:

$$m'(\Phi(\frac{1}{q})) = m'(\Phi(\frac{1}{q}))\Phi'(\frac{1}{q})\frac{-1}{q^2} \overset{!}{=} \frac{-1}{q^2}$$

und somit

$$\Phi'(\frac{1}{q}) = \frac{1}{m'(\Phi(\frac{1}{q}))}.$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$\mathbb{E}\left[\beta^{\underline{X}_\infty}\right] = m'(1)\frac{1-\beta}{1-m(\beta)}.$$

Aus der Defintion von $W(x)$ in 7.4 ist ersichtlich, dass diese Funktion bis auf einen Faktor eindeutig ist. Betrachten wir der Einfachheit halber:

$$W(x) = \frac{1}{m'(1)}\mathbb{P}_x(\underline{X}_\infty \geq 0).$$

Sei nun $\beta > 1$ dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\beta^{\underline{X}_\infty}\right] &= \sum_{x=0}^{\infty} \beta^{-x}\mathbb{P}(-\underline{X}_\infty = x) \\
&= \mathbb{P}(-\underline{X}_\infty = 0) + \sum_{x=1}^{\infty} \beta^{-x}\mathbb{P}(-\underline{X}_\infty = x) \\
&= \mathbb{P}(-\underline{X}_\infty = 0) + \sum_{x=1}^{\infty} \beta^{-x}\left(\mathbb{P}(-\underline{X}_\infty \leq x) - \mathbb{P}(-\underline{X}_\infty \leq x-1)\right) \\
&= \mathbb{P}(-\underline{X}_\infty = 0) + \sum_{x=1}^{\infty} \beta^{-x}\mathbb{P}(-\underline{X}_\infty \leq x) - \sum_{x=1}^{\infty} \beta^{-x}\mathbb{P}(-\underline{X}_\infty \leq x-1) \\
&= \mathbb{P}(-\underline{X}_\infty = 0) + \sum_{x=1}^{\infty} \beta^{-x}\mathbb{P}(-\underline{X}_\infty \leq x) - \sum_{x=0}^{\infty} \beta^{-x-1}\mathbb{P}(-\underline{X}_\infty \leq x) \\
&= \mathbb{P}(-\underline{X}_\infty = 0) + (1-\frac{1}{\beta})\sum_{x=1}^{\infty} \beta^{-x}\mathbb{P}(-\underline{X}_\infty \leq x) - \frac{1}{\beta}\mathbb{P}(-\underline{X}_\infty \leq 0)
\end{aligned}$$

da $\mathbb{P}(-\underline{X}_\infty \leq 0) = \mathbb{P}(-\underline{X}_\infty = 0)$ folgt:

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\sum_{x=0}^{\infty} \beta^{-x}\mathbb{P}(-\underline{X}_\infty \leq x) &= \left(1-\frac{1}{\beta}\right)\sum_{x=0}^{\infty} \beta^{-x}\mathbb{P}_x(\underline{X}_\infty \geq 0) \\
&= \left(1-\frac{1}{\beta}\right)\sum_{x=0}^{\infty} \beta^{-x}W(x)
\end{aligned}$$

Wegen der Gestalt des zweiten Wiener-Hopf Faktors folgt nun:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \beta^{-x} W(x) = \frac{\beta}{m(\beta)-1}.$$

Betrachten wir nun

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\infty} \beta^{-x} W^{(q)}(x) &= \sum_{x=0}^{\infty} \Phi(q^{-1})^{x} \beta^{-x} W_{\Phi(q^{-1})}(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} (\Phi(q^{-1})^{-1}\beta)^{-x} W_{\Phi(q^{-1})}(x) \\
&= \frac{\beta}{\Phi(q^{-1})} \frac{1}{m_{\Phi(q^{-1})}(\Phi(q^{-1})^{-1}\beta) - 1} \\
&= \frac{\beta}{\Phi(q^{-1})(qm(\beta)-1)}.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus

$$m_{\Phi(q^{-1})}(\Phi(q^{-1})^{-1}\beta) = \mathbb{E}\left[\frac{\Phi(q^{-1})^{X_1}}{q^{-1}} \cdot \frac{\beta^{X_1}}{\Phi(q^{-1})^{X_1}}\right] = q \cdot m(\beta).$$

Somit ist 7.1 bewiesen.

Um 7.2 zu zeigen betrachten wir:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \beta^{-x} (W^{(q)}(x) - W^{(q)}(x-1))$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\infty} \beta^{-x} (W^{(q)}(x) - W^{(q)}(x-1)) &= W^{(q)}(0) + \sum_{x=1}^{\infty} \beta^{-x} (W^{(q)}(x) - W^{(q)}(x-1)) \\
&= W^{(q)}(0) + \sum_{x=1}^{\infty} \beta^{-x} W^{(q)}(x) - \sum_{x=0}^{\infty} \beta^{-x-1} W^{(q)}(x) \\
&= \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \sum_{x=0}^{\infty} \beta^{-x} W^{(q)}(x) \\
&= \frac{1}{\Phi(q^{-1})} \frac{\beta - 1}{qm(\beta) - 1}
\end{aligned}$$

Vergleichen wir nun den zweiten Wiener-Hopf-Faktor $\Psi_p^-(1,\beta)$ mit $W^{(q)}(x)$ und $W^{(q)}(\Delta x)$ so folgert man leicht für $x \geq 0$

$$\mathbb{P}(-\underline{X}_{\Gamma_p} = x) = \frac{1-q}{\Phi(q^{-1})-1}\Phi(q^{-1})^2 W^{(q)}(\Delta x) - (1-q)\Phi(q^{-1})W^{(q)}(x),$$

wobei $W^{(q)}(\Delta x) = W^{(q)}(x) - W^{(q)}(x-1)$. Mit obiger Tatsache und der Unabhängigkeit von Γ_p und X folgt nun

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[q^{\tau_0^-}\mathbf{1}_{\{\tau_0^-<\infty\}}\right] &= \mathbb{P}_x(\Gamma_p \geq \tau_0^-) = q^{-1}\mathbb{P}_x(\Gamma_p > \tau_0^-) \\
&= q^{-1}\mathbb{P}_x(\underline{X}_{\Gamma_p} < 0) \\
&= q^{-1}\mathbb{P}_x(-\underline{X}_{\Gamma_p} > 0) \\
&= q^{-1}\mathbb{P}(-\underline{X}_{\Gamma_p} > x) \\
&= q^{-1}\left(1 - \mathbb{P}_x(-\underline{X}_{\Gamma_p} \leq x)\right) \\
&= q^{-1}\left(1 + (1-q)\Phi(q^{-1})\sum_{y=0}^{x} W^{(q)}(y) - \frac{1-q}{\Phi(q^{-1})-1}\Phi(q^{-1})^2 W^{(q)}(x)\right).
\end{aligned}$$

Da $\mathbb{P}(\Gamma_p \geq n) = q^{-1}\mathbb{P}(\Gamma_p > n)$ für die geometrische Verteilung gilt.

Bilden wir noch den Grenzwert $q \to 1$ so erhalten wir

$$\mathbb{P}_x(\tau_0^- < \infty) = 1 - m'(1)W(x)$$

und 7.3 folgt. □

9.2 Beweis von Satz 7.2

Sei $\mathbb{P}^v$ das Wahrscheinlichkeitsmaß der Esscher-Transformation und $u \in (0,1]$, dann gilt:

$$\mathbb{E}_x^{\mathbb{P}_v}\left[u^{\tau_0^-} m(v)^{\tau_0^-}\mathbf{1}_{\{\tau_0^-<\infty\}}\right] = \mathbb{E}_x\left[\frac{v^{X_{\tau_0^-}}}{m(v)^{\tau_0^-}} u^{\tau_0^-} m(v)^{\tau_0^-}\mathbf{1}_{\{\tau_0^-<\infty\}}\right] = \mathbb{E}_x\left[v^{X_{\tau_0^-}} u^{\tau_0^-}\mathbf{1}_{\{\tau_0^-<\infty\}}\right].$$

Sei nun $u = 1$. Mit Gleichung 7.2 aus Satz 7.1 folgt nun:

$$\mathbb{E}_x^{\mathbb{P}_v}\left[m(v)^{\tau_0^-}\mathbf{1}_{\{\tau_0^-<\infty\}}\right] =$$

$$m(v)^{-1}\left(1+(1-m(v))\Phi_v(m(v)^{-1})\sum_{y=0}^{x}W_v^{m(v)}-\frac{1-m(v)}{\Phi_v(m(v)^{-1})-1}\Phi_v(m(v)^{-1})^{-2}W_v^{m(v)}(x)\right).$$

mit $\Phi_v(\theta)=\sup\{\lambda>0:m_v(\lambda)=\theta\}$ wobei m_v die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion unter $\mathbb{P}_v$ bezeichnet. Es gilt

$$\Phi_v(m(v)^{-1})=\frac{1}{v}.$$

Da

$$\Phi_v(m(v)^{-1})=\sup\{\lambda>0:m_v(\lambda)=m(v)^{-1}\}$$

gelten muss, folgt

$$m_v(\lambda)=\mathbb{E}_x^{\mathbb{P}_v}\left[\lambda^{X_1}\right]=\mathbb{E}_x\left[\frac{v^{X_1}}{m(v)}\lambda^{X_1}\right]\overset{!}{=}\frac{1}{m(v)}.$$

Dies ist äquivalent zu $\mathbb{E}_x\left[(v\cdot\lambda)^{X_1}\right]=1$. Dies gilt genau dann, wenn $\lambda=v^{-1}$ und die Behauptung folgt. Laut Defintion von $W_v^{(m(v))}(x)$ gilt:

$$W_v^{(m(v))}(x)=\Phi_v(m(v)^{-1})^xW_v(x)=\left(\frac{1}{v}\right)^xW_v(x).$$

mit den beiden obigen Tatsachen und

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_x^v}{d\mathbb{P}_x}\right|_{\mathcal{F}_0}=v^{-x}$$

folgt das Gewünschte. $\square$

Kapitel 10

Beweise II

10.1 Beweis von Lemma 8.3

Mit Hilfe von Satz 7.2 mit $v = \Phi(\theta)$ folgt:

$$\Phi(\theta)^x + (1 - m(\Phi(\theta)))\Phi(\theta)^x \frac{1}{\Phi(\theta)} \sum_{y=0}^{x} \Phi(\theta)^{-y} W(y) - \frac{1 - m(\Phi(\theta))}{1 - \Phi(\theta)} \Phi(\theta)^{-1} W(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi(\theta)^x + (1-\theta)\Phi(\theta)^x \frac{1}{\Phi(\theta)} \sum_{y=0}^{x} \Phi(\theta)^{-y} W(y) - \frac{1-\theta}{1-\Phi(\theta)} \Phi(\theta)^{-1} W(x) \\
&= \Phi(\theta)^x \left(1 - \frac{\theta - 1}{\Phi(\theta)} \sum_{y=0}^{x} \Phi(\theta)^{-y} W(y)\right) - \frac{1-\theta}{1-\Phi(\theta)} \Phi(\theta)^{-1} W(x) \\
&= \Phi(\theta)^x \frac{\theta - 1}{\Phi(\theta)} \left(\frac{\Phi(\theta)}{\theta - 1} - \sum_{y=0}^{x} \Phi(\theta)^{-y} W(y)\right) - \frac{1-\theta}{1-\Phi(\theta)} \Phi(\theta)^{-1} W(x)
\end{aligned}$$

Da $\sum_{y=0}^{\infty} \Phi(\theta)^{-y} W(y) = \frac{\Phi(\theta)}{\theta - 1}$ gilt, folgt nun:

$$\begin{aligned}
&= \Phi(\theta)^x \frac{\theta - 1}{\Phi(\theta)} \left(\sum_{y=x+1}^{\infty} \Phi(\theta)^{-y} W(y)\right) - \frac{1-\theta}{1-\Phi(\theta)} \Phi(\theta)^{-1} W(x) \\
&= \Phi(\theta)^x \frac{\theta - 1}{\Phi(\theta)} \Phi(\theta)^{-x} \left(\sum_{y=1}^{\infty} \Phi(\theta)^{-y} W(x+y)\right) - \frac{1-\theta}{1-\Phi(\theta)} \Phi(\theta)^{-1} W(x) \\
&= \frac{\theta - 1}{\Phi(\theta)} \left(\sum_{y=1}^{\infty} \Phi(\theta)^{-y} W(x+y) - \frac{1}{\Phi(\theta) - 1} W(x)\right)
\end{aligned}$$

und da $\sum_{y=1}^{\infty} \Phi(\theta)^{-y} = \frac{1}{\Phi(\theta)-1}$ gilt somit:

$$= \frac{\theta - 1}{\Phi(\theta)} \sum_{y=1}^{\infty} \Phi(\theta)^{-y} \left(W(x+y) - W(x) \right).$$

Da wir nur den Ausdruck innerhalb der Klammer von Satz 7.2 betrachtet haben, müssen wir noch den Faktor $m(\Phi(\theta))^{-1} = \theta^{-1}$ hinzufügen und die Behauptung folgt. □

10.2 Beweis von Lemma 8.4

Wir zeigen zunächst 8.3:
Nach dem Satz von Dwass und Dinges gilt:

$$\mathbb{P}(\tau_x^+ = n) = \frac{x}{n} \mathbb{P}(X_n = x).$$

und somit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} \frac{y}{n} \mathbb{P}(X_n = y) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} \mathbb{P}(\tau_y^+ = n)$$

Mit Satz 5.7 gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta^{-n} \mathbb{P}(\tau_y^+ = n) = \mathbb{E}\left[\theta^{-\tau_y^+}\right] = \Phi(\theta)^{-y}$$

Um 8.4 zu zeigen, wenden wir erneut den Satz von Dwass und Dinges und Gleichung 7.1 aus Satz 7.1 an:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} \theta^{-n} \frac{x+1}{n} W(x) \mathbb{P}(X_n = x+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} \theta^{-n} W(x) \mathbb{P}(\tau_{x+1}^+ = n) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} W(x) \mathbb{P}(\tau_{x+1}^+ = n) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \Phi(\theta)^{-x-1} W(x) = \frac{1}{\theta - 1}
\end{aligned}$$

Also insgesamt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x+1}{n} W(x) \mathbb{P}(X_n = x+1) = \frac{1}{\theta - 1}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} = \frac{1}{\theta-1}$ gilt, muss

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{x+1}{n} W(x)\mathbb{P}(X_n = x+1) = 1$$

gelten. $\square$

10.3 Beweis von Satz 8.5

Für $\mathbb{P}(\tau_z^+ \leq n)$, $\theta > 1$ und $z > 0$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta^{-n}\mathbb{P}(\tau_z^+ \leq n) = \frac{\theta}{\theta-1}\mathbb{E}\left[\theta^{-\tau_z^+}\right] = \frac{\theta}{\theta-1}\Phi(\theta)^{-z}$$

Denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\theta^{-\tau_z^+}\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n}\mathbb{P}(\tau_z^+ = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n}\mathbb{P}(\tau_z^+ \leq n) - \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n}\mathbb{P}(\tau_z^+ \leq n-1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n}\mathbb{P}(\tau_z^+ \leq n) - \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n-1}\mathbb{P}(\tau_z^+ \leq n) \\
&= \frac{\theta-1}{\theta}\sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n}\mathbb{P}(\tau_z^+ \leq n)
\end{aligned}$$

Somit gilt also

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n}\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}}\mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_0^+ \leq n)\right] &= \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}}\sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n}\mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_0^+ \leq n)\right] \\
&= \frac{\theta}{\theta-1}\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^- < \infty\}}\Phi(\theta)^{X_{\tau_0^-}}\right]
\end{aligned}$$

mit Lemma 8.3 gilt:

$$\frac{1}{\Phi(\theta)}\sum_{y=0}^{\infty} \Phi(\theta)^{-y}\left(W(x+y) - W(x)\right) = \sum_{y=0}^{\infty} \Phi(\theta)^{-y-1}\left(W(x+y) - W(x)\right)$$

wenden wir nun Lemma 8.4 Gleichung 8.3 mit $y+1$ an:

$$\begin{aligned}\sum_{y=0}^{\infty}\Phi(\theta)^{-y-1}(W(x+y)-W(x)) &= \sum_{y=0}^{\infty}(W(x+y)-W(x))\sum_{n=1}^{\infty}\theta^{-n}\frac{y+1}{n}\mathbb{P}(X_n=y+1)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\theta^{-n}\sum_{y=0}^{\infty}(W(x+y)-W(x))\frac{y}{n}\mathbb{P}(X_n=y+1)\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\theta^{-n}\mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{\tau_0^-<\infty\}}\mathbb{P}_{X_{\tau_0^-}}(\tau_0^+\leq n)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\theta^{-n}\sum_{y=0}^{\infty}(W(x+y)-W(x))\frac{y+1}{n}\mathbb{P}(X_n=y+1)$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt die Behauptung.

$\square$

Literaturverzeichnis

[1] A.E. Kyprianou (2006): *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin

[2] ed.-in-chief Rama Cont (2010): *Encyclopedia of Quantitative Finance*, Wiley, Chichester, VI Volume Set, 1927-1933

[3] Kyprianou, A. and Palmowski, Z. (2005): *A martingale review of some fluctuation theory for spectrally negative Lévy processes*, Séminaires de Probabilités XXXVIII, 16-29, Lecture Notes in Math

[4] Hans U. Gerber (1979): *An Introduction to mathematical risk theory*, Richard D. Irwin, Inc., Homewood, Illinois

[5] Applebaum, D. (2004): *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge studies in advanced mathematics

[6] R.L. Loeffen und J.-F. Renaud (2010): *De Finetti's optimal dividends problem with an affine penalty function at ruin*, Insurance: Mathematics and Economics 46, 98-108

[7] R. Loeffen, I. Czarna und Z. Palmowski (2013): *Parisian ruin for spectrally negative Lévy process*, Bernoulli Volume 19, Number 2 , 599-609

[8] I. Czarna und Z. Palmowski (2011): *Ruin probability with Parisian delay for a spectrally negative Lévy risk process*, J.Appl. Prob. 48, 984-1002

[9] P. Henrici (1988): *Applied and computational complex analysis*, Volume I, Power Series,Integration,Conformal Mapping, Location of Zeros, Wiley, New York, 206-209