Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.

http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.

http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

Manfried Faber

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

Diplomarbeit

Solitonen in einer Feldtheorie in gekrümmter Raumzeit

ausgeführt am
Atominstitut
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao. Univ. Prof. i. R. Dipl.-Ing. Dr. techn. Manfried Faber

durch

Lukas Schrangl
Landstraßer Hauptstraße 163/1/1
1030 Wien

28. Oktober 2013

Lukas Schrangl

Zusammenfassung

Mit Hilfe eines Solitonenfeldes lassen sich geladene Teilchen und ihre elektromagnetischen Felder gemeinsam durch differentialgeometrische Methoden beschreiben. Die elektrische Ladung tritt als topologische Quantenzahl und die Masse als Feldenergie auf.

Auch die allgemeine Relativitätstheorie (ART) ist eine differentialgeometrische Theorie und es besteht die Hoffnung, diese und das Solitonenmodell zu vereinigen.

Diese Arbeit soll die Grundlagen schaffen, auf die künftige Anstrengungen zur Erreichung dieses Ziels aufbauen können. In diesem Sinne beschäftigt sie sich mit den Themen (i) *Mathematische Grundlagen von Eichfeldtheorien* (Tangentialräume auf Mannigfaltigkeiten und damit verbundene Strukturen, Faserbündel und Zusammenhänge, Eichfelder), (ii) *Eichfeldtheorie der Gravitation* (Die Gravitation als Eichtheorie, Berechnung einer Lorentz-invarianten Lagrangedichte), (iii) *Teleparallele Formulierung der ART* (Levi-Civitá- und Weitzenböck-Zusammenhang, Krümmung und Torsion, Äquivalenz der Eichfeldtheorie und der ART), (iv) *Solitonen im Gravitationsfeld* (Angabe einer gemeinsamen Lagrangedichte für Solitonen und Gravitation, Aufstellung der Euler-Lagrange-Gleichungen) und (v) *Erweiterung des Solitonenmodells* (Vorstellung zweier Ideen zur Erweiterung des Solitonenmodells zur Beschreibung von Gravitation).

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **7**

2 Differentialgeometrische Grundlagen **11**
2.1 Mannigfaltigkeiten 11
2.2 Tangentialvektoren und -räume 12
2.3 Lie-Ableitung 18
2.4 Differentialformen 22

3 Faserbündel **25**

4 Eichfeldtheorien **31**
4.1 Eichpotentiale 31
4.2 Feldstärke 37

5 Eichfeldtheorie der Gravitation **41**
5.1 Mathematische Konzepte 41
5.2 Feldstärke 43
5.3 Lagrangedichte 44

6 Vergleich der Eichtheorie mit der ART **49**
6.1 Noch mehr Mathematik 49
6.2 Teleparallele Gravitation 54

7 Solitonen und Gravitation **59**
7.1 Lagrangedichte 59
7.2 Bewegungsgleichungen 60
7.3 Energie-Impuls-Tensoren 66

8 Zusammenfassung und Ausblick **69**
8.1 Was bisher geschah 69
8.2 Erweiterung des Solitonenmodells 69

Danksagungen **73**

Literaturverzeichnis **75**

1 Einleitung

In seinem Buch „Waves Called Solitons“ [Rem96] beschreibt Michel Remoissenet eine Pendelkette, deren Pendel durch Federn gekoppelt sind. Abbildung 1.1 zeigt einen Abschnitt eines Nachbaus dieser Kette am Atominstitut der TU Wien.

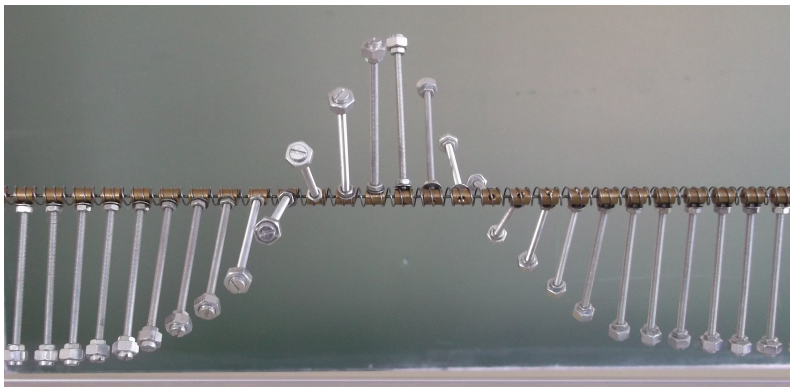


Abbildung 1.1: Pendelkette mit Anregung. Foto: Gerald Pechoc

Wie im Bild ersichtlich, ist es möglich, durch „Verdrehung“ der Kette eine stabile Anregung zu erzeugen – ein Soliton. Dieses verhält sich einerseits wie ein massives Teilchen: Es kann fortbewegt werden, auch Lorentz-Kontraktion kann man beobachten. Andererseits wird ebenso eine Wechselwirkung vermittelt: Zwei Verdrehungen (mit gleichem Windungssinn) können aneinander stoßen.

Im Kontinuumslimes wird die Kette durch die sogenannte *Sine-Gordon-Gleichung*

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

beschrieben, wobei θ der Auslenkungswinkel ist.

Manfried Faber ist es gelungen, das Sine-Gordon-Modell auf $3 + 1$ Dimensionen zu verallgemeinern, siehe [Fab01]. An Stelle des U(1)-Feldes des $1 + 1$-dimensionalen Modells tritt ein SU(2)-Feld. Dieses besitzt nicht nur eine anschauliche geometrische Interpretation als Fläche auf einer $\mathbb{S}^3$, sondern beschreibt ebenfalls „auf einen Streich“ ein massives Teilchen mitsamt einem Wechselwirkungsfeld. Dieses Wechselwirkungsfeld verhält sich in einiger Entfernung vom „Zentrum“ des Solitons wie das Maxwell'sche elektromagnetische Feld (siehe auch [BFK07]) – das Soliton kann als differentialgeometrische Beschreibung eines Elektrons samt elektromagnetischem Feld angesehen werden.

Eine weitere fundamentale Wechselwirkung, die durch Differentialgeometrie beschrieben wird, ist die Gravitation. Die allgemeine Relativitätstheorie sagt aus, dass die Schwerkraft gar keine Kraft ist. Vielmehr krümmt vorhandene Masse die Raumzeit und Körper bewegen sich auf den geradest möglichen Bahnen, sogenannten *geodätischen Linien*.

Solitonen und Gravitation stammen sozusagen „aus dem gleichen Eck“. Beides sind geometrische Theorien. Deshalb besteht die Hoffnung, sie zu einer einzigen zu vereinigen. Die ersten Schritte in diese Richtung sollen mit dieser Arbeit getan werden.

Vergleicht man das Wirkungsfunktional eines Solitons

$$S_{\text{sol}} = -\frac{\alpha_{\text{f}}\hbar c}{4\pi} \int \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{3} R_{\mu\nu}{}^{\alpha} R^{\mu\nu\,\alpha} + \Lambda(q_0)\, \mathrm{d}^4x \tag{1.1}$$

(wobei $R_{\mu\nu}{}^{\alpha}$ der solitonische Feldstärketensor ist) mit der Einstein-Hilbert-Wirkung der allgemeinen Relativitätstheorie

$$S_{\text{EH}} = \frac{c^4}{16\pi G} \int R\sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x \tag{1.2}$$

(mit dem Ricci-Skalar R), so halten sich die ersichtlichen Gemeinsamkeiten, abgesehen von der zufälligen Verwendung des gleichen Buchstaben R für jedoch zwei unterschiedliche Dinge, in dieser Formulierung stark in Grenzen.

Vielversprechender scheint es, insbesondere in Anbetracht der Tatsache, dass die Feldstärke im Solitonenmodell die Gestalt eines Feldstärketensors einer SU(2)-Eichtheorie hat, eine Eichfeldtheorie der Gravitation zu betrachten. Bereits im Jahre 1955 stellte Ryoyu Utiyama in [Uti56] eine solche auf. T. W. B. Kibble entwickelte diese weiter, siehe [Kib61].

Kapitel 5 dieser Arbeit beschäftigt sich sehr stark mit den (nicht zuletzt) auf Kibbles Werk aufbauenden Publikationen [Cho75, Cho76] von Y. M. Cho, in denen Gravitation durch eine Eichtheorie der Translationsgruppe beschrieben wird.

Weil die dahinterstehende Mathematik auf einem eher fortgeschrittenen Niveau ist, stellen Kapitel 2 bis 4 die benötigten Konzepte vor. Dazu wurde hauptsächlich auf Mikio Nakaharas „Geometry, Topology, and Physics“ [Nak03] und Helga Baums „Eichfeldtheorie“ [Bau10], ferner auf „Vektoranalysis“ [Jä05] von Klaus Jänich, zurückgegriffen. Bis auf wenige Ausnahmen wird in der ganzen Arbeit Nakaharas Notation (soweit vorhanden) verwendet.

In Kapitel 6 wird die Frage gestellt (und beantwortet), inwiefern die Ergebnisse der Eichtheorie mit denen der allgemeinen Relativitätstheorie übereinstimmen. Das führt zur *teleparallelen Formulierung* der Gravitation. Der Inhalt dieses Kapitels basiert insbesondere auf dem Buch [Bla02] „Gravitation and Gauge Symmetries“ von Milutin Blagojević, im Speziellen auf Kapitel 3, und auf diversen Arbeiten von J. G. Pereira, wie z. B. [AP04].

Kapitel 7 widmet sich schließlich den Solitonen bzw. deren Bewegungsgleichungen in einer mit den Methoden aus den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen gekrümmten Raumzeit.

Abschließend werden in Kapitel 8 kurz zwei Ideen vorgestellt, wie es gelingen könnte, die Gravitation ins Solitonenmodell einzubauen.

2 Differentialgeometrische Grundlagen

Wir wollen eine kurze Einführung in die mathematischen Grundlagen geben, die in den folgenden Kapiteln benötigt werden. Dieses Kapitel beschäftigt sich mit Mannigfaltigkeiten und einigen Strukturen, die diese „mitbringen“, wie Tangentialräume und Differentialformen.

2.1 Mannigfaltigkeiten

Es hat sich gezeigt, dass man sich bei der Gravitation von der Vorstellung, die Raumzeit sei durch den vierdimensionalen Minkowski-Raum beschreibbar, verabschieden muss. An die Stelle des Minkowski-Raumes tritt die Mannigfaltigkeit. Diese „sieht“ nur mehr lokal, das heißt in einer Umgebung eines jeden Raumzeitpunktes, „wie ein flacher Raum aus“. Mathematisch bedeutet das Folgendes, ohne zu sehr ins Detail gehen zu wollen – die Einzelheiten findet man z. B. in [Nak03]:

2.1: Mannigfaltigkeit
Ein topologischer Raum M heißt n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit*, falls es eine Familie von Paaren $\{(U_i, \varphi_i)\}$ gibt, sodass gilt:*

1. *Jedes U_i ist offen und die U_i überdecken M, d. h.*

$$M = \bigcup_i U_i.$$

2. *Die φ_i sind Homöomorphismen von U_i auf offene Teilmengen U_i' von $\mathbb{R}^n$, also $\varphi_i : U_i \to U_i'$.*

3. *Für alle U_i und U_j mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ sind die sogenannten* Übergangsfunktionen[1]

$$\psi_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j) : x \mapsto \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x)$$

unendlich oft stetig differenzierbar.

Jedes Paar (U_i, φ_i) heißt Karte*, die Menge aller Karten nennt man einen* Atlas*.*

[1] Wird eine Funktion f durch $f : A \to B : x \mapsto y$ festgelegt, so bedeutet das, dass f die Elemente der Menge A auf Elemente der Menge B abbildet, wobei durch den Abbildungspfeil „$\mapsto$“ die genaue Abbildungsvorschrift angegeben wird.

Ein einfaches Beispiel für eine Mannigfaltigkeit ist die $\mathbb{S}^2$. Mit den Bezeichnungen N für Nordpol und S für Südpol ist ein möglicher Atlas durch $\{(\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, p_{\mathrm{N}}), (\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, p_{\mathrm{S}})\}$ gegeben, wobei p_{N} bzw. p_{S} für die stereographische Projektion vom Norpol bzw. vom Südpol aus steht.

2.2 Tangentialvektoren und -räume

In der Physik spielen Vektoren eine sehr wichtige Rolle. Der flache Raum ist selbst ein Vektorraum. Bei einer Mannigfaltigkeit ist dies im Allgemeinen nicht der Fall. Trotzdem existiert zu jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit ein Vektorraum, der sogenannte *Tangentialraum*, für den wir allerdings eine Verallgemeinerung des „gewöhnlichen“ Vektorbegriffs benötigen.

Dieser Abschnitt soll einen kurzen Überblick über Tangentialvektoren und -räume auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten geben und einige Eigenschaften derselbigen aufzählen, die in den folgenden Kapiteln gebraucht werden. Falls nicht anders erwähnt, betrachten wir immer glatte (C^∞-) Mannigfaltigkeiten, Funktionen etc.

2.2: Funktionskeime
Sei M eine Mannigfaltigkeit. Zwei glatte Funktionen $f : U \subset M \to \mathbb{R}$ und $g : V \subset M \to \mathbb{R}$ nennen wir äquivalent um einen Punkt $p \in M$, falls sie in einer Umgebung $W \subset U \cap V$, die p enthält, übereinstimmen.

Eine Äquivalenzklasse von solchen Funktionen heißt Keim einer differenzierbaren Funktion auf M bei p. *Die Menge der Funktionskeime (Äquivalenzklassen) bezeichnet man mit $\mathcal{F}(p)$.*

Die Menge der in einer Umgebung eines Punktes p definierten Funktionen bilden keinen Vektorraum. Wählt man f, g, U, V und W wie oben mit $U \neq V$, so ist $f + g$ zumindest im üblichen Sinne (punktweise Addition: $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$) nicht definiert, da die Definitionsbereiche nicht übereinstimmen.

Bei Funktionskeimen tritt dieses Problem nicht auf. f und $f|_W$ (f mit auf W eingeschränktem Definitionsbereich) liegen in der gleichen Äquivalenzklasse, angeschrieben als $[f] = [f|_W]$. Man kann punktweise addieren: $[f] + [g] = [f|_W] + [g|_W] = [U \cap V \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x)] = [f|_W + g|_W]$. Analoges gilt für die punktweise Multiplikation $[f] \cdot [g]$.

$\mathcal{F}(p)$ ist also sogar eine Algebra, da Addition und Multiplikation die entsprechenden Regeln erfüllen.

2.3: Tangentialvektoren
Wir betrachten einen Punkt p in einer Mannigfaltigkeit M. Mit $\gamma(t)$ bezeichnen wir eine Kurve in M, wobei $\gamma(0) = p$.

Dann ist der Tangentialvektor $X|_p$ an γ in p definiert als die Abbildung[2]

$$X|_p : \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R} : f \mapsto \left.\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}. \tag{2.1}$$

[2] Eigentlich $[f] \mapsto \left.\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$. Wir schreiben aus Bequemlichkeit aber einfach f. Offensichtlich ist das Ergebnis der Abbildung nicht von der Wahl des Repräsentanten aus $[f]$ abhängig.

$X|_p[f]$ ist also die Richtungsableitung von f in Richtung der Kurve bei $t = 0$.

Formal gilt

$$X|_p[f] = \left.\frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_p \left.\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}. \tag{2.2}$$

Hier ist der Zusammenhang zwischen den eben definierten Tangentialvektoren und jenen der „gewöhnlichen“ Differentialrechnung erkennbar: Zweitere sind nichts anderes als die Richtungen dieser Richtungsableitungen, also der zweite Faktor auf der ganz rechten Seite.

2.4: Tangentialraum
Als Tangentialraum T_pM einer Mannigfaltigkeit M im Punkt p bezeichnet man die Menge der Abbildungen $X|_p : \mathcal{F}(p) \to \mathbb{R}$, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. $X|_p[af + bg] = aX|_p[f] + bX|_p[g]\ \forall a, b \in \mathbb{R}; f, g \in \mathcal{F}(p)$ *(Linearität)*
2. $X|_p[fg] = X|_p[f]g(p) + f(p)X|_p[g]\ \forall f, g \in \mathcal{F}(g)$ *(Leibniz-Regel).*

TM ist definiert als die Menge der Tangentialräume T_pM mit $p \in M$ und heißt das Tangentialbündel[3].

Behauptung: Der Tangentialraum T_pM ist an jedem Punkt p ein Vektorraum der Dimension n der Mannigfaltigkeit. Die Menge der $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ bildet eine Basis bzgl. lokaler Koordinaten[4], eine sogenannte Koordinatenbasis.

[3] Es handelt sich hierbei tatsächlich um ein Faserbündel, wie wir es in Kapitel 3 kennen lernen werden.

[4] Die lokalen Koordinaten $\varphi(x)$ eines Punktes x in einer Karte (V, φ) seien x^i, die von p seien p^i etc.

Beweis der Behauptung. Ziel des Beweises ist es zu zeigen, dass sich in einer Karte (V, φ) mit $p \in V$ jeder Vektor als Linearkombination

$$X|_p[f] = \sum_{i=1}^{n} X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f = \sum_{i=1}^{n} X^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \tag{2.3}$$

darstellen lässt, wobei $\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p := \left.\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{p^k}$ (wir schreiben also f sowohl für die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ als auch für die „lokale“ Version $f \circ \varphi^{-1}$ davon). Es wird sich herausstellen, dass die Koeffizienten X^i des Vektors nichts anderes als die Wirkung des Vektors auf die Koordinatenfunktionen sind, $X^i = X|_p[p^i]$.

Sei zunächst $U \subset \mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$) eine konvexe[5], offene Umgebung von $p^i = 0$. Als Erstes zeigen wir, dass für jede glatte Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ n glatte Funktionen $g_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ existieren, sodass

$$f(x^k) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x^i g_i(x^k) \quad \forall x^k \in U. \tag{2.4}$$

[5] Anstatt der Konvexität reicht eigentlich Sternförmigkeit bzgl. $p^i = 0$.

Im nächsten Schritt wird $X|_p$ auf diese Darstellung von f angewendet, woraus direkt Gleichung (2.3) folgt. Schlussendlich wird noch die lineare Unabhängigkeit der $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ gezeigt.

Es gilt (hier wird die Konvexität von U benötigt, damit $f(tx^k)$ für alle $t \in [0,1]$ wohldefiniert ist, und die Offenheit für die Differenzierbarkeit)

$$\begin{aligned} f(x^k) &= f(0) + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx^k)\mathrm{d}t \\ &= f(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n x^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{tx^k} \mathrm{d}t \\ &= f(0) + \sum_{i=1}^n x^i \underbrace{\int_0^1 \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{tx^k} \mathrm{d}t}_{=:g_i(x^k)}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Der erste Summand kann als konstante Funktion $k_{f(0)} : x^i \mapsto f(0)$ verstanden werden.

Um einen einfachen Ausdruck für $g_i(0)$ zu erhalten, wenden wir $\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_0$ auf die Gleichung an,

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_0 &= \underbrace{\left.\frac{\partial k_{f(0)}}{\partial x^j}\right|_0}_{0} + \sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right|_0 g_i(0) + 0 \cdot \left.\frac{\partial g_i}{\partial x^j}\right|_0 \\ &= g_j(0). \end{aligned} \tag{2.6}$$

$\frac{\partial k_{f(0)}}{\partial x^j}$ ist als Ableitung einer konstanten Funktion gleich 0.

Nun wenden wir uns der Mannigfaltigkeit zu. Eine Tatsache, die noch öfters benötigt werden wird, ist folgende: Anwendung eines Elements des Tangentialraums auf eine konstante Funktion ergibt 0,

$$\begin{aligned} X|_p[k] = kX|_p[1] = cX|_p[1 \cdot 1] = k(X|_p[1] \cdot 1 + 1 \cdot X|_p[1]) = 2kX|_p[1] \\ = 2X|_p[k]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

[6] Das lässt sich durch eine Verschiebung des Koordinatensystems erreichen. Diese manifestiert sich als Addition einer Konstanten zu den (ursprünglichen) Koordinaten.

Wir betrachten jetzt eine Karte (V, φ). Wir können annehmen, dass der Punkt p im Koordinatenursprung liegt (d. h. $p^i = 0$).[6] Sei nun $h\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $f := h \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Anders ausgedrückt ist $h(x) = f \circ \varphi(x) = f(x^i(x))$. Man kann also einfach Darstellung (2.5) für Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf Funktionen $M \to \mathbb{R}$ übertragen. Wir schreiben f, g_i sowohl für die Funktionen $V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als auch für $M \to \mathbb{R}$ und unterscheiden nicht streng.

Wendet man nun ein $X|_p$ auf f (eigentlich auf h) an, so erhält man

$$\begin{aligned} X|_p[f] &\overset{(2.5)}{=} X|_p[k_{f(0)} + \sum_{i=1}^{n} x^i g_i(x^k)] \\ &= \underbrace{X|_p[k_{f(0)}]}_{0} + \sum_{i=1}^{n} X|_p[x^i] g_i(p) + \underbrace{p^i}_{0} X|_p[g_i] \\ &\overset{(2.6)}{=} \sum_{i=1}^{n} X|_p[x^i] \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{p^k}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Jedes $X|_p$ kann also als Linearkombination von $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ dargestellt werden. Diese sind linear unabhängig, wie leicht gezeigt werden kann,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \left.\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right|_{p^k} = c_j.$$

Also bilden sie sogar eine Basis. Es gibt n Basiselemente, daher ist T_pM ein n-dimensionaler Vektorraum. □

Man kann den Tangentialraum auch über Kurven in der Mannigfaltigkeit einführen; genauer: als Menge von Äquivalenzklassen von Kurven. Es werden diejenigen Kurven als äquivalent angesehen, für die die totalen Ableitungen (in einer und daher wegen des Transformationsverhaltens in jeder Karte) in p übereinstimmen. Jede Kurve (bzw. Äquivalenzklasse) erzeugt nach 2.3 (injektiv) eine Abbildung, die 2.4 genügt.

Hat man nun eine Linearkombination $\sum_i c^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, so wird diese durch die Kurve (in lokalen Koordinaten) $x^i(t) := x^i(t_0) + c^i(t - t_0)$ erzeugt. Also entspricht auch jedem Vektor eine Kurve.

Folglich ist der Tangentialraum aus 2.4 nichts anderes als die Menge der Tangentialvektoren, wie sie in 2.3 definiert sind.

Vektorfelder sind Abbildungen $M \to TM$. Jedem Punkt p wird ein Vektor aus T_pM zugewiesen. Sie werden in dieser Arbeit mit X oder Y etc. bezeichnet, ein Vektor am Punkt p mit $X|_p$.

2.5: Das Differential
Seien M und N Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ eine Abbildung. Dann induziert diese eine lineare Abbildung zwischen Tangentialräumen, die wir als Differential F_* bezeichnen, durch

$$F_* : T_pM \to T_{F(p)}N \text{ mit } F_*X|_p[f] := X|_p[f \circ F],$$

wobei $X \in TM$ und $f : N \to \mathbb{R}$.

Wir betrachten eine Kurve $\gamma(t)$ in M mit $\gamma(0) = p$ und $X|_p$ tangential dazu. Weiters ist $\delta(t) := F \circ \gamma(t)$ die auf N abgebildete Kurve. Der Tangentialvektor Y an diese Kurve in $F(p) = \delta(0)$ ist dann

$$f \mapsto \left.\frac{\mathrm{d}f(\delta(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}(f \circ F)(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = X|_p[f \circ F].$$

Das Differential F_* bildet also einen Vektor, der tangential an eine Kurve ist, auf einen Vektor, der tangential an das Bild dieser Kurve unter F ist, ab. Abbildung 2.1 zeigt eine Skizze dieses Sachverhalts.

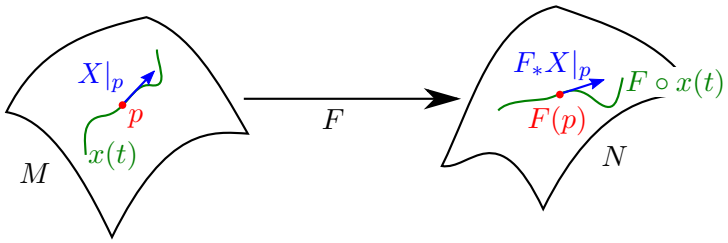


Abbildung 2.1: Das Differential einer Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Die Richtungen der Richtungsableitungen sind als Pfeile dargestellt.

In einer Karte (V, φ) gilt

$$\begin{aligned} F_*X|_p[f] = X|_p[f \circ F] &= X^i(p) \left.\frac{\partial(f \circ F)}{\partial x^i}\right|_p \\ &= X^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f \circ \varphi^{-1} \circ \overbrace{\varphi \circ F}^{F^j}\right)\right|_p \\ &= X^i(p) \left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_{F(p)} \left.\frac{\partial F^j}{\partial x^i}\right|_p =: Y^j(F(p)) \left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_{F(p)} =: Y|_{F(p)}[f], \end{aligned} \tag{2.9}$$

wobei wieder an die etwas schlampige Notation $\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{F(p)} = \left.\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j}\right|_{\varphi\circ F(p)}$ erinnert sei und

$$Y^j(F(p)) := X^i(p) \left.\frac{\partial F^j}{\partial x^i}\right|_p . \tag{2.10}$$

Bezüglich lokaler Koordinaten ist F_* also nichts anderes als die Jakobimatrix. Das in 2.5 definierte Differential ist demnach eine Verallgemeinerung der totalen Ableitung im $\mathbb{R}^n$.

Gebräuchliche Schreibweisen für das Differential von F sind unter anderem F_*, $\mathrm{D}F$ und $\mathrm{d}F$. Das Differential wird auch *Pushforward* genannt.

Analog zur „gewöhnlichen“ Differentialrechnung existiert für Differentiale folgende

2.6: Kettenregel
Sind L, M und N drei Mannigfaltigkeiten mit Abbildungen

$$L \xrightarrow{F} M \xrightarrow{G} N$$

und $p \in L$, dann gilt

$$(G \circ F)_* X|_p = G_* F_* X|_p. \tag{2.11}$$

Beweis.

$$(G \circ F)_* X|_p[f] = X|_p[f \circ G \circ F] = F_* X|_p[f \circ G] = G_* F_* X|_p[f].$$

□

In Koordinaten entspricht das genau der Multiplikation der Jakobimatrizen.

Das Produkt $M \times N$ zweier Mannigfaltigkeiten M und N ist wieder eine Mannigfaltigkeit. Paare von Tangentialvektoren auf M bzw. N lassen sich auf natürliche Weise mit einem Vektor auf $M \times N$ identifizieren.

2.7: Tangentialraum einer Produktmannigfaltigkeit
Seien M und N zwei Mannigfaltigkeiten, $p \in M$ und $q \in N$. Weiters seien $X|_p \in T_pM$ tangential an eine Kurve $\gamma(t)$ mit $\gamma(0) = p$ und $Y|_q \in T_qN$ tangential an $\delta(t)$ mit $\delta(0) = q$. Dem Paar $(X|_p, Y|_q)$ entspricht dann der Vektor aus $T_{(p,q)}(M \times N)$, der tangential an die Kurve $(\gamma(t), \delta(t)) \in M \times N$ ist.

Eine wichtige Tatsache, die noch des Öfteren für unsere Zwecke ausgenutzt werden wird, ist diejenige, dass das Differential mit dem Kommutator von Vektorfeldern verträglich ist.

2.8: Differential und Kommutator
Sei $F : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N. Für zwei Vektorfelder X und Y auf M gilt[7]

$$F_*[X, Y] = [F_* X, F_* Y]. \tag{2.12}$$

[7] Zwei Vektorfelder X auf M und Y auf N heißen *F-verknüpft*, falls $Y|_{F(p)} = F_* X|_p$. Die Aussage dieses Satzes ist also, dass die Kommutatoren F-verknüpfter Vektorfelder F-verknüpft sind.

Beweis. Setze $V := F_* X$ und $W := F_* Y$. Das heißt, $V|_{F(p)}[f] = F_* X|_p[f] = X|_p[f \circ F]$. Für fixes f ist $q \mapsto V|_q[f]$ eine Abbildung $N \to \mathbb{R}$. So betrachtet gilt

$$(V[f] \circ F)(p) = V|_{F(p)}[f] = X|_p[f \circ F]. \tag{2.13}$$

Analoges gilt für W (und überhaupt für alle F-verknüpften Vektorfelder).

$$\begin{aligned} F_*[X,Y][f] &= [X,Y][f \circ F] \\ &= X[Y[f \circ F]] - Y[X[f \circ F]] \\ &\overset{(2.13)}{=} X[W[f] \circ F] - Y[V[f] \circ F] \\ &= F_*X[W[f]] - F_*Y[V[f]] \\ &= [F_*X, F_*Y][f] \end{aligned}$$

□

2.3 Lie-Ableitung

Es ist a priori nicht möglich, zwei Vektoren eines Vektorfeldes Y zu vergleichen, da sie in verschiedenen Tangentialräumen „leben". Bei der Lie-Ableitung wird das Problem gelöst, indem der Vektor an einer zu einem Punkt p benachbarten Stelle mit Hilfe eines zweiten Vektorfeldes X nach p zurücktransportiert wird. Dies mathematisch zu präzisieren ist das Ziel dieses Abschnittes.

2.9: Einige Begriffe
die wir im Folgenden benötigen werden:

1. *Die* Integralkurve *eines Vektorfeldes durch den Punkt p ist die Kurve, die p enthält und deren Tangentialvektor an einem Punkt genau der Vektor des Feldes an diesem Punkt ist. Abbildung 2.2 soll dies veranschaulichen.*

2. *Eine (differenzierbare)* Transformation *ist ein Diffeomorphismus von einer Mannigfaltigkeit auf sich selbst.*

3. *Unter einer* einparametrigen Transformationsgruppe *versteht man eine Abbildung*

$$\mathbb{R} \times M \to M : (t,p) \mapsto \sigma_t(p)$$

   mit

   - $p \mapsto \sigma_t(p)$ *ist eine Transformation für alle* t *und*
   - $\sigma_t \circ \sigma_s(p) = \sigma_{t+s}(p)\ \forall s,t,p.$

4. *Als* Orbit *von p bezeichnet man die Menge aller Punkte, die durch eine Transformation von p erreicht werden können. Im Fall einer Transformationsgruppe aus dem vorangehenden Punkt wäre das also* $\{q : \exists t : q = \sigma_t(p)\}$. *Dies wird in Abbildung 2.3 illustriert.*

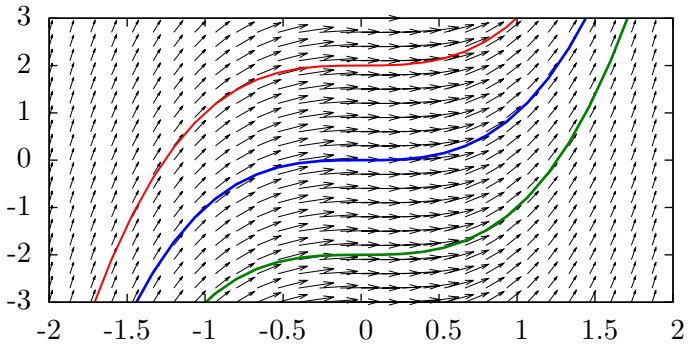


Abbildung 2.2: Das Vektorfeld $X^i(x,y) = \frac{(1,3x^2)}{\sqrt{1+(3x^2)^2}}$ und Integralkurven $c(t) = (t,t^3) + a$ durch $a = (0,2)$, $a = (0,0)$ und $a = (0,-2)$.

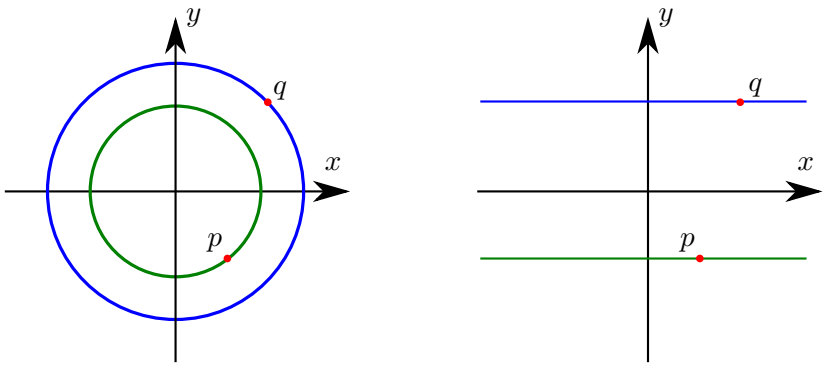


Abbildung 2.3: Orbit der Punkte p und q unter Drehungen (links) und unter Translationen in x-Richtung (rechts)

Mit diesen Begriffen lässt sich folgender Satz verstehen:

2.10: Vom Vektorfeld erzeugte Transformationsgruppe
Ein Vektorfeld X erzeugt (lokal) eine einparametrige Transformationsgruppe $\sigma_t(p)$, sodass $x(t) = \sigma_t(p)$ eine Integralkurve von X ist; das Vektorfeld ist also tangential an den Orbit von p.

Mit „lokal“ ist gemeint, dass $x(t)$ im Allgemeinen nur auf einem Intervall (a,b) definiert sein muss (das 0 enthält) und nicht auf ganz $\mathbb{R}$.

Beweis. Ein Vektor $X|_p$ ist tangential an eine Kurve γ, wenn $\gamma(t) = p$ und für alle f

$$X|_{\gamma(t)}[f] = \left.\frac{\mathrm{d}(f\circ\gamma)}{\mathrm{d}s}\right|_t .$$

Wir betrachten eine Karte (U, φ) mit $p \in U$. Bezeichnen wir mit γ^i die Koordinaten $\varphi \circ \gamma$ der Kurve, so wird die rechte Seite der Gleichung dank gewöhnlicher Kettenregel zu $\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)} \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}s}\Big|_t$. Die linke Seite lässt sich wieder in $X|_p[f] = X^i(p)\, \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p$ zerlegen. Ein Koeffizientenvergleich liefert die gewöhnlichen Differentialgleichungen für γ^i

$$X^i(\gamma(t)) = \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}. \tag{2.14}$$

[8] Wir verwenden den *Satz von Picard-Lindelöf*, der anwendbar ist, falls die Funktion $f(t, y)$ aus der Differentialgleichung $f(t, y(t)) = y'(t)$ stetig in t und Lipschitz-stetig in y ist. Die X^i sind aus C^∞, also insbesondere Lipschitz-stetig.

Diese sind, wie man aus der Theorie der Differentialgleichungen weiß[8], bei gegebener Anfangsbedingung $\gamma(t_0) = p_0$ in einer Umgebung $V \subset \mathbb{R}$ von t_0 eindeutig lösbar.

Sei nun $t \mapsto \sigma_t(p_0)$ die Integralkurve von X durch p_0, die so parametrisiert ist, dass $\sigma_0(p_0) = p_0$. Das führt zum Anfangswertproblem für die Koordinaten $\sigma_t^i(p_0) := \varphi \circ \sigma_t(p_0)$ von $\sigma_t(p_0)$

$$X^i(\sigma_t(p_0)) = \frac{\partial \sigma_t^i(p_0)}{\partial t}, \qquad \sigma_0^i(p_0) = p_0^i. \tag{2.15}$$

Wir wollen zeigen, dass $\sigma_t \circ \sigma_s(p_0) = \sigma_{t+s}(p_0)$ für beliebige s und t (natürlich nur dort, wo die linke und die rechte Seite auch existieren). Die linke Seite erfüllt das Anfangswertproblem (da $\sigma_s(p_0)$ wieder auf der Kurve liegt)

$$\frac{\partial(\sigma_t^i \circ \sigma_s(p_0))}{\partial t} = X^i(\sigma_t \circ \sigma_s(p_0)), \qquad \sigma_0^i \circ \sigma_s(p_0) = \sigma_s^i(p_0), \tag{2.16}$$

die rechte

$$\frac{\partial \sigma_{t+s}^i(p_0)}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{t+s}^i(p_0)}{\partial(t+s)} = X^i(\sigma_{t+s}(p_0)), \qquad \sigma_{0+s}^i(p_0) = \sigma_s^i(p_0). \tag{2.17}$$

Sowohl $t \mapsto \sigma_t^i \circ \sigma_s(p_0)$ als auch $t \mapsto \sigma_{t+s}^i(p_0)$ sind also Lösungen des gleichen Anfangswertproblems. Da dessen Lösung eindeutig ist, müssen sie übereinstimmen. □

2.11: Lie-Ableitung
Seien zwei Vektorfelder X und Y gegeben. Diese erzeugen nach 2.10 einparametrige Transformationsgruppen σ_t und τ_s. Dann ist die Lie-Ableitung *von Y entlang X in einem Punkt p definiert als*

$$\mathcal{L}_X Y|_p := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}((\sigma_{-\varepsilon})_* Y|_{\sigma_\varepsilon(p)} - Y|_p). \tag{2.18}$$

Behauptung:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \tag{2.19}$$

Das eingangs erwähnte Zurücktransportieren eines Vektors vom zu p benachbarten Punkt $\sigma_\varepsilon(p)$ nach p wird also mit der Hilfe von $(\sigma_{-\varepsilon})_*$ gemacht, siehe Abbildung 2.4. Anschließend wird ein Differenzenquotient gebildet und der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ durchgeführt.

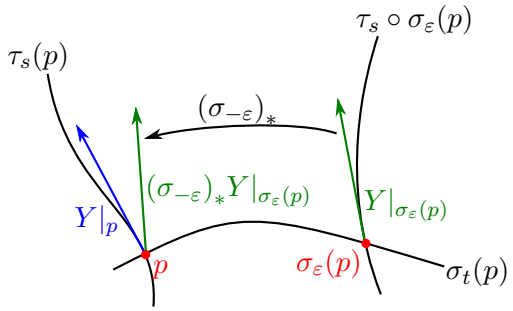


Abbildung 2.4: Skizze zur Lie-Ableitung

Beweis der Behauptung. In einer Karte seien (mit $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$) $X = X^i\partial_i$, $Y = Y^i\partial_i$ und p^i die Koordinaten von p. Da wir in Gleichung (2.18) den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ durchführen, reicht es, diverse Funktionen bis zur ersten Ordnung zu entwickeln.

Da $\sigma_0(p) = p$ und $\sigma_t(p)$ die Integralkurve von X durch p ist, sind die Koordinaten von $\sigma_\varepsilon(p)$ einfach $p^i + \varepsilon X^i(p^l) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} Y|_{\sigma_\varepsilon(p)} &= Y^j(p^i + \varepsilon X^i(p^l) + \mathcal{O}(\varepsilon^2))\partial_j|_{\sigma_\varepsilon(p)} \\ &= (Y^j(p^i) + \varepsilon\partial_k Y^j(p^i)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\,(p^k + \varepsilon X^k(p^l) + \mathcal{O}(\varepsilon^2))\Big|_{\varepsilon=0} + \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^2))\partial_j|_{\sigma_\varepsilon(p)} \\ &= (Y^j(p^i) + \varepsilon\partial_k Y^j(p^i)X^k(p^i) + \mathcal{O}(\varepsilon^2))\partial_j|_{\sigma_\varepsilon(p)}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Betrachten wir nun Formel (2.10) zur Berechnung des Differentials in Koordinaten. Es sind $F = x \mapsto \sigma_{-\varepsilon}(x)$ und $F^i = x \mapsto x^i - \varepsilon X^i(x^l) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. p aus (2.10) entspricht hier $\sigma_\varepsilon(p)$ und damit $F(p) = \sigma_{-\varepsilon} \circ \sigma_\varepsilon(p) = p$. Für $(\sigma_{-\varepsilon})_* Y|_{\sigma_\varepsilon(p)} = Z^i\partial_i|_p$ gilt

$$\begin{aligned} Z^i &= Y^j(\sigma_\varepsilon(p))\, \overbrace{\frac{\partial}{\partial x^j}\,(x^i - \varepsilon X^i(x^l) + \mathcal{O}(\varepsilon^2))\Big|_p}^{\delta^i_j - \varepsilon \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\Big|_p + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} \\ &\overset{(2.20)}{=} (Y^j(p^l) + \varepsilon\partial_j Y^j(p^l)X^j(p^l) + \mathcal{O}(\varepsilon^2))(\delta^i_j - \varepsilon\partial_j X^i(p^l) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \\ &= Y^i(p^l) + \varepsilon(X^j(p^l)\partial_j Y^i(p^l) - Y^j(p^l)\partial_j X^i(p^l)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Das können wir nun in die Definition der Lie-Ableitung einsetzen.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X Y|_p &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(Z^i(p^l) - Y^i(p^l))\partial_i|_p \\ &= (X^j(p^l)\partial_j Y^i(p^l) - Y^j(p^l)\partial_j X^i(p^l))\partial_i|_p,\end{aligned} \tag{2.22}$$

was aber nichts anderes als der Kommutator ist, wie man leicht nachprüfen kann,

$$\begin{aligned}[X,Y]|_p[f] &= X|_p[Y[f]] - Y|_p[X[f]] \\ &= X|_p[Y^i\partial_i f] - Y|_p[X^i\partial_i f] \\ &= X^j(p^l)\partial_j|_p(Y^i\partial_i f) - Y^j(p^l)\partial_j|_p(X^i\partial_i f) \\ &= (X^j(p^l)\partial_j Y^i(p^l) - Y^j(p^l)\partial_j(p^l)X^i)\partial_i|_p f + \\ &\quad + \underbrace{(X^j(p^l)Y^i(p^l)\partial_j\partial_i - Y^j(p^l)X^i(p^l)\partial_j\partial_i)}_{0} f.\end{aligned} \tag{2.23}$$

□

2.4 Differentialformen

Auch dieser Abschnitt wird eher kurz gehalten. Eine ausführlichere Behandlung des Themas findet sich z. B. in [Nak03].

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass zu jedem Vektorraum V auch ein Vektorraum V^* von linearen Funktionalen, also linearen Abbildungen $V \to \mathbb{R}$ (bzw. in den Skalarkörper von V) existiert. Dieser Raum V^* heißt *dualer Vektorraum*. Natürlich besitzt auch jeder Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit einen dualen Raum.

2.12: Kotangentialraum
Sei M eine Mannigfaltigkeit und T_pM der Tangentialraum in $p \in M$. Der zu T_pM duale Raum wird mit T_p^*M bezeichnet und heißt Kotangentialraum. *Analog zu den Tangentialräumen nennt man die Menge T^*M der Kotangentialräume das* Kotangentialbündel.

Mit $dx^i|_p$ bezeichnen wir die zu $\partial_i|_p$ duale Basis, d. h.

$$dx^i|_p(\partial_j|_p) = \delta^i_j. \tag{2.24}$$

Auch zu folgender Definition wollen wir nicht allzu viele Worte verlieren.

2.13: Tensor
Als (q,r)-Tensor bezeichnet man eine Abbildung

$$\underbrace{T_p^*M \times \ldots \times T_p^*M}_{q-mal} \times \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{r-mal} \to \mathbb{R}, \tag{2.25}$$

die linear in jedem Argument ist.

Wie bei jeder linearen Abbildung können die Komponenten eines Tensors T bezüglich einer Basis durch Abbildung der Basiselemente berechnet werden. Man schreibt

$$T = T^{i_1 \ldots i_q}{}_{j_1 \ldots j_r} \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_q} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_r}. \tag{2.26}$$

Auf naheliegende Art und Weise lassen sich Tensorfelder einführen.

Damit kommen wir schon zum Kernkonzept dieses Abschnitts.

2.14: Differentialformen
Als r-Form *wird ein vollkommen antisymmetrisches $(0,r)$-Tensorfeld bezeichnet, der Raum der r-Formen auf einer Mannigfaltigkeit M mit $\Omega^r(M)$.*

Als Basis für r-Formen führen wir die vollständige Antisymmetrisierung der Tensorbasis $dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_r}$

$$dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_r} := \sum_\pi (-1)^\pi dx^{j_{\pi(1)}} \otimes \ldots \otimes dx^{j_{\pi(r)}} \tag{2.27}$$

ein, wobei die Summe über alle Permutationen π geht und $(-1)^\pi = \pm 1$, je nachdem, ob die Permutation gerade oder ungerade ist.

Für eine p-Form ω gilt somit

$$\omega = \omega_{j_1 \ldots j_r} dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_r} = \frac{1}{p!} \omega_{j_1 \ldots j_r} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_r}. \tag{2.28}$$

Eine wichtige Operation auf $\Omega^r(M)$ ist folgende.

2.15: Äußere Ableitung
Man nennt die durch

$$\mathrm{d}\colon \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$$
$$\frac{1}{p!} \omega_{j_1 \ldots j_r} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_r} \mapsto \frac{1}{p!} \frac{\partial \omega_{j_1 \ldots j_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_r}$$

definierte Abbildung die äußere Ableitung.

Insbesondere ergibt sich für die äußere Ableitung von 1-Formen eine sehr praktische Formel. Seien X und Y Vektorfelder. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega(X,Y) &= \frac{\partial \omega^\mu}{\partial x^\nu}\Big(dx^\nu(X)\otimes dx^\mu(Y) - dx^\mu(X)\otimes dx^\nu(Y)\Big) \\
&= \frac{\partial \omega^\mu}{\partial x^\nu}(X^\nu Y^\mu - X^\mu Y^\nu) \\
&= X^i\frac{\partial}{\partial x^i}(\omega_j Y^j) - \omega_j X^i\frac{\partial}{\partial x^i}Y^j - Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}(\omega_j X^j) + \\
&\quad + \omega_j Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}X^j \\
&= X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X,Y]).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Betrachtet man zwei Vektoren $X|_p, Y|_p \in T_pM$, so ist die linke Seite der Gleichung, $\mathrm{d}\omega|_p(X|_p, Y|_p)$, wohldefiniert. Die rechte Seite ergibt allerdings nur für Vektorfelder Sinn. Da aber die linke Seite nur von den Vektoren an der Stelle p abhängt, kann man die Vektoren zu beliebigen Vektorfeldern fortsetzen und die Gleichung verwenden.

2.16: Vektorwertige Differentialformen
Der Begriff der r-Form lässt sich zu dem der vektorwertigen r-Form *erweitern. Letztere sind vollständig antisymmetrische, in jedem Argument lineare Abbildungen*

$$\underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{r-mal} \to V$$

in einen Vektorraum V. Für so eine r-Form ω gilt also

$$\omega = \omega^\alpha T_\alpha, \tag{2.30}$$

wobei die ω^α r-Formen im Sinn von 2.14 sind und T_α eine Basis von V.
Als äußere Ableitung definitert man

$$\mathrm{d}\omega := (\mathrm{d}\omega^\alpha)T_\alpha. \tag{2.31}$$

Vektorwertige Differentialformen werden wir in Kapitel 4 kennenlernen. Formel (2.29) lässt sich auf sie in naheliegener Weise übertragen.

3 Faserbündel

Es folgt eine Einführung in die Welt der (Haupt-) Faserbündel, die die mathematische Grundlage für eine allgemeine Beschreibung von Eichfeldtheorien bildet.

Betrachten wir den Zylinder(mantel) und nennen ihn Z. Er lässt sich zum Beispiel als kartesisches Produkt des Einheitskreises und des Intervalls $[-1, 1]$ beschreiben,

$$Z := \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]. \tag{3.1}$$

Zu einem kartesischen Produkt gibt es die Projektionen pr_i auf die i-te Komponente. Wir nehmen für unser Beispiel $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{S}^1 \times [-1, 1] \to \mathbb{S}^1 : (p, y) \mapsto p$. Die Faser[1] von pr_1 in jedem Punkt p des Kreises ist $\{p\} \times [-1, 1]$, also mehr oder weniger das Intervall $[-1, 1]$. Abbildung 3.1 zeigt diesen Sachverhalt.

[1] Als Faser einer Funktion f in einem Punkt p bezeichnet man das Urbild von p, $f^{-1}(\{p\})$, also alle Elemente, die unter f auf p abgebildet werden.

Als Nächstes wollen wir uns dem Möbiusband zuwenden. Betrachtet man den Zylinder als Blatt Papier, dessen Enden zusammengeklebt wurden, so ist das Möbiusband ein Blatt Papier, dessen Enden „verdreht“ zusammengeklebt wurden. Das lässt sich nicht mehr einfach als kartesisches Produkt wie in (3.1) darstellen. Greift man allerdings einen beliebigen Punkt p des Kreises $\mathbb{S}^1$ heraus und betrachtet nur eine kleine Umgebung $U \subset \mathbb{S}^1$ davon, so sieht der „Streifen”(siehe Abbildung 3.2) des Bandes wie das Produkt $U \times [-1, 1]$ aus.

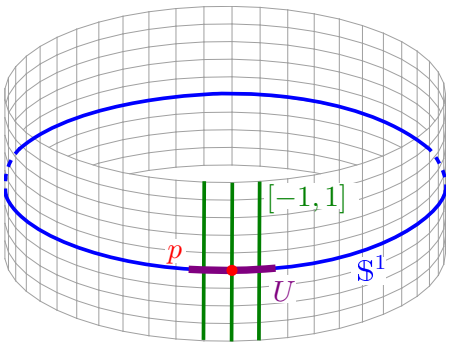


Abbildung 3.1: Zylinder

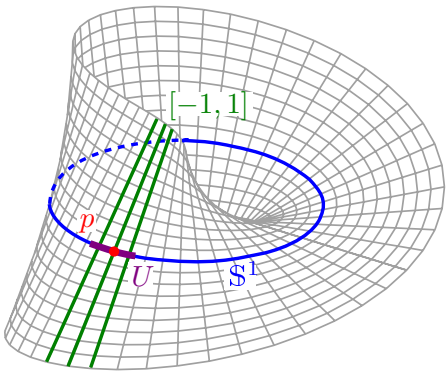
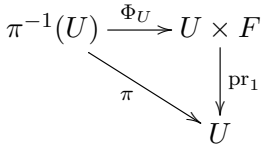


Abbildung 3.2: Möbiusband

Dies führt auf den Begriff des *Faserbündels*, der als Verallgemeinerung des kartesischen Produktes gesehen werden kann. Es wird verlangt, dass eine Mannigfaltigkeit *lokal* als kartesisches Produkt darstellbar ist, eine Eigenschaft, die auch *lokal trivial* genannt wird.

3.1: Faserbündel
Ein Faserbündel *ist ein Tupel* (E, π, M, F) *mit Mannigfaltigkeiten* E *(Totalraum),* M *(Basisraum) und* F *(Faser, typische Faser oder Fasertyp) und einer surjektiven Abbildung* $\pi : E \to M$ *(die Projektion), das folgende Bedingung erfüllt: Zu jedem Punkt* $p \in M$ *existieren eine offene Umgebung* $U \subset M$ *und ein Diffeomorphismus*[2] $\Phi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times F$*, sodass* $\pi = \mathrm{pr}_1 \circ \Phi_U$*. Folgendes Diagramm soll also kommutieren:*



(U, Φ_U) *nennt man* Bündelkarte *bzw.* lokale Trivialisierung.

[2] In [Nak03] wird dieser Diffeomorphismus mit Φ^{-1} bezeichnet. Φ ist dort also eine Funktion $U \times F \to E$.

Der Einfachheit halber wird ein Faserbündel (E, π, M, F) in Zukunft auch mit $\pi : E \to M$ oder nur mit E bezeichnet.

$F_p := \pi^{-1}(\{p\})$ ist diffeomorph zum Fasertyp F. Der zugehörige Diffeomorphismus lautet $\mathrm{pr}_2 \circ \Phi_U|_{F_p}$.

Auf unser am Anfang des Abschnittes präsentiertes Beispiel Bezug nehmend stellen wir fest, dass sowohl für den Zylinder als auch für das Möbiusband $M = \mathbb{S}^1$ und $F = [-1, 1]$ sind. Der Totalraum und die Projektion unterscheiden sich, aber lokal sehen beide wie das kartesische Produkt eines Kreissegments mit dem Intervall $[-1, 1]$ aus.

Auch das in 2.4 erwähnte Tangentialbündel TM ist ein Faserbündel $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ mit $\pi : T_pM \mapsto p$.

Wir betrachten nun eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von M und einen Atlas von Bündelkarten $\{(U_i, \Phi_i)\}$. Damit lassen sich die *Übergangsfunktionen* zwischen U_i und U_j (mit $\Phi_i := \Phi_{U_i}$) einführen, $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} \colon (U_i \cap U_j) \times F \to (U_i \cap U_j) \times F$.

Mit Hilfe der Diffeomorphismen $\Phi_{i,p} \colon F_p \to F \colon x \mapsto \mathrm{pr}_2 \circ \Phi_i|_{F_p}(x)$ kann man Abbildungen in die Gruppe der Diffeomorphismen auf der Faser definieren,

$$t_{ij} : M \to \mathrm{Diff}(F) : p \mapsto \Phi_{i,p} \circ \Phi_{j,p}^{-1}. \tag{3.2}$$

Die t_{ij} heißen *Cozyklen* des Bündels. Ihre Bedeutung ist folgende: Seien (U_i, Φ_i) und (U_j, Φ_j) zwei Bündelkarten, $p \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$ und $g_i, g_j \in F$. Gilt für ein $x \in E$, dass $\Phi_i(x) = (p, g_i)$ und $\Phi_j(x) = (p, g_j)$, so gilt auch $t_{ij}(p; g_j) = g_i$ und

$$\Phi_i(x) = (p, t_{ij}(p; g_j)). \tag{3.3}$$

Die Cozyklen erlauben also die Umrechnung zwischen lokalen kartesischen Produkten.

In vielen Anwendungen bilden die t_{ij} von M in eine Untergruppe der Diffeomorphismengruppe ab. Man nennt diese (Unter-) Gruppe die *Strukturgruppe* des Bündels. Da die Fasern des Tangentialbündels Vektorräume sind,

ist in diesem Fall zum Beispiel die Strukturgruppe die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Zwei wichtige Fälle von Faserbündeln sind *Vektorbündel* und *Hauptfaserbündel*.

3.2: Vektorbündel
Ein Faserbündel, dessen Faser ein Vektorraum ist, heißt Vektorbündel. Es handelt sich also um ein Bündel $(E, \pi, M, \mathbb{R}^n)$.

Das Tangentialbündel ist ein Vektorbündel. Alle Vektorbündel besitzen die Strukturgruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Das zentrale Konzept für Eichtheorien ist das Hauptfaserbündel.

3.3: Hauptfaserbündel
Unter dem Hauptfaserbündel *oder* Prinzipalbündel *versteht man ein Faserbündel* (P, π, M, G) *mit einer Lie-Gruppe* G*, bei dem* G *auch die Strukturgruppe ist. Sie soll durch Linkstranslation auf die Faser* G *wirken.*

Behauptung: Auf einem Hauptfaserbündel lässt sich eine Rechtswirkung $R_a : G \times P \to P : (a, x) \mapsto xa$ *einführen. Für jede Bündelkarte* (U_i, Φ_i) *definieren wir für* $\Phi_i(x) = (p, g_i)$

$$R_a : (a, x) \mapsto \Phi_i^{-1}(p, g_i a). \tag{3.4}$$

Die Wirkung besitzt folgende Eigenschaften (für alle $p \in M$*):*

1. R_a *ist fasertreu* $\forall a \in G$*, d. h. (mit* $F_p := \pi^{-1}(\{p\})$*)*
   $\forall x \in P, a \in G : x \in F_p \Rightarrow xa \in F_p$.

2. G *wirkt frei auf* F_p*, d. h. falls für ein* $a \in G$ *ein* $x \in P$ *existiert, s. d.* $xa = x$*, dann folgt daraus schon, dass* a *das Eins-Element* e *der Gruppe ist.*

3. G *wirkt transitiv auf* F_p*, d. h.* $\forall x, y \in F_p \; \exists a \in G : x = ya$.

4. *Jedes* Φ_i *ist* G*-äquivariant, d. h.* $\forall x \in P, a \in G : \Phi_i(xa) = \Phi_i(x)a$*, wobei* $(p, g)a := (p, ga) \; \forall p \in M; g, a \in G$.

Beweis der Behauptung. Die Rechtswirkung in (3.4) ist global wohldefiniert, d. h. sie hängt nicht von der lokalen Trivialisierung ab. Dies folgt daraus, dass G auch die Strukturgruppe des Bündels ist und Gruppenprodukte per definitionem assoziativ sind. Seien $a \in G$, $p \in U_i \cap U_j \subset M$ mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ und $x \in F_p$ beliebig. Die Cozyklen wirken durch Linkstranslation. Dann gilt

$$\begin{aligned} xa &\overset{(3.4)}{=} \Phi_i^{-1}(p, g_i a) \overset{(3.3)}{=} \Phi_j^{-1}(p, t_{ji}(p)(g_i a)) \\ &= \Phi_j^{-1}(p, (t_{ji}(p) g_i)a) \qquad \text{(Assoziativität)} \\ &\overset{(3.3)}{=} \Phi_j^{-1}(p, g_j a). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Die aufgezählten Eigenschaften folgen direkt aus der Definition von R_a.

1. Fasertreuheit:
$$\begin{aligned}\pi(x) &= \mathrm{pr}_1 \circ \Phi_i(x) = \mathrm{pr}_1(p, g_i) = p,\\ \pi(xa) &= \mathrm{pr}_1 \circ \Phi_i(xa) = \mathrm{pr}_1(p, g_i a) = p.\end{aligned} \tag{3.6}$$

2. Freiheit:
$$\begin{aligned}xa = x &\Leftrightarrow \Phi_i(xa) = \Phi_i(x) \Leftrightarrow (p, g_i) = (p, g_i a)\\ &\Leftrightarrow g_i = g_i a \Leftrightarrow g_i^{-1} g_i = g_i^{-1} g_i a \Leftrightarrow e = a.\end{aligned} \tag{3.7}$$

3. Transitivität (mit $\Phi_i(x) = (p, g_i)$ und $\Phi_i(y) = (p, h_i)$):
$$\Phi_i(x) = (p, g_i) = (p, h_i \underbrace{h_i^{-1} g_i}_{=:a_i}) = (p, h_i a_i) = \Phi_i(y a_i). \tag{3.8}$$

   Wendet man auf diese Gleichung Φ_i^{-1} an, so sieht man, dass wir ein passendes Gruppenelement gefunden haben. Es gilt
$$a_i = h_i^{-1} g_i = (t_{ij}(p) h_j)^{-1} (t_{ij}(p) g_j) = h_j^{-1} \underbrace{t_{ij}(p)^{-1} t_{ij}(p)}_{=e} g_j = a_j,$$
   also ist das Element unabhängig von der Karte.

4. G-Äquivarianz: Wende Φ_i auf die Definition (3.4) an.

□

Der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Menge $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Betrachtet man $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, f(x))$, so besitzt g die Eigenschaft $\mathrm{pr}_1 \circ g = \mathbb{1}$. Eine Verallgemeinerung dieses Konzepts auf Faserbündel ist der *Schnitt*.

3.4: Schnitt
Ist (E, π, M, F) ein Faserbündel, so bezeichnet man als Schnitt *eine glatte Abbildung $s : M \to E$, die die Bedingung*
$$\pi \circ s = \mathbb{1}_M$$
erfüllt. Die Menge der Schnitte in E bezeichnet man mit $\Gamma(M, E)$ oder kurz mit $\Gamma(E)$.

Ist s nur auf einer Teilmenge $U \subset M$ definiert, so spricht man von einem lokalen Schnitt. *Für die Menge der auf U definierten lokalen Schnitte schreibt man $\Gamma(U, E)$.*

Eine Skizze eines lokalen Schnittes findet man in Abbildung 3.3.

Tangentiale Vektorfelder können zum Beispiel als Schnitte im Tangentialbündel aufgefasst werden.

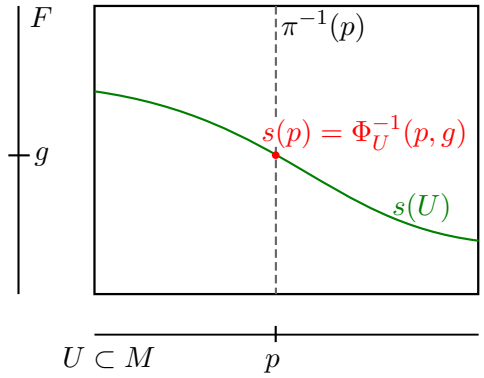


Abbildung 3.3: Ein lokaler Schnitt s

4 Eichfeldtheorien

Im folgenden Abschnitt werden Hauptfaserbündel mit weiteren Strukturen versehen. Mit deren Hilfe können wir eine geometrische Beschreibung von Eichfeldtheorien geben. Das ist insofern von Bedeutung, als diese Beschreibung auch für nicht-minkowskische Raumzeiten funktioniert, wie sie zum Beispiel bei der Gravitation auftreten.

Mit den hier vorgestellten Konzepten lassen sich auch globale Beschreibungen für Phänomene angeben, für die mit „traditionellen“ Methoden der Eichfeldtheorien keine regulären Eichpotentiale existieren – man denke z. B. an den Dirac-Monopol. Darauf wird aber nicht näher eingegangen.

Quellfelder (wie z. B. Quarkfelder der QCD) tauchen im Faserbündelformalismus als sogenannte *assoziierte Vektorbündel* auf und ihre kovarianten Ableitungen ergeben sich auf natürliche Art und Weise. Auch diese Erwähnung soll nur als Motivation zur Beschäftigung mit Faserbündeln zur Beschreibung von Eichfeldtheorien dienen und nicht weiter verfolgt werden. Details finden sich wieder in [Nak03].

Wenden wir uns der Mathematik zu.

4.1 Eichpotentiale

Bevor wir uns der zusätzlichen Struktur zum Hauptfaserbündel zuwenden, die uns letzten Endes die Eichpotentiale liefert, nämlich dem *horizontalen Unterraum*, müssen wir uns noch mit zwei Konzepten beschäftigen, die das Hauptfaserbündel schon in sich trägt.

4.1: Vertikaler Unterraum
Sei (P, π, M, G) ein Hauptfaserbündel. An einem Punkt $u \in P$ nennt man den Unterraum V_uP des Tangentialraumes T_uP, der tangential an die p enthaltende Faser $G_{\pi(u)}$ ist, den vertikalen Unterraum*,*

$$V_uP := T_uG_{\pi(u)}.$$

Behauptung: $V_uP = \ker \pi_*$, d. h. $V_uP = \{X \in T_uP : \pi_*X = 0\}$.

Beweis der Behauptung. Sei (U, Φ) eine Bündelkarte, sodass $\pi(u) \in U \subset M$. Weiters sei $X \in T_uP$ und liege tangential an eine Kurve $k(t)$. Dann ist $\Phi(u) = (p, g)$ und Φ_*X tangential an eine Kurve $c(t) := \Phi \circ k(t) = (x(t), h(t))$ mit $x(t_0) = p$ und $h(t_0) = g$ (siehe auch 2.7 über den Tangentialraum eines Produkts von Mannigfaltigkeiten).

Es gilt

$$\pi_* X[f] = \mathrm{pr}_{1*}\Phi_* X[f] = \left.\frac{\mathrm{d}f(\mathrm{pr}_1 \circ c(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}.$$

Der letzte Ausdruck verschwindet genau dann, wenn $f \circ \mathrm{pr}_1 \circ c(t)$ für alle f in einer Umgebung von t_0 konstant ist, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn $\mathrm{pr}_1 \circ c(t) = p$ in einer Umgebung von t_0. Das ist gleichbedeutend damit, dass $c(t) = (p, h(t))$, also liegt $k = \Phi^{-1} \circ c$ in $G_{\pi(u)}$.

Damit ist jeder Vektor X mit $\pi_* X = 0$ tangential an eine Kurve in $G_{\pi(u)}$. Umgekehrt ist per definitionem jeder Vektor Y aus $V_u P$ tangential an eine Kurve in $G_{\pi(u)}$. Diese lässt sich darstellen als $\Phi^{-1}(p, h(t))$, sodass $\pi_* Y = 0$. □

Wir haben bereits im Anschluss an die Definition 3.1 des Faserbündels festgestellt, dass die Faser $\pi^{-1}(\{p\})$ an jedem Punkt p diffeomorph zum Fasertyp ist. Im Falle eines Hauptfaserbündels ist letzterer die Gruppe G. Dies führt auf einen Isomorphismus zwischen Lie-Algebra und vertikalem Unterraum.

4.2: Fundamentale Vektorfelder
Sei A ein Element der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G und $u \in P$. Dann definiert $R_{\exp(tA)}u = u\exp(tA)$ eine Kurve in der Faser $G_{\pi(u)}$ durch u. An diese ist der Vektor

$$A^{\#}|_u[f] := \left.\frac{\mathrm{d}f(u\exp(tA))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \in V_u P \tag{4.1}$$

tangential. Man nennt $u \mapsto A^{\#}|_u$ das von A generierte fundamentale Vektorfeld.

Behauptungen:

1. $\# : \mathfrak{g} \to V_u P : A \mapsto A^{\#}|_u$ *ist ein Vektorraumisomorphismus.*
2. $[A^{\#}, B^{\#}] = [A, B]^{\#}$.
3. $R_{a*}A^{\#} = (\mathrm{Ad}_{a^{-1}} A)^{\#}$.

Beweis der Behauptungen. A ist als Element der Lie-Algebra ein linksinvariantes Vektorfeld, d. h. $A|_g = L_{g*}A|_e$ mit der Linkstranslation $L_g : a \mapsto ga$. Auch sei an 2.8 erinnert, wo gezeigt wurde, dass Differential und Kommutator vertauschen, sprich $[F_*X, F_*Y]|_{F(p)} = F_*[X, Y]|_p$.

Sei $u \in P$ fix und F_u definiert durch $F_u : G \to P : a \mapsto ua$. Dann sind A und $A^{\#}$ F_u-verknüpft,

$$\begin{aligned} A^{\#}|_{F_u(a)}[f] = A^{\#}|_{ua}[f] &= \left.\frac{\mathrm{d}f(ua\exp(tA))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}f(F_u \circ L_a \circ \exp(tA))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\ &= F_{u*}L_{a*}A|_e[f] = F_{u*}A|_a[f]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Also ist Punkt 2 gezeigt.

Weiters ist das Differential eine lineare Abbildung und somit auch #. Es bleibt für Punkt 1 nur noch die Bijektivität zu zeigen.

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass für eine lineare Abbildung $T : U \to V$ mit endlichdimensionalen Vektorräumen U und V gleicher Dimension Bijektivität und Injektivität äquivalent sind.[1] In unserem Fall ist $U = \mathfrak{g}$ und $V = V_uP$. Da $G_{\pi(u)}$ diffeomorph zu G ist, stimmen auch die Dimensionen der Tangentialräume überein.

[1] Siehe z. B. [Hav08], Satz 3.2.9.

Injektivität einer linearen Abbildung ist gleichbedeutend damit, dass ihr Kern nur die Null enthält. Wir suchen also Lösungen der Gleichung $A^\# = 0$. Das bedeutet aber wie im Beweis zu 4.1, dass die zu $A^\#$ gehörige Kurve konstant ist. Diese Kurve ist $u \exp(tA)$, die genau dann gleich u für alle t ist, wenn $A = 0$ (da exp ein lokaler Diffeomorphismus um die 0 ist). Damit ist $\ker \# = \{0\}$ und # injektiv und daher bijektiv, was Punkt 1 beweist.

Schlussendlich muss noch der 3. Punkt gezeigt werden. Sei F_u wie bei Punkt 2. $\mathrm{Ad}_{a^{-1}}$ ist das Differential der Abbildung $G \to G : g \mapsto a^{-1}ga$.

$$\begin{aligned}
(R_{a*}A^\#)|_u[f] &= R_{a*}A^\#|_{ua^{-1}}[f] \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}f(R_a(ua^{-1}\exp(tA)))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}f(ua^{-1}\exp(tA)a)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\
&= F_{u*}\,\mathrm{Ad}_{a^{-1}}\,A|_e[f] \\
&= (\mathrm{Ad}_{a^{-1}}\,A)^\#|_u[f],
\end{aligned} \tag{4.3}$$

wobei die letzten beiden Gleichheiten analog zu Gleichung (4.2) gelten. □

Der vertikale Raum und die fundamentalen Vektorfelder werden bereits eindeutig mit dem Hauptfaserbündel „mitgeliefert“. Ein *horizontaler Unterraum* H_uP, der den vertikalen Unterraum zum vollständigen Tangentialraum ergänzt, $V_uP \oplus H_uP = T_uP$, ist aber nicht eindeutig gegeben. Eine Einschränkung der Wahlmöglichkeiten liefert folgende Definition.

4.3: Zusammenhang
An einem Punkt $u \in P$ ist H_uP der Zusammenhang *oder* horizontale Unterraum *von T_uP, falls gilt*

1. $V_uP \oplus H_uP = T_uP$,
2. $H_{ua}P = R_{a*}(H_uP)$ *und*
3. H_uP *hängt glatt von u ab.*

Hat man so einen Zusammenhang ausgewählt, so lässt sich jedes Vektorfeld X auf TP eindeutig in ein horizontales Feld X^{H} und ein vertikales Feld X^{V}

zerlegen. Dafür sorgen Bedingungen 1 und 3. Bedingung 2 wird ebenfalls bald in Erscheinung treten. Abbildung 4.1 zeigt eine Skizze.

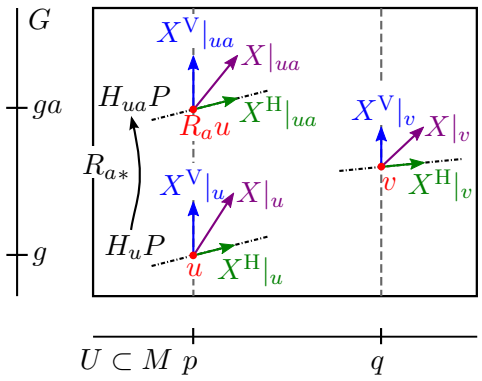


Abbildung 4.1: Horizontale und vertikale Teilräume des Bündels

Gleichbedeutend mit der Definition eines Zusammenhangs ist die nachstehende Definition der *Zusammenhangsform*, wie wir beweisen werden.

4.4: Zusammenhangsform
Eine vektorwertige 1-Form ω, die von TP in die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G abbildet,[2] *heißt* Zusammenhangsform, *falls sie die folgenden Bedingungen erfüllt.*

1. $\omega(A^{\#}) = A$.
2. $R_a^*\omega = \mathrm{Ad}_{a^{-1}}\,\omega$, *wobei, falls man* $\omega|_u$ *für* ω *im Punkt* $u \in P$ *schreibt,* $(R_a^*\omega)|_u(X) := \omega|_{ua}(R_{a*}X)$ *für* $X \in T_uP$.[3]

Man nennt eine Zusammenhangsform auch einen Ehresmann-Zusammenhang.

[2] Wir nennen sie auch eine *Lie-Algebra-wertige 1-Form.*

[3] $R_a^*\omega$ heißt *Pullback* oder *Rücktransport* von ω bezüglich R_a.

Nun zur angesprochenen Äquivalenz von Zusammenhang und Zusammenhangsform.

- Hat man einen Zusammenhang, so lässt sich ω durch seine Wirkung auf Vektoren $X \in T_uP$ bzw. deren Zerlegung in X^{H} und X^{V} folgendermaßen definieren:

$$\omega|_u(X) = \omega|_u(X^{\mathrm{H}} + X^{\mathrm{V}}) = \omega|_u(X^{\mathrm{H}} + A^{\#}|_u) := A, \tag{4.4}$$

  da ja nach 4.2 $X^{\mathrm{V}} = A^{\#}|_u$ für (genau) ein A ist. Damit ist Bedingung 1 offensichtlich erfüllt.

Die 2. Bedingung lässt sich einfach nachrechnen,

$$\begin{aligned}(R_a^*\omega)|_u(X) &= \omega|_{ua}(R_{a*}X) \\ &= \omega|_{ua}(R_{a*}X^{\mathrm{H}} + R_{a*}X^{\mathrm{V}}) \\ &= \omega|_{ua}(R_{a*}X^{\mathrm{H}} + R_{a*}A^{\#}|_u).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Nach 4.2, Behauptung 3, gilt $R_{a*}A^{\#} = (\mathrm{Ad}_{a^{-1}} A)^{\#}$. Insbesondere ist $R_{a*}A^{\#}$ wieder fundamental. Auf Grund von 4.3, Bedingung 2, ist $R_{a*}X^{\mathrm{H}}$ wieder horizontal. Daraus folgt

$$\begin{aligned}(R_a^*\omega)|_u(X) &= \omega|_{ua}(\underbrace{R_{a*}X^{\mathrm{H}}}_{\text{horiz.}} + \underbrace{(\mathrm{Ad}_{a^{-1}} A)^{\#}|_{ua}}_{\text{vert.}}) \\ &= \mathrm{Ad}_{a^{-1}} A \\ &= \mathrm{Ad}_{a^{-1}} \omega|_u(X^{\mathrm{H}} + A^{\#}|_u) \\ &= \mathrm{Ad}_{a^{-1}} \omega|_u(X^{\mathrm{H}} + X^{\mathrm{V}}) \\ &= \mathrm{Ad}_{a^{-1}} \omega|_u(X).\end{aligned} \tag{4.6}$$

- Kennen wir eine Zusammenhangsform ω, so ist der zugehörige Zusammenhang gegeben durch $H_uP := \ker \omega$, wie im Folgenden gezeigt wird.

  Angenommen, ein $X \in \ker \omega$ besäße eine vertikale Komponente. Dann gäbe es ein $A \in \mathfrak{g}$, sodass diese Komponente gleich $A^{\#}$ wäre. Dann wäre $\omega(X) \neq 0$ und $X \notin \ker \omega$. Also ist $\ker \omega|_u \cap V_uP = \{0\}\ \forall u \in P$.

  Weiters ist ω surjektiv, da es zu jedem $A \in \mathfrak{g}$ ein $A^{\#}$ gibt, sodass $A = \omega(A^{\#})$. Die Dimension des Bildes von $\omega|_u$ ist also $\dim \mathfrak{g} = \dim V_uP$. Mit der Rangformel für lineare Abbildungen[4] ergibt sich

  $$\dim T_uP = \dim \ker \omega|_u + \dim V_uP.$$

  Somit ist $T_uP = \ker \omega|_u \oplus V_uP$ und Punkt 1 aus 4.3 ist gezeigt.

  Sei $X \in T_uP$ ein Vektor mit $\omega|_u(X) = 0$. Dann gilt

  $$\omega|_{ua}(R_{a*}X|_u) = \mathrm{Ad}_{a^{-1}} \omega|_u(X) = 0. \tag{4.7}$$

  Mit X ist auch $R_{a*}X$ in $\ker \omega$ und Bedingung 2 erfüllt.

  Fehlt nur noch Punkt 3, die Glattheit. In einer Karte (U, φ) sei ein Vektorfeld X an der Stelle u gegeben durch $X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_u$. ω ist glatt, also sind die ${\omega_i}^{\alpha}$ definiert durch $\omega(\frac{\partial}{\partial x^i}) = {\omega_i}^{\alpha} T_\alpha$ (mit T_α als Basis von $\mathfrak{g}$) glatt abhängig von u. Das trifft dann auch auf die Lösungen des Gleichungssystems

  $$X^i {\omega_i}^{\alpha} = 0$$

  zu. Diese Lösungen sind aber gerade die (Koeffizienten der) Vektoren aus $\ker \omega|_u$.

[4] Ist $f\colon U \to V$ eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen U und V, so gilt: $\dim U = \dim \operatorname{ran} f + \dim \ker f$. $\operatorname{ran} f$ bezeichnet das Bild $f(U)$ von f. Siehe [Hav08], Satz 3.2.8.

Damit können wir endlich zur zentralen Definition dieses Abschnitts kommen.

4.5: Eichpotentiale
Sei U_i eine offene Überdeckung von M und σ_i lokale Schnitte auf den entsprechenden U_i.

Ist ω eine Zusammenhangsform auf dem Hauptfaserbündel, dann wird das Eichpotential $\mathcal{A}_i$ definiert als Lie-Algebra-wertige 1-Form $TM \to \mathfrak{g}$

$$\mathcal{A}_i := \sigma_i^* \omega = \omega \circ \sigma_{i*}. \tag{4.8}$$

Offensichtlich hängen die Eichpotentiale von der Wahl der Schnitte σ_i ab. Die Idee ist folgende: Wir betrachten M als die Raumzeit. Die Faser des Hauptfaserbündels über einem Punkt $p \in M$ beschreibt die Eichfreiheit in diesem Punkt. Jeder Punkt in der Faser G_p (sprich: Eichung) ist gleichwertig. Durch einen Schnitt durch das Bündel wird eine bestimmte Eichung festgelegt.

Folgt man diesem Bild, so ist zu erwarten, dass ein anderer Schnitt σ_i' ein anderes Eichfeld liefert, das sich durch eine Eichtransformation in das ursprüngliche Feld transformieren lässt.

Im Folgenden wird bei $\mathcal{A}_i$, σ_i etc. der Index i nicht mehr angeschrieben, da die Rechnungen ohnehin für alle i gleichermaßen gelten.

Es ist leicht einzusehen, dass man zwei Schnitte σ, σ' durch eine Funktion $a : M \to G$ in Beziehung setzen kann durch

$$\sigma'(x) = R_{a(p)}\sigma(p) = \sigma(p)a(p). \tag{4.9}$$

Nun wollen wir das neue Eichpotential ausrechnen. Dazu benötigen wir zuallererst einen Ausdruck für ${\sigma'}_* X$. Sei $\gamma(t)$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$, sodass X tangential an γ bei $t = 0$ liegt. Wir schreiben auch $\sigma(t) := \sigma(\gamma(t))$ und $a(t) := a(\gamma(t))$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
{\sigma'}_* X|_p[f] &= \left.\frac{\mathrm{d} f \circ \sigma'(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\sigma(t)a(t))\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\sigma(t)a(p)) + f(\sigma(p)a(t))\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\sigma(t)a(p)) + f(\sigma'(p)a^{-1}(p)a(t))\right|_{t=0} \\
&= R_{a(p)_*}\sigma_* X|_p + F_{\sigma'(p)_*} L_{a^{-1}(p)_*} a_* X|_p,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

wobei folgende Bezeichnungen verwendet wurden:

$$F_u : G \to P : g \mapsto ug$$
$$L_a : G \to G : g \mapsto ag$$

und a_* ist das Differential der Funktion $a : M \to G : p \mapsto a(p)$.

Wir betrachten den letzten Summanden. Es ist $X|_p \in T_pM$, damit $a_*X|_p \in T_aG$ und schließlich $L_{a^{-1}(p)_*}a_*X|_p \in T_eG$. Also ist $A := g \mapsto L_{g_*}L_{a^{-1}(p)_*}a_*X|_p$ ein Element der Lie-Algebra.

Aus Gleichung (4.2) wissen wir, dass die Funktion F_u Lie-Algebra-Elemente und fundamentale Vektorfelder verknüpft. Es gilt damit

$$A^{\#}|_{\sigma'(p)} = F_{\sigma'(p)_*}A|_e = F_{\sigma'(p)_*}L_{a^{-1}(p)_*}a_*X|_p. \tag{4.11}$$

Also ergibt sich schlussendlich

$$\sigma'_*X|_p = R_{a(p)_*}\sigma_*X|_p + A^{\#}|_{\sigma'(p)}. \tag{4.12}$$

Wendet man darauf die Zusammenhangsform ω an, so erhält man unter Verwendung der Bedingungen aus 4.4

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'(X) &= \omega(\sigma'_*X)\\ &= \omega(R_{a(p)_*}\sigma_*X) + \omega(A^{\#})\\ &= \mathrm{Ad}_{a^{-1}(p)}\,\omega(\sigma_*X) + A\\ &= \mathrm{Ad}_{a^{-1}(p)}\,\mathcal{A}(X) + L_{a^{-1}(p)_*}a_*X,\end{aligned} \tag{4.13}$$

wobei in der letzten Zeile im zweiten Summanden zur besseren Lesbarkeit die Identifikation $\mathfrak{g} \cong T_eG$ vorgenommen wurde.

Da dies für alle X gilt, haben wir die Transformationsformel

$$\mathcal{A}' = \mathrm{Ad}_{a^{-1}(p)}\,\mathcal{A} + L_{a^{-1}(p)_*}a_* \tag{4.14}$$

hergeleitet.

Ist G eine Matrixgruppe und werden Vektoren als Richtungen der Richtungsableitungen angesehen, so wird (4.14) bezüglich lokaler Koordinaten zur wohlbekannten Eichtransformation

$$\mathcal{A}'_\mu := \mathcal{A}'(\partial_\mu) = a^{-1}\mathcal{A}_\mu a + a^{-1}\partial_\mu a. \tag{4.15}$$

4.2 Feldstärke

Von den Eichfeldern ist es kein allzu großer Schritt mehr zu den Feldstärketensoren. Hierfür wird noch ein neues Konzept benötigt.

4.6: Krümmungsform
Mit Hilfe eines Zusammenhangs kann jedes Vektorfeld X in einen horizontalen Teil X^{H} und einen vertikalen Teil X^{V} zerlegt werden. Die Projektion auf X^{H} nennen wir pr_{H}. *ω sei die zum Zusammenhang gehörige Zusammenhangsform.*

Als Krümmungsform *bezeichnet man die Lie-Algebra-wertige 2-Form*

$$\Omega(X,Y) := \mathrm{D}\omega(X,Y) := \mathrm{d}\omega(\mathrm{pr_H}(X), \mathrm{pr_H}(Y)).$$

D *heißt* äußere kovariante Ableitung. d *ist die äußere Ableitung.*

Ω ist eine horizontale Form. Das heißt, falls mindestens eines der Argumente ein vertikaler Vektor ist, wird Ω gleich 0.

Einen anderen Zusammenhang zwischen Ω und ω gibt die

4.7: Cartan-Strukturgleichung
Seien $X, Y \in T_uP$. Dann gilt

$$\Omega(X,Y) = \mathrm{d}\omega(X,Y) + [\omega(X), \omega(Y)].$$

Beweis. Jeder Vektor X lässt sich eindeutig in X^{H} und X^{V} zerlegen. Außerdem ist Ω linear und antisymmetrisch. Also reicht es, Ω für folgende drei Fälle zu berechnen: 1) beide Argumente horizontal, 2) erstes Argument horizontal und zweites vertikal und 3) beide Argumente vertikal. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}\Omega(X,Y) &= \Omega(X^{\mathrm{H}} + X^{\mathrm{V}}, Y^{\mathrm{H}} + Y^{\mathrm{V}}) \\ &= \Omega(X^{\mathrm{H}}, Y^{\mathrm{H}}) + \Omega(X^{\mathrm{H}}, Y^{\mathrm{V}}) + \Omega(X^{\mathrm{V}}, Y^{\mathrm{H}}) + \Omega(X^{\mathrm{V}}, Y^{\mathrm{V}}) \\ &= \Omega(X^{\mathrm{H}}, Y^{\mathrm{H}}) + \Omega(X^{\mathrm{H}}, Y^{\mathrm{V}}) - \Omega(Y^{\mathrm{H}}, X^{\mathrm{V}}) + \Omega(X^{\mathrm{V}}, Y^{\mathrm{V}}),\end{aligned} \tag{4.16}$$

wo nur die oben beschriebenen Fälle vorkommen.

1.
$$\begin{aligned}\Omega(X^{\mathrm{H}}, Y^{\mathrm{H}}) &\overset{4.6}{=} \mathrm{d}\omega(\mathrm{pr_H}(X^{\mathrm{H}}), \mathrm{pr_H}(Y^{\mathrm{H}})) \\ &= \mathrm{d}\omega(X^{\mathrm{H}}, Y^{\mathrm{H}}) + \underbrace{[\omega(X^{\mathrm{H}}), \omega(Y^{\mathrm{H}})]}_{[0,0]}\end{aligned}$$

2.
$$\Omega(X^{\mathrm{H}}, Y^{\mathrm{V}}) \overset{4.6}{=} \mathrm{d}\omega(\mathrm{pr_H}(X^{\mathrm{H}}), \mathrm{pr_H}(Y^{\mathrm{V}})) = 0,$$
da $\mathrm{pr_H}(Y^{\mathrm{V}}) = 0$. Es ist auch $\omega(X^{\mathrm{H}}) = 0$ und folglich $[\omega(X^{\mathrm{H}}), \omega(Y^{\mathrm{V}})] = 0$, also bleibt noch zu zeigen: $\mathrm{d}\omega(X^{\mathrm{H}}, Y^{\mathrm{V}}) = 0$. Wir wollen Formel (2.29) verwenden. Dazu müssen wir X^{H} und Y^{H} zu Vektorfeldern fortsetzen, was, wie im Anschluss an den Beweis der Formel begründet wurde, beliebig passieren darf. X^{H} wird zweckmäßigerweise durch ein beliebiges horizontales Feld fortgesetzt, für das wir der Einfachheit halber wieder X^{H} schreiben.

Außerdem wissen wir aus 4.2, dass es ein Lie-Algebra-Element B gibt mit $B^{\#}|_u = Y^{\mathrm{V}}$. Wir wählen $B^{\#}$ als Fortsetzung für Y^{V}. Damit gilt[5]

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X^{\mathrm{H}}, Y^{\mathrm{V}}) &= X^{\mathrm{H}}[\overbrace{\omega(B^{\#})}^{B=\text{konst.}}] - B^{\#}[\overbrace{\omega(X^{\mathrm{H}})}^{0}] - \omega([X^{\mathrm{H}}, B^{\#}]) \\ &= -\omega([X^{\mathrm{H}}, B^{\#}]).\end{aligned} \tag{4.17}$$

[5] Sei T_α eine Basis von $\mathfrak{g}$. Dann ist mit $X[\omega(Y)]$ die Wirkung von X auf die Komponenten von ω, $X[\omega^\alpha(Y)]T_\alpha$, gemeint.

Nun zeigen wir, dass $[X^{\mathrm{H}}, Y^{\mathrm{V}}]$ horizontal ist und deshalb auch der letzte Term verschwindet. Aus 2.11 wissen wir, dass der Kommutator nichts anderes als die Lie-Ableitung ist.

Nach Definition 4.2 des fundamentalen Vektorfelds ist $R_{g(t)}u$ mit $g(t) = \exp(tB)$ die Integralkurve von $B^{\#}$. Also entspricht $R_{g(t)}$ dem σ_t aus 2.11 und wir erhalten

$$[Y^{\mathrm{V}}, X^{\mathrm{H}}] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(R_{g(\varepsilon)^{-1}}{}_* X^{\mathrm{H}}|_{R_{g(\varepsilon)}u} - X^{\mathrm{H}}|_u). \tag{4.18}$$

Wegen Behauptung 2 in 4.3 gilt $R_{g(\varepsilon)^{-1}}{}_* H_{R_{g(\varepsilon)}u} P = H_{R_{g(\varepsilon)^{-1}} R_{g(\varepsilon)}u} P = H_u P$, insbesondere ist $R_{g(\varepsilon)^{-1}}{}_* X^{\mathrm{H}}|_{R_{g(\varepsilon)}u} \in H_u P$. Also ist die rechte Seite von Gleichung (4.18) horizontal und somit auch die linke.

3.
$$\Omega(X^{\mathrm{V}}, Y^{\mathrm{V}}) \overset{4.6}{=} \mathrm{d}\omega(\mathrm{pr}_{\mathrm{H}}(X^{\mathrm{V}}), \mathrm{pr}_{\mathrm{H}}(Y^{\mathrm{V}})) = 0.$$

Um Formel (2.29) verwenden zu können, setzen wir X^{V} und Y^{V} zu fundamentalen Vektorfeldern fort, wählen also A und B aus der Lie-Algebra, sodass

$$\begin{aligned} A^{\#}|_u &= X^{\mathrm{V}} \\ B^{\#}|_u &= Y^{\mathrm{V}}. \end{aligned}$$

In die Formel eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(X^{\mathrm{V}}, Y^{\mathrm{V}}) &= A^{\#}[\overbrace{\omega(B^{\#})}^{B=\text{konst.}}] - B^{\#}[\overbrace{\omega(A^{\#})}^{A=\text{konst.}}] - \omega([A^{\#}, B^{\#}]) \\ &= -\omega([A^{\#}, B^{\#}]). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Wegen 4.2, Behauptung 2 ist

$$[A^{\#}, B^{\#}] = [A, B]^{\#}. \tag{4.20}$$

Zusammen ergeben Gleichungen (4.19) und (4.20)

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}\omega(X^{\mathrm{V}}, Y^{\mathrm{V}}) + \omega([A^{\#}, B^{\#}]) \\ &= \mathrm{d}\omega(X^{\mathrm{V}}, Y^{\mathrm{V}}) + \omega([A, B]^{\#}) \\ &= \mathrm{d}\omega(X^{\mathrm{V}}, Y^{\mathrm{V}}) + [A, B] \\ &= \mathrm{d}\omega(X^{\mathrm{V}}, Y^{\mathrm{V}}) + [\omega(X^{\mathrm{V}}), \omega(Y^{\mathrm{V}})], \end{aligned} \tag{4.21}$$

was mit $\Omega(X^{\mathrm{V}}, Y^{\mathrm{V}})$ übereinstimmt. □

Die Cartan-Strukturgleichung legt bereits nahe, wie der Feldstärke-Tensor im Faserbündel-Formalismus aussehen wird.

4.8: Feldstärke
Sei $U \subset M$ offen, σ lokaler Schnitt auf U und $\mathcal{A} = \sigma^*\omega$ das entsprechende Eichpotential (vgl. 4.5).
Dann nennt man das durch[6]

$$\mathcal{F}(X,Y) := \sigma^*\Omega(X,Y) \overset{4.7}{=} \mathrm{d}\mathcal{A}(X,Y) + [\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)]$$

definierte $\mathcal{F}$ die Feldstärke.

[6] Es gilt $\sigma^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\sigma^*\omega)$, wie leicht nachgerechnet werden kann.

Für die Komponenten von $\mathcal{F}$ ergibt das die wohlbekannte Formel

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} := \mathcal{F}(\partial_\mu, \partial_\nu) = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]. \tag{4.22}$$

Ist T_a eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so lassen sich $\mathcal{A}_\mu$ und $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ als Linearkombinationen

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu{}^\alpha T_\alpha \text{ und } \mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}{}^\alpha T_\alpha$$

darstellen. Mit der Kommutatorrelation $[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma$ erhält man

$$F_{\mu\nu}{}^\alpha = \partial_\mu A_\nu{}^\alpha - \partial_\nu A_\mu{}^\alpha + f_{\beta\gamma}{}^\alpha A_\mu{}^\beta A_\nu{}^\gamma. \tag{4.23}$$

5 Eichfeldtheorie der Gravitation

Ziel dieses Kapitels ist es, die Gravitation als Eichfeldtheorie zu beschreiben.

Die erste Frage, die sich dabei stellt, ist die nach der Eichgruppe. Die Elektrodynamik ist eine U(1)-Theorie. Aufgrund der U(1)-Symmetrie der Lagrangedichte und des Nöther-Theorems ist der Viererstrom J^μ, die Quelle der elektromagnetischen Feldstärke, konserviert.

Die Gravitation wird durch Energie und Impuls erzeugt. Der Energie-Impuls-Tensor ist, wie der elektromagnetische Strom J^μ, divergenzfrei. Er ist eine unter Translationen invariante Größe. Darum ist es naheliegend zu versuchen, die Gravitation als Eichtheorie der Translationsgruppe zu beschreiben.

Zwischen der Gravitation und anderen Wechselwirkungen besteht ein fundamentaler Unterschied. Während zum Beispiel das elektromagnetische Feld an jeden Punkt der Raumzeit als zusätzliches Feld „angehängt“ wird, ist die Gravitation ein Effekt der Raumzeit selbst. Das Eichfeld muss sich irgendwie in der Geometrie der Raumzeit manifestieren. Deshalb wird sich die Gravitation nicht durch eine konventionelle Eichtheorie beschreiben lassen.

Dieses Kapitel bedient sich in weiten Teilen der Ergebnisse aus [Cho75] und [Cho76].

5.1 Mathematische Konzepte

Es folgt eine kurze Aufstellung von neuen mathematischen Konzepten, die wir in diesem Kapitel brauchen werden.

5.1: Rahmen
Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Vektorfelder, die in jedem Punkt $p \in M$ eine Basis von T_pM bilden, so nennt man diese Familie von Feldern einen Rahmen.

Die Koordinatenbasis ∂_μ ist ein Beispiel für einen Rahmen.

Wir beschreiben die Raumzeit als vierdimensionale Mannigfaltigkeit, die mit einer pseudo-riemannschen Metrik g versehen ist.

5.2: Pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit
Unter einer pseudo-riemannschen Mannigfaltigkeit versteht man eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer Abbildung

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},$$

die folgende Eigenschaften hat:

1. *linear:* $g_p(fX + Y, Z) = f(p)g_p(X, Z) + g_p(Y, Z)$, $f \in C^\infty(M)$[1]
2. *symmetrisch:* $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$
3. *nicht ausgeartet:* $\nexists X : g_p(X, Y) = 0 \; \forall Y$
4. *differenzierbar abhängig von p*

g heißt pseudo-riemannsche Metrik *bzw.* Metriktensor *auf M.*

[1] $C^\infty(M)$ ist die Menge der glatten Funktionen $M \to \mathbb{R}$.

Eine Mannigfaltigkeit heißt riemannsch, falls g_p zusätzlich noch positiv definit ist, d. h. $g_p(X, Y) > 0 \; \forall X, Y \in T_pM \setminus \{0\}$. Dies ist eine stärkere Bedingung als bloß nicht ausgeartet zu sein.

Offensichtlich ist die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ nicht positiv definit, weshalb wir uns im Weiteren mit pseudo-riemannschen Mannigfaltigkeiten beschäftigen werden.

Wir wollen nun einen speziellen Rahmen einführen.

5.3: Vierbein
Sei M eine pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit und die Familie $\{\hat{e}_a\}$ *von Vektorfeldern ein Rahmen auf M. Dann lässt sich* $\hat{e}_a$ *darstellen als*

$$\hat{e}_a = e_a{}^\mu \partial_\mu. \tag{5.1}$$

Erfüllen die $\hat{e}_a$ *die Beziehung*

$$g_{ab} := g(\hat{e}_a, \hat{e}_b) = \eta_{ab} := \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1),$$

so nennt man sie ein Vierbein *oder eine* Tetrade *bzw. die* $e_a{}^\mu$ Vierbeinfelder.

Bezeichnet man mit $e^a{}_\mu$ die inversen Vierbeinfelder, so lassen sich die Komponenten der Metrik anschreiben als

$$g_{\mu\nu} := g(\partial_\mu, \partial_\nu) = g(e^a{}_\mu \hat{e}_a, e^b{}_\nu \hat{e}_b) = e^a{}_\mu e^b{}_\nu g(\hat{e}_a, \hat{e}_b) = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}. \tag{5.2}$$

In Zukunft wollen wir Komponenten bezüglich des Vierbeins mit lateinischen Indizes vom Anfang des Alphabets (a, b, c, …) bezeichnen. Komponenten bezüglich der Koordinatenbasis bekommen griechische Buchstaben aus der Mitte des Alphabets (μ, ν, ρ, …) und Komponenten bezüglich der Generatoren einer Lie-Algebra (welche in Kürze auftauchen werden) griechische Buchstaben vom Anfang des Alphabets (α, β, …).

Wegen des Satzes von Schwarz vertauschen die Vektoren der Koordinatenbasis,

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0. \tag{5.3}$$

Auf die Vierbeinfelder muss das im Allgemeinen nicht mehr zutreffen. Da die Tangentialräume bezüglich des Kommutators abgeschlossen sind, gilt

$$[\hat{e}_a, \hat{e}_b] = c_{ab}{}^c \hat{e}_c \tag{5.4}$$

mit passenden ${c_{ab}}^c \in C^\infty(M)$. Man nennt diese auch die *Anholonomiekoeffizienten* (sie sind allerdings eigentlich Funktionen).

Für die ${c_{ab}}^c$ lässt sich mit Hilfe der Definition der $\hat{e}_a$ ein Ausdruck ableiten,

$$\begin{aligned} {c_{ab}}^c \hat{e}_c = {c_{ab}}^c {e_c}^\nu \partial_\nu &\overset{(5.4)}{=} {e_a}^\mu \partial_\mu ({e_b}^\nu \partial_\nu) - {e_b}^\mu \partial_\mu ({e_a}^\nu \partial_\nu) \\ &= ({e_a}^\mu \partial_\mu {e_b}^\nu - {e_b}^\mu \partial_\mu {e_a}^\nu)\partial_\nu \\ &= (\hat{e}_a[{e_b}^\nu] - \hat{e}_b[{e_a}^\nu])\partial_\nu. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Durch Vergleich von erster und letzter Zeile sieht man, dass

$${c_{ab}}^c = (\hat{e}_a[{e_b}^\nu] - \hat{e}_b[{e_a}^\nu]){e^c}_\nu. \tag{5.6}$$

5.2 Feldstärke

Im nächsten Schritt rechnen wir die Komponenten der Feldstärke bezüglich des Vierbeins aus. T_α seien die Generatoren der Eichgruppe. Zur Erinnerung die Definition der Feldstärke aus 4.8:

$$\begin{aligned} F^\alpha T_\alpha(X,Y) = \mathcal{F}(X,Y) &= \mathrm{d}\mathcal{A}(X,Y) + [\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)] \\ &= (\mathrm{d}A^\alpha(X,Y) + {f_{\beta\gamma}}^\alpha A^\beta(X) A^\gamma(Y)) T_\alpha. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Unter Verwendung von Formel (2.29) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A^\alpha(\hat{e}_a, \hat{e}_b) &= \hat{e}_a[A^\alpha(\hat{e}_b)] - \hat{e}_b[A^\alpha(\hat{e}_a)] - A^\alpha([\hat{e}_a, \hat{e}_b]] \\ &= \hat{e}_a[{A_b}^\alpha] - \hat{e}_b[{A_a}^\alpha] - {c_{ab}}^c {A_c}^\alpha \end{aligned} \tag{5.8}$$

und weiter

$$\begin{aligned} {F_{ab}}^\alpha &:= F^\alpha(\hat{e}_a, \hat{e}_b) \\ &= \hat{e}_a[{A_b}^\alpha] - \hat{e}_b[{A_a}^\alpha] - {c_{ab}}^c {A_c}^\alpha + \underbrace{{f_{\beta\gamma}}^\alpha {A_a}^\beta {A_b}^\gamma}_{0}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

wobei der letzte Summand verschwindet, da die Translationsgruppe eine abelsche Gruppe ist und folglich ${f_{\beta\gamma}}^\alpha = 0$.

Der entscheidende Schritt in diesem Abschnitt ist nun, wie schon in der Einleitung angesprochen, das Eichfeld, das bis jetzt „zusätzlich“ zur Raumzeit existiert hat, mit der Raumzeit zu verknüpfen. Dafür verlassen wir kurz das Faserbündel-Bild und betrachten in einem (globalen) Minkowski-Raum folgendes exemplarische Wirkungsintergral:

$$S = \int \frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m^2\phi^2)\mathrm{d}^4x \tag{5.10}$$

mit einem reellen Skalarfeld $\phi(x^\mu)$. Nun führen wir eine globale Translation im Ortsraum,

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu,$$

durch. Es gilt

$$\begin{aligned}\phi(x^\mu + \epsilon^\mu) &= \phi(x^\mu) + \epsilon^\nu \partial_\nu \phi(x^\mu) + \frac{1}{2}\epsilon^\nu \epsilon^\rho \partial_\nu \partial_\rho \phi(x^\mu) + \dots \\ &= \exp(\epsilon^\nu \partial_\nu)\phi(x^\mu);\end{aligned} \tag{5.11}$$

die ∂_ν erzeugen also die transferierten Felder. Wir wollen deswegen die Generatoren der Translationsgruppe T_α mit den ∂_ν identifizieren.

Macht man aus der globalen Transformation eine lokale, so sind die partiellen Ableitungen ∂_μ mittels minimaler Substitution durch die kovarianten Ableitungen zu ersetzen, sodass das Wirkungsintegral invariant bleibt. Das passiert, wenn wir die Transformation

$$\partial_\mu \mapsto \partial_a = e_a{}^\mu \partial_\mu$$

durchführen; der Integrand behält dann seine Gestalt. Wir identifizieren $e_a{}^\mu \partial_\mu$ mit der kovarianten Ableitung

$$\delta_a^\mu \partial_\mu + A_a{}^\alpha T_\alpha = (\delta_a^\mu + A_a{}^\alpha \delta_\alpha^\mu)\partial_\mu.$$

Damit ergibt sich

$$e_a{}^\mu = \delta_a^\mu + A_a{}^\alpha \delta_\alpha^\mu. \tag{5.12}$$

Setzt man dies nun in Gleichung (5.9) ein, führt das unter Verwendung von (5.5) auf einen sehr einfachen Zusammenhang zwischen der Feldstärke und den $c_{ab}{}^c$,

$$\begin{aligned}F_{ab}{}^\alpha &:= F^\alpha(\hat{e}_a, \hat{e}_b) \\ &= \hat{e}_a[A_b{}^\alpha] - \hat{e}_b[A_a{}^\alpha] - c_{ab}{}^c A_c{}^\alpha \\ &= \hat{e}_a[e_b{}^\mu \delta_\mu^\alpha] - \hat{e}_b[e_a{}^\mu \delta_\mu^\alpha] - c_{ab}{}^c A_c{}^\alpha \\ &= (\hat{e}_a[e_b{}^\mu] - \hat{e}_b[e_a{}^\mu])\delta_\mu^\alpha - c_{ab}{}^c A_c{}^\alpha \\ &\overset{(5.5)}{=} c_{ab}{}^c e_c{}^\mu \delta_\mu^\alpha - c_{ab}{}^c A_c{}^\alpha \\ &= c_{ab}{}^c (e_c{}^\mu \delta_\mu^\alpha - A_c{}^\alpha) \\ &\overset{(5.12)}{=} c_{ab}{}^c \delta_c^\alpha.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Beziehung (5.12) hat weitreichende Konsequenzen, wie sich im Folgenden bei der Konstruktion der Lagrangedichte zeigen wird.

5.3 Lagrangedichte

Die Lagrangedichte in einer Eichfeldtheorie ist quadratisch in der Feldstärke. Das heißt, sie enthält einen Term

$$\sum_\alpha F_{\mu\nu}{}^\alpha F_{\rho\sigma}{}^\alpha g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \quad \text{bzw.} \quad \sum_\alpha F_{ab}{}^\alpha F_{cd}{}^\alpha \eta^{ac} \eta^{bd}.$$

Dies ist wegen der Antisymmetrie in den unteren Indizes der allgemeinste quadratische Term.

In Gleichung (5.13) wird aber in Folge der Identifikation (5.12), welche durch die Verwendung der Translations- als Eichgruppe ermöglicht wurde, der „Algebraindex“ α mit dem „Raumzeitindex“ c identifiziert. Dies erlaubt nun die Einführung weiterer quadratischer Terme, bei denen der obere Index auch mit einem der unteren kontrahiert wird.

Betrachtet man zwei Kopien des Feldstärketensors, ${F_{ab}}^{\alpha}$ und ${F_{cd}}^{\beta}$, so sieht man, dass es $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ Möglichkeiten gibt, durch Kontraktion von Indizes einen Skalar zu erhalten: a kann mit fünf Indizes (b, α, c, d, β) gepaart werden. Dann nimmt man einen noch freien Index. Es bleiben drei Möglichkeiten, diesen mit einem anderen zu kontrahieren. Ist auch das zweite Paar festgelegt, bleibt für das dritte nur mehr eine Wahl.

Diese 15 Möglichkeiten sollen der Reihe nach durchgegangen werden.

1. Kontrahiere a und c
   liefert ${F_{ab}}^{\alpha}{F_{cd}}^{\beta}\eta^{ac}\eta^{bd}\eta_{\alpha\beta}$, ${F_{ab}}^{\alpha}{F_{cd}}^{\beta}\eta^{ac}\delta^b_\beta\delta^d_\alpha$ und ${F_{ab}}^{\alpha}{F_{cd}}^{\beta}\eta^{ac}\delta^b_\alpha\delta^d_\beta$.

2. Kontrahiere a und d
   Da F antisymmetrisch in c und d ist, erhält man die gleichen Terme wie oben mit umgekehrtem Vorzeichen.

3. Kontrahiere a und β
   liefert ${F_{ab}}^{\alpha}{F_{cd}}^{\beta}\delta^a_\beta\delta^b_\alpha\eta^{cd} = 0$, ${F_{ab}}^{\alpha}{F_{cd}}^{\beta}\delta^a_\beta\eta^{bc}\delta^d_\alpha = -{F_{ab}}^{\alpha}{F_{cd}}^{\beta}\eta^{ac}\delta^b_\beta\delta^d_\alpha$ (a und b vertauscht) und ${F_{ab}}^{\alpha}{F_{cd}}^{\beta}\delta^a_\beta\eta^{bd}\delta^c_\alpha = -{F_{ab}}^{\alpha}{F_{cd}}^{\beta}\eta^{ac}\delta^b_\beta\delta^d_\alpha$ (c und d vertauscht). Wir bekommen im Vergleich zum Punkt 1 keine neuen Terme.

4. Kontrahiere a und b
   Alle Terme verschwinden wegen der Antisymmetrie.

5. Kontrahiere a und α
   liefert ${F_{ab}}^{\alpha}{F_{cd}}^{\beta}\delta^a_\alpha\delta^b_\beta\eta^{cd} = 0$, ${F_{ab}}^{\alpha}{F_{cd}}^{\beta}\delta^a_\alpha\eta^{bc}\delta^d_\beta = -{F_{ab}}^{\alpha}{F_{cd}}^{\beta}\eta^{ac}\delta^b_\alpha\delta^d_\beta$ (a und b vertauscht) und ${F_{ab}}^{\alpha}{F_{cd}}^{\beta}\delta^a_\alpha\eta^{bd}\delta^c_\beta = -{F_{ab}}^{\alpha}{F_{cd}}^{\beta}\eta^{ac}\delta^b_\alpha\delta^d_\beta$ (c und d vertauscht). Wieder keine neuen Terme.

Die allgemeinste quadratische Lagrangedichte ist also eine Linearkombination der in Punkt 1 angeführten Terme,

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\,{F_{ab}}^{\alpha}{F_{cd}}^{\beta}(A_1\eta^{ac}\eta^{bd}\eta_{\alpha\beta} + A_2\eta^{ac}\delta^b_\beta\delta^d_\alpha + A_3\eta^{ac}\delta^b_\alpha\delta^d_\beta), \tag{5.14}$$

mit

$$\sqrt{-g} := \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} = \sqrt{-\det(e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab})} = |\det(e^a{}_\mu)|$$

und Konstanten A_1, A_2 und A_3. Ersetzt man nun die F durch die c (siehe Gleichung (5.13)), erhält man schlussendlich

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(A_1 c_{abc}c^{abc} + A_2 c_{abc}c^{acb} + A_3 {c_{ab}}^b {c^{ac}}_c). \tag{5.15}$$

Eine ortsabhängige Lorentz-Transformation des Vierbeins sollte die Lagrangedichte nicht beeinflussen. Wir führen eine infinitesimale Lorentz-Transformation durch,

$$e_a{}^\mu \mapsto (\delta_a^b + \omega_a{}^b) e_b{}^\mu, \tag{5.16}$$

wobei $\omega_{ba} = -\omega_{ab}$. Damit kann man $c_{ab}{}^c$ entwickeln,

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{ab}{}^c &= ((\delta_a^d + \omega_a{}^d)\hat{e}_d[(\delta_b^e + \omega_b{}^e)e_e{}^\mu] - (\delta_b^d + \omega_b{}^d)\hat{e}_d[(\delta_a^e + \omega_a{}^e)e_e{}^\mu])\times \\
&\quad \times (\delta_f^c - \omega^c{}_f)e^f{}_\mu \\
&= c_{ab}{}^c + (\omega_a{}^d \hat{e}_d[e_b{}^\mu] + \hat{e}_a[\omega_b{}^e e_e{}^\mu] - \omega_b{}^d \hat{e}_d[e_a{}^\mu] - \hat{e}_b[\omega_a{}^e e_e{}^\mu])e^c{}_\mu - \\
&\quad - c_{ab}{}^f \omega^c{}_f + \mathcal{O}(\omega^2) \\
&= c_{ab}{}^c + (\omega_a{}^d \hat{e}_d[e_b{}^\mu] + \hat{e}_a[\omega_b{}^e]e_e{}^\mu + \omega_b{}^e \hat{e}_a[e_e{}^\mu] - \\
&\quad - \omega_b{}^d \hat{e}_d[e_a{}^\mu] - \hat{e}_b[\omega_a{}^e]e_e{}^\mu - \omega_a{}^e \hat{e}_b[e_e{}^\mu])e^c{}_\mu - c_{ab}{}^f \omega^c{}_f + \mathcal{O}(\omega^2) \\
&= c_{ab}{}^c + \omega_a{}^d \underbrace{(\hat{e}_d[e_b{}^\mu] - \hat{e}_b[e_d{}^\mu])e^c{}_\mu}_{c_{db}{}^c} + \omega_b{}^d \underbrace{(\hat{e}_a[e_d{}^\mu] - \hat{e}_d[e_a{}^\mu])e^c{}_\mu}_{c_{ad}{}^c} - \\
&\quad - c_{ab}{}^f \omega^c{}_f + (\hat{e}_a[\omega_b{}^e] - \hat{e}_b[\omega_a{}^e]) \underbrace{e_e{}^\mu e^c{}_\mu}_{\delta_e^c} + \mathcal{O}(\omega^2) \\
&= c_{ab}{}^c + \underbrace{\omega_a{}^d c_{db}{}^c + \omega_b{}^d c_{ad}{}^c - \omega^c{}_d c_{ab}{}^d + \hat{e}_a[\omega_b{}^c] - \hat{e}_b[\omega_a{}^c]}_{\delta c_{ab}{}^c} + \mathcal{O}(\omega^2).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Auch die Lagrangedichte (5.15) lässt sich entwickeln. Da wir eine Lorentz-Transformation durchführen, ändert sich $\sqrt{-g}$ nicht.

$$\delta\mathcal{L} = \sqrt{-g}(2A_1 c_{abc}\delta c^{abc} + 2A_2 c_{abc}\delta c^{acb} + 2A_3 c_{ab}{}^b \delta c^{ac}{}_c) \tag{5.18}$$

Beim Einsetzen von $\delta c_{ab}{}^c$ aus (5.17) sieht man, dass alle Terme der Form ωc wegfallen, da z. B. (die Summenkonvention macht an dieser Stelle eine kurze Pause, d. h. wir betrachten konkrete Indizes $a, b, c, \ldots$)

$$c_{ab}{}^c \omega^{ad} c_{de}{}^f \eta^{be} \eta_{cf} = -c_{ab}{}^c \omega^{bd} c_{de}{}^f \eta^{be} \eta_{cf}. \tag{5.19}$$

Für jede Auswahl von Indizes ist also auch der negative Term in der Summe (5.18) enthalten. Dies ist eine Konsequenz der Antisymmetrie der ω_{ab}.

In den $\delta c_{ab}{}^c$ überleben also nur die beiden Ableitungen von ω.

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \sqrt{-g}\{2A_1 c^{abc}(\hat{e}_a[\omega_{bc}] - \hat{e}_b[\omega_{ac}]) + 2A_2 c^{abc}(\hat{e}_a[\omega_{bc}] - \hat{e}_b[\omega_{ab}]) + \\
&\quad + 2A_3 c^{ab}{}_b(\hat{e}_a[\underbrace{\omega_c{}^c}_{0}] - \hat{e}_c[\omega_a{}^c])\} \\
&= \sqrt{-g}\{(4A_1 - 2A_2)c^{abc}\hat{e}_a[\omega_{bc}] - 2A_2 c^{abc}\hat{e}_c[\omega_{ab}] + \\
&\quad + 2A_3 c^{ab}{}_b \hat{e}_c[\omega^c{}_a]\},
\end{aligned} \tag{5.20}$$

da $c_{ab}{}^{c}$ und ω_{ab} antisymmetrisch in a und b sind, d. h.

$$\begin{aligned} -c^{abc}\hat{e}_b[\omega_{ac}] &= c^{abc}\hat{e}_a[\omega_{bc}] \\ -c^{ab}{}_b\hat{e}_c[\omega_a{}^c] &= c^{ab}{}_b\hat{e}_c[\omega^c{}_a]. \end{aligned}$$

Damit das Wirkungsfunktional invariant unter den Lorentz-Transformationen bleibt, müssen A_1, A_2 und A_3 so gewählt werden, dass $\delta\mathcal{L}$ Null wird oder sich zumindest als Divergenz eines Ausdrucks darstellen lässt. Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}\, c_{ab}{}^{b}\hat{e}_c[\omega^{ca}] &= \sqrt{-g}(\hat{e}_a[e_b{}^{\mu}] - \hat{e}_b[e_a{}^{\mu}])e^{b}{}_{\mu}\hat{e}_c[\omega^{ca}] \\ &= \sqrt{-g}\,\hat{e}_a[e_b{}^{\mu}]e^{b}{}_{\mu}\hat{e}_c[\omega^{ca}] - \sqrt{-g}\,\hat{e}_b[e_a{}^{\mu}]e^{b}{}_{\mu}\hat{e}_c[\omega^{ca}] \\ &= \sqrt{-g}\,\underbrace{\hat{e}_a[\overbrace{e_b{}^{\mu}e^{b}{}_{\mu}}^{\text{konst.}}]}_{0}\hat{e}_c[\omega^{ca}] - \sqrt{-g}\,e_b{}^{\mu}\hat{e}_a[e^{b}{}_{\mu}]\hat{e}_c[\omega^{ca}] - \\ &\quad - \sqrt{-g}\,\underbrace{e^{b}{}_{\mu}\hat{e}_b}_{\partial_\mu}[e_a{}^{\mu}]\hat{e}_c[\omega^{ca}] \\ &= -\hat{e}_a[\sqrt{-g}]\hat{e}_c[\omega^{ca}] - \sqrt{-g}\,\partial_\mu e_a{}^{\mu}\hat{e}_c[\omega^{ca}]. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen der (hier nicht bewiesenen) Formel[2]

$$\frac{\mathrm{d}(\det A(t))}{\mathrm{d}t} = \det(A(t))\,\mathrm{tr}\left(A^{-1}(t)\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\right), \tag{5.22}$$

wobei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrel{\widehat{=}} \hat{e}_a$ und $A(t) \mathrel{\widehat{=}} e^{b}{}_{\mu}$.

[2] Dies ist ein Spezialfall (für invertierbare Matrixfelder) der in der englischsprachigen Literatur als „Jacobi's formula“ bekannten Formel.

Weiters ist wegen der Antisymmetrie von ω^{ab}

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}c_{ab}{}^{c}\hat{e}_c[\omega^{ab}] &= \frac{1}{2}(\hat{e}_a[e_b{}^{\mu}] - \hat{e}_b[e_a{}^{\mu}])e^{c}{}_{\mu}\hat{e}_c[\omega^{ab}] \\ &= \hat{e}_a[e_b{}^{\mu}]e^{c}{}_{\mu}\hat{e}_c[\omega^{ab}] \\ &= \hat{e}_a[e_b{}^{\mu}]\partial_\mu\omega^{ab}, \end{aligned} \tag{5.23}$$

was mit

$$\begin{aligned} \partial_\mu(e_a{}^{\mu}\sqrt{-g}\,\hat{e}_c[\omega^{ca}]) &= \partial_\mu e_a{}^{\mu}\sqrt{-g}\,\hat{e}_c[\omega^{ca}] + \overbrace{e_a{}^{\mu}\partial_\mu}^{\hat{e}_a}\sqrt{-g}\,\hat{e}_c[\omega^{ca}]) + \\ &\quad + \underbrace{\sqrt{-g}\,e_a{}^{\mu}\partial_\mu e_c{}^{\nu}\partial_\nu\omega^{ca}}_{-\sqrt{-g}\hat{e}_a[e_c{}^{\nu}]\partial_\nu\omega^{ac}} + \sqrt{-g}\,\underbrace{e_a{}^{\mu}e_c{}^{\nu}\partial_\mu\partial_\nu\omega^{ca}}_{0} \\ &= -\sqrt{-g}\big(c_{ab}{}^{b}\hat{e}_c[\omega^{ca}] + \frac{1}{2}c_{ab}{}^{c}\hat{e}_c[\omega^{ab}]\big) \end{aligned} \tag{5.24}$$

für die Variation der Lagrangedichte (5.20) Folgendes ergibt:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \sqrt{-g}\{(4A_1 - 2A_2)c^{abc}\hat{e}_a[\omega_{bc}] - 2A_2c^{abc}\hat{e}_c[\omega_{ab}]\} - \\ &\quad - 2A_3\partial_\mu(e_a{}^{\mu}\sqrt{-g}\,\hat{e}_c[\omega^{ac}]) - A_3c_{ab}{}^{c}\hat{e}_c[\omega^{ab}] \\ &= \sqrt{-g}\{(4A_1 - 2A_2)c^{abc}\hat{e}_a[\omega_{bc}] - (2A_2 + A_3)c^{abc}\hat{e}_c[\omega_{ab}]\} \\ &\quad - \partial_\mu(2A_3e_a{}^{\mu}\sqrt{-g}\,\hat{e}_c[\omega^{ac}]). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Wählt man $A_2 = 2A_1$ und $A_3 = -2A_2 = -4A_1$, so bleibt nur mehr der Divergenzterm übrig und das Wirkungsintegral damit tatsächlich unverändert: $\delta S = \int \delta\mathcal{L}\, \mathrm{d}^4x = 0$.

Damit lautet die Lorentz-invariante Wirkung unserer Eichtheorie der Gravitation bei der Wahl von $A_3 = 1$

$$S = \int \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} c_{abc} c^{abc} - \frac{1}{2} c_{abc} c^{acb} + c_{ab}{}^{b} c^{ac}{}_{c} \right) \mathrm{d}^4x. \tag{5.26}$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass sich in der Literatur durchgängig die Wahl $A_3 = -1$ findet. Für unsere Zwecke macht dies keinen Unterschied, da die mit einer Konstanten (hier -1) multiplizierte Lagrangedichte die gleichen Euler-Lagrange-Gleichungen liefert. Die unkonventionelle Wahl von A_3 geschieht im Hinblick auf das nächste Kapitel.

6 Vergleich der Eichtheorie mit der allgemeinen Relativitätstheorie

Im vorigen Kapitel wurde begründet, warum eine Eichfeldtheorie der Gravitation die Translationsgruppe als Eichgruppe haben sollte und es wurde eine entsprechende Theorie aufgestellt.

Jetzt stellt sich natürlich die Frage, ob und wie sich diese mit der allgemein akzeptierten Beschreibung der Gravitation, der allgemeinen Relativitätstheorie, in Beziehung setzen lässt.

In diesem Kapitel soll daher die durch die Lagrangedichte der Eichtheorie induzierte Wirkung mit der Einstein-Hilbert-Wirkung der allgemeinen Relativitätstheorie verglichen werden. Die Einstein-Hilbert-Wirkung lautet

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int R\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \tag{6.1}$$

G ist die Gravitationskonstante und R der Ricci-Skalar, siehe Gleichung (6.14).

Dieses Vorhaben führt zur sogenannten *teleparallelen Beschreibung der Gravitation*. Der Inhalt dieses Kapitel basiert vor allem auf Resultaten aus [Bla02], [AP04] und [Bel08].

6.1 Noch mehr Mathematik

Die in Kapitel 5 eingeführten Begriffe *Rahmen* (siehe 5.1) und *Metrik* (siehe 5.2) werden im Folgenden wichtige Rollen spielen. Zur Erinnerung: Ein Rahmen ist eine Familie von Vektorfeldern, die in jedem Punkt eine Basis bilden. Eine Metrik ist eine symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearform.

Ein weiteres wichtiges Konzept ist das des *Zusammenhangs*[1].

6.1: Affiner Zusammenhang
Eine Abbildung

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM) : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

mit den Eigenschaften

1. *linear im „unteren“ Argument:* $\nabla_{fX+Y} Z = f\nabla_X Z + \nabla_Y Z$ *mit* $f \in C^\infty(M)$
2. *linear im „oberen“ Argument:* $\nabla_X(aY + Z) = a\nabla_X Y + \nabla_X Z$ *mit* $a \in \mathbb{R}$

[1] Dieser Zusammenhang auf dem Tangentialbündel sollte nicht mit dem schon früher erwähnten Zusammenhang auf dem Hauptfaserbündel verwechselt werden. Die beiden Zusammenhangsbegriffe stehen jedoch in einer Beziehung zueinander. Das Tangentialbündel kann als sogenanntes *assoziiertes Bündel* zum Rahmenbündel (dem Hauptfaserbündel mit der Gruppe GL) aufgefasst werden. Dann induziert jeder Zusammenhang auf dem Rahmenbündel einen Zusammenhang auf dem Tangentialbündel. Mehr dazu findet man z. B. in [Nak03].

3. erfüllt die Produktregel $\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$ *mit* $f \in C^\infty(M)$

heißt affiner Zusammenhang *auf* TM*.*

Die „Komponenten“ eines Zusammenhangs bezüglich eines Rahmens X_i ergeben sich aus seiner Wirkung auf die X_i,

$$\nabla_i X_j := \nabla_{X_i} X_j =: \Gamma^k{}_{ij} X_k. \tag{6.2}$$

Die Γ heißen *Zusammenhangskoeffizienten*. Wegen 6.1 Punkt 3 erhält man für ein Vektorfeld $Y = Y^k X_k$

$$\nabla_i Y = (X_i[Y^k] + Y^j \Gamma^k{}_{ij}) X_k. \tag{6.3}$$

Zusammenhänge und Metriken sind zwei voneinander unabhängige Strukturen. Eine Einschränkung ergibt sich, wenn wir verlangen, dass ein Zusammenhang *kompatibel* mit einer Metrik ist.

6.2: Metrik-Kompatibilität
Sei g *eine pseudo-riemannsche Metrik und* ∇ *ein affiner Zusammenhang.*
∇ *heißt* kompatibel mit g *oder* metrisch*, falls gilt:*

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Nun können wir die beiden wichtigsten mathematischen Begriffe dieses Kapitels einführen.

6.3: Torsion
Der Torsionstensor T *ist definiert als*

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Beweis der Tensoreigenschaft. Seien $f, g \in C^\infty(M)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(fX, gY) &= \nabla_{fX}(gY) - \nabla_{gY}(fX) - [fX, gY] \\ &= f(X[g]Y + g\nabla_X Y) - g(Y[f]X + f\nabla_Y X) \\ &\quad - (fX[gY] - gY[fX]) \\ &= fg(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]) \\ &= fg\, T(X,Y). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Offensichtlich ist $T(X+Y,Z) = T(X,Z) + T(Y,Z)$ und $T(X,Y+Z) = T(X,Y) + T(X,Z)$, also ist T linear in jedem Argument.

Insbesondere können f und g Koeffizientenfunktionen sein, woraus

$$T(f^i X_i, g^j Y_j) = f^i g^j\, T(X_i, Y_j).$$

folgt. □

Die Komponenten des Torsionstensor bezüglich eines Rahmens X_i lassen sich mit Hilfe der Zusammenhangskoeffizienten ausdrücken,

$$T_{ij}{}^k X_k := T(X_i, X_j) = (\Gamma^k{}_{ij} - \Gamma^k{}_{ji} - d_{ij}{}^k) X_k, \tag{6.5}$$

mit

$$[X_i, X_j] =: d_{ij}{}^k X_k.$$

6.4: Krümmung
Als Krümmungstensor R *bezeichnet man*

$$R(X,Y)Z := (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z.$$

Beweis der Tensoreigenschaft. Der Beweis funktioniert analog zu dem für den Torsionstensor.

$$\begin{aligned}
R(fX, gY)(hZ) &= (f\nabla_X(g\nabla_Y) - g\nabla_Y(f\nabla_X) - \\
&\quad - \nabla_{fX[g]Y - gY[f]X + fg[X,Y]})(hZ) \\
&= (f\nabla_X(g\nabla_Y) - g\nabla_Y(f\nabla_X) - \\
&\quad - fX[g]\nabla_Y + gY[f]\nabla_X - fg\nabla_{[X,Y]})(hZ) \\
&= fg\nabla_X\nabla_Y(hZ) - gf\nabla_Y\nabla_X(hZ) - fg\nabla_{[X,Y]}(hZ) \\
&= fg(\nabla_X(Y[h]Z + h\nabla_Y Z) - \nabla_Y(X[h]Z + h\nabla_X Z) - \\
&\quad - [X,Y][h]Z - h\nabla_{[X,Y]}Z) \\
&= fg(X[Y[h]]Z + X[h]\nabla_Y Z) + h\nabla_X\nabla_Y Z - \\
&\quad - Y[X[h]]Z - h\nabla_Y\nabla_X Z - [X,Y][h]Z - \\
&\quad - h\nabla_{[X,Y]}Z) \\
&= fgh(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z \\
&= fgh\, R(X,Y)Z
\end{aligned} \tag{6.6}$$

□

Auch der Krümmungstensor kann bezüglich eines Rahmens X_i dargestellt werden (man beachte dabei die Stellung der Indizes),

$$\begin{aligned}
R^l{}_{ijk} X_l &:= R(X_j, X_k)X_i = \nabla_{X_j}\nabla_{X_k}X_i - \nabla_{X_k}\nabla_{X_j}X_i - \nabla_{(d_{jk}{}^m X_m)}X_i \\
&= \nabla_{X_j}(\Gamma^l{}_{ki}X_l) - \nabla_{X_k}(\Gamma^l{}_{ji}X_l) - d_{jk}{}^m\Gamma^l{}_{mi}X_l \\
&= X_j[\Gamma^l{}_{ki}]X_l + \Gamma^m{}_{ki}\Gamma^l{}_{jm}X_l - X_k[\Gamma^l{}_{ji}]X_l - \Gamma^m{}_{ji}\Gamma^l{}_{km}X_l - \\
&\quad - d_{jk}{}^m\Gamma^l{}_{mi}X_l.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Es sei angemerkt, dass für die Koordinatenbasis $X_i = \partial_i$ der letzte Summand sowohl in der Definition des Krümmungstensors 6.4 als auch in der letzten Zeile

von (6.7) verschwindet und deshalb auch in der Literatur oft nicht vorkommt. Ohne diesen Term ist R aber für einen allgemeinen, nicht-kommutierenden Rahmen kein Tensor, wie man im obigen Beweis (6.6) sehen kann.

6.5: Levi-Civitá-Zusammenhang
Auf einer pseudo-riemannschen Mannigfaltigkeit existiert genau ein metrischer Zusammenhang, dessen Torsion verschwindet. Dieser heißt Levi-Civitá-Zusammenhang *und wird (in dieser Arbeit) mit $\hat{\nabla}$ notiert.*

Beweis. Der Beweis ist sehr einfach, erfordert aber einiges an Rechenenarbeit. Aus diesem Grund wird er hier ausgelassen. Der interessierte Leser findet ihn zum Beispiel bei [Kü10] im Anschluss an Satz 5.16. □

6.6: Weitzenböck-Zusammenhang
Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Bilden die Vektorfelder X_i einen Rahmen, dann ist der Weitzenböck-Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ bzgl. X_i *durch folgende Wirkung auf die X_i gegeben:*

$$\tilde{\nabla}_{X_i} X_j = 0 \quad \forall i, j.$$

Es verschwinden also die Zusammenhangskoeffizienten Γ bezüglich der X_i. Mit dieser Definition ist auch die Wirkung von $\tilde{\nabla}$ für beliebige Vektorfelder X, Y gegeben. Da die X_i eine Basis abgeben, gilt

$$\begin{aligned} Y &= a^i X_i \quad \text{und} \\ Z &= b^i X_i \end{aligned}$$

mit passenden $a^i, b^i \in C^\infty(M)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_Y Z &= \tilde{\nabla}_Y (b^j X_j) \\ &= Y[b^j] X_j + a^i b^j \underbrace{\tilde{\nabla}_{X_i} X_j}_{0} \end{aligned} \tag{6.8}$$

wegen der Produktregel für den Zusammenhang. Der Weitzenböck-Zusammenhang wirkt also wie die gewöhnliche Richtungsableitung im flachen Raum, nämlich nur auf die Koordinaten des Vektors.

Per definitionem ist der Levi-Civitá-Zusammenhang torsionsfrei. Für den Weitzenböck-Zusammenhang verschwindet hingegen die Krümmung. Um das zu sehen betrachten wir die Wirkung des Tensors auf die Elemente des Rahmens X_i,

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X_i, X_j) X_k &= \tilde{\nabla}_{X_i} \tilde{\nabla}_{X_j} X_k - \tilde{\nabla}_{X_j} \tilde{\nabla}_{X_i} X_k - \tilde{\nabla}_{[X_i, X_j]} X_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden verschwinden direkt wegen der Definition von $\tilde{\nabla}$. Weiters ist der Kommutator zweier Vektoren wieder ein Vektor, es gilt also $[X_i, X_j] = d_{ij}{}^k X_k$ mit geeigneten $d_{ij}{}^k$. Somit ist wegen der Linearität (im „unteren“ Argument) der dritte Summand ebenfalls gleich 0.

Auch die Torsion 6.3 nimmt für den Weitzenböck-Zusammenhang eine sehr einfache Form an,

$$\tilde{T}_{ij}{}^k X_k := \tilde{T}(X_i, X_j) = -[X_i, X_j] = -d_{ij}{}^k X_k. \tag{6.9}$$

Die eben eingeführten Konzepte wollen wir nun anwenden. In Kapitel 5 haben wir bereits einen speziellen Rahmen, nämlich das *Vierbein* $\hat{e}_a = e_a{}^\mu \partial_\mu$ kennen gelernt. Wir haben verlangt, dass die $\hat{e}_a$ orthonormal sind und so die Raumzeit-Mannigfaltigkeit M mit einer pseudo-riemannschen Metrik

$$g_{\mu\nu} := e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab} \tag{6.10}$$

versehen.

Seien $\hat{\nabla}$ der Levi-Civitá-Zusammenhang für dieses g und $\tilde{\nabla}$ der Weitzenböck-Zusammenhang bezüglich der $\hat{e}_a$. Wir legen noch zwei wichtige Eigenschaften dar.

- Die Koeffizienten des Weitzenböck-Zusammenhangs bezüglich der Koordinatenbasis ∂_μ lassen sich leicht angeben. Wir schreiben $\tilde{\nabla}_\mu := \tilde{\nabla}_{\partial_\mu}$ und $\tilde{\nabla}_a := \tilde{\nabla}_{\hat{e}_a}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\mu \partial_\nu = \tilde{\nabla}_{e^a{}_\mu \hat{e}_a}(e^b{}_\nu \hat{e}_b) &= \overbrace{e^a{}_\mu \hat{e}_a[e^b{}_\nu]}^{\partial_\mu e^b{}_\nu} \hat{e}_b + e^a{}_\mu e^b{}_\nu \overbrace{\tilde{\nabla}_a \hat{e}_b}^{0} \\ &= \underbrace{\partial_\mu e^b{}_\nu e_b{}^\rho}_{\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho} \partial_\rho. \end{aligned} \tag{6.11}$$

- $\hat{\nabla}$ ist nach Definition metrisch. Für drei Vektorfelder X, Y, Z mit

$$\begin{aligned} X &= x^a \hat{e}_a, \\ Y &= y^a \hat{e}_a \text{ und} \\ Z &= z^a \hat{e}_a, \end{aligned}$$

$x^a, y^a, z^a \in C^\infty(M)$, gilt

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \tilde{\nabla}_X Z) &\overset{(6.8)}{=} g(X[y^a]\hat{e}_a, z^b \hat{e}_b) + g(y^a \hat{e}_a, X[z^b]\hat{e}_b) \\ &= X[y^a] z^b \eta_{ab} + y^a X[z^b] \eta_{ab} \\ &= X[y^a z^b \eta_{ab}] \\ &= X[g(Z, Y)]. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit folgt aus der Bilinearität der Metrik und die dritte, da Vektoren die Leibnitzregel erfüllen müssen. $\tilde{\nabla}$ ist also auch ein metrischer Zusammenhang.

6.2 Teleparallele Gravitation

Wir wollen nun versuchen, den Krümmungstensor $\hat{R}$ (des Levi-Civitá-Zusammenhangs) durch Größen des Weitzenböck-Zusammenhangs auszudrücken, was uns zur schon eingangs erwähnten teleparallelen Formulierung der Gravitation führen wird. Dieser etwas esoterisch anmutende Name ist eine Konsequenz der Definition des Weitzenböck-Zusammenhangs. Betrachten wir im $\mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld u^i, so sind die Vektoren entlang einer Kurve γ genau dann parallel, wenn die Richtungsableitung des Feldes in Richtung der Kurve verschwindet. Ist v^i tangential an γ, so gilt also

$$v^i \partial_i u^j = 0.$$

In einem nicht flachen Raum tritt an Stelle der partiellen Ableitung der Zusammenhang. Man definiert als Parallelitätsbedingung

$$X^i \nabla_i Y = 0.$$

Dies führt auf eine Differentialgleichung, die im Allgemeinen nur lokal lösbar ist. Bezüglich des Weitzenböck-Zusammenhangs ist aber die Parallelitätsbedingung für Rahmenvektoren entlang ihrer Integralkurven überall erfüllt, weswegen man von Fern- oder Teleparallelismus spricht.

Wir bezeichnen mit $\hat{\Gamma}^c{}_{ab}$ die Zusammenhangskoeffizienten von $\hat{\nabla}$ bezüglich $\hat{e}_a$ (also: $\hat{\Gamma}^c{}_{ab}\hat{e}_c := \hat{\nabla}_a \hat{e}_b$)[2]. Damit lassen sich die Komponenten von $\hat{R}$ ausdrücken,

[2] Man nennt diese Γ die *Ricci-Rotationskoeffizienten.*

$$\begin{aligned}
\hat{R}^d{}_{abc}\hat{e}_d &:= \hat{R}(\hat{e}_b, \hat{e}_c)\hat{e}_a = \hat{\nabla}_b\hat{\nabla}_c\hat{e}_a - \hat{\nabla}_c\hat{\nabla}_b\hat{e}_a - \hat{\nabla}_{(-\tilde{T}_{ab}{}^e\hat{e}_e)}\hat{e}_a \\
&= \hat{\nabla}_b(\hat{\Gamma}^d{}_{ca}\hat{e}_d) - \hat{\nabla}_c(\hat{\Gamma}^d{}_{ba}\hat{e}_d) + \tilde{T}_{bc}{}^e\Gamma^d{}_{ea}\hat{e}_d \\
&= \hat{e}_b[\hat{\Gamma}^d{}_{ca}]\hat{e}_d + \hat{\Gamma}^e{}_{ca}\hat{\Gamma}^d{}_{be}\hat{e}_d - \hat{e}_c[\hat{\Gamma}^d{}_{ba}]\hat{e}_d - \hat{\Gamma}^e{}_{ba}\hat{\Gamma}^d{}_{ce}\hat{e}_d + \\
&\quad + \tilde{T}_{bc}{}^e\hat{\Gamma}^d{}_{ea}\hat{e}_d.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Der Ricci-Tensor ist die Kontraktion des Krümmungstensors,

$$\hat{R}_{ac} := \hat{R}^b{}_{abc} = \hat{e}_b[\hat{\Gamma}^b{}_{ca}] + \hat{\Gamma}^e{}_{ca}\hat{\Gamma}^b{}_{be} - \hat{e}_c[\hat{\Gamma}^b{}_{ba}] - \hat{\Gamma}^e{}_{ba}\hat{\Gamma}^b{}_{ce} + \tilde{T}_{bc}{}^e\hat{\Gamma}^b{}_{ea}. \tag{6.13}$$

Schließlich führt man noch den Krümmungsskalar R als

$$\hat{R} := \hat{R}_{ac}\eta^{ac} \tag{6.14}$$

ein.

Nach Gleichung (6.5), die die Komponenten des Torsionstensors für $\hat{\nabla}$ bezüglich $\hat{e}_a$ angibt, und wegen der Tatsache, dass die Torsion für $\hat{\nabla}$ verschwindet, gilt

$$\hat{\Gamma}^c{}_{ab} - \hat{\Gamma}^c{}_{ba} - c_{ab}{}^c = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\Gamma}^c{}_{ab} - \hat{\Gamma}^c{}_{ba} = c_{ab}{}^c = -\tilde{T}_{ab}{}^c, \tag{6.15}$$

wobei die letzte Gleichheit aus Gleichung (6.9) folgt.

Beide Zusammenhänge sind metrisch, sie erfüllen also insbesondere für die Basisvektoren $\hat{e}_a$ die Beziehung aus 6.2,

$$\hat{e}_a[g(\hat{e}_b,\hat{e}_c)] = g(\tilde{\nabla}_a\hat{e}_b,\hat{e}_c) + g(\hat{e}_b,\tilde{\nabla}_a\hat{e}_c) = 0 \qquad \text{(Weitzenböck)} \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}\hat{e}_a[g(\hat{e}_b,\hat{e}_c)] &= g(\hat{\nabla}_a\hat{e}_b,\hat{e}_c) + g(\hat{e}_b,\hat{\nabla}_a\hat{e}_c) \qquad \text{(Levi-Civitá)}\\ &= g(\hat{\Gamma}^d{}_{ab}\hat{e}_d,\hat{e}_c) + g(\hat{e}_b,\hat{\Gamma}^d{}_{ab}\hat{e}_d)\\ &= \hat{\Gamma}^d{}_{ab}\eta_{dc} + \hat{\Gamma}^d{}_{ac}\eta_{bd}.\end{aligned} \tag{6.17}$$

Da die linken Seiten von (6.16) und (6.17) mit $\hat{e}_a[g(\hat{e}_b,\hat{e}_c)]$ übereinstimmen, müssen auch die rechten Seiten gleich sein, d. h.

$$\hat{\Gamma}^d{}_{ab}\eta_{dc} + \hat{\Gamma}^d{}_{ac}\eta_{bd} = 0.$$

Mit der Definition

$$\hat{\Gamma}_{abc} := \hat{\Gamma}^d{}_{ab}\eta_{cd}$$

erhalten wir eine Antisymmetrie-Bedingung

$$\hat{\Gamma}_{bac} = -\hat{\Gamma}_{cab}. \tag{6.18}$$

Definiert man noch

$$\tilde{T}_{abc} := \tilde{T}_{ab}{}^d\eta_{dc},$$

so ergibt (6.15) multipliziert mit der Minkowski-Metrik η_{cd}

$$\tilde{T}_{abd} = \hat{\Gamma}_{dba} - \hat{\Gamma}_{dab}. \tag{6.19}$$

Die Verwendung der Antisymmetrie in erstem und letztem Index aus Gleichung (6.18) für den ersten Summanden liefert

$$\tilde{T}_{abd} = -\hat{\Gamma}_{abd} - \hat{\Gamma}_{dab}. \tag{6.20}$$

Durch zyklisches Vertauschen der Indizes in (6.19) erhält man

$$\tilde{T}_{bda} = \hat{\Gamma}_{adb} - \hat{\Gamma}_{abd}. \tag{6.21}$$

Nochmaliges zyklisches Vertauschen der Indizes und Anwendung von (6.18) auf beide Summanden ergibt

$$\tilde{T}_{dab} = \hat{\Gamma}_{bad} - \hat{\Gamma}_{bda} = -\hat{\Gamma}_{dab} + \hat{\Gamma}_{adb}. \tag{6.22}$$

Durch Berechnen von $\frac{1}{2}\left(-(6.20) - (6.21) + (6.22)\right)$ kommen wir schließlich zu

$$\frac{1}{2}(-\tilde{T}_{abd} - \tilde{T}_{bda} + \tilde{T}_{dab}) = \hat{\Gamma}_{abd}. \tag{6.23}$$

Dies lässt sich nun in den Ausdruck für den Krümmungsskalar (6.14) einsetzen,

$$\begin{aligned}\hat{R} = \hat{R}_{ac}\eta^{ac} &= \big(\hat{e}_b[\hat{\Gamma}_{dca}] + \hat{\Gamma}_{eca}\hat{\Gamma}_{bdf}\eta^{ef} - \hat{e}_c[\hat{\Gamma}_{bda}] - \hat{\Gamma}_{eba}\hat{\Gamma}_{dcf}\eta^{ef} + \\ &\quad + \tilde{T}_{bc}{}^{e}\hat{\Gamma}_{dea}\big)\eta^{ac}\eta^{bd} \\ &= \underbrace{(\hat{e}_b[\overbrace{\hat{\Gamma}_{dca}}^{-\hat{\Gamma}_{acd}}] - \hat{e}_c[\hat{\Gamma}_{bda}])\eta^{ac}\eta^{bd}}_{-2\hat{e}_c[\hat{\Gamma}^{b}{}_{ba}]\eta^{ac}} + \underbrace{\overbrace{\hat{\Gamma}_{eca}}^{-\hat{\Gamma}_{ace}}\,\hat{\Gamma}_{bdf}\eta^{ef}\eta^{ac}\eta^{bd}}_{-\hat{\Gamma}^{a}{}_{ae}\hat{\Gamma}^{b}{}_{bf}\eta^{ef}} - \\ &\quad - \hat{\Gamma}_{eba}\hat{\Gamma}_{dcf}\eta^{ef}\eta^{ac}\eta^{bd} + \tilde{T}_{bc}{}^{e}\hat{\Gamma}_{dea}\eta^{ac}\eta^{bd}.\end{aligned} \tag{6.24}$$

Für die Kontraktionen $\hat{\Gamma}^{b}{}_{bc}$ gilt

$$\hat{\Gamma}^{b}{}_{bc} = \hat{\Gamma}_{abc}\eta^{ab} = \frac{1}{2}(-\underbrace{\tilde{T}_{abc}\eta^{ab}}_{0} - \underbrace{\tilde{T}_{bca}}_{-\tilde{T}_{cba}}\eta^{ab} + \tilde{T}_{cab}\eta^{ab}) = \tilde{T}_{cb}{}^{b}. \tag{6.25}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\hat{R} &= -2\hat{e}_c[\tilde{T}_{ab}{}^{b}]\eta^{ac} - \tilde{T}_{ea}{}^{a}\tilde{T}^{eb}{}_{b} - \\ &\quad - \frac{1}{4}(-\tilde{T}_{eba} - \tilde{T}_{bae} + \tilde{T}_{aeb})(-\tilde{T}_{dcf} - \tilde{T}_{cfd} + \tilde{T}_{fdc})\eta^{ef}\eta^{ac}\eta^{bd} + \\ &\quad + \frac{1}{2}\tilde{T}_{bc}{}^{e}(-\tilde{T}_{dea} - \tilde{T}_{ead} + \tilde{T}_{ade})\eta^{ac}\eta^{bd} \\ &= -2\hat{e}_c[\tilde{T}_{ab}{}^{b}]\eta^{ac} - \tilde{T}_{ea}{}^{a}\tilde{T}^{eb}{}_{b} - \\ &\quad - \frac{1}{4}(\underbrace{\tilde{T}_{eba}\tilde{T}^{bae}}_{-\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{aeb}} + \underbrace{\tilde{T}_{eba}\tilde{T}^{aeb}}_{-\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{aeb}} - \tilde{T}_{eba}\tilde{T}^{eba} + \underbrace{\tilde{T}_{bae}\tilde{T}^{bae}}_{\tilde{T}_{eba}\tilde{T}^{eba}} + \underbrace{\tilde{T}_{bae}\tilde{T}^{aeb}}_{-\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{aeb}} - \\ &\quad - \underbrace{\tilde{T}_{bae}\tilde{T}^{eba}}_{-\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{aeb}} - \underbrace{\tilde{T}_{aeb}\tilde{T}^{bae}}_{-\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{aeb}} - \underbrace{\tilde{T}_{aeb}\tilde{T}^{aeb}}_{\tilde{T}_{eba}\tilde{T}^{eba}} + \underbrace{\tilde{T}_{aeb}\tilde{T}^{eba}}_{-\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{aeb}} + 2\underbrace{\tilde{T}_{bae}\tilde{T}^{bea}}_{\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{aeb}} + \\ &\quad + 2\underbrace{\tilde{T}_{bae}\tilde{T}^{eab}}_{\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{aeb}} - 2\underbrace{\tilde{T}_{bae}\tilde{T}^{abe}}_{-\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{abe}}) \\ &= -2\hat{e}_c[\tilde{T}_{ab}{}^{b}]\eta^{ac} - \tilde{T}_{ea}{}^{a}\tilde{T}^{eb}{}_{b} - \frac{1}{4}\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{abe} - \frac{1}{2}\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{aeb}.\end{aligned} \tag{6.26}$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Einstein-Hilbert-Wirkung (6.1) ein, so erhält man (unter Vernachlässigung der Konstanten)

$$\begin{aligned}S &= \int \hat{R}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \\ &= \int \sqrt{-g}(-2\hat{e}_c[\tilde{T}_{ab}{}^{b}]\eta^{ac} - \tilde{T}_{ea}{}^{a}\tilde{T}^{eb}{}_{b} - \frac{1}{4}\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{abe} - \\ &\quad - \frac{1}{2}\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{aeb})\,\mathrm{d}^4x.\end{aligned} \tag{6.27}$$

Der erste Summand $-2\sqrt{-g}\,\hat{e}_c[\tilde{T}_{ab}{}^{b}]\eta^{ac}$ kann noch umgeformt werden,

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\,\hat{e}_c[\tilde{T}_{ab}{}^{b}]\eta^{ac} &= \sqrt{-g}\,e_c{}^{\mu}\partial_\mu\tilde{T}_{ab}{}^{b}\eta^{ac}\\ &= \big(\partial_\mu(e_c{}^{\mu}\sqrt{-g}\,\tilde{T}_{ab}{}^{b}) - \partial_\mu e_c{}^{\mu}\sqrt{-g}\,\tilde{T}_{ab}{}^{b} -\\ &\quad - e_c{}^{\mu}\partial_\mu\sqrt{-g}\,\tilde{T}_{ab}{}^{b}\big)\eta^{ac}\\ &= \partial_\mu(\sqrt{-g}\,\tilde{T}^{\mu\nu}{}_{\nu}) - \partial_\mu e_c{}^{\mu}\sqrt{-g}\,\tilde{T}_{ab}{}^{b}\eta^{ac} -\\ &\quad - \hat{e}_c[\sqrt{-g}]\tilde{T}_{ab}{}^{b}\eta^{ac}.\end{aligned} \tag{6.28}$$

Dazu erinnern wir uns an Formel (5.22) für die Ableitung von Determinanten. Es gilt

$$\hat{e}_c[\sqrt{-g}]\tilde{T}_{ab}{}^{b} \overset{(5.22)}{=} \sqrt{-g}\,e_d{}^{\mu}\hat{e}_c[e^d{}_{\mu}]\tilde{T}_{ab}{}^{b}. \tag{6.29}$$

Auch Formeln (5.6) und (6.9) seien noch einmal in Erinnerung gerufen,

$$\begin{aligned}-\tilde{T}_{cd}{}^{d} \overset{(6.9)}{=} c_{cd}{}^{d} &= c_{cd}{}^{e}\delta^d_e\\ &\overset{(5.6)}{=} (\hat{e}_c[e_d{}^{\mu}] - \hat{e}_d[e_c{}^{\mu}])e^e{}_{\mu}\delta^d_e\\ &= \underbrace{e^d{}_{\mu}\hat{e}_c[e_d{}^{\mu}]}_{-e_d{}^{\mu}\hat{e}_c[e^d{}_{\mu}]} - \underbrace{e^d{}_{\mu}\hat{e}_d[e_c{}^{\mu}]}_{\partial_\mu e_c{}^{\mu}}.\end{aligned} \tag{6.30}$$

Vergleicht man (6.29) und (6.31), so sieht man, dass

$$\hat{e}_c[\sqrt{-g}]\tilde{T}_{ab}{}^{b} = \sqrt{-g}(\tilde{T}_{cd}{}^{d} - \partial_\mu e_c{}^{\mu})\tilde{T}_{ab}{}^{b}, \tag{6.31}$$

was in (6.28) eingesetzt

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\,\hat{e}_c[\tilde{T}_{ab}{}^{b}]\eta^{ac} &= \partial_\mu(\sqrt{-g}\,\tilde{T}^{\mu\nu}{}_{\nu}) - \partial_\mu e_c{}^{\mu}\sqrt{-g}\,\tilde{T}_{ab}{}^{b}\eta^{ac} +\\ &\quad + \sqrt{-g}\,\partial_\mu e_c{}^{\mu}\tilde{T}_{ab}{}^{b}\eta^{ac} - \sqrt{-g}\,\tilde{T}_{ad}{}^{d}\tilde{T}^{ab}{}_{b}\\ &= \partial_\mu(\sqrt{-g}\,\tilde{T}^{\mu\nu}{}_{\nu}) - \sqrt{-g}\,\tilde{T}_{ad}{}^{d}\tilde{T}^{ab}{}_{b}\end{aligned} \tag{6.32}$$

ergibt. Somit erhalten wir für die Einstein-Hilbert-Wirkung (6.27)

$$\begin{aligned}S &= \int -2\partial_\mu(\sqrt{-g}\,\tilde{T}^{\mu\nu}{}_{\nu}) + \sqrt{-g}(2\tilde{T}_{ad}{}^{d}\tilde{T}^{ab}{}_{b} - \tilde{T}_{ea}{}^{a}\tilde{T}^{eb}{}_{b} -\\ &\quad - \frac{1}{4}\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{abe} - \frac{1}{2}\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{aeb})\,\mathrm{d}^4x\\ &= \int -2\partial_\mu(\sqrt{-g}\,\tilde{T}^{\mu\nu}{}_{\nu}) + \sqrt{-g}(\tilde{T}_{ad}{}^{d}\tilde{T}^{ab}{}_{b} - \frac{1}{4}\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{abe} -\\ &\quad - \frac{1}{2}\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{aeb})\,\mathrm{d}^4x.\end{aligned} \tag{6.33}$$

Die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{tele}} := \sqrt{-g}(\frac{1}{4}\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{abe} + \frac{1}{2}\tilde{T}_{abe}\tilde{T}^{aeb} - \tilde{T}_{ad}{}^{d}\tilde{T}^{ab}{}_{b})\,\mathrm{d}^4x. \tag{6.34}$$

ist die teleparallele Lagrangedichte. Sie ist, wie wir gesehen haben, äquivalent zur Einstein-Hilbert-Dichte, da sich erstere von letzterer nur um einen Divergenzterm und den Faktor -1 unterscheidet.

Stattet man die Raumzeit mit einem Weitzenböck- anstatt eines Levi-Civitá-Zusammenhangs aus, lässt sich also die Gravitation äquivalent zur allgemeinen Relativitätstheorie beschreiben. Die Interpretation der Gleichungen ist aber eine andere. Krumme Teilchenbahnen kommen in der allgemeinen Relativitätstheorie dadurch zustande, dass keine Kraft auf die Teilchen wirkt und diese deshalb auf den geradest möglichen Bahnen durch die gekrümmte Raumzeit fliegen. In der teleparallelen Formulierung wirkt eine Kraft in der krümmungsfreien (aber nicht flachen) Raumzeit. Das Ergebnis ist das gleiche. Details dazu finden sich z. B. in [AP04].

Wendet man Identität (6.9), $\tilde{T}_{ab}{}^{c} = -c_{ab}{}^{c}$, auf Gleichung (6.33) an, so erhält man

$$\begin{aligned} S = \int & -2\partial_\mu(\sqrt{-g}\,\tilde{T}^{\mu\nu}{}_{\nu}) + \sqrt{-g}(c_{ad}{}^{d}c^{ab}{}_{b} - \frac{1}{4}c_{abe}c^{abe} - \\ & - \frac{1}{2}c_{abe}c^{aeb})\,\mathrm{d}^4x. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Die Dichte der Einstein-Hilbert-Wirkung unterscheidet sich also nur um einen Divergenzterm von der Lagrangedichte (5.26) der Eichtheorie der Gravition. Die Theorien sind äquivalent.

Nun sollte auch die Wahl von $A_3 = 1$ in Gleichung (5.26) verständlich sein.

7 Solitonen und Gravitation

Nachdem wir in den vorigen Kapiteln eine Eichtheorie der Gravitation kennen gelernt und diskutiert haben, wollen wir in diesem Kapitel das Solitonenmodell einbauen. Das geschieht in einem ersten Schritt, indem man die Lagrangedichte der Solitonen invariant unter Translationen macht. Dies führt zu einer Wechselwirkung zwischen Gravitation und Solitonen. Außerdem muss in der gesamten Lagrangedichte auch der Feldstärketerm der Gravitation, Gleichung (6.34), auftreten.

Ist die Lagrangedichte aufgestellt, so kann man daraus die Bewegungsgleichungen ableiten. Wir werden sehen, dass der Energie-Impuls-Tensor dabei eine wichtige Rolle spielt.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung und Berechnung des Energie-Impuls-Tensors der Gravitation wurde auf [AP04], [APV04] und [Mal94] zurückgegriffen.

7.1 Lagrangedichte

Die Lagrangedichte der Solitonen im flachen Minkowski-Raum $\mathbb{M}$ lautet, wie wir [BFK07, Gleichung (2)] entnehmen können,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{sol}}^{\mathbb{M}} &= -\frac{\alpha_{\text{f}}\hbar c}{4\pi}\left(\frac{1}{4}R_{\mu\nu}{}^{\alpha}R^{\mu\nu\,\alpha} + \Lambda(q_0)\right) \\ &= -\frac{\alpha_{\text{f}}\hbar c}{4\pi}\left(\frac{1}{4}R_{\mu\nu}{}^{\alpha}R_{\rho\sigma}{}^{\alpha}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \Lambda(q_0)\right),\end{aligned} \tag{7.1}$$

mit [Fab01, Gleichung (22)]

$$R_{\mu\nu}{}^{\alpha} = \partial_\mu\Gamma^{\alpha}{}_{\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\alpha}{}_{\mu} - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\Gamma^{\beta}{}_{\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{\nu} \tag{7.2}$$

als Feldstärketensor eines Solitons. Die $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu}$ sind die Komponenten des Solitonenfeldes[1], siehe [Fab01]. Über doppelt vorkommende Indizes α, β, γ ist zu summieren.

[1] Nicht zu verwechseln mit den Zusammenhangskoeffizienten $\Gamma^{a}{}_{bc}$ eines Zusammenhangs des TM, die drei Indizes besitzen.

Wie wir bereits in Abschnitt 5.2 gesehen haben, wird eine Gleichung dieser Art invariant unter Translationen durch eine Transformation in Koordinaten bezüglich der Vierbeinfelder $\hat{e}_a$. Analog zu Gleichung (5.9) erhalten wir für die transformierte solitonische Feldstärke

$$R_{ab}{}^{\alpha} = \hat{e}_a[\Gamma^{\alpha}{}_{b}] - \hat{e}_b[\Gamma^{\alpha}{}_{a}] - c_{ab}{}^{c}\Gamma^{\alpha}{}_{c} - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\Gamma^{\beta}{}_{a}\Gamma^{\gamma}{}_{b}. \tag{7.3}$$

Diese lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} R_{ab}{}^{\alpha} &= e_a{}^{\mu}\partial_\mu(e_b{}^{\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu}) - e_b{}^{\nu}\partial_\nu(e_a{}^{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu}) - c_{ab}{}^{c}\Gamma^{\alpha}{}_{c} - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\Gamma^{\beta}{}_{a}\Gamma^{\gamma}{}_{b} \\ &= \overbrace{e_a{}^{\mu}\partial_\mu e_b{}^{\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu} - e_b{}^{\nu}\partial_\nu e_a{}^{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu}}^{c_{ab}{}^{c}\Gamma^{\alpha}{}_{c}} + e_b{}^{\nu}e_a{}^{\mu}\partial_\mu\Gamma^{\alpha}{}_{\nu} - e_a{}^{\mu}e_b{}^{\nu}\partial_\nu\Gamma^{\alpha}{}_{\mu} - \\ &\quad - c_{ab}{}^{c}\Gamma^{\alpha}{}_{c} - e_a{}^{\mu}e_b{}^{\nu}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\Gamma^{\beta}{}_{\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{\nu} \\ &= e_a{}^{\mu}e_b{}^{\nu}R_{\mu\nu}{}^{\alpha}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Weiters muss im Wirkungsintegral auch das im Allgemeinen von 1 verschiedene Volumselement $\sqrt{-g}$ berücksichtigt werden. Die solitonische Lagrangedichte ist dann

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{sol}} &= -\frac{\alpha_{\text{f}}\hbar c}{4\pi}\left(\frac{1}{4}R_{\mu\nu}{}^{\alpha}e_a{}^{\mu}e_b{}^{\nu}R_{\rho\sigma}{}^{\alpha}e_c{}^{\rho}e_d{}^{\sigma}\eta^{ac}\eta^{bd} + \Lambda(q_0)\right)\sqrt{-g} \\ &= -\frac{\alpha_{\text{f}}\hbar c}{4\pi}\left(\frac{1}{4}R_{\mu\nu}{}^{\alpha}R_{\rho\sigma}{}^{\alpha}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + \Lambda(q_0)\right)\sqrt{-g}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Das ergibt für die gesamte Dichte als Summe von Solitonen- und Gravitationsanteil

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{sol}} + \mathcal{L}_{\text{grav}} \\ &= -\sqrt{-g}\frac{\alpha_{\text{f}}\hbar c}{4\pi}\left(\frac{1}{4}R_{\mu\nu}{}^{\alpha}R_{\rho\sigma}{}^{\alpha}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + \Lambda(q_0)\right) - \\ &\quad - \sqrt{-g}\frac{c^4}{16\pi G}\left(\frac{1}{4}\tilde{T}_{abc}\tilde{T}^{abc} + \frac{1}{2}\tilde{T}_{abc}\tilde{T}^{acb} - \tilde{T}_{ab}{}^{b}\tilde{T}^{ac}{}_{c}\right). \end{aligned} \tag{7.6}$$

7.2 Bewegungsgleichungen

Im nächsten Schritt wollen wir die Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0 \tag{7.7}$$

bestimmen, wobei ϕ das Feld ist, für das die Bewegungsgleichungen ermittelt werden sollen. In unserem Fall sind es die Komponenten des Translationsfeldes A.

Wir schreiben zur Vereinfachung

$$A_a{}^{\mu} := A_a{}^{\alpha}\delta^{\mu}_{\alpha}. \tag{7.8}$$

Es müssen nun die verschiedenen Ableitungen nach $A_a{}^{\mu}$ berechnet werden. Wegen der Beziehung (5.12) zwischen dem Vierbeinfeld und dem Eichfeld, $e_a{}^{\rho} = \delta^{\rho}_{a} + A_a{}^{\rho}$, erhalten wir[2]

$$\frac{\partial e_b{}^{\nu}}{\partial A_a{}^{\rho}} = \frac{\partial}{\partial A_a{}^{\rho}}\left(\delta^{\nu}_{b} + A_b{}^{\nu}\right) = \delta^{a}_{b}\delta^{\nu}_{\rho}. \tag{7.9}$$

[2]Da auch $\frac{\partial e_b{}^{\nu}}{\partial e_a{}^{\rho}} = \delta^{a}_{b}\delta^{\nu}_{\rho}$, kann man genauso gut die Vierbeinfelder als „Freiheitsgrade“ der Lagrangedichte ansehen.

Für die Inversen ${e^b}_\nu$ der Vierbeinfelder ${e_b}^\nu$ gilt dann[3]

$$\frac{\partial {e^b}_\nu}{\partial {A_a}^\rho} = {e^b}_\sigma {e_c}^\sigma \frac{\partial {e^c}_\nu}{\partial {A_a}^\rho} = -{e^b}_\sigma \frac{\partial {e_c}^\sigma}{\partial {A_a}^\rho} e^c{}_\nu = -{e^b}_\sigma \delta^a_c \delta^\sigma_\rho e^c{}_\nu = -{e^a}_\nu {e^b}_\rho. \tag{7.10}$$

[3] Allgemein gilt für ein Matrixfeld M

$$\begin{aligned}\partial_\mu M^{-1} &= \\ &= M^{-1} M \partial_\mu M^{-1} \\ &= M^{-1}\partial_\mu (MM^{-1}) - \\ &\quad - M^{-1}\partial_\mu M M^{-1} \\ &= -M^{-1}\partial_\mu M M^{-1}.\end{aligned}$$

Damit lässt sich die Ableitung der Metrik $g_{\mu\nu}$ berechnen,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial {A_a}^\rho} &= \frac{\partial}{\partial {A_a}^\rho} {e^b}_\mu e^c{}_\nu \eta_{bc} \\ &= \frac{\partial {e^b}_\mu}{\partial {A_a}^\rho} e^c{}_\nu \eta_{bc} + {e^b}_\mu \frac{\partial {e^c}_\nu}{\partial {A_a}^\rho} \eta_{bc} \\ &= -{e^a}_\mu {e^b}_\rho e^c{}_\nu \eta_{bc} - {e^b}_\mu {e^a}_\nu e^c{}_\rho \eta_{bc} \\ &= -{e^a}_\mu g_{\nu\rho} - {e^a}_\nu g_{\mu\rho},\end{aligned} \tag{7.11}$$

und folglich auch die der inversen Metrik $g^{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial {A_a}^\rho} &= g^{\mu\tau} g_{\tau\sigma} \frac{\partial g^{\sigma\nu}}{\partial {A_a}^\rho} \\ &= -g^{\mu\tau} \frac{\partial g_{\tau\sigma}}{\partial {A_a}^\rho} g^{\sigma\nu} \\ &= g^{\mu\tau}({e^a}_\tau g_{\sigma\rho} + {e^a}_\sigma g_{\tau\rho}) g^{\sigma\nu} \\ &= g^{\mu\tau} {e^a}_\tau \delta^\nu_\rho + g^{\sigma\nu} {e^a}_\sigma \delta^\mu_\rho.\end{aligned} \tag{7.12}$$

Die Ableitung des Volumselements $\sqrt{-g} = \det({e^b}_\nu)$ wird mit Formel (5.22) zu

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial {A_a}^\rho} = \sqrt{-g}\, {e_b}^\nu \frac{\partial {e^b}_\nu}{\partial {A_a}^\rho} = -\sqrt{-g}\, \underbrace{{e_b}^\nu {e^a}_\nu}_{\delta^a_b} {e^b}_\rho = -\sqrt{-g}\, {e^a}_\rho. \tag{7.13}$$

Die $\tilde{T}_{bc}{}^d$ enthalten sowohl Faktoren der Form ${A_a}^\rho$ als auch solche der Form $\partial_\mu {A_a}^\rho$, wie man in Gleichung (5.6) erkennen kann,

$$\begin{aligned}-\tilde{T}_{bc}{}^d = c_{bc}{}^d &\overset{(5.6)}{=} (\hat{e}_b[{e_c}^\nu] - \hat{e}_c[{e_b}^\nu]) {e^d}_\nu \\ &= ({e_b}^\sigma \partial_\sigma {e_c}^\nu - {e_c}^\sigma \partial_\sigma {e_b}^\nu) {e^d}_\nu \\ &\overset{(5.12)}{=} ({e_b}^\sigma \partial_\sigma {A_c}^\nu - {e_c}^\sigma \partial_\sigma {A_b}^\nu) {e^d}_\nu,\end{aligned} \tag{7.14}$$

wobei die ${e_b}^\nu$ wegen (5.12) von $\partial_\mu {A_a}^\rho$ unabhängig sind.

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \tilde{T}_{bc}{}^d}{\partial {A_a}^\rho} = \frac{\partial {c_{bc}}^d}{\partial {A_a}^\rho} &= \frac{\partial}{\partial {A_a}^\rho}\left(e_b{}^\sigma \partial_\sigma {A_c}^\nu - e_c{}^\sigma \partial_\sigma {A_b}^\nu\right) {e^d}_\nu \\
&= \left(\frac{\partial e_b{}^\sigma}{\partial {A_a}^\rho}\partial_\sigma {A_c}^\nu - \frac{\partial e_c{}^\sigma}{\partial {A_a}^\rho}\partial_\sigma {A_b}^\nu\right) {e^d}_\nu + \\
&\quad + \left(e_b{}^\sigma \partial_\sigma {A_c}^\nu - e_c{}^\sigma \partial_\sigma {A_b}^\nu\right)\frac{\partial {e^d}_\nu}{\partial {A_a}^\rho} \\
&= (\delta^a_b \delta^\sigma_\rho \partial_\sigma {A_c}^\nu - \delta^a_c \delta^\sigma_\rho \partial_\sigma {A_b}^\nu){e^d}_\nu + \\
&\quad + \left(e_b{}^\sigma \partial_\sigma {A_c}^\nu - e_c{}^\sigma \partial_\sigma {A_b}^\nu\right)(-{e^a}_\nu {e^d}_\rho) \\
&= (\delta^a_b \partial_\rho {A_c}^\nu - \delta^a_c \partial_\rho {A_b}^\nu){e^d}_\nu - {c_{bc}}^a {e^d}_\rho \\
&= (\delta^a_b \partial_\rho {A_c}^\nu - \delta^a_c \partial_\rho {A_b}^\nu){e^d}_\nu + \tilde{T}_{bc}{}^a {e^d}_\rho
\end{aligned} \tag{7.15}$$

und

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \tilde{T}_{bc}{}^d}{\partial(\partial_\mu {A_a}^\rho)} = \frac{\partial {c_{bc}}^d}{\partial(\partial_\mu {A_a}^\rho)} &= \left(e_b{}^\sigma \delta^\mu_\sigma \delta^a_c \delta^\nu_\rho - e_c{}^\sigma \delta^\mu_\sigma \delta^a_b \delta^\nu_\rho\right){e^d}_\nu \\
&= (e_b{}^\mu \delta^a_c - e_c{}^\mu \delta^a_b){e^d}_\rho .
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Diese Beziehungen können nun zur Berechnung der Ableitungen der Lagrangedichte verwendet werden,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{grav}}}{\partial(\partial_\mu {A_a}^\rho)} = -\frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}\Bigg(&\frac{1}{2}\tilde{T}_{bcd}\frac{\partial \tilde{T}^{bcd}}{\partial(\partial_\mu {A_a}^\rho)} + \tilde{T}_{bcd}\frac{\partial \tilde{T}^{bdc}}{\partial(\partial_\mu {A_a}^\rho)} - \\
&-2\tilde{T}_{bc}{}^c \frac{\partial \tilde{T}^{bd}{}_d}{\partial(\partial_\mu {A_a}^\rho)}\Bigg).
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Für den ersten Summanden ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\tilde{T}_{bcd}\frac{\partial \tilde{T}^{bcd}}{\partial(\partial_\mu {A_a}^\rho)} &= -\frac{1}{2}\eta^{be}\eta^{cf}\eta_{dg}\tilde{T}_{ef}{}^g (e_b{}^\mu \delta^a_c - e_c{}^\mu \delta^a_b){e^d}_\rho \\
&= -\frac{1}{2}(\tilde{T}^{\mu a}{}_\rho - \tilde{T}^{a\mu}{}_\rho) \\
&= -\tilde{T}^{\mu a}{}_\rho .
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Für den zweiten gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{bcd}\frac{\partial \tilde{T}^{bdc}}{\partial(\partial_\mu {A_a}^\rho)} &= -\eta^{be}\delta^c_g \delta^f_d \tilde{T}_{ef}{}^g (e_b{}^\mu \delta^a_c - e_c{}^\mu \delta^a_b){e^d}_\rho \\
&= -\tilde{T}^\mu{}_\rho{}^a - \tilde{T}^a{}_\rho{}^\mu \\
&= -\tilde{T}^\mu{}_\rho{}^a + \tilde{T}_\rho{}^{a\mu},
\end{aligned} \tag{7.19}$$

und für den dritten

$$\begin{aligned} -2\tilde{T}_{bc}{}^{c}\frac{\partial\tilde{T}^{bd}{}_{d}}{\partial(\partial_\mu A_a{}^\rho)} &= 2\eta^{be}\delta^c_d\delta^f_g\tilde{T}_{ef}{}^{g}(e_b{}^\mu\delta^a_c - e_c{}^\mu\delta^a_b)e^d{}_\rho \\ &= -2(\tilde{T}^{af}{}_{f}\,\delta^\mu_\rho - \tilde{T}^{\mu f}{}_{f}\,e^a{}_\rho). \end{aligned} \tag{7.20}$$

Eine Vereinfachung ergibt sich, wenn man die Größe S einführt,

$$S^{bcd} := \frac{1}{4}(\tilde{T}^{bcd} + \tilde{T}^{dbc} + \tilde{T}^{dcb}) + \frac{1}{2}(\tilde{T}^{cg}{}_{g}\,\eta^{bd} - \tilde{T}^{dg}{}_{g}\,\eta^{bc}). \tag{7.21}$$

Das führt auf

$$\begin{aligned} S_\rho{}^{a\mu} &= S^{bad}\eta_{bf}e^f{}_\rho e_d{}^\mu \\ &= \frac{1}{4}(\tilde{T}_\rho{}^{a\mu} + \tilde{T}^\mu{}_\rho{}^{a} + \tilde{T}^{\mu a}{}_{\rho}) + \frac{1}{2}(\tilde{T}^{ag}{}_{g}\,\delta^\mu_\rho - \tilde{T}^{\mu g}{}_{g}\,e^a{}_\rho), \end{aligned} \tag{7.22}$$

was genau ein Viertel der negativen Summe der drei Terme (7.18), (7.19) und (7.20) ist. Es folgt also

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{grav}}}{\partial(\partial_\mu A_a{}^\rho)} = \frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}\,4S_\rho{}^{a\mu}. \tag{7.23}$$

Außerdem taucht S auch in der Lagrangedichte selbst auf,

$$\begin{aligned} S^{dbc}\tilde{T}_{bcd} = S^{bcd}\tilde{T}_{cdb} &= \frac{1}{4}(\tilde{T}^{bcd} + \tilde{T}^{dbc} + \tilde{T}^{dcb})\tilde{T}_{cdb} + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\tilde{T}^{cg}{}_{g}\,\eta^{bd} - \tilde{T}^{dg}{}_{g}\,\eta^{bc})\tilde{T}_{cdb} \\ &= \frac{1}{4}(-\tilde{T}^{cbd}\tilde{T}_{cdb} - \tilde{T}^{dbc}\tilde{T}_{dcb} - \tilde{T}^{cdb}\tilde{T}_{cdb}) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\tilde{T}^{cg}{}_{g}\,\tilde{T}_{cb}{}^{b} + \tilde{T}^{dg}{}_{g}\,\tilde{T}_{db}{}^{b}) \\ &= -\frac{1}{4}\tilde{T}^{cdb}\tilde{T}_{cdb} - \frac{1}{2}\tilde{T}^{cdb}\tilde{T}_{cbd} + \tilde{T}^{cg}{}_{g}\,\tilde{T}_{cb}{}^{b} \\ &= \frac{16\pi G}{c^4}\frac{1}{\sqrt{-g}}\mathcal{L}_{\text{grav}}. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Offensichtlich gilt

$$\frac{\partial}{\partial A_a{}^\rho}\left(S^{dbc}\tilde{T}_{bcd}\right) = 2S^{dbc}\frac{\partial\tilde{T}_{bcd}}{\partial A_a{}^\rho} \tag{7.25}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{grav}}}{\partial A_a{}^\rho} &= -\frac{c^4}{16\pi G}\left(\overbrace{\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial A_a{}^\rho}}^{-\sqrt{-g}\,e^a{}_\rho} S^{dbc}\tilde{T}_{bcd} + \sqrt{-g}\frac{\partial}{\partial A_a{}^\rho}\left(S^{dbc}\tilde{T}_{bcd}\right)\right) \\ &= -e^a{}_\rho\mathcal{L}_{\text{grav}} - \frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}\,2S^{dbc}\frac{\partial\tilde{T}_{bcd}}{\partial A_a{}^\rho}. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Unter Verwendung der Antisymmetrie von S in den letzten beiden Indizes

$$\begin{aligned} S^{bdc} &= \frac{1}{4}(\tilde{T}^{bdc} + \tilde{T}^{cbd} + \tilde{T}^{dcb}) + \frac{1}{2}(\tilde{T}^{dg}{}_{g}\,\eta^{bc} - \tilde{T}^{cg}{}_{g}\,\eta^{bd}) \\ &= \frac{1}{4}(-\tilde{T}^{dbc} - \tilde{T}^{bcd} - \tilde{T}^{dcb}) + \frac{1}{2}(-\tilde{T}^{cg}{}_{g}\,\eta^{bd} + \tilde{T}^{dg}{}_{g}\,\eta^{bc}) \\ &= -S^{bcd} \end{aligned} \tag{7.27}$$

und Gleichung (7.15) lässt sich der Term (7.25) berechnen,

$$\begin{aligned} 2S^{dbc}\frac{\partial\tilde{T}_{bcd}}{\partial A_a{}^{\rho}} &= -2S_d{}^{bc}\big((\delta^a_b\partial_\rho A_c{}^{\nu} - \delta^a_c\partial_\rho A_b{}^{\nu})e^d{}_{\nu} + \tilde{T}_{bc}{}^{a}e^d{}_{\rho}\big) \\ &= -2S_{\nu}{}^{ac}\partial_\rho A_c{}^{\nu} + 2S_{\nu}{}^{ba}\partial_\rho A_b{}^{\nu} - 2S_{\rho}{}^{bc}\tilde{T}_{bc}{}^{a} \\ &= -4S_{\nu}{}^{ac}\partial_\rho A_c{}^{\nu} - 2S_{\rho}{}^{bc}\tilde{T}_{bc}{}^{a}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Somit erhalten wir als Euler-Lagrange-Gleichungen für die Gravitation alleine, d. h. ohne Solitonen,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{grav}}}{\partial A_a{}^{\rho}} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{grav}}}{\partial(\partial_\mu A_a{}^{\rho})} \\ &= -e^a{}_{\rho}\mathcal{L}_{\text{grav}} + \frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}(4S_{\nu}{}^{ac}\partial_\rho A_c{}^{\nu} + 2S_{\rho}{}^{bc}\tilde{T}_{bc}{}^{a}) - \\ &\quad - \frac{c^4}{16\pi G}4\partial_\mu(\sqrt{-g}\underbrace{S_{\rho}{}^{a\mu}}_{e^a{}_{\nu}S_{\rho}{}^{\nu\mu}}) \\ &= -e^a{}_{\rho}\mathcal{L}_{\text{grav}} + \frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}(4S_{\nu}{}^{ac}\partial_\rho A_c{}^{\nu} + 2S_{\rho}{}^{bc}\tilde{T}_{bc}{}^{a}) - \\ &\quad - \frac{c^4}{16\pi G}4\big(e^a{}_{\nu}\partial_\mu(\sqrt{-g}\,S_{\rho}{}^{\nu\mu}) + \partial_\mu e^a{}_{\nu}\sqrt{-g}S_{\rho}{}^{\nu\mu}\big). \end{aligned} \tag{7.29}$$

Multiplizieren der Gleichung mit $-e_a{}^{\sigma}$ liefert

$$-e_a{}^{\sigma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{grav}}}{\partial A_a{}^{\rho}} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{grav}}}{\partial(\partial_\mu A_a{}^{\rho})}\right) = \frac{c^4}{4\pi G}\partial_\mu(\sqrt{-g}\,S_{\rho}{}^{\sigma\mu}) - t_{\rho}{}^{\sigma} = 0 \tag{7.30}$$

mit

$$\begin{aligned} t_{\rho}{}^{\sigma} := \frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}(4e_a{}^{\sigma}\partial_\mu e^a{}_{\nu}S_{\rho}{}^{\nu\mu} - 4S_{\nu}{}^{\sigma c}\partial_\rho A_c{}^{\nu} - 2S_{\rho}{}^{bc}\tilde{T}_{bc}{}^{\sigma}) - \\ - \delta^{\sigma}_{\rho}\mathcal{L}_{\text{grav}}. \end{aligned} \tag{7.31}$$

Der dritte Summand in der Klammer lässt sich wegen der Antisymmetrie von S im letzten Indexpaar, siehe Gleichung (7.27), und der Tatsache, dass

$e^c{}_\mu \partial_\tau e_c{}^\sigma = \partial_\tau \delta^\nu_\mu - \partial_\tau e^c{}_\mu e_c{}^\sigma = -\partial_\tau e^c{}_\mu e_c{}^\sigma$, wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} 2S_\rho{}^{bc}\tilde{T}_{bc}{}^\sigma &= 2S_\rho{}^{bc}(e_b{}^\tau \partial_\tau e_c{}^\sigma - e_c{}^\tau \partial_\tau e_b{}^\sigma) \\ &\overset{(7.27)}{=} 2(-S_\rho{}^{cb} e_b{}^\tau \partial_\tau e_c{}^\sigma - S_\rho{}^{bc} e_c{}^\tau \partial_\tau e_b{}^\sigma) \\ &= -4S_\rho{}^{cb} e_b{}^\tau \partial_\tau e_c{}^\sigma \\ &= -4S_\rho{}^{c\tau} \partial_\tau e_c{}^\sigma \\ &= -4S_\rho{}^{\mu\tau} e^c{}_\mu \partial_\tau e_c{}^\sigma \\ &= 4S_\rho{}^{\mu\tau} \partial_\tau e^c{}_\mu e_c{}^\sigma \end{aligned} \tag{7.32}$$

und stimmt damit mit dem ersten Summanden überein, sodass sich beide wegen ihres umgekehrten Vorzeichens aufheben.

Auch der zweite Summand lässt sich umformen,

$$\begin{aligned} 4S_\nu{}^{\sigma c}\partial_\rho A_c{}^\nu &= 4S_\nu{}^{\sigma c}\partial_\rho e_c{}^\nu \\ &= 4S_\nu{}^{\sigma\tau} e^c{}_\tau \partial_\rho e_c{}^\nu \\ &= -4S_\nu{}^{\sigma\tau}\partial_\rho e^c{}_\tau e_c{}^\nu \\ &\overset{(6.11)}{=} -4S_\nu{}^{\sigma\tau}\tilde{\Gamma}_{\rho\tau}{}^\nu. \end{aligned} \tag{7.33}$$

Damit ergibt sich

$$t_\rho{}^\sigma = \frac{c^4}{4\pi G}\sqrt{-g}\, S_\nu{}^{\sigma\tau}\tilde{\Gamma}_{\rho\tau}{}^\nu - \delta^\sigma_\rho \mathcal{L}_{\text{grav}}. \tag{7.34}$$

Nun müssen wir noch die Ableitungen des Solitonenteils der Lagrangedichte berechnen. Offensichtlich gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{sol}}}{\partial(\partial_\mu A_a{}^\rho)} = 0. \tag{7.35}$$

Mit Hilfe des Ausdrucks

$$\begin{aligned} \frac{\partial(R_{\mu\nu}{}^\alpha R_{\kappa\lambda}{}^\alpha g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda})}{\partial A_a{}^\rho} &= R_{\mu\nu}{}^\alpha R_{\kappa\lambda}{}^\alpha \frac{\partial g^{\mu\kappa}}{\partial A_a{}^\rho} g^{\nu\lambda} + R_{\mu\nu}{}^\alpha R_{\kappa\lambda}{}^\alpha g^{\mu\kappa}\frac{\partial g^{\nu\lambda}}{\partial A_a{}^\rho} \\ &= R_{\mu\nu}{}^\alpha R_{\kappa\lambda}{}^\alpha \frac{\partial g^{\mu\kappa}}{\partial A_a{}^\rho} g^{\nu\lambda} + R_{\nu\mu}{}^\alpha R_{\lambda\kappa}{}^\alpha \frac{\partial g^{\nu\lambda}}{\partial A_a{}^\rho} g^{\mu\kappa} \\ &= 2R_{\mu\nu}{}^\alpha R_{\kappa\lambda}{}^\alpha \frac{\partial g^{\mu\kappa}}{\partial A_a{}^\rho} g^{\nu\lambda} \\ &= 2R_{\mu\nu}{}^\alpha R_{\kappa\lambda}{}^\alpha (g^{\mu\tau} e^a{}_\tau \delta^\kappa_\rho + g^{\kappa\tau} e^a{}_\tau \delta^\mu_\rho) g^{\nu\lambda} \\ &= 2(R^{a\lambda\,\alpha} R_{\rho\lambda}{}^\alpha + R_{\rho\nu}{}^\alpha R^{a\nu\,\alpha}) \\ &= 4R^{a\nu\,\alpha} R_{\rho\nu}{}^\alpha \end{aligned} \tag{7.36}$$

erhalten wir für die Ableitung nach $A_a{}^\rho$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{sol}}}{\partial A_a{}^\rho} &= -\frac{\alpha_{\text{f}}\hbar c}{4\pi}\left(\frac{1}{4}\frac{\partial(R_{\mu\nu}{}^\alpha R_{\kappa\lambda}{}^\alpha g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda})}{\partial A_a{}^\rho} + \overbrace{\frac{\partial\Lambda(q_0)}{\partial A_a{}^\rho}}^{0}\right)\sqrt{-g} - \\ &\quad - \frac{\alpha_{\text{f}}\hbar c}{4\pi}\left(\frac{1}{4}R_{\mu\nu}{}^\alpha R_{\kappa\lambda}{}^\alpha g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda} + \Lambda(q_0)\right)\underbrace{\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial A_a{}^\rho}}_{-\sqrt{-g}e^a{}_\rho} \\ &= -\frac{\alpha_{\text{f}}\hbar c}{4\pi}R^{a\nu\,\alpha}R_{\rho\nu}{}^\alpha\sqrt{-g} - \mathcal{L}_{\text{sol}}e^a{}_\rho.\end{aligned} \tag{7.37}$$

7.3 Energie-Impuls-Tensoren

Zu jeder Lagrangedichte lässt sich ein Energie-Impuls-Tensor einführen, also eine Quantität, die invariant unter globalen Translationen ist. Dieser Tensor besitzt die Form

$$T_\nu{}^\mu = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}(\phi_j,\partial_\rho\phi_j)}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\nu\phi_i - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}(\phi_j,\partial_\rho\phi_j), \tag{7.38}$$

wobei ϕ_i die in der Lagrangedichte vorkommenden Felder sind. Dann ist $T_0{}^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}\dot\phi - \mathcal{L}$ die Energiedichte. Es gilt $\partial_\mu T_\nu{}^\mu = 0$, da

$$\begin{aligned}\partial_\mu T_\nu{}^\mu &= \sum_i \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\nu\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\mu\partial_\nu\phi_i - \partial_\nu\mathcal{L} \\ &= \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\partial_\nu\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\nu(\partial_\mu\phi_i) - \partial_\nu\mathcal{L} \\ &= \partial_\nu\mathcal{L} - \partial_\nu\mathcal{L} = 0,\end{aligned} \tag{7.39}$$

und damit $\partial_0 T_0{}^0 + \partial_i T_0{}^i = 0, i \in \{1,2,3\}$, was die Interpretation von $T_0{}^i$ als Energieflussdichten erlaubt. $T_i{}^0, i \in \{1,2,3\}$ können als Impulsdichten interpretiert werden und $T_i{}^j$ als zugehörige Impulsflussdichten.

Für $\mathcal{L}_{\text{grav}}$ gilt

$$\begin{aligned}
T_\rho{}^\sigma &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{grav}}}{\partial(\partial_\sigma A_a{}^\kappa)} \partial_\rho A_a{}^\kappa - \delta_\rho^\sigma \mathcal{L}_{\text{grav}} \\
&= \frac{c^4}{16\pi G} \sqrt{-g}\, 4 S_\kappa{}^{a\sigma} \partial_\rho e_a{}^\kappa - \delta_\rho^\sigma \mathcal{L}_{\text{grav}} \\
&= \frac{c^4}{4\pi G} \sqrt{-g}\, S_\kappa{}^{\nu\sigma} e^a{}_\nu \partial_\rho e_a{}^\kappa - \delta_\rho^\sigma \mathcal{L}_{\text{grav}} \\
&= \frac{-c^4}{4\pi G} \sqrt{-g}\, S_\kappa{}^{\nu\sigma} \partial_\rho e^a{}_\nu e_a{}^\kappa - \delta_\rho^\sigma \mathcal{L}_{\text{grav}} \\
&\overset{(6.11)}{=} \frac{-c^4}{4\pi G} \sqrt{-g}\, S_\kappa{}^{\nu\sigma} \tilde{\Gamma}_{\rho\nu}{}^\kappa - \delta_\rho^\sigma \mathcal{L}_{\text{grav}} \\
&= \frac{c^4}{4\pi G} \sqrt{-g}\, S_\kappa{}^{\sigma\nu} \tilde{\Gamma}_{\rho\nu}{}^\kappa - \delta_\rho^\sigma \mathcal{L}_{\text{grav}}.
\end{aligned} \tag{7.40}$$

Ein Vergleich mit Gleichung (7.34) zeigt, dass

$$t_\rho{}^\sigma = T_\rho{}^\sigma. \tag{7.41}$$

Den Energie-Impuls-Tensor des Solitonenanteils $\mathcal{L}_{\text{sol}}$ können wir [Fab01, Gleichung (128)] entnehmen. Er lautet unter Berücksichtigung des Volumselements $\sqrt{-g}$

$$\mathcal{T}_\rho{}^\sigma = -\frac{\alpha_{\text{f}} \hbar c}{4\pi} \sqrt{-g} R^{\sigma\nu\,\alpha} R_{\rho\nu}{}^\alpha - \delta_\rho^\sigma \mathcal{L}_{\text{sol}}. \tag{7.42}$$

Vergleicht man dieses Resultat mit Gleichung (7.37), so sieht man, dass

$$\mathcal{T}_\rho{}^\sigma = e_a{}^\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{sol}}}{\partial A_a{}^\rho}. \tag{7.43}$$

Da $\mathcal{L}_{\text{grav}}$ keine $\partial_\sigma \Gamma^\beta{}_\kappa$-Terme und $\mathcal{L}_{\text{sol}}$ keine $\partial_\mu A_a{}^\rho$-Terme enthält, ist der Energie-Impuls-Tensor der gesamten Lagrangedichte

$$\mathfrak{T}_\rho{}^\sigma := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_a{}^\kappa)} \partial_\rho A_a{}^\kappa + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \Gamma^\beta{}_\kappa)} \partial_\rho \Gamma^\beta{}_\kappa - \delta_\rho^\sigma \mathcal{L} = T_\rho{}^\sigma + \mathcal{T}_\rho{}^\sigma. \tag{7.44}$$

Nun lassen sich auch die kombinierten Bewegungsgleichungen von Solitonen und Gavitation mit Hilfe von Gleichungen (7.30), (7.41) und (7.43) in eine beschauliche Form bringen,

$$\begin{aligned}
0 &= e_a{}^\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_a{}^\rho} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_a{}^\rho)} \right) \\
&= e_a{}^\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{grav}}}{\partial A_a{}^\rho} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{grav}}}{\partial(\partial_\mu A_a{}^\rho)} \right) + e_a{}^\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{sol}}}{\partial A_a{}^\rho} - e_a{}^\sigma \partial_\mu \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{sol}}}{\partial(\partial_\mu A_a{}^\rho)}}_{0} \\
&\overset{(7.30)}{=} -\frac{c^4}{4\pi G} \partial_\mu(\sqrt{-g} S_\rho{}^{\sigma\mu}) + T_\rho{}^\sigma + e_a{}^\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{sol}}}{\partial A_a{}^\rho} \\
&\overset{(7.43)}{=} -\frac{c^4}{4\pi G} \partial_\mu(\sqrt{-g} S_\rho{}^{\sigma\mu}) + T_\rho{}^\sigma + \mathcal{T}_\rho{}^\sigma,
\end{aligned} \tag{7.45}$$

bzw. unter Verwendung von Gleichung (7.44)

$$\frac{c^4}{4\pi G}\partial_\mu(\sqrt{-g}S_\rho{}^{\sigma\mu}) = \mathfrak{T}_\rho{}^\sigma. \tag{7.46}$$

$S_\rho{}^{\sigma\mu}$ kann also als Strom aufgefasst werden, der den Energie-Impuls-Tensor als Quelle hat. In [AP04] wird $S_\rho{}^{\sigma\mu}$ als *Superpotential* bezeichnet.

8 Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Was bisher geschah

Bis jetzt lernten wir Methoden kennen, um die Gravitation in einer mit dem Solitonenmodell verträglichen Art und Weise zu beschreiben. Wir haben…

- … uns mit allerlei mathematischen Grundlagen herumgeschlagen, wie z. B. Tangentialräumen auf Mannigfaltigkeiten.
- … mit Hilfe des Faserbündelformalismus Eichtheorien in gekrümmten Räumen und bezüglich beliebiger Rahmen beschrieben.
- … sowohl eine Eichfeldtheorie der Gravitation…
- … als auch deren teleparallele Formulierung kennen gelernt und die Äquivalenz zur allgemeinen Relativitätstheorie gezeigt.
- … Bewegungsgleichungen für Solitonen in einer gekrümmten Raumzeit hergeleitet.

Was jedoch noch fehlt ist eine echte Vereinigung der beiden Theorien, also ein Mechanismus, der sowohl die Gravitation als auch das Soliton erzeugt. Wie ein solches gemeinsames Modell aussehen könnte, wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

8.2 Erweiterung des Solitonenmodells

Es sollen zwei mögliche Erweiterungen des Solitonenmodells besprochen werden, mit denen es gelingen könnte, die Gravitation zu beschreiben. Da es sich um (noch) nicht sehr weit gediehene Ideen handelt, wird auf die Beweise einiger (bekannter) mathematischer Aussagen verzichtet.

Zuerst müssen wir noch ein letztes neues Konzept einführen.

Spin-Zusammenhang

Will man die Dirac-Gleichung

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \tag{8.1}$$

vom Minkowski-Raum in eine gekrümmte Raumzeit übertragen, so ist dies wiederum mit Hilfe der Vierbeinfelder durch Ersetzen der partiellen Ableitung

$$\partial_\mu \to e_a{}^\mu \partial_\mu \tag{8.2}$$

möglich.

Zusätzlich verlangt man, dass die Dirac-Gleichung invariant unter (ortsabhängigen) Lorentz-Transformationen ist. Dies gelingt durch Einführung einer kovarianten Ableitung

$$\partial_\mu \to \mathcal{D}_\mu := \partial_\mu + \Omega_\mu. \tag{8.3}$$

Ω_μ nimmt dabei Werte in der Lie-Algebra der Lorentz-Gruppe an, d. h. $\Omega_\mu = \frac{1}{2}\Omega_\mu{}^{ab} S_{ab}$, wobei die S_{ab} eine Darstellung der Generatoren der Lorentz-Algebra sind, wie z. B. $S_{ab} = \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]$ für Dirac-Spinoren. Ω_μ bzw. $\Omega_\mu{}^{ab}$ nennt man einen *Spin-Zusammenhang*.

Sei Λ eine ortsabhängige Lorentz-Transformation. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\mu \Psi' &= \mathcal{D}'_\mu(\Lambda\Psi) = \partial_\mu \Lambda\Psi + \Lambda\partial_\mu\Psi + \Omega'_\mu \Lambda\Psi \\ &= \Lambda(\partial_\mu + \underbrace{\Lambda^{-1}\partial_\mu\Lambda + \Lambda^{-1}\Omega'_\mu\Lambda}_{\Omega_\mu})\Psi = \Lambda\mathcal{D}_\mu\Psi. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Ω_μ erfüllt also wenig überraschend das übliche Transformationsgesetz für einen Zusammenhang.

Wir betrachten einen affinen Zusammenhang ∇ und seine Koeffizienten bezüglich eines Vierbeines $\hat{e}_a$,

$$\nabla_\mu \hat{e}_a = \Gamma^b{}_{\mu a} \hat{e}_b. \tag{8.5}$$

Nun führen wir eine Lorentz-Transformation des Vierbeins durch, $\hat{e}_a \to \hat{e}'_a := \Lambda_b{}^a \hat{e}_a$. Man erhält dadurch wieder eine Tetrade $\hat{e}'_a$. Die Zusammenhangskoeffizienten transformieren sich wie gewöhnlich,

$$\begin{aligned} \Gamma'^c{}_{\mu a}\hat{e}'_c &= \nabla_\mu(\Lambda_b{}^a \hat{e}_a) = \partial_\mu \Lambda_b{}^a \hat{e}_a + \Lambda_b{}^a \Gamma^c{}_{\mu a}\hat{e}_c \\ &= (\partial_\mu \Lambda_b{}^a (\Lambda^{-1})_a{}^d + \Lambda_b{}^a \Gamma^c{}_{\mu a}(\Lambda^{-1})_c{}^d)\hat{e}'_d, \end{aligned} \tag{8.6}$$

und erfüllen damit das gleiche Transformationsgesetz wie der Spin-Zusammenhang.

Lorentz-Transformationen lassen sowohl die Dirac-Gleichung als auch die Geometrie der Raumzeit invariant. Aus diesem Grunde werden wir den Spin-Zusammenhang mit den Koeffizienten des affinen Zusammenhangs identifizieren[1].

[1] Diese Identifikation ist überall in der Literatur zu finden und gehört sozusagen zum Konzept des Spin-Zusammenhangs.

Die Darstellung der Generatoren der Lorentz-Algebra, die auf Vektoren wirkt, lautet

$$(S_{ab})^c{}_d := (\delta^c_a \eta_{bd} - \delta^c_b \eta_{ad}). \tag{8.7}$$

Es gilt somit z. B.

$$(S_{01})^c{}_d = (\delta^c_0\eta_{1d} - \delta^c_1\eta_{0d}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$(S_{12})^c{}_d = (\delta^c_1\eta_{2d} - \delta^c_2\eta_{1d}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

was wohlbekannt sein sollte.

Die vorher angesprochene Identifikation der Zusammenhänge ist dann

$$(\Omega_\mu)^c{}_d = \Gamma^c{}_{\mu d} \quad \text{mit} \quad (\Omega_\mu)^c{}_d := \Omega_\mu{}^{ab}(S_{ab})^c{}_d. \tag{8.8}$$

Spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

Das Solitonenfeld wurde als Zusammenhang auf der SU(2) eingeführt, siehe [Fab01].

Bekanntlich ist die SU(2) eine Untergruppe der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ und die $\mathfrak{su}(2)$ eine Unteralgebra der zur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ gehörenden Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Da die Elemente der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ die Determinante 1 haben, müssen Darstellungsmatrizen der $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ spurlos sein.

Wir betrachten eine 2×2-Darstellung. Dieser Raum hat als komplexer Vektorraum wegen der Bedingung an die Spur die Dimension $2 \cdot 2 - 1 = 3$ und somit als reeller Raum die Dimension 6. An der Einheit liegen die drei Paulimatrizen σ_j im Tangentialraum. Drei weitere offensichtlich linear unabhängige spurlose Matrizen sind $\mathrm{i}\sigma_k$, womit wir eine Basis $\{\sigma_j, \mathrm{i}\sigma_k\}$ gefunden haben[2].

Ein Versuch, die Gravitation im Solitonenmodell unterzubringen, könnte darauf hinauslaufen, das Solitonenfeld von der SU(2) auf die $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ zu erweitern, etwa durch Einführung eines Zusammenhangs auf dem Raum der $\mathrm{i}\sigma_k$.

Da die $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ die doppelte Überlagerung der eigentlichen Lorentzgruppe ist, besitzt sie auch deren Lie-Algebra. Wir können also das Solitonenfeld als Zusammenhang auf der Lorentzgruppe auffassen und ihn als solchen mittels Gleichung (8.8) mit den Komponenten eines affinen Zusammenhangs identifizieren. Auf diese Weise könnte eine nicht-flache Raumzeit und in Folge Gravitation erzeugt werden.

Hier stellt sich unmittelbar die Frage: Bezüglich welches Rahmens (den wir dann als Vierbein ansehen würden) sind diese Zusammenhangskoeffizienten gegeben? Man müsste noch zusätzliche Annahmen treffen, denn prinzipiell würde jeder Rahmen X_i zusammen mit der Metrik $g(X_iX_j) := \eta_{ij}$ einen

[2] Es gilt also $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathrm{i}\,\mathfrak{su}(2)$. Man nennt die $\mathfrak{su}(2)$ deshalb eine *reelle Form* der $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ bzw. umgekehrt die $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ die *Komplexifizierung* der $\mathfrak{su}(2)$. Eine weitere reelle Form der $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ist die $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

metrischen Zusammenhang liefern. Die Kompatibilitätsbedingung 6.2

$$X_i[g(X_j,X_k)] = \overbrace{X_i[\eta_{jk}]}^{0} = g(\nabla_i X_j, X_k) + g(X_j, \nabla_i X_k) \\ = \Gamma^l{}_{ij}\eta_{lk} + \Gamma^l{}_{ik}\eta_{jl} \tag{8.9}$$

ist wegen Gleichung (8.8) und der Definition von $(\Omega_\mu)^c{}_d$ bzw. $(S_{ab})^c{}_d$ stets erfüllt.

Ein Beispiel für eine solche Annahme (es handelt sich wirklich nur um ein Beispiel, um zu illustrieren, wie eine Annahme aussehen könnte, ohne Überprüfung der Sinnhaftigkeit und Konsequenzen – eine solche könnte etwa im Rahmen von weiterführenden Arbeiten passieren) wäre Folgendes: Die Zusammenhangskoeffizienten gehören zum Levi-Civitá-Zusammenhang. Da die Metrizität in jedem Fall erfüllt ist, erhalten wir als zusätzliche Bedingung nur das Verschwinden der Torsion, also das Differentialgleichungssystem

$$0 = T_{ab}{}^c \overset{(6.5)}{=} e_a{}^\mu \Gamma^c{}_{\mu b} - e_b{}^\mu \Gamma^c{}_{\mu a} - (e_a{}^\mu \partial_\mu e_b{}^\nu - e_b{}^\mu \partial_\mu e_a{}^\nu) e^c{}_\nu \tag{8.10}$$

für die Vierbeinfelder. Ob dieses System lösbar ist und wie es mit der Eindeutigkeit der Lösungen bestellt ist, ist eine Frage, die wir hier nicht beantworten werden.

Man sieht allerdings sofort, dass diese Annahme keinesfalls zur Fixierung eines Vierbeins (bis auf Lorentz-Transformationen natürlich) ausreichen kann, denn hat man ein Vierbein $\hat{e}_a$ gefunden, dann löst auch $2\hat{e}_a$ die Differentialgleichung. Induziert $\hat{e}_a$ eine Metrik g, dann induziert $2\hat{e}_a$ die Metrik $4g$, die wiederum den gleichen Levi-Civitá-Zusammenhang wie g besitzt.

Translationsgruppe T

Eine Möglichkeit, ein Vierbein festzulegen, wäre die Erweiterung des Solitonenmodells um die Translationsgruppe T. Gelingt es, analog zum Solitonenfeld einen Zusammenhang $\mathcal{A}$ auf T finden, würde uns dieser wie in Abschnitt 5.2 ein Vierbeinfeld

$$e_a{}^\mu = \delta_a^\mu + A_a{}^\mu \tag{8.11}$$

liefern. Dieses wiederum induziert eine Metrik und somit eine nicht-flache Raumzeit.

Bei diesem Ansatz besteht die offensichtliche Schwierigkeit in der Einführung eines passenden Translationsfeldes.

Danksagungen

An erster Stelle möchte ich mich bei meiner Familie, insbesondere bei meinen Eltern Günter und Silvia Schrangl, bedanken. Ich wüsste nicht (und will es auch gar nicht wissen), wie mein bisheriges Leben ohne deren großartige Unterstützung ausgesehen hätte. Mein Studium wäre jedenfalls in dieser Form nicht möglich gewesen und folglich würde wohl diese Arbeit (zumindest mit mir als Urheber) nicht existieren.

Des Weiteren geht mein Dank an meine Kollegen (in alphabetischer Reihenfolge nach zweitem Buchstaben ihres Vornamens, weil diese Reihung so gut wie jede andere ist) Daniel Föger, Martin Fölser, Bernhard Mistlberger, Michael Scheucher, Alexander Reismann, Wolfgang Schlichtner und Lorenz Hruby. Sie waren (und sind) nicht nur in Studienangelegenheiten eine große Unterstützung, sondern auch abseits der Universität tolle Freunde.

Auch sämtliche anderen Freunde (wenngleich ich davon absehe, sie alle namentlich zu nennen, um meine Mitschuld an der fortschreitenden Abholzung der Wälder gering zu halten) sollen hier nicht vergessen werden. Der alte Epikur von Samos sagte es am besten:

> Von allen Dingen, die die Weisheit bereitstellt, um das gesamte Leben in Freude zu leben, ist bei weitem das größte der Besitz von Freundschaft.

In diesem Sinne gebührt ihnen meine Dankbarkeit für sehr viel Freude.

Nicht zuletzt bin ich meinem Betreuer Manfried Faber einiges an Dank schuldig. Die Zusammenarbeit war ein Vergnügen. Ich möchte meine tiefste Verbundenheit für die vielen Diskussionen (nicht nur über die Physik) – ich habe sehr viel gelernt – und das ausgezeichnete Arbeitsklima ausdrücken.

Literaturverzeichnis

[AP04] Arcos, H. I. ; Pereira, J. G.: Torsion Gravity: A Reappraisal. In: *International Journal of Modern Physics D* 13 (2004), Nr. 10, 2193-2240. http://dx.doi.org/10.1142/S0218271804006462. – DOI 10.1142/S0218271804006462

[APV04] Aldrovandi, R. ; Pereira, J.G. ; Vu, K.H.: Gravitation Without the Equivalence Principle. In: *General Relativity and Gravitation* 36 (2004), Nr. 1, 101-110. http://dx.doi.org/10.1023/B:GERG.0000006696.98824.4d. – DOI 10.1023/B:GERG.0000006696.98824.4d. – ISSN 0001–7701

[Bau10] Baum, Helga: *Eichfeldtheorie*. Springer London, Limited, 2010. – ISBN 9783540382935

[Bel08] Bel, Lluis: Connecting connections. (2008)

[BFK07] Borisyuk, Dmitry ; Faber, Manfried ; Kobushkin, Alexander: Electro-Magnetic Waves within a Model for Charged Solitons. In: *J. Phys.* A40 (2007), S. 525–531

[Bla02] Blagojević, Milutin: *Gravitation and Gauge Symmetries*. Institute of Physics Publishing, 2002 (Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation). – ISBN 0750307676

[Cho75] Cho, Y. M.: Higher-dimensional unifications of gravitation and gauge theories. In: *Journal of Mathematical Physics* 16 (1975), Nr. 10, 2029-2035. http://dx.doi.org/10.1063/1.522434. – DOI 10.1063/1.522434

[Cho76] Cho, Y. M.: Einstein Lagrangian as the translational Yang-Mills Lagrangian. In: *Phys. Rev. D* 14 (1976), Nov, 2521–2525. http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.14.2521. – DOI 10.1103/PhysRevD.14.2521

[Fab01] Faber, Manfried: A model for topological fermions. In: *Few Body Syst.* 30 (2001), S. 149–186. http://dx.doi.org/10.1007/s006010170009. – DOI 10.1007/s006010170009

[Hav08] Havlicek, Hans: *Lineare Algebra für Technische Mathematiker*. 2. Auflage. Heldermann Verlag, 2008 (Berliner Studienreihe zur Mathematik 16). – ISBN 3885381168

[Jä05] JÄNICH, Klaus: *Vektoranalysis*. Springer, 2005 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 9783540237419

[Kib61] KIBBLE, T. W. B.: Lorentz Invariance and the Gravitational Field. In: *Journal of Mathematical Physics* 2 (1961), Nr. 2, 212-221. `http://dx.doi.org/10.1063/1.1703702`. – DOI 10.1063/1.1703702

[Kü10] KÜHNEL, Wolfgang: *Differentialgeometrie*. 5., aktualisierte Auflage. Vieweg + Teubner, 2010. – ISBN 978–3–8348–1233–9

[Mal94] MALUF, José W.: Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity. In: *Journal of Mathematical Physics* 35 (1994), Nr. 1, 335-343. `http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1063/1.530774`. – DOI http://dx.doi.org/10.1063/1.530774

[Nak03] NAKAHARA, Mikio: *Geometry, Topology, and Physics*. 2nd edition. Institute of Physics Publishing, 2003 (Graduate student series in physics). – ISBN 9780750306065

[Rem96] REMOISSENET, M.: *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments*. Springer, 1996. – ISBN 9783540605027

[Uti56] UTIYAMA, Ryoyu: Invariant Theoretical Interpretation of Interaction. In: *Phys. Rev.* 101 (1956), Mar, 1597–1607. `http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.101.1597`. – DOI 10.1103/PhysRev.101.1597