

DIPLOMARBEIT

Zerlegungsgleichheit von Polytopen

Ausgeführt am Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Univ.-Prof. Dr. Monika Ludwig

durch

Katja Sophie Hotz

Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen	3
1.1 Polytope und Zerlegungen	3
1.2 Zylinderklassen	8
1.3 Tensorprodukte	9
2 Zerlegungsgleichheit im \mathbb{R}^2	10
2.1 Der Satz von Bolyai-Gerwien	10
2.2 Zerlegungsgleichheit bezüglich spezieller Untergruppen der Bewegungsgruppe	11
3 Zerlegungsgleichheit im \mathbb{R}^n	22
3.1 Ergänzungsgleichheit und Zerlegungsgleichheit	22
3.2 Das formale Hauptkriterium	26
4 Zerlegungsgleichheit im \mathbb{R}^3	35
4.1 Die Algebra der Polytope	36
4.2 Der Satz von Dehn-Sydler	38
5 Zerlegungsgleichheit im \mathbb{R}^4	55
5.1 Der Satz von Jessen	55
Literaturverzeichnis	64

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Zerlegungsgleichheit von Polytopen. Ein Polytop ist, grob gesagt, ein Körper im \mathbb{R}^n , dessen Seiten alle flach sind. Insbesondere konvexe Polytope, also solche, für die zu je zwei enthaltenen Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthalten ist, spielen eine wichtige Rolle in der diskreten Geometrie.

Um das Problem der Zerlegungsgleichheit ein wenig zu veranschaulichen, betrachten wir ein kleines Beispiel. Man stelle sich ein dreieckiges Stück Papier vor. Nimmt man nun eine Schere zur Hand und schneidet das Dreieck zuerst entlang einer (enthaltenen) Höhe und dann quer dazu auf der halben Höhe einmal durch, so kann man die entstandenen Papierstücke leicht neu arrangieren, sodass ein Rechteck entsteht. Versucht man nun aber, eine regelmäßige dreiseitige Pyramide so zu zerlegen, dass die entstandenen Teile durch Neuordnung einen Quader bilden, so wird man überrascht feststellen, dass dies nicht gelingen will. Dieses Resultat geht auf Max Dehn [3] zurück, der damit das dritte Problem auf David Hilberts berühmter Liste [10] mathematischer Probleme löste.

Es drängt sich nun die Frage auf, wie überprüft werden kann, ob zwei Polytope zerlegungsgleich sind.

Bevor diese Frage beantwortet werden kann, benötigen wir einige grundlegende Definitionen und Aussagen, die im ersten Kapitel angegeben werden.

Offensichtlich haben das Dreieck und das Rechteck aus obigem Beispiel den selben Flächeninhalt, dies ist also eine notwendige Bedingung für Zerlegungsgleichheit. In Kapitel 2 werden wir mit dem Satz 2.3 von Bolyai-Gerwien zeigen, dass dies im zweidimensionalen Fall tatsächlich auch hinreichend ist, wobei bei der Neuordnung der Teilstücke beliebige Bewegungen erlaubt sind. Schränkt man sich allerdings auf Translationen ein, dann ist die Flächengleichheit alleine nicht mehr ausreichend, wie Satz 2.6 zeigt. Weiters werden wir noch die minimale Gruppe von Bewegungen bestimmen, für die Zerlegungsgleichheit noch äquivalent zur Flächengleichheit ist.

Im darauf folgenden Kapitel werden wir uns mit Zerlegungsgleichheit im allgemeinen Raum \mathbb{R}^n beschäftigen. Dabei werden wir zuerst den wichtigen Satz 3.3 beweisen, der besagt, dass zwei ergänzungsgleiche Polytope bereits zerlegungsgleich sein müssen. Erstmals wurde dies von Hugo Hadwiger [5] bewiesen. Danach werden wir mit Satz 3.12 ein allgemeines Kriterium für Zerlegungsgleichheit angeben, das ebenfalls auf Hugo Hadwiger [7] zurückgeht. Allerdings ist dies tatsächlich nur ein rein formales Resultat, für zwei Polytope lässt sich damit in der Praxis nicht entscheiden, ob sie zerlegungsgleich sind oder nicht.

In der oben bereits erwähnten Arbeit [3] stellte Max Dehn notwendige Bedingungen zur Zerlegungsgleichheit im \mathbb{R}^3 auf, die für eine regelmäßige dreiseitige Pyramide

und einen Quader immer verletzt sind. Jean-Pierre Sydler zeigte in [15], dass diese Bedingungen bereits hinreichend sind. Drei Jahre später veröffentlichte Børge Jessen [11] eine leicht verallgemeinerte Version dieses Resultats, welche hier in Kapitel 4 mit Satz 4.8 vorgestellt wird. Mit Hilfe dieser Bedingungen kann man nun die Zerlegungsgleichheit zweier Polytope im \mathbb{R}^3 rechnerisch nachprüfen.

In Kapitel 5 präsentieren wir schließlich mit dem Satz 5.6 von Jessen eine Charakterisierung für die Zerlegungsgleichheit im \mathbb{R}^4 . Diese dort angegebenen Bedingungen sind in gewisser Weise analog zu jenen im Satz 4.7 von Dehn-Sydler, was eine Vermutung von Hugo Hadwiger [6] im vierdimensionalen Fall bestätigt. Gezeigt wurde dies erstmals von Børge Jessen in [12]. Auch mit diesen Bedingungen lässt sich explizit nachprüfen, ob zwei Polytope zerlegungsgleich sind.

Für höhere Dimensionen sind bisher keine solchen Charakterisierungen bekannt, auch wenn die Vermutung in [6] für beliebige Dimensionen ausgesprochen wurde.

1 Grundlagen

In diesem Kapitel sammeln wir einige grundlegende Definitionen und Aussagen, die wir in den nachfolgenden Kapiteln benötigen. Die verwendeten Begriffsbildungen richten sich nach [2] bzw. [7], wo auch weiterführende Informationen gefunden werden können.

1.1 Polytope und Zerlegungen

Ein *konvexes Polytop* P ist die konvexe Hülle endlich vieler Punkte a_1, a_2, \dots, a_t im \mathbb{R}^n , das heißt

$$P = \text{conv}(a_1, \dots, a_t) \\ = \left\{ \sum_{i=1}^t \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^t \lambda_i = 1 \right\}.$$

Die Menge aller konvexen Polytope im \mathbb{R}^n bezeichnen wir mit \mathcal{P}^n . Die *Dimension* eines konvexen Polytopes ist definiert als die Dimension jenes affinen Unterraums $\text{aff}(P)$, der von P aufgespannt wird. Die Menge aller volldimensionalen konvexen Polytope bezeichnen wir mit \mathcal{P}_o^n . Ist P ein konvexes Polytop und H eine Hyperebene im \mathbb{R}^n , sodass P ganz auf einer Seite von H liegt und $P \cap H$ nicht leer ist, dann ist $P \cap H$ eine *Seite* von P . Zusätzlich dazu sind auch die leere Menge und ganz P Seiten von P . Jede Seite eines konvexen Polytopes ist auch ein konvexes Polytop. Dabei heißt eine nulldimensionale Seite *Ecke*, eine eindimensionale Seite *Kante* und eine $(n-1)$ -dimensionale Seite *Facette* von P . Die Menge der i -dimensionalen Seiten von P bezeichnen wir mit $\mathcal{F}^i(P)$. Ein m -dimensionales konvexes Polytop mit genau $m+1$ Ecken heißt *Simplex*. Jede i -dimensionale Seite eines Simplex ist selbst ein i -dimensionales Simplex.

Ein *Polytop* ist eine endliche Vereinigung von konvexen Polytopen. Für die Menge aller Polytope im \mathbb{R}^n schreiben wir daher $\bigcup \mathcal{P}^n$ und für die Menge aller Polytope, die sich durch endliche Vereinigung von ausschließlich volldimensionalen konvexen Polytopen ergeben, schreiben wir $\bigcup \mathcal{P}_o^n$.

Polytope $P_1, \dots, P_k \in \bigcup \mathcal{P}^n$ heißen *Zerlegung* des Polytopes $P \in \bigcup \mathcal{P}^n$, falls

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$$

und $\dim(P_i \cap P_j) < n$ für $i \neq j$ gilt. Wir schreiben dann $P = P_1 \cup \dots \cup P_k$. Ist $P \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$ ein beliebiges Polytop mit

$$P = P_1 \cup \dots \cup P_k$$

und $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{P}_o^n$, dann können wir P entlang jeder Hyperebene, die eine Facette eines P_i enthält, zerschneiden. Auf diese Weise erhalten wir eine Zerlegung von P in konvexe Polytope.

1.1 Satz. *Jedes Polytop in $\bigcup \mathcal{P}_o^n$ besitzt eine Zerlegung in endlich viele Simplizes.*

Beweis. Es genügt, die Aussage für konvexe Polytope zu zeigen, da wir jedes Polytop in $\bigcup \mathcal{P}_o^n$ in solche zerlegen können. Sei also $P \in \mathcal{P}_o^n$. Für $n = 1$ ist jedes konvexe Polytop ein Simplex, besitzt also eine triviale Zerlegung in Simplizes. Sei also $n > 1$ und angenommen, jedes konvexe Polytop mit Dimension kleiner als n besitze eine Simplizialzerlegung. Ist v ein beliebiger innerer Punkt von P , so gilt sicher

$$P = \bigcup_{F \in \mathcal{F}^{n-1}(P)} \text{conv}(v, F).$$

Nach Induktionsvoraussetzung lässt sich jede Facette von P in $(n-1)$ -dimensionale Simplizes zerlegen. Die konvexe Hülle eines solchen Simplex mit v bildet dann ein n -dimensionales Simplex und damit ist eine Zerlegung von P in Simplizes gefunden. \square

Eine Abbildung φ von \mathcal{P}_o^n (oder $\bigcup \mathcal{P}_o^n$) in eine abelsche Gruppe $(A, +)$ heißt *einfach additiv*, falls für alle $P, Q \in \mathcal{P}_o^n$ mit $P \cup Q \in \mathcal{P}_o^n$ (oder $P, Q \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$), die disjunktes Inneres haben,

$$\varphi(P \cup Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$$

gilt. Wir nennen φ *additiv*, falls für alle $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{P}_o^n$ mit $P_1 \cup \dots \cup P_k \in \mathcal{P}_o^n$ (oder $P_1, \dots, P_k \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$), die paarweise disjunktes Inneres haben, die Gleichung

$$\varphi(P_1 \cup \dots \cup P_k) = \varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_k)$$

gilt.

1.2 Satz. *Sei φ eine auf \mathcal{P}_o^n definierte einfach additive Abbildung. Dann lässt sich φ als einfach additive Abbildung auf die Menge aller Polytope $\bigcup \mathcal{P}_o^n$ eindeutig fortsetzen.*

Beweis. Wir werden zuerst zeigen, dass die Abbildung φ auf \mathcal{P}_o^n bereits additiv ist, das also für $P, P_1, \dots, P_k \in \mathcal{P}_o^n$ mit

$$P = P_1 \cup \dots \cup P_k$$

gilt

$$\varphi(P) = \sum_{i=1}^k \varphi(P_i).$$

Für $k = 2$ ist dies nichts anderes als die einfache Additivität. Sei also $k > 2$ und angenommen, die Behauptung gelte bereits für alle Zerlegungen in weniger als k Teile. Wir betrachten eine Facette F eines Teilstücks, die innere Punkte von P

enthält. Dann teilt die Hyperebene $H := \text{aff}(F)$ das Polytop P in zwei Teile P' und P'' , die wiederum die Zerlegungen

$$P' = (P_1 \cap P') \cup \dots \cup (P_k \cap P')$$

und

$$P'' = (P_1 \cap P'') \cup \dots \cup (P_k \cap P'')$$

haben. In diesen Darstellungen gibt es aber sicher jeweils zumindest einen Anteil, der nicht volldimensional oder sogar leer ist. Daher gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\varphi(P) = \varphi(P') + \varphi(P'') = \sum_{i=1}^k (\varphi(P_i \cap P') + \varphi(P_i \cap P'')) = \sum_{i=1}^k \varphi(P_i).$$

Betrachten wir nun ein beliebiges Polytop $P \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$. Es lässt sich in konvexe Polytope P_1, \dots, P_k zerlegen und wir wählen

$$\varphi(P) = \sum_{i=1}^k \varphi(P_i).$$

Um zu zeigen, dass diese Fortsetzung wohldefiniert ist, sei Q_1, \dots, Q_l eine weitere Zerlegung von P in konvexe Polytope. Definieren wir $R_{ij} = P_i \cap Q_j$ für alle $i = 1, \dots, k$ und $j = 1, \dots, l$, dann gilt

$$P_i = R_{i1} \cup \dots \cup R_{il} \quad \text{und} \quad Q_j = R_{1j} \cup \dots \cup R_{kj}$$

und nach Obigem

$$\sum_{i=1}^k \varphi(P_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \varphi(R_{ij}) = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k \varphi(R_{ij}) = \sum_{j=1}^l \varphi(Q_j).$$

Die so definierte Fortsetzung ist offensichtlich additiv. \square

In diesem Beweis haben wir insbesondere gezeigt, dass jede einfach additive Abbildung bereits additiv ist. Wir können ein auf $\bigcup \mathcal{P}_o^n$ definiertes additives φ auf ganz $\bigcup \mathcal{P}^n$ fortsetzen, indem wir zuerst $\varphi \equiv 0$ auf $\mathcal{P}^n \setminus \mathcal{P}_o^n$ setzen und dann ähnlich wie in obigem Beweis vorgehen. Klarerweise gilt dann sogar für $P_1, \dots, P_k \in \bigcup \mathcal{P}^n$, die paarweise disjunktes Inneres haben,

$$\varphi(P_1 \cup \dots \cup P_k) = \varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_k).$$

Wir werden im Folgenden immer stillschweigend davon ausgehen, dass wir so fortgesetzt haben.

Wir bezeichnen mit $E(n)$ jene Untergruppe von $\{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ bijektiv}\}$, die von allen Translationen und allen orthogonalen linearen Abbildungen erzeugt wird, die Gruppe aller *Bewegungen*.

Wichtige Untergruppen von $E(n)$ sind beispielsweise die Gruppe $T(n)$ aller Translationen, die Gruppe $E^+(n)$ aller orientierungserhaltenden Bewegungen, sie wird erzeugt von $T(n)$ und allen orthogonalen linearen Abbildungen mit Determinante $+1$, oder die von $T(n)$ und der Spiegelung am Ursprung erzeugte Untergruppe $S(n)$. Es gilt

$$T(n) \subseteq E^+(n) \subseteq E(n).$$

Für gerades n gilt außerdem $S(n) \subseteq E^+(n)$. Wenn klar ist, in welchem Raum wir gerade arbeiten, werden wir die Dimension in der Notation weglassen. Falls nicht explizit anders erwähnt, werden wir im Folgenden annehmen, dass die betrachteten Bewegungsgruppen immer die Gruppe der Translationen enthalten.

Sei G eine Gruppe von Bewegungen. Zwei Polytope $P, Q \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$ heißen G -kongruent, i.Z. $P \cong_G Q$, falls es eine Bewegung $g \in G$ gibt, sodass $P = g(Q)$ gilt. Ist G die Gruppe $E(n)$ aller Bewegungen im \mathbb{R}^n , so sagen wir kurz, P ist kongruent zu Q und schreiben $P \cong Q$. Die Polytope P und Q heißen G -zerlegungsgleich, i.Z. $P \sim_G Q$, falls es Zerlegungen

$$P = P_1 \cup \dots \cup P_k, \quad Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_k$$

mit $P_i \cong_G Q_i$, für alle $i = 1, \dots, k$, gilt. Ist G ganz $E(n)$, dann sagen wir wieder kurz P ist zerlegungsgleich zu Q und schreiben $P \sim Q$.

Offensichtlich gilt für zwei Gruppen $H \subseteq G$ von Bewegungen immer

$$P \sim_H Q \Rightarrow P \sim_G Q.$$

Die Relation \sim_G ist für jede Gruppe G von Bewegungen eine Äquivalenzrelation. Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich, zu zeigen bleibt daher nur die Transitivität. Seien also P, Q, R Polytope mit $P \sim_G Q$ und $Q \sim_G R$. Dann gibt es Zerlegungen

$$\begin{aligned} P &= P_1 \cup \dots \cup P_k, \quad Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_k \\ Q &= Q'_1 \cup \dots \cup Q'_l, \quad R = R_1 \cup \dots \cup R_l \end{aligned}$$

und Bewegungen $g_1, \dots, g_k, h_1, \dots, h_l \in G$, sodass

$$P_i = g_i(Q_i) \quad \text{und} \quad Q'_j = h_j(R_j)$$

für alle $i = 1, \dots, k$ und $j = 1, \dots, l$ gilt. Wir definieren

$$\hat{P}_{i,j} = g_i^{-1}(Q_i \cap Q'_j) \quad \text{und} \quad \hat{R}_{i,j} = h_j(Q_i \cap Q'_j),$$

und erhalten die Zerlegungen

$$\begin{aligned} P &= \hat{P}_{1,1} \cup \dots \cup \hat{P}_{1,l} \cup \hat{P}_{2,1} \cup \dots \cup \hat{P}_{2,l} \cup \dots \cup \hat{P}_{k,1} \cup \dots \cup \hat{P}_{k,l} \\ R &= \hat{R}_{1,1} \cup \dots \cup \hat{R}_{1,l} \cup \hat{R}_{2,1} \cup \dots \cup \hat{R}_{2,l} \cup \dots \cup \hat{R}_{k,1} \cup \dots \cup \hat{R}_{k,l}, \end{aligned}$$

wobei für $f_{i,j} := h_j \circ g_i \in G$ die Gleichheit

$$f_{i,j}(\hat{P}_{i,j}) = h_j(Q_i \cap Q'_j) = \hat{R}_{i,j}$$

gilt. Damit ist $P \sim_G R$ gezeigt.

Für eine Gruppe G von Bewegungen heißt eine auf (einer unter G abgeschlossenen Teilmenge von) $\bigcup \mathcal{P}_o^n$ definierte Abbildung φ *G-invariant*, falls für jedes $P \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$ und jede Bewegung $g \in G$

$$\varphi(g(P)) = \varphi(P)$$

gilt.

1.3 Satz. *Sei G eine Gruppe von Bewegungen und φ eine auf $\bigcup \mathcal{P}_o^n$ definierte einfach additive G -invariante Abbildung. Dann gilt für $P, Q \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$*

$$P \sim_G Q \Rightarrow \varphi(P) = \varphi(Q).$$

Beweis. Es gibt Zerlegungen $P = P_1 \cup \dots \cup P_k$, $Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_k$ und Bewegungen $g_1, \dots, g_k \in G$, sodass $P_i = g_i(Q_i)$ für $i = 1, \dots, k$. Daher ist

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \varphi(P_1 \cup \dots \cup P_k) \\ &= \varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_k) \\ &= \varphi(g_1(Q_1)) + \dots + \varphi(g_k(Q_k)) \\ &= \varphi(Q_1) + \dots + \varphi(Q_k) \\ &= \varphi(Q). \end{aligned}$$

□

Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichnet $k \cdot P$ ein Polytop der Form

$$k \cdot P = t_1(P) \cup \dots \cup t_k(P)$$

wobei die $t_i \in T$ so gewählt sind, dass alle $t_i(P)$, $i = 1, \dots, k$, paarweise disjunktes Inneres haben. Klarerweise sind alle so definierten Polytope T -zerlegungsgleich, und daher werden die Translationen t_i im Folgenden nicht explizit angegeben. Wir schreiben dann kurz

$$k \cdot P = P \cup \dots \cup P.$$

Für $k, l \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$Q = \frac{k}{l} \cdot P \iff l \cdot Q = k \cdot P.$$

Dies ist nicht zu verwechseln mit der folgenden Definition. Für ein Polytop P und ein $\lambda > 0$ bezeichnet

$$\lambda P = \{\lambda x \mid x \in P\}$$

die *Dilatation* um den Faktor λ .

1.2 Zylinderklassen

Die *Minkowskische Addition* zweier Polytope P und Q ist gegeben durch

$$P + Q = \{p + q : p \in P \wedge q \in Q\}.$$

Diese Operation ist assoziativ und kommutativ, außerdem gelten die folgenden Distributivgesetze

$$\begin{aligned} (P \cup Q) + R &= (P + R) \cup (Q + R) \\ \lambda P + \lambda Q &= \lambda(P + Q). \end{aligned}$$

Die Menge aller Polytope ist unter der Minkowskischen Addition abgeschlossen.

Ein m -dimensionales Polytop P , das eine Darstellung der Form

$$P = P_1 + \dots + P_k$$

mit $P_i \in \mathcal{P}_o^{n_i}$, sodass $\sum_{i=1}^k n_i = m$ und $\bigoplus_{i=1}^k \text{aff}(P_i) = \mathbb{R}^m$ gilt, besitzt, nennen wir einen k -stufigen Zylinder. Klarerweise ist so ein Polytop immer konvex. Da jedes konvexe Polytop ein einstufiger Zylinder ist, bezeichnen wir nur jene als *echte* Zylinder, die zumindest zweistufig sind. Einen n -stufigen Zylinder nennen wir auch *Parallelepiped*. Man beachte, dass für $l < k$ ein k -stufiger Zylinder immer auch ein l -stufiger Zylinder ist. Ein k -stufiges Zylinderpolytop ist nun ein Polytop $P \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$, welches sich in endlich viele k -stufige Zylinder zerlegen lässt. Die Menge aller Polytope im \mathbb{R}^n , die translativ zerlegungsgleich zu einem k -stufigen Zylinderpolytop sind, nennen wir die k -te Zylinderklasse und bezeichnen sie mit \mathcal{Z}_k^n . Das leere Polytop ist in jeder Zylinderklasse enthalten.

Man beachte, dass $(n - 1)$ -stufige Zylinder Z immer die Form

$$A + I_1 + \dots + I_{n-2}$$

haben, wobei A ein zweidimensionales Polytop und alle I_k Liniensegmente sind. Wir werden in Kapitel 2 den Satz 2.3 von Bolyai-Gerwien zeigen, der besagt, dass im \mathbb{R}^2 zwei Polytope genau dann zerlegungsgleich sind, wenn sie die selbe Fläche haben. Daher ist das Polytop A zerlegungsgleich zu jedem Parallelogramm $J_1 + J_2$, das den selben Flächeninhalt hat. Also ist Z zerlegungsgleich zu einem n -stufigen Zylinder

$$J_1 + J_2 + I_1 + \dots + I_{n-2}.$$

Insgesamt haben wir also das folgende Lemma erhalten.

1.4 Lemma. *Sei $Z \in \mathcal{Z}_{n-1}^n$. Dann ist Z zerlegungsgleich zu einem $Z' \in \mathcal{Z}_n^n$.*

1.3 Tensorprodukte

Sei K ein Körper und seien V, W Vektorräume über K . Wir betrachten den von $V \times W$ frei erzeugten Vektorraum aller formalen Linearkombinationen

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i (v_i, w_i) \mid m \in \mathbb{N}, \alpha_i \in K, (v_i, w_i) \in V \times W \right\}.$$

Sei $U \subseteq F$ der von den Elementen der Form

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w), \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2), \\ \alpha(v, w) - (\alpha v, w) \quad \text{und} \quad \alpha(v, w) - (v, \alpha w) \end{aligned}$$

erzeugte Unterraum von F . Das Tensorprodukt $V \otimes W$ ist dann der Vektorraum F/U . Für die Klasse von $(v, w) \in V \times W$ schreiben wir $v \otimes w$. Ist $\{b_k\}$ eine Basis von V und $\{c_l\}$ eine Basis von W , so lässt sich leicht zeigen, dass $\{b_k \otimes c_l\}$ eine Basis von $V \otimes W$ ist.

2 Zerlegungsgleichheit im \mathbb{R}^2

2.1 Der Satz von Bolyai-Gerwien

Wir haben in Satz 1.3 gesehen, dass zwei zerlegungsgleiche Polytope im \mathbb{R}^2 immer den selben Flächeninhalt haben müssen. Nun stellt sich die Frage, ob zwei Polytope mit dem selben Flächeninhalt auch immer zerlegungsgleich sein müssen. Bereits im 19. Jahrhundert zeigten der ungarische Mathematiker Wolfgang Bolyai und der deutsche Leutnant Paul Gerwien [4] unabhängig voneinander, dass diese Frage mit „Ja“ beantwortet werden kann. In diesem Kapitel werden wir uns mit dem Beweis dieser Aussage beschäftigen, so wie er in Vladimir Boltjanskis Buch [2] präsentiert wird.

2.1 Lemma. *Jedes Dreieck ist zerlegungsgleich zu einem Rechteck.*

Beweis. Sei Δ ein Dreieck mit den Eckpunkten a , b und c , wobei ab die längste Seite des Dreiecks bezeichnen soll. Nun zeichnet man die Höhe zum Eckpunkt c ein, vgl. Abbildung 2.1. Die Wahl der Seite ab gewährleistet, dass der Punkt d tatsächlich im

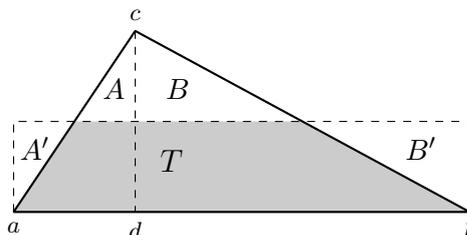


Abbildung 2.1: Zerlegungsgleichheit eines Dreiecks zu einem Rechteck

Inneren von ab liegt. Zeichnet man nun eine zu der Strecke ab parallele Linie durch den Mittelpunkt der Höhe ein, so wird Δ in das Trapez T und die zwei Dreiecke A und B zerlegt. Diese Dreiecke sind aber kongruent zu den Dreiecken A' und B' , welche gemeinsam mit T ein Rechteck bilden. Also ist Δ zerlegungsgleich zu einem Rechteck. \square

2.2 Lemma. *Haben zwei Rechtecke den selben Flächeninhalt, so sind sie zerlegungsgleich. Klarerweise gilt dies dann auch für endliche Vereinigungen von Rechtecken.*

Beweis. Seien R_1 und R_2 zwei Rechtecke mit gleichem Flächeninhalt. Wir legen sie so übereinander, dass sie einen gemeinsamen rechten Winkel haben, vgl. Abbildung 2.2. Dabei habe R_1 die Eckpunkte a , b , c und d und R_2 die Eckpunkte a , e , f und g . Weiters bezeichnen l_1 , h_1 , l_2 und h_2 die Seitenlängen der Rechtecke. Dann gilt

$l_1 h_1 = l_2 h_2$, also auch $\frac{l_1}{h_2} = \frac{l_2}{h_1}$ und $\frac{l_1 - l_2}{h_2 - h_1} = \frac{l_2}{h_1}$. Das bedeutet, dass die Strecken de , bg und cf parallel sind.

Wir unterscheiden zwei Fälle. Im ersten Fall gilt $2l_2 > l_1$, siehe Abbildung 2.2(a). Das bedeutet, dass die Strecke bg jenes Rechteck, das sich als Schnittmenge von R_1 und R_2 ergibt, schneidet. Damit sind R_1 und R_2 zerlegungsgleich, denn jedes lässt sich zusammensetzen aus dem Fünfeck mit den Ecken a, e, m, n und d , einem der kongruenten Dreiecke A' oder A'' und einem der kongruenten Dreiecke mit den Eckpunkten b, c und m bzw. f, g und n . Im zweiten Fall ist $2l_2 \leq l_1$, vgl. Abbildung

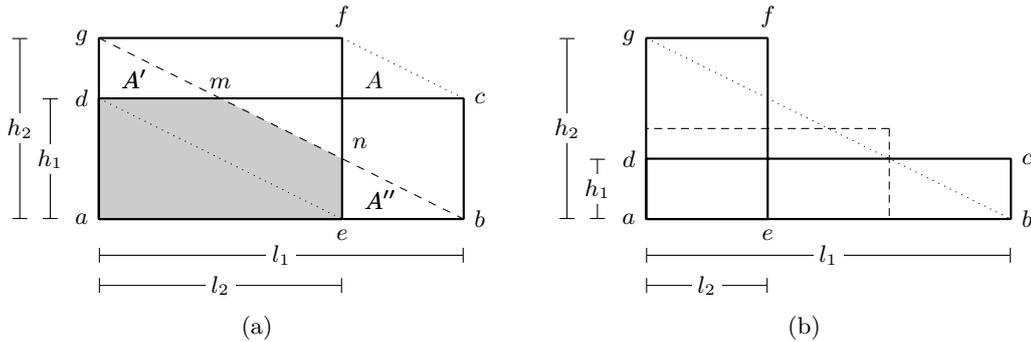


Abbildung 2.2

2.2(b). Bezeichne k die kleinste natürliche Zahl, für welche $2kl_2 > l_1$ gilt. Dann zerlegen wir das Rechteck R_2 in k gleich große Teile, indem wir es $k - 1$ mal horizontal zerschneiden. Legt man diese Teile nun nebeneinander, so erhält man ein Rechteck R'_2 mit Länge kl_2 , welches klarerweise zu R_2 zerlegungsgleich ist. Nach dem ersten Fall ist $R'_2 \sim R_1$, also auch $R_2 \sim R_1$. \square

2.3 Satz (Bolyai-Gerwien). *Haben zwei Polytope im \mathbb{R}^2 den gleichen Flächeninhalt, so sind sie bereits zerlegungsgleich.*

Beweis. Seien $P, Q \subseteq \mathbb{R}^2$ Polytope mit gleichem Flächeninhalt. Jedes Polytop lässt sich in endlich viele Dreiecke zerlegen, es gibt also Dreiecke T_1, \dots, T_n mit $P \sim T_1 \cup \dots \cup T_n$. Nach Lemma 2.1 ist jedes T_i zerlegungsgleich zu einem Rechteck R_i , daher gilt $P \sim R_1 \cup \dots \cup R_n$. Wegen Lemma 2.2 kann man die Rechtecke so wählen, dass alle eine gemeinsame Seitenlänge haben. Legt man die R_i an dieser Seite aneinander, erhält man ein Rechteck R , welches zu P zerlegungsgleich ist. Genauso erhält man ein Rechteck R' , welches zu Q zerlegungsgleich ist. Nun haben R und R' den selben Flächeninhalt und sind daher nach Lemma 2.2 zerlegungsgleich. Also gilt $P \sim R \sim R' \sim Q$ und damit $P \sim Q$. \square

2.2 Zerlegungsgleichheit bezüglich spezieller Untergruppen der Bewegungsgruppe

In Satz 2.3 haben wir Zerlegungsgleichheit bezüglich E betrachtet. Nun stellt sich die Frage, ob sich dieser Satz verschärfen lässt, indem man kleinere Gruppen von

Bewegungen betrachtet. Wir werden sehen, dass für die Gruppe aller Translationen T diese Aussage nicht mehr stimmt und weiters die minimale Gruppe G bestimmen, für die G -Zerlegungsgleichheit noch äquivalent zur Flächengleichheit ist. Wir stützen uns dabei auf Resultate aus [8] und [2].

2.4 Lemma. *Haben zwei Rechtecke den selben Flächeninhalt, so sind sie translativ zerlegungsgleich. Klarerweise gilt dies dann auch für endliche Vereinigungen von Rechtecken.*

Um dies zu beweisen können wir vorgehen wie bei Lemma 2.2, wobei dort ganz zu Beginn die Rechtecke so übereinander gelegt werden, dass sie einen gemeinsamen rechten Winkel haben. Ansonsten werden ausschließlich Translationen verwendet. Das folgende Lemma zeigt, dass in diesem ersten Schritt Rotationen vermieden werden können.

2.5 Lemma. *Sei R ein Rechteck und H eine Gerade. Dann gibt es ein Rechteck R' , welches eine zu H parallele Seite besitzt und T -zerlegungsgleich zu R ist.*

Beweis. Wir zeichnen durch einen Eckpunkt von R eine zu H parallele Gerade ein. Diese teilt R in zwei Teile, wobei eines davon ein Dreieck ist, vgl. Abbildung 2.3. Verschiebt man dieses Dreieck an das gegenüberliegende Ende des Rechtecks, so

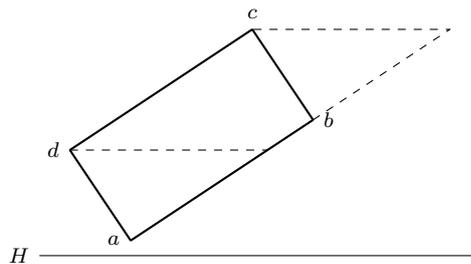


Abbildung 2.3

erhält man ein Parallelogramm, welches eine zu H parallele Seite hat. Wir zeichnen die Höhe zwischen einem stumpfen Winkel und einer zu H parallelen Seite ein. Liegt diese Höhe ganz innerhalb des Parallelogramms, schneidet man entlang dieser und verschiebt das erhaltene Dreieck so, dass ein Rechteck entsteht, vgl. Abbildung 2.4. Dieses Rechteck hat eine zu H parallele Seite. Liegt die Höhe aber nicht ganz

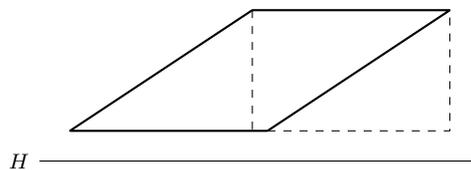


Abbildung 2.4

innerhalb des Parallelogramms, muss dieses zuerst mit zu H parallelen Geraden in

ausreichend viele gleich große Teile zerschnitten werden. Diese verschiebt man dann, sodass ein neues Parallelogramm entsteht, in welchem nun die Höhe ganz enthalten ist, siehe Abbildung 2.5. \square

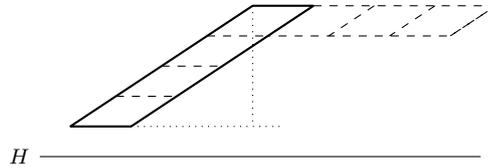


Abbildung 2.5

Oben wurde bereits erwähnt, dass Flächengleichheit kein hinreichendes Kriterium für T -Zerlegungsgleichheit ist. Wir suchen also notwendige und hinreichende Bedingungen für die translative Zerlegungsgleichheit. Zu diesem Zweck suchen wir nun einfach additive, T -invariante Funktionale $\varphi_i: \bigcup \mathcal{P}_o^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I$, sodass für zwei Polytope $P, Q \in \bigcup \mathcal{P}_o^2$ aus

$$\text{vol}_2(P) = \text{vol}_2(Q) \quad \text{und} \quad \varphi_i(P) = \varphi_i(Q), \quad \text{für alle } i \in I,$$

schließlich auch die T -Zerlegungsgleichheit von P und Q folgt.

Gegeben sei eine orientierte Gerade p . Weiters sei $P \in \mathcal{P}_o^2$ ein konvexes Polytop und E eine Kante von P . Ist E parallel zu p und liegt P auf der linken Seite von der von E aufgespannten Geraden p_E , versehen mit der selben Orientierung wie p , so ordnen wir der Kante E den Koeffizienten $\varepsilon_p(E, P) = 1$ zu. Liegt P aber auf der rechten Seite von p_E , setzen wir $\varepsilon_p(E, P) = -1$. Falls E nicht parallel zu p liegt, sei $\varepsilon_p(E, P) = 0$. Die Abbildung $J_p: \mathcal{P}_o^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir durch

$$J_p(P) = \sum_{E \in \mathcal{F}^1(P)} \varepsilon_p(E, P) L(E),$$

wobei $L(E)$ die Länge der Kante E bezeichnet. Wir wollen zeigen, dass diese Abbildung T -invariant und einfach additiv ist. Sei H eine Gerade, die das Polytop P in P_1 und P_2 zerschneidet. Zu zeigen ist, dass

$$J_p(P) = J_p(P_1) + J_p(P_2)$$

gilt. Wir müssen nur solche Kanten untersuchen, die parallel zu p liegen, da alle anderen keinen Betrag zu $J_p(P)$ liefern. Für so eine Kante E von P gibt es nun zwei Möglichkeiten. Entweder sie ist auch eine Kante von einem der Polytope P_1 oder P_2 , oder sie wird von H in zwei Teile E_1, E_2 geteilt. Im ersten Fall liegt auch P_1 bzw. P_2 auf der selben Seite von p_E wie P , daher muss $\varepsilon_p(E, P) = \varepsilon_p(E, P_1)$ bzw. $\varepsilon_p(E, P) = \varepsilon_p(E, P_2)$ gelten. Im zweiten Fall liegen beide Polytope P_1 und P_2 auf der selben Seite von p_E wie P und daher sind alle Koeffizienten gleich. Außerdem addieren sich die Längen der beiden Stücke E_1 und E_2 zu $L(E)$ auf. In diesen beiden

Fällen treten also in der Gleichung insgesamt die selben Werte auf. Falls H parallel zu p liegt, liefert eine weitere Kante E , die jedoch keine Kante von P ist, Beiträge für $J_p(P_1)$ und $J_p(P_2)$ und zwar jene, die durch das Zerschneiden von P entsteht. Die Polytope P_1, P_2 liegen auf verschiedenen Seiten von p_E , daher gilt in diesem Fall $\varepsilon_p(E, P_1) = -\varepsilon_p(E, P_2)$. Insgesamt liefert E also keinen Beitrag. Damit ist J_p auf \mathcal{P}_o^2 einfach additiv. Da für jede Translation $t \in T$ klarerweise E parallel zu $t(E)$ ist und die Orientierung unverändert bleibt, ist J_p eine T -invariante einfach additive Abbildung.

Nach Satz 1.2 lässt sich J_p einfach additiv auf ganz $\bigcup \mathcal{P}_o^2$ fortsetzen. Die T -Invarianz bleibt dabei erhalten. Gemeinsam mit Satz 1.3 erhalten wir also

$$J_p(P) = J_p(Q) \quad \text{für} \quad P \sim_T Q. \quad (2.1)$$

Jetzt lässt sich auch sehr schnell ein Beispiel finden, welches zeigt, dass aus der Flächengleichheit zweier Polytope die T -Zerlegungsgleichheit noch nicht folgen muss. Ist D ein Dreieck, p eine orientierte Gerade, die parallel zu einer der Kanten von D ist und R ein Rechteck mit dem selben Flächeninhalt wie D , dann ist klarerweise $J_p(D) \neq 0 = J_p(R)$. Nach Gleichung (2.1) können daher Dreiecke und Rechtecke niemals T -zerlegungsgleich sein.

2.6 Satz. *Zwei Polytope im \mathbb{R}^2 sind genau dann T -zerlegungsgleich, wenn sie den selben Flächeninhalt haben und $J_p(P) = J_p(Q)$ für jede orientierte Gerade p gilt.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist mit Gleichung (2.1) bereits gezeigt. Seien also P und Q zwei flächengleiche Polytope, die für jede orientierte Gerade p die Gleichheit $J_p(P) = J_p(Q)$ erfüllen. Wir wählen eine beliebige Gerade H und zeichnen durch jede Ecke von P und Q Geraden ein, die normal auf H stehen. Dadurch werden die beiden Polytope in Dreiecke und Trapeze zerlegt, wobei jeweils eine Seite der Dreiecke und die Basen der Trapeze normal auf H stehen. Die Dreiecke können wir jeweils durch zwei Trapeze ersetzen, so wie in Abbildung 2.6. Jedes Trapez lässt sich

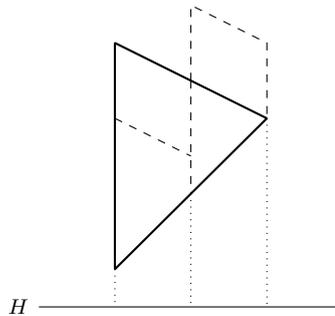


Abbildung 2.6

in rechtwinkelige Trapeze zerlegen, wobei hierfür möglicherweise mit weiteren zu H normal stehenden Geraden geschnitten werden muss, vgl. Abbildung 2.7.

Insgesamt ergibt sich

$$P \sim_T P_1 \cup \dots \cup P_m \quad \text{und} \quad Q \sim_T Q_1 \cup \dots \cup Q_n, \quad (2.2)$$

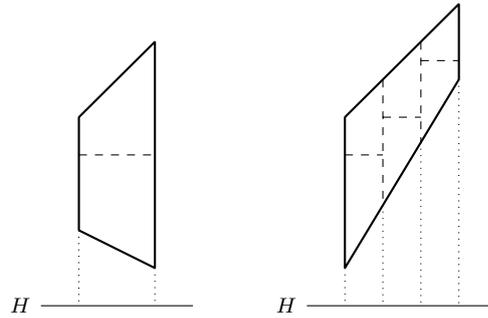


Abbildung 2.7

wobei die P_i und Q_j rechtwinkelige Trapeze mit höchstens einer Seite, die weder normal noch parallel zu H liegt, sind. Sind alle P_i und Q_j Rechtecke, so folgt wegen $\text{vol}_2(P) = \text{vol}_2(Q)$ und Lemma 2.4 die Zerlegungsgleichheit von P und Q . Sei daher o.B.d.A. P_1 kein Rechteck und a_1b_1 jene Seite, die nicht normal oder parallel zu H liegt. Wähle p als eine orientierte Gerade, die parallel zu a_1b_1 ist und sodass P_1 auf der linken Seite von $p_{a_1b_1}$ liegt. Dann gilt also $J_p(P_1) > 0$. Wir nehmen an, es gibt in der Zerlegung $P \sim_T P_1 \cup \dots \cup P_m$ noch weitere Trapeze P_k , die eine Seite haben, die parallel zu p liegt, für die also $J_p(P_k) \neq 0$ ist. Sei vorerst P_2 ein Trapez mit $J_p(P_2) < 0$ und bezeichne a_2b_2 jene Seite, die parallel zu p liegt. Wir nehmen an, die Seite a_1b_1 sei länger als a_2b_2 . Dann unterteilen wir a_1b_1 in die Strecken a_1c und cb_1 , sodass $a_1c \cong_T a_2b_2$. Nun zerschneidet man P_1 mit der Geraden, die normal auf H steht und durch den Punkt c geht. Verschiebt man jetzt jenes Stück von P_1 mit

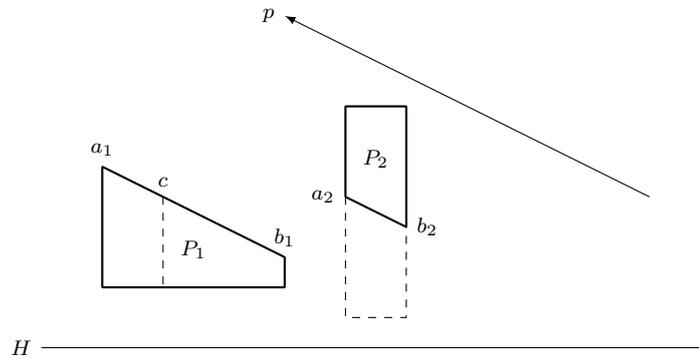


Abbildung 2.8

der Seite a_1c so, dass es an der Seite a_2b_2 von P_2 zu liegen kommt, dann erhält man

$$P_1 \cup P_2 \sim_T P' \cup R,$$

wobei P' ein Trapez mit $J_p(P') > 0$ und R ein Rechteck ist, siehe Abbildung 2.8. In dem Fall, dass a_2b_2 die längere Seite ist, erhält man entsprechend $J_p(P') < 0$. Verfährt man in dieser Art weiter, erhält man nach endlich vielen Schritten schließlich

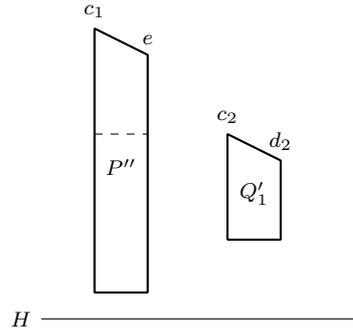


Abbildung 2.9

eine Zerlegung

$$P \sim_T P'_1 \cup \dots \cup P'_{n'} \cup R_1 \cup \dots \cup R_s \cup \tilde{P}_1 \cup \dots \cup \tilde{P}_t,$$

in der die P'_i Trapeze sind, für die alle $J_p(P'_i) \neq 0$ das selbe Vorzeichen haben, alle R_i Rechtecke sind und alle \tilde{P}_i jene Trapeze, die keine Seite haben, die parallel zu p liegt.

Genauso erhält man eine neue Zerlegung

$$Q \sim_T Q'_1 \cup \dots \cup Q'_{m'} \cup S_1 \cup \dots \cup S_u \cup \tilde{Q}_1 \cup \dots \cup \tilde{Q}_v,$$

wobei auch hier die Q'_j Trapeze sind, für die $J_p(Q'_j) \neq 0$ immer das selbe Vorzeichen hat, alle S_j Rechtecke sind und \tilde{Q}_j jene Trapeze, die keine Seite parallel zu p haben. Nach Voraussetzung ist $J_p(P) = J_p(Q)$, also folgt

$$J_p(P'_1) + \dots + J_p(P'_{n'}) = J_p(Q'_1) + \dots + J_p(Q'_{m'})$$

und darum müssen alle $J_p(P'_i), J_p(Q'_j)$ das selbe Vorzeichen haben. Bezeichne mit c_1d_1 bzw. c_2d_2 die Seiten von P'_1 bzw. Q'_1 , die parallel zu p liegen. Wir zerlegen wieder die längere der beiden Seiten, o.B.d.A. c_1d_1 , in zwei Teile c_1e und ed_1 , sodass c_1e T -kongruent zu der kürzeren Seite c_2d_2 wird. Dann zerschneiden wir P'_1 wieder entlang einer Normalen von H in zwei Trapeze P'' und P^* , wobei die Seite c_1e in P'' und ed_1 in P^* enthalten ist. Sind die Basen von P'' länger als jene von Q'_1 , so ist $P'' \sim_T Q'_1 \cup R'$, wobei R' ein Rechteck ist, vgl. Abbildung 2.9. Sind hingegen die Basen von Q_1 länger, erhält man entsprechend $Q'_1 \sim_T P'' \cup S'$ mit einem Rechteck S' . Daher gilt

$$P \sim_T Q'_1 \cup R' \cup P^* \cup P'_2 \cup \dots \cup P'_{n'} \cup R_1 \cup \dots \cup R_s \cup \tilde{P}_1 \cup \dots \cup \tilde{P}_t$$

$$Q \sim_T Q'_1 \cup Q'_2 \cup \dots \cup Q'_{m'} \cup S_1 \cup \dots \cup S_u \cup \tilde{Q}_1 \cup \dots \cup \tilde{Q}_v$$

bzw. im zweiten Fall

$$P \sim_T P'' \cup P^* \cup P'_2 \cup \dots \cup P'_{n'} \cup R_1 \cup \dots \cup R_s \cup \tilde{P}_1 \cup \dots \cup \tilde{P}_t$$

$$Q \sim_T P'' \cup S' \cup Q'_2 \cup \dots \cup Q'_{m'} \cup S_1 \cup \dots \cup S_u \cup \tilde{Q}_1 \cup \dots \cup \tilde{Q}_v.$$

In beiden Fällen verringert sich die Anzahl der verschiedenen Trapeze um eins. Wiederholt man dieses Vorgehen für alle weiteren Trapeze mit einer Seite parallel zu p und den gesamten Vorgang für alle möglichen orientierten Geraden p , erhält man wegen $J_p(P) = J_p(Q)$ für alle p nach endlich vielen Schritten Zerlegungen der Form

$$\begin{aligned} P &\sim_T \hat{A}_1 \cup \dots \cup \hat{A}_k \cup \hat{R}_1 \cup \dots \cup \hat{R}_s \\ Q &\sim_T \hat{A}_1 \cup \dots \cup \hat{A}_k \cup \hat{S}_1 \cup \dots \cup \hat{S}_u, \end{aligned}$$

wobei die \hat{A}_l Trapeze und alle \hat{R}_i und \hat{S}_j Rechtecke sind. Mit Lemma 2.4 folgt wegen der Flächengleichheit von P und Q , dass

$$\hat{R}_1 \cup \dots \cup \hat{R}_s \sim_T \hat{S}_1 \cup \dots \cup \hat{S}_u,$$

womit schließlich auch $P \sim_T Q$ gezeigt ist. \square

Obwohl überabzählbar viele verschiedene Funktionale J_p existieren, sind für je zwei Polytope P, Q fast alle der Bedingungen $J_p(P) = J_p(Q)$ trivialerweise erfüllt, und daher nur endlich viele zu überprüfen.

Wenden wir uns nun anderen Untergruppen von E zu. Im Beweis von Lemma 2.1 verwenden wir nur Punktspiegelungen, also haben wir damit bereits die folgende verschärfte Version gezeigt.

2.7 Lemma. *Jedes Dreieck ist S -zerlegungsgleich zu einem Rechteck.*

Zusammen mit Lemma 2.4 ergibt sich jetzt, dass Zerlegungsgleichheit bezüglich S auch äquivalent zur Flächengleichheit ist. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 2.3, wobei einfach Lemma 2.4 und Lemma 2.7 anstelle von Lemma 2.2 und Lemma 2.1 verwendet wird.

2.8 Satz. *Zwei Polytope im \mathbb{R}^2 mit dem gleichen Flächeninhalt sind zerlegungsgleich bezüglich S .*

Klarerweise gilt eine entsprechende Aussage für alle $U \leq E$, die S enthalten. Insbesondere also auch für die Gruppe E^+ aller orientierungserhaltenden Bewegungen.

2.9 Korollar. *Zwei Polytope im \mathbb{R}^2 mit dem gleichen Flächeninhalt sind E^+ -zerlegungsgleich.*

Nun wollen wir uns der Frage widmen, wie groß die kleinste Untergruppe von E sein muss, damit Zerlegungsgleichheit bezüglich dieser äquivalent zur Flächengleichheit ist. Daher werden wir in diesem Abschnitt auch nicht voraussetzen, dass T in den betrachteten Bewegungsgruppen enthalten ist. Vladimir Boltjanskiĭ zeigte in [1], dass S bereits minimal mit dieser Eigenschaft ist.

2.10 Lemma. *Sei G eine Gruppe von Bewegungen mit der Eigenschaft, dass zwei Polytope genau dann G -zerlegungsgleich sind, wenn sie die gleiche Fläche haben. Dann ist G transitiv, das heißt für je zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^2$ gibt es eine Bewegung in G , die x in y überführt.*

Beweis. Angenommen es gibt einen Punkt x_o , der nicht durch eine Bewegung aus G auf den Punkt y_o abgebildet werden kann. Bezeichne mit N_{x_o} die Menge all jener Punkte, die von x_o aus über eine Bewegung aus G erreicht werden können. Definiere die Abbildung $W_{x_o}: \mathcal{P}_o^2 \rightarrow \mathbb{R}/(\pi\mathbb{Z})$ durch

$$W_{x_o}(P) = \sum_{v \in \mathcal{F}^o(P) \cap N_{x_o}} \theta(v, P)$$

für $P \in \mathcal{P}_o$, dabei bezeichnet $\theta(v, P)$ den inneren Winkel von P an dem Eckpunkt v .

Wir wollen zeigen, dass W_{x_o} eine G -invariante einfach additive Abbildung ist. Sei daher $P \in \mathcal{P}_o^2$ und H eine Gerade, die P in P_1 und P_2 zerschneidet. Wir müssen also nachweisen, dass

$$W_{x_o}(P) = W_{x_o}(P_1) + W_{x_o}(P_2)$$

gilt. Für eine Ecke $v \in \mathcal{F}^o(P) \cap N_{x_o}$ mit Winkel $\theta(v, P) = \alpha$ können nun zwei Fälle eintreten. Entweder v liegt direkt auf H oder auf einer Seite von H . Im ersten Fall ergibt sich α als die Summe der Winkel $\theta(v, P_1)$ und $\theta(v, P_2)$. Im zweiten Fall ist v eine Ecke von genau einem der Polytope P_1 oder P_2 . In beiden Fällen treten auf beiden Seiten der Gleichung insgesamt die selben Werte auf. Zusätzlich können auf der rechten Seite der Gleichung Ecken auftreten, die keine Eckpunkte von P sind. Solche Ecken liegen im Inneren einer Kante von P und müssen als Ecke von P_1 und P_2 auftreten. Hier addieren sich die Winkel aber auf π und liefern daher in $\mathbb{R}/(\pi\mathbb{Z})$ keinen Beitrag. Damit ist W_{x_o} einfach additiv. Da N_{x_o} klarerweise invariant unter G ist und Bewegungen immer winkeltreu sind, ist W_{x_o} invariant unter Bewegungen aus G .

Wegen Satz 1.2 lässt sich W_{x_o} auf $\bigcup \mathcal{P}_o^2$ fortsetzen. Zusammen mit dem eben Gezeigten und Satz 1.3 erhält man

$$W_{x_o}(P) = W_{x_o}(Q) \quad \text{für } P \sim_G Q. \quad (2.3)$$

Sei D_1 ein stumpfwinkeliges gleichschenkliges Dreieck mit den Eckpunkten x_o, y_o und v , wobei der stumpfe Winkel bei x_o liegt. Weiters sei D_2 ein zu D_1 E -kongruentes Dreieck mit den Eckpunkten x_o, y_o und w , wobei hier der stumpfe Winkel bei y_o liegt. Bezeichne ϑ den spitzen Winkel der Dreiecke, vgl. Abbildung 2.10. Da $x_o \in N_{x_o}$ und

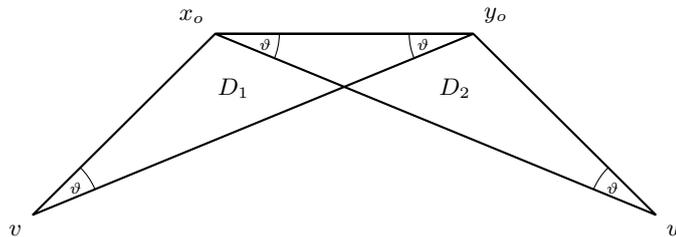


Abbildung 2.10

$y_o \notin N_{x_o}$, ergibt sich für $W_{x_o}(D_1)$ entweder der Wert $\pi - \vartheta$, falls $v \in N_{x_o}$, oder $\pi - 2\vartheta$,

falls $v \notin N_{x_o}$. Für $W_{x_o}(D_2)$ erhält man aber 2ϑ oder ϑ , je nachdem, ob $w \in N_{x_o}$ oder nicht. Nach Voraussetzung sind die beiden Dreiecke G -zerlegungsgleich, daher folgt aus Gleichung (2.3) $k\vartheta = 0$ in $\mathbb{R}/(\pi\mathbb{Z})$ für ein $k \in \{2, 3, 4\}$. Das ist aber ein Widerspruch zu $\vartheta < \frac{\pi}{4}$ und darum muss G transitiv sein. \square

2.11 Lemma. *Sei G eine Gruppe von Bewegungen mit der Eigenschaft, dass zwei Polytope genau dann G -zerlegungsgleich sind, wenn sie die gleiche Fläche haben. Dann ist zumindest eine Punktspiegelung in G enthalten.*

Beweis. Betrachten wir zunächst den Fall, dass G nur orientierungserhaltende Bewegungen enthält. Sei p eine beliebige orientierte Gerade. Wir nennen eine orientierte Gerade q *markiert*, falls es eine Bewegung $g \in G$ gibt, sodass $g(p)$ und q parallel und gleich orientiert sind. Für eine orientierte Gerade q bezeichnen wir mit q' die entgegengesetzt orientierte Gerade.

Wir wollen nun die Existenz einer markierten orientierten Geraden q zeigen, für die auch q' markiert ist. Sei indirekt angenommen, so eine Gerade gibt es nicht. Sei $P \in \mathcal{P}_o^2$ ein konvexes Polytop und E eine Kante von P . Wir orientieren die von E aufgespannte Gerade p_E so, dass P auf der linken Seite von p_E liegt. Ist p_E mit dieser Orientierung markiert, so ordnen wir der Kante E den Koeffizienten $\delta_p(E, P) = 1$ zu. Ist aber p'_E markiert, so setzen wir $\delta_p(E, P) = -1$. Falls weder p_E noch p'_E markiert ist, sei $\delta_p(E, P) = 0$. Die Abbildung $K_p: \mathcal{P}_o^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir durch

$$K_p(P) = \sum_{E \in \mathcal{F}^1(P)} \delta_p(E, P)L(E),$$

wobei $L(E)$ die Länge der Kante E bezeichnet. Wir wollen wieder zeigen, dass K_p eine G -invariante einfach additive Abbildung ist. Hier werden wir nur die G -Invarianz nachweisen, da sich die einfache Additivität ganz ähnlich wie für die Abbildung J_p bei den Translationen zeigen lässt. Sei $P \in \mathcal{P}_o^2$ ein konvexes Polytop, E eine Kante von P und f eine beliebige Bewegung aus G . Ist $\delta_p(E, P) = 1$, so existiert eine Bewegung $g \in G$, sodass $g(p)$ und p_E parallel und gleich orientiert sind. Dann sind auch $f \circ g(p)$ und $f(p_E)$ parallel und gleich orientiert. Also ist auch $f(p_E)$ markiert. Da f orientierungserhaltend ist, liegt das Polytop $f(P)$ auf der linken Seite von $f(p_E)$, und daher ist auch $\delta_p(f(E), f(P)) = 1$. Genauso lässt sich zeigen, dass für $\delta_p(E, P) = -1$ auch $\delta_p(f(E), f(P)) = -1$ gelten muss. Gilt nun $\delta_p(E, P) = 0$, so muss wegen $P = f^{-1}(f(P))$ und den ersten beiden Fällen auch $\delta_p(f(E), f(P)) = 0$ sein. Also ist K eine G -invariante einfach additive Abbildung.

Betrachte nun zwei kongruente Dreiecke D, D' mit den Seitenlängen $1, \sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$, wie in Abbildung 2.11. Man beachte, dass die beiden Kanten mit Seitenlänge 1 parallel zu p sind. Da die beiden Dreiecke flächengleich sind, sind sie nach Voraussetzung auch G -zerlegungsgleich. Daher muss nach Satz 1.3

$$K(D) = \delta_1 1 + \delta_2 \sqrt{2} + \delta_3 \sqrt{3} = \delta'_1 1 + \delta'_2 \sqrt{2} + \delta'_3 \sqrt{3} = K(D')$$

gelten, wobei $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ die Koeffizienten der Kanten von D und $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3$ die Koeffizienten der Kanten von D' bezeichnen. Alle diese Koeffizienten können nur Werte aus

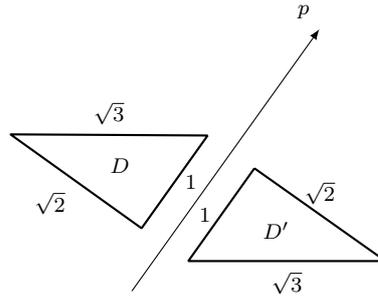


Abbildung 2.11

$\{-1, 0, 1\}$ annehmen und deshalb muss $\delta_i = \delta'_i$, $i = 1, 2, 3$, gelten. Damit erhalten wir einen Widerspruch, denn es gilt offensichtlich $\delta_1 = 1$ und $\delta'_1 = -1$.

Also muss es eine orientierte Gerade q geben, sodass sowohl q als auch q' markiert sind. Bezeichnen $g, g' \in G$ die Bewegungen, die p auf eine zu q bzw. q' parallele und gleich orientierte Gerade abbilden. Dann ist $g' \circ g^{-1}$ eine orientierungserhaltende Bewegung, die q in q' überführt. Also ist $g' \circ g^{-1} \in G$ eine Punktspiegelung.

Wir müssen noch den Fall behandeln, dass G auch nicht-orientierungserhaltende Bewegungen enthält. Die einzigen nicht-orientierungserhaltenden Bewegungen im \mathbb{R}^2 sind Gleitspiegelungen. Eine Gleitspiegelung ist eine Hintereinanderausführung einer Spiegelung um eine Achse und einer Translation entlang dieser Achse. Es muss also zumindest eine Gleitspiegelung h in G geben. Wir wählen hier die orientierte Gerade p so, dass sie normal auf die Achse von h steht. Dann nennen wir eine orientierte Gerade q markiert, wenn es eine orientierungserhaltende Bewegung $g \in G$ gibt, sodass $g(p)$ und q parallel und gleich orientiert sind. Der Beweis funktioniert nun genauso wie vorher, außer dass wir für die G -Invarianz der Abbildung K auch nicht-orientierungserhaltende Bewegungen berücksichtigen müssen. Sei also $f \in G$ nicht orientierungserhaltend, $P \in \mathcal{P}_o^2$ ein konvexes Polytop und E eine Kante von P . Ist $\delta_p(E, P) = 1$, dann existiert eine Bewegung $g \in G$, sodass $g(p)$ und p_E parallel und gleich orientiert sind. Das Polytop $f(P)$ liegt auf der linken Seite von $f(p_E)'$, und da $f \circ g \circ h$ eine orientierungserhaltende Bewegung mit $f \circ g \circ h(p) = f(p_E)'$ ist, folgt $\delta_p(f(E), f(P)) = 1$. Die anderen Fälle für $\delta_p(E, P)$ lassen sich ganz ähnlich behandeln. \square

2.12 Satz. *Sei G eine Gruppe von Bewegungen mit der Eigenschaft, dass zwei Polytope genau dann G -zerlegungsgleich sind, wenn sie die gleiche Fläche haben. Dann enthält G alle Translationen und Punktspiegelungen.*

Beweis. Nach Lemma 2.11 gibt es eine Punktspiegelung f in G . Bezeichne c das Zentrum von f und $x \in \mathbb{R}^2$ einen beliebigen Punkt. Wegen Lemma 2.10 muss es eine Bewegung $g \in G$ geben, die c auf x abbildet. Dann ist auch die Bewegung $h := g^{-1} \circ f \circ g$ in G enthalten. Dieses h ist eine Punktspiegelung mit Fixpunkt x , also genau die Punktspiegelung mit Zentrum x . Da x beliebig war, muss G bereits alle Punktspiegelungen enthalten. Jede Translation lässt sich als Komposition zweier

Punktspiegelungen darstellen, und damit enthält G ganz S .

□

3 Zerlegungsgleichheit im \mathbb{R}^n

Es stellt sich natürlich die Frage, ob sich allgemein notwendige und hinreichende Bedingungen für Zerlegungsgleichheit bezüglich $E(n)$ im \mathbb{R}^n finden lassen. Ganz offensichtlich muss für zwei Polytope $P, Q \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$ die Bedingung $\text{vol}_n(P) = \text{vol}_n(Q)$ immer erfüllt sein. Im zweidimensionalen Fall ist dies nach dem Satz 2.3 von Bolyai-Gerwien auch hinreichend. Überraschenderweise gilt dies bereits im \mathbb{R}^3 nicht mehr, ein explizites Gegenbeispiel ist im nächsten Kapitel gegeben.

Der Schweizer Mathematiker Hugo Hadwiger beschäftigte sich mitunter mit dieser Fragestellung und zeigte schließlich in seinem Buch [7] mit Hilfe von Zylinderklassen, dass auch die Umkehrung von Satz 1.3 gilt. In diesem Kapitel wollen wir dieses Resultat zeigen, wobei wir uns teilweise auch auf [2] stützen.

3.1 Ergänzungsgleichheit und Zerlegungsgleichheit

Eine wichtige Definition in diesem Zusammenhang ist die folgende. Zwei Polytope $P, Q \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$ heißen *ergänzungsgleich* bezüglich einer Gruppe G von Bewegungen, wenn es $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_k \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$ mit $P_i \cong_G Q_i$, $i = 1, \dots, k$, gibt, sodass

$$P \cup P_1 \cup \dots \cup P_k \sim_G Q \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_k$$

gilt. Man beachte, dass es keine Einschränkung ist, wenn man hier statt G -Zerlegungsgleichheit G -Kongruenz verlangt. Sind nämlich A_1, \dots, A_l bzw. B_1, \dots, B_l jene Polytope mit $A_j \cong_G B_j$, in die sich $\tilde{P} := P \cup P_1 \cup \dots \cup P_k$ bzw. $\tilde{Q} := Q \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_k$ zerlegen lassen, dann gilt sicher

$$P \cup P_1 \cup \dots \cup P_k \cup \overline{B_1 \setminus \tilde{P}} \cup \dots \cup \overline{B_l \setminus \tilde{P}} \cong_G Q \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_k \cup \overline{A_1 \setminus \tilde{Q}} \cup \dots \cup \overline{A_l \setminus \tilde{Q}}.$$

Erstaunlicherweise sind zwei ergänzungsgleiche Polytope immer auch zerlegungsgleich, wie Jean-Pierre Sydler [14] erstmals für den dreidimensionalen Fall und später Hadwiger für den \mathbb{R}^n in [5] zeigte. Wir werden hier den Beweis aus Vladimir Boltjanski's Buch [2] präsentieren, der sich wiederum auf [16] stützt.

3.1 Lemma. *Seien $P, Q \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$ Polytope und gelte $\text{vol}(P) > \text{vol}(Q)$. Dann existiert eine Zerlegung $P = P_1 \cup P_2$, sodass P_1 T-zerlegungsgleich zu Q ist.*

Beweis. Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{vol}_n(P) - \text{vol}_n(Q))$. Wir zerlegen den \mathbb{R}^n in kongruente Würfel und bezeichnen mit A die Vereinigung aller Würfel, die in P enthalten sind und mit B die Vereinigung jener, die nichtleeren Schnitt mit Q haben. Wir wählen die

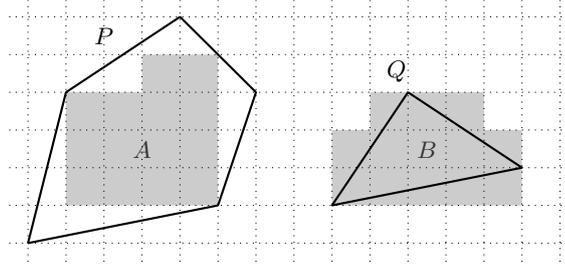


Abbildung 3.1

Würfel so klein, dass die Ungleichungen

$$\text{vol}_n(P) - \text{vol}_n(A) < \varepsilon \quad \text{und} \quad \text{vol}_n(B) - \text{vol}_n(Q) < \varepsilon$$

erfüllt werden. Daraus folgt $\text{vol}_n(A) > \text{vol}_n(B)$, also enthält A mehr Würfel als B . Bestehe B aus den Würfeln W_1, \dots, W_k und sei V_1, \dots, V_k eine beliebige Auswahl von Würfeln aus A . Für $i = 1, \dots, k$ sei weiters t_i jene Translation, die W_i auf V_i abbildet. Wir setzen $R_i = Q \cap W_i$, $S_i = t_i(R_i)$ für $i = 1, \dots, k$ und $P_1 = S_1 \cup \dots \cup S_k$ und erhalten

$$Q = R_1 \cup \dots \cup R_k \sim_T S_1 \cup \dots \cup S_k = P_1 \subseteq P.$$

Wir wählen $P_2 = \overline{P \setminus P_1}$ und erhalten das Gewünschte. \square

3.2 Lemma. Sei G eine Gruppe von Bewegungen im \mathbb{R}^n . Seien $P, Q \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$ Polytope und gelte

$$P \cup P_1 \cup \dots \cup P_k \cong_G Q \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_k,$$

wobei $P_i \sim_G Q_i$ für $i = 1, \dots, k$ und $2 \text{vol}_n(P_k) < \text{vol}_n(P)$. Dann gibt es Polytope $P^{(1)}$ und $P_1^{(1)}, \dots, P_{k-1}^{(1)}$, sodass

$$P^{(1)} \sim_G P, \quad P_i^{(1)} \sim_G Q_i, \quad \text{für } i = 1, \dots, k-1,$$

und

$$P^{(1)} \cup P_1^{(1)} \cup \dots \cup P_{k-1}^{(1)} \cong_G Q \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_{k-1}$$

gilt.

Beweis. Sei $g \in G$ jene Bewegung, für die $P \cup P_1 \cup \dots \cup P_k = g(Q \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_k)$ gilt. Dann lässt sich jedes P_i zerlegen in $U_i := P_i \cap g(Q_k)$ und $V_i := P_i \setminus g(Q_k)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(U_1 \cup \dots \cup U_k) &= \text{vol}_n(g(Q_k) \cap (P_1 \cup \dots \cup P_k)) \\ &\leq \text{vol}_n(g(Q_k)) \\ &= \text{vol}_n(Q_k) \\ &= \text{vol}_n(P_k) \\ &< \text{vol}_n(P) - \text{vol}_n(P_k) \\ &= \text{vol}_n(P) - \text{vol}_n(g(Q_k)) \\ &\leq \text{vol}_n(\overline{P \setminus g(Q_k)}), \end{aligned}$$

wobei die strikte Ungleichung in dieser Kette wegen der Voraussetzung $2 \operatorname{vol}_n(P_k) < \operatorname{vol}_n(P)$ gilt. Wir wenden Lemma 3.1 auf U_1 und $\overline{P \setminus g(Q_k)}$ an und erhalten

$$\overline{P \setminus g(Q_k)} = W_1 \cup N_1$$

mit $W_1 \sim_T U_1$, und wegen $T \subseteq G$ auch $W_1 \sim_G U_1$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}_n(U_1) + \dots + \operatorname{vol}_n(U_k) &= \operatorname{vol}_n(U_1 \cup \dots \cup U_k) \\ &< \operatorname{vol}_n(W_1 \cup N_1) \\ &= \operatorname{vol}_n(U_1) + \operatorname{vol}_n(N_1) \end{aligned}$$

und damit auch $\operatorname{vol}_n(U_2) < \operatorname{vol}_n(U_2) + \dots + \operatorname{vol}_n(U_k) < \operatorname{vol}_n(N_1)$. Also lässt sich Lemma 3.1 auch auf U_2 und N_1 anwenden. Es ergibt sich zusammen mit Obigem

$$\overline{P \setminus g(Q_k)} = W_1 \cup W_2 \cup N_2,$$

wobei $W_1 \sim_G U_1$ und $W_2 \sim_G U_2$. Verfährt man in dieser Art weiter, erhält man eine Zerlegung

$$\overline{P \setminus g(Q_k)} = W_1 \cup \dots \cup W_k \cup N$$

mit $W_i \sim_G U_i$ für $i = 1, \dots, k-1$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} g(Q_k) &= g(Q \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_k) \cap g(Q_k) \\ &= (P \cup P_1 \cup \dots \cup P_k) \cap g(Q_k) \\ &= (P \cap g(Q_k)) \cup (P_1 \cap g(Q_k)) \cup \dots \cup (P_k \cap g(Q_k)) \\ &= (P \cap g(Q_k)) \cup U_1 \cup \dots \cup U_k. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned} g(Q \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_k) &= P \cup P_1 \cup \dots \cup P_k \\ &= (P \cap g(Q_k)) \cup \overline{P \setminus g(Q_k)} \cup U_1 \cup V_1 \cup \dots \cup U_k \cup V_k \\ &= g(Q_k) \cup W_1 \cup \dots \cup W_k \cup N \cup V_1 \cup \dots \cup V_k. \end{aligned}$$

Definiert man nun $P^{(1)} = N \cup V_k \cup W_k$ und $P_i^{(1)} = V_i \cup W_i$ für $i = 1, \dots, k-1$, so erhält man

$$g(Q \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_k) = g(Q_k) \cup P^{(1)} \cup P_1^{(1)} \cup \dots \cup P_{k-1}^{(1)},$$

woraus auch

$$P^{(1)} \cup P_1^{(1)} \cup \dots \cup P_{k-1}^{(1)} = g(Q \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_{k-1})$$

folgt. Weiters ist

$$P_i^{(1)} = V_i \cup W_i \sim_G V_i \cup U_i = P_i \sim_G Q_i$$

für $i = 1, \dots, k-1$ und zusammen mit Obigem erhalten wir

$$\begin{aligned}
P &= (P \cap g(Q_k)) \cup \overline{P \setminus g(Q_k)} \\
&= (P \cap g(Q_k)) \cup W_1 \cup \dots \cup W_k \cup N \\
&\sim_G (P \cap g(Q_k)) \cup U_1 \cup \dots \cup U_k \cup N \\
&= g(Q_k) \cup N \\
&\sim_G P_k \cup N \\
&\sim_G V_k \cup W_k \cup N \\
&= P^{(1)},
\end{aligned}$$

was den Beweis vervollständigt. \square

Obiges Lemma besagt also, dass wir in gewisser Weise die Anzahl der Polytope in der Ergänzung um eins reduzieren können. Damit lässt sich nun die Äquivalenz zwischen G -Ergänzungsgleichheit und G -Zerlegungsgleichheit zeigen.

3.3 Satz. *Sei G eine Gruppe von Bewegungen im \mathbb{R}^n . Dann sind zwei Polytope $P, Q \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$ genau dann G -zerlegungsgleich, wenn sie G -ergänzungsgleich sind.*

Beweis. Zwei zerlegungsgleiche Polytope sind trivialerweise bereits ergänzungsgleich. Seien also P und Q zwei G -ergänzungsgleiche Polytope. Dann existieren $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_k \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$, sodass $P_i \cong_G Q_i$ für $i = 1, \dots, k$ und

$$P \cup P_1 \cup \dots \cup P_k \cong_G Q \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_k$$

gilt. Durch Zerteilen der P_i und Q_i lässt sich erreichen, dass die Ungleichung $2 \operatorname{vol}(P_i) < \operatorname{vol}(P)$ für alle $i = 1, \dots, k$ gilt. Mit Lemma 3.2 erhalten wir Polytope $P^{(1)}$ und $P_1^{(1)}, \dots, P_{k-1}^{(1)}$, für die

$$P^{(1)} \sim_G P, \quad P_i^{(1)} \sim_G Q_i, \quad \text{für } i = 1, \dots, k-1,$$

und

$$P^{(1)} \cup P_1^{(1)} \cup \dots \cup P_{k-1}^{(1)} \cong_G Q \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_{k-1}$$

gilt. Da das Volumen unter Bewegungen invariant ist, gilt auch hier die Ungleichung $2 \operatorname{vol}(P_i^{(1)}) < \operatorname{vol}(P^{(1)})$, und Lemma 3.2 ist wieder anwendbar. Nach j Wiederholungen ergibt sich

$$P^{(j)} \sim_G P^{(j-1)}, \quad P_i^{(j)} \sim_G Q_i, \quad \text{für } i = 1, \dots, k-j,$$

und

$$P^{(j)} \cup P_1^{(j)} \cup \dots \cup P_{k-j}^{(j)} \cong_G Q \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_{k-j}.$$

Nach k Schritten erreichen wir schließlich

$$Q \cong_G P^{(k)} \quad \text{und} \quad P^{(k)} \sim_G P^{(k-1)} \sim_G \dots \sim_G P^{(1)} \sim_G P,$$

woraus direkt $P \sim_G Q$ folgt. \square

3.2 Das formale Hauptkriterium

Für linear unabhängige Vektoren $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ und einen Punkt $a_0 \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $[a_1, \dots, a_k]$ das k -dimensionale Simplex mit den $k + 1$ Eckpunkten

$$a_0, a_0 + a_1, \dots, a_0 + a_1 + \dots + a_k.$$

Das Simplex $[a_1, \dots, a_k]$ besteht also aus allen Punkten

$$\lambda_0 a_0 + \lambda_1 (a_0 + a_1) + \dots + \lambda_k (a_0 + a_1 + \dots + a_k),$$

für die $\lambda_i \geq 0$ für alle $i = 0, 1, \dots, k$ und $\lambda_0 + \dots + \lambda_k = 1$ gilt. Ordnet man diese Summe um, so erhält man

$$(\lambda_0 + \dots + \lambda_k) a_0 + (\lambda_1 + \dots + \lambda_k) a_1 + \dots + (\lambda_{k-1} + \lambda_k) a_{k-1} + \lambda_k a_k,$$

womit sich die Darstellung

$$a_0 + \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_k a_k,$$

mit $1 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_k \geq 0$, ergibt. Der Punkt a_0 bestimmt lediglich, an welcher Stelle im Raum das Simplex liegt, daher trägt er in Hinblick auf Zerlegungsgleichheit keine Information und daher verzichten wir in der Darstellung des Simplex darauf. Jedes Simplex lässt sich mit

$$\text{conv}(b_0, \dots, b_k) = [b_1 - b_0, b_2 - b_1, \dots, b_n - b_{n-1}]$$

auf diese Weise darstellen.

3.4 Lemma. *Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig und $\alpha, \beta > 0$. Dann ist $(\alpha + \beta)[a_1, \dots, a_n]$ translativ zerlegungsgleich zu*

$$\alpha[a_1, \dots, a_n] \cup \beta[a_1, \dots, a_n] \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} (\alpha[a_1, \dots, a_i] + \beta[a_{i+1}, \dots, a_n]).$$

Beweis. Das Simplex $S = (\alpha + \beta)[a_1, \dots, a_n]$ besteht aus den Punkten

$$x = a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n, \tag{3.1}$$

wobei $\alpha + \beta \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$. Wählen wir $\{a_1, \dots, a_n\}$ als Koordinatensystem und $a_0 = 0$, so hat x die Darstellung $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Wir definieren die Polytope P_i , $i = 0, 1, \dots, n$, als die Menge jener Punkte $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, für welche die Ungleichungen

$$\alpha + \beta \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_i \geq \beta \geq \lambda_{i+1} \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0 \tag{3.2}$$

gelten. Diese P_i haben paarweise disjunktes Inneres und ihre Vereinigung ergibt ganz S . Also bilden die P_i eine Zerlegung von S .

Betrachten wir nun die einzelnen Teile genauer. Das Polytop P_0 besteht aus jenen Punkten $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, für die

$$\beta \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

erfüllt ist. Das heißt, P_0 ist gerade das Simplex $\beta[a_1, \dots, a_n]$. Die Punkte des Polytopes P_n ergeben sich durch (3.1) und die Ungleichungskette

$$\alpha + \beta \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \beta.$$

Daher ist P_n nichts anderes als das um den Punkt $\beta(a_1 + \dots + a_n)$ verschobene Simplex $\alpha[a_1, \dots, a_n]$. Für $i = 1, \dots, n-1$ lässt sich jeder Punkt $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ von P_i eindeutig als Summe von

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_i, 0, \dots, 0) \text{ und } (0, \dots, 0, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n)$$

schreiben. Mit (3.2) ergibt sich dann ähnlich wie vorher

$$P_i \sim_T \alpha[a_1, \dots, a_i] + \beta[a_{i+1}, \dots, a_n].$$

Insgesamt haben wir also

$$\begin{aligned} S &= P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_n \\ &\sim_T \alpha[a_1, \dots, a_n] \cup \beta[a_1, \dots, a_n] \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} (\alpha[a_1, \dots, a_i] + \beta[a_{i+1}, \dots, a_n]) \end{aligned}$$

erhalten. □

3.5 Korollar. *Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig und $\alpha, \beta > 0$. Dann gilt*

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} (\alpha[a_1, \dots, a_i] + \beta[a_{i+1}, \dots, a_n]) \sim_T \bigcup_{i=1}^{n-1} (\beta[a_1, \dots, a_i] + \alpha[a_{i+1}, \dots, a_n]).$$

Beweis. Das Simplex $(\alpha + \beta)[a_1, \dots, a_n]$ ist nach obigem Lemma 3.4 translativ zerlegungsgleich zu

$$\alpha[a_1, \dots, a_n] \cup \beta[a_1, \dots, a_n] \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} (\alpha[a_1, \dots, a_i] + \beta[a_{i+1}, \dots, a_n]),$$

aber auch zu

$$\beta[a_1, \dots, a_n] \cup \alpha[a_1, \dots, a_n] \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} (\beta[a_1, \dots, a_i] + \alpha[a_{i+1}, \dots, a_n]).$$

Mit Satz 3.3 erhalten wir dann das Gewünschte. □

3.6 Lemma. Sei $P \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$ ein Polytop und $\alpha, \beta > 0$. Dann gilt

$$(\alpha + \beta)P \sim_T \alpha P \cup \beta P \cup Z,$$

wobei $Z \in \mathcal{Z}_2^n$ ist.

Beweis. Wir zerlegen P in endlich viele Simplexe S_1, \dots, S_k . Nach Lemma 3.4 gilt für alle $i = 1, \dots, k$

$$(\alpha + \beta)S_i \sim_T \alpha S_i \cup \beta S_i \cup Z_i,$$

wobei $Z_i \in \mathcal{Z}_2^n$ ist. Damit erhalten wir

$$(\alpha + \beta)P \sim_T \alpha S_1 \cup \dots \cup \alpha S_k \cup \beta S_1 \cup \dots \cup \beta S_k \cup Z_1 \cup \dots \cup Z_k.$$

Da aber $Z := Z_1 \cup \dots \cup Z_k$ ebenfalls in \mathcal{Z}_2^n liegt, erhalten wir insgesamt das Gewünschte. \square

3.7 Lemma. Sei $Z \in \mathcal{Z}_k^n$ und $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$mZ \sim_T m^k \cdot Z \cup Z_0,$$

wobei $Z_0 \in \mathcal{Z}_{k+1}^n$ ist. Insbesondere muss in dem Fall, dass $k = n$ ist, $Z_0 = \emptyset$ gelten.

Beweis. Betrachten wir zuerst den Fall $k = 1$. Für $m = 1$ stimmt die Aussage trivialerweise. Sei also $m > 1$ und angenommen, die Aussage gelte für $m - 1$. Mittels Lemma 3.6 erhalten wir

$$mZ \sim_T (m - 1)Z \cup Z \cup Z_1$$

mit $Z_1 \in \mathcal{Z}_2^n$ und nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $Z_2 \in \mathcal{Z}_2^n$ mit

$$mZ \sim_T (m - 1) \cdot Z \cup Z_2 \cup Z \cup Z_1.$$

Also haben wir

$$mZ \sim_T m \cdot Z \cup Z_0$$

mit $Z_0 = Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{Z}_2^n$ erhalten.

Sei nun $k > 1$. Es genügt offensichtlich, die Aussage für einen k -stufigen Zylinder Z zu zeigen. Es gibt also konvexe Polytope $P_i \in \mathcal{P}_o^{n_i}$, sodass

$$Z = P_1 + \dots + P_k,$$

$\sum_{i=1}^k n_i = n$ und $\bigoplus_{i=1}^k \text{aff}(P_i) = \mathbb{R}^n$. Klarerweise gilt immer $mZ = mP_1 + \dots + mP_k$. Jedes der Polytope P_i lässt sich im \mathbb{R}^{n_i} mit einem einstufigen Zylinder identifizieren, und daher gilt nach Obigem

$$mP_i \sim_T m \cdot P_i \cup Z_i$$

mit $Z_i \in \mathcal{Z}_2^{n_i}$ für alle $i = 1, \dots, k$. Zusammengesetzt ergibt das

$$mZ \sim_T (m \cdot P_1 \cup Z_1) + \dots + (m \cdot P_k \cup Z_k),$$

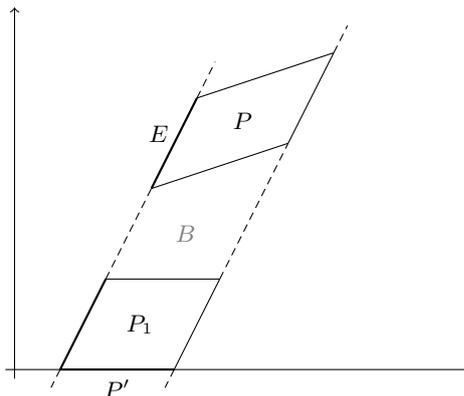


Abbildung 3.2

und nach kurzer Rechnung

$$mZ \sim_T m^k \cdot (P_1 + \dots + P_k) \cup \bigcup_{j=1}^k m^{k-j} \bigcup_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |I|=j}} \left(\sum_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} P_i + \sum_{i \in I} Z_i \right).$$

Alle vorkommenden Z_i sind entweder leer oder von der Form $Z_i = Z'_i + Z''_i$, wobei $\text{aff}(Z'_i) \oplus \text{aff}(Z''_i) = \mathbb{R}^{n_i}$. Daher sind für jedes $j = 1, \dots, k$ und $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ mit $|I| = j$ alle

$$\sum_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} P_i + \sum_{i \in I} Z_i$$

entweder leer oder $(k + j)$ -stufige Zylinder im \mathbb{R}^n . Daher liegt deren Vereinigung in \mathcal{Z}_{k+1}^n und wir erhalten insgesamt

$$mZ \sim_T m^k \cdot Z \cup Z_0$$

mit $Z_0 \in \mathcal{Z}_{k+1}^n$. □

3.8 Lemma. *Jedes Parallelepiped P im \mathbb{R}^n ist translativ zerlegungsgleich zu einem rechtwinkligen Parallelepiped.*

Beweis. Sei $E \in \mathcal{F}^1(P)$ eine Kante von P , die nicht parallel zu der Hyperebene $H_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ liegt. Wir betrachten die Projektion P' von P auf H_1 entlang $\text{aff}(E)$ und definieren $P_1 = P' + E$, vgl. Abbildung 3.2. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass P und P_1 disjunkt sind. Bezeichne B jenes Polytop, welches als Verbindungsstück zwischen P und P_1 liegt. Dann sind $P \cup B$ und $P_1 \cup B$ T -kongruent, daher gilt nach Satz 3.3 bereits $P \sim_T P_1$. Zwei gegenüberliegende Seiten von P_1 liegen parallel zu der Hyperebene H_1 , aber all jene Hyperebenen, die alle anderen $(n - 1)$ -dimensionalen Seiten enthalten, sind unverändert geblieben.

Im nächsten Schritt konstruieren wir auf die selbe Weise ein Parallelepiped $P_2 \sim_T P_1$, welches zusätzlich zwei gegenüberliegende Seiten parallel zu der Hyperebene

$x_2 = 0$ hat. Verfährt man so weiter, erhält man schließlich ein $P_n \in \mathcal{Z}_n^n$, welches nur Kanten hat, die parallel zu den Koordinatenachsen liegen und T -zerlegungsgleich zu P ist. \square

3.9 Lemma. *Zwei Polytope $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_n^n$ sind genau dann T -zerlegungsgleich, wenn $\text{vol}_n(Z_1) = \text{vol}_n(Z_2)$ gilt.*

Beweis. Seien vorerst $Z_1 = I_1 + \dots + I_n$ und $Z_2 = J_1 + \dots + J_n$ Parallelepipede. Für Dimension $n = 1$ folgt mit $L(Z_1) = L(Z_2)$ sofort $Z_1 \cong_T Z_2$. Sei also $n > 1$ und gelte die Aussage für alle Dimensionen kleiner als n . Nach Lemma 3.8 können wir Z_1 und Z_2 rechtwinkelig wählen. Nach Lemma 2.4 ist das Rechteck $I_{n-1} + I_n$ translativ zerlegungsgleich zu einem Rechteck $I'_{n-1} + I'_n$, wobei I'_n die Länge 1 und I'_{n-1} die Länge $\text{vol}_2(I_{n-1} + I_n)$ hat. Dann ist klarerweise

$$Z_1 \sim_T I_1 + \dots + I_{n-2} + I'_{n-1} + I'_n.$$

Genauso können wir $J_{n-1} + J_n$ durch ein Rechteck $J'_{n-1} + J'_n$ mit einer Seite der Länge 1 ersetzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \text{vol}_{n-1}(I_1 + \dots + I_{n-2} + I'_{n-1}) &= \text{vol}_n(I_1 + \dots + I_{n-2} + I'_{n-1} + I'_n) \\ &= \text{vol}_n(Z_1) \\ &= \text{vol}_n(Z_2) \\ &= \text{vol}_n(J_1 + \dots + J_{n-2} + J'_{n-1} + J'_n) \\ &= \text{vol}_{n-1}(J_1 + \dots + J_{n-2} + J'_{n-1}) \end{aligned}$$

und nach Induktionsvoraussetzung sind damit die $(n-1)$ -dimensionalen Parallelepipede

$$I_1 + \dots + I_{n-2} + I'_{n-1} \text{ und } J_1 + \dots + J_{n-2} + J'_{n-1}$$

translativ zerlegungsgleich. Da trivialerweise auch $I'_n \sim_T J'_n$ gilt, folgt die translative Zerlegungsgleichheit von Z_1 und Z_2 .

Sind Z_1 und Z_2 beliebige Polytope aus \mathcal{Z}_n^n , so gibt es Parallelepipede $P_1, \dots, P_s, Q_1, \dots, Q_t$, sodass

$$Z_1 \sim_T P_1 \cup \dots \cup P_s \text{ und } Z_2 \sim_T Q_1 \cup \dots \cup Q_t.$$

Wegen dem oben Gezeigten gilt für diese

$$P_i \sim_T [0, 1]^{n-1} + \hat{I}_i \text{ und } Q_j \sim_T [0, 1]^{n-1} + \hat{J}_j,$$

für $i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, t$, wobei $L(\hat{I}_i) = \text{vol}_n(P_i)$ und $L(\hat{J}_j) = \text{vol}_n(Q_j)$ ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} Z_1 &\sim_T [0, 1]^{n-1} + (\hat{I}_1 \cup \dots \cup \hat{I}_s) \\ &\sim_T [0, 1]^{n-1} + I \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Z_2 &\sim_T [0, 1]^{n-1} + (\hat{J}_1 \cup \dots \cup \hat{J}_t) \\ &\sim_T [0, 1]^{n-1} + J \end{aligned}$$

wobei $L(I) = \sum_{i=1}^s \text{vol}_n(P_i) = \text{vol}_n(Z_1)$ bzw. $L(J) = \sum_{j=1}^t \text{vol}_n(Q_j) = \text{vol}_n(Z_2)$ gilt. Wegen $\text{vol}_n(Z_1) = \text{vol}_n(Z_2)$ und Obigem gilt dann

$$Z_1 \sim_T [0, 1]^{n-1} + I \sim_T [0, 1]^{n-1} + J \sim_T Z_2.$$

□

Wir benötigen noch eine weitere Definition. Eine Abbildung $\chi: \bigcup \mathcal{P}_o^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *rational homogen vom Grad k* , falls für alle $\lambda \in \mathbb{Q}_+$ und alle $P \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$

$$\chi(\lambda P) = \lambda^k \cdot \chi(P)$$

ist. Mit Hilfe dieser Funktionale lässt sich für k -stufige Zylinderpolytope eine Charakterisierung der Zerlegungsgleichheit modulo \mathcal{Z}_{k+1}^n formulieren. Insbesondere liefert dies eine Aussage über Zerlegungsgleichheit beliebiger Polytope modulo \mathcal{Z}_2^n , also aller echten Zylinder im \mathbb{R}^n .

3.10 Lemma. *Sei χ eine einfach additive, G -invariante und auf \mathcal{Z}_k^n vom Grad $k < n$ rational homogene Abbildung. Dann verschwindet χ auf allen Zylinderklassen \mathcal{Z}_l^n mit $l > k$.*

Beweis. Sei zunächst $Z \in \mathcal{Z}_n^n$. Nach Lemma 3.7 gilt für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Relation $mZ \sim_T m^n \cdot Z$. Wegen $\mathcal{Z}_n^n \subseteq \mathcal{Z}_k^n$ liefert die Homogenität von χ

$$\chi(mZ) = m^k \cdot \chi(Z),$$

mit der G -Invarianz und der Additivität erhalten wir aber

$$\chi(mZ) = \chi(m^n \cdot Z) = m^n \cdot \chi(Z).$$

Wegen $m \neq 0$ und $k < n$ muss dann bereits $\chi(Z) = 0$ sein.

Gelte nun die Aussage für alle $i > l$. Sei $Z \in \mathcal{Z}_l^n$ und $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Mit Lemma 3.7 erhalten wir hier

$$mZ \sim_T m^l \cdot Z \cup Z_0,$$

mit $Z_0 \in \mathcal{Z}_{l+1}^n$. Wenden wir darauf wieder χ an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} m^k \cdot \chi(Z) &= \chi(mZ) \\ &= \chi(m^l \cdot Z \cup Z_0) \\ &= m^l \cdot \chi(Z) \cup \chi(Z_0). \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\chi(Z_0) = 0$, und wegen $m \neq 0$ und $l > k$ muss wieder $\chi(Z) = 0$ sein. □

3.11 Satz. Seien $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_k^n$. Dann sind Z_1 und Z_2 genau dann G -zerlegungsgleich modulo \mathcal{Z}_{k+1}^n , wenn für alle Abbildungen χ , die einfach additiv, G -invariant und auf \mathcal{Z}_k^n rational homogen vom Grad k sind,

$$\chi(Z_1) = \chi(Z_2) \quad (3.3)$$

gilt.

Beweis. Gilt $Z_1 \sim_G Z_2 \pmod{\mathcal{Z}_{k+1}^n}$, so existieren $W_1, W_2 \in \mathcal{Z}_{k+1}^n$, sodass

$$Z_1 \cup W_1 \sim_G Z_2 \cup W_2.$$

Wendet man nun eine einfach additive, G -invariante und rational k -homogene Abbildung χ darauf an, ergibt sich mit Lemma 3.10

$$\chi(Z_1) = \chi(Z_1 \cup W_1) = \chi(Z_2 \cup W_2) = \chi(Z_2).$$

Für die Umkehrung betrachten wir die Menge $\bigcup \mathcal{P}_o^n \times \bigcup \mathcal{P}_o^n$, und definieren darauf die Relation

$$(A, B) \approx (C, D) \iff A \cup D \sim_G B \cup C \pmod{\mathcal{Z}_{k+1}^n}.$$

Es lässt sich leicht mit Hilfe von Satz 3.3 nachrechnen, dass \approx eine Äquivalenzrelation bildet. Betrachten wir daher $\mathfrak{V} := (\bigcup \mathcal{P}_o^n \times \bigcup \mathcal{P}_o^n) / \approx$. Wir definieren die Summe zweier Elemente $\mathfrak{v} = [(A, B)]_\approx$ und $\mathfrak{w} = [(C, D)]_\approx$ als

$$\mathfrak{v} + \mathfrak{w} = [(A \cup C, B \cup D)]_\approx.$$

Diese Operation ist wohldefiniert und \mathfrak{V} bildet damit eine abelsche Gruppe, wobei das neutrale Element durch

$$[(A, A)]_\approx = [(\emptyset, \emptyset)]_\approx$$

und das Inverse eines Elements $\mathfrak{v} = [(A, B)]_\approx$ durch

$$-\mathfrak{v} = [(B, A)]_\approx$$

gegeben ist. Zusätzlich dazu definieren wir für $p \in \mathbb{Q}_+$

$$p\mathfrak{v} := [(p \cdot A, p \cdot B)]_\approx$$

und

$$(-p)\mathfrak{v} := p(-\mathfrak{v}).$$

Man kann leicht nachprüfen, dass \mathfrak{V} mit diesen beiden Operationen einen Vektorraum über \mathbb{Q} bildet. Wir betrachten eine Basis $\{\mathfrak{b}_i | i \in I\}$ von \mathfrak{V} . Dann hat jedes $\mathfrak{v} \in \mathfrak{V}$ eine Darstellung als

$$\mathfrak{v} = \sum_{i \in I} \lambda_i(\mathfrak{v}) \mathfrak{b}_i,$$

wobei $\lambda_i(\mathfrak{v}) \in \mathbb{Q}$ für $i \in I$. Für festes i ist $\lambda_i: \mathfrak{V} \rightarrow \mathbb{Q}$ eine lineare Abbildung. Wir definieren die Abbildungen $\varphi_i: \bigcup \mathcal{P}_o^n \rightarrow \mathbb{Q}$ durch

$$\varphi_i(A) = \lambda_i([(A, \emptyset)]_{\approx}).$$

Diese erfüllen dann

$$\begin{aligned} \varphi_i(A) &= \varphi_i(B), \quad \text{für } A \sim_G B, \\ \varphi_i(A \cup B) &= \varphi_i(A) + \varphi_i(B) \quad \text{und} \\ \varphi_i(Z) &= 0 \quad \text{für } Z \in \mathcal{Z}_{k+1}^n. \end{aligned}$$

Für $A \in \mathcal{Z}_k^n$ erhalten wir dann mit Lemma 3.7

$$\varphi_i(mA) = \varphi_i(m^k \cdot A \cup Z) = m^k \cdot \varphi_i(A)$$

für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und ein $Z \in \mathcal{Z}_{k+1}^n$. Ersetzt man hier A durch $\frac{1}{m}A$ ergibt sich $\varphi_i(A) = m^k \cdot \varphi_i\left(\frac{1}{m}A\right)$, also gilt obige Gleichung auch für beliebige $m \in \mathbb{Q}_+$. Insgesamt haben wir damit erhalten, dass alle φ_i G -invariant, einfach additiv und auf \mathcal{Z}_k^n rational homogen vom Grad k sind. Erfüllen nun zwei Polytope $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_k^n$ die Gleichung $\chi(Z_1) = \chi(Z_2)$ für alle einfach additiven, G -invarianten und auf \mathcal{Z}_k^n rational k -homogenen Abbildungen χ , so gilt dies insbesondere für alle φ_i . Setzt man $\mathfrak{v} = [(Z_1, \emptyset)]_{\approx}$ und $\mathfrak{w} = [(Z_2, \emptyset)]_{\approx}$, so müssen alle Koeffizienten $\lambda_i(\mathfrak{v})$ und $\lambda_i(\mathfrak{w})$ übereinstimmen, daher sind \mathfrak{v} und \mathfrak{w} identisch. Nach Definition der Relation \approx gilt damit $Z_1 \sim_G Z_2 \pmod{(\mathcal{Z}_{k+1}^n)}$. \square

Nun können wir mit Hilfe von Zylinderklassen ein allgemeines Kriterium für Zerlegungsgleichheit im \mathbb{R}^n beweisen.

3.12 Satz. *Zwei Polytope $P, Q \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$ sind genau dann G -zerlegungsgleich, wenn die Gleichheit*

$$\varphi(P) = \varphi(Q)$$

für alle additiven, G -invarianten Funktionale $\varphi: \bigcup \mathcal{P}_o^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt.

Beweis. Die Notwendigkeit haben wir bereits mit Satz 1.3 gezeigt. Dass diese Bedingungen auch hinreichend sind, zeigen wir mithilfe von Zylinderklassen und Satz 3.11. Sind $P, Q \in \mathcal{Z}_n^n$, so folgt die Zerlegungsgleichheit mit Lemma 3.9, da das Volumen eine additive und G -invariante Abbildung ist. Sei $1 < k < n$ und angenommen, die Aussage gelte für \mathcal{Z}_{k+1}^n . Seien $P, Q \in \mathcal{Z}_k^n$. Da $\chi(P) = \chi(Q)$ insbesondere für alle additiven, G -invarianten und auf \mathcal{Z}_k^n rational k -homogenen Abbildungen χ gilt, erhalten wir mit Satz 3.11, dass

$$P \cup P_1 \sim_G Q \cup Q_1$$

für passende $P_1, Q_1 \in \mathcal{Z}_{k+1}^n$. Für eine beliebige additive, G -invariante Abbildung φ ergibt sich dann

$$\varphi(P) + \varphi(P_1) = \varphi(Q) + \varphi(Q_1)$$

und damit $\varphi(P_1) = \varphi(Q_1)$. Nach Induktionsvoraussetzung sind dann P_1 und Q_1 G -zerlegungsgleich, daher sind P und Q G -ergänzungsgleich. Wegen Satz 3.3 sind P und Q dann auch G -zerlegungsgleich und mit $\mathcal{Z}_1^n = \bigcup \mathcal{P}_o^n$ erhalten wir schließlich das Gewünschte. \square

Dieses Kriterium ist allerdings rein formaler Natur, da keine explizite Darstellung aller G -invarianten und einfach additiven Funktionale bekannt ist. In der Praxis lässt sich für zwei gegebene Polytope damit also nicht entscheiden, ob diese zerlegungsgleich sind.

4 Zerlegungsgleichheit im \mathbb{R}^3

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Zerlegungsgleichheit im \mathbb{R}^3 . Es stellt sich die Frage, ob ein Resultat wie Satz 2.3 auch hier gezeigt werden kann. In seiner berühmten Liste mathematischer Probleme [10] gab David Hilbert eben diese Frage als drittes Problem an. Nur kurze Zeit später löste sein Schüler Max Dehn dies in [3] mit Hilfe der so genannten Dehn-Invarianten indem er zeigte, dass Volumengleichheit im \mathbb{R}^3 für Zerlegungsgleichheit nicht ausreicht. Über sechzig Jahre später gelang es dem Schweizer Mathematiker Jean-Pierre Sydler in [15] zu zeigen, dass aber die Übereinstimmung von Volumen und allen Dehn-Invarianten für zwei Polytope im \mathbb{R}^3 für die Zerlegungsgleichheit hinreichend ist. Børge Jessen zeigte in [11] mit Hilfe der Algebra der Polytope eine verallgemeinerte Version davon, welche hier präsentiert wird.

Es ist erwähnenswert, dass in diesen Arbeiten Zerlegungsgleichheit immer bezüglich der Gruppe E^+ der orientierungserhaltenden Bewegungen verstanden wird. Dass dies aber keine Einschränkung ist, zeigte erstmals der deutsche Mathematiker, Astronom und Physiker Christian Ludwig Gerling. Hier werden wir großteils vorgehen wie in [11] und [2].

4.1 Satz. *Seien $P, Q \in \cup \mathcal{P}_o^3$ zwei zerlegungsgleiche Polytope. Dann sind sie auch zerlegungsgleich bezüglich E^+ .*

Beweis. Wir können o.B.d.A annehmen, dass P und Q kongruent sind. Wir betrachten zuerst den Fall, dass P eine Symmetrieebene H besitzt. Dann sind P und Q sogar E^+ -kongruent. Ist nämlich $f \in E$ jene Bewegung, die P auf Q abbildet, und $s \in E$ die Spiegelung um die Ebene H , so gilt auch $f \circ s(P) = Q$. Eine der beiden Bewegungen f und $f \circ s$ ist orientierungserhaltend, daher gilt $P \cong_{E^+} Q$.

Für den allgemeinen Fall werden wir zeigen, dass es Zerlegungen

$$P = P_1 \cup \dots \cup P_k \quad \text{und} \quad Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_k$$

mit $P_i \cong Q_i$ gibt, wobei alle P_i eine Symmetrieebene besitzen. Dann folgt mit Obigem sofort $P \sim_{E^+} Q$.

Jedes Polytop lässt sich in endlich viele Tetraeder zerlegen, daher genügt es, die Aussage für solche zu zeigen. Sei also T ein Tetraeder mit den Eckpunkten a, b, c, d . Bezeichne o den Inkugelmittelpunkt von T und a_1, b_1, c_1, d_1 die Schnittpunkte der Inkugel mit den Seitenflächen von T . Dabei liegen a_1, b_1, c_1, d_1 jeweils auf der a, b, c bzw. d gegenüberliegenden Fläche. Wir zerlegen nun T in die sechs Polytope mit den Eckpunkten

$$oabc_1d_1, oab_1cd_1, oa_1bcd_1, oab_1c_1d, oa_1bc_1d \quad \text{und} \quad oa_1b_1cd,$$

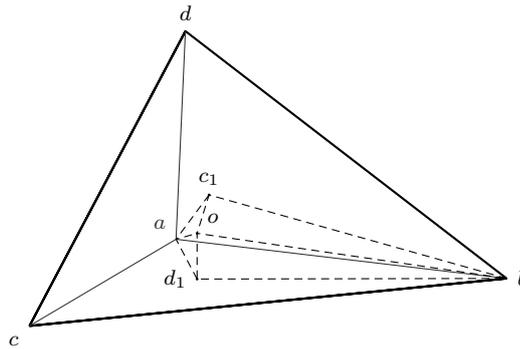


Abbildung 4.1

vgl. Abbildung 4.1. Die Strecken oc_1 und od_1 sind gleich lang und stehen normal auf die Seitenflächen mit den Eckpunkten abd bzw. abc . Daher liegt o auf jener Ebene H , die die Kante ab enthält und den von den Seiten abc und abd eingeschlossenen Winkel halbiert. Damit ist das Polytop mit den Eckpunkten o, a, b, c_1, d_1 symmetrisch bezüglich H . Die Symmetrie der anderen Polytope zeigt man genauso. \square

4.2 Korollar. *Zwei Polytope im \mathbb{R}^3 sind genau dann zerlegungsgleich, wenn sie E^+ -zerlegungsgleich sind.*

4.1 Die Algebra der Polytope

Wir definieren die Gruppe der Polytope $(\mathfrak{P}^n, +)$ als die freie abelsche Gruppe, die von den Polytopen $P \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$ erzeugt wird. Um zwischen Elementen von \mathfrak{P}^n und Elementen von $\bigcup \mathcal{P}_o^n$ zu unterscheiden, schreiben wir jene aus der Gruppe der Polytope mit eckigen Klammern an. Für eine Gruppe G von Bewegungen bezeichnen wir mit \mathfrak{E}_G^n jene Untergruppe von \mathfrak{P}^n , die von allen Elementen der Form

- (i) $[P] - [P_1] - \dots - [P_k]$, falls $P = P_1 \cup \dots \cup P_k$ gilt und
- (ii) $[P] - [Q]$, falls es eine Bewegung $g \in G$ gibt, sodass $P = g(Q)$,

erzeugt wird. Wir untersuchen die Elemente von $E \in \mathfrak{E}_G^n$ genauer. Bis auf Bewegungen aus G haben diese immer die Form

$$E = \sum_i \left([P_i] - \sum_j [P_{ij}] \right) - \sum_k \left([Q_k] - \sum_l [Q_{kl}] \right),$$

dabei sind $P_i = \bigcup_j P_{ij}$ und $Q_k = \bigcup_l Q_{kl}$ Zerlegungen. Vertauscht man die Summanden, erhält man

$$E = \sum_i [P_i] + \sum_{k,l} [Q_{kl}] - \left(\sum_k [Q_k] + \sum_{i,j} [P_{ij}] \right).$$

Dabei sind nun $\bigcup_i P_i \cup \bigcup_{k,l} Q_{kl}$ und $\bigcup_k Q_k \cup \bigcup_{i,j} P_{ij}$ bis auf Bewegungen aus G Zerlegungen des selben Polytopes. In dieser Darstellung können aber noch identische Summanden mit sowohl positivem als auch mit negativem Vorzeichen auftreten. Lässt man diese wegfallen, ergibt sich

$$E = \sum_r [P'_r] - \sum_s [Q'_s],$$

wobei jetzt alle $[P'_r]$ und $[Q'_s]$ verschieden sind.

Die *Algebra der Polytope* Π_G^n ist dann die Faktorgruppe $\mathfrak{P}^n / \mathfrak{E}_G^n$. Mit $\kappa: \mathfrak{P}^n \rightarrow \Pi_G^n$ bezeichnen wir die kanonische Abbildung, die jedem $[P]$ aus \mathfrak{P}^n die Klasse $[P]_{\mathfrak{E}_G^n}$ zuordnet. Klarerweise gilt für zwei Polytope P und Q immer

$$P \sim_G Q \Rightarrow [P]_{\mathfrak{E}_G^n} = [Q]_{\mathfrak{E}_G^n}.$$

Gilt umgekehrt $[P]_{\mathfrak{E}_G^n} = [Q]_{\mathfrak{E}_G^n}$, dann liegt $[P] - [Q] \in \mathfrak{E}_G^n$. Nach obiger Überlegung lässt sich dieser Ausdruck so ergänzen, dass

$$[P] - [Q] = \sum_i [P_i] + \sum_{k,l} [Q_{kl}] - \left(\sum_k [Q_k] + \sum_{i,j} [P_{ij}] \right)$$

gilt, wobei $\bigcup_i P_i \cup \bigcup_{k,l} Q_{kl}$ und $\bigcup_k Q_k \cup \bigcup_{i,j} P_{ij}$ bis auf Bewegungen aus G Zerlegungen des selben Polytopes sind. Da P in $\bigcup_i P_i \cup \bigcup_{k,l} Q_{kl}$ und Q in $\bigcup_k Q_k \cup \bigcup_{i,j} P_{ij}$ auftreten muss, sind P und Q ergänzungsgleich. Nach Satz 3.3 sind dann P und Q auch zerlegungsgleich. Insgesamt haben wir also die folgende Charakterisierung für Zerlegungsgleichheit bezüglich G erhalten.

4.3 Korollar. *Sei G eine Gruppe von Bewegungen im \mathbb{R}^n . Zwei Polytope $P, Q \in \bigcup \mathcal{P}_o^n$ sind genau dann G -zerlegungsgleich, wenn sie bezüglich \mathfrak{E}_G^n in der selben Klasse liegen, das heißt es gilt $[P]_{\mathfrak{E}_G^n} = [Q]_{\mathfrak{E}_G^n}$.*

Wir betrachten nun speziell den Fall $n = 3$ und $G = E$ und schreiben kurz \mathfrak{E}^3 statt \mathfrak{E}_E^3 . Wir bezeichnen mit \mathfrak{F}^3 jene Untergruppe von \mathfrak{P}^3 , die von allen echten Zylindern im \mathbb{R}^3 und \mathfrak{E}^3 erzeugt wird. Man beachte, dass im \mathbb{R}^3 jeder echte Zylinder zerlegungsgleich zu einem Parallelepiped ist, vgl. Lemma 1.4. Bezeichne $V: \mathfrak{P}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jenen Homomorphismus, der von dem gewöhnlichen Volumen auf $\bigcup \mathcal{P}_o^3$ induziert wird und bezeichne weiters \mathfrak{G}^3 den Kern von V . Wir wissen wegen Lemma 3.9 bereits, dass für Parallelepipede Volumengleichheit sogar äquivalent zur translativen Zerlegungsgleichheit ist. Daraus lässt sich leicht folgern, dass $\mathfrak{F}^3 \cap \mathfrak{G}^3 = \mathfrak{E}^3$ gilt.

4.4 Satz. *Zwei Elemente $[P], [Q] \in \mathfrak{P}^3$ sind genau dann äquivalent modulo \mathfrak{E}^3 , wenn $V([P]) = V([Q])$ und $[P]_{\mathfrak{F}^3} = [Q]_{\mathfrak{F}^3}$ gilt.*

Beweis. Für zwei Elemente $[P], [Q] \in \mathfrak{P}^3$ gilt

$$\begin{aligned} [P]_{\mathfrak{E}^3} = [Q]_{\mathfrak{E}^3} &\Leftrightarrow [P] - [Q] \in \mathfrak{E}^3 = \mathfrak{F}^3 \cap \mathfrak{G}^3 \\ &\Leftrightarrow [P] - [Q] \in \mathfrak{F}^3 \text{ und } [P] - [Q] \in \mathfrak{G}^3 \\ &\Leftrightarrow [P]_{\mathfrak{F}^3} = [Q]_{\mathfrak{F}^3} \text{ und } V([P]) = V([Q]). \end{aligned}$$

□

Wir definieren in $\mathfrak{P}^3/\mathfrak{F}^3$ eine Skalarmultiplikation für $\lambda > 0$ durch

$$\lambda[P]_{\mathfrak{F}^3} = [\lambda P]_{\mathfrak{F}^3}.$$

Mit Lemma 3.6 folgt dann für $\alpha, \beta > 0$ und $P \in \cup \mathcal{P}_o^3$

$$(\alpha + \beta)[P]_{\mathfrak{F}^3} = [(\alpha + \beta)P]_{\mathfrak{F}^3} = [\alpha P \cup \beta P]_{\mathfrak{F}^3} = \alpha[P]_{\mathfrak{F}^3} + \beta[P]_{\mathfrak{F}^3}$$

und zusammen mit der Zuordnung

$$(-\lambda)[P]_{\mathfrak{F}^3} = -[\lambda P]_{\mathfrak{F}^3}.$$

bildet $\mathfrak{P}^3/\mathfrak{F}^3$ dann sogar einen Vektorraum über \mathbb{R} .

4.2 Der Satz von Dehn-Sydler

Wir definieren die *Dehn-Invariante* $\Delta: \mathcal{P}_o^3 \rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi$ durch

$$\Delta(P) = \sum_{E \in \mathcal{F}^1(P)} L(E) \otimes \theta(E, P)$$

für alle $P \in \mathcal{P}_o^3$. Hierbei bezeichnet $L(E)$ die Länge der Kante E und $\theta(E, P)$ den von den angrenzenden Seiten eingeschlossenen Winkel in P .

4.5 Lemma. *Die Dehn-Invariante ist eine einfach additive Abbildung. Insbesondere lässt sich Δ eindeutig als einfach additive Abbildung auf ganz $\cup \mathcal{P}_o^3$ fortsetzen.*

Beweis. Sei $P \in \mathcal{P}_o^3$ und H eine Ebene, die P zerschneidet. Wir wollen zeigen, dass

$$\Delta(P) = \Delta(P \cap H^+) + \Delta(P \cap H^-)$$

gilt, wobei H^+ und H^- die beiden von H begrenzten Halbräume sind. Für eine Kante $E \in \mathcal{F}^1(P)$ können nun drei verschiedene Fälle eintreten. Entweder E liegt auf H , H teilt E oder E liegt ganz in einem der beiden Halbräume. Im ersten Fall gilt

$$\theta(E, P) = \theta(E, P \cap H^+) + \theta(E, P \cap H^-),$$

und daher

$$L(E) \otimes \theta(E, P) = L(E) \otimes \theta(E, P \cap H^+) + L(E) \otimes \theta(E, P \cap H^-).$$

Die Kante E liefert also auf beiden Seiten der Gleichung insgesamt den selben Beitrag. Im zweiten Fall erhält man

$$\begin{aligned} L(E) &= L(E \cap H^+) + L(E \cap H^-) \quad \text{und} \\ \theta(E, P) &= \theta(E \cap H^+, P \cap H^+) = \theta(E \cap H^-, P \cap H^-). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$L(E) \otimes \theta(E, P) = L(E \cap H^+) \otimes \theta(E \cap H^+, P \cap H^+) + L(E \cap H^-) \otimes \theta(E \cap H^-, P \cap H^-).$$

Im dritten Fall ist E entweder ganz in $P \cap H^+$ oder ganz in $P \cap H^-$ enthalten, und daher erhalten wir für E auf beiden Seiten der Gleichung den Wert $L(E) \otimes \theta(E, P)$.

Außerdem können auf der rechten Seite der Gleichung Kanten auftreten, die erst durch das Schneiden mit H entstehen. Für diese gilt aber immer

$$\theta(E, P \cap H^+) + \theta(E, P \cap H^-) = \pi,$$

das heißt in $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi$ ergibt sich

$$L(E) \otimes \theta(E, P \cap H^+) + L(E) \otimes \theta(E, P \cap H^-) = L(E) \otimes \pi = 0.$$

Also ist Δ eine einfach additive Abbildung auf \mathcal{P}_o^3 und wegen Satz 1.2 lässt sie sich als solche auf $\bigcup \mathcal{P}_o^3$ fortsetzen. \square

Die Abbildung Δ ist auf einer Erzeugermenge der freien Gruppe \mathfrak{P}^3 definiert, lässt sich also eindeutig als Homomorphismus auf die ganze Gruppe fortsetzen. Es ist leicht zu zeigen, dass Δ auf \mathfrak{F}^3 verschwindet, und daher konstant auf allen Klassen in $\mathfrak{P}^3/\mathfrak{F}^3$ ist. Also induziert Δ einen Gruppenhomomorphismus $\delta: \mathfrak{P}^3/\mathfrak{F}^3 \rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi$, sodass für jedes Polytop P

$$\delta([P]_{\mathfrak{F}^3}) = \Delta(P)$$

gilt. Tatsächlich ist δ sogar ein Vektorraumhomomorphismus, also eine lineare Abbildung. Bezeichnet $\kappa: \mathfrak{P}^3 \rightarrow \mathfrak{P}^3/\mathfrak{F}^3$ wieder die kanonische Abbildung, so erhalten wir $\Delta = \delta \circ \kappa$.

Sind also $P, Q \in \bigcup \mathcal{P}_o^3$ mit $[P]_{\mathfrak{F}^3} = [Q]_{\mathfrak{F}^3}$, dann folgt $\Delta(P) = \Delta(Q)$. Zusammen mit Korollar 4.3 und Satz 4.4 erhalten wir sofort den folgenden Satz, der erstmals 1901 in [3] von Max Dehn gezeigt wurde.

4.6 Satz (Dehn). *Sind zwei Polytope $P, Q \subseteq \mathbb{R}^3$ zerlegungsgleich, so haben sie gleiches Volumen und es gilt $\Delta(P) = \Delta(Q)$.*

Betrachtet man nun ein regelmäßiges Tetraeder T mit Kantenlänge 1 und einen Würfel W , der das selbe Volumen hat wie T . Dann ist $\Delta(W) = 0$ und

$$\Delta(T) = 6 \cdot \left(1 \otimes \arccos \left(\frac{1}{3} \right) \right).$$

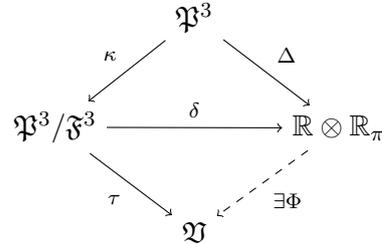
Es lässt sich aber zeigen, dass $\arccos \left(\frac{1}{3} \right)$ kein Vielfaches von π ist, und daher gilt $\Delta(T) \neq 0$. Also können W und T nicht zerlegungsgleich sein.

Wie bereits erwähnt, zeigte Jean-Pierre Sydler in [15], dass diese Bedingungen auch hinreichend für die Zerlegungsgleichheit zweier Polytope sind.

4.7 Satz (Sydler). *Haben zwei Polytope $P, Q \subseteq \mathbb{R}^3$ gleiches Volumen und gilt $\Delta(P) = \Delta(Q)$, so sind sie zerlegungsgleich.*

Wir besprechen nun jene verallgemeinerte Version dieses Satzes, welche Børge Jessen in [11] präsentierte.

4.8 Satz. *Sei \mathfrak{V} ein beliebiger Vektorraum über \mathbb{R} und $\tau: \mathfrak{P}^3/\mathfrak{F}^3 \rightarrow \mathfrak{V}$ eine lineare Abbildung. Dann existiert eine lineare Abbildung $\Phi: \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi \rightarrow \mathfrak{V}$, sodass $\tau = \Phi \circ \delta$, oder äquivalent dazu $\tau \circ \kappa = \Phi \circ \Delta$, gilt.*



Daraus folgt Satz 4.7 direkt, wenn wir $\mathfrak{V} = \mathfrak{P}^3/\mathfrak{F}^3$ und $\tau = id$ (oder eine beliebige andere injektive Abbildung) wählen. Dann muss mit $\tau = \Phi \circ \delta$ auch δ injektiv sein, und es folgt für zwei Polytope $P, Q \in \bigcup \mathcal{P}_o^3$ mit $\text{vol}_3(P) = \text{vol}_3(Q)$

$$\begin{aligned} \Delta(P) = \Delta(Q) &\Rightarrow \delta([P]_{\mathfrak{F}^3}) = \delta([Q]_{\mathfrak{F}^3}) \\ &\Rightarrow [P]_{\mathfrak{F}^3} = [Q]_{\mathfrak{F}^3} \\ &\Rightarrow P \sim Q. \end{aligned}$$

Seien $x, y \in (0, 1)$ und α, β und $\alpha * \beta$ jene Winkel in $(0, \frac{\pi}{2})$, für die

$$\sin^2(\alpha) = x, \quad \sin^2(\beta) = y \quad \text{und} \quad \sin^2(\alpha * \beta) = xy \quad (4.1)$$

gilt. Mit $T(x, y)$ bezeichnen wir nun ein Tetraeder mit Eckpunkten a, b, c, d , dessen Kanten ab, bc und cd paarweise normal zueinander stehen und die die Längen $\cot(\alpha)$, $\cot(\alpha) \cdot \cot(\beta)$ und $\cot(\beta)$ haben, vgl. Abbildung 4.2. Der eingeschlossene Winkel an der Kante ab ist gerade α , jener an cd β . Nach einer einfachen Rechnung ergibt sich der Winkel an ad als $\frac{\pi}{2} - \alpha * \beta$ und die Länge dieser Kante als $\cot(\alpha * \beta)$. Die drei übrigen sind rechte Winkel. Damit ergibt sich in $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi$

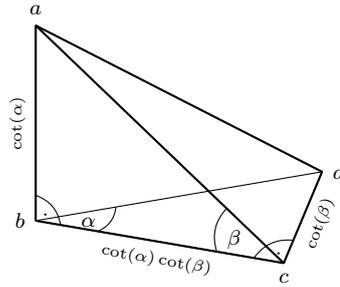
$$\Delta(T(x, y)) = \cot(\alpha) \otimes \alpha + \cot(\beta) \otimes \beta - \cot(\alpha * \beta) \otimes (\alpha * \beta).$$

Das Tetraeder $T(x, y)$ hat das Volumen $\frac{\cot^2(\alpha) \cot^2(\beta)}{6}$ und wegen $\cot^2(\vartheta) = \frac{1 - \sin^2(\vartheta)}{\sin^2(\vartheta)}$ erhalten wir

$$\text{vol}_3(T(x, y)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-y}{y} = v(x) + v(y) - v(xy),$$

wobei $v(t) = \frac{t-1}{6t}$. Zwei so erhaltene Tetraeder sind immer kongruent zueinander, und liegen daher insbesondere in der selben Klasse bezüglich \mathfrak{E}^3 .

4.9 Lemma. *Jedes Polytop $P \in \bigcup \mathcal{P}_o^3$ lässt sich in endlich viele Tetraeder vom Typ $T(x, y)$ zerlegen.*

Abbildung 4.2: Tetraeder der Form $T(x, y)$

Beweis. Es ist natürlich ausreichend zu zeigen, dass sich ein beliebiges Tetraeder in Tetraeder der Form $T(x, y)$ zerlegen lässt. Sei also T ein Tetraeder mit den Eckpunkten a, b, c und d . Bezeichne o den Inkugelmittelpunkt von T und a_1, b_1, c_1, d_1 die Schnittpunkte der Inkugel mit den Seitenflächen von T . Dabei liegen a_1, b_1, c_1, d_1 jeweils auf der a, b, c bzw. d gegenüberliegenden Fläche. Wir zerschneiden nun T in zwölf kleinere Tetraeder, dabei wählen wir als Ecken immer zwei Eckpunkte von T , o und einem der Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 . Betrachten wir nun eines dieser Stücke genauer, beispielsweise jenes mit den Eckpunkten a, b, o und d_1 , siehe Abbildung 4.3. Zerschneiden wir dieses noch entlang jener Hyperebene, die normal zur Kante ab

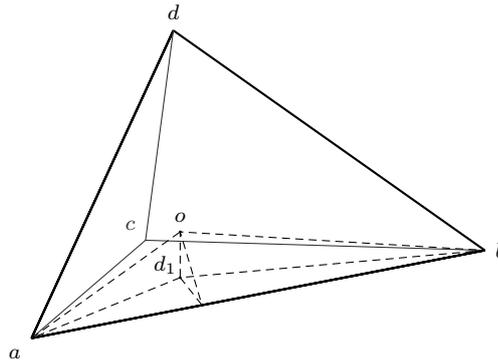


Abbildung 4.3

liegt und die Kante od_1 enthält, so entstehen zwei Tetraeder der Form $T(x, y)$. \square

4.10 Lemma. Seien $x, y, z \in (0, 1)$. Dann sind

$$T(x, y) \cup T(xy, z) \quad \text{und} \quad T(x, z) \cup T(xz, y)$$

zerlegungsgleich.

Beweis. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ jene Winkel mit $\sin^2(\alpha) = x$, $\sin^2(\beta) = y$ und $\sin^2(\gamma) = z$. Mit obiger Formel erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(T(x, y) \cup T(xy, z)) &= v(x) + v(y) + v(z) - v(xyz) \\ &= \text{vol}_3(T(x, z) \cup T(xz, y)), \end{aligned}$$

wobei $v(t) = \frac{t-1}{6t}$. Nach Satz 4.4 müssen wir nur noch die Äquivalenz modulo \mathfrak{F}^3 zeigen.

Bezeichne nun mit a, b, c, d die Eckpunkte von $T(x, y)$ und mit a, b, e, f die Eckpunkte von $T(x, z)$, wie in Abbildung 4.4(a). Man beachte, dass auch andere Fälle als der in Abbildung 4.4(a) dargestellte auftreten können. Diese lassen sich aber analog behandeln. Das Viereck mit den Eckpunkten c, d, e, f besitzt einen Umkreis,

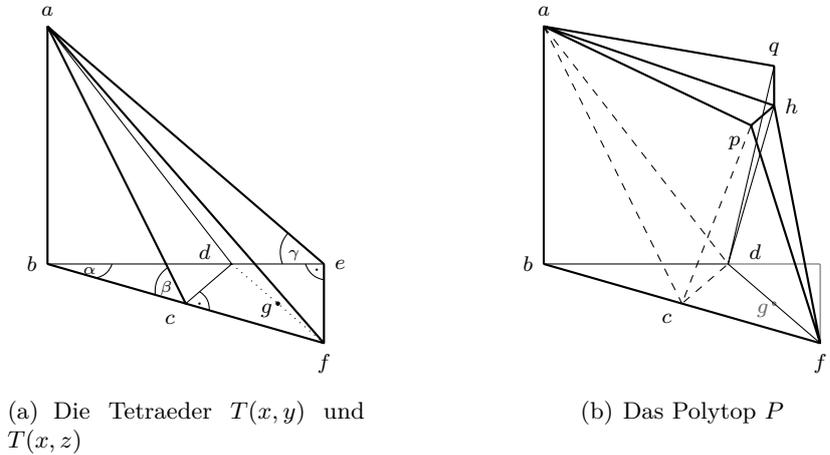


Abbildung 4.4

da die beiden gegenüberliegenden Winkel an c und e rechte Winkel sind. Der Mittelpunkt g dieses Kreises liegt genau in der Mitte der Diagonalen df . Wir legen nun eine Kugel S auf diesen Umkreis, die so groß ist, dass neben den Punkten c, d, e, f auch der Punkt a auf ihrer Oberfläche liegt. Ihr Mittelpunkt h liegt dann auf jener Normalen auf die Ebene bcd , die durch den Kreismittelpunkt g verläuft. Die Orthogonalprojektion von h auf die Ebene abc bezeichnen wir mit p , jene auf die Ebene abd mit q . Die Abstände dieser beiden Ebenen zu h sind gleich groß wie jene zu g , daher hat die Strecke hp die Länge $\frac{1}{2} \cot(\beta)$ und hq die Länge $\frac{1}{2} \cot(\gamma)$. Der Schnitt der Kugel S mit der Ebene abc ist ein Kreis mit Mittelpunkt p . Die Punkte a, c und f liegen sowohl in dieser Ebene als auch auf S , daher liegen sie auch auf diesem Kreis. Genauso liegen die Punkte a, d und e auf einem Kreis mit Mittelpunkt q . Um den Winkel bei apf zu berechnen, betrachte Abbildung 4.5. Die Dreiecke apc und cpf sind gleichschenkelig, es gilt daher

$$\delta = 4\pi - 2\theta - 2\theta' = 2\beta.$$

Ebenso ergibt sich der Winkel bei aqd als 2γ . Bezeichne P jenes Polytop mit den Eckpunkten a, b, d, f, h, p, q , siehe Abbildung 4.4(b). Wir werden zeigen, dass

$$[T(x, y) \cup T(x, z)]_{\mathfrak{F}^3} = [P]_{\mathfrak{F}^3} = [T(x, z) \cup T(x, y)]_{\mathfrak{F}^3}.$$

Wir wissen bereits, dass die Strecke ad die Länge $\cot(\alpha * \beta)$ hat. Seien die Punkte n und k so gewählt, dass h und q gerade die Mittelpunkte der Strecken an und

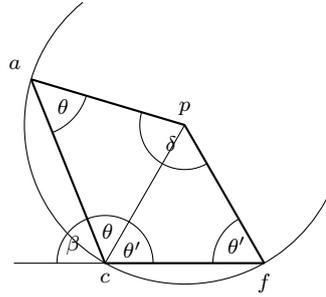
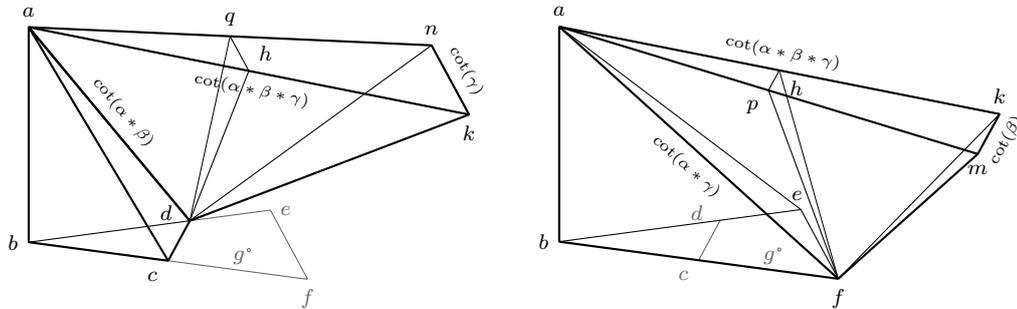


Abbildung 4.5

ak bilden. Dann sind die Kanten ad , dn und nk paarweise orthogonal, nk hat die Länge $\cot(\gamma)$ und der Winkel bei and ist der selbe wie bei aed , also γ . Daher ist das Tetraeder mit den Eckpunkten a, d, n, k gerade $T(xy, z)$, siehe Abbildung 4.6(a). Wir wissen ebenfalls, dass die Kante af die Länge $\cot(\alpha * \beta)$ hat. Sei der Punkt m so



(a) Die Tetraeder $T(x, y)$ und $T(xy, z)$ (b) Die Tetraeder $T(x, z)$ und $T(xz, y)$

Abbildung 4.6

gewählt, dass p der Mittelpunkt der Strecke am ist. Dann erhalten wir hier ebenso wie oben, dass die Kanten af , fm und mk paarweise orthogonal sind, die Kante nl die Länge $\cot(\beta)$ hat und dass der Winkel bei amf gerade β ist. Damit ergibt sich das Tetraeder mit den Eckpunkten a, f, m, k als $T(xz, y)$. Die Kante ak tritt in beiden Tetraedern $T(xy, z)$ und $T(xz, y)$ auf und hat die Länge $\cot(\alpha * \beta * \gamma)$.

Untersuchen wir nun das Polytop mit den Eckpunkten d, h, k, n, q , vgl. Abbildung 4.6(a). Die Kanten dq und nq sind gleich lang und kn ist doppelt so lang wie hq . Außerdem stehen kn und hq normal auf die Seite dnq . Es ergibt sich sofort, dass jedes Polytop mit diesen Eigenschaften zerlegungsgleich zu einem Zylinder ist, siehe auch Abbildung 4.7.

Auch die beiden Polytope mit den Eckpunkten a, c, d, h, p und f, c, d, h, p in Abbildung 4.6(b) sind von diesem Typ. Damit erhalten wir

$$[P]_{\mathbb{F}^3} = [T(x, y) \cup T(xy, z)]_{\mathbb{F}^3}.$$

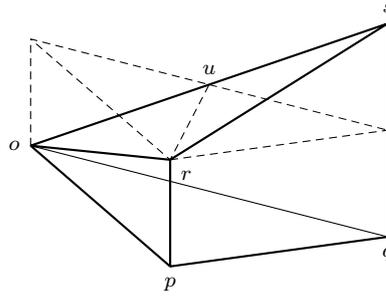


Abbildung 4.7

Ebenso erfüllen die Polytope mit den Eckpunkten a, q, e, h, f und d, q, e, h, f in Abbildung 4.4(b) und das Polytop mit den Ecken f, p, m, h, k in Abbildung 4.6 obige Eigenschaften und sind deshalb zerlegungsgleich zu geeigneten Zylindern. Damit ergibt sich auch hier, dass die Polytope P und $T(x, z) \cup T(xz, y)$ in der selben Klasse bezüglich \mathfrak{F}^3 liegen. Insgesamt haben wir also

$$[T(x, y) \cup T(xy, z)]_{\mathfrak{F}^3} = [T(x, y) \cup T(x, yz)]_{\mathfrak{F}^3}$$

und daher schließlich auch das Gewünschte erhalten. \square

4.11 Lemma. *Seien $x, y, z > 0$. Dann sind*

$$xT\left(\frac{x+y}{x+y+z}, \frac{x}{x+y}\right) \cup yT\left(\frac{x+y}{x+y+z}, \frac{y}{x+y}\right)$$

und

$$xT\left(\frac{x+z}{x+y+z}, \frac{x}{x+z}\right) \cup zT\left(\frac{x+z}{x+y+z}, \frac{z}{x+z}\right)$$

zerlegungsgleich.

Beweis. Wir betrachten zunächst ein Tetraeder T mit den Eckpunkten o, a, b, c , dessen Kanten oa, ob und oc paarweise orthogonal sind. Außerdem sollen die Längen dieser drei Kanten gegeben sein durch

$$L(oa) = \sqrt{yz}, \quad L(ob) = \sqrt{xz} \quad \text{und} \quad L(oc) = \sqrt{xy}.$$

Nun zerlegen wir T in zwei kleinere Tetraeder T_1, T_2 , indem wir entlang jener Ebene schneiden, die die Kante oc enthält und orthogonal auf die Kante ab steht, vgl. Abbildung 4.8. Die Kanten ad, do und oc von T_1 stehen paarweise normal zueinander und haben die Längen

$$L(ad) = y \cdot \sqrt{\frac{z}{x+y}}, \quad L(do) = \sqrt{\frac{xyz}{x+y}} \quad \text{und} \quad L(oc) = \sqrt{xy}.$$

Damit lässt sich leicht nachrechnen, dass T_1 gerade das Tetraeder $yT\left(\frac{x+y}{x+y+z}, \frac{y}{x+y}\right)$ ist. Ebenso sieht man, dass T_2 das Tetraeder $xT\left(\frac{x+y}{x+y+z}, \frac{x}{x+y}\right)$ ist. Das heißt also,

$$T \sim xT\left(\frac{x+y}{x+y+z}, \frac{x}{x+y}\right) \cup yT\left(\frac{x+y}{x+y+z}, \frac{y}{x+y}\right).$$

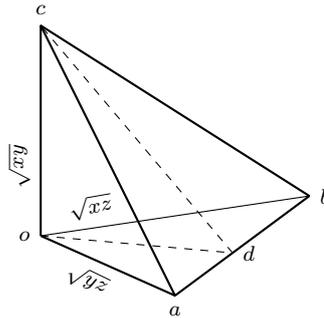


Abbildung 4.8

Teilt man T jedoch entlang jener Ebene, die die Kante ob enthält und normal auf ac steht, erhält man mit analoger Argumentation, dass

$$T \sim xT\left(\frac{x+z}{x+y+z}, \frac{x}{x+z}\right) \cup zT\left(\frac{x+z}{x+y+z}, \frac{z}{x+z}\right)$$

gilt. □

4.12 Lemma. Seien $\xi, \eta, \zeta \in (0, \frac{\pi}{2})$ mit $\xi + \eta + \zeta = \pi$. Dann existiert ein Quader R mit Eckpunkten a, b, c, d, e, f, g, h und Diagonalen ab, cd, ef, gh , sodass für jene sechs Tetraeder, in die R durch die Ebenen $abcd, abef$ und $abgh$ zerlegt wird, die eingeschlossenen Winkel an der Kante ab die Werte ξ, η, ζ annehmen. Insbesondere sind diese Tetraeder alle von der Form $\lambda T(x, y)$.

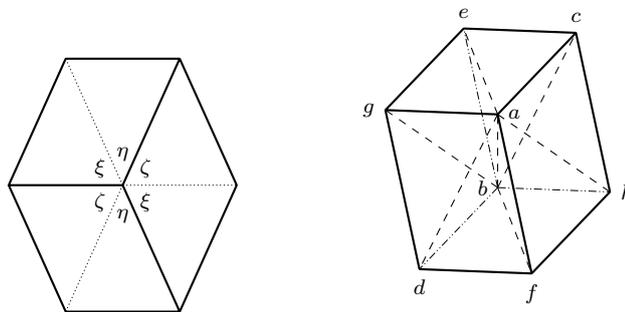


Abbildung 4.9

Beweis. Wir betrachten ein Sechseck mit paarweise parallelen Seiten, dessen Winkel am Mittelpunkt zwischen den Diagonalen gerade ξ, η, ζ sind. Dieses Sechseck ist die Orthogonalprojektion eines Quaders R entlang einer Diagonalen ab , siehe Abbildung 4.9. Die Bilder der anderen Diagonalen cd, ef und gh von R sind gerade die Diagonalen des Sechsecks. Daher werden die Tetraeder, in die R durch die Ebenen $abcd, abef$ und $abgh$ zerlegt wird, auf die sechs Dreiecke, in die das Sechseck durch seine Diagonalen zerlegt wird, abgebildet. Damit ergeben sich die eingeschlossenen Winkel an der Kante ab gerade als ξ, η, ζ . □

Die folgenden beiden rein algebraischen Lemmas zeigte Børge Jessen zusammen mit Jørgen Karpf und Anders Thorup in [13].

4.13 Lemma. *Sei \mathfrak{V} ein beliebiger Vektorraum über \mathbb{R} und $F: (0, 1)^2 \rightarrow \mathfrak{V}$ eine Funktion, die für alle $x, y, z \in (0, 1)$ die Gleichungen*

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(y, x) \\ F(x, y) + F(xy, z) &= F(x, z) + F(xz, y), \end{aligned}$$

erfüllt. Dann existiert eine Funktion $f: (0, 1) \rightarrow \mathfrak{V}$, sodass für alle $x, y \in (0, 1)$

$$F(x, y) = f(x) + f(y) - f(xy)$$

gilt.

Beweis. Wir definieren vorerst eine Hilfsfunktion $G: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathfrak{V}$ als $G(a, b) = F(e^{-a}, e^{-b})$. Diese erfüllt dann die Gleichungen

$$G(a, b) = G(b, a) \tag{4.2}$$

$$G(a, b) + G(a + b, c) = G(a, c) + G(a + c, b) \tag{4.3}$$

für alle $a, b, c > 0$. Mit den Zuordnungen

$$G(0, 0) = G(a, 0) = G(0, b) = 0, \tag{4.4}$$

$$G(-a, -b) = -G(a, b) \text{ und} \tag{4.5}$$

$$G(a, b) = G(a, c) = G(b, c), \text{ falls } a + b + c = 0, \tag{4.6}$$

lässt sich G auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definieren. Klarerweise gilt Gleichung (4.2) nun auch für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass Gleichung (4.3) auch noch immer gültig ist. Zu diesem Zweck definieren wir

$$\Phi(a, b, c) = G(a, b) + G(a + b, c) - G(a, c) - G(a + c, b),$$

und wollen zeigen, dass $\Phi \equiv 0$. Klarerweise gilt

$$\Phi(a, b, c) = 0, \text{ falls } a, b, c > 0, \text{ und}$$

$$\Phi(a, b, c) = -\Phi(a, c, b).$$

Außerdem erhalten wir für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit (4.5) und (4.6)

$$\begin{aligned} -\Phi(a + b, -b, c) &= -G(a + b, -b) - G(a, c) + G(a + b, c) + G(a + b + c, -b) \\ &= -G(-a, -b) - G(a, c) + G(a + b, c) + G(-a - c, -b) \\ &= G(a, b) - G(a, c) + G(a + b, c) - G(a + c, b) \\ &= \Phi(a, b, c). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ganz ähnlich lassen sich die Gleichungen

$$\Phi(a, b, c) = -\Phi(-a, a + b, a + c) \quad (4.8)$$

$$= \Phi(b, -a - b, a + c) \quad (4.9)$$

$$= \Phi(c, a + b, -a - c) \quad (4.10)$$

$$= -\Phi(a + b + c, -a - b, -a - c) \quad (4.11)$$

$$= -\Phi(-a - b - c, b, c) \quad (4.12)$$

zeigen. Wegen (4.7) und $\Phi(a, b, c) = -\Phi(a, c, b)$ können wir die letzten beiden Argumente immer nichtnegativ wählen. Es gibt also $a', b', c' \in \mathbb{R}$, sodass

$$\Phi(a, b, c) = \pm\Phi(a', b', c') \quad \text{und} \quad b', c' \geq 0$$

gilt. Falls eine der Zahlen a', b', c' gleich 0 ist, folgt mit (4.4) sofort $\Phi(a', b', c') = 0$. Seien also $a', b', c' \neq 0$. Für $a' > 0$ wissen wir bereits, dass $\Phi(a', b', c') = 0$ gilt. Betrachten wir daher den Fall $a' < 0$. Gilt $a' + b' \geq 0$ und $a' + c' \geq 0$, so erhalten wir mit Gleichung (4.8), dass

$$\Phi(a', b', c') = -\Phi(-a', a' + b', a' + c') = 0.$$

Ist nur eine der beiden Zahlen nichtnegativ, verwenden wir entsprechend Gleichungen (4.9) oder (4.10). Sind $a' + b' < 0$ und $a' + c' < 0$, so ergibt sich im Fall $a' + b' + c' \geq 0$ mit Gleichung (4.11) ebenfalls $\Phi(a', b', c') = 0$. Im Fall $a' + b' + c' < 0$ liefert Gleichung (4.12) das Gewünschte. Insgesamt erhalten wir also

$$\Phi(a, b, c) = \pm\Phi(a', b', c') = 0,$$

damit erfüllt G Bedingung (4.3) für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten nun $\mathbb{R} \times \mathfrak{V}$, versehen mit der Operation

$$(a, x) + (b, y) := (a + b, x + y + G(a, b)).$$

Mittels (4.2) und (4.3) lässt sich leicht nachrechnen, dass $\mathbb{R} \times \mathfrak{V}$ mit dieser Addition eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $(0, 0)$ bildet.

Bezeichne $\pi: \mathbb{R} \times \mathfrak{V} \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die erste Komponente. Wir betrachten die Menge \mathcal{S} all jener Untergruppen $H \leq \mathbb{R} \times \mathfrak{V}$, für welche $\pi|_H$ injektiv ist. Da $\{(0, 0)\}$ sicher in dieser Menge enthalten ist, ist \mathcal{S} nichtleer. Die Elemente von \mathcal{S} sind durch Mengeninklusion geordnet, und jede Kette \mathcal{K} in \mathcal{S} ist durch $\bigcup \mathcal{K} \in \mathcal{S}$ nach oben beschränkt. Also gibt es nach dem Lemma von Zorn ein maximales Element \hat{H} in \mathcal{S} .

Nun zeigen wir, dass $\pi|_{\hat{H}}$ auch surjektiv ist. Angenommen, es gibt ein $c \in \mathbb{R} \setminus \pi(\hat{H})$. Betrachte vorerst den Fall, dass ein Vielfaches von c in $\pi(\hat{H})$ liegt. Wir wählen $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ minimal mit $kc \in \pi(\hat{H})$. Klarerweise ist dieses k der größte gemeinsame Teiler aller m , für die $mc \in \pi(\hat{H})$ ist. Es gilt für alle $x \in \mathfrak{V}$

$$k \cdot (c, x) = \left(kc, kx + \sum_{i=1}^{k-1} G(c, ic) \right).$$

Sei $w \in \mathfrak{V}$ jenes Element, für welches (kc, w) in \hat{H} liegt. Setzt man nun

$$v = \frac{1}{k} \left(w - \sum_{i=1}^{k-1} G(c, ic) \right) \in \mathfrak{V},$$

so ergibt sich $k \cdot (c, v) = (kc, w) \in \hat{H}$. Gibt es kein $k \neq 0$, für das kc in $\pi(\hat{H})$ liegt, setzen wir $k = 0$ und wählen v beliebig. Es gilt dann $k \cdot (c, v) = (0, 0) \in \hat{H}$.

Wir betrachten nun

$$H' := \left\{ (a, x) + n(c, v) \mid (a, x) \in \hat{H} \text{ und } n \in \mathbb{Z} \right\} \leq \mathbb{R} \times \mathfrak{V}.$$

Klarerweise gilt $\hat{H} \subsetneq H'$. Ist $(a, x) + n(c, v)$ Element aus H' mit

$$\pi((a, x) + n(c, v)) = a + nc = 0,$$

so ist $nc = -a \in \pi(\hat{H})$. Dann muss n ein Vielfaches von k sein, es gibt also ein $l \in \mathbb{Z}$ mit $n = lk$ und damit ist

$$(a, x) + n(c, v) = (a, x) + lk \cdot (c, v) \in \hat{H}.$$

Da π auf \hat{H} injektiv ist, muss $(a, x) + n(c, v) = (0, 0)$ sein. Damit ist aber auch $\pi|_{H'}$ injektiv, womit auch H' in \mathcal{S} liegt. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von \hat{H} . Also muss π auf \hat{H} auch surjektiv sein.

Jedem $a \in \mathbb{R}$ lässt sich also ein eindeutiges Element $\varphi(a) \in \mathfrak{V}$ zuordnen, für welches $(a, \varphi(a)) \in \hat{H}$ liegt. Für $a, b \in \mathbb{R}$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} (a + b, \varphi(a + b)) &= (a, \varphi(a)) + (b, \varphi(b)) \\ &= (a + b, \varphi(a) + \varphi(b) + G(a, b)), \end{aligned}$$

woraus

$$G(a, b) = \varphi(a + b) - \varphi(a) - \varphi(b)$$

folgt. Nun wählen wir $f: (0, 1) \rightarrow \mathfrak{V}$ als $f(e^{-a}) = -\varphi(a)$ und erhalten

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(e^{-a}, e^{-b}) \\ &= G(a, b) \\ &= \varphi(a + b) - \varphi(a) - \varphi(b) \\ &= f(e^{-a}) + f(e^{-b}) - f(e^{-a-b}) \\ &= f(x) + f(y) - f(xy) \end{aligned}$$

für $x = e^{-a}, y = e^{-b}$. □

4.14 Lemma. Sei \mathfrak{V} ein beliebiger Vektorraum über \mathbb{R} und $G: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathfrak{V}$ eine Funktion, die die Bedingungen

$$G(a, b) = G(b, a) \tag{4.2}$$

$$G(a, b) + G(a + b, c) = G(a, c) + G(a + c, b) \tag{4.3}$$

$$G(\lambda a, \lambda b) = \lambda G(a, b) \tag{4.13}$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ erfüllt. Dann gibt es eine Funktion $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{V}$, die die Bedingung

$$g(a) + g(b) = g(ab)$$

und die Gleichung

$$G(a, b) = ag(a) + bg(b) - (a + b)g(a + b)$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ erfüllt.

Beweis. Wir setzen wie im Beweis von Lemma 4.14 mit den Zuordnungen (4.4), (4.5) und (4.6) die Funktion G auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ fort. Dann erfüllt die Fortsetzung die Bedingungen (4.2), (4.3) und klarerweise auch Bedingung (4.13).

Wir definieren auf $\mathbb{R} \times \mathfrak{V}$ die Operationen

$$\begin{aligned} (a, x) + (b, y) &= (a + b, x + y + G(a, b)) \quad \text{und} \\ (a, x) \cdot (b, y) &= (ab, ay + bx). \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, dass $\mathbb{R} \times \mathfrak{V}$ mit dieser Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring mit Einselement $(1, 0)$ bildet.

Wir betrachten auch hier die Menge \mathcal{S} aller Unterringe $H \leq \mathbb{R} \times \mathfrak{V}$, für die die Projektion $\pi|_H$ auf die erste Koordinate injektiv ist. Der Unterring $\{n \cdot (1, 0) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ liegt sicher in \mathcal{S} , damit ist diese Menge nichtleer. Mit dem Lemma von Zorn erhalten wir wieder ein bezüglich der Mengeninklusion maximales Element \hat{H} in \mathcal{S} .

Wir zeigen auch hier, dass $\pi(\hat{H}) = \mathbb{R}$ sein muss. Sei wieder angenommen, es gibt ein $c \in \mathbb{R} \setminus \pi(\hat{H})$. Der Isomorphismus $\pi: \hat{H} \rightarrow \pi(\hat{H})$ lässt sich eindeutig zu einem Isomorphismus $\bar{\pi}: \hat{H}[t] \rightarrow \pi(\hat{H})[t]$ zwischen den Polynomringen fortsetzen. Wir betrachten zuerst den Fall, dass c algebraisch über $\pi(\hat{H})$ ist. Sei $m \in \pi(\hat{H})[t]$ mit $m(c) = 0$ von minimalem Grad und bezeichne $\hat{m} = \bar{\pi}^{-1}(m) \in \hat{H}[t]$. Entwickeln wir \hat{m} mit der Taylorschen Formel um $(c, 0)$, so erhalten wir mit $(c, x) = (c, 0) + (0, x)$ die Darstellung

$$\hat{m}((c, x)) = \hat{m}((c, 0)) + \hat{m}'((c, 0)) \cdot (0, x), \quad (4.14)$$

da wegen $(0, x) \cdot (0, x) = (0, 0)$ alle weiteren Terme wegfallen. Wir wissen, dass

$$\pi(\hat{m}((c, 0))) = m(c) = 0,$$

daher ist $\hat{m}((c, 0)) = (0, w)$ für ein $w \in \mathfrak{V}$. Da

$$\deg(\bar{\pi}(\hat{m}')) = \deg(\hat{m}') < \deg(\hat{m}) = \deg(m),$$

darf $d := \bar{\pi}(\hat{m}')(c)$ nicht 0 sein. Sei $y \in \mathfrak{V}$ mit $\hat{m}'((c, 0)) = (d, y)$. Jetzt lässt sich (4.14) schreiben als

$$\hat{m}((c, x)) = (0, w) + (d, y) \cdot (0, x) = (0, w + dx).$$

Für $x_o := -\frac{1}{d}w$ ist dann $(c, x_o) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{V}$ eine Nullstelle von \hat{m} . Wir betrachten den Unterring

$$H' := \left\{ \hat{p}((c, x_o)) \mid \hat{p} \in \hat{H}[t] \right\}$$

von $\mathbb{R} \times \mathfrak{A}$. Wegen $(c, x_o) \in H' \setminus \hat{H}$ ist $\hat{H} \subsetneq H'$. Gilt nun $\pi(\hat{p}((c, x_o))) = 0$ für ein $\hat{p} \in \hat{H}[t]$, dann hat $p := \bar{\pi}(\hat{p}) \in \pi(\hat{H})[t]$ den Punkt c als Nullstelle. Daher muss p bis auf eine Konstante ein Vielfaches von m sein. Das heißt, es gibt ein $r \in \pi(\hat{H})[t]$ und ein $a \in \pi(\hat{H}) \setminus \{0\}$, sodass $ap = r \cdot m$. Wegen $a \in \pi(\hat{H})$ gibt es auch ein $x \in \mathfrak{A}$, für welches (a, x) in \hat{H} liegt. In $\hat{H}[t]$ ergibt sich dann

$$(a, x) \cdot \hat{p} = \bar{\pi}^{-1}(r) \cdot \hat{m},$$

und damit auch $(a, x) \cdot \hat{p}((c, x_o)) = 0$. Wegen $a \neq 0$ muss dann bereits $\hat{p}((c, x_o)) = 0$ sein. Das bedeutet, $\pi|_{H'}$ ist injektiv, und damit liegt H' in \mathcal{S} , was einen Widerspruch zur Maximalität von \hat{H} liefert.

Sei nun c transzendent über $\pi(\hat{H})$, das heißt $p(c) \neq 0$ für alle $p \in \pi(\hat{H})[t] \setminus \{0\}$. In diesem Fall wählen wir $x_o \in \mathfrak{A}$ beliebig und definieren wieder

$$H' := \left\{ \hat{p}((c, x_o)) \mid \hat{p} \in \hat{H}[t] \right\} \leq \mathbb{R} \times \mathfrak{A}.$$

Ist $\pi(\hat{p}((c, x_o))) = 0$ für ein $\hat{p} \in \hat{H}[t]$, dann hat $p := \bar{\pi}(\hat{p}) \in \pi(\hat{H})[t]$ wieder die Nullstelle c , woraus direkt $p = 0$ folgt. Daher muss auch $\hat{p} = 0$ sein, also insbesondere $\hat{p}((c, x_o)) = 0$ und wir erhalten wieder $H' \in \mathcal{S}$ und damit den Widerspruch zur Maximalität von \hat{H} . Also muss $\pi|_{\hat{H}}$ auch surjektiv sein.

Nun können wir jedem $a \in \mathbb{R}$ ein eindeutiges $\varphi(a) \in \mathfrak{A}$ zuordnen, für welches $(a, \varphi(a))$ in \hat{H} liegt. Für $a, b \in \mathbb{R}$ muss dann

$$\begin{aligned} (a + b, \varphi(a + b)) &= (a, \varphi(a)) + (b, \varphi(b)) \\ &= (a + b, \varphi(a) + \varphi(b) + G(a, b)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (ab, \varphi(ab)) &= (a, \varphi(a)) \cdot (b, \varphi(b)) \\ &= (ab, b\varphi(a) + a\varphi(b)) \end{aligned}$$

gelten. Wir wählen die Funktion $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{A}$ als $g(a) := -\frac{1}{a}\varphi(a)$ und erhalten

$$\begin{aligned} G(a, b) &= \varphi(a + b) - \varphi(a) - \varphi(b) \\ &= a \cdot g(a) + b \cdot g(b) - (a + b) \cdot g(a + b) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(ab) - b \cdot \varphi(a) - a \cdot \varphi(b) \\ &= -ab \cdot g(ab) + ab \cdot g(a) + ab \cdot g(b), \end{aligned}$$

womit schließlich auch

$$0 = g(a) + g(b) - g(ab)$$

folgt. □

Jetzt haben wir alle Bausteine zusammen um Satz 4.8 zu beweisen.

Beweis von Satz 4.8. Sei \mathfrak{V} ein beliebiger Vektorraum über \mathbb{R} und $\tau: \mathfrak{P}^3/\mathfrak{F}^3 \rightarrow \mathfrak{V}$ eine lineare Abbildung. Wir müssen zeigen, dass eine lineare Abbildung $\Phi: \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi \rightarrow \mathfrak{V}$ existiert, die $\tau \circ \kappa = \Phi \circ \Delta$ erfüllt.

Ist Φ so eine Funktion, und definiert man die Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{V}$ als $\varphi(\xi) = \Phi(1 \otimes \xi)$, dann erfüllt φ die Gleichungen

$$\varphi(\xi + \eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta) \quad \text{und} \quad \varphi(\pi) = 0. \quad (4.15)$$

Ist umgekehrt $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{V}$ eine Funktion, die (4.15) erfüllt, so lässt sich $\Phi: \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi \rightarrow \mathfrak{V}$ als die eindeutige lineare Fortsetzung von $\Phi(1 \otimes \xi) = \varphi(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, definieren.

Daher genügt es eine Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{V}$ zu finden, die die Gleichungen (4.15) und zusätzlich

$$\tau \circ \kappa([P]) = \sum_{E \in \mathcal{F}^1(P)} L(E) \cdot \varphi(\theta(E, P)) \quad (4.16)$$

für alle Polytope $P \in \bigcup \mathcal{P}_o^3$ erfüllt.

Wir definieren die Hilfsfunktion $F: (0, 1)^2 \rightarrow \mathfrak{V}$ als $F(x, y) = \tau \circ \kappa([T(x, y)])$. Dann erfüllt F für alle $x, y, z \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(y, x) \\ F(x, y) + F(xy, z) &= F(x, z) + F(xz, y), \end{aligned}$$

wobei die erste Gleichheit klar ist und die zweite aus Lemma 4.10 folgt. Nach Lemma 4.13 gibt es ein $f: (0, 1) \rightarrow \mathfrak{V}$, sodass

$$F(x, y) = f(x) + f(y) - f(xy) \quad (4.17)$$

für alle $x, y \in (0, 1)$ gilt. Außerdem stimmen nach Lemma 4.11 auch

$$xF\left(\frac{x+y}{x+y+z}, \frac{x}{x+y}\right) + yF\left(\frac{x+y}{x+y+z}, \frac{y}{x+y}\right)$$

und

$$xF\left(\frac{x+z}{x+y+z}, \frac{x}{x+z}\right) + zF\left(\frac{x+z}{x+y+z}, \frac{z}{x+z}\right)$$

für alle $x, y, z > 0$ überein. Verwendet man nun die Darstellung (4.17), erhält man nach kurzer Umformung

$$\begin{aligned} &xf\left(\frac{x}{x+y}\right) + yf\left(\frac{y}{x+y}\right) + (x+y)f\left(\frac{x+y}{x+y+z}\right) + zf\left(\frac{z}{x+y+z}\right) \\ &= xf\left(\frac{x}{x+z}\right) + zf\left(\frac{z}{x+z}\right) + (x+z)f\left(\frac{x+z}{x+y+z}\right) + yf\left(\frac{y}{x+y+z}\right). \end{aligned}$$

Sei $G: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathfrak{V}$ definiert durch

$$G(x, y) = xf\left(\frac{x}{x+y}\right) + yf\left(\frac{y}{x+y}\right),$$

dann erfüllt G für alle $x, y, z > 0$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} G(x, y) &= G(y, x) \\ G(x, y) + G(x + y, z) &= G(x, z) + G(x + z, y) \\ G(\lambda x, \lambda y) &= \lambda G(x, y), \end{aligned}$$

wobei die zweite gerade obige Bedingung und die anderen beiden klar sind. Nach Lemma 4.14 gibt es eine Funktion $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{V}$, sodass

$$g(x) + g(y) = g(xy) \tag{4.18}$$

und

$$G(x, y) = xg(x) + yg(y) - (x + y)g(x + y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ gilt. Aus (4.18) erhalten wir direkt, dass $g(1) = 0$ sein muss. Wir erhalten für $x, y \in (0, 1)$ mit $x + y = 1$

$$xf(x) + yf(y) = G(x, y) = xg(x) + yg(y).$$

Wir führen eine weitere Hilfsfunktion $h: (0, 1) \rightarrow \mathfrak{V}$ ein, die wir als $h(x) = f(x) - g(x)$ definieren. Mit Gleichung (4.18) folgt die Darstellung

$$\begin{aligned} F(x, y) &= f(x) + f(y) - f(xy) \\ &= f(x) + f(y) - f(xy) - (g(x) + g(y) - g(xy)) \\ &= h(x) + h(y) - h(xy) \end{aligned} \tag{4.19}$$

und h erfüllt für $x, y \in (0, 1)$ mit $x + y = 1$

$$xh(x) + yh(y) = 0. \tag{4.20}$$

Jetzt können wir die Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{V}$ als

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \tan(\xi) \cdot h(\sin^2(\xi)), & \text{falls } \xi \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definieren. Wir wollen zeigen, dass für beliebige $\xi, \eta \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\xi + \eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$$

gilt.

Wir beginnen vorerst mit ξ, η , für die $\xi + \eta = \frac{k\pi}{2}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist. Wegen $\varphi\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$ müssen wir also zeigen, dass

$$0 = \varphi(\xi) + \varphi(\eta) \tag{4.21}$$

gilt. Ist $\xi = \frac{l\pi}{2}$ für ein $l \in \mathbb{Z}$, dann muss $\eta = \frac{(k-l)\pi}{2}$ sein, also ebenfalls ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, daher gilt trivialerweise (4.21). Seien also weder ξ noch η Vielfache von $\frac{\pi}{2}$. Ist k gerade, so gilt

$$\sin^2(\xi) = \sin^2\left(\frac{k\pi}{2} - \eta\right) = \sin^2(\eta) \quad \text{und} \quad \tan(\xi) = \tan\left(\frac{k\pi}{2} - \eta\right) = -\tan(\eta).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) + \varphi(\eta) &= \tan(\xi) \cdot h(\sin^2(\xi)) + \tan(\eta) \cdot h(\sin^2(\eta)) \\ &= \tan(\xi) \cdot h(\sin^2(\xi)) - \tan(\xi) \cdot h(\sin^2(\xi)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für ungerades k haben wir

$$\cos(\xi) = -\sin(\eta) \quad \text{und} \quad \tan(\xi) = \tan\left(\frac{k\pi}{2} - \eta\right) = \frac{1}{\tan(\eta)}$$

und daher folgt mit (4.20)

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) + \varphi(\eta) &= \tan(\xi) \cdot h(\sin^2(\xi)) + \tan(\eta) \cdot h(\sin^2(\eta)) \\ &= \frac{1}{\sin(\xi) \cos(\xi)} \left(\sin^2(\xi) \cdot h(\sin^2(\xi)) + \cos^2(\xi) \cdot h(\cos^2(\xi)) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Insbesondere haben wir damit für beliebige $\vartheta \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\vartheta) = -\varphi\left(\frac{k\pi}{2} - \vartheta\right) \tag{4.22}$$

erhalten. Sind α, β und $\alpha * \beta$ jene Winkel in $(0, \frac{\pi}{2})$, für die

$$\sin^2(\alpha) = x, \quad \sin^2(\beta) = y \quad \text{und} \quad \sin^2(\alpha * \beta) = xy$$

gilt, so erhalten wir mit (4.19) und (4.22) für $F(x, y)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} \tau \circ \kappa([T(x, y)]) &= \cot(\alpha) \cdot \varphi(\alpha) + \cot(\beta) \cdot \varphi(\beta) - \cot(\alpha * \beta) \cdot \varphi(\alpha * \beta) \\ &= \cot(\alpha) \cdot \varphi(\alpha) + \cot(\beta) \cdot \varphi(\beta) + \cot(\alpha * \beta) \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha * \beta\right). \end{aligned}$$

Also gilt für alle Tetraeder $T(x, y)$ mit $x, y \in (0, 1)$ Gleichung (4.16) und daher auch für alle $\lambda T(x, y)$ mit $\lambda > 0$.

Für drei Winkel $\xi, \eta, \zeta \in (0, \frac{\pi}{2})$ mit Summe π erhalten wir mit Lemma 4.12 einen Quader R , der in sechs Tetraeder T_1, \dots, T_6 der Form $\lambda T(x, y)$ zerlegt wird, und deren eingeschlossene Winkel an der Kante ab gerade die Werte ξ, η, ζ annehmen,

siehe auch Abbildung 4.9. Es gilt $\tau \circ \kappa([R]) = 0$ und zusammen mit dem eben Gezeigten erhalten wir

$$0 = \sum_{E \in \mathcal{F}^1(T_1)} L(E) \cdot \varphi(\theta(E, T_1)) + \dots + \sum_{E \in \mathcal{F}^1(T_6)} L(E) \cdot \varphi(\theta(E, T_6)).$$

Die eingeschlossenen Winkel der T_i an allen Kanten außer ac, ag, af, bd, be, bh und ab sind rechte Winkel, daher liefern diese auf der rechten Seite keinen Beitrag. An jeder der Kanten ac, ag, af, bd, be, bh wird der rechte Winkel in R durch eine Ebene geteilt, und daher ergibt sich dieser als Summe der eingeschlossenen Winkel der beiden Tetraeder, die diese Kante teilen. Wegen Gleichung (4.21) liefern also auch diese in Summe keinen Beitrag. Übrig bleibt daher nur die Kante ab , an der die zugehörigen Winkel gerade die Werte ξ, η, ζ annehmen. Insgesamt erhalten wir so

$$0 = \varphi(\xi) + \varphi(\eta) + \varphi(\zeta),$$

für $\xi, \eta, \zeta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Direkt aus der Definition von φ ergibt sich die Formel $\varphi(\alpha) = -\varphi(\pi - \alpha)$, woraus

$$\varphi(\xi + \eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$$

für $\xi, \eta \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $\xi + \eta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ folgt. Wegen Gleichung (4.21) und (4.22) stimmt das auch für $\xi, \eta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und $\xi + \eta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Für $\xi, \eta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $\xi + \eta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ betrachten wir $\frac{\pi}{2} - \xi$ und $\frac{\pi}{2} - \eta$. Dann gilt $\pi - \xi - \eta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ und mit Gleichung (4.22) daher

$$\begin{aligned} \varphi(\xi + \eta) &= -\varphi(\pi - \xi - \eta) \\ &= -\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right) - \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right) \\ &= \varphi(\xi) + \varphi(\eta). \end{aligned}$$

Für beliebige $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ sind $\xi' = \frac{k\pi}{2} - \xi, \eta' = \frac{l\pi}{2} - \eta$ für passende $k, l \in \mathbb{Z}$ in dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ enthalten und dann gilt wieder mit Gleichung (4.22)

$$\begin{aligned} \varphi(\xi + \eta) &= \varphi\left(\frac{(k+l)\pi}{2} - \xi' - \eta'\right) \\ &= -\varphi(\xi' + \eta') \\ &= -\varphi(\xi') - \varphi(\eta') \\ &= \varphi(\xi) + \varphi(\eta). \end{aligned}$$

Insgesamt erfüllt die Funktion φ also die gewünschten Gleichungen (4.15).

Da sich nach Lemma 4.9 jedes Tetraeder in kleinere Tetraeder der Form $\lambda T(x, y)$ zerlegen lässt und diese die Formel (4.16) erfüllen, gilt das auch für beliebige Polytope P . \square

Eine direkte Konsequenz aus den Sätzen 4.6 und 4.7 ist der folgende Satz.

4.15 Satz (Dehn-Sydler). *Seien $P, Q \subseteq \mathbb{R}^3$ zwei Polytope. Dann sind P und Q genau dann zerlegungsgleich, wenn sie gleiches Volumen haben und $\Delta(P) = \Delta(Q)$ gilt.*

5 Zerlegungsgleichheit im \mathbb{R}^4

5.1 Der Satz von Jessen

Børge Jessen zeigte in [12], dass die von Hugo Hadwiger [6] aufgestellten Bedingungen für den \mathbb{R}^4 tatsächlich auch hinreichend sind. Dabei führt er das Problem mit Hilfe von Zylinderklassen auf den dreidimensionalen Fall zurück. In diesem Kapitel wollen wir diesen Beweis präsentieren, wobei wir uns teilweise auch auf [2] stützen.

Sei $P \in \mathcal{P}_o^4$ und $F \in \mathcal{F}^2(P)$ eine zweidimensionale Seite von P . Wir betrachten eine zweidimensionale Ebene $U \subset \mathbb{R}^4$, die orthogonal auf F steht und durch einen inneren Punkt p von F verläuft. Dann ist $P \cap U$ ein zweidimensionales Polytop, für welches p als Eckpunkt auftritt. Wir definieren den eingeschlossenen Winkel an F in P als jenen Winkel, der in $P \cap U$ an dem Eckpunkt p auftritt und bezeichnen ihn mit $\theta(F, P)$.

Wir definieren die *Dehn-Hadwiger-Invariante* $\Delta_4: \mathcal{P}_o^4 \rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi$ für alle $P \in \mathcal{P}_o^4$ durch

$$\Delta_4(P) = \sum_{F \in \mathcal{F}^2(P)} \text{vol}_2(F) \otimes \theta(F, P).$$

5.1 Satz. *Die Dehn-Hadwiger-Invariante Δ_4 ist einfach additiv und bewegungsinvariant.*

Beweis. Da das Volumen invariant unter Bewegungen und diese immer winkeltreu sind, ist Δ_4 bewegungsinvariant. Um die einfache Additivität zu zeigen, sei $P \in \mathcal{P}_o^4$ ein konvexes Polytop und H eine Hyperebene, die P teilt. Wir müssen zeigen, dass

$$\Delta_4(P) = \Delta_4(P \cap H^+) + \Delta_4(P \cap H^-) \quad (5.1)$$

gilt. Für eine zweidimensionale Seite F von P gibt es nun drei Möglichkeiten. Entweder sie liegt ganz auf einer Seite von H , sie wird von H geteilt oder sie liegt ganz auf H . Im ersten Fall liefert F auf der rechten Seite von (5.1) nur zu einem der beiden Summanden einen Beitrag, nämlich $\text{vol}_2(F) \otimes \theta(F, P)$. Im zweiten Fall erhalten wir

$$\left(\text{vol}_2(F \cap H^+) + \text{vol}_2(F \cap H^-) \right) \otimes \theta(F, P) = \text{vol}_2(F) \otimes \theta(F, P),$$

da sich der Winkel an F durch Zerschneiden nicht ändert. Im letzten Fall schließlich ergibt sich

$$\text{vol}_2(F) \otimes \left(\theta(F, P \cap H^+) + \theta(F, P \cap H^-) \right) = \text{vol}_2(F) \otimes \theta(F, P).$$

Zusätzlich können auf der rechten Seite von (5.1) auch zweidimensionale Seiten F auftreten, die keine Seiten von P sind. Diese entstehen als Schnitt einer dreidimensionalen Seite von P und der Hyperebene H , daher liegen sie sowohl in $\mathcal{F}^2(P \cap H^+)$ als auch in $\mathcal{F}^2(P \cap H^-)$ und es gilt immer

$$\theta(F, P \cap H^+) + \theta(F, P \cap H^-) = \pi.$$

Also liefern solche Kanten in $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi$ insgesamt keinen Beitrag zu (5.1), und die einfache Additivität von Δ_4 ist erwiesen. \square

Nach Satz 1.2 lässt sich Δ_4 als einfach additive Abbildung auf ganz $\bigcup \mathcal{P}_o^4$ fortsetzen. Die Invarianz unter Bewegungen bleibt dabei klarerweise auch erhalten.

Wir nennen einen zweistufigen Zylinder Z im \mathbb{R}^4 der Form $I + A$, wobei $A \in \bigcup \mathcal{P}_o^3$ und I ein Liniensegment ist, ein *Prisma*. Steht I normal auf das dreidimensionale Polytop A , so heißt Z *gerade*.

Für gerade Prismen der Höhe 1 lassen sich das Volumen und die Dehn-Hadwiger-Invariante sehr einfach mit Hilfe des dreidimensionalen Volumens und der Dehn-Invarianten darstellen.

5.2 Lemma. *Sei $I + A \subseteq \mathbb{R}^4$ ein gerades Prisma, wobei I die Länge 1 hat. Dann ist*

$$\text{vol}_4(I + A) = \text{vol}_3(A) \quad \text{und} \quad \Delta_4(I + A) = \Delta_3(A).$$

Beweis. Die erste Behauptung ist klar, da $I + A$ gerade ist und I die Länge 1 hat. Bezeichne a den Anfangspunkt und b den Endpunkt von I . Dann ist jede zweidimensionale Seite von $I + A$ von der Form $\{a\} + F$, $\{b\} + F$ oder $I + E$, wobei F eine beliebige zweidimensionale Seitenfläche und E eine beliebige Kante von A bezeichnet. Die eingeschlossenen Winkel an Seiten der ersten beiden Formen sind immer rechte Winkel, daher leisten diese in $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi$ keinen Beitrag zu $\Delta_4(I + A)$. An Seiten der Form $I + E$ hingegen ergeben sich die eingeschlossenen Winkel gerade als $\theta(E, A)$ im Dreidimensionalen. Insgesamt erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \Delta_4(I + A) &= \sum_{F \in \mathcal{F}^2(I+A)} \text{vol}_2(F) \otimes \theta(F, P) \\ &= \sum_{E \in \mathcal{F}^1(A)} \text{vol}_2(I + E) \otimes \theta(E, A) \\ &= \sum_{E \in \mathcal{F}^1(A)} L(E) \otimes \theta(E, A) \\ &= \Delta_3(A). \end{aligned}$$

\square

Um auch für beliebige Polytope im \mathbb{R}^4 eine solche Vereinfachung zu erreichen, benötigen wir noch einige Hilfssätze.

5.3 Lemma. Seien $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ paarweise orthogonal. Dann ist das Simplex $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ zerlegungsgleich zu

$$\left([a_1] + \frac{1}{2}[a_2, a_3, a_4] \right) \cup \left(\frac{1}{2}[a_1, a_2, a_3] + [a_4] \right).$$

Beweis. Jeder Punkt x von $S = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ besitzt eine eindeutige Darstellung der Form

$$x = a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4, \quad (5.2)$$

wobei $a_0 \in \mathbb{R}^4$ ein beliebiger Startpunkt ist und die Ungleichungskette

$$0 \leq \lambda_4 \leq \lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq 1 \quad (5.3)$$

gilt. Wählen wir $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ als neues Koordinatensystem und o.B.d.A. $a_0 = 0$, dann hat x die Darstellung $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Wir zerlegen S in die beiden Polytope

$$P = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in S \mid \lambda_2 + \lambda_3 \leq 1\}$$

und

$$Q = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in S \mid \lambda_2 + \lambda_3 \geq 1\}.$$

Dann wird P zerteilt in

$$P_1 = \left\{ x \in S \mid \lambda_2 + \lambda_3 \leq 1, \lambda_2 \leq \frac{1}{2} \right\}$$

und

$$P_2 = \left\{ x \in S \mid \lambda_2 + \lambda_3 \leq 1, \lambda_2 \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Wir betrachten die Bewegung

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (1 - \lambda_1, 1 - \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

und untersuchen das Polytop $f(P_2)$. Es besteht aus all jenen Punkten $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, für die die Ungleichungen

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda_4 \leq \lambda_3 \leq 1 - \lambda_2 \leq 1 - \lambda_1 \leq 1, \\ \lambda_3 \leq \lambda_2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

gelten. Zusammengefasst ergibt das

$$0 \leq \lambda_4 \leq \lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2.$$

Damit erhalten wir, dass das Polytop $P_1 \cup f(P_2)$ aus genau jenen Punkten besteht, die die Ungleichungen

$$0 \leq \lambda_4 \leq \lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad 0 \leq \lambda_1 \leq 1$$

erfüllen. Das ist aber gerade das Prisma

$$[a_1] + \frac{1}{2}[a_2, a_3, a_4].$$

Das Polytop Q zerlegt man ebenso in zwei Teile Q_1 und Q_2 , wobei in Q_1 die Ungleichung $\lambda_3 \leq \frac{1}{2}$ gelten soll und in Q_2 entsprechend $\lambda_3 \geq \frac{1}{2}$. Hier betrachten wir die Bewegung g , welche durch

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (\lambda_1, \lambda_2, 1 - \lambda_3, 1 - \lambda_4)$$

gegeben ist und erhalten $g(Q_1) \cup Q_2 = \frac{1}{2}[a_1, a_2, a_3] + [a_4]$. Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned} S &= P \cup Q \\ &\sim P_1 \cup f(P_2) \cup g(Q_1) \cup Q_2 \\ &= \left([a_1] + \frac{1}{2}[a_2, a_3, a_4] \right) \cup \left(\frac{1}{2}[a_1, a_2, a_3] + [a_4] \right). \end{aligned}$$

□

5.4 Lemma. *Sei $A + B$ ein zweistufiger Zylinder im \mathbb{R}^4 und $\lambda > 0$. Dann ist*

$$\lambda A + B \sim_T A + \lambda B \quad \text{mod } \mathcal{Z}_3^4.$$

Beweis. Es genügt, die Aussage für Zylinder der Formen $[a_1, a_2, a_3] + [a_4]$ und $[a_1, a_2] + [a_3, a_4]$ zu zeigen, da sich jeder zweistufige Zylinder in solche zerlegen lässt. Nach Korollar 3.5 gilt

$$\begin{aligned} (\lambda[a_1] + [a_2, a_3, a_4]) \cup (\lambda[a_1, a_2] + [a_3, a_4]) \cup (\lambda[a_1, a_2, a_3] + [a_4]) &\sim_T \\ ([a_1] + \lambda[a_2, a_3, a_4]) \cup ([a_1, a_2] + \lambda[a_3, a_4]) \cup ([a_1, a_2, a_3] + \lambda[a_4]). & \quad (5.4) \end{aligned}$$

Dies gilt auch, wenn wir hier a_1 durch $-a_1$ ersetzen. Vereinigen wir dann die linke Seite des Ergebnisses mit der rechten Seite von Satz 3.3 und umgekehrt, so erhalten wir mit $[a_1] \cong_T [-a_1]$ und Satz 3.3

$$\begin{aligned} (\lambda[a_1, a_2] + [a_3, a_4]) \cup (\lambda[a_1, a_2, a_3] + [a_4]) \cup \\ ([-a_1, a_2] + \lambda[a_3, a_4]) \cup ([-a_1, a_2, a_3] + \lambda[a_4]) &\sim_T \\ ([a_1, a_2] + \lambda[a_3, a_4]) \cup ([a_1, a_2, a_3] + \lambda[a_4]) \cup \\ (\lambda[-a_1, a_2] + [a_3, a_4]) \cup (\lambda[-a_1, a_2, a_3] + [a_4]). & \end{aligned}$$

Jetzt ersetzen wir a_4 durch $-a_4$, gehen wieder genauso vor wie oben und erhalten

$$\begin{aligned} (\lambda[a_1, a_2] + [a_3, a_4]) \cup ([-a_1, a_2] + \lambda[a_3, a_4]) \cup \\ ([a_1, a_2] + \lambda[a_3, -a_4]) \cup (\lambda[-a_1, a_2] + [a_3, -a_4]) &\sim_T \\ ([a_1, a_2] + \lambda[a_3, a_4]) \cup (\lambda[-a_1, a_2] + [a_3, a_4]) \cup \\ (\lambda[a_1, a_2] + [a_3, -a_4]) \cup ([-a_1, a_2] + \lambda[a_3, -a_4]). & \quad (5.5) \end{aligned}$$

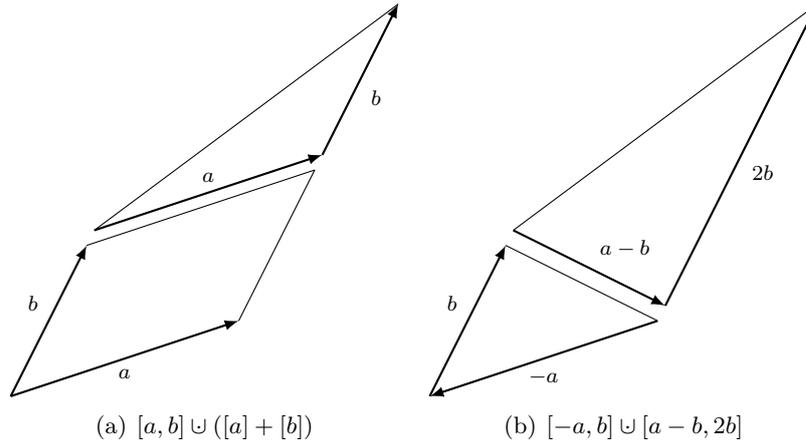


Abbildung 5.1

Für linear unabhängige $a, b \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$[a, b] \cup ([a] + [b]) \sim_T [-a, b] \cup [a - b, 2b],$$

vgl. Abbildung 5.1. Ebenso ergibt sich

$$[a, b] \cup ([a] + [b]) \sim_T [a, -b] \cup [2a, b - a].$$

Mit diesen beiden Beziehungen und Satz 3.3 kann man aus (5.5)

$$\begin{aligned} & (\lambda[a_1 - a_2, 2a_2] + [2a_3, a_4 - a_3]) \cup ([a_1 - a_2, 2a_2] + \lambda([a_3] + [a_4])) \cup \\ & \quad ([a_1] + [a_2] + \lambda[2a_3, a_4 - a_3]) \cup (\lambda([a_1] + [a_2]) + [a_3] + [a_4]) \sim_T \\ & \quad ([a_1 - a_2, 2a_2] + \lambda[2a_3, a_4 - a_3]) \cup (\lambda[a_1 - a_2, 2a_2] + [a_3] + [a_4]) \cup \\ & \quad (\lambda([a_1] + [a_2]) + [2a_3, a_4 - a_3]) \cup ([a_1] + [a_2] + \lambda([a_3] + [a_4])) \end{aligned}$$

folgern, was schließlich

$$(\lambda[a_1 - a_2, 2a_2] + [2a_3, a_4 - a_3]) \cup Z_1 \sim_T ([a_1 - a_2, 2a_2] + \lambda[2a_3, a_4 - a_3]) \cup Z_2$$

mit $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_3^4$ liefert. Ersetzt man jetzt a_1, a_2, a_3 und a_4 durch $a_1 + \frac{1}{2}a_2, \frac{1}{2}a_2, \frac{1}{2}a_3$ und $a_4 + \frac{1}{2}a_3$, ergibt sich

$$\lambda[a_1, a_2] + [a_3, a_4] \sim_T [a_1, a_2] + \lambda[a_3, a_4] \quad \text{mod } \mathcal{Z}_3^4,$$

womit die Aussage für Zylinder der Form $[a_1, a_2] + [a_3, a_4]$ gezeigt ist. Verwenden wir dieses Ergebnis in (5.4), so erhalten wir

$$\begin{aligned} & (\lambda[a_1] + [a_2, a_3, a_4]) \cup (\lambda[a_1, a_2, a_3] + [a_4]) \sim_T \\ & \quad ([a_1] + \lambda[a_2, a_3, a_4]) \cup ([a_1, a_2, a_3] + \lambda[a_4]) \quad \text{mod } \mathcal{Z}_3^4. \end{aligned}$$

Wir setzen wieder für a_1 den Vektor $-a_1$ ein, vereinigen die linke Seite des Ergebnisses mit der rechten Seite obiger Gleichung und umgekehrt und erhalten

$$\begin{aligned} (\lambda[a_1, a_2, a_3] + [a_4]) \cup ([-a_1, a_2, a_3] + \lambda[a_4]) &\sim_T \\ ([a_1, a_2, a_3] + \lambda[a_4]) \cup (\lambda[-a_1, a_2, a_3] + [a_4]) &\text{ mod } \mathcal{Z}_3^4. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Im \mathbb{R}^3 gilt für beliebige linear unabhängige Vektoren b_1, b_2, b_3

$$\text{conv}(0, b_1, b_2, b_3) \cup [-b_1, b_2 - b_1, b_3 - b_2] \sim_T \text{conv}(0, 2b_1, b_2, b_3),$$

vgl. Abbildung 5.2. Vereinigen wir zuerst die beiden Seiten dieser Gleichung mit

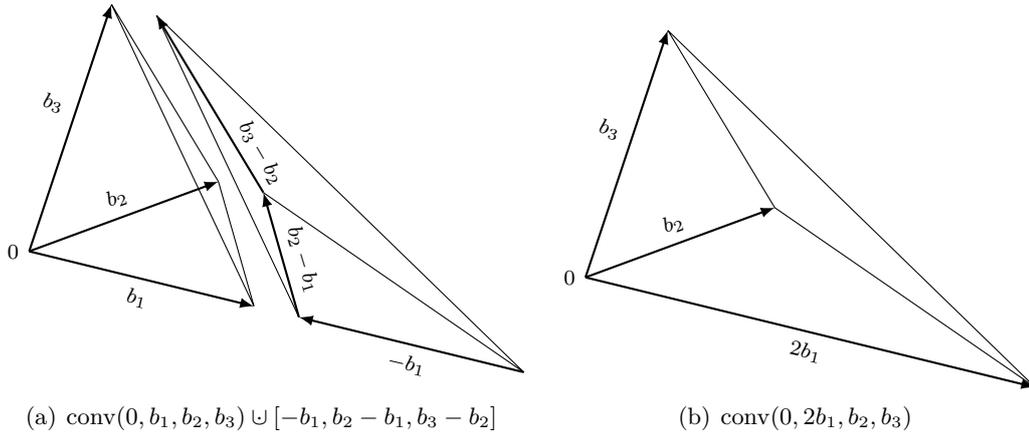


Abbildung 5.2

$\text{conv}(0, b_1, b_2, b_3) = [b_1, b_2 - b_1, b_3 - b_2]$ und Minkowski-addieren dann ein beliebiges Segment $[b_4]$ dazu, ergibt sich nach kurzer Umformung

$$\begin{aligned} (2 \cdot \text{conv}(0, b_1, b_2, b_3) + [b_4]) \cup ([-b_1, b_2 - b_1, b_3 - b_2] + [b_4]) &\sim_T \\ (\text{conv}(0, 2b_1, b_2, b_3) + [b_4]) \cup ([b_1, b_2 - b_1, b_3 - b_2] + [b_4]) &. \end{aligned}$$

Setzt man hier einmal $b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_3$ und $b_4 = \lambda a_4$ und einmal $b_1 = \lambda a_1, b_2 = \lambda a_2, b_3 = \lambda a_3$ und $b_4 = a_4$, so erhält man zusammen mit (5.6), dass

$$\begin{aligned} (2 \cdot \text{conv}(0, a_1, a_2, a_3) + \lambda[a_4]) \cup (\lambda \text{conv}(0, 2a_1, 2a_2, 2a_3) + [a_4]) &\sim_T \\ (2 \cdot \lambda \text{conv}(0, a_1, a_2, a_3) + [a_4]) \cup (\text{conv}(0, 2a_1, 2a_2, 2a_3) + \lambda[a_4]) &\text{ mod } \mathcal{Z}_3^4 \end{aligned} \quad (5.7)$$

gilt. Genauso kann man

$$\begin{aligned} (2 \cdot \text{conv}(0, 2a_1, 2a_2, 2a_3) + \lambda[a_4]) \cup (\lambda \text{conv}(0, 2a_1, 2a_2, 2a_3) + [a_4]) &\sim_T \\ (2 \cdot \lambda \text{conv}(0, 2a_1, 2a_2, 2a_3) + [a_4]) \cup (\text{conv}(0, 2a_1, 2a_2, 2a_3) + \lambda[a_4]) &\text{ mod } \mathcal{Z}_3^4 \end{aligned} \quad (5.8)$$

und

$$\begin{aligned} (2 \cdot \text{conv}(0, 2a_1, 2a_2, 2a_3) + \lambda[a_4]) \cup (\lambda \text{conv}(0, 2a_1, 2a_2, 2a_3) + [a_4]) &\sim_T \\ (2 \cdot \lambda \text{conv}(0, 2a_1, 2a_2, 2a_3) + [a_4]) \cup (\text{conv}(0, 2a_1, 2a_2, 2a_3) + \lambda[a_4]) &\text{ mod } \mathcal{Z}_3^4 \end{aligned} \quad (5.9)$$

zeigen. Gibt man nun zwei mal (5.8) und vier mal (5.7) zu Gleichung (5.9), erhält man

$$\begin{aligned} (8 \cdot \text{conv}(0, a_1, a_2, a_3) + \lambda[a_4]) \cup (\lambda \text{conv}(0, 2a_1, 2a_2, 2a_3) + [a_4]) &\sim_T \\ (8 \cdot \lambda \text{conv}(0, a_1, a_2, a_3) + [a_4]) \cup (\text{conv}(0, 2a_1, 2a_2, 2a_3) + \lambda[a_4]) &\text{ mod } \mathcal{Z}_3^4. \end{aligned}$$

Lemma 3.6 liefert

$$8 \cdot \text{conv}(0, a_1, a_2, a_3) \sim_T \text{conv}(0, 2a_1, 2a_2, 2a_3) \cup \text{conv}(0, 6a_1, 6a_2, 6a_3) \text{ mod } \mathcal{Z}_2^3,$$

womit schließlich

$$\text{conv}(0, 6a_1, 6a_2, 6a_3) + \lambda[a_4] \sim_T \lambda \text{conv}(0, 6a_1, 6a_2, 6a_3) + [a_4] \text{ mod } \mathcal{Z}_3^4$$

gezeigt ist. Ersetzt man jetzt noch a_1, a_2 und a_3 durch $\frac{1}{6}a_1, \frac{1}{6}(a_1 + a_2)$ und $\frac{1}{6}(a_1 + a_2 + a_3)$, so ergibt sich

$$[a_1, a_2, a_3] + \lambda[a_4] \sim_T \lambda[a_1, a_2, a_3] + [a_4] \text{ mod } \mathcal{Z}_3^4.$$

□

Mit dem folgenden Satz lässt sich schließlich das Problem der Zerlegungsgleichheit auf den dreidimensionalen Fall zurückführen.

5.5 Satz. *Jedes Polytop im \mathbb{R}^4 ist zerlegungsgleich zu einem geraden Prisma der Höhe 1.*

Beweis. Es genügt, die Aussage für Simplizes der Form $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ mit paarweise orthogonalen Vektoren $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ zu zeigen, da sich jedes Simplex und damit auch jedes beliebige Polytop in solche zerlegen lässt, vgl. dazu auch [9]. Nach Lemma 5.3 gilt

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] \sim_T \left([a_1] + \frac{1}{2}[a_2, a_3, a_4] \right) \cup \left(\frac{1}{2}[a_1, a_2, a_3] + [a_4] \right).$$

Bezeichnet λ die Länge des Vektors a_1 und $e_1 = \frac{1}{\lambda}a_1$, dann gilt nach Lemma 5.4

$$\left([a_1] + \frac{1}{2}[a_2, a_3, a_4] \right) \cup Z_1 \sim_T \left([e_1] + \frac{\lambda}{2}[a_2, a_3, a_4] \right) \cup Z_2,$$

mit $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_3^4$. Wir wissen bereits, dass jeder dreistufige Zylinder im \mathbb{R}^4 zerlegungsgleich zu einem Parallelepipeden sein muss, vgl. Lemma 1.4. Daher gibt es $Z'_1, Z'_2 \in \mathcal{Z}_4^4$, sodass

$$Z_1 \sim Z'_1 \text{ und } Z_2 \sim Z'_2$$

gilt. Nach Lemma 3.9 können wir diese als $[e_1] + P$ bzw. $[e_1] + Q$ wählen, wobei P, Q dreidimensionale Parallelepipede sind, auf welche e_1 normal steht. Dann gilt

$$Z_1 \sim [e_1] + P \text{ und } Z_2 \sim [e_1] + Q$$

und damit erhalten wir

$$\left([a_1] + \frac{1}{2}[a_2, a_3, a_4]\right) \cup ([e_1] + P) \sim [e_1] + \left(\frac{\lambda}{2}[a_2, a_3, a_4] \cup Q\right).$$

Da $[a_1] + \frac{1}{2}[a_2, a_3, a_4]$ nichtleeres Inneres und e_1 die Länge 1 hat, gilt die Ungleichung

$$\text{vol}_3\left(\frac{\lambda}{2}[a_2, a_3, a_4] \cup Q\right) > \text{vol}_3(P).$$

Nach Lemma 3.1 lässt sich $\frac{\lambda}{2}[a_2, a_3, a_4] \cup Q$ so in zwei Teile P' und Q' zerlegen, dass P' translativ zerlegungsgleich zu P ist. Daher erhalten wir

$$\left([a_1] + \frac{1}{2}[a_2, a_3, a_4]\right) \cup ([e_1] + P) \sim ([e_1] + P') \cup ([e_1] + Q'),$$

mit Satz 3.3 ergibt sich

$$[a_1] + \frac{1}{2}[a_2, a_3, a_4] \sim [e_1] + Q',$$

und e_1 hat die Länge 1 und steht normal auf die Hyperebene $\text{aff}(Q')$. Analog lässt sich

$$\frac{1}{2}[a_1, a_2, a_3] + [a_4] \sim Q'' + [e_4],$$

wobei e_4 den normierten Vektor in Richtung a_4 bezeichnet, zeigen. Nach Ausführen einer geeigneten Bewegung liegen Q' und Q'' in der selben Hyperebene und haben disjunktes Inneres, ihre Vereinigung bezeichnen wir dann mit U . Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} [a_1, a_2, a_3, a_4] &\sim_T \left([a_1] + \frac{1}{2}[a_2, a_3, a_4]\right) \cup \left(\frac{1}{2}[a_1, a_2, a_3] + [a_4]\right) \\ &\sim ([e_1] + Q') \cup (Q'' + [e_4]) \\ &\sim I + U, \end{aligned}$$

wobei I ein Liniensegment der Länge 1 ist, das normal auf die Hyperebene $\text{aff}(U)$ steht. \square

Damit folgt nun eine zum Satz 4.7 von Dehn-Sydler analoge Charakterisierung der Zerlegungsgleichheit im \mathbb{R}^4 .

5.6 Satz (Jessen). *Zwei Polytope $P, Q \in \cup \mathcal{P}_o^4$ sind genau dann zerlegungsgleich, wenn sie das selbe Volumen haben und*

$$\Delta_4(P) = \Delta_4(Q)$$

gilt.

Beweis. Nach Satz 1.3 sind die Bedingungen $\text{vol}_4(P) = \text{vol}_4(Q)$ und $\Delta_4(P) = \Delta_4(Q)$ notwendig für die Zerlegungsgleichheit zweier Polytope P und Q . Seien also P und Q zwei Polytope, deren Volumen und Dehn-Hadwiger-Invarianten übereinstimmen. Mit Satz 5.5 erhalten wir

$$P \sim A + I \quad \text{und} \quad Q \sim B + I,$$

wobei $A, B \in \cup \mathcal{P}_o^3$ in der selben Hyperebene liegen und I ein Liniensegment der Länge 1 ist, das normal auf diese Ebene steht. Lemma 5.2 ergibt zusammen mit den Voraussetzungen

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(A) = \text{vol}_4(P) = \text{vol}_4(Q) = \text{vol}_3(B) \quad \text{und} \\ \Delta_3(A) = \Delta_4(P) = \Delta_4(Q) = \Delta_3(B). \end{aligned}$$

Nach dem Satz 4.7 von Dehn-Sydler sind dann A und B zerlegungsgleich, und damit ist auch die Zerlegungsgleichheit von P und Q gezeigt. \square

Literaturverzeichnis

- [1] Boltjanskiĭ, Vladimir G.: *Zerlegungsgleichheit ebener Polygone*. Bul. Inst. Politehn. Iași (N.S.), 4(8)(1-2):33–38, 1958.
- [2] Boltjanskiĭ, Vladimir G.: *Hilbert's third problem*. V. H. Winston & Sons, Washington, D.C., 1978, ISBN 0-470-26289-3. Übersetzt aus dem Russischen ins Englische von Richard A. Silverman, Mit einem Vorwort von Albert B. J. Novikoff, Scripta Series in Mathematics.
- [3] Dehn, Max: *Ueber den Rauminhalt*. Math. Ann., 55(3):465–478, 1901, ISSN 0025-5831.
- [4] Gerwien, Paul: *Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke*. J. Reine Angew. Math., 10:228–234, 1833.
- [5] Hadwiger, Hugo: *Ergänzungsgleichheit k -dimensionaler Polyeder*. Math. Z., 55:292–298, 1952, ISSN 0025-5874.
- [6] Hadwiger, Hugo: *Zum Problem der Zerlegungsgleichheit k -dimensionaler Polyeder*. Math. Ann., 127:170–174, 1954, ISSN 0025-5831.
- [7] Hadwiger, Hugo: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer-Verlag, Berlin, 1957.
- [8] Hadwiger, Hugo und Paul Glur: *Zerlegungsgleichheit ebener Polygone*. Elemente der Math., 6:97–106, 1951.
- [9] Harazišvili, Aleksander B.: *Orthogonal simplexes in four-dimensional space*. Sakhart. SSR Mecn. Akad. Moambe, 88(1):33–36, 1977.
- [10] Hilbert, David: *Mathematical problems*. Bull. Amer. Math. Soc., 8(10):437–479, 1902, ISSN 0002-9904.
- [11] Jessen, Børge: *The algebra of polyhedra and the Dehn-Sydler theorem*. Math. Scand., 22:241–256 (1969), 1968, ISSN 0025-5521.
- [12] Jessen, Børge: *Zur Algebra der Polytope*. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II, Seiten 47–53, 1972, ISSN 0065-5295.
- [13] Jessen, Børge, Jørgen Karpf und Anders Thorup: *Some functional equations in groups and rings*. Math. Scand., 22:257–265 (1969), 1968, ISSN 0025-5521.

-
- [14] Sydler, Jean Pierre: *Sur la décomposition des polyèdres*. Comment. Math. Helv., 16:266–273, 1944, ISSN 0010-2571.
- [15] Sydler, Jean Pierre: *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*. Comment. Math. Helv., 40:43–80, 1965, ISSN 0010-2571.
- [16] Zylev, V. B.: *On the equi-dissectability of two equi-completable polytopes*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 161:515–516, 1965, ISSN 0002-3264.