Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.

http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.

http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

# Langzeitverhalten linearer kinetischer Gleichungen mittels Hypokoerzivität

Ausgeführt am Institut für
Analysis und Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.-Prof. Dr. Ansgar JÜNGEL

durch
Esther Sarah DAUS
Karolinengasse 8/34
1040 Wien

Datum

Unterschrift

# Abstract

The aim of this master thesis is to evaluate the exponential rate of convergence to the unique global equilibrium state for a large class of linear kinetic equations conserving mass. To this end we use the concept of hypocoercivity introduced by Cédric Villani and the method of a modified entropy functional developed by Frédéric Hérau. At the end under certain conditions we can quantify the exponential rate of convergence of three types of kinetic equations, which differ in their collision kernels: the BGK operator, the Fokker Planck operator and the Scattering operator without detailed balance.

These results are based on the paper "Hypocoercivity for Linear Kinetic Equations Conserving Mass"written by Jean Dolbeault, Clément Mouhot and Christian Schmeiser. I added parts of proofs not carried out and information about the theoretical background, especially the concept of hypocoercivity established by Cédric Villani.

# Zusammenfassung

Ziel dieser Diplomarbeit ist es, für möglichst viele Typen von masseerhaltenden linearen kinetischen Gleichungen die exponentielle Konvergenzrate zum eindeutigen globalen Gleichgewicht zu bestimmen. Dabei verwenden wir die Methode der Hypokoerzivität nach *Cédric Villani* und arbeiten mit einer von *Frédéric Hérau* eingeführten quadratischen Entropie. Als Resultat erhalten wir unter Voraussetzungen an das äußere Potential für kinetische Gleichungen mit dem BGK-Operator, dem Fokker-Planck Operator und dem Scattering Operator ohne "detailed balance" als Kollisionsoperator eine explizite Abschätzung der Konvergenzrate.

Die Arbeit beruht auf der wissenschaftlichen Publikation *"Hypocoercivity for linear kinetic equations conserving mass"* von *Jean Dolbeault, Clément Mouhot und Christian Schmeiser* [9]. Ich war bestrebt, nur skizzenhaft notierte Rechnungen rigoros durchzurechnen und den theoretischen Hintergrund auszuarbeiten, insbesondere präsentiere ich die Grundlagen des abstrakten Konzepts der Hypokoerzivität nach *Cédric Villani*.

Prof. Ansgar Jüngel möchte ich an dieser Stelle für die ausgezeichnete Betreuung danken, weiters bedanke ich mich bei allen, die mich beim Zustandekommen dieser Arbeit unterstützt haben.

Wien, September 2013

# Inhaltsverzeichnis


**1 Einleitung** **5**
- 1.1 Das Modellproblem . . . 5
- 1.2 Zur Notation . . . 6
- 1.3 Überblick über vorliegende Arbeit . . . 7
- 1.4 Überblick über den Begriff Hypokoerzivität . . . 8

**2 Kinetische Gleichungen** **10**
- 2.1 Der Satz von Liouville . . . 10
- 2.2 Der Transportoperator und der Kollisionsoperator . . . 12
- 2.3 Lokales und globales Gleichgewicht . . . 16

**3 Wichtige Methoden und Begriffe** **18**
- 3.1 Unbeschränkte Operatoren . . . 18
- 3.2 Stark stetige Operatorhalbgruppen . . . 21
- 3.3 Entropie-Dissipationsmethoden . . . 23
- 3.4 Koerzivität und Hypokoerzivität . . . 26

**4 Hypokoerzivität für lineare kinetische Gleichungen** **30**
- 4.1 Untersuchung des Langzeitverhaltens mittels Hypokoerzivität . . . 30
  - 4.1.1 Allgemeine Voraussetzungen . . . 30
  - 4.1.2 Makroskopischer Diffusionslimes . . . 34
  - 4.1.3 Die abstrakte Methode . . . 39
  - 4.1.4 Anwendung auf ein eindimensionales Cattaneo-Modell . . . 46
  - 4.1.5 Anwendung auf lineare kinetische Gleichungen . . . 51
- 4.2 Regularität eines elliptischen Problems . . . 56
  - 4.2.1 Zielsetzung . . . 56
  - 4.2.2 Varianten der Poincaré-Ungleichung . . . 59
  - 4.2.3 $H^2$-Regularität . . . 62
- 4.3 Maxwellsche Gleichgewichte . . . 68
  - 4.3.1 BGK-Operator . . . 71
  - 4.3.2 Fokker-Planck Operator . . . 72
  - 4.3.3 Scattering Operator (ohne "detailed balance") . . . 75

**A Grundlagen aus Partiellen Differentialgleichungen** **83**
- A.1 Wichtige Ungleichungen . . . 83
- A.2 Riesz, Lax-Milgram . . . 84
- A.3 Sobolevräume . . . 84

**Literaturverzeichnis** **85**

# Kapitel 1

# Einleitung

## 1.1 Das Modellproblem

Mit $\mathcal{H}$ bezeichnen wir während der ganzen Arbeit einen reellwertigen Hilbertraum, weiters ist $\mathcal{D}(\cdot)$ der Definitionsbereich und $\mathcal{N}(\cdot)$ der Kern oder Nullraum eines Operators.

Als Modellproblem betrachten wir die folgende lineare kinetische Gleichung auf $\mathcal{H}$ mit einer Dichtefunktion $f = f(t, x, v)$:

$$\begin{cases} \partial_t f + \mathsf{T} f = \mathsf{L} f, \\ f(0, x, v) = f_I(x, v). \end{cases} \tag{1.1}$$

Dabei stellt $t \in \mathbb{R}^+$ die Zeit, $x \in \mathbb{R}^d$ den Ort, und $v \in \mathbb{R}^d$ die Geschwindigkeit dar und $f(t, x, v)$ ist auf dem Ganzraum $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ definiert. Weiters bezeichnet $\mathsf{T}$ den folgenden unbeschränkten linearen Transportoperator mit äußerem Potential $V = V(x)$:

$$\mathsf{T} := v \cdot \nabla_x - \nabla_x V \cdot \nabla_v.$$

Mit $\mathsf{L}$ notieren wir einen linearen Kollisionsoperator, wobei wir im Laufe der Arbeit mehrere Typen untersuchen werden.

Wegen der Linearität von $\mathsf{T}$ und $\mathsf{L}$ können wir Modellgleichung (1.1) als abstraktes Cauchyproblem umformulieren, auf das sich dann unter gewissen Voraussetzungen halbgruppentheoretische Resultate anwenden lassen:

$$\begin{cases} \partial_t f = (\mathsf{L} - \mathsf{T}) f, \\ f(0, x, v) = f_I(x, v). \end{cases} \tag{1.2}$$

Unser Ziel ist es, das Langzeitverhalten von (1.2) und damit in Folge auch von (1.1) zu untersuchen. Dabei werden die Begriffe Koerzivität und Hypokoerzivität von Operatoren auf Hilberträumen eine große Rolle spielen, sodass wir eine rigorose Definition dieser Begriffe für unbeschränkte Operatoren nach *Cédric Villani* [29] im Abschnitt (3.4) einführen werden. Als Einstieg begnügen wir uns an dieser Stelle mit einer Definition für beschränkte Operatoren, wobei wir unter einem beschränkten Operator $\mathsf{A}$ auf $\mathcal{H}$ eine beschränkte lineare Abbildung $\mathsf{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ verstehen, und $\mathsf{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ schreiben.

**Definition 1.1.1.** Wie nennen einen Operator $\mathsf{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *koerziv*, wenn es ein $\lambda > 0$ gibt, sodass für alle $f \in \mathcal{N}(\mathsf{A})^\perp \cap \mathcal{H}$

$$\langle \mathsf{A} f, f \rangle \geq C \|f\|^2. \tag{1.3}$$

**Definition 1.1.2.** Wir nennen einen Operator $\mathsf{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *hypokoerziv*, falls es eine zur Hilbertraumnorm äquivalente Norm[1] gibt, sodass $\mathsf{A}$ bezüglich dieser koerziv ist.

Dabei fordern wir (1.3) nur für $f$ aus dem orthogonalen Komplement vom Nullraum von $\mathsf{A}$, damit wir auch nichtinjektive Operatoren betrachten können. Im Fall unbeschränkter Operatoren ist die Frage, für welchen Teilraum des Hilbertraums (1.3) erfüllt sein soll, genau der entscheidende Punkt, auf den es ankommt. Dies wird in weiterer Folge auf die Begriffe der *mikroskopischen Koerzivität* und *makroskopischen Koerzivität* führen, die wir im Abschnitt 4.1.3 untersuchen werden.

## 1.2 Zur Notation

Für Funktionenräume verwenden wir die folgende übliche Notation:

- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ bezeichne den Raum aller beschränkten linearen Abbildungen von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$,
- $C^k(\Omega)$ bezeichne den Raum aller $k$-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega$,
- $L^2(\Omega)$ sei der Raum aller (Äquivalenzklassen) quadratisch integrierbarer Funktionen auf $\Omega$,
- $H^k(\Omega), k \geq 0$ seien die im Anhang A.3 definierten üblichen Sobolevräume.

Weiters werden im Laufe der Arbeit folgende gewichtete Normen eine Rolle spielen:

- $\|u\|^2_{L^2(d\mu)} := \int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u^2 d\mu, \quad d\mu := \dfrac{dxdv}{F(x,v)}$, wobei $F(x,v)$ das globale Gleichgewicht ist,
- $\|u\|_i := \|uw_i\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} u^2 w_i^2 dx$, mit $\quad w_0^2 := \rho_F, \quad w_i^2 := \left(\dfrac{m_F}{\rho_F}\right)^i w_0^2 \quad$ für $i = 1, 2$,
- $\|u\|^2_{L^2(\rho_F dx)} := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} u^2 \rho_F dx$,
- $\|\nabla_x u\|^2_{L^2(m_F dx)} := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 m_F dx$,
- $\|\nabla_x^2 u\|^2_{L^2(M_F dx)} := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla_x^2 u\|^2 M_F dx$,
  wobei $\|\nabla_x^2 u\|^2 := \displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2$ die Frobeniusnorm der Hesse-Matrix bezeichnet.

[1] Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem linearen Raum $X$ heißen *äquivalent*, wenn es zwei Konstanten $C_1 > 0, C_2 > 0$ gibt, sodass gilt:

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

## 1.3 Überblick über vorliegende Arbeit

Wir möchten eine Methode entwickeln, um mittels Hypokoerzivität für eine möglichst große Klasse von linearen kinetischen Gleichungen eine Abschätzung für die exponentielle Konvergenzrate zum globalen Gleichgewichtszustand herzuleiten zu können.

Im **zweiten Kapitel** betrachten wir die physikalische Bedeutung kinetischer Gleichungen. Zunächst leiten wir mit Hilfe des Satzes von Liouville den Transportoperator $\mathsf{T}$ her, um anschließend ausgehend vom klassischen Boltzmannoperator auf verschiedene Kollisionsmodelle einzugehen.

Im **dritten Kapitel** stellen wir wichtige Methoden vor, mit denen wir arbeiten werden. Wir beginnen mit einem kurzen Überblick über unbeschränkte Operatoren und stark stetige Operatorhalbgruppen, wobei wir den Schwerpunkt bewusst auf jene Resultate setzen, die für den weiteren Verlauf der Arbeit wichtig sein werden. Aus der Halbgruppentheorie stellen wir den Existenz-und Eindeutigkeitssatz des abstrakten Cauchyproblems vor, der die eindeutige Lösbarkeit unserer kinetischen Gleichung (1.2) sicherstellen wird. Als nächstes gehen wir auf die Begriffe Entropie und Entropiedissipation ein, um im weiteren Verlauf die Rolle des *modifizierten Entropiefunktionals* als quadratische Entropie darstellen zu können. Schlussendlich stellen wir kurz das abstrakte Konzept der Hypokoerzivität für unbeschränkte Operatoren nach *Cédric Villani* [29] vor.

Nachdem wir sowohl den physikalischen als auch den mathematisch-theoretischen Rahmen beleuchtet haben, widmen wir uns im **vierten Kapitel** der Ausarbeitung des Papers *"Hypocoercivity for linear kinetic equations conserving mass"* von *Jean Dolbeault, Clément Mouhot* und *Christian Schmeiser* [9]. Dies geschieht in folgenden drei Abschnitten:

Im **ersten Abschnitt** wollen wir zunächst die Operatoren spezifizieren. Der Transportoperator $\mathsf{T}$ ist dabei fest gegeben, er hängt jedoch noch von einem vorläufig nicht genauer bestimmten äußeren Potential $V$ ab, welches den nötigen Spielraum für den Transportteil liefert. Vom Kollisionsoperator fordern wir lokale Masseerhaltung, Eindimensionalität des Kerns, sowie eine gewisse Beziehung zum Kern des Transportoperators, spezifizieren ihn aber nicht näher. Als Lösungen der kinetischen Gleichungen wollen wir nur Schwankungen um das globale Gleichgewicht betrachten.

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung erhalten wir durch den halbgruppentheoretischen Existenz-und Eindeutigkeitssatz des abstrakten Cauchy-Problems (1.2).

Interessant ist die Untersuchung des Langzeitverhaltens, welche daher den Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit bildet. Wir wollen dabei eine möglichst einfache Methode entwickeln, mit deren Hilfe man für möglichst viele Kollisionsoperatoren und Potentiale eine Abschätzung für die exponentielle Konvergenzrate erhält.

Die Kernidee unserer abstrakten Methode ist die folgende: Als Hilbertraum $\mathcal{H}$ wählen wir einen gewichteten $L^2$-Raum, den wir in die Menge der lokalen Gleichgewichte und in den darauf orthogonalen Teilraum zerlegen. Da der Kollisionsoperator auf der Menge der lokalen Gleichgewichte verschwindet und daher auf diesem Teilraum nicht wie in (1.3) mit einer positiven Konstante nach unten abgeschätzt werden kann, ist *mikroskopische Koerzivität* auf dem Komplement dieses Teilraums die maximale degenerierte Koerzivitätseigenschaft, die wir fordern können. Unter Ausnutzung der Tatsache, dass das erste Geschwindigkeitsmoment verschwindet, führt uns die von *F. Poupaud* in [25] entwickelte Methode des *makroskopischen Diffusionslimes* zur Bedingung der *makroskopischen Koerzivität* des Transportoperators auf der Menge aller lokalen Gleichgewichte. Somit haben wir für beide Teilräume einzeln eine Koerzivitätsabschätzung

zur Verfügung, jedoch für unterschiedliche Operatoren. Anschließend führen wir in Anlehnung an die Arbeit [12] von *Frédéric Hérau* ein *modifiziertes Entropiefunktional* ein, welches eine $\epsilon$-abhängige quadratische Entropie darstellt und zusätzlich gewisse kommutierende Eigenschaften aufweist, die es zu einer äquivalenten Norm machen. Zwei weitere technische Bedingungen führen uns schließlich zum gewünschten Ergebnis der exponentiellen Konvergenz zum globalen Gleichgewicht in diesem abstrakten Rahmen.

Als nächstes fragen wir uns nach der Anwendbarkeit dieser abstrakten Methode. Zunächst zeigen wir anhand eines einfachen Beispiels, welches auf ein leicht zu lösendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen führt, dass die durch die abstrakte Methode gewonnene Konvergenzrate leider nicht optimal ist. Den weiteren Teil der Arbeit bildet die Herleitung von Bedingungen, die die abstrakten Methode auf konkrete partiellen Differentialgleichungen anwendbar machen.

Hierzu führen wir im **zweiten Abschnitt** spezielle Gewichtsfunktionen ein, welche das Verhältnis zwischen den ersten vier Geschwindigkeitsmomenten widerspiegeln. Mit Hilfe dieser formulieren wir die gesuchte Beschränktheit eines gewisser Operators in eine Regularitätsaussage bezüglich einer elliptischen Differentialgleichung um. Unter Voraussetzungen an die Gewichte können wir nun $H^2 \to L^2$-Regularität dieser Differentialgleichung zeigen, was uns in Folge die Beschränktheit des ursprünglich betrachteten Operators liefert.

Im **dritten Abschnitt** ersetzen wir schließlich die Bedingungen an die Gewichte durch Bedingungen an das äußere Potential, und haben damit alle Werkzeuge in der Hand, um unsere abstrakte Methode auf die Kollisionsoperatoren BGK-Operator, Fokker-Planck Operator und Scattering Operator anwenden zu können. Als Resultat erhalten wir für diese drei Operatoren eine explizite Abschätzung für die exponentielle Konvergenz gegen das Maxwellsche Gleichgewicht.

Im **Anhang** führen wir einige grundlegenden Definitionen und Sätze aus dem Gebiet der Funktionalanalysis und der Partiellen Differentialgleichungen an, die im Laufe der Arbeit verwendet werden.

## 1.4 Überblick über den Begriff Hypokoerzivität

Als Abschluss dieses Einleitungskapitels geben wir einen kurzen forschungsgeschichtlichen Überblick über den Begriff *Hypokoerzivität*.

Die Einführung des Begriffs *Hypokoerzivität* wurde laut *Cédric Villani* [29] notwendig, als man dissipative Evolutionsgleichungen untersuchte. Sie bestehen einerseits aus einem degeneriert-dissipativen Operator (diese Rolle wird in unserem Fall der Kollisionsoperator $\mathsf{L}$ spielen, für den wir $\langle \mathsf{L}f, f\rangle \leq 0$ fordern werden), und andererseits aus einem konservativen Operator mit gewissen Symmetrieeigenschaften (in unserem Fall der schiefsymmetrische Transportoperator $\mathsf{T}$), sodass die Interaktion der beiden zur Konvergenz gegen einen eindeutigen Gleichgewichtszustand führt. Typischerweise ist der dissipative Operator nicht koerziv, und häufig besitzt er dafür einen sehr großen Kern, der bezüglich des konservativen Operators nicht stabil ist. Ziel der Untersuchung war es herauszufinden, unter welchen Bedingungen das Wechselspiel zwischen konservativem und degeneriert-dissipativem Teil zur Konvergenz gegen einen Gleichgewichtszustand führt. Wegen der Ähnlichkeit der verwendeten Techniken zu denen der *Hypoelliptizität* (wo jedoch statt Konvergenz zum Gleichgewicht Regularität im Mittelpunkt der Betrachtung steht), führte Cédric Villani in seiner Arbeit *Hypocoercivity* [29] hierfür den

Namen *Hypokoerzivität* ein. Dabei sollte Hypokoerzivität nicht nur die Tatsache der Konvergenz zum Gleichgewicht verifizieren, wie man sie ja auch schon mit vielen anderen abstrakten Methoden feststellen konnte, sondern sie sollte dabei auch eine explizite Konvergenzrate mitliefern. Als Beispiel solcher hypoelliptischer wie hypokoerziver Techniken seien folgende erwähnt: Kohns Methode (siehe [29]), die sowohl Hypokoerzivität als auch Hypoelliptizität impliziert; analytische Dilation und komplexe FBI-Bergmann-Transformation (siehe [13]); eine Methode mit Multiplierern mittels Pseudodifferentialoperatoren (siehe ebenfalls [13]); und funktionalanalytische Methoden mit harmonischen Oszillatoren und dem Witten-Laplacian (siehe [14]).

Weitere wichtige Forschungsarbeit leistete *Frédéric Hérau*. Er zeigte in seiner Arbeit *Hypocoercivity and exponential time decay for the linear inhomogeneous relaxation Boltzmann equation* [12], dass sich hypoelliptische Techniken auch auf Operatoren ohne hypoelliptische (also ohne regularisierende) Eigenschaften anwenden lassen, mit denen sich dann mittels Hypokoerzivität trotzdem exponentielle Konvergenz gegen das globale Gleichgewicht zeigen lässt. Außerdem entwickelte er die auch von uns verwendete Methode des *modifizierten Entropiefunktionals*.

Ein weiteres, auch von Villani im zweiten Teil von [29] als wichtig eingestuftes Resultat lieferte die Arbeit *Quantitative perturbative study of convergence to equilibrium for collisional kinetic models in the torus* von *Clément Mouhot* und *Lukas Neumann* [22]. Sie untersuchten die linearisierte Boltzmanngleichung auf dem Torus, und führten dabei eine lineare Energiemethode ein, welche die Koerzivität des auf den Geschwindigkeitsraum eingeschränkten Kollisionsoperators mit gewissen Transporteffekten kombiniert, um dann eine Koerzivitätsabschätzung auf dem Ganzraum zu erhalten.

Mit dem von uns im vierten Kapitel dieser Arbeit untersuchten Paper *"Hypocoercivity for linear kinetic equations conserving mass "* von *Jean Dolbeault, Clément Mouhot* und *Christian Schmeiser* [9] wurde nun ein weiterer Fotschritt auf dem Forschungsgebiet der Hypokoerzivität erzielt. Die kinetischen Gleichungen bestehen in dieser Arbeit aus einem schiefsymmetrischen Teil und einem degeneriert-koerziven Teil. Das Fehlen von Koerzivität auf dem Ganzraum kann durch geschicktes Ausnutzen kommutierender Eigenschaften des schiefsymmetrischen Teils kompensiert werden. Die Autoren verwenden dabei die Idee des *modifizierten Entropiefunktionals* aus [12] und entwickeln die Idee von Mouhot und Neumann aus [22] zur *mikroskopischen* und *makroskopischen Koerzivität* auf gewissen Teilräumen weiter. Dabei gewinnen sie mehr Freiheit für das äußere Potential, welches in [12] höchstens quadratisch, bei ihnen hingegen beliebig superlinear wachsen darf. Weiters entwickeln sie im Gegensatz zu [29], [12] und [22] eine Hypokoerzivitätsnorm "nullter Ordnung", die also äquivalent zur $L^2$-Norm ist, statt wie in [29] und [22] zu einer $H^k$-Norm mit $k \geq 1$. Im Gegenzug dazu müssen sie als zusätzliche Bedingung Eindimensionalität des Kollisionskerns fordern, was in [22] nicht der Fall ist. Bemerkenswerterweise wird dabei keine Regularitätbedingung an den Anfangswert gestellt. Weiters wird zum ersten Mal eine gemeinsame Theorie für diffusive und Integral-Kollisionsmodelle konstruiert.

# Kapitel 2

# Kinetische Gleichungen

Wir wollen ein physikalisches System beschreiben, welches aus einer großen Anzahl von Teilchen besteht, beispielsweise ein Gas oder ein Plasma. Die kinetische Theorie, deren Grundlage von *James Clerk Maxwell (1831-1879)* gelegt wurde, erlaubt es nun, dieses System als Kontinuum zu modellieren. Dazu betrachten wir eine Dichtefunktion $f(t,x,v)$ mit $(t,x,v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ über dem Phasenraum $(x,v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ der Teilchen. Dieser Phasenraum lässt sich in mikroskopische und makroskopische Variable unterteilen. Die mikroskopischen Variablen drücken den Zustand der Teilchen aus, in unserem Fall die Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^d$, und die makroskopische Variable $x \in \mathbb{R}^d$ gibt die Position der Teilchen im Raum an. Für ein festes $t \in [0,\infty)$ beschreibt $\int_\Omega f(t,x,v)dxdv$ die Teilchenanzahl im Gebiet $\Omega$ zum Zeitpunkt $t$. Wir beschränken uns auf den Fall eines homogenen Mediums von Teilchen, welches ausschließlich Gesetzen der klassischen Mechanik unterliegen, ohne Betrachtung relativistischer oder quantenmechanischer Aspekte.

Weiters werden alle messbaren makroskopischen Größen in Form mikroskopischer Mittel ausgedrückt, etwa in der Form $\int_{\mathbb{R}^d} f(t,x,c)\phi(v)dv$. Insbesondere können wir zu einem festen Zeitpunkt $t$ an einem festen Ort $x$ die lokale Dichte $\rho_f$ als $\rho_f(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x,v)dv$ definieren, welche experimentell bestimmt werden kann. Die makroskopischen Modelle beschreiben dann die zeitliche Entwicklung dieser Größe.

Es sei angemerkt, dass wir statt dieser deterministischen Interpretation von $f$ auch eine statistische betrachten können, welche $f$ als unser fehlendes Wissen über die genaue Position eines Teilchens versteht. Beide Interpretationen sind vom mathematischen Standpunkt aus jedoch gleichwertig.

## 2.1 Der Satz von Liouville

Der Satz von Liouville besagt, dass unter gewissen Bedingungen an das dynamische System die Dichtefunktion $f$ entlang ihrer Trajektorien $(x(t),v(t))$ konstant ist:

$$f(t,x(t),v(t)) = f_I(x(0),v(0)). \tag{2.1}$$

Dies entspricht der intuitiven Anschauung, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens entlang einer Charakteristik gleich ist.

Zum rigorosen Beweis dieser Aussage wollen wir für die Raumdimension $d$ in diesem Abschnitt die Beziehung $d = 3M$ verlangen, und somit $x(t=0) := x_0 \in \mathbb{R}^{3M}$ und $v(t=0) := v_0 \in \mathbb{R}^{3M}$ betrachten. Nun führen wir die zwei Funktionen $X$ und $U$ ein

$$X = (X_1, \cdots, X_M), U = (U_1, \cdots, U_M) : \mathbb{R}^{6M} \to \mathbb{R}^{3M},$$

mit deren Hilfe wir folgendes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen betrachten

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,v), \quad \dot{v} = U(x,v) \ \text{ für } \ t > 0, \\ x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Existenz einer eindeutigen Lösung $(x(t), v(t))$ wollen wir dabei voraussetzen. Weiters führen wir mit $\Phi_t$ die *Flussfunktion bezüglich* (2.2) ein, welche folgendermaßen definiert ist: Es gelte $\Phi_t(x_0, v_0) = (x(t), v(t))$, wobei $(x, v)$ Lösung von (2.2) ist. Nun ist es physikalisch plausibel, die Dichtefunktion $f$ zu einem vorgegebenen Anfangswert $f_I$ und für alle Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^{6M}$ folgendermaßen zu definieren:

$$\int_{\Phi_t(\Omega)} f(t,\xi,\eta) d\xi d\eta = \int_{\Omega} f_I(x,v) dx dv. \tag{2.3}$$

Hier bezeichnet $\Phi_t(\Omega)$ das Bild von $\Omega$ unter der Abbildung $\Phi_t$.

Nun können wir den Satz von Liouville formulieren:

**Satz 2.1.1** (**Der Satz von Liouville**). *Es gelten die oben gemachten Voraussetzungen, insbesondere* (2.3)*. Falls*

$$\sum_{i=1}^{M} \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial v_i} \right) (x(t), v(t)) = 0 \quad \forall t > 0, \tag{2.4}$$

*dann gilt*

$$f(t, x(t), v(t)) = f_I(x_0, v_0) \quad \text{für} \quad t > 0,$$

*d.h. die Dichtefunktion $f$ ist entlang ihrer Charakteristiken konstant.*

*Beweis.* Wir wählen eine festen Zeitpunkt $t > 0$ und führen mit Hilfe des Transformationssatzes eine Variablentransformation von Gleichung (2.3) durch. Dies führt uns auf:

$$\int_{\Omega} f(t, \Phi_t(x,v)) |\det D\Phi_t(x,v)| dx dv = \int_{\Omega} f_I(x,v) dx dv, \tag{2.5}$$

wobei $D\Phi_t(x,v)$ die Jacobimatrix der Flussfunktion $\Phi_t$ bezeichnet. Unser Beweis ist fertig, wenn wir zeigen können, dass für alle $(x,v) \in \Omega$ gilt

$$\det(D\Phi_t(x,v)) = 1.$$

Dann folgt nämlich aus (2.5) mit Hilfe eines Variationsarguments die gewünschte Beziehung (2.1) für fast alle $(x,v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, und aus Glattheitsgründen dann auch für alle $(x,v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Als notwendige Bedingung hierfür müssen wir zunächst einmal zeigen

$$\partial_t(\det D\Phi_t) = 0.$$

Da wir die Ableitung einer Matrix bestimmen müssen, können wir folgendes Resultat aus [2] zu Hilfe ziehen

$$\partial_t(\det B) = \operatorname{tr}(B^{-1}\partial_t B) \det B, \tag{2.6}$$

wobei $B$ eine beliebige $d \times d$-Matrix und $\operatorname{tr} B := \sum_{j=1}^{d} b_{jj}$ die Spur einer Matrix bezeichnet. Hierzu müssen wir die Faktoren auf der rechten Seite von (2.6) bestimmen. Dazu schreiben wir das

System von Differentialgleichungen (2.2) in eine Gleichung für die Flussfunktion $\Phi_t$ um, und erhalten

$$\partial_t \Phi_t(x,v) = (X(\Phi_t(x,v)), U(\Phi_t(x,v)))^\top . \tag{2.7}$$

Anschließend differenzieren wir nach $(x,v)$ und erhalten mit Hilfe der Kettenregel

$$\partial_t D\Phi_t = (DX \circ \Phi_t, DU \circ \Phi_t)^\top D\Phi_t. \tag{2.8}$$

Nun gilt mit (2.6) und (2.8)

$$\begin{aligned}
\partial_t(\det D\Phi_t) &\overset{(2.6)}{=} \operatorname{tr}((D\Phi_t)^{-1}\partial_t(D\Phi_t)) \det D\Phi_t \\
&\overset{(2.8)}{=} \operatorname{tr}\left((D\Phi_t)^{-1}(DX \circ \Phi_t, DU \circ \Phi_t)^\top D\Phi_t\right) \det D\Phi_t \\
&= \operatorname{tr}(DX \circ \Phi_t, DU \circ \Phi_t) \det D\Phi_t,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wegen der Invariantheit der Spur bezüglich Basistransformationen gilt.

Nun lässt sich (2.4) anschreiben als

$$\operatorname{tr}(DX, DU)^\top (x(t), v(t)) = \operatorname{tr}(DX(\Phi_t(x,v), DU(\Phi_t(x,v)))^\top = 0,$$

und somit gilt tatsächlich $\partial_t(\det(D\Phi_t)) = 0$. Folglich ist $\det(D\Phi_t) = const \quad \forall t > 0$, und da wegen der Definition von $\Phi_t$

$$D\Phi_0(x,v) = \mathrm{Id},$$

erhalten wir tatsächlich $\det(D\Phi_t) = 1$, womit wir zusammen mit der Überlegung von oben fertig sind. □

Referenz: [19].

## 2.2 Der Transportoperator und der Kollisionsoperator

Vernachlässigen wir zunächst alle Kräfte, so bewegt sich jedes Teilchen laut der Newtonschen Gesetze mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer Geraden

$$\frac{dx}{dt} = v, \frac{dv}{dt} = 0. \tag{2.9}$$

Wir wollen statt einer numerischen Beschreibung von (2.9) eine statistische Beschreibung der Gesamtheit aller Teilchen wählen und betrachten die Dichte $f$, deren zeitliche Entwicklung wir untersuchen wollen. Physikalisch ist es nun plausibel vorauszusetzen, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens entlang einer Charakteristik gleich bleibt

$$f(x(t), v(t)) = f_I(x_0, v_0).$$

Mathematisch lässt sich das mit Hilfe des Satzes von Liouville einsehen, denn (mit den Bezeichnungen aus (2.2)) wegen $X(x,v) = v$ und $U(x,v) = 0$ ist Voraussetzung (2.4) erfüllt, und der Satz von Liouville liefert

$$\frac{d}{dt} f(t,x,v) = 0.$$

Nun gilt mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} f(t, x(t), v(t)) = \partial_t f(t,x,v) + \nabla_x f(t,x,v) \cdot \frac{dx}{dt} + \nabla_v f(t,x,v) \cdot \frac{dv}{dt} = 0,$$

und zusammen mit (2.9) ergibt das

$$\partial_t f(t,x,v) + \nabla_x f(t,x,v) \cdot v = 0. \tag{2.10}$$

Diese Gleichung heißt *Gleichung des freien Transports*, und der Operator $\nabla_x f(t,x,v)$ ist der *klassische Transportoperator*. Ist die Anfangsbedingung stetig differenzierbar, so lässt sich (2.10) durch

$$f = f(0, x - vt, v) \tag{2.11}$$

explizit lösen, wie man leicht nachrechnet, indem man den Ausdruck (2.11) einmal nach $t$ und einmal nach $x$ differenziert.

Ein etwas komplizierteres Modell entsteht, wenn man auf das System eine makroskopische Kraft $F$ wirken lässt, aber weiterhin die Kollisionen zwischen den Teilchen vernachlässigt. Dann sind die Trajektorien keine Geraden mehr, und (2.9) muss modifiziert werden. Nach den Newtonschen Gesetzen gilt nun

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = F, \tag{2.12}$$

wobei wir annehmen, dass die Kraft $F$ nur von $x$ abhängt

$$F = F(x). \tag{2.13}$$

Es gilt nun $X(x,v) = v$ und $U(x,v) = F(x)$, und da $F$ nicht von $v$ abhängt, ist die Voraussetzung (2.4) aus dem Satz von Liouville erfüllt, sodass

$$\frac{d}{dt} f(t,x,v) = 0.$$

Nun folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} f(t,x(t),v(t)) = \partial_t f(t,x,v) + \nabla_x f(t,x,v) \cdot \frac{dx}{dt} + \nabla_v f(t,x,v) \cdot \frac{dv}{dt} = 0,$$

was mit Hilfe von (2.12) auf die *lineare Vlasov Gleichung* oder *Liouville Gleichung* führt

$$\partial_t f(t,x,v) + v \cdot \nabla_x f(t,x,v) + F(x) \cdot \nabla_v f(t,x,v) = 0.$$

Da wir im Ganzraum keine Randbedingungen betrachten, werden diese durch die Annahme ersetzt, dass die makroskopische Kraft $F$ von einem Potential in der Form eines Topfpotentials[1] kommt, sodass sie sich in folgender Form schreiben lässt

$$F(x) = -\nabla V(x).$$

Dies ergibt insgesamt folgende Gleichung

$$\partial_t f(t,x,v) + v \cdot \nabla_x f(t,x,v) - \nabla_x V(x) \cdot \nabla_v f(t,x,v) = 0, \tag{2.14}$$

welche sich mit $\mathsf{T} := v \cdot \nabla_x - \nabla_x V \cdot \nabla_v$ nun verkürzt anschreiben lässt als

$$\partial_t f + \mathsf{T} f = 0.$$

[1] engl. *confinement potential*. Damit bezeichnet man in der Physik die Region um ein lokales Minimum der Potentialverteilung eines physikalischen Systems.

Somit haben wir unseren Transportoperator $\mathsf{T}$ hergeleitet.

Um auf die Modellgleichung (1.1) zu kommen, müssen wir zusätzlich noch die Interaktion zwischen den Teilchen (Stöße, Kollisionen) berücksichtigen, welche wir mittels eines Kollisionsoperators $\mathsf{L}$ modellieren. Wegen ihrer zentralen Bedeutung hat es sich eingebürgert, als Paradebeispiel kinetischer Gleichungen die Boltzmann-Gleichung zu betrachten, und alle weiteren als Varianten von ihr anzusehen. Wir folgen hier dieser Tradition.

Es gelte nun

$$\frac{d}{dt}f(t,x,v) = \mathsf{L}f(t,x,v),$$

und weiters fordern wir die folgende 5 Bedingungen an die Stöße.

**Die Stöße des Kollisionsoperators $\mathsf{L}$ seien**

(i) **binäre Stöße:** Darunter verstehen wir, dass sich zwei Teilchen so nahe kommen, dass ihre jeweiligen Trajektorien für eine kurze Zeit sehr stark von ihrem eigentlichen Weg abgelenkt werden, andererseits aber soweit voneinander entfernt liegen, dass Kollisionen von mehr als zwei Teilchen gleichzeitig vernachlässigbar sind.

(ii) **lokale Stöße:** Das sind Stöße in der Form sehr kurzer Ereignisse, die zu einem festen Zeitpunkt $t$ an einem festen Ort $x$ stattfinden.

(iii) **elastische Stöße:** Bezeichnen wir die Masse eines Teilchens mit $m$, so bleibt bei elastischen Stößen das Moment $p = mv$ und die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m|v|^2$ während des Kollisionsvorgangs erhalten. Seien $v'$ und $v'_*$ die Geschwindigkeiten vor dem Stoß, und $v$, $v_*$ die Geschwindigkeiten nach dem Zusammenstoß, so erhalten wir unter diesen Voraussetzungen die folgenden Gleichungen

$$\begin{cases} v' + v'_* = v + v_*, \\ |v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2. \end{cases} \tag{2.15}$$

Da die Geschwindigkeiten $v, v_*, v', v'_*$ alle im $\mathbb{R}^d$ liegen, ergibt das eine Gleichungssystem von $d+1$ Gleichungen in den $2d$ Unbekannten $(v', v^*)$. Die $(d-1)$-parametrige Lösung wird nun üblicherweise in der folgenden $\sigma$-Darstellung angeschrieben

$$\begin{cases} v' = \dfrac{v + v_*}{2} + \dfrac{|v - v_*|}{2}\sigma, \\ v'_* = \dfrac{v + v_*}{2} - \dfrac{|v - v_*|}{2}\sigma, \end{cases} \tag{2.16}$$

wobei sich der Parameter $\sigma$ auf der $(d-1)$-dimensionalen Einheitskugel $S^{d-1}$ bewegt.

(iv) **mikroreversible Stöße:** Im deterministischen Sinn versteht man unter dem Begriff mikroreversibel die zeitliche Umkehrbarkeit mikroskopischer Bewegungen. Die stochastische Interpretation des Begriffs besagt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Teilchen mit Geschwindigkeiten $(v, v_*)$ nach dem elastischen Stoß die Geschwindigkeiten $(v', v'_*)$ haben, die gleiche ist wie die, dass zwei Teilchen mit Geschwindigkeiten $(v', v'_*)$ nach dem elastischen Stoß die Geschwindigkeiten $(v, v_*)$ haben.

(v) **Stöße, die der Boltzmannschen Chaos-Bedingung unterliegen:** Die Boltzmannsche Chaos-Bedingung fordert, dass die Geschwindigkeiten zweier Teilchen vor dem Zu-

sammenstoß unkorreliert seien[2]. Damit kann die gemeinsame Geschwindigkeitsdichte zweier beliebiger Teilchen vor dem Zusammenstoß als Tensorprodukt ihrer einzelnen Dichten angeschrieben werden. Dies legt nahe, dass die Geschwindigkeiten nach dem Zusammenstoß korreliert sind, und daher eine Asymmetrie zwischen der Zeit vor und der Zeit nach dem Stoß besteht.

Mit Hilfe dieser 5 Forderungen lässt sich die *Boltzmann Gleichung* herleiten

$$\partial_t f(t,x,v) + v \cdot \nabla_x f(t,x,v) - \nabla_x V(x) \cdot \nabla_v f(t,x,v) = Q(f,f),$$

mit dem quadratischen Kollisionsoperator

$$Q(f,f)(t,x,v) = \int_{\mathbb{R}^d} dv_* \int_{S^{d-1}} d\sigma B(v-v_*,\sigma)(f'f'_* - ff_*).$$

Dabei gilt $f' = f(t,x,v')$, $f_* = f(t,x,v_*)$, $f'_* = f(t,x,v'_*)$, und $ff_*$ bezeichnet das Tensorprodukt $(f \otimes f)(v,v_*)$, sowie $f'f'_*$ das Tensorprodukt $f'f'_* = (f \otimes f)(v',v'_*)$. Die Geschwindigkeiten $v'$ und $v'_*$ können wir mittels (2.16) aus den Geschwindigkeiten $v, v_*$ berechnen. Der Ausdruck $B(z,\sigma)$ bezeichnet den nichtnegativen *Boltzmannschen Kollisionskern*, der seine spezielle Gestalt aus der Forderung der Mikroreversibilität (iv) erhält. Dabei hängt $B$ nur von der relativen Geschwindigkeit $z = v - v_*$ und vom Kosinus der Abweichung zwischen der Geschwindigkeit vor und der Geschwindigkeit nach dem Stoß $\cos\theta = \langle \frac{z}{|z|}, \sigma \rangle$ ab.

Nun lässt sich der Boltzmannsche Kollisionsoperator in einen Gewinnterm und in einen Verlustterm aufspalten

$$Q(f,f) = Q^+(f,f) - Q^-(f,f).$$

Der Verlustterm $Q^-(f,f)$ zählt all jene Kollisionen, bei denen ein gegebenes festes Teilchen mit Geschwindigkeit $v$ mit einem anderen Teilchen der Geschwindigkeit $v_*$ zusammenstößt, und sich nach dem Stoß mit einer anderen Geschwindigkeit als $v$ weiterbewegt. Dieser Vorgang hat weniger Teilchen mit Geschwindigkeit $v$ zur Folge.

Der Gewinnterm $Q^+(f,f)$ zählt die Zusammenstöße von zwei Teilchen, wo eines der beiden nach dem Zusammenstoß Geschwindigkeit $v$ annimmt. Dies hat also mehr Teilchen mit Geschwindigkeit $v$ zur Folge.

Die *Boltzmanngleichung* wurde in ihrer schwachen Formulierung schon 1866 von *James Clerk Maxwell* aufgestellt, *Ludwig Boltzmann* formulierte sie einige Jahre später in ihrer starken Formulierung und trug mit seiner umfassenden Arbeit *Lectures on gastheory*[3] maßgeblich zur weiten Verbreitung und theoretischen Fundierung dieser Gleichung bei.

An dieser Stelle sei noch kurz das *Boltzmannsche H-Theorem* erwähnt, welches besagt, dass die *physikalische Entropie*[4] eines geschlossenen Systems nicht abnehmen darf, und somit eine Manifestation des 2. Thermodynamischen Gesetzes darstellt. Die sich daraus ergebende Irreversibilität wurde anfangs heftig diskutiert, denn sie stellte die Glaubwürdigkeit des Boltzmannschen Modells in Frage. Später wurde sie dann als größter Beitrag Boltzmanns auf dem Gebiet der statistischen Physik angesehen.[5]

[2]Dabei beschreibt die Kovarianz den Zusammenhang zwischen zwei Größen $X$ und $Y$. Falls die Kovarianz zwischen $X$ und $Y$ Null ist, nennt man $X$ und $Y$ unkorreliert, und das bedeutet, dass durch die Kenntnis der Größe $X$ keine Information über die Größe $Y$ gewonnen werden kann.

[3]Ludwig Boltzmann: Lectures on gastheory. University of California Press, Berkeley, 1964. Translated by Stephen G. Brush. Reprint of the 1896-1898 Edition. Reprinted by Dover Publications.

[4]Es gilt physikalische Entropie = negative mathematische Entropie. Zur Definition der mathematischen Entropie siehe Definition 3.3.2.

[5]Für physikalische Details siehe [27], für mathematische Details zum Boltzmannschen H-Theorem siehe [28].

Nachdem wir den nichtlinearen Boltzmann-Operator eingeführt haben, wollen wir kurz die linearen Operatoren unserer weiteren Untersuchung vorstellen.

Als erstes werden wir das eindimensionale *Cattaneo-Modell* betrachten, welches eine Approximation an die Boltzmanngleichung mit nur zwei diskreten Geschwindigkeitszuständen $v^+ = +1$ und $v^- = -1$ darstellt

$$\begin{cases} \partial_t f^+ + \partial_x f^+ &= \frac{1}{2}\left(f^- - f^+\right) \\ \partial_t f^- - \partial_x f^- &= -\frac{1}{2}\left(f^- - f^+\right). \end{cases} \tag{2.17}$$

Der Kollisionsoperator $\mathsf{L}$ beschreibt in dem Fall das Hin-und Herwechseln zwischen den zwei diskreten Geschwindigkeitszuständen $+1$ und $-1$. Statt am Ganzraum betrachten wir dieses Problem auf dem eindimensionalen Torus unter der Annahme periodischer Randbedingungen.

In weiterer Folge werden wir die Operatoren BGK-Operator[6] und Fokker-Planck-Operator untersuchen, welche sich als Varianten des Boltzmann-Operators klassifizieren lassen.

Der *BGK-Operator* ist eine sehr starke Vereinfachung des Boltzmannschen Kollisionsoperators und sieht folgendermaßen aus

$$\mathsf{L}f := M^f - f, \quad \text{mit} \quad M^f = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} f dv}{\int_{\mathbb{R}^d} F dv} F \quad \text{und} \quad F(x,v) = e^{-V(x)} \frac{e^{-|v|^2/2}}{(2\pi)^{d/2}}.$$

Dabei ist $F(x,v)$ das Maxwellsche Gleichgewicht, und der Ausdruck $M^f$ ist von der Gestalt $\phi(x)F(x,v)$ mit der $x$-abhängigen Funktion $\phi(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} f dv}{\int_{\mathbb{R}^d} F dv}$, die so gewählt ist, dass $M^f$ dieselbe Dichte, Geschwindigkeit und Temperatur wie $f$ hat.

Der *Fokker-Planck Operator* ist eine diffusive Variante des Boltzmann-Operators, und hat in der von uns betrachteten linearisierten Form folgende Gestalt

$$\mathsf{L}f = \nabla_v \cdot (\nabla_v f + fv).$$

Der *Scattering Operator* ist ein Integraloperator und lässt sich nicht in die vorherigen Kategorien einordnen. Er ist in unseren Betrachtungen von folgender Gestalt

$$(\mathsf{L}f)(v) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(k(v^* \to v) f(v^*) - k(v \to v^*) f(v)\right) dv^*, \quad k \geq 0. \tag{2.18}$$

Dabei bezeichnet der Ausdruck $k(v^* \to v)$ die Übergangswahrscheinlichkeit, dass sich ein mit Geschwindigkeit $v^*$ bewegendes Teilchen nach dem Stoß mit Geschwindigkeit $v$ weiterbewegt.

## 2.3 Lokales und globales Gleichgewicht

Wie schon angekündigt ist das Ziel dieser Arbeit der Nachweis der Konvergenz zu einem eindeutigen globalen Gleichgewicht. In diesem Abschnitt wollen wir die Unterschiede zwischen lokalen Gleichgewichten und dem globalen Gleichgewicht herausarbeiten.

Das globale Gleichgewicht ist stationär und befindet sich sowohl bezüglich des Ortes als auch bezüglich der Geschwindigkeit im Gleichgewichtszustand. Lokale Gleichgewichte hingegen sind nicht eindeutig und befinden sich zwar bezüglich der Geschwindigkeitsvariablen im Gleichgewicht, nicht unbedingt jedoch bezüglich der Ortsvariablen.

[6] BGK-Operator ist eine Abkürzung für *Bhatnagar-Gross-Krook* Operator

**Beispiel 2.3.1** (**BGK-, Fokker-Planck und Scattering Operator**)**.** Als Beispiel betrachten wir das Setting aus Abschnitt (4.3). Das globale Gleichgewicht ist im Falle der drei Kollisionsoperatoren BGK-Operator, Fokker-Planck Operator und Scattering Operator das Maxwellsche Gleichgewicht

$$F(x,v) = e^{-V(x)} \frac{e^{-|v|^2/2}}{(2\pi)^{d/2}}.$$

Die Menge der lokalen Gleichgewicht ist genau der Kern des jeweils betrachteten Kollisionsoperators $\mathsf{L}$ und lässt sich anschreiben als

$$\mathcal{N}(\mathsf{L}) = \{f(x,v) \in L^2(d\mu) : \exists \phi(x) \text{ sodass } f(x,v) = \phi(x)F(x,v)\}, \tag{2.19}$$

wobei $L^2(d\mu)$ der mit dem Maß $\mu := \frac{dxdv}{F(x,v)}$ gewichteter $L^2$-Raum ist, und $\phi$ eine beliebige $x$-abhängige Funktion. Das Maxwellsche Gleichgewicht ist stationär und bezüglich $x$ und $v$ im Gleichgewicht, bei der Menge der lokalen Gleichgewichte (2.19) hingegen darf $F(x,v)$ noch mit einer beliebigen ortsabhängigen Funktion multipliziert werden, sodass das lokale Gleichgewicht im allgemeinen nicht stabil bezüglich des Ortes sein wird.

Befindet sich das System zu einem bestimmten Zeitpunkt $t_0$ nun in einem lokalen Gleichgewichtszustand, so verschwindet zu genau diesem Zeitpunkt die *Entropiedissipation*[7]. Für wie lange Zeit das System nun in diesem lokalen Gleichgewicht verweilt, bevor die Entropiedissipation wieder echt kleiner 0 wird, ist eine schwierige Frage, mit der sich schon *Ludwig Boltzmann* beschäftigte und die auch heute noch mittels unterschiedlichster Techniken untersucht wird, beispielsweise im Kontext *hydrodynamischer Limiten.*

Die Konvergenz zum globalen Gleichgewicht können wir uns physikalisch folgendermaßen vorstellen: Sobald die Lösung ein lokales Gleichgewicht erreicht, bewirkt der Transportoperator $\mathsf{T}$ gemeinsam mit dem äußeren Potential $V$, dass die Lösung das lokale Gleichgewicht wieder verlässt. Dieser Prozess wiederholt sich solange, bis ein lokales Gleichgewicht mit bestimmten Symmetrieeigenschaften erreicht wird. Die Symmetrieeigenschaften bewirken, dass diese Lösung nun stationär ist und somit das globale Gleichgewicht gefunden ist. Dies erklärt die Bedeutung der Transporteffekte, obwohl sie bezüglich der Entropiedissipation keine Rolle spielen.

[7] Zur Definition von *Entropiedissipation* siehe Definition 3.3.4

# Kapitel 3

# Wichtige Methoden und Begriffe

Wir beginnen mit einem kurzen Überblick über die Theorie unbeschränkter Operatoren sowie über die Theorie stark stetiger Operatorhalbgruppen. Dabei gehen wir nur auf jene Aspekte ein, die für die späteren Untersuchungen wichtig sein werden. Anschließend führen wir die Begriffe Entropie und Entropiedissipation ein. Als Literaturquellen dienten für dieses Kapitel [21], [4], [30], [23] und [16]. Es sei gleich angemerkt, dass man als Raum statt eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ in vielen Fällen auch nur einen Banachraum $X$ fordern kann. Da wir jedoch in den späteren Kapiteln Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ betrachten werden, tun wir dies zwecks Einheitlichkeit auch schon in diesem Kapitel.

## 3.1 Unbeschränkte Operatoren

Zunächst führen wir den Begriff des abgeschlossenen, dicht definierten Operators von einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ in sich ein, der auch unbeschränkt (also nicht stetig) sein darf.

**Definition 3.1.1.** Ein *Operator* $\mathsf{T} : \mathcal{H} \supset \mathcal{D}(\mathsf{T}) \to \mathcal{H}$ ist eine lineare Abbildung, deren Definitionsbereich $\mathcal{D}(\mathsf{T})$ ein Unterraum von $\mathcal{H}$ ist. Man nennt einen Operator *dicht definiert in* $\mathcal{H}$, falls $\overline{\mathcal{D}(\mathsf{T})} = \mathcal{H}$.

**Definition 3.1.2.** Ein Operator $\mathsf{S} : \mathcal{H} \supset \mathcal{D}(\mathsf{S}) \to \mathcal{H}$ heißt eine *Erweiterung* von $\mathsf{T} : \mathcal{H} \supseteq \mathcal{D}(\mathsf{T}) \to \mathcal{H}$, falls $\mathcal{D}(\mathsf{T}) \subset \mathcal{D}(\mathsf{S})$ und $\mathsf{T}x = \mathsf{S}x$ für alle $x \in \mathcal{D}(\mathsf{T})$.
Zwei Operatoren sind *gleich* (im Zeichen $\mathsf{T} = \mathsf{S}$), falls $\mathsf{T} \subset \mathsf{S}$ und $\mathsf{S} \subset \mathsf{T}$.

Dies bedeutet, dass zwei unbeschränkte Operatoren genau dann gleich sind, wenn sie dasselbe Bild und zusätzlich auch noch den selben Definitionsbereich haben.

Damit wir den Begriff des abgeschlossenen Operators einführen können, benötigen wir zunächst den Begriff des Graphen eines Operators.

**Definition 3.1.3.** Unter dem *Graph* $\Gamma$ eines Operators $\mathsf{T} : \mathcal{H} \supset \mathcal{D}(\mathsf{T}) \to \mathcal{H}$ verstehen wir folgende Teilmenge des kartesischen Produkts $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$:

$$\Gamma(\mathsf{T}) := \{(x, \mathsf{T}x) : x \in \mathcal{D}(\mathsf{T})\} \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}.$$

Nun können wir definieren:

**Definition 3.1.4.** Ein Operator $\mathsf{T} : \mathcal{H} \supset \mathcal{D}(\mathsf{T}) \to \mathcal{H}$ heißt *abgeschlossen*, falls sein Graph $\Gamma(\mathsf{T})$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ist.

Die Abgeschlossenheit eines Operators lässt sich auch wie folgt charakterisieren: falls eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\mathsf{T})$ gegen ein $x_0$ konvergiert, und die entsprechende Bildfolge $(\mathsf{T}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y$ konvergiert, dann muss gelten

$$x_0 \in \mathcal{D}(\mathsf{T}) \quad \text{und} \quad \mathsf{T}x_0 = y.$$

Den folgenden Satz zitieren wir wegen seiner zentralen Bedeutung in seiner auf Banachräumen geltenden allgemeinen Form.

**Satz 3.1.5** (**Satz vom abgeschlossenen Graphen**). *Seien $X$ und $Y$ Banachräume, und $\mathsf{A} : X \to Y$ linear. Außerdem sei der Graph von $\mathsf{A}$ abgeschlossen. Dann ist $\mathsf{A}$ stetig.*

*Beweis.* Siehe [5], Satz 4.4.2. □

Als nächstes führen wir die Begriffe symmetrisch, schiefsymmetrisch und selbstadjungiert für unbeschränkte Operatoren ein.

**Definition 3.1.6.** Ein Operator $\mathsf{T} : \mathcal{H} \supset \mathcal{D}(\mathsf{T}) \to \mathcal{H}$ heißt *symmetrisch*, falls

$$\langle \mathsf{T}x, y\rangle = \langle x, \mathsf{T}y\rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(\mathsf{T}).$$

Eine Operator $\mathsf{T} : \mathcal{H} \supset \mathcal{D}(\mathsf{T}) \to \mathcal{H}$ heißt *schiefsymmetrisch*, falls

$$\langle \mathsf{T}x, y\rangle = -\langle x, \mathsf{T}y\rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(\mathsf{T}).$$

**Bemerkung 3.1.7.** Nach dem Satz 3.1.5 vom abgeschlossenen Graphen ist ein auf ganz $\mathcal{H}$ definierter abgeschlossener Operator stetig und damit in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Bei beschränkten Operatoren stimmen die Begriffe symmetrisch und selbstadjungiert überein, sodass ein auf ganz $\mathcal{H}$ definierter, abgeschlosser und symmetrischer Operator auch selbstadjungiert ist. Dies ist bemerkenswert, da für unbeschränkten Operatoren aus selbstadjungiert zwar symmetrisch folgt, die umgekehrte Richtung im allgemeinen aber nicht gelten muss.

Wir wollen nun den adjungierten Operator eines unbeschränkten dicht definierten Operators definieren, und betrachten dazu den Teilraum

$$\mathcal{D}(\mathsf{T}^*) := \{y \in \mathcal{H} : x \mapsto \langle \mathsf{T}x, y\rangle \ \text{ ist stetig auf } \ \mathcal{D}(\mathsf{T})\}.$$

Wegen der Dichtheit von $\mathcal{D}(\mathsf{T})$ kann die Abbildung $x \mapsto \langle \mathsf{T}x, y\rangle$ für ein $y \in \mathcal{D}(\mathsf{T}^*)$ eindeutig zu einem stetigen linearen Funktional auf ganz $\mathcal{H}$ fortgesetzt werden. Nun lässt sich der Darstellungssatz von Riesz[1] anwenden, der uns wegen der Dichtheit von $\mathcal{D}(\mathsf{A})$ für jedes $y \in \mathcal{D}(\mathsf{T}^*)$ ein eindeutiges $z \in \mathcal{H}$ liefert, sodass für alle $x \in \mathcal{D}(\mathsf{T})$

$$\langle \mathsf{T}x, y\rangle = \langle x, z\rangle.$$

Durch die Definiton

$$\mathsf{T}^*y := z$$

ist ein eindeutiger Operator $\mathsf{T}^* : \mathcal{H} \supset \mathcal{D}(\mathsf{T}^*) \to \mathcal{H}$ festgelegt, für den gilt

$$\langle \mathsf{T}x, y\rangle = \langle x, \mathsf{T}^*y\rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(\mathsf{T}), \forall y \in \mathcal{D}(\mathsf{T}^*).$$

[1] siehe Anhang

**Definition 3.1.8.** Ist $\mathsf{T}$ ein dicht definierter Operator, so nennen wir den soeben definierten Operator $\mathsf{T}^*$ den *adjungierten Operator* von $\mathsf{T}$.

Weiters definieren wir:

**Definition 3.1.9.** Ein Operator $\mathsf{T}$ heißt *selbstadjungiert*, falls $\mathsf{T} = \mathsf{T}^*$.

Wir sehen unmittelbar, dass diese Definition für beschränkte Operatoren mit der gewöhnlichen Definition von selbstadjungiert übereinstimmt, und zu symmetrisch äquivalent ist. Außerdem stellen wir fest, dass aus symmetrisch im Allgemeinen nicht selbstadjungiert folgen muss, denn dazu müssten die Definitionsbereiche $\mathcal{D}(\mathsf{T})$ und $\mathcal{D}(\mathsf{T}^*)$ übereinstimmen. (Siehe hierzu auch Bemerkung 3.1.7). Weiters wollen wir darauf hinweisen, dass wichtige Sätze wie beispielsweise der Spektralsatz nur für selbstadjungierte, nicht aber für symmetrische unbeschränkte Operatoren gelten.

Nun wollen wir die Begriffe des Spektrums und der Resolventenmenge eines unbeschränkten dicht definierten Operators einführen.

**Definition 3.1.10.** Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, und $\mathsf{T} : \mathcal{H} \supset \mathcal{D}(\mathsf{T}) \to \mathcal{H}$ ein linearer dicht definierter Operator. Dann nennen wir

- $\rho(\mathsf{T}) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathsf{T} - \lambda \text{ ist bijektiv von } \mathcal{D}(\mathsf{T}) \to \mathcal{H} \text{ und } (\mathsf{T} - \lambda)^{-1} \text{ ist stetig}\}$ die *Resolventenmenge von* $\mathsf{T}$,
- $\sigma(\mathsf{T}) := \mathbb{C} \backslash \rho(\mathsf{T})$ das *Spektrum von* $\mathsf{T}$,
- Die Abbildung $R : \rho(\mathsf{T}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $R_\lambda := (\mathsf{T} - \lambda)^{-1}$ die *Resolvente von* $\mathsf{T}$.

Dabei sei angemerkt, dass im Fall eines abgeschlossenen dicht definierten Operators $\mathsf{T}$ mit $\mathsf{T} - \lambda$ bijektiv die Stetigkeit der Resolvente aus dem Satz vom abgeschlossen Graphen (3.1.5) folgt und daher in der Definition der Resolventenmenge weggelassen werden kann.

Das Spektrum eines linearen abgeschlossenen dicht definierten Operators $\mathsf{T}$ lässt sich nun in folgende disjunkte Teilmengen zerlegen:

- $\sigma_p(\mathsf{T}) := \{\lambda : \mathsf{T} - \lambda \text{ ist nicht injektiv}\}$ heißt das *Punktspektrum von* $\mathsf{T}$.
- $\sigma_c(\mathsf{T}) := \{\lambda : \mathsf{T} - \lambda \text{ ist injektiv, das Bild von } \mathsf{T} \text{ ist dicht aber nicht surjektiv}\}$ heißt das *kontinuierliche Spektrum von* $\mathsf{T}$.
- $\sigma_r(\mathsf{T}) := \{\lambda : \mathsf{T} - \lambda \text{ ist injektiv mit nicht dichtem Bild}\}$ heißt das *Residualspektrum von* $\mathsf{T}$.

Offensichtlich gilt:

$$\sigma(\mathsf{T}) = \sigma_p(\mathsf{T}) \dot\cup \sigma_c(\mathsf{T}) \dot\cup \sigma_r(\mathsf{T}).$$

Nun gilt folgender Satz:

**Satz 3.1.11.** *Ist $\mathsf{T}$ selbstadjungiert, so ist $\sigma(\mathsf{T})$ eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit $\sigma_r(\mathsf{T}) = \emptyset$.*

*Beweis.* Siehe [4] Satz 3.2.7. □

Zum Abschluss noch ein Satz, den wir in Folge brauchen werden:

**Satz 3.1.12.** *Sei $\mathsf{T} : \mathcal{H} \supset \mathcal{D}(\mathsf{T}) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener dicht definierter Operator. Dann ist der Operator $\mathsf{T}^*\mathsf{T}$ mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(\mathsf{T}^*\mathsf{T}) = \{x \in \mathcal{D}(\mathsf{T}) : \mathsf{T}x \in \mathcal{D}(T^*)\}$ dicht definiert und selbstadjungiert.*

*Beweis.* Siehe [30], Korollar VII.2.13. □

## 3.2 Stark stetige Operatorhalbgruppen

Wir führen nun die für diese Arbeit notwendigen halbgruppentheoretischen Begriffe ein.

**Definition 3.2.1.** Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine einparametrige Familie $(T(t))_{t\geq 0}$ beschränkter linearer Operatoren von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$ heißt *Halbgruppe*, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1. $T(s+t) = T(s)T(t)\ \forall s,t \geq 0$ (Halbgruppeneigenschaft),
2. $T(0) = \mathrm{Id}$.

**Definition 3.2.2.**

Eine Operatorhalbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ heißt *gleichmäßig stetig* (oder *normstetig*), wenn

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - \mathrm{Id}\| = 0,$$

d.h. wenn die Abbildung $T$ bei 0 bezüglich der Operatornorm auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ stetig ist.

**Definition 3.2.3.** Eine Operatorhalbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ heißt *stark stetig*, wenn

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)h - h\| = 0 \quad \forall h \in \mathcal{H},$$

d.h. wenn die Abbildung $T$ bei 0 bezüglich der starken Operatortopologie stetig ist.

Offensichtlich ist eine gleichmäßig stetige Operatorhalbgruppe stark stetig.

**Satz 3.2.4.** *Ist* $\mathsf{T}$ *eine stark stetige Halbgruppe, so gibt es* $\omega \in \mathbb{R}$, $M > 0$, *sodass für alle* $t \in [0,\infty)$

$$\|\mathsf{T}(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

*Beweis.* Siehe [21] Satz 5.2.2. □

**Beispiel 3.2.5.** Sei $\mathsf{A}$ ein beschränkter Operator auf $\mathcal{H}$, und betrachte die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}f = \mathsf{A}f \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Dann lässt sich (ähnlich wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$) auch für diese hilbertraumwertige Differentialgleichung mit $\mathsf{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ zeigen, dass die Lösung folgende Gestalt hat: $f(t) = e^{t\mathsf{A}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathsf{A}^n$, und die Familie von Operatoren $\left(e^{t\mathsf{A}}\right)_{t\geq 0}$ bildet eine stark stetige (sogar gleichmäßig stetige) Operatorhalbgruppe.

Für einen unbeschränkten Operator $\mathsf{A}$ benötigen wir nun den Begriff des infinitesimalen Generators. In weiterer Folge liefert uns der Satz von Hille-Yoshida Bedingungen an den Operator $\mathsf{A}$, die sicherstellen, dass er infinitesimaler Generator einer stark stetigen Halbgruppe ist, mit deren Hilfe wir die Lösung der Gleichung

$$\begin{cases} \partial_t f = Af \\ f(0) = f_I \in \mathcal{D}(A) \end{cases}$$

beschreiben können.

**Definition 3.2.6.** Der lineare Operator $A : \mathcal{D}(A) \to X$ mit Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \left(T(t)x - x\right) \text{existiert} \right\},$$

und

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \left(T(t)x - x\right) = \frac{d^+ T(t)x}{dt}|_{t=0} \quad \text{für} \quad x \in \mathcal{D}(\mathsf{A})$$

heißt *infinitesimaler Generator* der Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$.

**Satz 3.2.7.** *Der Generator einer stark stetigen Operatorhalbgruppe ist dicht definiert und abgeschlossen.*

*Beweis.* Siehe [30] Satz VII.4.6. □

Nun können wir den für die eindeutige Lösbarkeit unserer kinetischen Gleichungen (1.1) nötigen Existenz-und Eindeutigkeitssatz formulieren:

**Satz 3.2.8** (**Existenz und Eindeutigkeit des abstrakten Cauchy-Problems**). *Sei $(T(t))_{t \geq 0}$ eine stark stetige Operatorhalbgruppe und $A$ ihr infinitesimaler Generator. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} \partial_t f = Af \\ f(0) = f_I \in \mathcal{D}(A) \end{cases} \tag{3.1}$$

*für jedes $f_I \in \mathcal{D}(A)$ die eindeutige Lösung $f(t) = T(t)f_I$.*

*Beweis.* Siehe [21], Korollar 5.2.10. □

Nun zitieren wir folgenden wichtigen Satz:

**Satz 3.2.9** (**Satz von Hille-Yoshida**). *Ein Operator $\mathsf{A}$ ist genau dann infinitesimaler Generator einer stark stetigen Operatorhalbgruppe $(\mathsf{T}(t))_{t \geq 0}$, für die*

$$\|\mathsf{T}(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \text{für } M > 0,\ \omega \in \mathbb{R}, \quad \text{und für alle} \quad t \geq 0,$$

*wenn gilt:*

1. *Der Operator $\mathsf{A}$ ist abgeschlossen und dicht definiert,*
2. *Für das Intervall $(\omega, \infty)$ gilt $(\omega, \infty) \subseteq \rho(\mathsf{A})$,*
3. *Die Resolvente $R_\lambda$ von $\mathsf{A}$ erfüllt*

$$\|(R_\lambda(\mathsf{A}))^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad \forall \lambda > \omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* Siehe [4] Satz 4.2.1. □

Dies beantwortet die Frage, wann wir bei fest gegebenem Operator $\mathsf{A}$ eine Halbgruppe $(\mathsf{T}(t))_{t \geq 0}$ finden können, sodass $\mathsf{A}$ ihr infinitesimaler Generator ist, und die folglich dann die eindeutige Lösung von (3.1) darstellt.

Zum Abschluss noch zwei Sätze, aus denen hervorgeht, dass für einen beschränkten Operator $\mathsf{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ die im Beispiel 3.2.5 erwähnte Operatorhalbgruppe $e^{t\mathsf{A}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ die eindeutige stark stetige Operatorhalbgruppe zu diesem Generator $\mathsf{A}$ ist, und dass sie außerdem sogar gleichmäßig stetig ist.

**Satz 3.2.10.** *Seien* $\mathsf{T}_1$ *und* $\mathsf{T}_2$ *zwei stark stetige Operatorhalbgruppen mit infinitesimalen Generatoren* $\mathsf{A}_1$ *und* $\mathsf{A}_2$*. Gilt nun* $\mathsf{A}_1 \subseteq \mathsf{A}_2$*, so folgt schon* $\mathsf{T}_1 = \mathsf{T}_2$

*Beweis.* Siehe [21] Korollar 5.2.10. □

Insbesondere folgt aus diesem Satz, dass durch die Angabe eines Generators einer Halbgruppe die zugehörige Halbgruppe schon eindeutig bestimmt ist.

**Satz 3.2.11.** *Sei* $(\mathsf{T}(t))_{t\geq 0}$ *eine stark stetige Operatorhalbgruppe und* $\mathsf{A}$ *ihr infinitesimaler Generator. Dann ist* $\mathsf{A}$ *genau dann beschränkt, wenn die Operatorhalbgruppe* $(\mathsf{T}(t))_{t\geq 0}$ *gleichmäßig stetig ist.*

*Beweis.* Siehe [21] Prop. 5.2.12. □

## 3.3 Entropie-Dissipationsmethoden

Entropie-Dissipationsmethoden stellen eine wichtige Methode für die Untersuchung des Langzeitverhaltens linearer wie auch nichtlinearer partieller Differentialgleichungen dar. In diesem Abschnitt wollen wir das Grundschema von Entropie-Dissipationsmethoden vorstellen, welches aus folgenden drei Teilen besteht:

- aus einem Entropiefunktional,
- aus einer Entropie-Dissipationsungleichung,
- aus einer Beziehung zwischen Entropie und Entropiedissipation.

Im unten betrachteten einfachen Beispiel der Wärmeleitungsgleichung wird uns die Poincaré-Ungleichung die Beziehung zwischen Entropie und Entropiedissipation liefern. Im weiteren Verlauf erörtern wir dann, warum sich diese Methode nicht direkt auf unsere kinetischen Gleichungen anwenden lässt, was die Verwendung von Hypokoerzivitätsmethoden notwendig macht.

Unter einem *Funktional* verstehen wir in diesem Abschnitt eine (im Allgemeinen nichtlineare) Abbildung

$$\mathsf{H} : f \mapsto \mathsf{H}[f] : U \to \mathbb{R},$$

wobei $U$ den Definitionsbereich des Funktionals bezeichnet.

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, und sei $\mathsf{B} : \mathcal{D}(\mathsf{B}) \to \mathcal{H}$ ein (möglicherweise unbeschränkter) Operator definiert auf seinem Definitionsbereich $\mathcal{D}(\mathsf{B})$. Weiters existiere eine glatte Funktion $f(t) : \mathcal{D}(\mathsf{B}) \to \mathbb{R}$ mit

$$\partial_t f + \mathsf{B}f = 0, \quad f(0) = f_I, \tag{3.2}$$

wobei $f_I \in \mathcal{D}(\mathsf{B})$. Die stationäre Gleichung $\mathsf{B}f = 0$ besitze eine stationäre Lösung $f_\infty \geq 0 \in \mathcal{D}(\mathsf{B})$.

**Definition 3.3.1.** Seien $\mathsf{B}$ und $f$ wie oben, und sei $\mathsf{H} : \mathcal{D}(\mathsf{B}) \to \mathbb{R}$ ein Funktional mit

$$\frac{d\mathsf{H}}{dt}[f(t)] \leq 0 \quad \forall t > 0.$$

Dann heißt $\mathsf{H}$ ein *Lyapunov-Funktional* entlang der Trajektorie $f(t)$.

In der Mathematik verstehen wir unter dem Begriff Entropie[2] ein spezielles Lyapunov-Funktional, eine einheitliche Definition fehlt jedoch. Wir einigen uns in Folge auf folgende Definition:

**Definition 3.3.2.** Wir nennen ein Lyapunov-Funktional $\mathsf{H} : \mathcal{D}(\mathsf{B}) \to \mathbb{R}$ eine *Entropie* von (3.2), wenn gilt:

(i) das Funktional $\mathsf{H}$ ist *konvex*, das heißt: der lineare Teilraum $\mathcal{D}(\mathsf{B})$ ist konvex, und es gilt $\mathsf{H}\left[(1-\lambda)f + \lambda g\right] \leq (1-\lambda)\mathsf{H}[f] + \lambda \mathsf{H}[g] \quad \forall f \neq g, \quad 0 < \lambda < 1,$

(ii) das Funktional $\mathsf{H}$ ist *nichtnegativ*, das heißt $\mathsf{H} : \mathcal{D}(\mathsf{B}) \to [0, \infty)$.

Wir nennen eine Entropie *von k-ter Ordnung*, wenn sie eine partielle Ableitung $k$-ter Ordnung enthält.

**Beispiel 3.3.3.** Die Entropie $\mathsf{H}_1$ ist von nullter Ordnung:

$$\mathsf{H}_1[f] = \int_\Omega u(\log u - 1)dx,$$

und die folgende Entropie $\mathsf{H}_\alpha$ ist eine Entropie 1. Ordnung:

$$\mathsf{E}_\alpha[f] = \int_\Omega |\nabla u^{\alpha/2}|^2 dx, \quad \alpha > 0.$$

Schlussendlich führen wir noch den Begriff der Entropiedissipation ein.

**Definition 3.3.4.** Sei $f$ eine (glatte) Lösung von Gleichung (3.2), und sei $\mathsf{H}$ eine Entropie bezüglich dieser Gleichung. Dann ist die *Entropiedissipation* $\mathsf{D}$ definiert als

$$\mathsf{D}[f(t)] = -\frac{d\mathsf{H}}{dt}\left[f(t)\right], \quad t > 0.$$

Damit die Begriffe klar werden, wollen wir nun ein einfaches Beispiele betrachten.

**Beispiel 3.3.5 (Wärmeleitungsgleichung).** Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung auf dem $d$-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^d$ wie in [16]:

$$\begin{cases} \partial_t f - \Delta f = 0 \ \text{ auf } \ \mathbb{T}^d, \ \text{ für } \ t > 0, \\ f(t=0,\cdot) = f_I \geq 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Das Problem ist wohlgestellt, da für jeden nichtnegativen integrierbaren Anfangswert $f_I$ eine glatte nichtnegative Lösung $f$ existiert, die noch dazu masseerhaltend ist

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(t,x)dx = \int_{\mathbb{T}^d} f_I(x)dx =: \bar{f}, \quad \forall t \geq 0.$$

Diese Masse normieren wir zu 1, indem wir $\bar{f}$ durch den Ausdruck $\bar{w} := \dfrac{\bar{f}}{meas(\mathbb{T}^d)}$ ersetzen, (und in Folge weiterhin $f$ schreiben). Mit der Schreibweise $f(t) = f(t,\cdot)$ gilt nun

$$f(t) : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}.$$

[2] Wir erinnern an die Beziehung: physikalische Entropie = negative mathematische Entropie.

Nun betrachten wir folgendes Funktional $\mathsf{H}$:

$$\mathsf{H}[f] := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d}(f-\bar{f})^2 dx.$$

Durch Differenzieren, Einsetzen in (3.3) und partielle Integration erhalten wir

$$\frac{d\mathsf{H}}{dt}[f] = \int_{\mathbb{T}^d}(f-\bar{f})\partial_t f dx \overset{(3.3)}{=} \int_{\mathbb{T}^d}(f-\bar{f})\Delta f dx \overset{\text{Part. Int.}}{=} -\int_{\mathbb{T}^d}|\nabla f|^2 dx \leq 0. \tag{3.4}$$

Damit ist das Funktional $\mathsf{H}$ ein Lyapunov-Funktional, und wegen der offensichtlichen Nichtnegativität und Konvexität eine Entropie.

Die Entropiedissipation hat somit die Gestalt

$$\mathsf{D}[f(t)] = \int_{\mathbb{T}^d}|\nabla f|^2 dx.$$

Die Poincaré-Ungleichung liefert uns nun den gewünschten Zusammenhang zwischen Entropie und Entropiedissipation. Bekanntlich gilt für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und für alle Funktionen $f$ im Sobolevraum $H^1(\Omega)$ mit der Poincaré-Konstanten $C_P$:

$$\|f-\bar{f}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.5}$$

Bei manchen bestimmten Gebieten lässt sich die Poincaré-Konstante $C_P$ exakt oder zumindest approximativ bestimmen. In unserem Fall des $d$-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^d$ gilt $C_P = \frac{1}{2\pi}$. Mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung (3.5) erhalten wir nun folgende Entropie-Dissipationsungleichung:

$$-\mathsf{D}[f] = \frac{d\mathsf{H}}{dt}[f] \overset{(3.4)}{=} -\|\nabla f\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} \overset{(3.5)}{\leq} -C_P^{-1}\|f-\bar{f}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} = -2C_P^{-1}\mathsf{H}[f],$$

und mit Hilfe des Gronwall Lemmas folgt daraus exponentielle Konvergenz mit $\frac{1}{C_P}$ als Konvergenzrate :

$$\|f(t)-\bar{f}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} = 2\mathsf{H}[f(t)] \leq 2\mathsf{H}[f_I]e^{-(2/C_P)t}.$$

Als nächstes betrachten wir eine idealisierte Version unseres Modellproblems (1.1), in dem wir den Transportoperator $\mathsf{T}$ durch einen beschränkten Operator $\tilde{\mathsf{T}}$ ersetzen und weitere Bedingungen einführen, sodass die Entropie-Dissipationsmethode tatsächlich die gewünschte exponentielle Konvergenz liefert. Im anschließenden Vergleich mit der realen Situation bei kinetischen Gleichungen (1.1) wird dann deutlich, an welchen Stellen die Entropie-Dissipationsmethode nicht funktioniert, und daher mit anderen Techniken verbessert werden muss.

**Beispiel 3.3.6 (Ein Wunschbeispiel).** Seien $\tilde{\mathsf{T}}, \tilde{\mathsf{L}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und betrachte folgende Gleichung:

$$\begin{cases} \partial_t f + \tilde{\mathsf{T}} f = \tilde{\mathsf{L}} f \\ f(0,x,v) = f_I(x,v). \end{cases} \tag{3.6}$$

Der beschränkte Operator $\tilde{\mathsf{T}}$ sei schiefsymmetrisch, der beschränkte Operator $\tilde{\mathsf{L}}$ injektiv, symmetrisch und es gelte $\langle \tilde{\mathsf{L}} f, f\rangle \leq 0$. Umformen von (3.6) liefert

$$\langle \partial_t f, f\rangle + \langle \tilde{\mathsf{T}} f, f\rangle = \langle \tilde{\mathsf{L}} f, f\rangle,$$

und weiters folgt

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|f\|^2 = \langle \tilde{\mathsf{L}} f, f\rangle \leq 0. \tag{3.7}$$

Somit ist $\mathsf{H}[f] := \|f\|^2$ ein Lyapunov-Funktional, und wegen der offensichtlichen Nichtnegativität und Konvexität eine Entropie mit der Entropiedissipation $\mathsf{D}[f] = -\langle \tilde{\mathsf{L}} f, f\rangle$. Angenommen $\tilde{\mathsf{L}}$ ist nun koerziv

$$-\langle \tilde{\mathsf{L}} f, f\rangle \geq C\|f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

dann folgt aus (3.7)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|f\|^2 \leq -C\|f\|^2,$$

und damit mit dem Lemma von Gronwall exponentielle Konvergenz.

**Beispiel 3.3.7** (**Kinetische Gleichungen**)**.** Wir betrachten nun unser Modellproblem (1.1):

$$\begin{cases} \partial_t f + \mathsf{T} f = \mathsf{L} f, \\ f(0,x,v) = f_I(x,v). \end{cases} \tag{3.8}$$

Im Vergleich zum vorigen Beispiel sind $\mathsf{T}$ und $\mathsf{L}$ jetzt unbeschränkte Operatoren, außerdem ist $\mathsf{L}$ nicht injektiv. Als maximale Koerzivitätseigenschaft können wir daher nur fordern:

$$\langle \mathsf{L} f, f\rangle \geq C\|f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp \cap \mathcal{D}(\mathsf{L}).$$

Nun besteht der Nullraum von $\mathsf{L}$ genau aus der Menge aller lokalen Gleichgewichte, für die wir damit keine Abschätzung nach unten zur Verfügung haben. Das Problem bei kinetischen Gleichungen ist daher, dass Entropie-Dissipationsmethoden die lokalen Gleichgewichte verschwinden lassen, wobei jedoch gleichzeitig beliebig große makroskopische Dichten auftreten können.

Genau diese Tatsache macht das Studium dieser Gleichungen so trickreich, und wir benötigen als weiteres Hilfsmittel das Konzept der Hypokoerzivität, welches wir im nächsten Abschnitt vorstellen wollen.

## 3.4 Koerzivität und Hypokoerzivität

Frédéric Hérau definiert Hypokoerzivität in [12] (wie wir anfangs in Definition 1.1.2) als die Methode, bei einem nichtkoerziven Problem einen modifizierten, aber normäquivalenten Hilbertraum einzuführen, der Koerzivität liefert. Ähnlich werden wir es im 4. Kapitel bei Dolbeault, Mouhot und Schmeiser ([9]) kennenlernen. Ein etwas abstrakteres Konzept wurde von Cédric Villani aufgestellt, welches sich gut in die Theorie unbeschränkter Operatoren und stark stetiger Operatorhalbgruppen einfügt, und aus dem die von Hérau bzw. Dolbeault, Mouhot und Schmeiser verwendete Eigenschaft folgt. Dieses abstrakte Konzept der Hypokoerzivität wollen wir in diesem Abschnitt kennenlernen.

**Definition 3.4.1.** Sei $\mathsf{P}$ ein unbeschränkter Operator auf einem reellen Hilbertraum $\mathcal{H}$, und bezeichne $\mathcal{N}(\mathsf{P})$ den Kern von $\mathsf{P}$. Sei $\tilde{\mathcal{H}}$ ein weiterer Hilbertraum, sodass $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{N}(\mathsf{P})^\perp$ eine stetige, dichte Einbettung ist mit reellem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}$ und der von ihr induzierten Norm $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{H}}}$. Falls für alle $h \in \mathcal{N}(\mathsf{P})^\perp \cap \mathcal{D}(\mathsf{P})$ gilt:

$$\langle \mathsf{P} h, h\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} \geq \lambda \|h\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}},$$

dann heißt $\mathsf{P}$ $\lambda$-*koerziv* auf $\tilde{\mathcal{H}}$. Weiters heißt der Operator $\mathsf{P}$ *koerziv auf* $\tilde{\mathcal{H}}$, falls es ein $\lambda > 0$ gibt, sodass $\mathsf{P}$ $\lambda$-koerziv ist.

Nun lässt sich das Konzept der Koerzivität auch in einem halbgruppentheoretischen Rahmen betrachten. Die zum (möglicherweise unbeschränkten) Operator $\mathsf{P}$ gehörende Halbgruppe wollen wir in Folge (wie in der Literatur üblich) mit dem formalen Symbol $(e^{\mathsf{P}t})_{t\geq 0}$ bezeichnen.

**Bemerkung 3.4.2.** Dieses reine Symbol $(e^{\mathsf{P}t})_{t\geq 0}$ für die zu dem unbeschränkten Operator $\mathsf{P}$ gehörende Halbgruppe ist dabei nicht zu verwechseln mit der Operatorhalbgruppe $(e^{\mathsf{A}t})_{t\geq 0}$ für einen beschränkten Operator $\mathsf{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, wo man den Ausdruck definieren kann als $e^{\mathsf{A}t} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathsf{A}^n$, da diese Reihe wegen der Beschränktheit von $\mathsf{A}$ konvergiert. Aus den Sätzen 3.2.11 und 3.2.10 wissen wir auch, dass eine Halbgruppe genau dann diese Gestalt hat, wenn ihr infinitesimaler Generator beschränkt ist. Im Beweis vom Satz von Hille-Yoshida 3.2.9 (siehe [21]) lässt sich nachlesen, dass man, um von einem unbeschränkten Operator $\mathsf{A}$ zu seiner Halbgruppe zu kommen, ihn mit Hilfe der sogenannten *Yoshida-Approximation* in der starken Operatortopologie approximieren muss, sodass sich mit Hilfe dieser stetiger Operatoren dann in weiterer Folge die zu $\mathsf{A}$ gehörende Halbgruppe darstellen lässt.

Koerzivität lässt sich im Falle von Halbgruppen auch folgendermaßen charakterisieren:

**Satz 3.4.3** (**Halbgruppentheoretische Charakterisierung von Koerzivität**)**.** *Mit den gleichen Bezeichnungen wie oben gilt: Der Operator* $\mathsf{P}$ *ist genau dann* $\lambda$*-koerziv auf* $\tilde{\mathcal{H}}$ *, wenn*

$$\|h\|_{\tilde{\mathcal{H}}} = \|e^{-t\mathsf{P}}h_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq e^{-\lambda t}\|h_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}}. \tag{3.9}$$

*Beweis.* Sei $\mathsf{P}$ $\lambda$-koerziv. Da die Funktion $(t,h) \mapsto e^{-t\mathsf{P}}$ stetig in $t$ und $h$ ist, genügt es, $h_0$ aus der dichten Teilmenge $\tilde{\mathcal{H}} \cap \mathcal{D}(\mathsf{P})$ zu wählen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|e^{-t\mathsf{P}}h_0\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}} &= 2\left\langle \frac{d}{dt}\left(e^{-t\mathsf{P}}h_0\right), e^{-t\mathsf{P}}h_0\right\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} \\
&= -2\left\langle \mathsf{P}e^{-t\mathsf{P}}h_0, e^{-t\mathsf{P}}h_0\right\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} \\
&\leq -2\lambda\left\|e^{-t\mathsf{P}}h_0\right\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}},
\end{aligned}$$

und mit dem Lemma von Gronwall folgt sofort

$$\|e^{-t\mathsf{P}}h_0\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq e^{-2\lambda t}\|h_0\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}},$$

und damit

$$\|e^{-t\mathsf{P}}h_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq e^{-\lambda t}\|h_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}}.$$

Umgekehrt gelte nun (3.9). Wieder gilt: Da die Funktion $(t,h) \mapsto e^{-t\mathsf{P}}$ stetig in $t$ und $h$ ist, genügt es, $h_0$ aus der dichten Teilmenge $\tilde{\mathcal{H}} \cap \mathcal{D}(\mathsf{P})$ zu wählen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \mathsf{P}h_0, h_0\rangle &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|e^{-t\mathsf{P}}h_0\right\|^2\Big|_{t=0} \\
&= -\lim_{t\to 0}\frac{\|e^{-t\mathsf{P}}h_0\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}} - \|h_0\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}}}{2t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\|h_0\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}} - \|e^{-t\mathsf{P}}h_0\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}}}{2t} \\
&\geq \liminf_{t\to 0}\frac{\left(1-e^{-2\lambda t}\right)\|h_0\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}}}{2t} \\
&\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lambda\|h_0\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}},
\end{aligned}$$

wobei wir von der zweiten auf die dritte Zeile das Vorzeichen wegen der Vertauschung der Reihefolge der Terme in der Differenz gewechselt haben. □

**Definition 3.4.4.** Sei $\mathsf{P}$ ein unbeschränkter Operator auf einem reellen Hilbertraum $\mathcal{H}$, und sei $\mathsf{P}$ Generator einer stetigen Halbgruppe, die wir wieder mit $\left(e^{-t\mathsf{P}}\right)_{t\geq 0}$ bezeichnen wollen. Sei $\tilde{\mathcal{H}}$ ein weiterer Hilbertraum, sodass $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{N}(\mathsf{P})^{\perp}$ eine stetige dichte Einbettung mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}$ und der von ihr induzierten Norm $\| \cdot \|_{\tilde{\mathcal{H}}}$ ist. Falls es eine positive Konstante $C < \infty$ gibt, sodass für alle $h_0 \in \tilde{H}$ und für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\|e^{-t\mathsf{P}} h_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq C e^{-\lambda t} \|h_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}}, \tag{3.10}$$

dann heißt $\mathsf{P}$ $\lambda$-*hypokoerziv* auf $\tilde{\mathcal{H}}$. Weiters heißt der Operator $\mathsf{P}$ *hypokoerziv auf* $\tilde{\mathcal{H}}$, falls es ein $\lambda > 0$ gibt, sodass $\mathsf{P}$ $\lambda$-hypokoerziv ist.

Vergleichen wir diese Definition mit der halbgruppentheoretischen Charakterisierung von Koerzivität aus Satz 3.4.3, so stellen wir fest, dass sie bis auf die Konstante $C$ übereinstimmen, Koerzivität im halbgruppentheoretischen Sinn ist ein Spezialfall von Hypokoerzivität mit Konstante $C = 1$.

Es gilt sogar Folgendes:

**Satz 3.4.5.** *Falls eine Hilbertraumnorm existiert, die* (3.10) *mit einer Konstante* $C > 0$ *erfüllt, so existiert eine äquivalente Norm, sodass* (3.10) *mit* $C = 1$ *gilt.*

*Beweis.* Laut Voraussetzung gibt es eine Konstante $C > 0$, sodass für ein festes $\lambda > 0$ und für alle $t > 0$ gilt

$$\|e^{-t\mathsf{P}} h_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq C e^{-\lambda t} \|h_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}}.$$

Dies lässt sich äquivalent anschreiben als

$$e^{\lambda t} \|e^{-t\mathsf{P}} h_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq C \|h_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}}.$$

Nun definieren wir als neue Norm

$$\|h_0\|_N := \sup_{s \geq 0} e^{\lambda s} \|e^{-s\mathsf{P}} h_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}}.$$

Diese neue Norm ist eine zur ursprünglichen Norm äquivalente Norm:

$$\|h_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \overset{(i)}{\leq} \|h_0\|_N \overset{(ii)}{\leq} C \|h_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}}.$$

Dabei gilt $(i)$, da auf der rechten Seite das Supremum über alle $s > 0$ genommen wird statt wie auf der linken Seite nur $s = 0$ zu betrachten, und $(ii)$ wegen der vorausgesetzten Hypokoerzivität.

Weiters folgt nun

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} \|e^{-t\mathsf{P}} h_0\|_N &= \sup_{s \geq 0} e^{\lambda(s+t)} \|e^{-(s+t)\mathsf{P}} h_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \\ &= \sup_{s \geq t} e^{\lambda s} \|e^{-s\mathsf{P}} h_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \\ &\leq \sup_{s \geq 0} e^{\lambda s} \|e^{-s\mathsf{P}} h_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}}, \\ &= \|h_0\|_N, \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit $e^{-\lambda t}$ erhalten wir also:

$$\|e^{-t\mathsf{P}} h_0\|_N \leq 1 \cdot e^{-\lambda t} \|h_0\|_N,$$

und somit ist $h(t) = e^{-t\mathsf{P}} h_0$ in der neuen $\| \cdot \|_N$-Norm koerziv. □

Dies zeigt, dass die Konzepte der Koerzivität und der Hypokoerzivität nicht weit auseinander liegen. Trotzdem ist Hypokoerzivität ein strikt schwächeres Konzept, da Hypokoerzivität invariant unter dem Wechsel zu einer äquivalenten Hilbertraumnorm auf $\tilde{\mathcal{H}}$ ist, Koerzivität hingegen nicht.

Genau deswegen lässt sich für den Nachweis von Hypokoerzivität folgende Strategie anwenden: findet man eine zur ursprünglichen Hilbertraumnorm äquivalente Norm, die koerziv ist, so ist die ursprüngliche Norm hypokoerziv, was laut (3.10) genau exponentiellen Abklang mit Abklingrate $\lambda$ bedeutet. Genau dieses Resultat werden wir in Folge gebrauchen, wobei wir statt der hier im Beweis verwendeten $\|\cdot\|_N$-Norm ein von *Hérau* in [12] eingeführtes *modifiziertes Entropiefunktional* $\mathsf{H}[\cdot]$ verwenden werden.

# Kapitel 4

# Hypokoerzivität für lineare kinetische Gleichungen

## 4.1 Untersuchung des Langzeitverhaltens mittels Hypokoerzivität

Nachdem wir nun alle wichtigen Begriffe und Methoden geklärt haben, können wir mit der Untersuchung des Papers *"Hypocoercivity for linear kinetic equations conserving mass"* von *Jean Dolbeault, Clément Mouhot* und *Christian Schmeiser* [9] beginnen. Wir wollen dabei die Beweise detaillierter ausführen und angedeutete Zusammenhänge näher beleuchten.

### 4.1.1 Allgemeine Voraussetzungen

Wir betrachten die schon in der Einleitung vorgestellte Modellgleichung (1.1):

$$\begin{cases} \partial_t f + \mathsf{T} f = \mathsf{L} f, \\ f(0,x,v) = f_I(x,v) \in L^1(dxdv). \end{cases} \tag{4.1}$$

Dabei sei $f = f(t,x,v)$ eine Dichtefunktion, die auf dem Ganzraum $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ lebt[1], und $f_I \in L^1(dxdv)$ bedeute, dass $\int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f dxdv < \infty$ ist. Der Transportoperator $\mathsf{T}$ sei

$$\mathsf{T} := v \cdot \nabla_x - \nabla_x V \cdot \nabla_v,$$

mit einer messbaren Funktion $V = V(x)$ als äußeres Potential. Die Charakteristiken von $\mathsf{T}$ seien gegeben durch den Fluss des Hamiltonians

$$(x,v) \mapsto E(x,v) := \frac{1}{2}|v|^2 + V(x). \tag{4.2}$$

Der Kollisionsperator $\mathsf{L}$ sei stationär und ein Multiplikator in der Ortsvariable $x$, außerdem sei $\mathsf{L}$ rotationssymmetrisch, d.h. es gelte $\mathsf{R}_v\mathsf{L} = \mathsf{L}\mathsf{R}_v$ für jeden Rotationsoperator $\mathsf{R}_v$, der auf den Geschwindigkeitsraum wirkt.

[1] Auf dem Gebiet der (linearisierten) kinetischen Gleichungen gibt es bis jetzt nur wenig brauchbare Ergebnisse auf beschränkten Gebieten, wie *C. Villani* in [29] auf Seite 83 anmerkt. Einzig auf periodischen Boxen und dem Torus gibt es Ergebnisse, siehe [22]. Auch unser Setting lässt sich problemlos auf den Torus übertragen, siehe hierzu die Anmerkung in [9], Seite 7.

Da wir das Langzeitverhalten von (4.1) betrachten wollen, interessieren wir uns für Gleichgewichtszustände dieser Gleichung. Wir nehmen nun an, dass es eine nichtnegative Energieprofilfunktion $\Gamma$ gibt, sodass sich das globale Gleichgewicht $F$ schreiben lässt als

$$F(x,v) = \Gamma(E(x,v)),$$

und der Kern von $\mathsf{L}$ die Menge aller lokalen Gleichgewichte bildet

$$\mathcal{N}(\mathsf{L}) = \{f(x,v) \in L^2(d\mu) : \exists \phi(x) \text{ sodass } f(x,v) = \phi(x)F(x,v)\},$$

wobei $L^2(d\mu)$ der gewichteter Maßraum aus (4.10) ist, und $\phi$ eine beliebige $x$-abhängige Funktion. Der Gleichgewichtszustand $F$ ist stationär und isotrop bezüglich $v$. Wir setzen weiters voraus, dass der Träger von $F$ zusammenhängend sei, sodass der Durchschnitt von $\mathsf{L}$ und $\mathsf{T}$ von $F$ aufgespannt wird.

Um eine brauchbare Methode zu entwickeln, benötigen wir noch weitere Bedingungen, und dabei wollen wir global geltende Voraussetzungen in Folge mit **(H·)** bezeichnen.

Sei das globale Gleichgewicht $F$ strikt positiv, integrierbar und normiert durch

$$\textbf{Voraussetzung (H0)}: \quad \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} F dv dx = 1.$$

Aus dieser Normalisierungsbedingung werden wir die Eindeutigkeit des globalen Gleichgewichts $F$ herleiten. Da $F$ die Gestalt $F(x,v) = \Gamma\left(\frac{|v|^2}{2} + V(x)\right)$ hat, ist Integrierbarkeit bezüglich $v$ eine Forderung an die nichtnegative Energieprofilfunktion $\Gamma$, während für Integrierbarkeit bezüglich $x$ ein $\Gamma$-abhängiges Wachstum des äußeren Potentials $V$ benötigt wird, und wir das Potential $V$ daher in Form eines Potentialtopfes[2] wählen.

Die Eindimensionalität von $\mathcal{N}(\mathsf{L})$ legt die Existenz eines lokalen Erhaltungsgesetzes in $x$ nahe. Wir wollen daher lokale Masseerhaltung bezüglich $x$ fordern

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathsf{L} f dv = 0. \tag{4.3}$$

Daraus folgt sofort globale Masseerhaltung

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f dv dx &= \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \partial_t f dv dx \\
&\overset{(4.1)}{=} \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} (\mathsf{L}-\mathsf{T}) f dv dx \\
&\overset{(4.3)}{=} -\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \mathsf{T} f dv dx \\
&= -\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} v\cdot\nabla_x f dv dx + \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \nabla_x V\cdot\nabla_v f dv dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} v f dv\right) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x V \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla_v f dv)}_{=0} dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} v f dv\right) dx \\
&= 0,
\end{aligned}$$

[2]Unter einem Potentialtopf versteht man in der Physik die Region um das lokale Minimum der Potentialverteilung eines Systems. Als Beispiel können wir uns einen Körper im Schwerefeld der Erde vorstellen. Dieser kann den Potentialtopf (=Schwerefeld der Erde) nur verlassen, indem er durch Zufuhr von Energie bis über den Rand des Potentialtopfes gehoben wird.

und damit

$$\frac{d}{dt}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f dvdx = 0. \tag{4.4}$$

Nun sei $M := \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f_I dvdx$ definiert als die Masse der integrierbaren Anfangsbedingung $f_I$. Da Gleichung (4.1) linear ist, können wir statt einer Dichtefunktion $f$ auch *Schwankungen um das globale Gleichgewicht* $MF$ betrachten, die wir zunächst mit $\tilde{f}$ mit $\tilde{f} := f - MF$ bezeichnen wollen. Für diese folgt dann aus der globalen Masseerhaltung (4.4) und der Normalisierungsbedingung **(H0)**:

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \tilde{f} dvdx &= \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f dvdx - \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} MF dvdx && (4.5)\\
&\overset{(4.4)}{=} \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f_I dvdx - \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} MF dvdx && (4.6)\\
&\overset{\textbf{(H0))}}{=} M - 1\cdot M && (4.7)\\
&= 0. && (4.8)
\end{aligned}$$

Nun fordern wir $M = 0$, sodass $\tilde{f}$ für $t \to \infty$ gegen das globale Gleichgewicht $MF = 0$ konvergiert. Dabei beachte man, dass Dichtefunktionen im allgemeinen nichtnegativ sind, Schwankungen um das globale Gleichgewicht $MF$ mit $M = 0$ hingegen Vorzeichen wechseln müssen (außer sie sind die konstante Nullfunktion). Im weiteren Verlauf betrachten wir solche Schwankungen um das globale Gleichgewicht, schreiben jedoch statt $\tilde{f}$ wieder $f$.

Nun folgt aus der lokalen Masseerhaltung (4.3) für eine beliebige Funktion $\phi = \phi(x)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathsf{L}(f - \phi F)\left(\frac{f-\phi F}{F}\right) dv = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathsf{L}f)\left(\frac{f}{F}\right) dv, \tag{4.9}$$

denn

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \mathsf{L}(f - \phi F)\left(\frac{f-\phi F}{F}\right) dv\\
=\ &\int_{\mathbb{R}^d} (\mathsf{L}f)\left(\frac{f}{F}\right) dv - \phi\int_{\mathbb{R}^d} (\mathsf{L}f)\left(\frac{F}{F}\right) dv - \phi\int_{\mathbb{R}^d} (\mathsf{L}F)\left(\frac{f}{F}\right) dv + \phi^2\int_{\mathbb{R}^d} (\mathsf{L}F)\left(\frac{F}{F}\right) dv,
\end{aligned}$$

und das 2. Integral verschwindet nun wegen der lokalen Maseerhaltung (4.3) und die hinteren zwei Integrale wegen $F \in \mathcal{N}(\mathsf{L})$.

Die Beziehung (4.9) kann so interpretiert werden, dass die linke Seite zumindest formal quadratisch im Abstand zwischen $f$ und der Menge aller lokalen Gleichgewichte $\mathcal{N}(\mathsf{L})$ ist. Dies motiviert die Einführung eines speziellen Maßraums $L^2(d\mu)$, wobei das Maß $\mu$ auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ als das mit der Gewichtsfunktion $\frac{1}{F}$ gewichtete 2d-dimensionale Lebesguemaß definiert wird:

$$d\mu = d\mu(x,v) := \frac{dvdx}{F(x,v)}, \quad \text{mit} \quad (x,v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d. \tag{4.10}$$

Das auf dem Hilbertraum $L^2(d\mu)$ definierte Skalarprodukt bezeichnen wir mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$, die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm mit $\|\cdot\|$, sodass $\langle f, g\rangle = \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} fg d\mu$ und $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$

gilt. Die Orthogonalprojektion $\Pi$ auf die Menge aller lokalen Gleichgewichte $\mathcal{N}(\mathsf{L})$ sieht dann folgendermaßen aus:

$$\Pi f := \frac{\rho_f}{\rho_F} F, \quad \text{mit} \quad \rho_f := \int_{\mathbb{R}^d} f dv. \tag{4.11}$$

Als nächstes rechnen wir nach, dass der Transportoperator $\mathsf{T}$ bezüglich des soeben eingeführten Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ schiefsymmetrisch ist:

**Lemma 4.1.1.** *Der Transportoperator $\mathsf{T}$ ist bezüglich des $L^2(d\mu)$-Skalarproduktes aus (4.10) schiefsymmetrisch.*

*Beweis.* Es gilt für alle $x, y \in \mathcal{D}(\mathsf{T})$

$$\begin{aligned}
\langle \mathsf{T}f, g\rangle &= \langle v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V \cdot \nabla_v f, g\rangle \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^d v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x,v), g(t,x,v) \right\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^d \frac{\partial V}{\partial x_j}(x) \frac{\partial f}{\partial v_j}(t,x,v), g(t,x,v) \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^d \left\langle v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x,v), g(t,x,v) \right\rangle - \sum_{j=1}^d \left\langle \frac{\partial V}{\partial x_j}(x) \frac{\partial f}{\partial v_j}(t,x,v), g(t,x,v) \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^d \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}\left(v_j f(t,x,v)\right), g(t,x,v) \right\rangle - \sum_{j=1}^d \left\langle \frac{\partial}{\partial v_j}\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}(x) f(t,x,v)\right), g(t,x,v) \right\rangle \\
&\overset{\text{part. Int.}}{=} -\sum_{j=1}^d \left\langle v_j f(t,x,v), \frac{\partial}{\partial x_j} g(t,x,v) \right\rangle + \sum_{j=1}^d \left\langle \frac{\partial V}{\partial x_j}(x) f(t,x,v), \frac{\partial}{\partial v_j} g(t,x,v) \right\rangle \\
&= \left\langle f(t,x,v), -\sum_{j=1}^d v_j \frac{\partial}{\partial x_j} g(t,x,v) \right\rangle + \left\langle f(t,x,v), \sum_{j=1}^d \frac{\partial V}{\partial x_j}(x) \frac{\partial g(t,x,v)}{\partial v_j} \right\rangle \\
&= \left\langle f(t,x,v), -\sum_{j=1}^d \left( v_j \frac{\partial}{\partial x_j} g(t,x,v) - \frac{\partial V}{\partial x_j}(x) \frac{\partial g(t,x,v)}{\partial v_j} \right) \right\rangle \\
&= -\langle f, v \cdot \nabla_x g - \nabla_x V \cdot \nabla_v g\rangle \\
&= -\langle f, \mathsf{T}g\rangle,
\end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass der Transportoperator $\mathsf{T}$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ schiefsymmetrisch ist. □

Da wir eine Entropieungleichung erhalten wollen, fordern wir, dass $\mathsf{L}$ dissipativ ist, also dass $\langle \mathsf{L}f, f\rangle \leq 0$ gilt. Dann folgt nämlich durch die Schiefsymmetrie von $\mathsf{T}$ und der Dissipativität von $\mathsf{L}$, dass $\|f\|^2$ ein Lyapunov-Funktional ist

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|f\|^2 = \langle \partial_t f, f\rangle \overset{(4.1)}{=} \langle (\mathsf{L} - \mathsf{T})f, f\rangle = \langle \mathsf{L}f, f\rangle \leq 0,$$

und wegen der Koerzivität und Nichtnegativität ist $\|f\|^2$ sogar eine Entropie. Es gilt somit folgender Zusammenhang mit der Entropiedissipation[3] $\langle \mathsf{L}f, f\rangle$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|f\|^2 = \langle \mathsf{L}f, f\rangle \leq 0.$$

Für die Wohlgestelltheit des Anfangwertproblems (4.1) mit $f_I \in L^1(dxdv)$ fordern wir die hinreichende Voraussetzung einer sogenannten "maximalen Dissipativität", unter der in anderen

[3]Siehe Definition 3.3.4.

wissenschaftlichen Arbeiten (wie z.B in [29] für den Fokker-Planck-Operator) die Wohlgestelltheit des Problems (4.1) gezeigt wurde.

Falls nun die Entropiedissipation koerziv bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ auf ganz $\mathcal{H}$ wäre, also eine positive Konstante $\kappa \geq 0$ mit $-\langle \mathsf{L}f, f\rangle \geq \kappa \|f\|^2$ für alle $f \in \mathcal{D}(\mathsf{L})$ existiere würde, so würde wie im Beispiel 3.3.6 skizziert unter der oben festgelegten Voraussetzung (4.5), nur Schwankungen um das globale Gleichgewicht zu betrachten, und mit Hilfe des Lemmas von Gronwall exponentieller Abklang gegen Null folgen. Doch leider kann die Entropiedissipation $\langle \mathsf{L}f, f\rangle$ nicht koerziv für alle $f$ aus $\mathcal{D}(\mathsf{L})$ sein, da $\mathsf{L}$ auf der Menge aller lokalen Gleichgewichte verschwindet.

Um dennoch exponentielle Konvergenz gegen Null zeigen zu können, benötigen wir daher als weiteres Hilfsmittel die Methode der Hypokoerzivität. Dafür werden wir eine Mikro-Makro-Zerlegung des Hilbertraumes $\mathcal{H}$ in die zwei Teilräume $\mathcal{H} = \mathcal{N}(\mathsf{L}) \oplus \mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp$ durchführen, indem wir für die Entropiedissipation sogenannte *mikroskopische Koerzivität* auf dem Teilraum $\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp$ fordern, und zusätzlich noch als eine Art *Poincaré-Ungleichung* auf dem Teilraum $\mathcal{N}(\mathsf{L})$ die sogenannte *makroskopische Koerzivität* für $\mathsf{T}$ einführen.

### 4.1.2 Makroskopischer Diffusionslimes

Wir wollen nun die Methode des *makroskopischen Diffusionlimes* aus [25] anwenden, um die Bedingung der *makroskopischen Koerzivität* zu motivieren. Die Methode des *makroskopischen Diffusionlimes* untersucht das Streben der lokalen Gleichgewichte zum globalen Gleichgewicht auf einer großen Zeitskala mittels Berechnung einer gewissen Asymptote. Alle im Folgenden angeführten Rechnungen sind dabei rein formal als Motivation zu verstehen.

Ausgehend von der Tatsache, dass das erste Geschwindigkeitsmoment verschwindet, führen wir eine parabolische Umskalierung von Gleichung (4.1) durch, indem wir setzen:

$$f^\epsilon(t,x,v) := f(\epsilon^{-2}t, \epsilon^{-1}x, v) \quad \text{mit} \quad 0 < \epsilon \ll 1.$$

Das äußere Potential $V$ skalieren wir auf die gleiche Weise um, sodass sich unser Ausgangsproblem (4.1) wie folgt anschreiben lässt

$$\epsilon^2 \partial_t f^\epsilon + \epsilon \mathsf{T} f^\epsilon = \mathsf{L} f^\epsilon. \tag{4.12}$$

Nun definieren wir $f^0 := \lim_{\epsilon \to 0} f^\epsilon$, und erhalten mittels formaler Rechnung

$$\mathsf{L} f^0 = \lim_{\epsilon \to 0} \mathsf{L} f^\epsilon \overset{(4.12)}{=} \lim_{\epsilon \to 0} \left(\epsilon^2 \partial_t f^\epsilon + \epsilon \mathsf{T} f^\epsilon\right) = 0.$$

Daraus folgt nun, dass $f^0$ im Kern von $\mathsf{L}$ liegt, und daher unter der Orthogonalprojektion auf den Kern von $\mathsf{L}$ invariant bleibt:

$$f^0 = \Pi f^0. \tag{4.13}$$

Die asymptotische Grenzfunktion $f^0$ ist somit ein lokales Gleichgewicht, und wir wollen nun ihren Trend zum globalen Gleichgewicht untersuchen. Es gilt

$$\Pi \mathsf{L} = \mathsf{L} \Pi = \Pi \mathsf{T} \Pi = 0, \tag{4.14}$$

wie man aus folgender formaler Rechnung sieht: Zunächst gilt $\mathsf{L}\Pi = 0$, da $\Pi$ eine Orthogonalprojektion auf $\mathcal{N}(\mathsf{L})$ ist. Nun nutzen wir die Symmetrie von $\mathsf{L}$ und die Selbstadjungiertheit von $\Pi$ aus und erhalten für alle $f, g$:

$$0 = \langle f, \mathsf{L}\Pi g\rangle = \langle \Pi \mathsf{L} f, g\rangle,$$

und damit folgt unter der formalen Annahme, dass alle Operatoren beschränkt sind, dass $\Pi\mathsf{L} = 0$ gilt. Weiters gilt wegen der Schiefsymmetrie von $\mathsf{T}$ und der Symmetrie des Skalarprodukts:

$$\langle \mathsf{T}\Pi f, \Pi f\rangle = -\langle \Pi f, \mathsf{T}\Pi f\rangle = -\langle \mathsf{T}\Pi f, \Pi f\rangle = 0,$$

und daher

$$\langle \Pi\mathsf{T}\Pi f, f\rangle = 0.$$

Dies macht (4.14) plausibel. Nun setzen wir $R^\epsilon := \frac{1}{\epsilon}(1-\Pi)f^\epsilon$ und erhalten damit aus Gleichung (4.12) die zwei Gleichungen

$$\epsilon\partial_t f^\epsilon + \mathsf{T}f^\epsilon = \mathsf{L}R^\epsilon, \tag{4.15}$$

$$\partial_t \Pi f^\epsilon + \Pi\mathsf{T}R^\epsilon = 0. \tag{4.16}$$

Gleichung (4.15) folgt dabei aus Gleichung (4.12) durch Multiplikation mit $\frac{1}{\epsilon}$ und Zerlegung von $f^\epsilon$ in $f^\epsilon = \Pi f^\epsilon + (1-\Pi)f^\epsilon$:

$$\epsilon\partial_t f^\epsilon + \mathsf{T}f^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\mathsf{L}f^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\mathsf{L}\Pi f^\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\mathsf{L}(1-\Pi)f^\epsilon \overset{(4.14)}{=} \mathsf{L}R^\epsilon.$$

Gleichung (4.16) erhalten wir aus Gleichung (4.12) durch Multiplikation mit $\frac{1}{\epsilon^2}$ , Anwenden von $\Pi$, Ausnutzen der Idempotenz von $\Pi$, Zerlegung in $f^\epsilon = \Pi f^\epsilon + (1-\Pi)f^\epsilon$ und Verwendung von $\Pi\mathsf{T}\Pi = 0$:

$$\begin{aligned}
\partial_t f^\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\mathsf{T}f^\epsilon &= \frac{1}{\epsilon^2}\mathsf{L}f^\epsilon \\
\partial_t \Pi f^\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\Pi\mathsf{T}f^\epsilon &= 0 \\
\partial_t \Pi f^\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\Pi\mathsf{T}\left(\Pi + (1-\Pi)\right)f^\epsilon &= 0 \\
\partial_t \Pi f^\epsilon + \Pi\mathsf{T}R^\epsilon &= 0.
\end{aligned}$$

Als nächstes setzen wir $R^0 := \lim_{\epsilon\to 0} R^\epsilon$ und wollen Gleichung (4.15) für $\epsilon = 0$ umformulieren. Hierzu definieren wir den Operator $\mathsf{J}$ als den *Pseudoinversen Operator* von $\mathsf{L}$:

$$\mathsf{J} := \left(\mathsf{L}|_{\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp}\right)^{-1} : \quad \mathrm{ran}(\mathsf{L}|_{\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp}) \to \mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp.$$

Dieser Operator ist wohldefiniert, denn zerlegen wir den Hilbertraum $\mathcal{H}$ in die zwei Teilräume

$$\mathcal{H} = \mathcal{N}(\mathsf{L}) \oplus \mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp,$$

und schränken den Operator $\mathsf{L}$ weiters auf den zweiten Teilraum $\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp$ ein, so erhalten wir wegen $\mathcal{N}(\mathsf{L}|_{\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp}) = \{0\}$ einen injektiven Operator

$$\mathsf{L}|_{\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp} : \mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp \to \mathrm{ran}(\mathsf{L}).$$

Als injektiver Operator ist $\mathsf{L}|_{\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp}$ auf seinem Bild $\mathrm{ran}(\mathsf{L}|_{\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp})$ invertierbar, und wir erhalten damit $\mathsf{J}$.

Wir wollen nun Gleichung (4.15) für $\epsilon = 0$ betrachten. Als erstes stellen wir fest, dass $R^0$ im $\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp$ liegt, denn

$$R^0 = \lim_{\epsilon \to 0} R^\epsilon = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}(1 - \Pi) f^\epsilon, \tag{4.17}$$

und da $(1 - \Pi) f^\epsilon \in \mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp$ und $\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp$ abgeschlossen ist, liegt auch der Limes von oben in $\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp$. Aus Gleichung (4.15) folgt nun im Grenzwert

$$\mathsf{T} f^0 = \mathsf{L} R^0.$$

Wenden wir auf beiden Seiten den pseudoinversen Operator $\mathsf{J} = \left(\mathsf{L}|_{\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp}\right)^{-1}$ an, so folgt

$$\mathsf{J}\mathsf{T} f^0 = R^0,$$

da $R^0$ wegen (4.17) in $\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp$ liegt und $\mathsf{J} \circ \mathsf{L}|_{\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp}$ daher die Identität ist. Wegen (4.13) lässt sich Gleichung (4.15) daher in folgende Gleichung umformulieren:

$$\mathsf{J}\mathsf{T}\Pi f^0 = R^0, \tag{4.18}$$

wobei die Inhomogenität $\mathsf{T}\Pi f^0$ die Lösbarkeitsbedingung $\Pi\mathsf{T}\Pi f^0 = 0$ erfüllt.

Nun betrachten wir Gleichung (4.16) für $\epsilon = 0$

$$\partial_t \Pi f^0 = -\Pi \mathsf{T} R^0.$$

Jetzt verwenden wir (4.18) und erhalten mit Hife der Selbstadjungiertheit von $\Pi$ und der Schiefsymmetrie von $\mathsf{T}$

$$\partial_t \Pi f^0 \overset{(4.18)}{=} -\Pi \mathsf{T} R^0 = -\Pi \mathsf{T}(\mathsf{J}\mathsf{T}\Pi f^0) = (\mathsf{T}\Pi)^* \mathsf{J}(\mathsf{T}\Pi) f^0,$$

und damit die Gleichung

$$\partial_t \Pi f^0 = (\mathsf{T}\Pi)^* \mathsf{J}(\mathsf{T}\Pi) f^0. \tag{4.19}$$

Eine lange Rechnung wie in [25] liefert uns nun die Äquivalenz dieses Ausdrucks zu folgender Drift-Diffusionsgleichung für die makroskopische Dichte $\rho^0 = \rho_{f^0}$ und die Transportkoeffizienten $\sigma$ und $\gamma$:

$$\partial_t \rho^0 = \nabla_x \cdot \left( \rho_F \sigma \nabla_x \left( \frac{\rho^0}{\rho_F} \right) \right) = \nabla_x \cdot \left( \nabla_x (\sigma \rho^0) + \gamma \rho^0 \nabla_x V \right). \tag{4.20}$$

Dabei ist $\sigma$ wegen der Rotationssymmetrie von $\mathsf{L}$ skalarwertig, und es gilt

$$\rho_F \sigma = -\frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} v \cdot \mathsf{J}(vF) dv, \tag{4.21}$$

und

$$\gamma \nabla_x V = -\frac{1}{\rho_F} \nabla_x (\rho_F \sigma), \tag{4.22}$$

wobei der Operator $\mathsf{L}$ negativ definit auf $\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp$ bezüglich des Skalarprodukts im Hilbertraum $L^2(d\mu)$ ist, und außerdem $\sigma(x) > 0$ und $x \in \mathbb{R}^d$ gilt.

Nun betrachten wir zwei Spezialfälle, in denen $\sigma$ und $\gamma$ besonders einfache Ausdrücke annehmen.

**Fall (C1):** Die Energieprofilfunktion habe die Gestalt $\Gamma(s) := e^{-s}$. Dann gilt für das globale Gleichgewicht $F$:

$$F(x,v) = \Gamma(E(x,v)) = \Gamma\left(V(x) + \frac{|v|^2}{2}\right) = e^{-V(x)}e^{-\frac{|v|^2}{2}},$$

und unter der Normierungsbedingung **(H0)** erhalten wir das Maxwellsche Gleichgewicht

$$F(x,v) = \rho_F(x)\mathfrak{M}(v) \quad \text{mit} \quad \rho_F = \frac{e^{-V}}{\int_{\mathbb{R}^d} e^{-V}dx} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}(v) = \frac{e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{(2\pi)^{d/2}},$$

denn es gilt $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|v|^2}{2}}dv = 1$, wie man mit Hilfe der eindimensionalen Standardnormalverteilung leicht sieht. Wir bemerken dabei, dass $F$ wie für Maxwellsche Gleichgewichte typisch in einen rein ortsabhängigen Faktor $\rho_F(x)$ und einen rein geschwindigkeitsabhängigen Faktor $\mathfrak{M}(v)$ zerfällt.

Weiters gilt

$$\sigma = \gamma = -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} v \cdot \mathsf{J}(v\mathfrak{M})dv = const,$$

denn es gilt wegen Gleichung (4.21)

$$\begin{aligned}\rho_F\sigma &= -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} v\mathsf{J}\left(v\rho_F\mathfrak{M}(v)\right)dv \\ &= -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} v\mathsf{J}\left(v\mathfrak{M}(v)\right)dv\rho_F.\end{aligned}$$

Durch Kürzen von $\rho_F$ erhalten wir nun die gewünschte Gleichung

$$\sigma = -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} v \cdot \mathsf{J}(v\mathfrak{M})dv = const.$$

Für $\gamma$ betrachten wir Gleichung (4.22) und erhalten durch Einsetzen

$$\gamma\nabla_x V = -\frac{1}{\rho_F}\nabla_x(\rho_F\sigma) = -\frac{1}{\rho_F}\sigma\rho_F\left(-\nabla_x V\right) = \sigma\nabla_x V,$$

und daher wieder durch Kürzen

$$\gamma = \sigma = -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} v \cdot \mathsf{J}(v\mathfrak{M})dv.$$

Damit löst $\rho^0$ die Fokker-Planck-Gleichung

$$\partial_t\rho^0 = \sigma\nabla_x \cdot \left(\nabla_x\rho^0 + \rho^0\nabla_x V\right),$$

wie wir durch Einsetzen in (4.20) sehen.

**Fall (C2):** Der Kollisionsoperator $\mathsf{L}$ sei definiert als

$$\mathsf{L} = \Pi - 1.$$

Es folgt $\mathsf{J} = -\operatorname{Id}$, denn

$$\mathsf{L}|_{\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp} = -\operatorname{Id}|_{\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp} + \underbrace{\Pi|_{\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp}}_{=0},$$

und daher gilt

$$\mathsf{J} = \left(\mathsf{L}|_{\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp}\right)^{-1} = -\operatorname{Id}.$$

Nun vereinfacht sich Gleichung (4.21) zu

$$\rho_F \sigma = m_F := \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 F dv. \tag{4.23}$$

Wegen

$$F(x,v) = \Gamma(E(x,v)) = \Gamma\left(\frac{|v|^2}{2} + V(x)\right) \tag{4.24}$$

folgt

$$\nabla_v F = \Gamma'(E(x,v))v \tag{4.25}$$

und

$$\nabla_x F = \Gamma'(E(x,v))\nabla_x V(x). \tag{4.26}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\nabla_x(\rho_F\sigma) &\overset{(4.23)}{=} \nabla_x\left(\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d}|v|^2 F dv\right)\\
&\overset{(4.26)}{=} \frac{\nabla_x V}{d}\int_{\mathbb{R}^d}|v|^2\Gamma'(E(x,v))dv\\
&\overset{(4.25)}{=} \frac{\nabla_x V}{d}\int_{\mathbb{R}^d} v\cdot\nabla_v F dv\\
&\overset{\text{part. Int.}}{=} -\nabla_x V\int_{\mathbb{R}^d} F dv\\
&= -\nabla_x V\rho_F,
\end{aligned}$$

und aus Gleichung (4.22) folgt

$$\gamma = 1.$$

Die makroskopische Limesgleichung (4.20) vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$\partial_t\rho^0 = \nabla_x\cdot\left(\nabla_x\left(\sigma\rho^0\right) + \rho^0\nabla_x V\right).$$

Betrachten wir den Schnitt der beiden Fälle **(C1)** und **(C2)**, d.h. fordern wir $\Pi f = \rho_f\mathfrak{M}$ sowie $\mathsf{L} = \Pi - 1$ gleichzeitig, so ergibt sich der Fall des BGK-Operators mit

$$\sigma = \gamma = 1,$$

den wir später im Abschnitt 4.3.1 noch genauer untersuchen werden. In beiden Fällen lässt sich Gleichung (4.19) mit einer positiven Konstante $\sigma_0$ umschreiben zu

$$\partial_t\Pi f^0 = -\sigma_0(\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi)f^0, \tag{4.27}$$

wobei im Fall **(C1)** $\sigma_0 \equiv \sigma$ und im Fall **(C2)** $\sigma_0 = 1$ gilt. Betrachten wir wie in (4.5) nur Schwankungen um das globale Gleichgewicht, so folgt exponentieller Abklang zum globalen Gleichgewicht, falls wir fordern, dass ein $\lambda_M > 0$ existiere, sodass

$$\|\mathsf{T}\Pi f\|^2 \geq \lambda_M \|\Pi f\|^2 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathcal{H} \quad \text{mit} \quad \Pi f \in \mathcal{D}(\mathsf{T}). \tag{4.28}$$

Dass (4.28) tatsächlich exponentiellen Abklang auf der Menge der lokalen Gleichgewichte impliziert, motivieren wir mittels folgender formaler Rechnung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Pi f^0\|^2 &= \left\langle \partial_t(\Pi f^0), \Pi f^0 \right\rangle \\ &\overset{(4.27)}{=} -\sigma_0 \left\langle (\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi) f^0, f^0 \right\rangle \\ &= -\sigma_0 \|\mathsf{T}\Pi f^0\| \\ &\overset{(4.28)}{\leq} -\lambda_M \sigma_0 \|\Pi f^0\|^2, \end{aligned}$$

und damit

$$\|\Pi f^0[t]\| \leq e^{-(\lambda_M \sigma_0)t} \|\Pi f^0[0]\|.$$

Diese formale Rechnung zeigt die Notwendigkeit von Forderung (4.28), welche wir im nächsten Abschnitt als makroskopischen Koerzivitätsbedingung **(H2)** einführen werden, und die sich im Satz 4.1.13 als äquivalent zu einer gewichteten Poincaré-Ungleichung herausstellen wird.

### 4.1.3 Die abstrakte Methode

Wir wollen nun eine rigorose abstrakte Methode entwickeln. Dazu fordern wir, dass die Operatoren $\mathsf{L}$ und $\mathsf{T}$ abgeschlossen seien, sodass durch $\mathsf{L} - \mathsf{T}$ eine stark stetige Operatorhalbgruppe generiert wird, die wir mit dem formalen Symbol $\left(e^{(\mathsf{L}-\mathsf{T})t}\right)_{t\geq 0}$ (siehe Bemerkung (3.4.2)) bezeichnen wollen.

Nun können wir die Begriffe der mikroskopischen und makroskopischen Koerzivität einführen.

**Voraussetzung (H1) (mikroskopische Koerzivität):**
Der Operator $\mathsf{L}$ sei symmetrisch und es existiere ein $\lambda_m > 0$, sodass

$$-\langle \mathsf{L}f, f\rangle \geq \lambda_m \|(I - \Pi)f\|^2 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathcal{D}(\mathsf{L}).$$

**Voraussetzung (H2) (makroskopische Koerzivität):**
Der Operator $\mathsf{T}$ sei schiefsymmetrisch und es existiere eine $\lambda_M > 0$, sodass

$$\|\mathsf{T}\Pi f\|^2 \geq \lambda_M \|\Pi f\|^2 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathcal{H} \quad \text{mit} \quad \Pi f \in \mathcal{D}(\mathsf{T}).$$

**Bemerkung 4.1.2.** An dieser Stelle wollen wir den Begriff der *mikroskopischen Koerzivität* aus **(H1)** mit dem der Koerzivität nach Villani aus Definition 3.4.1 vergleichen. Es gilt nämlich, dass die mikroskopische Koerzivität **(H1)** der Koerzivität nach Villani aus Definition 3.4.1 entspricht. Dies sieht man folgendermaßen:

Wir gehen von Bedingung **(H1)** aus und formulieren sie in das Setting bei *Villani* um. Hierzu sei $\mathcal{H} := \{f \in L^2(d\mu) : \int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f dx dv = 0\}$, und $(1-\Pi)\mathcal{H} := \{(1-\Pi)f : f \in \mathcal{H}\}$. Nun gilt wegen der Symmetrie von $\mathsf{L}$ und wegen $\mathsf{L}\Pi = 0$:

$$-\langle \mathsf{L}f, f\rangle = \langle \mathsf{L}(f - \Pi f), f - \Pi f\rangle \geq \lambda \|(I-\Pi)f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{H} \cap \mathcal{D}(\mathsf{L}),$$

und dies lässt sich nun anschreiben als

$$-\langle \mathsf{L}f, f\rangle \geq \lambda \|f\|^2 \quad \forall f \in ((1-\Pi)\,\mathcal{H}) \cap \mathcal{D}(\mathsf{L}),$$

und wir erhalten somit Koerzivität nach Villani. Die umgekehrte Richtung geht analog.

Im Satz 3.4.3 "Halbgruppentheoretische Charakterisierung von Koerzivität" haben wir weiters gezeigt, dass Koerzivität nach Villani (3.4.1) zu exponentiellem Abklang äquivalent ist:

$$\|f\|_{\tilde{\mathcal{H}}} = \|e^{\mathsf{L}t} f_I\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq e^{-\lambda t} \|f_I\|_{\tilde{\mathcal{H}}}. \quad \forall f \in \mathcal{H} \cap \mathcal{N}(\mathsf{L})^{\perp}. \tag{4.29}$$

Das Problem ist aber, dass nicht $\mathsf{L}$ sondern $\mathsf{L}-\mathsf{T}$ unsere Halbgruppe generiert, und (4.29) somit für den Nachweis des exponentiellen Abklangs zum globalen Gleichgewicht nicht ausreicht. Wir benötigen also weitere Bedingungen.

Daher wollen wir nun die Methode der Hypokoerzivität anwenden, also eine zur ursprünglichen Norm äquivalente Norm einführen, welche "koerziv im richtigen Sinn" ist, sodass nach Übergang zur ursprünglichen Norm für diese exponentielle Konvergenz zum globalen Gleichgewicht folgt. Mit "koerziv im richtigen Sinn" meinen wir dabei "koerziv auf dem passenden Teilraum".

Wir definieren daher als "neue Norm" nach der Idee des *modifizierten Entropiefunktionals* von *Frédéric Hérau* [12] eine quadratische Entropie mit einer Konstanten $\varepsilon > 0$, welche später noch näher bestimmt wird:

$$\mathsf{H}[f] := \frac{1}{2}\|f\|^2 + \varepsilon \langle \mathsf{A}f, f\rangle \quad \text{mit} \quad \mathsf{A} := (1 + (\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi))^{-1} (\mathsf{T}\Pi)^*.$$

**Lemma 4.1.3.** *Es gilt*

$$\frac{d}{dt}\mathsf{H}[f] = -\mathsf{D}[f],$$

*mit der Entropiedissipation*

$$\mathsf{D}[f] := -\langle \mathsf{L}f, f\rangle + \varepsilon\langle \mathsf{AT}\Pi f, f\rangle + \varepsilon\langle \mathsf{AT}(1-\Pi)f, f\rangle - \varepsilon\langle \mathsf{TA}f, f\rangle - \varepsilon\langle \mathsf{AL}f, f\rangle.$$

*Beweis.* Da $\mathsf{A}$ stationär ist, gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathsf{H}[f] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|f\|^2 + \varepsilon\langle \mathsf{A}f, f\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|f\|^2 + \varepsilon\frac{d}{dt}\langle \mathsf{A}f, f\rangle \\
&\overset{\partial_t \mathsf{A}=0}{=} \langle \partial_t f, f\rangle + \varepsilon\left(\langle \mathsf{A}\partial_t f, f\rangle + \langle \mathsf{A}f, \partial_t f\rangle\right) \\
&\overset{(4.1)}{=} \langle (\mathsf{L}-\mathsf{T})f, f\rangle + \varepsilon\left(\langle \mathsf{A}(\mathsf{L}-\mathsf{T})f, f\rangle + \langle \mathsf{A}f, (\mathsf{L}-\mathsf{T})f\rangle\right) \\
&\overset{\mathsf{A}\text{lin.}}{=} \langle \mathsf{L}f, f\rangle - \langle \mathsf{T}f, f\rangle + \varepsilon\left(\langle \mathsf{AL}f, f\rangle - \langle \mathsf{AT}f, f\rangle + \langle \mathsf{A}f, \mathsf{L}f\rangle - \langle \mathsf{A}f, \mathsf{T}f\rangle\right),
\end{aligned}$$

und weiters gilt wegen der Symmetrie von $\mathsf{L}$ und der Schiefsymmetrie von $\mathsf{T}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathsf{H}[f] &= \langle \mathsf{L}f, f\rangle + \varepsilon\left(\langle \mathsf{AL}f, f\rangle - \langle \mathsf{AT}f, f\rangle + \underbrace{\langle \mathsf{LA}f, f\rangle}_{=0} + \langle \mathsf{TA}f, f\rangle\right) \\
&= \langle \mathsf{L}f, f\rangle + \varepsilon\left(\langle \mathsf{AL}f, f\rangle - \langle \mathsf{AT}(1-\Pi)f, f\rangle - \langle \mathsf{AT}\Pi f, f\rangle + \langle \mathsf{TA}f, f\rangle\right).
\end{aligned}$$

**Bemerkung 4.1.4.** Die Beziehung $\mathsf{L}\mathsf{A}f = 0$ gilt wegen folgender Überlegung: Wenden wir auf die Gleichung $\mathsf{A}f = g$ den Ausdruck $(1 + (\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi))$ an, so erhalten wir

$$(\mathsf{T}\Pi)^* f = g + (\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi)g,$$

und das ist wegen der Schiefsymmetrie von $\mathsf{T}$ und der Selbstadjungiertheit von $\Pi$ äquivalent zu

$$g = -\Pi\mathsf{T}f + \Pi\mathsf{T}^2\Pi g.$$

Aus dieser Darstellung und der Idempotenz von $\Pi$ als Projektion folgt $\mathsf{A}f = g = \Pi g = \Pi\mathsf{A}f$ und damit $\mathsf{A} = \Pi\mathsf{A}$, sodass tatsächlich $\mathsf{L}\mathsf{A}f = \mathsf{L}\Pi\mathsf{A}f = 0$ gilt.

□

Als nächstes folgt ein Lemma, für dessen Beweis man tiefliegende Resultate aus der Spektraltheorie benötigt[4]. Wir begnügen uns in Folge mit einer Beweisskizze und verweisen auf weiterführende Literatur wie beispielsweise [21].

**Lemma 4.1.5.** *Für die ersten beiden Terme der Entropiedissipation* $\mathsf{D}$ *aus Lemma 4.1.3 gilt die Abschätzung*

$$-\langle \mathsf{L}f, f\rangle + \varepsilon\langle \mathsf{A}\mathsf{T}\Pi f, f\rangle \geq \min\left\{\lambda_m, \frac{\varepsilon\lambda_M}{1+\lambda_M}\right\}\|f\|^2.$$

*Beweisskizze:* Die Konstante $\lambda_m$ erhalten wir aus Bedingung **(H1)**. Für die Abschätzung $\langle \mathsf{A}\mathsf{T}\Pi f, f\rangle \geq \dfrac{\lambda_M}{\lambda_M+1}\|\Pi f\|^2$ benötigen wir nun folgende spektraltheoretischen Überlegungen:

Wir betrachten den Operator $\mathsf{C} := (\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi) = -\Pi\mathsf{T}^2\Pi : \mathcal{D}(\mathsf{C}) \to \mathcal{N}(\mathsf{L})$. Dieser ist wegen der Abgeschlossenheit von $\mathsf{T}\Pi$ nach Satz 3.1.12 selbstadjungiert, und weiters gilt $\mathcal{N}(\mathsf{C}) \supseteq \mathcal{N}(\mathsf{L})$. Aus **(H2)** folgt nun:

$$\langle \mathsf{C}f, f\rangle \geq \lambda_M\|\Pi f\|^2. \tag{4.30}$$

Da $\Pi$ als Orthogonalprojektion idempotent und selbstadjungiert ist, können wir dies umschreiben zu

$$\langle \mathsf{C}\Pi f, \Pi f\rangle \geq \|\Pi f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Nun definieren wir den Raum $\Pi\mathcal{H} := \{\Pi f : f \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H} \cap \mathcal{N}(\mathsf{L})$, der als abgeschlossener linearer Teilraum eines Hibertraumes wieder ein Hilbertraum ist. Da sich nun jede Funktion $f$ aus $\mathcal{H}$ eindeutig zerlegen lässt in $f = \Pi f + (f - \Pi f)$ mit $\Pi f \in \mathcal{N}(\mathsf{L})$ und $(1 - \Pi f) \in (\mathcal{N}(\mathsf{L}))^\perp$, lässt sich Gleichung (4.30) in unserem neuen Hilbertraum $\Pi\mathcal{H}$ anschreiben als:

$$\langle \mathsf{C}f, f\rangle \geq \lambda_M\|f\|^2 \quad \forall f \in \Pi\mathcal{H}. \tag{4.31}$$

Aus (4.31) folgt nun für das Spektrum $\sigma(\mathsf{C})$ des selbstadjungierten Operators $\mathsf{C}$:

$$\sigma(\mathsf{C}) \subseteq [\lambda_M, \infty). \tag{4.32}$$

Nun betrachten wir den Operator $\mathsf{B} := (I + \mathsf{C})^{-1}\mathsf{C}$. Dieser ist auch selbstadjungiert (siehe [21]), und sein Spektrum ist gegeben als das Bild vom Spektrum von $\mathsf{C}$ unter der Abbildung $z \mapsto \frac{z}{1+z}$. Dies ist eine Verallgemeinerung des Spektralabbildungssatzes für die spezielle Funktion $z \mapsto \frac{z}{z+1}$

[4] Ich möchte mich an dieser Stelle bei Prof. Mouhot für seinen Hinweis bezüglich des Spektralabbildungssatz für unbeschränkte Operatoren bedanken.

und den speziellen unbeschränkten selbstadjungierten Operator $\mathsf{B}$, wie er beispielsweise mit Hilfe von linearen Relationen für Möbiustransformationen (siehe [21]) gezeigt werden kann. Dieser Zusammenhang lässt sich auch durch den Vergleich der Resolventenmengen plausibel machen, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathsf{B} - \frac{z}{z+1} &= (I+\mathsf{C})^{-1}\mathsf{C} - z(1+z)^{-1}I \\
&= (I+\mathsf{C})^{-1}((z+1)I)^{-1}((z+1)I)\mathsf{C} - (I+\mathsf{C})^{-1}z(z+1)^{-1}I(I+\mathsf{C}) \\
&= (I+\mathsf{C}^{-1})[(z+1)I]^{-1}[(z+1)\mathsf{C} - z(I+\mathsf{C})] \\
&= (I+\mathsf{C})^{-1}[(z+1)I]^{-1}(\mathsf{C} - zI) \\
&= (I+\mathsf{C})^{-1}(z+1)^{-1}(\mathsf{C} - z),
\end{aligned}$$

und daraus lässt sich ablesen, dass $\mathsf{B} - \frac{z}{z+1}$ genau dann invertierbar ist, wenn $\mathsf{C} - z$ invertierbar ist, und folglich $\frac{z}{z+1}$ genau dann in der Resolventenmenge von $\mathsf{B}$ liegt, wenn $z$ in der Resolventenmenge von $\mathsf{C}$ liegt. Aus dieser Überlegung, der Monotonie der Abbildung $z \mapsto \frac{z}{1+z}$ und (4.32) folgt nun für das Spektrum von $\mathsf{B}$:

$$\sigma(\mathsf{B}) \subseteq \left[\frac{\lambda_M}{1+\lambda_M}, \infty\right). \tag{4.33}$$

Wegen der Selbstadjungiertheit des Operators $\mathsf{B}$ lässt sich aus (4.33) zeigen, dass gilt:

$$\langle \mathsf{B}f, f\rangle \geq \frac{\lambda_M}{1+\lambda_M}\|f\|^2 \quad \forall f \in \Pi\mathcal{H},$$

und wegen der speziellen Struktur von $\mathsf{B}$ erhalten wir damit insgesamt die Aussage:

$$\langle \mathsf{B}f, f\rangle = \langle \mathsf{AT}\Pi f, f\rangle \geq \frac{\lambda_M}{1+\lambda_M}\|\Pi f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Damit ergibt sich mit Hilfe von Pythagoras insgesamt der gewünschte Zusammenhang

$$-\langle \mathsf{L}f, f\rangle + \varepsilon\langle \mathsf{AT}\Pi f, f\rangle \geq \min\left\{\lambda_m, \frac{\varepsilon\lambda_M}{1+\lambda_M}\right\}\|f\|^2,$$

sodass wir eine Koerzivitätsabschätzung für die ersten beiden Terme unserer Entropiedissipation $\mathsf{D}$ gefunden haben. □

Als weitere Folgerung aus der Methode des makroskopischen Diffusionslimes aus Abschnitt 4.1.2 fordern wir

**Voraussetzung (H3):** Es gelte

$$\Pi\mathsf{T}\Pi = 0.$$

Als nächstes beweisen wir das folgende Lemma.

**Lemma 4.1.6.** *Es gelten die Voraussetzungen* **(H1)-(H3)**. *Dann sind die Operatoren* $\mathsf{A}$ *und* $\mathsf{TA}$ *beschränkt, und es gilt* $\|\mathsf{A}f\| \leq \frac{1}{2}\|(1-\Pi)f\|$ *und* $\|\mathsf{TA}f\| \leq \|(1-\Pi)f\|$.

*Beweis.* Wir betrachten die Gleichung

$$\mathsf{A}f = g \quad \text{mit} \quad \mathsf{A} = (1 + (\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi))^{-1}(\mathsf{T}\Pi)^*.$$

Äquivalenzumformungen liefern

$$\begin{aligned}(1+(\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi))^{-1}(\mathsf{T}\Pi)^*f &= g\\ (\mathsf{T}\Pi)^*f &= (1+(\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi)g\\ (\mathsf{T}\Pi)^*f &= g+(\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi)g.\end{aligned}$$

Jetzt nutzen wir die Schiefsymmetrie von $\mathsf{T}$ aus und erhalten

$$\begin{aligned}g &= (\mathsf{T}\Pi)^*f-(\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi)g\\ g &= \Pi\mathsf{T}^*f-\Pi\mathsf{T}^*\mathsf{T}\Pi g\\ g &= -\Pi\mathsf{T}f+\Pi\mathsf{T}^2\Pi g.\end{aligned}$$

Dies liefert durch Vertauschen der Reihenfolge der Terme

$$g=\Pi\mathsf{T}^2\Pi g-\Pi\mathsf{T}f. \tag{4.34}$$

Wegen Bemerkung 4.1.4 gilt nun die Beziehung $\mathsf{A}=\Pi\mathsf{A}$. Also folgt

$$\mathsf{T}\mathsf{A}f=\mathsf{T}\Pi\mathsf{A}f=\mathsf{T}\Pi g,$$

und daher ist

$$\mathsf{T}\mathsf{A}f=\mathsf{T}\Pi g. \tag{4.35}$$

Nun greifen wir auf (4.34) zurück und erhalten wegen der Selbstadjungiertheit von $\Pi$ und der Schiefsymmetrie von $\mathsf{T}$

$$\begin{aligned}\|g\|^2 &= \langle\Pi\mathsf{T}^2\Pi g,g\rangle-\langle\Pi\mathsf{T}f,g\rangle\\ &= \langle\mathsf{T}^2\Pi g,\Pi g\rangle-\langle\mathsf{T}f,\Pi g\rangle\\ &= -\langle\mathsf{T}\Pi g,\mathsf{T}\Pi g\rangle+\langle f,\mathsf{T}\Pi g\rangle.\end{aligned}$$

Wegen **(H3)** und der Young-Ungleichung gilt daher:

$$\begin{aligned}\|g\|^2+\|\mathsf{T}\Pi g\|^2 &= \langle f,\mathsf{T}\Pi g\rangle\\ &\overset{\Pi\mathsf{T}\Pi=0}{=} \langle f,\mathsf{T}\Pi g\rangle-\underbrace{\langle f,\Pi\mathsf{T}\Pi g\rangle}_{=0}\\ &= \langle f,\mathsf{T}\Pi g\rangle-\langle\Pi f,\mathsf{T}\Pi g\rangle\\ &= \langle(1-\Pi)f,\mathsf{T}\Pi g\rangle\\ &\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|(1-\Pi)f\|\|\mathsf{T}\Pi g\|\\ &\overset{\text{Young}}{\leq} \frac{1}{4}\|(1-\Pi)f\|^2+\|\mathsf{T}\Pi g\|^2.\end{aligned}$$

Aus der letzten Rechnung folgt nun durch Kürzen des Terms $\|\mathsf{T}\Pi g\|^2$:

$$\|g\|^2=\|\mathsf{A}f\|^2\leq\frac{1}{4}\|(1-\Pi)f\|^2$$

und daher wie behauptet

$$\|\mathsf{A}f\|\leq\frac{1}{2}\|(1-\Pi)f\|.$$

Wegen des Zwischenergebnisses $\|g\|^2 + \|\mathsf{T}\Pi g\| \leq \|(1-\Pi)f\|\|\mathsf{T}\Pi g\|$ in obiger Rechnung gilt insbesondere:

$$\|\mathsf{TA}f\|^2 \overset{(4.35)}{=} \|\mathsf{T}\Pi g\|^2 \leq \|(1-\Pi)f\|\|\mathsf{T}\Pi g\|,$$

und daher

$$\|\mathsf{TA}f\| = \|\mathsf{T}\Pi g\| \leq \|(1-\Pi)f\|.$$

□

Die Beschränktheit der restlichen Terme der Entropiedissipation $\mathsf{D}[f]$ muss in Abhängigkeit des jeweiligen Kollisionterms einzeln untersucht werden. Da es uns in diesem Abschnitt um die abstrakte Methode geht, fordern wir an dieser Stelle ihre Beschränktheit, und gehen in späteren Kapiteln noch näher auf das Problem ein, wobei wir die Beschränktheit von $\mathsf{AT}(1-\Pi)$ im Abschnitt 4.2 und die von $\mathsf{AL}$ in Abschnitt 4.3 behandeln werden.

**Voraussetzung (H4)** (Beschränktheit von Hilfsoperatoren)
Die Operatoren $\mathsf{AT}(1-\Pi)$ und $\mathsf{AL}$ seinen beschränkt, und es existiere eine Konstante $C_M > 0$, sodass für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\|\mathsf{AT}(1-\Pi)f\| + \|\mathsf{AL}f\| \leq C_M\|(1-\Pi)f\|.$$

Nun lässt sich in diesem abstrakten Rahmen folgender Satz zeigen, der das Endresultat unserer abstrakten Methode darstellt, und eine explizite Abschätzung für die exponentielle Konvergenzrate zum globalen Gleichgewicht liefert.

**Satz 4.1.7.** *Es gelten die Voraussetzungen* **(H1)-(H4)**. *Dann existieren positive Konstanten $\lambda$ und $C$, welche nur von $\lambda_m, \lambda_M$ und $C_M$ abhängen, sodass für jeden Anfangswert $f_I \in \mathcal{H}$ gilt:*

$$\|e^{t(\mathsf{L}-\mathsf{T})}f_I\| \leq Ce^{-\lambda t}\|f_I\|, \quad \forall t \geq 0. \tag{4.36}$$

*Beweis.* Wir führen den Beweis in mehreren Schritten.

**Behauptung 1:** Es gilt

$$\frac{1}{2}(1-\varepsilon)\|f\|^2 \leq \mathsf{H}[f] \leq \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\|f\|^2. \tag{4.37}$$

Das zweite Ungleichheitszeichen folgt aus Lemma 4.1.6 mit

$$\langle \mathsf{A}f, f\rangle \leq \|\mathsf{A}f\|\|f\| \leq \frac{1}{2}\|(1-\Pi)f\|\|f\| \leq \frac{1}{2}\|f\|^2,$$

und daher

$$\mathsf{H}[f] = \frac{1}{2}\|f\|^2 + \varepsilon\langle \mathsf{A}f, f\rangle \leq \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\|f\|^2.$$

Das erste Ungleichheitszeichen erhalten wir wieder aus Lemma 4.1.6 mit

$$-\langle \mathsf{A}f, f\rangle \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|\mathsf{A}f\|\|f\| \leq \frac{1}{2}\|f\|^2,$$

und daher

$$\mathsf{H}[f] \geq \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\|f\|^2.$$

Aus Behauptung 1 folgt nun, dass das modifizierte Entropiefunktional $\mathsf{H}[\cdot]$ für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ gewissermaßen eine zur Hilbertraumnorm $\|\cdot\|^2$ äquivalente Norm darstellt.

**Behauptung 2:** Für die Entropiedissipation $\mathsf{D}[f]$ gilt

$$\mathsf{D}[f] \geq \lambda_m \|(1-\Pi)f\|^2 + \frac{\varepsilon\lambda_M}{1+\lambda_M}\|\Pi f\|^2 - \varepsilon(1+C_M)\|(1-\Pi)f\|\|f\|. \tag{4.38}$$

Aus der 2. Ungleichung von Lemma 4.1.6 und aus **(H1-H4)** folgt nämlich

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}[f] &= -\langle \mathsf{L}f, f\rangle + \varepsilon\langle \mathsf{AT}\Pi f, f\rangle + \varepsilon\langle \mathsf{AT}(1-\Pi)f, f\rangle - \varepsilon\langle \mathsf{TA}f, f\rangle - \varepsilon\langle \mathsf{AL}f, f\rangle \\
&\geq \lambda_m\|(1-\Pi)f\|^2 + \varepsilon\frac{\lambda_M}{1+\lambda_M}\|\Pi f\|^2 - \varepsilon C_M\|(1-\Pi)f\|\|f\| - \varepsilon\|(1-\Pi)f\|\|f\| \\
&= \lambda_m\|(1-\Pi)f\|^2 + \frac{\varepsilon\lambda_M}{1+\lambda_M}\|\Pi f\|^2 - \varepsilon(1+C_M)\|(1-\Pi)f\|\|f\|.
\end{aligned}$$

**Behauptung 3:** Wir finden eine positive Konstante $\kappa \geq 0$, sodass $\mathsf{D}$ koerziv ist, dh:

$$\mathsf{D}[f] \geq \kappa\|f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathsf{D}) \cap \mathcal{N}(\mathsf{D})^\perp. \tag{4.39}$$

Aus (4.38) und der Young-Ungleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}[f] &\geq \lambda_m\|(1-\Pi)f\|^2 + \frac{\varepsilon\lambda_M}{1+\lambda_M}\|\Pi f\|^2 - \varepsilon(1+C_M)\|(1-\Pi)f\|\|f\| \\
&\geq \underbrace{\left(\lambda_m - \varepsilon(1+C_M)(1+\frac{1}{2\delta})\right)}_{=:C_{\delta,\varepsilon}}\|(1-\Pi)f\|^2 + \varepsilon\underbrace{\left(\frac{\lambda_M}{1+\lambda_M} - (1+C_M)\frac{\delta}{2}\right)}_{=:D_{\delta,\varepsilon}}\|\Pi f\|^2 \\
&\geq \underbrace{\min(C_{\delta,\varepsilon}, D_{\delta,\varepsilon})}_{=:G_{\delta,\varepsilon}}\left(\|(1-\Pi)f\|^2 + \|\Pi f\|^2\right) \\
&= G_{\delta,\varepsilon}\|f\|^2
\end{aligned}$$

Falls wir jetzt zuerst $\delta$ und anschließend $\varepsilon$ klein genug wählen, erhalten wir eine positive Konstante $\kappa$, sodass (4.39) gilt.

**Beweis des Satzes:**
Aus $\frac{d}{dt}\mathsf{H}[f] = -\mathsf{D}[f] \leq -\kappa\|f\|^2$ und der Äquivalenz der Normen (4.37) folgt nun

$$\frac{d}{dt}\mathsf{H}[f] \leq -\kappa\|f\|^2 \leq -\frac{2\kappa}{1+\varepsilon}\mathsf{H}[f],$$

und daher mit Hilfe des Lemmas von Gronwall

$$\mathsf{H}[f] \leq e^{-\frac{2\kappa}{1+\epsilon}t}\mathsf{H}[f_I]. \tag{4.40}$$

Jetzt verwenden wir nochmals die Äquivalenz der Normen (4.37), und erhalten

$$\begin{aligned}
\|f(t)\|^2 &\overset{(4.37)}{\leq} \frac{2}{1-\epsilon}\mathsf{H}[f(t)] \\
&\overset{(4.40)}{\leq} \frac{2}{1-\epsilon}e^{-\frac{2\kappa}{1+\epsilon}t}\mathsf{H}[f_I] \\
&\overset{(4.37)}{\leq} \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}e^{-\frac{2\kappa}{1+\epsilon}t}\|f_I\|^2.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\|f(t)\| \leq \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} e^{-\frac{\kappa}{1+\epsilon}t} \|f_I\|.$$

Daraus und aus dem Existenz-und Eindeutigkeitssatz des abstrakten Cauchy-Problems Satz 3.2.8 erhalten wir nun für $\lambda := \frac{\kappa}{(1+\epsilon)}$ und $C := \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}$ die gewünschte Abschätzung

$$\|e^{t(\mathsf{L}-\mathsf{T})} f_I\| = \|f(t)\|^2 \leq C e^{-\lambda t} \|f_I\| \quad \forall t \geq 0. \tag{4.41}$$

□

Wie man sieht ist das ein - ähnlich wie bei [22]- eher abstraktes Ergebnis, und daher wollen wir uns jetzt mit der Anwendbarkeit dieses Resultats beschäftigen. Es wird sich herausstellen, dass es sich auf verschiedene Fokker-Planck und Boltzmann-Modelle anwenden lässt.

### 4.1.4 Anwendung auf ein eindimensionales Cattaneo-Modell

Als nächstes wollen wir unsere abstrakte Methode auf ein einfaches spieltheoretisches Problem anwenden, um die Genauigkeit der aus Satz 4.1.7 bestimmten Konvergenzrate zu untersuchen.

Wir betrachte ein eindimensionales *Cattaneo-Modell*, wie es in [6] eigeführt wurde. Dieses kann als ein aus nur zwei diskreten Geschwindigkeitszuständen $v = \pm 1$ bestehendes kinetisches Modell interpretiert werden. Der Operator $\mathsf{L}$ beschreibt dabei das zufällige Hin- und Herwechseln zwischen diesen zwei Geschwindigkeitszuständen.

Wir betrachten folgende einfache Modellgleichungen:

$$\begin{cases} \partial_t f^+ + \partial_x f^+ &= \frac{1}{2}\left(f^- - f^+\right) \\ \partial_t f^- - \partial_x f^- &= -\frac{1}{2}\left(f^- - f^+\right). \end{cases} \tag{4.42}$$

Addieren bzw. subtrahieren wir die beiden Gleichungen miteinander, so erhalten wir:

$$\begin{cases} \partial_t (f^+ + f^-) + \partial_x (f^+ - f^-) = 0 \\ \partial_t (f^+ - f^-) + \partial_x (f^+ + f^-) = -(f^+ - f^-). \end{cases} \tag{4.43}$$

Führen wir nun neue Variable $\rho := f^+ + f^-$ und $\gamma := f^+ - f^-$ mit den Fourierreihendarstellungen

$$\rho(t,x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}} \rho_k(t) e^{ikx}, \gamma(t,x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}} \gamma_k(t) e^{ikx}$$

ein, so lässt sich (4.43) anschreiben als

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \gamma = 0 \\ \partial_t \gamma + \partial_x \rho = -\gamma, \end{cases} \tag{4.44}$$

und wir erhalten folgendes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\rho_k \\ \operatorname{Im}\rho_k \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{Im}\gamma_k \\ \operatorname{Re}\gamma_k \end{pmatrix} &= 0, \\ \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\gamma_k \\ \operatorname{Im}\gamma_k \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{Im}\rho_k \\ \operatorname{Re}\rho_k \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\gamma_k \\ \operatorname{Im}\gamma_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun definieren wir

$$U_k := \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\rho_k \\ \operatorname{Im}\gamma_k \end{pmatrix}; \quad \tilde{U}_k := \begin{pmatrix} \operatorname{Im}\rho_k \\ \operatorname{Re}\gamma_k \end{pmatrix},$$

und gelangen zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}U_k + \mathsf{T}_k U_k = \mathsf{L}U_k \quad \text{mit} \quad \mathsf{T}_k := \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{L} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

und der analog definierten Gleichung

$$\frac{d}{dt}\tilde{U}_k - \mathsf{T}_k \tilde{U}_k = \mathsf{L}\tilde{U}_k. \tag{4.46}$$

Die schiefsymmetrischen Matrix $\mathsf{T}_k$ dient als Transportoperator und die symmetrische Matrix $\mathsf{L}$ als Kollisionsoperator. Wir führen die Rechnungen für $U_k$ aus, die Rechnungen für $\tilde{U}_k$ gehen dann analog.

Als erstes berechnen wir die Eigenwerte der Matrix

$$\mathsf{L} - \mathsf{T}_k = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Hierbei unterscheiden wir die Fälle $k \neq 0$ und $k = 0$. Der Fall $k \neq 0$ ergibt das charakteristische Polynom $\lambda_k^2 + \lambda_k + k^2 = 0$, und wir erhalten somit die Eigenwerte $\lambda_k^{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{4k^2-1}}{2}$. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind $U_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle $k > 0$.

Im Fall $k = 0$ erhalten wir das charakteristische Polynom $\lambda_k(1 + \lambda_k) = 0$, welches uns auf die Eigenwerte $\lambda_0^1 = 0,\ \lambda_0^2 = -1$ führt. Die zugehörige Eigenfunktion ist in diesem Fall $U_0 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} \rho_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei span die lineare Hülle bezeichnet. Da (4.45) eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und $\max(\operatorname{Re}(\lambda_k^1), \operatorname{Re}(\lambda_k^2)) < 0$ ist, folgt nun aus der Stabilitätstheorie für autonome gewöhnliche Differentialgleichungen, dass der Gleichgewichtspunkt $U_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ asymptotisch stabil ist und die Lösung exponentiell schnell gegen 0 mit Konvergenzrate $\frac{1}{2}$ konvergiert .

Als nächstes berechnen wir für $k \neq 0$ die Entropiedissipation.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|U_k(t)|^2\right) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u_k(t)^2 + v_k(t)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2u_k(t)\frac{d}{dt}u_k(t) + 2v_k(t)\frac{d}{dt}v_k(t)\right) \\ &\overset{(4.45)}{=} ku_k(t)\cdot v_k(t) + v_k(t)\left(-v_k(t) - ku_k(t)\right) \\ &= -|v_k(t)|^2. \end{aligned}$$

Nun ist der Ausdruck $-|v_k(t)|^2$ nicht koerziv, d.h. es existiert kein $\kappa > 0$, sodass gilt: $|v_k(t)|^2 \geq \kappa|U_k(t)|^2$ für alle $U_k(t) = \begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix}$, denn für jedes $\kappa > 0$ gibt es eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $t_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \mathbb{N}$, sodass $v_k(t_n) \to 0$ und $u_k(t_n) \to \infty$ für $t_n \to \infty$. Da die rechte Seite also nicht koerziv ist, lässt sich exponentieller Abklang nicht direkt mit dem Lemma von Gronwall folgern. Es ist jedoch möglich, unsere abstrakte Methode anzuwenden.

**Lemma 4.1.8.** *Die gewöhnliche Differentialgleichung* (4.45) *ist mikroskopisch koerziv und es gilt* $\lambda_m = 1$.

*Beweis.* Wir müssen nachrechnen, dass für alle $U := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ gilt:

$$-\langle \mathsf{L}U, U\rangle \geq \|(1-\Pi)U\|^2.$$

Wegen $\mathsf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist $\mathrm{ran}(\Pi) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Daher gilt für alle $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ :

$$-\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle = v^2 \geq 1 \cdot v^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|^2.$$

□

**Lemma 4.1.9.** *Wir betrachten wieder das System* (4.45)*. Dann gilt:*

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{J} = -\mathrm{Id}, \quad \text{und daher} \quad (\mathsf{T}\Pi)^* \mathsf{J} (\mathsf{T}\Pi) = \begin{pmatrix} -k^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.47}$$

*Beweis.* Da $\Pi$ die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{N}(\mathsf{L})$ ist, hat $\Pi$ die Gestalt $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Der Operator $\mathsf{J}$ ist definiert als $\mathsf{J} := \left(\mathsf{L}\big|_{\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp}\right)^{-1}$. Nun gilt:

$$\mathsf{J} := \left(\mathsf{L}\big|_{\mathcal{N}(\mathsf{L})^\perp}\right)^{-1} = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Big|_{\mathrm{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)^{-1} = \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Big|_{\mathrm{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)^{-1} = -\mathrm{Id}. \tag{4.48}$$

Da die Adjungierte einer reellen $2\times 2$-Matrix gleich der Transponierten ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_k^* &= \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und daher gilt} \\ (\mathsf{T}_k\Pi)^* \mathsf{J} (\mathsf{T}_k\Pi) &= \Pi \mathsf{T}_k^* \mathsf{J} \mathsf{T}_k \Pi \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -k^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.1.10.** *Der makroskopische Diffusionslimes für das System* (4.45) *hat die Gestalt*

$$\frac{du_k^0}{dt} = -k^2 u_k^0,$$

*und daher gilt auch makroskopische Koerzivität mit* $\lambda_M = 1$.

*Beweis.* Dies folgt direkt aus (4.19), denn setzen wir mit Hilfe von Lemma 4.1.9 in (4.19) ein, so erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}u_k^0 = \begin{pmatrix} -k^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k^0 \\ v_k^0 \end{pmatrix} = -k^2 u_k^0. \tag{4.49}$$

Für den Nachweis der makroskopischen Koerzivität müssen wir zeigen, dass $\|\mathsf{T\Pi U}_k\|^2 \geq \|\mathsf{\Pi U}_k\|^2$ für alle $\mathsf{U}_k$ gilt. Einsetzen liefert für alle $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$:

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|^2 = k^2 u^2 \geq u^2 = 1 \cdot \left\| \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \quad \forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2.$$

Dies liefert das Gewünschte. □

**Folgerung:** Das System (4.45) ist sowohl mikroskopisch als auch makroskopisch koerziv mit $\lambda_m = \lambda_M = 1$, und wir können daher unsere in Abschnitt 4.1.3 entwickelte abstrakte Methode weiterverfolgen.

Wir betrachten daher das in Abschnitt 4.1.3 eingeführte modifizierte Entropiefunktional

$$\mathsf{H}[f] = \frac{1}{2}\|f\|^2 + \epsilon\langle \mathsf{A}f, f\rangle \quad \text{mit} \quad \mathsf{A} = \left(1 + (\mathsf{T\Pi})^*(\mathsf{T\Pi})\right)^{-1} (\mathsf{T\Pi})^*.$$

Einsetzen ergibt

$$\left(1 + (\mathsf{T\Pi})^*(\mathsf{T\Pi})\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+k^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\left(1 + (\mathsf{T\Pi})^*(\mathsf{T\Pi})\right)^{-1} (\mathsf{T\Pi})^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+k^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{1+k^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\mathsf{A} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \left(1 + (\mathsf{T\Pi})^*(\mathsf{T\Pi})\right)^{-1} (\mathsf{T\Pi})^* \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{1+k^2} v_k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert mit $U_k(t) = \begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix}$

$$\mathsf{H}_k(t) = \frac{1}{2}|U_k(t)|^2 + \epsilon \frac{k}{1+k^2} u_k(t) v_k(t) \quad \forall t \geq 0. \tag{4.50}$$

**Lemma 4.1.11.** *Mit der Notation von oben gilt für alle $k \geq 0$:*

$$\frac{1}{2}(1-\epsilon)|U_k|^2 \leq \mathsf{H}_k \leq \frac{1}{2}(1+\epsilon)|U_k|^2. \tag{4.51}$$

Folglich gilt für jedes $\epsilon > 0$ : Falls das modifizierte Entropiefunktional $\mathsf{H}_k$ exponentiellen Abklang hat, so hat auch $U_k$ exponentiellen Abklang.

*Beweis.* Der Ausdruck $\mathsf{H}_k$ lässt sich einerseits anschreiben als

$$\mathsf{H}_k = \frac{1}{2}\left(1 - \epsilon\frac{k}{1+k^2}\right)|\mathsf{U}_k|^2 + \frac{\epsilon}{2}\frac{k}{1+k^2}|u_k + v_k|^2 \tag{4.52}$$

und andererseits als

$$\mathsf{H}_k = \frac{1}{2}\left(1 + \epsilon\frac{k}{1+k^2}\right)|\mathsf{U}_k|^2 - \frac{\epsilon}{2}\frac{k}{1+k^2}|u_k - v_k|^2, \tag{4.53}$$

da

$$|u_k + v_k|^2 = |u_k|^2 + 2u_k v_k + |v_k|^2 = |U_k|^2 + 2u_k v_k,$$

und

$$|u_k - v_k|^2 = |u_k|^2 - 2u_k v_k + |v_k|^2 = |U_k|^2 - 2u_k v_k.$$

Aus (4.52) und (4.53) folgt dann

$$\frac{1}{2}\left(1 - \epsilon\frac{k}{1+k^2}\right)|U_k|^2 \leq \mathsf{H}_k \leq \frac{1}{2}\left(1 + \epsilon\frac{k}{1+k^2}\right)|U_k|^2. \tag{4.54}$$

Der Ausdrucks $\frac{k}{1+k^2}$ hat für $k = 1$ den Wert $\frac{1}{2}$ und konvergiert für $k \to \infty$ monoton gegen 0. Daher erhalten wir $\sup\limits_{k\geq 1} \dfrac{k}{1+k^2} = \dfrac{1}{2} \leq 1$, und die linke Seite der Ungleichung (4.54) wird nur noch kleiner, wenn wir den Ausdruck $\frac{k}{1+k^2}$ mit 1 abschätzen. Für die rechte Seite führen wir eine ähnlichen Überlegung durch:

Für $k \leq -1$ hat der Ausdruck $\frac{k}{1+k^2}$ den Wert $-1$ und strebt für $k \to -\infty$ monoton gegen 0. Es gilt daher $\inf\limits_{k\leq -1} \dfrac{k}{1+k^2} = -\dfrac{1}{2} < 1$. Daher wir die rechte Seite der Ungleichung (4.54) nur größer, wenn wir den Ausdruck $\frac{k}{1+k^2}$ mit 1 abschätzen.

Somit erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{2}(1-\epsilon)|U_k|^2 \leq \frac{1}{2}(1+\epsilon)|U_k|^2.$$

□

**Lemma 4.1.12.** *Es existiert ein $\kappa > 0$ mit*

$$\frac{d}{dt}\mathsf{H}_k \leq -\frac{2\kappa}{1+\epsilon}\mathsf{H}_k.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\frac{1}{2} \leq \frac{k^2}{1+k^2} \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \tag{4.55}$$

da $\frac{1}{2} \leq \frac{k^2}{1+k^2} \leq 1$ für $k = \pm 1$ den Wert $\frac{1}{2}$ hat und für $k \to \pm\infty$ gegen 1 konvergiert. Dies können wir nun verwenden, um die gewünschte Beziehung zwischen $H_k$ und $\frac{d}{dt}H_k$ herzuleiten:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H_k &\overset{(4.50)}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(u_k^2 + v_k^2) + \epsilon\frac{k}{1+k^2}u_k(t)v_k(t)\right) \\
&= u_k\frac{d}{dt}u_k + v_k\frac{d}{dt}v_k + \epsilon\frac{k}{1+k^2}\left(u_k\frac{d}{dt}v_k + \frac{d}{dt}u_k v_k\right) \\
&\overset{(4.45)}{=} ku_k v_k + v_k(-v_k - ku_k) + \epsilon\frac{k}{1+k^2}\left(u_k(-v_k - ku_k) + kv_k v_k\right) \\
&= \left(\epsilon\frac{k^2}{1+k^2} - 1\right)v_k^2 - \epsilon\frac{k^2}{1+k^2}u_k^2 - \epsilon\frac{k}{1+k^2}u_k v_k \\
&= -\epsilon\frac{k^2}{1+k^2}u_k^2 - \left(1 - \epsilon\frac{k^2}{1+k^2}\right)v_k^2 - \epsilon\frac{k}{1+k^2}u_k v_k \\
&\overset{(4.55)}{\leq} -\frac{\epsilon}{2}u_k^2 - (1-\epsilon)v_k^2 + \frac{\epsilon}{2}|u_k||v_k| \\
&\overset{\text{Young mit}\delta=2\lambda^2}{\leq} -\frac{\epsilon}{2}(1-\lambda^2)u_k^2 - (1 - \epsilon - \frac{\epsilon}{8\lambda^2})v_k^2 \quad \forall\lambda \in (0,1).
\end{aligned}$$

Hierbei gilt $\frac{\epsilon}{2}(1-\lambda^2)u_k^2 > 0$ für alle $\lambda \in (0,1)$ und $\epsilon > 0$, und für den Ausdruck $1-\epsilon-\frac{\epsilon}{8\lambda^2}$ gilt:

$$1-\epsilon-\frac{\epsilon}{8\lambda^2} > 0 \text{ genau dann, wenn } \epsilon < \frac{8\lambda^2}{8\lambda^2+1}.$$

Daher folgt, dass die Konstante $\kappa := \min\left(\frac{\epsilon}{2}(1-\lambda^2)u_k^2, 1-\epsilon-\frac{\epsilon}{8\lambda^2}\right)$ für alle $\epsilon \in (0, \frac{8\lambda^2}{8\lambda^2+1})$ echt größer Null ist.

Es folgt nun

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathsf{H}_k &\leq -\frac{\epsilon}{2}(1-\lambda^2)u_k^2 - (1-\epsilon-\frac{\epsilon}{8\lambda^2})v_k^2 \\
&\leq -\kappa(u_k^2+v_k^2) \\
&= -\kappa|U_k|^2 \\
&\overset{(4.51)}{\leq} -\frac{2\kappa}{1+\epsilon}\mathsf{H}_k
\end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\mathsf{H}_k(t) \leq e^{-\frac{2\kappa}{1+\epsilon}t}\mathsf{H}[0],$$

und mit Hilfe von (4.51) gilt:

$$|U_k(t)| \leq \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}e^{-\frac{\kappa}{1+\epsilon}t}|U_k[0]|.$$

□

Daraus folgt, dass die Funktion $|U_k|$ exponentiell schnell abklingt mit Konvergenzrate $\frac{\kappa}{1+\epsilon}$.

Nun interessieren wir uns dafür, ob diese Methode auch die optimale Konvergenzrate liefert. Leider ist dies nicht der Fall, denn wie anfangs erwähnt ist die optimale Konvergenzrate $\frac{1}{2}$. Nun gilt aber mit $\lambda = 0$:

$$\frac{\kappa}{1+\epsilon} < \frac{\min\{\frac{\epsilon}{2}, 1-\epsilon\}}{1-\epsilon} \leq \frac{1}{5} < \frac{1}{2},$$

denn der mittlere Ausdruck hat folgende Gestalt:

$$f(\epsilon) := \frac{\min\{\frac{\epsilon}{2}, 1-\epsilon\}}{1-\epsilon} = \begin{cases} \frac{\frac{\epsilon}{2}}{1+\epsilon}, & \text{für alle } 0 \leq \epsilon \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}, & \text{für alle } \frac{2}{3} \leq \epsilon, \end{cases}$$

wobei $f$ für alle $\epsilon$ aus dem Intervall $(0, \frac{2}{3})$ monoton steigend ist und für $\epsilon \geq \frac{2}{3}$ monoton fallend, mit dem Maximum $f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{5}$. Also ist $e^{-\frac{\kappa}{1+\epsilon}t} > e^{-\frac{1}{5}t} > e^{-\frac{1}{2}t}$, und man sieht, dass die optimale Abklingrate $\frac{1}{2}$ nicht erreicht wird.

### 4.1.5 Anwendung auf lineare kinetische Gleichungen

Wir wollen nun die abstrakte Methode aus Abschnitt (4.1.3) auf kinetische Gleichungen der Form (4.1) anwenden. Der Transportoperator $\mathsf{T}$ war definiert als

$$\mathsf{T}f = v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V \cdot \nabla_v f.$$

Der Kern von $\mathsf{L}$ (notiert als $\mathcal{N}(\mathsf{L})$) war gegeben als

$$\mathcal{N}(\mathsf{L}) = \{f(x,v) \in L^2(d\mu) : \exists \phi(x) \text{ sodass } f(x,v) = \phi(x)F(x,v)\}$$

und die Orthogonalprojektion von $f$ auf $\mathcal{N}(\mathsf{L})$ als

$$\Pi f = \rho_f \frac{F}{\rho_F}, \quad \text{mit} \quad \rho_f = \int_{\mathbb{R}^d} f dv.$$

Man sieht, dass $\dim(\mathcal{N}(\mathsf{L})) = 1$ ist und $\Pi$ tatsächlich auf einen von $F(x,v)$ aufgespannten, $x$-abhängigen eindimensionalen Unterraum projiziert. Das eindeutige globale Gleichgewicht $F(x,v)$ war gegeben durch

$$F(x,v) = \Gamma\left(\frac{|v|^2}{2} + V(x)\right), \quad (x,v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d.$$

Für $F$ definieren wir nun die Geschwindigkeitsmomente bis zur vierten Ordnung

$$\rho_F := \int_{\mathbb{R}^d} F dv, \quad m_F := \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 F dv, \quad M_F := \int_{\mathbb{R}^d} |v|^4 F dv,$$

wobei das erste Moment verschwindet. Dabei fordern wir, dass sie messbare Funktionen in der Ortsvariable $x$ sind. Nun betrachten wir den Raum

$$\mathcal{H} := \left\{ f \in L^2(d\mu) : \int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f dv dx = 0 \right\} \quad \text{mit} \quad d\mu(x,v) = \frac{dxdv}{F(x,v)}, \tag{4.56}$$

der als abgeschlossener Teilraum eines Hilbertraum wieder ein Hilbertraum ist und aus Schwankungen um Null besteht. In weiterer Folge führen wir folgende gewichtete Normen ein:

$$\|u\|^2_{L^2(\rho_F dx)} := \int_{\mathbb{R}^d} u^2 \rho_F dx,$$

$$\|\nabla_x u\|^2_{L^2(m_F dx)} := \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 m_F dx,$$

$$\|\nabla_x^2 u\|^2_{L^2(M_F dx)} := \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla_x^2 u\|^2 M_F dx,$$

wobei wir den Ausdruck $\|\nabla_x^2 u\|^2 := \sum_{i,j=1}^{d} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2$ als die Frobeniusnorm der Hesse-Matrix definieren. Da wir die konkrete Gestalt des Kollisionsperators $\mathsf{L}$ erst im Abschnitt (4.3) näher bestimmen werden, verschieben wir die Erörterung der mikroskopischen Koerzivität **(H1)** auf später.

Indem wir $u = \frac{\rho_f}{\rho_F}$ setzen erhalten wir, dass die makroskopische Koerzivitätsbedingung **(H2)** äquivalent zu einer gewichteten Poincaré-Ungleichung ist, wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 4.1.13.** *Die makroskopische Koerzivitätsbedingung* **(H2)** *gilt genau dann, wenn für jedes* $u \in L^2(\rho_F dx)$ *mit* $\nabla_x u \in L^2(m_F dx)$ *und* $\int_{\mathbb{R}^d} u \rho_F dx = 0$ *gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 m_F dx \geq \lambda_M \int_{\mathbb{R}^d} u^2 \rho_F dx. \tag{4.57}$$

*Beweis.* Die Bedingungen $u \in L^2(\rho_F dx)$ und $\nabla_x u \in L^2(m_F dx)$ benötigen wir, damit die linke und rechte Seite von (4.57) endlich ist. Weiteres ist die Bedingung $\int_{\mathbb{R}^d} u\rho_F dx = 0$ zu $\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f dv dx = 0$ äquivalent, was eine Forderung an unseren Hilbertraum $\mathcal{H}$ in (4.56) war.

Wir rechnen zunächst nach, dass

$$\mathsf{T}\Pi f = Fv \cdot \nabla_x u_f. \tag{4.58}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathsf{T}\Pi f &= v\cdot\nabla_x(uF) - \nabla_x V\cdot\nabla_v(uF)\\ &= v\cdot((\nabla_x u)F + u\nabla_x F) - \nabla_x V\cdot(\underbrace{(\nabla_v u)}_{=0}F + (\nabla_v F)u).\end{aligned}$$

Da nun $u$ unabhängig von $v$ ist, folgt

$$\begin{aligned}\mathsf{T}\Pi f &= v\cdot(\nabla_x u)F + v\cdot(\nabla_x F)u - \nabla_x V\cdot(\nabla_v F)u\\ &= v\cdot(\nabla_x u)F + u\mathsf{T}F,\end{aligned}$$

und da $F$ in $\mathcal{N}(\mathsf{L})\cap\mathcal{N}(\mathsf{T})$ liegt, ist $u\mathsf{T}F = 0$, und damit gilt tatsächlich (4.58).

$$\mathsf{T}\Pi f = Fv\cdot\nabla_x u$$

Für die rechten Seiten von (4.57) erhalten wir:

$$\begin{aligned}\lambda_M\int_{\mathbb{R}^d} u^2\rho_F dx &\overset{\text{Fubini}}{=} \lambda_M\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} u^2 F dx dv\\ &= \lambda_M\|uF\|^2\\ &= \lambda_M\|\Pi f\|^2.\end{aligned}$$

Die linke Seite von (4.57) lässt sich folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla_x u|^2 m_F dx &= \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla_x u|^2|v|^2 F dv dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}|\nabla_x u\cdot v|^2 F dv dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}|\nabla_x u\cdot vF|^2\frac{dxdv}{F}\\ &= \|\mathsf{T}\Pi f\|^2.\end{aligned}$$

Dabei gilt das zweite Gleichheitszeichen wegen der Beziehung

$$d\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla_x u\cdot vF|^2\frac{dxdv}{F} = \int_{\mathbb{R}^d}|\nabla_x u|^2|v|^2 F dv dx,$$

und das letzte wegen der Rechnung in (4.58). und damit erhalten wir die gewünschte Äquivalenz von (4.57) und **(H2)**. □

**Lemma 4.1.14.** *Für die Lösung $f$ von Gleichung* (4.1) *gilt*

$$\Pi\mathsf{T}\Pi f = 0.$$

*Damit ist Voraussetzung **(H3)** für kinetische Gleichungen immer erfüllt.*

*Beweis.* Die Funktion $F(x,v) = \Gamma(E(x,v))$ ist wegen $E(x,v) = \frac{1}{2}|v|^2 + V(x)$ eine gerade Funktion in $v$, und daher ist $v \mapsto Fv \cdot \nabla_x u_f$ ungerade, sodass das Integral über den Geschwindigkeitsraum verschwindet. Wegen (4.58) gilt nun

$$\Pi\mathsf{T}\Pi f = \frac{\rho_{\mathsf{T}\Pi f}}{\rho_F} F \overset{(4.58)}{=} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} Fv \cdot \nabla_x u_f dv}{\rho_F} F = 0, \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Pi\mathsf{T}\Pi).$$

□

Als nächstes widmen wir uns der Voraussetzung **(H4)**. Um die Beschränktheit von $\mathsf{AL}$ kümmern wir uns später im Abschnitt 4.3, wo wir den Operator $\mathsf{L}$ näher spezifizieren werden. Am Beispiel des Fokker-Planck Operators werden wir dort sehen, dass $\mathsf{AL}$ auch dann beschränkt sein kann, wenn der Operator $\mathsf{L}$ unbeschränkt ist.

Nun zur Beschränktheit des Operators $\mathsf{AT}(1-\Pi)$, die wir mit einer speziellen Technik zeigen wollen. Hierzu formulieren wir die Beschränktheitsaussage für den Ausdruck $\mathsf{AT}(1-\Pi)$ in eine Regularitätsaussage für eine elliptische Differentialgleichung um, wobei die elliptische Differentialgleichung folgende Gestalt hat:

$$u - \frac{1}{\rho_F} \nabla_x \cdot (m_F \nabla_x u) = w. \tag{4.59}$$

Dazu benötigen wir folgendes Lemma:

**Lemma 4.1.15.** *Falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass*

$$\|\nabla_x^2 u\|_{L^2(M_F dx)} \leq C \|w\|_{L^2(\rho_F dx)} \tag{4.60}$$

*für alle $w \in L^2(\rho_F dx)$ und für jede Lösung $u \in L^2(\rho_F dx)$ mit $\nabla_x u \in L^2(m_F dx)$, dann ist der Operator $\mathsf{AT}(1-\Pi)$ beschränkt.*

*Beweis.* Zuerst zeigen wir folgende Behauptung.
**Behauptung:** Ein linearer Operator $\mathsf{B} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist genau dann beschränkt, wenn sein adjungierter Operator beschränkt ist.
*Beweis:* Es gilt für alle $v, w \in \mathcal{H}$ mit Hilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\mathsf{B}^* v\| &= \sup_{\|w\|=1} \langle \mathsf{B}^* v, w \rangle = \sup_{\|w\|=1} \langle v, \mathsf{B}w \rangle \leq \|v\| \sup_{\|w\|=1} \|\mathsf{B}w\| = \|v\| \|\mathsf{B}\| \\ &\text{und damit} \quad \|\mathsf{B}^*\| \leq \|\mathsf{B}\|. \end{aligned}$$

Analog zeigen wir $\|\mathsf{B}\| \leq \|\mathsf{B}^*\|$, was insgesamt $\|\mathsf{B}\| = \|\mathsf{B}^*\|$ liefert.

*Beweis der Satzes*
Also benügt es statt der Beschränktheit des Operators $\mathsf{AT}(1-\Pi)$ die Beschränktheit des adjungierten Operators $[\mathsf{AT}(1-\Pi)]^*$ zu zeigen. Nun gilt wegen der Schiefsymmetrie von $\mathsf{T}$:

$$[\mathsf{AT}(1-\Pi)]^* = -(1-\Pi)\mathsf{T}^2\Pi[1 + (\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi)]^{-1}.$$

Setzen wir $g = [1 + (\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi)]^{-1} f$, so folgt durch Einsetzen

$$[\mathsf{AT}(1-\Pi)]^* f = -(1-\Pi)\mathsf{T}^2\Pi g \quad \text{mit}$$

$$g + (\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi)g = f. \tag{4.61}$$

Aus Gleichung (4.61) folgt nun die elliptische Differentialgleichung (4.59). Dazu setzen wir

$$u = u_g = \frac{\rho_g}{\rho_F} \quad \text{und} \quad w = u_f = \frac{\rho_f}{\rho_F}. \tag{4.62}$$

Zunächst integrieren wir Gleichung (4.61) über $v$, multiplizieren mit dem Faktor $\frac{1}{\rho_F}$ und erhalten unter Berücksichtigung von (4.62):

$$u + \frac{1}{\rho_F} \int_{\mathbb{R}^d} (\mathsf{T}\Pi)^* (\mathsf{T}\Pi) g dv = w.$$

Um auf die elliptische Differentialgleichung zu kommen, müssen wir zeigen, dass

$$\frac{1}{\rho_F} \int_{\mathbb{R}^d} (\mathsf{T}\Pi)^* (\mathsf{T}\Pi) g dv = -\frac{1}{\rho_F} \nabla_x \cdot (m_F \nabla_x u).$$

Wir nützen wieder die Schiefsymmetrie des Operators $\mathsf{T}$ aus und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathsf{T}\Pi)^* (\mathsf{T}\Pi) g dv \quad = \quad - \int_{\mathbb{R}^d} \Pi \mathsf{T}^2 \Pi g dv. \tag{4.63}$$

Nun gilt für den Integranden auf der rechten Seite von (4.63):

$$\Pi \mathsf{T}(\mathsf{T}\Pi g) = \frac{F}{\rho_F} \rho_{\mathsf{T}(\mathsf{T}\Pi g)}.$$

Der Ausdruck $\rho_{\mathsf{T}(\mathsf{T}\Pi g)}$ lässt sich wegen (4.58) weiter anschreiben als:

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathsf{T}(\mathsf{T}\Pi g)} &= \int_{\mathbb{R}^d} v \cdot \nabla_x (Fv \cdot \nabla_x u) - \nabla_x V \cdot \nabla_v (Fv \cdot \nabla_x u) dv \\
&= \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^d} v (Fv \cdot \nabla_x u) dv - \nabla_x V \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_v (Fv \cdot \nabla_x u) dv}_{=0} \\
&= \nabla_x \cdot \frac{1}{d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 F dv \nabla_x u \right) \\
&= \nabla_x \cdot (m_F \nabla_x u),
\end{aligned}$$

und daraus folgt nun

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^d} \Pi \mathsf{T}(\mathsf{T}\Pi g) dv &= -\frac{1}{\rho_F} \int_{\mathbb{R}^d} F dv \rho_{\mathsf{T}(\mathsf{T}\Pi g)} && (4.64) \\
&= -\nabla_x \cdot (m_F \nabla_x u). && (4.65)
\end{aligned}$$

Wir erhalten damit die gewünschte elliptische Differentialgleichung (4.59).

Nun zeigen wir, dass sich der Ausdruck $\mathsf{T}^2 \Pi g$ auch schreiben lässt als

$$\mathsf{T}^2 \Pi g = Fv \cdot \nabla_x (v \cdot \nabla_x u) - F \nabla_x V \cdot \nabla_x u. \tag{4.66}$$

Dies sieht man durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}^2 \Pi g &= \mathsf{T}(\mathsf{T}\Pi g) \\
&= v \cdot \nabla_x (Fv \cdot \nabla_x u) - \nabla_x V \cdot \nabla_v (Fv \cdot \nabla_x u) \\
&= v \cdot \nabla_x F (v \cdot \nabla_x u) + Fv \cdot \nabla_x (v \cdot \nabla_x u) - \nabla_x V \cdot \nabla_v F (v \cdot \nabla_x u) - F \nabla_x V \cdot \nabla_x u \\
&= Fv \cdot \nabla_x (v \cdot \nabla_x u) - F \nabla_x V \cdot \nabla_x u,
\end{aligned}$$

da das globale Gleichgewicht $F$ im $\mathcal{N}(\mathsf{T})$ liegt und daher gilt:

$$v \cdot \nabla_x F(v \cdot \nabla_x u) - \nabla_x V \cdot \nabla_v F(v \cdot \nabla_x u) = \mathsf{T} F(v \cdot \nabla_x u) = 0.$$

Also gilt tatsächlich (4.66), und wegen $F \nabla_x V \cdot \nabla_x u \in \mathcal{N}(\mathsf{L})$ gilt

$$\begin{aligned}
[\mathsf{AT}(1-\Pi)]^* f &= -(1-\Pi)\mathsf{T}^2 \Pi g \\
&\overset{(4.66)}{=} -(1-\Pi)\left(Fv \cdot \nabla_x (v \cdot \nabla_x u) - F \nabla_x V \cdot \nabla_x u\right) \\
&= -(1-\Pi)\left(Fv \cdot \nabla_x (v \cdot \nabla_x u)\right),
\end{aligned}$$

Daher lässt sich der Ausdruck $[\mathsf{AT}(1-\Pi)]^* f$ mit einer Konstanten $C > 0$ folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
\|[\mathsf{AT}(1-\Pi)]^* f\|^2 &\leq \|Fv \cdot \nabla_x (v \cdot \nabla_x u)\|^2 \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \left(v \cdot \nabla_x (v \cdot \nabla_x u)\right)^2 F dv dx \\
&\leq C \int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (\partial_{ij} u)^2 |v|^4 F dv dx \\
&= C \|\nabla_x^2 u\|^2_{L^2(M_F dx)}.
\end{aligned}$$

Nun wenden wir die Voraussetzung (4.60) unseres Satzes an und erhalten

$$\begin{aligned}
\|[\mathsf{AT}(1-\Pi)]^* f\|^2 &\leq C \|\nabla_x^2 u\|^2_{L^2(M_F dx)} \\
&\leq \tilde{C} \|w\|^2_{L^2(\rho_F dx)} \\
&= \tilde{C} \|u_f\|^2_{L^2(\rho_F dx)} \\
&= \tilde{C} \int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \left(\frac{\rho_f}{\rho_F} F\right)^2 \frac{dv dx}{F} \\
&= \tilde{C} \|\Pi f\|^2 \\
&\leq \tilde{C} \|f\|^2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass der Operator $[\mathsf{AT}(1-\Pi)]^*$ beschränkt ist, und mit der Überlegung von oben ist auch der adjungierte Operator $\mathsf{AT}(1-\Pi)$ beschränkt. □

## 4.2 Regularität eines elliptischen Problems

### 4.2.1 Zielsetzung

Im letzten Abschnitt haben wir gezeigt, wie sich die abstrakten Bedingungen **(H2), (H3)** und **(H4)** auf kinetische Gleichungen (4.1) anwenden lassen. Für Lemma 4.1.15 hatten wir dabei zusätzlich Voraussetzung (4.60) gebraucht:

$$\|\nabla_x^2 u\|_{L^2(M_F dx)} \leq C \|w\|_{L^2(\rho_F dx)}.$$

Ziel dieses Abschnittes wird es sein, Bedingungen an das äußere Potential $V$ herzuleiten die sicherstellen, dass Voraussetzung (4.60) aus Lemma 4.1.15 erfüllt ist. Im Abschnitt 4.3 wird die Kombination der Geschwindigkeitsmomente $\dfrac{M_F \rho_F}{m_F^2}$ konstant sein, was die Einführung folgender gewichteter Räume motiviert

$$\|u\|_i := \|u w_i\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad \text{mit} \quad w_0^2 := \rho_F, \quad w_i^2 := \left(\frac{m_F}{\rho_F}\right)^i w_0^2 \text{ für } i = 1, 2.$$

Insbesondere gilt

$$w_0^2 = \rho_F, \quad w_1^2 = m_F, \quad w_2^2 = \frac{m_F^2}{\rho_F} = M_F \cdot const. \tag{4.67}$$

Setzen wir nun $\rho = u\rho_F$, so kann die Poincaré-Ungleichung für **(H2)** in Lemma 4.1.13 unter der Bedingung $\int_{\mathbb{R}^d} u\rho_F = 0$ geschrieben werden als

$$\|\nabla_x u\|_1^2 \geq \lambda_M \|u\|_0^2, \tag{4.68}$$

denn

$$\|\nabla_x u\|_1^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 w_1^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 m_F dx \overset{(4.57)}{\geq} \lambda_M \int_{\mathbb{R}^d} u^2 \rho_F dx = \lambda_M \|u\|_0^2.$$

Dadurch erhalten wir folgende äquivalente Formulierung zu (4.60):

Für die Lösung $u$ der Differentialgleichung

$$w_0^2 u - \nabla_x \cdot (w_1^2 \nabla_x u) = w_0^2 u_f \tag{4.69}$$

gilt

$$\|\nabla_x^2 u\|_2^2 \leq C \|u_f\|_0. \tag{4.70}$$

Bevor wir auf die eindeutige Lösbarkeit dieser elliptischen partiellen Differentialgleichung eingehen, zeigen wir zunächst die behauptete Äquivalenz.

Die beiden partiellen Differentialgleichungen sind gleich, wie man durch Einsetzen sieht.

Sei nun (4.60) gegeben, dann gilt

$$\begin{aligned}
\|\nabla_x^2 u\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x^2 u|^2 w_2^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x^2 u|^2 \frac{m_F^2}{\rho_F} dx \\
&= C \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x^2 u|^2 M_F dx \\
&= C \|\nabla_x^2 u\|_{L^2(M_F dx)} \\
&\overset{(4.60)}{\leq} \tilde{C} \|w\|_{L^2(\rho_F dx)} \\
&= \tilde{C} \int_{\mathbb{R}^d} u_f^2 \rho_F dx \\
&= \tilde{C} \int_{\mathbb{R}^d} u_f^2 w_0^2 dx \\
&= \tilde{C} \|u_f\|_0^2.
\end{aligned}$$

und damit folgt (4.70). Die andere Richtung geht analog.

Nun zur eindeutigen Lösbarkeit der elliptischen partiellen Differentialgleichung (4.69): Dazu führen wir folgende gewichtete $H^1$-Norm ein

$$\|u\|_{\tilde{H}^1}^2 := \|u\|_0^2 + \|\nabla_x u\|_1^2, \tag{4.71}$$

wobei wir fordern, dass die nichtnegative Energieprofilfunktion $\Gamma$ so beschaffen ist, dass dies tatsächlich eine gewichtete Norm darstellt. Dann ist

$$\tilde{\mathcal{H}} := \{\overline{u \in C^\infty : \|u\|_{\tilde{H}^1} < \infty}\}$$

ein Hilbertraum. Nun formulieren wir Gleichung (4.69) in die schwache Formulierung um, indem wir (4.69) mit einer Testfunktion $v \in \tilde{\mathcal{H}}$ multiplizieren und über $x$ integrieren

$$\int_{\mathbb{R}^d} w_0^2 uv dx - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot (w_1^2 \nabla_x u) v dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_f v w_0^2 dx.$$

Partielle Integration führt auf den Ausdruck

$$\int_{\mathbb{R}^d} w_0^2 uv dx + \int_{\mathbb{R}^d} w_1^2 \nabla_x u \cdot \nabla_x v dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_f v w_0^2 dx,$$

welcher sich kompakt anschreiben lässt als

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} = F(v), \quad \forall v \in \tilde{\mathcal{H}}, \tag{4.72}$$

mit dem vom Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}}$ aus (4.71) kommenden Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}$ und dem linearen Funktional $F(v) := \int_{\mathbb{R}^d} u_f v w_0^2 dx$, welches wegen $u_f \in L^2(\rho_F dx)$ und der Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_f v w_0^2 dx \leq \|u_f\|_0 \|v\|_0 \leq \|u_f\|_0 \|v\|_{\tilde{H}^1} < \infty$$

stetig in $\tilde{\mathcal{H}}$ ist. Der Darstellungssatz von Riesz liefert nun die eindeutige Lösbarkeit von (4.72) in $\tilde{\mathcal{H}}$ und in weiterer Folge auch von (4.69). Mit Hilfe der a priori Abschätzung aus dem Lemma von Lax-Milgram erhalten wir zusätzlich die Energieabschätzung

$$\|u\|_0^2 + \|\nabla_x u\|_1^2 \leq \|u_f\|_0^2, \tag{4.73}$$

die wir im Folgenden noch öfters benötigen werden.

Wir wollen nun $H^2 \to L^2$-Regularität einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung zeigen. Dafür benötigen wir folgende Bedingungen an die Gewichtsfunktionen $w_0, w_1$ und $w_2$, welche wir im Abschnitt 4.3 in Bedingungen an das äußere Potential umformulieren.

$$\exists c_1 > 0, c_2 \in [0, 1), \quad \text{sodass} \quad -w_1^2 \Delta_x (\log w_1) \leq c_1 w_0^2 + c_2 |\nabla_x w_1|^2, \tag{4.74}$$

$$\exists c_3 > 0, \quad \text{sodass} \quad \frac{w_1}{w_0} |\nabla_x W| \leq c_3 \left(1 + \frac{|\nabla_x w_1|}{w_0}\right) \text{mit} \quad W := \sqrt{1 + \left|\frac{\nabla_x w_1}{w_0}\right|^2}, \tag{4.75}$$

$$\exists c_4 > 0 \quad \text{sodass} \quad \left|\nabla_x \left(\frac{w_1}{w_0}\right)\right| \leq c_4 \frac{|\nabla_x w_1|}{w_0}, \tag{4.76}$$

$$\|W\|_0^2 = \int_{\mathbb{R}^d} W^2 \rho_F dx < \infty. \tag{4.77}$$

Für die Gewichtsfunktion $w_2$ benötigen wir keine zusätzlichen Bedingungen, da durch den Zusammenhang (4.67) durch beliebige zwei von den drei Gewichten $w_0, w_1$ und $w_2$ schon die dritte Gewichtsfunktion bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist.

Das Ziel der nächsten beiden Unterabschnitte wird es nun sein, die folgende $H^2 \to L^2$-Regularitätsabschätzung zu beweisen:

**Satz 4.2.1.** *Es gelten die Abschätzungen* (4.68), (4.74), (4.75), (4.76), (4.77). *Dann erfüllt die Lösung $u$ der elliptischen Differentialgleichung* (4.69) *die Abschätzung* (4.70).

Aus Lemma 4.1.15 folgt damit dann die Beschränktheit des Operators $\mathsf{AT}(1-\Pi)$. Um diese Aussage beweisen zu können, benötigen wir jedoch zunächst noch eine verbesserte Poincaré-Ungleichung.

### 4.2.2 Varianten der Poincaré-Ungleichung

Wir wollen nun die Poincaré-Ungleichung (4.68) aus dem letzten Abschnitt verbessern. Dazu beginnen wir mit folgendem Lemma:

**Lemma 4.2.2.** *Es gelte* (4.68) *und* (4.74). *Dann gibt es eine Konstante $\kappa > 0$, sodass*

$$\|\nabla_x u\|_1^2 \geq \kappa \left\| u \frac{\nabla_x w_1}{w_0} \right\|_0^2 \quad \text{für alle} \quad u \in L^2(\rho_F dx) \quad \text{mit} \quad \int_{\mathbb{R}^d} u \rho_F dx = 0. \tag{4.78}$$

*Beweis.* Mit Hilfe der Produktregel gilt

$$w_1 \nabla_x u = \nabla_x (w_1 u) - u \nabla_x w_1. \tag{4.79}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\|\nabla_x u\|_1^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 w_1^2 \overset{(4.79)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x (w_1 u) - u \nabla_x w_1|^2 \, dx \\
&= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x (w_1 u)|^2 dx}_{\geq 0} - 2 \int_{\mathbb{R}^d} u \nabla_x (u w_1) \cdot \nabla_x w_1 dx + \int_{\mathbb{R}^d} u^2 |\nabla_x w_1|^2 dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^d} u^2 |\nabla_x w_1|^2 dx - 2 \int_{\mathbb{R}^d} u \nabla_x (u w_1) \cdot \nabla_x w_1 dx \\
&= \left\| u \frac{\nabla_x w_1}{w_0} \right\|_0^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^d} u \nabla_x (u w_1) \cdot \nabla_x w_1 dx,
\end{aligned}$$

und durch "Hineinschummeln" des Faktors $\frac{w_1}{w_1}$ und anschließende partielle Integration

$$\begin{aligned}
\|\nabla_x u\|_1^2 &\geq \left\| u \frac{\nabla_x w_1}{w_0} \right\|_0^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^d} u \nabla_x (u w_1) \cdot \nabla_x w_1 dx \\
&= \left\| u \frac{\nabla_x w_1}{w_0} \right\|_0^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^d} u w_1 \nabla_x (u w_1) \cdot \frac{1}{w_1} \nabla_x w_1 dx \\
&= \left\| u \frac{\nabla_x w_1}{w_0} \right\|_0^2 - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \left( (u w_1)^2 \right) \cdot \nabla_x \left( \log w_1 \right) dx \\
&\overset{\text{part. Int.}}{=} \left\| u \frac{\nabla_x w_1}{w_0} \right\|_0^2 + \int_{\mathbb{R}^d} (u w_1)^2 \nabla_x \cdot \left( \nabla_x \log w_1 \right) dx.
\end{aligned}$$

Nun folgt aus den Voraussetzungen (4.68) und (4.74):

$$\|\nabla_x u\|_1^2 \geq (1 - c_2) \left\| u \frac{\nabla_x w_1}{w_0} \right\|_0^2 - \frac{c_1}{\lambda_M} \|\nabla_x u\|_1^2, \tag{4.80}$$

denn

$$\begin{aligned}
\|\nabla_x u\|_1^2 &\geq \left\| u\frac{\nabla_x w_1}{w_0}\right\|_0^2 + \int_{\mathbb{R}^d}(uw_1)^2\Delta_x(\log w_1)dx \\
&\overset{(4.74)}{\geq} \left\| u\frac{\nabla_x w_1}{w_0}\right\|_0^2 - c_1\int_{\mathbb{R}^d}u^2w_0^2dx - c_2\int_{\mathbb{R}^d}u^2|\nabla_x w_1|^2dx \\
&\overset{(4.68)}{\geq} \left\| u\frac{\nabla_x w_1}{w_0}\right\|_0^2 - \frac{c_1}{\lambda_M}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla_x u|^2w_1^2dx - c_2\int_{\mathbb{R}^d}u^2|\nabla_x w_1|^2dx \\
&= (1-c_2)\left\| u\frac{\nabla_x w_1}{w_0}\right\|_0^2 - \frac{c_1}{\lambda_M}\|\nabla_x u\|_1^2.
\end{aligned}$$

Indem wir den Term von rechts auf die linke Seite bringen erhalten wir

$$\left(1+\frac{c_1}{\lambda_M}\right)\|\nabla_x u\|_1^2 \geq (1-c_2)\left\| u\frac{\nabla_x w_1}{w_0}\right\|_0^2,$$

und damit folgt insgesamt

$$\|\nabla_x u\|_1^2 \geq \frac{1-c_2}{1+\frac{c_1}{\lambda_M}}\left\| u\frac{\nabla_x w_1}{w_0}\right\|_0^2 = \lambda_M\frac{1-c_2}{\lambda_M+c_1}\left\| u\frac{\nabla_x w_1}{w_0}\right\|_0^2.$$

Wegen $c_2 \in [0,1)$ ist der Ausdruck $\kappa := \lambda_M\dfrac{1-c_2}{\lambda_M+c_1}$ echt größer Null, sodass wir (4.78) erhalten. □

**Lemma 4.2.3.** *Es gelten die Voraussetzungen* (4.68), (4.74), (4.75) *und* (4.77). *Dann gibt es eine Konstante* $\kappa' > 0$, *sodass*

$$\|W\nabla_x u\|_1^2 \geq \kappa'\left\| Wu\frac{\nabla_x w_1}{w_0}\right\|_0^2 \quad \text{für alle} \quad u \in L^2(\rho_F dx) \quad \text{mit} \quad \int_{\mathbb{R}^d} u\rho_F dx = 0.$$

*Beweis.* Wir ersetzen $u$ durch den Ausdruck $uW - \bar{u}$, mit $\bar{u} := \int_{\mathbb{R}^d} uW\rho_F dx$. Nun gilt $\int_{\mathbb{R}^d}(uW - \bar{u})\rho_F dx = 0$, außerdem erfüllt $uW - \bar{u}$ die Bedingungen (4.68) und (4.74), wobei wir wieder $u$ durch $uW - \bar{u}$ ersetzen. Daher können wir Lemma 4.2.2 auf den Ausdruck $(uW - \bar{u})$ anwenden, und erhalten:

$$\|\nabla_x(uW)\|_1^2 \geq \kappa\left\|(uW-\bar{u})\frac{\nabla_x w_1}{w_0}\right\|_0^2, \tag{4.81}$$

weiters liefert Bedingung (4.68), angewendet auf den Ausdruck $uW - \bar{u}$ die Ungleichung

$$\|\nabla_x(uW)\|_1^2 \geq \lambda_M\|uW - \bar{u}\|_0^2. \tag{4.82}$$

Zusammen ergeben Ungleichung (4.81) und (4.82) die Beziehung

$$\begin{aligned}
2\|\nabla_x(uW)\|_1^2 &\geq \kappa\left\|(uW-\bar{u})\frac{\nabla_x w_1}{w_0}\right\|_0^2 + \lambda_M\|(uW-\bar{u})\|_0^2 \\
&= \kappa\int_{\mathbb{R}^d}(uW-\bar{u})^2\left|\frac{\nabla_x w_1}{w_0}\right|^2 w_0^2dx + \lambda_M\int_{\mathbb{R}^d}(uW-\bar{u})^2w_0^2dx \\
&\geq \min(\kappa,\lambda_M)\int_{\mathbb{R}^d}(uW-\bar{u})^2W^2w_0^2dx \\
&= \min(\kappa,\lambda_M)\|(uW-\bar{u})W\|_0^2,
\end{aligned}$$

und folglich gilt

$$\|\nabla_x(uW)\|_1^2 \;\geq\; \underbrace{\frac{\min(\kappa,\lambda_M)}{2}}_{:=\tilde{\kappa}} \|(uW-\bar{u})W\|_0^2.$$

Nun quadrieren wir die rechte Seite aus und erhalten:

$$\tilde{\kappa}\|(uW-\bar{u})W\|_0^2 \;=\; \tilde{\kappa}\|uW^2\|_0^2 - 2\tilde{\kappa}\bar{u}\int_{\mathbb{R}^d} uW^3 w_0^2 dx + \tilde{\kappa}\|\bar{u}W\|_0^2 \leq \|\nabla_x(Wu)\|_1^2.$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung angewendet auf $\bar{u} = \int_{\mathbb{R}^d} uWw_0^2 dx$ folgt daher

$$\tilde{\kappa}\|uW^2\|_0^2 \leq \underbrace{\|\nabla_x(Wu)\|_1^2}_{1.} + \underbrace{2\,\tilde{\kappa}\int_{\mathbb{R}^d} uW^3 w_0^2 dx \|W\|_0\|u\|_0}_{2.}. \tag{4.83}$$

Laut der Young-Ungleichung gilt für ein $a > 0$:

$$W^2uW \leq \frac{1}{2a}(W^2u)^2 + \frac{a}{2}W^2.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $w_0^2$ und integrieren wir über $x$, so erhalten wir die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^d} W^2uW\rho_F dx \leq \frac{1}{2a}\|W^2u\|_0^2 + \frac{a}{2}\|W\|_0^2. \tag{4.84}$$

Setzen wir $a := 2\|W\|_0\|u\|_0$, so erhalten wir für den Ausdruck 2. von (4.83) mit Hilfe von (4.84)

$$\begin{aligned} 2\tilde{\kappa}\int_{\mathbb{R}^d} W^3uw_0^2dx\|W\|_0\|u\|_0 &\overset{(4.84)}{\leq} \tilde{\kappa}a\left(\frac{1}{2a}\|W^2u\|_0^2 + \frac{a}{2}\|W\|_0^2\right) \\ &= \frac{\tilde{\kappa}}{2}\|W^2u\|_0^2 + 2\tilde{\kappa}\|W\|_0^4\|u\|_0^2. \end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt den 1. Ausdruck aus (4.83), so lässt er sich durch Ausmultiplizieren umformen zu

$$\begin{aligned} \|\nabla_x(Wu)\|_1^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x(Wu)|^2 w_1^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |W\nabla_x u + u\nabla_x W|^2 w_1^2 dx \\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}^d} W|\nabla_x u|^2 w_1^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}^d} u^2|\nabla_x W|^2 w_1^2 dx \\ &= 2\|W\nabla_x u\|_1^2 + 2\left\|u\nabla_x W\frac{w_1}{w_0}\right\|_0^2. \end{aligned}$$

Wegen (4.75) gilt für den hinteren Term

$$\begin{aligned} \left\|u\nabla_x W\frac{w_1}{w_0}\right\|_0^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} u^2|\nabla_x W|^2 w_1^2 dx \\ &\leq c_3^2\int_{\mathbb{R}^d} u^2\left(1+\frac{|\nabla_x w_1|}{w_0}\right)^2 w_0^2 dx \\ &\leq 2c_3^2\int_{\mathbb{R}^d} u^2\left(1+\frac{|\nabla_x w_1|^2}{w_0^2}\right) w_0^2 dx. \end{aligned}$$

Fassen wir nun alle Ergebnisse zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}\|W^2u\|_0^2 &\leq \|\nabla_x(Wu)\|_1^2 + 2\tilde{\kappa}\int_{\mathbb{R}^d} W^3uw_0^2dx\|W\|_0\|u\|_0 \\ &\leq 2\|W\nabla_x u\|_1^2 + 4c_3^2\|Wu\|_0^2 + \frac{\tilde{\kappa}}{2}\|W^2u\|_0^2 + 2\tilde{\kappa}\|W\|_0^4\|u\|_0^2.\end{aligned}$$

Dies führt uns durch Ausnutzung von Gleichung (4.68), Lemma 4.2.2 und $W \geq 1$ auf

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\kappa}}{2}\|W^2u\|_0^2 &\overset{(4.68)}{\leq} 2\|W\nabla_x u\|_1^2 + 4c_3^2\|Wu\|_0^2 + 2\frac{\tilde{\kappa}}{\lambda_M}\|W\|_0^4\|\nabla_x u\|_1^2 \\ &\overset{W\geq 1}{\leq} 2\|W\nabla_x u\|_1^2 + 4c_3^2\|Wu\|_0^2 + 2\frac{\tilde{\kappa}}{\lambda_M}\|W\|_0^4\|W\nabla_x u\|_1^2.\end{aligned}$$

Der mittlere Term lässt sich nun weiter umformen

$$\begin{aligned}4c_3^2\|Wu\|_0^2 &\leq 4c_3^2\left(\int_{\mathbb{R}^d} u^2w_0^2dx + \int_{\mathbb{R}^d} u^2\left|\frac{\nabla_x w_1}{w_0}\right|^2 w_0^2dx\right) \\ &\overset{(4.68),\text{Lemma 4.2.2}}{\leq} 4c_3^2\left(\frac{1}{\lambda_M}\|\nabla_x u\|_1^2 + \frac{1}{\tilde{\kappa}}\|\nabla_x u\|_1^2\right) \\ &\overset{W\geq 1}{\leq} 4c_3^2\left(\frac{1}{\lambda_M} + \frac{1}{\tilde{\kappa}}\right)\|W\nabla_x u\|_1^2.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\frac{\tilde{\kappa}}{2}\left\|Wu\frac{\nabla_x w_1}{w_0}\right\|_0^2 \leq \frac{\tilde{\kappa}}{2}\|W^2u\|_0^2 \leq \left(2 + 4c_3^2\left(\frac{1}{\lambda_M} + \frac{1}{\tilde{\kappa}}\right) + 2\frac{\tilde{\kappa}}{\lambda_M}\|W\|_0^4\right)\|W\nabla_x u\|_1^2,$$

und daraus folgt tatsächlich

$$\kappa'\left\|Wu\frac{\nabla_x w_1}{w_0}\right\|_0^2 \leq \|W\nabla_x u\|_1^2.$$

□

### 4.2.3 $H^2$-Regularität

Jetzt haben wir alle Werkzeuge in der Hand, um die $L^2 \to H^2$ Regularisierung der elliptischen Differentialgleichung 2. Ordnung (4.69) und damit Lemma 4.2.1 zu zeigen. Mit Lemma 4.1.15 folgt dann die Beschränktheit des Operators $\mathsf{AT}(1-\Pi)$. Dies liefert uns dann in weiterer Folge exponentiellen Abklang linearer kinetischer Gleichungen mittels Satz 4.1.7, wobei wir die Forderungen an den Kollisionsoperator $\mathsf{L}$ noch im Abschnitt 4.3 behandeln werden.

Unser Ausgangspunkt ist Gleichung (4.69)

$$w_0^2u - \nabla_x \cdot (w_1^2\nabla_x u) = w_0^2u_f,$$

sowie Abschätzung (4.73) aus Lax-Milgram

$$\|u\|_0^2 + \|\nabla_x u\|_1^2 \leq \|u_f\|_0^2.$$

Mit $W = \sqrt{1 + \frac{|\nabla_x w_1|^2}{w_0^2}}$ erhalten wir aus Lemma 4.2.2 eine verbesserte $L^2$-Abschätzung, und in Folge auch einen verbesserten $H^1$-Abschätzung. Die verbesserte $L^2$-Abschätzung lautet

$$\|uW\|_0 \leq \frac{1}{\kappa}\|u_f\|_0, \tag{4.85}$$

und folgt wegen $\kappa \in (0,1)$ aus

$$\begin{aligned}
\|uW\|_0^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} u^2 w_0^2 dx + \left\| u \frac{\nabla_x w_1}{w_0} \right\|_0^2 \\
&\overset{4.2.2}{\leq} \|u\|_0^2 + \frac{1}{\kappa} \|\nabla_x u\|_1^2 \\
&\leq \frac{1}{\kappa} \left( \|u\|_0^2 + \|\nabla_x u\|_1^2 \right) \\
&\overset{(4.73)}{\leq} \frac{1}{\kappa} \|u_f\|_0^2.
\end{aligned}$$

Die verbesserte $H^1$-Abschätzung erhalten wir durch das folgende Lemma.

**Lemma 4.2.4.** *Es gelten die Voraussetzungen* (4.68), (4.74), (4.75) *und* (4.77). *Dann erfüllt jede Lösung von* (4.69) *mit* $\int_{\mathbb{R}^d} u \rho_F dx$

$$\|W \nabla_x u\|_1 \leq C \|u_f\|_0.$$

*Beweis.* Wir gehen von Gleichung (4.69) aus

$$w_0^2 u - \nabla_x \cdot (w_1^2 \nabla_x u) = w_0^2 u_f.$$

Nun multiplizieren wir diese Gleichung mit $uW^2$, integrieren über $x$ und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^d} w_0^2 u^2 W^2 dx - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot (w_1^2 \nabla_x u) u W^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} w_0^2 u u_f W^2 dx.$$

Partielle Integration ergibt

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^2 W^2 w_0^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} w_1^2 \nabla_x u \cdot \nabla_x \left( u W^2 \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} u W^2 u_f w_0^2 dx,$$

und mit Hilfe der Produktregel und der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt

$$\|uW\|_0^2 + \int_{\mathbb{R}^d} w_1^2 \nabla_x u \cdot \nabla_x u W^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} w_1^2 \nabla_x u \cdot u \nabla_x (W^2) dx \leq \|uW^2\|_0 \|u_f\|_0,$$

und damit

$$\|uW\|_0^2 + \|W \nabla_x u\|_1^2 \leq \|uW^2\|_0 \|u_f\|_0 - \int_{\mathbb{R}^d} w_1^2 u \nabla_x u \cdot \nabla_x (W^2) dx. \tag{4.86}$$

Nun gilt die Beziehung

$$W^2 \leq 1 + W \frac{|\nabla_x w_1|}{w_0}, \tag{4.87}$$

denn

$$W^2 = 1 + \left| \frac{\nabla_x w_1}{w_0} \right|^2 \leq 1 + \sqrt{\left( 1 + \left| \frac{\nabla_x w_1}{w_0} \right|^2 \right) \left( \left| \frac{\nabla_x w_1}{w_0} \right|^2 \right)} = 1 + W \frac{|\nabla_x w_1|}{w_0}.$$

Aus Ungleichung (4.87), (4.68) und Lemma 4.2.3 folgt nun

$$\begin{aligned}
\|uW^2\|_0^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} u^2 W^4 w_0^2 dx \\
&\overset{(4.87)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + W\frac{|\nabla_x w_1|}{w_0}\right)^2 u^2 w_0^2 dx \\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^d} \left(1^2 + \left(W\frac{|\nabla_x w_1|}{w_0}\right)^2\right) u^2 w_0^2 dx \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^d} u^2 w_0^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}^d} W^2 \frac{|\nabla_x w_1|^2}{w_0^2} u^2 w_0^2 dx \\
&= 2\|u\|_0^2 + 2\left\|Wu\frac{|\nabla_x w_1|}{w_0}\right\|_0^2 \\
&\overset{(4.68),\ \text{Lemma } 4.2.3}{\leq} \frac{2}{\lambda_M}\|W\nabla_x u\|_1^2 + \frac{2}{\kappa'}\|W\nabla_x u\|_1^2,
\end{aligned}$$

und daher

$$\|uW^2\|_0^2 \leq 2\left(\frac{1}{\lambda_M} + \frac{1}{\kappa'}\right)\|W\nabla_x u\|_1^2. \tag{4.88}$$

Wir betrachten nun den Term $\int_{\mathbb{R}^d} w_1^2 u\nabla_x u \cdot \nabla_x\left(W^2\right)dx$.
Wegen $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ gilt

$$w_1|\nabla_x W| \overset{(4.75)}{\leq} c_3 w_0\left(1 + \frac{|\nabla_x w_1|}{w_0}\right) \leq c_3 w_0\sqrt{2\left(1 + \left|\frac{\nabla_x w_1}{w_0}\right|^2\right)} = c_3 w_0 W\sqrt{2}, \tag{4.89}$$

daher gilt für den Integranden

$$\begin{aligned}
w_1^2 u\nabla_x u \cdot \nabla_x\left(W^2\right) &\leq w_1^2|u||\nabla_x u|2|W||\nabla_x W| \\
&= w_1|\nabla_x W|w_1|u||\nabla_x u|2|W| \\
&\overset{(4.89)}{\leq} c_3 w_0 W\sqrt{2}w_1|u||\nabla_x u|2|W| \\
&= 2\sqrt{2}c_3 w_0|u|w_1|\nabla_x u|W^2.
\end{aligned}$$

Also ist das Integral beschränkt durch

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} w_1^2 u\nabla_x u \cdot \nabla_x\left(W^2\right)dx &\leq 2\sqrt{2}c_3\int_{\mathbb{R}^d} w_0|u|w_1|\nabla_x u|W^2 dx \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} 2\sqrt{2}c_3\sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} u^2W^2w_0^2dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} W^2|\nabla_x u|^2 w_1^2 dx} \\
&= 2\sqrt{2}c_3\|uW\|_0\|W\nabla_x u\|_1 \\
&\overset{(4.85)}{\leq} 2\sqrt{2}\frac{c_3}{\kappa}\|u_f\|_0\|W\nabla_x u\|_1.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir daher aus (4.86):

$$\begin{aligned}
\|W\nabla_x u\|_1^2 &\leq \|uW^2\|_0\|u_f\|_0 - \int_{\mathbb{R}^d} w_1^2 u\nabla_x u\cdot\nabla_x\left(W^2\right)dx \\
&\leq \sqrt{2\left(\frac{1}{\lambda_M}+\frac{1}{\kappa'}\right)}\|W\nabla_x u\|_1\|u_f\|_0 + 2\sqrt{2}\frac{c_3}{\kappa}\|W\nabla_x u\|_1\|u_f\|_0 \\
&= \left(\sqrt{2\left(\frac{1}{\lambda_M}+\frac{1}{\kappa'}\right)} + 2\sqrt{2}\frac{c_3}{\kappa}\right)\|W\nabla_x u\|_1\|u_f\|_0,
\end{aligned}$$

und damit $\|W\nabla_x u\|_1 \leq C\|u_f\|_0$ mit $C := \sqrt{2\left(\frac{1}{\lambda_M}+\frac{1}{\kappa'}\right)} + 2\sqrt{2}\frac{c_3}{\kappa}$. □

Nun haben wir alle Resultate zusammen, um Satz 4.2.1 beweisen zu können.

*Beweis von Satz 4.2.1.* Wir betrachten Gleichung (4.69) in folgender Form

$$w_0^2(u-u_f) = \nabla_x\cdot(w_1^2\nabla_x u).$$

Nach der Standardmethode multiplizieren wir sie mit $\nabla_x\cdot(\nabla_x u\frac{w_1^2}{w_0^2})$, integrieren über $x$ und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^d} w_0^2(u-u_f)\nabla_x\cdot\left(\nabla_x u\frac{w_1^2}{w_0^2}\right)dx = \int_{\mathbb{R}^d}\nabla_x\cdot\left(w_1^2\nabla_x u\right)\nabla_x\cdot\left(\nabla_x u\frac{w_1^2}{w_0^2}\right)dx. \tag{4.90}$$

Nun folgt aus (4.67) folgende Beziehung für die Gewichtsfunktionen

$$w_2 = \frac{w_1^2}{w_0}const. \tag{4.91}$$

Als nächstes betrachten wir nun die linke und rechte Seite von (4.90) getrennt. Zunächst schreiben wir die linke Seite in die Einsteinsche Summennotation um und wenden die Produktregel an

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} w_0^2(u-u_f)\nabla_x\cdot\left(\nabla_x u\frac{w_1^2}{w_0^2}\right)dx \\
=\ &\int_{\mathbb{R}^d} w_0^2(u-u_f)\partial_i\left(\partial_i u\frac{w_1^2}{w_0^2}\right)dx \\
=\ &\int_{\mathbb{R}^d} w_0^2(u-u_f)\left(\partial_{ii}u\frac{w_1^2}{w_0^2}+\partial_i u\partial_i\left(\frac{w_1^2}{w_0^2}\right)\right)dx \\
=\ &\int_{\mathbb{R}^d} w_0(u-u_f)w_2\Delta_x u dx + \int_{\mathbb{R}^d} w_0^2(u-u_f)\nabla_x u\cdot\nabla_x\left(\frac{w_1^2}{w_0^2}\right)dx.
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite integrieren wir zweimal partiell und wenden wieder die Produktregel an

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot \left(w_1^2 \nabla_x u\right) \nabla_x \cdot \left(\nabla_x u \frac{w_1^2}{w_0^2}\right) dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j (w_1^2 \partial_j u) \partial_i \left(\frac{w_1^2}{w_0^2} \partial_i u\right) dx \\
\overset{\text{part. Int.}}{=} & \int_{\mathbb{R}^d} \partial_i (w_1^2 \partial_j u) \partial_j \left(\frac{w_1^2}{w_0^2} \partial_i u\right) dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^d} \left(\partial_i (w_1^2) \partial_j u + w_1^2 \partial_{ij}^2 u\right) \left(\partial_j \left(\frac{w_1^2}{w_0^2}\right) \partial_i u + \frac{w_1^2}{w_0^2} \partial_{ij}^2 u\right) dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^d} \partial_i (w_1^2) \partial_j \left(\frac{w_1^2}{w_0^2}\right) \partial_i u \partial_j u dx + \int_{\mathbb{R}^d} w_1^2 \partial_j \left(\frac{w_1^2}{w_0^2}\right) \partial_{ij}^2 u \partial_i u dx \\
+ & \int_{\mathbb{R}^d} \frac{w_1^2}{w_0^2} \partial_i \left(w_1^2\right) \partial_j u \partial_{ij}^2 u dx + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{w_1^4}{w_0^2} \left(\partial_{iju}\right)^2 dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^d} \left(\nabla_x u \cdot \nabla_x \left(\frac{w_1^2}{w_0^2}\right)\right) \left(\nabla_x u \cdot \nabla_x (w_1^2)\right) dx + \int_{\mathbb{R}^d} w_1^2 \nabla_x u \nabla_x^2 u \nabla_x \left(\frac{w_1^2}{w_0^2}\right) dx \\
+ & \int_{\mathbb{R}^d} \frac{w_1^2}{w_0^2} \nabla_x u \nabla_x^2 u \nabla_x (w_1^2) dx + \left\|\nabla_x^2 u\right\|_2^2,
\end{aligned}$$

wobei der Ausdruck $\left\|\nabla_x^2 u\right\|_2^2$ als die gewichtete Frobenius-Norm der Hesse-Matrix $\nabla_x^2 u$ zu verstehen ist

$$\left\|\nabla_x^2 u\right\|_2^2 := \int_{\mathbb{R}^d} \left(\partial_{ij}^2 u\right)^2 w_2^2 dx.$$

Zusammen ergibt das

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla_x^2 u\right\|_2^2 = & \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} w_0 (u - u_f) w_2 \Delta_x u dx}_{=:I_1} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} w_0^2 (u - u_f) \nabla_x u \cdot \nabla_x \left(\frac{w_1^2}{w_0^2}\right) dx}_{=:I_2} \\
& - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} w_1^2 \nabla_x u \nabla_x^2 u \nabla_x \left(\frac{w_1^2}{w_0^2}\right) dx}_{=:I_3} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \frac{w_1^2}{w_0^2} \nabla_x u \nabla_x^2 u \nabla_x (w_1^2) dx}_{=:I_4} \\
& - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \left(\nabla_x u \cdot \nabla_x \left(\frac{w_1^2}{w_0^2}\right)\right) \left(\nabla_x u \cdot \nabla_x (w_1^2)\right) dx}_{=:I_5} \\
= & I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.
\end{aligned}$$

Nun schätzen wir die fünf Integrale einzeln ab.

Für das erste Integral verwenden wir die Cauchy-Schwarz Ungleichung und die a priori Abschätzung (4.73) aus Lax-Milgram und erhalten

$$\begin{aligned}
|I_1| = & \left|\int_{\mathbb{R}^d} w_0 (u - u_f) w_2 \Delta_x u dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |w_0 u w_2 \Delta_x u| \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} |w_0 u_f w_2 \Delta_x u| \, dx \\
\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} & \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} u^2 w_0^2 dx} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla_x^2 u\|^2 w_2^2 dx} + \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} u_f^2 w_0^2 dx} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla_x^2 u\|^2 w_2^2 dx} \\
= & \left(\|u\|_0 + \|u_f\|_0\right) \|\nabla_x^2 u\|_2 \\
\overset{(4.73)}{\leq} & 2 \|u_f\|_0 \|\nabla_x^2 u\|_2.
\end{aligned}$$

Für das zweite Integral verwenden wir (4.76) und Lemma 4.2.4 und erhalten

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} w_0^2 (u - u_f) \nabla_x u \cdot \nabla_x \left( \frac{w_1^2}{w_0^2} \right) dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} w_0^2 (u - u_f) \left| \nabla_x u \right| \left| \nabla_x \left( \frac{w_1^2}{w_0^2} \right) \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} w_0^2 (u - u_f) \left| \nabla_x u \right| \left| 2 \frac{w_1}{w_0} \nabla_x \left( \frac{w_1}{w_0} \right) \right| dx \\
&\overset{(4.76)}{\leq} 2c_4 \int_{\mathbb{R}^d} w_0^2 (u - u_f) |\nabla_x u| \frac{w_1}{w_0} \frac{|\nabla_x w_1|}{w_0} dx \\
&= 2c_4 \int_{\mathbb{R}^d} w_0 (u - u_f) w_1 |\nabla_x u| \frac{|\nabla_x w_1|}{w_0} dx \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} 2c_4 \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} (u - u_f)^2 w_0^2 dx} \sqrt{|\nabla_x u|^2 \frac{|\nabla_x w_1|^2}{w_0^2} w_1^2 dx} \\
&\leq 2c_4 \|u - u_f\|_0 \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 \left( 1 + \frac{|\nabla_x w_1|^2}{w_0^2} \right) w_1^2 dx} \\
&= 2c_4 \|u - u_f\|_0 \left\| \nabla_x u W \right\|_1 \\
&\overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} 2c_4 \left( \|u\|_0 + \|u_f\|_0 \right) \|W \nabla_x u\|_1 \\
&\overset{(4.73)}{\leq} 4c_4 \|u_f\|_0 \|W \nabla_x u\|_1 \\
&\overset{\text{Lemma 4.2.4}}{\leq} 4c_4 C \|u_f\|_0^2.
\end{aligned}$$

Für das dritte Integral gilt mit Hilfe der Beziehung zwischen den Gewichten (4.91)

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| w_1^2 \nabla_x u \nabla_x^2 u \nabla_x \left( \frac{w_1^2}{w_0^2} \right) \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} w_1^2 |\nabla_x u| \|\nabla_x^2 u\| \left| \nabla_x \left( \frac{w_1^2}{w_0^2} \right) \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} w_1^2 |\nabla_x u| \|\nabla_x^2 u\| 2 \frac{w_1}{w_0} \left| \nabla_x \left( \frac{w_1}{w_0} \right) \right| dx \\
&\overset{(4.76)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^d} w_1^2 |\nabla_x u| \|\nabla_x^2 u\| 2 \frac{w_1}{w_0} c_4 \frac{|\nabla_x w_1|}{w_0} dx \\
&\overset{(4.91)}{=} 2c_4 \int_{\mathbb{R}^d} w_1 |\nabla_x u| \|\nabla_x^2 u\| w_2 \frac{|\nabla_x w_1|}{w_0} dx \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} 2c_4 \|W \nabla_x u\|_1 \|\nabla_x^2 u\|_2 \\
&\overset{\text{Lemma 4.2.4}}{\leq} 2c_4 C \|u_f\|_0 \|\nabla_x^2 u\|_2.
\end{aligned}$$

Das vierte Integral lässt sich mit Hilfe der Beziehung zwischen den Gewichten (4.91) folgender-

maßen abschätzen

$$\begin{aligned}
|I_4| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{w_1^2}{w_0^2} \nabla_x u \nabla_x^2 u \nabla_x (w_1^2) \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{w_1^2}{w_0^2} |\nabla_x u| \|\nabla_x^2 u\| 2 w_1 |\nabla_x w_1| dx \\
&\overset{(4.91)}{\leq} 2 \int_{\mathbb{R}^d} w_1 w_2 |\nabla_x u| \|\nabla_x^2 u\| \frac{|\nabla_x w_1|}{w_0} dx \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} 2 \|W \nabla_x u\|_1 \|\nabla_x^2 u\|_2 \\
&\overset{\text{Lemma 4.2.4}}{\leq} 2C \|u_f\|_0 \|\nabla_x^2 u\|_2.
\end{aligned}$$

Für das fünfte Integral gilt schließlich

$$\begin{aligned}
|I_5| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u| \left| \nabla_x \left( \frac{w_1^2}{w_0^2} \right) \right| |\nabla_x u| \left| \nabla_x (w_1^2) \right| dx \\
&\leq 4 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{w_1^2}{w_0} |\nabla_x u|^2 \left| \nabla_x \left( \frac{w_1}{w_0} \right) \right| |\nabla_x w_1| dx \\
&\overset{(4.76)}{\leq} 4c_4 \int_{\mathbb{R}^d} w_1^2 |\nabla_x u|^2 \frac{|\nabla_x w_1|^2}{w_0^2} dx \\
&\leq 4c_4 \|W \nabla_x u\|_1^2 \\
&\overset{\text{Lemma 4.2.4}}{\leq} 4c_4 C \|u_f\|_0^2.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|\nabla_x^2 u\|_2^2 \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4| + |I_5| \leq K \|u_f\|_0 \left( \|u_f\|_0 + \|\nabla_x^2 u\|_2 \right)$$

für eine explizit berechenbare Konstante $K > 0$. □

## 4.3 Maxwellsche Gleichgewichte

In diesem Abschnitt widmen wir uns dem Kollisionsoperator $\mathsf{L}$, außerdem wollen wir die Bedingungen an die Gewichtsfunktionen $w_i$ aus (4.74), (4.75), (4.76) und (4.77) in Bedingungen an das äußere Potential $V$ umformulieren. Als Ergebnis erhalten wir statt der abstrakten Aussage von Satz 4.1.7 dann die exponentielle Konvergenz kinetischer Gleichungen mit konkretem Kollisionsteil, wobei wir nur Voraussetzungen an das äußere Potential $V$ benötigen.

Wir betrachten im Folgenden solche Kollisionsoperatoren, deren lokales Gleichgewicht eine Maxwellsche Dichtefunktion ist. Das globale Gleichgewicht hat dann folgende Form:

$$F(x,v) = \rho_F(V(x)) \mathfrak{M}(v), \quad \text{mit} \quad \rho_F(V) = e^{-V} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}(v) = \frac{e^{-|v|^2/2}}{(2\pi)^{d/2}}. \tag{4.92}$$

Unter dieser Voraussetzung ist **(H0)** eine Folgerung aus:

**Voraussetzung 4.3.1. (H0.1)** Für das äußere Potential $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$ gelte $e^{-V} \in L^1(dx)$.

Aus **(H0.1)** folgt nämlich mit Fubini

$$\int \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{-V(x)} \mathfrak{M}(v) dv dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-V(x)} dx \int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{M}(v) dv = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-V(x)} dx < \infty,$$

und mit geeigneter Normierung folgt somit Voraussetzung **(H0)**.

Für Voraussetzung **(H2)** und den ersten Teil von Voraussetzung **(H4)** benötigen wir keine weiteren Voraussetzungen an den Kollisionsoperator $\mathsf{L}$, wie wir gleich zeigen werden.

Zuerst wollen wir eine äquivalente Bedingung für Voraussetzung **(H2)** herleiten. Setzen wir $w := \rho e^{V/2}$, so ist die makroskopische Koerzivitätsbedingung (4.57) aus Lemma 4.1.13 äquivalent zu

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left( |\nabla_x w|^2 + \left( \frac{1}{4}|\nabla_x V|^2 - \frac{1}{2}\Delta_x V \right) w^2 \right) dx \geq \lambda_M \int_{\mathbb{R}^d} w^2 dx \tag{4.93}$$

unter der Orthogonalitätsbedingung $\int_{\mathbb{R}^d} we^{-V/2} dx = 0$. Dies rechnen wir jetzt nach. Wegen $\rho = u\rho_F$ gilt $u = \dfrac{w}{\sqrt{\rho_F}} = we^{V/2}$, und daher folgt

$$|\nabla_x u|^2 \;=\; \left| \nabla_x \left( we^{V/2} \right) \right|^2 = e^{V(x)} \left( |\nabla_x w|^2 + \frac{w^2}{4}|\nabla_x V|^2 + \frac{1}{2}\nabla_x(w^2)\nabla_x V \right). \tag{4.94}$$

Daher gilt für die linke Seite

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 m_F dx \quad &= \quad \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 \int_{\mathbb{R}} |v|^2 F dv dx \\
&= \quad \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-V(x)} |\nabla_x u|^2 \left( \int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 \frac{e^{-|v|^2/2}}{(2\pi)^{d/2}} dv \right) dx \\
&\overset{(4.94)}{=} \quad \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x w|^2 + \frac{w^2}{4}|\nabla_x V|^2 + \frac{1}{2}\nabla_x(w^2)\nabla_x V dx \\
&\overset{\text{part. Int.}}{=} \quad \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x w|^2 + \frac{w^2}{4}|\nabla_x V|^2 - \frac{1}{2} w^2 \Delta_x V dx,
\end{aligned}$$

wobei wir in obiger Rechnung die Dichte und Varianz der Standardnormalverteilung ausgenutzt haben

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 e^{-\frac{|v|^2}{2}} \\
= \; & \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} (v_1^2 + \cdots v_d^2) e^{-\frac{v_1^2 + \cdots v_d^2}{2}} dv_1 \cdots dv_d \\
= \; & \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int v_1^2 e^{-\frac{v_1^2}{2}} dv_1 \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int e^{-\frac{v_2^2}{2}} dv_2 \cdots \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int e^{-\frac{v_d^2}{2}} dv_d \\
& + \cdots \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int e^{-\frac{v_1^2}{2}} dv_1 \cdots \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int e^{-\frac{v_{d-1}^2}{2}} dv_{d-1} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int v_d^2 e^{-\frac{v_d^2}{2}} dv_d \\
= \; & d.
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^2 \rho_F dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho^2}{\rho_F} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \rho^2 e^V dx = \int_{\mathbb{R}^d} w^2 dx.$$

Die Orthogonalitätsbedingung übersetzt sich in

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} u\rho_F dx = \int_{\mathbb{R}^d} ue^{-V} dx = \int_{\mathbb{R}^d} we^{-V/2} dx.$$

Somit ist (4.57) tatsächlich zu (4.93) äquivalent.

Nun betrachten wir nochmals Ungleichung (4.93). Führen wir den Schrödinger-Operator $\mathcal{S} := -\Delta + \frac{1}{4}|\nabla_x V|^2 - \frac{1}{2}\Delta V$ ein, so lässt sich (4.93) nach partieller Integration und mit $w = \rho e^{V/2}$ anschreiben als

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{S}(w) w dx \geq \lambda_M \int_{\mathbb{R}^d} w^2 dx.$$

Der erste Eigenwert des Schrödinger-Operators $\mathcal{S} := -\Delta + \frac{1}{4}|\nabla_x V|^2 - \frac{1}{2}\Delta V$ ist Null, und die zugehörige Eigenfunktion ist $w_1 = e^{-V/2}$, wie folgende Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} \mathcal{S}e^{-V/2} &= -\Delta e^{-V/2} + \left(\frac{1}{4}|\nabla_x V|^2 - \frac{1}{2}\Delta V\right) e^{-V/2} \\ &= -\left(\frac{1}{4}|\nabla_x V|^2 + \frac{1}{2}\Delta V\right) e^{-V/2} + \left(\frac{1}{4}|\nabla_x V|^2 - \frac{1}{2}\Delta V\right) e^{-V/2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dieser Eigenwert Null ist laut [9] ein einfacher Eigenwert (d.h. seine Vielfachheit beträgt 1), und die zugehörige Eigenfunktion ist $w_1 = e^{-V/2}$. Laut [24] gilt: die Ungleichung (4.57) aus Lemma 4.1.13 gilt genau dann, wenn das untere Ende des stetigen Spektrums von $\mathcal{S}$ positiv ist

**Voraussetzung (H2.1)** $\liminf_{|x|\to\infty}(|\nabla_x V|^2 - 2\Delta V) > 0.$

Folglich erhalten wir makroskopische Koerzivität, falls $\Delta V$ für $|x| \to \infty$ sehr klein im Vergleich zu $|\nabla_x V|^2$ ist und falls $\liminf_{|x|\to\infty}(|\nabla_x V|) > 0$. Für einen Beweis dieser Behauptung für den Spezialfall $\lim_{|x|\to\infty}(|\nabla_x V - 2\Delta V|) = \infty$ verweisen wir auf [29].

Betrachten wir

$$m_F = \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 F dv = \frac{e^{-V(x)}}{d}\int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 \mathfrak{M} dv = e^{-V(x)} = \rho_F, \tag{4.95}$$

$$M_F = \int_{\mathbb{R}^d} |v|^4 F dv = e^{-V(x)}\int_{\mathbb{R}^d} |v|^4 \mathfrak{M} dv, \tag{4.96}$$

so sehen wir, dass alle drei Gewichtsfunktionen konstante Vielfache von $e^{-V(x)}$ sind. Insbesondere gilt

$$\frac{M_F \rho_F}{m_F^2} = const,$$

und daher können wir die Methode aus Abschnitt 4.2 anwenden, um die Beschränktheit des Operators $\mathsf{AT}(1-\Pi)$ zu zeigen. Hierzu schreiben wir - wie schon am Anfang des Kapitels erwähnt - die Forderungen an die Gewichtsfunktionen (4.74), (4.75), (4.76) und (4.77) in Bedingungen an das äußere Potential $V$ um.

Voraussetzungen (4.74) und (4.75) sind erfüllt, falls gilt

**Voraussetzung (H4.1)** Es gibt Konstanten $c_1 > 0, c_2 \in [0, 1)$, und $c_3 > 0$, sodass

$$\Delta_x V \leq c_1 + \frac{c_2}{2}|\nabla_x V|^2, \quad |\nabla_x^2 V| \leq c_3(1 + |\nabla_x V|).$$

Die Abschätzung (4.74) erhalten wir auf folgende Weise:
Wegen (4.95) gilt $w_0^2 = w_1^2 = e^{-V}$, und daher $w_1 = e^{-V/2}$ und damit $\log w_1 = -\frac{V}{2}$. Daher gilt

$$w_1^2 \Delta_x(\log w_1) = -\frac{1}{2}e^{-V}\Delta_x V, \tag{4.97}$$

$$|\nabla_x w_1|^2 = \frac{1}{4}e^{-V}|\nabla_x V|^2, \tag{4.98}$$

und damit

$$\begin{aligned} -w_1^2 \Delta_x (\log w_1) &\overset{(4.97)}{=} \frac{1}{2} e^{-V} \Delta_x V \\ &\overset{\textbf{(H4.1)}}{\leq} \frac{1}{2} e^{-V} \left( c_1 + \frac{c_2}{2} |\nabla_x V|^2 \right) \\ &= \frac{c_1}{2} e^{-V} + \frac{c_2}{4} e^{-V} |\nabla_x V|^2 \\ &= \frac{c_1}{2} w_0^2 + c_2 |\nabla_x w_1|^2. \end{aligned}$$

Somit ist (4.74) gezeigt, und (4.75) folgt aus der zweiten Abschätzung von **(H4.1)** durch eine analoge Rechnung. Abschätzung (4.76) gilt trivialerweise, da

$$\frac{w_1}{w_0} = const.$$

Abschätzung (4.77) kann wegen

$$W^2 = 1 + \left| \frac{\nabla_x w_1}{w_0} \right|^2 = 1 + C \left| \nabla_x V \right|^2$$

und

$$\rho_F = w_0^2 = e^{-V}$$

übersetzt werden in die Forderung:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x V|^2 e^{-V} dx < \infty. \tag{4.99}$$

Nun ist die Forderung (4.99) wegen **(H0)** und **(H4.1)** erfüllt, denn mit partieller Integration gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x V|^2 e^{-V} dx &= -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x V \cdot \nabla_x (e^{-V}) dx \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \Delta_x V e^{-V} dx \\ &\overset{\textbf{(H4.1)}}{\leq} c_1 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-V} dx + \frac{c_2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x V|^2 e^{-V} dx, \end{aligned}$$

und daraus folgt Forderung (4.99):

$$\left(1 - \frac{c_2}{2}\right) \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x V|^2 e^{-V} dx \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-V} \overset{\textbf{(H0.1)}}{\leq} \infty.$$

Damit ist auch (4.77) erfüllt, und wir haben tatsächlich die Forderungen (4.74)-(4.77) in Forderungen an das äußere Potential $V$ umformuliert.

### 4.3.1 BGK-Operator

Nun wollen wir den BGK-Operator betrachten

$$\mathsf{L} = \Pi - 1.$$

Die mikroskopische Koerzivitätsbedingung **(H1)** ist erfüllt, denn da $1-\Pi$ eine Orthogonalprojektion ist, ist $\mathsf{L}$ symmetrisch und $\lambda_m = 1$:

$$-\langle \mathsf{L}f, f\rangle = \langle (1-\Pi)f, f\rangle = \langle (1-\Pi)^2 f, f\rangle = 1 \cdot \|(1-\Pi)f\|^2.$$

Da $\mathsf{L}$ durch 1 beschränkt ist, liefert Lemma 4.1.6 die Beschränktheit von $\mathsf{AL}$:

$$\|\mathsf{AL}\| \leq \|\mathsf{A}\|\|\mathsf{L}\| < \infty.$$

**Satz 4.3.2.** *Sei $\mathsf{L} = \Pi - 1$ und das äußere Potential $V$ erfülle* **(H0.1), (H2.1)** *und* **(H4.1)**. *Dann konvergiert die Lösung von* (4.1) *mit Anfangswert $f_I$ in $L^2(d\mu)$ exponentiell schnell gegen das globale Gleichgewicht* (4.92).

*Beweis.* Wir prüfen nach, ob alle Voraussetzungen erfüllt sind, um Satz 4.1.7 anwenden zu können. Aus **(H0.1)** folgt **(H0)**. Mikroskopische Koerzivität **(H1)** ist erfüllt mit $\lambda_m = 1$. Aus **(H2.1)** folgt makroskopische Koerzivität **(H2)**. Die Bedingung **(H3)** ist wegen Lemma 4.1.14 für jede kinetische Gleichung erfüllt. Aus **(H4.1)** folgt die Beschränktheit von $\mathsf{AT}(1-\Pi)$, und $\mathsf{AL}$ ist beschränkt wegen der Beschränktheit von $\mathsf{L}$ und Lemma 4.1.6. Somit ist Satz 4.1.7 anwendbar, und wir erhalten exponentielle Konvergenz gegen das Maxwellsche Gleichgewicht. □

### 4.3.2 Fokker-Planck Operator

Nun betrachten wir den Fokker-Planck Operator

$$\mathsf{L}f = \nabla_v \cdot (\nabla_v f + vf).$$

Der Operator $\mathsf{L}$ ist symmetrisch, denn wegen

$$\nabla_v \left(\frac{g}{\mathfrak{M}(v)}\right) = \frac{\nabla_v g + gv}{\mathfrak{M}(v)} \tag{4.100}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\langle \mathsf{L}f, g\rangle &= \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} (\nabla_v \cdot \nabla_v f)\frac{g}{F(x,v)}dvdx + \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} (\nabla_v \cdot vf)\frac{g}{F(x,v)}dvdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\left(\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla_v \cdot \nabla_v f)\frac{g}{\mathfrak{M}}dv\right)dx + \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\left(\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla_v \cdot vf)\frac{g}{\mathfrak{M}}dv\right)dx \\
&\overset{\text{partielle Int.}}{=} -\int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_v f \cdot \nabla_v\left(\frac{g}{\mathfrak{M}}\right)dvdx - \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\int_{\mathbb{R}^d} vf \cdot \nabla_v\left(\frac{g}{\mathfrak{M}}\right)dvdx \\
&\overset{(4.100)}{=} -\int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\nabla_v f \nabla_v g}{\mathfrak{M}} + \frac{\nabla_v f(gv)}{\mathfrak{M}} + \frac{(vf)\nabla_v g}{\mathfrak{M}} + \frac{|v|^2 fg}{\mathfrak{M}}\right)dvdx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\nabla_v g \nabla_v f}{\mathfrak{M}} + \frac{\nabla_v g(fv)}{\mathfrak{M}} + \frac{(vg)\nabla_v f}{\mathfrak{M}} + \frac{|v|^2 gf}{\mathfrak{M}}\right)dvdx \\
&= \langle f, \mathsf{L}g\rangle.
\end{aligned}$$

Die mikroskopische Koerzivitätsbedingung **(H1)** ist äquivalent zu einer Poincaré-Ungleichung für das Gauß'sche Maß $\mathfrak{M}(v)dv$, es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
-\langle \mathsf{L}f, f\rangle &= -\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \nabla_v\cdot(\nabla_v f + vf)\,\frac{f}{F}dvdx \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} -\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_v\cdot(\nabla_v f+vf)\,\frac{f}{F}dv\right)dx \\
&\overset{\text{partielle Int.}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}(\nabla_v f+vf)\,\nabla_v\left(\frac{f}{F}\right)dv\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\left(\int_{\mathbb{R}^d}(\nabla_v f+vf)\,\nabla_v\left(\frac{f}{\mathfrak{M}}\right)dv\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\left(\int_{\mathbb{R}^d}(\nabla_v f+vf)\cdot\frac{(\nabla_v f+vf)}{\mathfrak{M}}dv\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla_v f+vf|^2\frac{1}{\mathfrak{M}}dv\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\int_{\mathbb{R}^d}\mathfrak{M}\left|\nabla_v\frac{(1-\Pi)f}{\mathfrak{M}}\right|^2 dvdx,
\end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen folgenden zwei Rechnungen gilt:

$$\frac{(1-\Pi)f}{\mathfrak{M}} = \frac{f}{\mathfrak{M}} - \frac{\rho_f}{\rho_F}e^{-V(x)}, \tag{4.101}$$

und analog zu (4.100)

$$\nabla_v\left(\frac{(1-\Pi)f}{\mathfrak{M}}\right) = \nabla_v\left(\frac{f}{\mathfrak{M}}\right) \overset{(4.100)}{=} \frac{\nabla_v f+vf}{\mathfrak{M}}.$$

Also folgt Voraussetzung **(H1)** aus der Poincaré-Ungleichung für das Gausssche Maß $\mathfrak{M}dv$:

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla_v u|^2\mathfrak{M}dv \geq \lambda_M\int_{\mathbb{R}^d}|u^2|\mathfrak{M}dv, \tag{4.102}$$

wobei wir statt $u$ den Ausdruck $\frac{(1-\Pi)f}{\mathfrak{M}}$ verwenden:

$$\begin{aligned}
-\langle \mathsf{L}f, f\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} e^V\int_{\mathbb{R}^d}\left|\nabla_v\left(\frac{(1-\Pi)f}{\mathfrak{M}}\right)\right|^2\mathfrak{M}dvdx \\
&\overset{(4.102)}{\geq} \lambda_m\int_{\mathbb{R}^d} e^V\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{(1-\Pi)f}{\mathfrak{M}}\right)^2\mathfrak{M}dvdx \\
&= \lambda_m\|(1-\Pi)f\|^2.
\end{aligned}$$

Ein überraschendes Resultat ist die Beschränktheit von $\mathsf{AL}$, obwohl $\mathsf{L}$ ein unbeschränkter Operator ist. Dies folgt aus Lemma 4.1.6 mit Hilfe folgender Überlegung:

Der Operator $\mathsf{A}$ hat die Form $\mathsf{A} = (1+(\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi))^{-1}(\mathsf{T}\Pi)^* = -(1+(\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi))^{-1}\Pi\mathsf{T}$, und der Ausdruck $\Pi\mathsf{T}f$ lässt sich schreiben als $\Pi\mathsf{T}f = \frac{F}{\rho_F}\nabla_x\cdot j_f$ mit dem Fluss $j_f = \int_{\mathbb{R}^d} vfdv$:

$$\begin{aligned}
\Pi\mathsf{T}f = \frac{F}{\rho_F}\rho_{\mathsf{T}f} &= \frac{F}{\rho_F}\int_{\mathbb{R}^d} v\cdot\nabla_x f - \nabla_x V\cdot\nabla_v f dv \\
&= \frac{F}{\rho_F}\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_x\cdot(vf)dv - \nabla_x V\cdot\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_v f dv \\
&= \frac{F}{\rho_F}\nabla_x\cdot\int_{\mathbb{R}^d}(vf)dv \\
&= \frac{F}{\rho_F}\nabla_x\cdot j_f.
\end{aligned}$$

Weiters gilt die Gleichung

$$j_{\mathsf{L}f} = -j_f,$$

denn

$$\begin{aligned}
j_{\mathsf{L}f} &= \int_{\mathbb{R}^d} v\mathsf{L}f dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} v\nabla_v \cdot (\nabla_v f + vf) dv \\
&\overset{\text{partielle Int.}}{=} -\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\nabla_v v}_{=1} (\nabla_v f + vf) dv \\
&= -\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_v f dv}_{=0} - \int_{\mathbb{R}^d} vf dv \\
&= -j_f.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathsf{AL} = -\mathsf{A}, \tag{4.103}$$

denn

$$\begin{aligned}
\Pi\mathsf{TL}f &= \frac{\rho_{\mathsf{TL}f}}{\rho_F} F \\
&= \frac{F}{\rho_F} \rho_{\mathsf{TL}f} \\
&= \frac{F}{\rho_F} \int_{\mathbb{R}^d} \mathsf{T}(\mathsf{L}f) dv \\
&= \frac{F}{\rho_F} \int_{\mathbb{R}^d} v \cdot \nabla_x (\mathsf{L}f) - \nabla_x V \cdot \nabla_v (\mathsf{L}f) dv \\
&= \frac{F}{\rho_F} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \cdot (v\mathsf{L}f) dv - \nabla_x V \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_v (\mathsf{L}f) dv}_{=0} \\
&= \frac{F}{\rho_F} \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^d} v\mathsf{L}f dv \\
&= \frac{F}{\rho_F} \nabla_x \cdot j_{\mathsf{L}f},
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\mathsf{AL}f &= -\left(1 + (\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi)\right)^{-1} \Pi\mathsf{TL}f \\
&= -\left(1 + (\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi)\right)^{-1} \frac{F}{\rho_F} \nabla_x \cdot j_{\mathsf{L}f} \\
&= -\left(1 + (\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi)\right)^{-1} \underbrace{\frac{F}{\rho_F} \nabla_x \cdot (-j_f)}_{=-\Pi\mathsf{T}f} \\
&= -\mathsf{A}f.
\end{aligned}$$

Die Beschränktheit des Operators $\mathsf{AL}$ folgt somit aus (4.103) und Lemma 4.1.6.

**Satz 4.3.3.** *Sei* $\mathsf{L}f = \nabla_v \cdot (\nabla_v f + vf)$ *und das äußere Potential* $V$ *erfülle* **(H0.1)**, **(H2.1)** *und* **(H4.1)**. *Dann konvergiert die Lösung* $f$ *von* (4.1) *mit Anfangsbedingung* $f_I$ *in* $L^2(d\mu)$ *exponentiell schnell gegen das globale Gleichgewicht aus* (4.92).

*Beweis.* Wegen **(H0.1)** ist **(H0)** erfüllt. Wegen der Poincaré-Ungleichung für Gausssche Maße gilt **(H1)**. Die Bedingung **(H3)** gilt allgemein für kinetische Gleichungen, und Bedingung **(H2)** folgt aus **(H2.1)**. Aus **(H4.1)** erhalten wir die Beschränktheit des Operators $\mathsf{AT}(1-\Pi)$, und die Beschränktheit des Operators $\mathsf{AL}$ folgt wegen obiger Rechnung aus Lemma 4.1.6. Damit sind alle Voraussetzungen für den Satz 4.1.7 erfüllt, und wir erhalten exponentielle Konvergenz gegen das globale Gleichgewicht (4.92). □

### 4.3.3 Scattering Operator (ohne "detailed balance")

Wir betrachten nun den folgenden Scattering Operator

$$(\mathsf{L}f)(v) = \int_{\mathbb{R}^d} (k(v^* \to v)f(v^*) - k(v \to v^*)f(v))\, dv^*, \quad k \geq 0. \tag{4.104}$$

Dabei bezeichet $k(v^* \to v)$ die Übergangswahrscheinlichkeit, dass sich ein mit Geschwindigkeit $v^*$ bewegendes Teilchen nach dem Stoß mit Geschwindigkeit $v$ weiterbewegt. Für den Operator $\mathsf{L}$ gilt stets Masseerhaltung

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathsf{L}f)(v)dv = \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} k(v^* \to v)f(v^*)dv^*dv - \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} k(v \to v^*)f(v)dv^*dv = 0.$$

Rotationssymmetrie kann durch die Forderung $k(Rv^* \to Rv) = k(v^* \to v)$ für alle $v, v^*$ und für alle Rotatationsmatrizen $R$ erreicht werden. "Detailed balance" würde bedeuten, dass der Integrand punktweise verschwindet, sobald $f$ ein lokales Gleichgewicht ist. Dies benötigen wir nicht, und fordern nur"global balance "$\mathsf{L}\mathfrak{M} = 0$. Aus [7] wissen wir, dass in diesem Fall folgendes H-Theorem gilt:

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \mathsf{L}f \frac{f}{\mathfrak{M}}dv = \frac{1}{4}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \left(\frac{k(v^* \to v)}{\mathfrak{M}} + \frac{k(v \to v^*)}{\mathfrak{M}^*}\right)\mathfrak{M}\mathfrak{M}^* \left(\frac{f}{\mathfrak{M}} - \frac{f^*}{\mathfrak{M}^*}\right)^2 dv^*dv, \tag{4.105}$$

wobei $f^*$ für $f(v^*)$ steht. Nun formulieren wir eine hinreichende Bedingung für mikroskopische Koerzivität:

$$\textbf{Voraussetzung (H1.1)} \quad \left(\frac{k(v^* \to v)}{\mathfrak{M}} + \frac{k(v \to v^*)}{\mathfrak{M}^*}\right) \geq 2\lambda_m > 0.$$

**Lemma 4.3.4.** *Aus* **(H1.1)** *folgt die mikroskopische Koerzivität* **(H1)**.

*Beweis.* Der Beweis folgt durch Nachrechnen. Dies führen wir in mehreren Schritten durch.

**1. Schritt**

**Behauptung:** Es gilt

$$-\langle \mathsf{L}f, f\rangle \geq \frac{\lambda_m}{2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)} \left(\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{(\mathfrak{M}^* f - \mathfrak{M} f^*)^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*}dv^*dv\right)dx.$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
-\langle \mathsf{L}f, f\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}(-1)\int_{\mathbb{R}^d} \mathsf{L}f\frac{f}{\mathfrak{M}}dvdx \\
&\overset{(4.105)}{=} \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{k(v^*\to v)}{\mathfrak{M}}+\frac{k(v\to v^*)}{\mathfrak{M}^*}\right)\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*\left(\frac{f}{\mathfrak{M}}-\frac{f^*}{\mathfrak{M}^*}\right)^2 dv^*dvdx \\
&\overset{\mathbf{H1.1}}{\geq} \frac{\lambda_m}{2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*\left(\frac{f}{\mathfrak{M}}-\frac{f^*}{\mathfrak{M}^*}\right)^2 dv^*dvdx \\
&= \frac{\lambda_m}{2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\left(\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\frac{\left(\mathfrak{M}^*f-\mathfrak{M}f^*\right)^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*}dv^*dv\right)dx.
\end{aligned}$$

**2. Schritt**
**Behauptung:** Es gilt

$$\|(1-\Pi)f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\frac{\left(\mathfrak{M}^*f-\mathfrak{M}^*\mathfrak{M}\rho(x)\right)^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*}dv^*dvdx.$$

**Beweis:** Es gilt $\Pi f = \frac{\rho_f}{\rho_F}F = \rho(x)\mathfrak{M}(v)$ mit $\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f dv$, da $F(x,v) = e^{-V(x)}\mathfrak{M}(v) = \rho_F\mathfrak{M}(v)$, und daher gilt $(1-\Pi)f = f(x,v) - \rho(x)\mathfrak{M}(v)$. Nun folgt durch geschicktes "Hinzuschummeln" gewisser Terme:

$$\begin{aligned}
\|(1-\Pi)f\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left(f-\mathfrak{M}(v)\rho(x)\right)^2\frac{1}{\mathfrak{M}(v)}dv\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\left(f-\mathfrak{M}(v)\rho(x)\right)^2}{\mathfrak{M}(v)}dv\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}\mathfrak{M}(v^*)dv^*}_{=1}\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\left(\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\frac{\left(f-\mathfrak{M}(v)\rho(x)\right)^2\mathfrak{M}^*}{\mathfrak{M}(v)}dv^*dv\right)dx \\
&\overset{\cdot\frac{\mathfrak{M}^*}{\mathfrak{M}^*}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\left(\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\frac{\left(\mathfrak{M}^*\right)^2\left(f-\mathfrak{M}(v)\rho(x)\right)^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*}dv^*dv\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\frac{\left(\mathfrak{M}^*(f-\mathfrak{M}(v)\rho(x))\right)^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*}dv^*dvdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\frac{\left(\mathfrak{M}^*f-\mathfrak{M}^*\mathfrak{M}\rho(x)\right)^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*}dv^*dvdx.
\end{aligned}$$

**3. Schritt**
**Behauptung:** Es gilt

$$\|(1-\Pi)f\|^2 \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\frac{\left(\mathfrak{M}^*f-\mathfrak{M}f^*\right)^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*}dv^*dvdx.$$

**Beweis:** Wir multiplizieren die Quadrate aus. Da der erste Term dabei auf beiden Seiten gleich

ist, lassen wir den gleich weg. Wir erhalten für die linke Seite

$$\begin{aligned}
& -2\int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)} \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \mathfrak{M}^* f\rho dv^* dv dx + \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)} \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \mathfrak{M}^*\mathfrak{M}\rho^2 dv^* dv dx \\
= \; & -2\int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\rho(x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{M}^* dv^*}_{=1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} f dv}_{=\rho(x)} dx + \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\rho(x)^2 dx \\
= \; & -2\int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\rho(x)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\rho(x)^2 dx \\
= \; & -\int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)}\rho(x)^2 dx.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite ergibt ebenfalls nach Kürzen des ersten Terms

$$\begin{aligned}
& -\int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)} \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{\mathfrak{M}^*\mathfrak{M} f f^*}{\mathfrak{M}^*\mathfrak{M}} dv^* dv dx + \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)} \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{\mathfrak{M}^2 (f^*)^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*} dv^* dv dx \\
= \; & -\int_{\mathbb{R}^d} e^{-V(x)}\rho(x)^2 dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)} \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{\mathfrak{M}^2 (f^*)^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*} dv^* dv dx}_{\geq 0}.
\end{aligned}$$

Also folgt, dass die linke Seite kleiner oder gleich der rechten Seite ist. Insgesamt ergeben diese drei Schritte die Behauptung des Lemmas. □

Nun können wir die Kollisionsfrequenz $\nu(v)$ definieren:

$$\nu(v) := \int_{\mathbb{R}^d} k(v \to v^*) dv^*.$$

Für diese gilt

$$\nu(v) := \int_{\mathbb{R}^d} k(v \to v^*) dv^* = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \left( \frac{k(v^* \to v)}{\mathfrak{M}} + \frac{k(v \to v^*)}{\mathfrak{M}^*} \right) \mathfrak{M}^* dv^*,$$

denn wegen $\mathsf{L}\mathfrak{M} = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \left( \frac{k(v^* \to v)}{\mathfrak{M}} + \frac{k(v \to v^*)}{\mathfrak{M}^*} \right) \mathfrak{M}^* dv^* \\
= \; & \frac{1}{2}\frac{1}{\mathfrak{M}(v)}\int_{\mathbb{R}^d} k(v^* \to v)\mathfrak{M}^* dv^* + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{k(v \to v^*)}{\mathfrak{M}^*}\mathfrak{M}^* dv^* \\
\overset{\mathsf{L}\mathfrak{M}=0}{=} \; & \frac{1}{2}\frac{1}{\mathfrak{M}(v)}\int_{\mathbb{R}^d} k(v \to v^*)\mathfrak{M} dv^* + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} k(v \to v^*) dv^* \\
= \; & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} k(v \to v^*) dv^* + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} k(v \to v^*) dv^* \\
= \; & \int_{\mathbb{R}^d} k(v \to v^*) dv^* \\
= \; & \nu(v).
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit Hilfe von **(H1.1)**:

$$\nu(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \left( \frac{k(v^* \to v)}{\mathfrak{M}} + \frac{k(v \to v^*)}{\mathfrak{M}^*} \right) \mathfrak{M}^* dv^* \geq \lambda_m \int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{M}^* dv^* = \lambda_m.$$

Nun wollen wir die Beschränktheit von $\mathsf{AL}$ zeigen, und verwenden eine ähnliche Technik wie in Lemma 4.1.15, wo wir die Beschränktheit von $\mathsf{AT}(1-\Pi)$ gezeigt hatten.

Dazu betrachten wir den Ausdruck $g = \mathsf{AL}f$, setzen $g = uF$, und erhalten durch Einsetzen und Umformen eine elliptische Differentialgleichung der Form

$$ue^{-V} - \nabla_x \cdot (e^{-V}\nabla_x u) = -\nabla_x \cdot j_{\mathsf{L}f},$$

wobei wieder $j_{\mathsf{L}f} := \int_{\mathbb{R}^d} v(\mathsf{L}f)dv$ gilt. Die Rechnungen hierzu sehen im Detail folgendermaßen aus: Wir betrachten die Gleichung

$$\mathsf{AL}f = g \quad \text{mit} \quad \mathsf{A} := (1 + (\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi))^{-1}(\mathsf{T}\Pi)^* = -(1 + (\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi))^{-1}\Pi\mathsf{T}.$$

Diese lässt sich umformen zu

$$g + (\mathsf{T}\Pi)^*(\mathsf{T}\Pi)g = -\Pi\mathsf{T}\mathsf{L}f,$$

und weiters zu

$$g - \Pi\mathsf{T}^2\Pi g = -\Pi\mathsf{T}\mathsf{L}f.$$

Nun integrieren wir diese Gleichung über die Variable $v$ und erhalten wegen $\int_{\mathbb{R}^d}\mathfrak{M}(v)dv = 1$:

$$ue^{-V} - \int_{\mathbb{R}^d}\Pi\mathsf{T}^2\Pi g dv = -\int_{\mathbb{R}^d}\Pi\mathsf{T}\mathsf{L}f dv. \tag{4.106}$$

Nun gilt für den mittleren Ausdruck wegen der Rechnung aus (4.64):

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Pi\mathsf{T}^2\Pi g dv = \nabla_x \cdot (m_F\nabla_x u) \overset{(4.95)}{=} \nabla_x \cdot \left(e^{-V}\nabla_x u\right),$$

und der hinterste Ausdruck aus (4.106) vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}\Pi\mathsf{T}\mathsf{L}f dv &= \int_{\mathbb{R}^d}\frac{F}{\rho_F}\rho_{\mathsf{T}\mathsf{L}f}dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\frac{F}{\rho_F}\left(\int_{\mathbb{R}^d} v\cdot\nabla_x(\mathsf{L}f) - \nabla_x V\cdot\nabla_v(\mathsf{L}f)dv\right)dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\frac{F}{\rho_F}\left(\nabla_x\cdot\int_{\mathbb{R}^d} v\mathsf{L}f dv - \nabla_x V\cdot\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_v(\mathsf{L}f)dv}_{=0}\right)dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\frac{F}{\rho_F}\left(\nabla_x\cdot\int_{\mathbb{R}^d} v\mathsf{L}f dv\right)dv \\
&= \nabla_x\cdot\int_{\mathbb{R}^d} v\mathsf{L}f dv \\
&= \nabla_x\cdot j_{\mathsf{L}f}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir tatsächlich die gewünschte Differentialgleichung

$$ue^{-V} - \nabla_x \cdot (e^{-V}\nabla_x u) = -\nabla_x \cdot j_{\mathsf{L}f}.$$

Durch Multiplikation mit $u$ und Integration erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^2 e^{-V}dx - \int_{\mathbb{R}^d} u\nabla_x\cdot(e^{-V}\nabla_x u)dx = -\int_{\mathbb{R}^d} u\nabla_x\cdot j_{\mathsf{L}f}dx, \tag{4.107}$$

und partielle Integration liefert

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^2 e^{-V} dx + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 e^{-V} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x u \cdot j_{\mathsf{L}f} dx.$$

Jetzt unterteilen wir den Operator $\mathsf{L} = \mathsf{L}^+ - \mathsf{L}^-$ in den Gewinnterm

$$(\mathsf{L}^+ f)(v) = \int_{\mathbb{R}^d} k(v^* \to v) f(v^*) dv^*$$

und in den Verlustterm

$$(\mathsf{L}^- f)(v) = \int_{\mathbb{R}^d} k(v \to v^*) f(v) dv^*,$$

und schätzen die Terme einzeln ab.

Wir "schummeln"wieder passende Terme ein, wenden die Cauchy-Schwarz Ungleichung zuerst auf den inneren Term und dann auf den äußeren Term an und erhalten für den Gewinnterm:

$$\begin{aligned}
|j_{\mathsf{L}^+ f}| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} v \mathsf{L}^+ f dv \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |v| \left( \int_{\mathbb{R}^d} k(v^* \to v) |f^*| dv^* \right) dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |v| \left( \int_{\mathbb{R}^d} (\mathfrak{M}^*)^{\frac{1}{2}} k(v^* \to v) \frac{|f^*|}{(\mathfrak{M}^*)^{\frac{1}{2}}} dv^* \right) dv \\
&\overset{\text{Cauchy-Schw.}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^d} |v| \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f^*|^2}{\mathfrak{M}^*} dv^* \int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{M}^* k(v^* \to v)^2 dv^* \right)^{\frac{1}{2}} dv \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f^*|^2}{\mathfrak{M}^*} dv^* \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |v| \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{M}^* k(v^* \to v)^2 dv^* \right)^{\frac{1}{2}} dv \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f^*|^2}{\mathfrak{M}^*} dv^* \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |v| \frac{\mathfrak{M}^{\frac{1}{2}}}{\mathfrak{M}^{\frac{1}{2}}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{M}^* k(v^* \to v)^2 dv^* \right)^{\frac{1}{2}} dv \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f^*|^2}{\mathfrak{M}^*} dv^* \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathfrak{M}^{\frac{1}{2}} |v|}{\mathfrak{M}^{\frac{1}{2}}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{M}^* k(v^* \to v)^2 dv^* \right)^{\frac{1}{2}} dv \\
&\overset{\text{Cauchy-Schw.}}{\leq} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f^*|^2}{\mathfrak{M}^*} dv^* \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{M} dv \right)^{\frac{1}{2}}}_{=1} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|v|^2}{\mathfrak{M}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{M}^* k(v^* \to v)^2 dv^* dv \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f^*|^2}{\mathfrak{M}^*} dv^* \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |v|^2 k(v^* \to v)^2 \frac{\mathfrak{M}^*}{\mathfrak{M}} dv^* dv \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Für die Abschätzung des Verlustterms $\mathsf{L}^- f$ vertauschen wir die Rollen von $v$ und $v^*$ und erhalten

$$(\mathsf{L}^- f)(v) = \int_{\mathbb{R}^d} k(v \to v^*) f dv^* = \int_{\mathbb{R}^d} k(v^* \to v) f^* dv.$$

Dann gilt wieder durch zweimaliges Anwenden der Cauchy-Schwarz Ungleichung (zuerst nur auf den inneren und dann auf den ganzen Ausdruck) und durch "Hineinschummeln" geeigneter Terme:

$$
\begin{aligned}
|j_{\mathsf{L}^- f}| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |v^*||\mathsf{L}^- f| dv^* \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |v^*| k(v^* \to v) |f^*| dv dv^* \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |v^*| (\mathfrak{M}^*)^{\frac{1}{2}} k(v^* \to v) \frac{|f^*|}{(\mathfrak{M}^*)^{\frac{1}{2}}} dv^* dv \\
&\overset{\text{Cauchy-Schw.}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f^*|^2}{\mathfrak{M}^*} dv^* \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |v^*|^2 \mathfrak{M}^* k(v^* \to v)^2 dv^* \right)^{\frac{1}{2}} dv \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f^*|^2}{\mathfrak{M}^*} dv^* \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |v^*|^2 \mathfrak{M}^* k(v^* \to v)^2 dv^* \right)^{\frac{1}{2}} dv \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f^*|^2}{\mathfrak{M}^*} dv^* \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(\mathfrak{M})^{\frac{1}{2}}}{(\mathfrak{M})^{\frac{1}{2}}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |v^*|^2 \mathfrak{M}^* k(v^* \to v)^2 dv^* \right)^{\frac{1}{2}} dv \\
&\overset{\text{Cauchy-Schw.}}{\leq} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f^*|^2}{\mathfrak{M}^*} dv^* \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{M} dv \right)^{\frac{1}{2}}}_{=1} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\mathfrak{M}} \int_{\mathbb{R}^d} |v^*|^2 \mathfrak{M}^* k(v^* \to v)^2 dv^* dv \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f^*|^2}{\mathfrak{M}^*} dv^* \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |v^*|^2 k(v^* \to v)^2 \frac{\mathfrak{M}^*}{\mathfrak{M}} dv^* dv \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Somit haben wir eine analoge Abschätzung für den Verlustterm gezeigt. Nun führen wir folgende Voraussetzung ein:

$$\textbf{Voraussetzung (H4.2)} \quad \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} (|v|^2 + |v^*|^2) k(v^* \to v)^2 \frac{\mathfrak{M}^*}{\mathfrak{M}} dv^* dv < \infty.$$

Unter dieser Voraussetzung gilt dann insgesamt für den ganzen Kollisionsoperator $\mathsf{L}$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x u \cdot j_{\mathsf{L} f} dx \right| \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 e^{-V} dx \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|,$$

denn

$$
\begin{aligned}
|j_{\mathsf{L} f}| &= |j_{\mathsf{L}^+ f} - j_{\mathsf{L}^- f}| \\
&\leq |j_{\mathsf{L}^+ f}| + |j_{\mathsf{L}^- f}| \\
&\leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f^*|^2}{\mathfrak{M}^*} dv^* \int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} (|v|^2 + |v^*|^2) k(v^* \to v)^2 \frac{\mathfrak{M}^*}{\mathfrak{M}} dv^* dv \right)^{\frac{1}{2}} dx,
\end{aligned}
$$

und daher gilt

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x u \cdot j_{\mathsf{L}f} dx \right| \\
\leq \quad & \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u| |j_{\mathsf{L}f}| dx \\
\leq \quad & \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u| \frac{e^{-V/2}}{e^{-V/2}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f^*|^2}{\mathfrak{M}^*} dv^* \int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (|v|^2 + |v^*|^2) k(v^* \to v)^2 \frac{\mathfrak{M}^*}{\mathfrak{M}} dv^* dv \right)^{\frac{1}{2}} dx \\
\overset{\textbf{(H4.2)}}{\leq} \quad & C \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u| \frac{e^{-V/2}}{e^{-V/2}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f^*|^2}{\mathfrak{M}^*} dv^* \right)^{\frac{1}{2}} dx \\
\overset{\text{Cauchy-Sch.}}{\leq} \quad & C \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 e^{-V} dx \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^d} e^{V(x)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f^*|^2}{\mathfrak{M}^*} dv^* dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{=\|f\|} \\
= \quad & C \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 e^{-V} dx \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|.
\end{aligned}$$

Nun können wir die Beschränktheit von $\mathsf{AL}$ zeigen. Aus Gleichung (4.107) folgt nämlich durch partielle Integration, obiger Rechung und Anwendung der Young-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} u^2 e^{-V} dx + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 e^{-V} dx \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x u \cdot j_{\mathsf{L}f} dx \\
&\leq \quad C \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 e^{-V} dx \right)^{\frac{1}{2}} \|f\| \\
&\overset{\text{Young}}{\leq} \quad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 e^{-V} dx + \frac{C}{2} \|f\|^2.
\end{aligned}$$

Jetzt bringen wir den Term $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 e^{-V} dx$ auf die linke Seite und erhalten:

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^2 e^{-V} dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} u^2 e^{-V} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u|^2 e^{-V} dx \leq \frac{C}{2} \|f\|^2. \tag{4.108}$$

Wegen

$$\|\mathsf{AL}f\| = \|g\| = \|uF\| = \left( \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 F dx dv \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 e^{-V} dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

gilt nun

$$\|\mathsf{AL}f\| = \left( \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 e^{-V} dx \right)^{\frac{1}{2}} \overset{(4.108)}{\leq} \sqrt{\frac{C}{2}} \|f\|,$$

und damit ist der Ausdruck $\mathsf{AL}$ beschränkt.

Aus den Voraussetzungen **(H4.1), (H4.2)** und der letzten Abschätzung erhalten wir nun **(H4)**.

**Satz 4.3.5.** *Sei* $\mathsf{L}$ *der Scattering Operator definiert in* (4.104). *Falls* **(H0.1)**, **(H1.1)**, **(H2.1)**, **(H4.1)** und **(H4.2)** *gelten, so konvergiert die Lösung von* (4.1) *mit Anfangsbedingung* $f_I$ *in* $L^2(\mu)$ *exponentiell schnell gegen das globale Gleichgewicht* $F(x,v)$ *aus* (4.92).

*Beweis.* Aus **(H0.1)** folgt **(H0)**, aus **(H1.1)** folgt **(H1)**, und aus **(H2.1)** folgt **(H2)**. Die Bedingung **(H3)** gilt für alle kinetischen Gleichungen. Aus **(H4.1)** folgt die Beschränktheit des Operators $\mathsf{AT}(1-\Pi)$, und aus **(H4.2)** die Beschränktheit von $\mathsf{AL}$. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 4.1.7 erfüllt, und wir erhalten exponentiellen Abklang zum globalen Gleichgewicht $F(x, v)$ aus (4.92). □

# Anhang A

# Grundlagen aus Partiellen Differentialgleichungen

Es folgt eine Zusammenstellung wichtiger Sätze und Definitionen aus [18], die im Laufe der Arbeit verwendet wurden.

**Lemma A.0.6** (**Variationslemma**). *Sei $\Omega$ eine offene Menge und $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad n \geq 1$ eine integrierbare Funktion. Gilt*

$$\int_\omega u(x)dx = 0 \quad \text{für alle offenen Mengen} \quad \omega \subset \Omega,$$

*so folgt $u(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$.*

## A.1 Wichtige Ungleichungen

**Satz A.1.1** (**Poincaré-Ungleichung**). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$. Dann existiert eine Konstante $C_P > 0$, sodass für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt:*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla_x u\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Lemma A.1.2** (**Lemma von Gronwall**). *Seien $U : [0,T] \to [0,\infty]$ absolut stetig und $F, G : [0,T] \to [0,\infty]$ integrierbar, und es gelte für fast alle $t \in (0,T)$ :*

$$\frac{dU}{dt} \leq G(t)U + F(t).$$

*Dann gilt für alle $t \in [0,T]$ :*

$$U(t) \leq \exp\left(\int_0^t G(s)ds\right)\left(U(0) + \int_0^t F(s)ds\right).$$

**Satz A.1.3** (**Young-Ungleichung**). *Seien $x, y \geq 0$, $\delta > 0$ und $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt:*

$$xy \leq \frac{\delta}{p}x^p + \frac{1}{q\delta^{q/p}}y^q.$$

## A.2 Riesz, Lax-Milgram

**Definition A.2.1.** Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Dann ist der Dualraum $\mathcal{H}'$ von $\mathcal{H}$ definiert als

$$\mathcal{H}' := \{F : \mathcal{H} \to \mathbb{R} : F \text{ linear, stetig}\}.$$

**Satz A.2.2 (Darstellungssatz von Riesz).** *Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $F \in \mathcal{H}'$. Dann existiert genau ein $u \in \mathcal{H}$, sodass für alle $v \in \mathcal{H}$*

$$(u, v) = F(v).$$

**Definition A.2.3.** Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Wir nennen *a stetig*, wenn eine Konstante $K > 0$ existiert, sodass

$$|a(u, v)| \leq K\|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle} \quad u, v \in \mathcal{H}.$$

Die Bilinearform heißt *koerziv*, wenn eine Konstante $\kappa > 0$ existiert, sodass

$$a(u, u) \geq \kappa\|u\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{für alle} \quad u \in \mathcal{H}.$$

**Lemma A.2.4 (Lax-Milgram).** *Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$, $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ eine stetige und koerzive Bilinearform und $f \in \mathcal{H}'$. Dann existiert genau ein $u \in \mathcal{H}$, sodass*

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{für alle} \quad v \in \mathcal{H}.$$

*Für diese Lösung gilt außerdem die folgende a priori Abschätzung:*

$$\|u\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa^{-1}\|F\|_{\mathcal{H}'}.$$

## A.3 Sobolevräume

*Wir führen zunächst folgende Multiindex-Schreibweise ein: Wir definieren den Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ und den Grad von $\alpha$: $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_d$. Weiters setzen wir*

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}}, \quad D^k u = \{D^\alpha u : |\alpha| = k\}.$$

*Insbesondere bezeichnet dann $Du = (u_{x_1,\cdots,u_{x_d}})^T$ den Gradienten von $u$ und $D^2 u$ die Hesse-Matrix von $u$.*

Nun sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann können wir auf dem Vektorraum $C^\infty(\bar{\Omega})$ folgendes Skalarprodukt einführen:

$$(u, v)_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx,$$

mit der dadurch induzierten Norm:

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{H^k}}.$$

Weiters lässt sich nun folgendes definieren:

**Definition A.3.1.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Der Abschluss von $X = \{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{H^k(\Omega)} < \infty\}$ bezüglich der oben definierten Norm $\|\cdot\|_{H^k}$ ist der *Sobolevraum* $H^k(\Omega)$. Wir schreiben:

$$H^k(\Omega) = \overline{X}.$$

Dann ist der Raum $H^k(\Omega)$ ein Hilbertraum, und wir setzen $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

# Literaturverzeichnis


[1] Anton Arnold: *Variationsrechnung.* Vorlesungsskriptum der TU Wien, Sommersemester 2010.

[2] H. Babovsky: *Die Boltzmann-Gleichung.* Teubner, Stuttgart, (1998).

[3] Blanchet, Bonforte, Dolbeault, Grillo, Vázques: *Hardy-Poincaré inequalities and applications to nonlinear diffusions.* Comptes Rendus Mathématique 344 (2007), no.7, Seite 431-436.

[4] Martin Blümlinger *Funktionalanalysis 2.* Vorlesungsverzeichnis der TU Wien, Wintersemester 2010.

[5] Blümlinger, Woracek, Kaltenbäck: *Funktionalanalysis 1.* TU Wien, 7. Auflage Jänner 2012.

[6] Carlo Cattaneo: *Sulla conduzione del calore.* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 3 (1949), 83-101. MR MR0032898 (11, 362d).

[7] P. Degond, T. Goudon, und F. Poupaud *Diffusion limit for nonhomogeneous and non-microreversible processes.* Indiana Univ. Math. J. 49 (2000), no.3, 1175-1198. MR MR1803225 (2002a:35012).

[8] J.-D. Deuschel, D. W. Strook: *Large deviations.* Pure and Applied Mathematics, Academic Press Inc., Boston, MA (1989).

[9] Jean Dolbeault, Clément Mouhot, Christian Schmeiser: *Hypocoercivity for linear kinetic equations conserving mass.* arXiv:1005.1495v1 [math.AP] 10 May (2010).

[10] Lawrence C. Evans: *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics Volume 19, American Mathematical Society (1998).

[11] Werner Gurker: *Angewandte Statistik.* Vorlesungsskriptum der Technischen Universität Sommersemester 2011.

[12] Frédéric Hérau: *Hypocoercivity and exponential time decay for the linear inhomogeneous relaxation Boltzmann equation.* Asymptot. Anal. 46 (2006), no. 3-4, 349-359. MR Mr2215889 (2007b:35044).

[13] Frédéric Hérau, J. Sjöstrand, Stolk: *Semiclassical analysis for the Kramers-Fokker-Planck equation.* Comm. Partial Differential Equations 30, 4-6 pp. 689-760 (2005).

[14] Frédéric Hérau: *Uniform bounds and exponential time decay results for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system.* ccsd-00004028, Version 1-21 Jan 2005.

[15] Ansgar Jüngel, Daniel Matthes: *Entropiemethoden für nichtlineare partielle Differentialgleichungen.* In: Internationale Mathematische Nachrichten 209 (2008), S. 1-14.

[16] Ansgar Jüngel: *Entropy dissipation methods for nonlinear differential equations.* Lecture Notes, Spring School Bielefeld, March 2012.

[17] Ansgar Jüngel: *Kinetic and Macroskopic Equations for Semiconductors.* Lecture notes for a lecture series a the Technical University of Munich August 13 2012.

[18] Ansgar Jüngel: *Partielle Differentialgleichungen.* Vorlesungsmanuskript der TU Wien, 16. Dezember 2009.

[19] Ansgar Jüngel: *Transport Equations for Semiconductors.* Lecture Notes in Physics Springer Berlin-Heidelberg (2009).

[20] Michael Kaltenbäck: *Analysis 2.* Vorlesungsskriptum der Technischen Universität Wien. Sommersemester 2007.

[21] Michael Kaltenbäck: *Funktionalanalysis 2.* Vorlesungsskriptum der Technischen Universität Wien. Wintersemester 2011-2012.

[22] Clément Mouhot, Lukas Neumann: *Quantitative perturbative study of convergence to equilibrium for collisional kinetic models in the torus.* Nonlinearity 19, A (2006), p. 969-998.

[23] Amnon Pazy: *Semigroups of linear operators and application to partial differential equations.* Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag New York (1983).

[24] Arne Persson: *Bounds for the discrete part of the spectrum of the a semi-bounded Schrödinger operator.* Math. Scand. 8 (1960) 143-153 MR MR0133586 (24#A3412).

[25] F. Poupaud: *Diffusion approximation of the linear semiconductor Boltzmann equation: analysis of boundary layers.* Asymptotic Analysis 4 (1991), p. 293-317, North Holland.

[26] Claudia Prévôt, Michael Röckner: *A Concise Course on Stochastic Partial Differential Equations.* Lecture Notes in Mathematics 1905, Springer Berlin, Heidelberg (2007).

[27] Franz Schwabl: *Statistische Mechanik.* 2. Auflage, Springer Berlin, Heidelberg, New York (2004).

[28] Cédric Villani: *A review of mathematical topics in kinetic theory.* In: Handbook of Mathematical Fluid Dynamics (Vol.1), edited by S. Friedlander and D. Serre, Elsevier Science (2002).

[29] Cédric Villani: *Hypocoercivity.* arXiv: math/0609050v1 [math.AP] 1 Sep 2006.

[30] Dirk Werner: *Funktionalanalysis.* Dritte, neu bearbeitete und erweiterte Auflage, Springer (2000).