Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

Masterarbeit

Diffusionsapproximation und das de Finetti Problem in endlicher Zeit

ausgeführt am
Institut für Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits

durch
Magdalena Etzlstorfer, BSc
Lichtenau 76, 4264 Grünbach

Datum

Unterschrift

Zusammenfassung

Die Arbeit beschäftig sich mit dem Auffinden von Strategien für die optimale Dividendenauszahlung. Die jeweilige optimale Strategie wird zuerst für eine beschränkte Dividendenrate und später für eine unbeschränkte Dividendenrate bestimmt. Anschließend wird der Verlauf eines Vermögensprozesses und die entsprechenden abgezinsten kumulierten Dividendenauszahlungen unter einer vorgegebenen Barriere in endlicher Zeit simuliert. Auch die Ruinwahrscheinlichkeit wird geschätzt. Des Weiteren sind numerische Analysen angeführt, um die Auswirkung der Modellparameter auf die Ruinwahrscheinlichkeit zu zeigen.

Abstract

The thesis is concerned with finding strategies for optimal pay-out of dividends. First, the respective optimal strategy is determined for a restricted dividend rate and later for an unrestricted dividend rate. Then a reserve and the corresponding discounted cumulated dividend pay-outs are simulated under a predetermined barrier in finite time. Also, the ruin probability is estimated. In addition, numerical analysis are presented to show the impact of the model parameters on the probability of ruin.

Eidesstaatliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel erstellt zu haben.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Wien, _____

Unterschrift

Danksagung

Ich möchte meinem Betreuer Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits für die großartige und geduldige Unterstützung während der Masterarbeitsphase sehr herzlich danken. Insbesondere bedanke ich mich für die stets rasche Beantwortung aller Fragen per e-mail und für die Bereitstellung vieler nützlicher Materialen.

Des Weiteren möchte ich meiner Familie, meinen Studienkollegen und Freunden danken, die mir immer mit Rat und Tat zur Seite gestanden sind.

Abbildungsverzeichnis

3.1 Stichprobenpfad von X_t 7

5.1 Stichprobenpfad des Cramér-Lundberg Modells unter einer Thresholdstrategie 17
5.2 Stichprobenpfad des Cramér-Lundberg Modells unter einer Barrierestrategie 18

6.1 Simulation eines Vermögensprozesses und der entsprechenden kumulierten Dividenden unter einer Barrierestrategie mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.9$ und $X_0 = 0.6$ 35
6.2 abgebrochene Simulation eines Vermögensprozesses mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.9$ und $X_0 = 0.6$ 36
6.3 Simulation eines Vermögensprozesses und der entsprechenden kumulierten Dividenden mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.9$ und $X_0 = 0.8$ 37
6.4 Simulation eines Vermögensprozesses und der entsprechenden kumulierten Dividenden mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.9$ und $X_0 = 0.3$ 38
6.5 Simulation eines Vermögensprozesses und der entsprechenden kumulierten Dividenden mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.6$ und $X_0 = 0.8$ 39
6.6 Simulation eines Vermögensprozesses und der entsprechenden kumulierten Dividenden mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.6$ und $X_0 = 0.3$ 39
6.7 Simulation eines Vermögensprozesses und der entsprechenden kumulierten Dividenden mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 1$ und $X_0 = 0.8$ 40
6.8 Simulation eines Vermögensprozesses und der entsprechenden kumulierten Dividenden mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 1$ und $X_0 = 0.3$ 41
6.9 Simulation eines Vermögensprozesses bei Reflexion an der Geraden $\mu = 0.5$, $\sigma = 0.7$ und $X_0 = 0.6$ 42

Tabellenverzeichnis

6.1 Simulation eines Vermögensprozesses und der entsprechenden kumulierten Dividenden unter einer Barrierestrategie mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.9$ und $X_0 = 0.6$ 35

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Grundlagen der stochastischen Analysis **3**
2.1 Stochastische Prozesse, Brownsche Bewegung 3
2.2 Itô-Prozess und Itô-Formel 4
2.3 stochastische Differentialgleichung 5

3 Cramér-Lundberg Modell und Ruinwahrscheinlichkeit **6**

4 Einführung in die stochastische Kontrolltheorie **8**
4.1 Einführung 8
4.2 Das Bellman Prinzip und die HJB Gleichung 9
4.3 Verifikationstheorem 10

5 Modellbildung **12**
5.1 Diffusionsapproximation 12
5.2 Modellerweiterungen und Kontrollmöglichkeiten 13
5.2.1 Rückversicherung und Investitionen 13
5.2.2 Dividenden 14
5.2.3 Einige Kontrollstrategien 16
5.2.4 Strategien bei Diffusionsapproximation 19

6 Dividendenoptimierung **20**
6.1 Dividendenoptimierung mit beschränkter Dividendenrate 20
6.2 Dividendenoptimierung mit unbeschränkter Dividendenrate 26
6.3 Dividendenoptimierung mit einer Barrierefunktion 32
6.3.1 Simulation eines Vermögensprozesses mit Dividendenauszahlung . 33
6.3.2 Änderung der Parameter und ihre Auswirkung auf die Ruinwahrscheinlichkeit 36
6.3.3 Vergleich der Dividendenauszahlungen 41

A Programm zur Simulation **43**

Kapitel 1

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist, die optimale Strategie für die Dividendenauszahlung in einem Modell mit einer Barrierefunktion zu finden und zu simulieren. Dafür werden Grundlagen der stochastischen Analysis, der stochastischen Kontrolltheorie und der Risiko- und Ruintheorie benötigt, auf welche in den Kapiteln zwei bis vier näher eingegangen wird.

Kapitel 2 beschäftigt sich mit den Grundlagen der stochastischen Analysis, in welchem die Begriffsdefinitionen eines stochastischen Prozesses als auch einer Brownschen Bewegung angeführt sind. Weiters wird auf das Kernstück der stochastischen Analysis, die Itô-Formel, wie auch auf Itô-Prozesse näher eingegangen. Ein weiterer Bestandteil dieser Grundlagen stellt die Einführung der stochastischen Differentialgleichung dar und auch die Existenz von Lösungen wird kurz erläutert.

In Kapitel 3 wird das Cramér-Lundberg Modell erläutert und eingeführt. Auch werden die Begriffe Ruinzeitpunkt, Ruinwahrscheinlichkeit und Überlebenswahrscheinlichkeit definiert und erklärt. Diese werden später bei der Simulation benötigt.

In Kapitel 4 wird eine Einführung in die stochastische Kontrolltheorie vorgenommen und die Begriffe Kontrollprozess, Zustandsprozess, Zielfunktional und Wertfunktion werden eingeführt. Darüberhinaus wird aus dem Bellman Prinzip die Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung hergeleitet, welche in späteren Kapiteln öfters Anwendung findet. Diese Gleichung ist eine notwendige Bedingung für die Wertfunktion und führt somit zum Verifikationstheorem.

Kapitel 5 befasst sich mit der Modellbildung. Es werden auch Modellerweiterungen durch Rückversicherung und Dividenden und Kontrollstrategien wie Barrierestrategie, Bandstrategie und Impulsstrategie vorgestellt.

Kapitel 6 widmet sich nun dem Hauptteil dieser Arbeit. Das Dividendenproblem mit unterschiedlichen Voraussetzungen wird behandelt. Zuerst wird die optimale Dividendenauszahlung für eine beschränkte Dividendenrate gesucht, anschließend für eine unbe-

schränkte Dividendenrate und zum Schluss erfolgt die Simulation der kumulierten Dividenden und Ruinwahrscheinlichkeiten mit einer Barrierestrategie, wobei die Barriere durch ein Matlab-Programm berechnet wird.

Im Anhang befinden sich die Programme zur Berechnung der Barriere und Simulation der kumulierten Dividenden und Ruinwahrscheinlichkeiten, die in Kapitel 6 für die Veranschaulichungen verwendet wurden.

Kapitel 2

Grundlagen der stochastischen Analysis

2.1 Stochastische Prozesse, Brownsche Bewegung[1]

Ein zufälliger Vorgang, der mit der Zeit abläuft, soll durch einen stochastischen Prozess beschrieben werden. Beispiele für solche Vorgänge sind der Zerfall einer radioaktiven Probe, ein Aktienkurs und die Schwerpunktbewegung auf unebenem Untergrund. Mehr dazu findet man in [1]. Dies motiviert folgende Begriffsbildung:

Definition 2.1.1 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *sei ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein stochastischer Prozess ist eine Familie* $(X_t)_{t\in I}$ *von Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum. Beispiele für die Indexmenge* I *sind* $I = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{N}_0$, $I = [a, b]$. *Als Pfad eines stochastischen Prozesses bezeichnet man die auf* I *definierte Funktion* $t \to X_t(\omega)$ *für* $\omega \in \Omega$.

Mit der Definition des stochastischen Prozesses ist es möglich, den Begriff „Brownsche Bewegung“ näher zu erläutern. Eine Brownsche Bewegung wird auch oft als Wiener Prozess bezeichnet, da Wiener 1923 erstmals ein korrektes Modell dafür schuf. Die Brownsche Bewegung ist einer der wichtigsten stetigen stochastischen Prozesse. Einerseits hat sie interessante mathematische Eigenschaften und andererseits ist sie ein Beispiel für viele interessante Klassen von stochastischen Prozessen, wie zum Beispiel Martingale.

Definition 2.1.2 *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ *ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Prozess* $(W_t)_{t\in T}$ *heißt Brownsche Bewegung, falls für* $s \leq t$ *gilt:*

1. $W_0 = 0$ $\mathcal{P}$*-fast sicher (standard Brownsche Bewegung)*
2. $W_t - W_s$ *ist unabhängig von* $\mathcal{F}_s$ *(unabhängige Zuwächse)*
3. $W_t - W_s \overset{d}{=} W_{t-s} \overset{d}{=} \mathcal{N}(0, t-s)$ *(stationäre Inkremente)*

[1] siehe [1], S. 18 ff.

4. $(W_t)_{t\in T}$ hat $\mathcal{P}$-fast sicher stetige Pfade

Definition 2.1.3 *Ein Prozess $X_t = \mu t + \sigma W_t$ heißt lineare Brownsche Bewegung mit Drift μ und Volatilität σ.*

2.2 Itô-Prozess und Itô-Formel

Einen wichtigen Teil der stochastischen Analysis bildet die Itô-Formel. In [3] findet man eine detaillierte Herleitung der Itô-Formel und eine Erläuterung eines Itô-Prozesses.

Definition 2.2.1 ***(eindimensionaler Itô-Prozess)*** *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(W_t)_{t\in T}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und X_0 eine $\mathcal{F}_0$- messbare Zufallsvariable.*
$(X_t)_{t\geq 0}$ heißt Itô-Prozess, falls gilt

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dW_s,$$

wobei u_s und v_s progressiv messbar sind - wobei eine Funktion $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ progressiv messbar ist, falls für $t \in I$ $f\big|_{[a,t]\times\Omega}$ $\mathcal{B}([a,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ messbar ist - und die Bedingungen $\mathbb{P}(\int_0^t |u_s| ds < \infty) = 1$ und $\mathbb{P}(\int_0^t v_s^2 ds < \infty) = 1$ erfüllen.
Mit Hilfe der Kurzschreibweise lässt sich ein Itô-Prozess so darstellen: $dX_t = udt + vdW_t$.

Satz 2.2.2 ***(eindimensionale Itô-Formel)*** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Itô-Prozess mit Werten in U und $f : [0,\infty) \times U \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Werten in $C^{1,2}$. Dann ist $f(t, X_t)$ ein Itô-Prozess und die folgende Gleichung gilt*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, u_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} v_s^2 \right) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, v_s dW_s.$$

In der Mathematik wird auch die mehrdimensionale Itô-Formel verwendet.

Definition 2.2.3 ***(mehrdimensionaler Itô-Prozess)*** *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^n)$ eine n-dimensionale Brownsche Bewegung bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. Weiters sei X_0 eine $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsvariable.*
Ein n-dimensionaler Prozess X_t heißt Itô-Prozess, falls gilt

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dW_s \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{dX_t = u_t dt + v_t dW_t},$$

wobei u_t ein progressiv messbarer n-dimensionaler Vektor ist, der $\mathbb{P}(\int_0^t |u_i(s)| ds < \infty \ \forall t \geq 0) = 1$ erfüllt und v_t eine $n \times m$-dimensionale Matrix bestehend aus adaptierten Prozessen ist.

Satz 2.2.4 ***(mehrdimensionale Itô-Formel)*** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $(X_t)_{t\geq 0}$ ein m-dimensionaler Itô-Prozess mit Werten in U und $f : [0,\infty) \times U \to \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, eine Funktion mit Werten in $C^{1,2}$. Dann ist $Y_t = (Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(p)}) = f(t, X_t)$ ein p-dimensionaler Itô-Prozess und die folgende Gleichung gilt*

$$Y_t^{(k)} = f_k(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f_k}{\partial s}(s, X_s) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(s, X_s)\, u_i(s)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s) \sum_{l=1}^n v_{il}(s) v_{jl}(s) ds + \int_0^t \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(s, X_s)\, v_{ij}(s) dW_s.$$

2.3 stochastische Differentialgleichung[2]

Man betrachte eine n-dimensionale Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\geq 0}$, eine Drift $b : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ und eine Diffusion $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m\times n}$, wobei beide Abbildungen messbar sind.
Als stochastische Differentialgleichung bezeichnet man eine Gleichung der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \tag{2.3.1}$$

oder in symbolischer Schreibweise

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t.$$

Eigentlich sind es m Gleichungen der Form $dX_t^i = b^i(t, X_t)dt + \sum_{k=1}^n \sigma^{ik}(t, X_t) dW_t^k$. Lösungen dieser stochastischen Differentialgleichung werden als stochastische Diffusion bezeichnet.

Definition 2.3.1 *Ein Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt Lösung der stochastischen Differentialgleichung* (2.3.1)*, falls gilt*

- $(X_t)_{t\geq 0}$ *erfüllt die stochastische Differentialgleichung,*
- $(X_t)_{t\geq 0}$ *ist adaptiert,*
- $\int_0^t |b^i(s, X_s)| ds < \infty$ *$\mathcal{P}$-fast sicher* $\forall i = 1, \ldots, m$,
- $\int_0^t (\sigma^{ij})^2 < \infty$ *$\mathcal{P}$-fast sicher* $\forall i = 1, \ldots, m, \forall j = 1, \ldots, n$.

[2] vgl. [2], S. 20 ff

Kapitel 3

Cramér-Lundberg Modell und Ruinwahrscheinlichkeit[1]

F. Lundberg stellte ein Risikomodell in stetiger Zeit auf, in dem der Gesamtschaden in jedem Zeitintervall einer zusammengesetzten Poisson Verteilung unterliegt. Auch das Prämieneinkommen muss modelliert werden. Da in einem Portfolio von Versicherungsverträgen die Prämienzahlungen über das ganze Jahr aufgeteilt sind, nahm Lundberg an, dass das Prämieneinkommen stetig über die Zeit erfolgt und für jedes Zeitintervall proportional zur Intervalllänge ist. Das führt zu folgendem Modell für die freie Reserve X_t (**Cramér-Lundberg Modell oder klassisches Risikomodell**) eines Versicherungsportfolios zur Zeit t:

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

$x \geq 0$ ist das deterministische Anfangskapital, die Prämien werden stetig über die Zeit mit der konstanten Intensität c eingenommen und der Gesamtschaden ist durch einen Compound-Poissonprozess $S = (S_t)_{t\geq 0}$ mit $S_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j$ gegeben, wobei die Anzahl der Schäden $(N_t)_{t\geq 0}$ bis t ein homogener Poissonprozess $N = (N_t)_{t\geq 0}$ mit Intensität $\lambda \geq 0$ ist. Die Schäden $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sind eine Folge positiver, unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen und unabhängig vom Poissonprozess N. Sei F_Y die Verteilungsfunktion der Schäden mit Momenten $\mu_n = \mathbb{E}[Y_1^n]$ und momenterzeugenden Funktion $M_{Y_1}(r) = \mathbb{E}[e^{rY_1}]$ und $\mu := \mu_1$. Es wird $\mu < \infty$ angenommen, da sonst die Versicherung dieses Risiko nicht versichern würde. Für eine Versicherungsgesellschaft ist es wichtig, dass die freie Reserve über einer bestimmten Schranke bleibt. Hier ist diese Schranke 0. Man spricht von einem (technischen) Ruin einer Versicherung, sobald der Reserveprozess das erste Mal in $(-\infty, 0)$ eintritt bzw. negativ wird.

Der **Ruinzeitpunkt** ist

$$T = \inf\{t > 0 : X_t < 0\}.$$

Für das Versicherungsunternehmen interessant ist in diesem Zusammenhang die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ruins.

[1] vgl. [4], S. 73. f.

Dies führt zur **Ruinwahrscheinlichkeit** (in Abhängigkeit vom Anfangskapital x)

$$\Psi(x) = \mathbb{P}[T < \infty]$$

bzw. zur **Überlebenswahrscheinlichkeit**

$$U(x) = 1 - \Psi(x).$$

Die Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit ist durch $\Psi(X_0, t) = \mathbb{P}[T < t]$ gegeben.

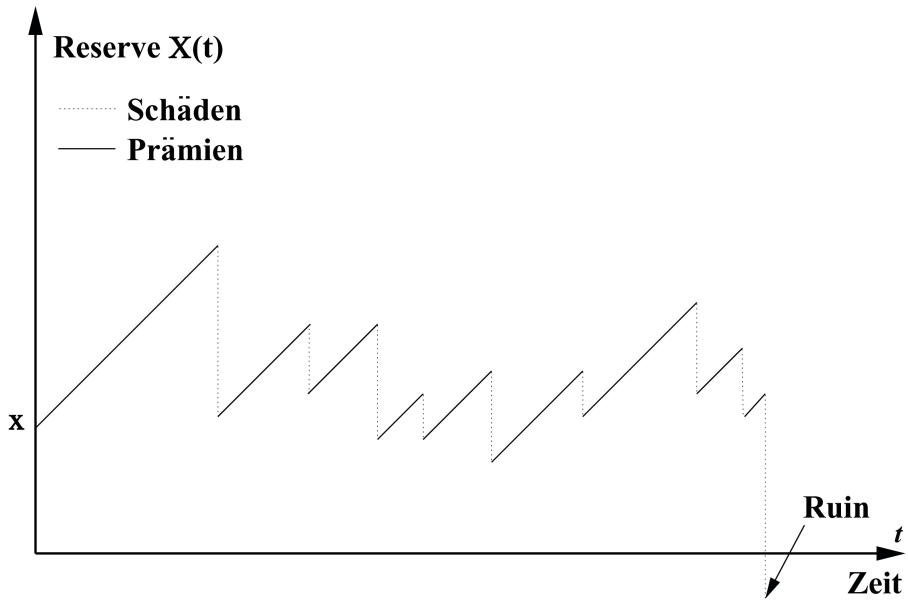

Abbildung 3.1: Stichprobenpfad von X_t

Bemerkung 3.0.2 *In der Praxis tritt Ruin so gut wie nie auf. Wenn eine Versicherungsgesellschaft merkt, dass ihre freie Reserve stark abnimmt, wird diese die Prämien erhöhen. Auch ist eine Versicherungsgesellschaft auf verschiedenen Portfolios aufgebaut. Ruin in einem Portfolio heißt daher noch nicht, dass die Gesellschaft bankrott ist. Ruin ist ein technischer Terminus und die Ruinwahrscheinlichkeit wird zur Entscheidungsfindung herangezogen, um Prämien oder Selbstbehaltsgrenzen bei Rückversicherungen zu bestimmen.*

Kapitel 4

Einführung in die stochastische Kontrolltheorie

4.1 Einführung

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, wobei die Filtration die Bedingungen der Rechtsstetigkeit, d.h. $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$, und der Vollständigkeit - bereits alle Nullmengen von $\mathcal{F}$ sind in $\mathcal{F}_0$ enthalten - erfüllt, und eine m-dimensionale Brownsche Bewegung $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^m)$ gegeben. Dies motiviert folgende Begriffsbildungen nach [5] :

Der **Kontrollprozess** $(u_t)_{t\in[0,T]}$ ist ein bezüglich der Filtration progressiv messbarer Prozess mit Werten in $U \subset \mathbb{R}^p$. Dieser kann als kontrollierbare Variable interpretiert werden. Die Anzahl der Aktien in einem Portfolio und Dividendenauszahlungen stellen zum Beispiel einen Kontrollprozess dar.

Der **Zustandsprozess** $(X_t)_{t\in[0,T]}$ beschreibt den Zustand eines Systems durch die stochastische Differentialgleichung

$$d(X_t) = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t, \tag{4.1.1}$$

wobei $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n, \sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times m}$ und $t \in [0, T]$ gilt. Das Vermögen eines Investors stellt solch einen Zustandsprozess dar.

Das **Zielfunktional** ist durch das Maximum oder Minimum von

$$J(t, x, u_t) = \mathbb{E}\left[\int_t^T \varphi\left(s, X_s, u_s\right) ds + \Psi\left(T, X_T\right) | X_t = x\right],$$

wobei φ die laufenden Kosten und Ψ die Endkosten bezeichnet, gegeben.

$A(t, x)$ bezeichne die Menge der **zulässigen Kontrollprozesse**.

Die **Wertfunktion** wird durch $V(t,x) = \sup_{u \in A(t,x)} J(t,x,u_t)$ beschrieben.

Ziel ist es, V(t,x) zu berechnen und die optimale Kontrolle u^* zu bestimmen, damit die Gleichung $J(t,x,u^*) = V(t,x)$ erfüllt ist.

4.2 Das Bellman Prinzip und die HJB Gleichung

Man betrachte den Generator

$$Lf := \lim_{s \searrow t} \frac{\mathbb{E}\left[f(s,X_s) - f(t,x)|X_t = x\right]}{s-t}$$

mit dem Definitionsbereich DL={f messbar, sodass der Grenzwert $\forall t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ definiert ist}. Es gilt

$$\mathscr{L} := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

mit Funktionen aus der Menge $C^{1,2} := \left\{ f | \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \forall i,j = 1,\ldots,n \text{ stetig} \right\}$ so, dass

$$D\mathscr{L} = C^{1,2}$$

und

$$\mathscr{L}f := \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

oder

$$\mathscr{L}f := \frac{\partial f}{\partial t} + D_x f(t,x) \cdot b(t,x) + \frac{1}{2} tr(D_{xx} f(t,x) \cdot a(t,x)),$$

wobei $D_x f$ den Gradient von f, tr die Spur, $D_{xx} f$ die Hesse-Matrix und $a(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^T(t,x)$ die Diffusionsmatrix bezeichnet.

Nun kann die Itô-Formel folgendermaßen geschrieben werden

$$df(t,X_t) = \mathscr{L}f(t,X_t)dt + D_x f(t,X_t)\sigma(t,X_t)dW_t \tag{4.2.1}$$

Das **Bellman Prinzip** ist für $t_1 > t$ gegeben durch

$$V(t,x) = \sup_{u \in A(t,x)} \mathbb{E}\left[\int_t^{t_1} \varphi(s,X_s,u_s)ds + V(t_1,X_{t_1})|X_t = x\right]$$

Falls man sich in $[t, t_1]$ optimal verhält und auch nach t_1, so erhält man ein globales Optimum.

Für die Herleitung der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung sei die Wertfunktion $V(t,x)$ glatt genug, damit die folgenden Umformungen korrekt durchgeführt werden können. Zuerst wendet man die Itô-Formel (4.2.1) auf $V(t_1, X_{t_1})$ an und erhält dadurch

$$\begin{aligned} V(t_1, X_{t_1}) &= V(t,x) + \int_t^{t_1} \big(\frac{\partial V}{\partial t}(s, X_s) + D_x V(s, X_s) b(s, X_s, u_s) \\ &+ \frac{1}{2} tr(a(s, X_s, u_s) D_{xx} V(s, X_s))\big) ds + \int_t^{t_1} \sigma(s, X_s, u_s) D_x V(s, X_s, u_s) dW_s. \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt setzt man dies in das Bellman Prinzip unter folgender Annahme ein: Die Wertfunktion $V(t,x)$ sei regulär genug, sodass das stochastische Integral ein Martingal ist. Somit verschwindet das stochastische Integral unter dem Erwartungswert im Bellman Prinzip.

$$\begin{aligned} V(t,x) &= \sup_{u \in A(t,x)} \mathbb{E}[\int_t^{t_1} \varphi(s, X_s, u_s) ds + V(t,x) + \int_t^{t_1} \frac{\partial V}{\partial t}(s, X_s) \\ &+ D_x V(s, X_s) b(s, X_s, u_s) + \frac{1}{2} tr(a(s, X_s, u_s) D_{xx} V(s, X_s)) ds | X_t = x] \end{aligned}$$

Auch lässt sich die Wertfunktion $V(t,x)$ herauskürzen. Nun dividiert man durch $(t_1 - t)$ und bildet den Grenzwert $\lim\limits_{t_1 \to t}$. Somit vereinfacht sich das Bellman Prinzip zu

$$0 = \sup_{u \in U} \big\{ \varphi(t,x,u) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + D_x V(t,x) b(t,x,u) + \frac{1}{2} tr(a(t,x,u) D_{xx} V(t,x))}_{:= \mathscr{L}^u V(t,x)} \big\},$$

woraus die **Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung** folgt

$$0 = \sup_{u \in U} \{ \varphi(t,x,u) + \mathscr{L}^u V(t,x) \}.$$

Unter den bestehenden Bedingungen ist die HJB Gleichung eine notwendige Bedingung für die Wertfunktion $V(t,x)$. Umgekehrt kann man sich nun fragen: Falls $V(t,x)$ die HJB Gleichung erfüllt, ist $V(t,x)$ dann eine Wertfunktion? Dies führt zum Verifikationstheorem.

4.3 Verifikationstheorem[1]

Die Menge der zulässigen Kontrollprozesse $A(t,x)$ seien so, dass

1. der Kontrollprozess $(u_t)_{t \in [0,T]}$ ein progressiv messbarer Prozess ist, der $\mathbb{E}[\int_t^T \|u_s\|^2 ds] < \infty$ erfüllt,

[1] vgl. [5]

2. die stochastische Differentialgleichung (2.3.1) $\forall (u_t)_{t\in[0,T]} \in A(t,x)$ eine eindeutige Lösung hat, die $\mathbb{E}[\sup_{t\leq s\leq T} \|X_s\|^2] < \infty$ erfüllt,

3. das Zielfunktional $J(t,x,u_t)$ wohldefiniert ist.

Satz 4.3.1 ***(Verifikationstheorem endlicher Zeithorizont)*** *Sei $\varphi(t,x,u)$ so, dass $|\varphi(t,x,u)| \leq C_\varphi(1+\|x\|^2+\|u\|^2)$ und $\|\sigma(t,x,u)\|^2 \leq C_\sigma(1+\|x\|^2+\|u\|^2)$ erfüllt sind.*

1. *Falls $\Phi(t,x)$ folgende Bedingungen erfüllt*

   - $\Phi \in C^{1,2}$,
   - $|\Phi(t,x)| \leq C_\Phi(1+\|x\|^2)$,
   - $\sup_{u\in U}\{\varphi(t,x,u) + \mathscr{L}^u\Phi(t,x)\} = 0$,

   dann gilt $\Phi(t,x) \geq V(t,x)$.

2. *Falls $(u_t^*)_{t\in[0,T]} \in A(t,x)$, dann gilt $\Phi(t,x) = V(t,x)$ und u_t^* ist die optimale Kontrolle, d.h. $V(t,x) = J(t,x,u_t^*)$.*

Kapitel 5

Modellbildung

5.1 Diffusionsapproximation[1]

Seien $b > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ Konstanten, dann ist ein Markovprozess X mit Drift a und Varianz b^2, der für kleine h

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{t+h} - X_t | \mathcal{F}_t] &= ha \\ , \mathbb{E}[(X_{t+h} - X_t - ha)^2 | \mathcal{F}_t] &= hb^2 \end{aligned}$$

erfüllt, von der Form $X_t = at + bW_t$ für eine Brownsche Bewegung W_t. Deswegen wird X als Brownsche Bewegung mit Drift oder als Diffusionsprozess mit konstante Drift und Varianz bezeichnet. Die Idee hinter solch einer Approximation ist, eine Folge von klassischen Reserveprozessen zu definieren, die schwach gegen eine Brownsche Bewegung mit Drift konvergieren.

Die folgende Konstruktion wird analog zu [10] durchgeführt. Man definiert eine Folge von klassischen Reserveprozessen $\{X^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei die Komponenten des n-ten Prozesses gegeben sind durch das Anfangskapital $x_n > 0$, die Prämienintensität $c_n > 0$ und die unabhängig identisch verteilten Schäden $\{Y_i^{(n)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{E}[Y_1^{(n)}] := \mu_n > 0$ und $Var[Y_1^{(n)}] := \sigma^2 > 0$. Der Schadenzählprozess N ist durch einen Prozess mit Zwischenankunftszeiten $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{E}[W_i] = \frac{1}{\lambda} > 0$ gegeben und

$$\begin{aligned} R_t^{(n)} &= x_n + c_n nt - S_{nt}^{(n)}, \ t \in [0,1] \\ S_{nt}^{(n)} &= \sum_{i=1}^{N_{nt}} Y_i^{(n)}. \end{aligned}$$

Die Verteilung des Gesamtschadens kann mit n variieren, der Zählprozess bleibt für alle $R^{(n)}$ gleich. Falls $x_n = un^{\frac{1}{2}} + o(n^{\frac{1}{2}})$, $c_n = cn^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})$, $\mu_n = \mu n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})$, $\sigma_n^2 \to \sigma^2 > 0$ gilt und $\mathbb{E}[(Y_i^{(n)})^{2+\epsilon}]$ beschränkt ist in n für ein beliebiges $\epsilon > 0$ (siehe [10]), konvergiert die Folge der klassischen Reserveprozesse schwach gegen einen stochastischen Prozess der Form

$$x + \Gamma + \sigma\lambda^{\frac{1}{2}} W,$$

[1] vgl. [7], S. 297 ff.

wobei $\Gamma = (\Gamma_t)_{t\geq 0}$ mit $\Gamma_t = (c - \lambda\mu)t$ und $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine standard Brownsche Bewegung ist.
Der Referenzreserveprozess, für den die Approximation gilt, ist

$$R_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

mit $\mathbb{E}[Y_i] := \mu > 0$ und $Var[Y_i] := \sigma^2 > 0$.
Ein allgemeiner Diffusionsprozess ist eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung der Form $dx_t = \mu(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)dW_t$.

5.2 Modellerweiterungen und Kontrollmöglichkeiten

Das klassische Risikomodell und dessen Diffusionsapproximation legen zwei Möglichkeiten für den Versicherer nahe in den Gewinnprozess einzugreifen - einerseits mit der Wahl des Anfangskapitals x, andererseits mit der Wahl der Prämienintensität c (beziehungsweise mit der Wahl der Drift in der Diffusionsapproximation). In der Praxis gibt es mehr Möglichkeiten um die Leistung des Versicherungsportfolios zu beeinflussen und zu kontrollieren. Im Folgenden werden einige beschrieben.

5.2.1 Rückversicherung und Investitionen

1995 begann Browne Methoden der stochastischen Kontrolltheorie von Diffusionsprozessen im Zusammenhang mit Versicherungen zu verwenden. Er betrachtete eine Brownsche Bewegung mit Drift als Modell für den Vermögensprozess und inkludierte für den Versicherer die Möglichkeit, Teile der Reserve dynamisch in ein Asset zu investieren, wobei der Preis des Assets durch eine geometrische Brownsche Bewegung modelliert wurde. Nun ist das Ziel so eine Anlagestrategie zu finden, dass die Ruinwahrscheinlichkeit des Vermögensprozesses minimiert wird.
In Zusammenhang mit dem klassischen Modell ist die Kontrollvariable ein reell-wertiger càdlàg Prozess $A = (A_t)_{t\geq 0}$, der zum Gesamtprozess der Claims $S = (S_t)_{t\geq 0}$ und $W = (W_t)_{t\geq 0}$ - die Brownsche Bewegung, die den Preis des Assets mit $dP_t = P_t(mdt + \sigma dW_t)$ und $P_0 = p$ beschreibt - adaptiert ist. Der Vermögensprozess R^A (Strategie A) ist bestimmt durch die stochastische Differentialgleichung

$$dR_t^A = (c + A_t m)dt + A_t\sigma dW_t - dS_t, \quad R_0^A = x.$$

Das asymptotische Verhalten der Ruinwahrscheinlichkeit bei optimaler Veranlagungsstrategie wird unter anderem in Hipp und Schmidli [11] behandelt.

Eine andere Möglichkeit zur Reduzierung der Ruinwahrscheinlichkeit im klassischen Modell ist Rückversicherung. In diesem Fall gibt der Versicherer einen Teil seiner eingenommenen Prämien an einen Rückversicherer weiter. Dieser wiederum übernimmt einen

gewissen Teil der Schadensansprüche. Sei $b : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $0 < b(z) < z$ die Funktion, die den einbehaltenen Teil des Versicherers eines Schadens der Größe z bezeichnet, so ist der Teil, der vom Rückversicherer gedeckt wird $z - b(z)$. Dies stellt eine Risikorückversicherung dar. Die einbehaltenen Prämien des Versicherers sind $c_b(t) \leq ct$ und hängen von der Definition von b ab. Der Kontrollprozess ist in diesem Fall gegeben durch

$$R_t^b = x + c_b(t) - \sum_{i=1}^{N_t} b(Y_i).$$

Zwei Arten von Rückversicherung sind die proportionale Rückversicherung, bei der $b(z) = \gamma z$ für $\gamma \in (0, 1]$ ist, und die excess-of-loss (XL) Rückversicherung, bei der $b(z) = \min\{z, M\}$ für eine Grenze $M > 0$ ist. Schmidli [12] verwendet die moderne stochastische Kontrolltheorie um die optimale Wahl einer dynamischen proportionalen Rückversicherung zu treffen, damit die Ruinwahrscheinlichkeit im klassischen Risikomodell reduziert wird. Hier bezieht sich *dynamisch* auf eine Strategie, bei der die Proportionalität $\gamma = (\gamma_t)_{t \geq 0}$ ein vorhersehbarer und zu $\{\mathcal{F}_{t-}^{R^b}\}$ adaptierter Prozess ist. In [13] ist dieses Problem für eine dynamische XL-Rückversicherung bearbeitet. Schmidli [14] verwendet die Resultate von [16] und [12] um Veranlagung und dynamische Rückversicherung für die Minimalisierung der Ruinwahrscheinlichkeit zu kombinieren. Beim Diffusionsansatz ist es manchmal möglich, die Größen explizit zu berechnen, jedoch ist das nicht möglich bei Modellen mit Sprüngen im Vermögensprozess. Die meisten Arbeiten, die dieses Problem behandeln, bieten Beweise für die Existenz einer minimalen Ruinwahrscheinlichkeit und einer optimalen Strategie, aber nur Ansätze für die numerische Auswertung.

5.2.2 Dividenden

Nun definiert man die zulässige Dividendenstrategie. Die Filtration $\mathcal{F} = \{F_t\}_{t \geq 0}$ wird von den unkontrollierten Prozessen erzeugt- im Fall der Diffusion von der Brownschen Bewegung, im klassischen Fall vom Compound-Poissonprozess. Für die Modellierung einer Dividendenstrategie führt man einen stochastischen Prozess $L = (L_t)_{t \geq 0}$ ein, der die kumulierten Dividendenauszahlungen bis zum Zeitpunkt t repräsentiert. Folgende vier Bedingungen werden an die Dividendenstrategie L gestellt:

1. Ruin entsteht nicht aufgrund von Dividendenauszahlungen, d.h $\Delta L_t \leq R_t^L$, wobei R_t^L den kontrollierten Risikoprozess bezeichnet,

2. $L_0 = 0$ und die Pfade von L sind nicht fallend,

3. nach dem Ruinzeitpunkt werden die Auszahlungen gestoppt,

4. Entscheidungen müssen auf eine vorhersehbare Weise festgesetzt werden.

Die vierte Bedingung gibt Anlass, einen càglàd Prozess L zu betrachten. Man betrachtet also einen linksstetigen Prozess, dessen Grenzwerte von rechts existieren ($L_{t-} = L_t$). Daher nennt man eine Dividendenstrategie $L = \{L_t\}_{t \geq 0}$ zulässig, falls dieser càglàd für

alle $t \geq 0$ ist und die Bedingungen 1.-3. erfüllt. Der Kontrollprozess für den Compound-Poissonprozess ist definiert durch

$$R_t^L = x + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Y_k - L_t.$$

Die càdlàg Eigenschaft des Vermögensprozesses und die càglàd Eigenschaft des Dividendenprozesses implizieren, dass $R_{t-}^L \neq R_t^L$ auf einen Claim und $R_{t+}^L \neq R_t^L$ auf Dividendenauszahlungen zurückzuführen sind.

Als Alternative kann man auch vorhersehbare càdlàg Strategien L betrachten, die die càdlàg Eigenschaft des Vermögensprozesses für den Kontrollprozess erhalten. Jedoch - um Einmalzahlungen zum Zeitpunkt $t = 0$ zuzulassen und um Auszahlungen zum Ruinzeitpunkt auszuschließen - muss das Maximierungskriterium leicht abgeändert werden. Falls der unkontrollierte Risikoprozess eine Diffusion ist, ist die Bedingung, dass L_t $\mathcal{F}_t-$messbar ist äquivalent dazu, dass L_t adaptiert ist. Der kontrollierte Diffusionsprozess ist hier nun

$$R_t^L = x + \int_0^t \mu(R_s^L, s)ds + \int_0^t \sigma(R_s^L, s)dW_s - L_t.$$

Analytische Eigenschaften von L

In vielen Situationen ist es sinnvoll, die Menge der zulässigen Kontrollen weiter einzuschränken. Eine natürliche Teilmenge der zulässigen Kontrollstrategien sind die absolut stetigen. Für solche Strategien L gibt es eine adaptierte, nicht negative Dichte $l = (l_s)_{s\geq 0}$, sodass

$$L_t = \int_0^t l_s ds.$$

Um Auszahlungen nach dem Ruinzeitpunkt zu vermeiden, muss man zusätzlich $l_t = 0$ für $t \geq \tau^L$ fordern, wobei τ^L den Ruinzeitpunkt von R^L bezeichnet. Um Singularitäten auszuschließen, nimmt man an, dass der Dichteprozess beschränkt ist, $0 \leq l_s < l_\infty < \infty$ für alle $s \geq 0$. Zu beachten ist, dass dieser eingeschränkte Kontrolltyp nicht die Möglichkeit von Einmalzahlungen inkludiert.

In manchen Situationen kann man zeigen, dass die singulären Teile einer Strategie nicht zum resultierenden Vermögen zählen und daher sind die absolut stetigen Kontrollprozesse ausreichend, um das allgemeine Maximierungsproblem zu lösen.

Für den Compound-Poissonprozess als Vermögensprozess wird die Auswirkung von Transaktionskosten auf den Kontrollprozess in [18] untersucht. Die Einbeziehung von Transaktionskosten führt zu einer anderen Menge von zulässigen Strategien, bekannt auch als Impulskontrolle. Man nimmt an, dass jede Dividendenzahlung durch proportionale und fixe Kosten so belastet wird, dass der Teilhaber $kz - K$ von der Zahlung z erhält, wobei $K > 0$ und $k \in (0, 1)$ gilt. Nun führen Dividendenstrategien mit einer absolut stetigen

Komponente zu einer unbeschränkten negativen Auszahlung für den Teilhaber und sind folglich nicht geeignet. Eine Impulskontrolle $S = \{(\tau_i, Z_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ ist stattdessen eine wachsende Folge von Interventionszeitpunkten τ_i und den dazugehörigen Kontrollmaßnahmen Z_i, der die folgenden vier Bedingungen erfüllt:

1. $0 \leq \tau_i \leq \tau_{i+1}$ a.s. für alle $i \in \mathbb{N}$,
2. τ_i ist eine Stoppzeit bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_t = \sigma\{R^S_{s-} | s \leq t\}$ für $t \geq 0$,
3. Z_i ist $\mathcal{F}_{\tau_i}$-messbar,
4. $\mathbb{P}(\lim_{i\to\infty} \tau_i \leq T) = 0$ für alle $T \geq 0$.

Der Kontrollprozess $R^S = (R^S_t)_{t\geq 0}$ basiert auf einem unkontrollierten Prozess R und ist folglich gegeben durch

$$R^S_t = R_t - \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau_i < t\}} Z_i.$$

Falls das unkontrollierte Modell stetige Pfade hat, kann die Messbarkeitseigenschaft der Stoppzeit τ_i durch die Messbarkeit bezüglich der Vergangenheit des Prozesses ersetzt werden.

5.2.3 Einige Kontrollstrategien

Thresholdstrategie

Eine Thresholdstrategie ist ein Beispiel für eine absolut stetige Kontrolle. Man fixiert eine Schwelle $b > 0$ und wählt eine Markovdichte $l_s = l(x) = a\mathbb{1}_{\{x>b\}}$ mit $a > 0$. Der kumulierte Dividendenauszahlungsprozess ist gegeben durch

$$L_t = \int_0^{t\wedge\tau^L} a\mathbb{1}_{\{R_{s-}\geq b\}} ds.$$

Diese Strategie zahlt stetig eine Dividende der Höhe a aus, wenn das Vermögen über der Schwelle b liegt.

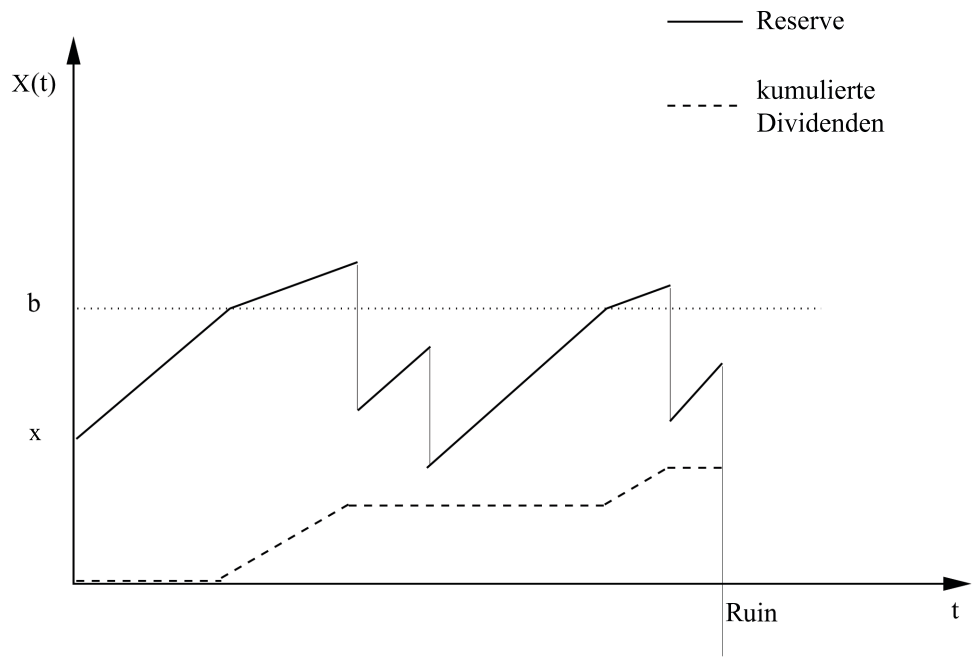

Abbildung 5.1: Stichprobenpfad des Cramér-Lundberg Modells unter einer Threshold-strategie

Barrierestrategie

Für eine fixe Barrierenhöhe $b \geq 0$ wird die kumulierte Dividendenauszahlung beschrieben durch

$$L_t = (x-b)\mathbb{1}_{\{x>b\}} + \int_0^{t\wedge\tau^L} c\mathbb{1}_{\{R^L_{t-}=b\}}dt.$$

Diese Strategie zahlt gleich das ganze Vermögen über b zum Zeitpunkt $t = 0+$ (repräsentiert eine Komponente der Strategie) aus und anschließend werden gleich alle Prämien, die zu einem Vermögen über b führen, als Dividenden verteilt. Für $t > 0$ wird daher der Kontrollprozess bei b reflektiert und es gibt offensichtlich Verbindungen zum Konzept der „first hitting times“ bei b von unten und zur Lokalzeit des Prozesses bei b.

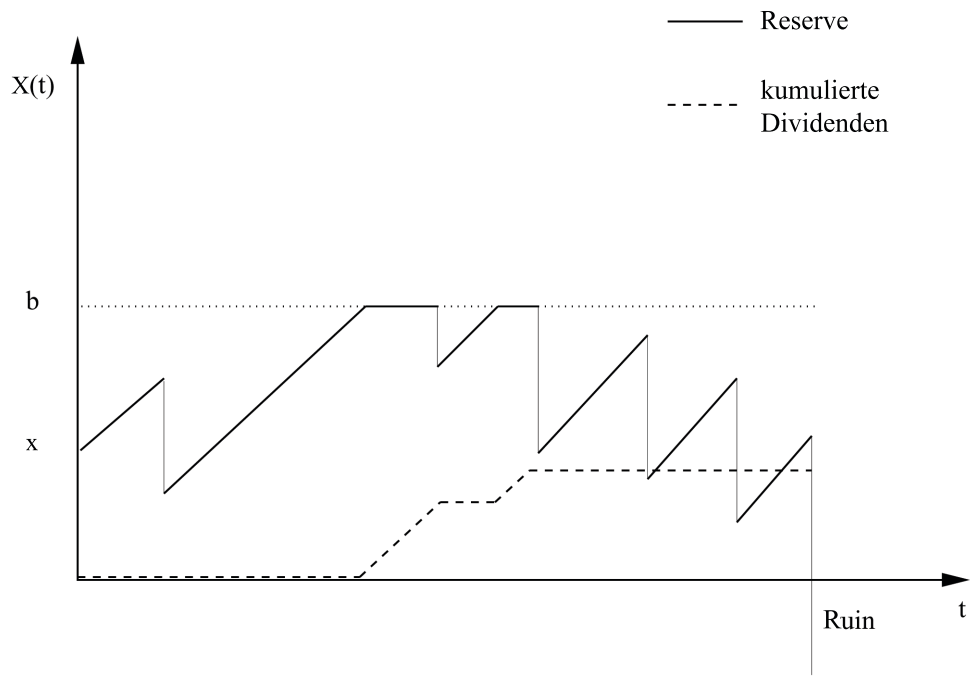

Abbildung 5.2: Stichprobenpfad des Cramér-Lundberg Modells unter einer Barrierestrategie

Bandstrategie

Wenn man den klassischen Reserveprozess untersucht, zeigt Gerber [19], dass man für eine allgemeine Optimalität einen anderen Typ Strategie braucht - die Bandstrategie. Diese Strategie ist durch drei Mengen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ charakterisiert, die den Zustandsraum des Reserveprozesses teilen. Jede Menge wird mit einer gewissen Dividendenauszahlungshandlung versehen. Für eine Reserve x folgt:

- falls die Reserve $x \in \mathcal{A}$ ist, wird jede Prämie ausgezahlt,
- falls die Reserve $x \in \mathcal{B}$ ist, wird ein Pauschalbetrag ausbezahlt, um die Reserve zum nähesten Punkt in $\mathcal{A}$, der kleiner als x ist, zu führen,
- falls die Reserve $x \in \mathcal{C}$ ist, wird keine Dividende ausgezahlt.

Es ist möglich, dass mehrere disjunkte Intervalle zu $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ gehören und eine Bandstruktur für (X_t, t) über $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ bilden.

Einfacher Typ einer Impulstrategie

Man fixiert zwei Levels b_1 und b_2 mit $0 \leq b_1 < b_2$ und verwendet folgende Vorschriften für die Dividendenauszahlungen:

- falls das Vermögen über oder gleich b_2 ist, wird $b_2 - b_1$ ausgezahlt,
- falls das Vermögen unter b_2 liegt, wird nichts gemacht, bis das Vermögen wieder das Level b_2 erreicht.

Bezeichne $\theta_{b_2}^n$ das n-te Mal, dass der Vermögensprozess das Level b_2 von unten erreicht. Nun ist die Dividendenauszahlung einer solchen Strategie gegeben durch

$$L_t = (x - b_1)\mathbb{1}_{\{x \geq b_2\}} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_2 - b_1)\mathbb{1}_{\{\theta_{b_2}^n < t < \tau^S\}},$$

wobei $x \geq 0$ das Anfangskapital bezeichnet.

5.2.4 Strategien bei Diffusionsapproximation

Ohne Dividendenauszahlung wird die Reserve durch $dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$ modelliert.

Für eine fixe und konstante Dividendenrate ist die stochastische Differentialgleichung für die Reserve

$$dX_t = (\mu - a)dt + \sigma dW_t.$$

Der Kontrollprozess $(X_t)_{t \geq 0}$ wird durch eine dynamische Dividendenrate a, d.h. $a = a(t)$ und hängt von der Zeit t ab, gebildet. So gilt

$$dX_t = (\mu - a(t))dt + \sigma dW_t, \tag{5.2.1}$$

wobei eben $a(t)$ die Dividendenrate ist, die zum Zeitpunkt t ausbezahlt wird.
Hier ist nun a der Kontrollprozess, die Wertfunktion lautet $V(x) = \sup_{a \in A(t,x)} \mathbb{E}[J(x, a(t))]$ und das Zielfunktional ist durch $J(x, a) = \int_0^\tau e^{-ct} a(t) dt$ gegeben, wobei c die Diskontrate und $\tau = \inf\{t < 0 | X_t = 0\}$ ist.

Im Folgenden werden zwei Fälle betrachtet

1. eine beschränkte Dividendenrate
2. eine unbeschränkte Dividendenrate

und dafür jeweils die optimale Strategie gesucht.

Kapitel 6

Dividendenoptimierung

6.1 Dividendenoptimierung mit beschränkter Dividendenrate[1]

Für diesen Fall wird gezeigt, dass die optimale Strategie jene ist, die immer die maximale Dividendenrate auszahlt, falls die maximale Dividendenrate a_0 klein genug ist, d.h. dass $\alpha = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} > 0$ nicht erfüllt ist, wobei θ_3 eine Konstante ist, die unten definiert wird. Wenn $a_0 < \infty$, aber $\alpha > 0$ gilt, so ist die optimale Strategie, dass nichts ausbezahlt wird, falls die Reserve unter einem Niveau m ist und die maximale Dividendenrate ausbezahlt wird, falls die Reserve über m ist.

Hier ist der Kontrollprozess die Dividendenrate $a(t)$ und die gesamte (diskontierte) Dividendenauszahlung ist gegeben durch $J(x,a) = \int_0^\tau e^{-ct} a(t) dt$. Es wird angenommen, dass die maximale Dividendenrate $a_0 < \infty$ nicht übersteigt, d.h. $a(t) \in [0, a_0]$ $\forall t > 0$. Somit hat die Reserve die Form

$$dX_t = (\mu - a(t))dt + \sigma dW_t \tag{6.1.1}$$

$$X_0 = x. \tag{6.1.2}$$

Um die Gleichung zu verstehen, die $V(x)$ erfüllen muss, sei angemerkt, dass $V(0) = 0$ gilt. Wenn das Anfangskapital 0 ist, ist das Unternehmen bankrott und keine Dividenden werden ausbezahlt. Daher betrachtet man für jedes y eine ϵ-optimale Kontrolle $a_y(t)$, sodass $\mathbb{E}[J(y, a_y(t))] \geq V(y) - \epsilon$ gilt.
Nun betrachtet man ein fixes $x > 0$ und folgende Strategie: bis zur Zeit δ oder bis zum Ruinzeitpunkt τ wird die Dividende u ausbezahlt und danach wendet man die ϵ-optimale Strategie an. Somit ist

$$a(t) = \begin{cases} u, & 0 \leq t \leq \delta, \\ a_{X_\delta}(t - \delta), & t > \delta. \end{cases}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} V(x) &\geq u\delta\mathbb{P}[\tau > \delta] + e^{-c\delta}[\mathbb{E}[V(X_\delta)] - \epsilon] \\ &\geq u\delta\mathbb{P}[\tau > \delta] + (1 - c\delta)[\mathbb{E}[V(X_\delta)] - \epsilon]. \end{aligned}$$

[1] vgl. [8]

Da ϵ willkürlich gewählt wurde, können wir nun

$$V(x) \quad \geq \quad u\delta\mathbb{P}[\tau > \delta] + (1 - c\delta)\mathbb{E}[V(X_\delta)] \tag{6.1.3}$$

schreiben.
Es sei nun $V(x)$ zweimal stetig differenzierbar und es sei angemerkt, dass $\mathbb{P}[\tau > \delta] = 1 + o(1)$ für $\delta \downarrow 0$. Wenn nun $V(x)$ beidseitig von (6.1.3) abgezogen wird und die Itô-Formel auf $V(X_\delta)$ angewandt wird, erhält man

$$u\delta + [\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x)]\delta + o(\delta) \leq 0,$$
$$\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x) + u \leq 0.$$

Die letzte Ungleichung ist für alle $u \in [0, a_0]$ gültig. Es kann sogar gezeigt werden, dass diese Ungleichung für zumindest ein $u \in [0, a_0]$ scharf ist. So erhält man die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung für die Wertfunktion $V(x)$,

$$\max_{0 \leq u \leq a_0} [\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x) + u] = 0, \tag{6.1.4}$$

$$V(0) = 0. \tag{6.1.5}$$

Um die Lösungsmethode verstehen zu können, sei $f(x)$ eine Lösung von (6.1.4) und (6.1.5). Der zu maximierende Ausdruck auf der linken Seite von (6.1.4) ist eine lineare Funktion von u für jedes x. Daher ist das Maximum $u^*(x)$ an jedem Punkt x entweder 0 oder a_0. Offensichtlich gilt

$$u^*(x) = \begin{cases} 0 & f'(x) > 1, \\ a_0 & f'(x) \leq 1. \end{cases} \tag{6.1.6}$$

Man sucht das Maximum von u und daher sieht man, wenn man nur die von u abhängigen Teile der Gleichung betrachtet, dass $u(1-f'(x))$ eben 0 als Maximum hat, wenn $f'(x) > 1$ gilt, da in diesem Fall $(1-f'(x))$ negativ ist. Wenn $f'(x) \leq 1$ ist, hat man a_0 als Maximum, da $(1 - f'(x))$ positiv ist und man mit dem größtmöglichen Wert, also a_0, multiplizieren muss, um den größten Wert zu erreichen.
Sei die Lösung konkav, dann gibt es einen Punkt $m \geq 0$ so, dass $f'(x) > 1$ für $x < m$ oder $f'(x) \leq 1$ für $x \geq m$ gilt. Setzt man nun (6.1.6) in (6.1.4) ein, erhält man

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \mu f'(x) - cf(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq m \tag{6.1.7}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu - a_0)V + f'(x) - cf(x) + a_0 = 0, \qquad x \geq m. \tag{6.1.8}$$

Seien nun $\theta_1(\lambda)$ und $-\theta_2(\lambda)$ die positive bzw. negative Lösung von $\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 + \lambda s - c = 0$. Eine allgemeine Lösung von (6.1.7) hat die Form

$$C_1 e^{\theta_1(\mu)x} + C_2 e^{-\theta_2(\mu)x} \tag{6.1.9}$$

und eine allgemeine Lösung von (6.1.8) hat die Form

$$\frac{a_0}{c} + C_3 e^{\theta(\mu - a_0)x} + C_4 e^{-\theta(\mu - a_0)x}. \tag{6.1.10}$$

Für jede Kontrolle $a(t)$ ist $J(x,a)$ beschränkt und übersteigt nicht $\frac{a_0}{c}$.

$$J(x,a) \leq \mathbb{E}[\int_0^\infty e^{-ct} a(t) dt] \leq \mathbb{E}[\int_0^\infty e^{-ct} a_0 dt] = \frac{a_0}{c}.$$

Deshalb wird ein f mit $f(x) \leq \frac{a_0}{c}$ gesucht. Somit gilt in (6.1.10) $C_3 = 0$ und $C_4 = -d < 0$. Da aber auch $f(x) > 0$ für $x > 0$ und $f(0) = 0$ gilt, folgt aus (6.1.9), dass $C_1 = -C_2 = C > 0$. Um C, d und die Grenze m zu finden, verwenden wir das Prinzip „smooth fit“ - d.h. der Funktionswert und die ersten beiden Ableitungen sollen am Punkt m übereinstimmen - um

$$\begin{aligned} f(m+) &= f(m-), \\ f'(m-) &= 1, \\ f'(m+) &= 1, \end{aligned}$$

zu erhalten. Aus dem folgt, dass $f''(m+) = f''(m-)$.
Sei $\theta_1 = \theta_1(\mu)$, $\theta_2 = \theta_2(\mu)$ und $\theta_3 = \theta_2(\mu - a_0)$. Dann erhält man durch den obigen „smooth fit“

$$C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) = \frac{a_0}{c} - de^{-\theta_3 m}, \tag{6.1.11}$$

$$C(\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}) = 1, \tag{6.1.12}$$

$$d\theta_3 e^{-\theta_3 m} = 1. \tag{6.1.13}$$

Löst man (6.1.13) nach $de^{-\theta_3 m}$ erhält man $de^{-\theta_3 m} = \frac{1}{\theta_3}$. Dies setzt man in (6.1.11) ein und man erhält

$$C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} = \alpha.$$

Eine Lösung von (6.1.11)-(6.1.13) kann daher nur existieren, wenn

$$\alpha = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} > 0 \tag{6.1.14}$$

erfüllt ist.

Als nächstes wird nun gezeigt, dass (6.1.14) eine hinreichende Bedingung ist. Um dies zu zeigen, brauchen wir folgendes Lemma:

Lemma 6.1.1 $\alpha\theta_1 < 1$

Beweis: Aus der Ungleichung

$$\sqrt{a^2 + b} - a < \frac{b}{2a}, \quad a, b > 0$$

folgt mit $a = \mu$, $b = 2\sigma^2 c$

$$\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 c} - \mu < \frac{2\sigma^2 c}{2\mu}.$$

Kürzt man rechts 2 und dividiert durch σ^2 erhält man

$$\theta_1 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 c}}{\sigma^2} < \frac{c}{\mu}. \tag{6.1.15}$$

Da $\alpha = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3}$ folgt, dass $\alpha\theta_1 = \frac{a_0\theta_1}{c} - \frac{\theta_1}{\theta_3} < 1$. Durch Umformen kommt man zur folgenden äquivalenten Gleichung

$$\frac{a_0}{c} < \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}. \tag{6.1.16}$$

Wenn $a_0 \leq \mu$ ist, folgt (6.1.16) aus (6.1.15):

$$\frac{a_0}{c} \leq \frac{\mu}{c} \overset{(6.1.15)}{<} \frac{1}{\theta_1} \overset{\theta_3>0}{<} \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}.$$

Wenn $a_0 \geq \mu$, gilt

$$\theta_3 = \frac{(\mu - a_0) + \sqrt{(\mu - a_0)^2 + 2\sigma^2 c}}{\sigma^2} < \frac{c}{a_0 - \mu}. \tag{6.1.17}$$

Durch die Kombination von (6.1.15) und (6.1.17) erhält man (6.1.16):

$$\frac{a_0 - \mu}{c} + \frac{\mu}{c} < \frac{1}{\theta_3} + \frac{1}{\theta_1}.$$

□

Proposition 6.1.2 *Wenn $\alpha > 0$ ist, dann existiert ein eindeutiges, positives Tripel (C, d, m), das* (6.1.11)-(6.1.13) *löst.*

Beweis: Dividiert man (6.1.11) durch (6.1.12) erhält man

$$\frac{e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}}{\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}} = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} = \alpha.$$

Das ist äquivalent zu

$$(1 - \alpha\theta_1)e^{\theta_1 m} = (1 + \alpha\theta_2)e^{-\theta_2 m}.$$

Laut Lemma 6.1.1 gilt $\alpha\theta_1 < 1$ und daher ist die eindeutige Lösung von m gegeben durch

$$m = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \log \frac{1 + \alpha\theta_2}{1 - \alpha\theta_1} > 0.$$

Der Rest kann nun auch eindeutig bestimmt werden.

□

Satz 6.1.3 *Es existiert eine zweimal stetig differenzierbare und konkave Lösung von* (6.1.4) *und* (6.1.5).
Falls $\frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} \leq 0$ *ist die Lösung gegeben durch*

$$f(x) = \frac{a_0}{c}(1 - e^{-\theta_3 x}), \tag{6.1.18}$$

falls $\frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} > 0$ *durch*

$$f(x) = \begin{cases} C(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}), & 0 \leq x \leq m \\ \frac{a_0}{c} - de^{-\theta_3 x}, & x > m, \end{cases} \tag{6.1.19}$$

wobei C, d *und* m *die eindeutigen Lösungen von* (6.1.11)-(6.1.13) *sind.*

Beweis:

1. Die Funktion (6.1.18) erfüllt $f(0) = 0$, also (6.1.5), und weiters gilt $f'(0) = \frac{\theta_3 a_0}{a} \leq 1$. Daher gilt $f'(x) \leq 1$ $\forall x > 0$ und $(a_0 - \mu)(f'(x) - 1) \leq 0$, $u \in [0, a_0]$. Addiert man diese Ungleichung zur Gleichung, die f erfüllt,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu - a_0)f'(x) - cf(x) + a_0 = 0,$$

   erhalten wir (6.1.4).

2. Angenommen $\alpha = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} > 0$ gilt, dann erfüllt die Funktion f ((6.1.19)) (6.1.5). Laut Konstruktion ist f stetig mit $f'(m-) = f'(m+)$. Da f (6.1.7) auf $[0, m]$ und (6.1.8) auf $[m, \infty)$ erfüllt, erhält man durch Umformen

$$f''(m-) = \frac{2}{\sigma^2}(cf(m) - \mu f'(m)),$$
$$f''(m+) = \frac{2}{\sigma^2}(cf(m) - (\mu - a_0)f'(m) - a_0).$$

   Da laut Konstruktion $f'(m) = 1$ ist, gilt $f''(m-) = f''(m+)$ und f ist zweimal stetig differenzierbar. Auf $[m, \infty)$ ist die Konkavität offensichtlich. Um Konkavität auf $[0, m]$ zu prüfen, differenziert man f dreimal um $f''' > 0$ zu bekommen und somit ist f'' monoton. Man kann direkt nachprüfen, dass $f''(0) < 0$ und da $f''(m+) < 0$ ist, folgt, dass $f''(m-) < 0$ und somit ist $f'' < 0$ auf $[0, m]$. Das ergibt, dass f auf $[0, \infty)$ konkav ist.

3. Sei $x \leq m$, dann ist $f'(x) > 1$. Addiert man die Ungleichung $-u(f'(x) - 1) \leq 0$ zu (6.1.7), erhält man (6.1.4). Sei $x > m$, dann ist $f'(x) < 1$. Addiert man die Ungleichung $(a_0 - u)/(f'(x) - 1) \leq 0$ zu (6.1.8), erhält man (6.1.4).

□

Proposition 6.1.4 *Die Funktion f in der vorigen Proposition dominiert $J(x,a)$ für jede zulässige Kontrolle a.*

Beweis: Mit Hilfe der Itô-Formel kann man schreiben

$$\begin{aligned}
&e^{-c(T\wedge\tau)}f(X_{T\wedge\tau}) - f(x) = \\
&\int_0^{T\wedge\tau}\left(\frac{1}{2}\sigma^2 f''(X_t) + (\mu - a(t))f'(X_t) - cf(X_t)\right)e^{-ct}dt \\
&+\int_0^{T\wedge\tau} e^{-ct}f'(X_t)\sigma dW_t
\end{aligned} \tag{6.1.20}$$

Da f konkav ist, ist $f'(x)$ beschränkt durch $f'(0)$. Daher ist der letzte Term auf der rechten Seite von (6.1.20) ein quadratisch integrierbares Martingal mit Mittelwert Null. Von (6.1.4) weiß man, dass der erste Integrand auf der rechten Seite von (6.1.20) $a(t)$ nicht übersteigt. Wendet man nun auf beiden Seiten den Erwartungswert an und formt um, erhält man

$$f(x) \geq \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge\tau} e^{-ct}a(t)dt\right] + \mathbb{E}\left[e^{-c(T\wedge\tau)}f(X_{T\wedge\tau})\right]. \tag{6.1.21}$$

Für $T \to \infty$ und mit Fatous Lemma gilt

$$f(x) \geq \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau} e^{-ct}a(t)dt\right] = J(x, a(.)).$$

□

Korollar 6.1.5 $f(x) \geq V(x)$.

Proposition 6.1.6 *Definiere $u^*(x) = a_0\mathbb{1}_{x>m}$ und sei $r^*(t)$ die Lösung der stochastischen Differentialgleichung* (6.1.1), (6.1.2), *wobei $a(t)$ durch $a^*(t) = u^*(r(t))$ ersetzt wurde. Dann gilt $J(x, a^*(.)) = f(x)$.*

Beweis: Wenn man $a^*(t)$ statt $a(t)$ in (6.1.20) und (6.1.21) einsetzt, wird (6.1.21) eine Gleichung. Da $X_\tau = 0$ und $f(0) = 0$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-c(T\wedge\tau)}f(X_{T\wedge\tau})\right] &= \mathbb{E}\left[e^{-c(T\wedge\tau)}f(X_{T\wedge\tau})\mathbb{1}_{\tau>T}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-cT}f(X_{T\wedge\tau})\mathbb{1}_{\tau>T}\right] \\
&\leq e^{-cT}\sup_{x\geq 0} f(x) \leq e^{-cT}\frac{a_0}{c}.
\end{aligned}$$

Für $T \to \infty$ konvergiert das gegen 0 und für (6.1.21) folgt

$$f(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau} e^{-ct}a^*(t)dt\right].$$

□

Korollar 6.1.7 $f(x) = V(x) = J(x, a^*(.))$.

Bemerkung 6.1.8 *Es wurde die Eindeutigkeit einer konkaven, beschränkten Lösung zu* (6.1.4) *und* (6.1.5) *gezeigt. Solch eine Lösung stimmt mit der Wertfunktion überein.*

6.2 Dividendenoptimierung mit unbeschränkter Dividendenrate[2]

In diesem Fall wird gezeigt, dass die optimale Strategie von einem singulärem Kontrolltyp ist. Es wird alles, das ein optimales Niveau m übersteigt, ausbezahlt, jedoch nichts, falls die Reserve unter m liegt.

Hier kann auch die Situation $a(t) = \infty$ auftreten.

$$L(t) = \int_0^t a(t)dt \tag{6.2.1}$$

ist die Gesamtmenge der Dividendenauszahlungen bis zur Zeit t. Offensichtlich ist $L(t) \uparrow$ und $L(.)$ ist zulässig, wenn

$$L(t) \in \mathcal{F}_t \tag{6.2.2}$$

$$L(.) \text{ ein nicht abnehmender, nicht negativer Prozess ist.} \tag{6.2.3}$$

Nun startet man nicht mit dem Prozess $a(.)$ und führen $L(.)$ via (6.2.1) ein, sondern man betrachtet $L(.)$, der (6.2.2) und (6.2.3) erfüllt, als den eigentlichen Kontrollprozess. Die Konditionen (6.2.2) und (6.2.3) implizieren weder Stetigkeit noch absolute Stetigkeit von $L(t)$ bezüglich t und es wird auch nicht angenommen. Da $L(.)$ Unstetigkeiten (Sprünge) haben kann, wird gefordert, dass $L(.)$ càdlàg Pfade (rechtsstetig, Limes von links existiert) hat. $L(t) - L(s)$ ist die Dividendenauszahlung im Intervall $(s, t]$, $L(t) - L(t-)$ ist eine Einmalzahlung als Dividendenauszahlung zur Zeit t (das kommt nur bei einer abzählbaren Menge t vor).
Durch die Definition des Kontrollprozesses in einer kumulativen Art, ändert sich die Gleichung (5.2.1) aufgrund der Dynamik des Systems auf die Integralform

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s)ds + \sigma w_t - L(t). \tag{6.2.4}$$

[2] siehe [8]

$X(0) = X_0 - L(0)$ bedeutet, dass - falls es eine Dividendenauszahlung zur Zeit 0 gibt - X unmittelbar von X_0 auf $X_0 - L(0)$ sinkt. Folglich schreibt man $X(0-) = X_0$ und man nimmt $L(0-) = 0$ an. Das Zielfunktional ändert sich auf

$$J(x, L(.)) = \int_0^\tau e^{-ct} dL(t) \tag{6.2.5}$$

im Sinne der gewöhnlichen Lebesgue-Stieltjes-Integration.
Das Ziel ist wiederrum die Wertfunktion $V(x)$ zu finden, wobei nun gilt

$$V(x) = \mathbb{E}[J(x, L^*(.))]. \tag{6.2.6}$$

L^* wird als optimale Kontrolle bezeichnet.

Um die Gleichungen zu verstehen, die die Wertfunktion V erfüllen muss, sei an den Fall mit beschränkter Dividendenrate erinnert. In diesem Fall ist es optimal, entweder 0 oder die maximale Rate auszuzahlen. Im Fall der unbeschränkten Dividendenrate ist die maximale Rate unendlich. Es werden nun ähnliche Argumente wie in Kapitel 6.1 verwendet. In einem kleinen Intervall $[0, \delta]$ wird nichts ausgezahlt, später eine ϵ-optimale Strategie angewandt oder eine unendliche Rate ausgezahlt, das zu einer Einmalzahlungsverteilung zum Anfangszeitpunkt führt. Genauer betrachtet man für jedes y solch eine Strategie $L^y(.)$, dass

$$\mathbb{E}[J(y, L^y(.))] \geq V(y) - \epsilon.$$

Sei $\delta > 0$ fix und $W_t = x + \mu t + \sigma w_t$ eine Brownsche Bewegung mit Drift μ, Varianz σ^2, einer Brownschen Bewegung w_t und dem Anfangswert x. Setze

$$L(\epsilon, t) = \begin{cases} 0, & t < \delta \\ L^{W_t}(t - \delta), & t \geq \delta. \end{cases}$$

Die Strategie $L(\epsilon, .)$ beschreibt eine Strategie, die keine Dividende vor dem Zeitpunkt δ auszahlt. Während dieser Zeit entwickelt sich die Reserve wie W und ist gleich W_δ zum Zeitpunkt δ. Nun wechselt man zur Strategie $L^{W_\delta}(. - \delta)$, deren Ertrag zumindest $V(W_\delta) - \epsilon$ ist. Da eine solche Strategie suboptimal ist, kann man schreiben

$$V(x) \geq e^{-c\delta} \mathbb{E}[V(W_\delta) - \epsilon; \tau \geq \delta], \tag{6.2.7}$$

wobei im letzten Schritt die Markoveigenschaft verwendet wurde. Da ϵ willkürlich gewählt ist, kann die Ungleichung (6.2.7) geschrieben werden als

$$V(x) - e^{-c\delta} \mathbb{E}[V(W_\delta)] + o(\delta) \geq 0. \tag{6.2.8}$$

Angenommen V ist zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$e^{-c\delta} \mathbb{E}[V(W_\delta)] = (1 - c\delta)(V(x) + \delta(\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x))) + o(\delta).$$

Dividiert man nun (6.2.8) durch δ erhält man

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - cV(x) \leq 0. \tag{6.2.9}$$

Dies ist nun eine der sogenannten Variationsungleichungen, die V erfüllen sollte. Um die andere zu erhalten, sei x fix, $\delta > 0$ und $L^y(.)$ definiert wie oben mit $y = x - \delta$. Betrachtet man nun $\mathcal{L}_\delta(t) = \delta + L^{x-\delta}(t)$. Diese Strategie beschreibt eine unmittelbare Auszahlung δ (reduziert die Reserve auf $x - \delta$) und verwendet dann die Kontrollfunktion $L^{x-\delta}(.)$. Mit ähnlichen Argumenten wie oben, erhält man

$$V(x) \geq \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-ct} d\mathcal{L}_\epsilon(t)\right] = \delta + \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-ct} dL^{x-\delta}(t)\right] \geq \delta + V(x-\delta) - \epsilon.$$

Da ϵ willkürlich gewählt ist, erhält man $V(x) - V(x-\delta) \geq \delta$ und

$$V'(x) \geq 1. \tag{6.2.10}$$

Es wurde nun hergeleitet, dass die Wertfunktion V die Ungleichungen (6.2.9) und (6.2.10) erfüllen muss. Schwieriger ist zu zeigen, dass eine dieser Ungleichungen für jedes x scharf ist. Jedoch ist klar, dass Ruin unmittelbar auftritt, wenn $x = 0$ und die Randbedingung $V(0) = 0$ gilt.

Satz 6.2.1 *Die Wertfunktion V erfüllt die folgende Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung:*

$$\max\{\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - cV(x), 1 - V'(x)\} = 0, \tag{6.2.11}$$

$$V(0) = 0. \tag{6.2.12}$$

Man konstruiert nun wieder eine Lösung f für (6.2.11) aus zwei unterschiedlichen analytischen Teilen. Anschließend zeigt man, dass diese Lösung die Wertfunktion des Problems dominiert. Zum Schluss konstruiert man solch eine Kontrollfunktion L^*, dass das Zielfunktional den Erwartungswert V hat. Das beweist gleichzeitig, dass $f = V$ und dass L^* die optimale Kontrolle ist.

Sei die Lösung f zu (6.2.11) konkav und so, dass $f'(x)$ nicht steigend ist. Sei $m = \sup\{x : f'(x) > 1\}$, dann gilt

$$f'(x) \begin{cases} > 1, & x < m \\ = 1, & x \geq m. \end{cases}$$

Infolge von (6.2.11) gilt,

$$\mathcal{A}f(x) = 0, \; x \leq m, \tag{6.2.13}$$

wobei

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d^2}{dx^2} + \mu \frac{d}{dx} - c.$$

f soll aus zwei analytischen Teilen bestehen - ein Teil soll auf $[0, m]$ (6.2.13) erfüllen, der andere auf $[m, \infty)$ $f'(x) = 1$.

Um die unbekannte separierende Grenze m zu finden, verwendet man wieder das Prinzip des „smooth fit“. f ist zweimal stetig differenzierbar und daher gilt

$$f'(m) = f'(m-) = f'(m+),$$
$$f''(m) = f''(m-) = f''(m+).$$

Die Aufgabe ist nun, so eine Lösung f von (6.2.13) und eine Grenze m zu finden, dass

$$f(0) = 0, \tag{6.2.14}$$
$$f'(m) = 1, \tag{6.2.15}$$
$$f''(m) = 0. \tag{6.2.16}$$

Eine allgemeine Lösung von (6.2.13) ist von der Form $C_1 e^{\theta_1 x} + C_2 e^{-\theta_2 x}$, wobei θ_1, θ_2 gleich wie in Kapitel 6.1 und C_1, C_2 willkürliche Konstanten mit zwei Freiheitsgraden sind. Die verbleibende Unbekannte in den Gleichungen (6.2.14)-(6.2.16) ist m. Aus (6.2.14) folgt $C_1 = -C_2$, sodass

$$f(x) = C(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}), \tag{6.2.17}$$

wobei C aufgrund des Problems positiv ist. Differenziert man nun (6.2.17), erhält man

$$f'(x) = C(\theta_1 e^{\theta_1 x} + \theta_2 e^{-\theta_2 x}) \tag{6.2.18}$$
$$f''(x) = C(\theta_1^2 e^{\theta_1 x} - \theta_2^2 e^{-\theta_2 x}) \tag{6.2.19}$$

Aus (6.2.19) und (6.2.16) folgt

$$m = \frac{2}{\theta_1 + \theta_2} \log |\frac{\theta_2}{\theta_1}| = \frac{\sigma^1}{\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 c}} \log \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 c} + \mu}{-\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 c} + \mu}. \tag{6.2.20}$$

Aus (6.2.18) und (6.2.15) folgt

$$C = \frac{1}{\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}}. \tag{6.2.21}$$

Zusammengefasst ergibt das

Satz 6.2.2 *Definiere*

$$f(x) = \begin{cases} C(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}), & x \leq m \\ C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) + x - m, & x \geq m, \end{cases}$$

wobei m und C durch (6.2.20) *und* (6.2.21) *gegeben sind. Dann ist $f(x)$ eine Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung* (6.2.11).

Beweis: Um (6.2.11) nachzuweisen, bleibt nur noch folgendes zu zeigen

$$f'(x) \geq 1, \quad \text{für } x \geq m, \tag{6.2.22}$$
$$\mathcal{A}f(x) \leq 0, \quad \text{für } x \geq m. \tag{6.2.23}$$

Differenziert man (6.2.19) erhält man $f'''(x) = C(\theta_1^3 e^{\theta_1 x} + \theta_2^3 e^{-\theta_2 x})$ und es gilt $f'''(x) \geq 0$, sodass $f''(x)$ eine steigende Funktion ist. Des Weiteren gilt $f''(0) < 0$ (man beachte, dass $|\theta_2| > \theta_1$). Da $f''(m) = 0$ und die Monotonie von f'' $f''(x) \leq 0$ impliziert für $x \leq m$, ist $f(x)$ konkav auf $[0, m]$. Da $f'(x) \geq f'(m) = 1$ $\forall x \leq m$ gilt, ist (6.2.22) nachgewiesen.
Um (6.2.23) für $x \geq m$ nachzuweisen, sei folgendes bemerkt

$$\mathcal{A}f(x) = \mu - cf(x) \leq \mu - cf(m) = \mathcal{A}f(m) = 0.$$

□

Als nächstes zeigt man, dass die Funktion f aus diesem Satz mit der Wertfunktion V, die durch $V(x) = \mathbb{E}[J(x, a(.))]$ gegeben ist, übereinstimmt. Dies wird in zwei Schritten gezeigt. Der erste Schritt (Proposition 6.2.3) zeigt, dass f den Erwartungswert des Zielfunktionals für jede Strategie dominiert. Deshalb gilt $f \geq V$. Im zweiten Schritt konstruiert man solch eine Kontrolle L^*, dass $\mathbb{E}[J(x, L^*(.))] = f(x)$ gilt (Proposition 6.2.5).

Proposition 6.2.3 *Sei L eine beliebige Kontrolle, dann gilt*

$$f(x) \geq \mathbb{E}[J(x, L)] \tag{6.2.24}$$

Beweis: Sei X_t durch $X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s)ds + \sigma W_t - L(t)$ gegeben mit $\mu(x) = \mu$ und sei τ die entsprechende Ruinfunktion. Für jede steigende Funktion $L(.)$ setzt man $\Lambda = \{s : L(s-) \neq L(s)\}$. Des Weiteren seien $L^d = \sum_{s \in \Lambda, s \leq t}(L(s) - L(s-))$ der unstetige Teil von L und $L^c(t) = L(t) - L^d(t)$ der stetige Teil von L. Mit Hilfe der Itô-Formel folgt

$$\begin{aligned}
&e^{-c(t\wedge\tau)} f(X_{t\wedge\tau}) \\
&= f(x) + \int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}\mathcal{A}f(X_s)ds + \int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs} f'(X_s)dW_s \\
&- \int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs} f'(X_s)dL(s) \\
&- \sum_{s\in\Lambda, s\leq t\wedge\tau} e^{-cs}[f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})(X_s - X_{s-})] \\
&= f(x) + \int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs}\mathcal{A}f(X_s)ds + \int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs} f'(X_s)dW_s \\
&- \int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs} f'(X_s))dL^c(s) - \sum_{s\in\Lambda, s\leq t\wedge\tau} e^{-cs}[f(X_s) - f(X_{s-})].
\end{aligned} \tag{6.2.25}$$

In Anbetracht von (6.2.11) ist der zweite Term auf der rechten Seite nicht positiv. Da f konkav ist, gilt $0 < f'(x) < f'(0) < \infty$. Der dritte Term ist ein quadratisch integrierbares Martingal mit Erwartungswert 0. Wendet man nun den Erwartungswert auf beide Seiten an, folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[e^{-c(t\wedge\tau)} f(X_{t\wedge\tau})] \\
&\leq f(x) - \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs} f'(X_s)dL^c(s)\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{s\in\Lambda, s\leq t\wedge\tau} e^{-cs}[f(X_s) - f(X_{s-})]\right].
\end{aligned} \tag{6.2.26}$$

Die linke Seite gleicht hier nun

$$\mathbb{E}[e^{-ct}f(X_t); t < \tau] = e^{-ct}\mathbb{E}[f(X_t); t < \tau]. \tag{6.2.27}$$

Trivialerweise gilt $X_t \leq |W_t|$, wobei W_t eine Brownsche Bewegung mit Parametern (μ, σ^2) ist. Durch die Konkavität von f gilt $f(x) \leq a + bx$ für $a, b > 0$. Daher ist die rechte Seite von (6.2.27) beschränkt durch $e^{-ct}(a + b\ \mathbb{E}[|W_t|])$, wobei das für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Es gilt ja $f'(x) \geq 1$ und $X_s - X_{s-} = L(s-) - L(s)$. Deshalb folgt $f(X_s) - f(X_{s-}) \leq L(s-) - L(s)$. Wendet man nun den Limes auf (6.2.26) an, erhält man folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) - \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-cs} dL^c(s)\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{s\in\Lambda, s\leq t\wedge\tau} e^{-cs}[L(s) - L(s-)]\right] \\ = f(x) - \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-cs} dL(s)\right]. \end{aligned}$$

□

Korollar 6.2.4 *$f(x) \geq V(x)$.*

Nun konstruiert man solch ein Funktional L^*, dass $\mathbb{E}[J(x, L)] = f(x)$.

Sei m wie im Satz 6.2.2 und definiere

$$L^*(t) = \max_{s\leq t}[x + \mu x + \sigma W_s - m]^+, \tag{6.2.28}$$

$$X_t^* = x + \mu t + \sigma W_t - L^*(t). \tag{6.2.29}$$

Man beachte, dass $\{L^*(t)\}_{t\geq 0}$ ein stetiger, steigender Prozess mit $L(0) > 0$ für $x > m$ ist. In diesem Fall macht L einen Sprung der Größe $x - m$ bei $t = 0$.
Der Prozess $\{X_t^*\}_{t\geq 0}$ ist eine Brownsche Bewegung auf $[0, m]$ mit m als obere reflektierende Grenze und das Funktional $L^*(t)$ wächst nur zu den Zeitpunkten t an welchen $X_t^* = m$ gilt. Genauer gilt

$$X_t^* \leq m\ \forall t \geq 0, \tag{6.2.30}$$

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{X_t^* < m} dL^*(t) = 0. \tag{6.2.31}$$

Proposition 6.2.5 *Sei f wie im Satz 6.2.2, dann gilt*

$$\mathbb{E}[J(x, L^*)] = f(x). \tag{6.2.32}$$

Beweis: Sei $\tau^* = \inf\{t : X_T^* = 0\}$. Ersetzt man L, τ in der Itô-Formel (6.2.25) durch L^*, τ^*, ist der zweite Term auf der rechten Seite identisch mit 0 aufgrund von (6.2.30) und $\mathcal{A}f(x) = 0$ für $x \leq m$. Bildet man auf beiden Seiten wieder den Erwartungswert, verschwindet der Martingalterm und man erhält

$$\mathbb{E}[e^{-ct} f(X^*(t)); t < \tau^*] = f(x) - \mathbb{E}[\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs} f'(X_t^*) dL^*(s)]. \tag{6.2.33}$$

Da f auf $[0, m]$ beschränkt ist, konvergiert die linke Seite für $t \to \infty$ gegen 0. Andererseits impliziert (6.2.31) und $f'(m) = 1$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs} f'(X_s^*) dL^*(s)] \\
&= \mathbb{E}[\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs} f'(X_s^*) \mathbb{1}_{X_s^*=m} dL^*(s)] = \mathbb{E}[\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs} f'(m) \mathbb{1}_{X_s^*=m} dL^*(s)] \\
&= \mathbb{E}[\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs} \mathbb{1}_{X_s^*=m} dL^*(s)] = \mathbb{E}[\int_0^{t\wedge\tau} e^{-cs} dL^*(s)].
\end{aligned} \tag{6.2.34}$$

Setzt man nun (6.2.34) in (6.2.33) ein und lässt man t gegen unendlich gehen, folgt

$$f(x) = \mathbb{E}[\int_0^{\tau} e^{-cs} dL^*(s)].$$

□

Korollar 6.2.6 *$f(x) = V(x)$ und L^* ist die optimale Kontrolle.*

Beweis: Man verwendet Korollar 6.1.5, (6.2.32) und die offensichtliche Ungleichung $V(x) \geq \mathbb{E}[J(x, L^*)]$.

□

Bemerkung 6.2.7 *Das Unternehmen sollte nicht zu jedem Zeitpunkt die geeignete Dividendenrate suchen, sondern die optimale Reservegrenze m suchen und alles, das m übersteigt, ausbezahlen, aber nichts auszahlen, wenn die Reserve unter m liegt.*

6.3 Dividendenoptimierung mit einer Barrierefunktion

Eine Simulation ist ein möglichst realitätsnahes Nachbilden von Geschehen der Wirklichkeit. Aus Sicherheits- und Kostengründen ist es für fast alle konkreten Problemkreise notwendig, sie aus der Realität zu lösen und abstrakt zu behandeln, d.h. durch Abstraktion wird ein Modell geschaffen, an dem zielgerichtet experimentiert wird. Die daraus resultierenden Ergebnisse werden anschließend wieder auf das reale Problem übertragen. Bei der stochastischen Simulation sind die zu betrachtenden Einflussgrößen durch den Zufall bestimmt, daher wird der Simulationsablauf durch die Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmt.

6.3.1 Simulation eines Vermögensprozesses mit Dividendenauszahlung

Angenommen, das anfängliche Vermögen beträgt 0.6, die Drift ist 0.7, der Diskont ist 0.0022 und die Volatilität ist durch 0.9 gegeben. Also ist $X_0 = 0.6$, $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.9$ und $c = 0.0022$. Angenommen, $\Delta t = 0.001$.

Der Vermögensprozess wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu\ dt + \sigma\ dW_t - dL_t \\ &= 0.7\ dt + 0.9\ dW_t - dL_t. \end{aligned}$$

Bezeichnen X_t bzw. L_t das Vermögen bzw. die Dividenden zu einem bestimmten Zeitpunkt t und ΔX_t bzw. ΔL_t die Veränderung (Anstieg oder Abfall) des Vermögens bzw. die Veränderung der Dividenden innerhalb des nächsten kleinen Zeitintervalls Δt, dann gilt

$$\Delta X_t = \mu\ \Delta t + \sigma\ \Delta W_t - \Delta L_t \tag{6.3.1}$$

$$= 0.7\ \Delta t + 0.9\ \Delta W_t - \Delta L_t, \tag{6.3.2}$$

wobei $\Delta X_t = X_{i+1} - X_i$ und $\Delta L_t = L_{i+1} - L_i$ für $i = 0, \ldots, t-1$ und ΔW_t ein zufälliger Wert aus der Normalverteilung ist.

Ein möglicher Verlauf des Vermögens kann durch das wiederholte Ziehen eines zufälligen ΔW_t aus $\mathcal{N}(0, \Delta t)$ und anschließendem Einsetzen in die Gleichung 6.3.2 ermittelt werden. Die Tabelle 6.1 und die entsprechende Abbildung 6.1 zeigen die Pfade eines Vermögensprozesses, der Barriere (näheres in [17]) und der diskontierten kumulierten Dividenden, die auf diese Weise erzeugt wurden.

Die Barriere, die hier nun verwendet wird, löst das optimale Dividendenproblem in endlicher Zeit. Der Reserveprozess zur Zeit t in diesem Fall ist gegeben durch (siehe [20])

$$X_t = x + \mu t + \sigma W_t - C_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

wobei x, μ, und σ positive Konstanten sind und das Anfangskapital, die Volatilität und die Drift des Prozesses beschreiben und W_t eine standard Brownsche Bewegung bezüglich einer rechtsstetigen und vollständigen Filtration $\mathcal{F}$ ist. C_t ist hier ein zulässiger Prozess und beschreibt den kumulierten Konsum. Das Zielfunktional ist gegeben durch

$$J(t, C) = \mathbb{E}[\int_t^\tau e^{-\beta s} dC_s + e^{-\beta\tau} X_\tau],$$

wobei $\tau := \inf\{t > 0 | X_t = 0\} \wedge T$. Nun kann die Wertfunktion des Problems definiert werden durch

$$V(t, x) = \sup_{C \in A} \mathbb{E}[\int_t^\tau e^{-\beta s} dC_s + e^{-\beta\tau} X_\tau].$$

Auch ist die Barrierefunktion eine Lösung der folgenden Integralgleichung

$$
\begin{aligned}
b'(t) = \frac{\sigma^2}{2\hat{\beta}} e^{-\hat{\mu}b(t)+\lambda t} \Bigg\{ & \int_0^{T-t} ds \int_{-b(T-s)}^{b(T-s)} K_x(b(t), T-t; \xi, s) B'(T-s) d\xi \\
& + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{T-t} K_x(b(t), T-t; b(T-s), s) D(T-s) ds \\
& + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{T-t} K_x(b(t), T-t; -b(T-s), s) D(T-s) ds \\
& + \int_{-b(T)}^{b(T)} K_x(b(t), T-t; \xi, 0)(h'''(\xi) - B(T)) d\xi \Bigg\} \\
& - \frac{\sigma^2}{2\hat{\beta}} \left(d_1 + \frac{\hat{\mu}^4}{2}(b(t) + d(t)) \right),
\end{aligned}
$$

wobei hier $\hat{\beta} = \frac{\beta}{\sigma^2}$, $\hat{\mu} = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $\lambda = \beta + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}$, $d_1 = 2\hat{\mu}\hat{\beta} + 2\hat{\mu}^3$,
$K(x, T-t; \xi, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t-s)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t-s)}}$,
$B(t) = e^{\hat{\mu}b(t)-\lambda t} \left(2\hat{\beta} + 3\hat{\mu}^2 + \hat{\mu}^3(b(t) + d(t)) \right)$,
$D(t) = e^{\hat{\mu}b(t)-\lambda t} \left(4\hat{\mu}\hat{\beta} + 4\hat{\mu}^2 + \hat{\mu}^4(b(t) + d(t)) + \frac{4\hat{\beta}}{\sigma^2} b'(t) \right)$,
$d(t) = e^{\beta t} \int_t^T (\mu e^{-\beta s} - \beta e^{-\beta s} b(s)) ds + H_0 e^{\beta(t-T)}$, $h(x) = e^{\hat{\mu}x - \lambda T} H(x)$ mit $H(x)$ als Approximation für die Schlussgewinnfunktion, welche einige Voraussetzungen erfüllt und $b(t)$ die Barrierefunktion ist.

Ein Kontraktionsargument zeigt, dass diese Integralgleichung eine stetige Lösung hat. Näheres dazu findet man in [20].

zufälliger Wert von ΔW_t	Vermögen	Barriere	kumulierte Dividenden
-0.0048	0.6	0.9147	0
-0.0151	0.5966	0.9147	0
-0.0020	0.5839	0.9146	0
0.0434	0.5830	0.9146	0
0.0219	0.6230	0.9145	0
0.0608	0.6435	0.9145	0
0.0059	0.6991	0. 9144	0
0.0147	0.7054	0.9144	0
-0.0000	0.7195	0.9143	0
0.0291	0.7204	0.9142	0
0.0164	0.7475	0.9142	0
0.0253	0.7632	0.9141	0
0.0068	0.7869	0.9141	0
0.0289	0.7939	0.9140	0
0.0398	0.8208	0.9140	0
...	...	...	...

Tabelle 6.1: Simulation eines Vermögensprozesses und der entsprechenden kumulierten Dividenden unter einer Barrierestrategie mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.9$ und $X_0 = 0.6$

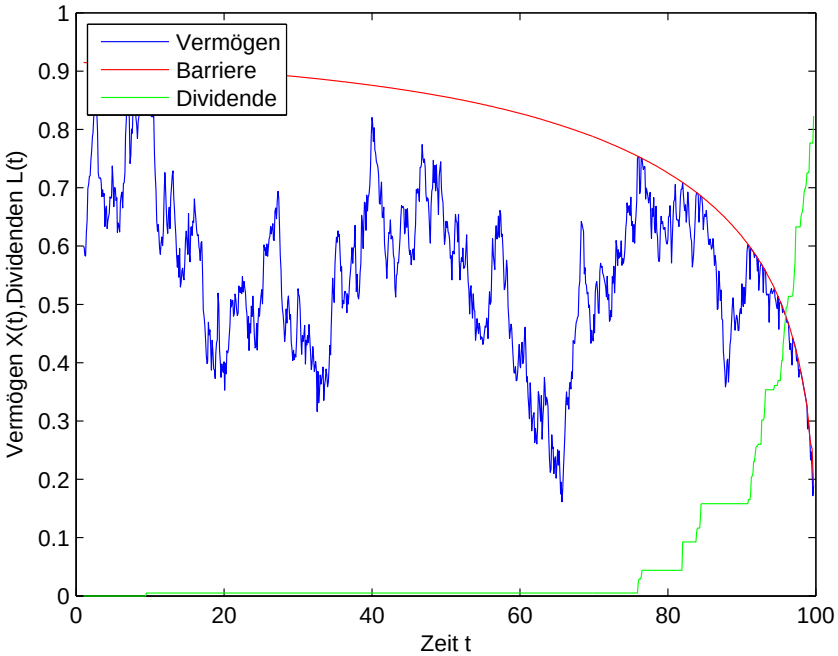

Abbildung 6.1: Simulation eines Vermögensprozesses und der entsprechenden kumulierten Dividenden unter einer Barrierestrategie mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.9$ und $X_0 = 0.6$

Es ist wichtig, sich vor Augen zu halten, dass die Tabelle nur einen möglichen Verlauf des Vermögensprozesses darstellt. Andere Zufallszahlen würden zu anderen Vermögensbewegungen führen.

Zur Schätzung der Ruinwahrscheinlichkeit wurden 1000 Simulationen mit den gleichen Parametern durchgeführt. Für die Werte $\sigma = 0.9$, $\mu = 0.7$ und $X_0 = 0.6$ erhält man circa eine Ruinwahrscheinlichkeit von 0.4060.

Eine Simulation wird vom Programm abgebrochen, falls Ruin auftritt. Eine solche Simulation kann wie die Abbildung 6.2 aussehen. Zum nächsten Auswertungszeitpunkt sinkt das Vermögen unter 0.

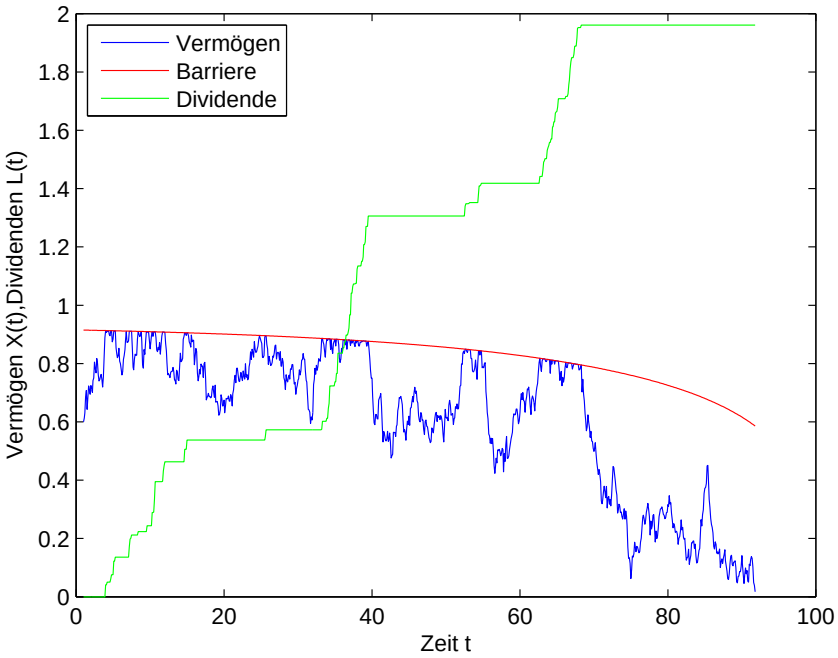

Abbildung 6.2: abgebrochene Simulation eines Vermögensprozesses mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.9$ und $X_0 = 0.6$

6.3.2 Änderung der Parameter und ihre Auswirkung auf die Ruinwahrscheinlichkeit

In diesem Unterkapitel wird untersucht, wie sich die Änderungen der Parameter σ, μ und die Änderung des Anfangswertes X_0 auf die Ruinwahrscheinlichkeit auswirken.

Änderung des Anfangswertes

Angenommen, $X_0 = 0.8$, $\sigma = 0.9$ und $\mu = 0.7$. In diesem Fall erhält man folgende Abbildung 6.3 einer Simulation und eine Ruinwahrscheinlichkeit von 0.3470.

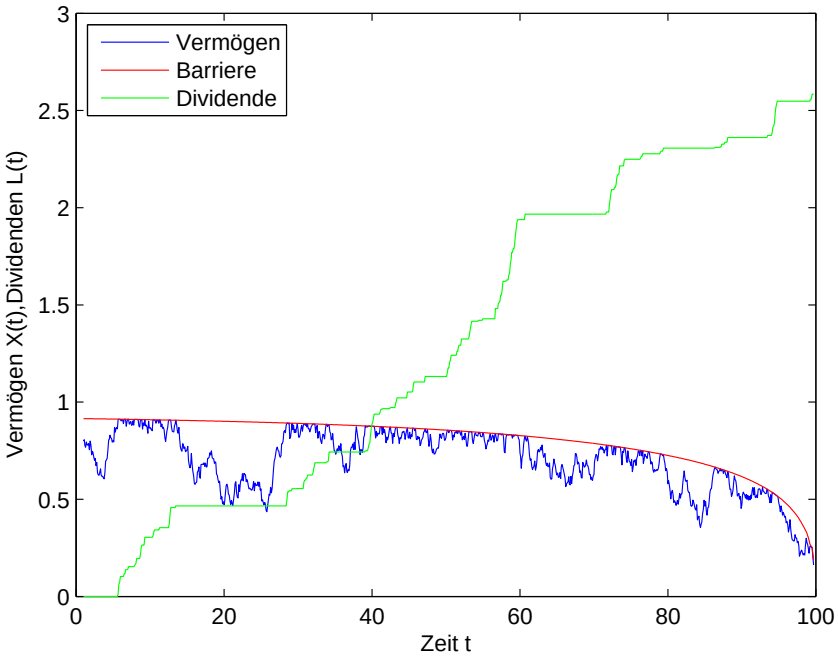

Abbildung 6.3: Simulation eines Vermögensprozesses und der entsprechenden kumulierten Dividenden mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.9$ und $X_0 = 0.8$

Wählt man nun $X_0 = 0.3$ und lässt σ und μ gleich, erhält man zum Beispiel die Abbildung 6.4 einer Simulation und eine Ruinwahrscheinlichkeit von 0.5660.

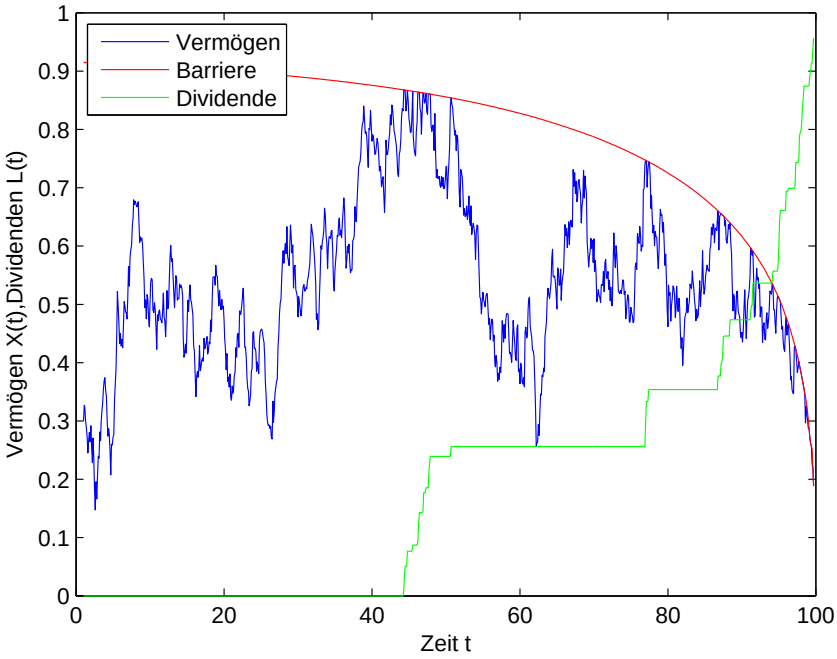

Abbildung 6.4: Simulation eines Vermögensprozesses und der entsprechenden kumulierten Dividenden mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.9$ und $X_0 = 0.3$

Hier sieht man, dass ein Anfangswert, der näher an 0 ist, auch eine höhere Ruinwahrscheinlichkeit mit sich bringt. Meist sind die kumulierten Dividenden in den einzelnen Simulationen bei einem Anfangswert nahe 0 geringer als bei einem Anfangswert über oder nahe der Barriere.

Änderung von σ und μ

Angenommen, $X_0 = 0.8$, $\mu = 0.7$ und $\sigma = 0.6$. Hier wurde σ verkleinert. In diesem Fall erhält man die Abbildung 6.5 einer Simulation und eine Ruinwahrscheinlichkeit von 0.0330.

Für den Anfangswert $X_0 = 0.3$ ergibt sich die Abbildung 6.6 und eine Ruinwahrscheinlichkeit von 0.2110.

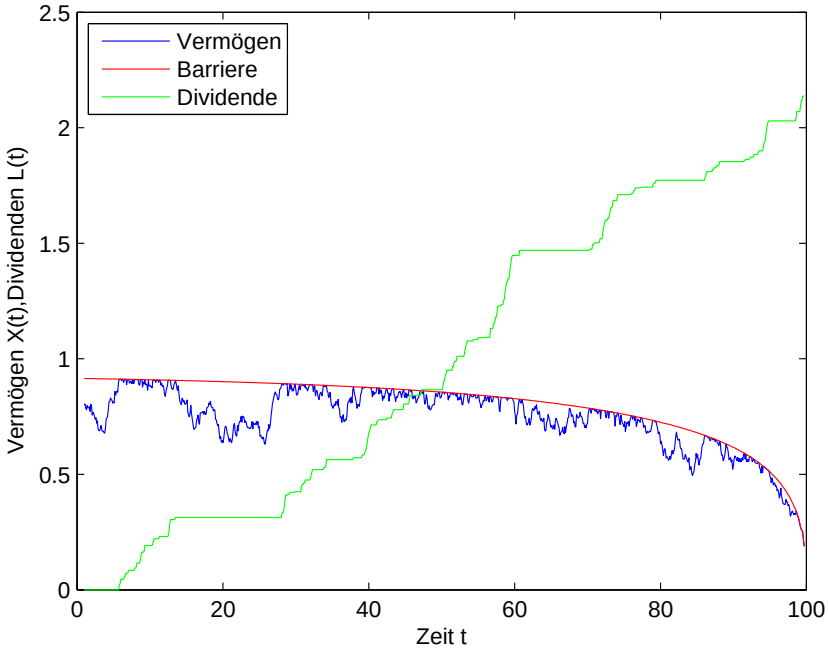

Abbildung 6.5: Simulation eines Vermögensprozesses und der entsprechenden kumulierten Dividenden mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.6$ und $X_0 = 0.8$

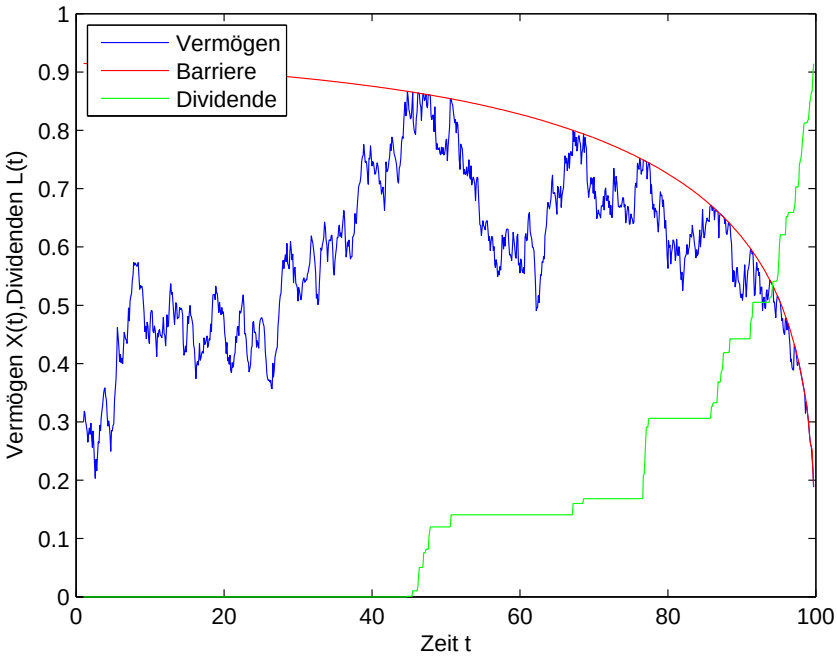

Abbildung 6.6: Simulation eines Vermögensprozesses und der entsprechenden kumulierten Dividenden mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.6$ und $X_0 = 0.3$

Mit einem kleineren σ verringert sich auch die Ruinwahrscheinlichkeit.

Angenommen, $X_0 = 0.8$, $\mu = 0.7$ und $\sigma = 1$. Hier wurde nun σ vergrößert. In diesem Fall erhält man die Abbildung 6.7 einer Simulation und eine Ruinwahrscheinlichkeit von 0.5210.

Für $X_0 = 0.3$ ergibt sich die Abbildung 6.8 und eine Ruinwahrscheinlichkeit von 0.6820.

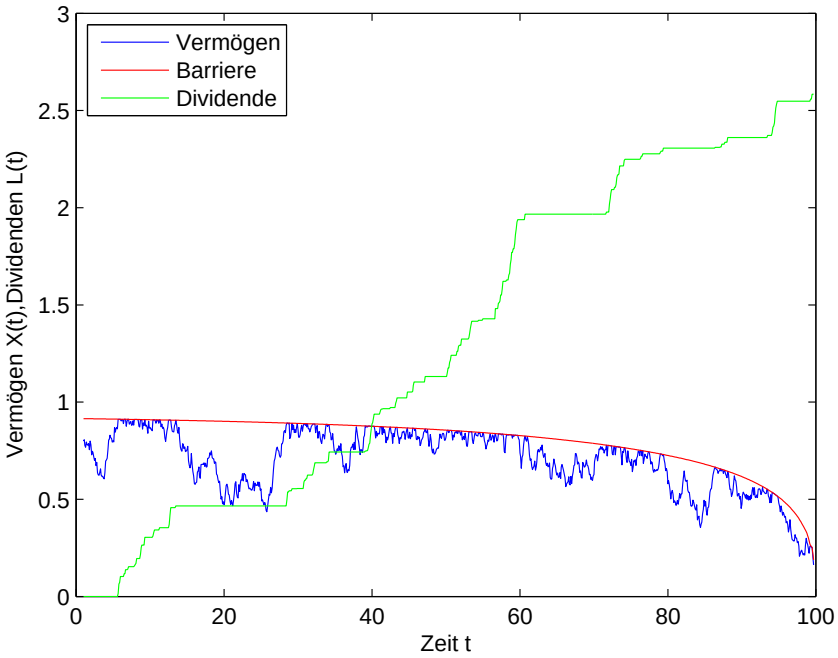

Abbildung 6.7: Simulation eines Vermögensprozesses und der entsprechenden kumulierten Dividenden mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 1$ und $X_0 = 0.8$

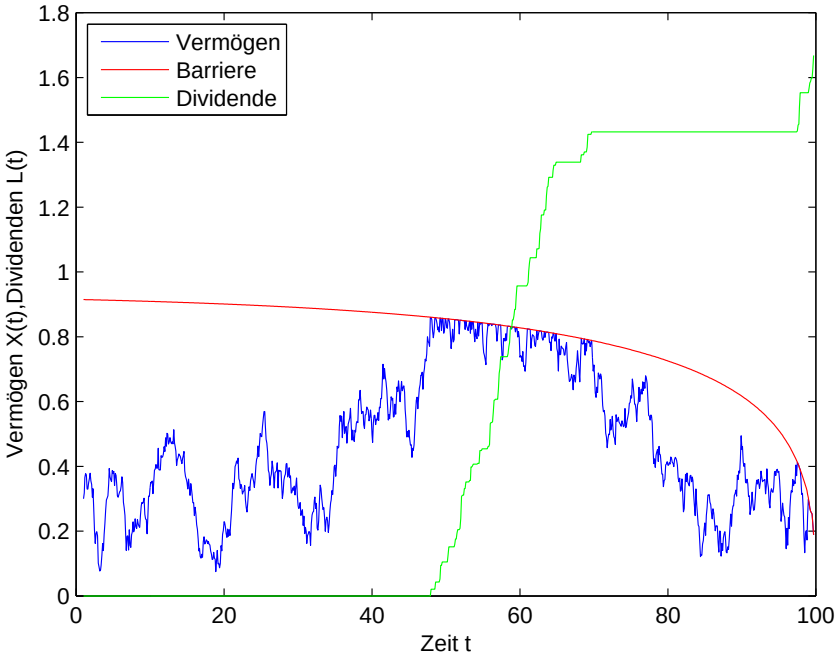

Abbildung 6.8: Simulation eines Vermögensprozesses und der entsprechenden kumulierten Dividenden mit $\mu = 0.7$, $\sigma = 1$ und $X_0 = 0.3$

Mit einem gößeren σ erhöht sich auch die Ruinwahrscheinlichkeit.

Bei einer Änderung des Parameters μ zeigten sich keine signifikanten Änderungen bezüglich der Ruinwahrscheinlichkeit unter Verwendung von $\Delta t = 0.001$.

6.3.3 Vergleich der Dividendenauszahlungen

In diesem Unterkapitel wird der Vergleich der Dividendenauszahlungen mit unterschiedlichen Barrierestrategien behandelt. Eine Barrierestrategie ist durch das Programm try54multi.m bestimmt und somit die gleiche wie in den vorigen Kapiteln, die andere Barrierestrategie ist durch die Gerade $k \cdot (T - t)$ gegeben, wobei k eine Konstante, T der Endzeitpunkt und t die Zeitpunkte sind. Die Inputparamter sind $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.9$ und $X_0 = 0.6$. Für die Konstante k gilt $k = 0.00945915$, damit die durch das Programm ermittelte Barriere und die Gerade denselben Ausgangspunkt haben.

Es wurden wieder 1000 Simulationen mit jeder Barriere durchgeführt. Die diskontierten kumulierten Dividenden sind im Falle der Reflexion an der Geraden im Mittel niedriger. Die Dividenden betragen im Mittel 1.2854 bei Reflexion an der durch das Programm

ermittelten Barriere und 1.1255 bei Reflexion an der Geraden für $\mu = 0.7$, $\sigma = 0.9$ und $X_0 = 0.6$.

Im Falle von $\mu = 0.5$, $\sigma = 0.7$ und $X_0 = 0.6$ betragen die Dividenden im Mittel 1.2739 bei Reflexion an der optimalten Barriere und 1.1499 bei Reflexion an der Geraden.

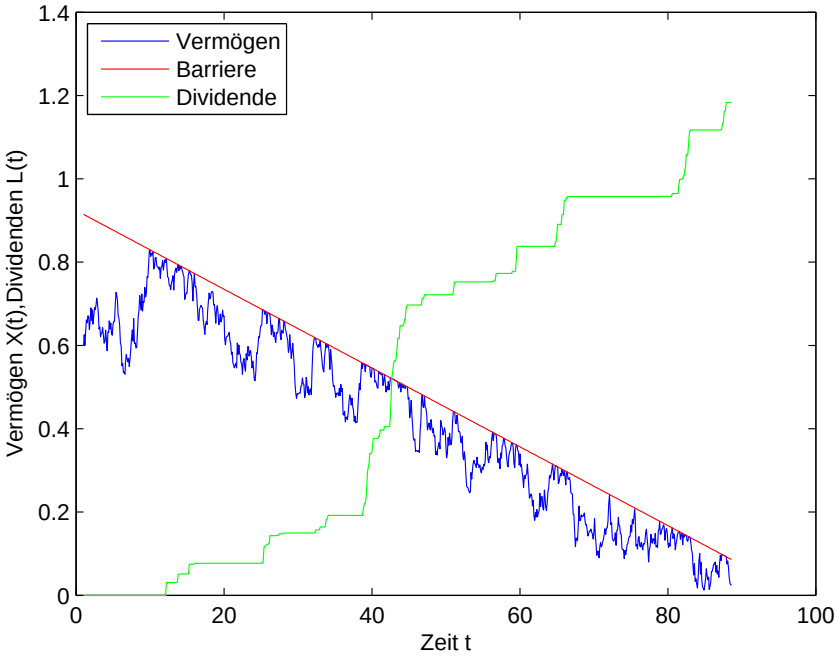

Abbildung 6.9: Simulation eines Vermögensprozesses bei Reflexion an der Geraden $\mu = 0.5$, $\sigma = 0.7$ und $X_0 = 0.6$

Anhang A

Programm zur Simulation

Es werden die Programme zur Berechnung der Barriere und der Simulation von kumulierten Dividenden und Ruinwahrscheinlichkeiten vorgestellt. Die Programme, die in Kapitel 6 verwendet werden, wurden mit Matlab R2007a geschrieben. Zuerst wird das Programm zur Berechnung der Barriere vorgestellt, dann das Hauptprogramm zur Simulation und zum Schluss die Programme, die im Hauptprogramm benötigt werden. Die Barriere wird als *function handle* aus den Ergebnissen des Programmes try54multi.m an das Programm vorgegebeneBarriere4.m übergeben.

```
function [res,xx,yy] =try54multi(C)
```

(©Ismail Cetin Gülüm)

```
%format long
%-----------------------------------------------
%Parameter-----------------------------------------
%-----------------------------------------------
mu=4;
sigma=2^.5;
beta=2;                    %mu=0.03 beta=0.02 sigma=0.5
T=1;
epsilon=10^(-3);
H4=-2;
N=200;
n=401;
expo=(1/2);
%zz=0.0001;
gew1=0.965;
gew2=0.965;
gew3=1;
gew4=1;
%-----------------------------------------------
%Variablen-----------------------------------------
%-----------------------------------------------

mu1=mu/sigma^2;
beta1=beta/sigma^2;
H1=1/(1-mu1*epsilon);
H0=2/7*mu1*H1*epsilon^2;
H3=6*mu1^2;
lambda=beta+mu^2/(2*sigma^2);
lambda1=lambda/sigma^2;
d1=2*mu1*beta1+2*mu1^3;
%-----------------------------------------------
%Die Funktion H=Hpos +Hneg--------------------
%-----------------------------------------------
```

```
alpha=240*mu1/(epsilon^5*(1-mu1*epsilon));
a=3*mu1^2*H1+H3;
bb=2*beta1;
c=-4*mu1*H3-4*mu1^3*H1;
d=4*beta1/sigma^2*H4-4*mu1*beta1;

alpha0=-a/(6*epsilon^3);
alpha1=-a/(2*epsilon^4)-c/(24*epsilon^3);
alpha2=3*a/(2*epsilon^5)+bb/(epsilon^5)+c/(12*epsilon^4)-d/(24*epsilon^4);
alpha3=-5*a/(6*epsilon^6)-5*bb/(6*epsilon^6)-c/(24*epsilon^5)+d/(24*epsilon
    ^5);

%Hpos=@(x)H1*x-mu1*H1*x.^2+alpha*(x.^7/840-epsilon*x.^6/240+epsilon^2*x
    .^5/240)+x.^3*(x-epsilon)^3*(alpha0+alpha1*x.^1+alpha2*x.^2+alpha3*x.^3);
%Hneg=@(x)-Hpos(-x)*exp(-2*mu1*x);
H=@(x)H1.*x-mu1*H1.*x^2+alpha*((1/840).*x^7-(1/240)*epsilon.*x^6+(1/240)*
    epsilon^2.*x^5)+x^3.*(x-epsilon)^3*(alpha0+alpha1.*x+alpha2*x^2+alpha3.*x
    ^3);
%-----------------------------------------------------
%dritte Ableitung von hpos-------------------------
%-----------------------------------------------------
%beta9=alpha3*mu1^3;
%beta8=(alpha2*mu1-3*alpha3*(epsilon*mu1-9))*mu1^2;
%beta7=((alpha*mu1^2+840*(alpha1*mu1^2-3*(alpha2*(epsilon*mu1-8)*mu1-alpha3*(
    epsilon^2*mu1^2-24*epsilon*mu1+72))))*mu1)/840;
%beta6=((-alpha*(epsilon*mu1-6)*mu1^2)/240+alpha0*mu1^3-3*alpha1*(epsilon*mu1
    -7)*mu1^2+3*alpha2*(epsilon^2*mu1^2-21*epsilon*mu1+56)*mu1+alpha3*(-
    epsilon^3*mu1^3+63*epsilon^2*mu1^2-504*epsilon*mu1+504));
%beta5=((alpha*(epsilon^2*mu1^2-18*epsilon*mu1+36)*mu1)/240-3*alpha0*(epsilon
    *mu1-6)*mu1^2+3*alpha1*(epsilon^2*mu1^2-18*epsilon*mu1+42)*mu1+alpha2*(-
    epsilon^3*mu1^3+54*epsilon^2*mu1^2-378*epsilon*mu1+336)-18*epsilon*alpha3
    *(epsilon^2*mu1^2-21*epsilon*mu1+56));
%beta4=(alpha*((epsilon^2*mu1^2)/16-(3*epsilon*mu1)/8+1/4)+3*alpha0*(epsilon
    ^2*mu1^2-15*epsilon*mu1+30)*mu1+alpha1*(-epsilon^3*mu1^3+45*epsilon^2*mu1
    ^2-270*epsilon*mu1+210)-15*(alpha2*(epsilon^2*mu1^2-18*epsilon*mu1+42)+6*
    alpha3*epsilon*(epsilon*mu1-7))*epsilon);
%beta3=((alpha*epsilon*(epsilon*mu1-2))/4+alpha0*(-epsilon^3*mu1^3+36*epsilon
    ^2*mu1^2-180*epsilon*mu1+120)-12*(alpha1*(epsilon^2*mu1^2-15*epsilon*mu1
    +30)+5*(alpha2*(epsilon*mu1-6)+2*alpha3*epsilon)*epsilon)*epsilon);
%beta2=(-H1*mu1^4+alpha*epsilon^2/4-3*(3*alpha0*(epsilon^2*mu1^2-12*epsilon*
    mu1+20)+4*(3*alpha1*(epsilon*mu1-5)+5*alpha2*epsilon)*epsilon)*epsilon);
%beta11=(-5*H1*mu1^3-6*(3*alpha0*(epsilon*mu1-4)+4*alpha1*epsilon)*epsilon^2)
    ;
%beta0=-3*(H1*mu1^2+2*alpha0*epsilon^3);

hprpos=@(x)(alpha*((1/4)*x^4-(1/2)*epsilon*x^3+(1/4)*epsilon^2*x^2)+6*(x-
    epsilon)^3*(alpha0+alpha1*x+alpha2*x^2+alpha3*x^3)+54*x*(x-epsilon)^2*(
    alpha0+alpha1*x+alpha2*x^2+alpha3*x^3)+18*x*(x-epsilon)^3*(alpha1+2*
    alpha2*x+3*alpha3*x^2)+54*x^2*(x-epsilon)*(alpha0+alpha1*x+alpha2*x^2+
    alpha3*x^3)+54*x^2*(x-epsilon)^2*(alpha1+2*alpha2*x+3*alpha3*x^2)+9*x^2*(
    x-epsilon)^3*(2*alpha2+6*alpha3*x)+6*x^3*(alpha0+alpha1*x+alpha2*x^2+
    alpha3*x^3)+18*x^3*(x-epsilon)*(alpha1+2*alpha2*x+3*alpha3*x^2)+9*x^3*(x-
    epsilon)^2*(2*alpha2+6*alpha3*x)+6*x^3*(x-epsilon)^3*alpha3)*exp(mu1*x-
    lambda*T)+(3*(-2*mu1*H1+alpha*((1/20)*x^5-(1/8)*epsilon*x^4+(1/12)*
    epsilon^2*x^3)+6*x*(x-epsilon)^3*(alpha0+alpha1*x+alpha2*x^2+alpha3*x^3)
    +18*x^2*(x-epsilon)^2*(alpha0+alpha1*x+alpha2*x^2+alpha3*x^3)+6*x^2*(x-
    epsilon)^3*(alpha1+2*alpha2*x+3*alpha3*x^2)+6*x^3*(x-epsilon)*(alpha0+
    alpha1*x+alpha2*x^2+alpha3*x^3)+6*x^3*(x-epsilon)^2*(alpha1+2*alpha2*x+3*
    alpha3*x^2)+x^3*(x-epsilon)^3*(2*alpha2+6*alpha3*x)))*mu1*exp(mu1*x-
    lambda*T)+(3*(H1-2*mu1*H1*x+alpha*((1/120)*x^6-(1/40)*epsilon*x^5+(1/48)*
    epsilon^2*x^4)+3*x^2*(x-epsilon)^3*(alpha0+alpha1*x+alpha2*x^2+alpha3*x
    ^3)+3*x^3*(x-epsilon)^2*(alpha0+alpha1*x+alpha2*x^2+alpha3*x^3)+x^3*(x-
    epsilon)^3*(alpha1+2*alpha2*x+3*alpha3*x^2)))*mu1^2*exp(mu1*x-lambda*T)+H
    (x)*mu1^3*exp(mu1*x-lambda*T);

%-----------------------------------------------------
%dritte Ableitung von hneg-------------------------
%-----------------------------------------------------

%gamma9=-alpha3*mu1^3;
```

```
%gamma8=(alpha2*mu1-3*alpha3*(epsilon*mu1-9))*mu1^2;
%gamma7=-((alpha*mu1^2+840*(alpha1*mu1^2-3*(alpha2*(epsilon*mu1-8)*mu1-alpha3
    *(epsilon^2*mu1^2-24*epsilon*mu1+72))))*mu1)/840;
%gamma6=((-alpha*(epsilon*mu1-6)*mu1^2)/240+alpha0*mu1^3-3*alpha1*(epsilon*
    mu1-7)*mu1^2+3*alpha2*(epsilon^2*mu1^2-21*epsilon*mu1+56)*mu1+alpha3*(-
    epsilon^3*mu1^3+63*epsilon^2*mu1^2-504*epsilon*mu1+504));
%gamma5=((-alpha*(epsilon^2*mu1^2-18*epsilon*mu1+36)*mu1)/240+3*alpha0*(
    epsilon*mu1-6)*mu1^2-3*alpha1*(epsilon^2*mu1^2-18*epsilon*mu1+42)*mu1+
    alpha2*(epsilon^3*mu1^3-54*epsilon^2*mu1^2+378*epsilon*mu1-336)+18*
    epsilon*alpha3*(epsilon^2*mu1^2-21*epsilon*mu1+56));
%gamma4=(alpha*((epsilon^2*mu1^2)/16-(3*epsilon*mu1)/8+1/4)+3*alpha0*(epsilon
    ^2*mu1^2-15*epsilon*mu1+30)*mu1+alpha1*(-epsilon^3*mu1^3+45*epsilon^2*mu1
    ^2-270*epsilon*mu1+210)-15*(alpha2*(epsilon^2*mu1^2-18*epsilon*mu1+42)+6*
    alpha3*epsilon*(epsilon*mu1-7))*epsilon);
%gamma3=((-alpha*epsilon*(epsilon*mu1-2))/4+alpha0*(epsilon^3*mu1^3-36*
    epsilon^2*mu1^2+180*epsilon*mu1+120)+12*(alpha1*(epsilon^2*mu1^2-15*
    epsilon*mu1+30)+5*(alpha2*(epsilon*mu1-6)+2*alpha3*epsilon)*epsilon)*
    epsilon);
%gamma2=(-H1*mu1^4+alpha*epsilon^2/4-3*(3*alpha0*(epsilon^2*mu1^2-12*epsilon*
    mu1+20)+4*(3*alpha1*(epsilon*mu1-5)+5*alpha2*epsilon)*epsilon)*epsilon);
%gamma1=(5*H1*mu1^3+6*(3*alpha0*(epsilon*mu1-4)+4*alpha1*epsilon)*epsilon^2);
%gamma0=-3*(H1*mu1^2+2*alpha0*epsilon^3);

%hprneg=@(x)(x.^9*gamma9+x.^8*gamma8+x.^7*gamma7+x.^6*gamma6+x.^5*gamma5+x
    .^4*gamma4+x.^3*gamma3+x.^2*gamma2+x.^1*gamma1+gamma0)*exp(-mu1*x-lambda*
    T);

hprneg=@(x) -(6*x*(-x-epsilon)^3*(alpha1-2*alpha2*x+3*alpha3*x^2)-alpha
    *((1/4)*x^4+(1/2)*epsilon*x^3+(1/4)*epsilon^2*x^2)+6*x^3*(alpha0-alpha1*x
    +alpha2*x^2-alpha3*x^3)-6*(-x-epsilon)^3*(alpha0-alpha1*x+alpha2*x^2-
    alpha3*x^3)-12*x*(-x-epsilon)^3*(-alpha1+2*alpha2*x-3*alpha3*x^2)+54*x*(-
    x-epsilon)^2*(alpha0-alpha1*x+alpha2*x^2-alpha3*x^3)+36*x^2*(-x-epsilon)
    ^2*(-alpha1+2*alpha2*x-3*alpha3*x^2)-54*x^2*(-x-epsilon)*(alpha0-alpha1*x
    +alpha2*x^2-alpha3*x^3)-3*x^2*(-x-epsilon)^3*(2*alpha2-6*alpha3*x)-12*x
    ^3*(-x-epsilon)*(-alpha1+2*alpha2*x-3*alpha3*x^2)+3*x^3*(-x-epsilon)
    ^2*(2*alpha2-6*alpha3*x)+6*x^2*(-x-epsilon)^3*(-2*alpha2+6*alpha3*x)-18*x
    ^2*(-x-epsilon)^2*(alpha1-2*alpha2*x+3*alpha3*x^2)-6*x^3*(-x-epsilon)
    ^2*(-2*alpha2+6*alpha3*x)+6*x^3*(-x-epsilon)*(alpha1-2*alpha2*x+3*alpha3*
    x^2)+6*x^3*(-x-epsilon)^3*alpha3)*exp(-mu1*x-lambda*T)+(-6*mu1*H1-3*alpha
    *((1/20)*x^5+(1/8)*epsilon*x^4+(1/12)*epsilon^2*x^3)-18*x*(-x-epsilon)
    ^3*(alpha0-alpha1*x+alpha2*x^2-alpha3*x^3)+54*x^2*(-x-epsilon)^2*(alpha0-
    alpha1*x+alpha2*x^2-alpha3*x^3)-9*x^2*(-x-epsilon)^3*(-alpha1+2*alpha2*x
    -3*alpha3*x^2)-18*x^3*(-x-epsilon)*(alpha0-alpha1*x+alpha2*x^2-alpha3*x
    ^3)+9*x^3*(-x-epsilon)^2*(-alpha1+2*alpha2*x-3*alpha3*x^2)+9*x^2*(-x-
    epsilon)^3*(alpha1-2*alpha2*x+3*alpha3*x^2)-9*x^3*(-x-epsilon)^2*(alpha1
    -2*alpha2*x+3*alpha3*x^2)+3*x^3*(-x-epsilon)^3*(-2*alpha2+6*alpha3*x))*
    mu1*exp(-mu1*x-lambda*T)-(-3*H1-6*mu1*H1*x-3*alpha*((1/120)*x^6+(1/40)*
    epsilon*x^5+(1/48)*epsilon^2*x^4)-9*x^2*(-x-epsilon)^3*(alpha0-alpha1*x+
    alpha2*x^2-alpha3*x^3)+9*x^3*(-x-epsilon)^2*(alpha0-alpha1*x+alpha2*x^2-
    alpha3*x^3)+3*x^3*(-x-epsilon)^3*(alpha1-2*alpha2*x+3*alpha3*x^2))*mu1^2*
    exp(-mu1*x-lambda*T)+H(-x)*mu1^3*exp(-mu1*x-lambda*T);
%-----------------------------------------------
%Die anfängliche Funktion b--------------------
%-----------------------------------------------

dd=zeros(n,1);
y=zeros(n,1);
k=zeros(n,1);

t=linspace(0,T,n);
%t=linspace(0,0.99,n-2);    %Notation: y= k*t +dd
%t(n-1)=0.995;
%t(n)=1;
k(n)=H4;
y(n)=epsilon;
dd(n)=epsilon-H4*T;
b=@(t)C*sqrt(T-t)*(-log(T-t))^(expo)+epsilon;
bpr=@(t)-C/(2*sqrt(T-t))*(-log(T-t))^(expo)+C*expo*(-log(T-t))^(expo-1)/(sqrt
    (T-t));
y(n-1)=b(t(n-1));
```

```
%-----------------------------------------------
%weitere Funktionen-----------------------------
%-----------------------------------------------
f0=@(s)-beta.*exp(-beta.*s).*b(s);
d=@(t)mu/beta+exp(beta.*(t-T)).*(H0-mu/beta)+exp(beta*t)*Int0(f0,t,T,N);
B=@(t)exp(mu1.*b(t)-lambda.*t).*(2*beta1+3*mu1^2+mu1^3.*(b(t)+d(t)));
D=@(t)exp(mu1.*b(t)-lambda.*t).*(4*mu1*beta1+4*mu1^3+mu1^4.*(b(t)+d(t))+4*
    beta1/sigma^2.*bpr(t));

K=@(x,tau,zeta,s)1./(sqrt(2*pi*sigma^2.*(tau-s))).*exp(-((x-zeta).^2)./(2*
    sigma^2.*(tau-s)));
Kx=@(x,tau,zeta,s)1./(sqrt(2*pi*sigma^2.*(tau-s))).*exp(-((x-zeta).^2)./(2*
    sigma^2.*(tau-s))).*(-(x-zeta)./(sigma^2.*(tau-s)));

Bpr=@(t)B(t).*(mu1.*bpr(t)-lambda)+mu1^3.*(bpr(t)+beta.*d(t)+(-mu+beta*b(t)))
    *exp(mu1.*b(t)-lambda.*t);


brec=@(t,b,bpr,B,D,Bpr,d)sigma^2/(2*beta1)*exp(-mu1*b(t)+lambda*t)*(int1(t,N,
    b,Bpr)+sigma^2/2*int2(t,N,b,D)+sigma^2/2*int3(t,N,b,D)+int4(t,N,b,B)+int5
    (t,N,b,B))-sigma^2/(2*beta1)*(d1+mu1^4/2*(b(t)+d(t)));

%res=brec(0.99,b,bpr,B,D);
test=zeros(n,1);
%-----------------------------------------------
%Rekursion---------------------------------------
%-----------------------------------------------
for jj=1:(n-1)


  i=n-jj;
 %test(i)=sigma^2/(2*beta1)*exp(-mu1*b(t(i))+lambda*t(i));
  %test(i)= int1(t(i),N,b,Bpr)+1/2*int2(t(i),N,b,D)+1/2*int3(t(i),N,b,D)+int4
      (t(i),N,b,B)+int5(t(i),N,b,B);
  test(i)= int2(t(i),N,b,D);
  k(i)=brec(t(i),b,bpr,B,D,Bpr,d);
  %k(i)=(test(i))-sigma^2/(2*beta1)*(d1+mu1^4/2*(b(t(i))+d(t(i))));
  %k(i)=int4(t(i),N,b,B)+int5(t(i),N,b,B);
  dd(i)=y(i)-t(i)*k(i);
  if i>1
    y(i-1)=k(i)*t(i-1)+dd(i);
  end
  khelp=k;

  khelp(1)=[]; %für die Ableitung des Splines: die erste Komponente von k
      wird gestrichen
  khelp(n)=0;  %danach wird noch die neue n-te Komponente mit 0 definiert,
      damit khelp die Länge n hat

  b=@(z)bfunc(z,t,y);
  bpr=@(z)bprfunc(z,t,khelp);

  %die obigen Funktionen müssen für jedes 'neue' b neu definiert werden.
  f0=@(s)-beta.*exp(-beta.*s).*b(s);
  d=@(t)mu/beta+exp(beta.*(t-T)).*(H0-mu/beta)+exp(beta*t)*Int0(f0,t,T,N);
  B=@(t)exp(mu1.*b(t)-lambda.*t).*(2*beta1+3*mu1^2+mu1^3.*(b(t)+d(t)));
  D=@(t)exp(mu1.*b(t)-lambda.*t).*(4*mu1*beta1+4*mu1^3+mu1^4.*(b(t)+d(t))+4*
      beta1/sigma^2.*bpr(t));
  Bpr=@(t)B(t).*(mu1.*bpr(t)-lambda)+mu1^3.*(bpr(t)+beta.*d(t)+(-mu+beta*b(t)
      ))*exp(mu1.*b(t)-lambda.*t);

end

max=400;
xx=linspace(0,T,max);
yy=zeros(max,1);
for i=1:max
    yy(i)=bfunc(xx(i),t,y);
end
res=y;
```

```
%f1y=zeros(max,1);
%f1y=sin(1-x);
plot(100.*xx,yy,'-b',100.*xx,sigma.*sqrt(-log(T-xx).*(T-xx)),'--g',100.*xx
    ,0.9359,'r');

%-----------------------------------------------
%Die Funktion b-----------------------------------
%-----------------------------------------------
    function value=bfunc(x,t,y)
        if ((x>=t(n-1)) && (x<=T))
           value=C*sqrt(T-x)*(-log(T-x))^(expo)+epsilon;
        else
           value=interp1(t,y,x);
        end
    end
%-----------------------------------------------
%Die Funktion b'----------------------------------
%-----------------------------------------------
    function value=bprfunc(x,t,khelp)
        if ((x>=t(n-1)) && (x<=T))
           value=-C/(2*sqrt(T-x))*(-log(T-x))^(expo)+C*expo*(-log(T-x))^(expo
               -1)/(sqrt(T-x));
        else
            value=interp1(t,khelp,x,'nearest');
        end
    end
%-----------------------------------------------
%Hilfsfunktionen Int0-----------------------------
%-----------------------------------------------
function value = Int0(f,a1,a2,N)

S=0;
x=linspace(a1,a2,N);
dist=(a2-a1)/(N-1);
for j=1:(N-2)
    S=S+dist.*(1/6).*(f(x(j))+4.*f((x(j)+x(j+1))/2)+f(x(j+1)));
end
value=S+dist.*(1/6).*(f(x(N-1))+4.*f((x(N-1)+x(N))/2)+f(gew2.*x(N)+(1-gew2).*
    x(N-1)));

end
%-----------------------------------------------
%Hilfsfunktionen Int1-----------------------------
%-----------------------------------------------
function value = int1(t,N,b,Bpr)

f=@(s)(K(b(t),T-t,-b(T-s),s)-K(b(t),T-t,b(T-s),s)).*Bpr(T-s);
S=0;
x=linspace(0,T-t,N);
dist=(T-t)./(N-1);
S=S+dist.*(1/6).*(f(gew1.*x(1)+(1-gew1).*x(2))+4.*f((x(1)+x(1+1))/2)+f(x(1+1)
    ));
for j=2:(N-2)
    S=S+dist.*(1/6).*(f(x(j))+4.*f((x(j)+x(j+1))/2)+f(x(j+1)));
end

value=S+dist.*(1/6).*(f(x(N-1))+4.*f((x(N-1)+x(N))/2)+f(gew2.*x(N)+(1-gew2).*
    x(N-1)));

end


%-----------------------------------------------
%Hilfsfunktionen Int2-----------------------------
%-----------------------------------------------
function value = int2(t,N,b,D)

f=@(s)Kx(b(t),T-t,b(T-s),s).*D(T-s);
S=0;
x=linspace(0,T-t,N);
```

```
dist=(T-t)./(N-1);
S=S+dist.*(1/6).*(f(gew1.*x(1)+(1-gew1).*x(2))+4.*f((x(1)+x(1+1))/2)+f(x(1+1)
    ));
for j=2:(N-2)
    S=S+dist.*(1/6).*(f(x(j))+4.*f((x(j)+x(j+1))/2)+f(x(j+1)));
end

value=S+dist.*(1/6).*(f(x(N-1))+4.*f((x(N-1)+x(N))/2)+f(gew2.*x(N)+(1-gew2).*
    x(N-1)));

end

%-----------------------------------------------------
%Hilfsfunktionen Int3-----------------------------
%-----------------------------------------------------
function value = int3(t,N,b,D)

f=@(s)Kx(b(t),T-t,-b(T-s),s).*D(T-s);
S=0;
x=linspace(0,T-t,N);
dist=(T-t)./(N-1);

S=S+dist.*(1/6).*(f(gew1.*x(1)+(1-gew1).*x(2))+4.*f((x(1)+x(1+1))/2)+f(x(1+1)
    ));

for j=2:(N-2)
    S=S+dist.*(1/6).*(f(x(j))+4.*f((x(j)+x(j+1))/2)+f(x(j+1)));
end

value=S+dist.*(1/6).*(f(x(N-1))+4.*f((x(N-1)+x(N))/2)+f(gew2.*x(N)+(1-gew2).*
    x(N-1)));

end

%-----------------------------------------------------
%Hilfsfunktionen Int4-----------------------------
%-----------------------------------------------------
function value = int4(t,N,b,B)

%exp(mu1.*epsilon-lambda.*T).*(2*beta1+3*mu1^2+mu1^3.*(2*epsilon))=B(T), da
%b(T)=epsilon, nach Definition, und d(T)=epsilon,.
f=@(zeta)Kx(b(t),T-t,zeta,0).*(hprpos(zeta)-exp(mu1.*epsilon-lambda.*T).*(2*
    beta1+3*mu1^2+mu1^3.*(H0+epsilon)));
S=0;
x=linspace(0,epsilon,N);
dist=(epsilon)./(N-1);
S=S+dist.*(1/6).*(f(gew3.*x(1)+(1-gew3).*x(2))+4.*f((x(1)+x(1+1))/2)+f(x(1+1)
    ));

for j=2:(N-2)
    S=S+dist.*(1/6).*(f(x(j))+4.*f((x(j)+x(j+1))/2)+f(x(j+1)));
end

value=S+dist.*(1/6).*(f(x(N-1))+4.*f((x(N-1)+x(N))/2)+f(gew3.*x(N)+(1-gew3).*
    x(N-1)));
end

%-----------------------------------------------------
%Hilfsfunktionen Int5-----------------------------
%-----------------------------------------------------
function value = int5(t,N,b,B)

f=@(zeta)Kx(b(t),T-t,zeta,0).*(hprneg(zeta)-exp(mu1.*epsilon-lambda.*T).*(2*
    beta1+3*mu1^2+mu1^3.*(H0+epsilon)));
S=0;
x=linspace(-epsilon,0,N);
dist=(epsilon)./(N-1);
S=S+dist.*(1/6).*(f(gew4.*x(1)+(1-gew4).*x(2))+4.*f((x(1)+x(2))/2)+f(x(2)));
```

```
for j=2:(N-2)
    S=S+dist.*(1/6).*(f(x(j))+4.*f((x(j)+x(j+1))/2)+f(x(j+1)));
end

value=S+dist.*(1/6).*(f(x(N-1))+4.*f((x(N-1)+x(N))/2)+f(gew4.*x(N)+(1-gew4).*
    x(N-1)));

end


end




function[Vermoegenplot,Barriereplot,Dividendenplot,p]=vorgegebeneBarriere4(m,
    s,c,X1,T,b)
%m...mu, s...sigma, c...Diskont, X1... Anfangswert, T...Endzeitpunkt,
%b...Barriere
R=0;

clear X;

clear delta;


clear D;
clear L;
b(1)
k=0;
l=0;
m=0;
X(1)=X1;
D(1)=0;
dt=1/1000;
L(1)=0;

%1000 Durchläufe zur Schätzung der Ruinwahrscheinlichkeit
for f=1:1000
clear Vermoegen;
clear Dividenden;
clear Barriere;

if X(1)>b(1)
 L(1)=X(1)-b(1);
 X(1)=X(1)-L(1);
 D(1)=D(1)+exp(-c)*L(1);
 k=X(1);
 l=D(1);
 m=b(1);
else
    k=X(1);
    m=b(1);
    l=D(1);
end

%Simulation der BB
time=1:0.1:99.7;
p=randn(1,length(time))*sqrt(dt)
dW=generiereFunctionHandleausDaten(time,p);
W=dW(time);

del=m*dt+s*dW(time);
delta=generiereFunctionHandleausDaten(time,del);
deltaber=delta(time);

%Barriere
bdis=b(time);
```

```
%eine Simulation
for t=1:987

    X(t+1)=X(t)+deltaber(t);

% ist das Vermögen höher als die Barriere wird die Differenz ausbezahlt
    if X(t+1)>bdis(t+1)
        L(t+1)=(X(t+1)-bdis(t+1));
        X(t+1)=X(t+1)-L(t+1);
        D(t+1)=D(t)+exp(-c*(t+10)/10)*L(t+1);
    else
        D(t+1)=D(t);
    end

% sinkt das Vermögen unter 0 oder auf 0 wird der Prozess gestoppt
    if ((X(t+1)<=0) && ((t+1<T))) ||((X(t+1)<0) && ((t+1)<=T))
         R=R+1;
        break
    end

   Vermoegen(t+1)=X(t+1)
   Vermoegen(1)=k;
   Dividenden(t+1)=D(t+1)
   Dividenden(1)=l;
   Barriere(t+1)=bdis(t+1);
   Barriere(1)=m;

z=t
end


plottime=1:0.1:(z+10)/10
Barriereplot=generiereFunctionHandleausDaten(plottime,Barriere);
Dividendenplot=generiereFunctionHandleausDaten(plottime,Dividenden);
Vermoegenplot=generiereFunctionHandleausDaten(plottime,Vermoegen);

end

kumDividenden=D(t+1)

Ruinwahrscheinlichkeit= R/1000


%X(t), b(t) und Dividenden werden von einer Simulation geplotet
plot(plottime,Vermoegenplot(plottime),'blue')
hold on
plot(plottime,Barriereplot(plottime),'red')
plot(plottime,Dividendenplot(plottime), 'green')
hold on
legend('Vermögen', 'Barriere','Dividende', 'Location','NorthWest')
xlabel('Zeit t')
ylabel('Vermögen X(t),Dividenden L(t)')
hold off





function fhandle = generiereFunctionHandleausDaten(xdaten,ydaten)
% Liefert zu gebenen Datenpunkten ein function-handle mittels linearer
% Interpolation

    fhandle = @(t) interp1(xdaten,ydaten,t);

end
```

Literaturverzeichnis

[1] Thomas Deck. *Der Itô-Kalkül, Einführung und Anwendungen.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2005.

[2] Rüdiger U. Seydel. *Einführung in die numerische Berechnung von Finanz- Derivaten.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[3] Bernt Karsten Øksendal. *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications.* Springer-Verlag, Heidelberg New York, 2000.

[4] Hansjörg Albrecher. *Finanz-und Versicherungsmathematik 1.* Technische Universität Graz, Februar 2006.

[5] Wendell H. Fleming and H. M. Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions.* Springer-Verlag, USA, 2006.

[6] Richard Bellman. *Dynamic Programming.* Princeton University Press, Princeton 1957.

[7] Hansjörg Albrecher und Stefan Thonhauser. *Optimality results of dividend problems in insurance.* Real Academia de Ciencias, Spanien, 2009.

[8] Søren Asmussen und Michael Taksar. *Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out.* Elsvier Science B.V.,1997

[9] Sid Browne. *Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin.* Mathematics of Operations Researchs, 20, 4, November 1995

[10] D. L. Iglehart. *Diffusion approximations in collective risk theory.* J. Apll. Probability, 6, 1969.

[11] Christian Hipp und Hanspeter Schmidli. *Asymptotics of ruin probabilities for controlled risk processes in the small claims case.* 2004.

[12] Hanspeter Schmidli. *Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting.* März 1999.

[13] Christian Hipp und Michael Vogt. *Optimal dynamic XL reinsurance.* ASTIN BULLETIN, Vol. 33, No. 2, 2003, D. 193-207.

[14] Hanspeter Schmidli. *On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance.* Annuals of Applied Probability, 2002, Vol. 12, No. 3.

[15] Springer Gabler Verlag. *Gabler Wirtschaftslexikon, online im Internet:- http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/55029/simulation-v12.html.* 29.Juli 2013.

[16] Christian Hipp und Michael Plum. *Optimal investment for insurers.* Insurance: Mathematics and Economics 27 (2000).

[17] Ismail Cetin Gülüm. *Controlled diffusion models with appllications to dividend payment.* Wien, 2011

[18] Hansjörg Albrecher und Stefan Thonhauser. *Some remarks on an impulse control problem in insurance.* Preprint, University of Lausanne, 2009.

[19] Hans-Ulrich Gerber. *Entscheidungskriterien für den zusammengesetzten Poisson - Prozess.* Bern, 1969.

[20] Peter Grandits. *Optimal Consumption in a Brownian Model with absorption and finite time horizon.* Wien, März 2012.