



DIPLOMARBEIT

(MASTER'S THESIS)

Untersuchungen zum Schubmittelpunktsverlauf von Hochhauskernen mit Öffnungsreihen

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs

unter der Leitung von

O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Andreas KOLBITSCH

und als verantwortlich mitwirkenden Assistenten

Univ.Ass. Dipl.-Ing. Edmund SPITZENBERGER

am

Institut für Hochbau und Technologie

eingereicht an der Technischen Universität Wien

Fakultät für Bauingenieurwesen

von

Rupert Zierhofer, BSc

Matrikelnummer 0726534

Hüttstraße 50

A - 6250 Kundl

Wien, im Jänner 2014

.....

(Rupert Zierhofer)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Andreas Kolbitsch für die Möglichkeit bedanken, diese Diplomarbeit am Institut für Hochbau und Technologie an der Technischen Universität Wien durchführen zu können.

Im Speziellen gilt mein Dank Herrn Univ.Ass. Dipl.-Ing. Edmund Spitzenberger für die engagierte, lehrreiche und kompetente Betreuung während der vergangenen Monate.

Ich bedanke mich bei meinen Eltern, ohne deren bedingungslose Unterstützung eine Absolvierung des Studiums in erfolgter Art und Weise nicht möglich gewesen wäre.

Ein herzliches Dankeschön auch an alle Weiteren, die zum Fortgang dieser Arbeit beigetragen haben.

Kurzfassung

Der Schubmittelpunkt eines rechteckigen, dünnwandigen und geschlossenen Querschnitts mit konstanter Wanddicke fällt mit dem Schwerpunkt zusammen. Wird dieser Querschnitt an einer Seite geöffnet, ändert sich die Lage des Schubmittelpunkts so, dass er sich außerhalb des Querschnitts befindet.

In Hochhäusern werden aussteifende Kerne häufig zur Unterbringung von Liftschächten verwendet. Aufgrund der geschoßweisen Anordnung von Liftöffnungen treten geschlossene und offene Querschnittsabschnitte in abwechselnder Reihenfolge auf.

Zur Untersuchung, in welcher Form und nach welchen Gesetzmäßigkeiten sich der Schubmittelpunkt über die Höhe des Hochhauskerns mit einer Öffnungsreihe bewegt, wurden sieben sich hinsichtlich ihrer Öffnungsanzahl, -anordnung und -größe unterscheidende Kerne im Maßstab 1:50 hergestellt. Die Auffindung des Schubmittelpunktverlaufs eines Modellkörpers erfolgte einerseits über Messungen in physikalischen Versuchen und andererseits durch numerische Simulationen. Sowohl der entwickelte Versuchsaufbau als auch die Vorgehensweise der numerischen Simulationen werden erläutert. Ein Zusammenhang zwischen der Periodizität der Schubmittelpunktverläufe und der Öffnungsanordnungen bzw. -größen konnte beobachtet werden. Zusätzlich war eine Abnahme der Exzentrizitäten der Schubmittelpunkte mit abnehmender Distanz zur Einspannung der Probekörper zu erkennen. Im Vergleich zu den physikalischen Versuchen war diese Abnahme in den numerischen Simulationen stärker ausgeprägt.

Abstract

The shear center of a rectangular, thin-walled, and closed cross section with a constant thickness coincides with its center of gravity. If the profile is not closed but opened at one side of the rectangle, the shear center moves from the inside to the outside of the cross section.

In high-rise buildings stiffening cores are often used as elevator shafts which require wall openings in each floor. Thus alternating sections of closed and opened profiles occur along the height of the core.

In this work, seven 1:50 scaled models of high-rise cores have been investigated, where numbers, positions, and sizes of the perforations have been varied. A set-up for the measurement of the movement of the shear center along the height has been developed. Physical measurements and numerical simulations have been carried out. A general coincidence is observed regarding the geometric patterns of the perforations and the periodicity of the shear center movements. In addition, the eccentricity of the shear center seems to decrease with decreasing distance to the rigid clamping. This relationship is more pronounced in the simulations as compared to the experimental results.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Zielsetzung	1
2	Theoretische Grundlagen	2
2.1	Schubmittelpunkt M	2
2.1.1	Definition	2
2.1.2	Berechnung der Koordinaten des Schubmittelpunkts M mit der Querkraftmethode [1]	3
2.1.3	Berechnung der Koordinaten des Schubmittelpunkts M aus Verwölbungen	5
2.1.4	Berechnung der Koordinaten des Schubmittelpunkts M mit der Methode der finiten Elemente [2]	6
2.2	Allgemeines über Verwölbungen und Arten von Torsion [3], [4]	6
2.3	Verwölbungen dünnwandiger offener Querschnitte [3]	7
2.3.1	Grund- und Hauptverwölbungen	7
2.3.2	Umrechnung der Verwölbungen für verschiedene Drehachsen	10
2.3.3	Bestimmung der Integrationskonstanten ω_0 und der Schubmittelpunktskoordinaten y_M und z_M	10
2.3.4	Integrationskonstante ω_0	11
2.3.5	Bestimmung der Schubmittelpunktskoordinaten	12
2.3.6	Anwendung dieser Methode auf den vorhandenen Querschnitt	13
2.4	St. Venant'sche Torsion dünnwandiger offener Querschnitte [1], [3]	16
2.4.1	Aus der Herleitung der St. Venant'schen Schubspannungen für Vollquerschnitte	16
2.4.2	Schubspannungen zufolge St. Venant'scher Torsion in schmalen Rechteckquerschnitten	18
2.4.3	Schubspannungen zufolge St. Venant'scher Torsion in dünnwandigen offenen Querschnitten	19

2.5	Schubspannungen zufolge St. Venant'scher Torsion in dünnwandigen einzelligen geschlossenen Querschnitten [1]	20
2.6	Wölbkrafttorsion dünnwandiger offener Profile [3], [5]	21
2.6.1	Wölbspannungen σ_W und Wölbschubfluss T_W	22
2.7	Gesamt-torsionsmoment [3]	24
2.7.1	Wölbmoment M_ω	25
3	Grundlegende Aussteifungssysteme	26
3.1	Räumliche Tragwerke - Kernttragwerke [6]	28
3.2	Horizontale Einwirkungen	31
4	Modellfindung und Dimensionierung der Versuchskörper	32
4.1	Statisches System	32
4.2	Querschnitt	32
5	Herstellung der Versuchskörper	37
5.1	Verwendete Maschinen	37
5.2	Die Versuchskörper	38
5.2.1	Probekörper 1	40
5.2.2	Probekörper 2	41
5.2.3	Probekörper 3	41
5.2.4	Probekörper 4	42
5.2.5	Probekörper 5	42
5.2.6	Probekörper 6	43
5.2.7	Probekörper 7	43
6	Versuchsaufbau	44
6.1	Einspannung	44
6.2	Messaufbau und Messpunkte	46
6.3	Kraftaufbringung	48
6.4	Schubflussklemme	49
7	Versuchsdurchführung	54
8	Numerische Simulation	61
8.1	FE-Modell	61

8.2	Simulation	62
9	Versuchsergebnisse aus physikalischen Versuchen	65
9.1	Probekörper 1	66
9.2	Probekörper 2	67
9.3	Probekörper 3	68
9.4	Probekörper 4	69
9.5	Probekörper 5	70
9.6	Probekörper 6	71
9.7	Probekörper 7	72
9.8	Darstellung aller Schubmittelpunktverläufe aus den physikalischen Versuchen .	73
10	Resultate aus numerischer Simulation mit Dlubal RFEM	75
10.1	Probekörper 1	76
10.2	Probekörper 2	77
10.3	Probekörper 3	78
10.4	Probekörper 4	79
10.5	Probekörper 5	80
10.6	Probekörper 6	81
10.7	Probekörper 7	82
10.8	Darstellung aller Schubmittelpunktverläufe aus RFEM	83
11	Vergleich der Resultate aus den physikalischen Versuchen und der numerischen Berechnung mit Dlubal RFEM	85
11.1	Probekörper 1	86
11.2	Probekörper 2	87
11.3	Probekörper 3	89
11.4	Probekörper 4	90
11.5	Probekörper 5	91
11.6	Probekörper 6	92
11.7	Probekörper 7	93
12	Rèsumé	95

Kapitel 1

Einleitung und Zielsetzung

Hochhauskerne dienen neben ihrer aussteifenden Funktion in den meisten Fällen auch der Unterbringung von infrastrukturellen Elementen wie Liften oder Treppen. Um eine Erschließung der einzelnen Stockwerke zu gewährleisten, bedarf es an Öffnungen in den Wänden des Stahlbetonkerns. Die im Rahmen dieser Arbeit modellierten unterschiedlichen Hochhauskerne mit rechteckigen, dünnwandigen Querschnitten wurden nur an einer Profilseite perforiert und enthielten somit jeweils eine Öffnungsreihe. Bei einem geschlossenen, dünnwandigen und rechteckigen Querschnitt fällt der Schubmittelpunkt M mit dem Schwerpunkt S zusammen. Wird dieser an einer Seite geöffnet, dann befindet sich der Schubmittelpunkt außerhalb des Querschnitts. Aufgrund der sprunghaften Übergänge von geschlossenen zu offenen Querschnitten in den Öffnungsabschnitten der Hochhauskerne, galt es zu untersuchen, wie sich die Schubmittelpunkte über die Kernhöhe bewegten. Dafür wurden sieben Versuchskörper hergestellt, die sich hinsichtlich ihrer Öffnungen voneinander unterschieden. In physikalischen Versuchen und numerischen Simulationen erfolgte die Messung des Schubmittelpunktsverlaufs in Abhängigkeit von Öffnungsgröße, -anzahl, und -anordnung. Folgende Fragestellungen wurden bei den durchgeführten Versuchen untersucht:

- Verläuft der Schubmittelpunktsverlauf „wellenförmig“ oder „gerade“ über die Kernhöhe?
- Ergibt sich eine periodische Form des Schubmittelpunktverlaufs in Abhängigkeit der Öffnungen?
- Inwiefern unterscheiden sich die Ergebnisse aus den physikalischen Versuchen mit denen der numerischen Simulation?

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

Im Rahmen dieser Arbeit werden unterschiedliche Versuchsstäbe durch eine exzentrisch einwirkende horizontale Einzelkraft belastet, woraus eine Torsionsbeanspruchung resultiert. Zuzufolge dieser Torsionsbeanspruchung entstehen im Allgemeinen Querschnittsverschiebungen in Stablängsrichtung, welche als Verwölbungen ω bezeichnet werden. Über die Verwölbungen kann neben anderen, ebenfalls vorgestellten Methoden, die Lage des Schubmittelpunkts M ermittelt werden. Aufgrund der im Versuchsaufbau gegebenen Einspannung der modellierten Hochhauskerne, werden die Verwölbungen behindert und es entstehen zusätzlich zu den Schubspannungen Längsspannungen im Stab. Dem wird in der Theorie der Wölbkrafttorsion Rechnung getragen, weshalb auch diese Theorie in ihren Grundzügen angeführt wird. Können sich diese Längsverschiebungen allerdings frei einstellen, so resultieren keine zusätzlichen Längsspannungen und man spricht von der St. Venant'schen Torsion. Da die Stäbe abschnittsweise offene bzw. geschlossene Querschnitte besitzen, werden in diesem Kapitel die grundlegenden Sachverhalte der Schubbeanspruchung aus St. Venant'scher Torsion von offenen und geschlossenen dünnwandigen Querschnitten dargestellt.

2.1 Schubmittelpunkt M

2.1.1 Definition

Der Schubmittelpunkt M stellt jenen Punkt eines Querschnitts dar, durch den die Wirkungslinien äußerer Querbelastungen verlaufen müssen, um kein Torsionsmoment und folglich keine

Querschnittsverdrehungen hervorzurufen.

2.1.2 Berechnung der Koordinaten des Schubmittelpunkts M mit der Querkraftmethode [1]

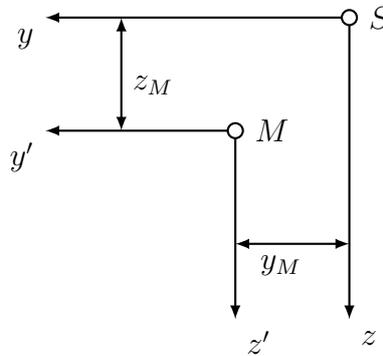


Abbildung 2.1: Zusammenhang der Koordinaten [1]

Verläuft eine Querbelastung nicht durch den Schubmittelpunkt M eines Querschnitts, so ruft diese neben Verschiebungen auch Verdrehungen aufgrund eines Torsionsmoments hervor. Mit der vorliegenden Methode wird jene Lage des Kraftangriffspunkts der Querkraft ermittelt, bei der das Torsionsmoment verschwindet. Dieser Punkt wird als Schubmittelpunkt M bezeichnet. Die Definition der Schnittgröße des Torsionsmoments lautet bezogen auf den Schubmittelpunkt M bzw. auf die Drillruheachse eines Stabes:

$$M_T = \int_A (-z' \tau_{xy} + y' \tau_{xz}) dA \quad (2.1)$$

Bezieht man sich auf die Stabachse, lautet die zu (2.1) analoge Beziehung:

$$M_x = \int_A (-z \tau_{xy} + y \tau_{xz}) dA \quad (2.2)$$

Über den Zusammenhang der Koordinaten y und y' bzw. z und z' (Abb. 2.1) kann die Beziehung zwischen (2.1) und (2.2) gezeigt werden:

$$y' = y - y_M \quad z' = z - z_M \quad (2.3)$$

Einsetzen von (2.3) in (2.2) ergibt:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_A (-(z' + z_M)\tau_{xy} + (y' + y_M)\tau_{xz})dA = \int_A (-z'\tau_{xy} - z_M\tau_{xy} + y'\tau_{xz} + y_M\tau_{xz})dA = \\
 &= \int_A (-z'\tau_{xy} + y'\tau_{xz})dA - z_M \int_A \tau_{xy}dA + y_M \int_A \tau_{xz}dA
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Unter Berücksichtigung von (2.1) und der Schnittgrößendefinition der Querkräfte

$$V_y = \int_A \tau_{xy}dA \quad V_z = \int_A \tau_{xz}dA \tag{2.5}$$

erhält man folgenden Zusammenhang:

$$M_x = M_T - z_M V_y + y_M V_z \tag{2.6}$$

Wie eingangs erwähnt, wird die Lage des Kraftangriffspunkts von V_y und V_z ermittelt, bei der das Torsionsmoment verschwindet und folglich keine Verdrehungen des Querschnitts auftreten. Dazu wird M_T in Gleichung (2.6) gleich Null gesetzt. Das ergibt unter Berücksichtigung von (2.2):

$$\int_A (-z\tau_{xy} + y\tau_{xz})dA = y_M V_z - z_M V_y \tag{2.7}$$

Die linke Seite von (2.7) stellt das Integral der Momente der infinitesimalen Schubkräfte $\tau_{xy}dA$ und $\tau_{xz}dA$ dar. Für dünnwandige Querschnitte kann dieses Integral auch wie folgt dargestellt werden:

$$\int_l t(s)p(s)ds \tag{2.8}$$

In (2.8) wird mit $t(s)$ der Schubfluss, mit $p(s)$ der Normalabstand der infinitesimalen Schubkraft $t(s)ds$ und mit l die Länge der Profilmittellinie bezeichnet. Aus (2.7) und (2.8) folgt:

$$\int_l t(s)p(s)ds = y_M V_z - z_M V_y \tag{2.9}$$

Die Berechnung von $t(s)$ erfolgt mit Bezugnahme auf die Hauptachsen des Querschnitts mit der Formel:

$$t(s) = -\frac{V_\eta}{I_\zeta} S_\zeta(s) - \frac{V_\zeta}{I_\eta} S_\eta(s) \tag{2.10}$$

In (2.10) bezeichnen I_ζ bzw. I_η die Flächenträgheitsmomente und $S_\zeta(s)$ bzw. $S_\eta(s)$ die statischen

Momente um die Hauptachsen. Aufgrund der Verwendung von (2.10) ergibt sich:

$$\int_l t(s)p(s)ds = \eta_M V_\zeta - \zeta_M V_\eta \quad (2.11)$$

Um die Koordinate η_M des Schubmittelpunkts M zu erhalten, muss in Gleichung (2.11) V_η gleich Null gesetzt und der Schubfluss t_{V_ζ} zufolge V_ζ mittels (2.10) berechnet werden. Dies führt auf die Bestimmungsgleichung für η_M :

$$\eta_M = \frac{1}{V_\zeta} \int_l t_{V_\zeta}(s)p(s)ds \quad (2.12)$$

Die Berechnung von ζ_M erfolgt auf analoge Weise und ergibt sich zu:

$$\zeta_M = \frac{1}{V_\eta} \int_l t_{V_\eta}(s)p(s)ds \quad (2.13)$$

Aus (2.12) und (2.13) wird ersichtlich, dass die Koordinaten des Schubmittelpunkts M nicht von der Belastung, sondern nur von der Geometrie des Querschnitts abhängen. Man erkennt, dass sich die jeweilige Querkraftkomponente V_ζ bzw. V_η vor dem Integral in Gleichung (2.12) bzw. (2.13) mit der Querkraftkomponente V_ζ bzw. V_η aus der Berechnung von $t_{V_\zeta}(s)$ bzw. $t_{V_\eta}(s)$ aufhebt und somit nur querschnittsabhängige Größen zur Berechnung der Schubmittelpunktskoordinaten erforderlich sind. Ebenfalls zeigen die beiden Gleichungen (2.12) und (2.13), dass der Schubmittelpunkt eines einfach symmetrischen Querschnitts immer auf der Symmetrieachse liegt. Folglich fällt der Schubmittelpunkt bei einem doppeltsymmetrischen Querschnitt mit dem Schwerpunkt zusammen.

2.1.3 Berechnung der Koordinaten des Schubmittelpunkts M aus Verwölbungen

Diese Methode zur Bestimmung der Schubmittelpunktskoordinaten erfordert Grundkenntnisse über Verwölbungen, weshalb sie im erst im Kapitel 2.3 vorgestellt wird.

2.1.4 Berechnung der Koordinaten des Schubmittelpunkts M mit der Methode der finiten Elemente [2]

Die Berechnung der Schubmittelpunktskoordinaten mit der Methode der finiten Elemente bietet sich bei komplizierten dünnwandigen Querschnitten aus vielen Teilen oder Hohlzellen an und verläuft analog zur Berechnung von Stabtragwerken mittels FEM. Um die Koordinaten des Schubmittelpunkts mit den Gleichungen (2.12) bzw. (2.13) zu bestimmen, werden die Schubspannungen zufolge der Querkräfte benötigt. Werden die Gleichungen (2.37) und (2.38) verwendet, um die Lage des Schubmittelpunkts zu berechnen, ist es erforderlich, die Verwölbungen zu bestimmen. Sowohl die Ermittlung der Schubspannungen als auch der Verwölbungen kann mit hohem Aufwand verbunden sein. In [2] wird die Berechnung dieser Größen mithilfe der Methode der finiten Elemente für dünnwandige, abschnittsweise gerade Querschnitte gezeigt. Jedes rechteckige Querschnittsteil kann durch ein zweiknotiges Element in einem FE-Modell abgebildet werden. Die Verschiebungsgrößen an den Knoten sind entweder Schubverformungen infolge der Querkräfte, oder Wölbordinaten. Jedem Element wird eine Elementsteifigkeitsmatrix und ein Lastvektor zugewiesen, mithilfe derer eine Gleichung für einen Knotenschubflussvektor aufgestellt wird. Über Gleichgewichtsbedingungen in den einzelnen Knoten des Gesamtquerschnitts wird aus den Elementsteifigkeitsmatrizen die Gesamtsteifigkeitsmatrix aufgebaut und es entsteht ein Gleichungssystem, das als einzige Unbekannte die Schubverformungen oder die Wölbordinaten enthält. Mit den so erhaltenen Ergebnissen können dann die Schubmittelpunktskoordinaten aus (2.12) und (2.13) bzw. (2.37) und (2.38) ermittelt werden.

2.2 Allgemeines über Verwölbungen und Arten von Torsion [3], [4]

Bei einer Torsionsbeanspruchung eines Stabes treten im Allgemeinen Querschnittsverschiebungen in Längsrichtung auf. Solche Verschiebungen werden als Verwölbungen bezeichnet. Um welche Art von Torsion es sich handelt und welche Spannungen sich im Stab einstellen, hängt davon ab, ob sich Verwölbungen frei einstellen können oder behindert werden. Behindert werden Verwölbungen z.B. durch starre Einspannungen der Stabenden, durch Querschnittsänderungen oder durch veränderliche Torsionsbelastungen. Man unterscheidet zwei Arten von Torsion:

- St. Venant'sche Torsion (reine Torsion)
 - Verwölbungen können sich frei einstellen und es entstehen nur sogenannte primäre Torsionsschubspannungen τ_p bzw. τ_I . Die Grundvoraussetzung für St. Venant'sche Torsion lautet demnach $\sigma_x \stackrel{def}{=} 0$. Es herrscht ein reiner Schubspannungszustand. Die St. Venant'sche Torsion stellt einen Spezialfall der Wölbkrafttorsion dar.
- Wölbkrafttorsion
 - Verwölbungen werden behindert und es stellen sich neben den primären Torsionsschubspannungen auch Wölbspannungen σ_ω und sekundäre Schubspannungen τ_{II} ein.

Ebenfalls sei erwähnt, dass es sogenannte „wölbfreie“ Querschnittsformen gibt. Solche Querschnitte verwölben sich bei Torsionsbeanspruchung nicht, solange ihnen konstruktiv keine Drehachse vorgegeben wird und sich deren Drehachse frei einstellen kann. Diese Querschnitte erfüllen immer die Grundvoraussetzung für St. Venant'sche Torsion und werden mit dieser Theorie behandelt. Als wölbfrei gelten unter anderen rotationssymmetrische Querschnitte, Querschnitte aus mehreren sich kreuzenden, schmalen Rechteckstreifen und alle polygonförmigen Querschnitte mit konstanter Blechdicke, deren Profilmittellinien einen Kreis umschließen. Diese wölbfreien Querschnitte verlieren ihre Eigenschaften, sobald ihnen eine Drehachse konstruktiv vorgegeben wird.

2.3 Verwölbungen dünnwandiger offener Querschnitte [3]

2.3.1 Grund- und Hauptverwölbungen

Bei dünnwandigen Querschnitten werden die Verwölbungen nur für die Profilmittellinie berechnet und über die Profildicke t als konstant angenommen. Wird ein offener dünnwandiger Querschnitt einer Torsionsbeanspruchung unterzogen, so verlaufen die Schubspannungen über die Profildicke t näherungsweise linear. Diese St. Venant'schen bzw. primären Schubspannungen τ_p werden zum Querschnittsrand hin maximal und verschwinden in der Profilmittelle. Demnach treten entlang der Profilmittellinie über den gesamten Querschnitt keine Spannungen auf. Das bedeutet, dass Elemente auf der Profilmittellinie verzerrungsfrei bzw. gleitungsfrei bleiben müssen. Basierend auf dieser Forderung erfolgt die Herleitung der Grund- bzw. Haupt-

verwölbungen dünnwandiger offener Querschnitte. Es wird eine Koordinate s eingeführt, die der Profilmittellinie entspricht und ausgehend von einem gewählten Anfangspunkt $s = 0$ zu allen freien Profilen hin positiv verläuft. Die Verschiebung eines Elements auf der von x und s aufgespannten Ebene kann aufgrund der Verzerrungsfreiheit nur aus einer Drehbewegung resultieren. Diese Verschiebung verläuft in positiver Richtung von s und wird mit v_t bezeichnet. Erfolgt eine Drehung ϑ um den Punkt D , so kann v_t wie folgt ausgedrückt werden:

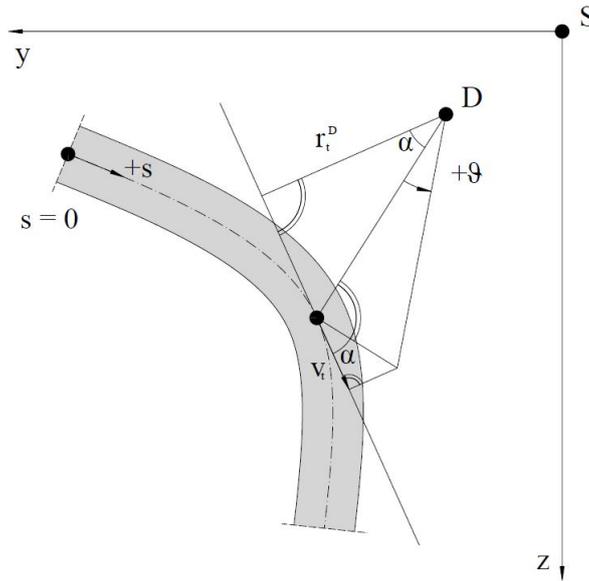


Abbildung 2.2: Verschiebung v_t eines Elements auf der Profilmittellinie [3]

$$v_t = r^D(s)\vartheta(x)\cos\alpha = r_t^D(s)\vartheta(x) \quad (2.14)$$

In Gleichung (2.14) bezeichnet r^D den Abstand von D und dem betrachteten Querschnittspunkt auf der Profilmittellinie, r_t^D den Normalabstand zwischen diesem Punkt und D . Dieser senkrechte Abstand ist dann als positiv zu betrachten, wenn der Vektor $+s$ den selben Drehsinn besitzt wie $+\vartheta$. Der Winkel α befindet sich wie in Abb. 2.2 dargestellt zwischen r^D und r_t^D . Die Gleitung eines Elements auf der Profilmittellinie wird mit γ_{xs} bezeichnet und lautet:

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial x} \quad (2.15)$$

In Gleichung (2.15) werden mit u die Querschnittsverschiebungen in Stablängsrichtung bezeichnet. Diese Querschnittsverschiebungen können wie im Kapitel der Verwölbungen von Vollquerschnitten gezeigt, durch die Verdrillung $\vartheta'(x)$ und die Einheitsverwölbung $\omega^D(y, z)$ ausgedrückt

werden:

$$u(x, y, z) = \vartheta'(x)\omega^D(y, z) \quad (2.16)$$

Aus der Bedingung, dass die Gleitung eines Elements auf der Profilmittellinie (Abb. 2.3) verschwindet, folgt aus (2.15) und unter Berücksichtigung von (2.14) und (2.16):

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial s}[\vartheta'(x)\omega^D(s)] + \frac{\partial}{\partial x}[\vartheta(x)r_t^D(s)] = 0 \quad (2.17)$$

Aus Gleichung (2.17) ergeben sich die Verwölbungen ω^D zu:

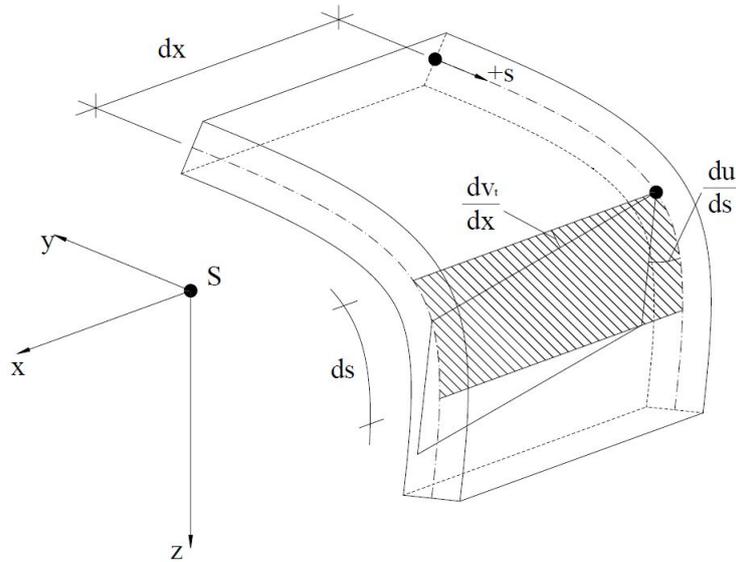


Abbildung 2.3: Gleitung γ_{xs} eines Elements auf der Profilmittellinie [3]

$$\omega^D(s) = - \int r_t^D(s) ds \quad (2.18)$$

Die bei der Lösung von (2.17) auftretende Integrationskonstante ω_0^D stellt die Verwölbung am Anfangspunkt $s = 0$ dar. Wird diese Integrationskonstante nicht berücksichtigt, so spricht man von der Grundverwölbung:

$$\omega^D(s) = \int_{s=0}^s r_t^D(s) ds \quad (2.19)$$

Aus dieser Definition der Grundverwölbungen erhält man nach Berechnung der Integrationskonstante die Hauptverwölbungen, welche durch einen Querstrich gekennzeichnet werden:

$$\bar{\omega}^D = \omega^D(s) + \omega_0^D = - \int_{s=0}^s r_t^D(s) ds + \omega_0^D \quad (2.20)$$

2.3.2 Umrechnung der Verwölbungen für verschiedene Drehachsen

Bisher wurden sowohl Grund- als auch Hauptverwölbungen auf einen Drehpunkt D bezogen. Im Hinblick auf die Bestimmung des Schubmittelpunkts M sollen die Verwölbungen auf diesen Drehpunkt M bezogen werden. Eine Änderung des Drehpunkts geht mit einer Änderung der Abstände r_t einher. Der Zusammenhang zwischen den beiden Abständen r_t^D und r_t^M kann geometrisch ermittelt werden und ergibt sich zu:

$$r_t^M = r_t^D - (y_M - y_D) \frac{dz}{ds} + (z_M - z_D) \frac{dy}{ds} \quad (2.21)$$

Setzt man (2.21) in (2.20) ein, so können die auf den Schubmittelpunkt bezogenen Verwölbungen über r_t^D ermittelt werden, wobei die Berechnung von y_M und z_M erst später erfolgt:

$$\omega^M(s) = - \int r_t^M(s) ds = - \int r_t^D(s) ds + (y_M - y_D)z - (z_M - z_D)y \quad (2.22)$$

Aus (2.22) erhält man durch Einsetzen fester Integrationsgrenzen Umrechnungsformeln für die Hauptverwölbungen:

$$\bar{\omega}^M(s) = \bar{\omega}^D(s) + (y_M - y_D)z - (z_M - z_D)y \quad (2.23)$$

Die Umrechnungsformel für die Grundverwölbungen lautet demnach:

$$\omega^M(s) = \omega^D(s) + (y_M - y_D)z - (z_M - z_D)y + (\omega_0^D + \omega_0^M) \quad (2.24)$$

2.3.3 Bestimmung der Integrationskonstanten ω_0 und der Schubmittelpunktskoordinaten y_M und z_M

Wird einem Stab konstruktiv keine Drehachse vorgegeben, so verdreht er sich unter einer Torsionsbeanspruchung um seine natürliche Drillruhe- bzw. Schubmittelpunktsachse. Die dabei entstehenden Hauptverwölbungen $\bar{\omega}^M$ beziehen sich dann auf den Schubmittelpunkt M . Diesem Umstand entsprechend muss die Wölbfläche bestimmte Bedingungen erfüllen. Durch die Ermittlung der Integrationskonstanten ω_0 und die Verschiebung des beliebig gewählten Drehpunkts D in den Schubmittelpunkt wird diesen Bedingungen Rechnung getragen.

Die Bestimmung der Integrationskonstanten ω_0 und der Schubmittelpunktskoordinaten y_M und z_M erfolgt mithilfe der Theorie der Wölbkrafttorsion. Die Bedingung $\sigma_x = 0$ gilt als Grundvor-

aussetzung der St. Venant'schen Torsion. In der Theorie der Wölbkrafttorsion wird sie aufgrund von Behinderungen der Verwölbungen nicht mehr erfüllt und es gilt $\sigma_x \neq 0$.

Aus der grundlegenden Beziehung

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.25)$$

folgt unter Berücksichtigung von Gleichung (2.16) und durch Einsetzen der auf den Schubmittelpunkt bezogenen Hauptverwölbungen $\bar{\omega}^M(s)$:

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} = E \vartheta''(x) \bar{\omega}^M(y, z) \quad (2.26)$$

Aus der Forderung, dass der Stab ausschließlich durch ein Torsionsmoment M_T belastet werden soll, dürfen keine weiteren Schnittgrößen aus σ_x entstehen. Die Wölbfläche ist mit keiner anderen Schnittgröße gekoppelt. Daraus resultieren folgende Bedingungen:

$$N = \int_A \sigma_x dA = E \vartheta''(x) \int_A \bar{\omega}^M(s) dA = 0 \quad (2.27)$$

$$M_\eta = \int_A \sigma_x \zeta dA = E \vartheta''(x) \int_A \bar{\omega}^M(s) \zeta dA = 0 \quad (2.28)$$

$$M_\zeta = \int_A \sigma_x \eta dA = E \vartheta''(x) \int_A \bar{\omega}^M(s) \eta dA = 0 \quad (2.29)$$

Mit der ersten Bedingung (2.27) wird festgelegt, dass zufolge der Verwölbungen keine mittlere Axialverschiebung der Querschnittsebene auftreten darf. Die beiden weiteren Bedingungen verhindern Drehungen der Querschnittsebene um die y - bzw. z -Achse aufgrund von Verwölbungen.

2.3.4 Integrationskonstante ω_0

Aus Bedingung (2.27) erhält man die Integrationskonstante ω_0 unter Berücksichtigung von $E \vartheta''(x) \neq 0$ und der Definition der Hauptverwölbungen:

$$\int_A \bar{\omega}^M(s) dA = \int_A (\omega^M(s) + \omega_0^M) dA \quad (2.30)$$

$$\implies \omega_0^M = -\frac{1}{A} \int_A \omega^M(s) dA \quad (2.31)$$

Analog zu (2.31) erhält man unter Berücksichtigung von (2.23) für einen beliebigen Drehpunkt D :

$$\omega_0^D = -\frac{1}{A} \int_A \omega^D(s) dA \quad (2.32)$$

Die Integrationskonstante ω_0^D hängt sowohl vom Integrationsanfangspunkt $s = 0$ als auch vom gewählten Drehpunkt D ab. Sie wird Null, wenn sich $s = 0$ und D auf der Symmetrieachse eines symmetrischen Querschnitts befinden. Wird ω_0^D zur Grundverwölbung addiert, so kann dies geometrisch als Flächenausgleich durch die Verschiebung einer Bezugsebene der Wölbordinaten interpretiert werden. Durch diesen Flächenausgleich werden die Flächen der positiven und negativen Ordinaten gleich groß. Dieser Vorgang wird auch als 1. Normierung bezeichnet.

2.3.5 Bestimmung der Schubmittelpunktskoordinaten

Die Umrechnung der Verwölbungen, welche auf einen beliebigen Drehpunkt bezogen sind, in den Schubmittelpunkt M wird als 2. Normierung bezeichnet. Das kann mithilfe der zwei Bedingungen (2.28) und (2.29) unter Berücksichtigung von $E\vartheta''(x) \neq 0$, den Transformationsgleichungen (2.23), sowie im Bezug auf die Hauptachsen des Querschnitts erfolgen:

$$\int_A \bar{\omega}^M(s) \zeta dA = \int_A \bar{\omega}^D(s) \zeta dA + (\eta_M - \eta_D) \int_A \zeta^2 dA - (\zeta_M - \zeta_D) \int_A \eta \zeta dA \quad (2.33)$$

$$\int_A \bar{\omega}^M(s) \eta dA = \int_A \bar{\omega}^D(s) \eta dA + (\zeta_M - \zeta_D) \int_A \eta^2 dA - (\eta_M - \eta_D) \int_A \eta \zeta dA \quad (2.34)$$

In (2.33) bzw. (2.34) stellen die letzten Integrale Deviationsmomente dar, die bei der Verwendung von Hauptachsen zu Null werden. Die vorletzten Integrale bilden die Flächenträgheitsmomente I_η in (2.33) bzw. I_ζ in (2.34), welche in der Regel einfach berechnet werden können. Die beiden ersten Integrale werden zu den neu definierten Größen R_η^D in (2.33) und R_ζ^D in Gleichung (2.34) zusammengefasst. Diese beiden Größen können sowohl aus den Hauptverwölbungen als auch aus den Grundverwölbungen berechnet werden, da die statischen Momente $S_\eta = \int_A \zeta dA$ und $S_\zeta = \int_A \eta dA$ über den Gesamtquerschnitt zu Null werden:

$$\begin{aligned} R_\eta^D &= \int_A \bar{\omega}^D(s) \zeta dA = \int_A \omega^D(s) \zeta dA + \omega_0^D \int_A \zeta dA \\ \implies R_\eta^D &= \int_A \bar{\omega}^D(s) \zeta dA = \int_A \omega^D(s) \zeta dA \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}
 R_{\zeta}^D &= \int_A \bar{\omega}^D(s) \eta dA = \int_A \omega^D(s) \eta dA + \omega_0^D \int_A \eta dA \\
 \implies R_{\zeta}^D &= \int_A \bar{\omega}^D(s) \eta dA = \int_A \omega^D(s) \eta dA
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Der offensichtliche Vorteil der Bestimmung von R_{η}^D bzw. R_{ζ}^D aus den Grundverwölbungen $\omega^D(s)$ gegenüber den Hauptverwölbungen $\bar{\omega}^D(s)$ liegt darin, dass die Integrationskonstante ω_0^D nicht berechnet werden muss. Aus den Gleichungen (2.33) und (2.34) können unter Beachtung von (2.35) und (2.36) die Koordinaten des Schubmittelpunkts M im Hauptachsensystem wie folgt berechnet werden:

$$\eta_M - \eta_D = \frac{R_{\eta}^D}{I_{\eta}} \tag{2.37}$$

$$\zeta_M - \zeta_D = \frac{R_{\zeta}^D}{I_{\zeta}} \tag{2.38}$$

Bei der Bestimmung der Schubmittelpunktskoordinaten kann durch geschickte Wahl des Drehpunkts D eine starke Vereinfachung der r_t^D - bzw. ω^D - Flächen erzielt werden. Ursprung der Berechnung der Koordinaten des Schubmittelpunkts M waren die Bedingungen (2.28) und (2.29). Der Bezug auf Hauptachsen ist in diesen Bedingungen der Biegemomente nicht notwendig, sodass beliebige Schwerachsen als Bezugsachsen verwendet werden können. Einerseits bleibt es zwar erspart, zuvor die Lage der Hauptachsen zu ermitteln, andererseits jedoch verschwindet bei Bezugnahme auf beliebige Schwerachsen das Deviationsmoment nicht und muss zusätzlich berechnet werden. Die Bestimmungsgleichungen der Koordinaten von M lauten dann:

$$y_M - y_D = \frac{R_y^D I_z - R_z^D I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \tag{2.39}$$

$$z_M - z_D = \frac{R_z^D I_y - R_y^D I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \tag{2.40}$$

2.3.6 Anwendung dieser Methode auf den vorhandenen Querschnitt

Zuerst wird die Lage der Hauptachsen ermittelt. Die Symmetrieachse z ist bereits eine Hauptachse des Querschnitts. Demzufolge wird nur die z -Koordinate des Schwerpunkts ermittelt, wobei diese Berechnung hier nicht angeführt wird. Der Abstand des Schwerpunkts von der Profilmittellinie beträgt 14.99 mm (Abb. 2.4).

Das Flächenträgheitsmoment des vorliegenden Querschnitts beträgt $I_{\zeta} = 267\,102 \text{ mm}^4$, wobei

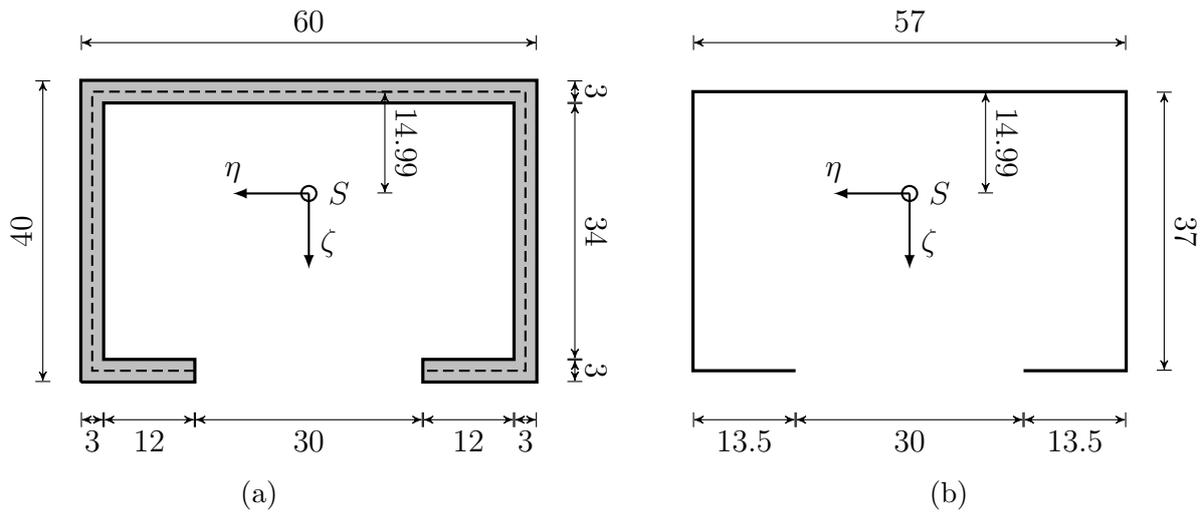


Abbildung 2.4: (a) offener Querschnitt, (b) Darstellung durch Profilmittellinie, Maße in mm

dessen Berechnung hier nicht angeführt wird. Im nächsten Schritt erfolgt die Wahl des Drehpunkts D und des Anfangspunkts $s = 0$. D wird in den Schwerpunkt und der Anfangspunkt $s = 0$ auf die Symmetrieachse gelegt. Da sich beide Punkte auf dieser Achse befinden, verschwindet die Integrationskonstante ω_0^D und die Grundverwölbungen $\omega^D(s)$ entsprechen den Hauptverwölbungen $\bar{\omega}^D(s)$. Beim vorliegenden Querschnitt liegt der Schubmittelpunkt M auf der Symmetrieachse, weshalb nur noch die z -Koordinate von M berechnet werden muss. Für die Ermittlung von R_ζ^D nach (2.36) wird der Verlauf η benötigt. Dieser ist in Abb. 2.5 dargestellt. Die ebenfalls benötigten Verwölbungen $\omega^D(s)$ werden durch Aufintegrieren von $r_t^D(s)$

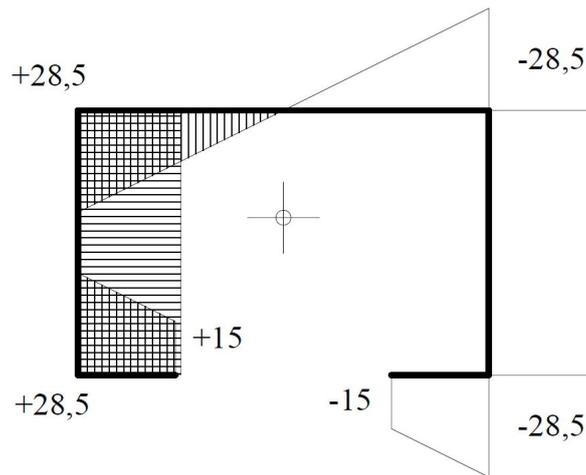
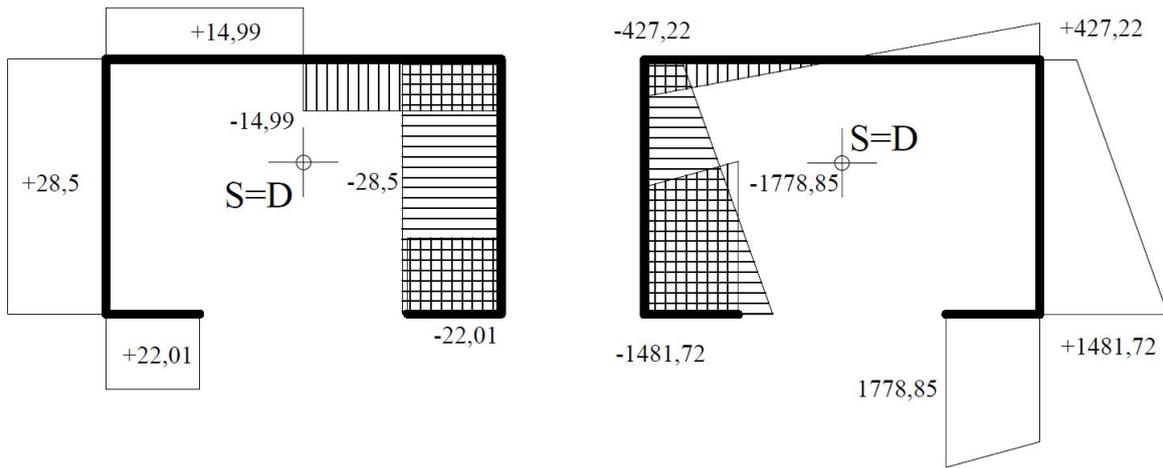


Abbildung 2.5: Verlauf von η (Werte in mm)

nach (2.19) ermittelt. Der Verlauf von $r_t^D(s)$ ist in Abb. 6 links, die resultierenden Verwölbungen rechts dargestellt. Um R_ζ^D berechnen zu können, wird entlang der Profilmittellinie s integriert,


 Abbildung 2.6: links: Verlauf von $r_t^D(s)$, rechts: Verwölbungen $\omega^D(s)$

woraus sich im Integral in (2.36) unter Berücksichtigung von $dA = tds$ Folgendes ergibt:

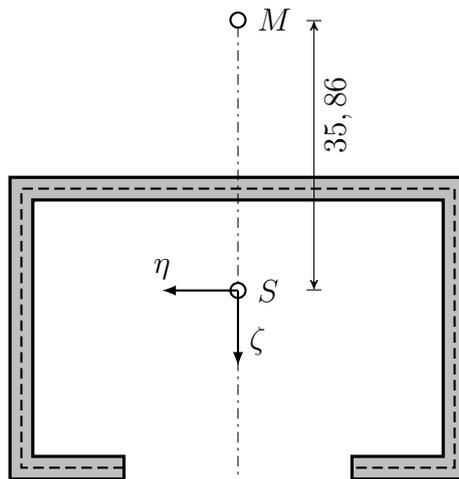
$$R_\zeta^D = \int_A \omega^D(s) \eta dA = \int_s \omega^D(s) \eta t ds = t \int_s \omega^D(s) \eta ds \quad (2.41)$$

Die Integration in (2.41) erfolgt unter Zuhilfenahme einer Integraltafel [7] und unter Ausnutzung der symmetrischen Verläufe von $\omega^D(s)$ und η . Mit einer konstanten Wandstärke des Querschnitts von $t = 3 \text{ mm}$ ergibt sich:

$$R_\zeta^D = 2 \cdot 3 \cdot \left\{ \left[\frac{1}{3} \cdot 28,5 \cdot (-28,5) \cdot 427,22 + \frac{1}{2} \cdot 37 \cdot (427,22 + 1481,715) \cdot (-28,5) + \frac{1}{6} \cdot 13,5 \cdot (2 \cdot 1481,72 \cdot (-28,5) + 1481,72 \cdot (-15) + 1778,85 \cdot (-28,5) + 2 \cdot (-15) \cdot (1778,85)) \right] \right\} = -9577984,59 \quad (2.42)$$

Weil sich aufgrund der Wahl von D die Koordinate ζ_D zu Null ergibt, folgt aus (2.38) und $I_\zeta = 267102 \text{ mm}^4$:

$$\zeta_M = \frac{R_\zeta^D}{I_\zeta} = \frac{-9577984,59}{267102} = -35,86 \text{ mm} \quad (2.43)$$

Abbildung 2.7: Schubmittelpunkt M (Werte in mm)

2.4 St. Venant'sche Torsion dünnwandiger offener Querschnitte [1], [3]

Ausgehend von den Schubspannungen zufolge St. Venant'scher Torsion und den Zusammenhängen zwischen Verdrillung und Torsionsmoment in Vollquerschnitten werden Beziehungen für schmale Rechteckquerschnitte hergeleitet. Aus diesen Sachverhalten wird mithilfe des Prandtl'schen Membrangleichnisses auf dünnwandige offene Querschnitte von allgemeiner Form geschlossen.

2.4.1 Aus der Herleitung der St. Venant'schen Schubspannungen für Vollquerschnitte

Aus der grundlegenden Voraussetzung der St. Venant'schen Torsion

$$\sigma_x \stackrel{def}{=} 0 \quad (2.44)$$

und der bekannten Beziehung

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.45)$$

folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.46)$$

Das bedeutet, dass Verschiebungskomponente u eine Funktion von y und z und somit unabhängig der Stabachsenkoordinate x ist:

$$u = f(y, z) \quad (2.47)$$

Stellt man sich einen Stab mit kreisförmigem Vollquerschnitt vor, der an seinen Stabenden durch Torsionsmomente M_T beansprucht wird, werden die ursprünglich zur Stabachse parallelen Stabfasern aufgrund der auftretenden Verdrillung schraubenförmig verformt. Die Lösung der St. Venant'sche Torsion basiert auf der linearen Elastizitätstheorie, weshalb die gegenseitige Verdrehung zweier Stabendquerschnitte als klein vorausgesetzt werden muss. Dieser Forderung zufolge können die Schraublinien durch Geraden angenähert werden. Somit verlaufen die Verdrehungen $\vartheta(x)$ linear über die Stabachse. Aufgrund dieser Linearität von $\vartheta(x)$ ergibt sich für die Verdrillung $\vartheta'(x)$:

$$\vartheta'(x) = \text{konst.} \quad (2.48)$$

Gleichung (2.47) stellt eine weitere Voraussetzung der St. Venant'schen Torsionstheorie dar. In der Herleitung der Schubspannungen zufolge St. Venant'scher Torsion in Vollquerschnitten wird wie schon in (2.16) für die Verschiebungskomponente u folgender Ansatz getroffen:

$$u = \vartheta' \omega(y, z) \quad (2.49)$$

Aus den konstitutiven Beziehungen folgen dann - ohne diese hier näher zu erläutern - Gleichungen für τ_{xy} und τ_{xz} , die die Ableitungen $\frac{\partial u(y,z)}{\partial y}$ und $\frac{\partial u(y,z)}{\partial z}$ enthalten. Im Fall von St. Venant'scher Torsion treten im Allgemeinen Verwölbungen auf. Können sich diese Verwölbungen unbehindert einstellen, was ohnehin die Grundvoraussetzung der Gültigkeit dieser Theorie darstellt, so hat deren Größe keinen Einfluss auf die Größe der entstehenden Schubspannungen. Anstatt die St. Venant'schen Schubspannungen über die Verwölbungen zu ermitteln, erweist es sich als sinnvoll, diese Spannungen mithilfe der sogenannten Prandtl'schen Torsionsfunktion $\psi(y, z)$ zu berechnen, welche einer Spannungsfunktion entspricht. Die Schubspannungen lassen sich dann wie folgt ausdrücken:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.50)$$

und

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.51)$$

Die Prandtl'sche Torsionsfunktion stellt eine Querschnittsfunktion dar, die gewisse Randbedingungen erfüllen muss. Bei reiner Torsion sind die Oberflächen eines Stabes spannungsfrei. Demnach dürfen resultierende Schubspannungen keine Komponenten in Richtung des auf die Oberflächen normal stehenden Vektors besitzen. Die Schubspannungen verlaufen dann parallel zum Querschnittsrand. Um diese Randbedingung zu erfüllen, folgt für $\psi(y, z)$ entlang des Querschnittsrandes:

$$\psi(y, z) = \text{konst.} \quad (2.52)$$

Da bei der Berechnung der Schubspannungen nur die Ableitungen von $\psi(y, z)$ benötigt werden, kann $\psi(y, z)$ bei Querschnitten ohne Hohlräume entlang des gesamten Querschnittsrandes gleich Null gesetzt werden. Für grundlegende Querschnittsformen sind die Prandtl'schen Torsionsfunktionen bekannt. Weiters ergeben sich in dieser Herleitung für Vollquerschnitte, ohne hier genauer erläutert zu werden, folgende Beziehungen:

$$M_T = 2 \int_A \psi dA \quad (2.53)$$

und

$$\vartheta' = \frac{M_T}{GI_T} \quad (2.54)$$

Das Torsionsträgheitsmoment I_T stellt eine Querschnittsgröße dar und wird auch als Drillwiderstand bezeichnet. Das Produkt aus Schubmodul und Torsionsträgheitsmoment GI_T wird Drillsteifigkeit genannt. Aus (2.54) folgt unter Berücksichtigung von (2.48) eine weitere Bedingung der St. Venant'schen Torsionstheorie:

$$M_T = \text{konst.} \quad (2.55)$$

2.4.2 Schubspannungen zufolge St. Venant'scher Torsion in schmalen Rechteckquerschnitten

Aus der Spannungsfunktion für elliptische Vollquerschnitte kann eine näherungsweise Lösung für schmale Rechteckquerschnitte durch eine Grenzfallbetrachtung erfolgen. Es ergibt sich dann für τ_{xy} und τ_{xz} :

$$\tau_{xy} \approx -2G\vartheta'z \quad (2.56)$$

und

$$\tau_{xz} \approx 0 \quad (2.57)$$

Hier verläuft die z Koordinate in Richtung der Schmalseite. Die Schubspannungen τ_{xy} verlaufen linear über die Querschnittsdicke, wobei die Profilmittellinie spannungsfrei bleibt. Demzufolge ergibt sich der Schubfluss, den man durch Integration der Schubspannungen über die Wandstärke erhält, für alle offenen Querschnitte bei St. Venant'scher Torsion zu Null. Die maximale Schubspannung tritt am Querschnittsrand $z = b/2$ in der Mitte der Langseite des Rechtecks auf. Durch Einsetzen von (2.53) in (2.54) und Integration der näherungsweise Spannungsfunktion $\psi(y, z)$ ergibt sich für den Drillwiderstand I_T :

$$I_T = \frac{M_T}{G\vartheta'} = \frac{2}{G\vartheta'} \int_A \psi dA \approx \frac{Lb^3}{3} \quad (2.58)$$

In (2.58) wird mit L die Länge und mit b die Schmalseite des rechteckigen Querschnitts bezeichnet.

2.4.3 Schubspannungen zufolge St. Venant'scher Torsion in dünnwandigen offenen Querschnitten

Der Übergang von schmalen Rechteckquerschnitten hin zu dünnwandigen offenen Querschnitten von allgemeiner Form kann mithilfe des Prandtl'schen Membrangleichnisses erfolgen. Dieses Gleichnis ermöglicht die Ermittlung von Torsionsträgheitsmoment und Torsionsschubspannungsverteilung beliebig geformter Querschnitte. Die Spannungsfunktion $\psi(y, z)$ genügt der Poisson'schen Differentialgleichung. Auch die Ermittlung der Verformung $u(y, z)$ einer durch einen Überdruck belasteten idealen Membran basiert auf der Poisson'schen Differentialgleichung. Das Prandtl'sche Membrangleichnis beruht auf der mathematischen Identität dieser beiden Randwertprobleme. Man stellt sich eine Öffnung in Form des zu untersuchenden Querschnitts vor und setzt die entlang des Rands festgehaltene Membran von einer Seite unter Druck. Es kann gezeigt werden, dass die Schubspannungen in der jeweiligen Richtung zum Gefälle der verformten Membran und das Torsionsträgheitsmoment I_T zum Volumen unter der aufgespannten Membran proportional sind. Betrachtet man nun eine Öffnung in Form des schmalen Rechteckquerschnitts mit den Abmessungen L und b und stellt sich eine darüber gespannte Membran unter Überdruck vor, so ändern sich weder das Volumen noch das Gefälle der Membran wesentlich, wenn diese Öffnung in der Ebene unter Beibehaltung von L und b verkrümmt

wird. Die verkrümmte Öffnung entspricht einem dünnwandigen offenen Querschnitt von allgemeiner Form, dessen Torsionsverhalten sich laut Prandtl'schem Membrangleichnis kaum von dem des schmalen Rechteckquerschnitts unterscheidet. Die Formeln zur Ermittlung der Schubspannungen zufolge St. Venant'scher Torsion und des Torsionsträgheitsmoments von schmalen Rechteckquerschnitten können somit auch bei dünnwandigen offenen Querschnitten angewendet werden. Setzt sich ein Querschnitt aus einzelnen, schmalen Rechtecken zusammen, so gilt für das Torsionsträgheitsmoment I_T :

$$I_T = \frac{1}{3} \sum_i L_i b_i^3 \quad (2.59)$$

Die maximale Schubspannung eines solchen zusammengesetzten Querschnitts tritt am Rand der Stelle mit der größten Wandstärke auf.

2.5 Schubspannungen zufolge St. Venant'scher Torsion in dünnwandigen einzelligen geschlossenen Querschnitten [1]

Bei St. Venant'scher Torsion dünnwandiger einzelliger geschlossener Querschnitte verlaufen die Schubspannungen näherungsweise konstant über die Wandstärke. Ebenfalls ist der Schubfluss in diesen Querschnitten zufolge reiner Torsion konstant, woraus folgt:

$$t = \tau(s)b(s) = konst. \quad (2.60)$$

Aus (2.60) folgt

$$\tau(s) = \frac{t}{b(s)}, \quad (2.61)$$

weshalb die größte Schubspannung an der Stelle mit der größten Wandstärke b auftritt. Der Schubfluss wird über das Torsionsmoment M_T ermittelt, das sich als Integral der infinitesimalen Schubkräfte $t ds$ mit dem Hebelsarm $p(s)$ darstellen lässt:

$$M_T = \oint_C (t ds)p(s) \quad (2.62)$$

Aus (2.62) folgt unter Berücksichtigung von (2.61), wobei C die Profilmittellinie bezeichnet:

$$M_T = t \oint_C p(s) ds \quad (2.63)$$

Das Integral in (2.63) stellt den doppelten Flächeninhalt der von der Profilmittellinie eingeschlossenen Fläche A_u dar, sodass (2.63) umgeschrieben werden kann zu:

$$M_T = 2A_u t \quad (2.64)$$

Die Schubspannungen entlang der Profilmittellinie ergeben sich durch Einsetzen von (2.60) in (2.64):

$$\tau(s) = \frac{M_T}{2A_u b(s)} \quad (2.65)$$

Aus der Wölbfunktion erfolgt die Ermittlung der Verdrillung ϑ' und des Torsionsträgheitsmoments I_T , wobei die Herleitung hier nicht durchgeführt wird:

$$\vartheta' = \frac{M_T}{4A_u^2 G} \oint_C \frac{ds}{b(s)} \quad (2.66)$$

$$I_T = \frac{M_T}{G\vartheta'} = 4A_u^2 \frac{1}{\oint_C \frac{ds}{b(s)}} \quad (2.67)$$

Die beiden Gleichungen (2.64) und (2.66) stellen die Bredt'schen Formeln dar.

2.6 Wölbkrafttorsion dünnwandiger offener Profile [3], [5]

Werden die bei Torsionsbeanspruchung auftretenden Verwölbungen behindert, entstehen Spannungen σ_x , welche auch als Wölbspannungen bezeichnet werden. Diese Spannungen bewirken dann sogenannte sekundäre Schubspannungen. Behindert werden diese Längsverformungen wie schon erwähnt durch Einspannungen an den Stabenden, durch Querschnittsänderungen oder durch veränderliche Torsionsbelastungen. Sobald sich diese Spannungen einstellen, ist die Grundvoraussetzung der Theorie nach St. Venant nicht mehr gegeben und das Torsionsproblem muss nach der Theorie der Wölbkrafttorsion gelöst werden.

Sofern es sich nicht um wölbfreie dünnwandige geschlossene Querschnitte handelt, treten bei

Torsionsbeanspruchung dieser Querschnitte im Allgemeinen Verwölbungen auf. Werden diese behindert, resultieren, wie eingangs bereits erwähnt, Wölbspannungen, sekundäre Schubspannungen und daraus folgend sekundäre Schubverformungen. Wie in [5] gezeigt, müssen diese sekundären Schubverformungen bei der Berechnung der Wölbkrafttorsion für dünnwandige geschlossene Querschnitte immer berücksichtigt werden. Ebenfalls zeigt [5], dass diese sekundären Schubverformungen bei offenen Querschnitten vernachlässigt werden dürfen.

Aus der bekannten Gleichgewichtsbeziehung

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.68)$$

folgt durch Aufspaltung der Schubspannungen:

$$\left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy,II}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz,II}}{\partial z} \right] + \left[\frac{\partial \tau_{xy,I}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz,I}}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.69)$$

In Gleichung (2.69) sollen beide Teilausdrücke zu Null werden. Der Teilspannungszustand mit dem Index I steht ohne das Vorhandensein von Längsspannungen σ_x im Gleichgewicht und stellt somit einen reinen Schubspannungszustand dar, wie es in der St. Venant'schen Torsionstheorie vorausgesetzt wird. Im Allgemeinen treten neben den primären Schubspannungen auch Längsspannungen und folglich sekundäre Schubspannungen auf. Gleichung (2.69) zeigt, dass die St. Venant'sche Theorie einen Spezialfall der Wölbkrafttorsion darstellt, wenn die Längsspannungen σ_x und die sekundären Schubspannungen $\tau_{xy,II}$ und $\tau_{xz,II}$ vernachlässigt werden oder verschwinden.

2.6.1 Wölbspannungen σ_W und Wölbschubfluss T_W

Aus (2.16) folgt mit (2.25) für die Wölbspannungen σ_W :

$$\sigma_x = \sigma_W = E \frac{\partial u}{\partial x} = E \vartheta''(x) \bar{\omega}^M(y, z) \quad (2.70)$$

Die Bedingungen (2.27), (2.28) und (2.29) zeigen, dass die Wölbspannungen σ_W als resultierende Schnittgröße weder eine Normalkraft N , noch Biegemomente M_y und M_z besitzen. Die in Gleichung (2.69) auftretenden sekundären Schubspannungen $\tau_{xy,II}$ und $\tau_{xz,II}$ können aufgrund ihres konstanten Verlaufs zu einem resultierenden Wölbschubfluss T_W zusammengefasst werden. Der Verlauf der Wölbspannungen über die Wanddicke t ist konstant. Das resultiert aus dem

konstanten Verlauf der Verwölbungen $\bar{\omega}^M$ bei dünnwandigen Querschnitten. Zusammengefasst treten nun St. Venant'sche Schubspannungen τ_I auf, die linear über die Wanddicke verlaufen, denen über die Wanddicke konstante sekundäre Schubspannungen τ_{II} überlagert werden. Die sekundären Schubspannungen werden aus einer Gleichgewichtsbedingung an einem infinitesimalen Element (Abb. 2.8) eines Stabs in x - bzw. Stablängsrichtung bestimmt:

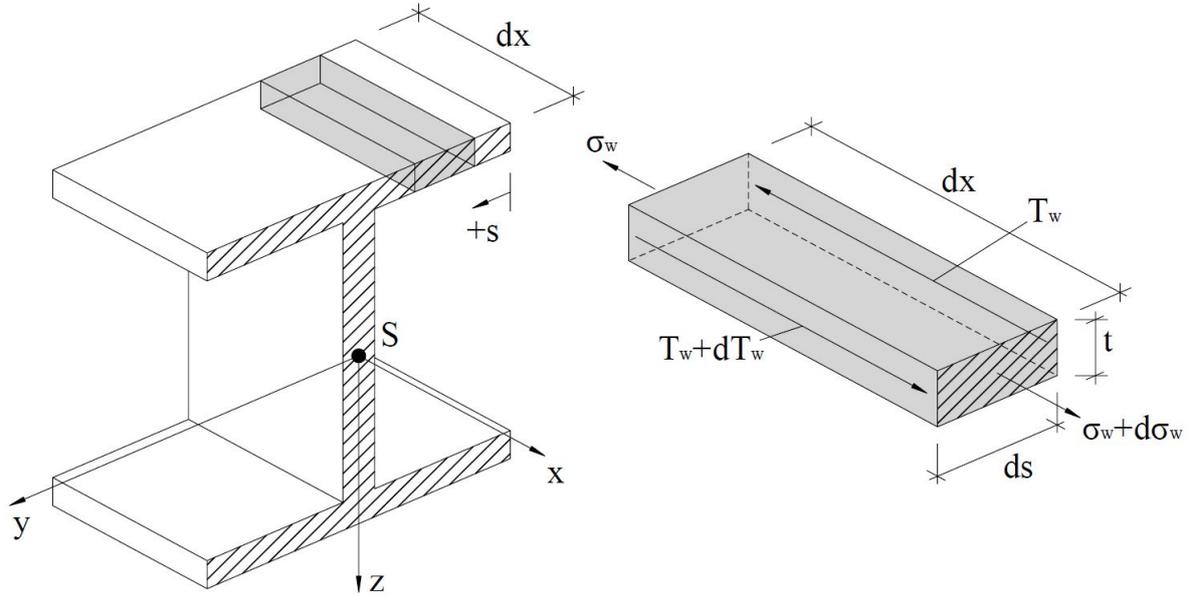


Abbildung 2.8: Gleichgewicht am Querschnittselement

$$d\sigma_w t ds + dT_w dx = 0 \quad (2.71)$$

Für T_w folgt nach Integration über die Profilmittellinie aus Gleichung (2.71):

$$T_w(x, s) = - \int_0^s \frac{d\sigma_w}{dx} t ds + T_w|_{s=0} \quad (2.72)$$

Befindet sich der Integrationsanfangspunkt $s = 0$ am freien Profilende, so ergibt sich die Integrationskonstante in (2.72) zu Null. Aus (2.72) und (2.70) folgt:

$$T_w(x, s) = -E\vartheta'''(x) \int_0^s \bar{\omega}^M(s) dA = -E\vartheta'''(x) S_w \quad (2.73)$$

Mit der Abkürzung S_w des zum statischen Moment analogen Integrals in (2.73) ergibt sich die über die Wanddicke konstante sekundäre Schubspannung in Richtung von s zu:

$$\tau_{xs,II} = \frac{T_w}{t} \quad (2.74)$$

2.7 Gesamttorsionsmoment [3]

Das Torsionsmoment M_T setzt sich mit Bezug auf den Schubmittelpunkt M aus dem Anteil der St. Venant'schen Torsion $M_{T,I}$ und dem der sekundären Schubspannungen $M_{T,II}$ zusammen:

$$M_T = M_{T,I} + M_{T,II} \quad (2.75)$$

Die sekundären Schubspannungen sind verhältnismäßig klein. Sie besitzen allerdings, im Vergleich zu den St. Venant'schen Schubspannungen, einen sehr viel größeren Hebelsarm r_t^M . Der Hebelsarm der St. Venant'schen Schubspannungen beträgt, aufgrund ihres sich über die Wanddicke t erstreckenden linearen Verlaufs, nur $2/3t$. Demzufolge können beide Anteile in der Momentenbilanz Werte derselben Größenordnung erreichen. Für einen offenen dünnwandigen Querschnitt ergibt sich für den Momentenanteil $M_{T,II}$:

$$M_{T,II} = \int_s T_W(x, s) r_t^M(s) ds \quad (2.76)$$

Aus (2.76) folgt unter Berücksichtigung von (2.73):

$$\begin{aligned} M_{T,II} &= -E\vartheta'''(x) \int_A \left[\int_0^s \bar{\omega}^M(s) dA \right] r_t^M(s) ds = \\ &= -E\vartheta'''(x) \left\{ \left[\int_0^s \bar{\omega}^M(s) dA \int r_t^M(s) \right]_{s=0}^{s=e} - \int \bar{\omega}^M(s) t \left(\int r_t^M(s) ds \right) ds \right\} = \\ &= +E\vartheta'''(x) \int \bar{\omega}^M(s) (-\bar{\omega}^M(s) + \bar{\omega}_0^M) dA = \\ &= -E\vartheta'''(x) \int [\bar{\omega}^M(s)]^2 dA \end{aligned} \quad (2.77)$$

In (2.77) verschwindet der erste Term mit den festen Grenzen $s = 0$ und $s = s_e$, da T_W an den Profildenden zu Null wird. Weiters kann das Integral über $r_t^M(s)$ nach (2.20) durch $\bar{\omega}^M$ ausgedrückt werden. Hier verschwindet die Konstante $\bar{\omega}_0^M$ wegen (2.27), weil die Integration der Hauptverwölbungen über die Querschnittsfläche A Null ergibt. Das Integral im letzten Term in (2.77) wird als Wölbwiderstand I_ω definiert:

$$I_\omega = \int [\bar{\omega}^M(s)]^2 dA \quad (2.78)$$

Für $M_{T,II}$ ergibt sich dann:

$$M_{T,II} = -EI_\omega \vartheta'''(x) \quad (2.79)$$

Aus (2.79) und (2.54) folgt für das Gesamtmoment M_T :

$$M_T = GI_T \vartheta'(x) - EI_\omega \vartheta'''(x) \quad (2.80)$$

Die Bestimmung des Verlaufs der Schnittgröße M_T ist in vielen Fällen nicht einfach. Um $\vartheta'(x)$ in (2.80) nicht von M_T , sondern von der Einwirkung $m_T(x)$ abhängig zu machen, wird noch einmal differenziert. Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\frac{dM_T(x)}{dx} = -m_T(x) \quad (2.81)$$

folgt:

$$m_T(x) = -GI_T \vartheta''(x) + EI_\omega \vartheta''''(x) \quad (2.82)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung wird im Rahmen dieser Arbeit nicht erläutert. Sie wird in [3] und [5] durchgeführt.

2.7.1 Wölbmoment M_ω

In der Theorie der Wölbkrafttorsion wird als Spannungsergebnis der Wölbspannungen σ_W das Wölbmoment M_ω definiert:

$$M_\omega = - \int_A \sigma_W \bar{\omega}^M dA \quad (2.83)$$

Nach Einsetzen der Wölbspannungen nach Gleichung (2.70) erkennt man die Analogie zur elastostatischen Grundgleichung der Biegung:

$$M_\omega = -E \vartheta''(x) \int_A [\bar{\omega}^M]^2 dA = -EI_\omega \vartheta''(x) \quad (2.84)$$

Setzt man (2.84) in (2.70) ein, so erhält man die Wölbspannungen aus dem Wölbmoment zu:

$$\sigma_W = \frac{M_\omega}{I_\omega} \bar{\omega}^M \quad (2.85)$$

Kapitel 3

Grundlegende Aussteifungssysteme

Das Aussteifungssystem stellt einen elementaren Teil eines Hochhauses dar. Ziel der Aussteifung ist es, vertikale sowie horizontale Lasten in den Untergrund abzuleiten und die Verformungen des Gebäudes auf ein Minimum zu beschränken. Das Aussteifungssystem besteht im Allgemeinen aus vertikalen und horizontalen Bauelementen.

Vertikale Aussteifungselemente:

- Stützen
- Wände

Hauptaufgabe dieser Elemente ist die vertikale Ableitung vertikaler Lasten aus Eigengewicht und Nutzung in den Untergrund.

Horizontale Aussteifungselemente [6]:

- Stockwerkrahmen

Diese über das gesamte Stockwerk verlaufenden Rahmen übernehmen sowohl die vertikale als auch die horizontale Lastabtragung. Die Ausführung erfolgt entweder als Zwei- bzw. Dreigelenkrahmen oder als eingespannter Rahmen. Riegel und Stiel werden dabei biegesteif miteinander verbunden. Hergestellt werden Stockwerkrahmen aus Stahlbeton oder Stahl.

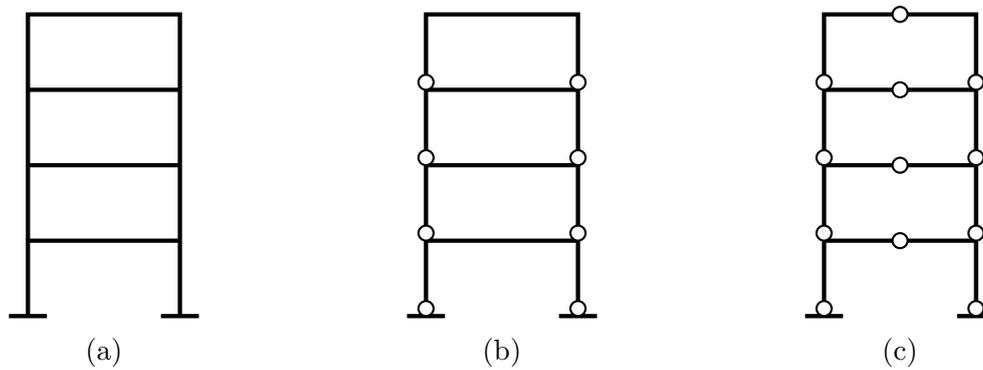


Abbildung 3.1: Prinzipskizzen verschiedener Stockwerkrahmen: (a) eingespannt, (b) Zweigelenkrahmen, (c) Dreigelenkrahmen

- Fachwerke

In Fachwerken erfolgt die Lastabtragung hauptsächlich über Druck- und Zugkräfte in den einzelnen Stäben. Die hohe Leistungsfähigkeit wird durch relativ wenig Materialaufwand bei großer Steifigkeit erzielt. Dennoch besitzen Fachwerke wesentlich geringere Steifigkeiten als Wandscheiben.

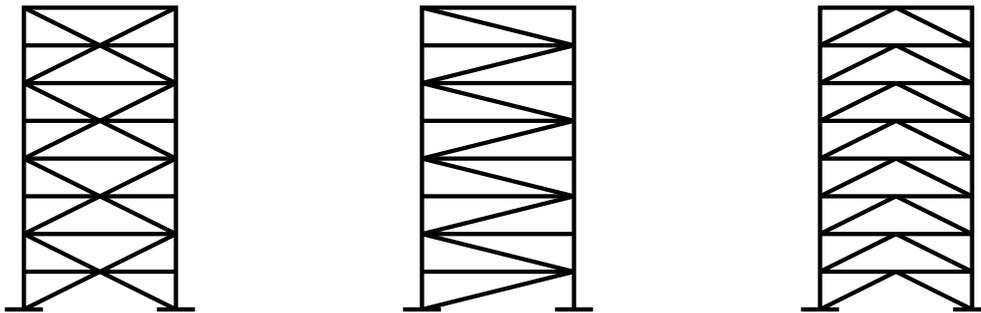


Abbildung 3.2: Prinzipskizzen verschiedener Fachwerkstypen

- Wandscheiben

Bei Belastung in ihrer Ebene bilden Wandscheiben sehr steife Kragträger. In den Scheiben bilden sich Druck- und Zugstreben aus, welche die horizontalen Lasten über Biegung, unter geringen Verformungen, in den Untergrund ableiten. Mehrere im Grundriss angeordnete Wandscheiben bilden ein sogenanntes Tragwandsystem. Wandscheiben können dann sowohl vereinzelt verteilt als auch in Form eines geschlossenen Kerns angeordnet werden. Bei der Anordnung im Grundriss ist die Lage des Schubmittelpunkts von großer Bedeutung. Um Torsion zu vermeiden, sollte die Resultierende der Windbelastung durch den Schubmittelpunkt verlaufen und das Massenzentrum im Erdbebenfall im Schubmittelpunkt liegen.

- Gekoppelte Systeme

Häufig erfolgt eine Kopplung der einzelnen Systeme um eine, der Situation angepasste, optimale Aussteifung zu erzielen. Oft werden beispielsweise Tragwandsysteme mit Stockwerkrahmen oder mit Fachwerken kombiniert.

3.1 Räumliche Tragwerke - Kerntragwerke [6]

Räumliche Tragwerke entstehen durch Anordnung der angeführten Elemente in verschiedene Richtungen. Bei solchen Systemen kann keine strenge Aufteilung der Lastabtragung in vertikaler und horizontaler Richtung erfolgen, das System wirkt als Ganzes. Zu den räumlichen Tragsystemen zählen beispielsweise Röhrentragwerke, Seilspannstrukturen oder Kerntragwerke. Dem Thema dieser Arbeit entsprechend werden im Weiteren nur Kerntragwerke behandelt.

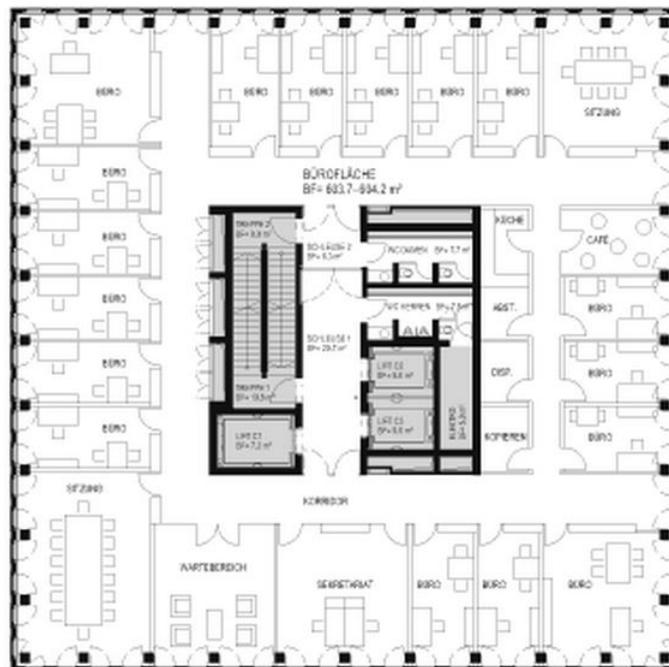


Abbildung 3.3: Beispiel eines mittigen Kerns mit Treppenhaus, Aufzugsschacht und Haustechnikschächten [8]

Wie bereits erwähnt, bilden zusammengesetzte, schubsteif miteinander verbundene Wandscheiben einen aussteifenden Kern. Kerne zeichnen sich durch geringe Verformungen, hohe Biegesteifigkeit und hohe Torsionssteifigkeit aus. Das statische System eines Hochhauskerns entspricht einem eingespannten Kragträger. Alle auftretenden Lasten werden über diese Einspannung in das Fundament und folglich in den Untergrund abgetragen. Beschädigungen angrenzender

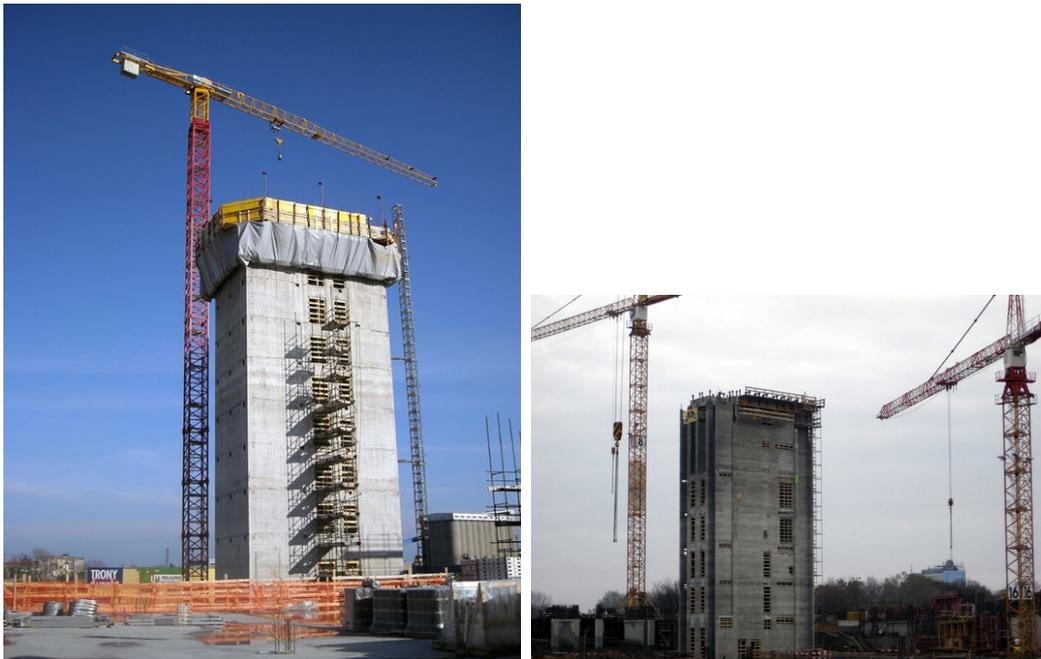


Abbildung 3.4: Herstellung von Hochhauskernen [9], [10]

nichttragender Bauteile werden aufgrund der geringen Verformungen des Kerns auf ein Minimum beschränkt. Als weiterer Vorteil gegenüber anderen Systemen dienen sie neben der Aussteifung auch gleichzeitig der Unterbringung von Aufzugsschächten, Treppenhäusern und Haustechnikschächten.

Kerne können im Zentrum, am Rand oder außerhalb des Hochhausgrundrisses angeordnet werden. Um Rotationsbewegungen zu beschränken, ist eine möglichst mittige Anordnung erstrebenswert. Bei größeren Grundrissen können auch mehrere Kerne ausgeführt werden.

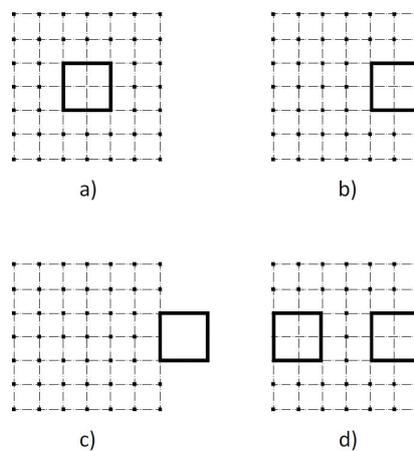


Abbildung 3.5: Kernanordnung: a) mittig b) am Rand c) außerhalb d) mehrere Kerne [6]

Aus Gründen der Erschließung müssen Kerne aus zusammengesetzten Wandscheiben im Allge-

meinen in jedem Geschoß durchbrochen werden. Diese Durchbrüche verringern die Steifigkeit des Kerns und sollen demnach in ihrer Anzahl und Größe möglichst eingeschränkt werden. Ebenfalls ist es von Vorteil, diese Perforationen regelmäßig und in nur einer Seitenfläche des Kerns anzuordnen. Es bietet sich die Möglichkeit, die Öffnungen versetzt übereinander auszuführen, sodass sich bei horizontalem Lastangriff diagonal verlaufende Fachwerkstreben dazwischen ausbilden können. Ebenso können Wandöffnungen regelmäßig übereinander angeordnet werden. Die Lastabtragung kann hier analog zur Wirkungsweise eines Stockwerkrahmens modelliert werden.

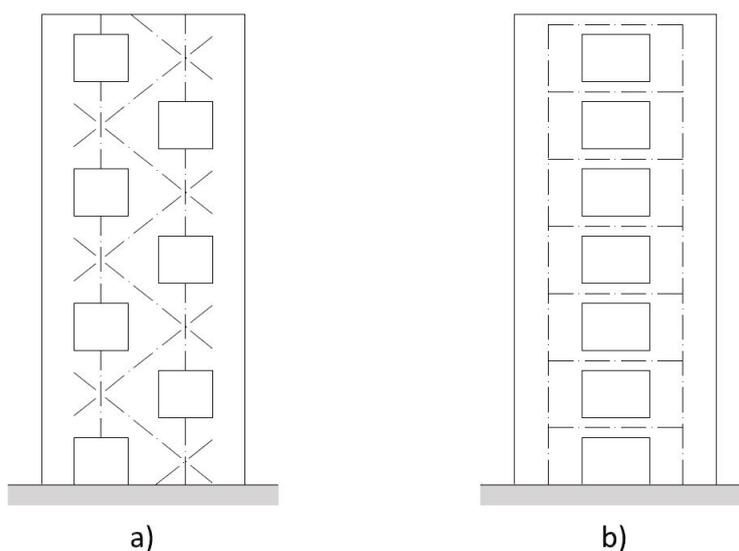


Abbildung 3.6: a) versetzte Öffnungen b) regelmäßige Öffnungen [6]

Es besteht auch die Möglichkeit, Kerne mit sogenannten Auslegern (Outriggern) zu versehen. Ausleger sind steife auskragende Träger, die an bestimmter Höhe gelenkig mit dem Kern verbunden sind, um diesen mit den Außenstützen zu verbinden. Auf diese Weise wird ein großer Teil des inneren Moments von den Stützen als Kräftepaar übernommen und die Momentenbelastung des Kerns und folglich die Horizontalverschiebungen stark reduziert. Mit der Verwendung von Auslegersystemen wird die Leistungsfähigkeit von aussteifenden Kernen verbessert und es können größere Bauhöhen erreicht werden. Kerne können als Alternative zur Ausbildung aus Stahlbetonwandscheiben auch aus räumlichen Stockwerkrahmen bzw. ausgesteiften Stockwerkrahmen hergestellt werden. Um die im Vergleich zu Kernen aus Wandscheiben fehlende Steifigkeit zu kompensieren, werden im Grundriss mehrere solcher Rahmen angeordnet. Bevorzugt werden sie in den Ecken positioniert und über Fachwerk- oder Vierendeelträger miteinander verbunden. Von ausgesteiften Stockwerkrahmen spricht man, wenn in den Stockwerkrahmen zusätzlich Diagonalstreben angeordnet werden.

3.2 Horizontale Einwirkungen

Horizontale Belastungen resultieren aus Wind, Erdbeben und Imperfektionen. Erdbeben- und Windbelastungen sind dynamische Einwirkungen, die im Allgemeinen in Form von statischen Ersatzkräften berücksichtigt werden. Stellen sich Verformungen ein, so bewirken vertikale Lasten zusätzliche horizontale Belastungen. Diesem Umstand wird in der Berechnung nach Theorie II. Ordnung durch Annahme von Ersatzimperfektionen in Form einer Systemschiefstellung Rechnung getragen.

Kapitel 4

Modellfindung und Dimensionierung der Versuchskörper

4.1 Statisches System

Der Kern eines Hochhauses dient als zentrales aussteifendes Bauteil zur Abtragung der horizontalen Lasten und gleichzeitig der Unterbringung von Aufzugsschacht, Treppenhaus oder sonstigen infrastrukturellen Elementen. Da das statische System eines Hochhauskerns einem eingespannten Kragträger entspricht, wurden auch die Versuchskörper am unteren Ende eingespannt.

4.2 Querschnitt

Nach [11] gelten Querschnitte als dünnwandig, wenn die Bedingung

$$\frac{t}{b} < \frac{1}{10} \quad (4.1)$$

erfüllt wird, wobei mit t die Wandstärke und mit b die dazugehörige Seitenlänge bezeichnet wird. Die Einhaltung dieser Grenzbedingung wurde im Rahmen dieser Arbeit bei den verwendeten Versuchskörpern vorausgesetzt. Ebenfalls wurde angenommen, dass der vorliegende Kern als Aufzugsschacht dient und es sich demzufolge um einen einzelligen Querschnitt handelt. Überall

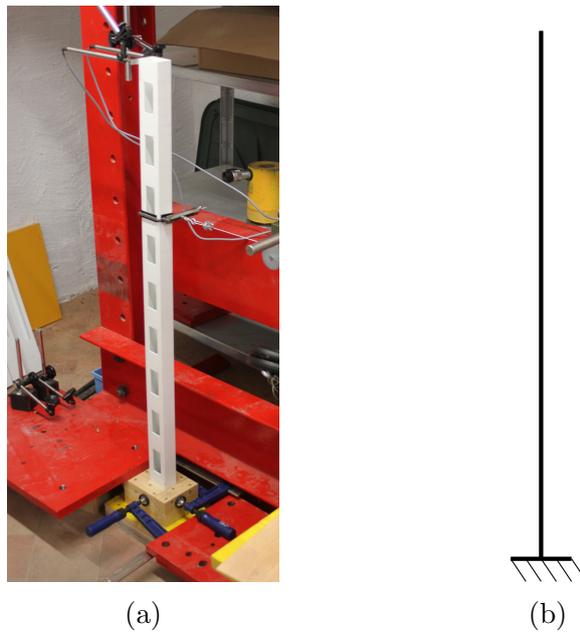


Abbildung 4.1: Statisches System: (a) Modell, (b) Prinzipskizze

dort, wo sich eine Aufzugstüre befindet, benötigt der Kern eine Öffnung. Aufgrund dieser geschloßweisen Perforationen wird der eigentlich geschlossene Querschnitt abschnittsweise geöffnet und ändert somit seine Eigenschaften in diesen Abschnitten grundlegend. In Anbetracht dieser Umstände wurden Modellkörper mit verschiedenen Öffnungskonfigurationen hergestellt.

Die erste Aufgabe bestand darin, die Querschnittsabmessungen und das Material so zu wählen, dass durch eine aufzubringende Kraft in vernünftiger Dimension ausreichende bzw. messbare Verformungen erzeugt werden konnten. Da Stahlprofile von Beginn an aufgrund der hohen Steifigkeit ausgeschlossen wurden, fiel zunächst die Entscheidung, Aluminiumprofilrohre zu verwenden. Aus der Vielzahl von am Markt angebotenen Profilen wurde jenes mit den Abmessungen $50\text{ mm}/60\text{ mm}/2\text{ mm}$ in Betracht gezogen.

Mithilfe der Modellierung des Profils im FE-Programm „Dlubal RFEM“ wurde jenes Torsionsmoment ermittelt, bei dem Verformungen im Millimeterbereich resultierten. Modelliert wurde ein Kern ohne jegliche Perforationen, da dieser die größte Steifigkeit besitzt und somit maßgebend für die minimalen Verformungen war. Aufgrund von Maßstabsüberlegungen und der gegebenen Querschnittsabmessungen wurde eine Stablänge von 1000 mm gewählt. Diese Abmessungen entsprechen im Maßstab 1:50 einem 50 m hohen Hochhauskern mit den Dimensionen $3\text{ m} \times 2,5\text{ m}$ und einer sehr geringen Wandstärke von 10 cm .

Die Eingabe des eingespannten Stabes erfolgte als Flächentragwerk. Grund dafür war die Tatsache, dass die Ergebnisse aus RFEM im Falle der Eingabe als Stab nur auf die Stabachse

bezogen wurden. Demzufolge konnten Verschiebungen nicht nur auf der Stabachse, sondern auch an beliebigen Punkten der Querschnittsebene ermittelt werden.

Ein Torsionsmoment M_T konnte aufgrund der Eingabe als Flächentragwerk dann nicht mehr direkt als stabachsenbezogene Belastung eingegeben werden. Es wurde mithilfe der ersten Bredt'schen Formel als Schubfluss T in kN/m aufgebracht.

Aus der ersten Bredt'schen Formel

$$M_T = 2 A_m T \quad (4.2)$$

folgt

$$T = \frac{M_T}{2 A_m} \quad (4.3)$$

wobei mit A_m die von der Mittellinie des dünnwandigen geschlossenen Querschnitts umschlossene Fläche bezeichnet wird.

Um große Querschnittsverdrehungen zu erhalten, wurde der dem Torsionsmoment entsprechende Schubfluss im oberen Bereich des Stabs, an einer Höhe von 800 mm , in Form konstanter längenbezogener Linienlasten, eingepreßt.

Es zeigte sich, dass sich erst ab einem Schubfluss von $T = 50\text{ kN/m}$ Verformungen im Millimeterbereich einstellten. Dieser Schubfluss entspricht nach Gleichung (4.2) einem Torsionsmoment von $M_T = 0,8\text{ kNm}$. Bei einem angenommenen maximalen Hebelsarm von 20 cm entspricht dies einer aufzubringenden Einzelkraft von $1,42\text{ kN}$ oder umgerechnet 142 kg . Aus technischer Sicht wäre es nur unter großem Aufwand möglich gewesen, diese Kräfte im Versuch aufzubringen. Deshalb wurde beschlossen, eine Alternative hinsichtlich des Materials zu suchen, um mit geringeren Kräften, bei in etwa gleichbleibenden Querschnittsabmessungen, ähnlich große Verformungen zu erzeugen. Nach einer weiteren Produktrecherche wurde ein Kunststoffprofil mit den Abmessungen $40\text{ mm}/60\text{ mm}/3\text{ mm}$ in Erwägung gezogen. Speziell handelt es sich dabei um Profile aus hart - PVC (Tab. (4.1)), wie sie beispielsweise in Fensterrahmenkonstruktionen verwendet werden. Die Wandstärke dieses Kunststoffprofils entsprach daher auch eher realistischen Annahmen.

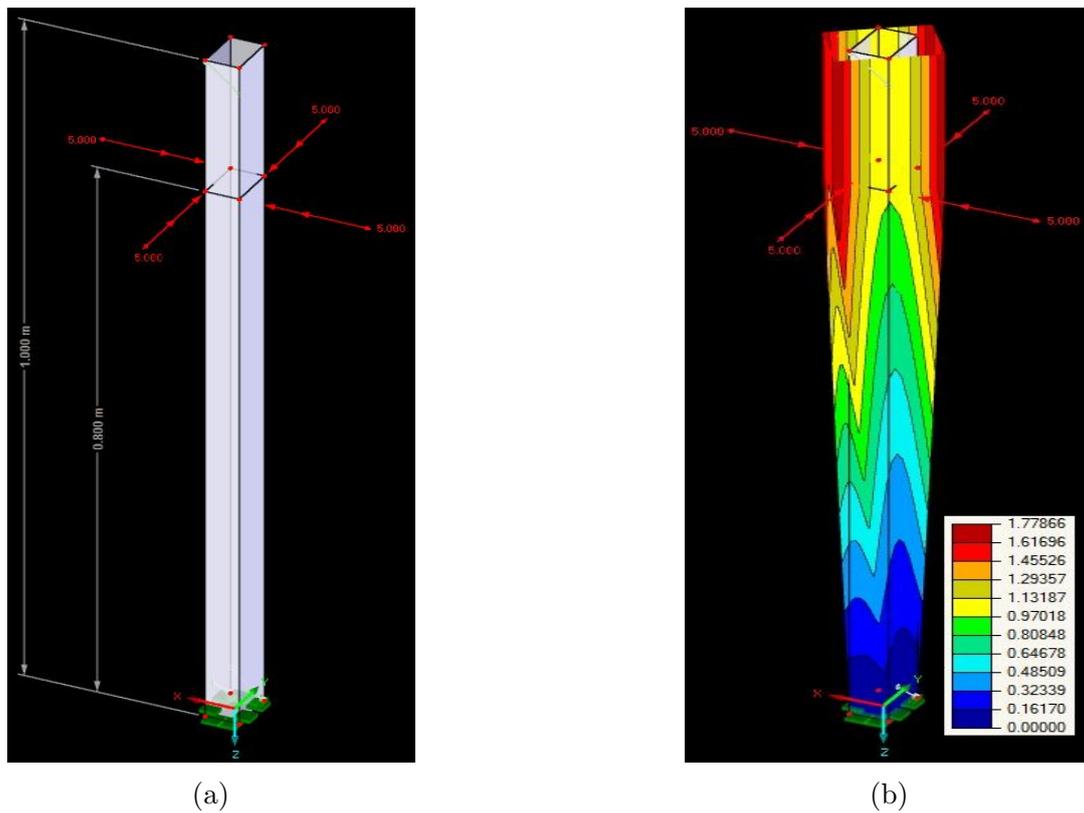


Abbildung 4.2: FEM-Modell (PVC) zur Profildimensionierung: (a) Modell, (b) Verschiebungen (Werte in *mm*)

Die Berechnung mit RFEM (Abb. (8.1)) ergab, dass es bereits ausreicht, einen Schubfluss von $T = 5 \text{ kN/m}$ aufzubringen, um Verformungen im Millimeterbereich zu erhalten. Diesem Schubfluss entspricht ein Torsionsmoment von $M_T = 0,02 \text{ kNm}$ oder bei einem Hebelsarm von 20 cm einer Einzelkraft von $10,75 \text{ kg}$.

Elastizitätsmodul E	3500 N/mm^2
Schubmodul G	1200 N/mm^2
Querdehnzahl ν	0.458
Spezifisches Gewicht γ	15.91 kN/m^3

Tabelle 4.1: Materialparameter von hart-PVC

Diese Werte bestätigten die Wahl von hart - PVC und eine weitere Untersuchung des Versuchskörpers hinsichtlich des Bimomentenverlaufs konnte vorgenommen werden.

Das Bimoment sollte irgendwo zwischen Einspannung und der Stelle des eingprägten Torsi-

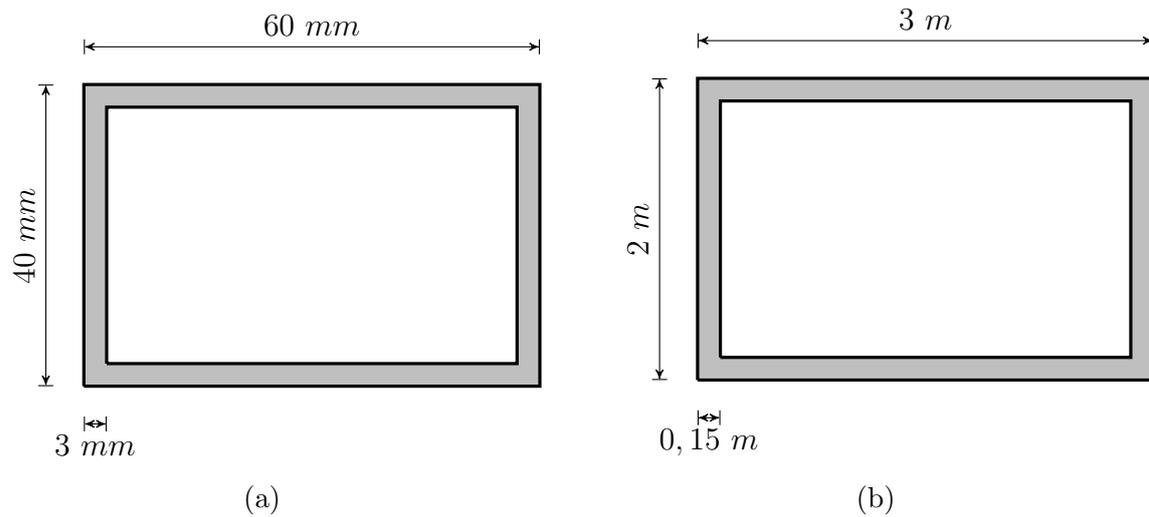


Abbildung 4.3: Querschnitt: (a) Maßstab 1:50, (b) Maßstab 1:1

onsmoments bzw. des Schubflusses den Wert Null annehmen. Diese Forderung basiert auf der Tatsache, dass für eine vereinfachte Handrechnung gewisse Voraussetzungen und Annahmen verlangt werden. Im Stabstatikprogramm „IQ100“ konnte der Verlauf des Bimomentes über die Stablänge berechnet werden. Hierfür wurde das statische System eingegeben und über das Modul Wölbkrafttorsion erfolgte die Berechnung und grafische Darstellung des Verlaufs, wie in Abb. (4.4) dargestellt. Bis zu einer Höhe von etwa 40 cm verschwindet das Bimoment zwischen Angriffspunkt und Einspannung. Wird diese Grenze aber unterschritten, so wäre die Voraussetzung für die Gültigkeit einer Handrechnung nicht mehr gegeben.

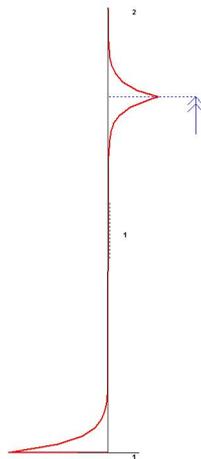


Abbildung 4.4: Bimomentenverlauf aus IQ100

Der Versuchskörper erfüllte die gestellten Anforderungen, weshalb die angenommene Länge bzw. Höhe von einem Meter bestätigt werden konnte. Aufgrund der Produktionslängen der Profile und der Vermeidung von Verschnitt wurden Profile mit einer jeweiligen Länge von 1200 mm bestellt.

Kapitel 5

Herstellung der Versuchskörper

5.1 Verwendete Maschinen

Die Profile aus hart-PVC wurden bereits in der Produktionsfirma auf eine Länge von 1200 mm zugeschnitten. Um die gewünschten Öffnungen herzustellen, wurden anfangs einige Möglichkeiten in Erwägung gezogen. Sie basierten alle auf einer händischen Herstellung der Perforationen mit unterschiedlichen Werkzeugen wie Sägen und Feilen. Die zu erwartenden Ergebnisse wurden als nicht zufriedenstellend eingestuft, weshalb die Entscheidung, begründet in der hohen Herstellungspräzision, auf die Verwendung einer CNC gesteuerten Fräse fiel.

Bei der Maschine handelte es sich um das Modell „FZ 22 L highspeed“ des Herstellers „Chiron“. Es wurde ein Schaftfräser für Aluminium mit einem Radius von 3 mm verwendet. Aufgrund dieses Radius blieben nach der Fertigung Rundungen in den eigentlich geforderten exakten Ecken der Öffnungen vorhanden. Um perfekte Ecken zu erhalten, wurden die verbliebenen Radien im Anschluss an die Fräsarbeiten per Hand mit einer handelsüblichen Feile entfernt.



Abbildung 5.1: CNC-Fräsmaschine Chiron FZ 22 L high speed

5.2 Die Versuchskörper

Aus den zur Verfügung stehenden Profilen wurden acht unterschiedliche Versuchskörper hergestellt. Diese wurden allerdings nicht alle zum selben Zeitpunkt hergestellt, sondern in Abhängigkeit zu den bereits erfolgten Versuchen an die neu gewonnen Erkenntnisse angepasst.



Abbildung 5.2: Herstellung der Profile: (a) Fräsvorgang Profil 1, (b) Kühlmiteileinsatz

Mit Querschnittsabmessungen von $40\text{ mm}/60\text{ mm}/3\text{ mm}$ und einer Höhe ab der Einspannstelle von 1120 mm , entspricht jeder Modellkörper einem Hochhauskern mit Querschnittsabmessun-

gen von $2\text{ m}/3\text{ m}/0,15\text{ m}$ und einer Höhe von 56 m . Das entspricht einem Maßstab von 1:50.

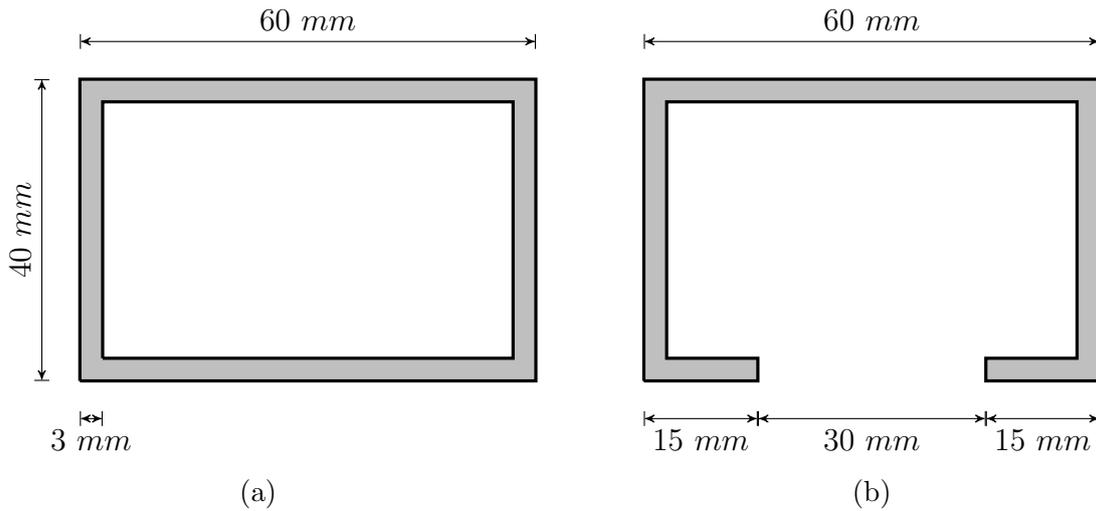


Abbildung 5.3: Querschnitte: (a) geschlossen, (b) offen

Alle Probekörper verfügen über idente Querschnittsabmessungen und besitzen dieselbe Länge. Die Breite der Öffnungen wurde mit 30 mm festgelegt und in allen Versuchskörpern eingehalten. Die Öffnungen unterscheiden sich in ihrer Lage und hinsichtlich deren Höhe. Der in den folgenden Abbildungen dargestellte schraffierte Bereich zeigt den eingespannten Teil der Versuchsprofile. Die Einspannung erfolgt bei jedem Versuch über eine Höhe von 8 cm .

Obwohl die Versuchskörper in den Versuchen vertikal angeordnet wurden, werden die nachfolgenden Skizzen aus platzsparenden Gründen waagrecht dargestellt.

Abb. 5.4 veranschaulicht die festgelegten Begriffe, welche im Folgenden zur Beschreibung der Schubmittelpunktverläufe verwendet werden.

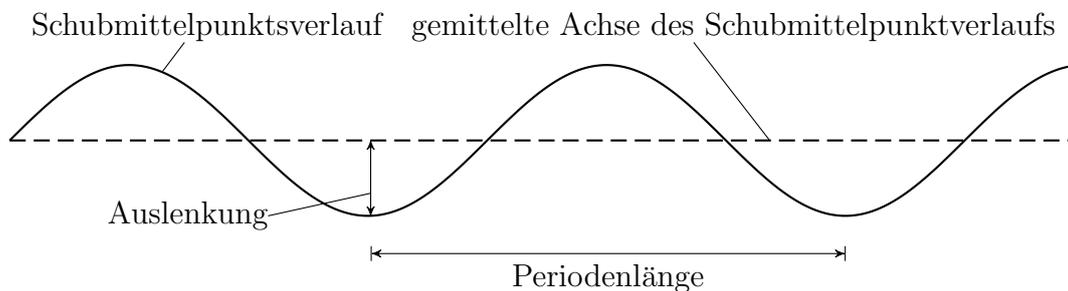


Abbildung 5.4: Begriffsdefinition zur Beschreibung des Schubmittelpunktverlaufs

5.2.1 Probekörper 1

Probekörper 1 stellt ein Modell eines Hochhauskerns mit realistischen, in der Praxis vorkommenden Öffnungsabmessungen dar. Mithilfe von Datenblättern unterschiedlicher Aufzugsmodelle verschiedener Hersteller wird eine Öffnungshöhe von 70 mm im Maßstabsmodell gewählt, was einer Höhe von $3,5\text{ m}$ entspricht. Die Abstände zwischen den Öffnungen sowie die Entfernung der letzten Öffnung zum oberen Rand beträgt 50 mm bzw. $2,5\text{ m}$. Es wird erwartet, dass sich die Schubmittelpunkte in den geschlossenen Bereichen im Querschnittsinneren und in den offenen Abschnitten außerhalb des Querschnitts befinden. Der Verlauf sollte nach gewissen Gesetzmäßigkeiten wellenförmig über die Stabhöhe verlaufen, wobei sich die gemittelte Achse des Schubmittelpunktverlaufs senkrecht einstellen sollte.

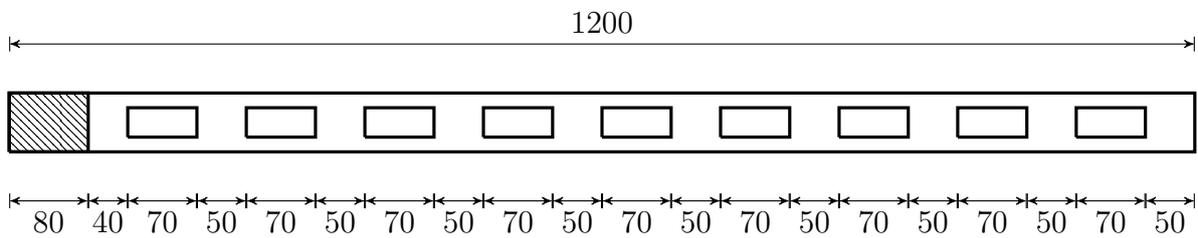


Abbildung 5.5: Probekörper 1, Maße in mm

5.2.2 Probekörper 2

Mit Probekörper 2 soll ein Extremfall untersucht werden. Der Theorie zufolge würde sich der Schubmittelpunkt bei einem Profil mit offenem Querschnitt außerhalb befinden. Durch die Anordnung äußerst kurzer geschlossener Bereiche sollten sich in diesen Bereichen deutliche Auslenkungen des Schubmittelpunktverlaufs in Richtung des Querschnittsinneren ergeben. Die gemittelte Schubmittelpunktsachse sollte auch hier senkrecht verlaufen.

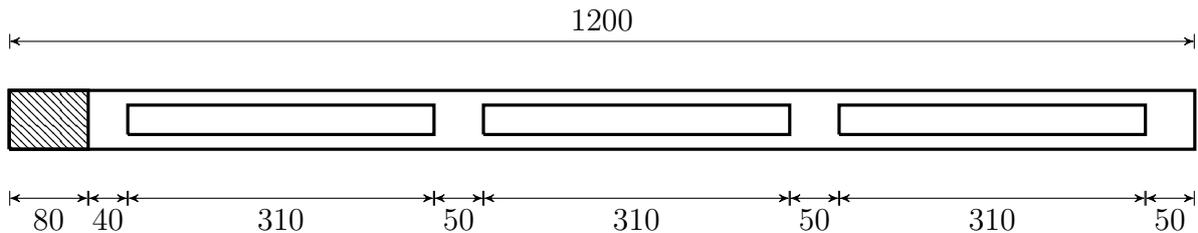


Abbildung 5.6: Probekörper 2, Maße in mm

5.2.3 Probekörper 3

Im Vergleich zu Probekörper 2 weist Probekörper 3 doppelt so lange geschlossene Bereiche auf. Die Verlängerung dieser kurzen Abschnitte sollte eine Verringerung der Auslenkungen zur Folge haben. Probekörper 3 entspricht aufgrund der Vergrößerung der geschlossenen Bereiche eher einem gänzlich geschlossenen Profil als Probekörper 2. Aufgrund dessen, sollte sich hier eine deutlichere Verlagerung der senkrechten gemittelten Schubmittelpunktsachse in Richtung der Stabachse einstellen.

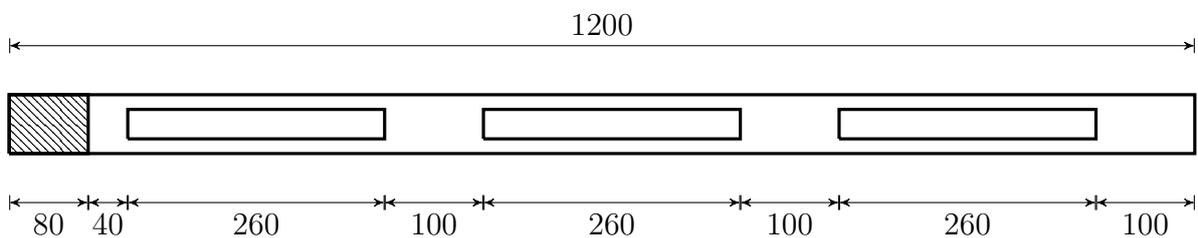


Abbildung 5.7: Probekörper 3, Maße in mm

5.2.4 Probekörper 4

Bei diesem Versuchsprofil wird das Prinzip der kontinuierlichen Vergrößerung der geschlossenen Bereiche fortgesetzt und die drei geschlossenen Abschnitte um jeweils weitere 5 cm vergrößert. Durch die weitere Annäherung an ein gänzlich geschlossenes Profil wird erwartet, dass sich die gemittelte Schubmittelpunktsachse hier noch weiter in Richtung der Stabachse bewegt und sich die Auslenkungen weiter verringern.

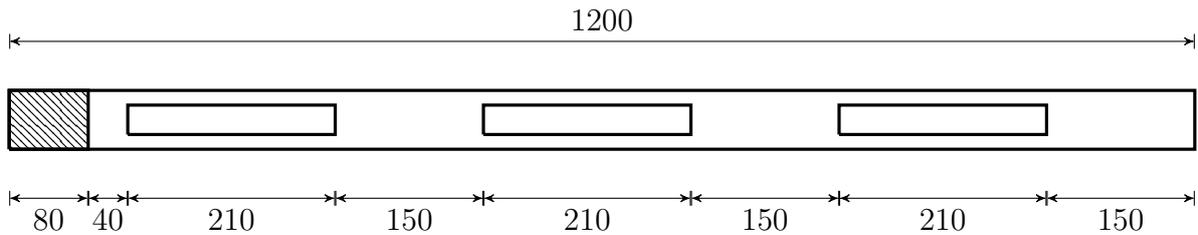


Abbildung 5.8: Probekörper 4, Maße in mm

5.2.5 Probekörper 5

Hier sind die geschlossenen Bereiche größer als die offenen. Weiters beginnt die erste Öffnung direkt an der Einspannung. Das ungewöhnliche Maß der Öffnungen von 173 mm resultiert aus geometrischen Überlegungen. Es ergibt sich geometrisch wegen der weiteren Vergrößerung der geschlossenen Abschnitte um jeweils 5 cm . Aufgrund des offenen Querschnitts an der Einspannung sollte sich der Schubmittelpunkt an dieser Stelle außerhalb des Querschnitts befinden.

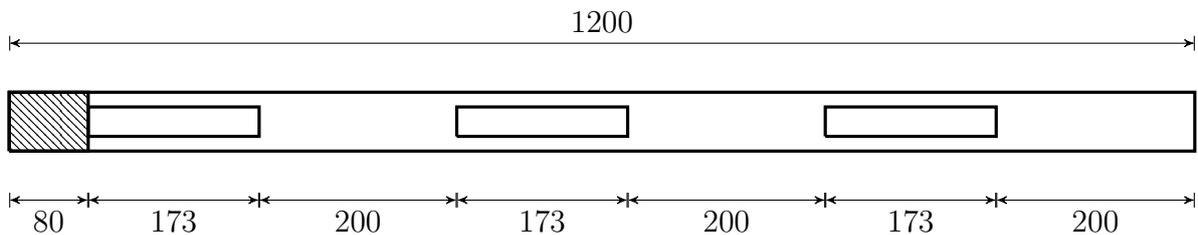


Abbildung 5.9: Probekörper 5, Maße in mm

5.2.6 Probekörper 6

Ab Probekörper 6 wurden anstatt drei nur mehr zwei Öffnungen angeordnet. Wie auch bei Probekörper 5 beginnt die erste Öffnung direkt an der Einspannung. Die gemittelte Schubmittelpunktsachse sollte sich im Bereich jener von Probekörper 4 befinden, da diese beiden Stäbe einen ähnlichen Öffnungsgrad besitzen.

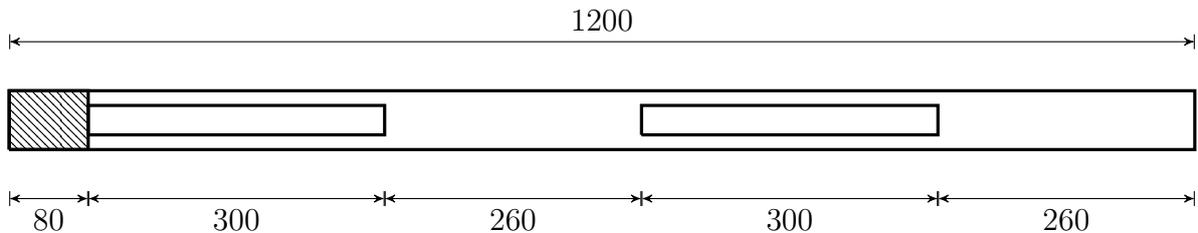


Abbildung 5.10: Probekörper 6, Maße in mm

5.2.7 Probekörper 7

Probekörper 7 ist eine Abwandlung des Probekörper 6 mit einer Vergrößerung der beiden Öffnungen um jeweils 12 cm. Die Ergebnisse aus diesem Versuch sollten nicht sonderlich von jenen aus dem Versuch 6 abweichen. Die gemittelte Schubmittelpunktsachse sollte sich noch weiter außerhalb des Querschnitts befinden als bei Probekörper 6.

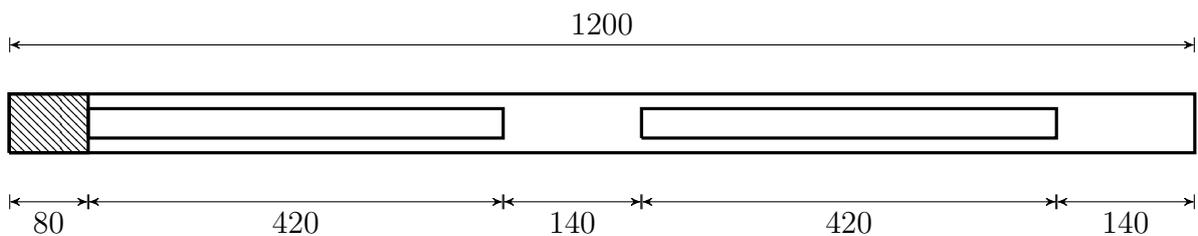


Abbildung 5.11: Probekörper 7, Maße in mm

Kapitel 6

Versuchsaufbau

6.1 Einspannung

Der Untersuchung eines Hochhauskerns wurde in diesem Versuch das einfache statische System eines eingespannten Kragträgers zugrunde gelegt. Da es am ehesten der Realität entspricht, wurden die Versuchsprofile vertikal eingespannt. Ein weiterer Grund dieser vertikalen Anordnung liegt in der Eliminierung von Verformungen normal zur Stabachse zufolge des Eigengewichts. Um den Anforderungen einer theoretischen Einspannung gerecht zu werden, durften an der Einspannstelle weder Verschiebungen noch Verdrehungen auftreten. Unter Beachtung dieser Randbedingungen wurden verschiedene Varianten herangezogen. Aus herstellungstechnischen Gründen und auch aufgrund der Nähe zur Realität wurde zunächst beschlossen, die Einspannung durch „Einbetonieren“ der Versuchskörper in eine Art Schalung herzustellen.

Ähnlich dem Prinzip eines Köcherfundaments sollte das Profil in eine Bodenhülse aus Stahl gestellt werden, welche anschließend mit einer erhärtenden Masse aufgefüllt wird. Bei Überlegungen zur Durchführung der einzelnen Versuche wurde jedoch ersichtlich, dass die vorgestellte Variante Probleme mit sich brachte. Für die Verfüllung müsste ein Material gefunden werden, welches zum einen hart genug ist, um der immer wiederkehrenden Belastung während eines Versuchs dauerhaft standzuhalten und zum anderen sollte es möglich sein, das Material nach Abschluss eines Versuchs leicht zu entfernen, ohne das Profil bzw. die Bodenhülse zu beschädigen oder gar zu zerstören. Zusätzlich sollte die Aushärtung des Materials möglichst rasch erfolgen. Aufgrund der Kombination dieser Probleme mit der Zeit, die man benötigen würde, um eine solche Einspannung für jeden einzelnen Versuchskörper herzustellen und wieder zu entfernen, wurde nach



Abbildung 6.1: Einspannung und Fixierung der Grundplatte

einer anderen Einspannvariante gesucht. Trotz des Ausschlusses von aushärtenden Materialien wurde bei den weiteren Überlegungen am Grundprinzip des Köchers festgehalten. Um die zeitliche Effizienz der Versuchsdurchführung zu erhöhen, wurde die Konstruktion der Einspannung durch mechanische Verspannung in Betracht gezogen. Die beiden Grundideen des Köchers und der mechanischen Verspannung führten letztendlich zur Variante eines Holzköchers. Der Köcher besteht aus acht $4\text{ cm}/4\text{ cm}/12\text{ cm}$ großen Holzstücken, die miteinander und auf einer fixierten Grundplatte verschraubt wurden. Die Anordnung der einzelnen Holzstücke ist in Abb.(6.2) dargestellt.

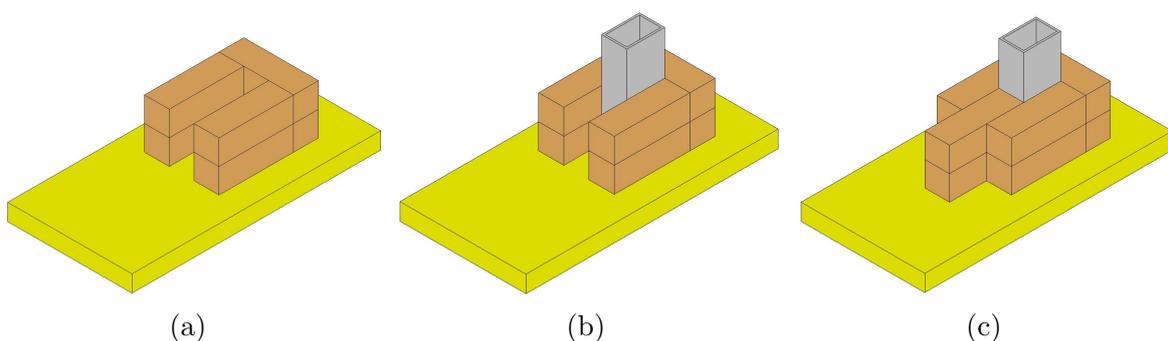


Abbildung 6.2: Schrittweise Herstellung der Einspannung: (a) U-förmige Anordnung, (b) Platzierung des Versuchskörpers, (c) Fertigstellung der Einspannung

Als Grundplatte wurde ein etwa 80 cm langes und 20 cm breites Stück einer Schalttafel verwendet. Die Anordnung der auf dieser Platte verschraubten sechs Hölzer erfolgte U-förmig. Zur zusätzlichen Stabilisierung wurden die Hölzer auch miteinander verschraubt. In die so entstan-

dene 8 cm hohe U-förmige Konstruktion konnte ein Profil nun passgenau gestellt werden, da die Öffnungsweite exakt der Breite des Profils von 40 mm entsprach. Das Versuchsprofil wurde nun an drei Seiten von den Holzstücken umgeben. An der noch freien Seite wurden zwei übereinanderliegende Holzstücke gegen das Profil gepresst und sowohl mit der Grundplatte als auch mit den anderen Hölzern verschraubt. Durch das Anbringen von Schraubzwingen in beiden Richtungen wurde der Einspanngrad zusätzlich erhöht. Abschließend wurde die Grundplatte mit Schraubzwingen am Rahmen fixiert und mit Gewichten in Form von schweren Stahlplatten beschwert (Abb. (6.1)). Diese Einspannung genügte den geforderten Randbedingungen und konnte nach Beendigung eines Versuchs sehr schnell durch Lösen der Zwingen und Herausdrehen der Schrauben gelockert und wiederverwendet werden werden.

6.2 Messaufbau und Messpunkte

Mit den Messungen wurde festgestellt, bei welcher Exzentrizität der angreifenden Einzellast keine Querschnittsverdrehungen im jeweiligen Versuchsprofil auftraten. Der Messaufbau bestand aus folgenden Komponenten:

- 2 × induktiver Wegaufnehmer Typ WA/20 mm
- Messverstärker QuantumX inkl. dazugehöriger Software
- Notebook

Wird ein Profil auf bestimmter Höhe mit einer exzentrisch wirkenden horizontalen Einzelkraft belastet, so treten im Allgemeinen Verschiebungen und Verdrehungen auf. Verschiedene Punkte des rechteckigen dünnwandigen geschlossenen Querschnitts weisen unterschiedliche Verschiebungen auf. Werden nun zwei Wegaufnehmer an zwei Punkten einer Seite positioniert, so messen diese im Falle einer auftretenden Verdrehung verschiedene Verschiebungsbeträge. Wird die Differenz dieser beiden Werte gebildet, ist diese offensichtlich von Null verschieden. Dieser Zustand bedeutet, dass die exzentrisch wirkende Einzelkraft Verdrehungen hervorruft und somit nicht durch den gesuchten Schubmittelpunkt verläuft. Verläuft die Wirkungslinie dieser angreifenden Einzelkraft jedoch durch den Schubmittelpunkt des jeweiligen Querschnitts, so treten nur Verschiebungen in Richtung der Einzelkraft auf und das Profil wird folglich nicht verdreht. In diesem Fall weisen beide Wegaufnehmer denselben Verschiebungsweg auf und die angesprochene Verschiebungsdifferenz wird zu Null. Wird bei einer bestimmten Exzentrizität

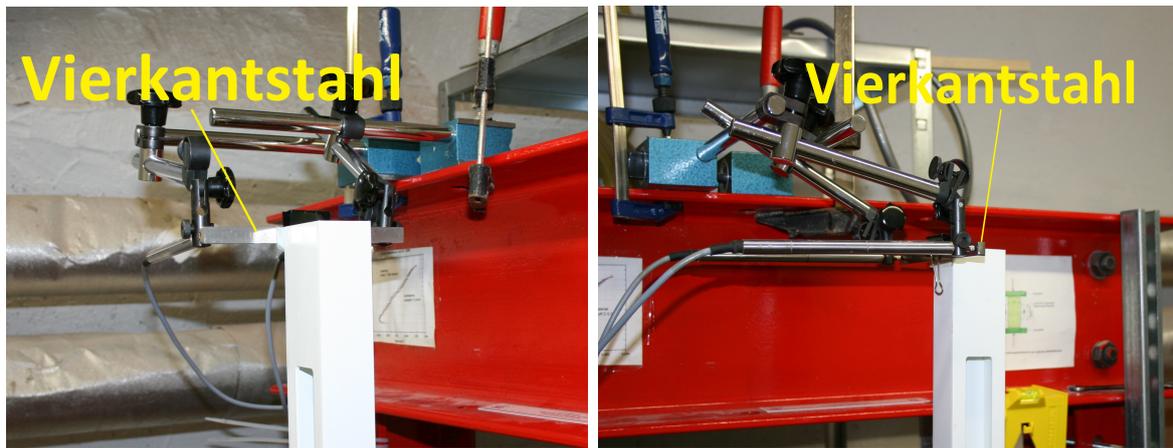


Abbildung 6.3: Anordnung der Wegaufnehmer und des Vierkantstahlstücks

dieser spezielle Verschiebungszustand erreicht, so ist davon auszugehen, dass die Wirkungslinie der Einzelkraft durch den Schubmittelpunkt verläuft und dieser somit für eine bestimmte Höhenposition lokalisiert worden ist. Verläuft die Einzelkraft durch den Schubmittelpunkt, so werden die Verdrehungen über die gesamte Länge des Profils verschwinden und es wäre natürlich möglich gewesen, die Messungen an beliebiger Höhe vorzunehmen. Die Positionierung der Wegaufnehmer erfolgte aber am obersten Ende der Versuchsprofile, an der gegenüberliegenden Seite der Krafteinleitung. Diese Stelle besitzt die größte Entfernung zur Einspannstelle und daraus folgend werden dort die auftretenden Verformungen Maxima erreichen. Durch diese Messung von vergleichsweise großen Verschiebungen im obersten Bereich konnten etwaige Störungen in Nachkommabereichen, welche im Bereich kleinerer Verformungen schwerwiegenderen Einfluss auf die Ergebnisse hätten, vernachlässigt werden. Um die Messwerte zusätzlich zu vergrößern, wurde ein Stück Vierkantstahl an der Seite des Profils mittels doppelseitigen Klebebands und einer Klammer befestigt. Durch diese Maßnahme wurde der Abstand der beiden Messpunkte zum Drehpunkt des Profils vergrößert. Je größer der Abstand des Messpunkts zum Drehpunkt des Querschnitts, desto größer ergab sich die gemessene Verschiebung. Durch die Anbringung dieser Verlängerung wurde bei großen Verdrehungen auch ein Abrutschen der Messspitzen der Wegaufnehmer vom Profil vermieden.

Die Positionierung bzw. Fixierung der Wegaufnehmer erfolgte mit dafür vorgesehenen verstellbaren Haltern, welche durch integrierte Magnete und zusätzlich angebrachte Schraubzwingen an dem Rahmen befestigt wurden. Mit einer speziellen Wasserwaage wurden die Wegaufnehmer in eine waagrechte Position gebracht und anschließend im Bezug auf deren Richtung und Parallelität eingestellt.

6.3 Kraftaufbringung

Die Aufbringung der horizontal wirkenden Einzelkraft erfolgte über Gewichte, welche an einem Stahlseil befestigt und über eine Umlenkrolle geführt wurden. Das kurze, aus dem Schlitz der Kraftaufnahme der Schubflussklemme ragende Gewindestangenstück wurde durch eine Muffe mit einer Ösenschraube verbunden. Das Stahlseil wurde durch die Öse dieser Schraube geführt und mit einer Seilklemme fixiert. Nach Herstellung dieser Verbindung konnte die Gewichtskraft als Einzelkraft in das Profil an der jeweiligen Höhe eingeleitet werden.

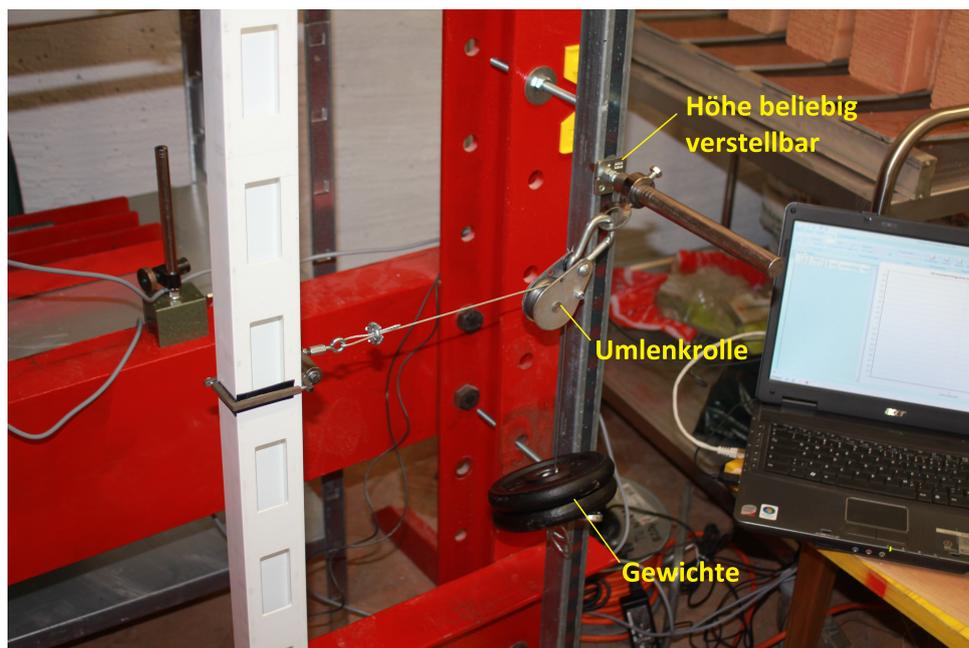


Abbildung 6.4: Krafteinleitung mittels Gewichten über Umlenkrolle

Da es notwendig war, die Einzelkraft aus den Gewichten an verschiedenen Höhen einwirken zu lassen, musste es möglich sein, die Krafteinleitung höhenverstellbar zu konstruieren. Zu diesem Zweck wurde eine herkömmliche Montagewise aus Stahl mit Gewindestangen und Muttern am roten Rahmen senkrecht montiert. Als Zubehör gibt es spezielle Teile, die an beliebiger Stelle im Schlitz der Schiene sehr einfach fixiert bzw. gelockert werden können. Diese Teile wurden mit einem kurzen Gewinde versehen, an dem ein etwa 25 cm langes Stück einer Stahlwelle angeschraubt wurde. Dieses Stück wurde zuvor mit einer wenigen Zentimeter tiefen zentrischen Bohrung inklusive passendem Gewinde versehen. Auf dieser Welle befand sich ein verschiebbarer Ring, der mit einer Stellschraube fixiert werden konnte. An diesen Ring wurde eine starke Beilagscheibe um 90° versetzt angeschweißt, an der die Umlenkrolle mit einem Karabiner aufgehängt wurde. Der verschiebbare Ring diente dazu, die Umlenkrolle und somit die Richtung der einwirkenden Einzelkraft der jeweiligen Exzentrizität anzupassen.

6.4 Schubflussklemme

Die Vorrichtung zur Aufbringung eines Torsionsmoments in Form eines Schubflusses aus einer horizontal wirkenden exzentrischen Einzelkraft wird als „Schubflussklemme“ bezeichnet. Diese wurde aus Stahl gefertigt und besteht im Prinzip aus zwei Hauptbauteilen. Bei diesen Bauteilen handelt es sich einerseits um den Rahmen, der es ermöglicht, die Klemme auf unterschiedlichen Höhen des Profils zu fixieren und andererseits um die Konstruktion zur Veränderung der Exzentrizität der horizontal einwirkenden Einzelkraft. Der Rahmen musste in der Lage sein, eine möglichst kraftschlüssige Verbindung zum Profil herzustellen, um einen Schubfluss in Form einer konstanten längenbezogenen Kraft gleichmäßig über den Umfang des Profils zu gewährleisten. Um in den Versuchen der Aufbringung einer Linienlast möglichst gerecht zu werden, sollte die Klemme in ihrer Konstruktionshöhe so gering ausgeführt werden, wie es die Herstellung und spätere Handhabung zulassen. Zusätzlich sollte es mit wenig Aufwand verbunden sein, die höhenmäßige Position der Klemme im Laufe des Versuchs zu verändern. Es wurden zwei 90° Winkel aus Vierkantstahl gefertigt, welche es durch geeignete Anordnung von Schrauben, Schlitzen und Gewinden ermöglichten, das Profil in Form eines Rahmens mit gewissem Anpressdruck zu umschließen. Verwendet wurde hierfür ein Vierkantstahl der Güte S235 mit den Dimensionen $5\text{ mm} \times 5\text{ mm}$. Dies bedeutete, dass die Bauteilhöhe des Rahmens 5 mm betrug, was in Anbetracht der Abmessungen der Versuchskörper als ausreichend klein betrachtet wurde, um dem Charakter einer Linienlast möglichst zu entsprechen. Die Schenkellänge der Winkel ergab sich aus den Querschnittsabmessungen der verwendeten Versuchsprofile bzw. musste so gewählt werden, dass eine völlige Umschließung des Querschnitts erfolgen konnte. Die einzelnen Arbeitsschritte zur Herstellung des Rahmens gliederten sich wie folgt: Anfangs wurden vier Einzelteile des Vierkantstahls abgelängt, um sie später zu zwei Winkeln zu verschweißen. Im Anschluss daran wurden die Schlitze gefräst und die stirnseitigen Löcher gebohrt und mit Gewinden der Dimension M3 versehen. Nach erfolgter Schweißnahtvorbereitung wurden aus den Stäben mittels WIG-Schweißverfahren die beiden Winkel hergestellt. Abschließend wurden die Innenseiten des Rahmens mit Gummi beklebt, wodurch der bei Belastung auftretende einzuprägende Schubfluss an der Berührungsfläche von Rahmen und Profil möglichst gleichmäßig in das Profil eingeleitet werden konnte. Die nun fertiggestellten Winkel bildeten durch gegenseitige Verspannung einen Rahmen, der durch das Drehen an zwei Schrauben fixiert bzw. gelockert werden konnte. Somit konnte eine Kraft an bestimmter Höhe des modellierten Hochhauskerns eingeprägt werden.



Abbildung 6.5: Schubflussklemme

Nach Fixierung des Rahmens musste es möglich sein, die Exzentrizität der einwirkenden horizontalen Einzelkraft im Millimeterbereich zu verändern. Hierfür wurde eine Konstruktion entworfen, die es durch Drehen an einer durch das gesamte Bauteil geführten Schraube zuließ, die Lage der Kraftwirkungslinie im geforderten Genauigkeitsbereich zu verändern. Hinter der Funktionsweise dieser Konstruktion verbirgt sich eine sehr einfache Überlegung. Wird eine sich mittig auf einer Schraube befindlichen Mutter gedreht, so verändert diese - je nach Drehrichtung - ihre Position, das heißt, sie kann beliebig auf der Schraube wandern (Schraube gehalten - Mutter gedreht). Genauso verändert diese Mutter ihre Position auf der Schraube, wenn sie gegen Verdrehen festgehalten wird und nun an der an Ort und Stelle bleibenden Schraube gedreht wird (Schraube gedreht - Mutter gehalten). Der in diesem Beispiel angeführten Mutter entsprach in der Konstruktion ein im Rohr laufendes Wellenstück mit einem Durchmesser von 13 mm , welches mit einer zentrischen Bohrung und einem Gewinde der Dimension M4 versehen wurde. Normal auf diese Bohrung befand sich ein zweites Innengewinde zur Anbringung des Gewindestangenstücks, an dem die Einzelkraft angriff und in die Schubflussklemme eingeleitet wurde. Bei dem Rohr handelte es sich um ein gewöhnliches Stahlrohr mit einem Außendurchmesser von 17 mm , einer Wandstärke von 2 mm und einem daraus resultierenden Innendurchmesser von 13 mm . Da der Durchmesser des innenlaufenden Wellenstücks genau dem Innendurchmesser des Rohrstücks entsprach, ist eine passgenaue Führung dieses beweglichen Teils gegeben. In das Rohrstück wurde ein 75 mm langer und 5 mm breiter Schlitz gefräst,

durch den das Gewindestangenstück geführt und anschließend mit dem inneren Wellenstück in die das dafür vorgesehene Gewinde geschraubt wurde. Die Drehbewegung des Innenstücks war somit verhindert. Dem Rohrstück wurden an den beiden offenen Enden Deckel aufgeschweißt, die mit ihrer mittigen Bohrung der durchlaufenden Schraube als Führung dienten. Anschließend wurde diese Schraube in das Bauteil eingebracht und die Position des Innenstücks konnte durch das Drehen an selbiger verändert werden.

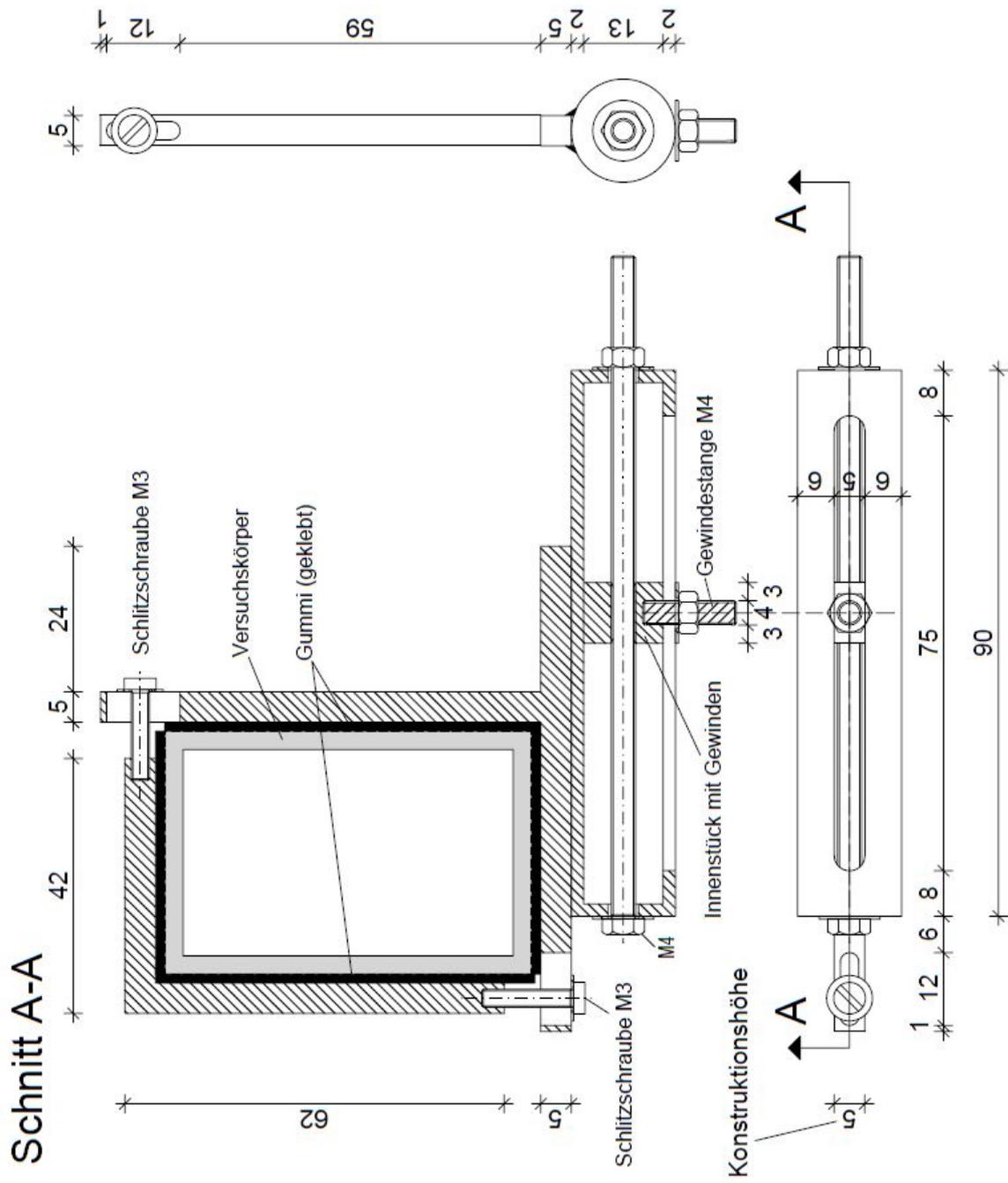


Abbildung 6.6: Schubflussklemme, alle Maße in mm

Die Längen des Rohres bzw. des Schlitzes ergaben sich aus der maximal erforderlichen Exzentrizität der angreifenden Einzelkraft. Diese Exzentrizität resultierte aus der Lage der Schubmittelpunkte bei geschlossenem und offenem Querschnitt (Abb. (6.7)). Es wurde angenommen, dass es sich bei diesen Punkten um Extremwerte handelte und sich die Lagen der Schubmittelpunkte über die Profillänge innerhalb dieser Grenzen bewegten. Bei den offenen Querschnittsabschnitten befand sich der rein rechnerisch ermittelte Schubmittelpunkt $19,37\text{ mm}$ außerhalb der Außenkante, während er sich in den geschlossenen Querschnittsbereichen 20 mm innerhalb der Außenkante des Profils, also im Schwerpunkt befand. Die Länge des Schlitzes musste also ausreichen, um die Einzelkraft auf einer Länge von mindestens $39,37\text{ mm}$ angreifen lassen zu können. Um auf der sicheren Seite zu bleiben, wurde eine Schlitzlänge von 75 mm gewählt, womit sich fertigungstechnisch eine Rohrlänge von 90 mm ergab. Nach Fertigstellung der zwei Hauptbauteile konnten diese miteinander verbunden werden. Die Positionierung des Rohrstücks am Winkel des Rahmens musste so erfolgen, dass die vorher bestimmten Extrempunkte der Exzentrizitäten in der am Profil fixierten Lage des Rahmens auch erreicht werden konnten. Durch das Verschweißen dieser beiden Einzelteile entstand nun eine Vorrichtung, welche es erlaubte, eine Einzelkraft auf bestimmter Höhe und mit bestimmter Exzentrizität einwirken zu lassen.

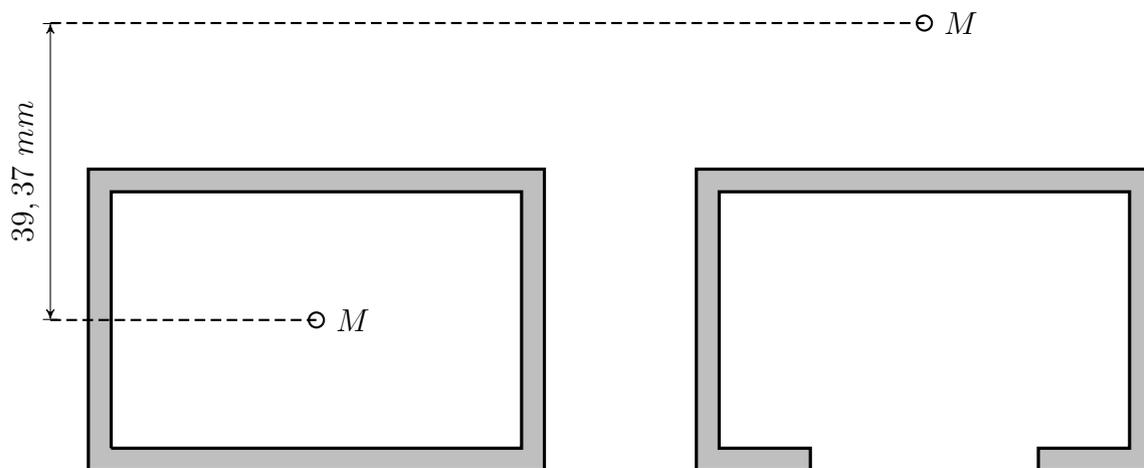


Abbildung 6.7: maximale Lagen der Schubmittelpunkte

Kapitel 7

Versuchsdurchführung

In diesem Abschnitt erfolgt die schrittweise Erläuterung eines durchgeführten Versuchs an einem Probekörper. Die Versuche unterschieden sich lediglich in den Messhöhen an den Probekörpern und in der Größe der aufgebrauchten Kräfte. Sowohl die Fixierung der Grundplatte als auch die Anbringung der Montageschiene inklusive der Vorrichtung zur horizontalen und vertikalen Kraftverschiebung mit Umlenkrolle waren zu diesem Zeitpunkt bereits erfolgt.

- Einspannen des Profils

Wie in Kapitel 6 bereits erläutert, wurde das Profil in den Holzköcher gestellt und durch Verschrauben der einzelnen Hölzer fixiert. Die Anbringung zweier Schraubzwingen im oberen Bereich des Köchers brachte eine deutliche Verbesserung der Einspannung mit sich.

- Anbringen des Balkens aus Vierkantstahl

Wie bereits beschrieben, erfolgte dann die Anbringung des 16 *cm* langen Vierkantstahlstücks am oberen Ende des Profils mittels doppelseitigem Klebeband und einer Klemme.

- Positionierung der Wegaufnehmer

Es folgte die Fixierung der Magnethalterungen für die Wegaufnehmer am Rahmen. Um jegliche Bewegungen dieser Halterungen zu verhindern, wurden sie zusätzlich mit Schraubzwingen fixiert. Im Anschluss daran wurden die Wegaufnehmer ausgerichtet und so positioniert, dass der Abstand der den Stahlbalken berührenden Messspitzen 15 *cm* betrug. Es war außerdem darauf zu achten, dass den Tauchankern der Wegaufnehmer bei Belastung

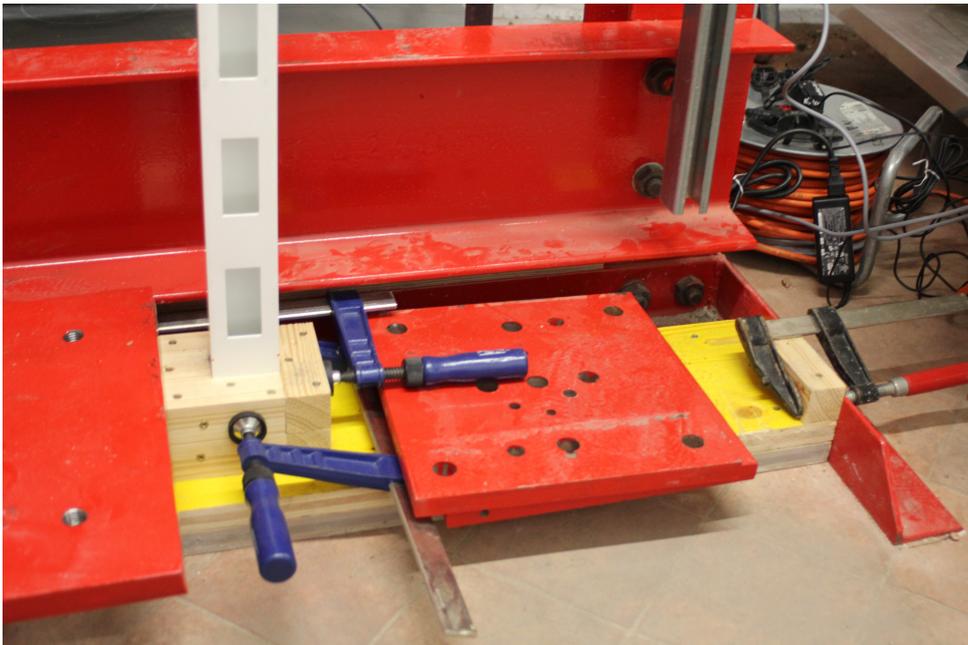


Abbildung 7.1: Einspannung mit zusätzlichen Schraubzwingen und Beschwerung

genügend Messweg zur Verfügung stand.

- Verbinden der Wegaufnehmer mit dem Messverstärker
- Verbinden des Messverstärkers mit dem PC
- Bestimmung des Gewichts bzw. der Größe der Einzelkraft

Abhängig von der Steifigkeit des jeweiligen Versuchskörpers musste die Größe der Einzelkraft gefunden werden, um Verformungen im möglichen Messbereich der Wegaufnehmer zu gewährleisten. Der maximale Messweg der verwendeten Wegaufnehmer betrug 20 mm . Die Aufbringung der Einzelkraft erfolgte im obersten Messpunkt des Profils, da aufgrund des verwendeten statischen Systems an dieser Stelle die größte Verformung des Stabes zu erwarten war. Die Klemme wurde zuerst grob und nach anschließender Feinjustierung fest fixiert. Die Fixierung erfolgte hierbei, wie auch bei allen weiteren Messungen, durch definiertes Anziehen der Schlitzschrauben (siehe Abb. 7.3) mit einem Schraubenzieher. Anschließend wurde die Umlenkrolle höhenmäßig nach Augenmaß eingestellt und die Gewichte in Form von Hantelscheiben am Stahlseil aufgefädelt. Verwendet wurden Hantelscheiben mit Gewichten von $0,5\text{ kg}$ und 1 kg . Das Stahlseil wurde über eine Schlaufe durch die Ösenschraube und eine Muffe mit dem Gewindestangenstück der Schubflussklemme verbunden und die Einzelkraft wurde aufgebracht. Um vernünftige Messwerte zu erzielen, wurde die Größe des Gewichts so gewählt, dass sich die Verformungen nicht

zu klein, aber auch, dem maximalen Messweg der Wegaufnehmer entsprechend, nicht zu groß ergaben. Die so ermittelten Gewichte betragen, abhängig von den Profilen, 3 kg oder 4 kg.

- Genaue höhenmäßige Justierung der Umlenkrolle

Nach erfolgter Bestimmung des Belastungsgewichts wurde die Höhe der Umlenkrolle genau eingestellt, um eine horizontale Krafteinleitung zu gewährleisten. Dabei wurde die Belastung aufgebracht und die gelockerte, an der Montageschiene befindliche Stahlwelle mit der daran aufgehängten Umlenkrolle auf genau jene Höhe positioniert, bei der die Kraft horizontal eingeleitet werden konnte. Dies wurde mit einer Wasserwaage am Verlauf des horizontalen Seilstücks zwischen Umlenkrolle und Schubflussklemme vorgenommen. Anschließend erfolgte eine Entlastung des Systems durch das Ablegen der Gewichte.

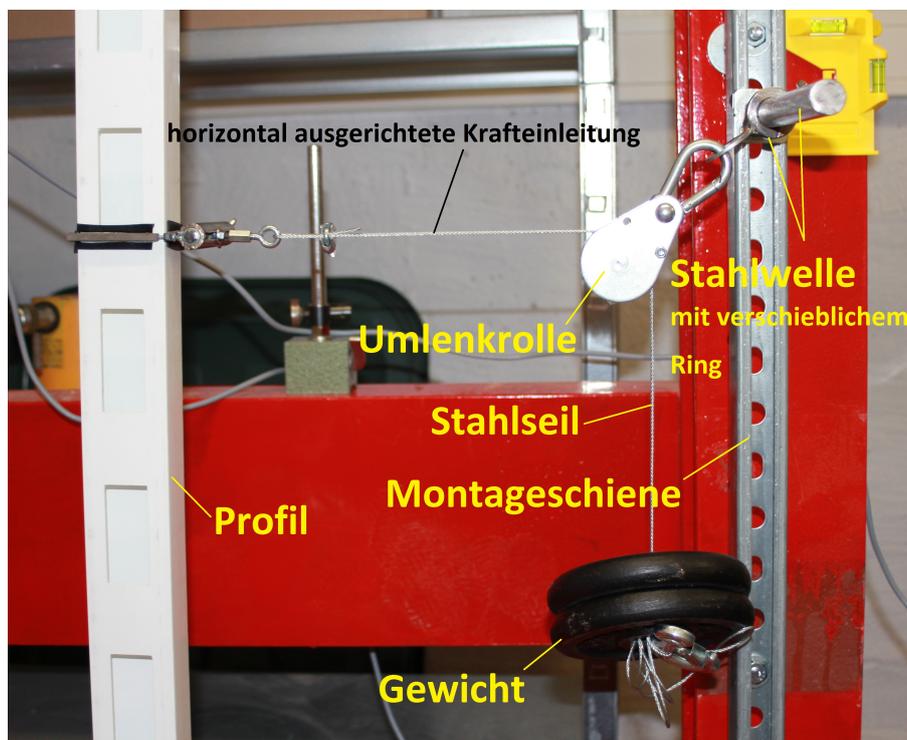


Abbildung 7.2: Krafteinleitung

- Einstellen der ersten Exzentrizität an der Klemme

Der Nullpunkt bezüglich der zu messenden Exzentrizitäten wurde wie in Abb. 7.3 an der Außenkante des Profils definiert. Die Exzentrizität e wurde negativ definiert, wenn sie von der Außenkante in Richtung des Querschnitts verlief. Mithilfe eines Lineals konnte nun jede Exzentrizität durch Drehen an der dafür vorgesehenen durchgeführten Schraube der Schubflussklemme millimeterweise eingestellt werden. In jedem Versuch wurde auf der

ersten Messhöhe bei einer Exzentrizität von $e = -10\text{ mm}$ begonnen. Anschließend wurde die Klemme wieder mit dem Seil verbunden.

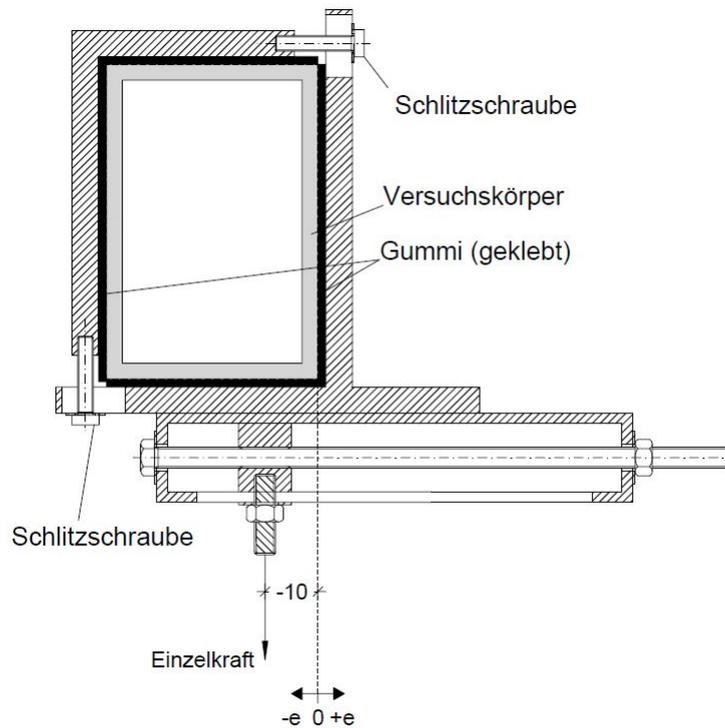


Abbildung 7.3: Definition der Exzentrizität an der Schubflussklemme und beispielhaft eingestellte Exzentrizität von $e = -10\text{ mm}$

- Richtungsmäßige Einstellung der horizontalen Einzelkraft

Im nächsten Schritt wurde die Belastung aufgebracht, um die richtungsmäßige Einstellung der horizontalen Einzelkraft vorzunehmen. Diese Justierung der Umlenkrolle konnte mit dem auf der Stahlwelle befindlichen verschieblichen Ring durchgeführt werden. Die Außenkante des Profils und die Wirkungslinie der Einzelkraft sollten im belasteten Zustand einen rechten Winkel einschließen. Durch Verschieben des gelockerten Rings und mithilfe eines Winkels (Werkzeug) wurde diese Einstellung für diese erste Exzentrizität von $e = -10\text{ mm}$ vorgenommen. Im Hinblick auf die weiteren Messungen wurde es als ausreichend betrachtet, diese richtungsmäßige Einstellung nicht bei jeder Millimeterverschiebung der Exzentrizität, sondern in 5 mm -Schritten durchzuführen (Abb. 7.4).

Nach dieser Justierung erfolgte wieder eine Entlastung des Systems. Die den Exzentrizitäten entsprechenden einzelnen Positionen des Rings bzw. der Umlenkrolle wurden im Laufe des ersten Versuchsdurchlaufs auf der Stahlwelle markiert, um die Positionierung in den darauffolgenden Versuchen zu beschleunigen.

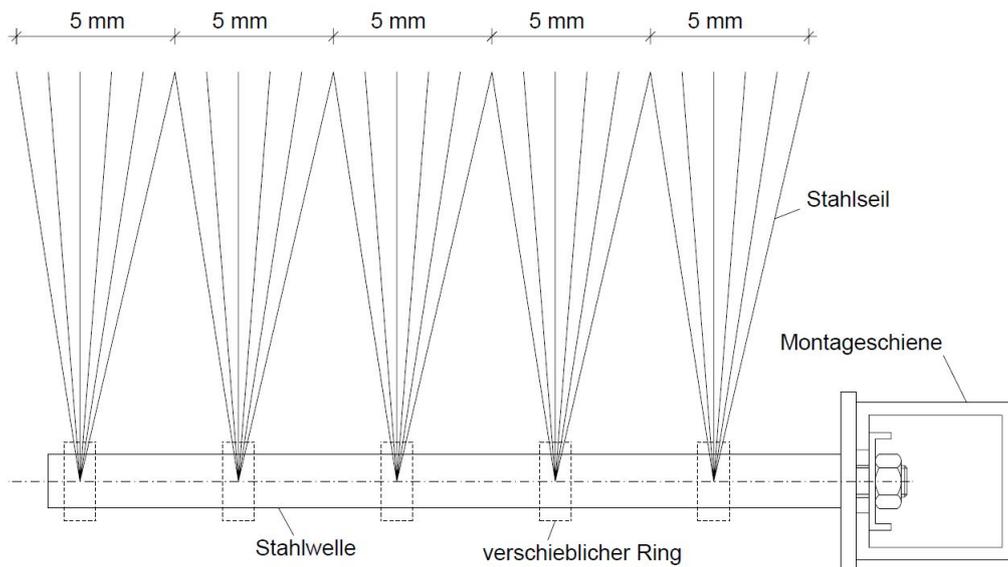


Abbildung 7.4: Prinzip der Kraftverschiebung in 5 mm-Schritten (nicht maßstabgetreue Zeichnung)

- Start des Messzyklus für eine Exzentrizität
 - Einmalige Definition der verwendeten Wegaufnehmer in Messsoftware QuantumX
 - Nullsetzen der Wegaufnehmer
 - Starten der Aufzeichnung der Messdaten (gemessen wurden die Verschiebungen über die Zeit)
 - Belastung aufbringen
 - Pendeln des Gewichts dämpfen und warten bis es ruhig hängt
 - Beobachten der Graphen der beiden Wegaufnehmer am Bildschirm bis sich ein über die Zeit konstanter Verlauf einstellt
 - Entlasten
 - Exportieren der Messwerte in Exceldatei (Abb. 7.6)
 - Mittelwertbildung der letzten 25 Verschiebungswerte pro Wegaufnehmer über die Zeit (Abb. 7.6)
 - Differenzbildung dieser beiden gemittelten Verschiebungswerte (Wenn diese Differenz von Null verschieden ist, dann gibt es Verdrehungen)

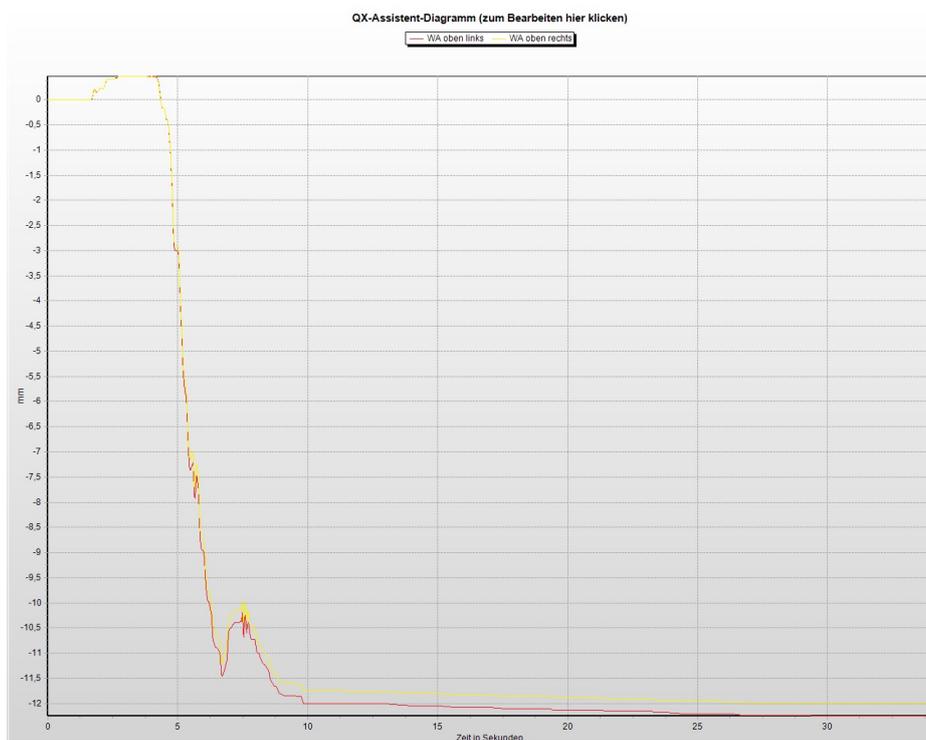


Abbildung 7.5: Verlauf der Verschiebungen über die Zeit (zwei Wegaufnehmer: gelb und rot), im letzten Abschnitt sind beide konstant

- Differenz in Exceltabelle für jeweiliges Versuchsprofil bei richtiger Messhöhe und Exzentrizität eintragen
- Ende der Messung für eine Exzentrizität
- Verschiebung der Exzentrizität an der Schubflussklemme um $+1\text{ mm}$
- Erneute Durchführung des Messzyklus für nächste Exzentrizität

Wechselte nun das Vorzeichen der gebildeten Differenz von einer Exzentrizität zur nächsten, so befand sich der Schubmittelpunkt zwischen diesen beiden Exzentrizitäten und dessen Lage wurde durch lineare Interpolation ermittelt. Nach Auffindung des Schubmittelpunkts waren die Messungen an einer Messhöhe beendet und die nächste, darunterliegende Messposition konnte behandelt werden. Um keine unnötigen Messungen durchzuführen, wurde ab der zweiten Messhöhe in der Nähe der bereits ermittelten Exzentrizität des ersten Schubmittelpunkts zu messen begonnen.

	A	B	C	D	E	F
1	WA oben links		WA oben rechts			
2	dt = 16,6666666666667ms (60,00Hz)		dt = 16,6666666666667ms (60,00Hz)			
3	X in s	Y in mm	X in s	Y in mm		
909	15.07940814	-11.8024025	15.07940814	-11.84212399		
910	15.09607047	-11.80237389	15.09607047	-11.84238243		
911	15.11273281	-11.80244637	15.11273281	-11.84227562		
912	15.12939513	-11.80238438	15.12939513	-11.84238243		
913	15.14605746	-11.8023138	15.14605746	-11.84201622		
914	15.16271979	-11.80240726	15.16271979	-11.84216785		
915	15.17938212	-11.80253601	15.17938212	-11.84234238		
916	15.19604444	-11.80256653	15.19604444	-11.84210968		
917	15.21270678	-11.80224895	15.21270678	-11.84214401		
918	15.22936911	-11.80237007	15.22936911	-11.84232903		
919	15.24603144	-11.80243874	15.24603144	-11.84229851		
920	15.26269376	-11.80235767	15.26269376	-11.84225082		
921	15.27935609	-11.80233765	15.27935609	-11.84217167		
922	15.29601842	-11.80239582	15.29601842	-11.84228325		
923	15.31268076	-11.80265427	15.31268076	-11.84222031		
924	15.32934309	-11.80243301	15.32934309	-11.84213734		
925	15.34600541	-11.80244064	15.34600541	-11.84236145		
926	15.36266774	-11.80245686	15.36266774	-11.8424263		
927	15.37933007	-11.80234146	15.37933007	-11.84204102		
928	15.3959924	-11.8025856	15.3959924	-11.84236908		
929						
930		-11.80242862		-11.84224039		
931						
932		Differenz= -0.03981177				
933						
934						

Abbildung 7.6: Exportierte Exceldatei: 1. und 3. Spalte: Zeit, 2. und 4. Spalte: Messwerte der beiden Wegaufnehmer, Mittelwerte und Verschiebungsdifferenz

Kapitel 8

Numerische Simulation

8.1 FE-Modell

Die numerische Simulation der durchgeführten Versuche erfolgte mit dem FE-Programm RFEM der Firma Dlubal. Die einzelnen Probekörper wurden, wie schon bei der Dimensionierung, mit vier rechteckigen Flächen modelliert. Die Einspannung wurde durch die Verwendung von Linienlagern hergestellt. Den Abmessungen der Stäbe entsprechend wurde die Seitenlänge der finiten Elemente mit 5 mm definiert. Bei der automatischen Generierung des FE-Netzes wurden drei- und viereckförmige Elemente zugelassen. Die eingegebenen Materialparameter sind in Tab. 4.1 angeführt.

Sowohl der in den Versuchen verwendete Balken aus Vierkantstahl als auch die Schubflussklemme wurden in RFEM aus einfachen quadratischen Stahlstäben mit einer Seitenlänge von 5 mm modelliert. Um die Eigenverformungen dieser beiden Teile auf ein Minimum zu beschränken, wurden Elastizitäts- und Schubmodul des verwendeten Stahls um den Faktor 10 erhöht.

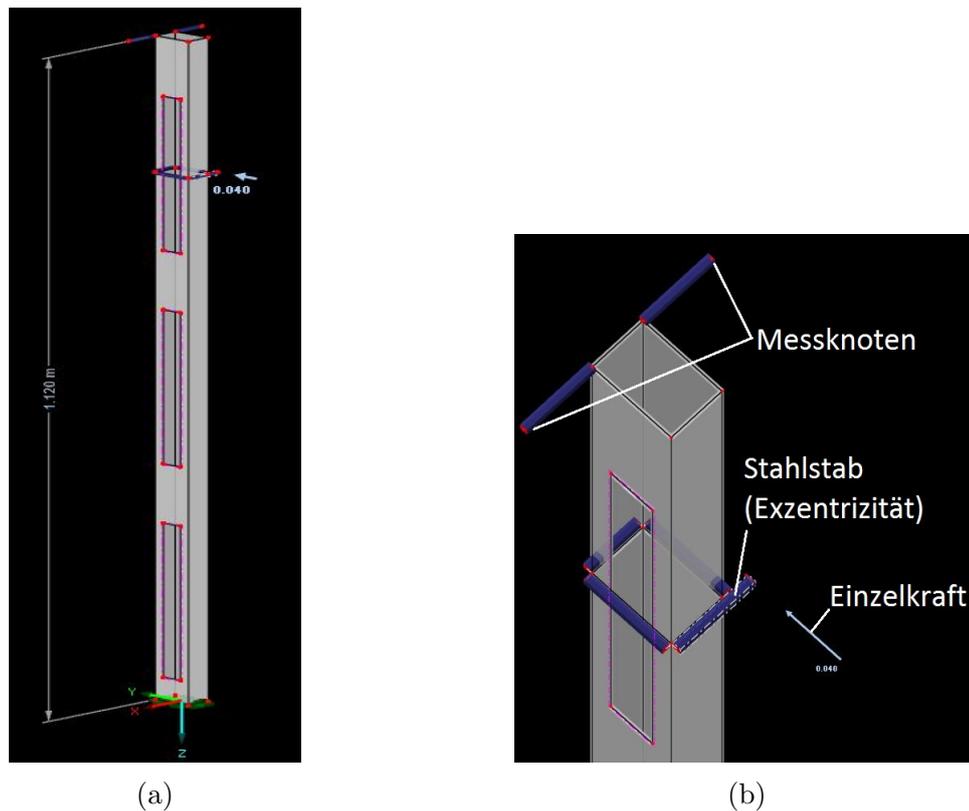


Abbildung 8.1: Modellierung des FE-Modells in RFEM: (a) Probekörper 3, (b) Balken, Schubflussklemme und exzentrisch einwirkende Einzelkraft

8.2 Simulation

Die Durchführung der numerischen Simulation wird im Folgenden schrittweise erläutert:

- Positionierung der Schubflussklemme an Stelle der ersten Messhöhe
- Einstellen der ersten Exzentrizität (Der Nullpunkt der Exzentrizität wird wie in den Versuchen an der Außenkante des Profils definiert) an der Schubflussklemme durch Verlängerung bzw. Verkürzung des Stahlstabs (Abb. 8.1b)
- Aufbringung der dem Versuch entsprechenden Einzellast auf den Endknoten des Stahlstabs der Schubflussklemme
- Durchführung der FE-Berechnung
- Berechnete Verschiebungen der Endknoten des modellierten Balkens in Excel exportieren
- Bildung der Verschiebungsdifferenz der u_y - Werte (Die Richtung der y - Achse ist in Abb. 8.2 dargestellt)

- Einstellen der nächsten Exzentrizität durch Verlängern des Stahlstabs der Schubflussklemme um $0,1\text{ mm}$, erneute Aufbringung der Einzelkraft und Auswertung der Verschiebungen

Analog zu den Versuchen wechselte zwischen zwei bestimmten Exzentrizitäten das Vorzeichen der Verschiebungsdifferenz. Wie schon bei der Vorgehensweise in den Versuchen wurde die Lage des Schubmittelpunkts durch lineare Interpolation ermittelt. Der Schubmittelpunkt für diese Messhöhe war gefunden und die Schubflussklemme konnte auf die nächste Position verschoben werden.

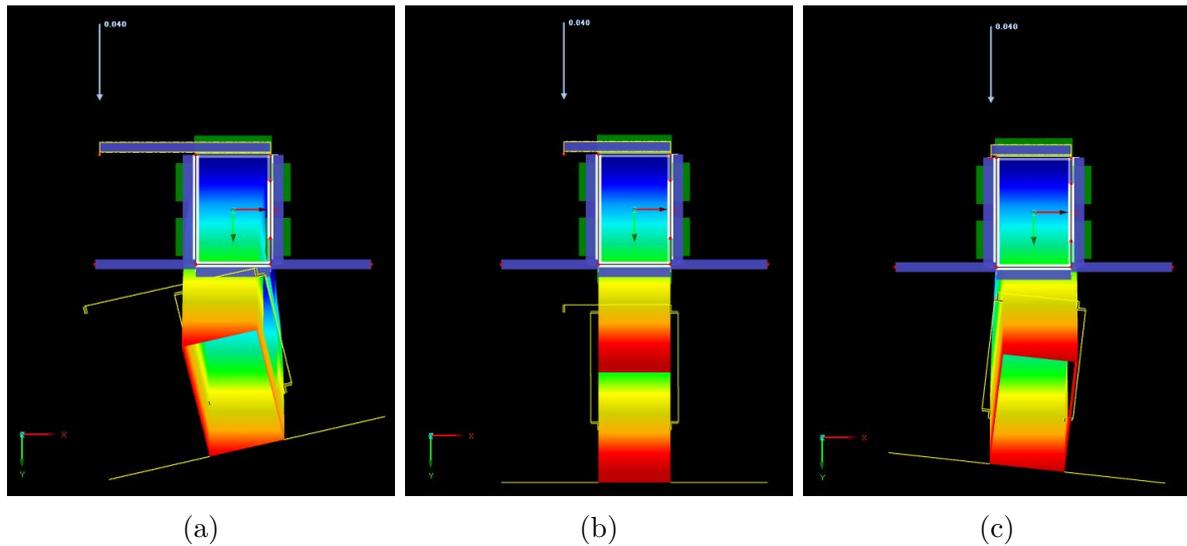


Abbildung 8.2: Überquerung des Schubmittelpunkts (Modell und Verformungen, Draufsicht)

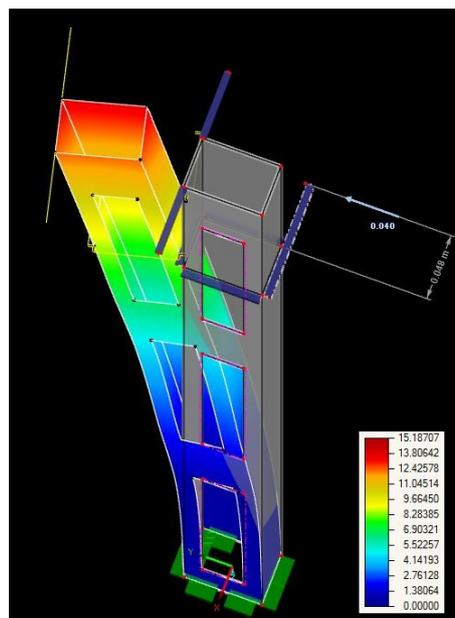


Abbildung 8.3: Darstellung der Verformungen für eine beliebige Exzentrizität von 48 mm am Beispiel des Probekörpers 3 (Verformungswerte in mm)

Ebenfalls wie auch in den Versuchen angewandt, zeigt Abb. 8.2 die prinzipielle Vorgehensweise zur Lokalisierung des Schubmittelpunkts auf einer bestimmten Messhöhe. Verläuft die Wirkungslinie der horizontal angreifenden Einzelkraft durch den Schubmittelpunkt (Abb. 8.2b), gibt es keine Stabachsenverdrehung und die gebildete Verschiebungsdifferenz wird zu Null. Links vom Schubmittelpunkt verdreht sich der Stab gegen, rechts davon im Uhrzeigersinn, wie in Abb. 8.2a und Abb. 8.2c dargestellt.

Kapitel 9

Versuchsergebnisse aus physikalischen Versuchen

9.1 Probekörper 1

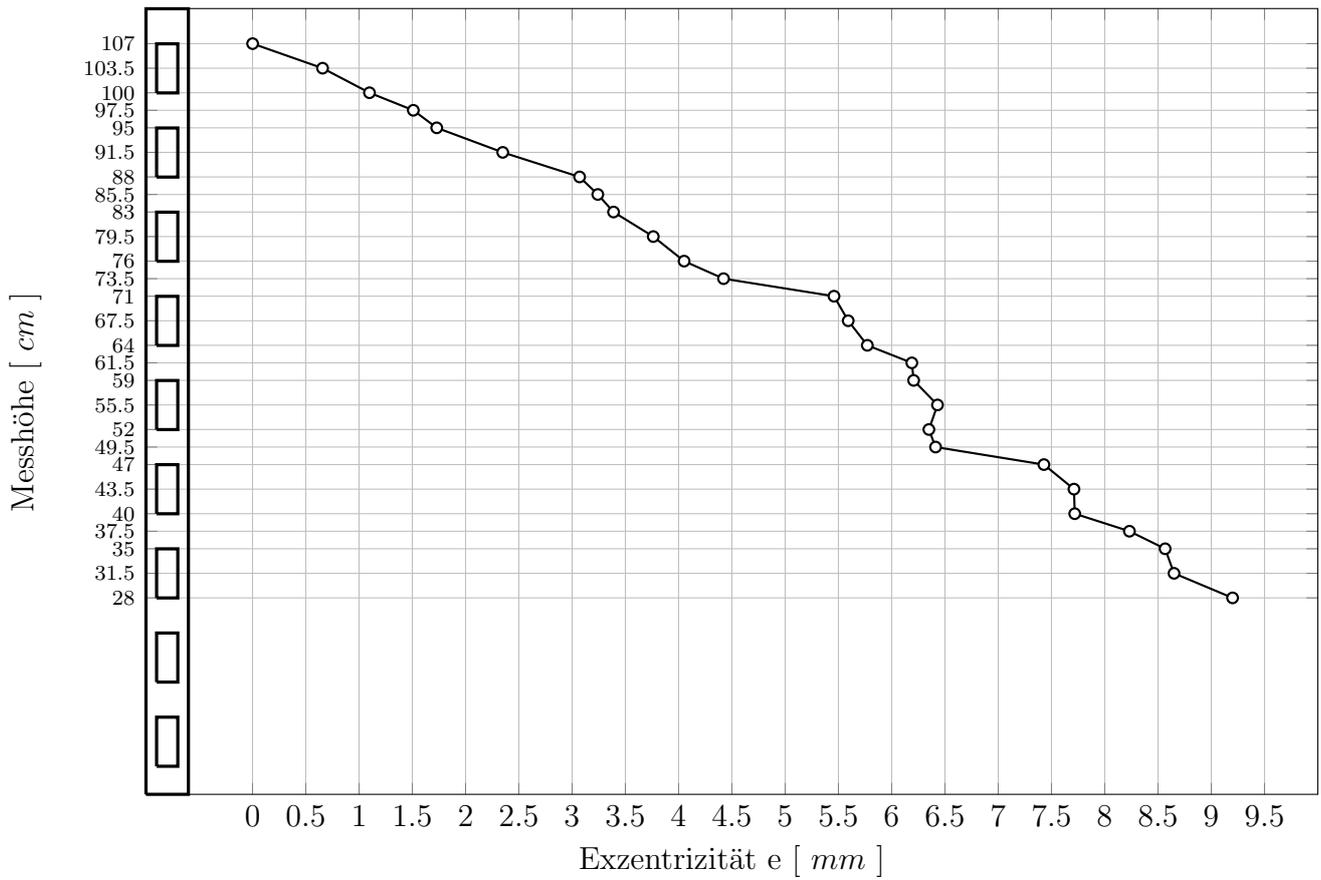


Abbildung 9.1: Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 1 aus physikalischem Versuch

Höhe [cm]	28	31.5	35	37.5	40	43.5	47	49.5	52	55.5	59	61.5	64	67.5
e [mm]	0.00	0.66	1.10	1.51	1.73	2.35	3.07	3.24	3.39	3.76	4.05	4.42	5.46	5.59

Höhe [cm]	71	73.5	76	79.5	83	85.5	88	91.5	95	97.5	100	103.5	107
e [mm]	5.77	6.19	6.21	6.43	6.35	6.41	7.43	7.71	7.72	8.23	8.57	8.65	9.2

Tabelle 9.1: Ergebniswerte von Probekörper 1 aus physikalischem Versuch

9.2 Probekörper 2

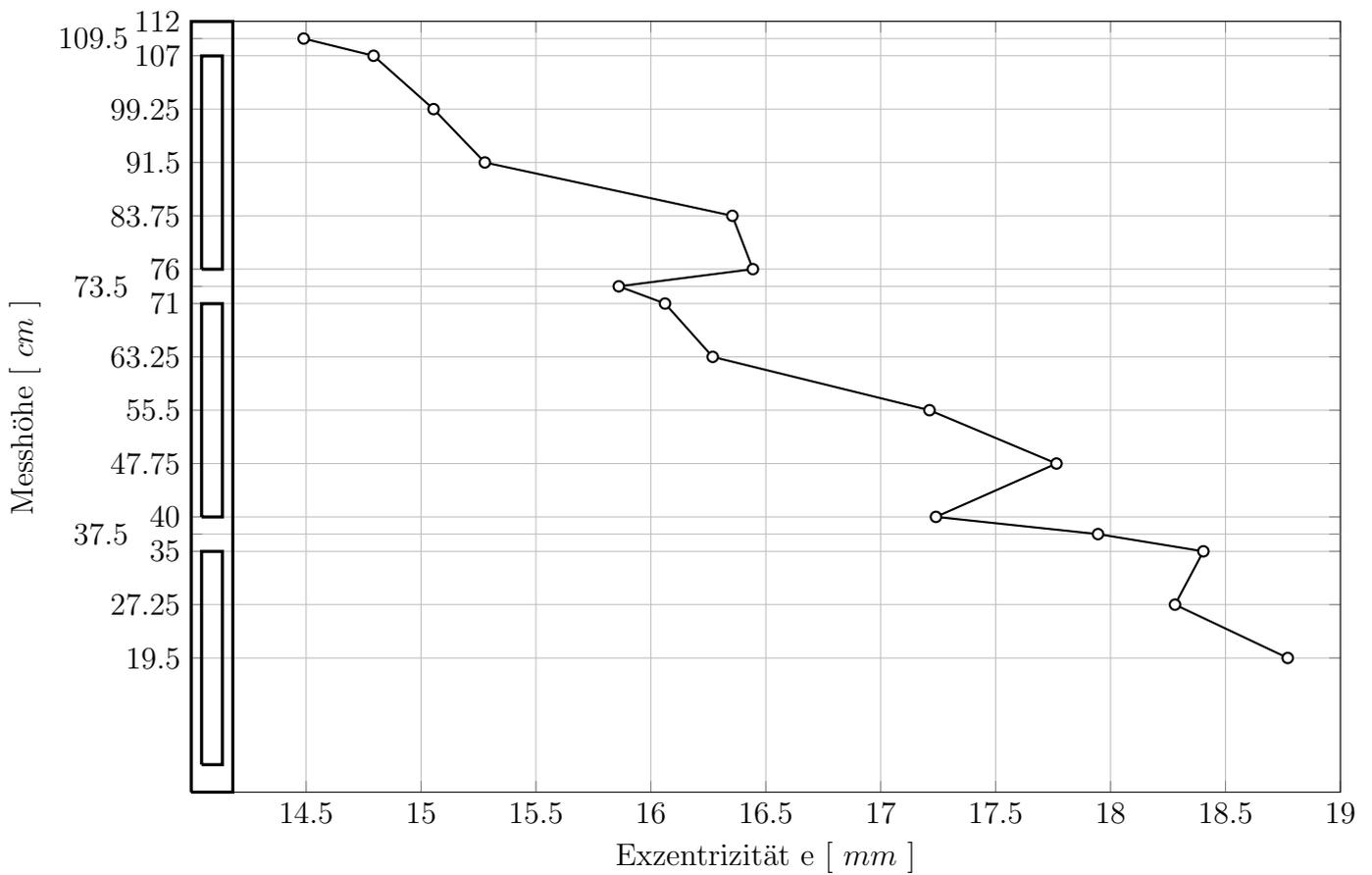


Abbildung 9.2: Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 2 aus physikalischem Versuch

Höhe [cm]	19.5	27.25	35	37.5	40	47.75	55.5	63.25	71	73.5
e [mm]	18.77	18.28	18.40	17.95	17.24	17.76	17.21	16.27	16.06	15.86

Höhe [cm]	76	83.75	91.5	99.25	107	109.5
e [mm]	16.44	16.35	15.28	15.05	14.79	14.49

Tabelle 9.2: Ergebniswerte von Probekörper 2 aus physikalischem Versuch

9.3 Probekörper 3

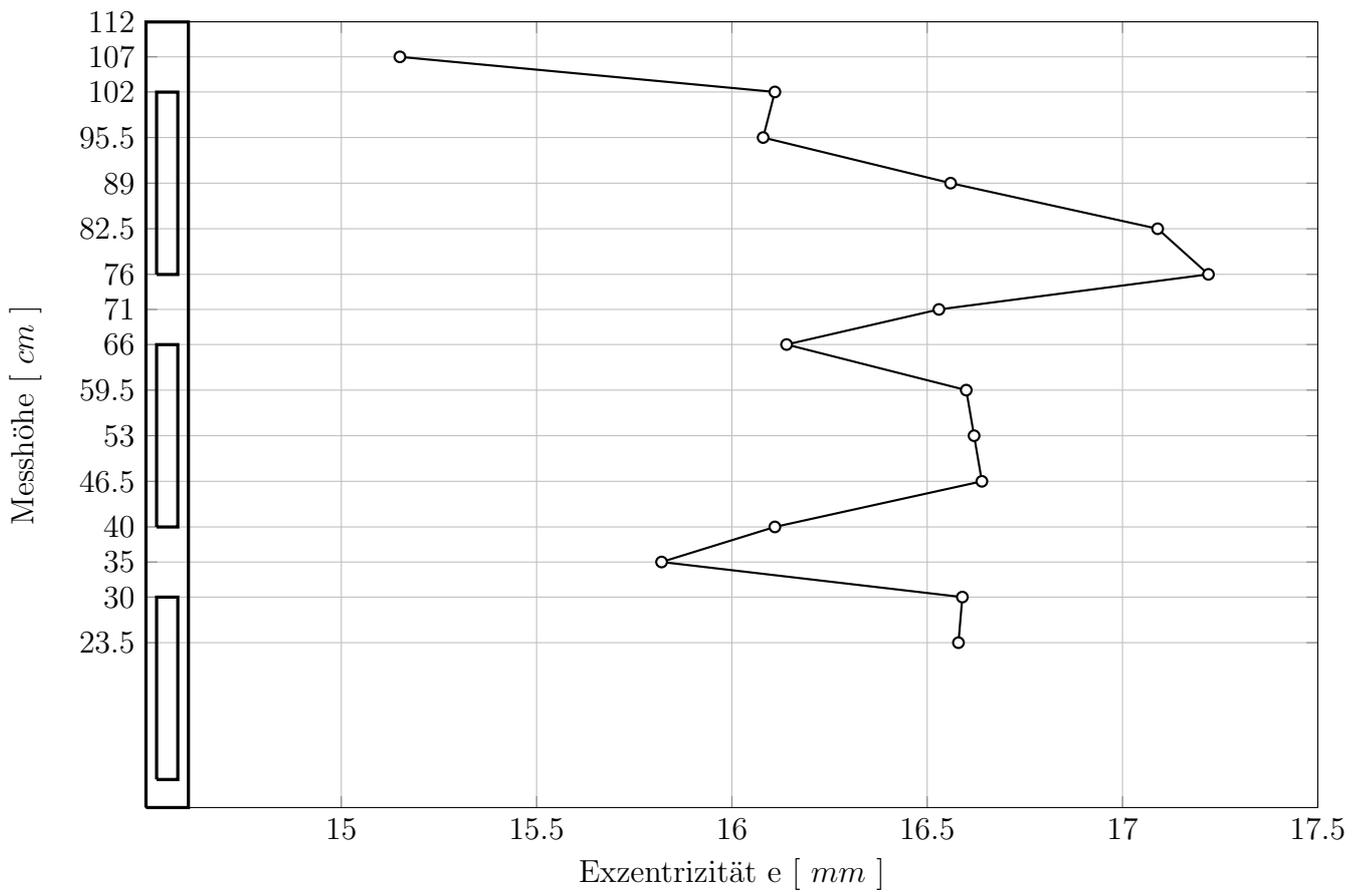


Abbildung 9.3: Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 3 aus physikalischem Versuch

Höhe [cm]	23.5	30	35	40	16.5	53	59.5	66	71	76
e [mm]	16.58	16.59	15.82	16.11	16.64	16.62	16.60	16.14	16.53	17.22

Höhe [cm]	82.5	89	95.5	102	107
e [mm]	17.09	16.56	16.08	16.11	15.15

Tabelle 9.3: Ergebniswerte von Probekörper 3 aus physikalischem Versuch

9.4 Probekörper 4

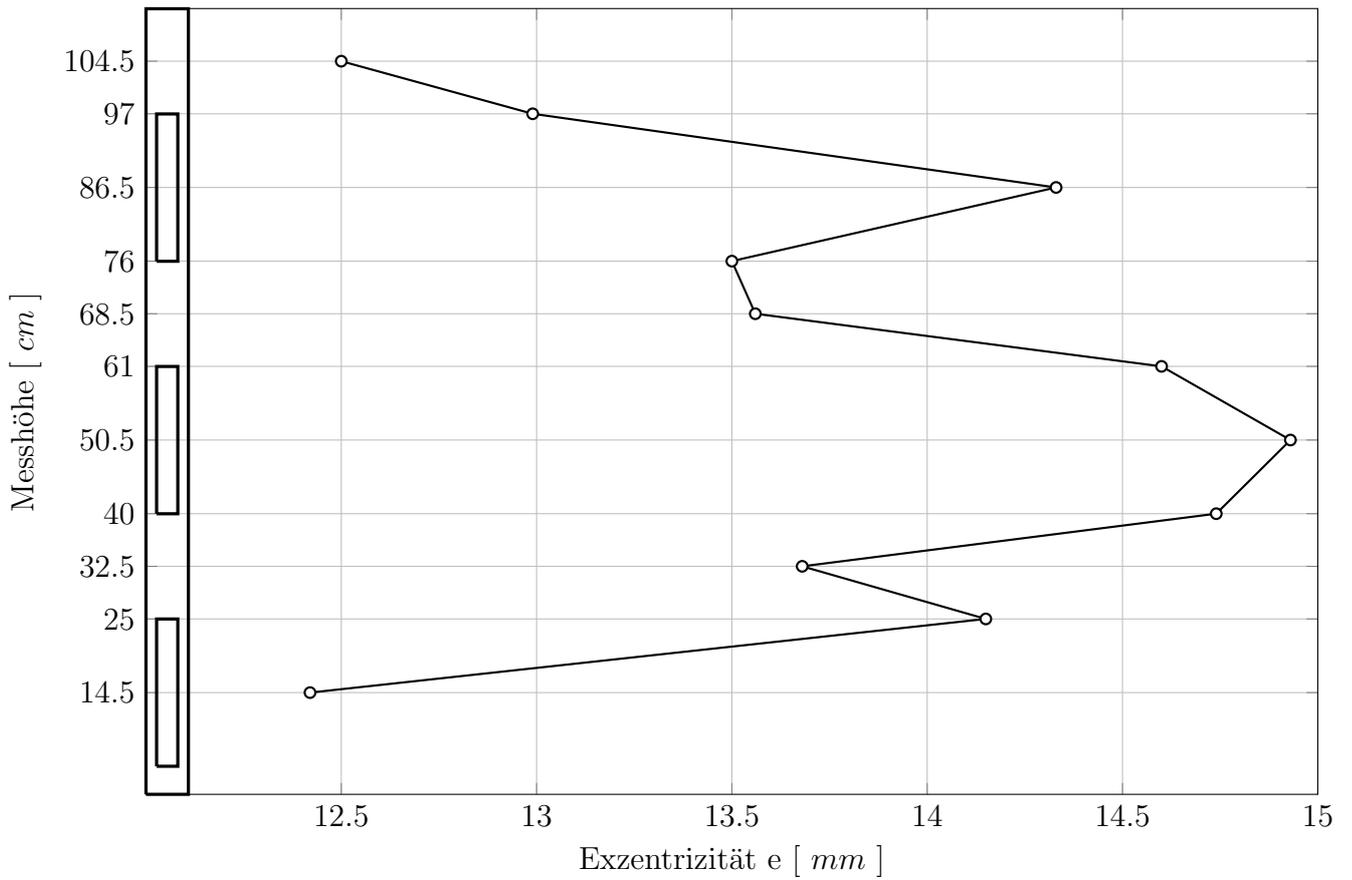


Abbildung 9.4: Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 4 aus physikalischem Versuch

Höhe [cm]	14.5	25	32.5	40	50.5	61	68.5	76	86.5	97	104.5
e [mm]	12.42	14.15	13.68	14.74	14.93	14.60	13.56	13.50	14.33	12.99	12.50

Tabelle 9.4: Ergebniswerte von Probekörper 4 aus physikalischem Versuch

9.5 Probekörper 5

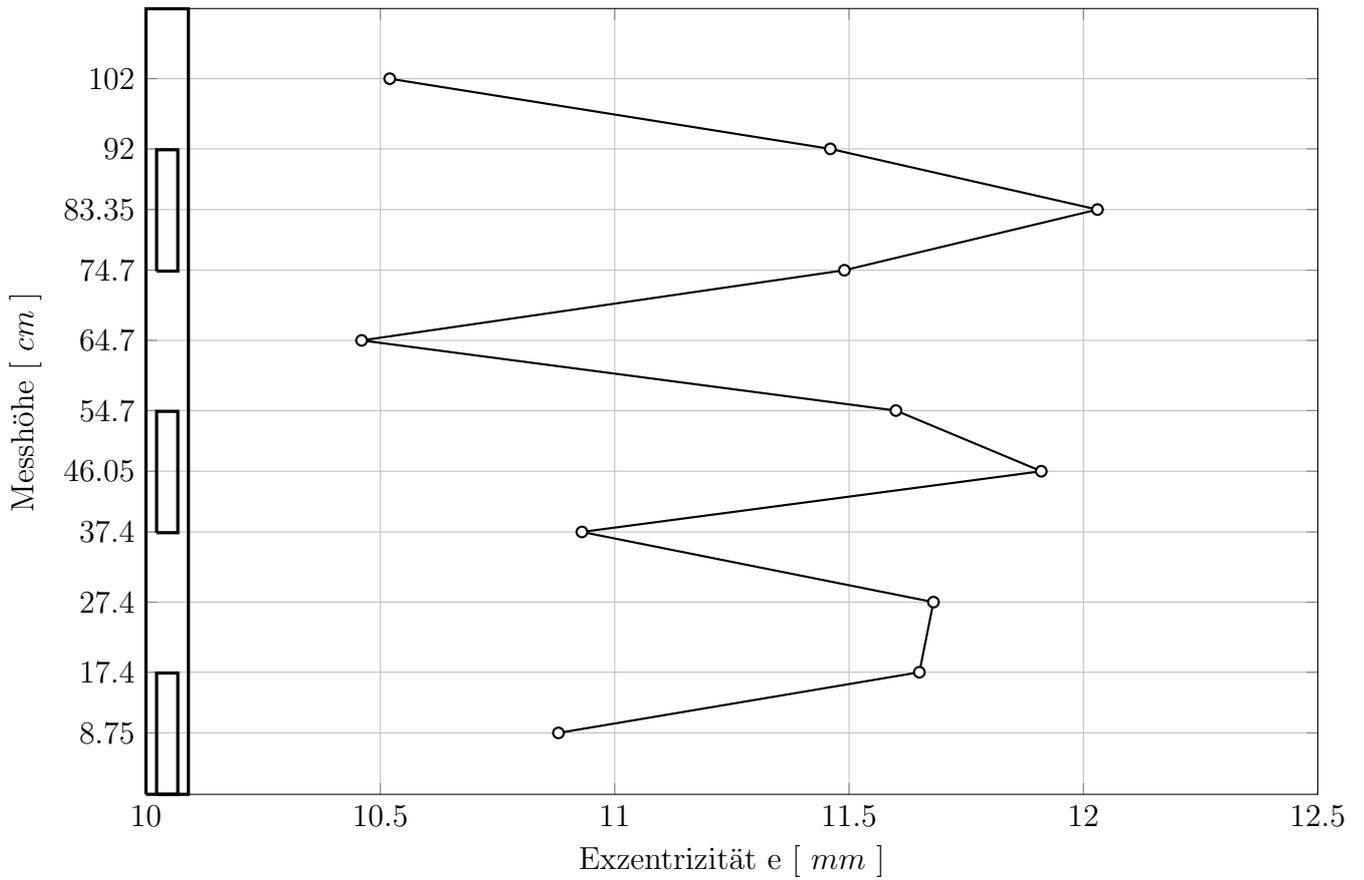


Abbildung 9.5: Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 5 aus physikalischem Versuch

Höhe [cm]	8.75	17.4	27.4	37.4	46.05	54.7	64.7	74.7	83.35	92	102
e [mm]	10.88	11.65	11.68	10.93	11.91	11.60	10.46	11.49	12.03	11.46	10.52

Tabelle 9.5: Ergebniswerte von Probekörper 5 aus physikalischem Versuch

9.6 Probekörper 6

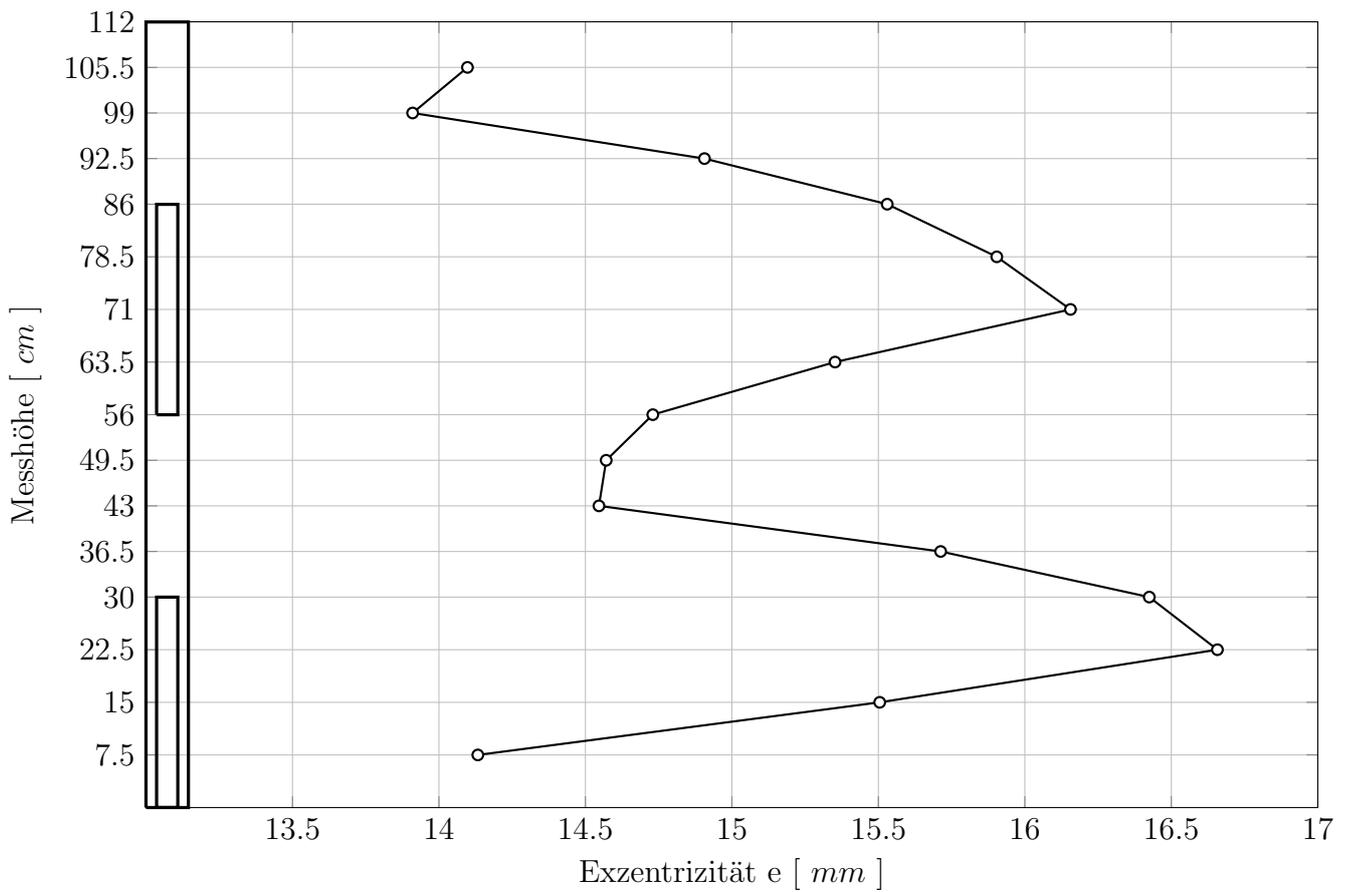


Abbildung 9.6: Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 6 aus physikalischem Versuch

Höhe [cm]	7.5	15	22.5	30	36.5	43	49.5	56	63.5	71
e [mm]	14.10	13.91	14.91	15.53	15.90	16.16	15.35	14.73	14.57	14.55

Höhe [cm]	78.5	86	92.5	99	105.5
e [mm]	15.71	16.42	16.66	15.50	14.13

Tabelle 9.6: Ergebniswerte von Probekörper 6 aus physikalischem Versuch

9.7 Probekörper 7

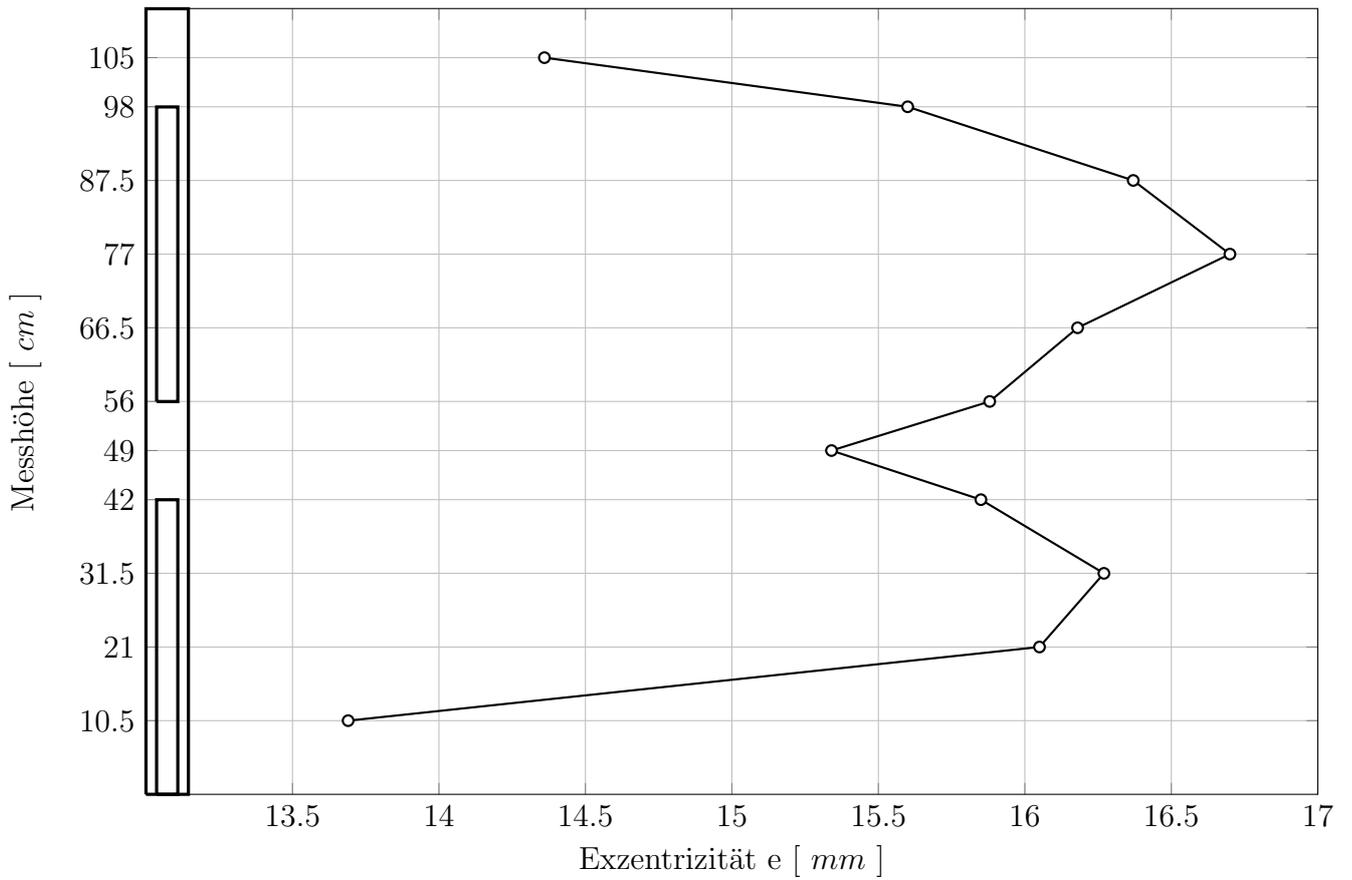


Abbildung 9.7: Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 7 aus physikalischem Versuch

Höhe [cm]	10.5	21	31.5	42	49	56	66.5	77	87.5	98	105
e [mm]	13.69	16.05	16.27	15.85	15.34	15.88	16.18	16.70	16.37	15.60	14.36

Tabelle 9.7: Ergebniswerte von Probekörper 7 aus physikalischem Versuch

9.8 Darstellung aller Schubmittelpunktsverläufe aus den physikalischen Versuchen

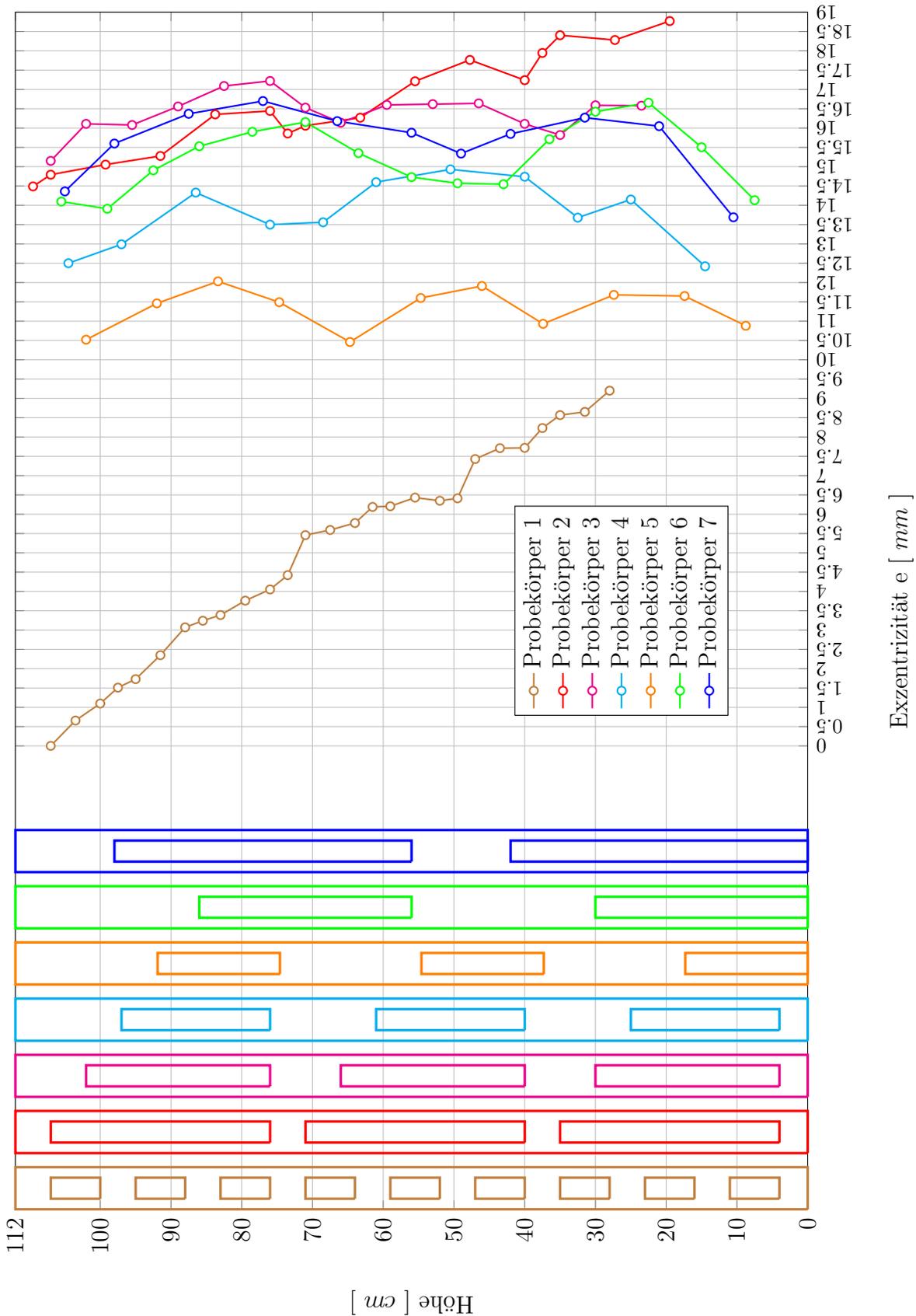


Abbildung 9.8: Übersicht der Schubmittelpunktsverläufe aus physikalischen Versuchen

Abb. 9.8 zeigt den Vergleich der aus den physikalischen Versuchen erhaltenen Schubmittelpunktsverläufe. Die gemittelte Schubmittelpunktsachse (nicht dargestellt, siehe Abb. 5.4) des Probekörpers 1 weist eine vergleichsweise starke Neigung auf. Die Auslenkungen des Verlaufs sind wenig ausgeprägt. Der Grund dafür liegt möglicherweise an einem zu gering gewählten Maßstab des Versuchskörpers in Verbindung mit dem verwendeten Messaufbau. Die Ergebniskurven der Probekörper 2 bis 7 verlaufen im Allgemeinen wellenförmig über die Stablänge und besitzen annähernd senkrechte gemittelte Schubmittelpunktsachsen. Die in Abb. 5.4 definierte Periodenlänge hängt, zumindest in den Bereichen mit genügend Abstand zur Einspannung, mit den Öffnungsabständen zusammen. Betrachtet man die Verläufe der Probekörper 2 bis 5, so erkennt man die aufgrund der zunehmenden „Geschlossenheit“ der Stäbe erwartete Bewegung der gemittelten Schubmittelpunktsachsen in Richtung der Stabachse. Die größten Auslenkungen der Schubmittelpunktsverläufe stellen sich in den meisten Fällen an den erwarteten Stellen der Stäbe ein. Diese Stellen sind die Mitten der offenen bzw. geschlossenen Abschnitte (siehe beispielsweise Probekörper 6).

Kapitel 10

Resultate aus numerischer Simulation mit Dlubal RFEM

10.1 Probekörper 1

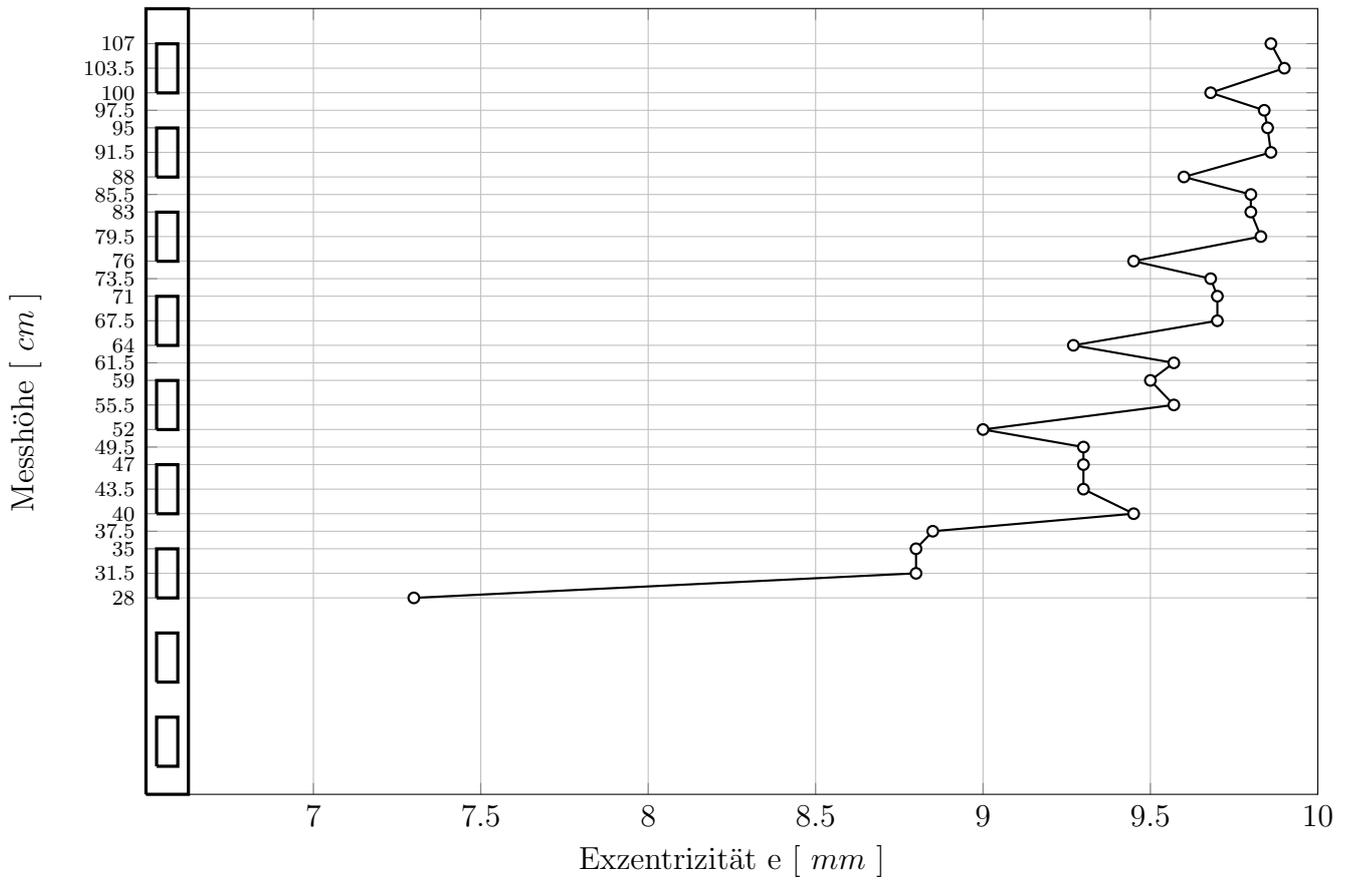


Abbildung 10.1: Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 1 aus RFEM

Höhe [cm]	28	31.5	35	37.5	40	43.5	47	49.5	52	55.5	59	61.5	64	67.5
e [mm]	7.30	8.80	8.80	8.85	9.45	9.30	9.30	9.30	9.00	9.57	9.50	9.57	9.27	9.70

Höhe [cm]	71	73.5	76	79.5	83	85.5	88	91.5	95	97.5	100	103.5	107
e [mm]	9.70	9.68	9.45	9.83	9.80	9.80	9.60	9.86	9.85	9.84	9.68	9.90	9.86

Tabelle 10.1: Ergebniswerte von Probekörper 1 aus RFEM

10.2 Probekörper 2

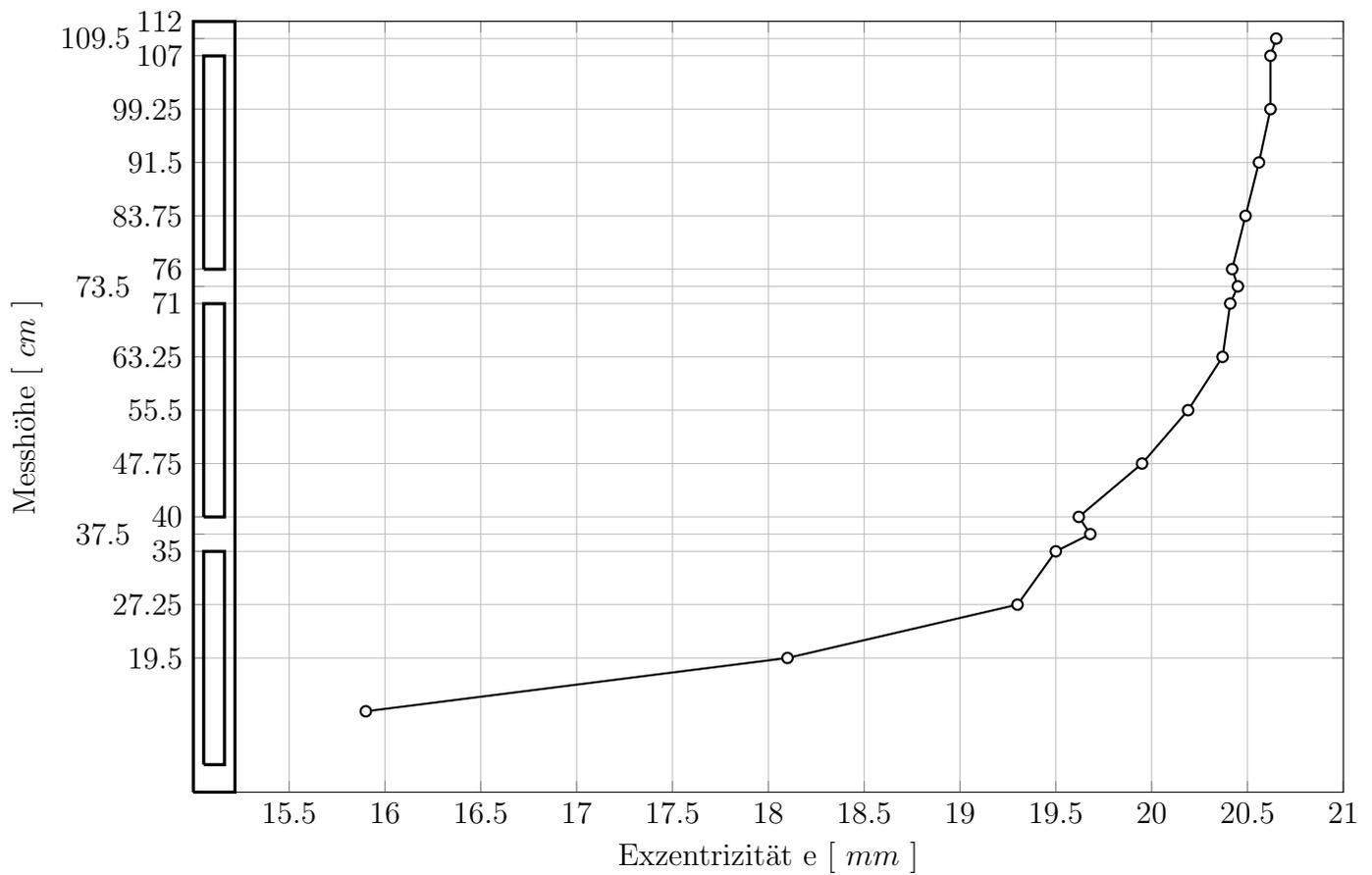


Abbildung 10.2: Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 2 aus RFEM

Höhe [cm]	11.75	19.5	27.25	35	37.5	40	47.75	55.5	63.25	71	73.5
e [mm]	15.90	18.10	19.30	19.50	19.68	19.62	19.95	20.19	20.37	20.41	20.45

Höhe [cm]	76	83.75	91.5	99.25	107	109.5
e [mm]	20.42	20.49	20.56	20.62	20.62	20.65

Tabelle 10.2: Ergebniswerte von Probekörper 2 aus RFEM

10.3 Probekörper 3

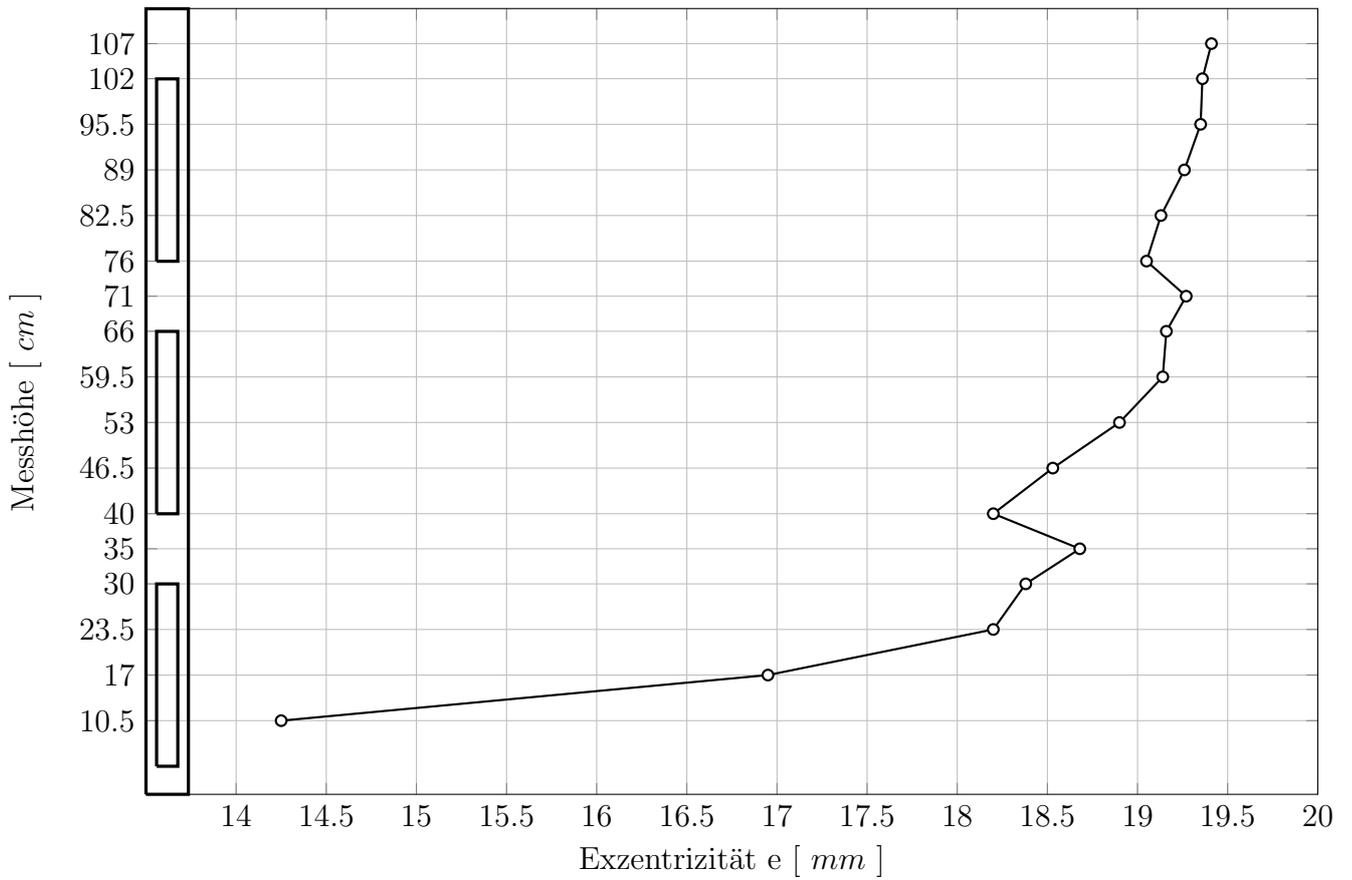


Abbildung 10.3: Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 3 aus RFEM

Höhe [cm]	10.5	17	23.5	30	35	40	46.5	53	59.5	66	71
e [mm]	14.25	16.95	18.20	18.38	18.68	18.20	18.53	18.90	19.14	19.16	19.27

Höhe [cm]	76	82.5	89	95.5	102	107
e [mm]	19.05	19.13	19.26	19.35	19.36	19.41

Tabelle 10.3: Ergebniswerte von Probekörper 3 aus RFEM

10.4 Probekörper 4

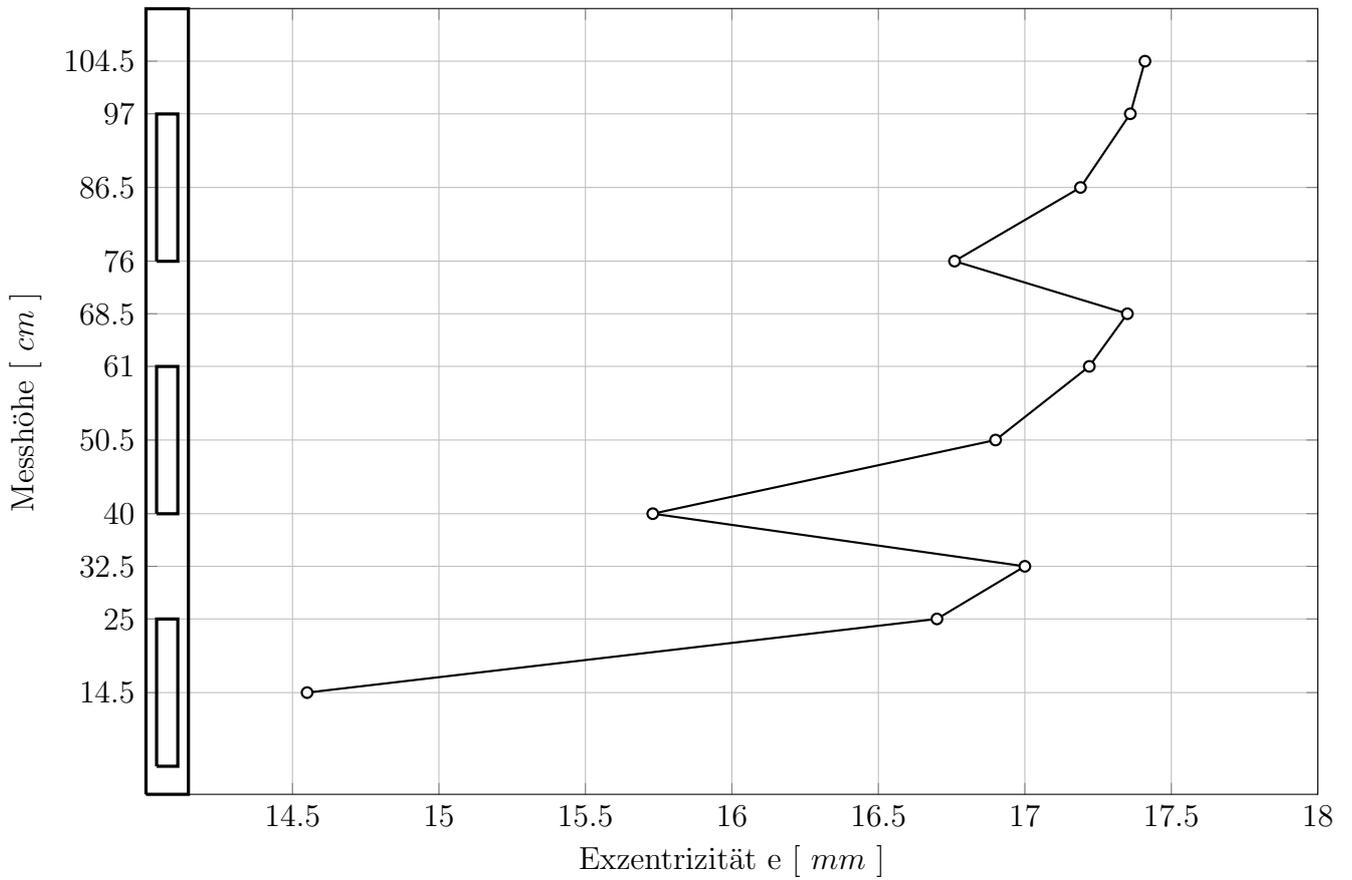


Abbildung 10.4: Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 4 aus RFEM

Höhe [cm]	14.5	25	32.5	40	50.5	61	68.5	76	86.5	97	104.5
e [mm]	14.55	16.70	17.00	15.73	16.90	17.22	17.35	16.76	17.19	17.36	17.41

Tabelle 10.4: Ergebniswerte von Probekörper 4 aus RFEM

10.5 Probekörper 5

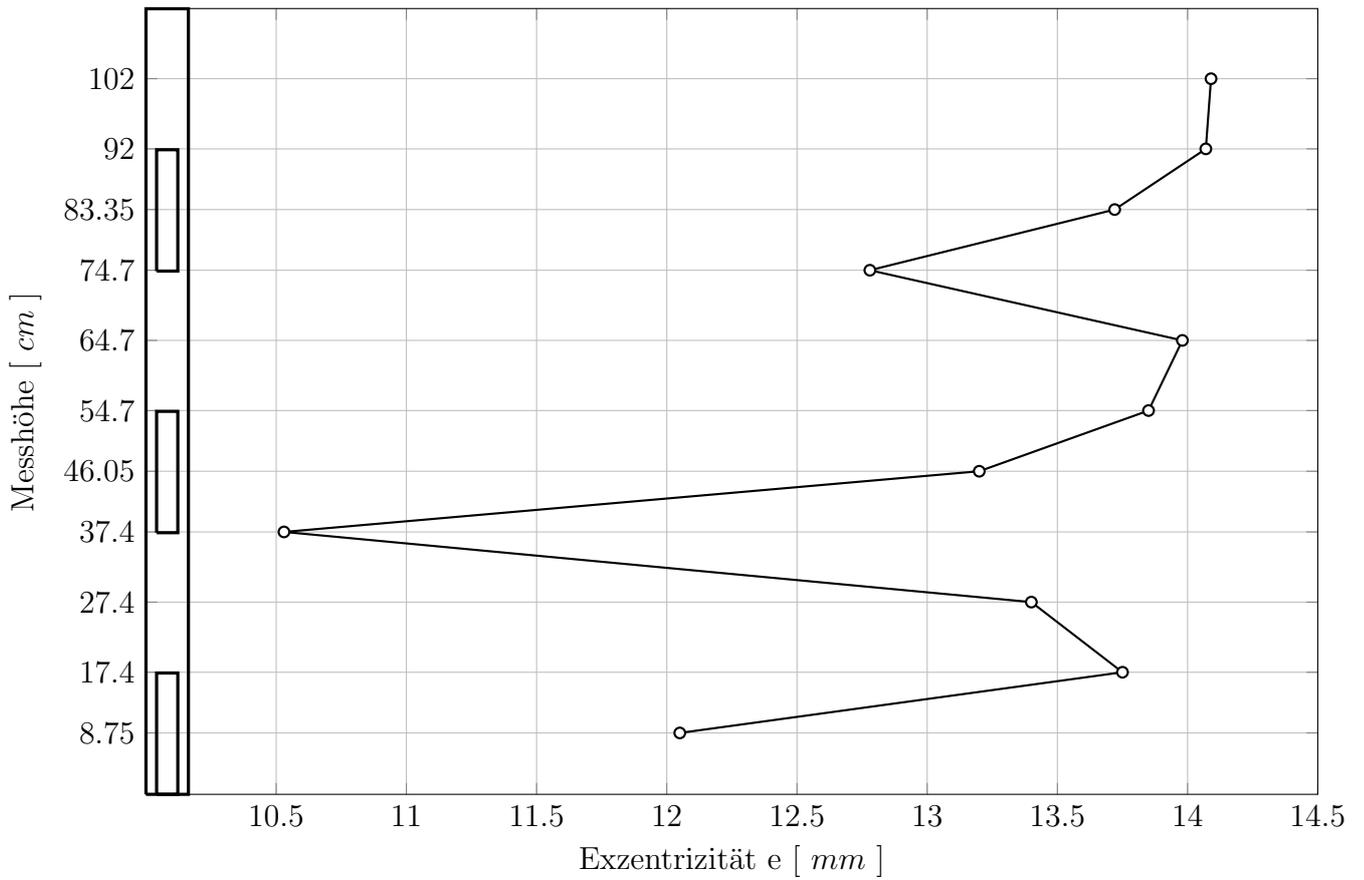


Abbildung 10.5: Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 5 aus RFEM

Höhe [cm]	8.75	17.4	27.4	37.4	46.05	54.7	64.7	74.7	83.35	92	102
e [mm]	12.05	13.75	13.40	10.53	13.20	13.85	13.98	12.78	13.72	14.07	14.09

Tabelle 10.5: Ergebniswerte von Probekörper 5 aus RFEM

10.6 Probekörper 6

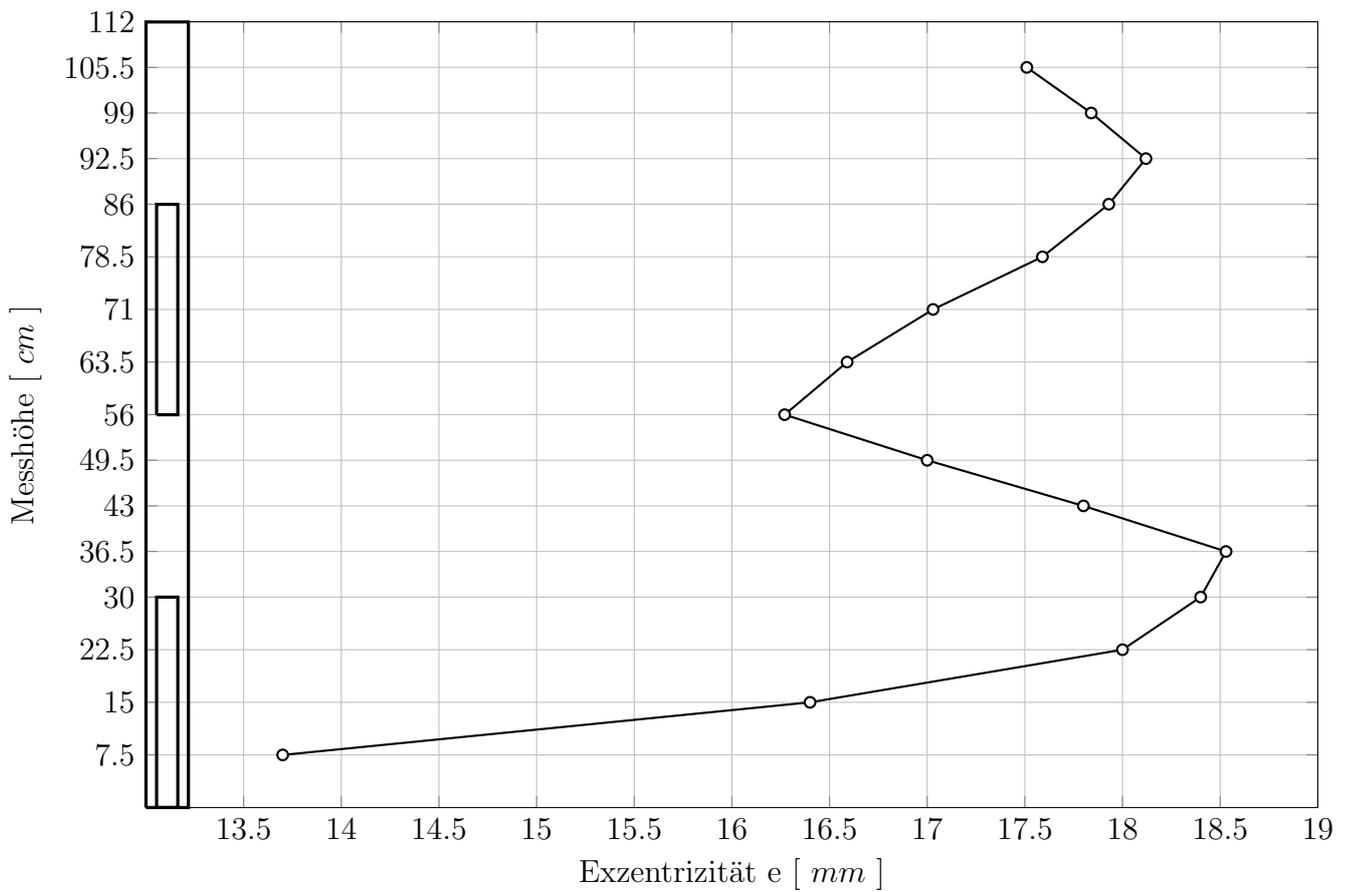


Abbildung 10.6: Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 6 aus RFEM

Höhe [cm]	7.5	15	22.5	30	36.5	43	49.5	56	63.5	71
e [mm]	13.70	16.40	18.00	18.40	18.53	17.80	17.00	16.27	16.59	17.03

Höhe [cm]	78.5	86	92.5	99	105.5
e [mm]	17.59	17.93	18.12	17.84	17.51

Tabelle 10.6: Ergebniswerte von Probekörper 6 aus RFEM

10.7 Probekörper 7

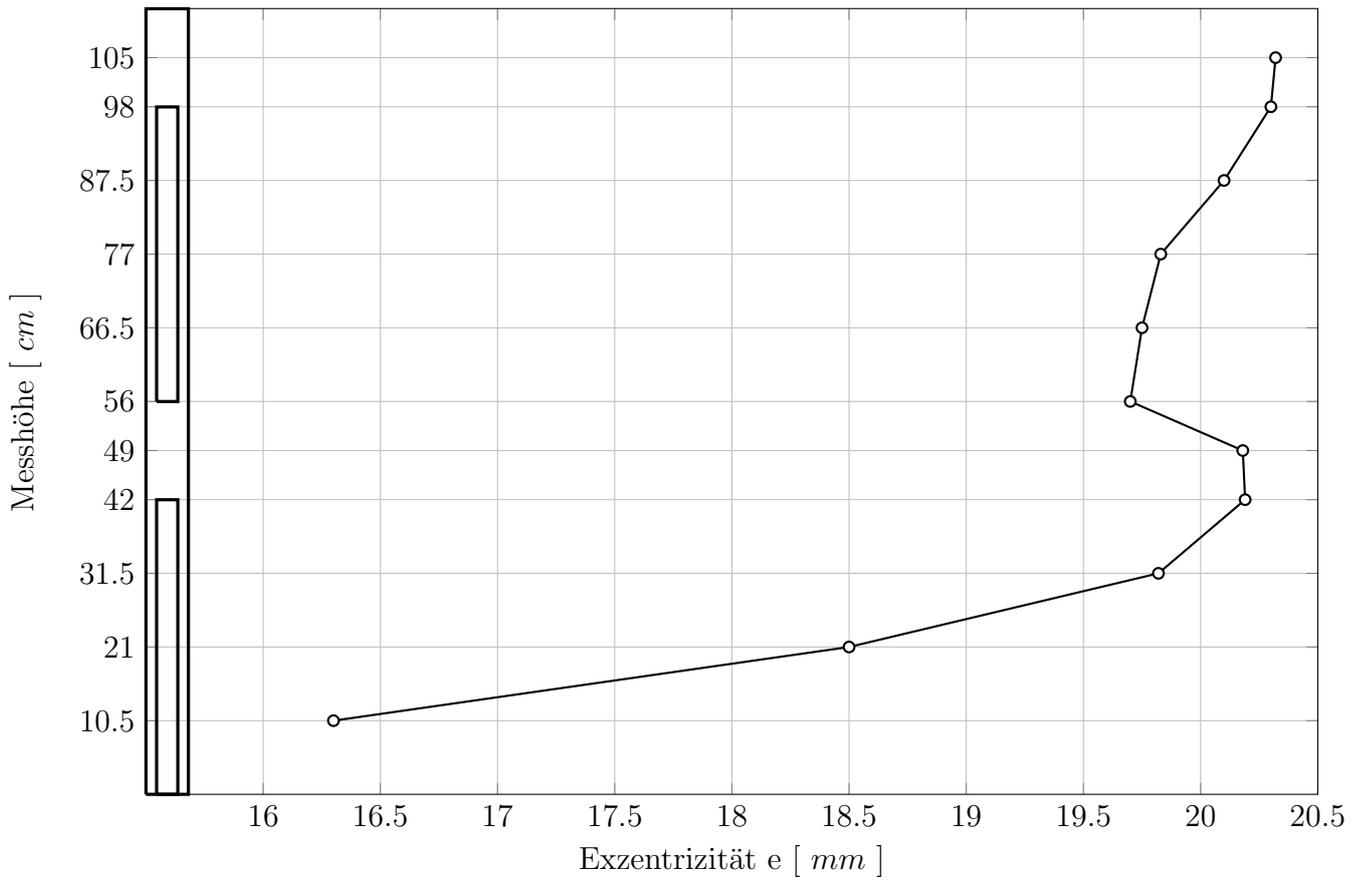


Abbildung 10.7: Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 7 aus RFEM

Höhe [cm]	10.5	21	31.5	42	49	56	66.5	77	87.5	98	105
e [mm]	16.30	18.50	19.82	20.19	20.18	19.70	19.75	19.83	20.10	20.30	20.32

Tabelle 10.7: Ergebniswerte von Probekörper 7 aus RFEM

10.8 Darstellung aller Schubmittelpunktsverläufe aus RFEM

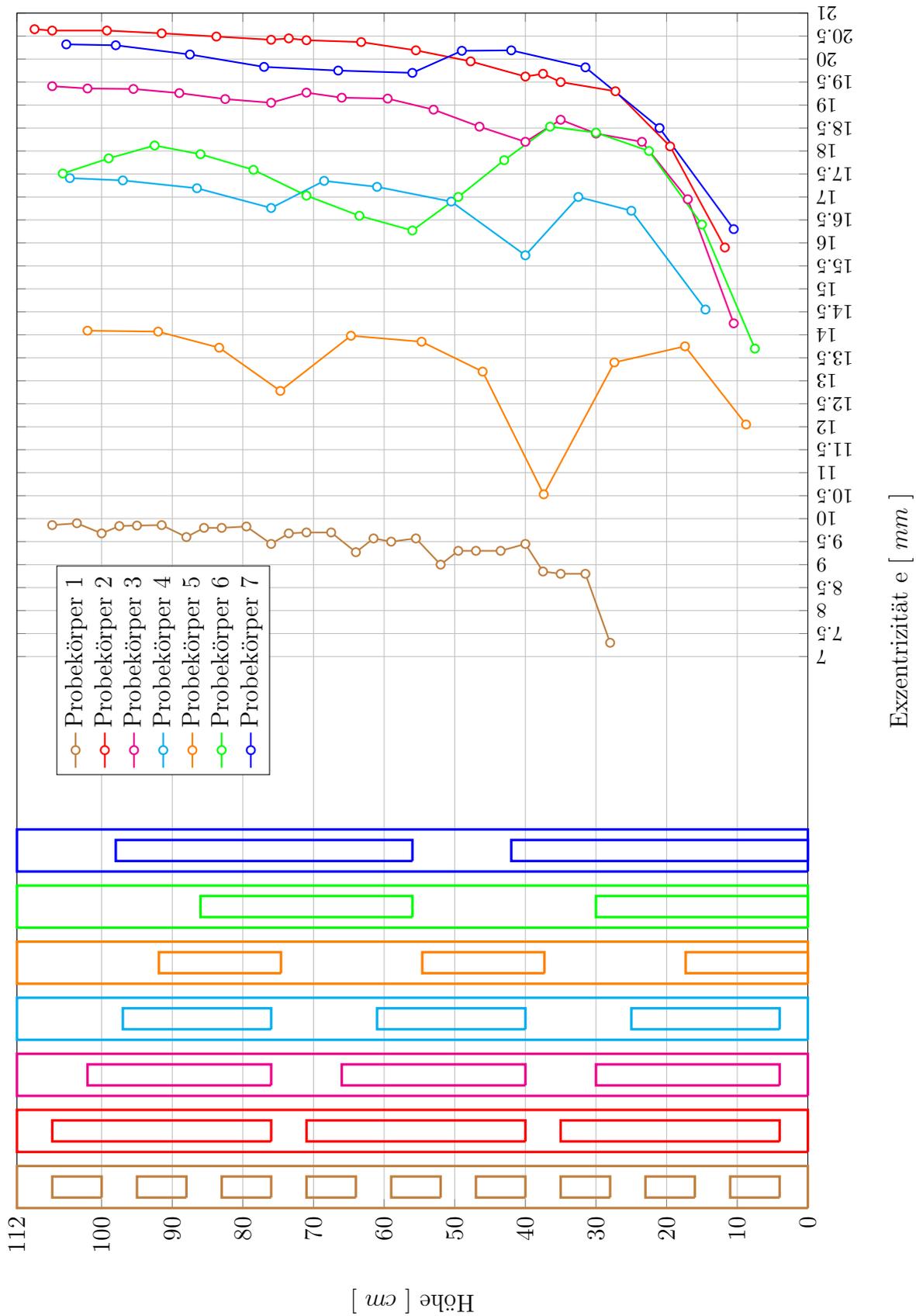


Abbildung 10.8: Übersicht der Schubmittelpunktsverläufe aus RFEM

Abb. 10.8 zeigt den Vergleich der aus den numerischen Simulationen erhaltenen Schubmittelpunktsverläufen. Deutlich zu erkennen sind die annähernd gleichen Neigungen der gemittelten Schubmittelpunktsachsen (nicht dargestellt, siehe Abb. 5.4). Außerdem weisen alle Verläufe abnehmende Exzentrizitäten der Schubmittelpunkte im unteren Stabbereich auf. Ein Grund dafür liegt möglicherweise in der Einspannung der Stäbe. Wie auch schon die Ergebnisse der physikalischen Versuche zeigten, bewegen sich auch hier die gemittelten Schubmittelpunktsachsen der Probekörper 2 bis 5 in Richtung der Stabachse. Die Periodenlänge hängt auch hier mit den Öffnungsabständen zusammen. Anders als in den Schubmittelpunktsverläufen aus den physikalischen Versuchen, stellen sich die größten Auslenkungen der Kurven häufig an den Übergangsstellen von offenem zu geschlossenem Querschnitt ein (siehe beispielsweise Probekörper 5).

Kapitel 11

Vergleich der Resultate aus den
physikalischen Versuchen und der
numerischen Berechnung mit Dlubal
RFEM

11.1 Probekörper 1

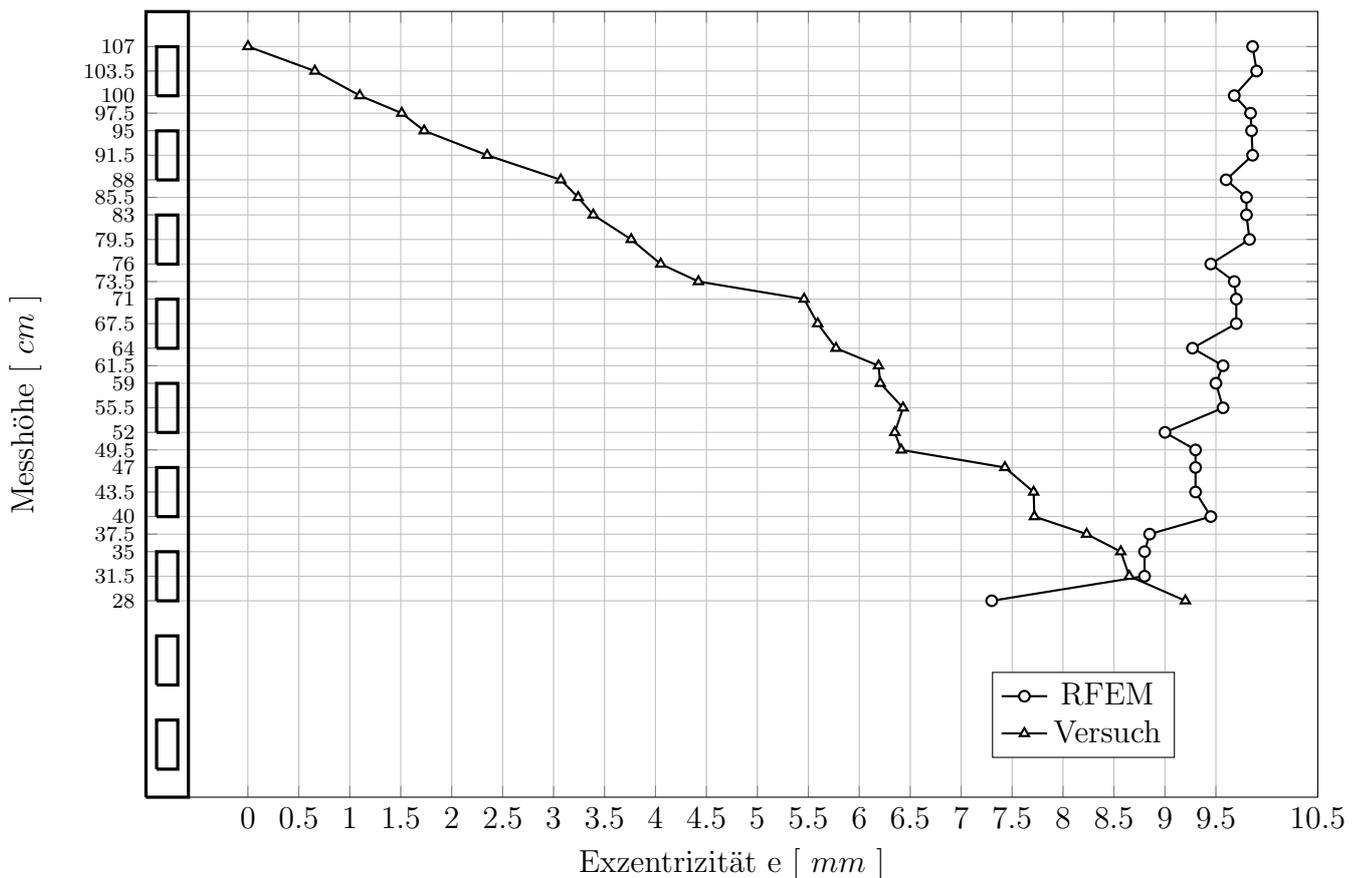


Abbildung 11.1: Schubmittelpunktsverläufe von Probekörper 1 aus physikalischem Versuch und RFEM

Höhe [cm]		28	31.5	35	37.5	40	43.5	47	49.5	52	55.5	59
Versuch	e [mm]	0.00	0.66	1.10	1.51	1.73	2.35	3.07	3.24	3.39	3.76	4.05
RFEM	e [mm]	7.30	8.80	8.80	8.85	9.45	9.30	9.30	9.30	9.00	9.57	9.50
Höhe [cm]		61.5	64	67.5	71	73.5	76	79.5	83	85.5	88	91.5
Versuch	e [mm]	4.42	5.46	5.59	5.77	6.19	6.21	6.43	6.35	6.41	7.43	7.71
RFEM	e [mm]	9.57	9.27	9.70	9.70	9.68	9.45	9.83	9.80	9.80	9.60	9.86
Höhe [cm]		95	97.5	100	103.5	107						
Versuch	e [mm]	7.72	8.23	8.57	8.65	9.2						
RFEM	e [mm]	9.85	9.84	9.68	9.90	9.86						

Tabelle 11.1: Ergebniswerte von Probekörper 1 aus physikalischem Versuch und RFEM

Die gemittelten Schubmittelpunktsachsen (nicht dargestellt, siehe Abb. 5.4) der in Abb. 11.1 dargestellten Kurven weisen entgegengesetzte Neigungen auf. Eine Zunahme der in Abb. 5.4 definierten Auslenkungen mit abnehmender Kernhöhe ist jedoch in beiden Verläufen zu erkennen. Der Schubmittelpunktsverlauf der numerischen Berechnung lässt gewisse Gesetzmäßigkeiten erkennen. Wie angenommen, verläuft die Kurve näherungsweise wellenförmig. An den Übergangsstellen

von offenem zu geschlossenem Querschnitt springen die Schubmittelpunkte in Richtung Profil, während sie sich unmittelbar davor - in den offenen Bereichen - eher vom Profil entfernen. Der Grund der Diskrepanz der Verläufe liegt möglicherweise an einem zu gering gewählten Maßstab des Versuchskörpers in Verbindung mit dem verwendeten Messaufbau.

11.2 Probekörper 2

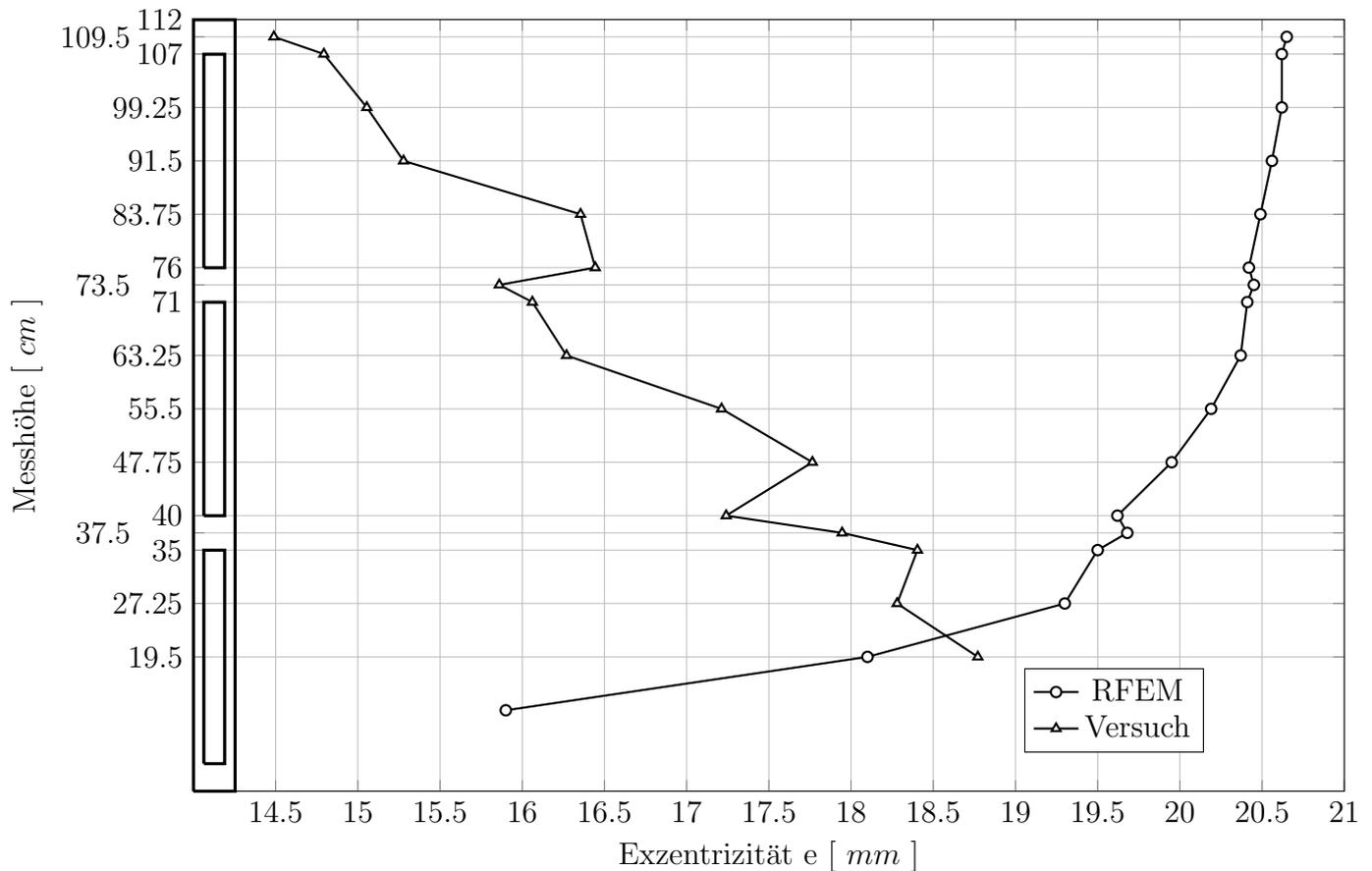


Abbildung 11.2: Schubmittelpunktsverläufe von Probekörper 2 aus physikalischem Versuch und RFEM

Höhe [cm]		11.75	19.5	27.25	35	37.5	40	47.75	55.5	63.25	71
Versuch	e [mm]		18.77	18.28	18.40	17.95	17.24	17.76	17.21	16.27	16.06
RFEM	e [mm]	15.90	18.10	19.30	19.50	19.68	19.62	19.95	20.19	20.37	20.41

Höhe [cm]		73.5	76	83.75	91.5	99.25	107	109.5
Versuch	e [mm]	15.86	16.44	16.35	15.28	15.05	14.79	14.49
RFEM	e [mm]	20.45	20.42	20.49	20.56	20.62	20.62	20.65

Tabelle 11.2: Ergebniswerte von Probekörper 2 aus physikalischem Versuch und RFEM

Wie bei Probekörper 1 weisen die gemittelten Schubmittelpunktsachsen (nicht dargestellt, siehe Abb. 5.4) entgegengesetzte Neigungen auf. Besonders interessant sind die beiden geschlossenen Bereiche im mittleren Bereich des Versuchskörpers. Während sich die Schubmittelpunkte aus dem physikalischen Versuch erwartungsgemäß zum Querschnitt hin bewegen, springen sie bei der numerisch ermittelten Kurve in die entgegengesetzte Richtung. Eine Zunahme dieser Auslenkungen mit abnehmender Messhöhe ist in beiden Verläufen zu beobachten. Im numerisch ermittelten Verlauf ist eine Abnahme der Exzentrizitäten im unteren Bereich ist zu erkennen.

11.3 Probekörper 3

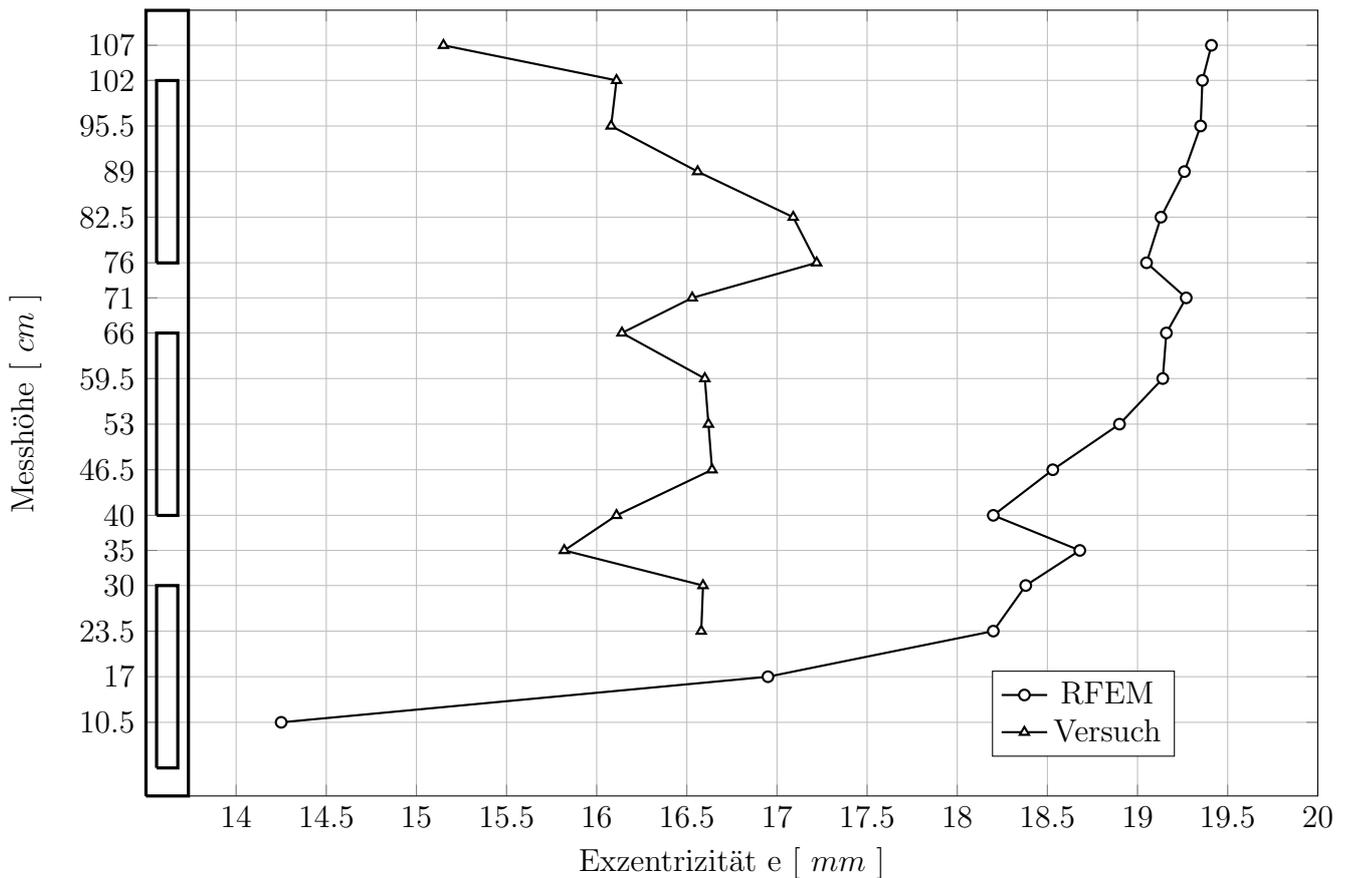


Abbildung 11.3: Schubmittelpunktsverläufe von Probekörper 3 aus physikalischem Versuch und RFEM

Höhe [cm]	10.5	17	23.5	30	35	40	46.5	53	59.5
Versuch e [mm]			16.58	16.59	15.82	16.11	16.64	16.62	16.60
RFEM e [mm]	14.25	16.95	18.20	18.38	18.68	18.20	18.53	18.90	19.14

Höhe [cm]	66	71	76	82.5	89	95.5	102	107
Versuch e [mm]	16.14	16.53	17.22	17.09	16.56	16.08	16.11	15.15
RFEM e [mm]	19.16	19.27	19.05	19.13	19.26	19.35	19.36	19.41

Tabelle 11.3: Ergebniswerte von Probekörper 3 aus physikalischem Versuch und RFEM

Der aus den physikalischen Versuchen ermittelte Schubmittelpunktsverlauf weist deutliche Auslenkungen in den geschlossenen Bereichen auf, welche mit sich mit abnehmender Höhe verringern. Die Neigung der gemittelten Schubmittelpunktsachse (nicht dargestellt, siehe Abb. 5.4) verläuft näherungsweise senkrecht. Die numerisch ermittelte Kurve enthält markante Auslenkungen an den Übergangsstellen von offenem zu geschlossenem Querschnitt (Messhöhe 40 cm und 76 cm). Während die Exzentrizität der Schubmittelpunkte abnimmt, vergrößern sich die Auslenkungen mit abnehmender Messhöhe in der simulierten Kurve.

11.4 Probekörper 4

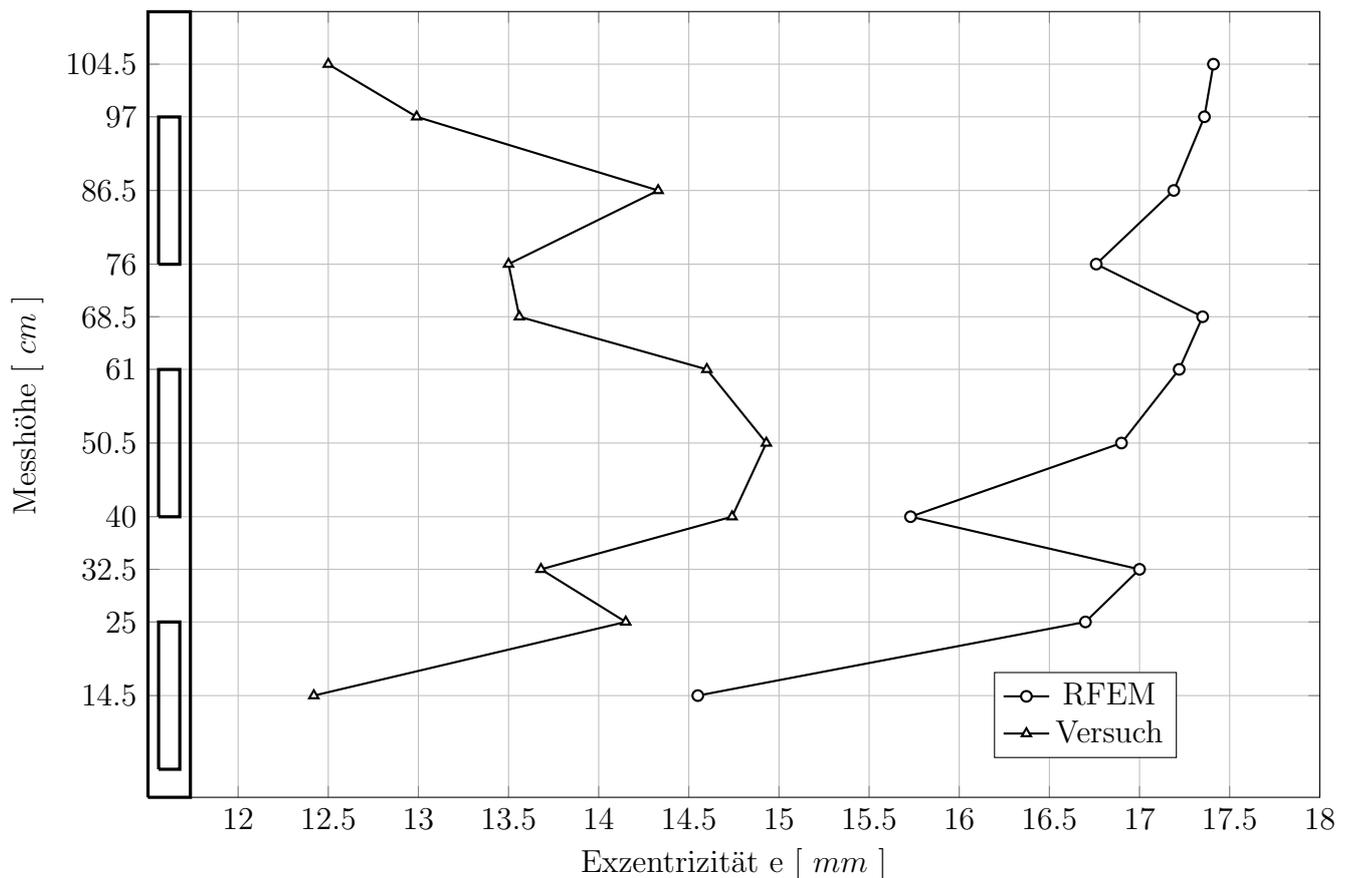


Abbildung 11.4: Schubmittelpunktsverläufe von Probekörper 4 aus physikalischem Versuch und RFEM

Höhe [cm]	14.5	25	32.5	40	50.5	61	68.5	76	86.5	97	104.5
Versuch e [mm]	12.42	14.15	13.68	14.74	14.93	14.60	13.56	13.50	14.33	12.99	12.50
RFEM e [mm]	14.55	16.70	17.00	15.73	16.90	17.22	17.35	16.76	17.19	17.36	17.41

Tabelle 11.4: Ergebniswerte von Probekörper 4 aus physikalischem Versuch und RFEM

Der Schubmittelpunktsverlauf aus dem physikalischen Versuch weist große Auslenkungen in den Mitten der oberen beiden Öffnungen auf. Der mit RFEM ermittelte Verlauf zeigt wieder deutliche Sprünge an den erwähnten Übergangsstellen von offenem zu geschlossenem Querschnitt (Messhöhe 40 cm und 76 cm). Diese Auslenkungen nehmen nach unten hin zu. Weiters zeigen beide Kurven die abnehmende Exzentrizität im unteren Messbereich. Die gemittelten Schubmittelpunktsachsen (nicht dargestellt, siehe Abb. 5.4) unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Neigungen voneinander.

11.5 Probekörper 5

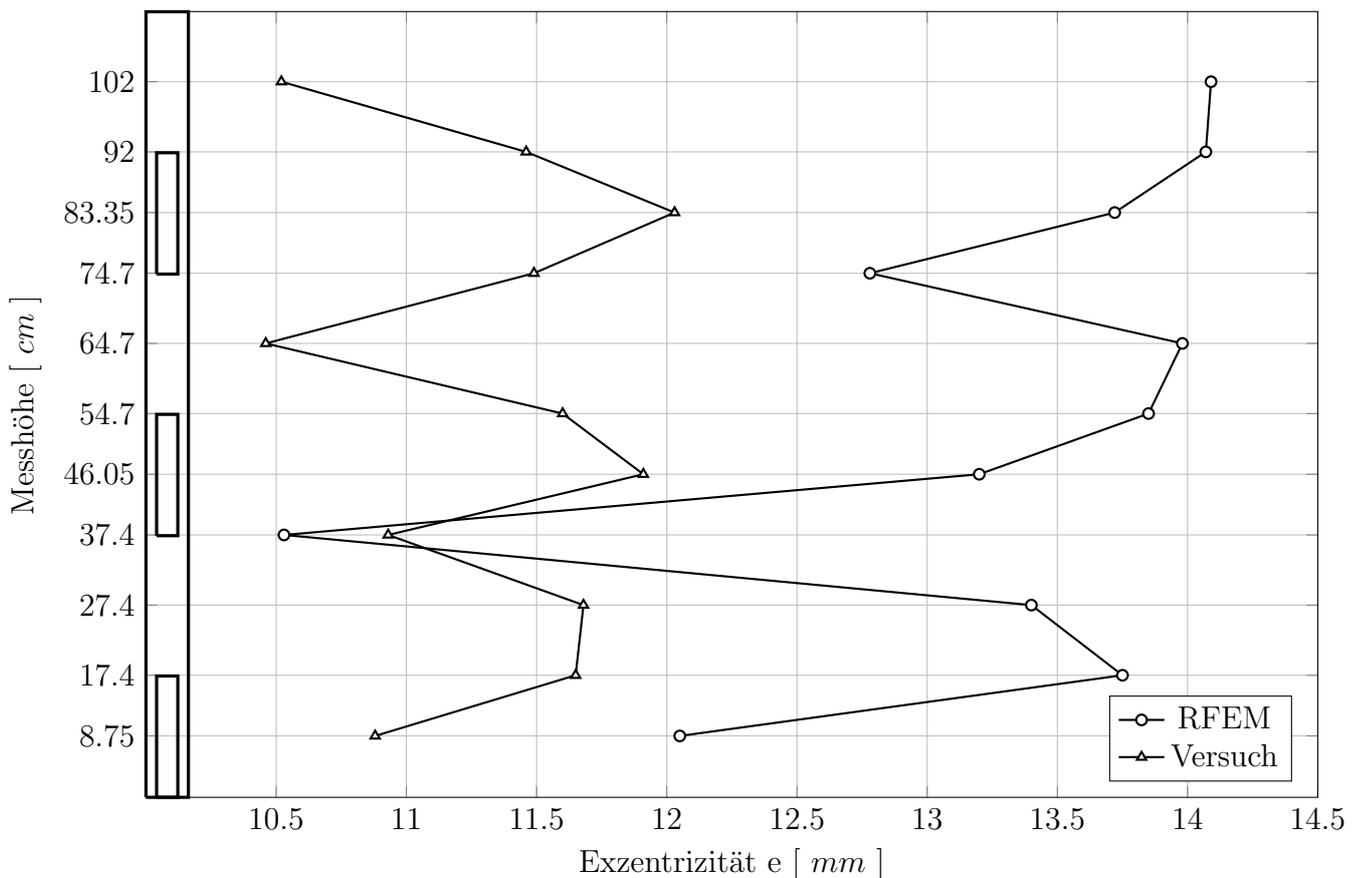


Abbildung 11.5: Schubmittelpunktverläufe von Probekörper 5 aus physikalischem Versuch und RFEM

Höhe [cm]	8.75	17.4	27.4	37.4	46.05	54.7	64.7	74.7	83.35	92	102
Versuch e [mm]	10.88	11.65	11.68	10.93	11.91	11.60	10.46	11.49	12.03	11.46	10.52
RFEM e [mm]	12.05	13.75	13.40	10.53	13.20	13.85	13.98	12.78	13.72	14.07	14.09

Tabelle 11.5: Ergebniswerte von Probekörper 5 aus physikalischem Versuch und RFEM

Die gemittelte Schubmittelpunktsachse (nicht dargestellt, siehe Abb. 5.4) aus dem physikalischen Versuch verläuft hier annähernd senkrecht, während jene des numerisch ermittelten Verlaufs eine gewisse Neigung aufweist. In den Mitten der oberen beiden Öffnungen, sowie der oberen beiden geschlossenen Abschnitte, zeigt die Kurve aus den Versuchen große Auslenkungen. Im untersten geschlossenen Abschnitt befindet sich die größte Auslenkung nicht im Zentrum, sondern an der Übergangsstelle von geschlossenem zu offenem Querschnitt. Die starken Auslenkungen des numerisch ermittelten Schubmittelpunktverlaufs an den Übergangsstellen sind auch hier zu erkennen. Ebenfalls zeigen wieder beide Kurven die abnehmende Exzentrizität der Schubmittelpunkte im unteren Bereich. Während an der Versuchskurve eine Abnahme

zu beobachten ist, vergrößern sich die Auslenkungen im numerisch ermittelten Verlauf mit abnehmender Messhöhe.

11.6 Probekörper 6

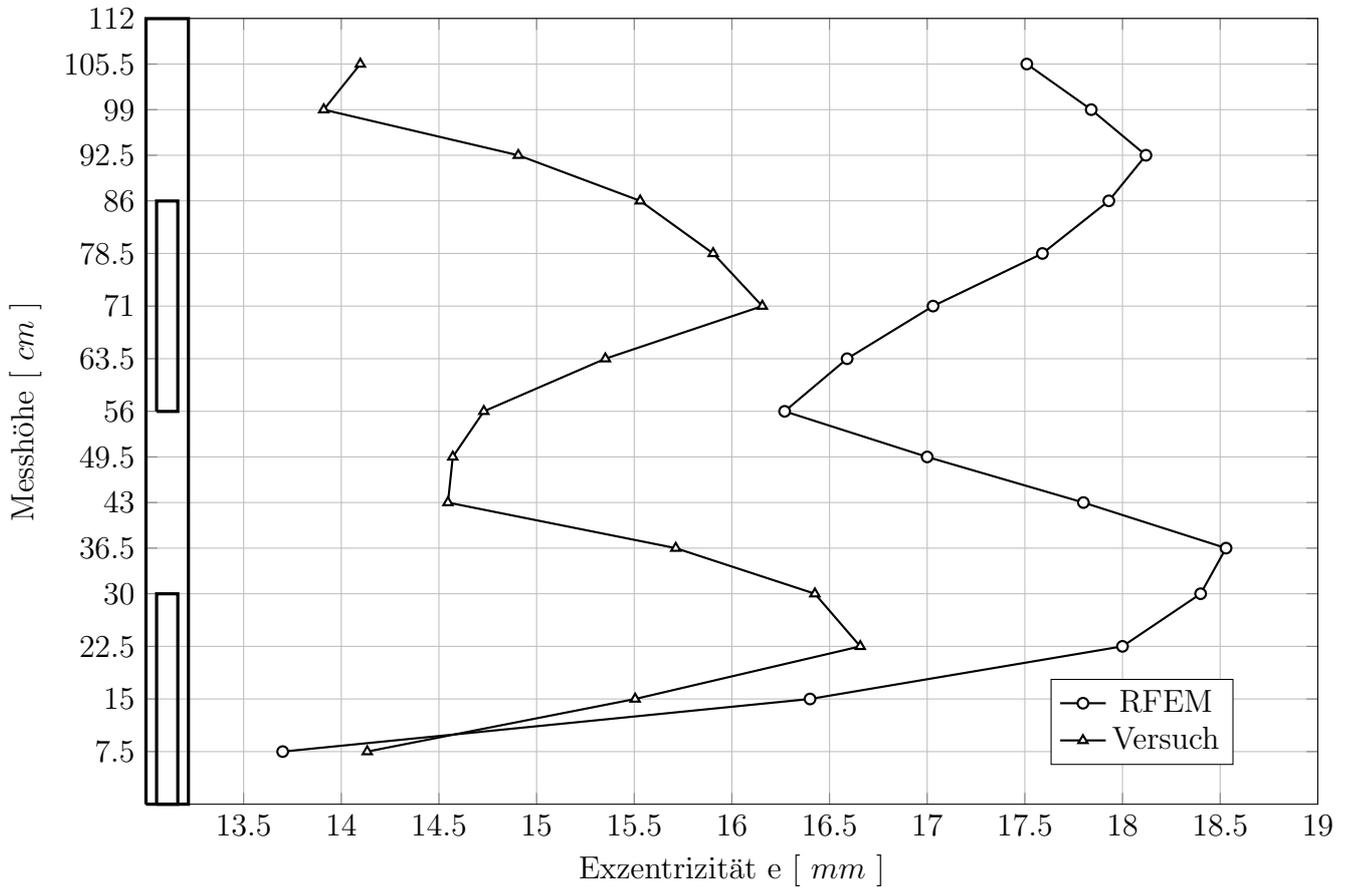


Abbildung 11.6: Schubmittelpunktsverläufe von Probekörper 6 aus physikalischem Versuch und RFEM

Höhe [cm]		7.5	15	22.5	30	36.5	43	49.5	56	63.5
Versuch	e [mm]	14.10	13.91	14.91	15.53	15.90	16.16	15.35	14.73	14.57
RFEM	e [mm]	13.70	16.40	18.00	18.40	18.53	17.80	17.00	16.27	16.59

Höhe [cm]		71	78.5	86	92.5	99	105.5
Versuch	e [mm]	14.55	15.71	16.42	16.66	15.50	14.13
RFEM	e [mm]	17.03	17.59	17.93	18.12	17.84	17.51

Tabelle 11.6: Ergebniswerte von Probekörper 6 aus physikalischem Versuch und RFEM

Die gemittelten Schubmittelpunktsachsen (nicht dargestellt, siehe Abb. 5.4) weisen unterschiedliche Neigungen auf. Der Verlauf aus dem Versuch zeigt große Auslenkungen in den Mitten der beiden geschlossenen Abschnitte. Im Zentrum der oberen Öffnung besitzt die Kurve ebenfalls

eine starke Auslenkung. Im Bereich der unteren Öffnung befindet sich die größte Auslenkung 7.5 cm über der Mitte. Der numerisch ermittelte Verlauf weist in beiden geschlossenen Abschnitten die größte Auslenkung 6.5 cm unterhalb der Mitte auf. An der Übergangsstelle von offenem zu geschlossenem Querschnitt (Messhöhe 56 cm) zeigt die Kurve aus RFEM eine starke Auslenkung. Erneut erkennt man in beiden Verläufen die abnehmende Exzentrizität im unteren Bereich, wobei hier eine Überschneidung der Kurven erfolgt.

11.7 Probekörper 7

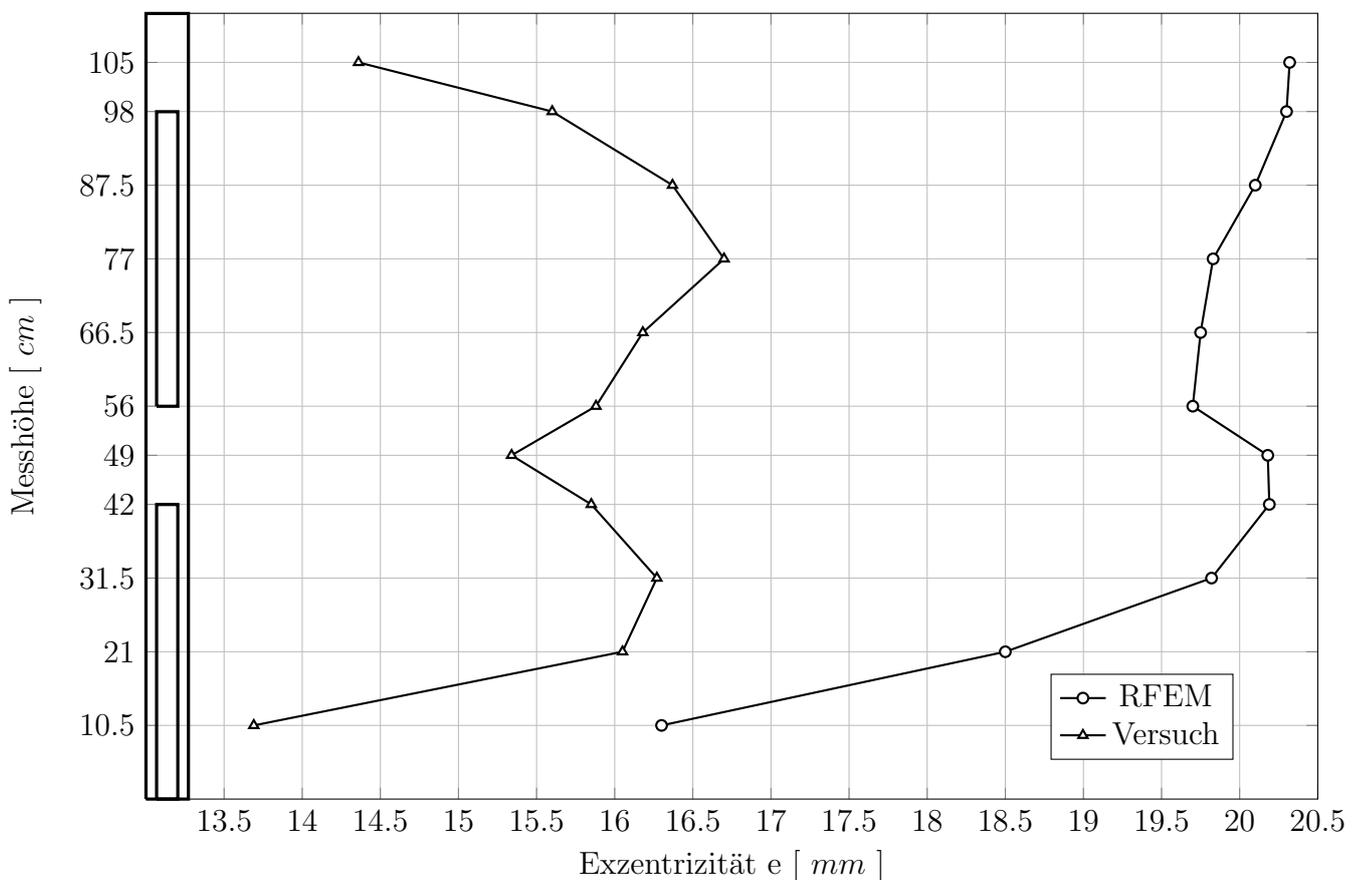


Abbildung 11.7: Schubmittelpunktsverläufe von Probekörper 7 aus physikalischem Versuch und RFEM

Höhe [cm]		10.5	21	31.5	42	49	56	66.5	77	87.5	98	105
Versuch	e [mm]	13.69	16.05	16.27	15.85	15.34	15.88	16.18	16.70	16.37	15.60	14.36
RFEM	e [mm]	16.30	18.50	19.82	20.19	20.18	19.70	19.75	19.83	20.10	20.30	20.32

Tabelle 11.7: Ergebniswerte von Probekörper 7 aus physikalischem Versuch und RFEM

Die gemittelten Schubmittelpunktsachsen (nicht dargestellt, siehe Abb. 5.4) weisen erneut unterschiedliche Neigungen auf. Die aus dem physikalischen Versuch erhaltene Kurve weist starke

Auslenkungen in den Mitten der beiden geschlossenen Abschnitte auf. Während sich im oberen, offenen Bereich die größte Auslenkung in der Mitte einstellt, befindet sie sich im unteren offenem Bereich 10.5 cm darüber. Der numerisch ermittelte Schubmittelpunktsverlauf zeigt im unteren geschlossenen Abschnitt eine Auslenkung in die entgegengesetzte Richtung. Die abnehmende Exzentrizität im unteren Stabbereich ist auch hier an beiden Verläufen zu erkennen. Während an der Versuchskurve wieder eine Abnahme zu beobachten ist, vergrößern sich die Auslenkungen im numerisch ermittelten Verlauf mit abnehmender Messhöhe.

Kapitel 12

Rèsumè

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die aus den physikalischen Versuchen und den mittels numerischer Simulationen erhaltenen Kurven der Schubmittelpunkte nicht „gerade“ über die Kernhöhe verlaufen. Ein wellenförmiger Verlauf ist in allen Versuchsergebnissen deutlich zu erkennen. Sowohl in den gemessenen als auch in den simulierten Kurven ist eine Korrelation der Schubmittelpunkte mit den Öffnungsabmessungen erkennbar. Die Exzentrizitäten der Schubmittelpunkte nehmen in den unteren Bereichen der Probekörper vermutlich aufgrund von Einwirkungen der Einspannung ab. Diese Abnahme ist in den numerischen Simulationen stärker ausgeprägt als in den physikalischen Experimenten. Versuche und Simulationen zeigen dennoch quantitative Unterschiede. Die Verwendung anderer FE-Programme, anderer Lagerungsbedingungen, einer anderen Öffnungsgeometrie oder die Modellierung in einem größeren Maßstab könnten Maßnahmen darstellen, um solche Diskrepanzen zu minimieren und weitere Gesetzmäßigkeiten des Schubmittelpunktverlaufs von Hochhauskernen mit Öffnungsreihen zu untersuchen.

Quellen- und Literaturverzeichnis

- [1] H.A. Mang, G. Hofstetter, and J. Eberhardsteiner. *Festigkeitslehre*. Springer-Lehrbuch Technik. Springer, 2008.
- [2] M. Kindmann, R.; Kraus. FE-Methoden zur Bestimmung der Lage des Schubmittelpunktes dünnwandiger Querschnitte. *Bautechnik*, 84:682–690, 2007.
- [3] W. Francke and H. Friemann. *Schub und Torsion in geraden Stäben: Grundlagen, Berechnungsbeispiele*. Vieweg, 2005.
- [4] K. Roik. *Vorlesungen über Stahlbau: Grundlagen*. John Wiley & Sons Canada, Limited, 1983.
- [5] Helmut Rubin. Wölbkrafttorsion von Durchlaufträgern mit konstantem Querschnitt unter Berücksichtigung sekundärer Schubverformungen. *Stahlbau*, 74(11):826–842, 2005.
- [6] M. Phocas. *Hochhäuser: Tragwerk und Konstruktion*. Vieweg+Teubner Verlag, 2005.
- [7] Formelsammlung zur Vorlesung Baustatik 1. page 11, 2004/2005.
- [8] <http://www.maintower.chsitetower.html> , Nov. 2013.
- [9] <http://www.gleitbau.comreferenzeneinzelansichtreferencehochhauskern-torre-marina> , Nov. 2013.
- [10] <http://www.gleitbau.comreferenzeneinzelansichtreferencenational-stadium-warschau> , Nov. 2013.
- [11] S. Eilering. Zur Berechnung der Wölbfunktion und Torsionskennwerte dünnwandiger Querschnitte von prismatischen Stäben. *Bauingenieur*, 03:142–150, 2005.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Zusammenhang der Koordinaten [1]	3
2.2	Verschiebung v_t eines Elements auf der Profilmittellinie [3]	8
2.3	Gleitung γ_{xs} eines Elements auf der Profilmittellinie [3]	9
2.4	(a) offener Querschnitt, (b) Darstellung durch Profilmittellinie, Maße in mm . .	14
2.5	Verlauf von η (Werte in mm)	14
2.6	links: Verlauf von $r_t^D(s)$, rechts: Verwölbungen $\omega^D(s)$	15
2.7	Schubmittelpunkt M (Werte in mm)	16
2.8	Gleichgewicht am Querschnittselement	23
3.1	Prinzipskizzen verschiedener Stockwerkrahmen: (a) eingespannt, (b) Zweigelenks- rahmen, (c) Dreigelenksrahmen	27
3.2	Prinzipskizzen verschiedener Fachwerkstypen	27
3.3	Beispiel eines mittigen Kerns mit Treppenhaus, Aufzugsschacht und Haustechni- kenschächten [8]	28
3.4	Herstellung von Hochhauskernen [9], [10]	29
3.5	Kernanordnung: a) mittig b) am Rand c) außerhalb d) mehrere Kerne [6]	29
3.6	a) versetzte Öffnungen b) regelmäßige Öffnungen [6]	30
4.1	Statisches System: (a) Modell, (b) Prinzipskizze	33
4.2	FEM-Modell (PVC) zur Profildimensionierung: (a) Modell, (b) Verschiebungen (Werte in mm)	35
4.3	Querschnitt: (a) Maßstab 1:50, (b) Maßstab 1:1	36
4.4	Bimomentenverlauf aus IQ100	36
5.1	CNC-Fräsmaschine Chiron FZ 22 L highspeed	38
5.2	Herstellung der Profile: (a) Fräsvorgang Profil 1, (b) Kühlmittleinsatz	38
5.3	Querschnitte: (a) geschlossen, (b) offen	39

5.4	Begriffsdefinition zur Beschreibung des Schubmittelpunktverlaufs	39
5.5	Probekörper 1, Maße in mm	40
5.6	Probekörper 2, Maße in mm	41
5.7	Probekörper 3, Maße in mm	41
5.8	Probekörper 4, Maße in mm	42
5.9	Probekörper 5, Maße in mm	42
5.10	Probekörper 6, Maße in mm	43
5.11	Probekörper 7, Maße in mm	43
6.1	Einspannung und Fixierung der Grundplatte	45
6.2	Schrittweise Herstellung der Einspannung: (a) U-förmige Anordnung, (b) Platzierung des Versuchskörpers, (c) Fertigstellung der Einspannung	45
6.3	Anordnung der Wegaufnehmer und des Vierkantstahlstücks	47
6.4	Krafteinleitung mittels Gewichten über Umlenkrolle	48
6.5	Schubflusssklemme	50
6.6	Schubflusssklemme, alle Maße in <i>mm</i>	52
6.7	maximale Lagen der Schubmittelpunkte	53
7.1	Einspannung mit zusätzlichen Schraubzwingen und Beschwerung	55
7.2	Krafteinleitung	56
7.3	Definition der Exzentrizität an der Schubflusssklemme und beispielhaft eingestellte Exzentrizität von $e = -10\text{ mm}$	57
7.4	Prinzip der Kraftverschiebung in 5 mm -Schritten (nicht maßstabsgetreue Zeichnung)	58
7.5	Verlauf der Verschiebungen über die Zeit (zwei Wegaufnehmer: gelb und rot), im letzten Abschnitt sind beide konstant	59
7.6	Exportierte Exceldatei: 1. und 3. Spalte: Zeit, 2. und 4. Spalte: Messwerte der beiden Wegaufnehmer, Mittelwerte und Verschiebungsdifferenz	60
8.1	Modellierung des FE-Modells in RFEM: (a) Probekörper 3, (b) Balken, Schubflusssklemme und exzentrisch einwirkende Einzelkraft	62
8.2	Überquerung des Schubmittelpunkts (Modell und Verformungen, Draufsicht) . .	63
8.3	Darstellung der Verformungen für eine beliebige Exzentrizität von 48 mm am Beispiel des Probekörpers 3 (Verformungswerte in <i>mm</i>)	63
9.1	Schubmittelpunktverlauf von Probekörper 1 aus physikalischem Versuch	66

9.2	Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 2 aus physikalischem Versuch	67
9.3	Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 3 aus physikalischem Versuch	68
9.4	Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 4 aus physikalischem Versuch	69
9.5	Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 5 aus physikalischem Versuch	70
9.6	Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 6 aus physikalischem Versuch	71
9.7	Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 7 aus physikalischem Versuch	72
9.8	Übersicht der Schubmittelpunktsverläufe aus physikalischen Versuchen	73
10.1	Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 1 aus RFEM	76
10.2	Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 2 aus RFEM	77
10.3	Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 3 aus RFEM	78
10.4	Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 4 aus RFEM	79
10.5	Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 5 aus RFEM	80
10.6	Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 6 aus RFEM	81
10.7	Schubmittelpunktsverlauf von Probekörper 7 aus RFEM	82
10.8	Übersicht der Schubmittelpunktsverläufe aus RFEM	83
11.1	Schubmittelpunktsverläufe von Probekörper 1 aus physikalischem Versuch und RFEM	86
11.2	Schubmittelpunktsverläufe von Probekörper 2 aus physikalischem Versuch und RFEM	87
11.3	Schubmittelpunktsverläufe von Probekörper 3 aus physikalischem Versuch und RFEM	89
11.4	Schubmittelpunktsverläufe von Probekörper 4 aus physikalischem Versuch und RFEM	90
11.5	Schubmittelpunktsverläufe von Probekörper 5 aus physikalischem Versuch und RFEM	91
11.6	Schubmittelpunktsverläufe von Probekörper 6 aus physikalischem Versuch und RFEM	92
11.7	Schubmittelpunktsverläufe von Probekörper 7 aus physikalischem Versuch und RFEM	93

Tabellenverzeichnis

4.1	Materialparameter von hart-PVC	35
9.1	Ergebniswerte von Probekörper 1 aus physikalischem Versuch	66
9.2	Ergebniswerte von Probekörper 2 aus physikalischem Versuch	67
9.3	Ergebniswerte von Probekörper 3 aus physikalischem Versuch	68
9.4	Ergebniswerte von Probekörper 4 aus physikalischem Versuch	69
9.5	Ergebniswerte von Probekörper 5 aus physikalischem Versuch	70
9.6	Ergebniswerte von Probekörper 6 aus physikalischem Versuch	71
9.7	Ergebniswerte von Probekörper 7 aus physikalischem Versuch	72
10.1	Ergebniswerte von Probekörper 1 aus RFEM	76
10.2	Ergebniswerte von Probekörper 2 aus RFEM	77
10.3	Ergebniswerte von Probekörper 3 aus RFEM	78
10.4	Ergebniswerte von Probekörper 4 aus RFEM	79
10.5	Ergebniswerte von Probekörper 5 aus RFEM	80
10.6	Ergebniswerte von Probekörper 6 aus RFEM	81
10.7	Ergebniswerte von Probekörper 7 aus RFEM	82
11.1	Ergebniswerte von Probekörper 1 aus physikalischem Versuch und RFEM	86
11.2	Ergebniswerte von Probekörper 2 aus physikalischem Versuch und RFEM	87
11.3	Ergebniswerte von Probekörper 3 aus physikalischem Versuch und RFEM	89
11.4	Ergebniswerte von Probekörper 4 aus physikalischem Versuch und RFEM	90
11.5	Ergebniswerte von Probekörper 5 aus physikalischem Versuch und RFEM	91
11.6	Ergebniswerte von Probekörper 6 aus physikalischem Versuch und RFEM	92
11.7	Ergebniswerte von Probekörper 7 aus physikalischem Versuch und RFEM	93