

Diplomarbeit

Theoretische Untersuchungen zum High-Speed-Wobble-Phänomen bei Rennrädern

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Plöchl

Institut für Mechanik und Mechatronik

Forschungsgruppe Fahrzeugdynamik

E325 / A1

eingereicht an der Technischen Universität Wien

Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

Florian Klinger

Matrikelnummer: 0625969

Favoritenstraße 60/2/24

1040 Wien

Wien, im August 2013

Florian Klinger

Danksagung

Diese Diplomarbeit entstand am Institut für Mechanik und Mechatronik der Technischen Universität Wien für die Forschungsgruppe Fahrzeugdynamik, die sich seit einigen Jahren mit der Zweirad-Dynamik beschäftigt.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Plöchl, für die Themenstellung gleichsam wie für die hervorragende Betreuung während des gesamten Arbeitsprozesses. Sein stets offenes Ohr für Fragestellungen jeglicher Art sowie wertvolle Anregungen und Ideen während einer Vielzahl von Diskussionen haben maßgeblich zum Gelingen der Diplomarbeit beigetragen.

Weiters möchte ich mich bei Herrn Privatdoz. Dipl.-Ing. Dr.techn. Johannes Edelmann bedanken, dessen praktische Erfahrungen zum Thema Fahrrad-Wobble direkt in die Arbeit eingeflossen sind.

Außerdem möchte ich mich bei Frau Univ.Ass. Dipl.-Ing. Julia Nusime bedanken, an deren hervorragende Diplomarbeit ich anschließen durfte, und die im Rahmen ihrer Dissertation den Inhalt meiner Diplomarbeit auf einem internationalen Symposium in Qingdao, China, präsentieren wird.

Allen Mitarbeitern des Instituts für Mechanik und Mechatronik möchte ich für die Kollegialität und Hilfsbereitschaft danken, und außerdem für die Möglichkeit, die Arbeit am Institut durchführen zu können.

Ein großer Dank gebührt natürlich meinen Freunden und geschätzten Studienmitstreitern, die die letzten Jahre nicht nur zu einer fachlich interessanten, sondern auch zu einer kollegial großartigen Zeit machten.

Im privaten Rahmen möchte ich mich bei meiner Familie und speziell bei meinen Eltern bedanken, die meine Neugierde stets gefördert haben und auf deren hingebungsvolle Unterstützung ich mich zu jeder Zeit verlassen konnte.

Besonders bedanken möchte ich mich bei meiner Freundin Carina, die zeit meines Studiums geduldig und aufmunternd an meiner Seite stand.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Stabilitätsverhalten von Fahrrädern in der aufrechten Geradeausfahrt, wobei ein besonderes Augenmerk auf den Wobble gelegt ist. Dieser fallweise instabile Eigenmode ist typisch für einspurige Fahrzeuge wie Fahrräder und Motorräder und beschreibt eine oszillierende Bewegung des vorderen Laufrads um die Lenkachse. Bei langsamer Fahrt zumeist nur als störend empfunden, birgt dieses Lenkungsflattern bei den für Rennräder üblichen hohen Geschwindigkeiten ein beträchtliches Gefahrenpotenzial.

Aus bisherigen Untersuchungen ist ein geeignetes Modell zur Abbildung der Wobleschwingungen eines Trekkingrades bekannt, der Einfluss der Fahrerhände auf das Lenksystem wurde dabei allerdings nicht berücksichtigt. Durch die am Lenker abgestützten Hände übertragen sich jedoch die Schwingungen auf den Fahrer und somit besitzt dieser zufolge seiner Trägheit auch eine Rückwirkung auf das Lenksystem.

Um diese Kopplung zu untersuchen, wird das Fahrradmodell mit einem biomechanischen Körpermodell ergänzt, wobei beide Arme als beweglich und mit dem Lenker verbunden modelliert werden, sodass ein Mehrkörpersystem mit kinematischen Schleifen entsteht. Dazu werden die nichtlinearen Bewegungsgleichungen unter der Verwendung von Minimalkoordinaten hergeleitet und um den aufrechten Fahrzustand linearisiert.

Mit anschließenden Stabilitätsuntersuchungen werden die Auswirkungen einiger charakteristischer Unterschiede zwischen Trekking- und Rennrädern bezüglich Rahmengeometrie und Sitzhaltung herausgearbeitet und in weiterer Folge der beträchtliche Einfluss der Armbewegungen auf den Wobble aufgezeigt, wobei eine gute Übereinstimmung zwischen den theoretischen Ergebnissen und praktischen Messfahrten aus der Literatur gefunden wird.

Abstract

This master's thesis deals with the stability of bicycles in the upright rectilinear motion with main focus on the wobble mode. Wobble is a characteristic eigenmode for single-lane vehicles like bicycles or motorcycles and denotes an unstable motion dominated by oscillations of the front wheel about the steering axis. While at low speeds this phenomenon is perceived unpleasant or unnerving, wobble may be hazardous at high speeds which are common for racing bicycles.

From previous analyses, a model capable to map wobble oscillations for a trekking bicycle is well-known, where no influence of the rider's hands is taken into account. However, due to the rider's arms rested on the handlebar, steering oscillations are transferred to the human body, and as a consequence its passive impedance has a feedback to the steering system.

To analyse this linkage, the bicycle model is expanded by a biomechanical model of the human body, with both arms connected flexibly to the handlebar, such that a multibody-system appears with cinematic closed loops. For this model the nonlinear equations of motions are derived by using minimal-coordinates and d'Alembert's Principle. A linearization of these equations considering small deviations from the upright rectilinear motion leads to a set of linear differential equations.

Subsequently multiple stability-analyses are performed, showing the effects of the major differences between trekking- and racing bicycles concerning frame geometry, mass and stiffness properties as well as different rider postures in particular with respect to the wobble mode. Further investigations highlight the considerable influence of the rider's arms movements on the stability behavior. A good agreement between theoretical results and practical measurements from the literature can be found.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Zielsetzung	3
1.2	Aufbau der Arbeit	5
2	Literaturstudie	7
2.1	Stabilitätsverhalten allgemein	7
2.2	Wobble	10
2.3	Modellierung des Fahrerkörpers	11
2.4	Ergänzende Literatur	13
3	Modellbildung	15
3.1	Fahrradmodell	17
3.1.1	Geneigte Fahrbahn	20
3.2	Reifenmodell	22
3.2.1	Sturz- und Schräglaufwinkel	23
3.2.2	Transiente Reifenwinkel	25
3.2.3	Reifenkräfte und Reifenmomente	25
3.3	Fahrerkörper	26
3.3.1	Hanavan-Modell	26
3.3.2	Fahrerkörper „hands-off“	27
3.3.3	Fahrerkörper „hands-on“	29
4	Bewegungsgleichungen	34
4.1	Hands-Off-Model	34
4.1.1	Lineare Bewegungsgleichungen für das Hands-Off-Model . . .	35
4.2	Hands-On-Model	37
4.2.1	Schleifenschließbedingung	38

4.2.2	Allgemeine Bewegungsgleichungen für das Hands-On-Model mit Bindungsgleichungen	41
4.2.3	Übergang auf Minimalkoordinaten	42
4.2.4	Herleitung der Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten	46
4.2.5	Allgemeine Bewegungsgleichungen für das Hands-On-Model in Minimalkoordinaten	51
4.2.6	Lineare Bewegungsgleichungen für das Hands-On-Model	52
4.3	Parameterwerte	54
4.3.1	Rennraddaten	54
4.3.2	Reifenkennwerte	55
4.3.3	Fahrerdaten	57
5	Stabilitätsuntersuchungen	63
5.1	Grundlagen	64
5.1.1	Stabilität nach Ljapunow	64
5.1.2	Stabilitätsanalyse anhand von Eigenwerten	64
5.1.3	Mathematische Aufbereitung	65
5.2	Das Stabilitätsverhalten des Rennradmodells „hands-off“	68
5.3	Vom Trekkingrad zum Rennrad	72
5.4	Änderung der Sitzposition	76
5.4.1	Variation der Radaufstandskräfte	76
5.4.2	Variation der <i>mainframe</i> - Massengeometrie	78
5.4.3	Wechsel von der aufrechten zur gebeugten Sitzposition	81
5.5	Hände zum Lenker: das Übergangsmodell	82
5.5.1	Variation der Massengeometrie der lenkbaren Baugruppe	82
5.5.2	Hände als Masse am Lenker	85
5.5.3	Lenkungsfeder und -dämpfer	86
5.6	Zusammenfassung „hands-off“	88
5.7	Das Stabilitätsverhalten des Rennradmodells „hands-on“	90
5.7.1	Einfluss der Armbewegungen	92
5.7.2	Zusätzliches Lenkungsfeder- und -dämpfer-Element	97
5.8	Zusammenfassung „hands-on“ und Vergleich mit Literaturstellen	99
6	Conclusio und Ausblick	102
6.1	Conclusio	102
6.2	Ausblick	104

Abbildungsverzeichnis	106
Tabellenverzeichnis	108
Literaturverzeichnis	109
A Fahrerdaten	114
B Matrizeneinträge	118
C Parameterwerte zum Trekkingrad	121

Kapitel 1

Einleitung

Es liegt wohl in der Natur des modernen Menschen nach technischen Apparaten zu suchen, die das alltägliche Leben *erleichtern* und *beschleunigen*. Mit diesen beiden Worten bewarb auch der deutsche Carl Freiherr von Drais seine 1817 vorgestellte Laufmaschine [1]. Das auch als *Draisine* bezeichnete Gefährt bestand aus zwei hintereinander angeordneten Rädern, einer Sitzfläche dazwischen und einem Hebel, mit dem das vordere Rad gelenkt werden konnte. Trotz fehlendem Pedalantrieb gilt die Draisine als Erfindung des heutigen Fahrrads.

Die Zusammenführung von Kurbeltrieb, Pedalen und Laufmaschine wurde erstmals in Paris in den 1860er Jahren bekannt. Wenngleich umstritten ist, wer diese Erfindung tatsächlich getätigt hatte, so wird die erstmalige kommerzielle Verbreitung eines solchen neuartigen Fahrrads jedenfalls dem französischen Schmied Pierre Michaux zugeschrieben [1]. Bei dem *vélocipède* genannten Gefährt war die Vorderradnabe mit Tretkurbeln und Pedalen verbunden, und somit ergab sich die Möglichkeit, dieses Fahrrad zu bewegen, ohne mit den Füßen den Boden zu berühren. Wie mühelos es war, auf zwei Rädern zu balancieren und Geschwindigkeiten weit über denen von Fußgängern zu erreichen, beeindruckte Fahrer und Zuschauer zugleich. Die mit Eisenringen beschlagenen Holzreifen rollten auf unebener Straße allerdings sehr unkomfortabel, worauf auch die Bezeichnung *boneshaker* für diese Fahrräder zurückzuführen ist.

Mit zunehmender Verbreitung der neuen Fahrräder in Europa kamen bald erste Wettfahrten zustande und somit auch der Wunsch nach immer höheren Geschwindigkeiten. Ein Weg dazu führt über einen größeren Abrollumfang des angetriebenen Vorderrades, und so kam in den 1870er Jahren, unterstützt durch weitere Errungenschaften wie Drahtspeichenräder, Vollgummireifen und leichtere Rahmenkonstruktionen, das Hochrad oder *penny farthing* in Mode [1]. Dessen eigenwillige Erscheinung – das Vor-

derrad teils so groß wie die Beinlänge des Fahrers es zulässt, ein um vieles kleineres Hinterrad und der Fahrer weit oben platziert – brachte jedoch auch einige Nachteile mit sich. So war das Auf- und Absteigen alles andere als einfach, und Stürze endeten ob der hohen Sitzposition oftmals mit ernsthaften Verletzungen.

Die Suche nach ähnlich schnellen, aber niedrigeren und damit sichereren Fahrrädern war Anstoß für einige weitere technische Entwicklungen, die schlussendlich im Rover *Safety Bicycle* vereinigt wurden. Dieses um 1890 in England konstruierte Zweirad zeigte erstmals die bis heute typischen Merkmale von Fahrrädern: eine dem Diamantrahmen ähnelnde Rahmenform, zwei gleich große Räder mit Luftreifen, den Kettentrieb zum Hinterrad und ein um eine geneigte Achse lenkbares Vorderrad [1]. Diese Rahmengeometrie ermöglichte dem Fahrer einerseits eine effiziente Sitzposition zum Pedalieren, andererseits sorgte die günstige Gewichtsverteilung in Verbindung mit der Lenkgeometrie für ein gutmütiges Fahrverhalten. Die Luftreifen und eine Übersetzung im Antriebsstrang taten ihr Übriges, und so konnte mit dieser neuen Fahrradart deutlich schneller gefahren werden als mit den Hochrädern.

Im Laufe der nächsten Jahre wurden die Konstruktionen ausgereifter und vor allem die Kaufpreise immer günstiger, und so wurde zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts das Fahrrad zum weltweit populärsten Individualverkehrsmittel. Bis heute folgten unzählige weitere Innovationen wie Gangschaltung, standfeste Bremsen und Federungssysteme. Es entstand eine Vielzahl von Fahrradgattungen: vom faltbaren Citybike zum vollgefederten Downhillbike, vom quirligen BMX zum vollverkleideten Liegerad, vom komfortablen Reiserad zum gewichtsoptimierten Rennrad – beinahe alle Einsatzzwecke und Vorlieben werden abgedeckt.

Eine Konstante über alle Jahre blieb aber stets der Straßenrennsport. Straßenrennen waren schon bei den ersten olympischen Spielen der Neuzeit Teil des Programms, die berühmte *Tour de France* wird seit 1903 mit wenigen Unterbrechungen einmal jährlich ausgetragen. Der Weltradsportverband *Union Cycliste Internationale (UCI)* wurde im Jahr 1900 gegründet und verwaltet seither den professionellen Radsport. Mitte der 1930er Jahre entstand das *Rennrad* als eigener Fahrradtypus, dessen technische Weiterentwicklung aber stets dem strengen und konservativen Reglement der UCI¹ untersteht [1]. Trotzdem war der Rennsport immer ein starker Antrieb zur Optimierung von Rahmen und Komponenten hinsichtlich Fahrverhalten, Funktion und Gewichtseffizienz.

¹Das aktuelle Reglement ist auf <http://www.uci.ch> zu finden.

1.1 Motivation und Zielsetzung

Ein mühelos aufrecht balanciertes *vélocipède* samt Fahrer verwunderte nicht nur die Bevölkerung, sondern auch die Wissenschaft des 19. und 20. Jahrhunderts. Bald versuchte man die Phänomene der Balance und Manövrierbarkeit von Fahrrädern physikalisch zu erklären. Es zeigten sich folgende Charakteristika:

In einer vereinfachten Vorstellung ähnelt das aufrechte Fahren mit einem Zweirad bei moderater Geschwindigkeit dem Balancieren eines Besenstiels auf der offenen Handfläche. Kippt dabei der Besen auf eine Seite, so muss die stützende Handfläche in dieselbe Richtung bewegt werden, um das Gleichgewicht wiederherzustellen. Angewandt auf ein fahrendes Fahrrad entspricht die Handfläche einer gedachten Linie zwischen den Aufstandspunkten von Vorder- und Hinterrad. Beginnt nun das Fahrrad zu kippen, so kann der Fahrer durch Lenken in Kipprichtung diese Aufstandslinie wieder zurück unter den Gesamtschwerpunkt bringen und den Gleichgewichtszustand wiedererlangen. Bemerkenswerterweise gibt es für viele Fahrräder einen Geschwindigkeitsbereich, innerhalb dessen das Fahrrad diese stabilisierenden Lenkbewegungen automatisch und ohne das Zutun des Fahrers ausführt. Ein solches Verhalten wird als *auto-* oder *selbststabil* bezeichnet. Besonders freihändig fahrend macht sich dies bemerkbar und solche Fahrräder gelten als angenehm und mühelos zu fahren. Die Ursachen für die stabilisierende Eigenlenkfähigkeit von Zweirädern sind vielfältig und werden durch ein komplexes Zusammenwirken von Nachlaufversatz und geneigter Lenkachse, Kreiselkräften des Vorderrades, der gesamten Massenverteilung und nicht zuletzt durch die im Reifen-Fahrbahn-Kontakt wirkenden Kräften bestimmt. Für Richtungsänderungen wird die Balancierfähigkeit des Fahrrads in etwas abgewandelter Form benutzt und das beginnende Kippen dabei nur soweit ausgeglichen, dass die für den geforderten Kurvenradius benötigten Lenk- und Neigungswinkel bestehen bleiben. Kurvenfahrten beginnen also stets mit einem gewünschten Kippen. Um dies zu erzwingen, lenkt der Fahrer zuerst geringfügig in die „falsche“ Richtung, wodurch sich das Fahrrad in die „richtige“ Richtung zu neigen beginnt. Daraufhin wird sofort das Vorderrad in die eigentliche Kurvenrichtung gelenkt, das Kippen dadurch abgefangen, und erst dann beginnt die gewünschte Richtungsänderung. Diese Eigenheit wird üblicherweise als *countersteer* bezeichnet.

Zum Zwecke einer mathematischen Beschreibung können Fahrräder als Mehrkörpersysteme modelliert und deren Bewegungen durch gekoppelte, nichtlineare Gleichungen beschrieben werden. Auf analytischem Wege ist es kaum möglich diese Differentialgleichungen zu lösen, man könnte sie allenfalls numerisch integrieren. Es erweist

sich jedoch als zweckmäßig, eine Linearisierung um den geradlinigen Fahrzustand durchzuführen und somit nur mehr geringe Abweichungen von der aufrechten Position und kleine Lenkeinschläge zu betrachten. Dies reicht aus, um fundamentale Einsichten über das Ausbalancieren dieser Bewegung sowie über das Einleiten und Beenden von Richtungsänderungen zu erlangen. Auf mathematischem Wege werden zu dem nun linearen Gleichungssystem die für das Bewegungsverhalten kennzeichnenden Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet.

Um die zuvor genannten Charakteristika zu zeigen, muss ein Modell neben der Vorwärtsbewegung folgende zwei Freiheitsgrade beinhalten: den Neigungswinkel des Fahrrades gegenüber der aufrechten Position (Rollwinkel) und den Einschlagwinkel des Vorderrades gegenüber dem Rahmen (Lenkwinkel). Denkt man sich den Fahrer freihändig fahrend, so ist diese Wahl der Freiheitsgrade naheliegend. Doch auch mit den Händen am Lenker steuert ein geübter Fahrer im Wesentlichen durch das Aufbringen von Lenkmomenten und nicht durch die Vorgabe von Lenkwinkeln² [2]. Mit solch einem Modell können zwei signifikante Eigenbewegungen von Zweirädern berechnet werden: *Weave* und *Capsize*. Die Realteile der dazugehörigen Eigenwerte sind ausschlaggebend für das Stabilitätsverhalten der Geradeausfahrt, und in deren starker Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit liegt auch die Begründung für den beschränkten Geschwindigkeitsbereich der Selbststabilität.

Erweitert man nun das Modell um zusätzliche Freiheitsgrade für Reifen- oder Rahmenelastizitäten, so erhöht sich auch die Zahl der Eigenmodi und der *Wobble* taucht auf. Dieser Mode bezeichnet ein fallweise instabiles Lenkungsflattern, das bei Motorradfahrern oft unter der Bezeichnung *tank slapper* bekannt und gefürchtet ist ob seines plötzlichen Aufklings bei hohen Geschwindigkeiten. Auch Rennradfahrer wissen um dieses Phänomen, ebenfalls in Verbindung mit erhöhter Geschwindigkeit, meist während dem Bergabfahren. Die besondere Gefahr dieser Schwingung geht dabei von der hohen Schwingfrequenz aus, die der Fahrer nicht direkt ausgleichen kann.

Wobbleschwingungen sind ein Spezialfall des *Wheel-Shimmy-Phänomens*. Es handelt sich dabei um eine selbsterregte oszillierende Bewegung eines Reifens um seine Lenkachse. Schwingungen solcher Art kommen typischerweise an Bugrädern von Flugzeugen sowie an Vorderrädern von Personen- und Lastkraftwagen vor, treten aber eben auch an Zweirädern auf. Für Motorräder gleich wie für Fahrräder erweisen sich diese Schwingungen in zweierlei Hinsicht als problematisch. Die Oszillationen sind nicht nur eine unerwünschte Belastung für das Material, sondern können auch

²Fahranfänger sollten angewiesen werden, den Lenker eher locker zu umgreifen, um die selbststabilisierenden Eigenschaften des Fahrrades zu nutzen.

zum Verlust der Kontrolle des Fahrers über das Fahrzeug und in weiterer Folge zu schweren Stürzen führen. Während Motorräder vielfach mit stabilisierenden Lenkungsdämpfern ausgerüstet sind, liegt es bei Fahrrädern buchstäblich *in den Händen* der Fahrer, diese Schwingungen abzuwehren.

Trotz der Gefahr, die von einem zu Wobbleschwingungen neigenden Fahrrad ausgeht, gibt es in der wissenschaftlichen Fahrradliteratur nur wenige Beiträge dazu. Einiges ist aus dem Motorradsektor bekannt, quantitative Aussagen lassen sich aber aufgrund der unterschiedlichen Massen- und Geometriegegebenheiten oftmals nur bedingt auf Fahrräder übertragen.

In vorangegangenen Diplomarbeiten an der TU Wien wurde das Wobble-Phänomen an Damen-Trekkingrädern sowohl theoretisch als auch im Fahrversuch umfassend analysiert. Die Untersuchungen beinhalteten das freihändige Fahren bei niedrigen bis mittleren Geschwindigkeiten, und der Einfluss vieler Geometrie- und Massenparameter wurde grundlegend aufgezeigt. Ziel der vorliegenden Diplomarbeit ist es nun, die bisher getroffenen Erkenntnisse auf Rennräder und deren erweiterten Fahrgeschwindigkeitsbereich zu übertragen und zu vertiefen. Außerdem soll das vorhandene Berechnungsmodell um ein geeignetes passives Fahrermodell erweitert werden, welches den Kontakt der Hände mit den Lenkergriffen berücksichtigt. Der Einfluss der so hinzukommenden Armbewegungen auf den Wobblemode kann damit diskutiert werden. 

1.2 Aufbau der Arbeit

Zu Beginn der Arbeit wird ein Überblick über bisherige Veröffentlichungen zum Thema Zweiradstabilität gegeben. Das Augenmerk ist dabei besonders auf jene Literaturstellen gerichtet, die den Wobbleschwingungen sowie dem Einfluss des menschlichen Fahrers auf das Stabilitätsverhalten gewidmet sind.

Anschließend wird die mechanische Modellierung des Fahrrads und des Fahrerkörpers sowie die Beschreibung des Reifen-Fahrbahn-Kontakts angegeben. Die Massengeometrie des menschlichen Körpers folgt aus einem anthropomorphen Modell, mit welchem zwei unterschiedliche Sitzhaltungen, eine komfortabel-aufrechte und eine sportlich-gebeugte, abgebildet werden. Außerdem wird zwischen zwei Modellversionen unterschieden: ein erstes Modell, das *Hands-Off-Model*, entspricht einer freihändigen Fahrt, der Fahrerkörper ist hierbei völlig starr. In dem zweiten Modell, dem *Hands-On-Model*, berühren die Hände die Lenkergriffe und die nun beweglichen Arme

folgen den Lenkerdrehungen.

Zu diesen Modellen werden daraufhin die mathematischen Bewegungsgleichungen sowie die darin enthaltenen Geometrie- und Massenparameter angegeben. Die Gleichungen für das Hands-Off-Model können aus vorangegangenen Arbeiten übernommen werden, die Herleitung der um die Armbewegung erweiterten Gleichungen für das Hands-On-Model wird dargelegt.

Im nächsten Abschnitt werden zunächst einige theoretische Grundlagen zur Stabilitätsanalyse sowie die mathematische Aufbereitung der Systemgleichungen angegeben. Daran anschließend wird das Stabilitätsverhalten der Modellvarianten diskutiert, wobei anhand einiger Parametervariationen zu verschiedenen Geometrie- und Massenmerkmalen der Übergang vom Trekkingrad zum Rennrad und vom Hands-Off-Model zum Hands-On-Model erörtert wird.

Abschließend werden die theoretischen Ergebnisse mit praktischen Fahrversuchen aus der Literatur verglichen und die Erkenntnisse zusammengefasst.

Kapitel 2

Literaturstudie

Dieser Abschnitt soll einen kurzen Überblick über die Literaturstellen geben, die im Laufe der Diplomarbeit gesammelt wurden und auf welche in den nächsten Kapiteln des Öfteren verwiesen wird. Einige Artikel beziehen sich ausschließlich auf Fahrräder, andere behandeln oftmals nur Motorräder, gelegentlich auch beide. Trotz des großen Gewichtsunterschieds zwischen Fahrrädern und Motorrädern, besonders in Relation zum Anteil des Fahrers auf die Gesamtmasse, ist deren dynamisches Verhalten in vielen Fällen qualitativ ähnlich. Demnach wird im Folgenden nicht gesondert zwischen fahrrad- und motorradspezifischer Literatur unterschieden.

2.1 Stabilitätsverhalten allgemein

Erste Artikel über das dynamische Bewegungsverhalten von Fahrrädern stammen von W.J.M. Rankine [3]. Die 1869 veröffentlichten Überlegungen zum Aufrechterhalten des Gleichgewichts sowie zum Einleiten und Beenden von Kurven sind zwar prinzipiell richtig, das komplexe Zusammenspiel von Fahrrad, Fahrer und Fahrbahn wird allerdings nur unzureichend erfasst.

Dies gelang F.J.W. Whipple [4] im Jahr 1899 besser. Er stellte für ein aus vier starren Körpern bestehendes Modell die dazugehörigen nichtlinearen Bewegungsgleichungen auf, linearisierte diese um den Zustand der aufrechten Geradeausfahrt mit konstanter Geschwindigkeit und wandte daraufhin das Routh-Hurwitz Kriterium an. So konnte er zeigen, dass das betrachtete Fahrrad innerhalb eines bestimmten Geschwindigkeitsintervalls ein stabiles Verhalten aufweist, ohne dass es dazu eines Eingriffes des Fahrers bedarf. Bemerkenswerterweise war dieses frühe Modell bereits so ausgereift, dass es bis heute als *Whipple Bicycle Model* verwendet wird.

Beinahe zeitgleich publizierte M.E. Carvallo [5] ähnliche Ergebnisse, sein Berech-

nungsmodell ist allerdings etwas weniger detailliert.

Auf den bisherigen Arbeiten aufbauend untersuchten F. Klein und A. Sommerfeld [6] den Einfluss der von den rotierenden Laufrädern erzeugten Kreiselkräfte auf das Stabilitätsverhalten von Fahrrädern. Sie übernahmen das Modell samt Zahlenwerten von Whipple und bestätigten das Geschwindigkeitsintervall der Autostabilität von 16 bis 20 km/h. Dabei erkannten sie den prinzipiellen Beitrag der gyrokopischen Effekte zum Eigenlenkverhalten und folgerten, dass bei deren Fehlen der Fahrer stets stabilisierend eingreifen müsse.

Einige Jahrzehnte später bestärkte Jones [7] diese Aussagen mit praktischen Versuchen. Er montierte an der Gabel eines einfachen Fahrrads ein zusätzliches, zum Vorderrad paralleles Laufrad, das sich frei drehen konnte. Je nach Drehrichtung dieses zusätzlichen Rotors wurden die Kreiselkräfte des Vorderrades entweder verstärkt oder aufgehoben beziehungsweise sogar umgekehrt. Unbemannt angeschoben zeigte dieses Gefährt bei gleichsinniger Drehung der vorderen Laufräder eine außergewöhnliche Stabilität, bei gegensinniger Drehung allerdings stürzte es sofort. Jones im Sattel konnte jedoch auch trotz getilgter Kreiselkräfte mit diesem Fahrrad fahren, sowohl mit den Händen am Lenker als auch freihändig. Weitere Beobachtungen ließen ihn außerdem den viel stärkeren Einfluss des geometrischen Nachlaufes auf das Stabilitätsverhalten erkennen, und auch dazu führte er Experimente durch. Ähnliche und weitere Versuche, ergänzt mit mathematischem Hintergrund, werden überdies von Åström et al. in [2] beschrieben.

2007 publizierten Meijaard et al. [8] das *Benchmark- oder Basic-Bicycle-Model* mit samt mehrfach überprüfter Bewegungsgleichungen. Das Modell gleicht dabei dem von Whipple und ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Hierbei werden Fahrrad und Fahrer mit vier lateralsymmetrischen, starren Körpern modelliert: der hinteren Baugruppe, bestehend aus Rahmen samt Anbauteilen und dem völlig starr dazu verbundenen Fahrer, der vorderen Baugruppe, bestehend aus Gabel und Lenkeinheit, und den rotationssymmetrischen Laufrädern. Die beiden Baugruppen sind über eine nach hinten geneigte Lenkachse drehbar miteinander verbunden. Vorder- und Hinterrad werden von der entsprechenden Gruppe aufgenommen und können relativ dazu frei rotieren. Weitere Modellannahmen betreffen die punktförmigen Kontakte der Räder auf der ebenen Fahrbahn und deren komplett schlupffreies Abrollen. Die Autoren führen die zu diesem Modell geltenden linearen Bewegungsgleichungen an, ausgedrückt durch kleine Änderungen der Modellfreiheitsgrade Rollwinkel und Lenkwinkel ausgehend von der aufrechten Position. Mit diesen Gleichungen werden in weiterer Folge die Eigenbewegungen und das Stabilitätsverhalten dieses Fahrradmodells in Abhängigkeit

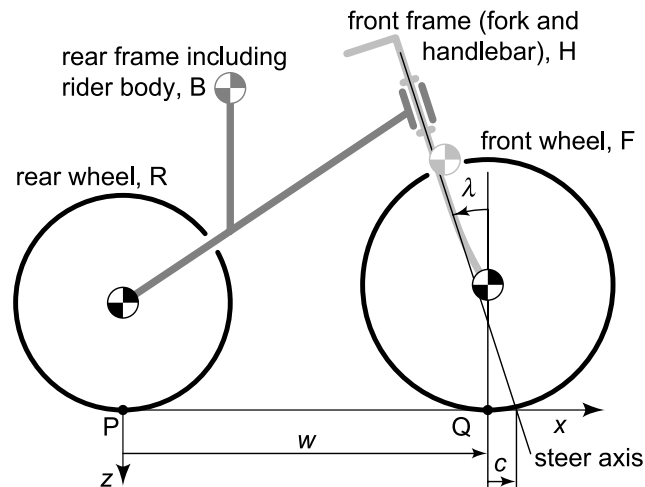


Abbildung 2.1: Basic-Bicycle-Model; aus [8]

von der als konstant angesetzten Vorwärtsgeschwindigkeit angegeben. Eine allgemein gültige, einfache und anschauliche Bedingung für das selbststabilisierende Verhalten von Fahrrädern kann nicht gefunden werden, und so schreiben die Autoren: „*It only narrowly answers the question ‘how does an uncontrolled bicycle stay up?’ by showing that it follows from the equations. A simple explanation does not seem possible ...*“. Kooijman et al. [9] (zusammengefasst in [10]) führten praktische Versuche zum Stabilitätsverhalten eines unbemannten Fahrrads durch und verglichen die gemessenen Ergebnisse mit theoretischen Berechnungen auf Basis des Basic-Bicycle-Model. Sie fanden eine gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Versuch bezüglich des Weavemodes und bestätigten damit die Gültigkeit des Benchmark-Model bei niedriger Fahrgeschwindigkeit und geringer Schwingfrequenz der Eigenbewegungen. In [11] präsentieren Meijaard et al. lineare Bewegungsgleichungen zu einem erweiterten Whipple Bicycle Model. Die Ergänzungen umfassen Reifen mit kreisförmigem Querschnitt, pneumatischem Nachlauf und Reifenrückstellmomenten, außerdem eine geneigte Fahrbahn sowie Luftwiderstand und Antriebs- oder Bremskräfte an den Laufrädern. Kooijman et al. [12] beschreiben den Beitrag von Kreiselkräften und Nachlauf zur Autostabilität und zeigen sowohl rechnerisch als auch praktisch, dass ein Zweirad auch ohne Nachlauf und ohne gyroskopische Effekten der Laufräder selbststabil sein kann. Hierzu ist aber eine extreme Massenverteilung zwischen hinterer und vorderer Baugruppe erforderlich.

2.2 Wobble

In der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts begann man verstärkt die Aufmerksamkeit auf die Dynamik von Motorrädern zu richten. Dabei wurde es unerlässlich, die Reifen als krafterzeugende Komponenten zu modellieren und Elastizitäten in Rahmen und Gabel zu berücksichtigen. Das Aufkommen der rechnergestützten Modellierung und Berechnung erlaubte zudem die Behandlung immer komplexerer Modelle.

Pacejka [13] zeigt den starken Einfluss der Modellierung der Reifenelastizität auf das Shimmy-Phänomen. Neben dem Querschlupf erweist sich die Berücksichtigung des zur Lenkung etwas verzögerten Kraftaufbaus an Luftreifen als wesentlich für die Berechnung selbsterregter Schwingungen.

Sharp verwendete für Untersuchungen zu Stabilität und Steuerverhalten von Motorrädern ein ähnliches Modell wie Whipple und verglich in [14] drei verschiedene Reifenmodelle unterschiedlicher Komplexität. Er gab an, dass zum Abbilden des Wobblemodes ein Querschlupf im Reifenkontaktpunkt zugelassen werden muss. Weiters kam er zum Schluss, dass zur sachgerechten Darstellung der dynamischen Eigenschaften von Motorrädern ein Reifenmodell erforderlich sei, das neben dem Querschlupf auch den dynamischen Kraftaufbau an den Reifen berücksichtige.

Es zeigte sich jedoch, dass das Einbeziehen der Reifenelastizität in die Bewegungsgleichungen alleine eine höhere Dämpfung des Wobblemodes voraussagte, als in der Praxis gemessen wurde. Daraufhin begannen Sharp et al. [15] die Nachgiebigkeiten von Rahmen, Gabel und Laufrädern miteinzubeziehen. Ausgehend von dem Motorradmodell aus [14] verglichen sie drei Erweiterungen um je einen Freiheitsgrad. Modell A erlaubt dem Vorderrad eine laterale Verschiebung längs seiner Drehachse. Modell B berücksichtigt eine Torsion der Gabel samt Vorderrad um eine zur Lenkachse parallele Achse, und in Modell C kann sich die vordere Einheit um eine auf die Lenkachse normal stehende Achse relativ zur hinteren Baugruppe verdrehen. Jede der zusätzlichen Bewegungen wird von einer Feder-Dämpfer-Einheit eingeschränkt. Das mit dem Modell C berechnete Stabilitätsverhalten – insbesondere das des Wobblemodes – stimmt am besten mit den Messungen und Erfahrungen aus Fahrversuchen überein. Dabei sind Wobbleschwingungen in einem Geschwindigkeitsbereich um 15 m/s am geringsten gedämpft, während bei hohen Geschwindigkeiten die Nachgiebigkeit des Rahmens für eine höhere Dämpfung des Lenkungsflatterns sorgt.

Unabhängig von Sharp et al. kam Spierings [16] zu ähnlichen Erkenntnissen. Auch er erweiterte das einfache Motorradmodell aus [14] um einen zusätzlichen Freiheitsgrad und unterteilte die lenkbare vordere Baugruppe in zwei Teile. Ähnlich wie bei Sharps

Modell C kann sich der untere Teil samt Vorderrad relativ zum oberen verdrehen. Neben einer Variation der Verdrehsteifigkeit wird auch der Einfluss verschiedener Lagen dieses fiktiven Gelenkes untersucht. Durch den neu eingeführten Freiheitsgrad zeigen sich zwei grundsätzliche Effekte: zum einen destabilisiert die laterale Auslenkung des Vorderrads den Wobblemode für alle Geschwindigkeiten, während hingegen das mit der Neigung des Vorderrads einhergehende gyroroskopische Moment den Wobble stabilisiert. Letzteres macht sich naturgemäß mit steigender Geschwindigkeit stärker bemerkbar. Cossalter et al. [17] bestärkten diese theoretischen Überlegungen mit fahrdynamischen Messungen an Motorrollern.

2.3 Modellierung des Fahrerkörpers

Im Vergleich zur verfeinerten Behandlung der Reifen und Rahmenelastizitäten wirkt die Annahme eines absolut starren Fahrerkörpers als ziemlich grob. Darauf bezugnehmend schreiben Sharp et al. in [15]: „*As far as the wobble mode is concerned, some doubt must remain over the accuracy of treating the rider as rigidly connected to the rear frame, . . .*“. Es erscheint naheliegend, dass der Fahrer den Fahrzustand nicht nur durch absichtliches Steuern beeinflusst, sondern auch durch passive Bewegungen, als Reaktion auf Eigenbewegungen des Fahrzeugs, auf das Stabilitätsverhalten einwirkt. Im Folgenden werden einige Publikationen angeführt, in denen der menschliche Körper als eine Zusammensetzung mehrerer sich passiv bewogender Massen modelliert wird.

Nishimi et al. [18] führten Fahrversuche zum Stabilitätsverhalten verschiedener Motorräder ohne Fahrereingriff durch und verglichen die Ergebnisse mit Berechnungen anhand eines zwölf-Freiheitsgrade-Modells. Das Hauptaugenmerk wurde dabei auf die dynamische Charakteristik des Fahrerkörpers gelegt, und so ist dieser aus zwei Teilen bestehend abgebildet, bezeichnet mit *lowerbody* und *upperbody*. Ersterer kann sich relativ zum Motorrad lateral verschieben, während sich zweiterer zusätzlich – ähnlich einem umgekehrten Pendel – in Querrichtung neigen kann. Beide Fahrerfreiheitsgrade sind mit linearen Feder-Dämpfer-Elementen beaufschlagt, deren Parameter durch Laborversuche mit mehreren Probanden ermittelt wurden. Berechnungen und Fahrversuche zeigten eine gute Übereinstimmung von Weave- und Wobbleschwingungen. Weitere Analysen ergaben, dass die Parameter für den Fahreroberkörper in erster Linie den Weavemode beeinflussen, während sich die für den unteren Teil hauptsächlich auf den Wobblemode auswirken.

Pick et al. [19] ermittelten die passive Reaktion der Arme von PKW-Fahrern auf kleine Lenkradbewegungen. In verschiedenen Versuchsreihen identifizierten die Autoren den Beitrag der Arme bezüglich Trägheit, Steifigkeit und Dämpfung zum Lenksystem. Es wurde dabei zwischen angespannter und lockerer Armmuskulatur unterschieden. Cossalter et al. führten mit einem Motorradsimulator ähnliche Experimente durch und erfassten die Frequenzantwort von Fahrern mit verschiedener Statur und Fahrerfahrung auf Anregungen von Roll- und Lenkwinkel [20]. Eine folgende Publikation [21] bezieht sich nur auf die Wechselwirkung zwischen Fahrerkörper und Lenkerbewegungen. Den Versuchen liegt ein Fahrermodell zugrunde, welches dem Oberkörper eine Gierbewegung um eine zur Lenkachse parallelen Achse erlaubt. Diese Rotation des Oberkörpers ist über je ein Drehfeder- und Dämpferelement an die Bewegungen des Lenkers sowie an den Motorradrahmen gekoppelt. Es wurden die Trägheits- und Steifigkeitsparameter der verschiedenen Versuchsteilnehmer sowie die eines fiktiven durchschnittlichen Fahrers identifiziert. In Kombination mit einem Motorradmodell ähnlich zu [14] wird der Einfluss solch eines passiven Fahrers auf das Stabilitätsverhalten untersucht und mit der Wirkung eines Lenkungsdämpfers verglichen. Es zeigt sich eine deutliche Stabilisierung des Wobblemodes für alle Geschwindigkeiten und eine Destabilisierung des Weavemodes bei hohen Geschwindigkeiten.

Einen etwas anderen Ansatz wählen Schwab et al. in [22]. Die Autoren modellieren die Bewegungen von Lenker und Fahrerkörper als geschlossene kinematische Schleifen. So werden zwar Bewegungen des Fahrerkörpers ermöglicht, die Anzahl der mathematischen Freiheitsgrade des Gesamtmodells erhöht sich jedoch nicht. Zwei verschiedene Fahrermodelle in Kombination mit dem Benchmark-Model werden verglichen und deren Einfluss auf das Stabilitätsverhalten aufgezeigt. In beiden Modellen sind die Hände über Kugelgelenke an den Lenker gebunden. Im ersten Modell werden die Arme als ausgestreckt und starr modelliert, Lenkbewegungen gehen dann mit einer Oberkörperrotation einher. Im zweiten Modell sind die Arme gebeugt und der Oberkörper starr, Lenkbewegungen bedingen nun Bewegungen der Arme und ein Beugen der scharnierartigen Ellenbogengelenke. Beide Fahrermodelle verändern das Stabilitätsverhalten des Gesamtsystems im Vergleich zum Benchmark-Model mit freihändigem Fahrer. Das erste Modell mit den ausgestreckten Armen lässt die Struktur der Eigenmodi gleich, verschiebt jedoch den Bereich der Autostabilität zu etwas höheren Geschwindigkeiten. Das zweite Modell hingegen verändert die Eigenlenkfähigkeit des Fahrrades derart, dass der Capsizemodus für alle gezeigten Geschwindigkeiten instabil ist und der autostabile Bereich somit komplett verschwindet.

Publikationen, die sich mit bewussten Körperbewegungen zur Regelung des Fahrzeugzustandes auseinandersetzen, sind unter anderem [2], [23], [24], [25]. Eine ausführliche Abhandlung zu diesem Themenbereich inklusive Literaturübersicht ist auch die Diplomarbeit von Martin Haudum [26].

2.4 Ergänzende Literatur

Sharp bietet mit [27] beziehungsweise [24] zwei weitreichende Veröffentlichungen zum Thema Stabilität und Fahrerregelung von Motorrädern respektive Fahrrädern. Ausgehend vom Benchmark-Model erweitert er in [24] dieses Schritt für Schritt um Reifenmodelle, Rahmenelastizitäten und Fahrerfreiheitsgrade. Aus den Berechnungen und einigen Parametervariationen folgert er, dass die Modelle trotz unterschiedlicher Komplexität bei mittleren Geschwindigkeiten grundsätzlich ein ähnliches Verhalten zeigen, bei niedrigen und hohen Geschwindigkeiten treten aber deutliche Unterschiede zu Tage.

Eine umfassende Informationsquelle zum Thema Reifenmodellierung und Wheel-Shimmy stammt von Pacejka [28]. In einem eigenen Kapitel wird unter anderem die Herleitung der linearen Bewegungsgleichung für ein Motorradmodell inklusive Fahrerrollfreiheitsgrad, Rahmenelastizität und Reifenmodell angeführt und anschließend das Stabilitätsverhalten inklusive einiger Parametervariationen diskutiert.

Eine ausführliche Literaturübersicht über die Modellierung von Fahrrädern bietet die Arbeit von Hand [29]. Limebeer et al. [30] fassen viele interessante Aspekte über die Modellierung und das Stabilitäts- und Lenkverhalten von Fahrrädern und Motorrädern zusammen.

An der TU Wien wurden kürzlich drei Diplomarbeiten zum Thema Lenkungsflattern von Fahrrädern verfasst. Ein mit messtechnischer Ausrüstung bestücktes Damen-Trekkingrad stand hierzu zur Verfügung. Angrosch [31] beschreibt ausführlich die symbolische Herleitung und Linearisierung der Bewegungsgleichungen für das mathematische Modell dieses Fahrrads inklusive freihändigem Fahrer und zeigt dessen Stabilitätsverhalten anhand der numerisch berechneten Eigenwerte für Geschwindigkeiten bis 20 m/s. Die Gültigkeit der Modellstruktur sowie der verwendeten Parameter wurde anhand von Messfahrten mit provozierten Weave- oder Wobbleschwingungen bestätigt. Ott [32] übernahm das Modell samt Parameterwerten und verglich das Stabilitätsverhalten mit dem von einfacheren mechanischen Modellen. Dabei zeigte sich der deutliche Einfluss des Reifenmodells auf die Eigenbewegungen. Die Auswir-

kung der verwendeten Reifenparameter wurde daraufhin numerisch untersucht und den Erkenntnissen von Messfahrten mit verschiedenen Reifenmänteln und Reifenluftdrücken gegenübergestellt. Weitere Parameterstudien und Messungen betreffen den Einfluss des polaren Massenträgheitsmoments des Vorderrades und der Lenkgeometrie sowie die Auswirkungen von Zusatzmassen auf Gepäckträgern. Plöchl et al. [33] fasst diese beiden Arbeiten zusammen.

Nusime [34] berechnete die Eigenbewegungen eines speziellen Schlepprades, das die lenkbare Einheit eines Fahrrads mit geneigter Lenkachse abbildet. Querelastizitäten und ein Reifenmodell sind ebenso berücksichtigt. Es zeigt sich eine dem kompletten Fahrradmodell teils ähnliche Wobbleschwingung, die dazugehörige Schwingfrequenz ist aber stets deutlich geringer. Mit dem Fahrradmodell aus [31] und [32] führte sie weitere Parameterstudien durch und richtete dabei den Fokus auf die Modellierung der Rahmenelastizität. Die gewonnenen Erkenntnisse konnten anhand von Messfahrten mit fünf verschiedenen Fahrradrahmen abgeglichen werden.

Von besonderem Interesse für diese Diplomarbeit ist die Veröffentlichung von Magnani [35]. Darin ist das wiederholte Auftreten von Wobbleschwingungen an einem modernen Rennrad während der Abfahrt mit hoher Geschwindigkeit beschrieben. Der Autor und zugleich Fahrer des mit Sensoren für Geschwindigkeit und Beschleunigungen ausgestatteten Rades fuhr dabei in einer auf Rennrädern typischen Sitzposition und hatte beide Hände am Lenker. Neben einer textuellen Beschreibung werden die ausgewerteten Messergebnisse dargestellt. Außerdem wird, gestützt durch weitere Versuche, ein möglicher Zusammenhang zwischen der Frequenz der Wobbleschwingungen und einer strukturellen Eigenfrequenz des Fahrrads aufgezeigt, wobei zwischen einer freihändigen und einer normalen Sitzposition unterschieden wird.

Kapitel 3

Modellbildung

Um reale dynamische Phänomene wie in diesem Fall die Wobbleschwingungen theoretisch untersuchen zu können, muss zuerst ein *mechanisches Ersatzmodell* erstellt werden. Dies ist gleichbedeutend mit einer Idealisierung und Vereinfachung der Realität und ermöglicht es erst, die Wechselwirkung von *Kräften* und *Bewegungen* durch mathematische Gleichungen auszudrücken. Dabei gibt es keine eindeutige Zuordnung zwischen einem technischen System und dem entsprechenden mechanischen Modell – in wie weit vereinfacht wird und welche Idealisierungen getroffen werden können hängt allein von der jeweiligen Problemstellung ab. Das Ersatzmodell muss jedenfalls die relevanten physikalischen Eigenschaften des realen Systems erfassen. Aspekte von untergeordneter Bedeutung und Parameter mit unwesentlichem Einfluss können vernachlässigt werden und helfen dabei, das Modell möglichst übersichtlich zu gestalten und die Interpretation der Ergebnisse nicht unnötig zu erschweren. Vor allem aber sollen nur solche Parameter enthalten sein, die, zumindest ansatzweise, bekannt sind.

Die Aufgabenstellung der vorliegenden Arbeit umfasst die Berechnung des Stabilitätsverhaltens für ein Rennrad samt Fahrer in der Geradeausfahrt. Es soll der gesamte realistische Geschwindigkeitsbereich abgedeckt werden und das Hauptaugenmerk ist dabei auf den Wobblemode und den Einfluss eines sich passiv verhaltenden Fahrers zu legen. Besonders der Unterschied zwischen *hands-off* und *hands-on*, also ob freihändig fahrend oder nicht, soll gezeigt werden.

Sowohl das Fahrrad als auch der menschliche Körper werden dazu als klassisches *Mehrkörpersystem* modelliert. Das Modell besteht dabei „...aus massebehafteten starren Körpern, deren Bewegungen durch Bindungen geometrisch beschränkt sind und auf die verteilte und diskrete Kräfte und Momente einwirken.“ [36].

Zur Berechnung der freihändigen Fahrt wird der gesamte menschliche Körper als völ-

lig starres Gebilde modelliert, das fest mit dem Fahrradrahmen verbunden ist. Die Modellierung des Fahrers mit den Händen am Lenker geschieht wie folgt: Beine, Torso und Kopf sind weiterhin starr, die Arme jedoch sind nun über Gelenke in den Schultern, Ellenbogen und Händen mit dem Lenker verbunden. Die Armstellung ist dabei eindeutig durch die Lenkerposition bestimmt und die Bewegungen der Arme sind an den Lenkwinkel gekoppelt. Trotz dieser zusätzlichen Bewegungen kommen keine Modellfreiheitsgrade hinzu, die topologische Struktur des Modells enthält dadurch je Arm eine *kinematische Schleife*.

Ein spezielles Thema ist die Modellierung des Kontaktes von Reifen und Fahrbahn. Die dabei auftretenden Kräfte und Momente hängen ursächlich mit Deformationen der Lauffläche in der Reifenaufstandsfläche, dem Latsch, zusammen. Dieses Verhalten muss aber nicht direkt modelliert werden, sondern es wird folgendermaßen vorgegangen: die Reifen werden als unendlich dünne, starre Scheiben modelliert, die die Fahrbahn jeweils in einem Punkt berühren. Die darin auftretenden Kräfte und Momente hängen nun von der Neigung des Reifens und dem Schlupf dieses Punktes gegenüber der Fahrbahn ab und können durch vorab bekannte (Differential-)Gleichungen beschrieben werden.

Eine genaue Beschreibung des Modells mitsamt den Begründungen für die getroffenen Annahmen und Vereinfachungen wird in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels gegeben, hier werden zusammenfassend die wichtigsten Idealisierungen genannt:

- alle Körper werden als ideal starr und geometrisch perfekt angenommen
- im unausgelenkten Zustand ist das Modell symmetrisch zur mittleren Längsebene
- alle Gelenke sind frei von Reibung und Lagerspiel
- die Drehfeder- und Drehdämpferelemente sind masselos und verfügen über lineare Kennlinien
- Nickbewegungen zufolge von Lenk- und Rollwinkeln werden für die linearisierten Bewegungsgleichungen nicht berücksichtigt
- Fahrwiderstände wie Luft- und Rollwiderstand werden nicht berücksichtigt
- die Fahrbahn ist horizontal und eben
- die Reifen halten stets Kontakt zur Fahrbahn
- schlupffreies, reines Rollen mit konstanter Geschwindigkeit in Fahrzeuginnenrichtung
- Reifenkräfte und -momente gemäß linearem Reifenmodell nach Abschnitt 3.2

3.1 Fahrradmodell

Den Ausgangspunkt für das Fahrradmodell stellt das bewährte und validierte Benchmark-Fahrradmodell dar, vgl. [8] und Abbildung 2.1. Damit lassen sich Weave- und Capsizemode sowie der bisher unerwähnte (und auch nicht weiter relevante, weil stets stabile) Castormode berechnen. Die Modellierung der Reifen-Fahrbahn Kontakte erfolgt dabei mit nichtholonomen, so genannten knife-edge Bedingungen in lateraler Richtung, Querschleupf und Schräglauf der Reifen können nicht abgebildet werden. Elastizitäten in Rahmen und Gabel werden ebenso nicht berücksichtigt.

Dies reicht aus, um grundlegende Einblicke in das Stabilitäts- und Lenkungsverhalten von Fahrrädern zu erhalten, höherfrequente Schwingungsformen (z. B. Wobble) werden aber nur unzureichend oder gar nicht abgebildet [24]. Dazu schreiben Limebeer und Sharp in [30]: „... , *there is every reason to suspect that the accurate reproduction of bicycle weave- and wobble-mode behavior requires both relaxed side-slipping tyres and flexible frame representation.*“ Aus diesen Gründen erfolgt eine Erweiterung um einen zusätzlichen Freiheitsgrad für die kumulierten Nachgiebigkeiten von Rahmen, Gabel und Felgen in Anlehnung an [16] sowie um ein dynamisches Reifenmodell nach [28].

Auf den oft verwendeten Rollfreiheitsgrad des Fahreroberkörpers wird verzichtet. Wie aus den Messfahrten von Ott [32] hervorging, hatte die tatsächliche Anspannung der Bauch- und Rumpfmuskulatur des Fahrers einen wesentlichen Einfluss auf die Wobbleschwingungen. Fehlende Körperspannung des Testfahrers führte zu einer deutlichen Erhöhung der Wobbledämpfung und einer Verringerung der Frequenz. Die Modellannahme des Oberkörperrollfreiheitsgrades konnte dieses Verhalten jedoch keineswegs abbilden, selbst große Variationen der zu dem Freiheitsgrad eingeführten Feder- und Dämpferparameter zeigten keine wesentliche Veränderung des Stabilitätsverhaltens von Weave, Capsize und Wobble. Auch einige im Zuge der vorliegenden Diplomarbeit getätigte Vergleichsrechnungen mit und ohne Oberkörpergelenk sowie variierenden Parametern und Gelenkslagen weisen auf den nur untergeordneten Einfluss dieser Bewegungsmöglichkeit auf den Wobblemode hin.

Mit Ausnahme des weggelassenen Fahrerrollfreiheitsgrades entspricht das Modell dem der vorhergegangenen Diplomarbeiten [31], [32], [34]. Es besteht aus fünf Körpern: dem Rahmen inklusive dem völlig starr damit verbundenen Fahrer, dem Lenker, der Gabel und den beiden Laufrädern. Letztere können sich um ihre feste Drehachse im Bezug zum Rahmen beziehungsweise zur Gabel frei drehen. Diese Relativrotation verändert dabei die Massengeometrie des Gesamtsystems nicht, Rahmen und Hinter-

rad sowie Gabel und Vorderrad können also jeweils als *Gyrostat* betrachtet werden. Somit können die Massen und Trägheitsmomente der Laufräder zu denen des Rahmens beziehungsweise der Gabel dazugezählt werden, die Kreiselkräfte zufolge der Relativbewegung müssen beim Aufstellen der Bewegungsgleichungen allerdings extra berücksichtigt werden.

Abbildung 3.1 zeigt das so entstandene Modell mit den wichtigsten geometrischen Abmessungen. Zur hinteren Baugruppe (m – *mainframe*) zählen der Fahrradrahmen mit allen dazugehörenden Komponenten und Anbauteilen, der menschliche Fahrerkörper und das komplette Hinterrad. Das β -Gelenk teilt die lenkbare vordere Baugruppe in zwei Teile: die obere Lenkereinheit (f – *front-assembly*), bestehend aus Lenker, Vorbau und Teilen des Gabelschaftes, und die untere Gabeleinheit (s – *sub-frame*), die sich aus der restlichen Gabel und dem Vorderrad zusammensetzt.

Die Lenkachse ist gegenüber dem Rahmen um den festen Winkel ε geneigt, der Durchstoßpunkt mit der Fahrbahn wird mit B bezeichnet. Der Radstand l gibt den Abstand der beiden theoretischen Aufstandspunkte C und D an, der Normalabstand von C zur Lenkachse ist der Nachlauf t_c .

Die Bewegungsfreiheitsgrade des Modells sind in Abbildung 3.2 ersichtlich. Als Referenz zur Bewegungsbeschreibung gegenüber dem Inertialsystem wird das x_D, y_D, z_D -Koordinatensystem verwendet. Die x_D -Achse fällt mit der Schnittlinie $\overline{BD}$ der Fahrradsymmetrieebene mit der Fahrbahn zusammen, die y_D -Achse zeigt vom Fahrer aus gesehen nach rechts, die z_D -Achse folglich vertikal nach unten. Dieses Koordinatensystem bewegt sich mit der Längsgeschwindigkeit u sowie der Quergeschwindigkeit v und rotiert mit der Gierrate r gegenüber einem Inertialsystem.

Der Rollwinkel φ wird als Neigungswinkel der hinteren Baugruppe gegenüber dem D -System um die x_D -Achse definiert. Der Lenker kann sich relativ zum Rahmen um die Lenkachse mit dem Lenkwinkel δ drehen. Für theoretische Untersuchungen wird dieser Freiheitsgrad mit einem Drehfeder- und Drehdämpferelement beaufschlagt. Der zusätzliche β -Freiheitsgrad ermöglicht eine Auslenkung der unteren Gabeleinheit. Die entsprechende Drehachse steht normal auf die Lenkachse und ist fest im System der oberen Lenkeinheit. Auch diese Bewegung wird durch eine Drehfeder und einen Drehdämpfer gehemmt.

Wie beispielsweise in [8], [24] oder [31] angegeben, wirken sich die Längssymmetrie und die spätere Linearisierung der Bewegungsgleichungen um die aufrechte Position in zweierlei Hinsicht aus. Zum einen entfallen Nickbewegungen des Fahrrads, die durch große Lenk-, β - und Rollwinkel entstehen würden, und zum anderen ist so die

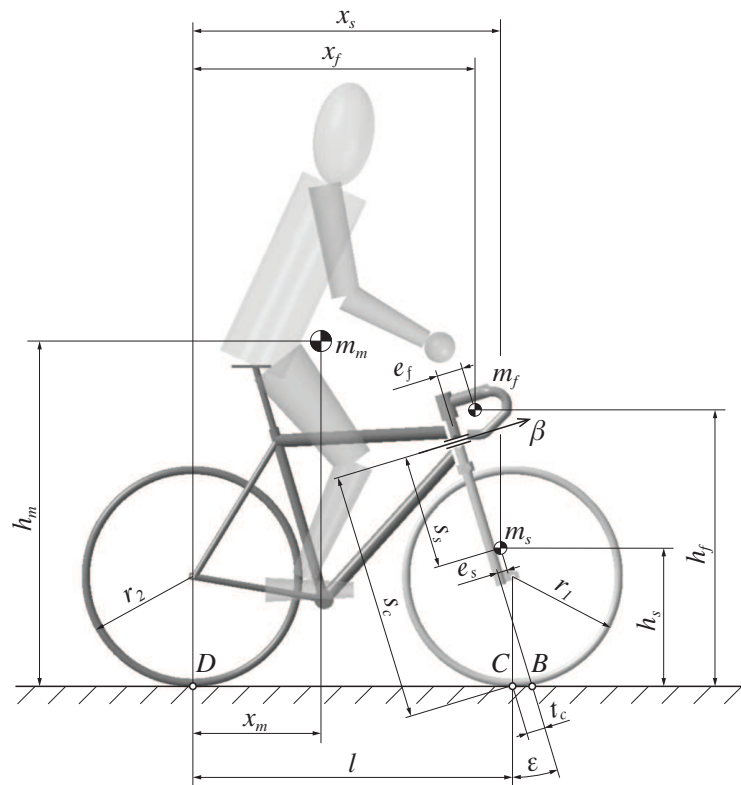


Abbildung 3.1: geometrische Abmessungen am aufrechten Fahrradmodell

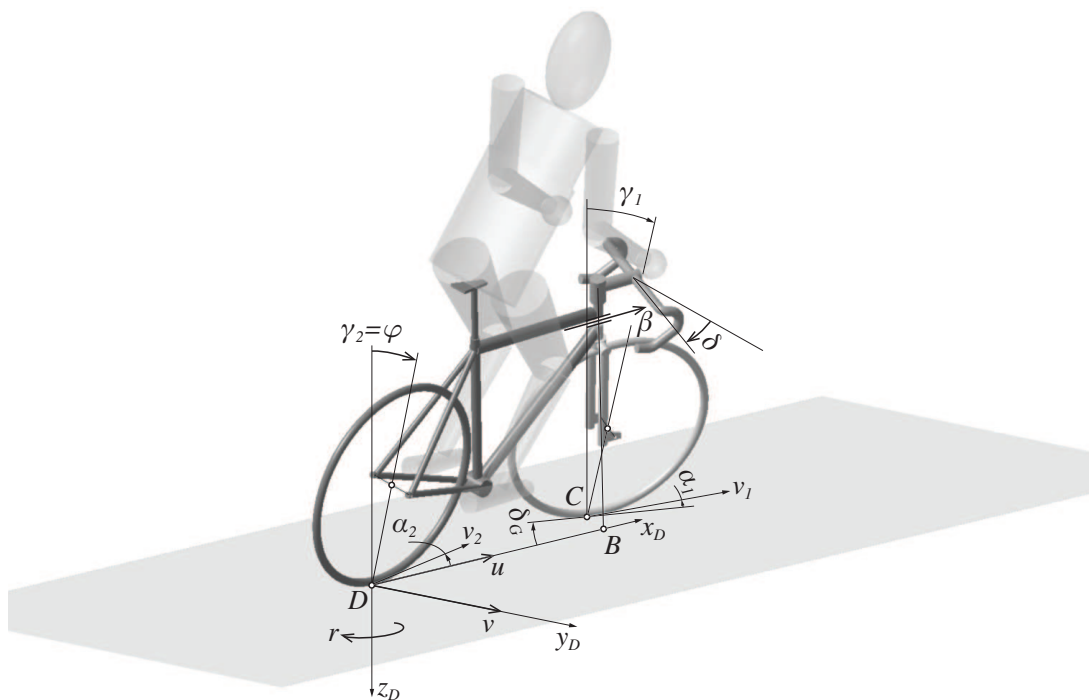


Abbildung 3.2: Fahrradmodell inklusive Reifenwinkel in allgemeiner Lage

Längsdynamik vollständig von der Querdynamik entkoppelt. Weiters werden keine antreibenden oder bremsenden Kräfte betrachtet und die Vorwärtsgeschwindigkeit u als stets gleichbleibend angesetzt. Die Fahrgeschwindigkeit ist dadurch in den Bewegungsgleichungen zur Lateralodynamik lediglich als konstanter Parameter enthalten. Aus der Rollbedingung für beide Laufräder folgen außerdem deren jeweils zur Vorwärtsgeschwindigkeit u proportionale und zu dem entsprechenden Abrollradius r_1 (vorne) beziehungsweise r_2 (hinten) umgekehrt proportionale Rotationsgeschwindigkeiten.

In Summe ergeben sich also $f = 5$ Freiheitsgrade der Lage, die im Vektor der *generalisierten Lagekoordinaten*

$$\underline{q} = [y \quad \psi \quad \varphi \quad \delta \quad \beta]^T \quad (3.1)$$

zusammengefasst werden.

Aufgrund der ebenen Fahrbahn ist die absolute Lage des Referenzkoordinatensystems im Raum allerdings nicht von Bedeutung, die entsprechenden Größen y und ψ sind *zyklische Koordinaten* und kommen in den linearisierten Bewegungsgleichungen nicht vor. Die verbleibenden Roll-, Lenk- und β -Winkel werden in dem reduzierten Vektor der generalisierten Lagekoordinaten

$$\underline{q}_{red} = [\varphi \quad \delta \quad \beta]^T \quad (3.2)$$

zusammengefasst. Quergeschwindigkeit, Gierrate, Roll-, Lenk- und β -Winkelgeschwindigkeit werden ebenso wie die dazugehörenden Beschleunigungen in Vektorform angeschrieben:

$$\underline{\dot{q}} = [v \quad r \quad \dot{\varphi} \quad \dot{\delta} \quad \dot{\beta}]^T, \quad (3.3)$$

$$\underline{\ddot{q}} = [\dot{v} \quad \dot{r} \quad \ddot{\varphi} \quad \ddot{\delta} \quad \ddot{\beta}]^T. \quad (3.4)$$

3.1.1 Geneigte Fahrbahn

Die Modellannahme der horizontalen Fahrbahn und insbesondere das Fehlen von Luftkräften auch bei hohen Geschwindigkeiten erscheint auf den ersten Blick recht grob, kann aber durch folgende Überlegung erklärt werden.

Erweitert man das Fahrradmodell um eine mit dem Winkel ζ geneigte Fahrbahn, so bedeutet dies eine Aufteilung des Schwerfelds in eine Komponente normal zur Fahrbahn, $g_{z_g} = g \cos \zeta$ in die globale z -Richtung, und in eine Komponente parallel zur

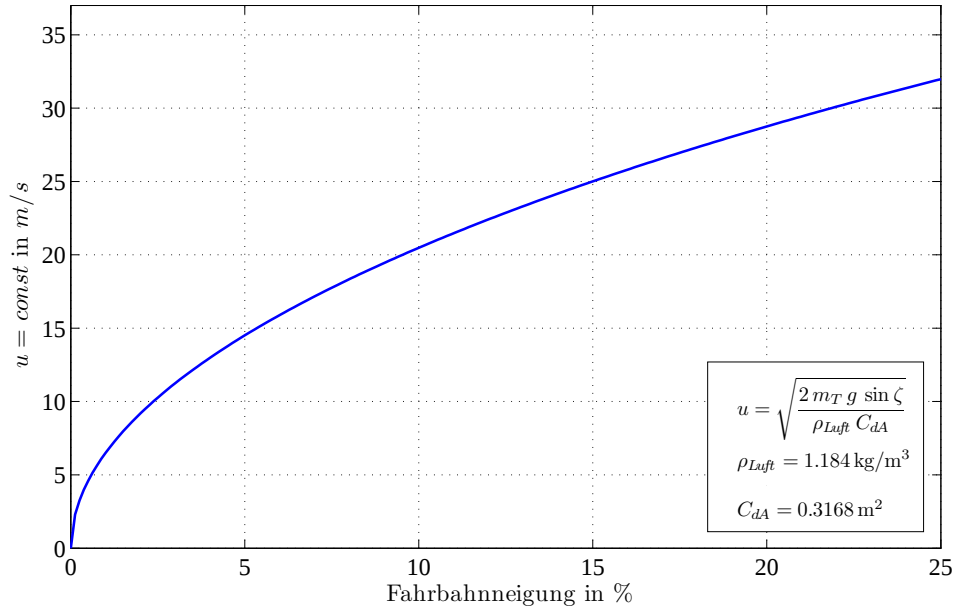


Abbildung 3.3: konstante Fahrgeschwindigkeit bei geneigter Fahrbahn

Fahrbahn, $g_{x_g} = g \sin \zeta$ in die globale x -Richtung. Dadurch verringern sich zunächst die Radaufstandskräfte, $F_{z1} + F_{z2} = m_T g_{z_g}$, allerdings wirkt auf das Gesamtmodell zusätzlich die Hangabtriebskraft, $F_{x_g} = m_T g_{x_g}$. Die Gesamtmasse m_T beinhaltet das Fahrradmodell und den Fahrer, außerdem ist dabei zu beachten, dass die Stellung des Fahrrades gegenüber der Fahrbahn, ausgedrückt durch den Gierwinkel ψ , nun schon von Bedeutung ist und dieser keine zyklische Koordinate mehr darstellt.

Für eine konstante Fahrgeschwindigkeit müssen nun die straßenparallelen Gewichtskraftkomponenten von bremsenden Kräften zufolge des Luftwiderstandes ausgeglichen werden. Eine genaue Erfassung aller auf die umströmten Modellkörper wirkenden Kräfte ist an dieser Stelle weder möglich noch notwendig, in einer ersten Näherung werden keine Auf- oder Abtriebskräfte berücksichtigt, und so können alle Luftkräfte zu einer im sogenannten *Druckpunkt* angreifenden Einzelkraft entgegen der Fahrtrichtung zusammengefasst werden,

$$F_d = \frac{1}{2} \rho_{Luft} C_{dA} u^2. \quad (3.5)$$

Mit für Rennradfahrer typischen Werten für das Produkt aus Stirnfläche und Luftwiderstandsbeiwert, C_{dA} gemäß [37], kann nach Abbildung 3.3 die Verknüpfung von Fahrbahngefällen und den sich dabei einstellenden Fahrgeschwindigkeiten, unter der Vernachlässigung aller sonstigen Fahrwiderstände, hergestellt werden. Aus dem Kurvenverlauf kann nun geschlossen werden, dass die Annahme einer unbeschleunigten

Fahrt ohne Antriebs- oder Bremskräfte auch für hohe Fahrgeschwindigkeiten gerechtfertigt ist.

Neben der bremsenden Wirkung bedingen die Luftkräfte im Allgemeinen auch eine Verschiebung der Aufstandskräfte zwischen Vorder- und Hinterrad, die maßgebliche Größe dafür ist die Lage des Druckpunktes in Relation zum Gesamtschwerpunkt. Der Einfluss dieses Effekts auf das Stabilitätsverhalten kann jedoch auch durch das vorhandene Modell mit horizontaler Fahrbahn untersucht werden, siehe dazu Abschnitt 5.4.1.

3.2 Reifenmodell

An der Stelle des Kontaktes von Reifen und Fahrbahn bildet sich ein gemeinsames Berührgebiet aus, in dem Normaldruck und Schubspannungen übertragen werden. Die Reifenkräfte und -momente resultieren aus dieser Spannungsverteilung und ermöglichen eine Änderung von Betrag und Richtung der Geschwindigkeit des Fahrradmodells. Dies geht stets mit einem (im Allgemeinen geringfügigen) Abgleiten der Reifen auf der Fahrbahn, dem Schlupf, einher.

Die Berechnung der für die Querdynamik relevanten Reifenkräfte und -momente erfolgt mit einem Modell für Motorradreifen nach Pacejka [28]. Die Bewegungsgleichungen des Fahrradmodells werden später um die aufrechte Geradeausfahrt linearisiert, insofern ist es naheliegend, auch ein von den Bewegungen des Fahrrades linear abhängiges Reifenmodell zu verwenden. Einige geometrische Effekte, wie beispielsweise eine Vertikalbewegung zufolge des seitlichen Abrollens auf der Lauffläche bei großen Rollwinkeln, können so unberücksichtigt bleiben. Für nähere Informationen wird auf [28] verwiesen, ausführliche Erklärungen dazu finden sich auch in den Diplomarbeiten von Angrosch [31] und Ott [32], an dieser Stelle werden nur die fertigen Gleichungen angegeben.

In Abbildung 3.4 sind die eingepprägten Reifenkräfte und -momente dargestellt, ebenso wie der reale Berührpunkt mit der Fahrbahn und der fiktive Kontaktpunkt, in den die Kräfte reduziert werden. Während der unbeschleunigten Geradeausfahrt ändert sich die Gewichtsverteilung zwischen Vorderrad und Hinterrad nicht, die Aufstandskraft F_z je Laufrad kann folglich aus dem statischen Gleichgewicht berechnet werden. Die Verschiebung der Wirkungslinie dieser Kraft in den fiktiven Kontaktpunkt hat das aufrichtende Kippmoment M_x (engl.: *overturnig couple*) zur Folge, man beach-

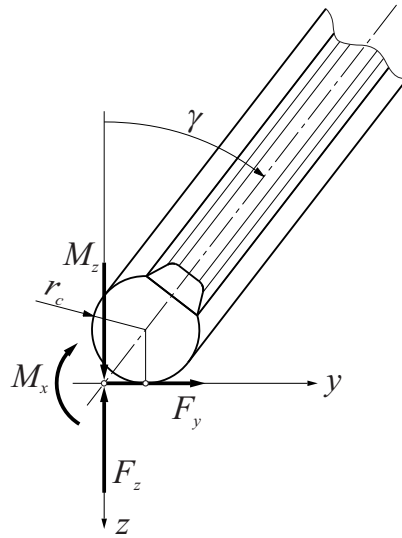


Abbildung 3.4: im fiktiven Kontaktpunkt angreifende Reifenkräfte und -momente; aus [32]

te die positive Zählrichtung in Abbildung 3.4 sowie das negative Vorzeichen in der Bestimmungsgleichung 3.20.

Die Seitenkraft F_y setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, sowohl Sturz- als auch Schräglaufwinkel tragen zur Generierung bei. Als Sturzwinkel wird die Neigung der Reifenlängssymmetrieebene zu einer Normalen auf die Fahrbahn bezeichnet, der Tangens des Schräglaufwinkels ist als das (negative) Verhältnis zwischen Quer- und Längsgeschwindigkeit des fiktiven Kontaktpunkts in der Fahrbahnebene definiert. Der Schräglaufwinkel verursacht eine über die Latschlänge asymmetrische Querschubspannungsverteilung in der Aufstandsfläche, der daraus resultierende Seitenkraftanteil ist um den sogenannten *pneumatischen Nachlauf* zum fiktiven Kontaktpunkt verschoben. Aus der Reduktion in diesen folgt ein Reifenrückstellmoment M_z (engl.: *aligning torque*), zu dem zusätzlich auch ein Moment zufolge dem Sturzwinkel beiträgt.

3.2.1 Sturz- und Schräglaufwinkel

Die Sturzwinkel $\gamma_{1,2}$ und Schräglaufwinkel $\alpha_{1,2}$ für Vorderrad (Index 1) und Hinterrad (Index 2) sind schematisch in Abbildung 3.2 eingetragen, die exakte Berechnung erfolgt über geometrische Beziehungen (vgl. [28]). Die Zusammenhänge zwischen den Reifenwinkeln und den Modellfreiheitsgraden werden zur weiteren Verwendung um die aufrechte Position linearisiert. Man beachte, dass der Lenkachsenwinkel ε eine feste Größe ist und durchaus größere Werte annehmen kann.

Die Sturzwinkel für Vorderrad und Hinterrad ergeben sich zu:

$$\sin \gamma_1 = \cos \beta \sin \varphi \cos \delta + \cos \beta \cos \varphi \sin \varepsilon \sin \delta + \cos \varphi \cos \varepsilon \sin \beta, \quad (3.6)$$

$$\gamma_1 \approx \varphi + \sin \varepsilon \delta + \cos \varepsilon \beta, \quad (3.7)$$

$$\gamma_2 = \varphi. \quad (3.8)$$

Weiters wird der tatsächliche Lenkwinkel des Vorderreifens gegenüber der Fahrzeuglängsebene benötigt. Dieser Bodenlenkwinkel δ_G entsteht durch die Überlagerung des eigentlichen Lenkwinkels von Roll- und β -Winkel und kann folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\tan \delta_G = \frac{\cos \varepsilon \sin \delta \cos \beta - \sin \varepsilon \sin \beta}{-\cos \beta \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \delta + \cos \beta \cos \varphi \cos \delta - \sin \varphi \cos \varepsilon \sin \beta}, \quad (3.9)$$

$$\delta_G \approx \cos \varepsilon \delta - \sin \varepsilon \beta. \quad (3.10)$$

Zur Beschreibung der beiden Schräglaufwinkel werden die Geschwindigkeitsvektoren der fiktiven Aufstandspunkte C und D entlang der Fahrbahn benötigt. Sofern als Darstellungssystem dieser Vektoren das x_D, y_D, z_D -Referenzsystem nach Abbildung 3.2 verwendet wird, ist die Längsgeschwindigkeit der beiden Punkte gleich der Fahrgeschwindigkeit u , und aus der Definition der Schräglaufwinkel

$$\alpha_1 = \delta_G - \arctan \left(\frac{v_{C|D,y}}{v_{C|D,x}} \right), \quad \alpha_2 = -\arctan \left(\frac{v_{D|D,y}}{v_{D|D,x}} \right) \quad (3.11)$$

folgt

$$\alpha_1 = \delta_g - \arctan \left(\frac{v + l r - t_c \dot{\delta} - s_c \dot{\beta}}{u} \right), \quad (3.12)$$

$$\alpha_1 \approx \cos \varepsilon \delta - \sin \varepsilon \beta - \frac{1}{u} (v + l r - t_c \dot{\delta} - s_c \dot{\beta}), \quad (3.13)$$

$$\alpha_2 = -\arctan \left(\frac{v}{u} \right), \quad (3.14)$$

$$\alpha_2 \approx -\frac{v}{u}. \quad (3.15)$$

An den Gleichungen 3.13 und 3.15 ist außerdem die beschränkte Gültigkeit des Reifenmodells auf Geschwindigkeiten $|u| > 0$ gut ersichtlich.

3.2.2 Transiente Reifenwinkel

Bevor nun die entsprechenden Bestimmungsgleichungen für die Reifenkräfte und -momente angegeben werden, wird kurz auf das dynamische Verhalten rollender Reifen eingegangen. Es muss dabei berücksichtigt werden, dass auf eine transiente Änderung der Reifenwinkel keine unmittelbare Änderung der Reifenkräfte im gleichen Maße erfolgt. Dieses verzögerte Ansprechen der Kräfte und Momente hat nach [13] einen wesentlichen Einfluss auf das Wheel-Shimmy-Phänomen.

Um diese Beschaffenheit miteinzubeziehen, werden transiente Reifenwinkel eingeführt, die mit den tatsächlichen Reifenwinkeln über jeweils ein Verzögerungsglied erster Ordnung zusammenhängen:

$$\frac{\sigma_{\gamma i}}{u} \dot{\gamma}'_i + \gamma'_i = \gamma_i, \quad (3.16)$$

$$\frac{\sigma_{\alpha i}}{u} \dot{\alpha}'_i + \alpha'_i = \alpha_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.17)$$

Die gestrichenen Größen stellen darin die transienten Winkel dar, die für das Übertragungsverhalten charakteristischen (und hier als konstant angenommenen) Parameter $\sigma_{\gamma i}$ und $\sigma_{\alpha i}$ werden jeweils als Einlaufflänge (engl.: *relaxation length*) für Sturzwinkel und Schräglaufwinkel bezeichnet.

3.2.3 Reifenkräfte und Reifenmomente

Das verwendete Reifenmodell gibt nun einen linearen Zusammenhang zwischen den (transienten) Reifenwinkeln und den eingangs beschriebenen Kräften und Momenten an. Die entsprechenden Proportionalitätsfaktoren werden als *Schräglauf*-, *Sturz*-, *Rückstellmoment*- und *Kippmomentsteifigkeit* bezeichnet.

Die Bestimmungsgleichungen der Seitenkräfte, Rückstellmomente und Kippmomente lauten damit:

$$F_{yi} = c_{F\alpha i} \alpha'_i + c_{F\gamma i} \gamma'_i, \quad (3.18)$$

$$M_{zi} = -c_{M\alpha i} \alpha'_i + c_{M\gamma i} \gamma'_i, \quad (3.19)$$

$$M_{xi} = -c_{Mxi} \gamma_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.20)$$

Man beachte, dass die Kippmomente ihren Ursprung in der geometrischen Beschreibung des Reifenmodells haben und mit den tatsächlichen und nicht mit den transienten Sturzwinkeln berechnet werden.

3.3 Fahrerkörper

Aufgrund des im Vergleich zum Fahrrad viel höheren Gewichts bestimmt der Fahrerkörper hauptsächlich die Masse, die Lage des Schwerpunktes und die Massenträgheitsmomente des Gesamtsystems. Dadurch kommt seiner Modellierung generell, und der Abbildung der gebückten Sitzposition am Rennrad im Besonderen, eine große Bedeutung zu. Außerdem sollen in weiterer Folge die passiven Bewegungen der Arme während beginnender Wobbleschwingungen mitberechnet werden, wofür deren Trägheitseigenschaften akkurat und trotzdem möglichst einfach mathematisch erfasst werden müssen. Um dies zu erreichen, wird auf das im folgenden Abschnitt vorgestellte biomechanische Körpermodell zurückgegriffen.

3.3.1 Hanavan-Modell

Im Zuge des amerikanischen Raumfahrtprogramms in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts begann man verstärkt an biomechanischen Modellen des menschlichen Körpers zu forschen. Auch das im Weiteren verwendete *Hanavan-Modell* [38] hat hier seinen Ursprung. Es wurde entwickelt, um die Trägheitseigenschaften von Astronauten in beliebigen Körperhaltungen zu ermitteln. Dazu ermöglicht die Kenntnis von fünfundzwanzig personenbezogenen anthropometrischen Maßen die vollständige Berechnung von Schwerpunktsposition und Trägheitstensor.

Abbildung 3.5 zeigt das entsprechende Modell. Es besteht aus fünfzehn geometrisch einfachen, starren Körpern mit konstanter Dichte, wofür mit elementaren Berechnungsformeln jeweils Massenmittelpunkt und Trägheitstensor ermittelt werden können. Die relative Lage der einzelnen Segmente zueinander wird über (in der Abbildung nicht dargestellte) Gelenkspunkte definiert, die zum Teil am Rand der Volumina, teilweise aber auch innerhalb oder außerhalb davon liegen. Auf den Typ des Gelenkes, ob Kugelgelenk, Scharniergelenk oder sonstige, wird dabei keine Rücksicht genommen. Das Zusammenfassen der Teilstücke zum Gesamtkörper ergibt schlussendlich dessen vollständige Massengeometrie.

Das Hanavan-Modell würde es prinzipiell ermöglichen, einen individuellen Körper nachzubilden, es erscheint für diese Diplomarbeit aber zweckmäßiger, einen repräsentativen Fahrer mit durchschnittlicher Statur zu verwenden. In [38] sind dazu die fünfundzwanzig notwendigen anthropometrischen Daten des 5., 25., 50., 75. und 95. Perzentils des damaligen Flugpersonals der amerikanischen Luftwaffe angegeben. Das 50. Perzentil entspricht dabei einer Körpergröße von 1.76 m bei einer Masse von

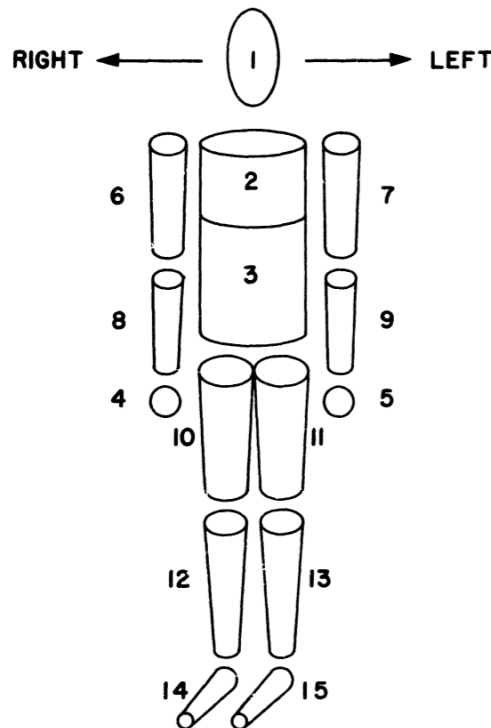


Abbildung 3.5: original Hanavan-Modell; aus [38]

73.4 kg. Diese Maße scheinen auch gut für durchschnittliche Rennradfahrer zu passen und werden im Weiteren verwendet.

Alle notwendigen Berechnungsvorschriften zur Modellerstellung können aus der Originalpublikation [38] entnommen werden, die Angabe der Körperdaten erfolgt dort allerdings in Zoll und Pfund. Eine MATLAB-Routine zur Generierung der Segmentdaten in SI-Einheiten wurde dankenswerterweise von Prof. Dr. Schmiedmayer¹ zur Verfügung gestellt. Die Abmaße des Modellkörpers sowie die Massen und Trägheitstensenoren der einzelnen Segmente sind in Anhang A angeführt.

3.3.2 Fahrerkörper „hands-off“

Zur Simulation der freihändigen Fahrt (*Hands-Off-Model*) wird der Fahrerkörper als unbeweglich und starr mit dem Rahmen verbunden modelliert. Unterschiedliche Haltungen führen dabei zu großen Unterschieden in der Massengeometrie des Gesamtsystems. Wie sich dies auf das Stabilitätsverhalten auswirkt, soll anhand von zwei verschiedenen Sitzhaltungen – einer aufrechten und einer gebeugten – untersucht werden. In beiden Positionen wird der Versatz der Pedale in Längsrichtung ignoriert,

¹Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Heinz-Bodo Schmiedmayer

Institut für Mechanik und Mechatronik, Forschungsgruppe Fahrzeugdynamik E325 / A1

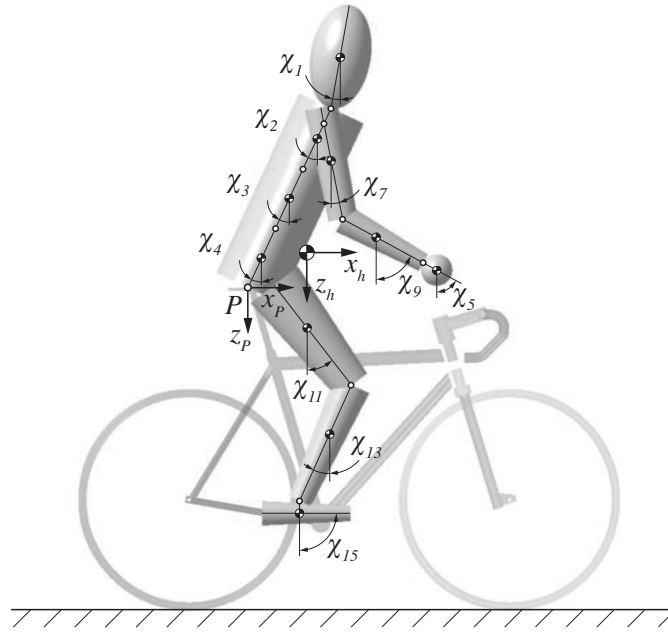


Abbildung 3.6: Segmentwinkel zur aufrechten Sitzposition

außerdem wird der lichte Abstand der Beine im Vergleich zum originalen Hanavan-Modell etwas verbreitert. Auch die Haltung der Arme wird dabei stets so gewählt, dass die Mittellinien aller Gliedmaßensegmente der linken und rechten Körperhälfte parallel verlaufen, und so wird auch beim Fahrerkörper eine Lateralsymmetrie erreicht.

Die Abbildung der gebeugten Sitzposition verlangt nach einer deutlichen Krümmung der Wirbelsäule respektive des Torsos. Zur besseren Nachbildung wurde hierzu der Unterkörper des Modells (Nummer 3 in Abbildung 3.5) auf halber Höhe und symmetrisch durch ein zusätzliches Gelenk unterteilt. Das tatsächlich verwendete Modell setzt sich also aus sechzehn Körpern zusammen.

Abbildung 3.6 zeigt den freihändigen Fahrer am Rennrad sitzend in aufrechter Position. Der Rumpf bildet eine Gerade und ist dabei soweit aufgerichtet, dass die Hände den Lenker nicht erreichen können. Die Beschreibung der Geometrie des Körpermodells erfolgt im fest mit dem Fahrradrahmen verbundenen x_P, y_P, z_P -System mit Ursprung im Kontaktpunkt des Fahrers mit dem Sattel. Die Positionswinkel der einzelnen Segmente gegenüber dem Koordinatensystem sind in Tabelle 4.3 angegeben.

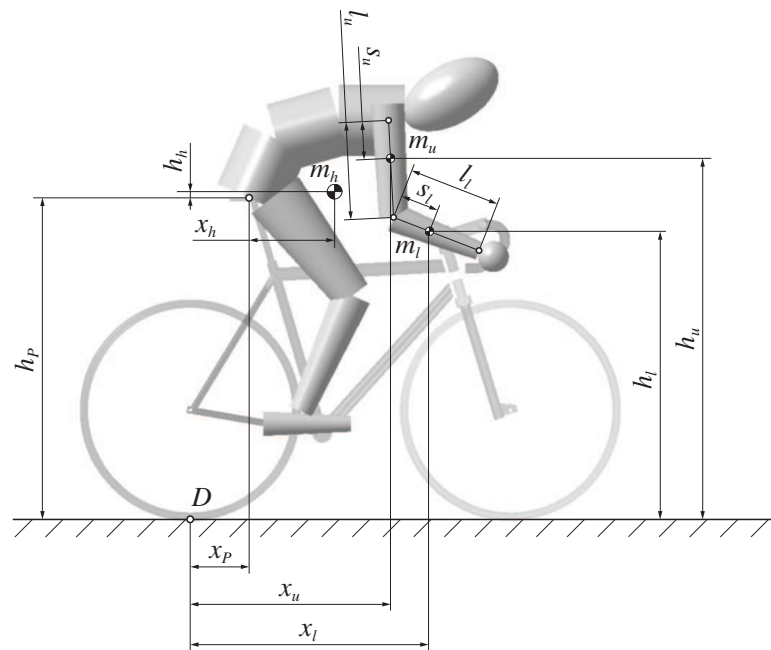


Abbildung 3.7: geometrische Abmessungen zur gebeugten Sitzposition

Die gebeugte Position, Abbildung 3.7, entspricht der üblichen Körperhaltung von Rennradfahrern bei hohen Geschwindigkeiten. Die Arme des Fahrers sind leicht gebeugt und die Hände befinden sich an der Stelle des als *Unterlenker* bezeichneten gebogenen Teils des Rennradlenkers. Die Lenkerbreite entspricht dem Abstand der Schultergelenke, die Arme verlaufen somit parallel. Diese gedrungene Sitzposition ergibt im Vergleich zur aufrechten Position eine deutliche Änderung der Schwerpunktlage und der Trägheitsmomente, vgl. dazu Tabelle 4.4. Darin sind auch die entsprechenden Segmentwinkel eingetragen. Trotz identischer Sattelposition für beide Körperhaltungen ergeben sich geringfügig unterschiedliche Beinwinkel, da die Lage der Hüftgelenke an die Neigung des Unterkörpers gekoppelt ist.

3.3.3 Fahrerkörper „hands-on“

Die Eigenbewegung des Wobble wird durch oszillierende Bewegungen der lenkbaren vorderen Baugruppe des Fahrradmodells dominiert, der Anteil der restlichen Freiheitsgrade ist im Vergleich zu dem des Lenkwinkels δ gering. Mit dem *Hands-On-Model* soll nun der Einfluss eines sich – zumindest teilweise – mitbewegenden Fahrerkörpers auf das Lenkungsflattern abgebildet werden.

Treten die Wobbleinstabilitäten während der Fahrt sehr plötzlich auf, so wird der

überraschte Fahrer im Allgemeinen versuchen, mit einer *aktiven* Reaktion, beispielsweise dem Anspannen der Armmuskulatur oder einer Änderung der Sitzposition, dem unerwünschten Fahrzustand so schnell wie möglich entgegenzuwirken. Während einer stabilen Fahrt oder am Beginn einer Instabilität erscheint die Annahme eines sich völlig *passiv* verhaltenden Fahrers jedoch als gerechtfertigt. Ein solches inaktives Verhalten wird im Folgenden modelliert, und alle später getätigten Aussagen über das Stabilitätsverhalten sind unter Berücksichtigung dieser Hypothese zu verstehen.

Lenkungsflattern und Fahrerbewegungen

Es verbleibt letztlich die Frage, welche Teile des Fahrerkörpers an den Wobbleschwingungen beteiligt sind und wie sich diese Beteiligung auf das Stabilitätsverhalten auswirkt. In der Vergangenheit wurden unterschiedliche Ansätze getätigt, um den Einfluss eines sich passiv verhaltenden Fahrers auf die Eigendynamik von Motorrädern und Fahrrädern abzubilden, siehe dazu Abschnitt 2.3 der Literaturrecherche.

Eine vielversprechende Herangehensweise stammt von Schwab et al. [22]. Die Autoren verknüpfen dabei die Bewegungen des Fahrerkörpers direkt mit denen des Lenkers und vergleichen zwei Arten solcher *Mechanismen*. Die Abbildung 3.8 skizziert die Situation. In einer ersten Modellvorstellung (a) sind die Arme komplett durchgestreckt und die Ellenbogengelenke starr, eine Drehbewegung des Lenkers bedingt eine Rotation des Oberkörpers. In einer alternativen Modellierung (b) verbleibt der Oberkörper unbeweglich, Lenkerdrehungen verursachen Bewegungen der jeweils gelenkig verbundenen Ober- und Unterarme. Keine der beiden Varianten erhöht die Anzahl der Modellfreiheitsgrade, und außer Geometrie- und Trägheitseigenschaften der Arme sind keine zusätzlichen Parameter erforderlich. Die Modelle wurden jeweils mit dem Basic-Bicycle-Model kombiniert und das Stabilitätsverhalten der aufrechten Geradeausfahrt mit konstanter Geschwindigkeit mittels einer Mehrkörperdynamiksoftware berechnet. Vor allem die Armbewegungen des zweiten Modells verändern im Vergleich zum Standardmodell die Eigenwerte Weave und Capsize dermaßen drastisch, dass das Geschwindigkeitsintervall der Autostabilität verschwindet.

Der Wobblemode wird mangels an Freiheitsgraden für Reifenschlupf und Rahmenelastizität von dem eben beschriebenen Berechnungsmodell aus [22] nicht abgebildet. Gerade diese Herangehensweise scheint jedoch für die Analyse des *Hands-On-Lenkungsflatterns* sehr gut zu passen. Instabile Wobbleschwingungen, beziehungsweise Wheel-Shimmy im Allgemeinen, sind selbsterregte Oszillationen mit einer Frequenz von mehreren Hertz, die sich ausgehend vom Reifen über das Fahrrad und den

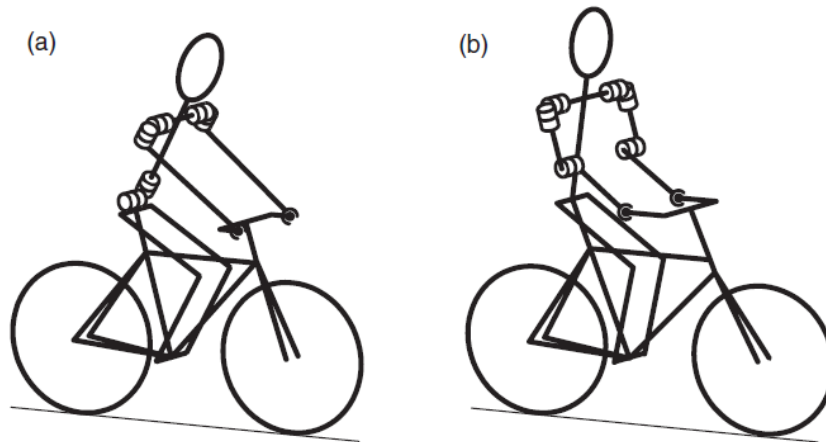


Abbildung 3.8: Ansätze zur Modellierung des Fahrers „hands-on“; aus [22]

Lenker auf den Fahrer übertragen. Hält der Fahrer den Lenker fest umschlossen, so sind die Arme das Verbindungsglied zwischen Fahrrad und Fahrerkörper und damit direkt von den Schwingungen betroffen. Durch deren Massenträgheit einerseits und durch kumulierte Steifigkeiten und Dämpfungen zufolge der Armmuskulatur andererseits besteht eine Rückwirkung der Armbewegungen auf die (Lenk-)Bewegungen des Fahrrads (vgl. dazu auch [19]). Um diese Rückwirkung zu untersuchen, wird das im folgenden Abschnitt vorgestellte *Hands-On-Model* verwendet.

Modellbeschreibung

Den Startpunkt der Modellierung bildet das freihändige Fahrermodell in der gebeugten Sitzhaltung, die dabei beibehalten wird. Die unteren Extremitäten sowie Rumpf, Hals und Kopf des Fahrerkörpers sind weiterhin unbeweglich und ein fester Teil der hinteren Baugruppe (*mainframe*) des Fahrradmodells.

Die Hände und Arme sind jedoch über eine Reihe von Gelenken mit dem Fahrradlenker verbunden. Die Modellierung der Gelenke geschieht dabei so, dass die Position der Arme stets durch den Lenkwinkel vorgegeben ist und diese somit keine eigenen Freiheitsgrade innehaben. Dafür muss die tatsächliche Mobilität von Schulter-, Ellenbogen- und Handgelenken etwas eingeschränkt werden, die verbleibenden Bewegungen müssen aber mit den menschlichen anatomischen Voraussetzungen verträglich sein. Außerdem muss bei der Wahl der Sitzposition berücksichtigt werden, dass die Arme ausreichend gebeugt sind und genug Bewegungsspielraum haben, um der Lenkerdrehung zu folgen.

Die Abbildungen 3.9 und 3.10 zeigen das Modell mit eingeschlagenem Lenker, die angegebenen Winkel kennzeichnen die dafür notwendigen Armbewegungen. Die Beweglichkeit des Schultergelenks ist dabei soweit eingeschränkt, dass die Oberarme stets in einer zum Fahrradrahmen parallelen Ebene verbleiben. Innerhalb dieser Ebene dreht sich der linke beziehungsweise der rechte Oberarm (Index l sowie Index r) um den Winkel $\theta_{1l,r}$ (*Anteversion*). Zusätzlich ist eine Drehung im Schultergelenk um die jeweilige Längsachse der Oberarme mit dem Winkel $\theta_{3l,r}$ möglich (*Außenrotation*). Die Ellenbogengelenke werden als reine Scharniergelenke abgebildet und die Beugung durch den Winkel $\theta_{2l,r}$ (*Flexion*) beschrieben. Die Hände sind starr mit dem Lenker verbunden und schließen so über die als Kugelgelenke modellierten Handgelenke die *kinematischen Schleifen*. Die die Lage der Arme beschreibenden Winkel werden in den Vektoren

$$\underline{q}_{arm,j} = [\theta_{1,j} \quad \theta_{2,j} \quad \theta_{3,j}]^T, \quad j = l, r \quad (3.21)$$

zusammengefasst.

Es existieren offensichtlich zwei Möglichkeiten, die Lage der Handgelenke in Relation zum Fahrrad geometrisch zu beschreiben. Ein Weg führt über die vordere Baugruppe, den Lenker und die Hände, ein anderer über die hintere Baugruppe und die Ober- und Unterarme. Beide Alternativen müssen natürlich zu einem identischen Ergebnis führen. Die mathematische Formulierung dieser Bedingung folgt im nächsten Kapitel.

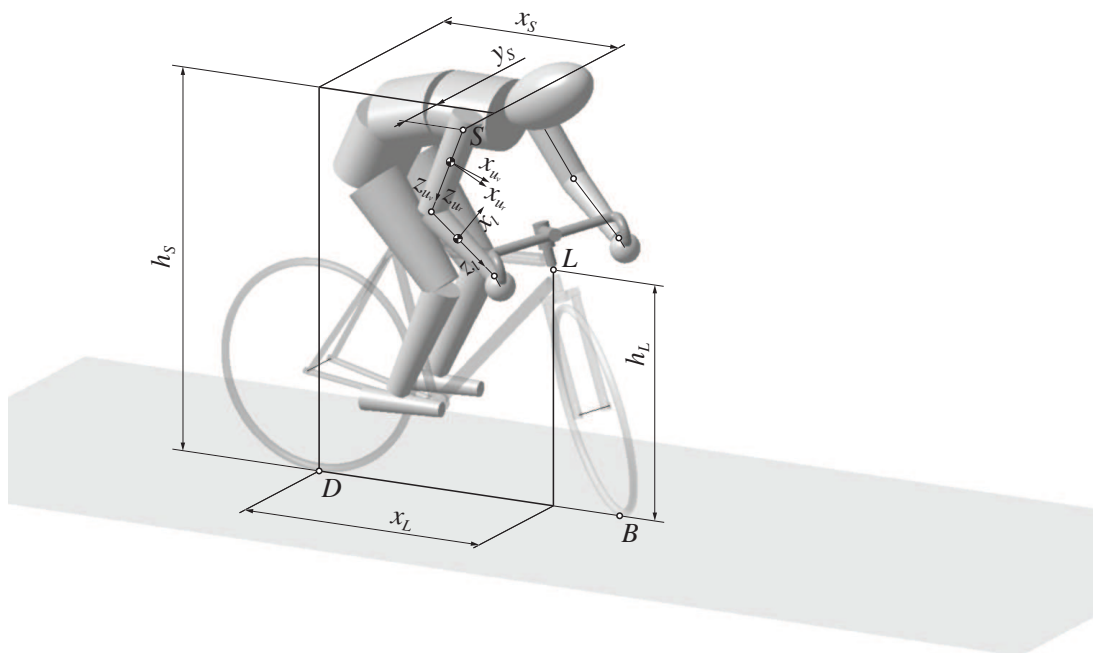


Abbildung 3.9: Hands-On-Model mit stark eingeschlagenem Lenker

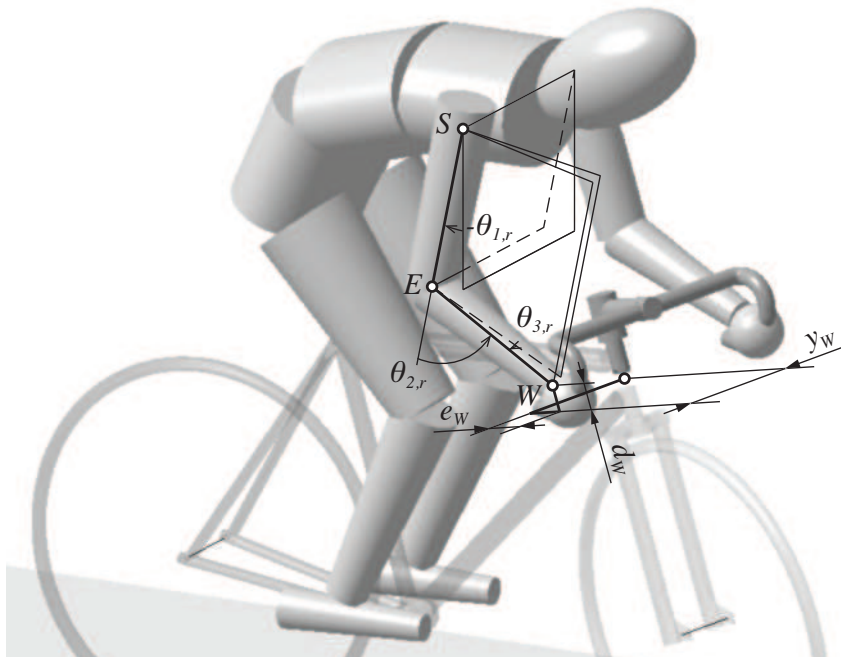


Abbildung 3.10: Winkelstellung der Arme zum Hands-On-Model

Kapitel 4

Bewegungsgleichungen

4.1 Hands-Off-Model

Mit den im vorangegangenen Kapitel beschriebenen mechanischen Ersatzmodellen für Fahrrad, Reifenkräfte und Fahrerkörper können nun die Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems in zunächst nichtlinearer Form aufgestellt werden. Es gilt allerdings zu beachten, dass in die Modellbildung eine nachfolgende Linearisierung der Bewegungsgleichungen bereits einbezogen war und so vorab einige Vereinfachungen wie beispielsweise die Vernachlässigung der Nickbewegungen getroffen wurden. Für etwaige nichtlineare Analysen müsste das Modell dementsprechend überarbeitet werden.

Unter diesen Voraussetzungen können für das vorliegende Hands-Off-Model mit $f = 5$ Freiheitsgraden die allgemeinen Bewegungsgleichungen als System von fünf gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den verallgemeinerten Lagekoordinaten $\underline{q}$ angeschrieben werden:

$$\mathbf{M}(\underline{q}) \ddot{\underline{q}} + \underline{\Phi}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \underline{Q}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}), \quad (4.1)$$

mit der $f \times f$ Massenmatrix $\mathbf{M}$, dem $f \times 1$ Vektor der verallgemeinerten Zentrifugal-, Kreisel- und Corioliskräfte und -momente $\underline{\Phi}$ sowie dem $f \times 1$ Vektor der verallgemeinerten eingprägten Kräfte und Momente $\underline{Q}$. Letzterer enthält neben den Feder-, Dämpfer- und Gewichtskräften auch die Reifenkräfte.

Der Bewegungszustand der aufrechten, unbeschleunigten Geradeausfahrt stellt eine Gleichgewichtslösung der Differentialgleichungen dar. Die Stabilität dieser Lösung, also das Verhalten des Systems bei einer kleinen Störung des Gleichgewichts, ist letztendlich von Interesse. Dazu wird die Bewegungsgleichung 4.1 um diesen Behar-

rungszustand linearisiert. Dies führt auf ein System aus fünf linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die nur mehr kleine Auslenkungen der Modellfreiheitsgrade ausgehend vom Gleichgewichtszustand beschreiben.

Pacejka zeigt in [28] die Herleitung der linearen Bewegungsgleichungen für ein Motorradmodell und verwendet dazu die Lagrange-Gleichungen zweiter Art. Angrosch [31] benutzt für das kinematisch ähnliche Trekkingradmodell einen Mehrkörperformalismus auf Basis des D'Alembertschen Prinzips und veranschaulicht in seiner Diplomarbeit ausführlich die Herleitung und Linearisierung der Bewegungsgleichungen inklusiver vieler Zwischenschritte.

4.1.1 Lineare Bewegungsgleichungen für das Hands-Off-Model

Das Hands-Off-Model gleicht – mit Ausnahme des weggelassenen Fahrerrollfreiheitsgrads φ_r – dem Trekkingradmodell der vorangegangenen Diplomarbeiten. Dementsprechend werden die dort angeführten Gleichungen in der Notation von Ott [32] weiterverwendet. Die fünf Bewegungsgleichungen, angeschrieben um den Referenzpunkt D , lauten:

$$v : \quad m_T(\dot{v} + ur) + m_T x_T \dot{r} + m_T h_T \ddot{\varphi} + m_H e_H \ddot{\delta} - m_s s_s \ddot{\beta} = F_{y1} + F_{y2} \quad (4.2)$$

$$r : \quad m_T x_T(\dot{v} + ur) + I_{Tzz|D} \dot{r} + I_{Txx|D} \ddot{\varphi} - G_T u \dot{\varphi} + I_{H\delta z_D} \ddot{\delta} - G_1 \sin \varepsilon u \dot{\delta} + I_{s\beta z_D} \ddot{\beta} - G_1 \cos \varepsilon u \dot{\beta} = l F_{y1} + M_{z1} + M_{z2} \quad (4.3)$$

$$\varphi : \quad m_T h_T(\dot{v} + ur) + I_{Txx|D} \dot{r} + G_T ur + I_{Txx|D} \ddot{\varphi} - m_T h_T g \varphi + I_{H\delta x_D} \ddot{\delta} + G_1 \cos \varepsilon u \dot{\delta} - S_\delta g \delta + I_{s\beta x_D} \ddot{\beta} - G_1 \sin \varepsilon u \dot{\beta} - S_\beta g \beta = M_{x1} + M_{x2} \quad (4.4)$$

$$\delta : \quad m_H e_H(\dot{v} + ur) + I_{H\delta z_D} \dot{r} + G_1 \sin \varepsilon ur + I_{H\delta x_D} \ddot{\varphi} - G_1 \cos \varepsilon u \dot{\varphi} - S_\delta g \varphi + I_{H\delta \delta} \ddot{\delta} + k_\delta \dot{\delta} + (c_\delta - S_\delta \sin \varepsilon g) \delta + I_{s\beta \delta} \ddot{\beta} - G_1 u \dot{\beta} - S_\beta \sin \varepsilon g \beta = -t_c F_{y1} + M_{x1} \sin \varepsilon + M_{z1} \cos \varepsilon \quad (4.5)$$

$$\beta : \quad -m_s s_s(\dot{v} + ur) + I_{s\beta z_D} \dot{r} + G_1 \cos \varepsilon ur + I_{s\beta x_D} \ddot{\varphi} + G_1 \sin \varepsilon u \dot{\varphi} - S_\beta g \varphi + I_{s\beta \delta} \ddot{\delta} + G_1 u \dot{\delta} - S_\beta \sin \varepsilon g \delta + I_{s\beta \beta} \ddot{\beta} + k_\beta \dot{\beta} + (c_\beta - S_\beta \cos \varepsilon g) \beta = -s_c F_{y1} + M_{x1} \cos \varepsilon - M_{z1} \sin \varepsilon \quad (4.6)$$

Die darin enthaltenen Ausdrücke werden im Folgenden angeführt, für genauere Informationen wird auf [31] und [32] verwiesen.

Die benötigten Längenmaße sind aus Abbildung 3.1 zu entnehmen. Der Trägheitstensor zu jedem Fahrradkörper wird um dessen Schwerpunkt mit der Konvention

$$\mathbf{I}_{i|i} = \begin{bmatrix} I_{ixx} & 0 & -I_{ixz} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{ixz} & 0 & I_{izz} \end{bmatrix}, \quad i = m, f, s \quad (4.7)$$

festgelegt. Die Deviationsmomente I_{iyx} und I_{iyz} verschwinden aufgrund der Längssymmetrie, und die Trägheitsmomente um die y -Achse I_{iyy} werden nicht weiter benötigt, da keine Nickbewegungen zugelassen sind.

Die Ausdrücke für das Gesamtsystem (Index T) setzen sich zusammen aus:

$$m_T = m_m + m_f + m_s \quad (4.8)$$

$$x_T = (m_m x_m + m_f x_f + m_s x_s) / m_T \quad (4.9)$$

$$h_T = (m_m h_m + m_f h_f + m_s h_s) / m_T \quad (4.10)$$

$$I_{Txx|D} = I_{mxx} + m_m h_m^2 + (I_{fxx} + I_{sxx}) \cos^2 \varepsilon + (I_{fzz} + I_{szz}) \sin^2 \varepsilon - 2(I_{fzx} + I_{szx}) \cos \varepsilon \sin \varepsilon + m_f h_f^2 + m_s h_s^2 \quad (4.11)$$

$$I_{Tzz|D} = I_{mzz} + m_m x_m^2 + (I_{fxx} + I_{sxx}) \sin^2 \varepsilon + (I_{fzz} + I_{szz}) \cos^2 \varepsilon + 2(I_{fzx} + I_{szx}) \cos \varepsilon \sin \varepsilon + m_f x_f^2 + m_s x_s^2 \quad (4.12)$$

$$I_{Txz|D} = -I_{mxz} + m_m x_m h_m - (I_{fxx} + I_{sxx} - I_{fzz} - I_{szz}) \cos \varepsilon \sin \varepsilon + (I_{fzx} + I_{szx})(1 - 2 \cos^2 \varepsilon) + m_f x_f h_f + m_s x_s h_s \quad (4.13)$$

Ebenso werden die Massen und Trägheitsmomente der oberen Lenkeinheit f und der unteren Gabeleinheit s zu einem Gesamtsystem H zusammengefasst:

$$m_H = m_f + m_s \quad (4.14)$$

$$e_H = (m_f e_f + m_s e_s) / m_H \quad (4.15)$$

$$I_{H\delta\delta} = I_{fzz} + I_{szz} + m_f e_f^2 + m_s e_s^2 \quad (4.16)$$

$$I_{H\delta x_D} = (I_{fzz} + I_{szz}) \sin \varepsilon - (I_{fzx} + I_{szx}) \cos \varepsilon + m_f e_f h_f + m_s e_s h_s \quad (4.17)$$

$$I_{H\delta z_D} = (I_{fzz} + I_{szz}) \cos \varepsilon + (I_{fzx} + I_{szx}) \sin \varepsilon + m_f x_f e_f + m_s x_s e_s \quad (4.18)$$

Für die untere Gabeleinheit ergeben sich die Terme:

$$I_{s\beta\beta} = I_{sxx} + m_s s_s^2 \quad (4.19)$$

$$I_{s\beta x_D} = I_{sxx} \cos \varepsilon - I_{sxz} \sin \varepsilon - m_s s_s h_s \quad (4.20)$$

$$I_{s\beta z_D} = -I_{sxx} \sin \varepsilon - I_{sxz} \cos \varepsilon - m_s s_s x_s \quad (4.21)$$

$$I_{s\beta\delta} = -I_{sxz} - m_s e_s s_s \quad (4.22)$$

Die für die gyroskopischen Kräfte relevanten polaren Massenträgheitsmomente der Laufräder werden in folgenden Ausdrücken berücksichtigt:

$$G_1 = I_{1yy}/r_1 \quad G_2 = I_{2yy}/r_2 \quad G_T = G_1 + G_2 \quad (4.23)$$

Die folgenden Größen ergeben nach der Multiplikation mit der Fallbeschleunigung je ein statisches Moment um die Lenkachse sowie um die β -Achse:

$$S_\delta = m_T \frac{x_T}{l} t_c + m_H e_H \quad (4.24)$$

$$S_\beta = m_T \frac{x_T}{l} s_c - m_s s_s \quad (4.25)$$

Der Term $m_T \frac{x_T}{l}$ stellt darin die auf den vorderen Kontaktpunkt wirkende Masse des Gesamtsystems dar. Für die Aufstandskräfte an den Reifen gilt also:

$$F_{z1} = m_T \frac{x_T}{l} g \quad (4.26)$$

$$F_{z2} = m_T \frac{l - x_T}{l} g \quad (4.27)$$

Außerdem gelten die geometrischen Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} e_i &= (x_i - l) \cos \varepsilon - t_c + h_i \sin \varepsilon \\ s_i &= s_c + (x_i - l) \sin \varepsilon - h_i \cos \varepsilon, \quad i = f, s \end{aligned} \quad (4.28)$$

4.2 Hands-On-Model

Das Hands-On-Model unterscheidet sich vom Hands-Off-Model lediglich durch die hinzukommenden Bewegungen der Arme des menschlichen Körpermodells, die Kinetik des Fahrrads und die Bestimmungsgleichungen der Reifenkräfte sind für beide Modelle gleich. Diese zunächst vielleicht klein erscheinende Erweiterung hat jedoch große Auswirkungen auf die mathematische Beschreibung des Gesamtsystems, die

topologische Struktur des Modells ändert sich nämlich grundlegend.

Das Hands-Off-Model weist eine *Baumstruktur* auf, im Sinne des D'Alembertschen Prinzips können die verallgemeinerten Lagekoordinaten $\underline{q}$ unabhängig voneinander variiert werden. Die Bewegung der Arme des Hands-On-Model ist jedoch an den Fahrradlenker gebunden, die virtuellen Verdrehungen der Armwinkel sind dadurch abhängig von den Verdrehungen des Lenkwinkels, man spricht von *kinematischen Schleifen*.

Zur mathematischen Behandlung des geschlossenen Mehrkörpersystems werden die Handgelenke zunächst gedanklich aufgetrennt, wodurch sich die Arme frei bewegen können. Dadurch entsteht wiederum ein System mit Baumstruktur, allerdings erhöht sich die Anzahl der Freiheitsgrade von $f = 5$ um die nun unabhängigen Armwinkel auf $f^b = f + 2 \times 3 = 11$. Der Vektor der verallgemeinerten Lagekoordinaten für das aufgeschnittene System lautet somit:

$$\begin{aligned} \underline{q}^b &= \begin{bmatrix} y & \psi & \phi & \delta & \beta & \theta_{1,l} & \theta_{2,l} & \theta_{3,l} & \theta_{1,r} & \theta_{2,r} & \theta_{3,r} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \underline{q}^T & \underline{q}_{arm,l}^T & \underline{q}_{arm,r}^T \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Durch die Bestimmung von $n^c = f^b - f = 6$ geometrischen *Schleifenschließbedingungen* werden die aufgetrennten Handgelenkshälften wieder zusammengeführt und damit die Abhängigkeiten der Armwinkel $\theta_{i,j}$ vom Lenkwinkel δ formuliert.

4.2.1 Schleifenschließbedingung

Zur Beschreibung der Schleifenschließbedingung werden die Lagevektoren der Handgelenke benötigt. Wie bereits in Abschnitt 3.3.3 angedeutet, kann diese auf zwei verschiedenen Wegen geschehen. Das Gleichsetzen der so erhaltenen Vektoren liefert jeweils drei Gleichungen – die Schleifenschließbedingungen.

Die Vorgehensweise wird anhand des rechten Arms gezeigt, die linke Seite erfolgt analog dazu. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird bei den Zwischenschritten auf eine Indexierung für links und rechts verzichtet.

Berechnung über Armwinkel

Die Angabe der Lage des rechten Handgelenks erfolgt im rahmenfesten x_m, y_m, z_m -System mit Koordinatenursprung im *mainframe*-Schwerpunkt. Ausgehend davon ergibt sich nach den Abbildungen 3.7, 3.9 und 3.10 und der Verwendung der Transfor-

mationsmatrizen

$$\mathbf{A}_{mu_v} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{1,r} & 0 & \sin \theta_{1,r} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{1,r} & 0 & \cos \theta_{1,r} \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{A}_{u_v u_r} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{3,r} & -\sin \theta_{3,r} & 0 \\ \sin \theta_{3,r} & \cos \theta_{3,r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{A}_{u_r l} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{2,r} & 0 & \sin \theta_{2,r} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{2,r} & 0 & \cos \theta_{2,r} \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

sowie dem Vektoren zur rechten Schulter und den Vektoren zwischen den einzelnen Gelenkspunkten

$$\underline{r}_{SD|m} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ -h_S \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

$$\underline{r}_{ES|u_r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_u \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

$$\underline{r}_{WE|l} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_l \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

die Lage des rechten Handgelenks W , beschrieben über die Armwinkel $\theta_{i,r}$, zu

$$\begin{aligned} {}^m \underline{r}_{WD|m,r} &= \underline{r}_{SD|m} + \mathbf{A}_{mu_v} \mathbf{A}_{u_v u_r} \left(\underline{r}_{ES|u_r} + \mathbf{A}_{u_r l} \underline{r}_{WE|l} \right) \\ &= \begin{bmatrix} x_S + l_u \sin \theta_{1,r} + l_l (\cos \theta_{2,r} \sin \theta_{1,r} + \sin \theta_{2,r} \cos \theta_{3,r} \cos \theta_{1,r}) \\ y_S + l_l \sin \theta_{2,r} \sin \theta_{3,r} \\ -h_S + l_u \cos \theta_{1,r} + l_l (\cos \theta_{2,r} \cos \theta_{1,r} - \sin \theta_{2,r} \cos \theta_{3,r} \sin \theta_{1,r}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Berechnung über Lenkwinkel

Als zweite Möglichkeit kann die Lage des rechten Handgelenks mit Hilfe der Lenkerstellung bestimmt werden. Man beachte dabei, dass die Hände starr mit dem Lenker verbunden und damit ein Teil der oberen Lenkeinheit f sind. Außerdem entspricht

die halbe Lenkerbreite dem halben Schultergelenksabstand y_S .

Mit den Transformationsmatrizen für Lenkkopfwinkel ε und Lenkwinkel δ ,

$$\mathbf{A}_{mw} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{A}_{wf} = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

und den Vektoren zum Lenkkopf und weiter zum rechten Handgelenk

$$\underline{r}_{LD|m} = \begin{bmatrix} x_L \\ 0 \\ -h_L \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

$$\underline{r}_{WL|f} = \begin{bmatrix} e_W \\ y_S \\ -d_W \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

ergibt sich die alternative Lagebeschreibung des rechten Handgelenks W in Abhängigkeit des Lenkwinkels δ zu

$$\begin{aligned} {}^f \underline{r}_{WD|m,r} &= \underline{r}_{LD|m} + \mathbf{A}_{mw} \mathbf{A}_{wf} \underline{r}_{WL|f} \\ &= \begin{bmatrix} x_L - d_W \sin \varepsilon + e_W \cos \varepsilon \cos \delta - y_S \cos \varepsilon \sin \delta \\ e_W \sin \delta + y_S \cos \delta \\ -h_L - d_W \cos \varepsilon - e_W \sin \varepsilon \cos \delta + y_S \sin \varepsilon \sin \delta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Implizite Schleifenschließbedingung

Die beiden Lagevektoren ${}^m \underline{r}_{WD|m,r}$ und ${}^f \underline{r}_{WD|m,r}$ beschreiben offenbar den gleichen Punkt im Raum und müssen folglich ident sein. Diese Forderung stellt einen impliziten Zusammenhang zwischen den Winkelstellungen des rechten Arms $\underline{q}_{arm,r}$ und dem Lenkwinkel dar:

$$\underline{c}_r(\delta, \underline{q}_{arm,r}) = {}^m \underline{r}_{WD|m,r} - {}^f \underline{r}_{WD|m,r} = \underline{0}. \quad (4.42)$$

Die analoge Formulierung für den linken Arm lautet:

$$\underline{c}_l(\delta, \underline{q}_{arm,l}) = {}^m \underline{r}_{WD|m,l} - {}^f \underline{r}_{WD|m,l} = \underline{0}. \quad (4.43)$$

Die beiden Bedingungen 4.42 und 4.43 können zu einem Vektor $\underline{c}_{ges}$ zusammengefasst,

$$\underline{c}_{ges}(\underline{q}^b) = \begin{bmatrix} \underline{c}_l^T & \underline{c}_r^T \end{bmatrix}^T, \quad (4.44)$$

und der Zusammenhang zwischen den virtuellen Verschiebungen von Arm- und Lenkwinkel durch die Gleichung

$$\delta \underline{c}_{ges} = \frac{\partial \underline{c}_{ges}}{\partial \underline{q}^b} \delta \underline{q}^b = \mathbf{C}(\underline{q}^b) \delta \underline{q}^b = \underline{0} \quad (4.45)$$

definiert werden. Alle sechs Schleifenschließbedingungen sind voneinander unabhängig, die Bindungs-Jacobimatrix $\mathbf{C}$ hat somit vollen Zeilenrang.

4.2.2 Allgemeine Bewegungsgleichungen für das Hands-On-Model mit Bindungsgleichungen

Mit dem erweiterten Vektor der verallgemeinerten Lagekoordinaten $\underline{q}^b$ können die allgemeinen nichtlinearen Bewegungsgleichungen für das Hands-On-Model als Differential-Algebraisches Gleichungssystem in der Form

$$\mathbf{M}^b(\underline{q}^b) \ddot{\underline{q}}^b + \Phi^b(\underline{q}^b, \dot{\underline{q}}^b) - \mathbf{C}^T(\underline{q}^b) \underline{\lambda} = \underline{Q}^b(\underline{q}^b, \dot{\underline{q}}^b) \quad (4.46)$$

$$\underline{c}_{ges}(\underline{q}^b) = \underline{0} \quad (4.47)$$

angeschrieben werden.

Abgesehen von der Bedingung 4.47 kommt formal zu den Bewegungsgleichungen 4.1 lediglich der Term $\mathbf{C}^T(\underline{q}^b) \underline{\lambda}$ hinzu. Dieser Ausdruck berücksichtigt die durch das Auftrennen der Handgelenke entstandenen Zwangskräfte. Im übertragenen Sinn sorgen diese Kräfte dafür, dass die beiden aufgetrennten Handgelenkshälften wieder beisammen und die kinematischen Schleifen stets geschlossen sind. Die Einträge des Vektors $\underline{\lambda}$ werden als *Lagrange Multiplikatoren* bezeichnet. Dabei ist zu beachten, dass die Anfangsbedingungen zur Differentialgleichung 4.46 die algebraische Gleichung 4.47 und deren zeitliche Ableitung ebenfalls erfüllen müssen.

Eine symbolische Angabe der linearisierten Form der Bewegungsgleichungen 4.46 und 4.47 ist prinzipiell möglich. Zu den $f^b = 11$ Differentialgleichungen für die Freiheitsgrade kommen allerdings die $n^c = 6$ algebraischen Gleichungen für die Lagrange Multiplikatoren noch hinzu, gemessen an den linearen Gleichungen 4.2 – 4.6 des Hands-Off-Model wäre eine solche Darstellung allerdings etwas unübersichtlich. Um die Bewegungsgleichungen des Hands-On-Model in ansehnlicher Form zu erhalten,

wird deswegen die im Weiteren präsentierte Vorgehensweise angewendet. Für weitere Informationen über die Theorie von Mehrkörpersystemen mit geschlossenen Schleifen wird auf die Literatur verwiesen, z. B. [36], [39], [40].

4.2.3 Übergang auf Minimalkoordinaten

Die aufrechte Geradeausfahrt stellt auch für das Hands-On-Model einen Gleichgewichtszustand dar, die mit einer Linearisierung einhergehende Beschränkung auf kleine Bewegungen der Modellfreiheitsgrade gilt dabei ebenso. Dies erlaubt es, die *impliziten* Schleifenschließbedingungen 4.42 und 4.43 in einem lokalen Bereich um den Linearisierungspunkt als *expliziten* Zusammenhang zwischen den Armwinkeln $\theta_{i,j}$ und dem Lenkwinkel δ in Form der Reihendarstellung

$$\begin{bmatrix} \theta_{1,j} \\ \theta_{2,j} \\ \theta_{3,j} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \theta_{10,j} \\ \theta_{20,j} \\ \theta_{30,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11,j} \\ u_{21,j} \\ u_{31,j} \end{bmatrix} \delta + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{12,j} \\ u_{22,j} \\ u_{32,j} \end{bmatrix} \delta^2 + \dots, \quad j = l, r \quad (4.48)$$

anzugeben. Die festen Winkel $\theta_{i0,j}$ bezeichnen darin die Armstellung bei unausgelenktem Lenker ($\delta = 0$) und sind natürlich gleich für den rechten und linken Arm, $\theta_{i0,l} = \theta_{i0,r} = \theta_{i0}$. Die Koeffizienten $u_{i1,j}, u_{i2,j}$ können als dimensionslose *Übersetzungen* zwischen den Drehbewegungen von Lenker und Armen interpretiert werden. Die Beziehung 4.48 gilt dabei auch für Zeitableitungen sowie für Variationen zufolge der virtuellen Verschiebungen.

Mit diesem funktionellen Zusammenhang können die nichtlinearen Bewegungsgleichungen des Hands-On-Model unter der Verwendung der $f = 5$ Minimalkoordinaten $\underline{q}$ und den entsprechenden Ableitungen erstellt werden. Um der nachfolgenden Linearisierung der gesamten Hands-On-Bewegungsgleichungen nicht vorzugreifen, muss die Taylorentwicklung von Gleichung 4.48 bis zur zweiten Ordnung durchgeführt werden.

Die Berechnung der in Gleichung 4.48 auftretenden Koeffizienten beruht auf einem mathematischen Satz über implizite Funktionen (siehe z. B. [41]). Dieser sichert die Existenz einer jeweils eindeutigen lokalen Auflösung der Schleifenschließbedingungen 4.42 und 4.43 nach dem Lenkwinkel, gibt allerdings keine konkrete Methode zur Bewerkstelligung dieser Auflösungen an.

Aus der (mehrmaligen) impliziten Differentiation der Schleifenschließbedingungen nach dem Lenkwinkel können jedoch die (höheren) Ableitungen der Armwinkel nach

dem Lenkwinkel bestimmt und jene damit in Form der Taylorreihe

$$\underline{q}_{arm,j}(\delta) \approx \underline{q}_{arm,j} \Big|_0 + \frac{\partial \underline{q}_{arm,j}}{\partial \delta} \Big|_0 \delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \underline{q}_{arm,j}}{\partial \delta^2} \Big|_0 \delta^2, \quad j = l, r \quad (4.49)$$

für kleine Lenkwinkel δ bis zur zweiten Ordnung angegeben werden.

Die Berechnung der Armwinkel in der neutralen Stellung $\underline{q}_{arm,j} \Big|_0$ erfolgt entweder durch numerisches Lösen der Gleichungen 4.42 beziehungsweise 4.43 für $\delta = 0$, oder einfacher aus geometrischen Beziehungen nach den Abbildungen 3.7, 3.9 und 3.10.

Die Ausdrücke $\frac{\partial \underline{q}_{arm,j}}{\partial \delta} \Big|_0$ und $\frac{\partial^2 \underline{q}_{arm,j}}{\partial \delta^2} \Big|_0$ entsprechen dabei den zu Vektoren zusammengefassten $u_{i1,j}$ und $u_{i2,j}$ aus Gleichung 4.48. Die Bestimmungsgleichungen für diese Faktoren folgen also aus der vollständigen Differentiation der impliziten Funktionen $\underline{c}_j(\delta, \underline{q}_{arm,j}(\delta))$ nach dem Lenkwinkel:

$$\frac{d\underline{c}_j}{d\delta} = \underline{0} = \frac{\partial \underline{c}_j}{\partial \delta} + \frac{\partial \underline{c}_j}{\partial \underline{q}_{arm,j}} \frac{\partial \underline{q}_{arm,j}}{\partial \delta}, \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \underline{c}_j}{d\delta^2} = \underline{0} = & \frac{\partial^2 \underline{c}_j}{\partial \delta^2} + 2 \frac{\partial}{\partial \underline{q}_{arm,j}} \left(\frac{\partial \underline{c}_j}{\partial \delta} \right) \frac{\partial \underline{q}_{arm,j}}{\partial \delta} + \\ & \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \underline{q}_{arm,j,k}}{\partial \delta} \left(\frac{\partial}{\partial \underline{q}_{arm,j}} \left(\frac{\partial \underline{c}_j}{\partial \underline{q}_{arm,j,k}} \right) \frac{\partial \underline{q}_{arm,j}}{\partial \delta} \right) + \\ & \frac{\partial \underline{c}_j}{\partial \underline{q}_{arm,j}} \frac{\partial^2 \underline{q}_{arm,j}}{\partial \delta^2}, \quad j = l, r. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Anschließend können die beiden Gleichungen 4.50 und 4.51 an dem Linearisierungspunkt ausgewertet und nach den gesuchten Koeffizientenvektoren $\frac{\partial \underline{q}_{arm,j}}{\partial \delta} \Big|_0$ beziehungsweise $\frac{\partial^2 \underline{q}_{arm,j}}{\partial \delta^2} \Big|_0$ aufgelöst werden. Als Voraussetzung dafür müssen die Bindungs-Jacobimatrizen jeweils *nichtsingulär*¹ sein:

$$\det \frac{\partial \underline{c}_j}{\partial \underline{q}_{arm,j}} \Big|_0 = l_u l_l^2 \cos \theta_{30} \sin^2 \theta_{20} \neq 0, \quad j = l, r. \quad (4.52)$$

Dies ist offenbar dann sichergestellt, wenn die Ellenbogengelenke der Fahrerarme ausreichend gebeugt sind, $\theta_{20} > 0$. Die mathematische Forderung lässt sich dabei leicht praktisch veranschaulichen: mit komplett durchgestreckten Armen wären Lenkbewegungen, aufgrund des starren Oberkörpers, geometrisch nicht möglich.

¹Bei numerischen Berechnungen geht die Forderung der Regularität in die Frage der Konditionierung der Matrix über. Die Bedingung der gebeugten Ellenbogen gilt dazu ebenso.

In den Abbildungen 4.1 – 4.3 ist der Zusammenhang zwischen den Armwinkeln und dem Lenkwinkel mit den Modelldaten aus Abschnitt 4.3 dargestellt. Die strichlierten Kurven entsprechen dabei den exakten Winkelverläufen, die aus numerischen Lösungen der Schleifenschließbedingungen ermittelt wurden. Die durchgezogenen Linien repräsentieren die mit der Reihendarstellung 4.48 berechneten Armwinkel. Wie erwartet stimmen die Kurven in der Umgebung des Linearisierungspunktes $\delta = 0$ gut überein.

Zwischen den Übersetzungen der linken und rechten Körperseite besteht außerdem der Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
 u_{11,r} &= -u_{11,l} = u_{11} & u_{12,r} &= u_{12,l} = u_{12} \\
 u_{21,r} &= -u_{21,l} = u_{21} & u_{22,r} &= u_{22,l} = u_{22} \\
 u_{31,r} &= u_{31,l} = u_{31} & u_{32,r} &= -u_{32,l} = u_{32}
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

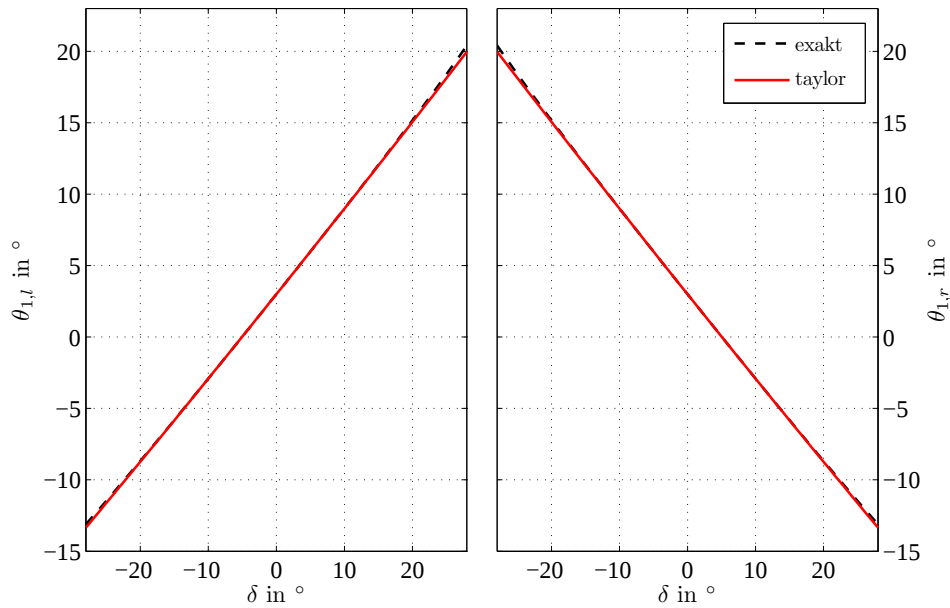


Abbildung 4.1: Zusammenhang zwischen Lenkwinkel und Oberarmstellung

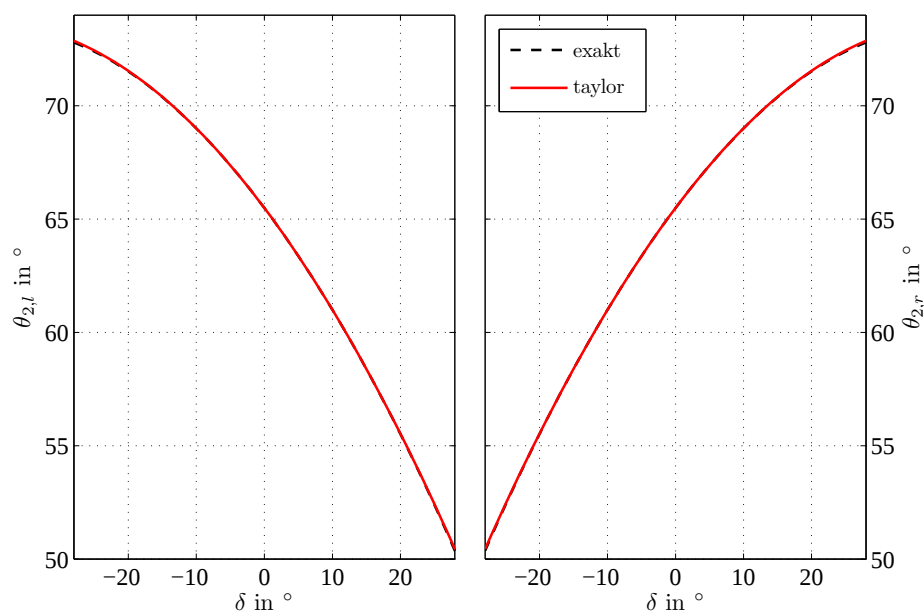


Abbildung 4.2: Zusammenhang zwischen Lenkwinkel und Unterarmstellung

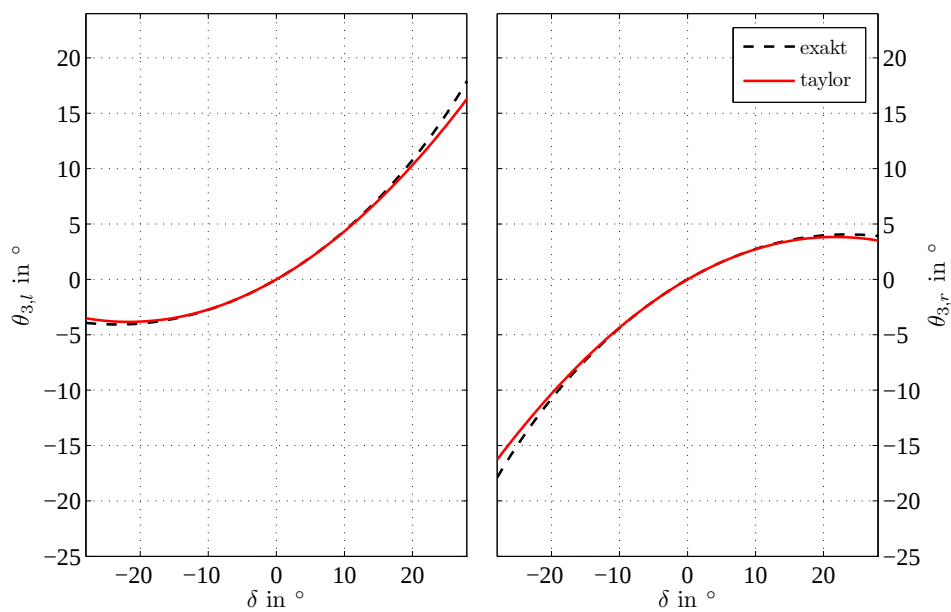


Abbildung 4.3: Zusammenhang zwischen Lenkwinkel und Oberarmdrehung

4.2.4 Herleitung der Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten

Mit den Gleichungen 4.49 – 4.51 ist nun der eindeutige Zusammenhang zwischen der Lenkerdrehung δ und den daran gebundenen Armbewegungen $\theta_{i,j}$ bekannt, die Bewegungsgleichungen des Hands-On-Model können in den $f = 5$ verallgemeinerten Lagekoordinaten $\underline{q}$ aufgestellt werden.

Dazu werden die translatorischen und rotatorischen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Schwerpunkte der einzelnen Modellkörper gegenüber dem Inertialsystem 0 in Abhängigkeit der verallgemeinerten Lagekoordinaten benötigt, und ebenso die in den einzelnen Schwerpunkten angreifenden eingeprägten Kräfte und Momente. Für die Fahrradmodellbestandteile *mainframe*, *subframe* und *front-assembly* sind diese Zusammenhänge in [31] hergeleitet, hier erfolgt lediglich die Ergänzung um die Ausdrücke zu den vier Armsegmenten. Dies soll wieder exemplarisch anhand der rechten Körperseite gezeigt werden, auf eine Indexierung für links und rechts wird wiederum verzichtet.

Die Transformationsmatrizen 4.30 – 4.32 nehmen mit Gleichung 4.48 und der Umbenennung 4.53 folgende Gestalt an:

$$\mathbf{A}_{mu_v} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{10} + u_{11}\delta + \frac{u_{12}}{2}\delta^2) & 0 & \sin(\theta_{10} + u_{11}\delta + \frac{u_{12}}{2}\delta^2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_{10} + u_{11}\delta + \frac{u_{12}}{2}\delta^2) & 0 & \cos(\theta_{10} + u_{11}\delta + \frac{u_{12}}{2}\delta^2) \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

$$\mathbf{A}_{u_v u_r} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{30} + u_{31}\delta + \frac{u_{32}}{2}\delta^2) & -\sin(\theta_{30} + u_{31}\delta + \frac{u_{32}}{2}\delta^2) & 0 \\ \sin(\theta_{30} + u_{31}\delta + \frac{u_{32}}{2}\delta^2) & \cos(\theta_{30} + u_{31}\delta + \frac{u_{32}}{2}\delta^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

$$\mathbf{A}_{u_r l} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{20} + u_{21}\delta + \frac{u_{22}}{2}\delta^2) & 0 & \sin(\theta_{20} + u_{21}\delta + \frac{u_{22}}{2}\delta^2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_{20} + u_{21}\delta + \frac{u_{22}}{2}\delta^2) & 0 & \cos(\theta_{20} + u_{21}\delta + \frac{u_{22}}{2}\delta^2) \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Weiters folgen die Transformationsmatrizen für Rollwinkel φ und Gierwinkel und ψ :

$$\mathbf{A}_{Dm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (4.57)$$

$$\mathbf{A}_{0D} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Zusätzlich zu 4.33 und 4.34 werden noch die Lagevektoren zu den Armschwerpunkten in den körperfesten Systemen benötigt:

$$\underline{r}_{cgu_r S|u_r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_u \end{bmatrix}, \quad (4.59)$$

$$\underline{r}_{cgl E|l} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_l \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

Für die Multiplikation mehrerer Transformationsmatrizen wird im Weiteren die abkürzende Indexnotation gemäß folgendem Beispiel

$$\mathbf{A}_{Dm} \mathbf{A}_{mu_v} \mathbf{A}_{u_v u_r} = \mathbf{A}_{Du_r} \quad (4.61)$$

verwendet, außerdem gilt jeweils

$$\mathbf{A}_{u_r D} = \mathbf{A}_{Du_r}^T. \quad (4.62)$$

Somit lautet beispielsweise die Lageangabe des rechten Oberarmschwerpunktes, ausgehend vom Referenzpunkt D :

$$\begin{aligned} \underline{r}_{cgu_r D|D} &= \mathbf{A}_{Dm} \left(\underline{r}_{SD|m} + \mathbf{A}_{mu_r} \underline{r}_{cgu_r S|u_r} \right) \\ &= \begin{bmatrix} x_S + s_u \sin(\theta_{10} + u_{11}\delta + \frac{u_{12}}{2}\delta^2) \\ y_S \cos \varphi + \left(h_S - s_u \cos(\theta_{10} + u_{11}\delta + \frac{u_{12}}{2}\delta^2) \right) \sin \varphi \\ y_S \sin \varphi - \left(h_S - s_u \cos(\theta_{10} + u_{11}\delta + \frac{u_{12}}{2}\delta^2) \right) \cos \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Winkelgeschwindigkeiten

Die Darstellung der Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen der einzelnen Körper gegenüber dem Inertialsystem erfolgt zweckmäßig im jeweils körperfesten Koordinatensystem. Für die Winkelgeschwindigkeit der Körper gilt:

$${}^0\underline{\omega}_{i|i} = {}^0\mathbf{J}_{\omega i|i} \underline{\dot{q}} + {}^0\underline{\omega}_{i|i}^*. \quad (4.64)$$

Dazu werden die Jacobimatrizen der Rotation nach folgender Definition

$${}^0\mathbf{J}_{\omega i|i} = \begin{bmatrix} {}^0\underline{\gamma}_{i,1|i}, \dots, {}^0\underline{\gamma}_{i,5|i} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad {}^0\tilde{\underline{\gamma}}_{i,k|i} = \mathbf{A}_{i0} \frac{\partial \mathbf{A}_{0i}}{\partial q_k}, \quad (4.65)$$

sowie die Vektoren der lokalen Winkelgeschwindigkeit,

$${}^0\omega_{i|i}^* = \mathbf{A}_{i0} \frac{\partial \mathbf{A}_{0i}}{\partial t}, \quad (4.66)$$

eingeführt, wobei der Index i die jeweils körperfesten Koordinatensysteme von Oberarm u_r und Unterarm l bezeichnet, und k alle fünf Komponenten von $\underline{q}$ durchläuft. Die Transformationsmatrizen sind nicht direkt von der Zeit t abhängig, somit ergeben sich auch keine lokalen Winkelgeschwindigkeiten:

$${}^0\omega_{i|i}^* = \underline{0}. \quad (4.67)$$

Damit ergibt sich beispielsweise die dem Lenkwinkel δ zugeordnete, vierte Spalte der Rotations-Jacobimatrix des rechten Oberarms, zu

$${}^0\tilde{\gamma}_{u_r,4|u_r} = \mathbf{A}_{u_r 0} \frac{\partial \mathbf{A}_{0u_r}}{\partial \delta} \quad (4.68)$$

$${}^0\gamma_{u_r,4|u_r} = \begin{bmatrix} (u_{11} + u_{12}\delta) \sin(\theta_{30} + u_{31}\delta + \frac{u_{32}}{2}\delta^2) \\ (u_{11} + u_{12}\delta) \cos(\theta_{30} + u_{31}\delta + \frac{u_{32}}{2}\delta^2) \\ u_{31} + u_{32}\delta \end{bmatrix}. \quad (4.69)$$

Winkelbeschleunigung

Für die Winkelbeschleunigung der Körper gilt:

$${}^0\varepsilon_{i,i} = {}^0\mathbf{J}_{\omega i|i} \ddot{\underline{q}} + {}^0\varepsilon_{i|i}^*. \quad (4.70)$$

Die Vektoren der lokalen Winkelbeschleunigung folgen dazu aus

$${}^0\varepsilon_{i|i}^* = \left(\sum_{k=1}^5 \frac{\partial {}^0\mathbf{J}_{\omega i|i}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial {}^0\mathbf{J}_{\omega i|i}}{\partial t}}_{\underline{0}} \right) \dot{\underline{q}} + \sum_{k=1}^5 \underbrace{\frac{\partial {}^0\omega_{i|i}^*}{\partial q_k}}_{\underline{0}} \dot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial {}^0\omega_{i|i}^*}{\partial t}}_{\underline{0}}. \quad (4.71)$$

Geschwindigkeit

Die Darstellung der translatorischen Geschwindigkeit und Beschleunigung der einzelnen Körperschwerpunkte gegenüber dem Inertialsystem erfolgt anschaulich jeweils im Referenzsystem D .

Für die translatorische Geschwindigkeit der Körperschwerpunkte gilt:

$${}^0\underline{v}_{cgi|D} = {}^0\mathbf{J}_{cgi|D} \dot{\underline{q}} + {}^0\underline{v}_{cgi|D}^* . \quad (4.72)$$

Die Jacobimatrix der Translation und der Vektor der lokalen Geschwindigkeit des Referenzpunktes D lauten:

$${}^0\mathbf{J}_{D|D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0\underline{v}_{D|D}^* = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

Die Jacobimatrizen der Translation der Körperschwerpunkte werden unter Zuhilfenahme von 4.73 mit der Definition

$${}^0\mathbf{J}_{cgi|D} = {}^0\mathbf{J}_{D|D} + {}^0\mathbf{J}_{cgiD|D} = {}^0\mathbf{J}_{D|D} + \frac{\partial r_{cgiD|D}}{\partial \underline{q}} + \mathbf{A}_{D0} \frac{\partial \mathbf{A}_{0D}}{\partial \underline{q}} r_{cgiD|D}, \quad (4.74)$$

gleichfalls wie die Vektoren der lokalen Geschwindigkeit,

$${}^0\underline{v}_{cgi|D}^* = {}^0\underline{v}_{D|D}^* + {}^0\underline{v}_{cgiD|D}^* = {}^0\underline{v}_{D|D}^* + \underbrace{\frac{\partial r_{cgiD|D}}{\partial t}}_{\underline{0}} + \underbrace{\mathbf{A}_{D0} \frac{\partial \mathbf{A}_{0D}}{\partial t} r_{cgiD|D}}_{\underline{0}}, \quad (4.75)$$

eingeführt. Mit Index i werden wiederum die jeweils körperfesten Koordinatensysteme von Oberarm u_r und Unterarm l bezeichnet.

Beispielhaft wird die vierte Spalte der Jacobimatrix der Translation zu dem Schwerpunkt des rechten Oberarms angegeben:

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{J}_{cgu_r|D} &= {}^0\mathbf{J}_{D|D} + \frac{\partial r_{cgu_rD|D}}{\partial \underline{q}} + \mathbf{A}_{D0} \frac{\partial \mathbf{A}_{0D}}{\partial \underline{q}} r_{cgu_rD|D} \\ &= \begin{bmatrix} \dots, & (u_{11} + u_{12}\delta) s_u \cos(\theta_{10} + u_{11}\delta + \frac{u_{12}}{2}\delta^2) & , \dots \\ \dots, & (u_{11} + u_{12}\delta) s_u \sin(\theta_{10} + u_{11}\delta + \frac{u_{12}}{2}\delta^2) \sin \varphi & , \dots \\ \dots, & -(u_{11} + u_{12}\delta) s_u \sin(\theta_{10} + u_{11}\delta + \frac{u_{12}}{2}\delta^2) \cos \varphi & , \dots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.76)$$

Beschleunigung

Für die Beschleunigung der Körperschwerpunkte gilt:

$${}^0\underline{a}_{i,i} = {}^0\mathbf{J}_{cgi|D} \ddot{\underline{q}} + {}^0\underline{a}_{cgi|D}^* . \quad (4.77)$$

Die Vektoren der lokalen Beschleunigung folgen dazu aus

$$\begin{aligned}
 {}^0\underline{a}_{cgi|D}^* = & \left(\sum_{k=1}^5 \frac{\partial {}^0\underline{\mathbf{J}}_{cgi|D}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial {}^0\underline{\mathbf{J}}_{ci|D}}{\partial t}}_0 \right) \dot{\underline{q}} + \\
 & \sum_{k=1}^5 \underbrace{\frac{\partial {}^0\underline{v}_{cgi|D}^*}}_0 \dot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial {}^0\underline{v}_{cgi|D}^*}}_0 + {}^0\underline{\omega}_{D|D} \times {}^0\underline{v}_{cgi|D}.
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

Massenmatrizen und Trägheitstensoren

Mit der Masse von Oberarm beziehungsweise Unterarm sowie den entsprechenden Trägheitsmomenten ergeben sich die Massenmatrizen und Trägheitstensoren, angegeben um den jeweiligen Schwerpunkt im körperfesten System, zu

$$\underline{\mathbf{M}}_{u_r} = \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_u & 0 \\ 0 & 0 & m_u \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{M}}_l = \begin{bmatrix} m_l & 0 & 0 \\ 0 & m_l & 0 \\ 0 & 0 & m_l \end{bmatrix}, \tag{4.79}$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{u_r|u_r} = \begin{bmatrix} I_{u_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{u_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{u_{zz}} \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{I}}_{l|l} = \begin{bmatrix} I_{l_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{l_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{l_{zz}} \end{bmatrix}. \tag{4.80}$$

Eingeprägte Kräfte und Momente

Auf die Armsegmente wirkt als eingeprägte Kraft jeweils nur die Schwerkraft:

$$\underline{F}_{u_r|D}^E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_u g \end{bmatrix}, \tag{4.81}$$

$$\underline{F}_{l|D}^E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_l g \end{bmatrix}, \tag{4.82}$$

$$\underline{M}_{u_r|u_r}^E = \underline{M}_{l|l}^E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.83}$$

Newton-Euler-Gleichungen

Die bisher erstellten Matrizen und Vektoren zu den vier Körpern des Fahrermodells und den entsprechenden Ausdrücken zu den drei Körpern des Fahrradmodells nach [31] lassen sich formal zu globalen Matrizen und Spaltenvektoren zusammenfügen (siehe z. B. [42]). Damit können für die $p = 7$ Körper die $p \times 6 = 42$ *Newton-Euler-Gleichungen* angeschrieben werden:

$$\mathbf{M}^G \mathbf{J} \ddot{\underline{q}} + \underline{\xi}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \underline{K}^E + \underline{K}^Z. \quad (4.84)$$

Die nicht angegebenen Zwangskräfte $\underline{K}^Z$ zufolge den Bindungen zwischen den einzelnen Modellkörpern können für holonome Mehrkörpersysteme nach dem *D'Alembertschen Prinzip*,

$${}^A\delta A^Z = \delta \underline{q}^T \mathbf{J}^T \underline{K}^Z = 0, \quad (4.85)$$

eliminiert werden. Aus der Unabhängigkeit der Komponenten von $\delta \underline{q}^T$ folgt nämlich aus Gleichung 4.85:

$$\mathbf{J}^T \underline{K}^Z = \underline{0}. \quad (4.86)$$

Die Linksmultiplikation der Newton-Euler-Gleichungen mit der transponierten globalen Jacobimatrix $\mathbf{J}^T$ führt damit zu dem folgenden Gleichungssatz.

4.2.5 Allgemeine Bewegungsgleichungen für das Hands-On-Model in Minimalkoordinaten

Mit Gleichung 4.86 können die Bewegungsgleichungen in der formal gleichen Art wie die des Hands-Off-Model, Gleichung 4.1, in den $f = 5$ Freiheitsgraden $\underline{q}$:

$$\underbrace{\mathbf{J}^T \mathbf{M}^G \mathbf{J}}_{\mathbf{M}^a} \ddot{\underline{q}} + \underbrace{\mathbf{J}^T \underline{\xi}(\underline{q}, \dot{\underline{q}})}_{\underline{\Phi}^a} = \underbrace{\mathbf{J}^T \underline{K}^E}_{\underline{Q}^a} + \underbrace{\mathbf{J}^T \underline{K}^Z}_{\underline{0}}, \quad (4.87)$$

$$\mathbf{M}^a(\underline{q}) \ddot{\underline{q}} + \underline{\Phi}^a(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \underline{Q}^a(\underline{q}, \dot{\underline{q}}). \quad (4.88)$$

angeschrieben werden. Die $f \times f$ Massenmatrix $\mathbf{M}^a$, der $f \times 1$ Vektor der verallgemeinerten Zentrifugal-, Kreisel- und Corioliskräfte und -momente $\underline{\Phi}^a$ und der $f \times 1$ Vektor der verallgemeinerten eingepprägten Kräfte und Momente $\underline{Q}^a$ enthalten neben den selben Einträgen wie in Gleichung 4.1 noch die auf die Lenkachse transformierten Massen, Trägheitsmomente und Gewichtskräfte der beweglichen Arme. In der linearisierten Version der Bewegungsgleichungen wird dies besonders deutlich.

4.2.6 Lineare Bewegungsgleichungen für das Hands-On-Model

Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen 4.88 des Hands-On-Model können nun wiederum um den Gleichgewichtszustand der aufrechten Geradeausfahrt linearisiert und in symbolischer Form angegeben werden. Die aufgrund der Lenker-Arm-Kopplung hinzukommenden Terme sind in den [blauen](#) Ausdrücken zusammengefasst.

$$\begin{aligned} v : \\ m_T(\dot{v} + ur) + m_T x_T \dot{r} + m_T h_T \ddot{\varphi} + (m_H e_H + 2 m_l e_a) \ddot{\delta} - m_s s_s \ddot{\beta} = \\ F_{y1} + F_{y2} \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} r : \\ m_T x_T(\dot{v} + ur) + I_{Tzz|D} \dot{r} + I_{Tzx|D} \ddot{\varphi} - G_T u \dot{\varphi} + (I_{H\delta z_D} + 2 I_{a\delta z_D}) \ddot{\delta} - \\ G_1 \sin \varepsilon u \dot{\delta} + I_{s\beta z_D} \ddot{\beta} - G_1 \cos \varepsilon u \dot{\beta} = l F_{y1} + M_{z1} + M_{z2} \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \varphi : \\ m_T h_T(\dot{v} + ur) + I_{Tzx|D} \dot{r} + G_T ur + I_{Txx|D} \ddot{\varphi} - m_T h_T g \varphi + \\ (I_{H\delta x_D} + 2 I_{a\delta x_D}) \ddot{\delta} + G_1 \cos \varepsilon u \dot{\delta} - (S_\delta + 2 m_l e_a) g \delta + I_{s\beta x_D} \ddot{\beta} - \\ G_1 \sin \varepsilon u \dot{\beta} - S_\beta g \beta = M_{x1} + M_{x2} \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} \delta : \\ (m_H e_H + 2 m_l e_a)(\dot{v} + ur) + (I_{H\delta z_D} + 2 I_{a\delta z_D}) \dot{r} + G_1 \sin \varepsilon ur + \\ (I_{H\delta x_D} + 2 I_{a\delta x_D}) \ddot{\varphi} - G_1 \cos \varepsilon u \dot{\varphi} - (S_\delta + 2 m_l e_a) g \varphi + (I_{H\delta\delta} + 2 I_{a\delta\delta}) \ddot{\delta} + \\ k_\delta \dot{\delta} + (c_\delta - S_\delta \sin \varepsilon g + 2 c_{a\delta\delta}) \delta + I_{s\beta\delta} \ddot{\beta} - G_1 u \dot{\beta} - S_\beta \sin \varepsilon g \beta = \\ - t_c F_{y1} + M_{x1} \sin \varepsilon + M_{z1} \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} \beta : \\ - m_s s_s(\dot{v} + ur) + I_{s\beta z_D} \dot{r} + G_1 \cos \varepsilon ur + I_{s\beta x_D} \ddot{\varphi} + G_1 \sin \varepsilon u \dot{\varphi} - S_\beta g \varphi + \\ I_{s\beta\delta} \ddot{\delta} + G_1 u \dot{\delta} - S_\beta \sin \varepsilon g \delta + I_{s\beta\beta} \ddot{\beta} + k_\beta \dot{\beta} + (c_\beta - S_\beta \cos \varepsilon g) \beta = \\ - s_c F_{y1} + M_{x1} \cos \varepsilon - M_{z1} \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (4.93)$$

Wie für die linearisierten Hands-Off-Bewegungsgleichungen zuvor wurden dabei wiederum zusammenfassende Ausdrücke für die $p = 7$ Modellkörper m , f , s , $u_{r,l}$, l_l , $u_{r,r}$, l_r gebildet, welche die Massengeometrie des Gesamtmodells im unausgelenkten Zustand beschreiben. In dieser Lage unterscheidet sich das Hands-On-Model geometrisch nicht vom Hands-Off-Model in der gebeugten Sitzposition, die entsprechenden Zahlenwerte für die zusammenfassenden Ausdrücke 4.8 – 4.27 können also davon übernommen werden.

Die Zusammensetzung der zusätzlichen Terme ist im Folgenden angegeben, die Ab-

messungen dazu sind in den Abbildungen 3.7, 3.9 und 3.10 ersichtlich. Hierbei ist außerdem die symmetrische Unterarmstellung in der neutralen Position, $\theta_{30} = 0$, bereits enthalten, Terme zu diesem Winkel treten dementsprechend nicht auf.

Der Ausdruck e_a ist mit den Armbewegungen quer zur Längsebene verknüpft und lässt sich dabei als fiktiver Schwerpunktsabstand der Unterarme zur Lenkachse interpretieren. Eine kleine Lenkerdrehung $\Delta\delta$ verschiebt die Unterarmschwerpunkte in Querrichtung um jeweils $e_a \Delta\delta$, mit

$$e_a = s_l \sin \theta_{20} u_{31} . \quad (4.94)$$

Die folgenden drei Ausdrücke stellen Trägheits- und Deviationsmomente dar. Der erste, $2 I_{a\delta\delta}$, kann als das gesamte reduzierte Massenträgheitsmoment der beiden Arme um die Lenkachse interpretiert werden. Die beiden anderen, $2 I_{a\delta x_D}$ und $2 I_{a\delta z_D}$, bilden Deviationsmomente zur Lenkachse und zur x_D - beziehungsweise z_D -Achse des Referenzsystems. Eine Winkelbeschleunigung um die Lenkachse, $\ddot{\delta}$, ruft also beispielsweise ein Drehmoment um die x_D -Achse in der Größe von $2 I_{a\delta x_D} \ddot{\delta}$ hervor.

$$\begin{aligned} I_{a\delta\delta} = & (I_{uyy} + m_u s_u^2) u_{11}^2 + I_{uzz} u_{31}^2 + I_{lyy} (u_{11} + u_{21})^2 + \\ & m_l (l_u^2 u_{11}^2 + 2 l_u u_{11} s_l \cos \theta_{20} (u_{11} + u_{21}) + s_l^2 (u_{11} + u_{21})^2) + \\ & (I_{lxx} \sin^2 \theta_{20} + I_{lzz} \cos^2 \theta_{20} + m_l s_l^2 \sin^2 \theta_{20}) u_{31}^2 \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} I_{a\delta x_D} = & (I_{uzz} \sin \theta_{10} - I_{lxx} \sin \theta_{20} \cos(\theta_{10} + \theta_{20}) + I_{lzz} \cos \theta_{20} \sin(\theta_{10} + \theta_{20})) u_{31} - \\ & (m_u y_S s_u \sin \theta_{10} + m_l y_S (l_u \sin \theta_{10} + s_l \sin(\theta_{10} + \theta_{20}))) u_{11} - \\ & m_l y_S s_l \sin(\theta_{10} + \theta_{20}) u_{21} + m_l h_l \underbrace{s_l \sin \theta_{20} u_{31}}_{e_a} \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned} I_{a\delta z_D} = & (I_{uzz} \cos \theta_{10} + I_{lxx} \sin \theta_{20} \sin(\theta_{10} + \theta_{20}) + I_{lzz} \cos \theta_{20} \cos(\theta_{10} + \theta_{20})) u_{31} - \\ & (m_u y_S s_u \cos \theta_{10} + m_l y_S (l_u \cos \theta_{10} + s_l \cos(\theta_{10} + \theta_{20}))) u_{11} - \\ & m_l y_S s_l \cos(\theta_{10} + \theta_{20}) u_{21} + m_l x_l \underbrace{s_l \sin \theta_{20} u_{31}}_{e_a} \end{aligned} \quad (4.97)$$

Der Term $2 c_{a\delta\delta}$ beinhaltet die Rückwirkung der an den Armen angreifenden Schwerkraft auf die Lenkerstellung. Gilt $c_{a\delta\delta} > 0$, so führt eine Verdrehung des Lenkers eine Erhöhung der potentiellen Energie der Arme herbei. Oder anders ausgedrückt, die Gewichtskraft der Armsegmente wirkt der Lenkerdrehung entgegen, die Arme

verhalten sich demnach wie eine fiktive Lenkungsfeder.

$$c_{a\delta\delta} = g \left\{ m_u (s_u \cos \theta_{10} u_{11}^2 + s_u \sin \theta_{10} u_{12}) + \right. \\ m_l (l_u \cos \theta_{10} u_{11}^2 + l_u \sin \theta_{10} u_{12} + s_l \cos(\theta_{10} + \theta_{20})(u_{11} + u_{21})^2 + \\ \left. s_l \sin(\theta_{10} + \theta_{20})(u_{12} + u_{22}) \right) - m_l s_l \sin \theta_{10} \sin \theta_{20} u_{31}^2 \} \quad (4.98)$$

4.3 Parameterwerte

Bevor mit den bisher gefundenen Gleichungen das Stabilitätsverhalten der Modelle untersucht wird, müssen noch geeignete Parameterwerte bezüglich Masse und Geometrie des Rennrades sowie der Reifenkennwerte gefunden werden. Für das biomechanische Körpermodell sind die einzelnen Maße schon vorab festgelegt, doch die endgültige Massenverteilung ergibt sich erst durch die Wahl einer passenden Sitzposition.

Vorab sei dazu angemerkt, dass der Fokus nicht auf das Auffinden möglichst exakter Zahlenwerte zu einer bestimmten Rennrad-Fahrer-Kombination gerichtet ist. Vielmehr wird zuerst ein typischer durchschnittlicher Parametersatz verwendet und im Nachfolgenden der Einfluss einzelner Merkmale auf das physikalische Verhalten der Modelle anhand von Parametervariationen untersucht.

4.3.1 Rennraddaten

Den Berechnungen zu dieser Diplomarbeit liegt kein spezielles Fahrrad zugrunde, und so wird ein zu dem 50. Perzentil des Hanavan-Modells (Körpergröße 176 cm, Innenbeinlänge 84.1 cm) passendes Rennrad mit typischer Geometrie (Rahmengröße 54 cm) verwendet, vgl. [43], [44], [45]. Die geometrischen Abmessungen und die einzelnen Massen der Fahrradbestandteile sind relativ einfach abzuschätzen, die Bestimmung der Trägheitstensoren für die jeweiligen Baugruppen des Modells bereitet jedoch Mühe.

Angrosch [31] berechnete die Massengeometrie für das Trekkingrad anhand von Konstruktionszeichnungen des Rahmens und fügte zu diesem die als Punktmassen modellierten Anbauteile hinzu. Moore et al. ermittelten die zur Verwendung mit dem Benchmark-Model benötigten Geometrie- und Trägheitseigenschaften für sechs Fahrräder unterschiedlicher Gattungen auf messtechnischem Wege und publizierten die Ergebnisse in [46]. Die Positionen der Schwerpunkte sowie die Einträge der Trägheitstensoren für die verschiedenen Baugruppen inklusive Anbauteile wurden dabei mittels Schwingversuchen quantifiziert. Diese Parameter wurden zur Abschätzung der Trägheitswerte des vorliegenden Rennrades herangezogen und entsprechend dessen

Abmessungen und Massen skaliert. Tabelle 4.1 zeigt die so erhaltenen Parameter. Der β -Freiheitsgrad konzentriert die verteilten Nachgiebigkeiten von Rahmen (insbesondere der Bereich des Lenkkopfes ist ausschlaggebend), Steuerlager und Gabel in einem Gelenk. Die dazugehörigen Parameter, nämlich die Lage des Gelenks und die Feder- und Dämpferkennwerte, beeinflussen das Stabilitätsverhalten des Wobble-modes elementar. Es handelt sich dabei jedoch um reine Modellgrößen, die nicht direkt gemessen werden können und daher gewissen Annahmen unterliegen. Ott [32] setzte in seiner Arbeit über das Trekkingrad die Lage des Gelenks in Steuerrohrmitte an und konnte die verbleibenden Feder- und Dämpferkennwerte aus Messfahrten bestimmen. Später untersuchte Nusime [34] zu demselben Fahrrad den getrennten Einfluss der mit dem Gelenk verbundenen Parameter. Die dort gefundenen Erkenntnisse gelten für das Rennrad natürlich ebenso.

Für die folgenden Analysen über das Stabilitätsverhalten des Rennrades ist die Lage des β -Gelenks ebenfalls in Steuerrohrmitte angesetzt, die Rahmensteifigkeit ist im Vergleich zum Damen-Trekkingrad aber deutlich höher. Die Dämpfung wurde entsprechend der höheren Steifigkeit und der geringeren Masse angepasst, das Dämpfungsmaß einer freien Schwingung der unteren Gabeleinheit alleine beträgt etwa 19%.

4.3.2 Reifenkennwerte

Die Kennwerte des Reifenmodells zeigen einen großen Einfluss auf die Eigenmodi von Zweirädern, siehe [27], [28] für Motorräder und [24], [31], [32] für Fahrräder. Für letztere gestaltete es sich jedoch lange Zeit als schwierig, verlässliche Parameterwerte zu finden. Kürzlich erschienen jedoch zwei unabhängige Publikationen, die sich diesem Thema annehmen.

Dressel et al. [47] konstruierten einen eigenen Prüfstand zur Bestimmung von Schräglauf- und Sturzsteifigkeiten von Fahrradreifen und veröffentlichten eine sechs verschiedene Fahrradreifen umfassende Versuchsreihe. Doria et al. [48] nutzten einen Prüfstand für Motorradreifen und testeten damit vier verschiedene Fahrradmäntel. Neben den Seitenkräften wurden auch die Reifenrückstellmomente gemessen und die gesammelten Daten auf Basis des *Magic-Formula-Tyre-Model* [28] ausgewertet. Auch wenn in beiden Publikationen unterschiedliche Reifenfabrikate und verschiedene Reifendimensionen verwendet wurden, so stimmen die Ergebnisse, vor allem bezüglich der für den Wobble wichtigen Schräglaufsteifigkeit, soweit überein, dass davon die für das Reifenmodell zum Rennrad benötigten Parameter abgeleitet werden konnten. Die Tabelle 4.2 zeigt eine Auflistung davon.

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
Radstand	l	0.96956	m
Nachlauf	t_c	0.05771	m
Lenkachsenwinkel	ε	17	°
β –Gelenkabstand	s_c	0.7596	m
Lenkkopfsteifigkeit	c_β	4784.2	Nm/rad
Lenkkopfdämpfung	k_β	12.605	Nm s/rad
Lenkungssteifigkeit	c_δ	0	Nm/rad
Lenkungsämpfung	k_δ	0	Nm s/rad
<i>Rahmen inklusive Hinterrad, ohne Fahrer: b</i>			
Masse	m_b	4.95	kg
Schwerpunktslage	$\begin{bmatrix} x_b & h_b \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.27127 & 0.47308 \end{bmatrix}$	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{bxx} & 0 & -I_{bzx} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{bzx} & 0 & I_{bzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.34977 & 0 & 0.09502 \\ 0 & * & 0 \\ 0.09502 & 0 & 0.35069 \end{bmatrix}$	kg m ²
<i>Gabel inklusive Vorderrad: s</i>			
Masse	m_s	1.3	kg
Schwerpunktslage	$\begin{bmatrix} x_s & h_s \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.93841 & 0.40801 \end{bmatrix}$	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{sxx} & 0 & -I_{sxx} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{sxx} & 0 & I_{szz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.05841 & 0 & -0.00191 \\ 0 & * & 0 \\ -0.00191 & 0 & 0.03327 \end{bmatrix}$	kg m ²
<i>Lenker: f</i>			
Masse	m_f	0.9	kg
Schwerpunktslage	$\begin{bmatrix} x_f & h_f \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.86534 & 0.8461 \end{bmatrix}$	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{fxx} & 0 & -I_{fxx} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{fxx} & 0 & I_{fzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.03005 & 0 & -0.00014 \\ 0 & * & 0 \\ -0.00014 & 0 & 0.02090 \end{bmatrix}$	kg m ²
<i>Vorderrad: 1</i>			
Abrollradius	r_1	0.3342	m
Masse Vorderrad	m_1	0.9	kg
Trägheitsmomente	$\begin{bmatrix} I_{1xx} = I_{1zz} & I_{1yy} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.03244 & 0.05732 \end{bmatrix}$	kg m ²
<i>Hinterrad: 2</i>			
Abrollradius	r_2	0.3342	m
Masse Vorderrad	m_2	1.2	kg
Trägheitsmomente	$\begin{bmatrix} I_{2xx} = I_{2zz} & I_{2yy} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.03792 & 0.06081 \end{bmatrix}$	kg m ²

Tabelle 4.1: Parameterwerte zum Rennrad

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
<i>Vorderreifen: 1</i>			
Schräglaufsteifigkeit	$c_{F\alpha 1}$	$0.24 \cdot 180/\pi \cdot F_{z1}$	N/rad
Sturzsteifigkeit	$c_{F\gamma 1}$	$0.015 \cdot 180/\pi \cdot F_{z1}$	N/rad
Rückstellmomentstkt. zufolge Schräglf.	$c_{M\alpha 1}$	$0.025 \cdot c_{F\alpha 1}$	Nm/rad
Rückstellmomentstkt. zufolge Sturz	$c_{M\gamma 1}$	$0.04 \cdot c_{F\gamma 1}$	Nm/rad
Kippmomentstkt. zufolge Sturz	$c_{Mx 1}$	$0.015 \cdot F_{z1}$	Nm/rad
Einlauflänge für Schräglaufwinkel	$\sigma_{\alpha 1}$	0.05	m
Einlauflänge für Sturzwinkel	$\sigma_{\gamma 1}$	0.05	m
<i>Hinterreifen: 2</i>			
Schräglaufsteifigkeit	$c_{F\alpha 2}$	$0.24 \cdot 180/\pi \cdot F_{z2}$	N/rad
Sturzsteifigkeit	$c_{F\gamma 2}$	$0.015 \cdot 180/\pi \cdot F_{z2}$	N/rad
Rückstellmomentstkt. zufolge Schräglf.	$c_{M\alpha 2}$	$0.025 \cdot c_{F\alpha 2}$	Nm/rad
Rückstellmomentstkt. zufolge Sturz	$c_{M\gamma 2}$	$0.04 \cdot c_{F\gamma 2}$	Nm/rad
Kippmomentstkt. zufolge Sturz	$c_{Mx 2}$	$0.015 \cdot F_{z2}$	Nm/rad
Einlauflänge für Schräglaufwinkel	$\sigma_{\alpha 2}$	0.05	m
Einlauflänge für Sturzwinkel	$\sigma_{\gamma 2}$	0.05	m

Tabelle 4.2: Reifenkennwerte

4.3.3 Fahrerdaten

Hands-Off-Model

Schlussendlich müssen noch die endgültigen Massenverteilungen des Fahrerkörpers in der aufrechten sowie in der gebeugten Sitzhaltung berechnet und anschließend Fahrer und Fahrrad vereinigt werden. Die gebeugte Sitzhaltung des Hanavan-Modells am Rennrad wurde nach gängigen Empfehlungen ([43], [49]) festgelegt, mit der aufrechten Sitzhaltung wurde eine freihändige Fahrposition nachgeahmt. Für beide Positionen sind die dabei auftretenden Haltungswinkel der einzelnen Körpersegmente in den Tabellen 4.3 und 4.4 angeführt, siehe dazu auch die Abbildungen 3.6 und 3.7. Damit können die $k = 16$ Einzelsegmente zu einem gesamten Körper zusammengefügt und die Gesamtschwerpunktslage sowie der Trägheitstensor des kompletten Körpers berechnet werden. Als Bezugssystem zur Lagebeschreibung wird das zum Rahmensystem parallele x_P, y_P, z_P -Koordinatensystem verwendet, dessen Ursprung im Kontaktpunkt des Fahrermodells mit dem Sattel liegt. Die Lagevektoren zu den einzelnen Segmentschwerpunkten $r_{k|P}$, sowie die jeweiligen Trägheitstensoren $\mathbf{I}_{k|k}$, sind im Anhang A angegeben. Der Trägheitstensor des Gesamtkörpers wird um dessen Schwerpunkt im x_h, y_h, z_h -Koordinatensystem nach Abbildung 3.6 berechnet.

Der Gesamtschwerpunkt ergibt sich mit der Gesamtmasse des Fahrers m_h zu:

$$\underline{r}_{h|P} = \frac{\sum_{k=1}^{16} m_k \underline{r}_{k|P}}{m_h}. \quad (4.99)$$

Die Trägheitstensoren der einzelnen Körperteile werden zuerst für ein dem P - bzw. h -System parallelen $(*)$ -System um die separaten Segmentschwerpunkte berechnet,

$$\mathbf{I}_{k*} = \mathbf{A}_{k*k} \mathbf{I}_{k|k} \mathbf{A}_{k*k}^T, \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_{k*k} = \begin{bmatrix} \cos \chi_k & 0 & \sin \chi_k \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \chi_k & 0 & \cos \chi_k \end{bmatrix}, \quad k = 1 \dots 16, \quad (4.100)$$

und anschließend gemäß dem *Steinerschen Satz* in den Gesamtschwerpunkt übergeführt,

$$\mathbf{I}_{h|h} = \sum_{k=1}^{16} \left(\mathbf{I}_{k*} + m_k \begin{bmatrix} d_{k,2}^2 + d_{k,3}^2 & -d_{k,1}d_{k,2} & -d_{k,1}d_{k,3} \\ -d_{k,1}d_{k,2} & d_{k,3}^2 + d_{k,1}^2 & -d_{k,2}d_{k,3} \\ -d_{k,1}d_{k,3} & -d_{k,2}d_{k,3} & d_{k,1}^2 + d_{k,2}^2 \end{bmatrix} \right), \quad (4.101)$$

mit

$$\underline{d}_k = \underline{r}_{h|P} - \underline{r}_{k|P}, \quad k = 1 \dots 16. \quad (4.102)$$

Mit analogen Beziehungen können daraufhin der Fahrradrahmen samt Hinterrad (Index b in Tabelle 4.1) und der Fahrerkörper zur gesamten hinteren Baugruppe, $m - mainframe$, vereinigt werden.

Übergangsmodell

Als Zwischenschritt vom Hands-Off-Model zum Hands-On-Model wird in Kapitel 5 das *Übergangsmodell* verwendet. Dabei gelten weiterhin die Hands-Off-Bewegungsgleichungen, es werden lediglich die Hände des Fahrers vom Körpermodell abgezogen und dem Lenker zugeschlagen. Die oben stehenden Berechnungen für das Körpermodell werden somit nur für die verbleibenden $k = 14$ Segmente durchgeführt, die beiden als Kugeln modellierten Hände werden dem Lenker an den Stellen der Griffe zugefügt. Dadurch ändert sich die Massengeometrie der beiden Baugruppen *mainframe* und *front-assembly*, der entsprechende Parametersatz ist in Tabelle 4.5 angeführt.

Hands-On-Model

Die zusammenfassenden Ausdrücke in den linearisierten Hands-On-Bewegungsgleichungen beschreiben die Massengeometrie des Modells im *unausgelenkten Zustand*, dabei besteht kein Unterschied zwischen dem Übergangsmodell („hands-off“) und dem vollständigen Hands-On-Model. Dementsprechend können in den Bewegungsgleichungen 4.89 – 4.93 die Zahlenwerte für die zusammenfassenden Terme 4.8 – 4.27 vom Übergangsmodell übernommen werden. Die für die hinzukommenden Ausdrücken der Armbewegungen 4.94 – 4.98 benötigten Parameter sind gesammelt in Tabelle 4.6 aufgelistet.

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
<i>Winkel der Segmente</i>			
Kopf	χ_1	−10	°
Oberkörper	χ_2	−25	°
Unterkörper 1	χ_3	−25	°
Unterkörper 2	χ_4	−25	°
Hände	χ_5	61.3	°
Oberarme	χ_7	11	°
Unterarme	χ_9	61.3	°
Oberschenkel	χ_{11}	37.8	°
Unterschenkel	χ_{13}	−24.2	°
Füße	χ_{15}	90	°
<i>Massengeometrie gesamter Fahrerkörper: h</i>			
Masse	m_h	73.436	kg
halber Beinabstand	y_{leg}	0.125	m
Schwerpunktslage	$\begin{bmatrix} x_h & h_h \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.18413 & 0.12 \end{bmatrix}$	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{hxx} & 0 & -I_{hxz} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{hxz} & 0 & I_{hzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.63397 & 0 & 0.18421 \\ 0 & * & 0 \\ 0.18421 & 0 & 1.91737 \end{bmatrix}$	kg m ²
<i>Rahmen inklusive Hinterrad und Fahrer: m</i>			
Sattelkontaktpkt.	$\begin{bmatrix} x_P & h_P \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.17908 & 0.97422 \end{bmatrix}$	m
Masse	m_m	78.386	kg
Schwerpunktslage	$\begin{bmatrix} x_m & h_m \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.35741 & 1.055 \end{bmatrix}$	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{mxx} & 0 & -I_{mxz} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{mxz} & 0 & I_{mzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11.77301 & 0 & 0.54407 \\ 0 & * & 0 \\ 0.54407 & 0 & 2.30726 \end{bmatrix}$	kg m ²

Tabelle 4.3: Parameterwerte zum Fahrerkörper in aufrechter Sitzposition und „hands-off“

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
<i>Winkel der Segmente</i>			
Kopf	χ_1	-60	°
Oberkörper	χ_2	-90	°
Unterkörper 1	χ_3	-74.2	°
Unterkörper 2	χ_4	-24	°
Hände	χ_5	68.5	°
Oberarme	χ_7	3	°
Unterarme	χ_9	68.5	°
Oberschenkel	χ_{11}	37.7	°
Unterschenkel	χ_{13}	-24	°
Füße	χ_{15}	90	°
<i>Massengeometrie gesamter Fahrerkörper: h</i>			
Masse	m_h	73.436	kg
halber Beinabstand	y_{leg}	0.125	m
Schwerpunktslage	$\begin{bmatrix} x_h & h_h \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.25992 & 0.02003 \end{bmatrix}$	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{hxx} & 0 & -I_{hxz} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{hxz} & 0 & I_{hzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.89295 & 0 & 0.68544 \\ 0 & * & 0 \\ 0.68544 & 0 & 3.49943 \end{bmatrix}$	kg m ²
<i>Rahmen inklusive Hinterrad und Fahrer: m</i>			
Sattelkontaktpkt.	$\begin{bmatrix} x_P & h_P \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.17908 & 0.97422 \end{bmatrix}$	m
Masse	m_m	78.386	kg
Schwerpunktslage	$\begin{bmatrix} x_m & h_m \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.42841 & 0.96134 \end{bmatrix}$	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{mxx} & 0 & -I_{mxz} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{mxz} & 0 & I_{mzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.50239 & 0 & 1.18585 \\ 0 & * & 0 \\ 1.18585 & 0 & 3.98059 \end{bmatrix}$	kg m ²

Tabelle 4.4: Parameterwerte zum Fahrerkörper in gebeugter Sitzposition und „hands-off“

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
<i>Lenker inklusive Hände: f</i>			
Masse	m_f	1.97062	kg
Schwerpunktslage	$\begin{bmatrix} x_f & h_f \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.89359 & 0.82003 \end{bmatrix}$	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{fxx} & 0 & -I_{fzx} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{fzx} & 0 & I_{fzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.076734 & 0 & -0.00121 \\ 0 & * & 0 \\ -0.00121 & 0 & 0.06639 \end{bmatrix}$	kg m ²
<i>Massengeometrie Fahrerkörper ohne Hände: h</i>			
Masse	m_h	72.355	kg
halber Beinabstand	y_{leg}	0.125	m
Schwerpunktslage	$\begin{bmatrix} x_h & h_h \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.25288 & 0.02293 \end{bmatrix}$	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{hxx} & 0 & -I_{hxx} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{hxx} & 0 & I_{hxx} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.8063 & 0 & 0.78731 \\ 0 & * & 0 \\ 0.78731 & 0 & 3.20528 \end{bmatrix}$	kg m ²
<i>Rahmen inklusive Hinterrad und Fahrer ohne Hände: m</i>			
Sattelkontaktpkt.	$\begin{bmatrix} x_P & h_P \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.17908 & 0.97422 \end{bmatrix}$	m
Masse	m_m	77.305	kg
Schwerpunktslage	$\begin{bmatrix} x_m & h_m \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.42167 & 0.96360 \end{bmatrix}$	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{mxx} & 0 & -I_{mxx} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{mxx} & 0 & I_{mxx} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.42859 & 0 & 1.27250 \\ 0 & * & 0 \\ 1.27250 & 0 & 3.67560 \end{bmatrix}$	kg m ²

Tabelle 4.5: modifizierte Parameterwerte zum Rennradmodell in gebeugter Sitzposition, Hände sind Teil des Lenkers; Basis für alle Berechnungen „hands-on“; „Übergangsmodell“ in Verbindung mit Hands-Off-Bewegungsgleichungen

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
<i>geometrische Abmaße</i>			
Lage Schulter	$\begin{bmatrix} x_S & h_S \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.60083 & 1.20917 \end{bmatrix}$	m
Lage Lenkkopf	$\begin{bmatrix} x_L & h_L \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.80266 & 0.74328 \end{bmatrix}$	m
Lage Handgelenke	$\begin{bmatrix} e_W & d_W \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.08900 & 0.04811 \end{bmatrix}$	m
halbe Schulterbreite	$y_W = y_S$	0.20253	m
Wirklänge Oberarm	l_u	0.29277	m
Schwerpunkt Oberarm	s_u	0.11397	m
	$\begin{bmatrix} x_u & h_u \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.60678 & 1.09535 \end{bmatrix}$	m
Länge Unterarm	l_l	0.27686	m
Schwerpunkt Unterarm	s_l	0.11743	m
	$\begin{bmatrix} x_l & h_l \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.72537 & 0.87375 \end{bmatrix}$	m
<i>Masseeigenschaften</i>			
Masse Oberarm	m_u	2.3127	kg
Trägheitsm. Oberarm	$\begin{bmatrix} I_{u_{xx}} = I_{u_{yy}} & I_{u_{zz}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.02385 & 0.00258 \end{bmatrix}$	kg m ²
Masse Unterarm	m_l	1.37468	kg
Trägheitsm. Unterarm	$\begin{bmatrix} I_{l_{xx}} = I_{l_{yy}} & I_{l_{zz}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.00878 & 0.00096 \end{bmatrix}$	kg m ²
<i>Armwinkel in Neutralstellung</i>			
Oberarm Anteversion	θ_{10}	2.99294	°
Oberarm Außenrotation	θ_{30}	0	°
Unterarm Flexion	θ_{20}	65.50461	°
<i>Übersetzungen</i>			
Oberarm Anteversion	$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.59490 & 0.04655 \end{bmatrix}$	1
Oberarm Außenrotation	$\begin{bmatrix} u_{31} & u_{32} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.35327 & -0.93274 \end{bmatrix}$	1
Unterarm Flexion	$\begin{bmatrix} u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.40033 & -0.56057 \end{bmatrix}$	1

Tabelle 4.6: Parameterwerte zur Lenker-Arm-Kopplung für die gebeugte Sitzposition

Kapitel 5

Stabilitätsuntersuchungen

In den bisherigen Kapiteln wurde der Begriff *Stabilität* schon vielfach benutzt, ohne dass dafür je eine Definition angegeben wurde. Im allgemeinen Sprachgebrauch verbindet man mit *guter Fahrstabilität* eines Fahrrades einerseits einen stabilen Geradeauslauf und andererseits eine gutmütige Reaktion auf Lenkimpulse.

Für einen mathematischen Stabilitätsnachweis ist zwischen diesen beiden Eigenschaften allerdings zu unterscheiden. Das Reaktionsverhalten auf aktive Lenkbefehle wird als *Eingangs-Ausgangs-Stabilität* bezeichnet. Ein Systemverhalten gilt dabei als stabil, wenn auf eine beschränkte Eingangsgröße (z. B. Lenkmoment) eine beschränkte Ausgangsgröße (z. B. Lenkwinkel) folgt. Die Eigenschaft eines stabilen Geradeauslaufes hingegen verweist auf die Robustheit des Systems gegenüber kleinen äußeren Störungen wie Seitenwind oder Fahrbahnunebenheiten. Dies wird als Zustandsstabilität oder *Stabilität nach Ljapunow* bezeichnet. Die hier durchgeführten Untersuchungen der Autostabilität fallen alle in die zweite Kategorie.

Den Ausgangspunkt einer solchen Stabilitätsanalyse bildet ein *ungestörter Zustand*, wie in diesem Fall die aufrechte, unbeschleunigte Geradeausfahrt. Die Stabilität dieser Bewegung soll dabei untersucht werden. Dazu wird das System zu einem beliebigen Zeitpunkt t_0 in einen geringfügig abweichenden *gestörten Zustand* versetzt. Stabilität liegt nun dann vor, wenn die Bewegungen des Systems zufolge der Störung für alle Zeiten $t > t_0$ in hinreichender Nähe zum ungestörten Zustand bleiben. Kehrt das System sogar wieder zu diesem zurück, so spricht man von *asymptotischer Stabilität*.

Es soll hierbei jedoch nicht der Eindruck erweckt werden, dass ein autostabiles Verhalten über einen großen Geschwindigkeitsbereich das einzig relevante Gütekriterium zur Beurteilung des Fahrverhaltens von Rennrädern ist. Abgesehen von einem brauchbaren Stabilitätsverhalten dürfen Fahrkomfort, Handling und Agilität nicht außer Acht gelassen werden.

5.1 Grundlagen

Das Stabilitätsverhalten der zwei Rennradmodelle *Hands-Off* und *Hands-On* wird anhand deren Eigendynamik beurteilt. Dazu werden die Eigenwerte und Eigenvektoren der Differentialgleichungen zu der inkrementell ansteigenden Fahrgeschwindigkeit mit dem Softwarepaket MATLAB¹ numerisch berechnet.

Bevor die Ergebnisse präsentiert werden, folgen noch einige theoretische Grundlagen zur Stabilitätsanalyse sowie die für die rechnergestützte Bearbeitung notwendige mathematische Aufbereitung der Systemgleichungen.

5.1.1 Stabilität nach Ljapunow

Die Lösung $\underline{x}^0(t)$ eines dynamischen Systems

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}(t), t) \quad (5.1)$$

heißt:

- i) *stabil im Sinne Ljapunows*, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\eta > 0$ gibt, sodass für jede zum Zeitpunkt t_0 benachbart startende Lösung $\underline{x}(t)$ gilt:

$$\|\underline{x}(t_0) - \underline{x}^0(t_0)\| < \eta \implies \|\underline{x}(t) - \underline{x}^0(t)\| < \epsilon \quad \text{für alle } t > t_0, \quad (5.2)$$

- ii) *attraktiv*, wenn es ein $\eta > 0$ gibt, sodass für jede zum Zeitpunkt t_0 benachbart startende Lösung $\underline{x}(t)$ gilt:

$$\|\underline{x}(t_0) - \underline{x}^0(t_0)\| < \eta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{x}(t) - \underline{x}^0(t)\| = 0, \quad (5.3)$$

- iii) *asymptotisch stabil*, wenn sie stabil und attraktiv ist,

- iv) *instabil*, wenn sie nicht stabil ist.

5.1.2 Stabilitätsanalyse anhand von Eigenwerten

Ein lineares, autonomes Differentialgleichungssystem von der Form

$$\dot{\underline{x}} = \mathbf{A} \underline{x}, \quad (5.4)$$

¹The Mathworks, Inc.: MATLAB, Version R2010a

mit der konstanten $n \times n$ Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$, besitzt stets ein Fundamentalsystem von n linear unabhängigen Lösungsvektoren $\underline{x}_1(t), \dots, \underline{x}_n(t)$. Der allgemeine Lösungsvektor des Systems folgt aus der Linearkombination

$$\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \underline{x}_k(t), \quad (5.5)$$

die Koeffizienten c_k können aus den Anfangsbedingungen $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ bestimmt werden. Die einzelnen Lösungsvektoren $\underline{x}_k(t)$ erhält man mit dem Ansatz

$$\underline{x}_k(t) = e^{\lambda_k t} \left(\mathbf{I} + t(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}) + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})^{m-1} \right) \underline{v}_k. \quad (5.6)$$

Die dazu notwendigen Eigenwerte λ_k und Eigenvektoren $\underline{v}_k$ zur Matrix $\mathbf{A}$ sind entweder rein reell oder konjugiert komplex und stammen aus dem *Eigenwertproblem*,

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \underline{v} = \underline{0}, \quad (5.7)$$

beziehungsweise aus der *charakteristischen Gleichung*,

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (5.8)$$

Wie in Gleichung 5.6 unmittelbar erkennbar, bestimmen die Eigenwerte über das Stabilitätsverhalten der Lösung ([50]):

- i) Haben *alle* Eigenwerte λ_k *negative* Realteile, so ist das System *asymptotisch stabil*.
- ii) Hat auch nur *einer* der Eigenwerte λ_k einen *positiven* Realteil, so ist das System *instabil*.
- iii) Tritt ein Eigenwert mit *verschwindendem* Realteil auf, dann entscheiden Nichtlinearitäten über das Stabilitätsverhalten und man erhält aus der Untersuchung des linearisierten Problems *keine Stabilitätsaussage*.

5.1.3 Mathematische Aufbereitung

Zur numerischen Berechnung der Eigenwerte der Rennradmodelle samt Fahrer müssen zuerst die linearen Gleichungen für die Modellbewegungen und die Reifenkräfte in eine gemeinsame Darstellungsform übergeführt werden. Hierzu wird die zu

Gleichung 5.4 etwas allgemeinere Form

$$\mathbf{B} \dot{\underline{x}} = \mathbf{A} \underline{x} \quad (5.9)$$

verwendet, das Eigenwertproblem 5.7 nimmt damit die Gestalt

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}) \underline{v} = \underline{0} \quad (5.10)$$

an. Die Stabilitätsaussagen anhand der Eigenwerte gelten natürlich unverändert.

Reifenmodell in Matrixform

Für eine Darstellung der Gleichungen 3.7, 3.8, 3.13, 3.15 – 3.20 in Matrixform werden zuerst die Winkel und Kräfte der Reifen zu Vektoren zusammengefasst,

$$\underline{\alpha} = (\alpha_1 \quad \gamma_1 \quad \alpha_2 \quad \gamma_2)^T, \quad (5.11)$$

$$\underline{\alpha}' = (\alpha'_1 \quad \gamma'_1 \quad \alpha'_2 \quad \gamma'_2)^T, \quad (5.12)$$

$$\underline{F}_{tyre} = (F_{y1} \quad F_{y2} \quad M_{z1} \quad M_{z2} \quad M_{x1} \quad M_{x2})^T. \quad (5.13)$$

Die Zusammenhänge zu den Modellfreiheitsgraden sowie die internen Verknüpfungen können nun mittels Verteilungsmatrizen ausgedrückt werden:

$$\underline{\alpha} = \mathbf{N}_{0,red} \underline{q}_{red} + \frac{1}{u} \mathbf{N}_{-1} \dot{\underline{q}}, \quad (5.14)$$

$$\frac{1}{u} \boldsymbol{\sigma} \dot{\underline{\alpha}}' = -\mathbf{I} \underline{\alpha}' + \underline{\alpha}, \quad (5.15)$$

$$\underline{F}_{tyre} = \mathbf{P}' \underline{\alpha}' + \mathbf{P} \underline{\alpha}. \quad (5.16)$$

$\mathbf{I}$ ist darin die Einheitsmatrix, die Einträge der Verteilungsmatrizen sind in Anhang B angegeben.

Lineare Bewegungsgleichungen in Matrixform

Die symbolischen Bewegungsgleichungen 4.2 – 4.6 für das Hands-Off-Model beziehungsweise 4.89 – 4.93 für das Hands-On-Model können in der für *lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten* gebräuchlichen Form

$$\mathbf{M}^j \ddot{\underline{q}} + (\mathbf{C}_0^j + u \mathbf{C}_1^j) \dot{\underline{q}} + \mathbf{K}_{0,red}^j \underline{q}_{red} = \underline{F}(\underline{q}_{red}, \dot{\underline{q}}), \quad j = \text{hands-off, hands-on} \quad (5.17)$$

in den generalisierten Lagekoordinaten $\underline{q}$ nach den Definitionen 3.1 – 3.4 angeschrieben werden. Die jeweils konstanten Massen-, Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen

sind in Anhang B angeführt. Der Vektor $\underline{F}(\underline{q}_{red}, \underline{\dot{q}})$ beinhaltet die auf das Modell wirkenden Reifenkräfte und -momente.

Mit 5.13 und einer konstanten Verteilungsmatrix $\mathbf{V}$ (siehe Anhang B) gilt dafür

$$\underline{F}(\underline{q}_{red}, \underline{\dot{q}}) = \mathbf{V} \underline{F}_{tyre}(\underline{q}_{red}, \underline{\dot{q}}), \quad (5.18)$$

und weiter mit den Beziehungen 5.14 – 5.16:

$$\underline{F}(\underline{q}_{red}, \underline{\dot{q}}) = \mathbf{V} \left(\mathbf{P}' \underline{\alpha}' + \mathbf{P} \left(\mathbf{N}_{0,red} \underline{q}_{red} + \frac{1}{u} \mathbf{N}_{-1} \underline{\dot{q}} \right) \right). \quad (5.19)$$

Nach weiteren elementaren Umformungen erhält man die Differentialgleichungen für das Rennrad- und das Reifenmodell in gekoppelter Form

$$\mathbf{M}^j \underline{\ddot{q}} + \left(\mathbf{C}_0^j + u \mathbf{C}_1^j - \frac{1}{u} \mathbf{V} \mathbf{P} \mathbf{N}_{-1} \right) \underline{\dot{q}} + \left(\mathbf{K}_{0,red}^j - \mathbf{V} \mathbf{P} \mathbf{N}_{0,red} \right) \underline{q}_{red} - \mathbf{V} \mathbf{P}' \underline{\alpha}' = \underline{0} \quad (5.20)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \underline{\dot{\alpha}}' + u \mathbf{I} \underline{\alpha}' - \mathbf{N}_{-1} \underline{\dot{q}} - u \mathbf{N}_{0,red} \underline{q}_{red} = \underline{0}, \quad j = \text{hands-off, hands-on}. \quad (5.21)$$

Rückführung auf lineares homogenes System 1.Ordnung

Zur numerischen Berechnung der Eigenwerte und -vektoren ist es zweckmäßig, die Modellgleichungen als System erster Ordnung beziehungsweise direkt als allgemeines Eigenwertproblem zu formulieren.

Dies gelingt durch die Einführung des 12×1 Zustandsvektors $\underline{x}$,

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{q}_{red}^T & \underline{\dot{q}}^T & \underline{\alpha}'^T \end{bmatrix}^T, \quad (5.22)$$

und durch das Umsortieren der Gleichungen 5.20 und 5.21 zu einem linearen, homogenen System erster Ordnung der Form

$$\mathbf{B} \underline{\dot{x}} = \mathbf{A} \underline{x}. \quad (5.23)$$

Die Einträge der 12×12 Matrizen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

sind wiederum in Anhang B aufgelistet.

5.2 Das Stabilitätsverhalten des Rennradmodells „hands-off“

Gemäß den vorherigen Grundlagen setzt sich der allgemeine Lösungsvektor der zwölf homogenen Differentialgleichungen 5.23 aus zwölf einzelnen Vektoren, den sogenannten *Eigenmodes* mit $\underline{x}_k(t) = e^{\lambda_k t} \underline{v}_k$, zusammen. Jede Bewegungsform des Modells kann nun durch eine passende Überlagerung dieser Eigenmodes dargestellt werden. Der Eigenwert λ_k eines einzelnen Modes entscheidet dabei neben dem Stabilitätsverhalten auch über die Art dessen Bewegung: aperiodisch für rein reelle λ_k oder oszillatorisch für komplexwertige λ_k . Die Einträge in dem entsprechenden Eigenvektor $\underline{v}_k$ bestimmen den jeweiligen Anteil der Freiheitsgrade an der Bewegungsform und damit die charakteristische Gestalt des Eigenmodes. Komplexe Eigenvektoren zu komplexwertigen Eigenwerten beinhalten zusätzlich die Information über den Phasenversatz zwischen den einzelnen Freiheitsgraden in einer Bewegungsform.

Von diesen zwölf Eigenmodes sind besonders die schon öfters erwähnten Modes *Weave*, *Capsize* und *Wobble* von Bedeutung. Für das Rennradmodell inklusive freihändigem, aufrechtem Fahrer und den Zahlenwerten aus Abschnitt 4.3 sind die Eigenwerte und -vektoren zu diesen Modes bei einer Geschwindigkeit von $u = 7 \text{ m/s}$ in Tabelle 5.1 angegeben. Die Eigenvektoren sind dabei so normiert, dass für den größten Eintrag $v_{k,j} = 1$ gilt.

Die Einträge in den Eigenvektoren helfen bei der Unterscheidung der einzelnen Eigenmodes, für die folgenden Stabilitätsbetrachtungen sind allerdings nur mehr die Eigenwerte von Bedeutung. Deren Verlauf über der Fahrgeschwindigkeit, von $0.1 - 25 \text{ m/s}$, wird in Form von Stabilitätsdiagrammen dargestellt, Abbildung 5.1 zeigt dieses für das Rennradmodell inklusive freihändigem, aufrechtem Fahrer. Darin werden die Eigenwerte nach Real- und Imaginärteil getrennt eingetragen. Das Vorzeichen der Realteile entscheidet dabei über die Stabilität der Eigenbewegungen, der Betrag über deren Auf- beziehungsweise Abklingverhalten. Je größer der Absolutbetrag eines negativen Realteils, desto schneller klingt der dazugehörige Mode nach einer Störung ab, je größer der positive Realteil, desto rascher steigt die Amplitude der instabilen Eigenbewegung als Reaktion auf eine Anregung. Die Imaginärteile der Eigenwerte, sofern vorhanden, werden auf die Einheit Hertz umgerechnet und stellen damit die Schwingfrequenz der Eigenbewegungen dar. Die restlichen, nicht eingezeichneten Eigenmodes sind allesamt stabil und spielen somit für das Stabilitätsverhalten keine nennenswerte Rolle.

Mode	Capsize	Weave	Wobble
Eigenwert	-5.92716	$1.10060 \pm 4.74199i$	$2.61232 \pm 59.280201i$
φ	-0.158	$0.17325 \pm 0.10595i$	$-0.00020 \mp 0.00076i$
δ	0.14414	$0.13955 \mp 0.00089i$	$0.00074 \mp 0.01684i$
β	0.00034	$-0.00162 \mp 0.00191i$	$0.00126 \pm 0.00450i$
v	-0.04907	$-0.04670 \mp 0.00357i$	$0.00891 \mp 0.00306i$
r	1	1	$-0.16893 \mp 0.00049i$
$\dot{\varphi}$	0.93649	$-0.31172 \pm 0.93816i$	$0.04476 \mp 0.01377i$
$\dot{\delta}$	-0.85432	$0.15781 \pm 0.66077i$	1
$\dot{\beta}$	-0.00199	$0.00728 \mp 0.00977i$	$-0.26366 \pm 0.08640i$
α'_1	-0.00106	$0.00430 \pm 0.00442i$	$-0.00086 \mp 0.00704i$
γ'_1	-0.12065	$0.21407 \pm 0.09586i$	$0.00054 \mp 0.00158i$
α'_2	0.00732	$0.00663 \pm 0.00028i$	$-0.00091 \pm 0.00081i$
γ'_2	-0.16498	$0.17523 \pm 0.09923i$	$-0.00043 \mp 0.00057i$

Tabelle 5.1: normierte Eigenvektoren zum Rennradmodell, „hands-off“, aufrechte Position; $u = 7 \text{ m/s}$

Die ersten beiden Modes, *Weave* und *Capsize*, wurden in der Einleitung zu dieser Diplomarbeit bereits erwähnt, im Zusammenhang mit einem einfachen Fahrradmodell zur Erklärung der vielen Zweirädern inhärenten autostabilen Eigenlenkfähigkeit. Der dritte Eigenmode, *Wobble*, beschreibt das eigentlich unerwünschte Lenkungsflattern. Aufgrund konstruktiv nicht vermeidbarer Elastizitäten in Rahmen, Gabel und Laufrädern sowie den obligatorischen Luftreifen ist jedoch auch diese Eigenbewegung charakteristisch für alle Arten von Fahrrädern.

Capsize (Kippen, „Kentern“): Der Capsizemode ist typischerweise eine aperiodische Bewegung, sowohl Eigenwert als auch Eigenvektor sind rein reell. Ein capsizes-stabiles Fahrrad besitzt die Tendenz, während einer gleichförmigen Kurvenfahrt den Lenkwinkel zu vergrößern und damit die Kurvenfahrt zu beenden. Im Gegenzug bewirkt ein instabiler Capsizemode eine stetige Erhöhung von Lenk- und Rollwinkel, die Fahrtrajektorie beschreibt eine immer enger werdende Spirale.

In allen hier gezeigten Stabilitätsdiagrammen ist der Capsizemode stets stabil.

Weave (Pendeln): Der Weavemode beschreibt eine zumeist oszillatorische Bewegungsform des gesamten Fahrrades, welche sich aus einer Überlagerung von Gier-, Lenk- und Rollbewegungen zusammensetzt. Für die Geradeausfahrt ist dabei vor allem die geringfügig phasenverschobene Kopplung von Lenk- und

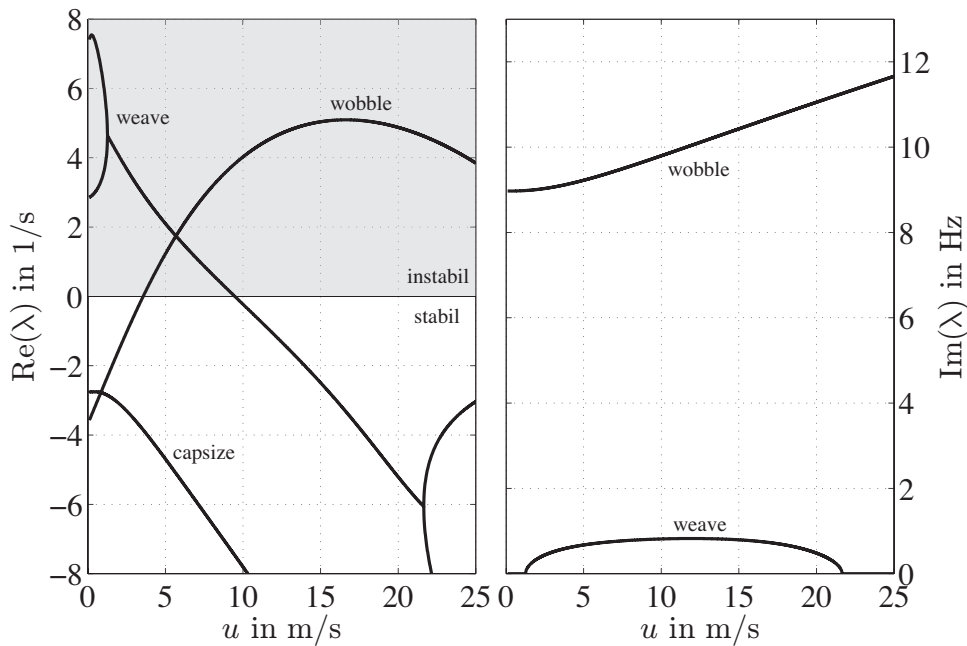


Abbildung 5.1: Stabilitätsdiagramm für das Rennradmodell, „hands-off“ und aufrechte Sitzposition

Rollwinkel von Bedeutung. In einem sowohl weave- als auch capsize-stabilen Geschwindigkeitsbereich trägt diese Eigenschaft (engl. *steer into the fall*) zur Stabilisierung der Geradeausfahrt bei.

Für sehr niedrigen Geschwindigkeiten besteht der Weavemode aus zwei instabilen, aperiodischen Ästen, die sich jedoch rasch zu dem komplexen Eigenwertpaar vereinigen und bei weiter steigender Geschwindigkeit in den stabilen Bereich übertreten. Bei langsamer Fahrgeschwindigkeit muss der Fahrer jedoch stabilisierend eingreifen – auch in der Praxis zeigt sich, dass das Freihändigfahren mit sinkender Geschwindigkeit zunehmend schwieriger wird.

In den nachfolgenden Berechnungen zeigt der Weavemode bei höheren Geschwindigkeiten teils unterschiedliche Effekte. Ein Aufspalten des Modes in zwei reelle Äste kommt dabei ebenso vor wie ein Kreuzen der Realteilkurven von Weave und Capsize. All dies spielt sich aber stets im stabilen Bereich ab, und so wird hier nicht näher darauf eingegangen.

Wobble (Lenkungsflattern): Der dominierende Freiheitsgrad des stets oszillierenden Wobblemodes ist erwartungsgemäß der Lenkwinkel beziehungsweise die dazugehörige Winkelgeschwindigkeit $\dot{\delta}$, gefolgt vom β -Freiheitsgrad, vgl. Tabelle 5.1. Auch daran erkennt man die Bedeutsamkeit der Rahmenflexibilität

zur Abbildung des Lenkungsflatters.

Abbildung 5.1 zeigt einen typischen *Low-Speed-Wobble*. Die dazugehörige Realteilkurve startet dabei steil ansteigend im stabilen Bereich, tritt bei Geschwindigkeiten um 5 m/s in den instabilen Bereich über und erreicht dort ein deutliches Maximum. Die Schwingfrequenz des Wobblemodes liegt typischerweise zwischen 6 und 12 Hz und steigt ab ca. 5 m/s näherungsweise linear mit der Fahrgeschwindigkeit an.

In den späteren Stabilitätsanalysen zum Hands-On-Model zeigt die Eigenwertkurve des Wobblemodes eine etwas andere Gestalt. Die Realteilkurve verläuft dabei deutlich flacher und tritt erst bei höherer Geschwindigkeit in den instabilen Bereich über. Aufgrund dessen wird solch ein Kurvenverlauf als *High-Speed-Wobble* bezeichnet. Außerdem verläuft die Frequenzkurve, in Übereinstimmung mit den Messungen aus [35], nahezu konstant über der Fahrgeschwindigkeit.

Etwas Mut und Übung vorausgesetzt, können Wobbleschwingungen vom Fahrer leicht provoziert werden. Dazu begibt sich dieser bei mittlerer Fahrgeschwindigkeit in eine freihändige Fahrposition und initiiert die Oszillationen durch einen seitlichen Schlag auf den Lenker oder den Lenkkopf (Steuerrohr). Entscheidend dabei ist eine feste Sitzposition auf dem Fahrrad. Dies gelingt am besten mit zwischen den Beinen eingeklemmten Sattel und mit stark angespannter Rumpfmuskulatur. Je nach Stabilitätsverhalten des betreffenden Fahrrades klingen die Schwingungen entweder verschieden rasch ab (stabil), oder eben auf (instabil), sodass der Fahrer die Aktion durch Fangen des Lenkers und Abbremsen des Gefährts beenden muss, um einem Sturz zu entgehen.

Treten Wobbleschwingungen jedoch unerwarteterweise dann auf, wenn der Fahrer die Hände bereits am Lenker hat, so stellt dies definitiv eine Gefahrensituation dar. Ein probates Mittel, um die Schwingungen rasch zu unterdrücken, ist nicht bekannt. Außerdem verbleibt die Frage, ob dieser *Hands-On-Wobble* mehrheitlich durch die Eigenschaften des Fahrrads oder des menschlichen Fahrers beeinflusst wird. Die im Anschluss gezeigten Analysen versuchen einige Antworten auf diese Fragestellungen zu geben.

Die nächsten Abschnitte sind dabei folgendermaßen gegliedert: in einem ersten Schritt wird der Unterschied in den Geometrieparametern zwischen dem aus [31], [32], [33] und [34] bekannten Trekkingrad- und dem vorliegenden Rennradmodell aufgezeigt. Dazu werden beide Fahrräder mit dem aufrechten, freihändigen Fahrer kombiniert. Im nächsten Schritt wird der Einfluss der Massengeometrie der hinteren Baugrup-



Abbildung 5.2: Trekkingrad samt Testpilot von [31], [32], [34]

pe auf das Stabilitätsverhalten diskutiert und damit der Unterschied zwischen den beiden Sitzpositionen, aufrecht und gebeugt, jeweils „hands-off“, verdeutlicht. Anschließend werden die Auswirkungen der Massegeometrie der vorderen Baugruppe behandelt. Darauf aufbauend wird dann der Einfluss der Fahrerarme auf das Stabilitätsverhalten untersucht. Dazu werden in einem einfachen Versuch auf Basis des Hands-Off-Model lediglich die *Hände* des Fahrers als Massen dem Lenker zugeschlagen, die *Arme* bleiben weiterhin ein unbeweglicher Teil des Fahrerkörpers. Zusätzlich soll ein Feder-Dämpfer-Element zwischen Rahmen und Lenker eine fiktive Steifigkeit und Dämpfung der Armmuskulatur berücksichtigen. In einem letzten Schritt wird schlussendlich das Hands-On-Model eingeführt und der erhebliche Einfluss der beweglichen Fahrerarme auf das Stabilitätsverhalten diskutiert.

5.3 Vom Trekkingrad zum Rennrad

Aus den vorangegangenen Diplomarbeiten [31], [32], [34] ist das Stabilitätsverhalten des Trekkingrades sehr gut bekannt und es eignet sich somit auch ausgezeichnet als Startpunkt für die folgenden Analysen. Die entsprechenden Modellparameter zu dem Fahrrad sind in Anhang C angeführt. Das Rennrad unterscheidet sich vom Trekkingrad in einigen wesentlichen Geometrie- und Massenparametern, deren Einfluss auf das Stabilitätsverhalten bereits in [31], [32], [33] und [34] umfassend untersucht wurde und mit eigenen Berechnungen bestätigt werden konnte.

Demnach wirken sich folgende Merkmale besonders *destabilisierend* auf den Wobblemode aus:

- eine erhöhte Schräglaufsteifigkeit am Vorderrad $c_{F\alpha 1}$
- eine erhöhte Rückstellmomentsteifigkeit zufolge Schräglauf am Vorderrad $c_{M\alpha 1}$
- ein verringertes polares Massenträgheitsmoment des vorderen Laufrades I_{1yy}
- eine erhöhte Masse des Fahrerkörpers und damit der hinteren Baugruppe m_m
- ein verringertes Trägheitsmoment des Lenkers um die Lenkachse I_{fzz}
- ein verringerter Lenkachsenwinkel ε
- ein verringerter Radstand l
- ein erhöhter β -Gelenkabstand s_c
- eine verringerte β -Gelenkssteifigkeit c_β
- eine verringerte β -Gelenksdämpfung k_β

Mit diesen Informationen kann anhand der Stabilitätskurven in Abbildung 5.3 nun schrittweise der Übergang vom Trekkingrad zum Rennrad vollzogen werden. Die schwarze, dünne Linie repräsentiert dabei das Trekkingrad inklusive Messausrüstung und mit dem im Vergleich zu Ott [32] etwas leichtgewichtigeren Fahrer.

Die blaue, strichpunktierte Linie zeigt das Rennrad mit den entsprechenden Änderungen für Geometrie und Masse, die Parameter für das β -Gelenk sowie die Reifenkennwerte sind allerdings gleich denen des Trekkingrades.

Die Summe dieser Änderungen verändert das Stabilitätsverhalten deutlich. Den größten Einfluss dabei hat das signifikant geringere polare Massenträgheitsmoment des vorderen Rennrad-Laufrades I_{1yy} . Dieser Wert geht in den Bewegungsgleichungen proportional zur Vorwärtsgeschwindigkeit u ein, womit sich auch augenscheinlich der mit zunehmender Geschwindigkeit immer stärker werdende Einfluss des Parameters erklären lässt. Der Stabilitätsdurchgang des Weavemodes wird zu einer etwas höheren Geschwindigkeit verschoben und dessen Schwingverhalten bei hohen Geschwindigkeiten gänzlich modifiziert. Viel eklatanter aber sind die Veränderungen der Realteilkurven für den Capsizemode, der wesentlich stabilisiert wird, und für den Wobblemode, der vor allem nach dem Stabilitätsdurchgang signifikant destabilisiert wird.

Ein zweiter wesentlicher Einflussfaktor sind die Trägheitsmomente der vorderen Baugruppen um die Lenkachse, I_{fzz} und I_{szz} , die den leichteren Bauteilen des Rennrades zufolge deutlich geringer sind und sich hauptsächlich auf den Wobblemode auswirken. So erhöht sich die Anfangssteigung der Realteilkurve und verringert somit die Geschwindigkeit, bei der der Wobble in den instabilen Bereich übertritt. Außerdem

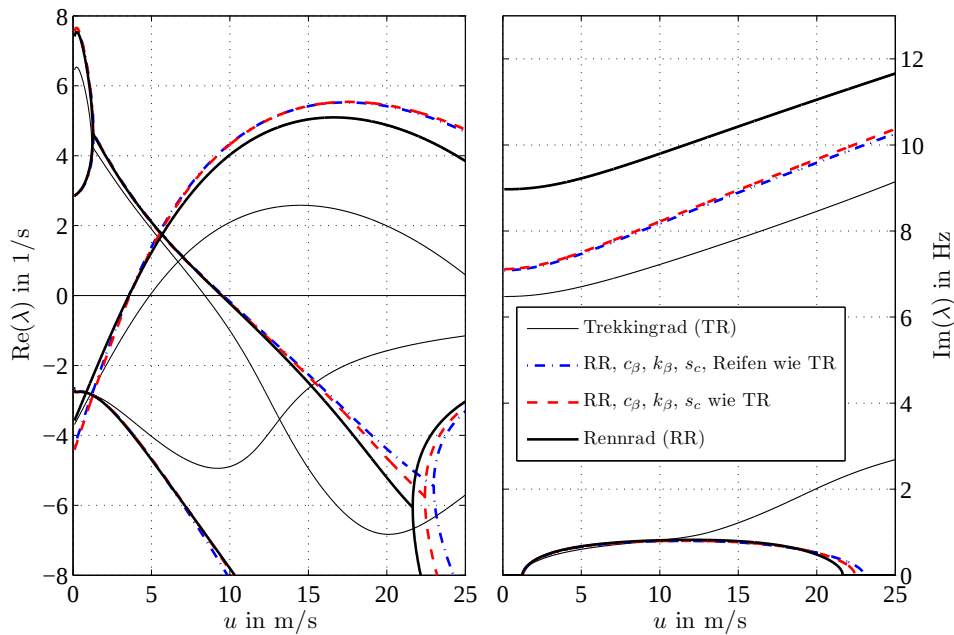


Abbildung 5.3: vom Trekkingrad zum Rennrad

wird die Wobblefrequenz etwas angehoben. Eine geringfügige Abflachung der Imaginärteilkurve zufolge des kleineren vorderen polaren Trägheitsmoments I_{1yy} , wie z. B. in [34] beobachtet, wird durch die geringere Trägheit der vorderen Baugruppen ausgeglichen, sodass die Frequenzkurven annähernd parallel verlaufen.

Für die rote, strichlierte Linie wurden die Reifenkennwerte etwas verändert. Auch wenn das Trekkingrad bereits mit vergleichsweise schmalen und gering profilierten Reifen ausgestattet ist, so weisen typische Rennradreifen meist einen noch geringeren Querschnitt auf und werden mit höheren Innendrücken gefahren. Gemäß [48] führt dies zu zwei gegenläufigen Effekten: der höhere Innendruck macht den Reifen einerseits generell steifer, andererseits wird dadurch auch die Aufstandsfläche kürzer. Ersteres bewirkt eine höhere Schräglaufsteifigkeit $c_{F\alpha}$, während hingegen die Rückstellmomentsteifigkeit $c_{M\alpha}$ für den Reifenschräglauf, zufolge des kürzeren pneumatischen Nachlaufs, gleich wie die Einlauflängen $\sigma_{\alpha,\gamma}$, geringfügig abnimmt. Obwohl jede dieser Änderungen einen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten und insbesondere auf den Wobblemode hat, so heben sich im vorliegenden Fall die Effekte weitestgehend gegenseitig auf, und die Reifen bringen faktisch keine Unterscheidung im Stabilitätsverhalten von Trekkingrad und Rennrad.

Im letzten Schritt (schwarze, volle Linie, gleich wie Abbildung 5.1) werden die Parameter zur Ersatznachgiebigkeit an moderne Rennradrahmen angepasst. Die Lage des



Abbildung 5.4: Autor und Rennrad von [35]

β -Gelenks ist bei beiden Rädern in der Mitte des Steuerrohrs angesetzt, aufgrund der kürzeren Gabel des Rennrades (im Trekkingrad ist eine Federgabel verbaut) ergibt sich ein geringerer Gelenksabstand s_c vom vorderen Radaufstandspunkt. Die Ersatzsteifigkeit c_β des Rennradrahmens wurde im Vergleich zum Trekkingrad um mehr als ein Drittel auf 83.5 Nm/° angehoben und die Dämpfungskonstante k_β so bestimmt, dass das Lehrsche Dämpfungsmaß einer freien Schwingung der unteren Gabeleinheit mit dem β -Freiheitsgrad,

$$D_{RR} = \frac{k_\beta}{2\sqrt{I_{s\beta\beta} c_\beta}} \cdot 100 = 19.1 \% \quad (5.25)$$

beträgt. Der Rennradrahmen ist damit etwas stärker gedämpft als der des Trekkingrades ($D_{TR} = 16.9\%$). Alle diese Änderungen beeinflussen beinahe ausschließlich den Wobblemode, der zum einen eine merkliche Stabilisierung und zum anderen eine starke Erhöhung der Frequenz erfährt.

Die Steifigkeit von Rahmen und Gabel scheint den Berechnungen zufolge einer der wenigen Parameter zu sein, mit dem ein Fahrradhersteller bei ansonsten unveränderten Eigenmodes den Stabilitätsverlauf der Wobbleschwingungen merklich beeinflussen kann, wobei eine höhere Steifigkeit und eine damit einhergehende höhere Dämpfungskonstante (bei gleichem Lehrschen Dämpfungsmaß) stets eine Stabilisierung des Wobble bedeutet.

5.4 Änderung der Sitzposition

Die Änderung der Sitzhaltung des Fahrers auf dem Rennrad verändert sowohl die Lage des Schwerpunktes des Gesamtmodells und damit die Radaufstandskräfte als auch die Einträge im Trägheitstensor der hinteren Baugruppe. Zur Untersuchung der Auswirkung dieser Größen auf das Stabilitätsverhalten werden zuerst die entsprechenden Parameter einzeln variiert, anschließend wird der Wechsel der Sitzposition von der aufrechten Haltung zur gebeugten Haltung vollzogen. Dabei liegen stets die Hands-Off-Bewegungsgleichungen zugrunde.

5.4.1 Variation der Radaufstandskräfte

Die Radaufstandskräfte F_{zi} gehen in die Modellgleichungen auf zweierlei Art ein. Zum einen erzeugt die vordere Aufstandskraft bei ausgelenkten Bewegungswinkeln ein Drehmoment um die Lenk- sowie um die β -Achse, erkennbar an den Ausdrücken S_δ und S_β entsprechend den Gleichungen 4.24 und 4.25. Zum anderen sind gemäß dem Reifenmodell alle Reifenkennwerte und dadurch die Kräfte und Momente direkt proportional zu der jeweiligen Aufstandskraft. Die Gültigkeit des linearen Zusammenhangs muss für große Änderungen der Radaufstandskräfte jedoch etwas angezweifelt werden, vgl. dazu [48], wonach auf eine deutliche Erhöhung der Radlasten die Reifenkräfte lediglich unterproportional ansteigen. Es sei angemerkt, dass dies allerdings zu einem Teil bei der Wahl der Reifenkennwerte bereits berücksichtigt wurde. So sind die Parameter für den vorderen und hinteren Trekkingradreifen, Tabelle C.2, unterschiedlich und bereits an die erhöhte hintere Aufstandskraft angepasst. Für das Rennradmodell mit dem gebeugten Fahrer ergibt sich eine ausgeglichene Gewichtsverteilung, die Parameter sind demnach für beide Reifen gleich.

Abbildung 5.5 zeigt die Auswirkungen der alleinigen Verschiebung der Aufstandskräfte zwischen hinterem und vorderem Laufrad um ± 40 N oder etwa $\pm 10\%$ für das Rennrad inklusive aufrechtem, freihändigem Fahrermodell. Zu den dünnen Linien wurden die lateralen Reifenkräfte jeweils konstant belassen, somit ändern sich nur die statischen Ausdrücke S_δ und S_β . Die dicken Linien resultieren aus der vollständigen Änderung. Dabei zeigt sich, dass eine Verschiebung der Aufteilung der Gewichtskräfte in Richtung Vorderrad (rot strichlierte Linien) eine destabilisierende Wirkung sowohl auf den Weave- als auch auf den Wobblemode bewirkt, während eine Verschiebung nach hinten (blau strichpunktierte Linien) die gegenläufige Konsequenz zur Folge hat. Der Einfluss der lateralen Reifenkräfte auf den Wobble übersteigt dabei den der

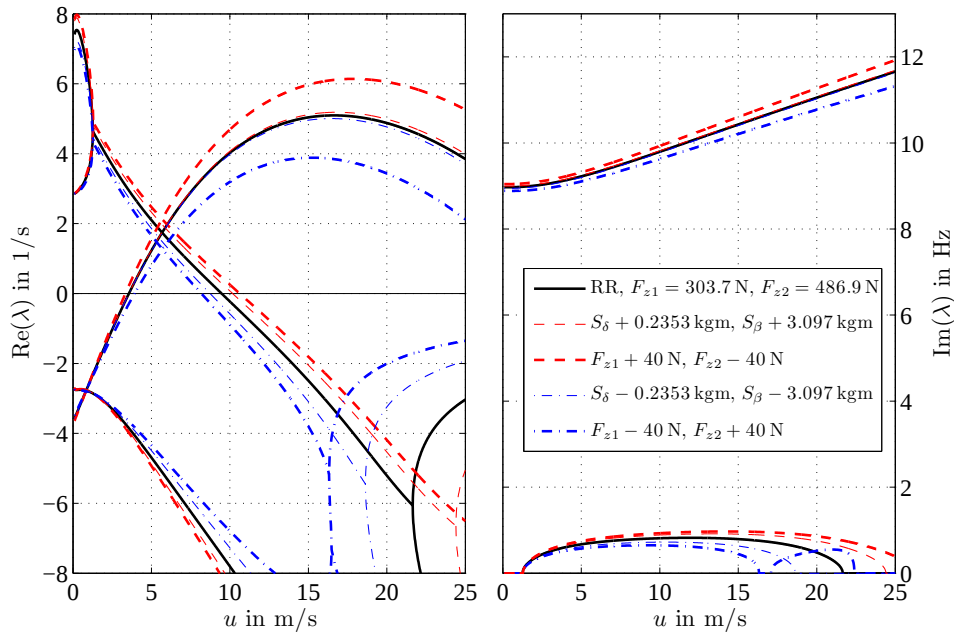
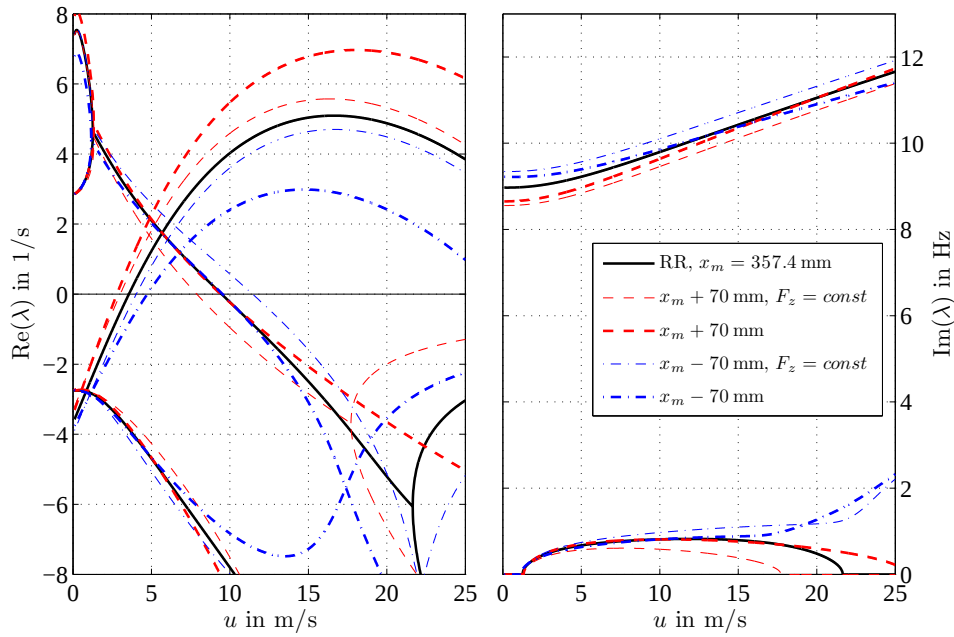


Abbildung 5.5: Variation der Aufstandskräfte

statischen Momente um die Lenk- und β -Achse um ein Vielfaches. Erwähnenswert ist außerdem, dass die Änderungen im Stabilitätsverhalten des Wobblemodes erst bei höheren Geschwindigkeiten schlagend werden. Die Unterschiede in den Frequenzkurven fallen vergleichsweise gering aus.

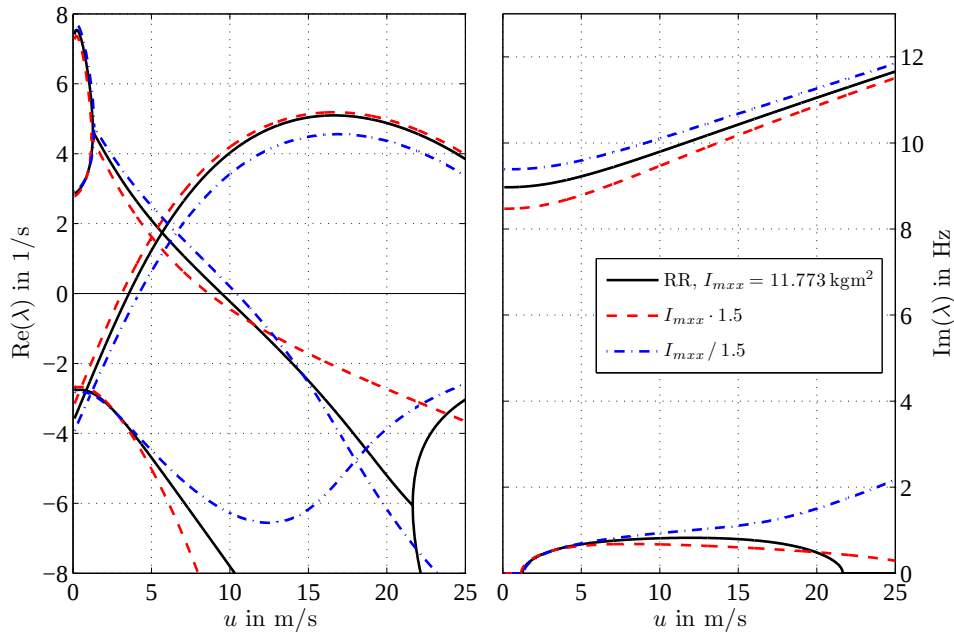
In Kapitel 3 über die Modellbildung wurde gezeigt, dass für eine näherungsweise Betrachtung der Einfluss einer geneigten Fahrbahn und der der Fahrgeschwindigkeit entsprechenden Luftwiderstandskräfte auf eine Änderung der Radaufstandskräfte reduziert werden kann. Die Verringerung der zur Fahrbahn normalen Gesamtaufstandskraft gemäß dem Cosinus der Straßenneigung fällt dabei vernachlässigbar gering aus ($\sim 1.6\%$ Verringerung bei 18% Gefälle). Eine geänderte Aufteilung der Radlasten zufolge den Luftkräften (Nickmoment) jedoch kann das Stabilitätsverhalten offenbar stark verändern, entscheidend dafür ist die Lage des Druckpunktes der Luftkräfte. Verlässliche Informationen dazu konnten allerdings nicht gefunden werden, vermutlich ist die Lage dieses Punktes auch stark von der Fahrerstatur und seiner Sitzposition abhängig. Für alle weiteren Rechnungen wird ein solches Nickmoment außer acht gelassen. Dies entspricht der Annahme, dass der Schwerpunkt des Gesamtmodells und der Druckpunkt der Luftkräfte den selben Normalabstand von der Fahrbahn aufweisen.

Abbildung 5.6: horizontale Variation der *mainframe*-Schwerpunktslage

5.4.2 Variation der *mainframe* - Massengeometrie

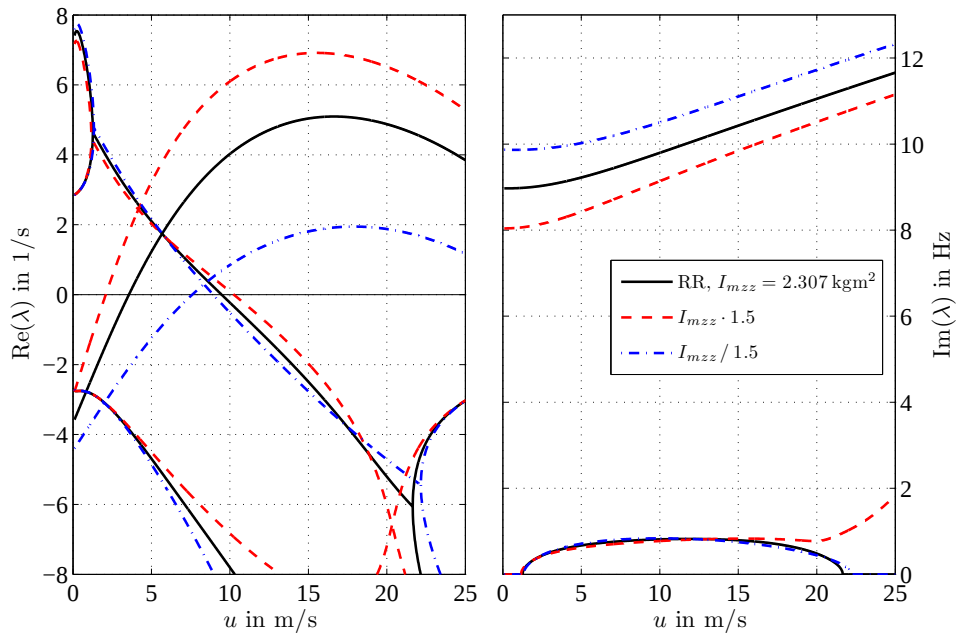
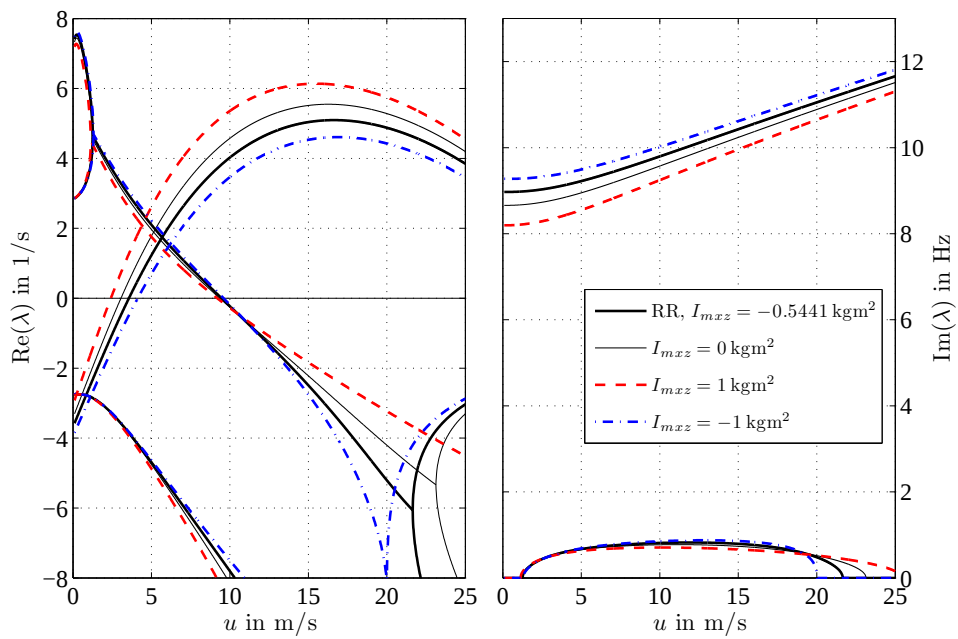
Zur Abbildung 5.6 wurde die horizontale Lage x_m des Schwerpunktes der hinteren Baugruppe um ± 70 mm verschoben. Dadurch ändert sich einerseits die Verteilung der Radaufstandskräfte, andererseits wandeln sich die der Gierbewegung des Fahrrads zugeordneten Einträge in den Systemmatrizen, wie beispielsweise das Trägheitsmoment des Gesamtmodells $I_{T_{zz}|D}$ um die vertikale Achse durch den hinteren Aufstandspunkt. Zu den dünnen Linien wurden die Aufstandskräfte jeweils im Vergleich zur Referenz unverändert belassen. Dabei zeigt sich, dass eine Verschiebung des Schwerpunktes nach vorne (dünne, rot strichlierte Linie) den Übergang des Weavemodes in den stabilen Bereich zu geringeren Geschwindigkeiten verschiebt, während der Wobblemode sichtlich destabilisiert wird. Nimmt man die Änderung der Aufstandskräfte noch hinzu (dicke, rot strichlierte Linie), so wird die Verschiebung der Weavekurve beinahe wieder rückgängig gemacht, während der Wobblemode noch weiter destabilisiert wird. Ein ähnlicher Effekt ergibt sich für die Wobblefrequenz, sodass die Imaginärteilkurve für den nach vorne verschobenen Schwerpunkt in Summe etwas steiler, aber kaum verschoben verläuft. Für eine Verschiebung des Schwerpunktes nach hinten (blaue Linien) ergibt sich ein entsprechend umgekehrtes Verhalten.

Analoge Berechnungen mit vertikalen Verschiebungen des *mainframe*-Schwerpunktes h_m wurden ebenso durchgeführt. Dieser Parameter wirkt sich auf einige der Roll-

Abbildung 5.7: Variation des *mainframe*-Trägheitsmoments I_{mxx}

bewegung zugeordnete Gleichungseinträge aus, wie beispielsweise auf das Trägheitsmoment $I_{Txx|D}$ des Gesamtmodells um die x_D Achse. Doch auch bei vergleichsweise großen Verschiebungen zeigte sich keine erwähnenswerte Veränderung im Stabilitätsverhalten, deshalb wird auf eine Darstellung verzichtet. Diese untergeordnete Bedeutung wird auch durch Abbildung 5.7 bestätigt. Dabei wird einzig das Massenträgheitsmoment I_{mxx} der hinteren Baugruppe bei gleich bleibender Masse um den Faktor 1.5 variiert. Auf die relevanten Bereiche für Weave- und Wobblemode hat dieser Parameter einen eher unbedeutenden Einfluss, lediglich die Gestalt der Realteilkurve des aperiodischen Capsizemodes wird im stabilen Bereich etwas verändert. Eine Änderung des Massenträgheitsmoments I_{mzz} der hinteren Baugruppe um den Faktor 1.5 wirkt sich sichtbar stärker aus, Abbildung 5.8. Vor allem der Wobblemode ist betroffen und wird durch die Erhöhung des Trägheitsmoments (rot strichlierte Linie) über den ganzen Geschwindigkeitsbereich destabilisiert, indem die Realteilkurve zu höheren Werten verschoben wird, wodurch die Geschwindigkeit des Durchtritts durch die Stabilitätsgrenze sinkt. Gleichzeitig wird die Imaginärteilkurve zu niedrigeren Frequenzen verschoben. Eine Verringerung dieses Parameters um denselben Faktor (blau strichpunktirierte Linie) führt zu einem noch stärker ausgeprägten, entsprechend umgekehrten Verhalten.

Als letzter Parameter wird noch das Deviationsmoment I_{mzx} variiert, Abbildung 5.9. Wie bei allen Trägheitsmomenten zuvor, bewirkt eine Erhöhung bei gleichbleiben-

Abbildung 5.8: Variation des *mainframe*-Trägheitsmoments I_{mzz} Abbildung 5.9: Variation des *mainframe*-Deviationsmoments I_{mxz}

der Körpermasse eine Destabilisierung des Wobblemodes, die mit einer Reduzierung dessen Schwingfrequenz einhergeht (rot strichlierte Linie). Eine Verkleinerung des Deviationsmoments bewirkt wiederum den gegenteiligen Effekt (blau strichpunktier-te Linie). Der Weavemode wird, zumindest solange er instabil ist, sowohl in den Real- als auch in den Imaginärteilkurven nur geringfügig verändert.

5.4.3 Wechsel von der aufrechten zur gebeugten Sitzposition

In Abbildung 5.10 wird nun die Änderung der Körperhaltung des Fahrers am Rennrad von der aufrechten zur gebeugten, sportlichen Sitzposition vollzogen, siehe dazu auch die Abbildungen 3.6 und 3.7. Dabei wird stets vom freihändig fahrenden Fahrer ausgegangen, es gelten die linearen Hands-Off-Bewegungsgleichungen. Die dicke, schwarze Linie repräsentiert wie gehabt das Rennrad samt aufrechtem Fahrer. Durch den Wechsel der Sitzhaltung ändern sich die Einträge des Trägheitstensors und die Schwerpunktslage der hinteren Baugruppe sowie die Verteilung der Aufstandskräfte zwischen Vorder- und Hinterrad.

Zur blau strichpunktierter Linie wurden einzig die Veränderung des Trägheitstensors berücksichtigt. Gemäß den Tabellen 4.3 und 4.4 sinken dabei die Zahlenwerte für I_{mxx} und I_{mzz} , dafür steigt das Trägheitsmoment um die vertikale Achse durch den *mainframe*-Schwerpunkt, I_{mzz} , stark an. Von diesen drei Größen besitzt letztere den stärksten Einfluss, und so führen die Änderungen in Summe zu einer Destabilisierung aller drei Modes. Der Wobble wird vor allem bei niedrigen Geschwindigkeiten destabilisiert und die dazugehörige Frequenz deutlich reduziert.

Die rot strichlierte Linie beinhaltet zusätzlich noch die Verschiebung des Schwerpunktes nach vorne und unten ohne einer Änderung der Aufstandskräfte. Dies führt zu einer weiteren Destabilisierung des Wobblemodes und einem geringfügigen Absenken der Schwingfrequenz. Die Veränderung des Weavemodes entsprechend den Trägheitsmomenten wird nahezu rückgängig gemacht, der Capsizemode wird allerdings weiter destabilisiert.

Die dünne, schwarze Linie weist nun das Rennradmodell mit gebeugtem Fahrer inklusive aller Änderungen aus. Wie erwartet streckt die erhöhte Aufstandskraft am Vorderrad die Wobble-Realteilkurve bei höheren Geschwindigkeiten weiter in den instabilen Bereich, ohne die Imaginärteilkurve wesentlich zu beeinflussen. Der Stabilitätsdurchtritt des Weavemodes wird wiederum zu höheren Geschwindigkeiten verschoben.

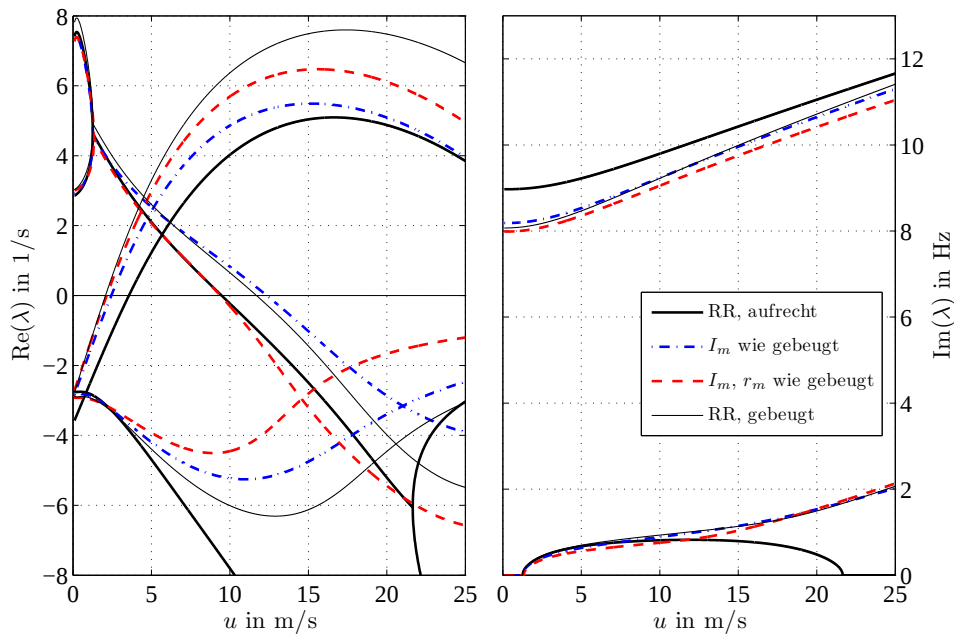


Abbildung 5.10: Wechsel von der aufrechten zur gebeugten Sitzposition

5.5 Hände zum Lenker: das Übergangsmodell

Ausgehend von der gebeugten Sitzposition kann nun versucht werden, den Einfluss der am Lenker abgestützten Fahrerarme auf das Stabilitätsverhalten zu untersuchen. In einer einfachen Modellvorstellung können unter Beibehaltung des *Hands-Off-Model* lediglich die als Kugeln modellierten Hände des Hanavan-Models von dem Fahrerkörper entfernt und anstelle dessen dem Rennradlenker an der entsprechenden Griffposition zugegeben werden. Dies wird im weiteren als *Übergangsmodell* bezeichnet. Weitere Rückwirkungen der Arme auf das Lenksystem können vereinfacht durch ein fiktives Feder-Dämpfer-Element zwischen der hinteren Baugruppe m und der oberen Lenkeinheit f abgebildet werden. Der Einfluss der einzelnen Komponenten dieser Modellvorstellung auf das Stabilitätsverhalten wird zuvor wieder unabhängig voneinander analysiert.

5.5.1 Variation der Massengeometrie der lenkbaren Baugruppe

Der Übergang der Hände von der hinteren zur vorderen Baugruppe verändert die Massengeometrie des Gesamtsystems (Index T) im aufrechten, unausgelenkten Zustand nicht. Darauf beziehend werden im Weiteren ausschließlich die zusammenfassenden Ausdrücke mit Index H gemäß den Gleichungen 4.14 – 4.18 variiert,

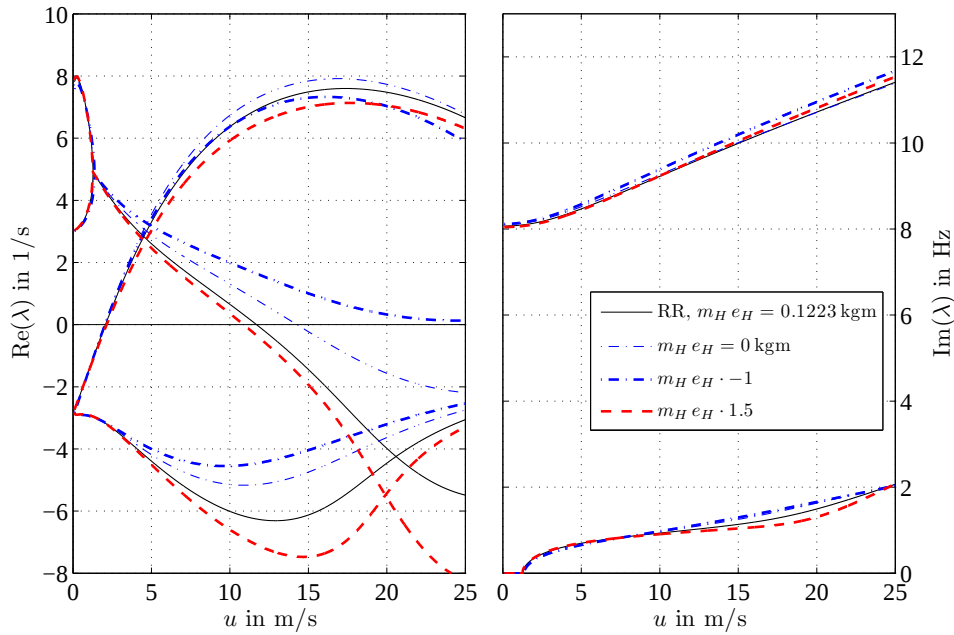
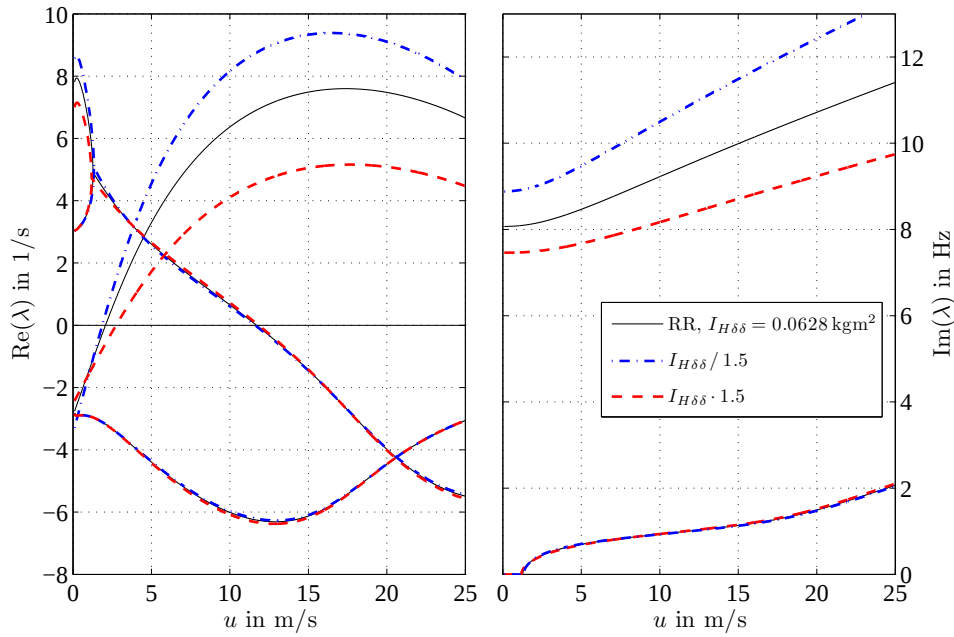


Abbildung 5.11: Variation der Schwerpunktslage der lenkbaren Baugruppe

die restlichen kombinierten Ausdrücke bleiben dadurch unverändert, mit Ausnahme des statischen Moments $S_\delta g$ gemäß Gleichung 4.24.

In Abbildung 5.11 wird der stets gemeinsam auftretende Term $m_H e_H$ variiert. Die Größe e_H bezeichnet dabei den Normalabstand des Gesamtschwerpunktes der beiden vorderen Baugruppen f und s von der Lenkachse und beeinflusst das Lenkverhalten des Fahrrads auf zweierlei Art. Befindet sich der Schwerpunkt vor der Lenkachse, $e_H > 0$, dann erzeugt erstens die gedanklich darin angreifende Gewichtskraft bei einer positiven Neigung des Fahrradrahmens ein Drehmoment auf die vordere Baugruppe um die Lenkachse in Richtung der Neigung, während zweitens eine in diesem Schwerpunkt angreifende gedankliche Trägheitskraft zufolge einer positiven Querbewegung der hinteren Baugruppe – und damit der Lenkachse – zu einem Scheinmoment um die Lenkachse in die entgegengesetzte Richtung führt.

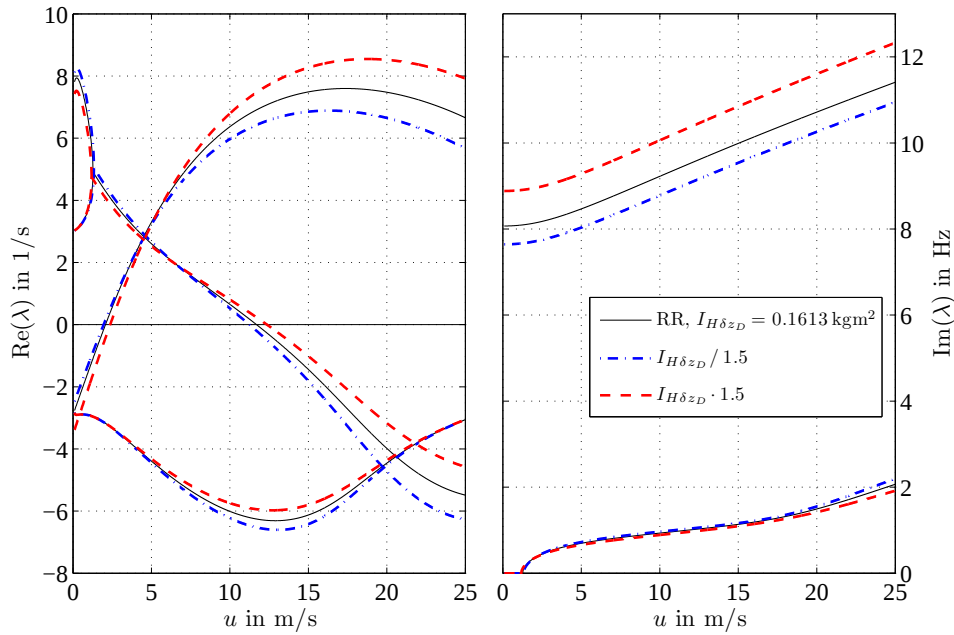
Die dünne, schwarze Linie zeigt das unveränderte Rennradmodell samt gebeugtem, freihändigem Fahrer, man beachte dabei die geänderte Skalierung der Realteilachse. Für die dünne, blau strichpunktierte Linie wurde der Schwerpunktsabstand zu Null gesetzt, ohne die Trägheitsmomente zu verändern. Damit werden die eben genannten Effekte unterbunden. Dies sorgt für eine beträchtliche Änderung des Eigenlenkverhaltens, Capsize- und Weavemode werden deutlich destabilisiert. Noch deutlicher wird dies, wenn der Schwerpunkt hinter die Lenkachse verschoben wird, dicke, blau strichpunktierte Linie. Dabei verbleibt der Weavemode für den kompletten gezeigten Ge-

Abbildung 5.12: Variation des vorderen Trägheitsmoments $I_{H\delta\delta}$

schwindigkeitsbereich instabil. Der Wobblemode jedoch wird im Stabilitätsverhalten und im Frequenzverhalten vergleichsweise kaum verändert. Die rot strichlierte Kurve zeigt die Berechnungen mit weiter nach vorne verschobenem Schwerpunktsabstand, wobei sich für Weave- und Wobblemode eine geringfügige, für den Capsizemode eine merkliche Stabilisierung ergibt.

Ein anderes Bild ergibt sich durch die Veränderung des Trägheitsmomentes der vorderen Baugruppen um die Lenkachse, $I_{H\delta\delta}$, wobei der Wobblemode sehr stark verändert wird, Weave- und Capsizemode werden hingegen kaum beeinflusst, siehe Abbildung 5.12. Die dünne, schwarze Linie repräsentiert wieder das unveränderte Rennrad. Eine Reduktion des Trägheitsmomentes, blau strichpunktierte Linie, zeigt eine starke Destabilisierung des Wobble, die dazugehörige Schwingfrequenz wird dabei signifikant erhöht, außerdem erhöht sich der Anstieg über der Fahrgeschwindigkeit. Eine Erhöhung der Trägheit ergibt eine entsprechende Stabilisierung des Wobble, die Frequenzkurve verläuft niedriger und flacher.

Die beiden Deviationsmomente $I_{H\delta x_D}$ und $I_{H\delta z_D}$ zur vorderen Einheit verknüpfen Roll- beziehungsweise Gierbewegungen der hinteren Baugruppe mit Lenkbewegungen der vorderen Baugruppen. Eine Variation des ersten, $I_{H\delta x_D}$, um den Faktor 1.5 wirkt sich auf alle drei Eigenmodes nur äußerst geringfügig aus und wird daher auch nicht dargestellt. Die Variation des zweiten Deviationsmoments, $I_{H\delta z_D}$, ist in Abbildung 5.13 gezeigt. Eine Vergrößerung des Parameters führt ab mittleren Ge-

Abbildung 5.13: Variation des vorderen Deviationsmoments $I_{H\delta z_D}$

schwindigkeiten zu einer Destabilisierung des Weavemodes und ebenso des Wobblemodes, dessen Frequenz wird dabei merklich erhöht. Eine entsprechende Verkleinerung führt zu gegenläufigen Effekten, die Senkung der Wobblefrequenz ist allerdings geringer ausgeprägt als die entsprechende Anhebung zuvor.

5.5.2 Hände als Masse am Lenker

Gemäß den oberen Parametervariationen wird in Abbildung 5.14 das Stabilitätsverhalten des Übergangsmodells mit der veränderten vorderen Massengeometrie gezeigt. Den Startpunkt (dünne, schwarze Linie) bildet wiederum das Hands-Off-Model in der gebeugten Sitzposition. Nun werden die beiden Hände (Masse je Hand: 0.5353 kg) von der hinteren Baugruppe abgezogen und dem Lenker zugeschlagen. Im unausgelenkten Fahrradmodell ändert sich dadurch der geometrische Ort der Hände jedoch nicht, die Massengeometrie des Gesamtmodells bleibt also trotz der geänderten Aufteilung erhalten. Die rot strichlierte Kurve beinhaltet dabei die Zunahme der Lenkermasse und des Schwerpunktabstandes ($m_H e_H = 0.25692 \text{ kg m}$), nicht jedoch die Änderung der Trägheitsmomente. Es zeigt sich eine merkliche Stabilisierung aller drei Modes, sieht man vom Weavemode bei sehr geringen Geschwindigkeiten ab. Die Wobblefrequenz wird kaum verändert.

Anschließend werden auch die geänderten Trägheitsmomente der vorderen Baugruppe berücksichtigt, deren Zahlenwerte sich in etwa verdoppeln. Die Erhöhung der

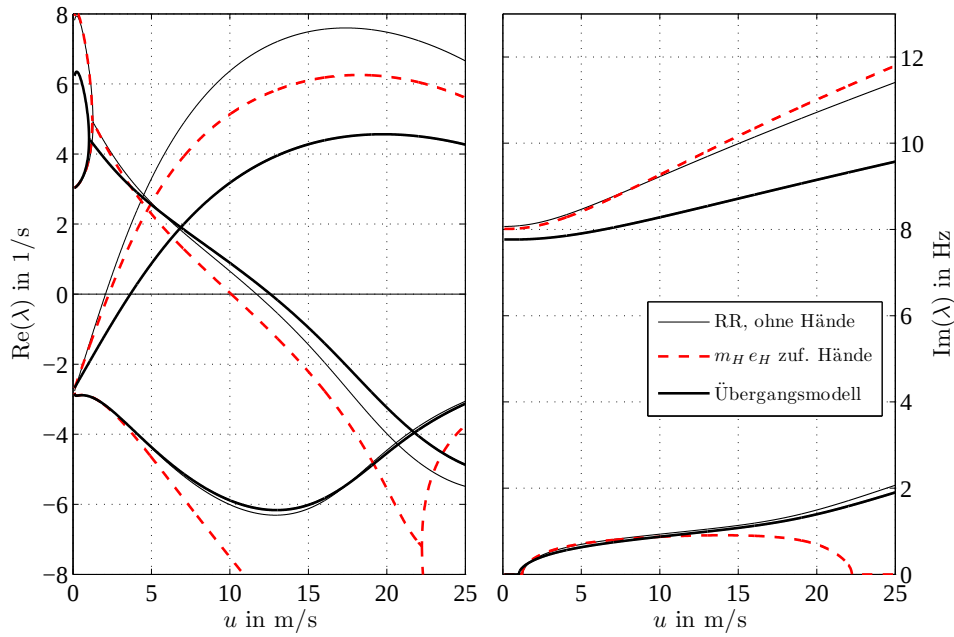


Abbildung 5.14: Hände als Masse am Lenker

beiden Deviationsmomente $I_{H\delta x_D}$ und $I_{H\delta z_D}$ destabilisiert zwar alle drei Modes und verschiebt die Wobbleimaginärteile zu höheren Frequenzen, dies wird allerdings durch die Auswirkungen des erhöhten Trägheitsmoments $I_{H\delta\delta}$ überlagert, in Summe ergibt sich die dicke, schwarze Linie.

Diese zeigt eine geringfügige Veränderung für Weave und Capsize von den Referenzkurven. Der Wobble jedoch wird durch die veränderte Massengeometrie des Lenkers merklich modifiziert. Die Realteilkurve verläuft etwas flacher, der Übergang in den instabilen Bereich erfolgt bei einer geringfügig höheren Geschwindigkeit. Das Maximum der Realteilkurve liegt ebenso bei einer höheren Geschwindigkeit und einem niedrigeren Absolutwert. Die Wobblefrequenz wird bei niedrigen Fahrgeschwindigkeiten etwas gesenkt. Insgesamt verläuft die Imaginärteilkurve flacher, ein merklicher Anstieg über der Geschwindigkeit ist jedoch weiterhin vorhanden.

5.5.3 Lenkungsfeder und -dämpfer

Auf Basis der experimentellen Untersuchungen von Pick et al. [19] zum Anteil der passiven Trägheits-, Dämpfungs- und Steifigkeitseigenschaften von menschlichen Probanden am Lenksystem von PKWs kann der Einfluss eines fiktiven Lenkungsfeder- und -dämpferelements auf das Stabilitätsverhalten des Rennradmodells untersucht werden. Damit soll der Beitrag der Armmuskulatur berücksichtigt werden, wobei zwischen entspannter und angespannter Armmuskulatur unterschieden wird.

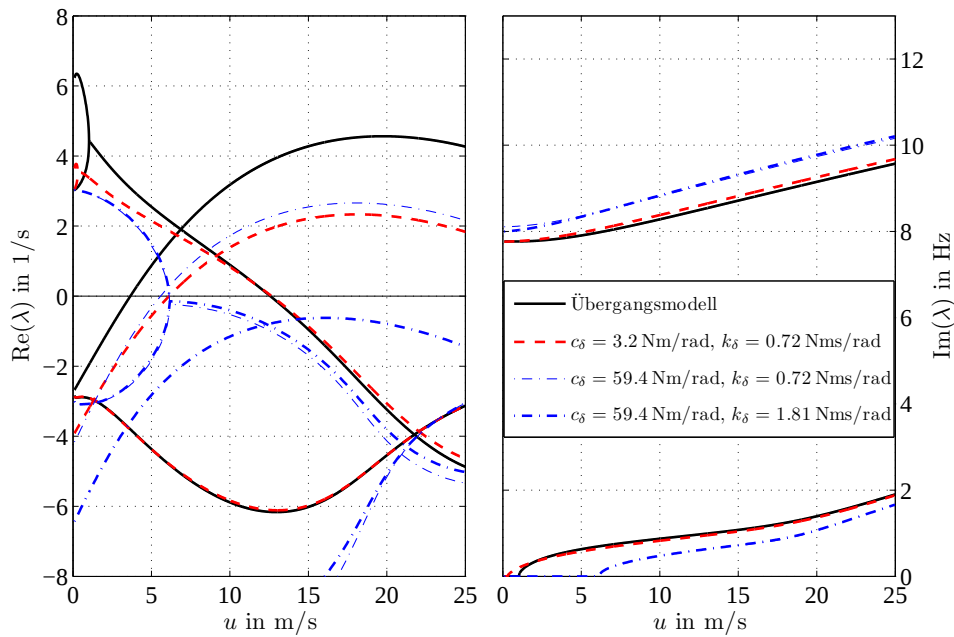


Abbildung 5.15: Berücksichtigung der Armmuskulatur

Die Massenparameter des Rennradlenkers wurde bereits durch die Zugabe der Hände zum Lenker erhöht, die entsprechenden Stabilitätskurven bilden die Referenz (schwarze Linie) in Abbildung 5.15.

Die rot strichlierte Linie entspricht den in [19] gefundenen Steifigkeits- und Dämpfungskonstanten für eine lockere Armmuskulatur. Dies führt zu einer ausgeprägten Veränderung des Weavemodes bei geringen Fahrgeschwindigkeiten. Der Abstand der beiden aperiodischen Äste ist deutlich kleiner und die Vereinigung zur oszillierenden Bewegungsform geschieht bei einer niedrigeren Geschwindigkeit. Mit steigender Fahrgeschwindigkeit nimmt der Weavemode jedoch beinahe wieder die Gestalt der Referenzkurve an, auch die entsprechenden Frequenzkurven sind weitgehend deckungsgleich. Der Capsizemode wird durch die geringen Feder- und Dämpferparameter ebensowenig beeinflusst wie die Wobblefrequenz. Die Wobble-Realteilkurve jedoch wird ein Stück weit zu höherer Stabilität hin verschoben, ohne dass die Kurvenform nennenswert geändert wird. Den ausschlaggebenden Anteil daran trägt die eingeführte Dämpfung.

Die blau strichpunktieren Linien entsprechen einer stark angespannten Armmuskulatur mit entsprechend erhöhten Parametern für das Feder-Dämpfer-Element. Durch diese Hemmung der Lenkung wird das Eigenlenkverhalten des Fahrradmodells, vor allem bei geringen Geschwindigkeiten, drastisch verändert. Die dünne, blau strichpunktete Linie beinhaltet lediglich die Erhöhung der Federkonstante. Dadurch ver-

schwindet der aperiodische Capsizemode am Anfang des Geschwindigkeitsintervalls. Die Gestalt des Weavemodes wird völlig verändert, die Vereinigung der aperiodischen Eigenwerte zum konjugiert komplexen Paar erfolgt erst bei ca. 6 m/s und alle weiteren Weave-Eigenwerte besitzen einen negativen Realteil. Der Wobblemode erfährt durch die erhöhte Steifigkeit eine geringfügige Destabilisierung und eine merkliche Erhöhung der Schwingfrequenz.

Für die dicke, blau strichpunktierte Linie wurde zusätzlich die Dämpferkonstante erhöht. Diese Änderung betrifft hauptsächlich die Realteilkurve des Wobblemodes, die nun gänzlich im stabilen Bereich verläuft. Auffällig ist dabei, dass die Maximalstelle der Kurve zu einer geringeren Geschwindigkeit verschoben wurde.

5.6 Zusammenfassung „hands-off“

In einigen vorangegangenen Diplomarbeiten wurde ein mechanisches Ersatzmodell eines Trekkingrades erstellt und das dazu errechnete mathematische Fahrstabilitätsverhalten anhand von Testfahrten verifiziert. Außerdem wurden zahlreiche Parametervariationen durchgeführt und viele davon ebenfalls experimentell bestätigt. Von diesen Erkenntnissen ausgehend konnte ein Modell eines modernen Rennrades samt Fahrer ausgearbeitet und dessen Stabilitätsverhalten für die aufrechte Geradeausfahrt mit konstanter Vorwärtsgeschwindigkeit auf einer horizontalen Fahrbahn berechnet werden. Das Trekkingrad und das gewählte Rennrad unterscheiden sich deutlich in der Rahmengometrie und in den Massen der jeweiligen Bauteile, wobei das Rennrad einen kürzeren Radstand und eine steilere Lenkachse sowie erheblich leichtere Laufräder aufweist, außerdem kann von einem beträchtlich leichteren und steiferen Rahmen ausgegangen werden.

Ein Vergleich des Stabilitätsverhaltens der beiden Fahrradtypen in Kombination mit dem Fahrerkörpermodell in freihändiger Position (Hands-Off-Model) und aufrechter Sitzhaltung zeigt merkliche Unterschiede in den drei charakteristischen Eigenbewegungen *Weave*, *Capsize* und *Wobble*. Trotz der höheren Rahmensteifigkeit weist der Wobblemode des Rennrades durchwegs größere Realteile und damit ein ungünstigeres Stabilitätsverhalten auf, außerdem errechnet sich – in Übereinstimmung mit den Erfahrungsberichten von Magnani [35] – eine vergleichsweise hohe Schwingfrequenz.

Der Wechsel von der aufrechten Sitzposition des Fahrers in eine sportlich-gebeugte Haltung verschiebt den Schwerpunkt des Gesamtmodells nach vorne und verändert somit die Radaufstandskräfte. Außerdem wird das Trägheitsmoment des Fahrerkör-

pers um die Längsachse durch dessen Schwerpunkt reduziert und um die entsprechende Hochachse erhöht. Die damit einhergehende Änderung des Trägheitstensors der hinteren Baugruppe führt zu einer weiteren Destabilisierung der Lenkungsschwingungen und einer geringfügigen Absenkung der Frequenz. Aus den einzelnen Parametervariationen kann geschlossen werden, dass sich das Trägheitsmoment der hinteren Baugruppe um die Längsachse durch den Schwerpunkt hauptsächlich auf den Capsize- und den Weavemode auswirkt, während das Trägheitsmoment um die Hochachse durch den Schwerpunkt der hinteren Baugruppe im Wesentlichen den Wobblemode beeinflusst, wobei eine Erhöhung dieses Trägheitsmomentes das Lenkungsflattern destabilisiert und die Frequenz der Schwingung senkt.

Eine Änderung der Radaufstandskräfte beeinflusst alle drei Modes, wobei eine Verschiebung der Massenverteilung nach vorne eine Destabilisierung von Weave- und Wobblemode zur Folge hat, ohne die Frequenzen der beiden oszillatorischen Eigenbewegungen zu verändern. Haupteinflussfaktoren sind dabei die auftretenden Reifenkräfte und Reifenmomente, die gemäß dem verwendeten Modell linear mit der jeweiligen Radaufstandskraft zusammenhängen. Weitere Effekte, die aus der Lenkgeometrie des Fahrradmodells resultieren, spielen eine untergeordnete Rolle.

Als Überleitung zum späteren Hands-On-Model wurde die Massengeometrie der lenkbaren Baugruppe verändert, indem die als kugelförmige Massen modellierten Hände vom Fahrerkörper entfernt und dem Rennradlenker an den entsprechenden Stellen zugeschlagen wurden. Dies führt zu einer deutlichen Stabilisierung des Wobblemodes, die dazugehörige Frequenz wird für langsame Fahrgeschwindigkeiten etwas gesenkt. Weiters reduziert sich der Anstieg der Frequenz mit der Geschwindigkeit, wodurch sich ein zunehmender Abstand zwischen den Imaginärteilkurven ergibt. Weitere Parameterstudien zeigen die Auswirkungen der Schwerpunktslage der lenkbaren Baugruppe auf das Stabilitätsverhalten, wobei eine Verschiebung des Punktes hinter die Lenkachse eine eklatante Destabilisierung des Capsize- und Weavemodes zur Folge hat und letzterer über den kompletten gezeigten Geschwindigkeitsbereich instabil verbleibt. Das Trägheitsmoment um die Lenkachse der vorderen Komponenten wirkt sich fast ausschließlich auf den Wobblemode aus, wobei eine Erhöhung der Trägheit das Lenkungsflattern stabilisiert und die Frequenz verringert.

Zusätzlich wurde ein der Lenkerdrehung entgegenwirkendes Feder-Dämpfer-Element eingeführt. Damit kann trotz der weiterhin gültigen Hands-Off-Bewegungsgleichung der Beitrag der Armmuskulatur des Fahrers auf die Lenkbewegungen berücksichtigt werden, die entsprechenden Parameter dazu wurden aus der Automobilliteratur

übernommen. Ein lockeres Halten des Lenkers erzeugt eine Verschiebung der Wobble-Realteilkurve zu geringeren Werten, wodurch die Geschwindigkeit des Übertritts in den instabilen Bereich leicht ansteigt. Trotzdem zeigt sich ein bereits ab $u > 5 \text{ m/s}$ stets instabiler Wobblemode. Ein festes Halten des Lenkers zeigt ein komplett entartetes Verhalten von Weave und Capsize und eine weitere Stabilisierung des Wobble. Die Maximalstelle dessen Realteilkurve liegt knapp im stabilen Bereich, die dazugehörige Geschwindigkeit ist allerdings niedriger als zuvor. Die Wobblefrequenz wird dabei geringfügig erhöht.

5.7 Das Stabilitätsverhalten des Rennradmodells „hands-on“

Die Erweiterung der Bewegungsgleichungen für das *Hands-On-Model* führt lediglich zu einer Addition einiger Ausdrücke zu den bisherigen Hands-Off-Gleichungen, die Struktur der Differentialgleichungssysteme 5.17 wird nicht verändert. Die fünf neu hinzukommenden Ausdrücke gemäß Abschnitt 4.2.6 verändern ausschließlich die Massengeometrie der lenkbaren Baugruppe und ergänzen eine fiktive Lenkungsfeder. Die Auswirkungen dieser einzelnen Terme auf das Stabilitätsverhalten wurde prinzipiell durch die vorangegangenen Parametervariationen schon gezeigt, einzig die entsprechenden Zahlenwerte müssen noch festgelegt werden.

Diese ergeben sich nach den Bestimmungsgleichungen in Abschnitt 4.2.6 und sind in Tabelle 5.2 angeführt. Es sei hierbei daran erinnert, dass auf Grundlage der Modellbildung die Hände des Fahrers starr mit dem Lenker verbunden und die Trägheitsparameter des Lenkers dementsprechend erhöht sind. Die Verbindungsgelenke zwischen Rennradlenker und Fahrerarmen stellen die Handgelenke dar. In einer alternativen Herangehensweise können die Hände und die Unterarme als ein zusam-

Symbol	Wert	Einheit
e_a	0.03775	m
$I_{a\delta\delta}$	0.06957	kg m^2
$I_{a\delta x_D}$	0.05459	kg m^2
$I_{a\delta z_D}$	0.12370	kg m^2
$c_{a\delta\delta}$	1.58040	Nm

Tabelle 5.2: auf die Lenkachse reduzierte Trägheitseigenschaften der Fahrerarme

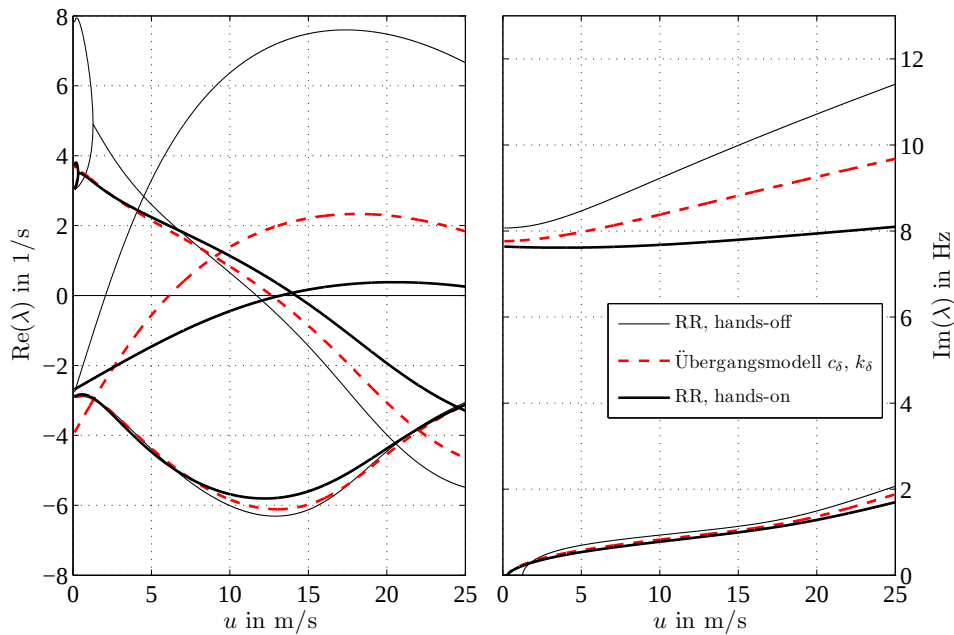


Abbildung 5.16: Vergleich zwischen Hands-Off- und Hands-On-Modell

menhängender Körper modelliert und die Verbindungsgelenke zum Fahrrad an den Lenkergriffen angenommen werden. Der geringen Trägheit des Lenkers stehen dabei entsprechend erhöhte Einträge für die Unterarme gegenüber, die Auswirkungen auf das berechnete Stabilitätsverhalten kommen einzig durch die geringfügig geänderten Hebelverhältnisse von Lenker und Unterarm zustande und sind vernachlässigbar klein.

Die Abbildung 5.16 zeigt einen Vergleich der unterschiedlichen Modelle. Die dünne, schwarze Kurve repräsentiert das Rennradmodell mit gebeugtem und vollständig freihändig fahrendem Fahrer und ist identisch mit der entsprechenden Kurve aus Abbildung 5.10. Der rot strichlierten Kurve liegt ebenso das Hands-Off-Modell zugrunde, allerdings inklusive der durch die Hände erhöhten Lenkerträgheit (Übergangsmodell) und den Feder- und Dämpferparametern für die lockere Armmuskulatur, siehe Abbildung 5.15. Die dicke, schwarze Linie zeigt das Stabilitätsverhalten des Hands-On-Modell. Dieses beinhaltet zusätzlich zu der zufolge der *Hände* erhöhten Lenkerträgheit die auf die Lenkachse reduzierten Massen und Trägheitsmomente der *Arme*.

Der Modellwechsel wirkt sich auf die Gestalt der Eigenmodes unterschiedlich stark aus. Während der Capsizemodus kaum beeinflusst wird, verläuft die Realteilkurve des Weavemodes merklich flacher, die dazugehörige Frequenz ändert sich jedoch kaum. Bei geringen Fahrgeschwindigkeiten liegen die Weave-Realteilkurven des Übergangs-

modells (rot strichlierte Kurve) und des Hands-On-Model (dicke, schwarze Kurve) noch eng beisammen, mit steigender Fahrgeschwindigkeit verläuft letztere aber bei höheren Werten und tritt somit auch erst später in den stabilen Bereich über.

Eklatant sind die Veränderungen bezüglich des Wobble. Im Vergleich zum reinen Hands-Off-Model (dünne, schwarze Kurve) brachte das Übergangsmodell (rot strichlierte Kurve) eine sichtliche Verschiebung der Realteilkurve zu niedrigeren Werten und damit verbesserter Stabilität sowie ein generelles Absinken der Imaginärteilkurve hervor. Die Merkmale der *Low-Speed-Wobble* genannten Kurvengestalt blieben allerdings erhalten: ein steiler Anstieg der Realteilkurve bei niedrigen Geschwindigkeiten sowie ein deutliches Maximum bei einer mittleren Geschwindigkeit. Nach einem kurzen flachen Intervall steigt die Imaginärteilkurve annähernd linear mit der Fahrgeschwindigkeit an.

Die Wobblekurve des Hands-On-Model (dicke, schwarze Kurve) zeigt sichtbar abweichende Eigenschaften und wird infolgedessen als *High-Speed-Wobble*² bezeichnet. Die Realteilkurve verläuft für niedrige Geschwindigkeiten deutlich flacher und insgesamt schwächer gekrümmt. Das erstmalige Auftreten eines positiven Realteils wird zu einer Geschwindigkeit von 13.2 m/s verschoben, der weitere Kurvenverlauf zeigt ein schwach ausgeprägtes Maximum bei 20.5 m/s. Die Frequenzkurve des High-Speed-Wobble startet bei einer ähnlichen Frequenz wie die der anderen Modelle, besitzt für niedrige Geschwindigkeiten sogar eine negative Steigung und wächst auch für hohe Geschwindigkeiten nur geringfügig an, sodass sich insgesamt ein sehr flacher Kurvenverlauf und damit nur eine schwache Abhängigkeit der Schwingfrequenz von der Fahrgeschwindigkeit ergibt.

5.7.1 Einfluss der Armbewegungen

Unterscheidung nach Matrizeneinträgen

Anhand der folgenden Abbildungen soll nun gezeigt werden, welche der zusätzlichen fünf Ausdrücke aus der Tabelle 5.2 für die geänderte Gestalt des Wobblemodes ausschlaggebend sind. Als Referenzkurve (dünne, schwarze Linie) wird jeweils das Übergangsmodell verwendet, in diesem Fall auch ohne Feder-Dämpfer-Element.

Die Abbildung 5.17 beinhaltet die Terme, die für das vorliegende Rennradmodell einen nur vergleichsweise geringen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten des Wobble

²In [16] und [17] wird ein instabiler High-Speed-Wobble für Motorräder beschrieben. Als Ursachen für den späten Anstieg der bei niedrigen Geschwindigkeiten stabilen Realteilkurve werden die Steifigkeit von Rahmen und Gabel sowie gyroskopische Effekte angeführt.

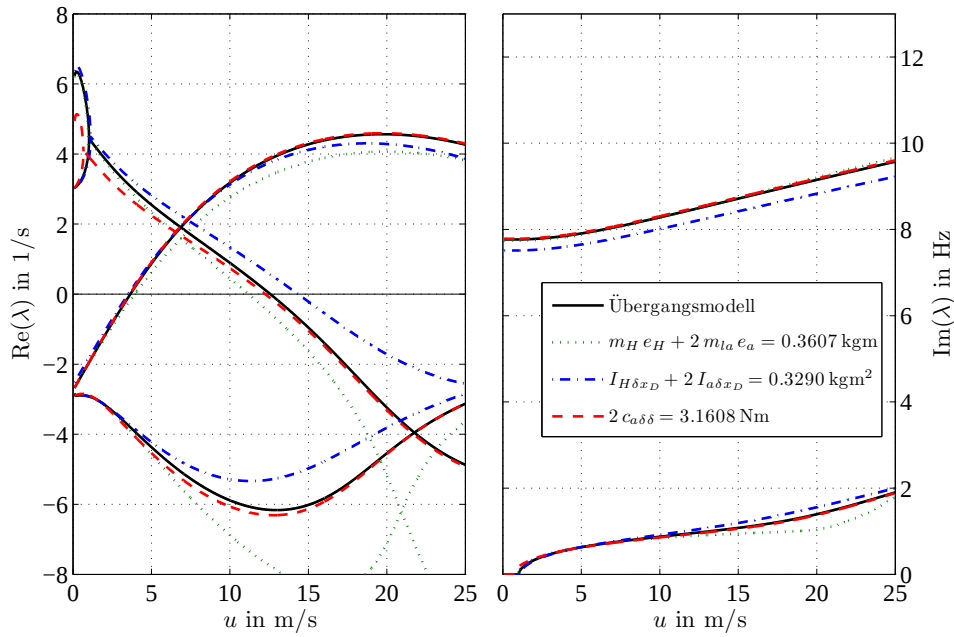


Abbildung 5.17: Separater Einfluss der weniger bedeutenden Ausdrücke zum Hands-On-Model

ausüben, sei es, weil die Auswirkungen der betreffenden Parameter generell schwach ausgeprägt oder die jeweiligen Zahlenwerte entsprechend klein sind.

Für die Berechnung der grün punktierten Kurve wurde zum Übergangsmodell einzig der Ausdruck e_a hinzugenommen, der einen fiktiven Schwerpunktsabstand der Unterarme von der Lenkachse darstellt. Eine Lenkerdrehung in eine Richtung bedingt im vorliegenden Fall eine Verdrehung der Unterarme in dieselbe Richtung, erkennbar an $e_a > 0$. In den Bewegungsgleichungen tritt der Ausdruck stets in Addition mit dem Term $m_H e_H$ auf und führt so in Summe zu einer Vergrößerung der entsprechenden Matrizeneinträge. Gemäß den vorangegangenen Untersuchungen wirkt sich dies stabilisierend auf alle drei Modes aus, wobei der Capsize am stärksten betroffen ist. Zur blau strichpunktiierten Linie wird nur das Deviationsmoment $I_{a\delta x_D}$ einbezogen und die betroffenen Matrizeneinträge werden dementsprechend erhöht. Sowohl Capsize- als auch Weavemode werden aufgrund dessen etwas destabilisiert, der Wobblemode wird in der Schwingfrequenz gesenkt und bei höheren Geschwindigkeiten geringfügig stabilisiert.

Eine Lenkerdrehung führt insgesamt zu einem geringfügigen Anheben der Arme, oder anders ausgedrückt, die Gewichtskraft auf die Arme wirkt der Drehbewegung entgegen. Dies wird durch den Term $c_{a\delta\delta}$ ausgedrückt, die rot strichlierte Kurve zeigt die entstehenden Änderungen des Stabilitätsverhaltens, welche allerdings ob des kleinen

Zahlenwertes (entspricht einer „schwachen Feder“) weitgehend minimal sind, lediglich der Weavemode wird bei geringen Geschwindigkeiten etwas stabilisiert.

Die Abbildung 5.18 behandelt die verbleibenden zwei Ausdrücke und zeigt den elementaren Einfluss dieser Parameter auf die Gestalt des Wobblemodes. Die schwarze Referenzkurve beschreibt wiederum das Übergangsmodell.

Zur blau strichpunktiierten Linie wird ausschließlich die auf die Lenkachse transformierte Trägheit der Arme, $I_{a\delta\delta}$, berücksichtigt. Dieses Massenträgheitsmoment bewirkt eine komplette Stabilisierung des Wobblemodes über den ganzen Geschwindigkeitsbereich, während die beiden anderen Eigenbewegungen kaum verändert werden. Sowohl die Realteil- als auch die Imaginärteilkurve des Wobble verlaufen sehr flach, letztere verzeichnet über einen weiten Geschwindigkeitsbereich einen negativen Anstieg bei insgesamt deutlich verminderter Schwingfrequenz.

Die rot strichlierte Kurve hingegen zeigt das zufolge dem Deviationsmoment $I_{a\delta z_D}$ veränderte Stabilitätsverhalten. Dieser Ausdruck wirkt sich zwar ebenso nur wenig auf den Weave- und Capsizemode aus, der Wobble jedoch wird in die entgegengesetzte Richtung denn zuvor gewandelt. Die Realteilkurve startet steiler und verläuft über einen Großteil des Geschwindigkeitsintervalls im instabilen Bereich, die Maximalstelle wird zu einer Geschwindigkeit von $u > 25 \text{ m/s}$ verschoben. Die Imaginärteilkurve zum Wobblemode wird um etwas mehr als zwei Hertz annähernd parallel zu höheren Frequenzen verschoben.

Mit den beiden Parametern scheinen die Haupteinflussfaktoren der gekoppelten Bewegung von Rennradlenker und Fahrerarmen gefunden zu sein. In Abbildung 5.19 wird dies deutlich sichtbar. Die dicke, schwarze Linie repräsentiert darin das Übergangsmodell auf Basis der Hands-Off-Bewegungsgleichungen.

Für die grün punktierte Linie werden nur die beiden Faktoren $I_{a\delta\delta}$ und $I_{a\delta z_D}$ der Hands-On-Bewegungsgleichungen berücksichtigt. Das Zusammenwirken deren entgegengesetzter Auswirkungen auf den Wobblemode bestimmen letztlich das Stabilitätsverhalten des Hands-On-Model. Die Realteilkurve des Weavemodes verläuft etwas flacher, der Stabilitätsdurchgang wird zu einer höheren Geschwindigkeit verschoben. Der Wobblemode vollzieht die Änderung vom Low-Speed- zum High-Speed-Wobble, die Realteilkurve verläuft flach und schwach gekrümmt, die Stelle des Maximalwertes liegt bei einer höheren Geschwindigkeit als beim Übergangsmodell. Die Frequenzkurve des Wobble wird ebenso abgeflacht und verläuft nahezu konstant in einem Bereich um acht Hertz.

Die dünne, schwarze Linie zeigt das vollständige Hands-On-Model inklusive der noch fehlenden drei Ausdrücke aus Abbildung 5.17. Wie erwartet, sind die Auswirkungen

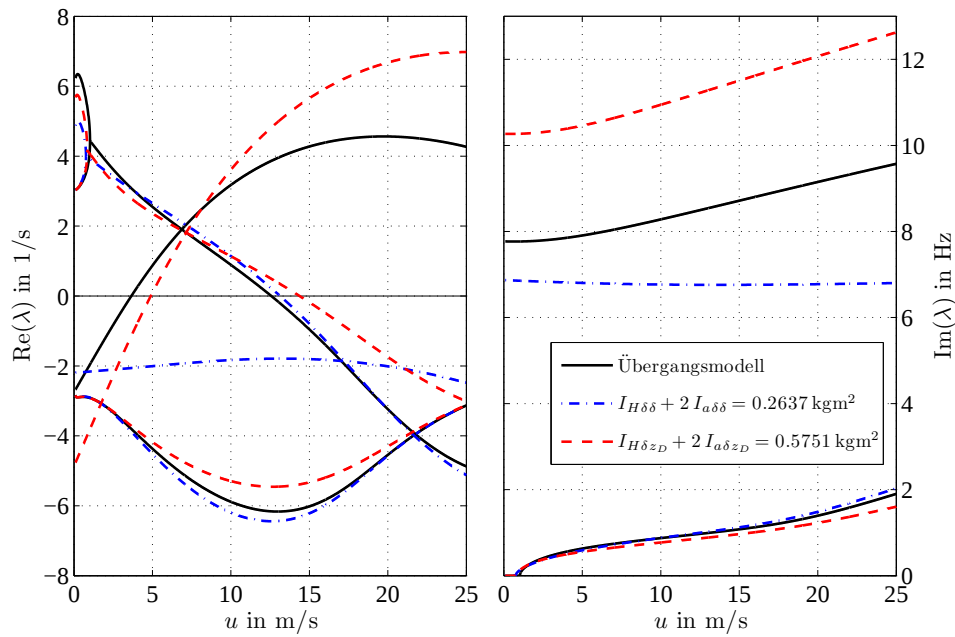


Abbildung 5.18: Separater Einfluss der bedeutenden Ausdrücke zum Hands-On-Model

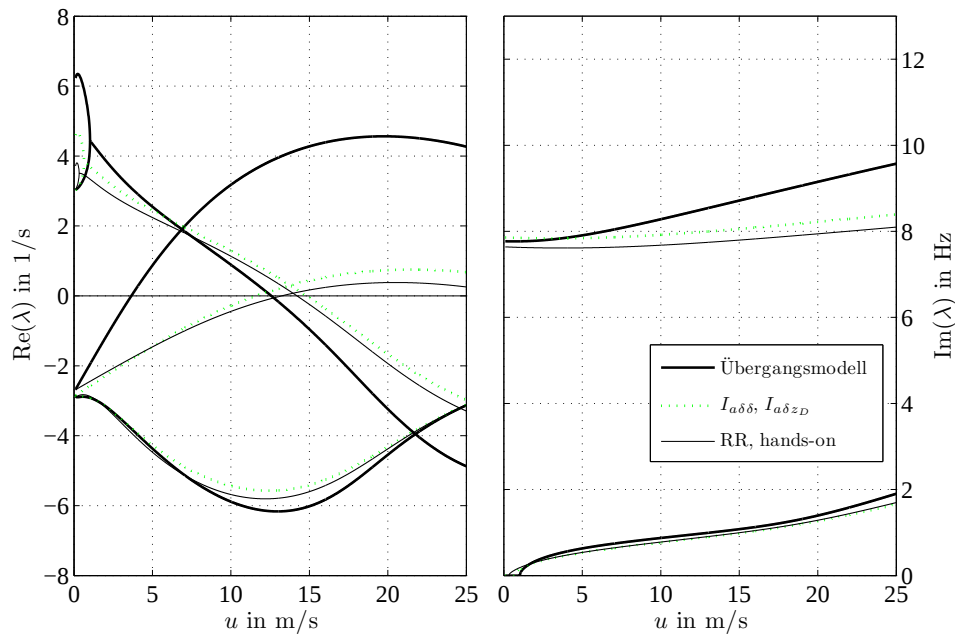


Abbildung 5.19: Einfluss aller Ausdrücke zum Hands-On-Model

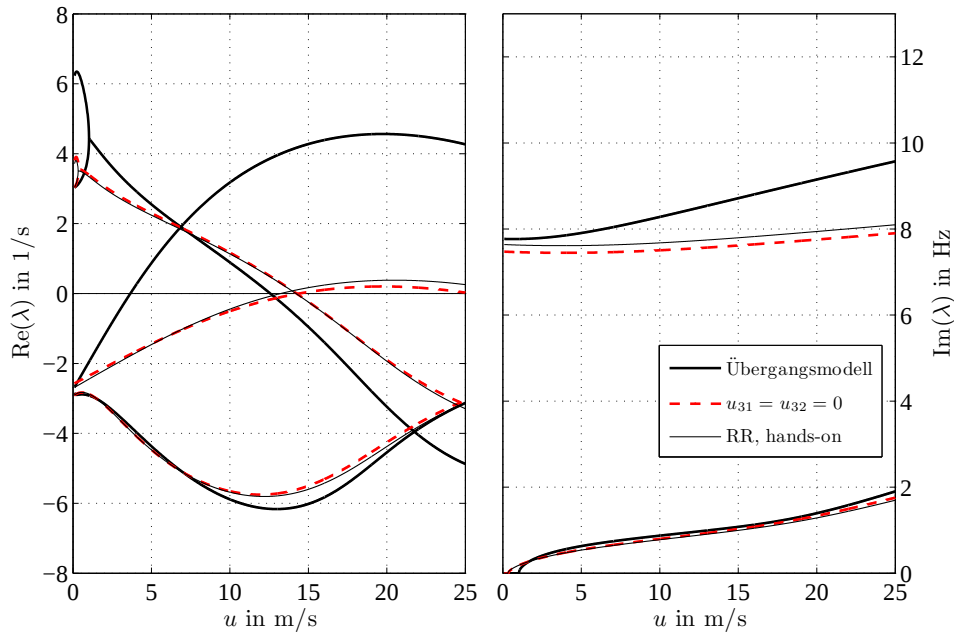


Abbildung 5.20: Einfluss der verschiedenen Armbewegungen

dabei gering. Die aperiodischen Äste des Weavemodes liegen näher beisammen, insgesamt wird die Eigenbewegung etwas stabilisiert, ebenso wie der Capsizemode. Der Wobblemode erfährt eine weitere geringfügige Stabilisierung und eine Reduktion der Schwingfrequenz. Die grundsätzliche Gestalt der Wobblekurven wird aber nicht mehr verändert.

Unterscheidung nach Armbewegungen

Als weitere Möglichkeit zur Analyse des veränderten Hands-On-Stabilitätsverhaltens bietet sich eine Unterscheidung in den Bewegungsfreiheiten der Arme an, wobei durch eine Variation der Übersetzungen u_{ij} zwischen den Arm- und Lenkerbewegungen die einzelnen Armrotationen beeinflusst werden können.

Dabei zeigt sich ein erwähnenswertes Merkmal, Abbildung 5.20. Die dicke, schwarze Kurve stellt als Referenz wiederum das Übergangsmodell dar. Zur rot strichlierten Kurve wurde die Drehung der Oberarme $\theta_{3l,r}$ unterdrückt, für die mit dieser Bewegung verknüpften Übersetzungen gilt $u_{31} = u_{32} = 0$. Folglich verschwindet auch die Lateralbewegung der Unterarme, deren Mittellinien somit ebenso stets parallel zur Längsebene verbleiben. Es zeigt sich an der dünnen, schwarzen Kurve (vollständiges Hands-On-Modell) sehr ähnliches Stabilitätsverhalten. Daraus kann nun abgeleitet werden, dass für den High-Speed-Wobble des vorliegenden Rennradmodells

hauptsächlich die Armbewegungen in Fahrradrängsrichtung ausschlaggebend sind, die Querbewegungen zeigen lediglich einen untergeordneten Einfluss.

Eine einfachere Modellvorstellung, in der die Querbewegungen der Arme von vornherein nicht berücksichtigt würden, hätte offenbar ein sehr ähnliches Stabilitätsverhalten ergeben. Es sei allerdings angemerkt, dass die Zahlenwerte der Übersetzungen und der Hands-On-Parameter von der Ausgangsstellung der Arme (θ_{i0}) und den Hebelverhältnissen des Lenkers (Vorbaulänge etc.) abhängen, und somit kann sich für eine stark abweichende Modellgeometrie durchaus ein größerer Einfluss der lateralen Armbewegung ergeben.

5.7.2 Zusätzliches Lenkungsfeder- und -dämpfer-Element

In Analogie zu Abschnitt 5.5.3 kann nun wiederum mit einem zusätzlichen, auf den Lenkwinkelfreiheitsgrad wirkenden Feder-Dämpfer-Element der Einfluss der Armmuskulatur berücksichtigt werden, es ergeben sich dabei auch sehr ähnliche Effekte wie in Abbildung 5.15. Die Feder- und Dämpferparameter werden an dieser Stelle jedoch über einen größeren Bereich variiert, wofür auch eine andere Darstellungsform des Stabilitätsverhaltens, nämlich die der Wurzelortskurve (engl. *root locus*), gewählt wird, siehe Abbildung 5.21. Darin sind die Eigenwerte von Weave-, Capsize- und Wobblemode bei einer festgehaltenen Fahrgeschwindigkeit von $u = 20$ m/s jeweils als Punkt in der komplexen Ebene dargestellt. Durch die Variation der Lenkungsfeder- und -dämpferkennwerte ergeben sich die entsprechenden Kurvenverläufe.

Der Ausgangspunkt mit $c_\delta = k_\delta = 0$ ist durch einen Stern gekennzeichnet. Die Eigenwerte der drei Modes entsprechen den Einträgen in den vorigen Stabilitätsdiagrammen für das Hands-On-Model bei $u = 20$ m/s, Capsize- und Weavemode sind im stabilen Bereich. Der Eigenwert zum Wobblemode besitzt einen geringfügig positiven Realteil, der Imaginärteil bestimmt die Frequenz mit ~ 8 Hz. Davon ausgehend wird der schwarzen Kurve folgend die Lenkungssteifigkeit schrittweise auf $c_\delta = 300$ Nm/rad erhöht (viereckiges Symbol), wodurch der Wobblemode deutlich destabilisiert wird und zusätzlich die Frequenz eine merkliche Anhebung erfährt. Die Weavefrequenz sinkt mit steigender Federsteifigkeit, die entsprechenden Realteile werden zuerst verringert und der Mode damit stabilisiert, ab höheren Steifigkeitswerten dreht sich dieser Effekt allerdings um. Der aperiodische Capsizemode wird weit in das stabile Gebiet verschoben. Die rote Kurve repräsentiert bei belassener Lenkungsfeder eine schrittweise Erhöhung der Lenkungsdämpfung von $k_\delta = 0$ auf $k_\delta = 5$ Nms/rad (schwarzes Kreissymbol). Dies bewirkt eine ausgeprägte Stabilisie-

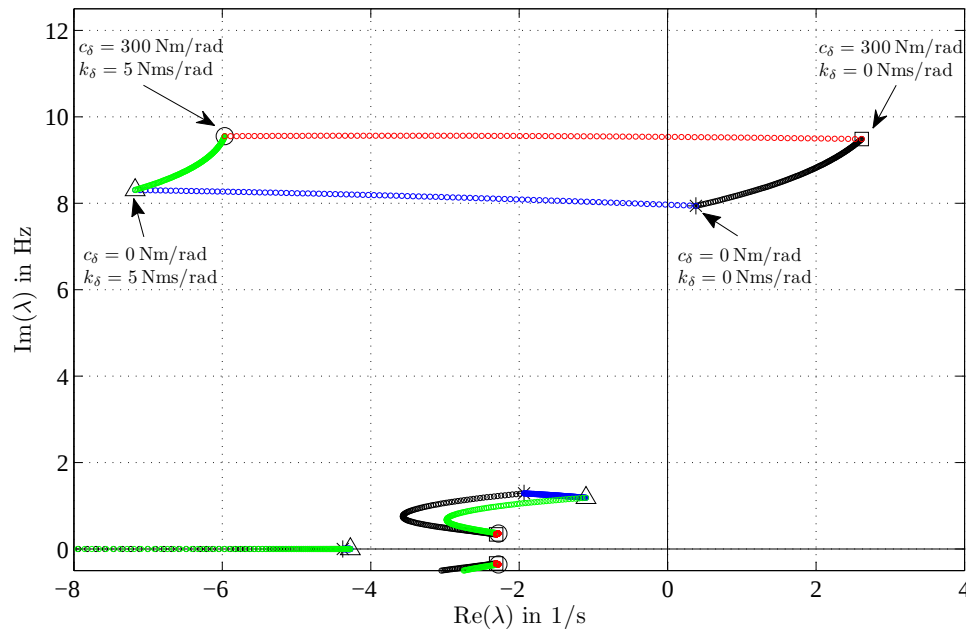


Abbildung 5.21: Wurzelortskurve zur Variation der zusätzlichen Lenkungsfeder- und -dämpferparameter; $u = 20 \text{ m/s}$

rung des Wobblemodes, die dazugehörige Frequenz wird, gleich wie der Weavemode, davon kaum betroffen.

Ein ähnliches Bild ergibt sich durch die Erhöhung der Lenkungsdämpfung ohne dem Wirken der Feder, blaue Kurve bis zum Dreieckssymbol. Wie erwartet wird der Wobblemode – ohne nennenswerte Veränderungen an der Frequenz – weit in das stabile Gebiet verschoben. Die Realteile des Weavemodes erhöhen sich etwas, die Eigenbewegung bleibt aber stets stabil. Das Stabilitätsverhalten des Capsizemodes wird durch die ansteigende Lenkungsdämpfung kaum verändert. Mit der grünen Kurve wird bei gleichbleibend hoher Dämpfung die Steifigkeit angehoben, und es ergibt sich ein ähnlicher Verlauf wie zuvor zur schwarzen Kurve, lediglich verschoben um den Einfluss der Dämpfung.

Für die beiden schwingenden Eigenmodes begrenzen diese vier Kurven ein Gebiet in der komplexen Ebene, wobei jeder Punkt dieses Bereichs eine bestimmte Feder-Dämpfer-Kombination und damit das unterschiedlich feste Halten des Lenkers durch den passiven Fahrer symbolisiert. Es zeigt sich, dass je nach dem (unbewussten) Verhalten des Fahrers das Lenkungsflattern sowohl stabilisiert als auch destabilisiert werden kann. Limebeer und Sharp schreiben zu dieser Thematik in [30]: „*Attempting to damp the vibrations by holding tightly to the handlebars is ineffective, a result reproduced theoretically for a motorcycle.*“ und verweisen weiter auf eine Publikation

von Sharp et al. [51], in der anhand von Zeitsimulationen eines Motorradmodells gezeigt wird, dass das Versteifen der Armmuskulatur des Fahrers während aufklingender Wobbleschwingungen nur eine unzureichende Stabilisierung zur Folge hat. Als wirksame Abhilfemaßnahme gegen die unerwünschten Schwingungen wird von den Autoren ein stärkerer Lenkungsdämpfer empfohlen.

5.8 Zusammenfassung „hands-on“ und Vergleich mit Literaturstellen

Eine Gegenüberstellung der berechneten Stabilitätskurven zu den Modellen „hands-off“ und „hands-on“ bei ansonsten identischer Kombination aus Fahrrad, Fahrer und Sitzposition zeigt den großen Einfluss der beweglichen Fahrerarme auf das Stabilitätsverhalten. Besonders die Gestalt der Eigenwertkurven des Wobblemodes werden derart stark verändert, dass eine namentliche Unterscheidung zwischen dem *Low-Speed-Wobble* des Hands-Off-Model und dem *High-Speed-Wobble* des Hands-On-Model sinnvoll erscheint. Die entsprechende Realteilkurve startet bei ähnlichen Werten im stabilen Bereich, verläuft über der Fahrgeschwindigkeit aber wesentlich flacher ansteigend und schwächer gekrümmt. Dadurch erfolgt der Übertritt in das instabile Gebiet erst bei einer viel höheren Geschwindigkeit, und die Realteile erreichen nur geringe positive Werte. Die Imaginärteilkurve verliert die ausgeprägte Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit und verläuft weitgehend flach. Typische Schwingfrequenzen des „hands-on“-Lenkungsflatterns liegen mit etwas weniger als acht Hertz deutlich unter denen, die mit dem Hands-Off-Model berechnet werden. Die beiden anderen Modes, Weave und Capsize, werden durch den Modellwechsel nur vergleichsweise gering verändert.

Der Vergleich mit der Publikation von Magnani [35] bestätigt die theoretischen Ergebnisse. Darin wird von mehreren Fahrversuchen mit Geschwindigkeiten zwischen 14 und 18 m/s berichtet, wobei in jedem Testlauf Wobbleschwingungen festgestellt wurden, die unterschiedlich stark ausgeprägt waren. Dies kann als Hinweis verstanden werden, dass sich das System nahe der Stabilitätsgrenze befand. In einem speziellen Fall jedoch kam es zu einer stark ausgeprägten Oszillation, wobei eine Frequenz von 7.68 Hz gemessen wurde. Zusätzliche Versuchsfahrten ergaben außerdem eine weitgehende Unabhängigkeit zwischen der Fahrgeschwindigkeit und der Wobblefrequenz.

Die linearisierten Bewegungsgleichungen der Modelle „hands-off“ und „hands-on“

unterscheiden sich lediglich durch fünf additive konstante Terme, welche die auf den Lenkwinkelfreiheitsgrad transformierte Trägheit der beiden Arme beinhalten. Davon erweisen sich zwei als ausschlaggebend für das unterschiedliche Stabilitätsverhalten der beiden Modelle. Das Deviationsmoment $I_{a\delta z_D}$ koppelt die Gierbewegungen der hinteren Baugruppe um die z_D -Achse mit Lenkbewegungen der vorderen Baugruppen um die Lenkachse. Dieser Ausdruck bewirkt eine generelle Anhebung der Wobblefrequenz und eine Destabilisierung der Eigenbewegung, indem die Maximalwertstelle der Realteilkurve zu einem höheren Wert und zu einer höheren Geschwindigkeit verschoben wird. Das Trägheitsmoment $I_{a\delta\delta}$ berücksichtigt den Anteil der Arme an der gesamten Trägheit der vorderen Baugruppe um die Lenkachse. Dieser Ausdruck bewirkt eine starke Absenkung der Wobblefrequenz und eine signifikante Stabilisierung des Wobblemodes. Die Kombination der beiden Terme ist für den Wandel zum High-Speed-Wobble verantwortlich, die restlichen drei Ausdrücke wirken sich lediglich geringfügig aus.

Ein zusätzliches Lenkungsfeder- und -dämpferelement zur Berücksichtigung der Arm-muskulatur zeigt ähnliche Effekte wie für das Hands-Off-Model zuvor. Eine Erhöhung der Federsteifigkeit bewirkt eine Anhebung der Schwingfrequenz und eine Erhöhung der Realteile und eignet sich somit nicht zur Stabilisierung des Wobblemodes. Eine Vergrößerung des Dämpfungskennwertes hingegen senkt die Realteile und stabilisiert den Eigenmode bei nahezu unveränderter Frequenz.

Aufgrund der ähnlichen Modellierung der beweglichen Fahrerarme liegt ein Abgleich mit den Ergebnissen von Schwab et al. [22] natürlich nahe. Der direkte Vergleich der Stabilitätsdiagramme gestaltet sich jedoch als schwierig, da zum einen grundlegend unterschiedliche mechanische Ersatzmodelle verwendet werden (5 Freiheitsgrade-Fahrradmodell und dynamisches Reifenmodell vs. Basic-Bicycle-Model, 2 Freiheitsgrade, nichtholonome Fahrbahnkontakte), und zum anderen liegen diesen noch dazu ungleiche Fahrradgattungen (Rennrad vs. Hollandrad) zugrunde. Ein weiterer großer Unterschied besteht in der Position der Lenkergriffe in Relation zur Lenkachse. Diese befinden sich bei dem Rennrad deutlich *vor*, beim Hollandrad jedoch deutlich *hinter* jener. Demzufolge bedeutet ein positiver Lenkeinschlag $\delta > 0$ beim Rennradmodell eine positive Drehbewegung der Fahrerarme in den Schultergelenken (Rotation $\theta_{3,j} > 0$ nach Abbildung 3.10), während sich für das Hollandrad eine gegensinnige Drehung von Lenker und Arme, $\theta_{3,j} < 0$, ergibt.

Trotz aller Unterschiede wurden die mittels Mehrkörperdynamiksoftware berechneten Ergebnisse aus [22] zur Kontrolle der in der vorliegenden Diplomarbeit ermittelten

Symbol	Wert	Einheit
e_a	-0.0875	m
$I_{a\delta\delta}$	0.1030	kg m ²
$I_{a\delta x_D}$	-0.1184	kg m ²
$I_{a\delta z_D}$	0.0342	kg m ²
$c_{a\delta\delta}$	4.4600	Nm

Tabelle 5.3: auf die Lenkachse reduzierte Trägheitseigenschaften der Fahrerarme mit den Daten aus [22]

symbolischen Gleichungen herangezogen und konnten auch reproduziert werden. Dazu musste aus den Bewegungsgleichungen 4.89 – 4.93 das Reifenmodell durch in Querrichtung nicht rutschende Reifen-Fahrbahn-Kontakte ersetzt und der β -Freiheitsgrad komplett entfernt werden. Für genauere Informationen zur Überführungen der Bewegungsgleichungen wird auf Ott [32] verwiesen, die zu [22] berechneten reduzierten Armmassen sind in Tabelle 5.3 angegeben. Die zuvor erwähnte unterschiedliche Griffposition ist dabei gut an den unterschiedlichen Vorzeichen der Ausdrücke e_a in den Tabellen 5.2 und 5.3 erkennbar. Der für diese Diplomarbeit wichtige Wobblemode wird von dem verbleibenden Zwei-Freiheitsgrade-Modell jedoch nicht abgebildet, insofern wird auch nicht näher darauf eingegangen.

Kapitel 6

Conclusio und Ausblick

6.1 Conclusio

Ziel der Diplomarbeit war die Untersuchung des Stabilitätsverhalten von modernen Rennrädern in der Geradeausfahrt über einen breiten Geschwindigkeitsbereich. Das Hauptaugenmerk der Stabilitätsbetrachtungen sollte dabei auf den Wobblemode und den Einfluss eines sich passiv verhaltenden Fahrers gelegt werden.

Ausgehend von einem validierten Trekkingradmodell aus vorangegangenen Diplomarbeiten konnte ein mechanisches Modell eines modernen Rennrades erstellt werden, das neben einem Querschlupf der Reifen und einem verzögerten Kraftaufbau der Reifenkräfte auch die Quersteifigkeit des Rahmens und der Gabel berücksichtigt. Der menschliche Fahrerkörper wird mit einem biomechanischen Körpermodell nach Hanavan abgebildet, wobei zwei unterschiedliche Sitzhaltungen, eine komfortabel-aufrechte und eine sportlich-gebeugte, modelliert sind. Unter der Annahme, dass Fahrer und Rennrad fest über den Sattel verbunden sind, wurden zwei Modellversionen erstellt. Das *Hands-Off-Model* dient zur Analyse der freihändigen Fahrt bei niedrigen Geschwindigkeiten, der gesamte Fahrerkörper ist hierbei völlig starr und dem Fahrradrahmen lediglich als träge Masse angefügt. Das *Hands-On-Model* hingegen berücksichtigt den Kontakt der Hände mit den Lenkergriffen und erlaubt eine Beweglichkeit der Arme in den Schulter-, Ellenbogen- und Handgelenken, ohne die Anzahl der Modellfreiheitsgrade zu erhöhen. Der restliche Fahrerkörper verbleibt weiterhin starr.

Zu diesen Modellen konnten die um den Gleichgewichtszustand der aufrechten Geradeausfahrt mit konstanter Geschwindigkeit linearisierten Bewegungsgleichungen in symbolischer Form aufgestellt werden. Die durch die Kopplung von Lenker- und

Armbewegungen entstandenen kinematischen Schleifen des Hands-On-Model werden dabei lokal aufgelöst, sodass die zusätzlichen Armbewegungen als auf die Lenkachse transformierte Trägheits-, Dämpfungs- und Steifigkeitsausdrücke in den Systemgleichungen enthalten sind. Anschließend wurde das Stabilitätsverhalten der charakteristischen Eigenmodes *Capsize*, *Weave* und *Wobble* anhand deren Eigenwerten in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit analysiert.

Im direkten Vergleich mit dem jeweils identischen freihändigen Fahrermodell in aufrechter Sitzposition weisen Trekkingrad und Rennrad merkliche Unterschiede in den Eigemodes auf. Vor allem der Wobble des Rennradmodells ist schwächer gedämpft und besitzt eine deutlich höhere Schwingfrequenz (Trekkingrad: 6 – 9 Hz, Rennrad: 9 – 12 Hz), beiden Modellen gemein ist jedoch die grundsätzliche Gestalt der Eigenwertkurve über der Fahrgeschwindigkeit. Kennzeichnend für diesen *Low-Speed-Wobble* des Hands-Off-Model sind dabei einerseits ein instabiles Verhalten bereits bei niedrigen Fahrgeschwindigkeiten und andererseits ein ausgeprägter Anstieg der Frequenz mit der Geschwindigkeit.

Aus Parameterstudien zur Massengeometrie der Rahmenbaugruppe kann geschlossen werden, dass sich das Trägheitsmoment der hinteren Baugruppe um die Längsachse durch den Schwerpunkt hauptsächlich auf den Capsize- und den Weavemode auswirkt, während das Trägheitsmoment um die Hochachse durch den Schwerpunkt ausschlaggebend für das Stabilitätsverhalten des Wobble ist. Eine Änderung der Radaufstandskräfte beeinflusst alle drei Modes, Haupteinflussfaktoren sind dabei die auftretenden lateralen Reifenkräfte und Reifenmomente, die gemäß dem verwendeten Modell linear mit der jeweiligen Radaufstandskraft zusammenhängen. Die Summe dieser Effekte erklärt die zusätzliche Destabilisierung des Wobble, die sich beim Wechsel von der aufrechten zur gebeugten Sitzposition ergibt.

Die Hinzunahme der Armbewegungen für das Hands-On-Model ergänzt fünf konstante Ausdrücke zu den linearen Bewegungsgleichungen, die ausschließlich die Trägheitseigenschaften der lenkbaren Baugruppe verändern. Davon erweisen sich zwei Terme als entscheidend. So bewirkt einerseits die erhöhte Trägheit um die Lenkachse eine signifikante Stabilisierung des Wobble und unterdrückt die Abhängigkeit der Frequenz von der Fahrgeschwindigkeit, andererseits verschiebt eine geänderte dynamische Kopplung zwischen den Gierbewegungen des Hauptrahmens und den Lenkbewegungen der vorderen Baugruppe die Maximalstelle der Wobble-Realteilkurve zu einer höheren Geschwindigkeit.

Besitzt nun ein Rennrad in freihändiger Fahrt – wie im gezeigten Fall – ein hin-

reichendes hohes Maß an Instabilität, dann ist trotz der grundsätzlich stabilisierenden Wirkung der Fahrerarme auch „hands-on“ ein instabiler Wobblemode möglich, der jedoch erst bei hohen Geschwindigkeiten auftritt. Charakteristisch für diesen *High-Speed-Wobble* des Hands-On-Model sind demzufolge ein stabiles Verhalten bei geringen Fahrgeschwindigkeiten und ein (geringfügig) instabiles Verhalten bei hohen Geschwindigkeiten und eine im Vergleich zum Low-Speed-Wobble weitgehend von der Fahrgeschwindigkeit unabhängige und deutlich geringe Schwingfrequenz (ca. 8 Hz). Ein besonders festes Halten des Lenkers durch den Fahrer, das durch ein zusätzliches Feder-Dämpfer-Element zu dem Lenkwinkel modelliert wird, führt dabei zu keiner Besserung eines instabilen Lenkungsflatterns, der Fahrer müsste mit seiner Armmuskulatur vielmehr bewusst „dämpfend“ wirken.

6.2 Ausblick

Die Charakteristik des Low-Speed-Wobble des Trekkingradmodells ist anhand ausgedehnter Messungen im Zuge der vorangegangenen Diplomarbeiten für geringe bis mittlere Geschwindigkeiten sehr gut abgesichert, sowohl die Frequenz als auch die Geschwindigkeit, bei der die Realteilkurve die Stabilitätsgrenze kreuzt, sind gut bekannt.

Die Merkmale des High-Speed-Wobble des Rennradmodells konnten mit Berichten und Messfahrten aus der Literatur abgeglichen werden, wobei eine gute Übereinstimmung hinsichtlich der Schwingfrequenz gefunden wurde, die entsprechenden die Realteilverläufe des Wobblemodes konnten allerdings nur mit den dargelegten Tendenzen abgeglichen werden. Mit zusätzliche Messungen für die mittlere Fahrgeschwindigkeit, sowohl hands-off als auch hands-on, könnte die Gültigkeit des verwendeten Fahrermodells besser abgesichert werden.

Zweifel bleiben bezüglich dem sehr großen Einfluss von veränderten Radlasten auf das Stabilitätsverhalten. Dazu müsste der lineare Zusammenhang zwischen den vertikalen Reifenlasten und den lateralen Reifenkräften aufgegeben und ein entsprechend erweitertes Reifenmodell verwendet werden. Ähnliches gilt für ein prinzipiell vorhandenes Nickmoment zufolge von Luftkräften. Solche Effekte wurden mangels verlässlicher Informationen nicht berücksichtigt.

Die Modellvorstellung des β -Gelenks stammt ursprünglich aus der Motorradforschung und bildet die Torsionsnachgiebigkeit des Rahmens um die Fahrzeuglängsachse ab. Aufgrund der zusätzlichen Querneigungsmöglichkeit des Vorderrades treten weitere

Kreiseffekte auf, die sich essentiell auf das Stabilitätsverhalten der Motorradmodelle auswirken. Auch für das Trekkingrad passt diese Modellvorstellung offenbar sehr gut. Für das Rennrad sind aufgrund der geringeren rotierenden Massen die Kreiselkräfte eventuell weniger ausschlaggebend, und eine andere Rahmenform führt zu einer anderen Verwindungssteifigkeit, wodurch ein abweichender Modellansatz mit einer vertikalen Achse im Rahmendreieck im Bereich des Sitzrohrs zur Berücksichtigung der Elastizitäten denkbar wäre. Neben dem generellen Stabilitätsverhalten eines solchen Modells könnten die Ergebnisse hinsichtlich des Anstiegs der Wobblefrequenz über der Fahrgeschwindigkeit untersucht werden. Außerdem wäre interessant, ob ein solches Modell ebenso sensibel auf Änderungen der Radaufstandskräfte reagiert.

Die hier gewählte Fahrermodellierung ist relativ komplex, allerdings konnte damit aufgezeigt werden, dass nicht nur die erhöhte Trägheit um die Lenkachse ausschlaggebend für das Stabilitätsverhalten des Wobble ist, sondern auch die Kopplung von Lenkbewegungen und Gier- beziehungsweise Lateralbewegungen der hinteren Fahrradbestandteile. Messtechnische Versuche in Anlehnung an Pick et al. [19] oder Cossalter et al. [21], die den Einfluss der passiven Trägheit der Fahrerarme zum Lenksystem erfassen, könnten diese Effekte berücksichtigen. Zusätzlich zur Massenträgheit würde dadurch auch ein neuromuskulärer Einfluss einbezogen werden.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Basic-Bicycle-Modell; aus [8]	9
3.1	geometrische Abmessungen am aufrechten Fahrradmodell	19
3.2	Fahrradmodell inklusive Reifenwinkel in allgemeiner Lage	19
3.3	konstante Fahrgeschwindigkeit bei geneigter Fahrbahn	21
3.4	im fiktiven Kontaktpunkt angreifende Reifenkräfte und -momente; aus [32]	23
3.5	original Hanavan-Modell; aus [38]	27
3.6	Segmentwinkel zur aufrechten Sitzposition	28
3.7	geometrische Abmessungen zur gebeugten Sitzposition	29
3.8	Ansätze zur Modellierung des Fahrers „hands-on“; aus [22]	31
3.9	Hands-On-Model mit stark eingeschlagenem Lenker	33
3.10	Winkelstellung der Arme zum Hands-On-Model	33
4.1	Zusammenhang zwischen Lenkwinkel und Oberarmstellung	44
4.2	Zusammenhang zwischen Lenkwinkel und Unterarmstellung	45
4.3	Zusammenhang zwischen Lenkwinkel und Oberarmdrehung	45
5.1	Stabilitätsdiagramm für das Rennradmodell, „hands-off“ und aufrechte Sitzposition	70
5.2	Trekkingrad samt Testpilot von [31], [32], [34]	72
5.3	vom Trekkingrad zum Rennrad	74
5.4	Autor und Rennrad von [35]	75
5.5	Variation der Aufstandskräfte	77
5.6	horizontale Variation der <i>mainframe</i> -Schwerpunktslage	78
5.7	Variation des <i>mainframe</i> -Trägheitsmoments I_{mxx}	79
5.8	Variation des <i>mainframe</i> -Trägheitsmoments I_{mzz}	80
5.9	Variation des <i>mainframe</i> -Deviationsmoments I_{mxz}	80
5.10	Wechsel von der aufrechten zur gebeugten Sitzposition	82

5.11	Variation der Schwerpunktslage der lenkbaren Baugruppe	83
5.12	Variation des vorderen Trägheitsmoments $I_{H\delta\delta}$	84
5.13	Variation des vorderen Deviationsmoments $I_{H\delta z_D}$	85
5.14	Hände als Masse am Lenker	86
5.15	Berücksichtigung der Armmuskulatur	87
5.16	Vergleich zwischen Hands-Off- und Hands-On-Model	91
5.17	Separater Einfluss der weniger bedeutenden Ausdrücke zum Hands-On-Model	93
5.18	Separater Einfluss der bedeutenden Ausdrücke zum Hands-On-Model	95
5.19	Einfluss aller Ausdrücke zum Hands-On-Model	95
5.20	Einfluss der verschiedenen Armbewegungen	96
5.21	Wurzelortskurve zur Variation der zusätzlichen Lenkungsfeder- und -dämpferparameter; $u = 20 \text{ m/s}$	98

Tabellenverzeichnis

4.1	Parameterwerte zum Rennrad	56
4.2	Reifenkennwerte	57
4.3	Parameterwerte zum Fahrerkörper in aufrechter Sitzposition und „hands-off“	59
4.4	Parameterwerte zum Fahrerkörper in gebeugter Sitzposition und „hands-off“	60
4.5	modifizierte Parameterwerte zum Rennradmodell in gebeugter Sitzposition, Hände sind Teil des Lenkers	61
4.6	Parameterwerte zur Lenker-Arm-Kopplung für die gebeugte Sitzposition	62
5.1	normierte Eigenvektoren zum Rennradmodell, „hands-off“, aufrechte Position; $u = 7 \text{ m/s}$	69
5.2	auf die Lenkachse reduzierte Trägheitseigenschaften der Fahrerarme .	90
5.3	auf die Lenkachse reduzierte Trägheitseigenschaften der Fahrerarme mit den Daten aus [22]	101
C.1	Parameterwerte zum Trekkingrad inklusive Hands-Off-Fahrermodell in aufrechter Sitzposition	122
C.2	Reifenkennwerte zum Trekkingrad	123

Literaturverzeichnis

- [1] HERLIHY, D.V.: *Bicycle: the history*. Yale University Press, New Haven, 2004.
- [2] ÅSTRÖM, K.J., R.E. KLEIN und A. LENNARTSSON: *Bicycle Dynamics and Control*. IEEE Control System Magazine, Vol. 25, Nr. 4, Seiten 26–47, 2005.
- [3] RANKINE, W.J.M.: *On the dynamical principles of the motion of velocipedes*. The Engineer, Seiten 79,129,153,175,2, 1869/1870.
- [4] WHIPPLE, F.J.W.: *The stability of the motion of a bicycle*. Quart. J. Pure Appl. Math., Vol. 30, Seiten 312–348, 1899.
- [5] CARVALLO, M.E.: *Théorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette*. Gauthier-Villars, Paris, 1899.
- [6] KLEIN, F. und A. SOMMERFELD: *Über die Theorie des Kreisels, Heft IV*, Kapitel 8. Stabilität des Fahrrads, Seiten 863–884. Teubner, Leipzig, 1910.
- [7] JONES, D.E.H.: *The stability of the bicycle*. Physics Today, Vol. 23, Nr. 4, Seiten 34–40, April 1970.
- [8] MEIJAARD, J.P., J.M. PAPADOPOULOS, A. RUINA und A.L. SCHWAB: *Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review*. Proc. R. Soc. A, Vol. 463, Nr. 2084, Seiten 1955–1982, 2007.
- [9] KOOIJMAN, J.D.G.: *Experimental Validation of a Model for the Motion of an Uncontrolled Bicycle*. MSc. Thesis, Delft University of Technology, 2006.
- [10] KOOIJMAN, J.D.G., A.L. SCHWAB und J.P. MEIJAARD: *Experimental validation of a model of an uncontrolled bicycle*. Multibody System Dynamics, Vol. 19, Nr. 1, Seiten 115–132, 2008.
- [11] MEIJAARD, J.P. und A.L. SCHWAB: *Linearized equations for an extended bicycle model*. Proceedings of the III European Conference on Computational

- Mechanics, Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, Lissabon, Juni 2006.
- [12] KOOLJMAN, J.D.G., J.P. MEIJAARD, J.M. PAPADOPOULOS, A. RUINA und A.L. SCHWAB: *A Bicycle Can Be Self-Stable Without Gyroscopic or Caster Effects*. Science, Vol. 332, Nr. 6027, Seiten 339–342, 2011.
- [13] PACEJKA, H.B.: *Analysis of the Shimmy Phenomenon*. Proc. Instn. Mech. Engrs, Vol. 180, Nr.1, Seiten 251–268, 1965.
- [14] SHARP, R.S.: *The Stability and Control of Motorcycles*. J. Mechn. Engn. Sci., Vol. 13, Nr. 5, Seiten 316–329, 1971.
- [15] SHARP, R.S. und C.J. ALSTEAD: *The Influence of Structural Flexibilities on the Straight-running Stability of Motorcycles*. Vehicle System Dynamics, Vol. 9, Nr. 6, Seiten 327–357, 1980.
- [16] SPIERINGS, P.T.J.: *The Effects of Lateral Front Fork Flexibility on the Vibrational Modes of Straight-Running Single-Track Vehicles*. Vehicle System Dynamics, Vol. 10, Nr. 1, Seiten 21–35, 1981.
- [17] COSSALTER, V., R. LOT und M. MASSARO: *The influence of frame compliance and rider mobility on the scooter stability*. Vehicle System Dynamics, Vol. 45, Nr. 4, Seiten 313–326, 2007.
- [18] T.NISHIMI, A. AOKI und T. KATAYAMA: *Analysis of Straight Running Stability of Motorcycles*. Proc. 10th Int. Techn. Conf. Exp. Safety Vehicles, Oxford, Seiten 1080–1094, Juli 1985.
- [19] PICK, A. und D. COLE: *Neuromuscular Dynamics and the Vehicle Steering Task*. Dynamics of vehicles on roads and on tracks: Proc. of the 18th IAVSD Symposium, Kanagawa, Seiten 182–191, 2003.
- [20] COSSALTER, V., A. DORIA, D. FABRIS und M. MASO: *Measurement and identification of the vibration characteristics of motorcycle riders*. Proc. of the ISMA 2006 international conference on noise and vibration engineering, Lovanio, Seiten 1793–1806, September 2006.
- [21] COSSALTER, V., A. DORIA, R. LOT und M. MASSARO: *The effect of rider's passive steering impedance on motorcycle stability: identification and analysis*. Meccanica, Vol. 46, Nr. 2, Seiten 279–292, 2011.

- [22] SCHWAB, A.L., J.P. MEIJAARD und J.D.G. KOOLIJMAN: *Lateral dynamics of a bicycle with a passive rider model: stability and controllability*. Vehicle System Dynamics, Vol. 50, Nr. 8, Seiten 1209–1224, 2012.
- [23] WEIR, D.H.: *Motorcycle Handling Dynamics and Rider Control and the Effect of Design Configuration on Response and Performance*. Dissertation, University of California, 1972.
- [24] SHARP, R.S.: *On the Stability and Control of the Bicycle*. Applied Mechanics Review, Vol. 61, No. 6, 2008.
- [25] MOORE, J.K., J.D.G. KOOLIJMAN, A.L. SCHWAB und M. HUBBARD: *Rider motion identification during normal bicycling by means of principal component analysis*. Multibody System Dynamics, Vol. 25, Nr. 2, Seiten 225–244, 2011.
- [26] HAUDUM, M.: *Entwurf und Simulation eines Fahrermodells zum Lenken und Stabilisieren von Fahrrädern*. Diplomarbeit, TU Wien, 2012.
- [27] SHARP, R.S.: *Stability, Control and Steering Responses of Motorcycles*. Vehicle System Dynamics, Vol. 35, Nr. 4–5, Seiten 291–318, 2001.
- [28] PACEJKA, H.B.: *Tyre and Vehicle Dynamics*. Butterworth Heinemann, Oxford, 2002.
- [29] HAND, R.S.: *Comparisons and stability analysis of linearized equations of motion for a basic bicycle model*. MSc. Thesis, Cornell University, 1988.
- [30] LIMEBEER, D.J.N. und R.S. SHARP: *Bicycles, Motorcycles and Models*. IEEE Control Systems Magazine, Vol. 26, Nr. 5, Seiten 34–61, 2006.
- [31] ANGROSCH, B.: *Fahrradstabilität unter besonderer Berücksichtigung des Lenkungsflatterns*. Diplomarbeit, TU Wien, 2010.
- [32] OTT, C.: *Untersuchung des Wobble-Modes bei Fahrrädern – Theorie und Fahrversuch*. Diplomarbeit, TU Wien, 2011.
- [33] PLÖCHL, M., J. EDELMANN, B. ANGROSCH und C. OTT: *On the wobble mode of a bicycle*. Vehicle System Dynamics, Vol. 50, Nr. 3, Seiten 415–429, 2012.
- [34] NUSIME, J.: *Parametereinflüsse auf den Wobble-Mode bei Fahrrädern – Theorie und Praxis*. Diplomarbeit, TU Wien, 2012.

- [35] MAGNANI, G., N.M. CERIANI und J. PAPADOPOULOS: *On-Road Measurement of High Speed Bicycle Shimmy, and Comparison to Structural Resonance*. Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Mechatronics, Vicenza, Februar/März 2013.
- [36] WOERNLE, C.: *Mehrkörpersysteme: Eine Einführung in die Kinematik und Dynamik von Systemen starrer Körper*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.
- [37] WILSON, D.G.: *Bicycling Science*. The MIT Press, Cambridge, 3. Auflage, 2004.
- [38] HANAVAN, E.P.: *A mathematical model of the human body*, AMRL-TR-64-102, AD-608-463. Aerospace Medical Research Laboratories, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1964.
- [39] BESTLE, D.: *Analyse und Optimierung von Mehrkörpersystemen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.
- [40] EICH-SOELLNER, E. und C. FÜHRER: *Numerical Methods in Multibody Dynamics*. Teubner, Stuttgart, 1998.
- [41] MEYBERG, K. und P. VACHENAUER: *Höhere Mathematik 1*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 6. Auflage, 2003.
- [42] PLÖCHL, M. und H. SPRINGER: *Grundlagen der Mehrkörperdynamik*. Vorlesungsskriptum, Institut für Mechanik und Mechatronik E325, TU Wien, Sommersemester 2009.
- [43] http://www.roadbike.de/sixcms/media.php/8/RB0308_Sitzposition.pdf. Stand vom Oktober 2012.
- [44] <http://www.cannondale.com/aut/2013/bikes/road/elite-road/supersix-evo/super-six-evo-team-double-crankset>. Stand vom April 2013.
- [45] <http://www.colnago.com/de/c59-italia-7/>. Stand vom April 2013.
- [46] MOORE, J.K., M. HUBBARD, A.L. SCHWAB und J.D.G. KOOLIJMAN: *Accurate Measurement of Bicycle Parameters*. Proc. of the Bicycle and Motorcycle Dynamics 2010 Symposium on the Dynamics and Control of Single Track Vehicles, Delft, Oktober 2013.

-
- [47] DRESSEL, A. und A. RAHMAN: *Measuring sideslip and camber characteristics of bicycle tyres*. Vehicle System Dynamics, Vol. 50, Nr. 8, Seiten 1365–1378, 2012.
- [48] DORIA, A., M. TOGNAZZO, G. CUSIMANO, V. BULSINK, A. COOKE und B. KOOPMAN: *Identification of the mechanical properties of bicycle tyres for modelling of bicycle dynamics*. Vehicle System Dynamics, Vol. 51, Nr. 3, Seiten 405–420, 2013.
- [49] STAPELFELDT, B. und M. WANGERIN: *Anthropometrische Grundlagen für die Optimierung der Sitzposition im Radsport*. Jahrbuch des Bundesinstitutes für Sportwissenschaft (BISp), Seiten 133 – 137, 2007/2008.
- [50] MACK, W. und M. PLÖCHL: *Stabilitätsprobleme bewegter Systeme*. Vorlesungsskriptum, Institut für Mechanik und Mechatronik E325, TU Wien, Wintersemester 2010.
- [51] SHARP, R.S. und D.J.N. LIMEBEER: *On steering wobble oscillations of motor-cycles*. Proc. Instn. Mech. Engrs. Part C, Vol. 218, Nr. 12, Seiten 1449–1456, Dezember 2004.

Anhang A

Fahrerdaten

Anthropometrische Daten für das 50% Perzentil:

=====

Gewicht (w):	73.436 kg
Körpergröße (stat):	1.755 m
Schulterhöhe (shldh):	1.438 m
Brustbeinhöhe (subh):	1.237 m
Trochanterhöhe (troch):	0.917 m
Tibiahöhe (tibh):	0.457 m
Oberarmlänge (uparl):	0.343 m
Unterarmlänge (foarl):	0.277 m
Brustkorbtiefe (chesd):	0.229 m
Taillientiefe (waisd):	0.201 m
Gesäßtiefe (buttd):	0.224 m
Brustkorbbreite (chesb):	0.305 m
Taillienbreite (waisb):	0.269 m
Hüftbreite (hipb):	0.335 m
Oberarmumfang (axilc):	0.315 m
Ellbogenumfang (elbc):	0.277 m
Handgelenkumfang (wrisc):	0.173 m
Faustumfang (fistc):	0.295 m
Oberschenkelumfang (thihc):	0.569 m
Knieumfang (gknec):	0.363 m
Knöchelumfang (ankc):	0.226 m
Sphyrionhöhe (sphyh):	0.074 m
Fußlänge (footl):	0.267 m
Sitzgröße (sith):	0.914 m
Kopfumfang (headc):	0.572 m

-----+-----+-----+-----						
6 Hand links		0.09379	0.50000	0.0004709		0.57092 0.73830
		0.04689	0.00043 0.5353	0.0004709		-0.20253 -0.20253
		0.04689	1239.4	0.0004709		-0.05268 0.17609
-----+-----+-----+-----						
7 Oberarm rechts		0.34290	0.47857	0.0238520		0.25282 0.42771
		0.05013	0.00239 2.3127	0.0238520		0.20253 0.20253
		0.04406	966.6	0.0025825		-0.38366 -0.12112
-----+-----+-----+-----						
8 Oberarm links		0.34290	0.47857	0.0238520		0.25282 0.42771
		0.05013	0.00239 2.3127	0.0238520		-0.20253 -0.20253
		0.04406	966.6	0.0025825		-0.38366 -0.12112
-----+-----+-----+-----						
9 Unterarm rechts		0.27686	0.42414	0.0087768		0.38994 0.54633
		0.04406	0.00113 1.3747	0.0087768		0.20253 0.20253
		0.02749	1213.1	0.0009576		-0.15176 0.10047
-----+-----+-----+-----						
10 Unterarm links		0.27686	0.42414	0.0087768		0.38994 0.54633
		0.04406	0.00113 1.3747	0.0087768		-0.20253 -0.20253
		0.02749	1213.1	0.0009576		-0.15176 0.10047
-----+-----+-----+-----						
11 Oberschenkel rechts		0.38354	0.42761	0.0977934		0.17943 0.17788
		0.09055	0.00674 7.4478	0.0977934		0.125 0.125
		0.05781	1105.3	0.0221383		0.12074 0.12044
-----+-----+-----+-----						
12 Oberschenkel links		0.38354	0.42761	0.0977934		0.17943 0.17788
		0.09055	0.00674 7.4478	0.0977934		-0.125 -0.125
		0.05781	1105.3	0.0221383		0.12074 0.12044
-----+-----+-----+-----						

-----+-----+-----+-----+						
13 Unterschenkel rechts		0.38354	0.42379	0.0446268		0.24735 0.24603
		0.05781	0.00270 3.6648	0.0446268		0.125 0.125
		0.03598	1358.6	0.0043892		0.44246 0.44263
-----+-----+-----+-----+						
14 Unterschenkel links		0.38354	0.42379	0.0446268		0.24735 0.24603
		0.05781	0.00270 3.6648	0.0446268		-0.125 -0.125
		0.03598	1358.6	0.0043892		0.44246 0.44263
-----+-----+-----+-----+						
15 Fuß rechts		0.26670	0.42900	0.0064244		0.15676 0.15614
		0.03683	0.00078 1.0910	0.0064244		0.125 0.125
		0.02373	1398.4	0.0005388		0.68087 0.68136
-----+-----+-----+-----+						
16 Fuß links		0.26670	0.42900	0.0064244		0.15676 0.15614
		0.03683	0.00078 1.0910	0.0064244		-0.125 -0.125
		0.02373	1398.4	0.0005388		0.68087 0.68136
-----+-----+-----+-----+						

Anhang B

Matrizeneinträge

$$\mathbf{N}_{0,red} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 1 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{N}_{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -l & 0 & t_c & s_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\gamma 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\alpha 2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\gamma 2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{Mx\gamma 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{Mx\gamma 2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} c_{F\alpha 1} & c_{F\gamma 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{F\alpha 2} & c_{F\gamma 2} \\ -c_{M\alpha 1} & c_{M\gamma 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{M\alpha 2} & c_{M\gamma 2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{M}^{\text{hands-off}} = \begin{bmatrix} m_T & m_T x_T & m_T h_T & m_H e_H & -m_s s_s \\ & I_{Tzz|D} & I_{Txx|D} & I_{H\delta z_D} & I_{s\beta z_D} \\ & & I_{Txx|D} & I_{H\delta x_D} & I_{s\beta x_D} \\ & & & I_{H\delta\delta} & I_{s\beta\delta} \\ \text{symm.} & & & & I_{s\beta\beta} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{C}_0^{\text{hands-off}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_\beta \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{C}_1^{\text{hands-off}} = \begin{bmatrix} 0 & m_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_T x_T & -G_T & -G_1 \sin \varepsilon & -G_1 \cos \varepsilon \\ 0 & m_T h_T + G_T & 0 & G_1 \cos \varepsilon & -G_1 \sin \varepsilon \\ 0 & m_H e_H + G_1 \sin \varepsilon & -G_1 \cos \varepsilon & 0 & -G_1 \\ 0 & -m_s s_s + G_1 \cos \varepsilon & G_1 \sin \varepsilon & G_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{K}_{0,\text{red}}^{\text{hands-off}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -m_T h_T g & -S_\delta g & -S_\beta g \\ -S_\delta g & c_\delta - S_\delta g \sin \varepsilon & -S_\beta g \sin \varepsilon \\ -S_\beta g & -S_\beta g \sin \varepsilon & c_\beta - S_\beta g \cos \varepsilon \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{M}^{\text{hands-on}} = \mathbf{M}^{\text{hands-off}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2m_l e_a & 0 \\ & 0 & 0 & 2I_{a\delta z_D} & 0 \\ & & 0 & 2I_{a\delta x_D} & 0 \\ & & & 2I_{a\delta\delta} & 0 \\ \text{symm.} & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{C}_0^{\text{hands-on}} = \mathbf{C}_0^{\text{hands-off}} \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{C}_1^{\text{hands-on}} = \mathbf{C}_1^{\text{hands-off}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m_l e_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{K}_{0,red}^{\text{hands-on}} = \mathbf{K}_{0,red}^{\text{hands-off}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2m_l e_a g & 0 \\ -2m_l e_a g & 2c_{a\delta\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -t_c & 0 & \cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon & 0 \\ -s_c & 0 & -\sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$(\text{B.15})$$

$$\mathbf{A}_{21} = -\mathbf{K}_{0,red}^j + \mathbf{V} \mathbf{P} \mathbf{N}_{0,red} \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{A}_{22} = -\mathbf{C}_0^j - u \mathbf{C}_1^j + \frac{1}{u} \mathbf{V} \mathbf{P} \mathbf{N}_{-1} \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{A}_{23} = \mathbf{V} \mathbf{P}', \quad j = \text{hands-off, hands-on} \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{A}_{31} = u \mathbf{N}_{0,red} \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{A}_{32} = \mathbf{N}_{-1} \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbf{A}_{33} = -u \mathbf{I} \quad (\text{B.21})$$

Anhang C

Parameterwerte zum Trekkingrad

Aus den Diplomarbeiten [31], [32], [34] ist das Stabilitätsverhalten des Trekkingrades sehr gut bekannt. Im Unterschied dazu wird in dieser Arbeit jedoch ein anderes biomechanisches Fahrerkörpermodell ohne den Oberkörperrollfreiheitsgrad verwendet. Um das Trekkingradmodell trotzdem weiterverwenden zu können, wurden zunächst die Geometrie- und Massenparameter aus [32] übernommen und mit dem aufrechten, freihändigen Fahrermodell nach Abschnitt 3.3.2 kombiniert, wobei das 75. Perzentil des Hanavan-Modells mit einer Masse von 80.1 kg bei einer Körpergröße von 1.80 m verwendet wurde. Außerdem wurden die Reifenkennwerte gemäß den Publikationen [47] und [48] abgeändert. Anschließend konnten die Parameterwerte zum β -Freiheitsgrad entsprechend angepasst werden, so dass das damit erzielte Gesamtmodell ein den Messergebnissen aus [32] konformes Stabilitätsverhalten besitzt. In der vorliegenden Arbeit wird aber stets das 50. Perzentil (1.76 m und 73.4 kg) verwendet. Die entsprechenden Parameterwerte für das Trekkingrad sind in den folgenden Tabellen angeführt.

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
Radstand	l	1.095	m
Nachlauf	t_c	0.06923	m
Lenkachsenwinkel	ε	19	°
β –Gelenkabstand	s_c	0.85822	m
Lenkkopfsteifigkeit	c_β	3581.0	Nm/rad
Lenkkopfdämpfung	k_β	18.335	Nm s/rad
Lenkungssteifigkeit	c_δ	0	Nm/rad
Lenkungsdämpfung	k_δ	0	Nm s/rad
<i>Rahmen inklusive Hinterrad und Fahrer: m</i>			
Masse	m_m	85.76212	kg
Schwerpunktslage	$\begin{bmatrix} x_m & h_m \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.37277 & 1.04253 \end{bmatrix}$	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{mxx} & 0 & -I_{mzx} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{mzx} & 0 & I_{mzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 14.01041 & 0 & 1.57197 \\ 0 & * & 0 \\ 1.57197 & 0 & 3.31270 \end{bmatrix}$	kg m ²
<i>Gabel inklusive Vorderrad: s</i>			
Masse	m_s	4.35	kg
Schwerpunktslage	$\begin{bmatrix} x_s & h_s \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.02025 & 0.48482 \end{bmatrix}$	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{sxx} & 0 & -I_{sxz} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{sxz} & 0 & I_{szz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.20748 & 0 & -0.0129 \\ 0 & * & 0 \\ -0.0129 & 0 & 0.06968 \end{bmatrix}$	kg m ²
<i>Lenker: f</i>			
Masse	m_f	1.6288	kg
Schwerpunktslage	$\begin{bmatrix} x_f & h_f \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.88846 & 1.02918 \end{bmatrix}$	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{fxx} & 0 & -I_{fzx} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{fzx} & 0 & I_{fzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.05677 & 0 & 0.00104 \\ 0 & * & 0 \\ 0.00104 & 0 & 0.05656 \end{bmatrix}$	kg m ²
<i>Vorderrad: 1</i>			
Abrollradius	r_1	0.3355	m
Masse Vorderrad	m_1	1.95	kg
Trägheitsmomente	$\begin{bmatrix} I_{1xx} = I_{1zz} & I_{1yy} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.06332 & 0.12664 \end{bmatrix}$	kg m ²
<i>Hinterrad: 2</i>			
Abrollradius	r_2	0.3355	m
Masse Vorderrad	m_2	2.35	kg
Trägheitsmomente	$\begin{bmatrix} I_{2xx} = I_{2zz} & I_{2yy} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.06482 & 0.12964 \end{bmatrix}$	kg m ²

Tabelle C.1: Parameterwerte zum Trekkingrad inklusive Hands-Off-Fahrermodell in aufrechter Sitzposition

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
<i>Vorderreifen: 1</i>			
Schräglaufsteifigkeit	$c_{F\alpha 1}$	$0.22 \cdot 180/\pi \cdot F_{z1}$	N/rad
Sturzsteifigkeit	$c_{F\gamma 1}$	$0.015 \cdot 180/\pi \cdot F_{z1}$	N/rad
Rückstellmomentstkt. zufolge Schräglf.	$c_{M\alpha 1}$	$0.0273 \cdot c_{F\alpha 1}$	Nm/rad
Rückstellmomentstkt. zufolge Sturz	$c_{M\gamma 1}$	$0.0432 \cdot c_{F\gamma 1}$	Nm/rad
Kippmomentstkt. zufolge Sturz	c_{Mx1}	$0.018 \cdot F_{z1}$	Nm/rad
Einlauflänge für Schräglaufwinkel	$\sigma_{\alpha 1}$	0.06	m
Einlauflänge für Sturzwinkel	$\sigma_{\gamma 1}$	0.06	m
<i>Hinterreifen: 2</i>			
Schräglaufsteifigkeit	$c_{F\alpha 2}$	$0.18 \cdot 180/\pi \cdot F_{z2}$	N/rad
Sturzsteifigkeit	$c_{F\gamma 2}$	$0.014 \cdot 180/\pi \cdot F_{z2}$	N/rad
Rückstellmomentstkt. zufolge Schräglf.	$c_{M\alpha 2}$	$0.025 \cdot c_{F\alpha 2}$	Nm/rad
Rückstellmomentstkt. zufolge Sturz	$c_{M\gamma 2}$	$0.0325 \cdot c_{F\gamma 2}$	Nm/rad
Kippmomentstkt. zufolge Sturz	c_{Mx2}	$0.018 \cdot F_{z2}$	Nm/rad
Einlauflänge für Schräglaufwinkel	$\sigma_{\alpha 2}$	0.06	m
Einlauflänge für Sturzwinkel	$\sigma_{\gamma 2}$	0.06	m

Tabelle C.2: Reifenkennwerte zum Trekkingrad