



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Adaptive BEM und FEM-BEM-Kopplung für die Lamé-Gleichung

Ausgeführt am Institut für
Analysis und Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.techn. Dirk Praetorius und
Dipl.-Ing. Dr.techn. Thomas Führer

durch
Gregor Mitscha-Eibl
Matznergasse 8/55
1140 Wien

Abstract (English)

We are concerned with the analysis and numerical solution of some boundary value problems for the Lamé equation from linear elasticity. These partial differential equations are reformulated as boundary integral equations and are then treated numerically by use of BEM (boundary element method) and the coupling of BEM and FEM (finite element method).

A special focus of our work lies on adaptivity: We use error indicators to get local information on where to refine the underlying boundary mesh and thereby to increase the accuracy of the discrete approximate solution. We introduce and analyze various error indicators for adaptive BEM and FEM-BEM-coupling.

An important tool in our analysis is the theory of interpolation spaces, see [BL76]. We contribute to this theory by considering interpolation of semi-norms instead of norms. We prove equivalence of the interpolation semi-norm and the usual Slobodeckij semi-norm on fractional-order Sobolev spaces $H^s(X)$, $s \in (0, 1)$, and study how the involved equivalence constants behave under Lipschitz transformations of the domain X , thereby generalizing results from the recent paper [Heu14]. Next, we use this to prove uniform equivalence of the two kinds of semi-norms on node patches of a triangulated surface. As an application of our findings in interpolation space theory, we give a new proof of the localisation of the $H^s(\Gamma)$ -norm from [CMS01], a fundamental result to establish, for instance, reliability of a weighted-residual error estimator for BEM.

Numerical experiments in 2D for BEM as well as FEM-BEM-coupling are presented to confirm our theoretical findings and illustrate their applicability. A detailed discussion of implementational issues such as numerically stable computation of the discrete boundary integral operators is included as well.

Abstract (Deutsch)

Wir beschäftigen uns mit der Analysis und der numerischen Lösung einiger Randwertprobleme für die Lamé-Gleichung aus der linearen Elastizitätstheorie. Die partiellen Differentialgleichungen werden zu Integralgleichungen auf dem Rand umformuliert, um dann numerisch mit BEM (*boundary element method*, Randelementmethode) und der Kopplung von BEM und FEM (*finite element method*) in Angriff genommen zu werden. Ein besonderer Fokus unserer Arbeit liegt auf Adaptivität: Wir benutzen Fehlerindikatoren, um lokale Information darüber zu erhalten, wo das zu Grunde liegende Rand-Gitter verfeinert werden soll, um die Genauigkeit der diskreten approximativen Lösung zu verbessern. Wir definieren und analysieren verschiedene Fehlerindikatoren für die BEM und die FEM-BEM-Kopplung.

Ein wichtiges Werkzeug für unsere Analysis liefert die Theorie der Interpolationsräume, siehe [BL76]. Wir tragen zu dieser Theorie bei, indem wir die Interpolation von Seminormen untersuchen. Wir beweisen die Äquivalenz der interpolierten Seminorm und der üblichen Slobodeckij-Seminorm auf Sobolev-Räumen gebrochener Ordnung $H^s(X)$, $s \in (0, 1)$. Wir untersuchen, wie sich die involvierten Äquivalenzkonstanten bei Lipschitz-Transformation des Gebietes X verhalten, und verallgemeinern im Zuge dessen Resultate der erst kürzlich erschienenen Arbeit [Heu14]. Dies benutzen wir, um die gleichmäßige Äquivalenz der beiden Seminormen auf Knoten-Patches einer triangulierten Oberfläche zu zeigen. Als Anwendung unserer Erkenntnisse in der Theorie der Interpolationsräume geben wir einen neuen Beweis der Lokalisierung der $H^s(\Gamma)$ -Norm aus [CMS01], ein fundamentales Resultat, welches beispielsweise benutzt wird, um die Zuverlässigkeit des gewichteten Residualschätzers für BEM zu beweisen.

Wir präsentieren numerische Experimente in 2D für sowohl BEM als auch FEM-BEM-Kopplung, um unsere theoretischen Ergebnisse zu bestätigen und deren Anwendbarkeit zu illustrieren. Eine detaillierte Diskussion einiger Fragestellungen bei der Implementierung, wie etwa der numerisch stabilen Berechnung der diskreten Randintegraloperatoren, ist ebenfalls inkludiert.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Motivation: Die Lamé-Gleichung	7
1.2	Aufbau der Arbeit	9
2	Funktionsräume	14
2.1	Sobolev-Räume	14
2.1.1	Lipschitz-Funktionen	19
2.1.2	Der Oberflächengradient	24
2.2	Triangulierungen und diskrete Räume	32
2.2.1	Formregularität	33
2.2.2	Krumme Ränder	35
2.3	Interpolationsräume	37
2.3.1	Der Interpolationssatz	37
2.3.2	Sobolev-Räume als Interpolationsräume	42
2.3.3	Äquivalenz der Seminormen bei Lipschitz-Transformation	47
2.3.4	Äquivalenz der Seminormen auf Patches	49
2.3.5	Weitere Konsequenzen	53
3	Elliptische Systeme und Randintegralgleichungen	55
3.1	Elliptische Systeme	55
3.1.1	Die Greenschen Formeln	56
3.1.2	Schwache Formulierung der Lamé-Gleichung	58
3.2	Analytische Lösungen	62
3.2.1	Lamé-Gleichung in 2D	62
3.2.2	Fundamentallösungen	64
3.3	Integraloperatoren	65
3.3.1	Potentiale und Abbildungseigenschaften	67
3.3.2	Randintegralgleichungen	72
4	Adaptive BEM	75
4.1	BEM für die schwach singuläre Integralgleichung	75
4.1.1	A priori Fehlerschätzung	76
4.1.2	Diskretes Gleichungssystem	77
4.2	A posteriori Fehlerschätzung und Adaptives Verfahren	77
4.2.1	Der h - $h/2$ -Schätzer	79
4.2.2	Der Residualschätzer	82
5	Adaptive FEM-BEM-Kopplung	86
5.1	Johnson-Nédélec-Kopplung	87
5.1.1	Darstellungsformel im Außenraum	87
5.1.2	Herleitung der Johnson-Nédélec-Kopplung	88

5.2	Stabilität der diskreten Formulierung	90
5.2.1	Diskrete Formulierungen	90
5.2.2	Beweis der Stabilität	92
5.3	A posteriori Fehlerschätzung und Adaptives Verfahren	95
6	Implementierung in 2D	97
6.1	Überblick	97
6.1.1	Integraloperatoren	98
6.1.2	Schwach singuläre Integralgleichung	99
6.2	Implementierung der Integraloperatoren	102
6.2.1	Der V -Operator	102
6.2.2	Der K -Operator	110
6.3	Implementierung der BEM-Fehlerschätzer	111
6.4	P1AFEM für elliptische Systeme	113
6.4.1	Der FEM-Solver: 50 Lines of MATLAB	115
6.4.2	A posteriori Fehlerschätzung	119
6.5	FEM-BEM-Kopplung	121
6.5.1	Funktionen für die Johnson-Nédélec-Kopplung	122
6.5.2	Exakte Lösungen und die MATLAB Symbolic Toolbox	125
7	Numerische Ergebnisse	128
7.1	Integraloperatoren in Aktion	128
7.2	Ergebnisse für BEM	131
7.2.1	L-Shape	131
7.2.2	Schlitz	136
7.3	Ergebnisse für FEM-BEM-Kopplung	145
7.3.1	Glattes Problem auf dem Quadrat	145
7.3.2	L-Shape	149
	Literatur	152

1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Analysis und numerischen Lösung einiger Gleichungen aus dem Gebiet der linearen Elastizitätstheorie mit Hilfe von BEM (*boundary element method*, Randelementmethode) bzw. der Kopplung von FEM und BEM. Ein Fokus liegt dabei auf adaptiven Verfahren, d.h. das der Diskretisierung zu Grunde liegende Netz wird in Abhängigkeit von Fehlerindikatoren lokal verfeinert.

1.1 Motivation: Die Lamé-Gleichung

Als erstes Modellproblem betrachten wir das Dirichlet-Problem

$$-\mu\Delta\mathbf{u} - (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma. \quad (1.2)$$

für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Gamma := \partial\Omega$. Die partielle Differentialgleichung (1.1) bezeichnen wir als *Lamé-Gleichung*. Es handelt sich eigentlich um ein System von n Gleichungen: Die Unbekannte \mathbf{u} ist eine vektorwertige Funktion $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Andere Namen für (1.1) sind *Navier-Cauchy-Gleichung* oder einfach *Gleichungen der linearen Elastostatik*. Die Parameter $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ sind bekannt als *Lamé-Parameter* oder *Lamé-Konstanten*.

Wir wollen eine grobe Idee davon geben, welche Bedeutung das Problem (1.1)–(1.2) in der Praxis hat. Prägnant ausgedrückt, beschreibt die Lamé-Gleichung die Deformation eines elastischen Körpers unter der Einwirkung verschiedener Kräfte. Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ repräsentiert den Körper in seiner „Referenzkonfiguration“, d.h. vor der Deformation. Die vektorwertige Funktion $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ repräsentiert die Verformung relativ zur Referenzkonfiguration, d.h. ein Punkt $x \in \Omega$ des Körpers wird in den Punkt $x + \mathbf{u}(x) \in \mathbb{R}^n$ verschoben.

Betrachten wir nun einen beliebigen Teil des Körpers $\Omega^* \subset \Omega$, d.h. $\partial\Omega^*$ ist eine Hyperfläche in Ω . Die Oberflächenspannung, die wegen der Deformation auf $\partial\Omega^*$ entsteht, wird durch den (*Cauchyschen*) *Spannungstensor* $\sigma(\mathbf{u}) = (\sigma_{ij}(\mathbf{u})): \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ beschrieben. Dieser repräsentiert eine lineare Abbildung, welche den Normalvektor \mathbf{n} bei einem Punkt $x \in \partial\Omega^*$ mit einem Spannungsvektor $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$ assoziiert. Angenommen, auf den Körper wirkt darüber hinaus noch eine Volumenskraft $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, so erhält man aus dem zweiten Newtonschen Gesetz der Bewegung („Masse mal Beschleunigung ist gleich Kraft“) die Gleichung

$$\int_{\Omega^*} \rho \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \int_{\partial\Omega^*} \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega^*} \mathbf{f}.$$

Die skalare Funktion ρ bezeichnet hier die Massendichte des Körpers Ω . Wendet man den Gaußschen Integralsatz an und beachtet, dass $\Omega^* \subset \Omega$ beliebig war, erhält man

$$\rho \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega.$$

Der Ausdruck $\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u})$ ist hier komponentenweise als

$$(\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}))^k = \sum_{i=1}^n \partial_i \sigma_{ik}(\mathbf{u}) \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n$$

zu lesen. Wenn sich der Körper *in Ruhe* befindet, verschwindet die Zeitableitung, und die Gleichung vereinfacht sich zu

$$-\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega.$$

Wir sprechen dann von *Elastostatik*. Wir werden vor allem den Fall $\mathbf{f} = 0$ betrachten:

$$-\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (1.3)$$

Physikalische Überlegungen zeigen, dass der Spannungstensor $\sigma(\mathbf{u}(x))$ von der Längenverzerrung der Abbildung $x \mapsto x + \mathbf{u}(x)$ lokal im Punkt x abhängt, d.h. vom Verhältnis von $v^T(I + \nabla \mathbf{u})^T(I + \nabla \mathbf{u})v$ zu $v^T v$ für $v \in \mathbb{R}^n$. Hier ist $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix und $\nabla \mathbf{u} = (\partial_j u^i)_{i,j}$ die Jacobi-Matrix von \mathbf{u} . Die Matrix

$$\frac{1}{2}((I + \nabla \mathbf{u})^T(I + \nabla \mathbf{u}) - I) \quad (1.4)$$

wird als Verzerrungstensor bezeichnet. In vielen relevanten Anwendungen kann man davon ausgehen, dass $\nabla \mathbf{u}$ sehr klein ist, und muss daher nur den (*linearisierten*) *Verzerrungstensor* $\varepsilon(\mathbf{u})$ betrachten, welcher aus (1.4) durch Vernachlässigen des Terms $\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}$ entsteht:

$$\varepsilon(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).$$

Das *Hookesche Gesetz* postuliert darüber hinaus einen linearen Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor $\sigma(\mathbf{u})$ und dem Verzerrungstensor $\varepsilon(\mathbf{u})$:

$$\sigma(\mathbf{u}) = A\varepsilon(\mathbf{u}).$$

Ab hier spricht man von *linearer* Elastostatik. $A = (a_{ij}^{kl}) \in \mathbb{R}^{n \times n \times n \times n}$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und wird durch die speziellen Eigenschaften des Materials, aus dem der Körper besteht, bestimmt. Im Allgemeinen hängt A von $x \in \Omega$ ab; ist das Material jedoch *homogen*, so ist A konstant.

Trifft man zusätzlich die Annahme, dass das Material *isotrop* ist, also aus allen Richtungen gleich aussieht, so kann man im dreidimensionalen Fall $n = 3$ daraus ableiten, dass die $3^4 = 81$ Koeffizienten von $A = (a_{ij}^{kl})$ durch nur zwei Parameter $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vollständig bestimmt werden. Dies sind die zuvor erwähnten Lamé-Konstanten. Es gilt dann

$$\sigma(\mathbf{u}) = \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u})I + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}). \quad (1.5)$$

Für unsere Zwecke ist (1.5) die Definition des Spannungstensors $\sigma(\mathbf{u})$, und zwar für beliebiges $n \geq 2$.

Die Lamé-Gleichung (1.1) ergibt sich nun aus (1.3) und (1.5). Wir berechnen

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}))^k &= \sum_i \partial_i \sigma_{ik}(\mathbf{u}) \\
&= \sum_i \partial_i (\lambda(\operatorname{div} \mathbf{u}) \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}(\mathbf{u})) \\
&= \lambda \partial_k(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu \sum_i \partial_i (\partial_i u^k + \partial_k u^i) \\
&= \mu \Delta u^k + (\lambda + \mu) \partial_k(\operatorname{div} \mathbf{u})
\end{aligned}$$

für jedes $k = 1, \dots, n$. Zusammen mit (1.3) gilt also

$$-\mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

und damit (1.1).

Zusammengefasst beschreibt die Lamé-Gleichung (1.1), zumindest für $n = 3$, das Verhalten von (hinreichend kleinen) Deformationen $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eines ruhenden, elastischen Körpers aus homogenem, isotropem Material, welche die Annahme des Hookeschen Gesetzes erfüllen. Die Randbedingung (1.2) bedeutet, dass die Deformationen auf der Oberfläche des Körpers vorgegeben werden und jene im Inneren als Unbekannte verbleiben.

Natürlich sind auch andere Randbedingungen denkbar: Man könnte beispielsweise die Oberflächenspannung $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$ auf Γ vorgeben; dies führt auf ein Neumann-Problem. Wir konzentrieren uns in dieser Arbeit vorerst auf das Dirichlet-Problem. Später werden wir zusätzlich ein sogenanntes Transmissionsproblem betrachten, wo die Verschiebung \mathbf{u} auf ganz $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ gesucht ist und Vorgaben an die Sprünge von \mathbf{u} und $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$ entlang von Γ gemacht werden; mehr dazu in Abschnitt 5.

Für mehr Information zur Theorie der Elastizität und zur Modellierung der Lamé-Gleichung verweisen wir auf [LL59] und [NH80].

1.2 Aufbau der Arbeit

Wir werden uns mit dem Dirichlet-Problem (1.1)–(1.2) und verwandten Randwertproblemen im Wesentlichen aus drei verschiedenen Blickwinkeln auseinandersetzen: zunächst aus einem rein (funktional-)analytischen, dann aus dem Blickwinkel der numerischen Analysis, und schließlich vom Standpunkt der praktischen Implementierung aus. Entsprechend können wir eine grobe Gliederung der Arbeit wie folgt angeben:

- In den Abschnitten 2 und 3 behandeln wir analytische Grundlagen: Funktionenräume, schwache Formulierungen, Integralgleichungen; die (klassische) partielle Differentialgleichung (1.1)–(1.2) erscheint in verschiedenen Formulierungen als lineare Gleichung in gewissen Hilberträumen.
- In den Abschnitten 4 und 5 analysieren wir numerische Verfahren, BEM und FEM-BEM-Kopplung, mit Fokus auf Adaptivität und a posteriori Fehlerschätzung; Mit Hilfe der Galerkin-Methode studieren wir eine diskretisierte Form von (1.1)–(1.2) in endlich-dimensionalen Funktionenräumen.

- In den Abschnitten 6 und 7 behandeln wir schließlich die Implementierung und präsentieren numerische Ergebnisse; wir arbeiten mit MATLAB als Programmierwerkzeug, um näherungsweise Lösungen von (1.1)–(1.2) zu berechnen und zu visualisieren.

Die grobe Unterteilung ist typisch für Arbeiten aus der numerischen Analysis; bei näherem Hinsehen wird der Leser aber feststellen, dass wir in unserer Arbeit nicht immer nur Standard-Wege beschritten haben und – von den analytischen Grundlagen angefangen – Resultate inkludiert haben, die auch für Experten auf dem Gebiet neu sein könnten. Wir geben nun einen detaillierteren inhaltlichen Überblick, wobei wir versuchen, die vorliegende Arbeit in die existierende Literatur einzuordnen und eigene Beiträge herauszustrichen.

Das Thema von Abschnitt 2 lautet „Funktionenräume“. Zunächst starten wir in §2.1 mit einer Zusammenstellung der wichtigsten Fakten über Sobolev-Räume. Dieses Material lässt sich in so gut wie jedem einführenden Textbuch über PDE-verwandte Themen finden. In §2.1.1 beschäftigen wir uns mit einigen Eigenschaften von Lipschitz-Funktionen. Dies geschieht vorbereitend auf eine ausführliche Diskussion des Raumes $H^1(\Gamma)$, wobei Γ eine kompakte Lipschitz-Mannigfaltigkeit ist. Eine wichtige Tatsache ist, dass für $H^1(\Gamma)$ mit Hilfe des Oberflächengradienten eine einfach zu handhabende Norm definiert werden kann:

$$\|u\|_{H^1(\Gamma)}^2 = \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\nabla_{\Gamma} u\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Wir haben uns entschlossen, dieses Resultat sauber auszuarbeiten, da es in Textbüchern wie [McL00, HW08, Ste08] üblicherweise nicht behandelt wird; dies geschieht in §2.1.2. Wir geben unter anderem eine eigene, anschaulich-geometrische Definition des Oberflächengradienten.

In §2.2 führen wir Notationen im Zusammenhang mit Triangulierungen und diskreten Räumen ein. Wir definieren das Konzept der Formregularität und ziehen einige elementare Konsequenzen.

Der Unterabschnitt 2.3, Interpolationsräume, ist vielleicht der innovativste Teil der Arbeit. Wir verallgemeinern die Theorie der Interpolationsräume, wie sie beispielsweise in [BL76] für Banachräume entwickelt wird, auf den Fall von seminormierten Räumen. In weiterer Folge charakterisieren wir die interpolierte Seminorm in Sobolev-Räumen $H^s(X)$ für $s \in (0, 1)$. Wir gehen auch näher darauf ein, wie sich die involvierten Äquivalenzkonstanten bei Lipschitz-Transformationen des Gebietes X verhalten; im Zuge dessen verallgemeinern wir die Resultate der erst kürzlich erschienenen Arbeit von Heuer [Heu14], der affine Transformationen betrachtet.

Als Hauptresultat erhalten wir in §2.3.4 die gleichmäßige Äquivalenz der Interpolations- und der Slobodeckij-Seminorm auf Patches einer formregulären Triangulierung, siehe Theorem 2.55. Eine Anwendung dafür finden wir später in Abschnitt 4.2 beim Beweis der Zuverlässigkeit des Residualschätzers.

Im Zuge des Beweises von Theorem 2.55 geben wir außerdem eine Rechtfertigung für Skalierungsargumente auf formregulären Patches. Dies kann auch in Situationen praktisch sein, die nichts mit Interpolationsräumen zu tun haben, und wurde etwa bereits in

[FFME⁺14] für den Beweis der Konvergenz des Faermann-Fehlerschätzers angewandt.

Der Abschnitt 3 hat wieder eher einführenden Charakter und ist in Aufbau und Präsentation stark an [McL00] angelehnt. Wir diskutieren in §3.1 die Lamé-Gleichung (1.1) als Spezialfall elliptischer Systeme zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Als grundlegende Werkzeuge benötigen wir die erste und zweite Greensche Formel. Wir geben eine schwache Formulierung des Dirichlet-Problems (1.1)–(1.2) und diskutieren deren eindeutige Lösbarkeit. Einen komplett anderen Zugang zur Lamé-Gleichung in 2D sehen wir in §3.2, wo wir eine „allgemeine Lösungsformel“ von (1.1) mit Hilfe analytischer Funktionen herleiten, die sich später für unsere numerischen Experimente als praktisch erweist.

In §3.3 befassen wir uns schließlich mit dem analytischen Fundament der BEM: der Theorie der Randintegralgleichungen. Wir beweisen die zentrale Darstellungsformel

$$\mathbf{u} = \mathcal{N}\mathbf{f} - \mathcal{K}(\gamma\mathbf{u}) + \mathcal{V}(\gamma_1\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega \quad (1.6)$$

für Lösungen von (1.1) mit allgemeiner rechter Seite \mathbf{f} , sowie die Abbildungseigenschaften der involvierten Integraloperatoren. Dies führt auf die alternative Formulierung des Dirichlet-Problems (1.1)–(1.2) als Integralgleichung auf dem Rand:

$$V\phi = (K + \frac{1}{2})\mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma. \quad (1.7)$$

Der (schwach singuläre) Integraloperator V ist hierbei gegeben durch

$$(V\phi)(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{U}(x-y)\phi(y) dy$$

mit $\mathbf{U}(x)$ der Fundamentallösung der Lamé-Gleichung. All dies ist Standard-Material und in [McL00, Ste08] zu finden.

Die Gleichung (1.7), bekannt als schwach singuläre Integralgleichung, liefert den Ausgangspunkt für den Numerik-Teil unserer Arbeit. In Abschnitt 4 befassen wir uns ausführlich mit Galerkin-BEM niedrigster Ordnung für (1.7), d.h. wir diskretisieren (1.7) mit stückweise konstanten Ansatz- und Testfunktionen. Wir diskutieren zunächst Approximationseigenschaften dieser diskreten Räume in $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ und die damit einhergehende a priori Abschätzung; dann wenden wir uns der a posteriori Fehlerschätzung zu und formulieren einen Algorithmus für adaptive BEM.

Zwei Fehlerschätzer für unser adaptives Verfahren analysieren wir in §4.2 im Detail: Den h - $h/2$ -Schätzer und den gewichteten Residualschätzer. Die Analysis ist an [FLP08] bzw. [CMS01] angelehnt; insbesondere reproduzieren wir die Hauptresultate dieser beiden Arbeiten, nämlich Effizienz des h - $h/2$ -Schätzers bzw. Zuverlässigkeit des Residualschätzers. Eine Besonderheit im Unterschied zu den genannten Arbeiten ist, dass wir auch alle benötigten Hilfsresultate selbst beweisen. Wir machen dabei systematisch Gebrauch von der Interpolationstheorie aus §2.3 und erhalten dadurch recht effiziente, transparente Beweise. Besonders hervorheben möchten wir Theorem 4.9 über die Lokalisierung der $H^s(\Gamma)$ -Norm für $s \in (0, 1)$. Die von uns adaptierte Beweistechnik stammt aus [CMS01] und benutzt die interpolierte $H^s(\Gamma)$ -Seminorm; da wir aber in §2.3 die gleichmäßige Äquivalenz der interpolierten und der Slobodeckij-Seminorm bewiesen haben, erhalten wir die

Lokalisierung auch für die Slobodeckij-Seminorm. Das Resultat in dieser zweiten, äquivalenten Form entstammt ursprünglich den Arbeiten [Fae00, Fae02], wurde dort allerdings mit einer komplett anderen Technik bewiesen.

In Abschnitt 5 geht es um die adaptive Kopplung von FEM und BEM. Zunächst führen wir ein neues Modellproblem aus der Elastizitätstheorie ein, für das sich FEM-BEM-Kopplung als numerisches Verfahren gut eignet: ein sogenanntes Transmissionsproblem, bei dem eine Funktion gesucht wird, welche die Lamé-Gleichung in Ω bzw. $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ mit verschiedenen Lamé-Konstanten löst. Wir leiten in §5.1 eine alternative Formulierung her, bei der die Gleichung im Außenraum durch eine Randintegralgleichung ersetzt wird: die Johnson-Nédélec-Kopplung. Um die Äquivalenz zur ursprünglichen Formulierung zu beweisen, benötigen wir einige Resultate im Zusammenhang mit einer Darstellungsformel analog zu (1.6) im Außenraum.

In §5.2 machen wir uns an die Analysis der diskretisierten Johnson-Nédélec-Kopplung. Es war bis vor Kurzem ungeklärt, ob dieses diskrete Problem überhaupt (eindeutig) lösbar ist; dies konnte in einer Reihe von Arbeiten beginnend mit [Say09] für die Laplace-Gleichung gezeigt werden. Zuletzt wurde in [FFKP12] das vorliegende Transmissionsproblem behandelt, wobei die Methode der impliziten Stabilisierung aus [AFF⁺13] für die Lamé-Gleichung adaptiert wurde. Wir geben im Wesentlichen den Beweis von [FFKP12] wieder. Schließlich definieren wir in §5.3 einen Fehlerschätzer und formulieren einen Algorithmus für die adaptive Umsetzung der Johnson-Nédélec-Kopplung. Dies beschließt den theoretischen Teil unserer Arbeit.

Die Hauptaufgabe der Diplomarbeit war jedoch praktischer Natur: Die Implementierung von adaptiver BEM und FEM-BEM-Kopplung für die Lamé-Gleichung in 2D. Das Ziel war eine Erweiterung der MATLAB-Programmbibliothek HILBERT [AEF⁺13], die davor auf Randwertprobleme für die Laplace-Gleichung beschränkt war. In Abschnitt 6 diskutieren wir diese Implementierung. Zunächst geben wir in §6.1 eine detaillierte Dokumentation der von uns entwickelten MATLAB-Funktionen für die adaptive Lösung von (1.7) mit BEM. In §6.2 beschreiben wir das genaue Vorgehen bei der Berechnung der Einträge der Galerkin-Matrix, welche durch Doppelintegrale der Form

$$\int_S \int_T \mathbf{U}(x - y) dx dy$$

gegeben sind. Wir zeigen, wie man diese Integrale exakt mit Hilfe analytischer Formeln auswerten kann und diskutieren wie sich vorgehen lässt, um numerische Instabilitäten bei der Auswertung zu umgehen. In §6.4 wenden wir uns der FEM-Implementierung der Lamé-Gleichung und allgemeiner elliptischer Systeme zu und präsentieren effizienten, kurzen und gut lesbaren MATLAB-Code im Stil von [FPW11]. Schließlich behandeln wir in §6.5 die Implementierung der FEM-BEM-Kopplung, wieder mit einer ausführlichen Dokumentation der von uns entwickelten Programme.

Der siebte und letzte Abschnitt dient der Präsentation unserer numerischen Ergebnisse. Wir betrachten Bilder unserer adaptiv verfeinerten Netze und der darauf berechneten diskreten Lösungen, diskutieren das Konvergenzverhalten unserer numerischen Verfahren anhand von Konvergenzplots und vergleichen dabei die Performance der in Abschnitt 4

und 5 formulierten adaptiven Algorithmen mit „naiver“ uniformer Netz-Verfeinerung. Wir gehen auch experimentell auf einige Feinheiten der Implementierung ein, wie die Wahl des Adaptivitätsparameters und die Verbesserung der Stabilität im Fall besonders starker Singularitäten der Lösung. Als Kuriosum bestimmen wir in §7.2.2 anhand empirischer Beobachtungen die *exakte* Lösung von $V\phi = \mathbf{g}$ auf Γ für eine spezielle Wahl der rechten Seite \mathbf{g} und $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$.

2 Funktionenräume

2.1 Sobolev-Räume

Wir rufen zu Beginn einige grundlegende Eigenschaften der für unsere Arbeit wichtigen Sobolev-Räume in Erinnerung. Im Folgenden bezeichne $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, stets ein Lipschitz-Gebiet mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Hierbei benutzen wir die Definition eines Lipschitz-Gebietes aus [McL00, Kapitel 3], welche im Wesentlichen besagt, dass sich Γ lokal als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion darstellen lässt. Wir setzen damit auch voraus, dass Ω offen und Γ kompakt ist, nicht jedoch dass Ω beschränkt oder zusammenhängend ist. Insbesondere ist mit Ω stets auch $\Omega' := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ ein Lipschitz-Gebiet.

Die L^2 -Skalarprodukte auf Ω bzw. Γ schreiben wir als

$$(u, v)_\Omega = \int_\Omega u(x)v(x) dx \quad \text{und} \quad (u, v)_\Gamma = \int_\Gamma u(x)v(x) dx,$$

wobei die Integration im zweiten Ausdruck bezüglich des Oberflächenmaßes geschieht. Da wir es oft mit vektorwertigen Funktionen zu tun haben, benutzen wir (für $X = \Omega, \Gamma$) die Notation

$$\mathbf{L}^2(X) = L^2(X)^n = \{\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)^T : u^i \in L^2(X) \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}.$$

Der Produktraum $\mathbf{L}^2(X)$ ist versehen mit dem Skalarprodukt

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_X = \sum_{i=1}^n (u^i, v^i)_X = \int_X \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx$$

und der dazugehörigen Norm $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(X)}^2 = (\cdot, \cdot)_X$. Wie üblich verstehen wir Ableitungen von L^2 -Funktionen im distributionellen Sinn.

Für die Definitionen der Sobolev-Räume $H^s(\Omega)$, $\tilde{H}^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$, und $H^s(\Gamma)$, $s \in [-1, 1]$, verweisen wir auf [McL00, Kapitel 3]. Wir führen hier nur einige Spezialfälle an, welche wir besonders häufig benötigen werden, und definieren Seminormen.

Definition 2.1. Sei $s \in (0, 1)$ und $X = \Omega, \Gamma$. Setze $k = n$ falls $X = \Omega$ und $k = n - 1$ falls $X = \Gamma$. Der Sobolev-Raum $H^s(X)$ ist gegeben durch

$$H^s(X) = \{u \in L^2(\Gamma) : |u|_{H^s(X)} < \infty\},$$

mit der *Slobodeckij-Seminorm*

$$|u|_{H^s(X)}^2 = \int_X \int_X \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{k+2s}} dx dy.$$

Für $s = 1$ und $X = \Omega$ setzen wir

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in \mathbf{L}^2(\Omega)\},$$

und

$$|u|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Wir versehen alle diese Räume mit der Norm

$$\|u\|_{H^s(X)}^2 = \|u\|_{L^2(X)}^2 + |u|_{H^s(X)}^2.$$

Für $s = 0$ setzen wir schließlich noch $H^0(X) = L^2(X)$.

Weiters definieren wir

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}$$

als Abschluss des Teilraumes $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ der glatten Funktionen mit kompaktem Träger in Ω . \square

Die Definition einer Seminorm für $H^1(\Gamma)$ werden wir in Abschnitt 2.1.2 nachholen. Bekanntermaßen können Sobolev-Räume mit negativem Index als topologische Dualräume charakterisiert werden. Der Einfachheit halber benutzen wir dies gleich als Definition.

Definition 2.2. Wir setzen

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{-s}(\Omega) &:= H^s(\Omega)^*, \quad s > 0, \\ H^{-s}(\Gamma) &:= H^s(\Gamma)^*, \quad s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

\square

Wie üblich fassen wir die duale Klammer als erweitertes L^2 -Skalarprodukt auf, definieren also beispielsweise für $u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ und $v \in H^{1/2}(\Gamma)$

$$(u, v)_\Gamma := (v, u)_\Gamma := u(v).$$

Diese Schreibweise ist insofern konsistent, als der $L^2(\Gamma)$ via $u \mapsto (u, \cdot)_\Gamma$ als Teilraum von $H^{-1/2}(\Gamma)$ aufgefasst werden kann. Die Einbettung ist außerdem dicht, sogar wenn man sie auf $H^{1/2}(\Gamma)$ einschränkt, wie das folgende abstrakte Lemma zeigt.

Lemma 2.3. *Seien H und L reelle Hilberträume mit stetiger Inklusion $H \subset L$. Dann ist die Abbildung*

$$J: H \rightarrow H^*, \quad u \mapsto (u, \cdot)_L$$

stetig mit dichtem Bild.

Beweis. Die Stetigkeit ist klar. Sei $\iota_H: H \rightarrow H^*$ der Isomorphismus aus dem Satz von Riesz-Fischer. Es reicht zu zeigen, dass $\iota_H^{-1}J: H \rightarrow H$ dichtes Bild hat. Diese Abbildung ist aber selbstadjungiert und positiv wegen

$$(\iota_H^{-1}Ju, v)_H = (Ju)(v) = (u, v)_L \quad \text{für alle } u, v \in H.$$

Es folgt $\text{ran}(\iota_H^{-1}J)^\perp = \ker(\iota_H^{-1}J) = \{0\}$ und daraus $\overline{\text{ran}(\iota_H^{-1}J)} = H$. \square

Schlussendlich treffen wir wieder die Konvention, fette Buchstaben für die vektorwertigen Versionen der eingeführten Räume zu verwenden:

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega)^n, \quad \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma)^n, \quad \text{usw.}$$

Diese Räume seien stets mit der kanonischen ℓ_2 -Produktraum-Norm versehen,

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^s(X)}^2 = \sum_{i=1}^n \|u^i\|_{H^s(X)}^2.$$

Die Bedeutung des Raumes $H^{1/2}(\Gamma)$ liegt in folgendem Satz.

Theorem 2.4 (Spursatz, [McL00, Theorem 3.37, Theorem 3.40]). *Definiere den Spuroperator $\gamma: C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow C^0(\Gamma)$ durch*

$$\gamma u := u|_{\Gamma}.$$

Dann hat γ eine eindeutige stetige und lineare Fortsetzung

$$\gamma: H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma),$$

und diese ist surjektiv mit einer stetigen Rechtsinversen. Weiters gilt $\ker \gamma = H_0^1(\Omega)$. \square

Wir erinnern daran, dass mit Ω auch $\Omega' = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ ein Lipschitz-Gebiet ist und daher ein Spuroperator $\gamma': H^1(\Omega') \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ für Ω' existiert. Wir nennen diesen aus naheliegenden Gründen den *äußeren Spuroperator* für Ω und schreiben dafür $\gamma^{\text{ext}} := \gamma'$. Falls die Unterscheidung wichtig ist, nennen wir entsprechend γ den *inneren Spuroperator* und schreiben $\gamma^{\text{int}} := \gamma$.

Es ist wünschenswert, einen äußeren Spuroperator nicht nur für globale $H^1(\Omega')$ -Funktionen in der Hand zu haben, sondern auch für solche, die nur in einer Umgebung außerhalb von Ω definiert sind. Dies wird im folgenden Lemma bewerkstelligt. Zuvor sei aus [McL00] daran erinnert, dass der Raum $H^1(\Omega)$ auch charakterisiert werden kann als

$$H^1(\Omega) = \{u|_{\Omega} : u \in H^1(\mathbb{R}^n)\}$$

mit der äquivalenten Norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \simeq \min_{U|_{\Omega}=u, U \in H^1(\mathbb{R}^n)} \|U\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Lemma 2.5 (Äußere Spur). *Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Gebiet mit $\bar{O} \subset O$. Dann wird durch*

$$\gamma_O^{\text{ext}}(u|_{O \cap \Omega'}) := \gamma^{\text{ext}}(u|_{\Omega'}) \quad \text{für } u \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

ein beschränkter Operator $\gamma_O^{\text{ext}}: H^1(O \cap \Omega') \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ wohldefiniert. Für $u \in H^1(O)$ stimmen äußere und innere Spur auf Γ überein, d.h.

$$\gamma_O^{\text{ext}} u = \gamma^{\text{int}} u.$$

Ist $O' \subset \mathbb{R}^n$ ein weiteres Lipschitz-Gebiet mit $\bar{O}' \subset O'$, so gilt

$$\gamma_O^{\text{ext}} = \gamma_{O'}^{\text{ext}} \quad \text{auf } H^1((O \cup O') \cap \Omega').$$

Beweis. Für die Wohldefiniertheit ist zu zeigen, dass aus $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ und $u|_{O \cap \Omega'} = 0$ schon $\gamma^{\text{ext}}(u|_{\Omega'}) = 0$ folgt. Dies folgt leicht aus der Charakterisierung

$$\{u \in H^1(\mathbb{R}^n) : u|_{O \cap \Omega'} = 0\} = \overline{\{u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : u|_{O \cap \Omega'} = 0\}}^{\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}}, \quad (2.1)$$

siehe [McL00, Theorem 3.29.(ii)]. Denn für glatte Funktionen mit $u|_{O \cap \Omega'} = 0$ gilt sicher $\gamma^{\text{ext}}(u|_{\Omega'}) = 0$, und wegen der Stetigkeit von $u \mapsto \gamma^{\text{ext}}(u|_{\Omega'})$ bezüglich $H^1(\mathbb{R}^n)$ überträgt sich diese Eigenschaft auf die rechte Seite von (2.1), also auf die linke Seite, was zu zeigen war. Für die Beschränktheit, sei $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Betrachte für $U \in H^1(\mathbb{R}^n)$ mit $U|_{O \cap \Omega'} = u|_{O \cap \Omega'}$ die Abschätzung

$$\|\gamma^{\text{ext}}(U|_{\Omega'})\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \|\gamma^{\text{ext}}\| \|U|_{\Omega'}\|_{H^1(\Omega')} \leq \|\gamma^{\text{ext}}\| \|U\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Nach dem bisher gezeigten hängt die linke Seite nicht von U ab, weshalb wir auf der rechten Seite zum Minimum über alle $U \in H^1(\mathbb{R}^n)$ mit $U|_{O \cap \Omega'} = u|_{O \cap \Omega'}$ übergehen können. Wir schließen

$$\|\gamma_O^{\text{ext}}(u|_{O \cap \Omega'})\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \|u|_{O \cap \Omega'}\|_{H^1(O \cap \Omega')},$$

also die Beschränktheit von γ_O^{ext} . Die Gleichheit von innerer und äußerer Spur für $u \in H^1(O)$ sowie die letzte Aussage folgen ganz ähnlich wegen der Dichtheit von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in $H^1(O)$ bzw. $H^1((O \cup O') \cap \Omega')$. \square

Falls Ω beschränkt ist, definieren wir den Raum

$$H_{\text{loc}}^1(\Omega') := \{u : \Omega' \rightarrow \mathbb{R} : u \in H^1(O \cap \Omega') \text{ für alle } O \supset \bar{\Omega} \text{ beschränkt, offen}\}.$$

Die Aussage $\gamma_O^{\text{ext}} = \gamma_{O'}^{\text{ext}}$ aus dem letzten Lemma besagt dann, dass wir durch $\gamma^{\text{ext}} := \gamma_O^{\text{ext}}$ einen einzigen Operator auf $H_{\text{loc}}^1(\Omega')$ definieren können, der

$$\|\gamma^{\text{ext}}u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C_O \|u\|_{H^1(O \cap \Omega')} \quad \text{für alle } u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega'), \quad O \supset \bar{\Omega} \text{ beschränkt, offen}$$

erfüllt. Dieser Operator ist offensichtlich eine Fortsetzung von $\gamma^{\text{ext}} : H^1(\Omega') \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$, was die Benutzung desselben Symbols rechtfertigt.

In Situationen, wo klar ist was gemeint ist, werden wir manchmal einfach u statt $\gamma^{\text{int}}u$ bzw. $\gamma^{\text{ext}}u$ schreiben. Für vektorwertige Funktionen $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)$ setzen wir

$$\gamma \mathbf{u} := (\gamma u^1, \dots, \gamma u^n)$$

und entsprechend $\gamma^{\text{int}} \mathbf{u}$ und $\gamma^{\text{ext}} \mathbf{u}$.

Ein weiterer wichtiger Satz über Sobolev-Räume ist der folgende.

Theorem 2.6 (Rellichscher Kompaktheitssatz, [McL00, Theorem 3.27],[HW08, Theorem 4.2.2]). *Die Inklusion $H^t(X) \subset H^s(X)$ für $s < t$ ist kompakt für alle $s, t \in \mathbb{R}$, falls $X = \Omega$, und für alle $s \in [-1, 1]$, falls $X = \Gamma$. \square*

Mit Hilfe des Rellich'schen Kompaktheitssatzes und des folgenden abstrakten Resultates werden wir eine allgemeine Version der Poincaré-Ungleichung beweisen.

Lemma 2.7 (Normäquivalenzsatz). *Seien H und L Banachräume und $T: H \rightarrow L$ ein kompakter Operator. Sei $\|\cdot\|_H^*$ eine zweite Norm auf H , sodass*

$$\|u\|_H \simeq \|Tu\|_L + \|u\|_H^*$$

für alle $u \in H$. Dann gilt sogar

$$\|u\|_H \simeq \|u\|_H^*.$$

Beweis. Zu zeigen ist $\|Tu\|_L \lesssim \|u\|_H^*$. Angenommen, es wäre das Gegenteil der Fall, dann existiert eine Folge (u_n) in H sodass $\|Tu_n\|_L = 1$ aber $\|u_n\|_H^* \rightarrow 0$. Da u_n in H beschränkt ist, liefert uns die Kompaktheit von T eine in L konvergente Teilfolge (Tu'_n) . Wegen

$$\|u'_n - u'_m\|_H \lesssim \|Tu'_n - Tu'_m\|_L + \|u'_n\|_H^* + \|u'_m\|_H^* \rightarrow 0$$

ist u'_n sogar eine Cauchy-Folge in H mit Limes u . Insbesondere gilt auch $u'_n \rightarrow u$ bezüglich $\|T \cdot\|_L$ und $\|\cdot\|_H^*$. Es folgt $\|Tu\|_L = 1$ und $\|u\|_H^* = 0$, ein Widerspruch. \square

Korollar 2.8 (Poincaré-Ungleichung). *Sei $X = \Omega, \Gamma$ beschränkt und $s \in (0, 1]$. Im Fall $s = 1$ sei X zusätzlich zusammenhängend. Dann gilt*

$$C^{-1}\|u\|_{H^s(X)} \leq \left| \int_X u \, dx \right| + |u|_{H^s(X)}. \quad (2.2)$$

Die Konstante $C > 0$ hängt nur von s und X ab.

Beweis. Wir sind in der Situation von Lemma 2.7 mit $H = H^s(X)$, $L = L^2(X)$, $T = \text{id}$ und

$$\|u\|_H^* = \left| \int_X u \, dx \right| + |u|_{H^s(X)}.$$

Für die Definitheit von $\|\cdot\|_H^*$ braucht man im Fall $s = 1$ Zusammenhang von X . \square

Bemerkung 2.9. Durch ein direktes Argument im Fall $s \in (0, 1)$ sieht man, dass die Konstante der Poincaré-Ungleichung eigentlich nicht von s abhängt. Im Fall $s = 1$ hat man $C^{-1} = \pi$ für konvexe Gebiete [PW60]. \square

Ein weiteres wichtiges Resultat, welches wir später benötigen und welches am besten in den abstrakten funktionalanalytischen Kontext passt, ist das bekannte *Lemma von Lax-Milgram*.

Lemma 2.10 (Lax-Milgram + Céa). *Sei H ein Hilbertraum und $b: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Bilinearform, die elliptisch ist, d.h. es gilt $b(u, u) \geq \beta\|u\|^2$ mit $\beta > 0$. Definiere $B \in L(H)$ durch*

$$(Bu, v) = b(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in H.$$

Für einen abgeschlossenen Teilraum $H_\ell \subset H$ mit Orthogonalprojektion Π_ℓ , definiere $B_\ell := \Pi_\ell B|_{H_\ell} \in L(H_\ell)$.

Dann sind B und B_ℓ invertierbar und es gilt $\|B_\ell^{-1}\| \leq C$. Sei $G_\ell := B_\ell^{-1}\Pi_\ell B: H \rightarrow H_\ell$ die Galerkin-Projektion. Für $u \in H$ und $u_\ell = G_\ell u$ gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_\ell\| \leq C' \inf_{v_\ell \in H_\ell} \|u - v_\ell\|.$$

Die Konstanten $C, C' > 0$ hängen nur von $\|B\|$ und β ab.

Beweis. Die Elliptizität zeigt, für $\varepsilon > 0$,

$$\|(1 - \varepsilon B)u\|^2 = \|u\|^2 - 2\varepsilon(Bu, u) + \varepsilon^2\|Bu\|^2 \leq (1 - 2\varepsilon\beta + \varepsilon^2\|B\|^2)\|u\|^2.$$

Damit folgt $\|1 - \varepsilon B\| < 1$ für ε hinreichend klein, also ist B invertierbar (Neumannsche Reihe). Dasselbe funktioniert für B_ℓ , und aus der Elliptizität folgt

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{\beta}(B_\ell u, u) \leq \frac{1}{\beta}\|B_\ell u\|\|u\| \quad \text{für alle } u \in H_\ell$$

nach Division von $\|u\|$ also $\|B_\ell^{-1}\| \leq \frac{1}{\beta}$. Für $u \in H$ und $u_\ell = G_\ell u$ gilt nach Konstruktion

$$\Pi_\ell B u_\ell = B_\ell u_\ell = \Pi_\ell B u,$$

also $B(u - u_\ell) \perp H_\ell$. Daraus folgt

$$\|u - u_\ell\|^2 \leq \frac{1}{\beta}(B(u - u_\ell), u - u_\ell) = \frac{1}{\beta}(B(u - u_\ell), u - v_\ell) \leq \frac{\|B\|}{\beta}\|u - u_\ell\|\|u - v_\ell\|$$

für alle $v_\ell \in H_\ell$, also die Behauptung nach Division von $\|u - u_\ell\|$. \square

2.1.1 Lipschitz-Funktionen

Wir nennen eine Funktion $\kappa: A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^k$, *Lipschitz-stetig*, falls eine Konstante $L \geq 0$ existiert, sodass

$$|\kappa(x) - \kappa(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in A. \quad (2.3)$$

Der Raum $\text{Lip}(A, \mathbb{R}^n)$ aller solchen Funktionen ist mit einer Seminorm versehen, nämlich

$$\text{Lip}(\kappa) := |\kappa|_{\text{Lip}(A, \mathbb{R}^n)} := \sup_{x \neq y \in A} \frac{|\kappa(x) - \kappa(y)|}{|x - y|}.$$

Offensichtlich ist $L = \text{Lip}(\kappa)$ die bestmögliche Konstante für (2.3).

Wir zitieren drei klassische Theoreme über Lipschitz-Funktionen.

Theorem 2.11 (Satz von Kirszbraun, [Fed69, Section 2.10.43]). Sei $\kappa: A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^k$, Lipschitz-stetig. Dann existiert ein Lipschitz-stetiges $\tilde{\kappa}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{\kappa}|_A = \kappa$ und

$$|\tilde{\kappa}|_{\text{Lip}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)} = |\kappa|_{\text{Lip}(A, \mathbb{R}^n)}.$$

□

Theorem 2.12 (Satz von Rademacher, [Eva98, Section 5.8.2.b]). Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen. Eine Lipschitz-stetige Abbildung $\kappa: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist fast überall differenzierbar. Außerdem ist die schwache Jacobi-Matrix $D\kappa$ in $L^\infty(U)^{n \times k}$ und stimmt fast überall mit der klassischen überein. □

Das nächste Theorem liefert eine Transformationsregel für Lipschitz-Funktionen. Wir erinnern hierfür an das k -dimensionale Hausdorff-Maß \mathcal{H}^k , $0 \leq k \leq n$, welches auf jeder Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ definiert ist und ein reguläres Borel-Maß ist. Für $k = n$ stimmt es mit dem Lebesgue-Maß überein. Für ein Lipschitz-stetiges $\kappa: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ definieren wir die *Jacobi-Determinante* fast überall durch $J\kappa(x) = (\det(D\kappa(x)^T D\kappa(x)))^{1/2}$. Der folgende Satz ist [EG92, Theorem 3.3.3.2] für den Spezialfall, das κ injektiv ist.

Theorem 2.13 (Flächenformel). Sei $1 \leq k \leq n$, $\kappa: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig, $A \subset \mathbb{R}^k$ messbar und $\kappa|_A$ injektiv. Dann ist auch $\kappa(A)$ messbar und es gilt

$$\mathcal{H}^k(\kappa(A)) = \int_A J\kappa(x) dx.$$

Für $u \in L^1(A)$ gilt $u^\kappa := u \circ \kappa^{-1} \in L^1(\kappa(A), \mathcal{H}^k)$ und

$$\int_{\kappa(A)} u^\kappa(y) d\mathcal{H}^k(y) = \int_A u(x) J\kappa(x) dx.$$

□

Des weiteren nennen wir $\kappa: A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^k$, *bi-Lipschitz*, falls κ injektiv ist und sowohl κ als auch seine Inverse $\kappa^{-1}: \kappa(A) \rightarrow A$ Lipschitz-stetig sind. Es gilt dann offensichtlich

$$\text{Lip}(\kappa^{-1})^{-1}|x - y| \leq |\kappa(x) - \kappa(y)| \leq \text{Lip}(\kappa)|x - y|. \quad (2.4)$$

Wir haben außerdem das folgende Hilfsresultat.

Lemma 2.14. Sei $k \leq n$, $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\kappa: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ bi-Lipschitz. Dann gilt, für fast alle $x \in U$,

$$\text{Lip}(\kappa^{-1})^{-1}|v| \leq |D\kappa(x)v| \leq \text{Lip}(\kappa)|v| \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^k, \quad (2.5)$$

und die Jacobi-Determinante erfüllt

$$\text{Lip}(\kappa^{-1})^{-k} \leq J\kappa(x) \leq \text{Lip}(\kappa)^k. \quad (2.6)$$

Insbesondere gilt für jede Teilmenge $A \subset U$

$$\text{Lip}(\kappa^{-1})^{-k}|A| \leq \mathcal{H}^k(\kappa(A)) \leq \text{Lip}(\kappa)^k|A|. \quad (2.7)$$

Beweis. Ist κ bei $x \in U$ differenzierbar, so gilt für $v \in \mathbb{R}^k$ und hinreichend kleine $h > 0$

$$\kappa(x + hv) = \kappa(x) + hD\kappa(x)v + o(h)$$

und damit

$$|D\kappa(x)v| = \frac{1}{h}|\kappa(x + hv) - \kappa(x)| + o(1) \leq \text{Lip}(\kappa)|v| + o(1).$$

Dies beweist die obere Ungleichung in (2.5), die untere folgt analog. Ist v ein Eigenvektor von $D\kappa(x)^T D\kappa(x)$ zum Eigenwert λ , folgt daraus

$$\text{Lip}(\kappa^{-1})^{-2} \leq \lambda = \frac{|D\kappa(x)v|^2}{|v|^2} \leq \text{Lip}(\kappa)^2.$$

Da $J\kappa(x)$ die Wurzel des Produktes der k Eigenwerte von $D\kappa(x)^T D\kappa(x) \in \mathbb{R}^k$ ist, folgt (2.6). Die Flächenformel zeigt schließlich (2.7). \square

Als nächstes betrachten wir eine Klasse von in \mathbb{R}^n eingebetteten Lipschitz-Flächen.

Definition 2.15. Sei $1 \leq k \leq n$. Wir nennen $M \subset \mathbb{R}^n$ eine *k-dimensionale Lipschitz-Fläche*, falls „fast ganz“ M lokal durch bi-Lipschitz-Einbettungen beschrieben wird, d.h. es gibt eine \mathcal{H}^k -Nullmenge $E \subset M$ und für jeden Punkt $x \in M \setminus E$ existieren $\mathcal{U}_x \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\kappa_x: \mathcal{U}_x \rightarrow M$ bi-Lipschitz, sodass $U(x) \cap M \subset \kappa_x(\mathcal{U}_x)$ für eine Umgebung $U(x)$ von x in \mathbb{R}^n .

Im Fall $E = \emptyset$ nennen wir M eine *k-dimensionale Lipschitz-Mannigfaltigkeit*.

Ist $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ offen, $y \in \mathcal{U}$ und $\kappa: \mathcal{U} \rightarrow M$ irgendeine bi-Lipschitz-Abbildung, so sagen wir, κ ist eine *Einbettung bei y*, falls $U(\kappa(y)) \cap M \subset \kappa(\mathcal{U})$ für eine Umgebung $U(\kappa(y))$ von $\kappa(y)$ in \mathbb{R}^n . \square

Bemerkung 2.16. Ein Beispiel für eine $(n-1)$ -dimensionale Lipschitz-Mannigfaltigkeit ist der Graph einer Lipschitz-Funktion $\varphi: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, denn offenbar ist $x \mapsto (x, \varphi(x))$ eine entsprechende bi-Lipschitz-Einbettung. Weitere Beispiele sind der Rand eines Lipschitz-Gebietes Γ ebenso wie jede offene Teilmenge $\Gamma_0 \subset \Gamma$. Andererseits werden durch die Ausnahme einer Nullmenge in Definition 2.15 auch Singularitäten verschiedenster Art in M zugelassen. Insbesondere deckt dies auch die in der Literatur üblichen Beispiele für „Nicht-Lipschitz-Ränder“ ab. Trotzdem ist, wie wir sehen werden, eine Lipschitz-Fläche schön genug, um darauf Differentialrechnung zu betreiben. \square

Der Begriff der „Einbettung bei y “ spielt nur im Fall von Lipschitz-Flächen mit Singularitäten eine Rolle. Für Lipschitz-Mannigfaltigkeiten ist diese Eigenschaft nämlich ohnehin immer erfüllt:

Lemma 2.17. *Ist M eine k-dimensionale Lipschitz-Mannigfaltigkeit, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\kappa: \mathcal{U} \rightarrow M$ bi-Lipschitz, so ist κ eine Einbettung bei jedem $y \in \mathcal{U}$. Mit anderen Worten: $\kappa(\mathcal{U})$ ist relativ offen in M .*

Beweis. Sei $x := \kappa(y)$ und wähle eine bi-Lipschitz-Abbildung $\kappa_x: \mathcal{U}_x \rightarrow M$ gemäß Definition 2.15, mit der dazugehörigen Umgebung $U(x) \cap M \subset \kappa_x(\mathcal{U}_x)$. Wir machen \mathcal{U} etwas kleiner, damit wir $\kappa_x^{-1} \circ \kappa$ betrachten können: sei $\mathcal{U}' := \kappa_x^{-1}(U(x)) \subset \mathcal{U}$. Es ist $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\kappa_x^{-1} \circ \kappa: \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}_x \subset \mathbb{R}^k$ eine stetige und injektive Abbildung. Nach dem bekannten (und hochgradig nichttrivialen) *Satz von der Invarianz des Gebietes* von Brouwer [Bro12] ist unter diesen beiden Voraussetzungen $\kappa_x^{-1} \circ \kappa(\mathcal{U}')$ ebenfalls offen, und enthält $z := \kappa_x^{-1} \circ \kappa(y)$ wegen $y \in \mathcal{U}'$. Nun wähle $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z) \subset \kappa_x^{-1} \circ \kappa(\mathcal{U}')$ und setze $L = \text{Lip}(\kappa_x^{-1})^{-1}$; weiters wähle $0 < \delta \leq \varepsilon L$ so klein dass $B_\delta(x) \subset U(x)$. Wir zeigen $B_\delta(x) \cap M \subset \kappa(\mathcal{U}')$ und damit die gewünschte Aussage. Sei daher $x' \in B_\delta(x) \cap M$. Wegen $B_\delta(x) \cap M \subset U(x) \cap M \subset \kappa_x(\mathcal{U}_x)$ können wir $x' = \kappa_x(z')$ schreiben, mit $z \in \mathcal{U}_x$. Es folgt

$$L|z - z'| \leq |\kappa_x(z) - \kappa_x(z')| = |x - x'| \leq \delta \leq \varepsilon L,$$

also $z' \in B_\varepsilon(z) \subset \kappa_x^{-1} \circ \kappa(\mathcal{U}')$ und damit $x' = \kappa_x(z') \in \kappa(\mathcal{U}')$, was zu zeigen war. \square

Um im nächsten Abschnitt den Oberflächengradienten auf M zu definieren, wird der Begriff der *Tangentialebene* von Nutzen sein. Die geometrische Anschauung einer Tangentialebene wird in der folgenden Definition in Eigenschaft (ii) widergespiegelt. Eigenschaft (i) ist eine „technische“ Bedingung, die sich als nützlich herausstellen wird, um die Eindeutigkeit von Tangentialebene und Oberflächengradient zu zeigen.

Definition 2.18. Sei $1 \leq k \leq n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in A$. Wir sagen, dass A bei x_0 eine *k-dimensionale Tangentialebene* hat, falls $V \subset \mathbb{R}^n$ ein k -dimensionaler Unterraum mit Orthogonalprojektion $P_V: \mathbb{R}^n \rightarrow V$ ist und die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt sind:
(i) Für jedes $v \in V$, $|v| = 1$, existiert eine Folge $(x_n) \subset A \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \rightarrow x_0$ und

$$\frac{x_n - x_0}{|x_n - x_0|} \rightarrow v.$$

(ii) Es gilt

$$x = x_0 + P_V(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad \text{für } x \rightarrow x_0, x \in A. \quad (2.8)$$

Wir schreiben in diesem Fall $T_{x_0}A := V$ und nennen $T_{x_0}A$ die *k-dimensionale Tangentialebene* an A bei x_0 . \square

Die Definition ist auf einen Beweis des nächsten Lemmas zugeschnitten, wir behaupten insbesondere nicht, dass sie für allgemeine Mengen A besonders viel geometrische Signifikanz hat.

Lemma 2.19. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in A$. Dann ist die Tangentialebene $T_{x_0}A$, falls sie existiert, eindeutig bestimmt. Ist M eine k -dimensionale Lipschitz-Fläche, so existiert $T_{x_0}M$ für \mathcal{H}^k -fast alle $x_0 \in M$. Wann immer eine bi-Lipschitz-Abbildung*

$$\kappa: \mathcal{U} \rightarrow M \quad \text{mit } \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k \text{ offen}$$

bei $y_0 \in \mathcal{U}$ differenzierbar und eine Einbettung ist, existiert $T_{x_0}M$ bei $x_0 = \kappa(y_0)$ und es gilt

$$T_{x_0}M = \text{span}(D\kappa(y_0)).$$

Beweis. Um die erste Aussage zu beweisen, nehmen wir an, es gäbe zwei Unterräume V und W mit den Eigenschaften aus Definition 2.18. Sei $v \in V$, $|v| = 1$. Für eine Folge $x_n \rightarrow x_0$ wie in (i) haben wir, nach (ii),

$$P_W \left(\frac{x_n - x_0}{|x_n - x_0|} \right) = \frac{x_n - x_0}{|x_n - x_0|} + o(1) \rightarrow v.$$

Wegen der Abgeschlossenheit von W folgt $v \in W$, also $V \subset W$ und aus Symmetriegründen $V = W$.

Für die zweite Aussage bemerken wir, dass M wegen der Separabilität von \mathbb{R}^n bis auf eine Nullmenge durch *abzählbar* viele Einbettungen überdeckt werden kann und es daher reicht, den Fall $M = \kappa(\mathcal{U})$ zu betrachten. Da κ fast überall in \mathcal{U} differenzierbar ist und nach (2.7) Lebesgue-Nullmengen auf \mathcal{H}^k -Nullmengen abbildet, bleibt nur mehr die dritte Aussage zu beweisen.

Ist κ bei $y_0 \in \mathcal{U}$ differenzierbar, so haben wir

$$\kappa(y) = \kappa(y_0) + D\kappa(y_0)(y - y_0) + o(|y - y_0|) \quad \text{für } y \rightarrow y_0. \quad (2.9)$$

Wir schreiben kurz $D\kappa$ für $D\kappa(y_0)$. Wegen (2.5) hat $D\kappa$ vollen Rang, also existiert die Linksinverse

$$D\kappa^\dagger := (D\kappa^T D\kappa)^{-1} D\kappa^T.$$

Multiplizieren wir (2.9) mit $D\kappa^\dagger$, folgt

$$y - y_0 = (D\kappa^\dagger)(\kappa(y) - \kappa(y_0)) + o(|y - y_0|) \quad (2.10)$$

und damit wiederum aus (2.9)

$$\kappa(y) = \kappa(y_0) + (D\kappa D\kappa^\dagger)(\kappa(y) - \kappa(y_0)) + o(|y - y_0|).$$

Weil κ eine Einbettung bei y_0 ist, können alle Punkte $x \in M$ hinreichend nahe bei y_0 als $x = \kappa(y)$ geschrieben werden. Wegen der bi-Lipschitz-Stetigkeit ist eine Funktion F daher genau dann in $o(|y - y_0|)$ für $y \rightarrow y_0$, wenn $F \circ \kappa^{-1}$ in $o(|x - \kappa(y_0)|)$ für $x \rightarrow \kappa(y_0)$ ist. Mit $x_0 = \kappa(y_0)$ haben wir also Bedingung (ii) aus Definition 2.18 erfüllt, falls wir nachweisen, dass $P := D\kappa D\kappa^\dagger$ tatsächlich die Orthogonalprojektion auf $\text{span}(D\kappa)$ ist. Dies folgt aber aus $P D\kappa = D\kappa$ und $P^T = P$. Für Bedingung (i), sei $y \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ und setze $x_n := \kappa(y_0 + h_n y)$ für hinreichend kleine $h_n > 0$, $h_n \rightarrow 0$. Dann besagt (2.9)

$$x_n - x_0 = h_n (D\kappa)y + o(h_n).$$

Daraus folgt

$$\frac{x_n - x_0}{|x_n - x_0|} \rightarrow \frac{(D\kappa)y}{|(D\kappa)y|}$$

und offenbar durchläuft die rechte Seite alle $v \in \text{span}(D\kappa)$ mit $|v| = 1$. \square

2.1.2 Der Oberflächengradient

Wir führen in diesem Unterabschnitt zunächst auf allgemeinen Lipschitz-Flächen M einen Oberflächengradienten (im klassischen Sinn) ein, der für Lipschitz-Funktionen fast überall wohldefiniert ist. Anschließend definieren wir Sobolev-Räume auf kompakten Lipschitz-Mannigfaltigkeiten und charakterisieren den $H^1(\Gamma)$ mit Hilfe einer geeigneten (schwachen) Erweiterung dieses Oberflächengradienten.

Der Grund für diese ausführliche Behandlung ist, dass wir eine solche in der zur Verfügung stehenden Literatur zu Randelementmethoden nicht finden konnten. Man findet beispielsweise in [BG01] eine Definition von ∇_Γ auf Lipschitz-Rändern durch Darstellung in lokalen Koordinaten, aber der Beweis, dass diese nicht von der Wahl der Einbettung abhängt, wird nur angedeutet. Dieselbe Definition findet man in [HW08, Abschnitt 3.4], inklusive einem Beweis, dass ∇_Γ für glatte Funktionen, welche im umgebenden Raum definiert sind, durch die Projektion des Gradienten auf die Tangentialebene gegeben ist – allerdings werden dort nur „hinreichend glatte“ Oberflächen behandelt.

Wir werden beide Charakterisierungen, jene in lokalen Koordinaten und jene als Projektion, im Setting von Lipschitz-Flächen beweisen. Als *Definition* benutzen wir allerdings einen dritten Zugang, welchen wir auf der Suche nach einem Analogon zur klassischen Definition von Differenzierbarkeit entwickelt haben. Der Vorteil der dritten Definition ist, dass sie a priori weder von konkreten Einbettungen noch von einer Fortsetzung der Funktion in den umgebenden Raum abhängt.

Schlussendlich erwähnen wir noch eine vierte mögliche Definition, die in [GMMM11] verwendet wird und ebenfalls in der Literatur zu Randelementmethoden nicht zu finden war. Sie würde sich meiner Meinung nach besonders gut zur Verwendung in Textbüchern eignen. Allerdings klappt sie nur für Lipschitz-Ränder und nicht für allgemeinere Lipschitz-Mannigfaltigkeiten.

Im Folgenden sei stets $1 \leq k \leq n$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Lipschitz-Fläche gemäß Definition 2.15. Außerdem sei $\text{Lip}(M) := \text{Lip}(M, \mathbb{R})$ der Raum der reellwertigen Lipschitz-stetigen Funktionen auf M .

Definition 2.20. Sei $x_0 \in M$ und $u: U(x_0) \cap M \rightarrow \mathbb{R}$ für eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 . Wir sagen, dass u bei x_0 *bezüglich M differenzierbar* ist, falls M bei x_0 eine Tangentialebene hat und ein $c \in T_{x_0}M$ existiert, sodass

$$u(x) = u(x_0) + \langle c, x - x_0 \rangle + o(|x - x_0|) \quad \text{für } x \rightarrow x_0, x \in M. \quad (2.11)$$

In diesem Fall schreiben wir $\nabla_M u(x_0) := c$. Die Funktion $\nabla_M u: x \mapsto \nabla_M u(x)$ nennen wir (wo sie definiert ist) den *Oberflächengradienten* von u . \square

Der Unterschied zur geläufigen Definition von Differenzierbarkeit besteht also darin, dass $\nabla_M u(x_0) \in T_{x_0}M$ verlangt wird, und $x \rightarrow x_0$ dafür nur in M laufen muss. Um den letzten Teil der Definition zu rechtfertigen, müssen wir noch zeigen:

Lemma 2.21. *Falls u bei x_0 bezüglich M differenzierbar ist, ist $\nabla_M u(x_0)$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $c, d \in T_{x_0}M$ zwei Vektoren mit (2.11) und sei $v \in T_{x_0}M$, $|v| = 1$. Für eine geeignete Folge $(x_n) \subset M$ mit $x_n \rightarrow x_0$ gilt dann

$$\langle c - d, v \rangle = \lim_n \left\langle c - d, \frac{x_n - x_0}{|x_n - x_0|} \right\rangle = 0,$$

wobei die zweite Gleichheit aus (2.11) folgt. Dies zeigt $c = d$. \square

Sei nun u in einer vollen Umgebung von x_0 definiert und im klassischen Sinn differenzierbar. Hat M bei x_0 eine Tangentialebene, gilt wegen (2.8) und der Selbstadjungiertheit von $P_{T_{x_0}M}$

$$\langle \nabla u(x_0), x - x_0 \rangle = \langle P_{T_{x_0}M} \nabla u(x_0), x - x_0 \rangle + o(|x - x_0|) \quad \text{für } x \rightarrow x_0, x \in M.$$

Dies zeigt insbesondere, dass $\nabla_M u = P_{T_{x_0}M} \nabla u$, d.h. der Oberflächengradient ist die Projektion von ∇u auf die Tangentialebene von M . Für $k = n - 1$ ist das orthogonale Komplement von $T_{x_0}M$ eindimensional. Ist \mathbf{n} dann einer der beiden Vektoren mit $\mathbf{n} \perp T_{x_0}M$ und $|\mathbf{n}| = 1$, so kann die Projektion als

$$P_{T_{x_0}M} = I - \mathbf{n}\mathbf{n}^T$$

geschrieben werden. Dies trifft natürlich im Speziellen auf den Fall zu, dass $M = \Gamma$ der Rand eines Lipschitz-Gebietes und \mathbf{n} der äußere Normalvektor bei x_0 ist. Wir notieren:

Lemma 2.22. *Sei $k = n - 1$, und sei $\mathbf{n}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $|\mathbf{n}(x)| = 1$ und $\mathbf{n}(x) \perp T_{x_0}M$ für \mathcal{H}^{n-1} -fast alle $x \in M$. Ist $u = U|_M$ für $U \in C^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt*

$$\nabla_M u = \nabla U - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla U) \quad \mathcal{H}^{n-1}\text{-f.ü. in } M.$$

Insbesondere hängt die rechte Seite nicht von der Wahl von $U \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $U|_M = u$ ab. \square

Das nächste Lemma gibt uns eine Darstellung von $\nabla_M u$ "in lokalen Koordinaten" und nebenbei eine teilweise Verallgemeinerung des Satzes von Rademacher.

Lemma 2.23. *Sei $u \in \text{Lip}(M)$. Dann ist u bei \mathcal{H}^k -fast allen $x \in M$ bezüglich M differenzierbar. Für eine bi-Lipschitz-Abbildung*

$$\kappa: \mathcal{U} \rightarrow M \quad \text{mit } \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k \text{ offen}$$

haben wir, wann immer κ und $u \circ \kappa$ bei $y_0 \in \mathcal{U}$ differenzierbar sind und κ eine Einbettung bei y_0 ist, die Darstellung

$$(\nabla_M u)(\kappa(y_0)) = (D\kappa^\dagger(y_0))^T \nabla(u \circ \kappa)(y_0)$$

mit $D\kappa^\dagger := (D\kappa^T D\kappa)^{-1} D\kappa^T$. Insbesondere gilt die Kettenregel

$$\nabla(u \circ \kappa) = (D\kappa)^T (\nabla_M u) \circ \kappa \quad \text{fast überall in } \mathcal{U}.$$

Beweis. Analog wie im Beweis von Lemma 2.19 folgt die erste Aussage aus der zweiten, da $u \circ \kappa \in \text{Lip}(\mathcal{U})$ fast überall differenzierbar ist. Ist dies bei $y_0 \in \mathcal{U}$ der Fall, haben wir

$$u \circ \kappa(y) = u \circ \kappa(y_0) + \langle \nabla(u \circ \kappa)(y_0), y - y_0 \rangle + o(|y - y_0|) \quad \text{für } y \rightarrow y_0.$$

Ist nun auch κ bei y_0 differenzierbar, können wir wieder (2.10) benutzen und erhalten

$$u \circ \kappa(y) = u \circ \kappa(y_0) + \left\langle \nabla(u \circ \kappa)(y_0), D\kappa^\dagger(y_0)(\kappa(y) - \kappa(y_0)) \right\rangle + o(|y - y_0|).$$

Bringen wir $D\kappa^\dagger(y_0)$ auf die andere Seite des Skalarproduktes, so sehen wir, dass

$$(D\kappa^\dagger(y_0))^T \nabla(u \circ \kappa)(y_0) \tag{2.12}$$

genau die definierende Bedingung (2.11) für den Oberflächengradienten bei $x_0 = \kappa(y_0)$ erfüllt (hier geht auch ein, dass κ eine Einbettung bei y_0 ist). Wegen $(D\kappa^\dagger)^T = D\kappa(D\kappa^T D\kappa)^{-1}$ liegt (2.12) tatsächlich in $T_{x_0}M$. \square

Durch das Hausdorff-Maß wird auf einer k -dimensionalen Lipschitz-Fläche der Hilbertraum $L^2(M) := L^2(M, \mathcal{H}^k)$ induziert. Nun lassen sich auf M via lokaler Karten auch Sobolev-Räume definieren, analog wie dies beispielsweise in [McL00] für Γ gemacht wird. Dies ist allerdings nur sinnvoll, falls M *überall* durch Einbettungen überdeckt wird, und die Konstruktion vereinfacht sich wesentlich, wenn M kompakt ist. *Von hier an sei daher M eine kompakte, k -dimensionale Lipschitz-Mannigfaltigkeit.*

Bemerkung 2.24. Auch wenn M nicht kompakt ist, gibt uns der Oberflächengradient theoretisch eine einfache Möglichkeit, den $H^1(M)$ zu definieren: Setze zunächst

$$\text{Lip}^1(M) := \{u \in \text{Lip}(M) : u, |\nabla_M u| \in L^2(M)\},$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{H^1(M)}^2 = \|u\|_{L^2(M)}^2 + \|\nabla_M u\|_{L^2(M)}^2 \quad \text{für } u \in \text{Lip}^1(M).$$

Nun definiere $H^1(M)$ als abstrakte Vervollständigung bezüglich dieser Norm:

$$H^1(M) := \overline{\text{Lip}^1(M)}^{\|\cdot\|_{H^1(M)}}.$$

Klarerweise gilt dann $H^1(M) \subset L^2(M)$, und ∇_M hat eine stetige Fortsetzung zum linearen Operator

$$\nabla_M : H^1(M) \rightarrow L^2(M).$$

Man macht es sich natürlich ein bisschen einfach, wenn man schon a priori voraussetzt, dass Lipschitz-Funktionen dicht in $H^1(M)$ sind. Für kompakte M werden wir diese Vorgehensweise aber rechtfertigen, indem wir die Dichtheit beweisen und zeigen, dass mit dem Oberflächengradienten eine äquivalente Norm definiert wird. \square

Die Kompaktheit stellt sicher, dass die Überdeckung $(\kappa_x(\mathcal{U}_x))_{x \in M}$ aus Definition 2.15 eine endliche Teilüberdeckung hat, d.h.

$$M = \bigcup_{j=1}^N \kappa_j(\mathcal{U}_j),$$

und die \mathcal{U}_j sind beschränkt. Wir könnten sogar annehmen, dass die \mathcal{U}_j alle gleich der Einheitskugel $B_1(0) \subset \mathbb{R}^k$ sind. Weiters existiert eine Zerlegung der Eins $(\varphi_j) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^N$, sodass jeweils $\varphi_j \geq 0$ und $\text{supp}(\varphi_j) \cap M \Subset \kappa_j(\mathcal{U}_j)$, und

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) \equiv 1 \quad \text{für alle } x \in M.$$

Der $L^2(M)$ ist dann isomorph in den Produktraum $\prod_j L^2(\mathcal{U}_j)$ eingebettet:

$$\|u\|_{L^2(M)}^2 \simeq \sum_j \|(\varphi_j u) \circ \kappa_j\|_{L^2(\mathcal{U}_j)}^2 \quad (2.13)$$

mit Konstanten abhängig von $(\mathcal{U}_j, \kappa_j, \varphi_j)$. Dies folgt unmittelbar mit Hilfe der Zerlegung der Eins, der Flächenformel und der Abschätzung der Jacobi-Determinante (2.6). Die Abschätzung von rechts nach links beispielsweise lautet

$$\sum_j \|(\varphi_j u) \circ \kappa_j\|_{L^2(\mathcal{U}_j)}^2 \lesssim \sum_j \|\varphi_j u\|_{L^2(\kappa(\mathcal{U}_j))}^2 \leq \sum_j \|u\|_{L^2(\kappa(\mathcal{U}_j))}^2 \leq N \|u\|_{L^2(M)}^2.$$

Wir könnten in der Summe in (2.13) statt der $L^2(\mathcal{U}_j)$ - auch die $L^2(\mathbb{R}^k)$ -Norm verwenden, wenn wir uns $(\varphi_j u) \circ \kappa_j$ mit 0 fortgesetzt denken. Dies wollen wir auch weiterhin implizit immer verwenden.

Definition 2.25. Sei $s \in [0, 1]$. Wir definieren den Sobolev-Raum $H^s(M)$ durch

$$u \in H^s(M) \iff (\varphi_j u) \circ \kappa_j \in \tilde{H}^s(\mathcal{U}_j) \subset H^s(\mathbb{R}^k) \quad \text{für alle } j = 1, \dots, N.$$

Wir versehen $H^s(M)$ mit der Norm

$$\|u\|_{H^s(M)}^2 = \sum_j \|(\varphi_j u) \circ \kappa_j\|_{H^s(\mathbb{R}^k)}^2.$$

Weiters definieren wir

$$H^{-s}(M) = (H^s(M))^*.$$

□

Eine andere Wahl der κ_j , \mathcal{U}_j und φ_j führt auf denselben Raum mit äquivalenter Norm. Dies folgt durch ein Standardargument wie im Fall $M = \Gamma$, aber das Spielziel ist nun, einen alternativen Beweis für $s = 1$ zu geben, indem wir $H^1(M)$ mit Hilfe des Oberflächengradienten charakterisieren. Ein erstes Zwischenresultat in diese Richtung ist, dass sich die $H^s(M)$ -Norm lokalisieren lässt.

Lemma 2.26. Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\kappa: \mathcal{U} \rightarrow M$ bi-Lipschitz und $u \in \tilde{H}^s(\mathcal{U})$, $s \in [0, 1]$. Bezeichne mit $u \circ \kappa^{-1}: M \rightarrow \mathbb{R}$ die Fortsetzung von $u \circ \kappa^{-1}: \kappa(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit 0. Dann folgt $u \circ \kappa^{-1} \in H^s(M)$ und

$$\|u \circ \kappa^{-1}\|_{H^s(M)} \leq C \|u\|_{\tilde{H}^s(\mathcal{U})}. \quad (2.14)$$

Die Konstante $C > 0$ hängt von s , \mathcal{U} , κ und der Familie $(\mathcal{U}_j, \kappa_j, \varphi_j)$ ab.

Beweis. Zu zeigen ist, dass für $j = 1, \dots, N$

$$\|(\varphi_j(u \circ \kappa^{-1})) \circ \kappa_j\|_{H^s(\mathbb{R}^k)} \lesssim \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^k)}.$$

Falls $\kappa_j(\mathcal{U}_j) \cap \kappa(\mathcal{U}) = \emptyset$ ist, gilt $\varphi_j(u \circ \kappa^{-1}) \equiv 0$ auf M und die Ungleichung ist trivialerweise erfüllt. Im Fall $\kappa_j(\mathcal{U}_j) \cap \kappa(\mathcal{U}) \neq \emptyset$ setzen wir $\kappa'_j := \kappa^{-1} \circ \kappa_j: \kappa_j^{-1}(\kappa_j(\mathcal{U}_j) \cap \kappa(\mathcal{U})) \rightarrow \mathcal{U}$ und $\varphi'_j := \varphi_j \circ \kappa: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß dem Satz von Kirszbraun zu Lipschitz-stetigen Funktionen κ'_j, φ'_j auf ganz \mathbb{R}^k fort. Wir haben dann

$$\begin{aligned} \|(\varphi_j(u \circ \kappa^{-1})) \circ \kappa_j\|_{H^s(\mathbb{R}^k)} &= \|(\varphi'_j u) \circ \kappa'_j\|_{H^s(\mathbb{R}^k)} \\ &\lesssim \|\varphi'_j u\|_{H^s(\mathbb{R}^k)} \\ &\lesssim \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^k)}. \end{aligned}$$

In der zweiten und dritten Zeile haben wir verwendet, dass $w \mapsto w \circ \kappa'_j$ beziehungsweise $w \mapsto \varphi'_j w$ stetige Operatoren von $H^s(\mathbb{R}^k)$ in sich selbst sind, siehe [Gri85, Lemma 1.3.3.1 und Theorem 1.4.1.1]. \square

Etwas struktureller betrachtet, impliziert das letzte Lemma, dass die natürliche Einbettung

$$\iota: H^s(M) \rightarrow \prod_j \tilde{H}^s(\mathcal{U}_j), \quad u \mapsto ((\varphi_j u) \circ \kappa_j)_j$$

eine *stetige Linksinverse* hat, nämlich

$$\rho: \prod_j \tilde{H}^s(\mathcal{U}_j) \rightarrow H^s(M), \quad (u_j)_j \mapsto \sum_j u_j \circ \kappa_j^{-1}.$$

Die Stetigkeit folgt aus (2.14), und in der Tat gilt

$$\rho \circ \iota(u) = \sum_j ((\varphi_j u) \circ \kappa_j) \circ \kappa_j^{-1} = \sum_j \varphi_j u = u.$$

Damit übertragen sich viele bekannte Eigenschaften der Räume $\tilde{H}^s(\mathcal{U}_j)$ unmittelbar auf $H^s(M)$. Die letzte Aussage im folgenden Lemma ist ein Vorgriff auf Abschnitt 2.3, wo wir (reelle) Interpolation von Räumen definieren.

Lemma 2.27. Sei $s \in [0, 1]$.

- (i) $H^s(M)$ ist vollständig.
- (ii) $\text{Lip}(M)$ ist dicht in $H^s(M)$.
- (iii) $(L^2(M), H^1(M))_s = H^s(M)$ für $s \in (0, 1)$, mit äquivalenten Normen.

Beweis. (i) Folgt aus $H^s(M) \simeq \prod_j \tilde{H}^s(\mathcal{U}_j)/\ker(\rho)$. (ii) Folgt, da der dichte Teilraum $\prod_j \mathcal{D}(\mathcal{U}_j)$ durch ρ nach $\text{Lip}(M)$ abgebildet wird. (iii) Folgt aus der entsprechenden Aussage für $\tilde{H}^s(\mathcal{U}_j)$ [McL, Theorem B9], Vertauschbarkeit von Produkt und Interpolation (Lemma 2.44) sowie der Stabilität von Interpolation bezüglich stetiger Projektionen, siehe [Kar12, Lemma 2.5]. \square

Wir kommen nun zum Oberflächengradienten auf $H^1(M)$. Nach Lemma 2.23 haben wir für $u \in \text{Lip}(M)$ die Darstellung

$$\nabla_M u = \sum_j \nabla_M(\varphi_j u) = \sum_j ((D\kappa_j^\dagger)^T \nabla(\varphi_j u \circ \kappa_j)) \circ \kappa_j^{-1}. \quad (2.15)$$

Wir können für $u \in H^1(M)$ den Oberflächengradienten durch (2.15) *definieren* (wenn wir ∇ im schwachen Sinn interpretieren). Mit (2.5) und (2.13) bekommt man die Abschätzung

$$\|\nabla_M u\|_{\mathbf{L}^2(M)} \lesssim \sum_j \|\nabla((\varphi_j u) \circ \kappa_j)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k)} \lesssim \|u\|_{H^1(M)}.$$

Für $u \in \text{Lip}(M)$ sieht man mit der Produktregel

$$\sum_j \|\nabla((\varphi_j u) \circ \kappa_j)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k)} \lesssim \|u\|_{L^2(M)} + \|\nabla_M u\|_{\mathbf{L}^2(M)}.$$

Da beide Seiten $\|\cdot\|_{H^1(M)}$ -stetig von u abhängen, gilt dies auch für $u \in H^1(M)$, und folglich

$$\|u\|_{H^1(M)} \simeq \|u\|_{L^2(M)} + \|\nabla_M u\|_{\mathbf{L}^2(M)}.$$

Die Konstanten hängen jeweils von der Familie $(\mathcal{U}_j, \kappa_j, \varphi_j)$ ab. Dies liefert uns die versprochene Charakterisierung von $H^1(M)$.

Theorem 2.28. *Die lineare Abbildung*

$$\nabla_M: H^1(M) \rightarrow \mathbf{L}^2(M)$$

gegeben durch (2.15) ist stetig, und $\nabla_M u$ hängt für $u \in H^1(M)$ nicht von $(\mathcal{U}_j, \kappa_j, \varphi_j)$ ab. Durch

$$\|u\|_{H^1(M)}^2 := \|u\|_{L^2(M)}^2 + \|\nabla_M u\|_{\mathbf{L}^2(M)}^2 \quad (2.16)$$

wird auf $H^1(M)$ eine neue, zur alten äquivalente Norm definiert, und wir haben die Charakterisierung

$$H^1(M) = \overline{\text{Lip}(M)}^{\|\cdot\|_{H^1(M)}},$$

welche nicht von $(\mathcal{U}_j, \kappa_j, \varphi_j)$ abhängt.

Beweis. Es ist nur mehr zu zeigen, dass $\nabla_M u$ unabhängig von $(\mathcal{U}_j, \kappa_j, \varphi_j)$ ist. Dies folgt aber aus Lemma 2.27.(ii), denn ∇_M ist einfach die stetige Fortsetzung des auf $\text{Lip}(M)$ durch Definition 2.20 charakterisierten Oberflächengradienten. \square

Wir können eine „hübschere“ Darstellung des Oberflächengradienten auch für Sobolev-Funktionen zeigen.

Lemma 2.29. *Sei $u \in H^1(M)$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\kappa: \mathcal{U} \rightarrow M$ bi-Lipschitz. Dann folgt $u \circ \kappa \in H^1(\mathcal{U})$ und die Kettenregel*

$$\nabla(u \circ \kappa) = (D\kappa)^T (\nabla_M u) \circ \kappa \quad \text{fast überall in } \mathcal{U}. \quad (2.17)$$

Es gilt $(\nabla_M u)(x) \in T_x M$ fast überall in M .

Beweis. Wir zeigen, dass $u \mapsto u \circ \kappa$ sogar eine *stetige* Abbildung $H^1(M) \rightarrow H^1(\mathcal{U})$ definiert. Dies sieht man mit Hilfe einer Überdeckung $(\mathcal{U}_j, \kappa_j, \varphi_j)$ von M und einer bereits bekannten Technik, nämlich der Fortsetzung von $\kappa'_j := \kappa_j^{-1} \circ \kappa: \kappa^{-1}(\kappa_j(\mathcal{U}_j) \cap \kappa(\mathcal{U})) \rightarrow \mathcal{U}_j$ zu einer Lipschitz-Funktion auf ganz \mathbb{R}^k , falls $\kappa_j(\mathcal{U}_j) \cap \kappa(\mathcal{U}) \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned} \|u \circ \kappa\|_{H^1(\mathcal{U})} &= \left\| \sum_{j: \kappa_j(\mathcal{U}_j) \cap \kappa(\mathcal{U}) \neq \emptyset} \underbrace{(\varphi_j u) \circ \kappa_j}_{\in H^1(\mathbb{R}^k)} \circ \underbrace{\kappa_j^{-1} \circ \kappa}_{\kappa'_j} \right\|_{H^1(\mathcal{U})} \\ &\leq \sum_{j: \kappa_j(\mathcal{U}_j) \cap \kappa(\mathcal{U}) \neq \emptyset} \|((\varphi_j u) \circ \kappa_j) \circ \kappa'_j\|_{H^1(\mathbb{R}^k)} \\ &\lesssim \sum_j \|(\varphi_j u) \circ \kappa_j\|_{H^1(\mathbb{R}^k)} \simeq \|u\|_{H^1(M)}. \end{aligned}$$

Die Kettenregel (2.17) folgt nun unmittelbar aus jener für $u \in \text{Lip}(M)$ (Lemma 2.23), da beide Seiten $H^1(M)$ -stetig von u abhängen. Genauso folgt $(\nabla_M u)(x) \in T_x M$ aus der für Lipschitz-Funktionen gültigen Identität

$$(\nabla_M u) \circ \kappa = D\kappa(D\kappa^T D\kappa)^{-1} \nabla(u \circ \kappa) \in \text{span}(D\kappa)$$

für beliebige Einbettungen κ . □

Wir lassen es uns nicht nehmen, noch eine weitere, sehr natürliche Charakterisierung des $H^1(M)$ zu notieren.

Korollar 2.30. *Es gilt*

$$u \in H^1(M) \iff u \circ \kappa \in H^1(\mathcal{U}) \text{ für alle } \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k \text{ offen und } \kappa: \mathcal{U} \rightarrow M \text{ bi-Lipschitz.}$$

Beweis. Die Hinrichtung ist Lemma 2.29 und die Rückrichtung folgt aus der Definition 2.25, indem man die \mathcal{U}_j hinreichend hübsch wählt um den Schluss

$$u \circ \kappa_j \in H^1(\mathcal{U}_j) \implies (\varphi_j u) \circ \kappa_j \in \tilde{H}^1(\mathcal{U}_j)$$

zuzulassen. □

Ähnlich kann man vorgehen, um $H^s(M)$ für $s \in (0, 1)$ mit Hilfe der Slobodeckij-Seminorm zu charakterisieren. Im nächsten Abschnitt werden wir keine dieser Charakterisierungen explizit benötigen, aber viel mit Seminormen auf einem (nicht kompakten) parametrisierten Flächenstück $\kappa(\mathcal{U})$ arbeiten, mit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\kappa: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ bi-Lipschitz. Wir *definieren* in diesem Fall - motiviert durch die Ergebnisse dieses Abschnittes - den Oberflächengradienten durch

$$\nabla_{\kappa(\mathcal{U})} u := ((D\kappa^\dagger)^T \nabla(u \circ \kappa)) \circ \kappa^{-1} \quad \text{für } u \circ \kappa \in H^1(\mathcal{U}).$$

Weiters definieren wir die Sobolev-Räume

$$H^s(\kappa(\mathcal{U})) := \{u \circ \kappa^{-1} : u \in H^s(\mathcal{U})\} \quad \text{für } s \in (0, 1]$$

und Seminormen für $u \in H^s(\kappa(\mathcal{U}))$ durch

$$|u|_{H^s(\kappa(\mathcal{U}))}^2 := \begin{cases} \int_{\kappa(\mathcal{U})} \int_{\kappa(\mathcal{U})} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{k+2s}} d\mathcal{H}^k(x) d\mathcal{H}^k(y), & s \in (0, 1), \\ \|\nabla_{\kappa(\mathcal{U})} u\|_{L^2(\kappa(\mathcal{U}))}^2, & s = 1. \end{cases} \quad (2.18)$$

Bemerkung 2.31 (Alternative Definition von ∇_Γ). Bei der Recherche habe ich in [GMMM11] eine besonders elegante Methode gefunden, den Oberflächengradienten zu definieren, falls $M = \Gamma$ der Rand eines Lipschitz-Gebietes Ω ist. Man verwendet dafür spezielle Differentialoperatoren erster Ordnung, nämlich

$$\tau_{jk} := n_j \partial_k - n_k \partial_j,$$

wo $\mathbf{n} = (n_j)$ der äußere Normalvektor ist, und $j, k = 1, \dots, n$. In [HW08] werden diese unter dem Namen *Günter derivatives* verwendet. Der springende Punkt ist, dass diese Ableitungen eine *partielle Integration auf Γ* erlauben: Für $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$(\tau_{jk} u, v)_\Gamma = -(u, \tau_{jk} v)_\Gamma. \quad (2.19)$$

Dies sieht man, indem man den Gaußschen Integralsatz anwendet und die Terme mit $\partial_j \partial_k - \partial_k \partial_j$ wegfällt lässt. Das bedeutet, dass man auch auf Γ eine distributionelle Ableitung einführen kann, beispielsweise für $u \in L^2(\Gamma)$ durch

$$(\tau_{jk} u, v)_\Gamma := -(u, \tau_{jk} v)_\Gamma \quad \text{für alle } v \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Man zeigt leicht, dass

$$\tau_{jk} : H^1(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$$

stetig ist, und via Dualität und Interpolation gilt dies sogar für

$$\tau_{jk} : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s-1}(\Gamma), \quad s \in [0, 1].$$

Nun setzen wir $\tau_j u := (\tau_{jk} u)_k = n_j \nabla u - \mathbf{n} \partial_j u$ und führen eine magische Rechnung durch:

$$\sum_j n_j \tau_j u = \sum_j n_j^2 \nabla u - \mathbf{n} (n_j \partial_j u) = \nabla u - \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \nabla u).$$

Das bedeutet, formal (oder für $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$) ist $\sum_j n_j \tau_j$ genau der Oberflächengradient! Für $u \in H^1(\Gamma)$ haben wir $\tau_j u \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$, und wegen $\mathbf{n} \in L^\infty(\Gamma)$ ist

$$\nabla_\Gamma u := \sum_j n_j \tau_j u \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$$

wohldefiniert, und darüber hinaus

$$\nabla_\Gamma: H^1(\Gamma) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma)$$

stetig. Man beachte, dass dies den Oberflächengradienten explizit und ganz ohne Rückgriff auf lokale Koordinaten definiert. Die Autoren in [GM08], [GMMM11] beweisen außerdem

$$H^s(\Gamma) = \{u \in H^{s-1}(\Gamma): \tau_{jk} u \in H^s(\Gamma) \text{ für alle } j, k = 1, \dots, n\}$$

für $s \in [0, 1]$, mit den dazugehörigen Norm-Abschätzungen.

Ich habe für meine Untersuchung des Oberflächengradienten einen anderen Zugang gewählt, weil ich den Gaußschen Integralsatz nicht benötigen wollte. Es wäre aber interessant zu verstehen, ob (oder warum nicht) eine Formel für partielle Integration wie (2.19) auf beliebigen Lipschitz-Mannigfaltigkeiten gilt. \square

2.2 Triangulierungen und diskrete Räume

In diesem kurzen Abschnitt etablieren wir einige Notationen im Zusammenhang mit den diskreten Ansatzräumen, welche wir für die BEM verwenden. Wir bezeichnen hier stets mit Γ den Rand eines Lipschitz-Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Außerdem setzen wir voraus, dass Ω ein Polyeder ist, d.h. Γ ist stückweise flach. Ein Ω mit diesen beiden Eigenschaften nennen wir auch einen *Lipschitz-Polyeder*. Wir führen nun den Begriff einer Triangulierung auf Γ ein.

Definition 2.32. Wir nennen \mathcal{T}_ℓ eine *Triangulierung* auf Γ , falls \mathcal{T}_ℓ eine endliche Menge mit den folgenden Eigenschaften ist:

- (i) Die Elemente $T \in \mathcal{T}_\ell$ sind kompakte, nicht-degenerierte, $(n-1)$ -dimensionale Simplexes.
- (ii) $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_\ell} T = \Gamma$.
- (iii) Für $T, T' \in \mathcal{T}_\ell$ mit $T \neq T'$ ist der Schnitt $T \cap T'$ entweder leer, ein gemeinsamer Eckpunkt oder eine gemeinsame Kante. \square

Manchmal nennen wir eine Triangulierung auch *Gitter* oder *Netz*. Wir bezeichnen mit $\chi_T: \Gamma \rightarrow \{0, 1\}$ die charakteristische Funktion von $T \in \mathcal{T}_\ell$ und definieren den Raum der stückweise konstanten Polynome

$$\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell) := \text{span}\{\chi_T: T \in \mathcal{T}_\ell\}.$$

Offenbar gilt $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell) \subset L^\infty(\Gamma)$. Für jedes $T \in \mathcal{T}_\ell$ definieren wir den *Durchmesser*

$$h_T := \text{diam}(T) = \max_{x, y \in T} |x - y|.$$

Die *lokale Netzweite* einer Triangulierung \mathcal{T}_ℓ sei gegeben durch

$$h_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell), \quad h_\ell|_T := h_T \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_\ell.$$

Assoziiert mit einer Triangulierung \mathcal{T}_ℓ ist außerdem die Menge der Knoten

$$\mathcal{N}_\ell := \{z \in \Gamma : z \text{ ist Eckpunkt von einem } T \in \mathcal{T}_\ell\}.$$

Für jeden Knoten $z \in \mathcal{N}_\ell$ definieren wir den *Patch* ω_z als jene relativ offene Teilmenge von Γ , für die

$$\overline{\omega_z} = \bigcup \{T \in \mathcal{T}_\ell : z \in T\}$$

erfüllt ist. Die *Hutfunktion* $\eta_z : \Gamma \rightarrow [0, 1]$ sei jene eindeutige Funktion, deren Einschränkung $\eta_z|_T$ auf allen $T \in \mathcal{T}_\ell$ affin ist und die

$$\eta_z(z') = \delta_{z,z'} \quad \text{für alle } z \in \mathcal{N}_\ell$$

erfüllt. Offenbar gilt $\text{supp}(\eta_z) = \overline{\omega_z}$ und $\eta_z \in \text{Lip}(\Gamma)$. Man sieht auch leicht, dass für $n = 3$

$$|\nabla_\Gamma \eta_z(x)| = \frac{1}{h_{z,T}} \quad \text{für alle } x \in T \in \mathcal{T}_\ell \text{ mit } T \subset \overline{\omega_z}, \quad (2.20)$$

wobei $h_{z,T}$ die Höhe auf die gegenüber von z liegende Kante von T bezeichnet. Im Fall $n = 2$ reduziert sich dies auf

$$|\nabla_\Gamma \eta_z(x)| = \quad \text{für alle } x \in T \in \mathcal{T}_\ell \text{ mit } T \subset \overline{\omega_z}$$

Die Hutfunktionen spannen den Raum der stetigen, stückweise affinen Polynome auf:

$$\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell) := \text{span}\{\eta_z : z \in \mathcal{N}_\ell\}.$$

2.2.1 Formregularität

Wir besprechen nun das Konzept einer formregulären Triangulierung, zunächst für den Fall $n = 3$. Für ein Element $T \in \mathcal{T}_\ell$ bezeichnen wir mit $|T|$ die Fläche. Wir definieren die *Formregularitätskonstante*

$$\gamma_\ell := \sup_{T \in \mathcal{T}_\ell} \frac{h_T^2}{|T|} \quad (2.21)$$

und nennen eine Folge von Netzen $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ *γ -formregulär*, falls $\gamma_\ell \leq \gamma < \infty$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ gilt. Die gleichmäßige Schranke $\gamma_\ell \leq \gamma$ hat einige weitere Konsequenzen:

- Sei $T \in \mathcal{T}_\ell$. Da für jede Kante e von T die Abschätzung $2|T| \leq |e|h_T$ gilt, folgt

$$\frac{h_T}{|e|} \leq \frac{h_T^2}{2|T|} \leq \frac{\gamma}{2}.$$

- Haben $T, T' \in \mathcal{T}_\ell$ eine gemeinsame Kante e , so folgt

$$\frac{h_T}{h_{T'}} \leq \frac{h_T}{|e|} \leq \frac{\gamma}{2}.$$

Iteriert man diese Abschätzung, folgt

$$\frac{h_T}{h_{T'}} \leq \left(\frac{\gamma}{2}\right)^K \quad (2.22)$$

falls T und T' über $K - 1$ weitere Dreiecke mit paarweise gemeinsamen Kanten benachbart sind.

- Sei ρ_T der Inkreisradius und U_T der Umfang von T . Nach einer klassischen Formel gilt

$$\rho_T = \frac{2|T|}{U_T} \geq \frac{2|T|}{3h_T} \geq \frac{2}{3\gamma}h_T.$$

- Sei e eine Kante von T und h_e die zugehörige Höhe. Wir haben

$$h_e = \frac{2|T|}{|e|} \geq \frac{2}{\gamma}h_T. \quad (2.23)$$

- Wir können auch eine untere Schranke für den kleinsten Innenwinkel φ von T angeben. Elementare Geometrie zeigt, für jene Kante e von T mit $|e| = h_T$,

$$\varphi \geq \sin \varphi \geq \frac{h_e}{h_T} \geq \frac{2}{\gamma}.$$

- Sei $z \in \mathcal{N}_\ell$, und sei $N_z := \#\{T \in \mathcal{T}_\ell : z \in T\}$ die Anzahl der Dreiecke, welche in $\overline{\omega_z}$ liegen. Falls der Patch ω_z flach ist, haben wir für den kleinsten Innenwinkel φ dieser Dreiecke die Abschätzung $\frac{2}{\gamma} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{N_z}$. Daraus folgt

$$N_z \leq \pi\gamma.$$

Allgemeiner hat man eine Abschätzung für die Winkelsumme $\varphi N_z \leq C_\Gamma$ mit einer nur von (der Krümmung von) Γ abhängigen Konstante $C_\Gamma \geq 0$; denn die Winkelsumme hängt nicht vom konkreten Netz \mathcal{T}_ℓ ab sondern nur von den endlich vielen Winkeln, in denen sich die Seitenflächen des Polyeders Γ berühren. Analog folgt dann

$$N_z \leq \frac{C_\Gamma \gamma}{2}. \quad (2.24)$$

- Ist $z \in \mathcal{N}_\ell$, und liegen T und T' beide in $\overline{\omega_z}$, sind sie über höchstens $N_z/2 - 1$ weitere Dreiecke mit paarweise gemeinsamen Kanten benachbart. Aus (2.24) und (2.22) folgt

$$\sup \left\{ \frac{h_T}{h_{T'}} : T, T' \in \mathcal{T}_\ell, z \in T \cap T' \right\} \leq \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{C_\Gamma \gamma}{4}}.$$

Dies ist eine Schranke für das Verhältnis der Durchmesser zweier benachbarter Elemente.

- Für den Durchmesser von ω_z gilt offenbar $\text{diam}(\omega_z) \leq 2 \sup\{h_{T'} : z \in T', T' \in \mathcal{T}_\ell\}$. Wir folgern für jedes $T \in \mathcal{T}_\ell$ mit $z \in T$ die Schranke

$$\text{diam}(\omega_z) \leq 2 \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{c_{\Gamma}\gamma}{4}} h_T. \quad (2.25)$$

- Für den Gradienten der Hutfunktion η_z haben wir nach (2.20) und (2.23)

$$|\nabla_{\Gamma}\eta_z(x)| \leq \frac{\gamma}{2} h_T^{-1} \quad \text{für alle } x \in T \in \mathcal{T}_\ell \text{ mit } T \subset \overline{\omega_z}.$$

Mit (2.25) schließen wir

$$\|\nabla_{\Gamma}\eta_z\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq \gamma \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{c_{\Gamma}\gamma}{4}} \text{diam}(\omega_z)^{-1}.$$

In weiterer Folge werden wir diese Abschätzungen nicht mehr explizit angeben, sondern das Symbol \lesssim benutzen und schreiben, dass die Konstanten *von der Formregularität von \mathcal{T}_ℓ abhängen*.

Im Fall $n = 2$ definieren wir die Formregularitätskonstante ein bisschen anders, nämlich als

$$\gamma_\ell := \sup \left\{ \frac{h_T}{h_{T'}} : T, T' \in \mathcal{T}_\ell, T \cap T' \neq \emptyset \right\}. \quad (2.26)$$

Die meisten zuvor für 3D gegebenen Abschätzungen machen in 2D keinen Sinn mehr oder vereinfachen sich beträchtlich. So haben wir beispielsweise

$$\text{diam}(\omega_z) \leq (1 + \gamma)h_T \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_\ell, z \in T \cap \mathcal{N}_\ell.$$

Entsprechend folgt

$$\|\nabla_{\Gamma}\eta_z\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq (1 + \gamma)\text{diam}(\omega_z)^{-1}.$$

2.2.2 Krumme Ränder

Im nächsten Abschnitt werden wir auch mit triangulierten Flächen zu tun haben, welche nicht Polyeder-förmig sind, also mit gekrümmten Randelementen. Diese definieren wir analog zum stückweise flachen Fall.

Definition 2.33. Sei $n = 2, 3$, $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Gebiet und $\tilde{\Gamma} = \partial\tilde{\Omega}$. Wir nennen \mathcal{T}_ℓ eine *Triangulierung* auf $\tilde{\Gamma}$, falls \mathcal{T}_ℓ eine endliche Menge mit den folgenden Eigenschaften ist:

- (i) Die Elemente $T \in \mathcal{T}_\ell$ sind kompakte Teilmengen $T \subset \tilde{\Gamma}$ und es existiert $\varphi_T : T \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ bi-Lipschitz, sodass $\varphi_T(T)$ ein nicht-degenerierter, $(n - 1)$ -dimensionaler Simplex ist.
- (ii) $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_\ell} T = \tilde{\Gamma}$.
- (iii) Für $T, T' \in \mathcal{T}_\ell$ mit $T \neq T'$ ist der Schnitt $T \cap T'$ entweder leer, ein gemeinsamer Eckpunkt oder eine gemeinsame Kante. \square

Als Eckpunkte und Kanten von T bezeichnen wir hier natürlich die Urbilder $\varphi_T^{-1}(z)$ und $\varphi_T^{-1}(e)$ der Eckpunkte z und Kanten e von $\varphi_T(T)$. Wie oben definieren wir für eine Triangulierung \mathcal{T}_ℓ die Knotenmenge \mathcal{N}_ℓ , die Patches ω_z , die stückweise Konstanten $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$, die lokale Netzweite $h_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ mit $h_\ell|_T := h_T := \text{diam}(T)$, die Fläche $|T| := \mathcal{H}^{n-1}(T)$ und die Formregularitätskonstante γ_ℓ . Wir benützen auch wieder die Sprechweisen γ -formregulär bzw. von der Formregularität abhängig.

Wir schreiben $\mathcal{T}_k < \mathcal{T}_\ell$, falls \mathcal{T}_k und \mathcal{T}_ℓ Gitter auf $\tilde{\Gamma}$ sind und \mathcal{T}_ℓ durch Verfeinerung von \mathcal{T}_k entsteht. Wir werden nun eine Annahme an \mathcal{T}_0 formulieren.

Definition 2.34 (Annahme A). Wir sagen, dass eine Triangulierung \mathcal{T}_0 auf $\tilde{\Gamma}$ Annahme A erfüllt, falls für jeden Patch ω_z , $z \in \mathcal{N}_0$ eine bi-Lipschitz-Abbildung $\varphi_z: \overline{\omega_z} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ existiert, sodass $\varphi_z(T)$ für jedes $T \in \mathcal{T}_0$ mit $z \in T$ ein $(n-1)$ -dimensionaler Simplex ist. \square

In manchen Situationen könnte diese Annahme beispielsweise bedeuten, dass das Start-Gitter hinreichend fein ist. Für Polyeder ist sie allerdings *immer* erfüllt.

Lemma 2.35. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Polyeder mit Rand Γ . Dann erfüllt jede Triangulierung \mathcal{T}_0 auf Γ Annahme A. Die Lipschitz-Konstanten der Abbildungen φ_z , $z \in \mathcal{N}_0$ hängen nur von Γ ab.

Beweis. Sei $z \in \mathcal{N}_0$. Da Γ lokal ein Lipschitz-Graph ist, gibt es eine Einbettung $\kappa: U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \Gamma$ mit $z \in \kappa(U)$ von der Form $\kappa(x) = \beta \circ (x, \zeta(x))$, mit $\zeta \in \text{Lip}(U)$ und $\beta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ affin und isometrisch. Wir können $\kappa(U) \subset \omega_z$ annehmen, und wollen nun zeigen, dass κ^{-1} eine Fortsetzung auf $\overline{\omega_z}$ mit den Eigenschaften von φ_z aus Annahme A hat. Dafür können wir auch $z = 0$, $\kappa(0) = 0$ und $\beta = \text{id}$ annehmen. Wir beobachten, dass der Patch ω_z dann die folgende Eigenschaft hat:

$$\{\lambda x: x \in \overline{\omega_z}, \lambda \in [0, 1]\} =: [0, 1]\overline{\omega_z} \subset \overline{\omega_z},$$

und es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $[0, \varepsilon]\overline{\omega_z} \subset \kappa(U)$. Offensichtlich ist $\kappa^{-1}|_{[0, \varepsilon]\overline{\omega_z} \cap T}: (x, \zeta(x)) \mapsto x$ für jedes $T \in \mathcal{T}_0$, $z \in T$ affin und erfüllt daher $\kappa^{-1}(\lambda \varepsilon x) = \lambda \kappa^{-1}(\varepsilon x)$ für $x \in \overline{\omega_z}$, $\delta \in [0, 1]$. Damit können wir $\kappa^{-1}|_{[0, \varepsilon]\overline{\omega_z}}$ wohldefiniert nach $\overline{\omega_z}$ fortsetzen durch

$$\varphi_z(x) := \frac{1}{\varepsilon} \kappa^{-1}(\varepsilon x) \quad \text{für alle } x \in \overline{\omega_z}.$$

Diese Fortsetzung ist bi-Lipschitz mit denselben Konstanten wie $\kappa^{-1}|_{[0, \varepsilon]\overline{\omega_z}}$, wegen

$$\frac{|\varphi_z(x) - \varphi_z(y)|}{|x - y|} = \frac{|\kappa^{-1}(\varepsilon x) - \kappa^{-1}(\varepsilon y)|}{\varepsilon|x - y|}.$$

Diese hängen also nur von κ und damit von Γ ab. Außerdem ist $\varphi_z|_T$ für jedes $T \in \mathcal{T}_0$, $z \in T$ affin und bildet daher T auf einen Simplex ab. \square

Die Konsequenz aus Annahme A, welche wir später benötigen, ist, dass sich alle Patches *aller* Gitter $\mathcal{T}_\ell > \mathcal{T}_0$ mit den Abbildungen φ_z , $z \in \mathcal{N}_0$ bi-Lipschitz-stetig auf Patches in \mathbb{R}^{n-1} abbilden lassen – die Lipschitz-Konstanten hängen also nur von der Start-Triangulierung \mathcal{T}_0 ab (bzw. nur von Γ im Fall von Polyedern).

Lemma 2.36. *Seien $\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_0$ Gitter auf $\tilde{\Gamma}$ mit $\mathcal{T}_\ell > \mathcal{T}_0$. Für jeden Knoten $z \in \mathcal{N}_\ell$ gibt es einen Knoten $z^* \in \mathcal{N}_0$, sodass $\overline{\omega_z} \subset \overline{\omega_{z^*,0}}$, wobei $\omega_{z^*,0}$ der Patch von z^* bezüglich \mathcal{T}_0 ist.*

Der Beweis des Lemmas ist klar, wenn man die drei Fälle unterscheidet, dass z im Inneren eines $T \in \mathcal{T}_0$ liegt, oder auf einer Kante, oder $z \in \mathcal{N}_0$. Wir überspringen die Details.

Bemerkung 2.37. Für die FEM-BEM-Kopplung werden wir später auch Triangulierungen von Ω benötigen. Diese lassen sich ganz analog zu Triangulierungen auf Γ definieren, indem man beispielsweise in Definition 2.32 einfach Γ durch Ω und $(n-1)$ durch n ersetzt und in Punkt (iii) zusätzlich erlaubt, dass sich zwei Elemente in einer gemeinsamen Seitenfläche schneiden. \square

2.3 Interpolationsräume

Man kann Sobolev-Räume mit gebrochenem Index auch via Interpolation charakterisieren. Dies erlaubt es beispielsweise, Abschätzungen im schwerer fassbaren $H^{1/2}(\Gamma)$ zu beweisen, indem man sie auf analoge Abschätzungen in den leicht zu handhabenden $L^2(\Gamma)$ und $H^1(\Gamma)$ zurückführt. Wir werden dies u.a. in Abschnitt 4.1.1 für den Beweis der Zuverlässigkeit des Residualschätzers benötigen und geben aus diesem Grund eine Einführung in Interpolationsräume. Die Standardreferenz zu diesem Thema ist [BL76].

Im genannten Werk werden hauptsächlich normierte Räume betrachtet. Interpolation ist aber in meinen Augen in ihrem allgemeinsten Sinn einfach eine Methode, um aus zwei gegebenen Ungleichungen eine dritte, „dazwischenliegende“ Ungleichung abzuleiten. Um dies zu demonstrieren, werde ich zunächst in §1 eine drastisch verallgemeinerte Version des klassischen Interpolationssatzes [BL76, Theorem 3.1.2] beweisen. Daran anschließend diskutieren wir Interpolation von Seminormen und charakterisieren in §2 die $H^{1/2}$ -Seminorm mittels Interpolation zwischen der H^1 - und einer L^2 -Seminorm.

In den folgenden Abschnitten §3 und §4 untersuchen wir, wie sich die Sobolev-Seminormen unter Lipschitz-Transformation des Gebietes verhalten und beweisen, davon ausgehend, ein unserem Wissen nach neues Resultat über die gleichmäßige Äquivalenz der Seminormen auf Patches. In §5 rekapitulieren wir die benutzte Beweistechnik und folgern eine Poincaré-Ungleichung für Patches.

2.3.1 Der Interpolationssatz

Das abstrakte Setting sieht wie folgt aus: Gegeben seien zwei Mengen A_0 und A_1 und eine surjektive Abbildung $+: A_0 \times A_1 \rightarrow A_0 + A_1$ in eine dritte Menge $A_0 + A_1$. Weiters seien $a_0: A_0 \rightarrow [0, \infty]$, $a_1: A_1 \rightarrow [0, \infty]$ zwei beliebige Abbildungen in die positive Halbachse inklusive ∞ (man denke etwa an Normen). Dann definieren wir für jedes $s \in (0, 1)$ die interpolierte Abbildung $I_s(\cdot; a_0, a_1)$ auf $A_0 + A_1$ durch

$$I_s(f; a_0, a_1) = K_s \left(\int_0^\infty \inf_{f=f_0+f_1} (a_0(f_0)^2 + t^2 a_1(f_1)^2) t^{-2s} \frac{dt}{t} \right)^{1/2}.$$

Das Infimum erstreckt sich hierbei über alle Darstellungen $f = f_0 + f_1$ mit $f_0 \in A_0$ und $f_1 \in A_1$. Weiters ist $K_s > 0$ eine Konstante, deren Wert wir zunächst unbestimmt lassen. Man beachte, dass das Integral divergieren kann, also

$$I_s(\cdot; a_0, a_1): A_0 + A_1 \rightarrow [0, \infty].$$

Wir zeigen nun unter diesen Voraussetzungen den Interpolationssatz. Beachte, dass wenn wir ∞ auf einer Seite einer Ungleichung erlauben, wir natürlich die Konvention $\infty \leq \infty$ sowie $c \leq \infty$ für $c \in \mathbb{R}$ benutzen.

Theorem 2.38 (Interpolationssatz). *Seien A_0, A_1, a_0, a_1 wie zuvor und $b_0, b_1: A_0, A_1 \rightarrow [0, \infty]$ zwei weitere Abbildungen. Wir setzen*

$$a_s = I_s(\cdot; a_0, a_1), \quad b_s = I_s(\cdot; b_0, b_1) \quad \text{für alle } s \in (0, 1).$$

Gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} b_0(f) &\leq C_0 a_0(f) \quad \text{für alle } f \in A_0, \\ b_1(f) &\leq C_1 a_1(f) \quad \text{für alle } f \in A_1, \end{aligned}$$

mit Konstanten $C_0, C_1 > 0$, so folgt auch die interpolierte Ungleichung

$$b_s(f) \leq C_0^{1-s} C_1^s a_s(f) \quad \text{für alle } f \in A_0 + A_1.$$

Beweis. Wir schätzen einfach ab und benützen die Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} K_s^{-2} b_s(f)^2 &= \int_0^\infty \inf_{f=f_0+f_1} (b_0(f_0)^2 + t^2 b_1(f_1)^2) t^{-2s} \frac{dt}{t} \\ &\leq \int_0^\infty \inf_{f=f_0+f_1} (C_0^2 a_0(f_0)^2 + t^2 C_1^2 a_1(f_1)^2) t^{-2s} \frac{dt}{t} \\ &= C_0^2 \int_0^\infty \inf_{f=f_0+f_1} \left(a_0(f_0)^2 + t^2 \left(\frac{C_1}{C_0} \right)^2 a_1(f_1)^2 \right) t^{-2s} \frac{dt}{t} \\ &= C_0^2 \left(\frac{C_0}{C_1} \right)^{-2s} \int_0^\infty \inf_{f=f_0+f_1} (a_0(f_0)^2 + t^2 a_1(f_1)^2) t^{-2s} \frac{dt}{t} \\ &= K_s^{-2} (C_0^{1-s} C_1^s)^2 a_s(f)^2. \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir die Substitution $t \rightarrow (C_0/C_1)t$ angewandt und ausgenutzt, dass das Maß $\frac{dt}{t}$ invariant unter dieser Transformation ist. \square

Bemerkung 2.39. Wie aus dem Beweis ersichtlich ist, benötigt der Satz nur die folgenden zwei Eigenschaften des Interpolationsfunktional $I_s(\cdot; \cdot, \cdot)$. Erstens, Monotonie

$$a_0 \leq b_0, \quad a_1 \leq b_1 \quad \text{impliziert} \quad I_s(\cdot; a_0, a_1) \leq I_s(\cdot; b_0, b_1),$$

und zweitens exakte Interpolation von Konstanten,

$$I_s(\cdot; C_0 a_0, C_1 a_1) = C_0^{1-s} C_1^s I_s(\cdot; a_0, a_1).$$

\square

Wir geben nun ein konkreteres Beispiel, wie Theorem 2.38 angewandt werden kann. Seien $(A_0, \|\cdot\|_{A_0})$ und $(A_1, \|\cdot\|_{A_1})$ seminormierte Räume mit Einbettung $A_1 \subset A_0$, und $+$ sei die normale Vektorraumaddition, d.h. in diesem Fall gilt $A_0 + A_1 = A_0$. Nun seien $(B_0, \|\cdot\|_{B_0})$ und $(B_1, \|\cdot\|_{B_1})$ zwei weitere Räume mit denselben Eigenschaften und $T : A_0 \rightarrow B_0$ ein linearer Operator, der den Ungleichungen

$$\|Tf\|_{B_i} \leq C_i \|f\|_{A_i} \quad \text{für alle } f \in A_i \text{ und } i = 0, 1 \quad (2.27)$$

genügt. Damit erfüllen

$$b_i(f) = \|Tf\|_{B_i} \quad \text{und} \quad a_i(f) = \|f\|_{A_i} \quad \text{für } i = 0, 1,$$

die Voraussetzungen des Interpolationssatzes. Wir schreiben die interpolierte Abbildung nun in der üblichen Form

$$\|f\|_{(A_0, A_1)_s} := I_s(f; \|\cdot\|_{A_0}, \|\cdot\|_{A_1}) \quad \text{für alle } f \in A_0.$$

Lemma 2.40. *Seien $A_1 \subset A_0$ seminormierte Räume. Dann hat $\|\cdot\|_{(A_0, A_1)_s}$ auf A_0 alle Eigenschaften einer Seminorm außer möglicherweise $\|\cdot\|_{(A_0, A_1)_s} < \infty$.*

Beweis. Seien $f, g \in A_0$. Für jede Zerlegung $f = f_0 + f_1$ und $g = g_0 + g_1$ gilt

$$\begin{aligned} \inf_{f+g=h_0+h_1} (\|h_0\|_{A_0}^2 + t^2 \|h_1\|_{A_1}^2)^{1/2} &\leq (\|f_0 + g_0\|_{A_0}^2 + t^2 \|f_1 + g_1\|_{A_1}^2)^{1/2} \\ &\leq (\|f_0\|_{A_0}^2 + t^2 \|f_1\|_{A_1}^2)^{1/2} + (\|g_0\|_{A_0}^2 + t^2 \|g_1\|_{A_1}^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Nehmen wir rechts das Infimum, sehen wir, dass die Abbildung

$$f \mapsto \inf_{f=f_0+f_1} (\|f_0\|_{A_0}^2 + t^2 \|f_1\|_{A_1}^2)^{1/2}$$

die Dreiecksungleichung erfüllt. Genauso sieht man die Homogenität. Beide Eigenschaften übertragen sich auf $\|\cdot\|_{(A_0, A_1)_s}$, da $(\int_0^\infty |\cdot|^2 t^{-2s} \frac{dt}{t})^{1/2}$ eine L^2 -Norm ist. \square

Das folgende Lemma zeigt außerdem

$$\|Tf\|_{(B_0, B_1)_s} = I_s(Tf; \|\cdot\|_{B_0}, \|\cdot\|_{B_1}) \leq I_s(f; \|T\cdot\|_{B_0}, \|T\cdot\|_{B_1}),$$

wieder im etwas abstrakteren Setting.

Lemma 2.41. *Seien $A_1 \subset A_0$, $B_1 \subset B_0$ Vektorräume und $T : A_0 \rightarrow B_0$ linear. Für beliebige Abbildungen $c_0, c_1 : B_0, B_1 \rightarrow [0, \infty]$ gilt*

$$I_s(Tf; c_0, c_1) \leq I_s(f; c_0(T\cdot), c_1(T\cdot)) \quad \text{für alle } f \in A_0.$$

Ist T zusätzlich surjektiv im Sinne von $T(A_0) = B_0$ und $T(A_1) = B_1$, gilt Gleichheit.

Beweis. Für $f \in A_0$ gilt die Mengeninklusion

$$\{(g_0, g_1): Tf = g_0 + g_1, g_0 \in B_0, g_1 \in B_1\} \supset \{(Tf_0, Tf_1): f = f_0 + f_1, f_0 \in A_0, f_1 \in A_1\}.$$

Daher ist das Infimum über die linke Menge kleiner:

$$\inf_{Tf=g_0+g_1} (c_0(g_0)^2 + t^2 c_1(g_1)^2) \leq \inf_{f=f_0+f_1} (c_0(Tf_0)^2 + t^2 c_1(Tf_1)^2).$$

Falls T surjektiv ist, sind die Mengen sogar gleich: Für jedes Paar $(g_0, g_1) = (T\tilde{f}_0, T\tilde{f}_1)$ aus der linken Menge gilt $T\tilde{f}_0 = Tf - T\tilde{f}_1 = T(f - \tilde{f}_1)$. Also ist $(g_0, g_1) = (T(f - \tilde{f}_1), T\tilde{f}_1)$ in der rechten Menge. \square

Anschließend an die Diskussion vor Lemma 2.40 gibt uns der Interpolationssatz bzw. Bemerkung 2.39 nun das Folgende.

Korollar 2.42. *Seien $A_1 \subset A_0$ und $B_1 \subset B_0$ seminormierte Räume, und der lineare Operator $T: A_0 \rightarrow B_0$ erfülle (2.27). Dann gilt auch*

$$\|Tf\|_{(B_0, B_1)_s} \leq C_0^{1-s} C_1^s \|f\|_{(A_0, A_1)_s} \quad \text{für alle } f \in A_0. \quad (2.28)$$

Erfüllt T andererseits $\|Tf\|_{B_i} \geq C_i \|f\|_{A_i}$ für $f \in A_i$ und $i = 0, 1$, und zusätzlich $T(A_0) = B_0$ und $T(A_1) = B_1$, dann gilt

$$\|Tf\|_{(B_0, B_1)_s} \geq C_0^{1-s} C_1^s \|f\|_{(A_0, A_1)_s} \quad \text{für alle } f \in A_0.$$

\square

Der erste Teil dieser Aussage ist gerade der klassische Interpolationssatz [BL76, Theorem 3.1.2], verallgemeinert auf Seminormen. Der zweite Teil ist im Fall von Normen redundant, weil man aus den unteren Abschätzungen für T die Injektivität und damit Existenz einer Inversen folgern kann, für die man wiederum den ersten Teil anwenden kann.

Jenen Teilraum von A_0 , für den die rechte Seite in (2.28) endlich ist, bezeichnet man als *Interpolationsraum*, geschrieben

$$(A_0, A_1)_s = \{f \in A_0: \|f\|_{(A_0, A_1)_s} < \infty\}.$$

Nach Lemma 2.40 wird also $(A_0, A_1)_s$ mit $\|\cdot\|_{(A_0, A_1)_s}$ wieder ein seminormierter Raum. Das folgende Lemma zeigt $A_1 \subset (A_0, A_1)_s \subset A_0$.

Lemma 2.43 (Interpolationsabschätzung). *Seien $A_1 \subset A_0$ seminormierte Räume. Dann gilt*

$$\|f\|_{(A_0, A_1)_s} \leq \frac{K_s}{\sqrt{2s(1-s)}} \|f\|_{A_0}^{1-s} \|f\|_{A_1}^s \quad \text{für alle } f \in A_1. \quad (2.29)$$

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass im Fall $f \in A_1$ gilt

$$\inf_{f=f_0+f_1} (\|f_0\|_{A_0}^2 + t^2\|f_1\|_{A_1}^2) \leq \min(\|f\|_{A_0}, t\|f\|_{A_1})^2.$$

Insbesondere können wir $\|f\|_{A_0} > 0$ voraussetzen. Es folgt

$$\begin{aligned} \|f\|_{(A_0, A_1)_s}^2 &\leq K_s^2 \int_0^\infty \min(\|f\|_{A_0}, t\|f\|_{A_1})^2 t^{-2s} \frac{dt}{t} \\ &= K_s^2 \|f\|_{A_0}^2 \int_0^\infty \min\left(1, t \frac{\|f\|_{A_1}}{\|f\|_{A_0}}\right)^2 t^{-2s} \frac{dt}{t} \\ &= K_s^2 (\|f\|_{A_0}^{1-s} \|f\|_{A_1}^s)^2 \int_0^\infty \min(1, t)^2 t^{-2s} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir wieder Substitution benutzt. Die einfache Rechnung

$$\int_0^\infty \min(1, t)^2 t^{-2s} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2s(1-s)}$$

ergibt nun die Conclusio. □

Das nächste Lemma besagt, dass Interpolation und das Bilden von Produkträumen vertauschbar sind. Wir versehen dabei einen Produktraum immer mit der ℓ_2 -Produkt-Seminorm.

Lemma 2.44. *Seien $X_1^i \subset X_0^i$ seminormierte Räume für $i = 1, \dots, N$. Dann gilt*

$$\left(\prod_i X_0^i, \prod_i X_1^i \right)_s = \prod_i (X_0^i, X_1^i)_s$$

mit Gleichheit der Seminormen.

Beweis. Zu zeigen ist nur die Gleichheit der Seminormen. Wir haben

$$\begin{aligned} \|(f^i)_i\|_{(\prod_i X_0^i, \prod_i X_1^i)_s}^2 &= K_s^2 \int_0^\infty \inf_{(f^i)=(f_0^i)+(f_1^i)} \left(\sum_i \|f_0^i\|_{X_0^i}^2 + t^2 \|f_1^i\|_{X_1^i}^2 \right) t^{-2s} \frac{dt}{t}, \\ \|(f^i)_i\|_{\prod_i (X_0^i, X_1^i)_s}^2 &= K_s^2 \sum_i \int_0^\infty \inf_{f^i=f_0^i+f_1^i} \left(\|f_0^i\|_{X_0^i}^2 + t^2 \|f_1^i\|_{X_1^i}^2 \right) t^{-2s} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Die Frage ist also, ob Summe und Infimum vertauschen. Die Antwort lautet ja, weil die Zerlegungen $f^i = f_0^i + f_1^i$ unabhängig voneinander gewählt werden können. □

Abschließend besprechen wir die Wahl der Konstanten $K_s > 0$. Diese macht offenbar für die bisherigen Ergebnisse keinen Unterschied, es gibt aber eine sehr natürliche Wahl, wie das nächste Lemma zeigt.

Lemma 2.45. Sei $(A, \|\cdot\|_A)$ ein seminormierter Raum, und setze im Interpolationsfunktional

$$K_s := \left(\frac{2}{\pi} \sin(\pi s)\right)^{1/2}.$$

Dann gilt

$$\|\cdot\|_{(A,A)_s} = \|\cdot\|_A.$$

Beweis. Sei $f \in A$. Wir zeigen zuerst

$$\inf_{f=f_0+f_1} (\|f_0\|_A^2 + t^2\|f_1\|_A^2) = \frac{t^2}{1+t^2} \|f\|_A^2. \quad (2.30)$$

Einerseits wird der Wert auf der rechten Seite für die Wahl $f_0 = t^2(1+t^2)^{-1}f$ und $f_1 = (1+t^2)^{-1}f$ angenommen. Andererseits zeigt die Youngsche Ungleichung für $f = f_0 + f_1$

$$\frac{t^2}{1+t^2} \|f\|_A^2 \leq \frac{t^2}{1+t^2} ((1+t^{-2})\|f_0\|_A^2 + (1+t^2)\|f_1\|_A^2) = \|f_0\|_A^2 + t^2\|f_1\|_A^2$$

und damit die Behauptung. Nun berechnen wir

$$\|f\|_{(A,A)_s}^2 = \|f\|_A^2 K_s^2 \int_0^\infty \frac{t^{1-2s}}{1+t^2} dt.$$

Die Identität

$$\int_0^\infty \frac{t^{1-2s}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2 \sin(\pi s)}$$

kann laut [McL, Exercise B.5] mit dem Residuensatz gezeigt werden. \square

Von nun an benutzen wir immer die Wahl von K_s aus dem letzten Lemma.

Bemerkung 2.46. Elementare Rechnung zeigt, dass $s \mapsto \frac{\sin(\pi s)}{\pi s(1-s)}$ zu einer stetigen Funktion auf $[0, 1]$ fortsetzbar ist, die bei $s = 1/2$ ihren maximalen Wert $\frac{4}{\pi}$ annimmt. Man bekommt daher mit der neuen Wahl von K_s in (2.29) eine Interpolationsabschätzung, die nicht von s abhängt:

$$\|f\|_{(A_0, A_1)_s} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \|f\|_{A_0}^{1-s} \|f\|_{A_1}^s, \quad f \in A_1.$$

\square

2.3.2 Sobolev-Räume als Interpolationsräume

Wir haben gesehen, dass der Interpolationssatz eine elementare Aussage ist, die direkt aus der Definition des Interpolationsfunktionals $I_s(\cdot; \cdot, \cdot)$ folgt und nicht einmal die Eigenschaften einer Norm benötigt. Die eigentliche Herausforderung in der Interpolationstheorie ist also das Charakterisieren der Interpolationsräume $(A_0, A_1)_s$ bzw. der zugehörigen (Semi-)Normen $\|\cdot\|_{(A_0, A_1)_s}$. Im Fall von Sobolev-Räumen ist dies schon lange gelungen, und es ist allgemein bekannt, dass (mit Äquivalenz der Normen)

$$(L^2(X), H^1(X))_s = H^s(X), \quad s \in (0, 1), \quad (2.31)$$

für $X = \Omega$ oder $X = \Gamma$, wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und Γ ein Lipschitz-Rand ist. Siehe [McL00, Theorem B.8 und B.11] für Beweise. Analoge Aussagen gelten für Sobolev-Räume beliebiger Ordnung und deren Dualräume. Uns interessiert aber besonders der Fall $s = 1/2$, weil wir damit eine neue Charakterisierung des Spurraumes $H^{1/2}(\Gamma)$ erhalten.

Unser Hauptresultat in diesem Abschnitt ist eine Verallgemeinerung von (2.31) auf Sobolev-Seminormen. Zunächst aber beweisen wir (2.31) für den Fall $X = \mathbb{R}^n$; dies ergibt sich mehr oder weniger als Nebenprodukt der Interpolation von gewichteten L^2 -Normen, welche wir später noch mehrmals benötigen werden.

Ist (Ω, μ) ein messbarer Raum und $w: \Omega \rightarrow (0, \infty)$ eine messbare, positive Gewichtsfunktion, setzen wir $L^2(w) := L^2(\Omega, w d\mu)$. Die zugehörige Norm ist

$$\|f\|_{L^2(w)}^2 = \int_{\Omega} w|f|^2 d\mu.$$

Im nächsten Satz hat man im Allgemeinen *keine* Inklusion $A_1 \subset A_0$; die Norm $\|\cdot\|_{(A_0, A_1)_s}$ und der Interpolationsraum $(A_0, A_1)_s$ können aber natürlich genauso wie bisher definiert werden.

Theorem 2.47 (Interpolation gewichteter L^2 -Räume). *Sei (Ω, μ) ein messbarer Raum und $w_0, w_1: \Omega \rightarrow (0, \infty)$ messbar. Dann gilt*

$$(L^2(w_0), L^2(w_1))_s = L^2(w_0^{1-s} w_1^s)$$

mit gleichen Normen.

Beweis. Sei $f \in L^2(w_0) + L^2(w_1)$. Genauso wie (2.30) zeigt man

$$\inf_{f=f_0+f_1} \left(\int_{\Omega} w_0|f_0|^2 d\mu + t^2 \int_{\Omega} w_1|f_1|^2 d\mu \right) = \int_{\Omega} \frac{w_0 w_1 t^2}{w_0 + w_1 t^2} |f|^2 d\mu.$$

Integration über $\int_0^{-\infty} (\cdot) t^{-2s} \frac{dt}{t}$, Vertauschung der Integrationsreihenfolge und Substitution zeigen dann

$$\begin{aligned} \|f\|_{(L^2(w_0), L^2(w_1))_s}^2 &= K_s^2 \int_{\Omega} w_0 |f|^2 \int_0^{\infty} \frac{w_1 t^{1-2s}}{1 + \frac{w_1}{w_0} t^2} dt d\mu \\ &= \int_{\Omega} w_0^{1-s} w_1^s |f|^2 d\mu. \end{aligned}$$

Gilt andererseits $f \in L^2(w_0^{1-s} w_1^s)$, folgt mit demselben Argument $f \in (L^2(w_0), L^2(w_1))_s$. \square

Ein unmittelbares Korollar ist die Charakterisierung von Sobolevräumen auf \mathbb{R}^n mittels Interpolation, wiederum mit Gleichheit der Normen. Wir erinnern hier daran, dass wir die Sobolev-Norm wie in [McL00] mittels Bessel-Potential definieren:

$$\|u\|_{H^t(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + |\cdot|^2)^{t/2} \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \quad (2.32)$$

Die Definition der Fouriertransformation wird in Abschnitt 3.3 nachgeholt.

Korollar 2.48. Für $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ und $s \in (0, 1)$ gilt

$$(H^{t_0}(\mathbb{R}^n), H^{t_1}(\mathbb{R}^n))_s = H^{(1-s)t_0 + st_1}(\mathbb{R}^n)$$

mit gleichen Normen.

Beweis. Setze $t = (1-s)t_0 + st_1$ und $w_i(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{t_i}$ für $i = 0, 1$. Nun ist (2.32) eine gewichtete L^2 -Norm von \widehat{u} mit Gewichtsfunktion $w(\xi) := (1 + |\xi|^2)^t = w_0(\xi)^{1-s}w_1(\xi)^s$. Da die Fouriertransformation

$$\widehat{(\cdot)}: H^{t_i}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(w_i), \quad i = 0, 1$$

per Definition ein Isomorphismus ist, folgt mit Theorem 2.47 und Lemma 2.41

$$\|u\|_{H^t(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{u}\|_{L^2(w)} = \|\widehat{u}\|_{(L^2(w_0), L^2(w_1))_s} = \|u\|_{(H^{t_0}(\mathbb{R}^n), H^{t_1}(\mathbb{R}^n))_s}.$$

Dies ist die Behauptung. □

Unser nächstes Ziel ist es, wie angekündigt, die Aussage (2.31), welche sich auf die *Normen* der Räume bezieht, auch für entsprechende Seminormen zu beweisen. Wir benutzen dabei die Seminormen $|\cdot|_{H^s(X)}$, $s \in (0, 1]$ aus Definition 2.1 bzw. $|\cdot|_{H^1(\Gamma)} = \|\nabla_\Gamma(\cdot)\|_{L^2(\Gamma)}$. Unter der Annahme, dass $1 \in L^2(X)$, führen wir außerdem eine Seminorm auf $L^2(X)$ ein:

$$|u|_{L^2(X)} = \|u - \bar{u}\|_{L^2(X)}$$

mit dem Mittelwert $\bar{u} = |X|^{-1} \int_X u \, dx$, auch bekannt als die L^2 -Orthogonalprojektion von u auf die Konstanten:

$$\begin{aligned} P: L^2(X) &\rightarrow \text{span}\{1\} \\ u &\mapsto \bar{u} \end{aligned}$$

Es gilt also $|u|_{L^2(X)} = \|(I - P)u\|_{L^2(X)}$. Wegen der Poincaré-Ungleichung (2.2) gilt Ähnliches für H^1 und H^s , nämlich

$$|u|_{H^s(X)} \simeq \|(I - P)u\|_{H^s(X)} \quad \text{für alle } s \in (0, 1], \quad (2.33)$$

mit Konstanten, die nur von s und X abhängen. (Wobei wir für den Fall $s = 1$ annehmen müssen, dass X zusammenhängend ist.) Beachte auch dass alle drei Seminormen auf den Konstanten verschwinden. Wir sind nun in der Lage, unser Wunschresultat zu beweisen, nämlich dass wir die H^s -Seminorm als Interpolation der L^2 - und H^1 -Seminorm erhalten. Der Übersichtlichkeit halber lassen wir das X in Klammern manchmal weg.

Theorem 2.49 (Interpolation von Sobolev-Seminormen). *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen oder der Rand eines Lipschitz-Gebietes, und jedenfalls zusammenhängend. Definiere für $s \in (0, 1)$ die interpolierte Seminorm*

$$|u|_{(L^2, H^1)_s} := I_s(u; |\cdot|_{L^2}, |\cdot|_{H^1}).$$

Dann gilt die Äquivalenz

$$|u|_{(L^2, H^1)_s} \simeq |u|_{H^s} \quad \text{für alle } u \in L^2(X). \quad (2.34)$$

Die Konstanten hängen nur von s und X ab.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass für alle $u \in H^s(X)$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$|u + c|_{(L^2, H^1)_s} = |u|_{(L^2, H^1)_s}.$$

Tatsächlich folgt aus der entsprechenden Eigenschaft für $|\cdot|_{L^2}$ und $|\cdot|_{H^1}$, dass

$$\inf_{u+c=u_0+u_1} (|u_0|_{L^2}^2 + t^2|u_1|_{H^1}^2) = \inf_{u=v_0+v_1} (|v_0|_{L^2}^2 + t^2|v_1|_{H^1}^2),$$

und daraus die Behauptung. Wir bezeichnen nun mit $\|\cdot\|_{(L^2, H^1)_s} = I_s(\cdot; \|\cdot\|_{L^2}, \|\cdot\|_{H^1})$ die interpolierte Norm und bemerken, dass

$$|u|_{(L^2, H^1)_s} \leq \|u\|_{(L^2, H^1)_s}.$$

Dies sieht man durch Interpolation der Ungleichungen $|u|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}$ und $|u|_{H^1} \leq \|u\|_{H^1}$. Setzen wir $(I - P)u$ ein, erhalten wir

$$|u|_{(L^2, H^1)_s} = |(I - P)u|_{(L^2, H^1)_s} \leq \|(I - P)u\|_{(L^2, H^1)_s}.$$

Die andere Richtung,

$$\|(I - P)u\|_{(L^2, H^1)_s} \lesssim |u|_{(L^2, H^1)_s},$$

folgt wieder einfach durch Interpolation zwischen L^2 und H^1 und der Poincaré-Ungleichung (2.33). Es folgt $|u|_{(L^2, H^1)_s} \simeq \|(I - P)u\|_{(L^2, H^1)_s}$. Insgesamt können wir schließen, dass

$$|u|_{(L^2, H^1)_s} \simeq \|(I - P)u\|_{(L^2, H^1)_s} \simeq \|(I - P)u\|_{H^s} \simeq |u|_{H^s}.$$

Für die zweite Äquivalenz haben wir die bekannte Charakterisierung der H^s -Norm ausgenutzt, und für die dritte die Poincaré-Ungleichung (2.33). \square

Dieser Satz wurde auch schon in [Heu14, Lemma 2.7] bewiesen. Es sei allerdings bemerkt, dass Heuer die $(L^2, H^1)_s$ -Seminorm geringfügig anders definiert, nämlich als Interpolation zwischen $\|\cdot\|_{L^2}$ und $|\cdot|_{H^1}$, und nicht explizit den Interpolationssatz für Seminormen verwendet. (Mit unserer Definition ist der Satz im Wesentlichen Spezialfall eines abstrakten Resultats, $(A/C, B/C)_s = (A, B)_s/C$, über die Interpolation von Faktorräumen, siehe [Tri95, 1.17.2].)

Heuer zeigt außerdem (siehe [Heu14, Theorem 3.1]), dass die impliziten Äquivalenzkonstanten in (2.34) invariant gegenüber Skalierung von X sind, also nur von der Form und nicht vom Durchmesser von X abhängen. Dieses interessante Resultat wollen wir ebenfalls rekonstruieren.

Benennen wir zunächst die zu s und X gehörigen Konstanten; es gelte also

$$A_{s,X} |u|_{H^s(X)} \leq |u|_{(L^2(X), H^1(X))_s} \leq B_{s,X} |u|_{H^s(X)}. \quad (2.35)$$

Die genauen Werte von $A_{s,X}$, $B_{s,X} > 0$ sind nicht wichtig für uns. Vielmehr benutzen wir (so wie Heuer) die Skalierungseigenschaften der beiden H^s -Seminormen, enthalten im folgenden Lemma. Hier sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige k -dimensionale Lipschitz-Mannigfaltigkeit mit $k \leq n$ und $1 \in L^2(X)$, für die (2.35) erfüllt ist.

Lemma 2.50 (Skalierbarkeit der Seminormen). *Sei $h > 0$ ein Skalierungsfaktor und $hX = \{hx : x \in X\}$. Sei weiters $s \in (0, 1)$ und $u \in H^s(X)$. Definiere $u^h(hx) = u(x)$ für $x \in X$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} |u^h|_{H^s(hX)} &= h^{k/2-s} |u|_{H^s(X)}, \\ |u^h|_{(L^2(hX), H^1(hX))_s} &= h^{k/2-s} |u|_{(L^2(X), H^1(X))_s}. \end{aligned}$$

Beweis. Die erste Identität zeigen wir mit der Substitution $x_h = hx$, $dx_h = h^k dx$.

$$\begin{aligned} |u^h|_{H^s(hX)}^2 &= \int_{hX} \int_{hX} \frac{|u^h(x_h) - u^h(y_h)|^2}{|x_h - y_h|^{k+2s}} dx_h dy_h \\ &= \int_X \int_X \frac{|u(x) - u(y)|^2}{h^{k+2s} |x - y|^{k+2s}} h^{2k} dx dy \\ &= h^{k-2s} |u|_{H^s(X)}^2. \end{aligned}$$

Analog zeigt man für die Endpunkte $s = 0, 1$

$$|u^h|_{L^2(hX)} = h^{k/2} |u|_{L^2(X)} \quad \text{und} \quad |u^h|_{H^1(hX)} = h^{k/2-1} |u|_{H^1(X)}. \quad (2.36)$$

Wir bemerken, dass $T^h(u) = u^h$ eine *surjektive* lineare Abbildung $T^h : L^2(X) \rightarrow L^2(hX)$ definiert, die auch $T^h(H^1(X)) = H^1(hX)$ erfüllt, und erhalten nach Korollar 2.42 aus (2.36) die interpolierte *Gleichung*

$$|u^h|_{(L^2(hX), H^1(hX))_s} = h^{k/2-s} |u|_{(L^2(X), H^1(X))_s}.$$

Dies ist die zweite Identität. □

Theorem 2.51 (Gleichmäßige Äquivalenz der Seminormen bei Skalierung). *Sei $h > 0$ ein Skalierungsfaktor und $s \in (0, 1)$. Dann gilt*

$$A_{s,X} |u|_{H^s(hX)} \leq |u|_{(L^2(hX), H^1(hX))_s} \leq B_{s,X} |u|_{H^s(hX)}$$

für alle $u \in H^s(hX)$. Die Konstanten hängen nicht von h ab.

Beweis. Folgt unmittelbar aus (2.35) und den Skalierungseigenschaften. □

2.3.3 Äquivalenz der Seminormen bei Lipschitz-Transformation

Wir sind sogar in der Lage, ein weitreichenderes, unserem Wissen nach neues Resultat zu beweisen, welches eine natürliche Verallgemeinerung von Theorem 2.51 darstellt, siehe Theorem 2.54. Damit können wir später die gleichmäßige Äquivalenz der Seminormen auf einer Familie von Dreiecken im \mathbb{R}^3 zeigen – mit Konstanten, die nur von der γ -Formregularität abhängen.

Von hier an bezeichne $X \subset \mathbb{R}^k$ eine beschränkte offene Menge, für die (2.35) gilt. An Stelle von Skalierungen betrachten wir allgemeiner bi-Lipschitz-Transformationen $\kappa: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $n \geq k$. Folgende Definition wird von Nutzen sein.

Definition 2.52. Für $\kappa: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ bi-Lipschitz, definiere

$$\gamma(\kappa) := \text{Lip}(\kappa)\text{Lip}(\kappa^{-1}) \geq 1.$$

Bemerkung 2.53. Die Größe $\gamma(\kappa)$ ist eine Art Deformierungsmaß. Man denke hier etwa an eine Familie $(\kappa)_{\kappa \in K}$ von Transformationen, sodass gleichmäßig $\gamma(\kappa) \leq C < \infty$. Heuristisch gesehen ist dann X ein „Referenzelement“ und alle $\kappa(X)$, $\kappa \in K$, sind Flächenelemente, die ungefähr dieselbe Form haben wie X . Insbesondere gilt, falls κ eine Isometrie verknüpft mit einer Skalierung ist, $\gamma(\kappa) = 1$. Man verifiziert außerdem unmittelbar die Rechenregeln $\gamma(\eta \circ \kappa) \leq \gamma(\eta)\gamma(\kappa)$, für $\eta: \kappa(X) \rightarrow \mathbb{R}^n$ bi-Lipschitz, und $\gamma(\kappa^{-1}) = \gamma(\kappa)$. \square

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Sobolev-Seminormen auf $\tilde{X} = \kappa(X)$ verhalten. Der Übersichtlichkeit halber setzen wir $L_1 := \text{Lip}(\kappa^{-1})^{-1}$ und $L_2 := \text{Lip}(\kappa)$. Nach der Flächenformel haben wir, für $s \in (0, 1)$, $u \in H^s(X)$ und $u^\kappa = u \circ \kappa^{-1}$,

$$|u^\kappa|_{H^s(\tilde{X})}^2 = \int_X \int_X \frac{|u^\kappa(\kappa(x)) - u^\kappa(\kappa(y))|^2}{|\kappa(x) - \kappa(y)|^{k+2s}} J\kappa(x) J\kappa(y) dx dy.$$

Die bi-Lipschitz-Stetigkeit von κ und (2.6) geben uns

$$\begin{aligned} |u^\kappa|_{H^s(\tilde{X})}^2 &\leq L_1^{-(k+2s)} \int_X \int_X \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{k+2s}} J\kappa(x) J\kappa(y) dx dy \\ &\leq L_1^{-(k+2s)} L_2^{2k} |u|_{H^s(X)}^2 \end{aligned}$$

und die entsprechende Ungleichung in die andere Richtung,

$$|u^\kappa|_{H^s(\tilde{X})}^2 \geq L_2^{-(k+2s)} L_1^{2k} |u|_{H^s(X)}^2.$$

Verwenden wir $\gamma(\kappa)$, so lautet dies

$$\gamma(\kappa)^{-(k+2s)} L_1^{k-2s} |u|_{H^s(X)}^2 \leq |u^\kappa|_{H^s(\tilde{X})}^2 \leq \gamma(\kappa)^{k+2s} L_2^{k-2s} |u|_{H^s(X)}^2. \quad (2.37)$$

Die Idee des nächsten Theorems deutet sich bereits an: Wenn wir für die interpolierte Seminorm dasselbe zeigen, bekommen wir die Äquivalenz $|\cdot|_{H^s(\tilde{X})} \simeq |\cdot|_{(L^2(\tilde{X}), H^1(\tilde{X}))_s}$ mit Konstanten, die nur von $\gamma(\kappa)$ abhängen.

Theorem 2.54 (Äquivalenz der Seminormen bei Lipschitz-Transformation). *Für bi-Lipschitz-stetiges $\kappa: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt*

$$A_{s,X} \gamma(\kappa)^{-(k+s)} |u|_{H^s(\kappa(X))} \leq |u|_{(L^2(\kappa(X)), H^1(\kappa(X)))_s} \leq B_{s,X} \gamma(\kappa)^{k+s} |u|_{H^s(\kappa(X))}$$

für alle $u \in H^s(\kappa(X))$. Die Konstanten hängen nur von s , X und $\gamma(\kappa)$ ab.

Beweis. Es sei $\tilde{X} = \kappa(X)$. Für die Abschätzung von $|\cdot|_{(L^2(\tilde{X}), H^1(\tilde{X}))_s}$ analog zu (2.37) benutzen wir Interpolation. Aus der Abschätzung der Jacobi-Determinante (2.6) folgt direkt die L^2 -Abschätzung

$$L_1^k \|u\|_{L^2(X)}^2 \leq \|u^\kappa\|_{L^2(\tilde{X})}^2 \leq L_2^k \|u\|_{L^2(X)}^2.$$

Seien \bar{u} und $\overline{u^\kappa}$ die Mittelwerte über X bzw. \tilde{X} . Wegen der Projektionseigenschaft gilt $\|u - \bar{u}\|_{L^2(X)} \leq \|u - \overline{u^\kappa}\|_{L^2(X)}$ sowie

$$\|(u - \overline{u^\kappa})^\kappa\|_{L^2(\tilde{X})} = \|u^\kappa - \overline{u^\kappa}\|_{L^2(\tilde{X})} \leq \|u^\kappa - \bar{u}\|_{L^2(\tilde{X})} = \|(u - \bar{u})^\kappa\|_{L^2(\tilde{X})},$$

daher folgt aus der L^2 -Abschätzung sogar

$$L_1^k |u|_{L^2(X)}^2 \leq |u^\kappa|_{L^2(\tilde{X})}^2 \leq L_2^k |u|_{L^2(X)}^2. \quad (2.38)$$

Für die H^1 -Abschätzung stellen wir fest, dass der Oberflächengradient wegen (2.5)

$$L_1 |\nabla_{\tilde{X}} u^\kappa(\kappa(x))| \leq |(D\kappa(x))^T (\nabla_{\tilde{X}} u^\kappa)(\kappa(x))| = |\nabla u(x)| \leq L_2 |\nabla_{\tilde{X}} u^\kappa(\kappa(x))|$$

für fast alle $x \in X$ erfüllt. Die L^2 -Abschätzung liefert dann

$$\gamma(\kappa)^{-2} L_1^{k-2} |u|_{H^1(X)}^2 \leq |u^\kappa|_{H^1(\tilde{X})}^2 \leq \gamma(\kappa)^2 L_2^{k-2} |u|_{H^1(X)}^2. \quad (2.39)$$

Interpolation zwischen (2.38) und (2.39) zeigt

$$\gamma(\kappa)^{-2s} L_1^{k-2s} |u|_{(L^2(X), H^1(X))_s}^2 \leq |u^\kappa|_{(L^2(\tilde{X}), H^1(\tilde{X}))_s}^2 \leq \gamma(\kappa)^{2s} L_2^{k-2s} |u|_{(L^2(X), H^1(X))_s}^2 \quad (2.40)$$

Zu guter Letzt müssen wir nur mehr (2.35), (2.37) und (2.40) kombinieren, um das gewünschte Resultat zu erhalten. Die obere Abschätzung etwa lautet:

$$\begin{aligned} |u^\kappa|_{((L^2(\tilde{X}), H^1(\tilde{X}))_s)}^2 &\stackrel{(2.40)}{\leq} \gamma(\kappa)^{2s} L_2^{k-2s} |u|_{(L^2(X), H^1(X))_s}^2 \\ &\stackrel{(2.35)}{\leq} B_{s,X}^2 \gamma(\kappa)^{2s} L_2^{k-2s} |u|_{H^s(X)}^2 \\ &\stackrel{(2.37)}{\leq} B_{s,X}^2 \gamma(\kappa)^{2s} L_2^{k-2s} \gamma(\kappa)^{k+2s} L_1^{-k+2s} |u^\kappa|_{H^s(\tilde{X})}^2 \\ &= B_{s,X}^2 \gamma(\kappa)^{2(k+s)} |u^\kappa|_{H^s(\tilde{X})}^2. \end{aligned}$$

Die untere Abschätzung geht analog. □

Wir präsentieren nun eine erste Anwendung für Theorem 2.54. Sei $\widehat{T} \subset \mathbb{R}^2$ das *Referenzdreieck* mit Eckpunkten $(0,0)^T$, $(1,0)^T$ und $(0,1)^T$. Nun sei $T = \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \subset \mathbb{R}^2$ ein beliebiges Dreieck. Wir erhalten T als Bild von \widehat{T} unter der affinen Abbildung $\kappa: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\kappa(x) = \mathbf{a} + Ax \quad \text{mit } A = (\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

Falls A invertierbar ist, ist diese Abbildung offensichtlich bi-Lipschitz mit $\text{Lip}(\kappa) \leq |A|_2$, $\text{Lip}(\kappa^{-1}) \leq |A^{-1}|_2$. Wir sind also in der Situation von Theorem 2.54 mit $X = \widehat{T}$ und $\kappa(X) = T$.

Die Invertierbarkeit von A ist äquivalent dazu, dass T nicht degeneriert ist. Genauer gilt $\det(A) = 2|T|$, und man kann die Lipschitz-Konstanten mit der Frobeniusnorm $|\cdot|_F$ wie folgt abschätzen:

$$|A|_2 \leq |A|_F = (|\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 + |\mathbf{c} - \mathbf{a}|^2)^{1/2} \leq \sqrt{2}h_T, \quad (2.41)$$

$$|A^{-1}|_2 \leq |A^{-1}|_F = \det(A)^{-1}|A|_F \leq \sqrt{2}(2|T|)^{-1}h_T. \quad (2.42)$$

Damit bekommen wir die Abschätzung

$$\gamma(\kappa) \leq |A|_2|A^{-1}|_2 \leq \frac{h_T^2}{|T|}.$$

Ist T ein γ -formreguläres Dreieck im Sinne von $|T|^{-1}h_T^2 \leq \gamma$, zeigt Theorem 2.54 also

$$A_{s,\widehat{T}}\gamma^{-(2+s)}|u|_{H^s(T)} \leq |u|_{(L^2(T), H^1(T))_s} \leq B_{s,\widehat{T}}\gamma^{2+s}|u|_{H^s(T)}.$$

Diese Ungleichung bleibt auch erhalten, falls T ein Dreieck in \mathbb{R}^3 ist, da wir T dann durch kanonische Einbettung in \mathbb{R}^3 , Drehung und Translation aus einem geeigneten $T' \subset \mathbb{R}^2$ erhalten und abermals Theorem 2.54 mit $\gamma(\kappa) = 1$ anwenden können.

2.3.4 Äquivalenz der Seminormen auf Patches

Neben Dreiecken wird in der Analyse von ABEM/AFEM oft auch mit Patches gearbeitet. In diesem Unterabschnitt werden wir das folgende Resultat beweisen. Siehe Abschnitt 2.2 für die Notation und Definition von Patches. Im Folgenden sei immer $n = 2, 3$.

Theorem 2.55. *Sei $s \in (0, 1)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Gebiet, $\Gamma = \partial\Omega$ und \mathcal{T}_ℓ eine Triangulierung auf Γ . Weiters existiere eine Start-Triangulierung $\mathcal{T}_0 < \mathcal{T}_\ell$, die Annahme A (Definition 2.34) erfüllt. Dann gilt*

$$C^{-1}|u|_{H^s(\omega_z)} \leq |u|_{(L^2(\omega_z), H^1(\omega_z))_s} \leq C|u|_{H^s(\omega_z)}$$

für alle $z \in \mathcal{N}_\ell$. Die Konstante $C > 0$ hängt nur von s, \mathcal{T}_0 und, im Fall $n = 3$, von der Formregularität von \mathcal{T}_ℓ ab. Ist Ω ein Polyeder, hängt C nicht einmal von \mathcal{T}_0 ab, sondern stattdessen nur von Γ .

Annahme A wird es uns erlauben, die Aussage auf den „flachen“ Fall

$$\bar{\omega} = \bigcup_{k=1}^N T_k \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

zurückzuführen. Im Fall $n = 3$ sind die T_k hier (bis auf Kanten) disjunkte, nicht-degenerierte Dreiecke mit einem gemeinsamen Eckpunkt z , und ω sei offen. Da wir in Theorem 2.55 nur geschlossene Ränder betrachten, reicht es für den Beweis den Fall zu betrachten, dass $z \in \omega$, mit anderen Worten, die Dreiecke lassen keine Lücke rund um z . Damit sich das „ausgeht“, muss die Anzahl der Dreiecke $N \geq 3$ sein. Im Fall $n = 2$ gilt immer $N = 2$ und $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}$ sind Intervalle mit $T_1 \cap T_2 = \{z\}$. Wir nennen ω unter diesen Voraussetzungen einen *flachen Patch mit Mittelpunkt* z .

Im Fall $n = 3$ definieren wir die für ω charakteristische Größe

$$\gamma_\omega := \max_{1 \leq k \leq N} \frac{h_{T_k}^2}{|T_k|},$$

genannt *Formregularität von ω* . Aus Abschnitt 2.2 wissen wir, dass

$$N \leq \pi\gamma_\omega,$$

mit anderen Worten: N hängt nur von der Formregularität von ω ab.

Als nächstes definieren wir geeignete *Referenz-Patches* $\hat{\omega}_N$ für jedes $N \geq 2$. Für $N = 2$ setze

$$\hat{\omega}_2 := (-1, 1) \subset \mathbb{R}.$$

Für $N \geq 3$, definiere $\hat{\omega}_N \subset \mathbb{R}^2$ als das (offene) gleichmäßige N -Eck mit Eckpunkten $e^{\frac{2\pi ik}{N}}$, $k = 1, \dots, N$. Wir zeigen nun, dass ein flacher Patch bi-Lipschitz-homöomorph zum Referenzpatch ist.

Lemma 2.56. *Sei $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein flacher Patch bestehend aus N Simplizes. Dann existiert $\kappa: \hat{\omega}_N \rightarrow \omega$ bi-Lipschitz, sodass*

$$C^{-1}\text{Lip}(\kappa) \leq \text{diam}(\omega) \leq C\text{Lip}(\kappa^{-1})^{-1}$$

und insbesondere $\gamma(\kappa) = \text{Lip}(\kappa)\text{Lip}(\kappa^{-1}) \leq C^2 \lesssim 1$. Die Konstante $C > 0$ hängt im Fall $n = 3$ nur von der Formregularität γ_ω ab, im Fall $n = 2$ gilt $C = 2$ und sogar $\gamma(\kappa) = 1$.

Beweis. Der Fall $n = 2$ ist trivial: $\hat{\omega}_2$ und ω sind beides Intervalle. Die Abbildung κ ist einfach eine Streckung verknüpft mit einer Translation, und wir haben $\text{Lip}(\kappa) = \text{diam}(\omega)/2 = \text{Lip}(\kappa^{-1})^{-1}$.

Nun zum Fall $n = 3$. Zunächst können wir $z = 0$ für den Mittelpunkt von ω annehmen, da die Verknüpfung von κ mit einer Translation nichts an der Aussage ändert. Wir bezeichnen die N äußeren Eckpunkte von ω mit z_k , $k = 0, \dots, N$, $z_0 = z_N$, numeriert

im mathematisch positiven Sinn, sowie $\widehat{z}_k := e^{\frac{2\pi ik}{N}}$. Die zugehörigen Dreiecke seien $T_k := \Delta(0, z_{k-1}, z_k)$ bzw. $\widehat{T}_k := \Delta(0, \widehat{z}_{k-1}, \widehat{z}_k)$. Wir definieren Matrizen $A_k \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ durch

$$A_k \widehat{z}_{k-1} = z_{k-1}, \quad A_k \widehat{z}_k = z_k, \quad k = 1, \dots, N,$$

und die stückweise lineare Funktion

$$\kappa(x) = A_k x, \quad \text{für } \arg(\widehat{z}_{k-1}) \leq \arg(x) \leq \arg(\widehat{z}_k).$$

Nach Konstruktion stimmen A_k und A_{k+1} auf der von \widehat{z}_k erzeugten Halbgerade überein, also ist $\kappa: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig, bijektiv, und es gilt $\kappa(\widehat{T}_k) = A_k(\widehat{T}_k) = T_k$.

Wir zeigen, dass κ sogar global bi-Lipschitz ist. Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$. Die gerade Strecke zwischen x und y kreuzt endlich viele der Halbgeraden $\mathbb{R}^+ \widehat{z}_{k_j}$ jeweils in den Schnittpunkten t_{k_j} , mit $j = 1, \dots, M$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} |\kappa(x) - \kappa(y)| &= |A_{k_1}(x - t_{k_1}) + A_{k_2}(t_{k_1} - t_{k_2}) + \dots + A_{k_{M+1}}(t_{k_M} - y)| \\ &\leq \max_k (|A_k|_2) (|x - t_{k_1}| + \dots + |t_{k_M} - y|) \\ &= \max_k (|A_k|_2) |x - y|. \end{aligned}$$

Ähnlich verfährt man, falls x und y auf derselben Geraden durch den Nullpunkt liegen. Dies zeigt $\text{Lip}(\kappa) \leq \max_k (|A_k|_2)$. Analoges Vorgehen für κ^{-1} zeigt $\text{Lip}(\kappa^{-1}) \leq \max_k (|A_k^{-1}|_2)$. Nun können wir A_k auffassen als $B_k \widehat{B}_k^{-1}$, wo $B_k: \widehat{T} \rightarrow T_k$ und $\widehat{B}_k: \widehat{T} \rightarrow \widehat{T}_k$ lineare Abbildungen vom Referenzdreieck sind. Wie wir bereits in (2.41), (2.42) berechnet haben, gilt

$$|B_k|_2 \leq \sqrt{2} h_{T_k}, \quad |B_k^{-1}|_2 \leq \frac{\sqrt{2} h_{T_k}}{2|T_k|}.$$

Für die Abbildungsnormen der \widehat{B}_k folgt wegen $h_{\widehat{T}_k} = 1$ und $2|\widehat{T}_k| = \sin(\frac{2\pi}{N})$ explizit

$$|\widehat{B}_k|_2 \leq \sqrt{2}, \quad |\widehat{B}_k^{-1}|_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{\sin(\frac{2\pi}{N})} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} N,$$

wobei die zweite Ungleichung aus $\sin(2\pi x) \geq 4x$, $x \in [0, \frac{1}{4}]$ und $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{2}{3}$ folgt. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Lip}(\kappa) &\leq \max_k |B_k|_2 |\widehat{B}_k^{-1}|_2 \leq N \max_k h_{T_k} \lesssim \text{diam}(\omega), \\ \text{Lip}(\kappa^{-1}) &\leq \max_k |B_k^{-1}|_2 |\widehat{B}_k|_2 \leq \max_k \frac{h_{T_k}}{|T_k|} \lesssim \text{diam}(\omega)^{-1}. \end{aligned}$$

Die Konstanten hängen nur von γ_ω ab, siehe (2.23) und (2.25). □

Die Formregularität γ_ω ist gut mit Lipschitz-Transformationen kompatibel.

Lemma 2.57. Sei $\omega \subset \mathbb{R}^2$ ein flacher Patch und $\eta: \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ bi-Lipschitz. Definiere ebenfalls $h_{\eta(T_k)} := \text{diam}(\eta(T_k))$ und

$$\gamma_{\eta(\omega)} := \max_k \frac{h_{\eta(T_k)}^2}{|\eta(T_k)|}.$$

Dann gilt, mit $\gamma(\eta) = \text{Lip}(\eta)\text{Lip}(\eta^{-1})$,

$$\gamma(\eta)^{-2}\gamma_{\omega} \leq \gamma_{\eta(\omega)} \leq \gamma(\eta)^2\gamma_{\omega}.$$

Beweis. Für jedes Dreieck $T \subset \bar{\omega}$ haben wir

$$\begin{aligned} \text{Lip}(\eta^{-1})^{-1}h_T &\leq h_{\eta(T)} = \sup_{x,y \in T} |\eta(x) - \eta(y)| \leq \text{Lip}(\eta)h_T, \\ \text{Lip}(\eta^{-1})^{-2}|T| &\leq |\eta(T)| \leq \text{Lip}(\eta)^2|T|. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Die zweite Zeile ist (2.7). Die Aussage folgt aus der Kombination dieser Ungleichungen. \square

Damit können wir Lemma 2.56 auf die Situation von Theorem 2.55 erweitern.

Lemma 2.58. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Gebiet, $\Gamma = \partial\Omega$ und \mathcal{T}_ℓ eine Triangulierung auf Γ . Weiters existiere eine Start-Triangulierung $\mathcal{T}_0 < \mathcal{T}_\ell$, die Annahme A (Definition 2.34) erfüllt. Für $z \in \mathcal{N}_\ell$ sei $N_z = \#\{T \in \mathcal{T}_\ell: z \in T\}$. Dann existiert $\kappa_z: \hat{\omega}_{N_z} \rightarrow \omega_z$ bi-Lipschitz, sodass

$$C^{-1}\text{Lip}(\kappa_z) \leq \text{diam}(\omega_z) \leq C\text{Lip}(\kappa_z^{-1})^{-1}$$

und insbesondere $\gamma(\kappa_z) \leq C^2 \lesssim 1$. Die Konstante $C > 0$ hängt nur von \mathcal{T}_0 und, im Fall $n = 3$, von der Formregularität von \mathcal{T}_ℓ ab, und für Polyeder nicht einmal von \mathcal{T}_0 sondern nur von Γ .

Beweis. Wir benutzen die bi-Lipschitz-Abbildungen φ_z , $z \in \mathcal{N}_0$ aus Annahme A. Die Konstanten

$$L_0 := \max_{z \in \mathcal{T}_0} \text{Lip}(\varphi_z^{-1}), \quad L_1 := \left(\max_{z \in \mathcal{T}_0} \text{Lip}(\varphi_z) \right)^{-1}$$

hängen nur von \mathcal{T}_0 ab, für Polyeder sogar nur von Γ (Lemma 2.35). Sei nun $z \in \mathcal{N}_\ell$ und wähle nach Lemma 2.36 ein geeignetes $z^* \in \mathcal{N}_0$ mit $\bar{\omega}_z \subset \bar{\omega}_{z^*,0}$. Dann ist $\omega := \varphi_{z^*}(\omega_z)$ ein flacher Patch, und die gesuchte bi-Lipschitz-Abbildung ist

$$\kappa_z := \varphi_{z^*}^{-1}|_{\omega} \circ \kappa,$$

wobei κ die Abbildung aus Lemma 2.56 für ω ist.

Für die Abschätzungen der Lipschitz-Konstanten, sei zunächst $n = 3$. Mit $\eta := \varphi_{z^*}^{-1}$, $\eta(\omega) = \omega_z$ sind wir in der Situation von Lemma 2.57. Analog zu (2.43) haben wir

$$\text{Lip}(\varphi_{z^*})^{-1}\text{diam}(\omega) \leq \text{diam}(\omega_z) \leq \text{Lip}(\varphi_{z^*}^{-1})\text{diam}(\omega),$$

also $\text{diam}(\omega_z) \simeq \text{diam}(\omega)$. Nach Lemma 2.57 gilt außerdem

$$\gamma_\omega \simeq \gamma_{\omega_z} \leq \gamma_\ell.$$

Zur Erinnerung: γ_ℓ ist die Formregularitätskonstante von \mathcal{T}_ℓ , definiert durch

$$\gamma_\ell = \sup_{T \in \mathcal{T}_\ell} \frac{h_T^2}{|T|}.$$

Nun verwenden wir Lemma 2.56 und sehen

$$\text{Lip}(\kappa_z) \leq \text{Lip}(\varphi_{z^*}^{-1})\text{Lip}(\kappa) \leq CL_0 \text{diam}(\omega) \simeq C \text{diam}(\omega_z).$$

Die Konstante C hängt nur von γ_ω und damit nur von der Formregularität von \mathcal{T}_ℓ ab. Genauso folgt

$$\text{Lip}(\kappa_z^{-1})^{-1} \geq C^{-1}L_1 \text{diam}(\omega) \simeq C^{-1} \text{diam}(\omega_z).$$

Im Fall $n = 2$ haben wir die selben Abschätzungen und $C = 2$. □

Nun sind wir bereit für den Beweis unseres Hauptresultates.

Beweis von Theorem 2.55. Sei $z \in \mathcal{N}_\ell$. Wir benutzen Theorem 2.54 mit $X = \widehat{\omega}_{N_z}$ und der Lipschitz-Transformation $\kappa_z: \widehat{\omega}_{N_z} \rightarrow \omega_z$ aus Lemma 2.58. Es gilt also

$$A_{s, \widehat{\omega}_{N_z}} \gamma(\kappa_z)^{-(2+s)} |u|_{H^s(\omega_z)} \leq |u|_{(L^2(\omega_z), H^1(\omega_z))_s} \leq B_{s, \widehat{\omega}_{N_z}} \gamma(\kappa_z)^{2+s} |u|_{H^s(\omega_z)}.$$

Die Konstante $\gamma(\kappa_z)$ hängt nach Lemma 2.58 nur von \mathcal{T}_0 und ($n = 3$) von der Formregularität ab. Die Konstanten $A_{s, \widehat{\omega}_{N_z}}, B_{s, \widehat{\omega}_{N_z}}$ hängen von s und N_z ab, und N_z wiederum ($n = 3$) von der Formregularität. □

2.3.5 Weitere Konsequenzen

Die Techniken, die wir verwendet haben, um Theorem 2.55 zu beweisen, können auch in allgemeineren Situationen von Nutzen sein. Wir extrahieren daher aus den Beweisen der vorigen beiden Abschnitte zwei Lemmata.

Lemma 2.59 (Verallgemeinerte Skalierungseigenschaften der Sobolev-Seminormen). *Sei $X \subset \mathbb{R}^k$ beschränkt und offen, $k \leq n$, $\kappa: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ bi-Lipschitz und $s \in [0, 1]$. Dann gilt*

$$\text{Lip}(\kappa^{-1})^{-k/2+s} |u|_{H^s(X)} \lesssim |u^\kappa|_{H^s(\kappa(X))} \lesssim \text{Lip}(\kappa)^{k/2-s} |u|_{H^s(X)}, \quad \text{für alle } u \in H^s(X).$$

Die impliziten Konstanten hängen nur von $\gamma(\kappa) = \text{Lip}(\kappa)\text{Lip}(\kappa^{-1})$ ab.

Beweis. Das sind einfach die Abschätzungen (2.37), (2.38) und (2.39) aus dem Beweis von Theorem 2.54. Die Abhängigkeit der Konstanten von s kann man hier leicht durch Verwendung von $s \leq 1$ eliminieren. □

Wenden wir Lemma 2.59 auf die Situation von Lemma 2.58 an, erhalten wir das folgende praktische Resultat, welches Skalierungsargumente für Patches ermöglicht.

Korollar 2.60. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.58 gilt*

$$|u^\kappa|_{H^s(\omega_z)} \simeq \text{diam}(\omega_z)^{k/2-s} |u|_{H^s(\widehat{\omega}_{N_z})}, \quad \text{für alle } z \in \mathcal{N}_\ell, u \in H^s(\widehat{\omega}_{N_z}), s \in [0, 1].$$

Die Konstanten hängen nur von \mathcal{T}_0 und, im Fall $n = 3$, von der Formregularität von \mathcal{T}_ℓ ab, und für Polyeder nicht einmal von \mathcal{T}_0 sondern nur von Γ . \square

Als Anwendung zeigen wir die Poincaré-Ungleichung auf Patches, die ein wichtiges Werkzeug zur Analyse des Residualschätzers in Abschnitt 4.2 darstellt.

Theorem 2.61 (Poincaré-Ungleichungen auf Patches). *Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.58 haben wir, für $z \in \mathcal{N}_\ell$ und $s \in [0, 1]$,*

$$\begin{aligned} |u|_{L^2(\omega_z)} &\lesssim \text{diam}(\omega_z)^s |u|_{H^s(\omega_z)}, \quad \text{für alle } u \in H^s(\omega_z), \\ |u|_{H^s(\omega_z)} &\lesssim \text{diam}(\omega_z)^{1-s} |u|_{H^1(\omega_z)}, \quad \text{für alle } u \in H^1(\omega_z). \end{aligned}$$

Die Konstanten hängen nur von s, \mathcal{T}_0 und, im Fall $n = 3$, von der Formregularität von \mathcal{T}_ℓ ab, und für Polyeder nicht einmal von \mathcal{T}_0 sondern nur von Γ .

Beweis. Es reicht offensichtlich, entsprechende Ungleichungen auf $\widehat{\omega}_{N_z}$ zu zeigen. Aus der Poincaré-Ungleichung für Gebiete (2.2), angewandt auf $(I - P)u$, folgt

$$|u|_{L^2(\widehat{\omega}_{N_z})} \lesssim |u|_{H^s(\widehat{\omega}_{N_z})}, \quad \text{für alle } u \in H^s(\widehat{\omega}_{N_z}).$$

Aus der stetigen Einbettung $H^1 \subset H^s$ und der obigen Ungleichung für $s = 1$ folgt weiter

$$|u|_{H^s(\widehat{\omega}_{N_z})} \lesssim \|(I - P)u\|_{H^1(\widehat{\omega}_{N_z})} \lesssim |u|_{H^1(\widehat{\omega}_{N_z})}, \quad \text{für alle } u \in H^1(\widehat{\omega}_{N_z}).$$

Nun gibt Korollar (2.60), angewandt jeweils auf beide Seiten der zwei Ungleichungen, die Behauptung. \square

3 Elliptische Systeme und Randintegralgleichungen

3.1 Elliptische Systeme

Wir führen in diesem Abschnitt die Greenschen Formeln ein und formulieren das Randwertproblem (1.1)–(1.2) für $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. Sei zunächst \mathcal{P} ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung der Form

$$\mathcal{P}\mathbf{u} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_i (A_{ij} \partial_j \mathbf{u}). \quad (3.1)$$

Wir nehmen hier an, dass die Koeffizientenmatrizen konstant sind, d.h. $A_{ij} = (a_{ij}^{kl})_{k,l} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$. Man beachte, dass (3.1) ein Gleichungssystem ist, komponentenweise gegeben durch

$$(\mathcal{P}\mathbf{u})^k = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij}^{kl} \partial_i \partial_j u^l \quad (3.2)$$

für $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)^T: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Beobachte, dass man (3.2) alternativ auch anschreiben kann als

$$(\mathcal{P}\mathbf{u})^k = -\operatorname{div} \left(\sum_{l=1}^n A^{kl} \nabla u^l \right) \quad (3.3)$$

mit $A^{kl} = (a_{ij}^{kl})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wegen $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ sind die Matrizen A^{kl} durch (3.3) niemals eindeutig bestimmt. Insbesondere erzeugen A^{kl} und $(A^{kl})^T = (a_{ji}^{kl})_{i,j}$ stets den selben Operator \mathcal{P} .

Um die Notation zu vereinfachen, identifizieren wir $\mathbb{R}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ und definieren entsprechend den Gradienten von \mathbf{u} als Funktion $\nabla \mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$,

$$\nabla \mathbf{u} = \nabla \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla u^1 \\ \vdots \\ \nabla u^n \end{pmatrix}.$$

Formal gesehen ist also der mehrdimensionale Gradient ∇ eine Matrix der Dimension $n^2 \times n$, beispielsweise für $n = 2$ gegeben durch

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 \\ \partial_2 & 0 \\ 0 & \partial_1 \\ 0 & \partial_2 \end{pmatrix}.$$

Weiters schreiben wir ∇^T für die formal transponierte Matrix, wieder für $n = 2$ gegeben durch

$$\nabla^T = \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_1 & \partial_2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also für $\mathbf{U}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$, $\mathbf{U} = (\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n)^T$, dass $\nabla^T \mathbf{U}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ und

$$\nabla^T \mathbf{U} = \nabla^T \begin{pmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{div} \mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^n \end{pmatrix}.$$

Schlussendlich fassen wir die A^{kl} in eine Block-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ zusammen, als

$$A = \begin{pmatrix} A^{11} & \dots & A^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{n1} & \dots & A^{nn} \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich (3.3) als (formales) Matrizenprodukt wie folgt schreiben:

$$\mathcal{P}\mathbf{u} = -\nabla^T A \nabla \mathbf{u}.$$

Für die einzelnen Koeffizienten \mathcal{P}^{lk} des Operators gilt die einfach zu merkende Relation

$$(\nabla^T A \nabla)^{lk} = \nabla^T A^{lk} \nabla.$$

3.1.1 Die Greenschen Formeln

Für ein Lipschitz-Gebiet Ω kann fast überall auf $\Gamma = \partial\Omega$ ein äußerer Einheitsnormalvektor $\mathbf{n} = (n_i)$ erklärt und der Gaußsche Integralsatz bewiesen werden. Damit steht uns die Formel der partiellen Integration zur Verfügung:

$$(\partial_i u, v)_\Omega = -(u, \partial_i v)_\Omega + (n_i u, v)_\Gamma \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Dies gilt aufgrund der dichten Einbettung $C^1(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ und dem Spursatz auch für $u, v \in H^1(\Omega)$. Mit der zuvor eingeführten Notation folgt unmittelbar die höherdimensionale Version

$$(\nabla^T \mathbf{U}, \mathbf{v})_\Omega = -(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{v})_\Omega + (\mathbf{n}^T \mathbf{U}, \mathbf{v})_\Gamma \quad (3.4)$$

für $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $\mathbf{U} = (\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n)^T$ mit $\mathbf{u}^i \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. Man beachte, dass auf der rechten Seite im ersten Term ein $n^2 \times n^2$ Skalarprodukt gebildet wird, und weiters, dass der Term $\mathbf{n}^T \mathbf{U}$ analog zu $\nabla^T \mathbf{U}$ interpretiert wird, d.h. komponentenweise:

$$\mathbf{n}^T \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}^T \mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{n}^T \mathbf{u}^n \end{pmatrix}$$

Für den Differentialoperator $\mathcal{P} = -\nabla^T A \nabla$ und $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ ergibt zweimalige Anwendung von (3.4) die *erste und zweite Greensche Formel*.

$$\begin{aligned} -(\nabla^T A \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega &= (A \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_\Omega - (\mathbf{n}^T A \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Gamma \\ &= -(\mathbf{u}, \nabla^T A^T \nabla \mathbf{v})_\Omega - (\mathbf{n}^T A \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Gamma + (\mathbf{u}, \mathbf{n}^T A^T \nabla \mathbf{v})_\Gamma \end{aligned}$$

Wir nennen $\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (A\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v})_\Omega$ die von \mathcal{P} induzierte Bilinearform und $\gamma_1\mathbf{u} := \mathbf{n}^T A \gamma(\nabla\mathbf{u})$ die Konormalenableitung. Falls A symmetrisch ist, dann ist auch $\alpha(\cdot, \cdot)$ symmetrisch und die Greenschen Formeln vereinfachen sich zu

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathcal{P}\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega + (\gamma_1\mathbf{u}, \gamma\mathbf{v})_\Gamma, \quad (3.5)$$

$$(\mathcal{P}\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega - (\mathbf{u}, \mathcal{P}\mathbf{v})_\Omega = (\gamma_1\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Gamma - (\gamma\mathbf{u}, \gamma_1\mathbf{v})_\Gamma. \quad (3.6)$$

Die Formeln lassen sich auch auf $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $\mathcal{P}\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ verallgemeinern. Man kann das folgende zeigen:

Lemma 3.1 (Erste Greensche Formel, [McL00, Lemma 4.3]). *Sei $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{f} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ mit $\mathcal{P}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ in $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$. Dann existiert ein eindeutig durch \mathbf{u} und \mathbf{f} bestimmtes $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Omega)$, sodass*

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega + (\mathbf{g}, \gamma\mathbf{v})_\Gamma \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (3.7)$$

Darüber hinaus gilt

$$\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \lesssim \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}.$$

□

Wenn \mathbf{f} aus dem Kontext klar ist, schreiben wir auch wieder $\gamma_1\mathbf{u} = \mathbf{g}$. Zum Beispiel ist \mathbf{f} für $\mathcal{P}\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ eindeutig durch \mathbf{u} bestimmt. In diesem Fall ist die Aussage des Lemmas einfach

$$\|\gamma_1\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \lesssim \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\mathcal{P}\mathbf{u}\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}. \quad (3.8)$$

Sei nun A symmetrisch, \mathbf{u} und \mathbf{f} wie in Lemma 3.1. Wir interpretieren die zweite Greensche Formel (3.6) im Sinne von Distributionen auf \mathbb{R}^n . Hierzu setzen wir $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ auf ganz \mathbb{R}^n durch 0 fort und schreiben dafür $\chi_\Omega\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt per Definition

$$(\mathcal{P}(\chi_\Omega\mathbf{u}), \varphi)_{\mathbb{R}^n} = (\chi_\Omega\mathbf{u}, \mathcal{P}\varphi)_{\mathbb{R}^n} = (\mathbf{u}, \mathcal{P}\varphi)_\Omega.$$

Fasst man \mathbf{f} gemäß der Charakterisierung (siehe [McL00, S. 77])

$$\widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) = \text{Abschluss von } \mathcal{D}(\Omega) \text{ in } \mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n) \quad (3.9)$$

als Element von $\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ auf und schreibt dafür $\chi_\Omega\mathbf{f}$ (dies ist konsistent mit der \mathbf{L}^2 -Definition!), folgt außerdem

$$(\chi_\Omega\mathbf{f}, \varphi)_{\mathbb{R}^n} = (\mathbf{f}, \varphi)_\Omega \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n).$$

Zusammen mit der Symmetrie von A und den Voraussetzungen von (3.7) bekommen wir

$$(\mathbf{f}, \varphi)_\Omega + (\gamma_1\mathbf{u}, \gamma\varphi)_\Gamma = \alpha(\mathbf{u}, \varphi) = \alpha(\varphi, \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathcal{P}\varphi)_\Omega + (\gamma\mathbf{u}, \gamma_1\varphi)_\Gamma$$

und somit

$$(\mathcal{P}(\chi_\Omega\mathbf{u}), \varphi)_{\mathbb{R}^n} = (\chi_\Omega\mathbf{f}, \varphi)_{\mathbb{R}^n} - (\gamma\mathbf{u}, \gamma_1\varphi)_\Gamma + (\gamma_1\mathbf{u}, \gamma\varphi)_\Gamma, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Wir schreiben γ^* und γ_1^* für die zu $\gamma: \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ und $\gamma_1: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma)$ konjugierten Operatoren, definiert durch

$$(\gamma^* \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi})_{\mathbb{R}^n} = (\mathbf{g}, \gamma \boldsymbol{\varphi})_{\Gamma} \quad \text{und} \quad (\gamma_1^* \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi})_{\mathbb{R}^n} = (\mathbf{g}, \gamma_1 \boldsymbol{\varphi})_{\Gamma} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Damit haben wir das folgende Lemma bewiesen.

Lemma 3.2 (Zweite Greensche Formel). *Sei $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{f} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ mit $\mathcal{P}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ in $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$. Ist A symmetrisch, gilt*

$$\mathcal{P}(\chi_{\Omega} \mathbf{u}) = \chi_{\Omega} \mathbf{f} - \gamma_1^* \gamma \mathbf{u} + \gamma^* \gamma_1 \mathbf{u} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (3.10)$$

□

Diese Formel wird uns in Abschnitt 3.3 von Nutzen sein, um die Darstellungsformel einer Lösung von $\mathcal{P}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ durch Randintegrale zu beweisen.

Wie in der Diskussion vor Lemma 2.5 definieren wir $\gamma_1^{\text{int}} \mathbf{u} := \gamma_1 \mathbf{u}$ und $\gamma_1^{\text{ext}} \mathbf{u} := -\gamma_1' \mathbf{u}$, wobei γ_1' die Konormalenableitung für $\Omega' = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ ist. Das umgekehrte Vorzeichen für γ_1^{ext} resultiert daraus, dass wir den äußeren Normalvektor von Ω und nicht Ω' benutzen. Dies setzt natürlich voraus, dass $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^1(\Omega')$ und $\mathcal{P}\mathbf{u} = \mathbf{f}' \in \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega')$ in Ω' , und γ_1^{ext} hängt im Allgemeinen von \mathbf{f}' und \mathcal{P} ab. Wir definieren in diesem Fall auch die *Sprünge* entlang von Γ durch

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}]_{\Gamma} &:= \gamma_1^{\text{ext}} \mathbf{u} - \gamma_1^{\text{int}} \mathbf{u}, \\ [\gamma_1 \mathbf{u}]_{\Gamma} &:= \gamma_1^{\text{ext}} \mathbf{u} - \gamma_1^{\text{int}} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

3.1.2 Schwache Formulierung der Lamé-Gleichung

Wir wenden uns nun einem speziellen Differentialoperator zweiter Ordnung zu, nämlich dem *Lamé-Operator*

$$\mathcal{L}\mathbf{u} = -\mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

Überlegen wir, wie L gewählt werden kann, damit dieser $\mathcal{L} = -\nabla^T L \nabla$ erfüllt. Wir kennen ja bereits die komponentenweise Darstellung

$$(\mathcal{L}\mathbf{u})^k = -\sum_{i=1}^n \partial_i \sigma_{ki}(\mathbf{u}) = -\operatorname{div}(\sigma_k(\mathbf{u})) \quad (3.11)$$

mit dem Spannungstensor

$$\sigma(\mathbf{u}) = \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I}_n + 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) \quad (3.12)$$

und dem Verzerrungstensor

$$\varepsilon_{lj}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_j u^l + \partial_l u^j). \quad (3.13)$$

Fassen wir $\sigma(\mathbf{u}) = (\sigma_1(\mathbf{u}), \dots, \sigma_n(\mathbf{u}))$ als Funktion nach \mathbb{R}^{n^2} auf, schreibt sich (3.11) als

$$\mathcal{L}\mathbf{u} = -\nabla^T \sigma(\mathbf{u}).$$

Wir wollen also

$$L\nabla\mathbf{u} = \sigma(\mathbf{u}),$$

bzw. $\sum_l L^{kl} \nabla u^l = \sigma_k(\mathbf{u})$ oder

$$\begin{aligned} \sum_l \sum_j L_{ij}^{kl} \partial_j u^l &= \sigma_{ki}(\mathbf{u}) \\ &= \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u}) \delta_{ki} + 2\mu \varepsilon_{ki}(\mathbf{u}) \\ &= \lambda \delta_{ki} \sum_j \partial_j u^j + \mu(\partial_i u^k + \partial_k u^i) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Durch (3.14) ist die *Lamé-Matrix* $L = (L_{ij}^{kl}) \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ eindeutig bestimmt:

$$L_{ij}^{kl} = \lambda \delta_{ki} \delta_{lj} + \mu(\delta_{kl} \delta_{ij} + \delta_{kj} \delta_{il}), \quad (3.15)$$

und es gilt $\mathcal{L} = -\nabla^T L \nabla$. Beispielsweise für $n = 2$ ist

$$L = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Man beachte, dass L symmetrisch bezüglich Vertauschung von l und j ist. Dies zusammen mit (3.13) impliziert

$$L\nabla\mathbf{u} = L\varepsilon(\mathbf{u})$$

und weiter, wegen $L = L^T$,

$$(L\nabla\mathbf{u})^T \nabla\mathbf{v} = (L\nabla\mathbf{u})^T \varepsilon(\mathbf{v}) = \sigma(\mathbf{u})^T \varepsilon(\mathbf{v}).$$

Setzen wir (3.12) ein, folgt außerdem

$$\sigma(\mathbf{u})^T \nabla\mathbf{v} = \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u}) I_n^T \nabla\mathbf{v} + 2\mu \varepsilon(\mathbf{u})^T \nabla\mathbf{v}.$$

Mit Hilfe der Identifikation $I_n = (\mathbf{e}_1^T, \dots, \mathbf{e}_n^T)^T \in \mathbb{R}^{n^2}$ sehen wir

$$I_n^T \nabla\mathbf{v} = \sum_l \mathbf{e}_l^T \nabla v^l = \sum_l \partial_l v^l = \operatorname{div} \mathbf{v},$$

und, wieder wegen der Symmetrie bezüglich l und j , $\varepsilon(\mathbf{u})^T \nabla\mathbf{v} = \varepsilon(\mathbf{u})^T \varepsilon(\mathbf{v})$. Zusammengefasst gilt auch

$$(L\nabla\mathbf{u})^T \nabla\mathbf{v} = \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \mathbf{v}) + 2\mu \varepsilon(\mathbf{u})^T \varepsilon(\mathbf{v}).$$

Für die Bilinearform haben wir also die beiden Darstellungen

$$\alpha_L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\sigma(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_\Omega = \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v})_\Omega + 2\mu(\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_\Omega. \quad (3.17)$$

Wir betrachten nun das Dirichlet-Problem. Sei $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ und $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, dann nennen wir $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ eine *schwache Lösung* von

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathbf{u} &= \mathbf{f}, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g}, & \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

falls $\mathcal{L}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ in $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ und $\gamma\mathbf{u} = \mathbf{g}$. Für die eindeutige Lösbarkeit benötigt man wie immer Koerzivität von $\alpha_L(\cdot, \cdot)$ in $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, in diesem Fall ganz einfach zu zeigen: Für $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\Omega)$ und daher auch für $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ gilt nämlich

$$\|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)^n}^2 = \frac{1}{2}\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)^n}^2 + \frac{1}{2}\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Dies folgt aus

$$(\partial_j u^l, \partial_l u^j)_\Omega = - (u^l, \partial_j \partial_l u^j)_\Omega = (\partial_l u^l, \partial_j u^j)_\Omega.$$

Zusammen mit (3.17) erhält man, falls $\lambda + \mu \geq 0$,

$$\alpha_L(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \mu\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)^n}^2, \quad \text{für alle } \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (3.18)$$

Mit erheblich mehr Aufwand erhält man, im Fall $\mu > 0$, $\lambda \geq 0$, auch die Koerzivität von $\alpha_L(\cdot, \cdot)$ in $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Diese folgt nämlich aus der *Kornschen Ungleichung*

$$\|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)^n}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \gtrsim \|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)^n}^2, \quad \text{für alle } \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (3.19)$$

Siehe [McL00, Theorem 10.2] für einen Beweis.

Von Interesse für später ist es, den Nullraum von $\alpha_L(\cdot, \cdot)$ zu bestimmen. Definiere dafür den Raum der (*infinitesimal rigid body motions*) (Starrkörperbewegungen) durch

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &:= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{für } n = 2, \\ \mathcal{R} &:= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{für } n = 3. \end{aligned}$$

Man überprüft leicht, dass $\varepsilon(\mathbf{r}) = 0 = \operatorname{div} \mathbf{r}$ für alle $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$, und damit $\alpha_L(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 0$. Die Umkehrung liefert das folgende Lemma. Der Beweis ist in [McL00, Lemma 10.5] für 3D zu finden und lässt sich analog für 2D führen.

Lemma 3.3. *Sei $n = 2, 3$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Für jede Distribution $\mathbf{r} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ folgt aus $\varepsilon(\mathbf{r}) = 0$ in Ω , dass $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$. \square*

Es sei noch bemerkt, dass die rigid body motions offensichtlich Lösungen des homogenen Neumann-Problems sind,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\mathbf{r} &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \gamma_1^{\text{int}}\mathbf{r} &= 0 && \text{auf } \Gamma,\end{aligned}$$

denn schließlich gilt $\mathcal{L}\mathbf{r} = -\nabla^T L\varepsilon(\mathbf{r})$ und $\gamma_1^{\text{int}}\mathbf{r} = \mathbf{n}^T \gamma^{\text{int}}(L\varepsilon(\mathbf{r}))$. Ist Ω zusammenhängend, gilt auch die Umkehrung.

Wir benötigen auch noch das folgende kleine Lemma:

Lemma 3.4. *Sei $\mathbf{u} = \mathbf{r}|_\Omega$ für ein $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ und $\gamma^{\text{int}}\mathbf{u} = 0$. Dann folgt $\mathbf{u} = 0$.*

Beweis. Aus $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ folgt $0 = \alpha_L(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \gtrsim \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2$ wegen (3.18). \square

Bemerkung 3.5 (Alternative Formulierung der Lamé-Gleichung). Wie bereits erläutert, ist die Wahl der Matrix L in $\mathcal{L} = -\nabla^T L \nabla$ nicht eindeutig. Die vom rein mathematischen Standpunkt aus naheliegende Wahl ist meiner Meinung nach nicht $L \nabla \mathbf{u} = \sigma(\mathbf{u})$, sondern

$$\tilde{L} \nabla \mathbf{u} = \mu \nabla \mathbf{u} + (\lambda + \mu)(\text{div } \mathbf{u}) I_n.$$

Dies entspricht

$$\tilde{L}_{ij}^{kl} = \mu \delta_{kl} \delta_{ij} + (\lambda + \mu) \delta_{ki} \delta_{lj}.$$

Beispielsweise für $n = 2$ hat man

$$\tilde{L} = \mu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (\lambda + \mu) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Die Bilinearform ist dann einfach

$$\alpha_{\tilde{L}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_\Omega + (\lambda + \mu) (\text{div } \mathbf{u}, \text{div } \mathbf{v})_\Omega,$$

also das, was man durch direkte partielle Integration von

$$(\mathcal{L}\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega = -(\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \text{div } \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega$$

erhält. Die Koerzivität auf $\mathbf{H}^1(\Omega)$ im Sinne von

$$\alpha_{\tilde{L}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \gtrsim \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2$$

ist hier offensichtlich und benötigt keine Kornsche Ungleichung. Dies gibt einem immerhin eine alternative Möglichkeit, das Dirichlet-Problem zu formulieren. Beim Neumann-Problem hat man allerdings eine andere Konormalenableitung und daher keine äquivalente Formulierung.

3.2 Analytische Lösungen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Lamé-Gleichung zur Abwechslung im klassischen Sinn und suchen explizite Lösungen für (1.1) in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Wir machen uns dabei die Identifikation $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ und die einfachen Regeln der komplexen Differentialrechnung zunutze. Des weiteren bestimmen wir Fundamentallösungen, die später für die Formulierung und Implementierung der BEM eine wichtige Rolle spielen. Von den homogenen Lösungen werden wir im letzten Abschnitt 7 Gebrauch machen, um unsere numerischen Löser auf Korrektheit zu überprüfen.

3.2.1 Lamé-Gleichung in 2D

Betrachte auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ die homogene Lamé-Gleichung

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (3.21)$$

Unser Ziel ist es, die allgemeine Lösung dieser Gleichung mit Hilfe analytischer Funktionen zu bestimmen.

Da wir \mathbb{R}^2 und \mathbb{C} identifizieren, schreiben wir

$$\mathbf{u} = (u^1, u^2)^T = u^1 + iu^2.$$

Weiters verwenden wir die folgenden formalen Schreibweisen:

$$\partial_z = \partial_1 - i\partial_2, \quad \partial_{\bar{z}} = \partial_1 + i\partial_2.$$

Man beachte, dass, angewandt auf Funktionen $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\partial_{\bar{z}} = \nabla$ und $i\partial_z = \operatorname{curl}$. Außerdem wird eine *analytische* Funktion $\mathbf{f} = (f^1, f^2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch die Cauchy-Riemann-Gleichungen charakterisiert,

$$\begin{aligned} \partial_1 f^1 - \partial_2 f^2 &= 0, \\ \partial_2 f^1 + \partial_1 f^2 &= 0, \end{aligned}$$

in Kurzform geschrieben

$$\nabla f^1 + \operatorname{curl} f^2 = 0$$

oder

$$\partial_{\bar{z}} f^1 + i\partial_{\bar{z}} f^2 = 0$$

oder einfach

$$\partial_{\bar{z}} \mathbf{f} = 0.$$

Daraus folgt auch leicht

$$\partial_z \bar{\mathbf{f}} = 0$$

und die Tatsache, dass alle Lösungen der Gleichung $\partial_z \mathbf{g} = 0$ von der Form $\mathbf{g} = \bar{\mathbf{f}}$ mit \mathbf{f} analytisch sind. Eine weitere Vorbemerkung: Für \mathbf{f} analytisch gilt

$$\partial_z \mathbf{f} = 2\mathbf{f}'.$$

Dies sieht man, wenn man direkt die Definition der komplexen Ableitung \mathbf{f}' benutzt. Man nehme nun an, dass $\mathbf{u} \in C^2(\Omega)^2$ eine klassische Lösung von (3.21) ist, und zusätzlich sei Ω einfach zusammenhängend. Setze

$$h = \operatorname{div} \mathbf{u} = \partial_1 u^1 + \partial_2 u^2, \quad g = \operatorname{curl} \mathbf{u} = -\partial_2 u^1 + \partial_1 u^2.$$

Dies lässt sich auch schreiben als

$$\partial_z \mathbf{u} = (\partial_1 - i\partial_2)(u^1 + iu^2) = (\partial_1 u^1 + \partial_2 u^2) + i(-\partial_2 u^1 + \partial_1 u^2) = h + ig. \quad (3.22)$$

Mithilfe von $\Delta = \partial_{\bar{z}} \partial_z$ folgt weiter

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \partial_{\bar{z}}(h + ig), \\ \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} &= \partial_{\bar{z}} h, \\ \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} &= \partial_{\bar{z}}((\lambda + 2\mu)h + \mu ig) = 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass

$$\mathbf{f} = (\lambda + 2\mu)h + \mu ig$$

eine analytische Funktion definiert, und offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} \partial_z \mathbf{u} = h + ig &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \operatorname{Re} \mathbf{f} + \frac{i}{\mu} \operatorname{Im} \mathbf{f} \\ &= \frac{1}{2(\lambda + 2\mu)} (\mathbf{f} + \bar{\mathbf{f}}) + \frac{1}{2\mu} (\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}) \\ &= \frac{1}{2\mu(\lambda + 2\mu)} ((\lambda + 3\mu)\mathbf{f} - (\lambda + \mu)\bar{\mathbf{f}}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Nun sei \mathbf{F} eine analytische Funktion, die in Ω

$$\partial_z \mathbf{F} = 2\mathbf{F}' = \mathbf{f}$$

erfüllt (eine solche existiert, da Ω einfach zusammenhängend ist). Wir berechnen auch

$$\partial_z(z\bar{\mathbf{F}}') = (\partial_z z)\bar{\mathbf{F}}' + z\partial_z \bar{\mathbf{F}}' = 2\bar{\mathbf{F}}' = \bar{\mathbf{f}},$$

wobei wir $\partial_z z = 2$ und $\partial_z \bar{\mathbf{F}}' = 0$ ausgenutzt haben, letzteres da \mathbf{F}' analytisch ist. Daher folgt aus (3.23)

$$\partial_z \mathbf{u} = \partial_z \left[\frac{1}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \left((\lambda + 3\mu)\mathbf{F} + (\lambda + \mu)(-z)\bar{\mathbf{F}}' \right) \right].$$

Dies bedeutet, dass eine analytische Funktion \mathbf{G} existiert, sodass

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \left((\lambda + 3\mu)\mathbf{F} + (\lambda + \mu)(-z)\overline{\mathbf{F}'} \right) + \overline{\mathbf{G}}. \quad (3.24)$$

Umgekehrt definiert (3.24) offenbar für beliebige analytische $\mathbf{F}, \mathbf{G}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Lösung von (3.21), und zwar auch wenn Ω nicht einfach zusammenhängend ist. Wir haben daher mit (3.24) eine *allgemeine Lösungsformel* gefunden, die uns, da wir viele analytische Funktionen kennen, auch mit zahlreichen expliziten Lösungen der Lamé-Gleichung ausstattet.

Eine besonders einfache Lösung liefert die Wahl $\mathbf{F} = 0, \mathbf{u} = \overline{\mathbf{G}}$. Diese erfüllt (siehe 3.22)

$$\partial_z \overline{\mathbf{G}} = \operatorname{div} \overline{\mathbf{G}} + i \operatorname{curl} \overline{\mathbf{G}} = 0,$$

also insbesondere

$$\begin{aligned} \Delta \overline{\mathbf{G}} &= 0, \\ \operatorname{div} \overline{\mathbf{G}} &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist $(\mathbf{u}, p) = (\overline{\mathbf{G}}, c)$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ auch eine explizite Lösung des Stokes-Problems in Ω ,

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

3.2.2 Fundamentallösungen

Wir suchen nun Fundamentallösungen $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$ der Lamé-Gleichungen auf \mathbb{R}^2 , d.h. wir wollen, im distributionellen Sinn,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathbf{U}_1 &= (\delta, 0)^T, \\ \mathcal{L}\mathbf{U}_2 &= (0, \delta)^T. \end{aligned}$$

Wir gehen zunächst heuristisch vor. Da jede Fundamentallösung \mathbf{U}^* die Lamé Gleichung (3.21) in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erfüllt, macht es Sinn, Funktionen der Bauart (3.24) zu betrachten. Außerdem sollte \mathbf{U}^* bei 0 eine integrierbare Singularität haben, es ist also sehr nahe liegend, $\mathbf{F}(z) = -\log z$ auszuprobieren. Nun ist zwar $\operatorname{Re}\mathbf{F}(z) = -\log|z|$ harmonisch in Ω , aber $\operatorname{Im}\mathbf{F}(z) = -\arg(z)$ nicht einmal stetig. Wir können allerdings einfach den Imaginärteil eliminieren, indem wir

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \left((\lambda + 3\mu)\mathbf{F} + (\lambda + \mu)(-z)\overline{\mathbf{F}'} \right)$$

wählen. In (3.24) eingesetzt liefert das

$$\mathbf{U}^* = \frac{1}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \left((\lambda + 3\mu)(\mathbf{F} + \overline{\mathbf{F}}) + (\lambda + \mu)(-z - \bar{z})\overline{\mathbf{F}'} \right).$$

Wir haben $(\mathbf{F} + \overline{\mathbf{F}}) = -2 \log |z|$ und, mit $z = z_1 + iz_2$,

$$(-z - \bar{z}) \overline{\mathbf{F}'(z)} = (z + \bar{z}) \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 2 \frac{z_1 z}{|z|^2}.$$

Also erhalten wir als Kandidaten für eine Fundamentallösung

$$\mathbf{U}^*(z) = \frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)} \left(-(\lambda + 3\mu) \log |z| + (\lambda + \mu) \frac{z_1 z}{|z|^2} \right).$$

In der Tat stellt sich heraus ([McL00, Theorem 10.4]), dass im Fall $\mu, (\lambda + 2\mu) \neq 0$

$$\mathcal{L}\mathbf{U}^* = 4\pi(\delta, 0)^T.$$

Wir müssen also \mathbf{U}^* nur um den Faktor $(4\pi)^{-1}$ korrigieren und erhalten \mathbf{U}_1 . Damit bekommt man auch \mathbf{U}_2 via Vertauschung von z_1 und z_2 . Wir fassen in weiterer Folge \mathbf{U}_1 und \mathbf{U}_2 zu einer Matrix

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) \in L^2(\mathbb{R}^2)^{2 \times 2}$$

zusammen, die wir als die Fundamentallösung bezeichnen.

In \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, bekommt man eine analoge Fundamentallösung, indem man $-\log |z|$ durch $|z|^{2-n}$ ersetzt und den Vorfaktor anpasst. Eine gemeinsame Formel für $n = 2, 3$ lautet

$$\mathbf{U}(z) = \frac{1}{4(n-1)\pi} \frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)} \left((\lambda + 3\mu) E_n(z) I_n + (\lambda + \mu) \frac{zz^T}{|z|^n} \right), \quad (3.25)$$

siehe [McL00, Theorem 10.4], mit Einheitsmatrix I_n und

$$E_n(z) = \begin{cases} -\log |z|, & n = 2, \\ \frac{1}{|z|}, & n = 3. \end{cases}$$

3.3 Integraloperatoren

In diesem Abschnitt formulieren wir das Randwertproblem (1.1)–(1.2) als Integralgleichungen auf dem Rand und diskutieren die Eigenschaften der involvierten Integraloperatoren. Wir treffen die übliche Annahme, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Gebiet mit Rand Γ ist. Sei zunächst \mathcal{P} ein Differentialoperator der Form (3.1) und setzen wir voraus, dass dieser symmetrisch und *elliptisch* ist. Letzteres bedeutet

$$\eta^T \mathbf{P}(\xi) \eta \geq c |\eta|^2 |\xi|^2 \quad \text{für alle } \eta, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (3.26)$$

wobei $\mathbf{P}(\xi) = (2\pi)^2 \xi^T A \xi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ das mit \mathcal{P} assoziierte Polynom ist.

Die Bedeutung des Polynoms $\mathbf{P}(\xi)$ ergibt sich aus den Eigenschaften der *Fouriertransformation*

$$\widehat{\mathbf{u}}(\xi) := \mathcal{F}(\mathbf{u})(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(\xi \cdot x)} \mathbf{u}(x) dx.$$

Die Fouriertransformation agiert bekanntlich als Isomorphismus $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf dem *Schwartz-Raum* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der rapide abklingenden, unendlich oft differenzierbaren Funktionen. Ihre Inverse ist gegeben durch die adjungierte $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ bezüglich des $L^2(\mathbb{R}^n)$ -Skalarproduktes. Via Dualität haben $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ stetige Fortsetzungen auf den Dualraum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$ der *temperierten* („langsam ansteigenden“) *Distributionen*, welcher stetig in den Raum der *Distributionen* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) := \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^*$ eingebettet ist.

Für die Definitionen der Topologien auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und deren Dualräumen sowie als Referenz für die Eigenschaften der Fouriertransformation verweisen wir auf [Tay96].

Wir besprechen nun, wie man eine Fundamentallösung des Differentialoperators \mathcal{P} bestimmt; dies ist im Wesentlichen der Inhalt von [McL00, Theorem 6.8]. Eine Fundamentallösung \mathbf{U} muss die matrixwertige Gleichung

$$\mathcal{P}\mathbf{U} = \delta I_n$$

lösen, mit der Einheitsmatrix I_n und der Delta-Distribution δ . Wendet man auf beide Seiten die Fouriertransformation an, erhält man (wie sich leicht zeigen lässt)

$$\mathbf{P}(\xi)\widehat{\mathbf{U}}(\xi) = I_n. \quad (3.27)$$

Diese Gleichung muss allerdings nicht punktweise für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ erfüllt sein, sondern nur im Sinne von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Tatsächlich ergibt (3.27) für $\xi = 0$ keinen Sinn, da $\mathbf{P}(0) = 0$.

Für $\xi \neq 0$ allerdings ist wegen der Elliptizität (3.26) die Matrix $\mathbf{P}(\xi)$ invertierbar. Wir können also $\mathbf{P}(\xi)^{-1}$ als Funktion $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ auffassen. Sie ist homogen vom Grad -2 und hat daher eine Singularität der Ordnung $O(|\xi|^{-2})$ bei 0.

Im Fall $n \geq 3$ ist $\mathbf{P}(\xi)^{-1}$ also lokal integrierbar und kann insbesondere als Distribution aufgefasst werden; wegen des polynomiellen Abklingverhaltens $O(|\xi|^{-2})$ für $\xi \rightarrow \infty$ sogar als temperierte Distribution, siehe [McL00, Lemma 5.12].

Für $n = 2$ geht die lokale Integrierbarkeit verloren. Wie in [McL00] ausgeführt wird, kann man aber immer noch die „finite part“-Distribution f.p. $\mathbf{P}(\xi)^{-1}$ betrachten, welche auch wieder in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)^n$ liegt und darüberhinaus

$$\mathbf{P}(\xi)\text{f.p.}\mathbf{P}(\xi)^{-1} = I_n \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)^n$$

erfüllt.

Zusammengefasst erhält man durch

$$\mathbf{U} := \begin{cases} \mathcal{F}^*(\mathbf{P}(\xi)^{-1}) & n \geq 3, \\ \mathcal{F}^*(\text{f.p.}\mathbf{P}(\xi)^{-1}) & n = 2 \end{cases}$$

eine temperierte Distribution \mathbf{U} , welche (3.27) erfüllt und daher die gesuchte Fundamentallösung für \mathcal{P} ist. In [McL00, Lemma 6.2] wird auch gezeigt, dass $\mathbf{U}: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ mit einer $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})^n$ -Funktion übereinstimmt und $\mathbf{U} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)^n$ erfüllt.

Zwei weitere Eigenschaften von \mathbf{U} lassen sich direkt aus (3.27) (punktweise für $\xi \neq 0$) ablesen, nämlich Symmetrie $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$ (dies folgt aus der Symmetrie von \mathcal{P} wegen

$\mathbf{P}(\xi) = \mathbf{P}(\xi)^T$) und dass \mathbf{U} gerade ist, $\mathbf{U}(-z) = \mathbf{U}(z)$ (wegen $\mathbf{P}(-\xi) = \mathbf{P}(\xi)$). Aus der Elliptizität (3.26) folgt außerdem die Schranke

$$|\widehat{\mathbf{U}}(\xi)|_2 = |\mathbf{P}(\xi)^{-1}|_2 \leq \frac{1}{c|\xi|^2} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (3.28)$$

wobei $|\cdot|_2$ die ℓ_2 -Matrix-Norm bezeichnet.

Beispiel 3.6. Dies alles soll sich natürlich insbesondere für $\mathcal{P} = \mathcal{L}$ anwenden lassen. Tatsächlich gilt für das assoziierte Polynom $\mathbf{L}(\xi)$ des Lamé-Operators

$$(2\pi)^{-2} \eta^T \mathbf{L}(\xi) \eta = \mu |\xi|^2 |\eta|^2 + (\lambda + \mu) (\eta \cdot \xi)^2 \geq \min(\mu, 2\mu + \lambda) |\xi|^2 |\eta|^2,$$

mit Gleichheit für $\eta \perp \xi$ bzw. $\eta = \xi$, also ist dieser genau dann elliptisch, wenn $\mu > 0$ und $2\mu + \lambda > 0$.

3.3.1 Potentiale und Abbildungseigenschaften

Wir definieren zuerst das *Newton-Potential* \mathcal{N} durch

$$\mathcal{N}\mathbf{f} = \mathbf{U} * \mathbf{f} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{U}(\cdot - y) \mathbf{f}(y) dy.$$

Der Ausdruck rechts macht wegen $\mathbf{U} \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)^n$ jedenfalls für $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ Sinn, aber bekanntlich kann die Faltung auch für zwei Distributionen erklärt werden, falls zumindest eine der beiden kompakten Träger hat. Wir betrachten daher den Raum $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ der Distributionen mit kompaktem Träger, der als Dualraum von $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ charakterisiert werden kann. Wegen $\mathbf{U}(-z)^T = \mathbf{U}(z)$ und Fubini gilt

$$(\mathcal{N}\mathbf{f}, \mathbf{g})_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{g}(x)^T \mathbf{U}(x - y) \mathbf{f}(y) dy dx = (\mathbf{f}, \mathcal{N}\mathbf{g})_{\mathbb{R}^n} \quad \text{für alle } \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Für $\mathbf{f} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{g} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir folglich

$$(\mathcal{N}\mathbf{f}, \mathbf{g})_{\mathbb{R}^n} := (\mathbf{f}, \mathcal{N}\mathbf{g})_{\mathbb{R}^n}. \quad (3.29)$$

Aus den Eigenschaften der Faltung ([Tay96]) folgt $\mathcal{N}: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, was die Definition rechtfertigt und $\mathcal{N}: \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ zeigt. Da \mathbf{U} eine Fundamentallösung ist, gilt weiters

$$\mathcal{P}(\mathbf{U} * \mathbf{f}) = \mathbf{U} * \mathcal{P}\mathbf{f} = \delta I_n * \mathbf{f} = \mathbf{f},$$

mit anderen Worten, $\mathcal{P}\mathcal{N}\mathbf{f} = \mathcal{N}\mathcal{P}\mathbf{f} = \mathbf{f}$, d.h. \mathcal{N} ist die *Inverse* zu $\mathcal{P}: \text{ran}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Sei nun $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von $\mathcal{P}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ wie in Lemma 3.2. Wenden wir \mathcal{N} auf (3.10) an, erhalten wir eine *Darstellungsformel* für \mathbf{u} .

$$\chi_\Omega \mathbf{u} = \mathcal{N}\chi_\Omega \mathbf{f} - \mathcal{N}\gamma_1^* \gamma \mathbf{u} + \mathcal{N}\gamma^* \gamma_1 \mathbf{u}$$

Hier müssen wir annehmen, dass $\chi_\Omega \mathbf{f}$ kompakten Träger in \mathbb{R}^n hat, denn dadurch ist sichergestellt, dass *alle vier* Terme in (3.10) kompakten Träger haben. (Die Distributionen

$\gamma_1^* \gamma \mathbf{u}$ und $\gamma^* \gamma_1 \mathbf{u}$ haben Träger in Γ , siehe auch Beweis von Lemma 3.13.) Diese Annahme ist insbesondere erfüllt, wenn Ω beschränkt ist. Dies gibt nun Anlass zur Definition

$$\mathcal{V} := \mathcal{N} \gamma^* \quad \text{und} \quad \mathcal{K} := \mathcal{N} \gamma_1^*.$$

Wir nennen \mathcal{V} das *Einfachschichtpotential* und \mathcal{K} das *Doppelschichtpotential*. Wir formulieren nun die bewiesene Formel als Satz. Indem wir nur Testfunktionen in $\mathcal{D}(\Omega)$ betrachten, können wir \mathbf{u} statt $\chi_\Omega \mathbf{u}$ schreiben, und der Übersichtlichkeit halber identifizieren wir $\mathbf{f} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ mit $\chi_\Omega \mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 3.7 (Darstellungsformel). *Sei $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $\mathbf{f} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ mit $\text{supp } \mathbf{f} \Subset \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{P}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ in $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\mathbf{u} = \mathcal{N}\mathbf{f} - \mathcal{K}(\gamma\mathbf{u}) + \mathcal{V}(\gamma_1\mathbf{u}) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

□

Durch Testen mit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ erhält man die Darstellungen

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}\mathbf{f})(x) &= \int_{\Omega} \mathbf{U}(x-y)\mathbf{f}(y) dy, \\ (\mathcal{V}\mathbf{g})(x) &= \int_{\Gamma} \mathbf{U}(x-y)\mathbf{g}(y) dy, \\ (\mathcal{K}\mathbf{g})(x) &= \int_{\Gamma} (\gamma_{1,y}\mathbf{U}(x-y))\mathbf{g}(y) dy, \end{aligned}$$

für $x \in \Omega$, wann immer die Voraussetzungen an den Satz von Fubini erfüllt sind – wegen $\mathbf{U} \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)^n \cap \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})^n$ ist das sicher für $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^1(\Gamma)$ der Fall.

Als nächstes beweisen wir Stetigkeitseigenschaften der Potentiale \mathcal{N}, \mathcal{V} und \mathcal{K} . Die zentrale Abschätzung ist

$$\|\mathcal{N}\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{f}\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}.$$

Wir wollen ein etwas allgemeineres Resultat zeigen, dessen Beweis von [McL00, Theorem 6.1] inspiriert ist. Dafür benötigen wir erst einen Hilfssatz. Er ist die quantitative Version der bereits benutzten Tatsache, dass die Faltung mit einer $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -Funktion beliebig glättend wirkt. Wir erinnern hier nochmals an die Charakterisierung der Sobolevräume mittels Fouriertransformation (2.32).

Lemma 3.8. *Seien $s, t \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{K} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^n$. Dann gilt*

$$\|\mathbf{K} * \mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^t(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)} \quad \text{für alle } \mathbf{f} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis. Wegen $\widehat{\mathbf{K}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^n$ gilt $|\widehat{\mathbf{K}}(\xi)|_2^2 \lesssim (1 + |\xi|^2)^{s-t}$ und daher

$$(1 + |\xi|^2)^t |\widehat{\mathbf{K}}(\xi)\widehat{\mathbf{f}}(\xi)|^2 \lesssim (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{\mathbf{f}}(\xi)|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt. □

Wir formulieren und beweisen nun unser Theorem.

Theorem 3.9. *Seien Ω und Ω^* beschränkte offene Mengen und $s \in \mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung $\mathcal{N}: \widetilde{\mathbf{H}}^s(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{s+2}(\Omega^*)$ stetig.*

Beweis. Wir zeigen die Abschätzung zunächst für $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(\Omega)$. Sei $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine Abschneidefunktion, die $0 \leq \eta(\xi) \leq 1$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $\eta(\xi) = 1$ für $|\xi| \leq 1$ erfüllt. Wir zerlegen

$$\mathbf{U} = \mathcal{F}^*((1 - \eta)\widehat{\mathbf{U}}) + \mathcal{F}^*(\eta\widehat{\mathbf{U}})$$

und definieren entsprechend

$$\mathcal{N}^0 \mathbf{f} = \mathcal{F}^*((1 - \eta)\widehat{\mathbf{U}}) * \mathbf{f} \quad \text{und} \quad \mathcal{N}^\infty \mathbf{f} = \mathcal{F}^*(\eta\widehat{\mathbf{U}}) * \mathbf{f}.$$

Es gilt also $\mathcal{N} = \mathcal{N}^0 + \mathcal{N}^\infty$. Für die Abschätzung von \mathcal{N}^0 erinnern wir an (3.28) und berechnen

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}^0 \mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{s+2}(\Omega^*)}^2 &\leq \|\mathcal{N}^0 \mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{s+2}(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s+2} |(1 - \eta(\xi))\widehat{\mathbf{U}}(\xi)\widehat{\mathbf{f}}(\xi)|^2 d\xi \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{|\xi| \leq 1\}} (1 + |\xi|^2)^{s+2} |\xi|^{-4} |\widehat{\mathbf{f}}(\xi)|^2 d\xi \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{\mathbf{f}}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\mathbf{f}\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^s(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt nach Definition der $\widetilde{\mathbf{H}}^s(\Omega)$ -Norm, vergleiche (3.9).

Nun schätzen wir \mathcal{N}^∞ mit Hilfe von Lemma 3.8 ab. Wir bemerken, dass $\widetilde{\mathbf{K}} := \mathcal{F}^*(\eta\widehat{\mathbf{U}})$ als Distribution wohldefiniert ist, weil $\eta\widehat{\mathbf{U}} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)^n \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)^n$. Darüber hinaus gilt sogar $\widetilde{\mathbf{K}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^n$ nach dem Satz von Payley-Wiener-Schwartz, siehe [Tay96]. (In diesem Argument geht wesentlich ein, dass $\widehat{\mathbf{U}}$ eine Distribution ist.)

Da Ω^* und Ω beschränkt sind, können wir ein $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ wählen, welches $\mu(x - y) = 1$ für $x \in \Omega^*, y \in \Omega$ erfüllt. Wegen $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(\Omega)$ folgt

$$(\widetilde{\mathbf{K}} * \mathbf{f})(x) = \int_{\Omega} \widetilde{\mathbf{K}}(x - y)\mathbf{f}(y) dy = \int_{\Omega} \mu(x - y)\widetilde{\mathbf{K}}(x - y)\mathbf{f}(y) dy \quad \text{für } x \in \Omega^*, \quad (3.30)$$

also $(\widetilde{\mathbf{K}} * \mathbf{f})|_{\Omega^*} = ((\mu\widetilde{\mathbf{K}}) * \mathbf{f})|_{\Omega^*}$. Nun wenden wir Lemma 3.8 mit $\mathbf{K} = \mu\widetilde{\mathbf{K}} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^n$ an und erhalten

$$\|\mathcal{N}^\infty \mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{s+2}(\Omega^*)} = \|(\mathbf{K} * \mathbf{f})|_{\Omega^*}\|_{\mathbf{H}^{s+2}(\Omega^*)} \leq \|\mathbf{K} * \mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{s+2}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)} = \|\mathbf{f}\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^s(\Omega)}.$$

Zusammen erhalten wir schlussendlich

$$\|\mathcal{N} \mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{s+2}(\Omega^*)} \lesssim \|\mathbf{f}\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^s(\Omega)} \quad \text{für alle } \mathbf{f} \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Üblicherweise würden wir nun den Beweis mit einem Hinweis auf die eindeutige stetige Fortsetzung von

$$\mathcal{N}|_{\mathcal{D}(\Omega)}: (\mathcal{D}(\Omega), \|\cdot\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^s(\Omega)}) \rightarrow \mathbf{H}^{s+2}(\Omega^*)$$

nach $\widetilde{\mathbf{H}}^s(\Omega)$ abschließen. Doch in diesem Fall *haben* wir \mathcal{N} durch (3.29) bereits auf ganz $\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ definiert, nämlich, in der Sprache der Funktionalanalysis, als *konjugierten* Operator von $\mathcal{N}|_{\mathcal{D}(\Omega)}$. Dieser ist daher ebenfalls stetig als Abbildung

$$\mathcal{N} = (\mathcal{N}|_{\mathcal{D}(\Omega)})^*: (\mathbf{H}^{s+2}(\Omega^*))^* \rightarrow (\mathcal{D}(\Omega), \|\cdot\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^s(\Omega)})^*,$$

und wegen den Isomorphismen $(\mathbf{H}^{s+2}(\Omega^*))^* = \widetilde{\mathbf{H}}^{-s-2}(\Omega^*)$ und $(\mathcal{D}(\Omega), \|\cdot\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^s(\Omega)})^* = \mathbf{H}^{-s}(\Omega)$ haben wir stattdessen die Stetigkeit von

$$\mathcal{N}: \widetilde{\mathbf{H}}^{-s-2}(\Omega^*) \rightarrow \mathbf{H}^{-s}(\Omega)$$

gezeigt. Da $s \in \mathbb{R}$ beliebig war und Ω und Ω^* austauschbar sind, ist dies aber gerade die Behauptung! \square

Sind Ω und Ω^* disjunkt, lässt sich mit den Techniken des obigen Beweises sogar deutlich mehr zeigen, nämlich Glattheit von $\mathcal{N}\mathbf{f}$.

Lemma 3.10. (i) Sind Ω und Ω^* beschränkt, offen und erfüllen $\overline{\Omega} \cap \overline{\Omega^*} = \emptyset$, dann ist $\mathcal{N}: \widetilde{\mathbf{H}}^s(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^t(\Omega^*)$ stetig für beliebige $s, t \in \mathbb{R}$.

(ii) Sei $\mathbf{f} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, und zusätzlich gelte $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)$ für irgendein $s \in \mathbb{R}$. Dann folgt $\mathcal{N}\mathbf{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \text{supp}\mathbf{f})$.

Beweis. (i) Sei zunächst $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(\Omega)$. Nach unseren Annahmen ist $\overline{\Omega^*} - \overline{\Omega}$ eine kompakte Menge, welche die Null nicht enthält. Wir können daher ein $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ wählen, sodass $\mu(x - y) = 1$ für $x \in \Omega^*$, $y \in \Omega$ und $\mu(0) = 0$. Wie in (3.30) zeigt man nun $\mathcal{N}\mathbf{f}|_{\Omega^*} = ((\mu\mathbf{U}) * \mathbf{f})|_{\Omega^*}$. Wegen $\mathbf{U} \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$ und $\mu(0) = 0$ ist aber $\mu\mathbf{U} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^n$, und wir können wieder Lemma 3.8 anwenden:

$$\|\mathcal{N}\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^t(\Omega^*)} = \|(\mu\mathbf{U}) * \mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^t(\Omega^*)} \leq \|(\mu\mathbf{U}) * \mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^t(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)} = \|\mathbf{f}\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^s(\Omega)}.$$

Damit ist die Beschränktheit für $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(\Omega)$ gezeigt. Der allgemeine Fall $\mathbf{f} \in \widetilde{\mathbf{H}}^s(\Omega)$ folgt wie zuvor über Dualität.

(ii) Wir werden zeigen, dass $\mathcal{N}\mathbf{f} \in \mathbf{H}^t(\Omega^*)$ für jedes $t > 0$ und jedes beschränkte, offene Ω^* mit $\text{supp}\mathbf{f} \cap \overline{\Omega^*} = \emptyset$. Die Behauptung $\mathcal{N}\mathbf{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \text{supp}\mathbf{f})$ folgt dann sofort aus dem Sobolev'schen Einbettungssatz. Für gegebenes Ω^* , wähle eine beschränkte, offene Menge $\Omega \supset \text{supp}\mathbf{f}$ die immer noch $\overline{\Omega} \cap \overline{\Omega^*} = \emptyset$ erfüllt. Dann gilt $\mathbf{f} \in \widetilde{\mathbf{H}}^s(\Omega)$ und nach Teil (i) folgt $\mathcal{N}\mathbf{f} \in \mathbf{H}^t(\Omega^*)$, wie behauptet. \square

Bemerkung 3.11. Die Voraussetzung in (ii), dass \mathbf{f} zumindest in irgendeinem Sobolev-Raum liegt, ist eigentlich gar keine Einschränkung: Man kann zeigen, dass *jede* Distribution mit kompaktem Träger eine Darstellung als Summe mehrfacher Ableitungen von $C_c(\mathbb{R}^n)$ -Funktionen besitzt und insbesondere in einem Sobolev-Raum liegt, siehe [Rud91, Theorem 6.27]. \square

Die Abbildungseigenschaften von \mathcal{V} und \mathcal{K} folgert man nun ganz leicht aus jenen von \mathcal{N} .

Korollar 3.12. *Sei Ω beschränkt. Die folgenden Abbildungen sind stetig:*

$$\mathcal{V}: \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \mathcal{K}: \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Sei $O \supset \bar{\Omega}$ ein weiteres beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann sind \mathcal{V} und \mathcal{K} sogar stetig als Abbildungen

$$\mathcal{V}: \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^1(O), \quad \mathcal{K}: \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^1(O \cap \Omega').$$

Beweis. Wir haben per Definition $\mathcal{V} = \mathcal{N}\gamma^* = (\gamma\mathcal{N})^*$ und $\mathcal{K} = \mathcal{N}\gamma_1^* = (\gamma_1\mathcal{N})^*$, also reicht es für die erste Aussage, die Stetigkeit der konjugierten Operatoren

$$\gamma\mathcal{N}: \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma), \quad \gamma_1\mathcal{N}: \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$$

nachzuprüfen. Für $\gamma\mathcal{N}$ ist dies klar wegen $\mathcal{N}: \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega)$. Mit (3.8) und $\mathcal{P}\mathcal{N}\mathbf{f} = \mathbf{f}$ haben wir außerdem

$$\|\gamma_1\mathcal{N}\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \lesssim \|\mathcal{N}\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\mathcal{P}\mathcal{N}\mathbf{f}\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{f}\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}$$

für alle $\mathbf{f} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$, und die Behauptung für $\gamma_1\mathcal{N}$. Die zweite Aussage folgt genauso, siehe auch [McL00, Theorem 6.11]. \square

Wichtig sind auch die Sprung-Eigenschaften der Potentiale \mathcal{V} und \mathcal{K} entlang von Γ . Wir erinnern an die Definition von $[\cdot]_\Gamma$ und $[\gamma_1(\cdot)]_\Gamma$ am Ende von 3.1.1.

Lemma 3.13 (Sprungrelationen). *Für alle $\phi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ und $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ gilt:*

1. $\mathcal{P}\mathcal{V}\phi = 0$ und $\mathcal{P}\mathcal{K}\mathbf{g} = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$.
2. $[\mathcal{V}\phi]_\Gamma = 0$ und $[\gamma_1\mathcal{V}\phi]_\Gamma = -\phi$.
3. $[\mathcal{K}\mathbf{g}]_\Gamma = \mathbf{g}$ und $[\gamma_1\mathcal{K}\mathbf{g}]_\Gamma = 0$.

Beweis. Wir beweisen nur die ersten beiden Punkte, für den dritten siehe [McL00, Theorem 6.11]. Die erste Behauptung folgt aus $\mathcal{P}\mathcal{V} = \gamma^*$ und $\mathcal{P}\mathcal{K} = \gamma_1^*$, denn für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ haben wir

$$\begin{aligned} (\gamma^*\phi, \varphi)_{\mathbb{R}^n} &= (\phi, \gamma\varphi)_\Gamma = 0, \\ (\gamma_1^*\mathbf{g}, \varphi)_{\mathbb{R}^n} &= (\mathbf{g}, \gamma_1\varphi)_\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Wegen $\mathcal{V}\phi \in \mathbf{H}^1(O)$ für $O \supset \bar{\Omega}$ gilt $\gamma^{\text{int}}\mathcal{V}\phi = \gamma^{\text{ext}}\mathcal{V}\phi$, also die erste Sprungrelation. Die zweite Greensche Formel (3.10), angewandt auf $\mathcal{V}\phi$ in Ω und Ω' , zeigt

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\chi_\Omega\mathcal{V}\phi) &= -\gamma_1^*\gamma^{\text{int}}\mathcal{V}\phi + \gamma^*\gamma_1^{\text{int}}\mathcal{V}\phi, \\ \mathcal{P}(\chi_{\Omega'}\mathcal{V}\phi) &= +\gamma_1^*\gamma^{\text{ext}}\mathcal{V}\phi - \gamma^*\gamma_1^{\text{ext}}\mathcal{V}\phi. \end{aligned}$$

Die verkehrten Vorzeichen in der zweiten Zeile kommen daher, dass wir für γ_1^* und γ_1^{ext} den Normalvektor von Ω verwenden. Addiert man die Gleichungen, verschwindet der erste Term auf der rechten Seite und man erhält

$$\gamma^* \phi = \mathcal{P}\mathcal{V}\phi = -\gamma^*[\gamma_1 \mathcal{V}\phi]_\Gamma$$

Dies ist die zweite Sprungrelation, denn γ^* ist offensichtlich injektiv. \square

Zu guter Letzt schließen wir an Lemma 3.10 an und zeigen, dass $\mathcal{V}\phi$ und $\mathcal{K}g$ außerhalb von Γ stets glatt sind.

Lemma 3.14. *Für $\phi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ und $g \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ gilt $\mathcal{V}\phi, \mathcal{K}g \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$.*

Beweis. Wir haben $\mathcal{V}\phi = \mathcal{N}(\gamma^* \phi)$ und $\mathcal{K}g = \mathcal{N}(\gamma_1^* g)$, wobei $\gamma^* \phi, \gamma_1^* g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ Distributionen sind, die kompakten Träger in Γ haben. Man sieht auch sehr leicht $\gamma^* \phi \in \mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)$ und $\gamma_1^* g \in \mathbf{H}^{-2}(\mathbb{R}^n)$, zweiteres etwa indem man sich die Stetigkeit von $\gamma_1 : \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma)$ überlegt. Die Behauptung folgt damit aus Lemma 3.10 (ii). \square

Als Korollar bekommen wir ein klassisches Resultat aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Korollar 3.15 (Elliptische Regularität). *Sei $u \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von $\mathcal{P}u = 0$ in Ω . Dann folgt sogar $u \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$ und u ist eine klassische Lösung.*

Beweis. Die Glattheit von u folgt einfach aus der Darstellungsformel $u = \mathcal{V}\gamma_1^{\text{int}}u - \mathcal{K}\gamma^{\text{int}}u$ in Ω . Dass u dann eine klassische Lösung ist, ist klar. \square

3.3.2 Randintegralgleichungen

Korollar 3.12 impliziert das folgende.

Korollar 3.16. *Setze $V := \gamma\mathcal{V}$ und $K := \frac{1}{2} + \gamma^{\text{int}}\mathcal{K} = -\frac{1}{2} + \gamma^{\text{ext}}\mathcal{K}$. Dies definiert stetige Operatoren*

$$V : \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma), \quad K : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma).$$

\square

Offensichtlich ist $V = \gamma\mathcal{N}\gamma^*$ symmetrisch bezüglich $(\cdot, \cdot)_\Gamma$. Für die Adjungierte des K -Operators schreiben wir K' , und es gilt $\frac{1}{2} + K' = \gamma_1^{\text{int}}\mathcal{V}$ nach [McL00, (7.5)]. Üblicherweise definiert man auch $W := \gamma_1^{\text{int}}\mathcal{K} = \gamma_1^{\text{ext}}\mathcal{K}$. Der Übersichtlichkeit halber fassen wir die Relationen der Potentiale \mathcal{V}, \mathcal{K} mit den vier Randintegraloperatoren V, K, K', W noch einmal zusammen:

$$\begin{aligned} \gamma^{\text{int}}\mathcal{V} &= V, & \gamma^{\text{int}}\mathcal{K} &= K - \frac{1}{2}, \\ \gamma^{\text{ext}}\mathcal{V} &= V, & \gamma^{\text{ext}}\mathcal{K} &= K + \frac{1}{2}, \\ \gamma_1^{\text{int}}\mathcal{V} &= K' + \frac{1}{2}, & \gamma_1^{\text{int}}\mathcal{K} &= W, \\ \gamma_1^{\text{ext}}\mathcal{V} &= K' - \frac{1}{2}, & \gamma_1^{\text{ext}}\mathcal{K} &= W. \end{aligned}$$

Es gibt auch für V und K Darstellungsformeln, nämlich

$$(V\phi)(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{U}(x-y)\phi(y) dy, \quad \text{für alle } \phi \in \mathbf{L}^{\infty}(\Gamma) \text{ und } x \in \Gamma,$$

$$(K\mathbf{g})(x) = \text{p.v.} \int_{\Gamma} (\gamma_{1,y}\mathbf{U}(x-y))\mathbf{g}(y) dy, \quad \text{für alle } \mathbf{g} \in \mathcal{D}(\Gamma) \text{ und fast alle } x \in \Gamma.$$

Die zweite Formel ist ein Cauchyscher Hauptwert (engl. *principal value*) und gilt an allen Punkten, wo Γ differenzierbar ist. Für den Beweis siehe [McL00, Theorem 7.4]. Die Formel für V steht in [McL00, (7.8)].

Mit Hilfe dieser beiden *Randintegraloperatoren* können wir das Dirichlet-Problem (1.1)–(1.2) in eine Integralgleichung auf Γ umschreiben. Der Einfachheit halber betrachten wir nur den Fall $\mathbf{f} = 0$. Sei also $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ und $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ die schwache Lösung von $\mathcal{P}\mathbf{u} = 0$ in Ω , $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ auf Γ . Nach Theorem 3.7 gilt die Darstellungsformel

$$\mathbf{u} = -\mathcal{K}\mathbf{g} + \mathcal{V}(\gamma_1\mathbf{u}).$$

Setzen wir $\phi := \gamma_1\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ und wenden den Spuoperator an, folgt daraus eine *Randintegralgleichung* für ϕ ,

$$V\phi = (K + \frac{1}{2})\mathbf{g}. \quad (3.31)$$

Diese Gleichung ist sogar äquivalent zum Dirichlet-Problem, denn für jede Lösung $\phi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ erfüllt

$$\mathbf{u} := -\mathcal{K}\mathbf{g} + \mathcal{V}\phi$$

offensichtlich $\mathcal{P}\mathbf{u} = 0$ und $\gamma\mathbf{u} = \mathbf{g}$.

Wir werden stellenweise allgemeinere Abbildungseigenschaften von V und K benötigen. Für allgemeine elliptische Systeme der Form (3.1) sind diese Resultate eher schwer in der Literatur zu finden; die zitierte Arbeit [HMT10] ist relativ neu und behandelt eine etwas größere Klasse von Gebieten Ω , welche die Lipschitz-Gebiete enthält. Es sei angemerkt, dass dort nur die Endpunkte $s = 0, 1$ betrachtet werden, aber der Fall $s \in (0, 1)$ unmittelbar durch Interpolation folgt.

Theorem 3.17 ([HMT10, Theorem 3.32, Corollaries 3.38, 3.39]). *Sei $s \in [0, 1]$. Die Operatoren V, K sind beschränkt (fortsetzbar) als Abbildungen*

$$V: \mathbf{H}^{s-1}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^s(\Gamma), \quad K: \mathbf{H}^s(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^s(\Gamma).$$

□

Zum Abschluss betrachten wir wieder speziell den Lamé-Operator \mathcal{L} . Hier kann man ein Resultat zeigen, welches für unsere Analysis der BEM von großer Bedeutung ist. Es liefert einen Beweis für die Eindeutigkeit der Lösungen von (3.31).

Theorem 3.18 (Elliptizität von V , [Ste08, Theorem 6.36 und 6.38]). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, $n = 3$ und $\mathcal{P} = \mathcal{L}$ mit der Fundamentallösung \mathbf{U} aus (3.25). Dann ist V elliptisch in $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ im Sinne von*

$$(V\phi, \phi)_{\Gamma} \geq c_V \|\phi\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } \phi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma).$$

Insbesondere ist $V: \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ ein Isomorphismus mit $\|V^{-1}\| \leq c_V^{-1}$, und

$$(\phi, \chi)_V := (V\phi, \chi)_\Gamma$$

ein äquivalentes Skalarprodukt auf $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$.

Im Fall $n = 2$ gelten dieselben Aussagen für $h\Omega$, wo $h > 0$ ein hinreichend kleiner Skalierungsparameter ist, oder, äquivalent dazu, für Ω und die skalierte Fundamentallösung $U_c(z) = U(z) + cI$ mit hinreichend großem $c > 0$. \square

Das zentrale Hilfsmittel im Beweis von Theorem 3.18 ist das folgende Lemma, welches wir später noch benötigen werden. Wir definieren dafür den Raum

$$\mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma) := \{\phi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) : (\phi, \mathbf{c})_\Gamma = 0 \text{ für alle } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Lemma 3.19 (siehe [Ste08, Beweis von Theorem 6.36]). *Sei $\mathcal{P} = \mathcal{L} = -\nabla^T L \nabla$. Dann gilt*

$$(V\phi, \phi)_\Gamma = (L\nabla(\mathcal{V}\phi), \nabla(\mathcal{V}\phi))_{\mathbb{R}^n} \quad \text{für alle } \phi \in \begin{cases} \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma), & n = 3, \\ \mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma), & n = 2. \end{cases}$$

\square

Von Interesse im Fall $\mathcal{P} = \mathcal{L}$ ist auch die Relation zwischen den rigid body motions und dem Operator K . Setzt man nämlich $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ in (3.31) ein (es gilt ja $\mathcal{L}\mathbf{r} = 0$), folgt

$$(K + \frac{1}{2})\mathbf{r} = V\gamma_1^{\text{int}}\mathbf{r} = 0 \quad \text{bzw.} \quad K\mathbf{r} = -\frac{1}{2}\mathbf{r}.$$

4 Adaptive BEM

Im gesamten Kapitel sei $n = 2, 3$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Polyeder mit $\Gamma := \partial\Omega$.

4.1 BEM für die schwach singuläre Integralgleichung

Wir betrachten in diesem Abschnitt die *schwach singuläre Integralgleichung*

$$V\phi = \mathbf{f} \quad \text{auf } \Gamma \quad (4.1)$$

mit gegebener rechter Seite $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ und gesuchter Lösung $\phi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Hier sei $V: \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ ein beliebiger linearer Operator, welcher elliptisch auf $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ im Sinne von Theorem 3.18 ist und die erweiterten Abbildungseigenschaften aus Theorem 3.17 genießt. Insbesondere trifft unsere Analysis auf das zum Lamé-Operator \mathcal{L} gehörige Einfachschichtpotential zu. (Wobei wir im Fall $n = 2$ gegebenenfalls eine skalierte Fundamentallösung benutzen, vergleiche Theorem 3.18.) Wie wir in Abschnitt 3.3.2 gezeigt haben, ist dann (4.1) mit der Wahl $\mathbf{f} = (K + \frac{1}{2})\mathbf{g}$ äquivalent zum Dirichlet-Problem $\mathcal{L}\mathbf{u} = 0$ in Ω , $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ auf Γ .

Das *Galerkin-Verfahren* besteht darin, (4.1) in einer Folge endlich-dimensionaler Teilräume $X_\ell \subset \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ zu lösen: Finde $\Phi_\ell \in X_\ell$, sodass

$$(V\Phi_\ell, \Psi_\ell)_\Gamma = (\mathbf{f}, \Psi_\ell)_\Gamma, \quad \text{für alle } \Psi_\ell \in X_\ell. \quad (4.2)$$

Da $(\cdot, \cdot)_V$ ein äquivalentes Skalarprodukt auf dem Hilbertraum $(X_\ell, \|\cdot\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)})$ ist, impliziert der Satz von Riesz-Fischer die eindeutige Lösbarkeit dieses Problems. Die Lösung Φ_ℓ hat die wichtige Eigenschaft der *Galerkin-Orthogonalität*:

$$(\phi - \Phi_\ell, \Psi_\ell)_V = (\mathbf{f} - V\Phi_\ell, \Psi_\ell)_\Gamma = 0, \quad \text{für alle } \Psi_\ell \in X_\ell.$$

Aus dieser Eigenschaft ist klar, dass die Abbildung $\phi \mapsto \Phi_\ell$ nichts anderes ist als die Orthogonalprojektion auf X_ℓ bezüglich $(\cdot, \cdot)_V$. Wir nennen sie die *Galerkin-Projektion* und schreiben dafür

$$\mathbb{G}_\ell: \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow X_\ell.$$

Der Satz von Pythagoras besagt, mit der Energienorm $\|\cdot\|^2 := (\cdot, \cdot)_V$, dass

$$\|(1 - \mathbb{G}_\ell)\phi\|^2 + \|\mathbb{G}_\ell\phi - \Psi_\ell\|^2 = \|\phi - \Psi_\ell\|^2.$$

Dies bedeutet, dass $\mathbb{G}_\ell\phi$ die Bestapproximation bezüglich $\|\cdot\|$ an ϕ in X_ℓ ist, d.h.

$$\|(1 - \mathbb{G}_\ell)\phi\| \leq \|\phi - \Psi_\ell\| \quad \text{für alle } \Psi_\ell \in X_\ell.$$

Verwendet man wiederum Äquivalenz von $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}$, so folgt das *Céa-Lemma*.

Lemma 4.1 (Céa-Lemma). *Die Galerkin-Projektion erfüllt*

$$\|(1 - \mathbb{G}_\ell)\phi\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq C_{\text{Céa}} \inf_{\Psi_\ell \in X_\ell} \|\phi - \Psi_\ell\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}. \quad (4.3)$$

Die Konstante $C_{\text{Céa}} > 0$ hängt vom Operator $V: \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ ab, nicht aber von der Wahl des Raumes $X_\ell \subset \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$. \square

4.1.1 A priori Fehlerschätzung

In der Praxis wählt man die Räume X_ℓ so, dass die rechte Seite in (4.3) für $\ell \rightarrow \infty$ gegen 0 geht. Man erhält dann aus dem Céa-Lemma ein *a priori* Konvergenzresultat. Wir zeigen dies für $X_\ell = \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$, den Raum der stückweise konstanten Polynome, wobei \mathcal{T}_ℓ eine geschachtelte Folge von Triangulierungen von Γ ist, d.h. es gilt $X_\ell = X_{\ell+1}$. Um (4.3) nach oben abzuschätzen, benutzen wir die L^2 -Orthogonalprojektion auf $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$,

$$\Pi_\ell: L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell).$$

Man überprüft leicht, dass Π_ℓ elementweise gegeben ist durch

$$(\Pi_\ell \phi)|_T = \frac{1}{|T|} \int_T \phi(x) dx.$$

Im folgenden Theorem sagen wir $\phi \in H^1(\mathcal{T}_\ell)$, falls $\phi|_T \in H^1(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$.

Theorem 4.2 (Approximationssatz). *Sei $s \in [0, 1]$ und $\phi \in L^2(\Gamma)$. Dann gilt*

$$\|(1 - \Pi_\ell)\phi\|_{H^{-s}(\Gamma)} \leq C_{\text{app}} \|h_\ell^s \phi\|_{L^2(\Gamma)}, \quad (4.4)$$

$$\|(1 - \Pi_\ell)\phi\|_{H^{-s}(\Gamma)} \leq C_{\text{app}} \|h_\ell^{1+s} \nabla_\Gamma \phi\|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{falls } \phi \in H^1(\mathcal{T}_\ell). \quad (4.5)$$

Die Konstante $C_{\text{app}} > 0$ hängt von s und Γ ab, nicht aber von der Triangulierung \mathcal{T}_ℓ .

Beweis. Wir beweisen zunächst (4.4). Der Fall $s = 0$ ist klar und der Fall $s \in (0, 1)$ folgt aus $s \in \{0, 1\}$ mittels Interpolation. Sei also $s = 1$. Für $v \in H^1(\Gamma)$ haben wir die elementweise Poincaré-Ungleichung

$$h_T^{-1} \|(1 - \Pi_\ell)v\|_{L^2(T)} \leq \pi^{-1} \|\nabla_\Gamma v\|_{L^2(T)}.$$

Daraus folgt wegen der Selbstadjungiertheit von Π_ℓ

$$\begin{aligned} ((1 - \Pi_\ell)\phi, v)_\Gamma &= (\phi, (1 - \Pi_\ell)v)_\Gamma \\ &\leq \|h_\ell \phi\|_{L^2(\Gamma)} \|h_\ell^{-1} (1 - \Pi_\ell)v\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \pi^{-1} \|h_\ell \phi\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{H^1(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Dies zeigt also

$$\|(1 - \Pi_\ell)\phi\|_{H^{-1}(\Gamma)} \leq \pi^{-1} \|h_\ell \phi\|_{L^2(\Gamma)}$$

wie behauptet. Abschätzung (4.4) folgt durch Interpolation von gewichteten L^2 -Normen, welche nach Theorem 2.47 exakt ist. Man beachte, dass die Konstante C_{app} nur von der Identifikation

$$\|\cdot\|_{H^{-s}(\Gamma)} \simeq \|\cdot\|_{(L^2(\Gamma), H^{-1}(\Gamma))_s}$$

kommt und insbesondere nichts mit der Triangulierung zu tun hat.

Die zweite Abschätzung (4.5) folgt nun einfach, indem man (4.4) auf $(1 - \Pi_\ell)\phi \in L^2(\Gamma)$ anwendet und nochmal elementweise Poincaré benutzt:

$$\|(1 - \Pi_\ell)^2 \phi\|_{H^{-s}(\Gamma)} \leq C_{\text{app}} \|h_\ell^s (1 - \Pi_\ell)\phi\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{\text{app}} \|h_\ell^{1+s} \nabla_\Gamma \phi\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Wegen $(1 - \Pi_\ell)^2 = (1 - \Pi_\ell)$ ist dies die Behauptung. \square

Die Kombination aus Céa-Lemma und dem (komponentenweise angewandten) Approximationsatz liefert das Folgende.

Korollar 4.3 (A priori Abschätzung). *Sei \mathbb{G}_ℓ die Galerkin-Projektion für $X_\ell = \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$. Für $\phi \in \mathbf{L}^2(\Gamma) \cap \mathbf{H}^1(\mathcal{T}_\ell)$ gilt*

$$\|(1 - \mathbb{G}_\ell)\phi\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq C_{\text{Céa}} C_{\text{app}} \|h_\ell^{3/2} \nabla_\Gamma \phi\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)^n}.$$

Insbesondere folgt Konvergenz $\mathbb{G}_\ell \phi \rightarrow \phi$ in $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ mit der Rate $O(h_{\max, \ell}^{3/2})$, falls $h_{\max, \ell} := \max_{T \in \mathcal{T}_\ell} h_T \rightarrow 0$ für $\ell \rightarrow \infty$. \square

4.1.2 Diskretes Gleichungssystem

Eine Basis des Raumes $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ ist durch $\{\chi_T \mathbf{e}^l : T \in \mathcal{T}_\ell, 1 \leq l \leq n\}$ gegeben, mit Einheitsvektoren $(\mathbf{e}^l)_k = \delta_{kl}$. Die Gleichung (4.2) zur Bestimmung der Galerkin-Lösung ist daher mit $\Phi_\ell = \sum_{l, T} x_T^l \chi_T \mathbf{e}^l$ äquivalent zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$\sum_{l, T} (V_{\chi_T \mathbf{e}^l, \chi_S \mathbf{e}^k})_\Gamma x_T^l = (\mathbf{f}, \chi_S \mathbf{e}^k)_\Gamma \quad \text{für alle } S \in \mathcal{T}_\ell, 1 \leq k \leq n.$$

Wir können dies in Matrix-Vektor-Form schreiben als

$$\mathbf{V} \mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{4.6}$$

Hier ist $\mathbf{V} = (\mathbf{V}^{kl})_{k, l}$ die Blockmatrix mit Böcken $\mathbf{V}^{kl} = (V_{ST}^{kl})_{S, T}$ und Einträgen

$$V_{ST}^{kl} = (V_{\chi_T \mathbf{e}^l, \chi_S \mathbf{e}^k})_\Gamma = \int_S \int_T U^{kl}(x - y) dx dy.$$

Entsprechend ist $\mathbf{x} = (x_T^l)$ der gesuchte Koeffizientenvektor und $\mathbf{b} = (b_S^k)$ die rechte Seite mit Einträgen

$$b_S^k = (\mathbf{f}, \chi_S \mathbf{e}^k)_\Gamma = \int_S f^k(x) dx.$$

In Abschnitt 6.2 werden wir ausführlich die Berechnung der Einträge der Matrix \mathbf{V} besprechen.

4.2 A posteriori Fehlerschätzung und Adaptives Verfahren

Wir betrachten in diesem Abschnitt stets Standard-BEM niedrigster Ordnung für (4.1), treffen also die Wahl $X_\ell = \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$. Wir bezeichnen immer mit $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ die (gegebene) rechte Seite und mit $\phi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ die (unbekannte) exakte Lösung von (4.1). Weiters sei \mathbb{G}_ℓ die Galerkin-Projektion auf $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ und $\Phi_\ell = \mathbb{G}_\ell \phi$ die entsprechende Galerkin-Lösung.

Die a priori Abschätzung zeigt, dass bei zusätzlicher Glattheit der Lösung $\phi \in \mathbf{L}^2(\Gamma) \cap \mathbf{H}^1(\mathcal{T}_\ell)$ durch uniforme Verfeinerung des Gitters \mathcal{T}_ℓ eine Konvergenzrate von $O(h_\ell^{3/2})$

erreicht werden kann. Typischerweise ist aber eine solche Glattheit auch für $\mathbf{f} \in \mathbf{Lip}(\Gamma)$ nicht gegeben, und numerische Beispiele zeigen, dass sich dies bei uniformer Verfeinerung in einer schlechteren Konvergenzrate niederschlägt. Einen Ausweg bieten *adaptive* Verfahren, die darauf ausgerichtet sind, das Gitter in der Nähe von Singularitäten der Lösung stärker zu verfeinern. Tatsächlich erreichen wir in den numerischen Experimenten in Abschnitt 7 mit adaptiven Verfahren in 2D immer die „erhoffte“ Konvergenzrate von $O(N^{-3/2})$, wobei $N := \#\mathcal{T}_\ell$ die Anzahl der Elemente ist.

Um ein adaptives Verfahren zu realisieren, benötigt man (*lokale*) *a posteriori* *Fehlerschätzer*, also Indikatoren, die Auskunft darüber geben, wo der Fehler der approximativen Lösung am größten ist und das Gitter weiter verfeinert werden muss. Die lokalen Beiträge eines Schätzers definieren, für jede Triangulierung \mathcal{T}_ℓ , eine Funktion $\eta: \mathcal{T}_\ell \rightarrow [0, \infty)$. Der globale Schätzer auf einer Teilmenge $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{T}_\ell$ sei dann gegeben durch die ℓ^2 -Norm der lokalen Beiträge, also

$$\eta(\mathcal{M}_\ell)^2 := \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \eta(T)^2.$$

Das adaptive Verfahren ist von der Form

SOLVE \mapsto **ESTIMATE** \mapsto **MARK** \mapsto **REFINE**.

Wir starten mit einer initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 und $\ell = 0$, sowie einem Adaptivitätsparameter $\theta \in (0, 1]$, und führen die folgenden Schritte aus, bis eine geeignete Abbruchbedingung erfüllt ist.

1. **Solve**: Finde die Galerkin-Lösung Φ_ℓ durch Lösen des Gleichungssystems (4.6).
2. **Estimate**: Berechne die Fehlerschätzer $\eta(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$.
3. **Mark**: Bestimme eine Teilmenge $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{T}_\ell$ (von minimaler Kardinalität), sodass

$$\theta \eta(\mathcal{T}_\ell)^2 \leq \eta(\mathcal{M}_\ell)^2.$$

4. **Refine**: Kreiere eine neue Triangulierung $\mathcal{T}_{\ell+1}$ durch Verfeinern (zumindest) der Elemente in \mathcal{M}_ℓ . Setze $\ell = \ell + 1$ und gehe zu Schritt 1.

Die Wahl $\theta = 1$ entspricht uniformer Verfeinerung, da in Schritt (3) dann notwendigerweise $\mathcal{M}_\ell = \mathcal{T}_\ell$ gelten muss (zumindest wenn man davon ausgeht, dass $\eta(T) > 0$ für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$). Ein sehr kleiner Parameter $\theta \ll 1$ hingegen führt zu wenigen Verfeinerungen pro Durchlauf und daher zu stark adaptierten Netzen in der Nähe etwaiger Singularitäten.

Damit das adaptive Verfahren gut funktioniert, sollte sich der Fehlerschätzer ähnlich verhalten wie der Fehler. Zwei wünschenswerte Eigenschaften des Schätzers sind daher *Zuverlässigkeit*,

$$\|\phi - \Phi_\ell\| \lesssim \eta(\mathcal{T}_\ell),$$

und *Effizienz*,

$$\eta(\mathcal{T}_\ell) \lesssim \|\phi - \Phi_\ell\|,$$

mit impliziten Konstanten, die nicht von ℓ abhängen. Wir werden in den folgenden beiden Unterabschnitten zwei Fehlerschätzer kennenlernen, die jeweils eine der beiden Eigenschaften aufweisen.

4.2.1 Der h - $h/2$ -Schätzer

Bezeichne mit $\widehat{\mathcal{T}}_\ell$ das durch uniforme Verfeinerung von \mathcal{T}_ℓ entstehende Netz, und sei $\widehat{\Phi}_\ell$ die Galerkin-Lösung für den Raum $\mathcal{P}^0(\widehat{\mathcal{T}}_\ell)$. Wegen $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell) \subset \mathcal{P}^0(\widehat{\mathcal{T}}_\ell)$ zeigt die Galerkin-Orthogonalität

$$\|\phi - \widehat{\Phi}_\ell\|^2 + \|\widehat{\Phi}_\ell - \Phi_\ell\|^2 = \|\phi - \Phi_\ell\|^2.$$

Dies bedeutet, dass durch

$$\mu(\mathcal{T}_\ell) := \|\widehat{\Phi}_\ell - \Phi_\ell\| \leq \|\phi - \Phi_\ell\|$$

ein effizienter, berechenbarer Fehlerschätzer gegeben ist, der sogenannte h - $h/2$ -Schätzer. Dieser ist allerdings nicht lokal und lässt sich daher nicht für den adaptiven Algorithmus einsetzen. Aus diesem Grund definieren wir zusätzlich den *lokalen* h - $h/2$ -Schätzer

$$\tilde{\mu}(T) := h_T^{1/2} \|\widehat{\Phi}_\ell - \Phi_\ell\|_{L^2(T)} \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_\ell,$$

mit zugehörigem globalen Schätzer

$$\tilde{\mu}(\mathcal{T}_\ell) = \|h_\ell^{1/2}(\widehat{\Phi}_\ell - \Phi_\ell)\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Die mit $h_\ell^{1/2}$ gewichtete L^2 -Norm dient als lokale Annäherung an die $H^{-1/2}$ -Norm. Tatsächlich werden wir nun zeigen, dass

$$\mu(\mathcal{T}_\ell) \simeq \tilde{\mu}(\mathcal{T}_\ell)$$

mit von ℓ unabhängigen Konstanten. Insbesondere ist $\tilde{\mu}$ ein effizienter Schätzer, der sich für den adaptiven Algorithmus eignet.

Zusätzlich zum Approximationssatz 4.2 benötigen wir die folgende inverse Ungleichung für die H^{-s} -Norm. Sie wird in [GHS05, Theorem 3.6] in einem wesentlich allgemeineren Setting bewiesen (insbesondere für beliebige Polynomgrade). Unser Beweis folgt derselben Route, ist aber durch die Spezialisierung auf $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ und $0 \leq s \leq 1$ vergleichsweise elementar.

Theorem 4.4 (Inverse Ungleichung für $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$). *Für jede diskrete Funktion $\psi \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ und $s \in [0, 1]$ gilt*

$$\|h_\ell^s \psi\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{\text{inv}} \|\psi\|_{H^{-s}(\Gamma)}. \quad (4.7)$$

Die Konstante $C_{\text{inv}} > 0$ hängt nur von s , Γ und, im Fall $n = 3$, von der Formregularität von \mathcal{T}_ℓ ab.

Beweis. Der Fall $s = 0$ ist trivial, und der Fall $0 < s < 1$ folgt aus $s = 0, 1$ durch Interpolation. Man beachte, dass es möglich ist, zwischen den H^{-1} - und L^2 -Normen auf dem diskreten Teilraum $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell) \subset H^{-1}(\Gamma)$ zu interpolieren, da eine stetige Projektion $\Pi_\ell: H^{-1}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ existiert, die auch stetig als Abbildung $\Pi_\ell: L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ ist.

Sei also $s = 1$. Die Behauptung wird bewiesen sein, falls wir $w \in H^1(\Gamma)$ finden, sodass

$$\|h_\ell \psi\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim \frac{(\psi, w)_\Gamma}{\|w\|_{H^1(\Gamma)}}. \quad (4.8)$$

Setze $\psi_T = \psi|_T \in \mathbb{R}$ für $T \in \mathcal{T}_\ell$. Wir machen den Ansatz

$$w = \sum_T h_T^2 \psi_T w_T$$

mit gewissen Funktionen $w_T \in H_0^1(T)$. Die w_T sollen so etwas wie eine Annäherung an die Indikatorfunktionen χ_T mit möglichst kleiner $H^1(\Gamma)$ -Norm sein. Genauer wünschen wir uns, dass

$$\|w_T\|_{L^2(T)}^2 \lesssim |T| \lesssim (1, w_T)_T \quad \text{und} \quad \|\nabla_\Gamma w_T\|_{L^\infty(T)} \lesssim h_T^{-1}.$$

Bevor wir die w_T konstruieren, zeigen wir, wie daraus (4.8) folgt. Zunächst haben wir

$$(\psi, w)_\Gamma = \sum_T h_T^2 \psi_T^2 (1, w_T)_T \gtrsim \sum_T h_T^2 \psi_T^2 |T| = \|h_\ell \psi\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} \|w\|_{H^1(\Gamma)}^2 &= \sum_T h_T^4 \psi_T^2 (\|w_T\|_{L^2(T)}^2 + \|\nabla_\Gamma w_T\|_{L^2(T)}^2) \\ &\lesssim \sum_T h_T^4 \psi_T^2 (1 + \|\nabla_\Gamma w_T\|_{L^\infty(T)}^2) |T| \\ &\lesssim \sum_T h_T^4 \psi_T^2 h_T^{-2} |T| = \|h_\ell \psi\|_{L^2(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile haben wir auch $h_\ell \lesssim 1$ benutzt. Diese Abschätzungen zusammen zeigen dann

$$\frac{(\psi, w)_\Gamma}{\|w\|_{H^1(\Gamma)}} \gtrsim \frac{\|h_\ell \psi\|_{L^2(\Gamma)}^2}{\|h_\ell \psi\|_{L^2(\Gamma)}} = \|h_\ell \psi\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Es bleibt noch, passende Funktionen $w_T \in H_0^1(T)$ zu konstruieren. Sei zuerst $\widehat{w} \in H^1(\mathbb{R}^{n-1})$ gegeben durch

$$\widehat{w}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| \geq 1, \\ 2 - 2|x|, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun sei m_T der Inkreismittelpunkt von T und ρ_T der Inkreisradius. Setze

$$w_T(x) = \widehat{w}\left(\frac{x - m_T}{\rho_T}\right),$$

wobei x in einem $(n - 1)$ -dimensionalen Koordinatensystem auf der Oberfläche von T liegt. Der Support von w_T ist genau der Inkreis von T , und es gilt $0 \leq w_T \leq 1$, mit $w_T \equiv 1$ auf dem Kreis $T \cap B(m_T, \rho_T/2)$ mit Mittelpunkt m_T und Radius $\rho_T/2$. Es folgt klarerweise $\|w_T\|_{L^2(T)}^2 \leq \|1\|_{L^2(T)}^2 = |T|$, aber auch

$$(1, w_T)_T \geq \int_{T \cap B(m_T, \rho_T/2)} 1 dx \simeq \rho_T^{n-1} \gtrsim |T|,$$

wobei die γ -Formregularität eingeht. Da ∇_Γ auf T der Gradient bezüglich x ist, überprüft man leicht

$$\|\nabla_\Gamma w_T\|_{L^\infty(T)} = \frac{1}{\rho_T} \|\nabla \hat{w}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} = \frac{2}{\rho_T} \lesssim \frac{1}{h_T},$$

auch wieder unter Verwendung der γ -Formregularität. Im Fall $n = 2$ ist der „Inkreis“ ganz T und $\rho_T = h_T/2$, also hängen die Konstanten in den letzten beiden Abschätzungen nicht von \mathcal{T}_ℓ ab. \square

Wir beweisen nun, wie angekündigt, die Äquivalenz der beiden h - $h/2$ -Schätzer. Das Resultat stammt ursprünglich aus [FLP08].

Theorem 4.5. *Der h - $h/2$ -Schätzer ist äquivalent zum lokalen h - $h/2$ -Schätzer,*

$$C_{\text{low}}^{-1} \tilde{\mu}(\mathcal{T}_\ell) \leq \mu(\mathcal{T}_\ell) \leq C_{\text{high}} \tilde{\mu}(\mathcal{T}_\ell).$$

Die Konstante $C_{\text{low}} > 0$ hängt nur von Γ und im Fall $n = 3$ von der Formregularität von \mathcal{T}_ℓ ab, die Konstante C_{high} nur von Γ .

Beweis. Die untere Abschätzung folgt unmittelbar aus der inversen Ungleichung (4.7), komponentenweise angewandt:

$$\|h_\ell^{1/2}(\hat{\Phi}_\ell - \Phi_\ell)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{\text{inv}} \|\hat{\Phi}_\ell - \Phi_\ell\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \simeq C_{\text{inv}} \|\hat{\Phi}_\ell - \Phi_\ell\|.$$

Für die obere Abschätzung bemerken wir, dass Φ_ℓ die Galerkin-Projektion von $\hat{\Phi}_\ell$ auf $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ ist. Die Approximationseigenschaften von \mathbb{G}_ℓ und Π_ℓ zeigen, für alle $\psi \in L^2(\Gamma)$,

$$\|(1 - \mathbb{G}_\ell)\psi\| \leq \|(1 - \Pi_\ell)\psi\| \simeq \|(1 - \Pi_\ell)\psi\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq C_{\text{app}} \|h_\ell^{1/2}\psi\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Dies angewandt auf $\psi = \hat{\Phi}_\ell - \Phi_\ell = (1 - \mathbb{G}_\ell)\hat{\Phi}_\ell$ zusammen mit $(1 - \mathbb{G}_\ell)^2 = (1 - \mathbb{G}_\ell)$ gibt die Behauptung:

$$\|(1 - \mathbb{G}_\ell)\hat{\Phi}_\ell\| \lesssim \|h_\ell^{1/2}(1 - \mathbb{G}_\ell)\hat{\Phi}_\ell\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Man sieht auch, dass C_{high} nicht von \mathcal{T}_ℓ abhängt. \square

4.2.2 Der Residualschätzer

Der nachfolgende Satz, welchen wir in diesem Unterabschnitt beweisen, liefert uns mit dem Residualschätzer einen zuverlässigen Fehlerschätzer. Dieser beruht darauf, dass das *Residuum*

$$\mathbf{R}_\ell := \mathbf{f} - V\Phi_\ell = V(\phi - \Phi_\ell)$$

explizit ausgewertet werden kann. Das Residuum wird in einer gewichteten H^1 -Seminorm gemessen, daher muss höhere Regularität der rechten Seite angenommen werden, nämlich $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$. Nach Theorem 3.17 folgt aus $\Phi_\ell \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ auch $V\Phi_\ell \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$ und damit $\mathbf{R}_\ell \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$. Falls wir das Dirichlet-Problem lösen, also die Wahl $\mathbf{f} = (K + \frac{1}{2})\mathbf{g}$ treffen, ist nach demselben Theorem $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$ hinreichend für $\mathbf{R}_\ell \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$.

Theorem 4.6 (Residualschätzer). *Sei $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$. Definiere für $T \in \mathcal{T}_\ell$ den Residualschätzer*

$$\rho(T) := h_T^{1/2} \|\nabla_\Gamma \mathbf{R}_\ell\|_{\mathbf{L}^2(T)^n}$$

mit zugehörigem globalen Schätzer

$$\rho(\mathcal{T}_\ell) = \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma \mathbf{R}_\ell\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)^n}.$$

Dann ist ρ zuverlässig, d.h.

$$\|\phi - \Phi_\ell\| \leq C_{\text{rel}} \rho(\mathcal{T}_\ell). \quad (4.9)$$

Die Konstante $C_{\text{rel}} > 0$ hängt nur von Γ und der Formregularität von \mathcal{T}_ℓ ab.

Wegen $\|\cdot\| \simeq \|\cdot\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \simeq \|V(\cdot)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}$ ist (4.9) äquivalent zu

$$\|\mathbf{R}_\ell\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma \mathbf{R}_\ell\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)^n}. \quad (4.10)$$

Wir werden zeigen, dass eine Ungleichung wie (4.10) für alle $\mathbf{H}^1(\Gamma)$ -Funktionen gilt, welche L^2 -orthogonal auf $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ stehen. Dass \mathbf{R}_ℓ diese Eigenschaft hat, folgt direkt aus der Galerkin-Orthogonalität.

Bemerkung 4.7. Die Gleichung (4.10) ist eine Art Poincaré-Ungleichung für $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. Die entsprechende Aussage für L^2 ist

$$\|\mathbf{R}_\ell\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \lesssim \|h_\ell \nabla_\Gamma \mathbf{R}_\ell\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)^n} \quad (4.11)$$

und folgt durch elementweise Anwendung der Poincaré-Ungleichung. Mit $h_\ell \lesssim 1$ folgt daraus auch die H^1 -Version:

$$\|\mathbf{R}_\ell\|_{\mathbf{H}^1(\Gamma)} \lesssim \|\nabla_\Gamma \mathbf{R}_\ell\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)^n}. \quad (4.12)$$

Es wäre daher eine naheliegende Idee, (4.10) durch Interpolation von (4.11) und (4.12) zu beweisen. Tatsächlich kann man mit Hilfe von [Kar12, Lemma 3.5] die Äquivalenz

$$I_s(\mathbf{R}_\ell; \|h_\ell \nabla_\Gamma \cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)^n}, \|\nabla_\Gamma \cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)^n}) \simeq \|h_\ell^{1-s} \nabla_\Gamma \mathbf{R}_\ell\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)^n}$$

für die interpolierte, gewichtete H^1 -Seminorm zeigen. Das Interpolationsargument funktioniert leider nicht, da die Projektion von $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ auf den Teilraum $(\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell))^\perp$, in dem die Abschätzungen (4.11) und (4.12) gelten, nicht $\mathbf{H}^1(\Gamma)$ -stabil ist. \square

Bemerkung 4.8. Die Autoren von [CMS01] beweisen Zuverlässigkeit von ρ für das Einfachschichtpotential des Laplace-Operators in 3D. Ihre Resultate lassen sich unmittelbar auf unsere Situation übertragen, setzen allerdings ein externes Lemma [CMS01, Lemma 2.1] voraus, dessen Beweis ich nicht nachrecherchieren konnte. Ich präsentiere daher einen eigenen Beweis für Theorem 4.6, der ähnliche Techniken benutzt wie [CMS01] aber etwas einfacher und kürzer ausfällt. \square

Im folgenden Satz, dem zentralen Resultat dieses Abschnittes, verwenden wir für einen Knoten $z \in \mathcal{N}_\ell$ die L^2 -Orthogonalprojektion

$$\Pi_z: L^2(\omega_z) \rightarrow \text{span}\{\chi_{\omega_z}\}$$

und die in Abschnitt 2.2 definierte Hutfunktion $\eta_z \in \text{Lip}(\Gamma)$. Zur Erinnerung: Der Patch ω_z eines Knotens $z \in \mathcal{N}_\ell$ ist die relativ offene Teilmenge von Γ , sodass

$$\overline{\omega_z} = \bigcup \{T \in \mathcal{T}_\ell : z \in T\}.$$

Weiters benutzen wir $\mathcal{N}_\ell(T) := \mathcal{N}_\ell \cap T$ für die Knoten im Element $T \in \mathcal{T}_\ell$.

Theorem 4.9 (Lokalisierung der $H^s(\Gamma)$ -Norm). *Sei $s \in [0, 1]$. Die Konstanten $C_1, C_2 > 0$ in den folgenden beiden Aussagen hängen nur von s , Γ und der Formregularität von \mathcal{T}_ℓ ab.*

(i) *Es seien Funktionen $u_z \in H^s(\omega_z)$, $z \in \mathcal{N}_\ell$, gegeben. Falls wir $(1 - \Pi_z)u_z$ durch 0 auf ganz Γ fortsetzen, gilt*

$$\left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \eta_z (1 - \Pi_z) u_z \right\|_{H^s(\Gamma)}^2 \leq C_1 \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} |u_z|_{H^s(\omega_z)}^2.$$

(ii) *Für $u \in H^s(\Gamma)$ mit $u \perp \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ gilt*

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)}^2 \leq C_1 \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} |u|_{H^s(\omega_z)}^2 \leq C_2 \|h_\ell^{1-s} \nabla_\Gamma u\|_{L^2(\Gamma)}^2, \quad (4.13)$$

wobei wir für die zweite Ungleichung zusätzlich $u \in H^1(\Gamma)$ annehmen.

Beweis. (i) Wir beweisen den ersten Teil mit Interpolation, indem wir die rechte Seite als Seminorm auf dem Produktraum $\prod_z H^s(\omega_z)$ interpretieren und die Vertauschbarkeit von Produkt und Interpolation (Lemma 2.44) ausnützen. Die gleichmäßige Äquivalenz der H^s -Seminormen auf Patches (Theorem 2.55) zeigt außerdem, dass wir in der Aussage nach Belieben

$$|\cdot|_{H^s(\omega_z)} \quad \text{oder} \quad |\cdot|_{(L^2(\omega_z), H^1(\omega_z))_s}$$

verwenden können.

Für den Endpunkt $s = 0$, seien $u_z \in L^2(\omega_z)$ und $w_z := (1 - \Pi_z)u_z$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \eta_z w_z \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell(T)} \eta_z w_z \right\|_{L^2(T)}^2 \leq n \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell(T)} \|w_z\|_{L^2(T)}^2 \\ &= n \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \|w_z\|_{L^2(\omega_z)}^2, \end{aligned}$$

wobei wir $0 \leq \eta_z \leq 1$ und $\#\mathcal{N}_\ell(T) = n$ benutzt haben. Mit der L^2 -Seminorm $|u_z|_{L^2(\omega_z)} := \|(1 - \Pi_z)u_z\|_{L^2(\omega_z)} = \|w_z\|_{L^2(\omega_z)}$ folgt die L^2 -Abschätzung:

$$\left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \eta_z (1 - \Pi_z) u_z \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 \lesssim \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} |u_z|_{L^2(\omega_z)}^2. \quad (4.14)$$

Für den anderen Endpunkt $s = 1$ nehmen wir $u_z \in H^1(\omega_z)$ an. Bemerke zunächst, dass $w_z \in H^1(\omega_z)$ und $\eta_z w_z \in H_0^1(\omega_z) \subset H^1(\Gamma)$, sodass $\nabla_\Gamma(\sum_z \eta_z w_z) \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ wohldefiniert ist. Wir haben

$$\begin{aligned} \|\nabla_\Gamma(\eta_z w_z)\|_{\mathbf{L}^2(\omega_z)}^2 &\lesssim \|\eta_z\|_{L^\infty(\omega_z)}^2 \|\nabla_\Gamma w_z\|_{\mathbf{L}^2(\omega_z)}^2 + \|\nabla_\Gamma \eta_z\|_{\mathbf{L}^\infty(\omega_z)}^2 \|w_z\|_{L^2(\omega_z)}^2 \\ &\lesssim \|\nabla_\Gamma w_z\|_{\mathbf{L}^2(\omega_z)}^2 + \text{diam}(\omega_z)^{-2} \|w_z\|_{L^2(\omega_z)}^2 \\ &= |u_z|_{H^1(\omega_z)}^2 + \text{diam}(\omega_z)^{-2} |u_z|_{L^2(\omega_z)}^2 \\ &\lesssim |u_z|_{H^1(\omega_z)}^2. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile ist die Formregularität eingegangen, via $\|\nabla_\Gamma \eta_z\|_{\mathbf{L}^\infty(\omega_z)} \lesssim \text{diam}(\omega_z)^{-1}$, und in der letzten Zeile die Poincaré-Ungleichung auf Patches (Theorem 2.61). Ähnlich wie oben schließen wir

$$\left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \eta_z (1 - \Pi_z) u_z \right\|_{H^1(\Gamma)}^2 \lesssim \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} |u_z|_{H^1(\omega_z)}^2. \quad (4.15)$$

Die Aussage folgt nun durch Interpolation von (4.14) und (4.15) für den Operator

$$\begin{aligned} T: \prod_z L^2(\omega_z) &\rightarrow L^2(\Gamma), \\ (u_z)_{z \in \mathcal{N}_\ell} &\mapsto \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \eta_z (1 - \Pi_z) u_z. \end{aligned}$$

(ii) Da u orthogonal auf $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ steht, gilt $\sum_z \eta_z (1 - \Pi_z) u = \sum_z \eta_z u = u$. Verwenden wir (i) mit $u_z := u|_{\omega_z}$, folgt

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)}^2 \leq C_1 \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} |u|_{H^s(\omega_z)}^2.$$

Gilt sogar $u \in H^1(\Gamma)$, besagt die zweite Poincaré-Ungleichung auf Patches aus Theorem 2.61 zusammen mit der Formregularität

$$|u|_{H^s(\omega_z)}^2 \lesssim \text{diam}(\omega_z)^{2(1-s)} |u|_{H^1(\omega_z)}^2 \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell: z \in T} h_T^{2(1-s)} \|\nabla_\Gamma u\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2.$$

Durch Summation über z und

$$\sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell: z \in T} h_T^{2(1-s)} \|\nabla_\Gamma u\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 = n \|h_\ell^{1-s} \nabla_\Gamma u\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2$$

folgt die Behauptung. □

Bemerkung 4.10. Ein Beweis der ersten Abschätzung in (4.13) findet sich auch in [Fae00, Fae02] für 2D bzw. 3D. Dieser bedient sich allerdings völlig anderer Techniken, nämlich expliziter Abschätzungen für die Slobodeckij-Seminorm. Erst durch unsere Erkenntnisse zu Seminormen wird klar, dass die Ergebnisse von Faermann und [Car97],[CMS01] äquivalent sind. Insbesondere sind in (4.13) die Hauptresultate aller vier Arbeiten enthalten. \square

Beweis von Theorem 4.6. Aus (4.13) mit $s = 1/2$, komponentenweise angewandt, folgt (4.10) und damit (4.9). \square

Bemerkung 4.11 (Faermann-Schätzer). Ein alternativer Residuum-basierter Schätzer ist der *Faermann-Schätzer*

$$\varphi(T)^2 := \sum_{z \in T \cap \mathcal{N}_\ell} |\mathbf{R}_\ell|_{\mathbf{H}^{1/2}(\omega_z)}^2 \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_\ell.$$

Dieser ist sogar effizient *und* zuverlässig, denn wie wir zeigen werden gilt

$$\varphi(\mathcal{T}_\ell) \simeq \|\mathbf{R}_\ell\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}.$$

Die Effizienz folgt durch ein Abzähl-Argument aus der Tatsache, dass die Anzahl der Elemente pro Patch durch eine absolute Konstante $N(\mathcal{T}_\ell)$ nach oben beschränkt werden kann, welche nur von der Formregularität abhängt. Setze der Übersichtlichkeit halber

$$I_{S,S'} := \int_S \int_{S'} \frac{|\mathbf{R}_\ell(x) - \mathbf{R}_\ell(y)|^2}{|x - y|^n} dx dy \quad \text{für alle } S, S' \in \mathcal{T}_\ell.$$

Wir haben

$$\varphi(\mathcal{T}_\ell)^2 = \sum_T \sum_{z \in T \cap \mathcal{N}_\ell} |\mathbf{R}_\ell|_{\mathbf{H}^{1/2}(\omega_z)}^2 = \sum_T \sum_{z \in T \cap \mathcal{N}_\ell} \sum_{S, S' \subset \omega_z} I_{S,S'}.$$

Überlegen wir, wie oft ein festes Doppelintegral $I_{S,S'}$ in der Summe auftritt. Es tritt auf, wann immer S und S' in einem gemeinsamen Patch liegen – dies ist höchstens für n Patches der Fall –, und zwar einmal für jedes Element T , dass in einem solchen Patch liegt – dies sind höchstens $N(\mathcal{T}_\ell)$ Elemente pro Patch. Mit anderen Worten, $I_{S,S'}$ tritt höchstens $nN(\mathcal{T}_\ell)$ -mal auf. Es folgt

$$\varphi(\mathcal{T}_\ell)^2 \leq nN(\mathcal{T}_\ell) \sum_{S, S' \in \mathcal{T}_\ell} I_{S,S'} = nN(\mathcal{T}_\ell) |\mathbf{R}_\ell|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \lesssim \|\mathbf{R}_\ell\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2,$$

also die Effizienz. Die Zuverlässigkeit ist eine unmittelbare Konsequenz von (4.13):

$$\|\mathbf{R}_\ell\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \lesssim \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} |\mathbf{R}_\ell|_{\mathbf{H}^{1/2}(\omega_z)}^2 \leq \varphi(\mathcal{T}_\ell)^2.$$

Man beachte allerdings, dass der Faermann-Schätzer vom Standpunkt der Implementierung aus weniger attraktiv ist, da (teilweise singuläre) Doppelintegrale ausgewertet werden müssen. \square

5 Adaptive FEM-BEM-Kopplung

In diesem Kapitel sei $n = 2, 3$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein *beschränktes* Lipschitz-Gebiet mit $\partial\Omega = \Gamma$ und $\Omega' := \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Als Modellproblem betrachten wir das folgende *Transmissionsproblem*

$$\mathcal{L}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \quad (5.1)$$

$$\mathcal{L}'\mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega', \quad (5.2)$$

$$[\mathbf{u}]_\Gamma = \mathbf{u}_0 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (5.3)$$

$$[\gamma_1 \mathbf{u}]_\Gamma = \phi_0 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{u} = O(|x|^{-1}) \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \quad (5.5)$$

Hier sind \mathcal{L} und \mathcal{L}' zwei Lamé-Operatoren mit möglicherweise verschiedenen Lamé-Parametern $\mu, \lambda > 0$ im Inneren und $\mu', \lambda' > 0$ im Äußeren. Wie üblich wollen wir (5.1)–(5.5) im schwachen Sinn interpretieren. Die Lösung \mathbf{u} suchen wir naturgemäß im Raum $\mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$, und für die Daten nehmen wir $\mathbf{f} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ und $\phi_0 \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ an.

Man kann zeigen, dass dieses Problem, zumindest in 3D, immer eindeutig lösbar ist; dieses Resultat wird auch als Nebenprodukt unserer Analysis des diskretisierten Problems abfallen, siehe Theorem 5.13. In 2D benötigt man für die Lösbarkeit eine zusätzliche Kompatibilitätsbedingung an die Daten, nämlich

$$(\mathbf{f}, I)_\Omega = (\phi_0, I)_\Gamma. \quad (5.6)$$

Hier benutzen wir die Schreibweise ($I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Einheitsmatrix, $\mathbf{e}^k \in \mathbb{R}^n$ sind Einheitsvektoren)

$$(\phi, I)_\Gamma := ((\phi, \mathbf{e}^1)_\Gamma, \dots, (\phi, \mathbf{e}^n)_\Gamma)^T \in \mathbb{R}^n$$

für $\phi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Im Fall $\phi \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ gilt also

$$(\phi, I)_\Gamma = \int_\Gamma \phi(x) dx.$$

Analog ist $(\mathbf{f}, I)_\Omega$ für $\mathbf{f} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ zu verstehen.

Die Bedingung (5.6) stellt die Abklingbedingung (5.5) sicher, welche wiederum benötigt wird, um Eindeutigkeit der Lösungen zu garantieren. *Keine* Kompatibilitätsbedingung benötigt man, wenn man im 2D-Fall (5.5) durch die modifizierte Abklingbedingung

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{U}(x)\mathbf{c} + O(|x|^{-1}) \quad \text{für } x \rightarrow \infty \quad (5.7)$$

mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ ersetzt. Mit anderen Worten, (5.1)–(5.4) zusammen mit (5.7) ist auch in 2D immer eindeutig lösbar.

Bemerkung 5.1. Es gibt mehrere Möglichkeiten, dieses Modellproblem in eine Variationsformulierung überzuführen, die sich zur numerischen Lösung mit Galerkin-Verfahren eignet. Wir widmen uns in diesem Kapitel der *Johnson-Nedelec-Kopplung*, auch bekannt

als *(direct) one-equation-coupling*. Diese führt auf ein gekoppeltes Gleichungssystem für Funktionen auf dem Rand bzw. dem Inneren eines Gebietes und daher auf eine *Kopplung von FEM und BEM*, wodurch die Stärken der beiden Methoden kombiniert werden sollen:

-) BEM für lineare, homogene ($\mathbf{f} = 0$) Gleichungen mit konstanten Koeffizienten auf unbeschränkten Gebieten.
-) FEM für möglicherweise nicht-lineare, inhomogene Gleichungen auf beschränkten Gebieten.

Für eine ausführliche Diskussion weiterer FEM-BEM-Kopplungsmethoden wie der *symmetrischen Kopplung* und der *Bielak-McCamy-Kopplung* verweisen wir auf [AFF⁺13, Fei10] und [FFKP12] im Kontext der Lamé-Gleichung. \square

5.1 Johnson-Nédélec-Kopplung

5.1.1 Darstellungsformel im Außenraum

Um die Gleichungen der Johnson-Nédélec-Kopplung herzuleiten, benötigen wir eine Darstellungsformel analog zu Theorem 3.7 für Lösungen von $\mathcal{L}'\mathbf{u} = 0$ im Außenraum Ω' , nämlich

$$\mathbf{u} = -\mathcal{V}(\gamma_1^{\text{ext}}\mathbf{u}) + \mathcal{K}(\gamma^{\text{ext}}\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega'. \quad (5.8)$$

Die Operatoren \mathcal{V}, \mathcal{K} verstehen wir hier und in weiterer Folge natürlich immer bezüglich der äußeren Lamé-Parameter λ', μ' .

Man beachte, dass für die direkte Anwendung von Theorem 3.7 zwei Annahmen erfüllt sein müssten: Dass die rechte Seite \mathbf{f} kompakten Träger hat (was im Fall $\mathbf{f} = 0$ natürlich kein Problem darstellt) und – etwas subtiler – dass $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega')$. Da Ω' unbeschränkt ist, ist in dieser Annahme schon eine Abklingbedingung an \mathbf{u} enthalten (die aber unnötig strikt ist).

Für Lösungen $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega')$ von $\mathcal{L}'\mathbf{u} = 0$ gilt (5.8) im Allgemeinen *nicht*. Dies folgt aus dem nächsten Lemma, welches besagt, dass die Gültigkeit der Darstellungsformel (5.8) in 3D schon die Abklingbedingung (5.5) impliziert. Wir erinnern hier daran, dass \mathcal{V} und \mathcal{K} nach $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ abbilden und insbesondere die Punktauswertung bei $x \rightarrow \infty$ wohldefiniert ist.

Lemma 5.2 (Abklingbedingung). *Es seien $\phi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ und $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. Dann erfüllen $\mathcal{V}\phi$ und $\mathcal{K}\mathbf{g}$ die folgenden Abklingbedingungen für $x \rightarrow \infty$.*

$$\begin{aligned} (\mathcal{V}\phi)(x) &= \mathbf{U}(x)(\phi, I)_\Gamma + O(|x|^{1-n}), \\ (\mathcal{K}\mathbf{g})(x) &= O(|x|^{1-n}). \end{aligned}$$

Definieren wir also

$$\mathbf{u}(x) := -(\mathcal{V}\phi)(x) + (\mathcal{K}\mathbf{g})(x), \quad x \in \Omega',$$

dann gilt $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega')$, $\mathcal{L}'\mathbf{u} = 0$ in Ω' und

$$\mathbf{u}(x) = O(|x|^{-1}), \text{ falls } \begin{cases} n = 3, \\ n = 2 \text{ und } (\boldsymbol{\phi}, \mathbf{I})_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Beweisskizze. Der Fall $n = 3$ folgt aus [CS90, Lemma 4.2] und der Fall $n = 2$ folgt analog zu [Fei10, Theorem 3.9, 3.10] mit Hilfe der Abschätzungen $|\mathbf{U}(x-y) - \mathbf{U}(x)|_{\infty} = O(|x|^{-1})$ und $|\nabla \mathbf{U}(x-y)|_{\infty} = O(|x|^{-1})$ für $y \in \Gamma$ und $x \rightarrow \infty$. \square

Bemerkung 5.3. Das Lemma zeigt beispielsweise, dass konstante Funktionen niemals die Darstellungsformel (5.8) erfüllen. \square

Umgekehrt impliziert (5.2) und die Abklingbedingung (5.5) auch die Darstellungsformel (5.8). Wir zitieren das Resultat zunächst für 3D. (Siehe auch [McL00, Theorem 8.9] für den Laplace-Operator.)

Lemma 5.4 (Darstellungsformel in 3D, [CS90, Lemma 4.2]). *Sei $n = 3$, $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega')$ mit $\mathcal{L}'\mathbf{u} = 0$ in Ω' und $\mathbf{u} = O(|x|^{-1})$ für $x \rightarrow \infty$. Dann gilt (5.8).* \square

Wir sehen also, dass in 3D die Darstellungsformel im Außenraum für schwache Lösungen von $\mathcal{L}'\mathbf{u} = 0$ äquivalent zur Abklingbedingung $\mathbf{u} = O(|x|^{-1})$ ist. In 2D impliziert die Darstellungsformel im Allgemeinen nur

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{U}(x)\mathbf{c} + O(|x|^{-1}) \quad \text{für } x \rightarrow \infty \quad (5.9)$$

mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$, und auch hier gilt die Umkehrung:

Lemma 5.5 (Darstellungsformel in 2D). *Sei $n = 2$, $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega')$ mit $\mathcal{L}'\mathbf{u} = 0$ in Ω' und es gelte die modifizierte Abklingbedingung (5.9). Dann folgt (5.8).* \square

5.1.2 Herleitung der Johnson-Nédélec-Kopplung

Um die Gleichungen der Johnson-Nédélec-Kopplung für das Transmissionsproblem herzuleiten, nehmen wir an, $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ sei eine Lösung von (5.1)–(5.5). Wir setzen zunächst $\mathbf{u}^+ := \mathbf{u}|_{\Omega'}$ und $\mathbf{u} := \mathbf{u}|_{\Omega}$ zur Unterscheidung des äußeren und des inneren Teils der Lösung. Gewissermaßen werden wir die Gleichungen für \mathbf{u}^+ eliminieren und durch Randintegralgleichungen für die äußere Konormalenableitung $\boldsymbol{\phi} := \gamma_1^{\text{ext}}\mathbf{u}^+$ ersetzen.

Wir erinnern zuerst an die Definition der symmetrischen Bilinearform

$$\alpha_L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (L\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v})_{\Omega} = (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\Omega}.$$

Wegen $\mathcal{L}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ in Ω besagt die erste Greensche Formel (Lemma 3.1)

$$\alpha_L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega} + (\gamma_1^{\text{int}}\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Gamma} \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Benutzen wir die Sprungbedingung $\boldsymbol{\phi} - \gamma_1^{\text{int}}\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}_0$, folgt daraus

$$\alpha_L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\phi}, \mathbf{v})_{\Gamma} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega} - (\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{v})_{\Gamma}. \quad (5.10)$$

Nun verwenden wir die Darstellungsformel (5.8), deren Gültigkeit aus der Abklingbedingung (5.5) folgt:

$$\mathbf{u}^+ = -\mathcal{V}\phi + \mathcal{K}(\gamma^{\text{ext}}\mathbf{u}^+).$$

Anwendung des äußeren Spuroperators liefert nach Umordnung

$$V\phi = (K - \frac{1}{2})\gamma^{\text{ext}}\mathbf{u}^+.$$

Wir benutzen die andere Sprungbedingung $\gamma^{\text{ext}}\mathbf{u}^+ - \gamma^{\text{int}}\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ und erhalten

$$(\frac{1}{2} - K)\mathbf{u} + V\phi = (K - \frac{1}{2})\mathbf{u}_0.$$

Testen wir diese Gleichung noch mit $\psi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$, erhalten wir zusammen mit (5.10) die folgende *Variationsformulierung*:

Definition 5.6 (Johnson-Nédélec-Kopplung). Finde $(\mathbf{u}, \phi) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ sodass

$$\alpha_L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\phi, \mathbf{v})_\Gamma = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega - (\phi_0, \mathbf{v})_\Gamma \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (5.11)$$

$$((\frac{1}{2} - K)\mathbf{u}, \psi)_\Gamma + (V\phi, \psi)_\Gamma = ((K - \frac{1}{2})\mathbf{u}_0, \psi)_\Gamma \quad \text{für alle } \psi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma). \quad (5.12)$$

□

Diese Formulierung ist sogar äquivalent zum Transmissionsproblem (unter einer Nebenbedingung im Fall $n = 2$). Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Theorem 5.7. *Es seien $\mathbf{f} \in \widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ und $\phi_0 \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$.*

(i) *Ist $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ eine Lösung des Transmissionsproblems (5.1)–(5.5), dann liefert $(\mathbf{u}, \phi) := (\mathbf{u}|_\Omega, \gamma_1^{\text{ext}}\mathbf{u})$ eine Lösung der Johnson-Nédélec-Kopplung (5.11)–(5.12).*

(ii) *Sei umgekehrt $(\mathbf{u}, \phi) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ eine Lösung von (5.11)–(5.12), und im Fall $n = 2$ gelte zusätzlich $(\mathbf{f}, I)_\Omega = (\phi_0, I)_\Gamma$. Dann definiert*

$$\mathbf{u} := -\mathcal{V}\phi + \mathcal{K}(\gamma^{\text{int}}\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) \quad \text{in } \Omega' \quad (5.13)$$

eine Fortsetzung von \mathbf{u} zu einer Lösung $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ von (5.1)–(5.5).

Beweis. Den ersten Teil (i) haben wir schon bewiesen. Für den zweiten Teil (ii) folgert man zunächst aus (5.11) für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, dass $\mathcal{L}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ in Ω , also (5.1). Die Definition von $\gamma_1^{\text{int}}\mathbf{u}$ mit Hilfe der ersten Greenschen Formel zeigt auch $\gamma_1^{\text{int}}\mathbf{u} = \phi - \phi_0$.

Sei nun \mathbf{u} in Ω' durch (5.13) definiert, dann ist nach Lemma 5.2 $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega')$ und $\mathcal{L}'\mathbf{u} = 0$ in Ω' , also (5.2), und im Fall $n = 3$ ist auch die Abklingbedingung (5.5) erfüllt. Im Fall $n = 2$ teste (5.11) mit $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Dies zeigt

$$-(\phi, I)_\Gamma = (\mathbf{f}, I)_\Omega - (\phi_0, I)_\Gamma = 0.$$

Damit folgt die Abklingbedingung (5.5) auch in 2D. Wenden wir auf (5.13) den äußeren Spuroperator an, folgt mit (5.12)

$$\begin{aligned} \gamma^{\text{ext}}\mathbf{u} &= -V\phi + (\frac{1}{2} + K)(\gamma^{\text{int}}\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) \\ &\stackrel{(5.12)}{=} (\frac{1}{2} - K)(\gamma^{\text{int}}\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) + (\frac{1}{2} + K)(\gamma^{\text{int}}\mathbf{u} + \mathbf{u}_0) \\ &= \gamma^{\text{int}}\mathbf{u} + \mathbf{u}_0. \end{aligned}$$

Dies ist die erste Sprungbedingung (5.3). Die Abklingbedingung impliziert nun wiederum die Darstellungsformel

$$\mathbf{u} = -\mathcal{V}(\gamma_1^{\text{ext}} \mathbf{u}) + \mathcal{K}(\gamma_1^{\text{int}} \mathbf{u} + \mathbf{u}_0) \quad \text{in } \Omega'.$$

Subtrahieren wir (5.13) und verwenden $\gamma_1^{\text{int}} \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_0$, folgt

$$0 = \mathcal{V}(\boldsymbol{\phi} - \gamma_1^{\text{ext}} \mathbf{u}) = \mathcal{V}(\boldsymbol{\phi}_0 - (\gamma_1^{\text{ext}} \mathbf{u} - \gamma_1^{\text{int}} \mathbf{u})).$$

Da \mathcal{V} injektiv ist, folgt auch die zweite Sprungbedingung (5.4). \square

Bemerkung 5.8. Der Beweis zeigt auch, dass die Johnson-Nédélec-Kopplung *ohne Nebenbedingung in 2D* äquivalent zum Transmissionsproblem (5.1)–(5.4) zusammen mit der modifizierten Abklingbedingung (5.9) ist. Zwar mag (5.9) „unphysikalisches Verhalten“ der Lösung mit einschließen, ist aber vom mathematischen Standpunkt aus offenbar die natürlichere Abklingbedingung. \square

5.2 Stabilität der diskreten Formulierung

5.2.1 Diskrete Formulierungen

Die Variationsformulierung (5.11)–(5.12) eignet sich für ein Galerkin-Verfahren. Definiere hierfür den Hilbertraum $\mathbf{H} := \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ und die stetige Bilinearform $b: \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$b((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) := \alpha_L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\phi}, \mathbf{v})_\Gamma + ((\tfrac{1}{2} - K)\mathbf{u} + V\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi})_\Gamma.$$

Definiere weiters das stetige Funktional $F: \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) := (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega - (\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{v})_\Gamma + ((K - \tfrac{1}{2})\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi})_\Gamma.$$

Dann ist (5.11)–(5.12) offensichtlich äquivalent zu

$$b((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) = F(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \quad \text{für alle } (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathbf{H}. \quad (5.14)$$

Eine Galerkin-Formulierung erhält man wie immer, indem man Ansatz- und Testfunktionen auf einen diskreten Teilraum $\mathbf{H}_\ell = \mathbf{X}_\ell \times \mathbf{Y}_\ell$ mit $\mathbf{X}_\ell \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $\mathbf{Y}_\ell \subset \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ einschränkt: Finde $(\mathbf{u}_\ell, \boldsymbol{\phi}_\ell) \in \mathbf{H}_\ell$, sodass

$$b((\mathbf{u}_\ell, \boldsymbol{\phi}_\ell), (\mathbf{v}_\ell, \boldsymbol{\psi}_\ell)) = F(\mathbf{v}_\ell, \boldsymbol{\psi}_\ell) \quad \text{für alle } (\mathbf{v}_\ell, \boldsymbol{\psi}_\ell) \in \mathbf{H}_\ell. \quad (5.15)$$

Eine typische Wahl ist beispielsweise $\mathbf{H}_\ell = \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$, wobei \mathcal{T}_ℓ und \mathcal{E}_ℓ Triangulierungen von Ω bzw. Γ sind.

Wir interessieren uns nun für die eindeutige Lösbarkeit von (5.15). Eine hinreichende Bedingung liefert bekanntermaßen das Lemma von Lax-Milgram 2.10, nämlich Elliptizität von b bezüglich einer geeigneten Norm auf \mathbf{H} . Dies ist in unserem Fall leider nicht unmittelbar anwendbar. Betrachte nämlich

$$\begin{aligned} b((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})) &= \alpha_L(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u})_\Gamma + ((\tfrac{1}{2} - K)\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})_\Gamma + (V\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi})_\Gamma \\ &= \alpha_L(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - ((\tfrac{1}{2} + K)\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})_\Gamma + (V\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi})_\Gamma. \end{aligned}$$

Für die Wahl $(\mathbf{u}, \phi) = (\mathbf{r}, 0)$ mit $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ (dem Raum der rigid body motions) gilt $b((\mathbf{r}, 0), (\mathbf{r}, 0)) = 0$, also ist b nicht elliptisch (egal welche Norm wir auf \mathbf{H} verwenden). In [FFKP12] wird gezeigt, dass dennoch unter gewissen Voraussetzungen an die Lamé-Konstanten $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ und an den diskreten Raum \mathbf{H}_ℓ eindeutige Lösbarkeit von (5.15) gegeben ist. Wir wollen diesen Beweis hier aus unserer eigenen Sichtweise präsentieren. Das erste Resultat liefert eine äquivalente Formulierung von (5.15) mit modifizierter Bilinearform.

Lemma 5.9 (Lemma von Führer, [FFKP12, Proposition 3]). *Sei $\mathbf{Y}_0 \subset \mathbf{Y}_\ell$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ mit Orthogonalprojektion $\Pi_0: \mathbf{L}^2(\Gamma) \rightarrow \mathbf{Y}_0$. Definiere $\tilde{b}: \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ durch*

$$\tilde{b}((\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi)) := b((\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi)) + \left(\left(\frac{1}{2} - K \right) \mathbf{u} + V\phi, \Pi_0 \left[\left(\frac{1}{2} - K \right) \mathbf{v} + V\psi \right] \right)_\Gamma$$

und $\tilde{F}: \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{F}(\mathbf{v}, \psi) := F(\mathbf{v}, \psi) + \left(\left(K - \frac{1}{2} \right) \mathbf{u}_0, \Pi_0 \left[\left(\frac{1}{2} - K \right) \mathbf{v} + V\psi \right] \right)_\Gamma.$$

Dann ist $(\mathbf{u}_\ell, \phi_\ell) \in \mathbf{H}_\ell = \mathbf{X}_\ell \times \mathbf{Y}_\ell$ genau dann eine Lösung von

$$b((\mathbf{u}_\ell, \phi_\ell), (\mathbf{v}_\ell, \psi_\ell)) = F(\mathbf{v}_\ell, \psi_\ell) \quad \text{für alle } (\mathbf{v}_\ell, \psi_\ell) \in \mathbf{H}_\ell, \quad (5.16)$$

wenn $(\mathbf{u}_\ell, \phi_\ell)$ eine Lösung des folgenden Problems ist:

$$\tilde{b}((\mathbf{u}_\ell, \phi_\ell), (\mathbf{v}_\ell, \psi_\ell)) = \tilde{F}(\mathbf{v}_\ell, \psi_\ell) \quad \text{für alle } (\mathbf{v}_\ell, \psi_\ell) \in \mathbf{H}_\ell. \quad (5.17)$$

Beweis. Ist $(\mathbf{u}_\ell, \phi_\ell)$ eine Lösung von (5.16), so folgt mit der Wahl $\mathbf{v}_\ell = 0$

$$\left(\left(\frac{1}{2} - K \right) \mathbf{u}_\ell + V\phi_\ell, \psi_\ell \right)_\Gamma = \left(\left(K - \frac{1}{2} \right) \mathbf{u}_0, \psi_\ell \right)_\Gamma \quad \text{für alle } \psi_\ell \in \mathbf{Y}_\ell. \quad (5.18)$$

Insbesondere können wir $\Pi_0 \left[\left(\frac{1}{2} - K \right) \mathbf{v}_\ell + V\psi_\ell \right] \in \mathbf{Y}_\ell$ statt ψ_ℓ einsetzen und (5.17) folgern.

Für die andere Richtung, wähle $\mathbf{v}_\ell = 0$ in (5.17) und erhalte

$$\left(\left(\frac{1}{2} - K \right) (\mathbf{u}_\ell + \mathbf{u}_0) + V\phi_\ell, (1 + \Pi_0 V)\psi_\ell \right)_\Gamma = 0 \quad \text{für alle } \psi_\ell \in \mathbf{Y}_\ell.$$

Schreiben wir $\mathbf{x} := \left(\frac{1}{2} - K \right) (\mathbf{u}_\ell + \mathbf{u}_0) + V\phi_\ell$ und testen mit $\psi_\ell = \Pi_0 \mathbf{x}$, so zeigt dies

$$0 = (\mathbf{x}, (1 + \Pi_0 V)\Pi_0 \mathbf{x})_\Gamma = ((1 + V)\Pi_0 \mathbf{x}, \Pi_0 \mathbf{x})_\Gamma \geq \|\Pi_0 \mathbf{x}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2.$$

In der letzten Ungleichung ist die Positivität von V eingegangen. Es folgt $\Pi_0 \mathbf{x} = 0$, also $\Pi_0 \left[\left(\frac{1}{2} - K \right) \mathbf{u}_\ell + V\phi_\ell \right] = \Pi_0 \left(K - \frac{1}{2} \right) \mathbf{u}_0$. Damit fallen die zusätzlichen Terme in (5.17) weg und es bleibt (5.16) übrig. \square

Bemerkung 5.10. Die neue Bilinearform \tilde{b} ist „ b plus ein Stabilisierungsterm“. Um dies zu motivieren, nehme man an, dass der Galerkin-Raum die rigid body motions enthält, also $\mathcal{R} \subset \mathbf{Y}_\ell$. Dann kann man im letzten Lemma $\mathbf{Y}_0 = \mathcal{R}$ wählen. Betrachte nun $\tilde{b}((\mathbf{r}, 0), (\mathbf{r}, 0))$ mit $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$. Wir haben

$$\tilde{b}((\mathbf{r}, 0), (\mathbf{r}, 0)) = \left(\left(\frac{1}{2} - K \right) \mathbf{r}, \Pi_0 \left(\frac{1}{2} - K \right) \mathbf{r} \right)_\Gamma = \|\Pi_0 \mathbf{r}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 = \|\mathbf{r}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2.$$

Das Problem, welches wir vorher mit b hatten, nämlich dass die rigid body motions einen nichttrivialen Kern bilden, tritt also für \tilde{b} nicht auf. \square

5.2.2 Beweis der Stabilität

Zuerst zeigen wir eine untere Abschätzung für b , welche die Basis für die Elliptizität der stabilisierten Bilinearform \tilde{b} bildet. Wir folgen dabei dem einfachen Beweis aus [GHS12]. Ein alternativer Beweis, der auf eine geringfügig schärfere Bedingung führt, ist in [Ste13] zu finden.

Lemma 5.11. *Angenommen, $\eta := \min\{\frac{\mu}{\mu'}, \frac{\lambda}{\lambda'}\} > \frac{1}{4}$. Dann gilt*

$$c^{-1}b((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})) \geq \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)^n}^2 + (V\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi})_\Gamma \quad \text{für alle } (\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) \in \mathbf{H},$$

wobei $c > 0$ nur von den Lamé-Konstanten abhängt.

Beweis. Wir benutzen für die Energieskalarprodukte des inneren bzw. äußeren Lamé-Operators und jedes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Notation

$$\begin{aligned} \alpha_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v})_\Omega + 2\mu(\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_\Omega, \\ \alpha'_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \lambda'(\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v})_\Omega + 2\mu'(\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_\Omega. \end{aligned}$$

Beachte, dass nach Definition von η

$$\alpha_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{\lambda}{\lambda'}\lambda'(\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{u})_\Omega + \frac{\mu}{\mu'}2\mu'(\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{u}))_\Omega \geq \eta\alpha'_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Der Beweis in [GHS12] ist für 3D formuliert und beruht auf der Identität

$$(V\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi})_\Gamma = \alpha'_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{V}\boldsymbol{\phi}, \mathcal{V}\boldsymbol{\phi}).$$

In 2D gilt diese Formel aber nur für $\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)$, also für $\boldsymbol{\phi} \perp \mathbb{R}^n$, siehe Lemma 3.19. Um beide Fälle gleichzeitig zu behandeln, schreibe

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}^* + \boldsymbol{\phi}^\perp \quad \text{mit } \boldsymbol{\phi}^* \in \mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma) \text{ und } (V\boldsymbol{\phi}^*, \boldsymbol{\phi}^\perp)_\Gamma = 0.$$

Hier ist $\boldsymbol{\phi}^*$ die Orthogonalprojizierte von $\boldsymbol{\phi}$ auf $\mathbf{H}_*^{-1/2}(\Gamma)$ bezüglich des $(\cdot, \cdot)_V$ -Skalarproduktes. Nach Konstruktion gilt

$$(V\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi})_\Gamma = (V\boldsymbol{\phi}^*, \boldsymbol{\phi}^*)_\Gamma + (V\boldsymbol{\phi}^\perp, \boldsymbol{\phi}^\perp)_\Gamma,$$

und wie man leicht sieht ist $V\boldsymbol{\phi}^\perp$ konstant. Mit den Kommutationsregeln der Integraloperatoren [McL00] folgt $V(\frac{1}{2} + K')\boldsymbol{\phi}^\perp = (\frac{1}{2} + K)V\boldsymbol{\phi}^\perp = 0$ und daher $(\frac{1}{2} + K')\boldsymbol{\phi}^\perp = 0$. Setze nun $\mathbf{u}^* := \mathcal{V}\boldsymbol{\phi}^*$. Wir schließen

$$((\frac{1}{2} + K)\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})_\Gamma = (\mathbf{u}, (\frac{1}{2} + K')\boldsymbol{\phi}^*)_\Gamma = (\mathbf{u}, \gamma_1^{\text{int}}\mathbf{u}^*)_\Gamma.$$

In der zweiten Gleichung haben wir $\gamma_1^{\text{int}}\mathcal{V} = \frac{1}{2} + K'$ verwendet. Wegen $\mathcal{L}'\mathbf{u}^* = 0$ in Ω impliziert die Greensche Formel weiters

$$(\mathbf{u}, \gamma_1^{\text{int}}\mathbf{u}^*)_\Gamma = \alpha'_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*).$$

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}
b((\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{u}, \phi)) &= \alpha_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - ((\tfrac{1}{2} + K)\mathbf{u}, \phi)_\Gamma + (V\phi, \phi)_\Gamma \\
&= \alpha_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \alpha'_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) + \alpha'_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) + (V\phi^\perp, \phi^\perp)_\Gamma \\
&\geq (1 - \tfrac{\delta}{2\eta})\alpha_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (1 - \tfrac{1}{2\delta})\alpha'_\Omega(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) + \alpha'_{\Omega'}(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) + (V\phi^\perp, \phi^\perp)_\Gamma.
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile haben wir die Youngsche Ungleichung für $\alpha'_\Omega(\cdot, \cdot)$ zusammen mit $\alpha'_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq \frac{1}{\eta}\alpha_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ verwendet. Nach Voraussetzung können wir δ mit $\eta > \frac{\delta}{2} > \frac{1}{4}$ wählen, also $(1 - \frac{\delta}{2\eta}) > 0$ und $(1 - \frac{1}{2\delta}) > 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
b((\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{u}, \phi)) &\gtrsim \alpha_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \alpha'_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*) + (V\phi^\perp, \phi^\perp)_\Gamma \\
&= \alpha_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (V\phi, \phi)_\Gamma.
\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung. \square

Eine unmittelbare Folgerung des letzten Lemmas ist die Abschätzung

$$\tilde{b}((\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{u}, \phi)) \gtrsim \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)^n}^2 + (V\phi, \phi)_\Gamma + \|\Pi_0 [(\tfrac{1}{2} - K)\mathbf{u} + V\phi]\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2$$

für alle $(\mathbf{u}, \phi) \in \mathbf{H}$. Das nächste Lemma zeigt, dass unter einer Voraussetzung an \mathbf{Y}_0 die rechte Seite eine äquivalente Norm auf \mathbf{H} definiert. Wie üblich ist hier \mathbf{H} mit der Produktraum-Norm versehen,

$$\|(\mathbf{u}, \phi)\|_{\mathbf{H}}^2 := \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2.$$

Lemma 5.12 (Äquivalente Norm). *Sei Ω zusammenhängend, $\mathbf{Y}_0 \subset \mathbf{L}^2(\Gamma)$ ein abgeschlossener Teilraum mit Orthogonalprojektion $\Pi_0: \mathbf{L}^2(\Gamma) \rightarrow \mathbf{Y}_0$, und die Einschränkung $\Pi_0|_{\mathcal{R}}: \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{Y}_0$ sei injektiv. Dann definiert*

$$(\|(\mathbf{u}, \phi)\|_{\mathbf{H}}^*)^2 := \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)^n}^2 + (V\phi, \phi)_\Gamma + \|\Pi_0 [(\tfrac{1}{2} - K)\mathbf{u} + V\phi]\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2$$

eine äquivalente Norm auf $\mathbf{H} = \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$, es gilt also

$$C^{-1}\|(\mathbf{u}, \phi)\|_{\mathbf{H}} \leq \|(\mathbf{u}, \phi)\|_{\mathbf{H}}^* \leq C\|(\mathbf{u}, \phi)\|_{\mathbf{H}} \quad \text{für alle } (\mathbf{u}, \phi) \in \mathbf{H}.$$

Die Konstante $C > 0$ hängt nur von Ω , \mathbf{Y}_0 , λ' und μ' ab.

Beweis. Wir benutzen Lemma 2.7 mit $H := \mathbf{H}$, $L := \mathbf{L}^2(\Omega)$ und dem kompaktem Operator $T: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$, $(\mathbf{u}, \phi) \mapsto \mathbf{u}$. Die Kornsche Ungleichung (3.19) und die Äquivalenz $(V\phi, \phi)_\Gamma \simeq \|\phi\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2$ zeigen

$$\|(\mathbf{u}, \phi)\|_{\mathbf{H}} \simeq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|(\mathbf{u}, \phi)\|_{\mathbf{H}}^*.$$

Wir müssen nur noch überprüfen, dass $\|\cdot\|_{\mathbf{H}}^*$ tatsächlich eine Norm ist, also die Definitheit. Aus $\|(\mathbf{u}, \phi)\|_{\mathbf{H}}^* = 0$ folgt zunächst $\phi = 0$ und $\varepsilon(\mathbf{u}) = 0$. Lemma 3.3 zeigt, dass $\mathbf{u} \in \mathcal{R}$ (hier geht ein, dass Ω zusammenhängend ist). Wir haben weiters

$$0 = \|\Pi_0 [(\tfrac{1}{2} - K)\mathbf{u} + V\phi]\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} = \|\Pi_0 \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}.$$

Da nach Voraussetzung $\Pi_0|_{\mathcal{R}}$ injektiv ist, folgt $\mathbf{u} = 0$ auf Γ und nach Lemma 3.4 sogar $\mathbf{u} = 0$ in Ω . \square

Unser zentrales Resultat ist eine einfache Folgerung der Lemmata 5.9, 5.11 und 5.12.

Theorem 5.13 (Stabilität der diskreten Johnson-Nédélec-Kopplung). *Sei Ω zusammenhängend, $\mathbf{H}_\ell = \mathbf{X}_\ell \times \mathbf{Y}_\ell \subset \mathbf{H}$ abgeschlossen mit $\mathbf{Y}_0 \subset \mathbf{Y}_\ell$, und es seien die folgenden beiden Annahmen erfüllt:*

(i) $\mathbf{Y}_0 \subset \mathbf{L}^2(\Gamma)$ ist abgeschlossen, und für die Orthogonalprojektion $\Pi_0: \mathbf{L}^2(\Gamma) \rightarrow \mathbf{Y}_0$ gilt: $\Pi_0|_{\mathcal{R}}$ ist injektiv.

(ii) Es gilt $\min\{\frac{\mu}{\mu'}, \frac{\lambda}{\lambda'}\} > \frac{1}{4}$.

Dann besitzt (5.15) eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}_\ell, \phi_\ell) \in \mathbf{H}_\ell$, und es gilt

$$C^{-1} \|(\mathbf{u}_\ell, \phi_\ell)\|_{\mathbf{H}} \leq \|\mathbf{f}\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\phi_0\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}. \quad (5.19)$$

Sei $(\mathbf{u}, \phi) \in \mathbf{H}$ die Lösung des kontinuierlichen Problems (5.11)–(5.12). Dann gilt die Abschätzung für den Galerkin-Fehler

$$\|(\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{u}_\ell, \phi_\ell)\|_{\mathbf{H}} \leq C' \inf_{(\mathbf{v}_\ell, \psi_\ell) \in \mathbf{H}_\ell} \|(\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{v}_\ell, \psi_\ell)\|_{\mathbf{H}}. \quad (5.20)$$

Die Konstanten $C, C' > 0$ hängen nur von Ω, \mathbf{Y}_0 und den Lamé-Konstanten ab.

Beweis. Die Lemmata 5.11, 5.12 zeigen, dass $\widetilde{\mathbf{b}}$ elliptisch auf \mathbf{H} ist, also ist das Lemma von Lax-Milgram 2.10 anwendbar. Die eindeutige Lösung $(\mathbf{u}_\ell, \phi_\ell) \in \mathbf{H}_\ell$ von (5.17) ist nach dem Lemma von Führer 5.9 auch eine eindeutige Lösung von (5.16). Dasselbe gilt für die kontinuierliche Lösung $(\mathbf{u}, \phi) \in \mathbf{H}$, denn der Raum \mathbf{H} erfüllt wegen $\mathbf{H}_\ell \subset \mathbf{H}$ auch die Voraussetzung $\mathbf{Y}_0 \subset \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Die Beschränktheits- und die Elliptizitätskonstante von $\widetilde{\mathbf{b}}$ hängen nur von Ω, \mathbf{Y}_0 und den Lamé-Konstanten ab. Damit folgt das Céa-Lemma (5.20). Für das Funktional

$$\widetilde{F}(\mathbf{v}, \psi) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega - (\phi_0, \mathbf{v})_\Gamma + ((K - \frac{1}{2})\mathbf{u}_0, \psi)_\Gamma + ((K - \frac{1}{2})\mathbf{u}_0, \Pi_0 [(\frac{1}{2} - K)\mathbf{v} + V\psi])_\Gamma$$

überprüft man leicht $\widetilde{F} \in \mathbf{H}^*$ und

$$\|\widetilde{F}\| \lesssim \|\mathbf{f}\|_{\widetilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\phi_0\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)},$$

wobei die Konstante nur von Ω, λ' und μ' abhängt. Die gleichmäßige Schranke $\|B_\ell^{-1}\| \leq C$ im Lemma von Lax-Milgram impliziert daher (5.19). \square

Es ist noch zu klären, wann die Voraussetzung (i) an \mathbf{Y}_0 erfüllt ist. Wie wir schon gesehen haben, kann man für $\mathcal{R} \subset \mathbf{Y}_\ell$ einfach $\mathbf{Y}_0 = \mathcal{R}$ nehmen. Dies schließt aber einen wichtigen Fall aus, nämlich jenen der stückweise konstanten Polynome, $\mathbf{Y}_\ell = \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$. Das nächste Theorem ist [FFKP12] entnommen und zeigt, dass dieser Fall auch kein Problem darstellt. Dies bedeutet, dass Voraussetzung (i) in der Praxis eigentlich immer erfüllt ist.

Theorem 5.14 ([FFKP12, Theorem 2]). *Sei Ω ein Polyeder und \mathcal{T}_ℓ eine Triangulierung auf Γ . Dann ist Voraussetzung (i) aus Theorem 5.13 für $\mathbf{Y}_0 = \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ erfüllt. \square*

Bemerkung 5.15. Lemma 5.12 und Theorem 5.13 funktionieren auch, wenn Ω nicht zusammenhängend ist, allerdings wird die Voraussetzung an Π_0 komplizierter. Im Allgemeinen benötigt man nämlich, dass $\Pi_0|_{\ker \varepsilon(\cdot)}$ injektiv ist, und im nicht zusammenhängenden Fall enthält der Kern von $\varepsilon(\cdot)$ eben auch Funktionen, die nur stückweise rigid body motions sind. Da sich aber Theorem 5.14 auf jede Zusammenhangskomponente anwenden lässt, ist die Johnson-Nédélec-Kopplung für $\mathbf{Y}_\ell \supset \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ auch auf nicht zusammenhängenden Polyedern stabil. \square

5.3 A posteriori Fehlerschätzung und Adaptives Verfahren

Wir wollen ein adaptives Verfahren für die Johnson-Nédélec-Kopplung formulieren. Dazu sei $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ eine geschachtelte Folge von Triangulierungen auf Ω , siehe Bemerkung 2.37. Die Menge der Kanten von \mathcal{T}_ℓ bezeichnen wir mit \mathcal{E}_ℓ^* (das Wort „Kanten“ ist in diesem Abschnitt durchwegs als „ $(n-1)$ -dimensionale Seitenflächen“ zu lesen). Wir unterteilen \mathcal{E}_ℓ^* in Randkanten und innere Kanten,

$$\mathcal{E}_\ell := \{E \in \mathcal{E}_\ell^* : E \subset \Gamma\} \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_\ell^\Omega := \mathcal{E}_\ell^* \setminus \mathcal{E}_\ell = \{E \in \mathcal{E}_\ell^* : E \subset \Omega \text{ bis auf Ecken}\}.$$

Damit bildet \mathcal{E}_ℓ eine an \mathcal{T}_ℓ gekoppelte Triangulierung von Γ . Zur späteren Verwendung definieren wir auch die *lokale Kantenlänge* $h_{\ell,E}$ als Funktion auf dem Kantengerüst $\bigcup \mathcal{E}_\ell^*$ durch

$$h_{\ell,E}(x) := h_{E'} := \text{diam}(E') \quad \text{für alle } x \in E' \in \mathcal{E}_\ell^*.$$

Wir betrachten nun das Galerkin-Verfahren basierend auf den Testräumen

$$\mathbf{H}_\ell := \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell) \subset \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma).$$

Unsere diskrete Formulierung lautet daher: Finde $\mathbf{u}_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$ und $\phi_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$, sodass

$$\alpha_L(\mathbf{u}_\ell, \mathbf{v}_\ell) - (\phi_\ell, \mathbf{v}_\ell)_\Gamma = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\ell)_\Omega - (\phi_0, \mathbf{v}_\ell)_\Gamma, \quad (5.21)$$

$$((\tfrac{1}{2} - K)\mathbf{u}_\ell, \psi_\ell)_\Gamma + (V\phi_\ell, \psi_\ell)_\Gamma = ((K - \tfrac{1}{2})\mathbf{u}_0, \psi_\ell)_\Gamma \quad (5.22)$$

für alle $\mathbf{v}_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$ und $\psi_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$. Wir nehmen hier natürlich an, dass die Lamé-Konstanten die Relation $\min\{\frac{\mu}{\mu'}, \frac{\lambda}{\lambda'}\} > \frac{1}{4}$ erfüllen. Damit ist (5.21)–(5.22) nach den Ergebnissen des letzten Abschnittes für beliebige Netze \mathcal{T}_ℓ eindeutig lösbar.

Für die symmetrische FEM-BEM-Kopplung und die Lamé-Gleichung in 2D wurde bereits in [CFS97] ein Residuum-basierter Fehlerschätzer vorgeschlagen. Analog zu diesem sei der *Residualschätzer für die Johnson-Nédélec-Kopplung* η gegeben durch

$$\eta(\mathcal{T}_\ell \cup \mathcal{E}_\ell)^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \eta(T)^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \eta(E)^2.$$

Die lokalen Beiträge von η im Inneren sind

$$\eta(T)^2 := h_T^2 \|f\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 + \frac{1}{2} \|h_{\ell,E}^{1/2} [\gamma_1 \mathbf{u}_\ell]\|_{\mathbf{L}^2(\partial T \cap \Omega)}^2 \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_\ell.$$

Hier bezeichnet $[\gamma_1 \mathbf{u}_\ell]_E \in \mathbf{L}^2(E)$ den Sprung der Konormalenableitung von \mathbf{u}_ℓ über die Kante E . Man beachte, dass $[\gamma_1 \mathbf{u}_\ell] \in \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell^\Omega)$ stückweise konstant auf den Kanten ist.

Die lokalen Beiträge von η auf den Randkanten sind

$$\begin{aligned} \eta(E)^2 &:= h_E \|\phi_\ell - \gamma_1 \mathbf{u}_\ell - \phi_0\|_{\mathbf{L}^2(E)}^2 \\ &\quad + h_E \|\nabla_\Gamma ((\tfrac{1}{2} - K)(\mathbf{u}_\ell + \mathbf{u}_0) + V\phi_\ell)\|_{\mathbf{L}^2(E)}^2 \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}_\ell. \end{aligned}$$

Zusammengefasst ist der globale Residualschätzer gegeben durch

$$\eta(\mathcal{T}_\ell \cup \mathcal{E}_\ell)^2 = \|h_\ell f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \tag{5.23}$$

$$+ \|h_{\ell,E}^{1/2} [\gamma_1 \mathbf{u}_\ell]\|_{\mathbf{L}^2(\cup \mathcal{E}_\ell^\Omega)}^2 \tag{5.24}$$

$$+ \|h_{\ell,E}^{1/2} (\phi_\ell - \gamma_1 \mathbf{u}_\ell - \phi_0)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 \tag{5.25}$$

$$+ \|h_{\ell,E}^{1/2} \nabla_\Gamma ((\tfrac{1}{2} - K)\mathbf{u}_\ell + V\phi_\ell - (K - \tfrac{1}{2})\mathbf{u}_0)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2. \tag{5.26}$$

Ein detaillierter Beweis der Zuverlässigkeit des analogen Fehlerschätzers für den Laplace-Operator in 2D findet sich in [AFKP12]. Auch die Verallgemeinerung auf 3D wird dort behandelt, siehe [AFKP12, Section 5.3]. Da sich der Beweis unmittelbar auf unsere Situation überträgt, zitieren wir das entsprechende Resultat für den Lamé-Operator als Theorem.

Theorem 5.16. *Der Residualschätzer η ist zuverlässig. Sind also $(\mathbf{u}, \phi) \in \mathbf{H}$ und $(\mathbf{u}_\ell, \phi_\ell) \in \mathbf{H}_\ell$ die eindeutigen Lösungen von (5.11)–(5.12) bzw. (5.21)–(5.22), so gilt*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\phi - \phi_\ell\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq C_{\text{rel}} \eta(\mathcal{T}_\ell \cup \mathcal{E}_\ell).$$

Die Konstante $C_{\text{rel}} > 0$ hängt nur von Ω , den Lamé-Konstanten und der Formregularität von \mathcal{T}_ℓ ab. \square

Mit Hilfe des beschriebenen Schätzers lässt sich ein adaptiver Algorithmus analog zu jenem in Abschnitt 4.2 auch für die FEM-BEM-Kopplung formulieren. Den Residualschätzer auf Teilmengen $\mathcal{A}_\ell \subset \mathcal{T}_\ell \cup \mathcal{E}_\ell$ definieren wir wieder als

$$\eta(\mathcal{A}_\ell)^2 := \sum_{A \in \mathcal{A}_\ell} \eta(A)^2.$$

Im Algorithmus spielt nun einfach die Menge $\mathcal{T}_\ell \cup \mathcal{E}_\ell$ die Rolle des Netzes. Wir starten also mit einer initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 für $\ell = 0$ und führen die folgenden Schritte aus:

1. **Solve:** Berechne die Galerkin-Lösung $(\mathbf{u}_\ell, \phi_\ell)$ von (5.21)–(5.22).
2. **Estimate:** Berechne die Fehlerschätzer $\eta(A)$ für alle $A \in \mathcal{T}_\ell \cup \mathcal{E}_\ell$.
3. **Mark:** Bestimme eine Teilmenge $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{T}_\ell \cup \mathcal{E}_\ell$ von minimaler Kardinalität, sodass

$$\theta \eta(\mathcal{T}_\ell \cup \mathcal{E}_\ell) \leq \eta(\mathcal{M}_\ell).$$

4. **Refine:** Kreiere eine neue Triangulierung $\mathcal{T}_{\ell+1}$ mit zugehöriger Randtriangulierung $\mathcal{E}_{\ell+1}$ durch Verfeinern (zumindest) der Elemente in \mathcal{M}_ℓ . Setze $\ell = \ell + 1$ und gehe zu (1).

Das Bestimmen der Lösung von (5.21)–(5.22) läuft auf das Lösen eines Block-Matrix-Systems hinaus. Dies diskutieren wir im nachfolgenden Abschnitt.

6 Implementierung in 2D

6.1 Überblick

Wir haben für diese Diplomarbeit an der Erweiterung der MATLAB-Bibliothek HILBERT [AEF⁺13] gearbeitet. Diese erlaubt die Lösung von Randwertproblemen für den Laplace-Operator auf polygonalen Lipschitz-Gebieten in 2D mittels adaptiver BEM niedrigster Ordnung. Unser Beitrag ist die teilweise Ausdehnung der Funktionalität von HILBERT auf die Lamé-Gleichung. Unser Fokus lag dabei auf der Implementierung der folgenden beiden Verfahren:

- Adaptive BEM für die schwach singuläre Integralgleichung $V\phi = (K + \frac{1}{2})\mathbf{g}$, siehe Abschnitt 4.
- Adaptive Johnson-Nédélec-FEM-BEM-Kopplung (5.11)–(5.12), siehe Abschnitt 5.

In beiden Fällen haben wir uns auf Galerkin-Verfahren niedrigster Ordnung beschränkt. Dies bedeutet konkret: Unbekannte Neumann-Daten $\phi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ wurden mit \mathcal{P}^0 -Funktionen approximiert, unbekannte Lösungen im Inneren $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ mit \mathcal{S}^1 -Funktionen. Die Datenstrukturen sowie die Markierungs- und Netzverfeinerungsroutinen haben wir direkt aus HILBERT übernommen, siehe [AEF⁺13] für Details. Dabei sind einige Aspekte herauszustreichen:

- Die Verfeinerung des Randgitters geschieht einfach durch Bisektion im Mittelpunkt eines Elements. Dabei wird aber zusätzlich sichergestellt, dass die 2D-Formregularitätskonstante (2.26) gleichmäßig beschränkt bleibt, d.h. gegebenenfalls werden mehr als die markierten Elemente verfeinert.
- Als Verfeinerungsstrategie für Triangulierungen von Ω wird Newest Vertex Bisection verwendet. Dies sichert insbesondere gleichmäßige Beschränktheit der 3D-Formregularitätskonstante (2.21).
- Als Markierungsstrategie wird Dörfler-Markierung verwendet. Dies zusammen mit den letzten beiden Punkten sichert theoretisch Konvergenz mit der optimalen Rate – zumindest für BEM und den Laplace-Operator, siehe [FKMP13, CFPP14].

Wir geben im Folgenden einen Überblick der von uns beigesteuerten MATLAB-Funktionen für BEM. Das Aufstellen der diskreten Integraloperatoren und die Implementierung der Fehlerschätzer für BEM werden wir genauer in den Abschnitten 6.2 und 6.3 besprechen. Einen Überblick über die Implementierung der FEM-BEM-Kopplung geben wir in Abschnitt 6.5, nachdem wir in Abschnitt 6.4 die FEM-Implementierung allgemeiner elliptischer Systeme mit konstanten Koeffizienten (und insbesondere der Lamé-Gleichung) diskutiert haben.

Um die Notation an [AEF⁺13] anzupassen, treffen wir im Unterschied zu anderen Teilen der Diplomarbeit die folgenden Vereinbarungen: Triangulierungen auf Γ werden mit \mathcal{E}_ℓ bezeichnet, Triangulierungen auf Ω mit \mathcal{T}_ℓ . Wie in [AEF⁺13] werden wir immer davon ausgehen dass die beiden Gitter gekoppelt sind, d.h. $\mathcal{T}_\ell|_\Gamma = \mathcal{E}_\ell$. Insbesondere impliziert Formregularität von \mathcal{T}_ℓ jene von \mathcal{E}_ℓ . Die Menge der zu \mathcal{E}_ℓ gehörigen Knoten heißt \mathcal{K}_ℓ , die Menge der zu \mathcal{T}_ℓ gehörigen Knoten \mathcal{N}_ℓ . Die Buchstaben E, E' sind für Elemente von \mathcal{E}_ℓ

reserviert, T, T' für Elemente von \mathcal{T}_ℓ und z, z' für Elemente von $\mathcal{N}_\ell \supset \mathcal{K}_\ell$. Mit $i, j, k, l \in \{1, 2\}$ werden wie gehabt die zu Raumdimensionen gehörigen Indizes bezeichnet.

Wir haben versucht, die Funktionsheader so weit wie möglich konsistent mit jenen aus HILBERT zu halten. Der Name einer Funktion ist meist derselbe wie der Name einer in HILBERT enthaltenen Funktion, die analoges für den Laplace-Operator leistet. Die meisten Funktionen benötigen die Eingabe der Arrays `coordinates` und `elements`, welche wie in HILBERT [AEF⁺13] das Randnetz \mathcal{E}_ℓ mit den Knoten \mathcal{K}_ℓ beschreiben. Manchmal benutzen wir dafür aus Platzgründen die Abkürzungen `co` und `e1`. Zusätzlich müssen fast immer die Lamé-Parameter `mu:= μ` und `lambda:= λ` mit angegeben werden. Grundsätzlich sind hier alle Werte $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ als Eingabeparameter erlaubt, wir weisen allerdings darauf hin, dass ein Großteil der relevanten Theorie auf der Annahme $\mu, \lambda > 0$ beruht.

Diskrete Funktionen aus $\mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$ und $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ identifizieren wir in natürlicher Art und Weise mit Vektoren aus $\mathbb{R}^{2\#\mathcal{E}_\ell}$ bzw. $\mathbb{R}^{2\#\mathcal{K}_\ell}$. Beispielsweise wird $\Phi_\ell = \sum_{E,k} x_E^k \chi_E e^k \in \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$ mit dem Vektor $\mathbf{x} = (x_E^k) \in \mathbb{R}^{2\#\mathcal{E}_\ell}$ identifiziert. In MATLAB repräsentieren wir diese Vektoren stets als $N \times 2$ -Arrays, wobei $N = \#\mathcal{E}_\ell, \#\mathcal{K}_\ell$. Die Zeile gibt also an, zu welchem Randelement oder Knoten ein Eintrag gehört, und die Spalte zeigt die Raumdimension an. Wenn wir beispielsweise nur die erste Komponente Φ_ℓ^1 von $\Phi_\ell \simeq \mathbf{x}$ aufrufen wollen, tun wir dies in MATLAB mit dem Befehl `x(:, 1)`. Die Konvention der $N \times 2$ -Arrays ist von nun an immer zu beachten, wenn eine Funktion ein Element aus $\mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$ oder $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ als Eingabewert benötigt.

6.1.1 Integraloperatoren

Die diskrete Matrix des Einfachschichtpotentials

$$\mathbf{V} = (V_{EE'}^{kl}) \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{(2\#\mathcal{E}_\ell) \times (2\#\mathcal{E}_\ell)}, \quad V_{EE'}^{kl} = (V \chi_{E'} e^l, \chi_E e^k)_\Gamma$$

wird durch den Aufruf der folgenden Funktion zurückgegeben:

```
V = buildV(coordinates, elements, mu, lambda[, eta]);
```

Die ausgegebene Matrix ist in der Form

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{11} & \mathbf{V}^{12} \\ \mathbf{V}^{21} & \mathbf{V}^{22} \end{pmatrix}$$

angeordnet, mit den Blöcken $\mathbf{V}^{kl} = (V_{EE'}^{kl})_{E, E'} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{(\#\mathcal{E}_\ell) \times (\#\mathcal{E}_\ell)}$ für $k, l \in \{1, 2\}$. Die Einträge \mathbf{V} können zur Gänze analytisch berechnet werden, wie wir in Abschnitt 6.2 zeigen. Aus Stabilitätsgründen berechnen wir allerdings manche der Einträge semi-analytisch, d.h. für das äußere Integral wird numerische Quadratur verwendet. Der optionale Admissibilitätsparameter `eta` bestimmt, wie viele Einträge dies betrifft, siehe 6.2 für Details.

Die diskrete Matrix des Doppelschichtpotentials

$$\mathbf{K} = (K_{Ez}^{kl}) \in \mathbb{R}^{(2\#\mathcal{E}_\ell) \times (2\#\mathcal{K}_\ell)}, \quad K_{Ez}^{kl} = (K \eta_z e^l, \chi_E e^k)_\Gamma$$

wird durch den Aufruf der folgenden Funktion zurückgegeben:

```
K = buildK(coordinates,elements,mu,lambda[,eta]);
```

Die ausgegebene Matrix \mathbf{K} ist ebenso angeordnet wie \mathbf{V} . Für weitere Details siehe Abschnitt 6.2.

Um die Galerkin-Matrix für den Operator $(K + \frac{1}{2})$ aufzustellen, benötigen wir zusätzlich die Matrix

$$\mathbf{M} = (M_{Ez}^{kl}) \in \mathbb{R}^{(2\#\mathcal{E}_\ell) \times (2\#\mathcal{K}_\ell)}, \quad M_{Ez}^{kl} = (\eta_z \mathbf{e}^l, \chi_E \mathbf{e}^k)_\Gamma.$$

Sie wird durch den folgenden Aufruf im sparse-Format bereitgestellt:

```
M = buildM(coordinates,elements);
```

Die Funktion ist eine einfache Adaption der HILBERT-Funktion `buildM`.

Zur Punktauswertung von \mathcal{V} , d.h. zur Berechnung von

$$\mathbf{y} := (\mathcal{V}\Phi_\ell)(x) = \int_\Gamma \mathbf{U}(x-y)\Phi_\ell(y) dy \in \mathbb{R}^2$$

für $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$ und $x \in \mathbb{R}^2$ dient der Aufruf

```
y = evaluateV(coordinates,elements,phih,x,mu,lambda);
```

Hier wird Φ_ℓ durch die $\#\mathcal{E}_\ell \times 2$ -Matrix `phih` repräsentiert. Der Auswertungspunkt $\mathbf{x} = x \in \mathbb{R}^2$ wird als Zeilenvektor der Einträge eingegeben, d.h. in der Form $\mathbf{x} = [\mathbf{x}1, \mathbf{x}2]$; der Ausgabevektor $\mathbf{y} = [\mathbf{y}1, \mathbf{y}2]$ enthält die beiden Einträge von $(\mathcal{V}\phi_\ell)(x)$. Es können auch mehrere Punkte gleichzeitig ausgewertet werden, d.h. \mathbf{x} kann eine Matrix der Dimension $M \times 2$ sein, mit $M \geq 1$; entsprechend ist dann auch \mathbf{y} eine Matrix der Dimension $M \times 2$.

Zur Punktauswertung von \mathcal{K} , d.h. zur Berechnung von

$$\mathbf{y} := (\mathcal{K}G_\ell)(x) = \text{p.v.} \int_\Gamma (\gamma_{1,y} \mathbf{U}(x-y)) G_\ell(y) dy \in \mathbb{R}^2$$

für $G_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ dient der Aufruf

```
y = evaluateK(coordinates,elements,gh,x,mu,lambda);
```

Hier wird G_ℓ durch die $\#\mathcal{K}_\ell \times 2$ -Matrix `gh` repräsentiert. Der Auswertungspunkt $\mathbf{x} = x$ darf die Werte $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{K}_\ell$ annehmen; an den Knotenpunkten \mathcal{K}_ℓ des Randgitters ist die Punktauswertung aus Gründen der Implementierung nicht möglich, siehe Abschnitt 6.2 für eine nähere Diskussion. Wie zuvor können mehrere Punkte zugleich ausgewertet werden, d.h. \mathbf{x} und \mathbf{y} sind im Allgemeinen Matrizen der Dimension $M \times 2$.

Es sei noch bemerkt, dass die Punktauswertung von \mathcal{V} und \mathcal{K} im Unterschied zu HILBERT [AEF⁺13] in jedem Fall exakt durch analytische Formeln geschieht und dabei keine Probleme mit der Stabilität auftreten.

6.1.2 Schwach singuläre Integralgleichung

Wir betrachten nun die Implementierung der Randintegralgleichung für das Dirichlet-Problem,

$$V\phi = (K + \frac{1}{2})\mathbf{g}.$$

Ebenso wie in [AEF⁺13] approximieren wir die Dirichlet-Daten $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$ durch eine diskrete Funktion $G_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$. Die Approximation kann beispielsweise durch nodale Interpolation geschehen, also mit

$$G_\ell := \sum_{z \in \mathcal{K}_\ell} \mathbf{g}(z) \eta_z.$$

Der daraus resultierende Fehler lässt sich mit ähnlichen Techniken wie in Abschnitt 4 wie folgt abschätzen: Sei $\tilde{\Phi}_\ell$ die diskrete Lösung bezüglich der exakten Daten \mathbf{g} und Φ_ℓ die tatsächlich berechnete diskrete Lösung bezüglich der gestörten Daten G_ℓ . Dann gilt

$$\|\phi - \Phi_\ell\| \lesssim \|\phi - \tilde{\Phi}_\ell\| + \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma(\mathbf{g} - G_\ell)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)^2}. \quad (6.1)$$

(Beweisskizze: $\mathbf{g} - G_\ell$ ist in $\mathbf{H}_0^1(\omega_z)$ für jeden Patch und erfüllt daher eine Friedrichs-Ungleichung, welche die Poincaré-Ungleichung im Beweis von Lemma 4.9 ersetzt.) Für die numerische Berechnung der *Datenoszillationen*

$$\text{osc}_{D,\ell}(E)^2 := h_E \|\nabla_\Gamma(\mathbf{g} - G_\ell)\|_{\mathbf{L}^2(E)^2}^2$$

stellt HILBERT die Funktion

```
[osc,gh] = computeOscDirichlet(coordinates,elements,g);
```

zur Verfügung, welche auch für die Lamé-Gleichung funktioniert. Der Eingabeparameter \mathbf{g} ist ein function handle für die Dirichlet-Daten $\mathbf{g} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$, welcher Arrays von Punkten $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ der Dimension $M \times 2$, $M \geq 1$ in ebensolche überführt. Ausgegeben werden einerseits der $\#\mathcal{E}_\ell \times 1$ -Vektor $\text{osc} := (\text{osc}_{D,\ell}(E)^2)_{E \in \mathcal{E}_\ell}$ und andererseits der nodale Interpoland $\mathbf{gh} = G_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ als $\#\mathcal{K}_\ell \times 2$ -Array.

Das Aufstellen der rechten Seite

$$\mathbf{b} = (b_E^k) \in \mathbb{R}^{2\#\mathcal{E}_\ell}, \quad b_E^k = ((K + \frac{1}{2})G_\ell, \chi_E \mathbf{e}_k)_\Gamma$$

geschieht mit dem Aufruf

```
b = buildSymmRHS(coordinates,elements,gh,mu,lambda);
```

Der Eingabeparameter \mathbf{gh} repräsentiert G_ℓ und kann aus der Ausgabe von `computeOscDirichlet` übernommen werden.

Die folgenden beiden Aufrufe stellen Fehlerschätzer für BEM bereit:

```
est = computeEstSlpMu(co,el,father2son,x_fine,x_coarse);
est = computeEstSlpResidual(co,el,x,gh,mu,lambda[,p]);
```

Die Funktion `computeEstSlpMu` liefert den $h - h/2$ -Schätzer. Sie ist aus HILBERT übernommen und funktioniert analog für die Lamé-Gleichung, siehe [AEF⁺13]. Die Eingabewerte $\mathbf{x_coarse}$ und $\mathbf{x_fine}$ sind die Lösungen auf dem groben bzw. uniform verfeinerten Gitter und müssen von der Dimension $\#\mathcal{E}_\ell \times 2$ bzw. $2\#\mathcal{E}_\ell \times 2$ sein.

Die Funktion `computeEstSlpResidual` liefert den Residualschätzer. Der Eingabewert \mathbf{x} ist ein $\#\mathcal{E}_\ell \times 2$ -Array und repräsentiert die Galerkin-Lösung Φ_ℓ . Ausgegeben wird

Listing 1: adaptiveWeaksingResidual.m

```

1 function x = adaptiveWeaksingResidual(co,el,g,Nmax,theta,mu,lambda)
2 % Adaptive Solver for Vphi = (K+1/2)g.
3
4 while(size(el,1) < Nmax)
5
6     % SOLVE
7     [osc,gh] = computeOscDirichlet(co,el,g);
8     V = buildV(co,el,mu,lambda,1e5);
9     b = buildSymmRHS(co,el,gh,mu,lambda);
10    x = zeros(size(el,1),2);
11    x(:) = V\b(:);
12
13    % ESTIMATE
14    est = computeEstSlpResidual(co,el,x,gh,mu,lambda);
15
16    % MARK
17    marked = markElements(theta,est);
18
19    % REFINE
20    [co,el] = refineBoundaryMesh(co,el,marked);
21
22 end
23 end

```

der Vektor der quadrierten lokalen Schätzerbeiträge $\mathbf{est} := (\rho(E)^2)_{E \in \mathcal{E}_\ell}$. Der optionale Eingabeparameter \mathbf{p} ist der Grad des Polynoms, mit dem das Residuum \mathbf{R}_ℓ elementweise approximiert wird. Standardmäßig wird $\mathbf{p} = 2$ benutzt; für Details verweisen wir auf Abschnitt 6.3.

In akademischen Experimenten, wo die exakte Lösung \mathbf{u} des Dirichlet-Problems bekannt ist, ist zur Verifikation des Algorithmus von Interesse, eine berechenbare obere Schranke für den tatsächlichen Fehler $\|\phi - \Phi_\ell\|$ zur Verfügung zu haben, welche nicht vom Residualtyp ist. Aus (6.1) und dem Approximationssatz 4.2 erhält man

$$\|\phi - \Phi_\ell\| \lesssim \|h_\ell^{1/2}(\phi - \Phi_\ell)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} + \|h_\ell^{1/2}\nabla_\Gamma(\mathbf{g} - G_\ell)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)^2} =: \text{err}_\ell + \text{osc}_\ell.$$

Der erste Term err_ℓ wird durch den Aufruf

```
err = computeErrNeumann(coordinates,elements,x,phi[,p]);
```

zur Verfügung gestellt. Der Eingabewert \mathbf{x} repräsentiert wie zuvor die diskrete Lösung Φ_ℓ . Der Eingabewert \mathbf{phi} ist ein function handle für die Konormalenableitung $\phi = \mathbf{n} \cdot L\nabla\mathbf{u}$. Es wird angenommen, dass \mathbf{phi} von drei Variablen abhängt, nämlich (x, a, b) . Hier sind a und b die Eckpunkte des Randelements, auf dem sich x befindet. Dies ermöglicht der Funktion, den Normalvektor zu berechnen (zusammen mit der Vereinbarung, dass das Streckenstück $[a, b]$ gegen den Uhrzeigersinn ausgerichtet ist). Außerdem soll \mathbf{phi} natürlich mehrere Punkte gleichzeitig auswerten können, muss also Arrays $\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ der Dimension $M \times 2$, $M \geq 1$ in ein Array $\mathbf{phi}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ derselben Dimension überführen. Ausgegeben wird der Vektor der quadrierten lokalen Fehlerbeiträge $\mathbf{err} := (\text{err}_\ell(E)^2)_{E \in \mathcal{E}_\ell}$, wobei

$$\text{err}_\ell(E)^2 := h_E \|\phi - \Phi_\ell\|_{\mathbf{L}^2(E)}^2.$$

Diese Integrale werden mit Gauß-Quadratur näherungsweise berechnet. Der optionale Eingabeparameter p ist die Anzahl der Quadraturknoten; standardmäßig wird $p = 2$ benutzt.

Man beachte, dass die Auswertung von ϕ mittels $\phi(x) = \mathbf{n}(x) \cdot L(\nabla \mathbf{u})(x)$ absolut nichts mit unserer Implementierung der Integraloperatoren V und K zu tun hat. Insofern lässt sich mit `computeErrNeumann` verifizieren, dass unser Code im Wesentlichen das Richtige tut.

Zu guter Letzt stellen wir zu Demonstrationszwecken eine MATLAB-Funktion vor, die den adaptiven Algorithmus aus Abschnitt 4.2 realisiert, siehe Listing 1. Der Aufruf

```
x = adaptiveWeakSingResidual(co,el,g,Nmax,theta,mu,lambda);
```

führt auf ein vom Residualschätzer gesteuertes Verfahren. Die Eingabewerte `co` und `el` bestimmen das Start-Gitter; `g` ist ein function handle für die Dirichlet-Daten; `Nmax` gibt die maximale Anzahl der Elemente an, bis zu deren Erreichen verfeinert wird; und `theta:=θ ∈ (0, 1]` steht für den Adaptivitätsparameter, der bestimmt, wie viele Elemente pro Durchgang zur Verfeinerung markiert werden. Zurückgegeben wird die Galerkin-Lösung auf dem feinsten Gitter.

6.2 Implementierung der Integraloperatoren

6.2.1 Der V -Operator

Um den Integraloperator V auf dem Raum $\mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$ zu implementieren, müssen wir die Einträge der Galerkin-Matrix berechnen:

$$V_{EE'}^{kl} = \int_E \int_{E'} U^{kl}(x-y) dx dy \quad \text{für alle } E, E' \in \mathcal{E}_\ell, k, l = 1, 2. \quad (6.2)$$

Wir werden zeigen, wie man diese Doppelintegrale mittels analytischer Formeln exakt auswerten kann.

Zunächst ist jedes $E \in \mathcal{E}_\ell$ ein gerades Liniensegment und daher von der Form

$$E = \{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} : t \in [0, 1]\} =: [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Alternativ wird E durch die folgenden beiden Größen charakterisiert, dem *Richtungsvektor* \mathbf{x}_E und dem *Mittelpunkt* \mathbf{m}_E :

$$\mathbf{x}_E := \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{2} \quad \text{und} \quad \mathbf{m}_E := \frac{\mathbf{b} + \mathbf{a}}{2}.$$

Offenbar wird E durch die Parametrisierung

$$\varphi: [-1, 1] \rightarrow E, \quad \varphi(t) = \mathbf{m}_E + t\mathbf{x}_E$$

beschrieben, mit $|\det(D\varphi)| = |\mathbf{x}_E| = \frac{h_E}{2}$. Wir können daher (6.2) als Integral über $[-1, 1]^2$ schreiben:

$$V_{EE'}^{kl} = \frac{h_E h_{E'}}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U^{kl}(t\mathbf{x}_{E'} + s\mathbf{x}_E + \mathbf{z}_{EE'}) dt ds.$$

Wir haben hier $\mathbf{z}_{EE'} := \mathbf{m}_{E'} - \mathbf{m}_E = -\mathbf{z}_{E'E}$ gesetzt und auch die Substitution $s \mapsto -s$ benutzt. Es stellt sich heraus, dass sich dieses Doppelintegral aufgrund einer algebraischen Eigenschaft der Fundamentallösung zu einer Summe von Einfachintegralen umformen lässt. Wir erinnern daran, dass die Fundamentallösung gegeben ist durch

$$U^{kl}(x) = \frac{1}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left(-(\lambda + 3\mu) \log|x| \delta_{kl} + (\lambda + \mu) \frac{x_k x_l}{|x|^2} \right).$$

Für $t > 0$ gilt offenbar

$$U^{kl}(tx) = U^{kl}(x) - \frac{(\lambda + 3\mu)}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \log(t) \delta_{kl}.$$

Definition 6.1. Sei $k \in \mathbb{R}$. Wir nennen eine Funktion $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ *homogen vom Grad k* , falls

$$\mathbf{f}(tx) = t^k \mathbf{f}(x) \quad \text{für alle } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Weiters nennen wir eine skalare Funktion $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ *log-homogen*, falls ein $C \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$f(tx) = f(x) + C \log(t) \quad \text{für alle } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (6.3)$$

□

Nun ein kleines Lemma über log-homogene Funktionen:

Lemma 6.2. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ log-homogen (6.3). Dann ist ∇f homogen vom Grad -1 . Außerdem gilt

$$x \cdot \nabla f(x) = C \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Seien zusätzlich $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{b} := A\boldsymbol{\lambda}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(t\mathbf{a}_1 + s\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}) dt ds &= -4C + (1 + \lambda_1) \int_{-1}^1 f(\mathbf{a}_1 + s\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}) ds \\ &+ (1 - \lambda_1) \int_{-1}^1 f(-\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}) ds \\ &+ (1 + \lambda_2) \int_{-1}^1 f(t\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}) dt \\ &+ (1 - \lambda_2) \int_{-1}^1 f(t\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}) dt. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Beweis. Leiten wir (6.3) nach x ab, sehen wir

$$t(\nabla f)(tx) = \nabla(f(tx)) = \nabla(f(x) + C \log(t)) = \nabla f(x),$$

also $(\nabla f)(tx) = t^{-1} \nabla f(x)$. Leiten wir andererseits (6.3) nach t ab und werten bei 1 aus, folgt

$$x \cdot \nabla f(x) = \left[\frac{d}{dt} f(tx) \right]_{t=1} = \left[\frac{d}{dt} (f(x) + C \log(t)) \right]_{t=1} = C.$$

Für den zweiten Teil, bemerke zunächst dass, falls f log-homogen ist, f und ∇f lokal in \mathbb{R}^2 integrierbar sind, da sie sich in der Nähe von 0 wie $\log|x|$ bzw. $\frac{1}{|x|}$ verhalten. Betrachte das Lipschitz-Gebiet $\Omega = (-1, 1)^2$. Wir haben

$$(x + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \nabla [f(Ax + \mathbf{b})] = (Ax + \mathbf{b}) \cdot \nabla f(Ax + \mathbf{b}) = C.$$

Andererseits gilt $\operatorname{div}(x + \boldsymbol{\lambda}) = 2$. Partielle Integration zeigt also

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} f(Ax + \mathbf{b}) dx &= (\operatorname{div}(x + \boldsymbol{\lambda}), f(Ax + \mathbf{b}))_{\Omega} \\ &= -(x + \boldsymbol{\lambda}, \nabla [f(Ax + \mathbf{b})])_{\Omega} + (\mathbf{n}^T(x + \boldsymbol{\lambda}), f(Ax + \mathbf{b}))_{\partial\Omega} \\ &= -C|\Omega| + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot (x + \boldsymbol{\lambda}) f(Ax + \mathbf{b}) dx \end{aligned}$$

Zerlegt man $\partial\Omega$ in die vier Teile $\{1\} \times [-1, 1]$, $\{-1\} \times [-1, 1]$, $[-1, 1] \times \{1\}$ und $[-1, 1] \times \{-1\}$ mit Normalvektoren $(1, 0)^T$, $(-1, 0)^T$, $(0, 1)^T$ und $(0, -1)^T$, folgt nun leicht die behauptete Identität. Man beachte, dass die Randintegrale existieren, da $f \in W^{1,1}(\Omega)$ nach dem Spursatz ([Eva98]) $f \in L^1(\partial\Omega)$ impliziert. \square

Überlegen wir, wann die Reduktionsformel (6.4) auf das Integral

$$\int_E \int_{E'} f(x - y) dx dy = \frac{h_E h_{E'}}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(t\mathbf{x}_{E'} + s\mathbf{x}_E + \mathbf{z}_{EE'}) dt ds \quad (6.5)$$

anwendbar ist. Wir sagen $E \parallel E'$, falls $\mathbf{x}_E \parallel \mathbf{x}_{E'}$, und andernfalls $E \not\parallel E'$. Ist letzteres der Fall, so ist die Matrix $A := (\mathbf{x}_E, \mathbf{x}_{E'})$ invertierbar, also können wir $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^2$ bestimmen, sodass $A\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{z}_{EE'}$, und daher das Lemma anwenden.

Im anderen Fall $E \parallel E'$ lässt sich das Doppelintegral ebenfalls auf Einfachintegrale reduzieren, wenn auch aus ganz anderen Gründen.

Lemma 6.3. Sei $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $\gamma\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Für $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}) dt ds &= \int_{-1}^1 f(t\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}) dt + \int_{-1}^1 f(t\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}) dt \\ &\quad - \gamma \int_{-1}^1 s f(\mathbf{a}_1 + s\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}) ds + \gamma \int_{-1}^1 s f(-\mathbf{a}_1 + s\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}) ds. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Beweis. Setze $g(t) := f(t\mathbf{a}_1 + \mathbf{b})$, dann haben wir

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(t\mathbf{a}_1 + s\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}) dt ds = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(t + \gamma s) dt ds.$$

Mit partieller Integration in s sieht man

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(t + \gamma s) dt ds &= \int_{-1}^1 [sg(t + \gamma s)]_{s=-1}^1 dt - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma s g'(t + \gamma s) dt ds \\ &= \int_{-1}^1 [sg(t + \gamma s)]_{s=-1}^1 dt - \gamma \int_{-1}^1 s [g(t + \gamma s)]_{t=-1}^1 ds. \end{aligned}$$

Dies ist genau die Behauptung. \square

Setze nun der Übersichtlichkeit halber

$$I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}; f) := \int_{-1}^1 t^k f(t\mathbf{a} + \mathbf{b}) dt$$

bzw. $I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}; f)$ wenn f aus dem Zusammenhang klar ist. Die Lemmata 6.2 und 6.3 zeigen, dass wir die Berechnung des Galerkin-Integrals $\int_E \int_{E'} U^{kl}(x-y) dx dy$ auf die Auswertung von I_0 und I_1 zurückführen können. Genauer benötigen wir $I_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}; f)$ und $I_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}; f)$ für

$$f \in \left\{ -\log|x|, \frac{x_1^2}{|x|^2}, \frac{x_1 x_2}{|x|^2}, \frac{x_2^2}{|x|^2} \right\}. \quad (6.7)$$

Unser nächstes Ziel ist es daher, diese Integrale analytisch zu berechnen. Wir müssen sogar nur die ersten drei der Funktionen in (6.7) behandeln, denn für die vierte gilt offenbar $\frac{x_2^2}{|x|^2} = 1 - \frac{x_1^2}{|x|^2}$ und daher

$$\int_E \int_{E'} \frac{(x_2 - y_2)^2}{|x - y|^2} dx dy = h_E h_{E'} - \int_E \int_{E'} \frac{(x_1 - y_1)^2}{|x - y|^2} dx dy.$$

Zunächst ist es nützlich, einige Stammfunktionen zu kennen. Wir benutzen hier die Notation

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Es ist $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Lemma 6.4. *Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq 0$. Es gilt*

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathbf{a} \cdot (t\mathbf{a} + \mathbf{b})}{|t\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} dt &= \log|t\mathbf{a} + \mathbf{b}|, \\ \int \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|t\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} dt &= \tan^{-1} \left(\frac{-[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{\mathbf{a} \cdot (t\mathbf{a} + \mathbf{b})} \right). \end{aligned}$$

Für die definiten Integrale haben wir

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\mathbf{a} \cdot (t\mathbf{a} + \mathbf{b})}{|t\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} dt &= \log \frac{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|}, \\ \int_{-1}^1 \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|t\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} dt &= \begin{cases} \tan^{-1} \left(\frac{2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2} \right), & |\mathbf{b}| > |\mathbf{a}|, \\ \operatorname{sgn}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])\pi + \tan^{-1} \left(\frac{2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2} \right), & |\mathbf{b}| < |\mathbf{a}|, \\ \operatorname{sgn}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])\frac{\pi}{2}, & |\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Da der Beweis einfach nur Ausdifferenzieren bzw. Rechnen ist, überspringen wir ihn. Die letzte Gleichheit findet man mit Hilfe des Additionstheorem für den Arcustangens.

Natürlich könnte man die definiten Integrale auch einfach als Differenz der Stammfunktionen ausrechnen, aber diese Auswertung wird instabil, falls beispielsweise $|\mathbf{b}|$ wesentlich größer ist als $|\mathbf{a}|$. Die Darstellungen aus dem obigen Lemma hingegen haben sich als stabil erwiesen, auch für extrem große Werte von $\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$. Dies ist wichtig, wenn man auf stark adaptierten Gittern rechnet, wie wir später noch ausführen werden.

Sei nun $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq 0$. Dann bildet $\{|\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2, \mathbf{a} \cdot (\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b}), [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\}$ eine Basis der quadratischen Polynome in t . Dies bedeutet, für jedes quadratische Polynom $q(t)$ können wir $A, B, C \in \mathbb{R}$ finden, sodass

$$\frac{q(t)}{|\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} = A + B \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b})}{|\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} + C \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2}. \quad (6.8)$$

Man beachte, dass wir die rechte Seite bereits explizit integrieren können, also auch die linke Seite. Dies lässt sich für $q(t) \in \{(ta_1 + b_1)^2, (ta_1 + b_1)(ta_2 + b_2)\}$ durchführen, womit wir bereits drei der vier Funktionen aus (6.7) integrieren können, zumindest wenn $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq 0$. Ist aber $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$ und $\mathbf{a} \neq 0$, also $\mathbf{b} = \gamma\mathbf{a}$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$, dann haben wir

$$\frac{(ta_1 + b_1)^2}{|\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} = \frac{(t + \gamma)^2 a_1^2}{(t + \gamma)^2 |\mathbf{a}|^2} \equiv \frac{a_1^2}{|\mathbf{a}|^2},$$

also eine Darstellung wie (6.8) mit $B = C = 0$. Genauso können wir $(ta_1 + b_1)(ta_2 + b_2)$ behandeln. Das nächste Lemma gibt explizite Werte für A, B, C in (6.8).

Lemma 6.5. *Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{a} \neq 0$. Setze*

$$A_{11} := \frac{a_1^2}{|\mathbf{a}|^2}, \quad A_{12} := \frac{a_1 a_2}{|\mathbf{a}|^2}, \quad A_{22} := \frac{a_2^2}{|\mathbf{a}|^2},$$

$$B := -2A_{12} \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}, \quad C := (A_{22} - A_{11}) \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}.$$

Dann gilt

$$\frac{(ta_1 + b_1)^2}{|\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} = A_{11} + B \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b})}{|\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} + C \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2},$$

$$\frac{(ta_1 + b_1)(ta_2 + b_2)}{|\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} = A_{12} - C \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b})}{|\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} + B \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2}.$$

□

Da die prinzipielle Vorgehensweise klar ist, lassen wir wieder den Beweis aus. Mit diesem Lemma können wir I_0 berechnen. Für I_1 , multipliziere (6.8) mit t . Dies liefert

$$\frac{tq(t)}{|\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} = At + \frac{\tilde{q}(t)}{|\mathbf{t}\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2}$$

mit einem quadratischen Polynom $\tilde{q}(t)$. Es ist $\int_{-1}^1 At dt = 0$. Für $\tilde{q}(t)$ können wir genauso wie oben vorgehen, mit dem folgendem Ergebnis:

Lemma 6.6. Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{a} \neq 0$. Zusätzlich zu den Konstanten aus Lemma 6.5, setze

$$B_1 := \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]C - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})B}{|\mathbf{a}|^2}, \quad C_1 := \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})C + [\mathbf{a}, \mathbf{b}]B}{|\mathbf{a}|^2}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{t(ta_1 + b_1)^2}{|t\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} &= A_{11}t + B + B_1 \frac{\mathbf{a} \cdot (t\mathbf{a} + \mathbf{b})}{|t\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} - C_1 \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|t\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2}, \\ \frac{t(ta_1 + b_1)(ta_2 + b_2)}{|t\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} &= A_{12}t - C + C_1 \frac{\mathbf{a} \cdot (t\mathbf{a} + \mathbf{b})}{|t\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} + B_1 \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|t\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2}. \end{aligned}$$

□

Man beachte, dass durch Lemma 6.5 und 6.6 die Fälle $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$ und $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq 0$ gleichzeitig abgedeckt werden. Im Fall $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$ gilt $B = C = B_1 = C_1 = 0$. Der Fall $\mathbf{a} = 0$ wurde stets ausgenommen, dieser tritt aber bei der Berechnung der Galerkin-Integrale ohnehin nicht auf: Wendet man die Reduktionsformeln (6.4) und (6.6) auf Integrale der Form (6.5) an, so erhält man in den resultierenden Ausdrücken $I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ stets $\mathbf{a} = \mathbf{x}_E$ oder $\mathbf{a} = \mathbf{x}_{E'}$, also $\mathbf{a} \neq 0$ sofern die Randelemente E und E' nicht zu einem Punkt degeneriert sind.

Was uns noch fehlt, sind analytische Formeln für $I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}; -\log|x|)$, $k = 0, 1$. Wir benutzen partielle Integration:

$$-\int_{-1}^1 \log|t\mathbf{a} + \mathbf{b}| dt = [-t \log|t\mathbf{a} + \mathbf{b}|]_{t=-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{t\mathbf{a} \cdot (t\mathbf{a} + \mathbf{b})}{|t\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} dt. \quad (6.9)$$

Der zweite Term rechts lässt sich mit den obigen Methoden behandeln. Der erste Term lässt sich problemlos (stabil) auswerten, *außer* es gilt $\mathbf{a} = \pm\mathbf{b}$; dieser Fall muss gesondert behandelt werden. Obwohl es auf den ersten Blick nicht offensichtlich ist, gilt (6.9) im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes auch im Fall $\mathbf{b} = \gamma\mathbf{a}$ und $\gamma \in (-1, 1)$. Das Integral $-\int_{-1}^1 t \log|t\mathbf{a} + \mathbf{b}| dt$ lässt sich ebenfalls mit partieller Integration vereinfachen. Die Zusammenfassung gibt das nächste Lemma, wieder ohne Beweis.

Lemma 6.7. Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Für $\mathbf{a} \neq \pm\mathbf{b}$ gilt

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^1 \log|t\mathbf{a} + \mathbf{b}| dt &= 2 - \log|\mathbf{a} + \mathbf{b}||\mathbf{a} - \mathbf{b}| - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2} \log \frac{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} - \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2} \int_{-1}^1 \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|t\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} dt, \\ -\int_{-1}^1 t \log|t\mathbf{a} + \mathbf{b}| dt &= -\frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2} + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - [\mathbf{a}, \mathbf{b}]^2 - |\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{a}|^2} \log \frac{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2} \int_{-1}^1 \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|t\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2} dt. \end{aligned}$$

Für $\mathbf{a} = \pm\mathbf{b}$ gilt

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^1 \log|t\mathbf{a} + \mathbf{b}| dt &= 2 - 2 \log(2|\mathbf{a}|), \\ -\int_{-1}^1 t \log|t\mathbf{a} + \mathbf{b}| dt &= -\frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2} = \mp 1. \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe der Resultate dieses Abschnittes lässt sich leicht ein Algorithmus zur Auswertung von

$$V_{EE'}^{kl} = \int_E \int_{E'} U^{kl}(x-y) dx dy$$

konstruieren. Dieser sollte auch ausnützen, dass $V_{EE'}^{kl}$ symmetrisch bezüglich Vertauschung von E, E' bzw. k, l ist. Dies bedeutet, von den *acht* Einträgen

$$V_{EE'}^{kl}, V_{E'E}^{kl}, \quad k, l = 1, 2$$

müssen nur *drei* berechnet werden, nämlich

$$V_{EE'}^{11}, V_{EE'}^{12}, V_{EE'}^{22}.$$

Hierfür reicht es, die folgenden drei Integrale zu berechnen und geeignet zusammenzusetzen:

$$- \int_E \int_{E'} \log|x-y| dx dy, \quad \int_E \int_{E'} \frac{(x_1-y_1)^2}{|x-y|^2} dx dy, \quad \int_E \int_{E'} \frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}{|x-y|^2} dx dy.$$

Da alle drei Funktionen log-homogen sind, lassen sich diese Doppelintegrale mit Lemma 6.3 bzw. 6.2 auf Einfachintegrale umformen, je nachdem, ob E und E' parallel sind oder nicht. Dabei müssen die Fälle, dass E und E' gleich bzw. benachbart sind nicht gesondert behandelt werden. Die Einfachintegrale $I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}; f)$, $k = 0, 1$ werden dann von einer Subroutine mit Hilfe der Formeln dieses Abschnittes ausgewertet.

Will man auf stark adaptierten Gittern rechnen – das bedeutet: sind $h_E, h_{E'}$ unter Umständen *sehr* klein –, so ist eine Verfeinerung des soeben beschriebenen Algorithmus notwendig. Um dies zu sehen, betrachten wir die Reduktionsformel (6.4) für den Fall $E \nparallel E'$ genauer. Wir benötigen dafür $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\lambda_1 \mathbf{x}_E + \lambda_2 \mathbf{x}_{E'} = \mathbf{z}_{EE'}.$$

Wendet man $[\cdot, \mathbf{x}_E]$ bzw. $[\cdot, \mathbf{x}_{E'}]$ auf diese Gleichung an, sieht man

$$\lambda_1 = \frac{[\mathbf{z}_{EE'}, \mathbf{x}_E]}{[\mathbf{x}_{E'}, \mathbf{x}_E]}, \quad \lambda_2 = \frac{[\mathbf{z}_{EE'}, \mathbf{x}_{E'}]}{[\mathbf{x}_E, \mathbf{x}_{E'}]}.$$

Wenn E und E' beide sehr klein sind, aber relativ weit auseinander liegen, gilt $|\mathbf{x}_E| + |\mathbf{x}_{E'}| \ll |\mathbf{z}_{EE'}|$, und es folgt (typischerweise) $\lambda_1, \lambda_2 \gg 1$. Dieser Fall tritt bei stark adaptierten Netzen häufig auf. Die Formel (6.4) für $C = 0$ besagt, etwas anders hingeschrieben,

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(t\mathbf{x}_{E'} + s\mathbf{x}_E + \mathbf{z}_{EE'}) dt ds &= (\lambda_1 + 1)I_0(\mathbf{x}_E, \mathbf{x}_{E'} + \mathbf{z}_{EE'}) & (6.10) \\ &- (\lambda_1 - 1)I_0(\mathbf{x}_E, \mathbf{x}_{E'} - \mathbf{z}_{EE'}) \\ &+ (\lambda_2 + 1)I_0(\mathbf{x}_{E'}, \mathbf{x}_E + \mathbf{z}_{EE'}) \\ &- (\lambda_2 - 1)I_0(\mathbf{x}_{E'}, \mathbf{x}_E - \mathbf{z}_{EE'}). \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Es gilt hier beispielsweise

$$I_0(\mathbf{x}_E, \mathbf{x}_{E'} + \mathbf{z}_{EE'}) = \int_{-1}^1 f(t\mathbf{x}_E + \mathbf{x}_{E'} + \mathbf{z}_{EE'}) dt.$$

Da f in den für uns relevanten Fällen gerade ist, $f(-x) = f(x)$, haben wir

$$I_0(\mathbf{x}_E, \mathbf{x}_{E'} - \mathbf{z}_{EE'}) = I_0(\mathbf{x}_E, \mathbf{z}_{EE'} - \mathbf{x}_{E'}).$$

Für $|\mathbf{x}_E| + |\mathbf{x}_{E'}| \ll |\mathbf{z}_{EE'}|$ folgt

$$I_0(\mathbf{x}_E, \mathbf{x}_{E'} + \mathbf{z}_{EE'}) \approx I_0(\mathbf{x}_E, \mathbf{x}_{E'} - \mathbf{z}_{EE'}).$$

Außerdem haben wir, wegen $\lambda_1, \lambda_2 \gg 1$,

$$\lambda_1 + 1 \approx \lambda_1 - 1.$$

Zusammengefasst gilt für die ersten beiden Zeilen von (6.10)

$$(\lambda_1 + 1)I_0(\mathbf{x}_E, \mathbf{x}_{E'} + \mathbf{z}_{EE'}) - (\lambda_1 - 1)I_0(\mathbf{x}_E, \mathbf{x}_{E'} - \mathbf{z}_{EE'}) \approx 0,$$

und dasselbe für die dritte und vierte Zeile. Hier tritt also im Allgemeinen ein *starker Auslöschungseffekt* auf, wenn E und E' klein sind und weit auseinander liegen. Diese Analyse zeigt auch, dass der Fall $E \nparallel E'$, wenn E und E' zwar klein sind aber auch nahe beieinander liegen, unproblematisch ist. Zum selben Ergebnis kommt man für $E \parallel E'$. Insbesondere stellt der Fall $E = E'$ überhaupt kein Problem dar. Der Grund ist, dass die Formeln für $I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}; f)$ aus Lemma 6.4 und 6.7 auch für sehr kleine \mathbf{a} oder \mathbf{b} stabil sind, insbesondere im Spezialfall $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ (der für $E = E'$ auftritt).

Um das Problem zu lösen, ersetzen wir die Reduktionsformeln (6.4), (6.6) für das äußere Integral, wenn E und E' klein sind und weit auseinanderliegen, durch eine Methode, die in diesem Fall sehr gut funktioniert: Gauß-Quadratur. Wir berechnen dann

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(t\mathbf{x}_{E'} + s\mathbf{x}_E + \mathbf{z}_{EE'}) dt ds \approx \sum_{j=1}^p w_j I_0(\mathbf{x}_{E'}, s_j \mathbf{x}_E + \mathbf{z}_{EE'}),$$

also *semi-analytisch*, mit Gauß-Knoten $s_j \in (-1, 1)$ und Gewichten $w_j > 0$, $j = 1, \dots, p$. Dabei wollen wir natürlich eine möglichst kleine Anzahl der Knoten p benutzen. Experimentell hat sich gezeigt, dass $p = 2$ üblicherweise ausreichend für die Beibehaltung der optimalen Konvergenzraten im adaptiven Algorithmus ist. Bei besonders starken Singularitäten in der Lösung kann aber ein etwas höheres p , etwa $p = 4$, eine Verbesserung der Stabilität bringen. Überdies ist $p = 4$ eine sehr „natürliche“ Wahl, da erstens bei analytischem Rechnen durch die Reduktionsformeln ebenfalls *vier* Integrale auftreten, und zweitens Gauß-Quadratur beim K -Operator mindestens $p = 4$ benötigt; d.h. eine Reduktion von $p = 4$ auf $p = 2$ oder 3 im Fall von semianalytischem Rechnen im V -Operator würde insgesamt praktisch keine relative Verbesserung der Laufzeiten bringen.

Die Entscheidung, ob semi-analytisch oder analytisch gerechnet wird, hängt von der Lage von E und E' sowie einem *Admissibilitätsparameter* $\eta \in [0, \infty]$ ab: Gilt

$$\eta(|\mathbf{z}_{EE'}| - |\mathbf{x}_E| - |\mathbf{x}_{E'}|) \geq \min\{|\mathbf{x}_E|, |\mathbf{x}_{E'}|\}, \quad (6.11)$$

wird semi-analytisch gerechnet, andernfalls analytisch. Beachte, dass dies zur Folge hat, dass für benachbarte oder gleiche Elemente *immer* analytisch gerechnet wird – das bedeutet, die Gauß-Quadratur geht niemals über eine Singularität. Für $\eta = \infty$ wird in (fast) allen anderen Fällen mit Gauß gerechnet; für $\eta = 0$ hingegen wird ausschließlich analytisch gerechnet.

In der Praxis kann man η sehr klein bzw. ziemlich groß wählen, ohne dass Stabilitätsprobleme beim analytischen Rechnen bzw. Genauigkeitsprobleme beim semi-analytischen Rechnen auftreten. Bei unseren Experimenten haben sich beispielsweise $10^{-7} \leq \eta \leq 10^1$ als unproblematische Werte erwiesen. Man η wird in der Praxis möglichst klein wählen wollen, wegen der im Allgemeinen größeren Genauigkeit bei analytischem Rechnen. Um auf der sicheren Seite zu sein, was Instabilitäten angeht, haben wir daher den Default-Wert $\eta = 10^{-5}$ gewählt.

6.2.2 Der K -Operator

Den Integraloperator K haben wir für $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ -Ansatzfunktionen und $\mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$ -Testfunktionen implementiert. Dies führt auf die Integrale

$$K_{Ez}^{kl} = (K\eta_z \mathbf{e}_l, \chi_E \mathbf{e}_k)_\Gamma = \int_E \int_\Gamma T^{kl}(x, y) \eta_z(y) dy dx \quad \text{für alle } z \in \mathcal{K}_\ell, T \in \mathcal{E}_\ell, k, l = 1, 2.$$

Hier ist

$$\left(T^{kl}(x, y) \right)_{k,l} := \mathbf{T}(x, y) := \mathbf{n}(x)^T L \nabla \mathbf{U}(x - y)$$

mit der Lamé-Matrix L , also $L \nabla = \sigma(\cdot)$. Natürlich berechnet man das Integral über Γ elementweise als

$$\sum_{E' \in \mathcal{E}_\ell: z \in E'} \int_E \int_{E'} T^{kl}(x, y) \eta_z(y) dy dx. \quad (6.12)$$

Wir werden die Berechnung dieser Integrale nicht so genau ausführen wie für den V -Operator, da die Formeln zum Teil recht muhlsam werden – schon die Berechnung der Einträge von $\mathbf{T}(x, y)$ ist aufwändig, immerhin ist $L \nabla \mathbf{U}$ ein Tensor der Ordnung $2 \times 2 \times 2$. Wir umreißen daher nur kurz unsere Vorgehensweise:

- Zunächst reduzieren wir (6.12) auf Integrale von skalaren Funktionen, nämlich

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t^k f(t \mathbf{x}_{E'} + \mathbf{s} \mathbf{x}_E + \mathbf{z}_{EE'}) dt ds \quad \text{für } f \in \left\{ \frac{x_1}{|x|^2}, \frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1^3}{|x|^4}, \frac{x_2^3}{|x|^4} \right\} \text{ und } k = 0, 1. \quad (6.13)$$

- Da diese Funktionen alle homogen vom Grad -1 sind, kann man Reduktionsformeln ähnlich wie (6.4) und (6.6) verwenden, um (6.13) auf die Einfachintegrale $I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}; f)$, $k = 0, 1, 2$ zurückzuführen. Dies funktioniert aufgrund der stärkeren Singularität im K -Operator allerdings *nicht* mehr für $E = E'$.

- Im Fall $\mathbf{x}_E \parallel \mathbf{x}_{E'} \parallel \mathbf{z}_{EE'}$ lässt sich das Doppelintegral (6.13) direkt mit Hilfe einfacher Formeln auswerten. Dieser Fall wird daher gesondert behandelt. Er tritt ein, wenn E und E' auf derselben geraden Linie liegen, insbesondere wenn $E = E'$.
- Bezüglich Stabilität der Reduktionsformeln treten dieselben Probleme auf wie beim V -Operator. Wir verwenden daher wieder Gauß-Quadratur mit der Zulässigkeitsbedingung (6.11) wie beim V -Operator. Experimentell haben sich 4 Gauß-Knoten als gerade ausreichend für die Beibehaltung der Konvergenzraten erwiesen.
- Die Integrale $I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}; f)$, $k = 0, 1$ berechnen wir mit ähnlichen Techniken wie im Fall des V -Operators. Für die Funktionen $f \in \left\{ \frac{x_1^3}{|x|^4}, \frac{x_2^3}{|x|^4} \right\}$ werden die Formeln ziemlich lang.
- Für die Berechnung von $I_2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ benutzen wir *Rekursionsformeln*. Sei $l \in \{1, 2\}$, dann setze $J_k := I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \frac{x_l}{|x|^2})$ und $K_k := I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \frac{x_l^3}{|x|^4})$ für $k = 0, 1, 2$. Es lässt sich unschwer zeigen, dass

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}|^2 J_2 &= 2b_l - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})J_1 - |\mathbf{b}|^2 J_0, \\ |\mathbf{a}|^2 K_2 &= a_l^2 J_2 + 2a_l b_l J_1 + b_l^2 J_0 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})K_1 - |\mathbf{b}|^2 K_0. \end{aligned}$$

Dies führt J_2 und K_2 auf bereits berechnete Werte zurück.

- Eine Schwierigkeit stellt der Fall $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ dar, d.h. $\mathbf{b} = \gamma \mathbf{a}$. Für $\gamma \in [-1, 1]$ existieren die Integrale $I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ nicht mehr im Sinn von absoluter Integrierbarkeit: Der Integrand hat eine Singularität der Form

$$\frac{1}{t - \gamma} \quad \text{bei } t = \gamma.$$

Für $\gamma \in (-1, 1)$ lässt sich allerdings leicht der Cauchysche Hauptwert von $I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ berechnen, wobei sich herausstellt, dass sogar dieselben Formeln verwendet werden können wie für den (integrierbaren) Fall $\gamma \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

- Für den Fall $\mathbf{a} = \pm \mathbf{b}$ existiert $I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ nicht einmal als Cauchyscher Hauptwert, da die Singularität am Intervallrand liegt und daher nicht durch einen Vorzeichenwechsel ausgeglichen werden kann. Bei näherer Analyse stellt man fest, dass dieser Fall in der Routine zur Berechnung von (6.12) niemals auftritt, auch nicht wenn man Gauß-Quadratur verwendet. Allerdings tritt der Fall bei der *Punktauswertung* des K -Operators auf, nämlich genau dann, wenn man $(K\mathbf{g})(z)$ bei einem Knoten $z \in \mathcal{K}_\ell$ des Gitters auswerten will. Wir haben daher die Punktauswertung bei Knoten einfach vermieden, siehe nächster Unterabschnitt. Theoretisch könnte man jedoch auch die Auswertung bei $z \in \mathcal{K}_\ell$ implementieren, indem man das Integral über die zwei benachbarten Elemente E, E' mit $E \cap E' = \{z\}$ gemeinsam betrachtet.

6.3 Implementierung der BEM-Fehlerschätzer

Wir besprechen die Implementierung des h - $h/2$ -Schätzers und des Residualschätzers aus Abschnitt 4.2. Wir beginnen mit dem (lokalen) h - $h/2$ -Schätzer:

$$\tilde{\mu}(\mathcal{E}_\ell)^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_T \|\widehat{\Phi}_\ell - \Phi_\ell\|_{\mathbf{L}^2(E)}^2.$$

Dieser bedarf zunächst der Bestimmung der zusätzlichen Galerkin-Lösung $\widehat{\Phi}_\ell$ auf dem uniform verfeinerten Gitter $\widehat{\mathcal{E}}_\ell$. Stehen Φ_ℓ und $\widehat{\Phi}_\ell$ zur Verfügung, ist die Berechnung von $\tilde{\mu}(\mathcal{E}_\ell)$ simpel: Für jedes $T \in \mathcal{E}_\ell$, sei $E = E_1 \cup E_2$ mit $E_1, E_2 \in \widehat{\mathcal{E}}_\ell$. Schreibe

$$\Phi_\ell = \sum_{k,E} x_E^k \chi_E e_k \quad \text{und} \quad \widehat{\Phi}_\ell = \sum_{k,E} \left(\widehat{x}_{E_1}^k \chi_{E_1} + \widehat{x}_{E_2}^k \chi_{E_2} \right) e_k.$$

Wegen $|E_1| = |E_2| = \frac{h_E}{2}$ folgt

$$\|\widehat{\Phi}_\ell - \Phi_\ell\|_{L^2(E)}^2 = \frac{h_E}{2} \sum_{k=1,2} \left((\widehat{x}_{E_1}^k - x_E^k)^2 + (\widehat{x}_{E_2}^k - x_E^k)^2 \right).$$

Die rechte Seite, und damit der Fehlerschätzer $\tilde{\mu}(\mathcal{E}_\ell)$, lässt sich ganz einfach in MATLAB implementieren.

Als nächstes besprechen wir den Residualschätzer. Da wir für die Lösung Φ_ℓ eine approximierende rechte Seite $G_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ verwenden, tun wir dies konsequenterweise auch im Residualschätzer:

$$\rho(\mathcal{E}_\ell)^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_E \|\nabla_\Gamma \left((K + \frac{1}{2})G_\ell - V\Phi_\ell \right)\|_{L^2(E)}^2.$$

Wir berechnen zunächst $\|\nabla_\Gamma u\|_{L^2(E)}$ für allgemeines $u \in H^1(E)$.

Lemma 6.8. *Sei $E \in \mathcal{E}_\ell$ und $u \in H^1(E)$. Definiere die Funktion $\tilde{u} \in H^1(-1,1)$ durch*

$$\tilde{u}(t) := u(t\mathbf{x}_E + \mathbf{m}_E).$$

Dann gilt

$$h_E \|\nabla_\Gamma u\|_{L^2(E)}^2 = 2 \int_{-1}^1 |\tilde{u}'(t)|^2 dt.$$

Beweis. Setze $\kappa(t) = t\mathbf{x}_E + \mathbf{m}_E$. Dies ist eine bi-Lipschitz-stetige Parametrisierung $\kappa: (-1,1) \rightarrow E$, und es gilt $D\kappa = \kappa' \equiv \mathbf{x}_E$. Wegen $\nabla_\Gamma u \in \text{span}(D\kappa)$ gilt also $\nabla_\Gamma u = \mathbf{x}_E w$ für eine skalare Funktion $w: E \rightarrow \mathbb{R}$. Die Kettenregel aus Lemma 2.29 zeigt

$$\tilde{u}' = \nabla(u \circ \kappa) = D\kappa^T (\nabla_\Gamma u) \circ \kappa = |\mathbf{x}_E|^2 w \circ \kappa.$$

Daraus folgt

$$|(\nabla_\Gamma u)(\kappa(t))| = |\mathbf{x}_E| |w \circ \kappa(t)| = \frac{1}{|\mathbf{x}_E|} |\tilde{u}'(t)|$$

für fast alle $t \in (-1,1)$. Wir schließen

$$\int_E |\nabla_\Gamma u|^2 dx = |\mathbf{x}_E| \int_{-1}^1 |(\nabla_\Gamma u)(\kappa(t))|^2 dt = \frac{1}{|\mathbf{x}_E|} \int_{-1}^1 |\tilde{u}'(t)|^2 dt.$$

Wegen $h_E = 2|\mathbf{x}_E|$ ist dies genau die Behauptung. \square

Um den Residualschätzer zu implementieren, müssen wir also

$$\int_{-1}^1 |\tilde{\mathbf{u}}'(t)|^2 dt$$

für jedes Element E berechnen, mit der Funktion

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) := (K + \frac{1}{2})G_\ell(t\mathbf{x}_E + \mathbf{m}_E) - V\Phi_\ell(t\mathbf{x}_E + \mathbf{m}_E).$$

Das Integral werden wir mit Quadraturformeln approximieren. Dafür benötigen wir die Möglichkeit, KG_ℓ und $V\Phi_\ell$ punktweise auszuwerten. Die exakte punktweise Auswertung lässt sich leicht mit Hilfe der Formeln in Abschnitt 6.2 implementieren, wobei die äußere Integration wegfällt und nur die inneren Integrale $I_k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ausgewertet werden müssen. Gauß-Quadratur wird dabei nicht benötigt. Wie besprochen, muss darauf geachtet werden, $(KG_\ell)(z)$ nicht bei $z \in \mathcal{K}_\ell$ auszuwerten, also $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ nicht bei $t \in \{-1, 1\}$.

Wir gehen ähnlich vor wie in HILBERT [AEF⁺13]: Zunächst interpolieren wir $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ durch ein Polynom $\mathbf{p}_k(t)$ vom Grad k , wir fordern also

$$\tilde{\mathbf{u}}(s_j) = \mathbf{p}_k(s_j)$$

bei geeigneten Stützstellen $s_0, \dots, s_k \in (-1, 1)$. Wir berechnen dann die Koeffizienten von $|\mathbf{p}'_k(t)|^2$. Man beachte, dass dies ein Polynom vom Grad $2(k-1)$ ist. Wir benutzen daher eine Quadraturformel, welche exakt vom Grad $2(k-1)$ ist, um das Integral

$$\int_{-1}^1 |\mathbf{p}'_k(t)|^2 dt \approx \int_{-1}^1 |\tilde{\mathbf{u}}'(t)|^2 dt$$

auszuwerten. Für die Stützstellen s_j haben wir in der Implementierung Gauß-Knoten der Ordnung $k+1$ benutzt, die Quadratur geschieht mit denselben Knoten. Zwar würden auch Gauß-Knoten der Ordnung k reichen, denn diese sind exakt vom Grad $2k-1 > 2(k-1)$; aber da von der Effizienz her kein Unterschied besteht, ist die einfachere Lösung zu bevorzugen, zweimal dieselben Knoten zu verwenden.

In HILBERT wird $k = 2$ (mit anderen Knoten) benutzt. Experimentell zeigt sich, dass für Beibehaltung der optimalen Konvergenzraten sogar $k = 1$ gewählt werden kann. Allerdings hat man für $k \geq 2$ keinen merkbaren Einfluss des Quadraturfehlers mehr: die Differenz zwischen zwei Versionen des Residualschätzers für k und $k' > k \geq 2$ ist experimentell immer mehrere Ordnungen kleiner als der Schätzer selbst.

6.4 P1AFEM für elliptische Systeme

Um die FEM-BEM-Kopplung zu implementieren, brauchen wir FEM-Code für die Lamé-Gleichung in 2D. Da es für die Implementierung keinen Unterschied macht, behandeln wir gleich allgemeinere elliptische Systeme mit konstanten Koeffizienten. Wir haben uns stark an [FPW11] orientiert: In diesem Paper wird prägnanter und gut lesbarer MATLAB-Code

(„P1AFEM“) für die Lösung der Laplace-Gleichung mit gemischten Dirichlet-/Neumann-Randbedingungen mit adaptiver FEM vorgestellt, basierend auf \mathcal{S}^1 -Ansatz- und Testfunktionen. Der Code macht vollen Gebrauch von den in MATLAB zur Verfügung stehenden Vektorisierungstechniken und ist daher auch sehr schnell. Wir verweisen auch auf die früheren Publikationen [ACF99] und [ACFK02] für Implementierungen von Galerkin-FEM mit MATLAB, für die Laplace- bzw. die Lamé-Gleichung.

Unser Code soll Ähnliches wie P1AFEM [FPW11] leisten, aber für beliebige elliptische Systeme mit konstanten Koeffizienten. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf ein reines Dirichlet-Problem. Das heißt, wir haben einen Differentialoperator

$$\mathcal{P} = -\nabla^T L \nabla$$

mit $L = (L_{ij}^{kl}) \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2} = \mathbb{R}^{4 \times 4}$ wie in Abschnitt 3.1 gegeben, und suchen Lösungen $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ von

$$\mathcal{P}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \quad (6.14)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma. \quad (6.15)$$

Für die Daten nehmen wir hier $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ und $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$ an. Wählt man L wie in (3.16) oder (3.20), ist dies das Dirichlet-Problem für die Lamé-Gleichung.

Da die schwache Formulierung des obigen Problems $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ -Testfunktionen verwendet, definieren wir als diskreten Testraum

$$\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell) := \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Hier sei \mathcal{T}_ℓ eine Triangulierung von Ω . Passend definieren wir die Menge der inneren Knoten $\mathcal{N}_{\ell,\Omega} := \mathcal{N}_\ell \cap \Omega$ und die Menge der Randknoten $\mathcal{K}_\ell := \mathcal{N}_\ell \cap \Gamma = \mathcal{N}_\ell \setminus \mathcal{N}_{\ell,\Omega}$. Offenbar gilt

$$\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell) = \text{span}\{\eta_z : z \in \mathcal{N}_{\ell,\Omega}\}^2.$$

Die Randknoten spannen eine Triangulierung \mathcal{E}_ℓ von Γ auf und induzieren den Raum

$$\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell) := \text{span}\{\eta_{z'}|_\Gamma : z' \in \mathcal{K}_\ell\}^2.$$

Unsere Galerkin-Formulierung von (6.14)–(6.15) lautet: Finde $\mathbf{u}_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$, sodass

$$(L\nabla\mathbf{u}_\ell, \nabla\mathbf{v}_\ell)_\Omega = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\ell)_\Omega \quad \text{für alle } \mathbf{v}_\ell \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell) \quad (6.16)$$

und

$$\mathbf{u}_\ell(z') = \mathbf{g}(z') \quad \text{für alle } z' \in \mathcal{K}_\ell. \quad (6.17)$$

Mit anderen Worten, wir ersetzen die Randdaten \mathbf{g} durch deren nodale Interpolanden $G_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$, welche wegen $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$ wohldefiniert sind. Wir machen für \mathbf{u}_ℓ daher den Ansatz

$$\mathbf{u}_\ell^l = \sum_{z' \in \mathcal{N}_{\ell,\Omega}} x_{z'}^l \eta_{z'} + \sum_{z' \in \mathcal{K}_\ell} \mathbf{g}^l(z') \eta_{z'} \quad \text{für } l = 1, 2.$$

Damit wird (6.16) zum linearen Gleichungssystem in der Unbekannten $\mathbf{x} = (x_{z'}^l)$:

$$\sum_{l=1,2} \sum_{z' \in \mathcal{N}_{\ell, \Omega}} x_{z'}^l (L(\nabla \eta_{z'}) \mathbf{e}^l, \nabla \mathbf{v}_{\ell})_{\Omega} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{\ell})_{\Omega} - \sum_{l=1,2} \sum_{z' \in \mathcal{K}_{\ell}} \mathbf{g}^l(z') (L(\nabla \eta_{z'}) \mathbf{e}^l, \nabla \mathbf{v}_{\ell})_{\Omega} \quad (6.18)$$

für alle $\mathbf{v}_{\ell} \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_{\ell})$. Wir definieren die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{zz'}^{kl})$ durch

$$\mathbf{A}_{zz'}^{kl} := (L(\nabla \eta_{z'}) \mathbf{e}_l, (\nabla \eta_z) \mathbf{e}_k)_{\Omega} \quad \text{für alle } z, z' \in \mathcal{N}_{\ell} \text{ und } k, l = 1, 2$$

mit den Unterblöcken

$$\mathbf{A}_{\Omega} := (\mathbf{A}_{zz'}^{kl})_{\substack{z \in \mathcal{N}_{\ell, \Omega}, \\ z' \in \mathcal{N}_{\ell, \Omega}}}, \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_{\Gamma} := (\mathbf{A}_{zz'}^{kl})_{\substack{z \in \mathcal{N}_{\ell, \Omega}, \\ z' \in \mathcal{K}_{\ell}}}.$$

Weiters definieren wir die rechte Seite $\mathbf{b} = (b_{z'}^k)$ durch

$$b_{z'}^k := (\mathbf{f}, \eta_{z'} \mathbf{e}_k)_{\Omega} \quad \text{für alle } z' \in \mathcal{N}_{\ell, \Omega} \text{ und } k = 1, 2$$

und schreiben auch $\mathbf{x}_{\Gamma} := (\mathbf{g}^l(z'))_{l=1,2, z' \in \mathcal{K}_{\ell}}$ für den durch die Dirichlet-Randbedingung vorgeschriebenen Teil der Lösung. Wir können (6.18) nun in Matrix-Vektor-Form schreiben:

$$\mathbf{A}_{\Omega} \mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{A}_{\Gamma} \mathbf{x}_{\Gamma}. \quad (6.19)$$

6.4.1 Der FEM-Solver: 50 Lines of MATLAB

Wir wollen in diesem Unterabschnitt einen MATLAB-Solver für (6.19) vorstellen. Der zugehörige Code ist in Listing 2 zu finden. Die Hauptaufgabe dieses Codes ist, für eine feste Triangulierung \mathcal{T}_{ℓ} von Ω die Matrix \mathbf{A} sowie die rechte Seite \mathbf{b} aufzustellen. Das Gleichungssystem (6.19) lösen wir dann einfach mit dem MATLAB-eigenen Backslash-Operator. Aufgerufen wird die Funktion mit

```
[x, A, D1, D2] = solveFEM(coordinates, triangles, elements, f, g, L);
```

Die Datenstrukturen für das Gitter `coordinates`, `triangles` und `elements` entsprechen jenen in P1AFEM. Die Daten \mathbf{f} und \mathbf{g} werden in der Form von function handles $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^{M \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{M \times 2}$, $M \geq 1$ übergeben. Außerdem wird als Eingabewert noch die Matrix $\mathbf{L} := L \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ benötigt. Zurückgegeben werden die diskrete Lösung $\mathbf{x} = [(x_z^1); (x_z^2)]$ im $2\#\mathcal{N}_{\ell} \times 1$ -Format und optional die aufgestellten Matrizen zur späteren Verwendung (siehe unten).

Wir wollen zunächst auf die Berechnung der Matrix-Einträge $\mathbf{A}_{zz'}^{kl}$ in Zeile 15–35 eingehen. Wir bemerken

$$\mathbf{A}_{zz'}^{kl} = (L(\nabla \eta_{z'}) \mathbf{e}_l, (\nabla \eta_z) \mathbf{e}_k)_{\Omega} = (L^{kl} \nabla \eta_{z'}, \nabla \eta_z)_{\Omega} = \sum_{i,j} L_{ij}^{kl} (\partial_j \eta_{z'}, \partial_i \eta_z)_{\Omega}.$$

Folglich definieren wir eine Matrix $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{zz'}^{ij})$ von derselben Dimension wie \mathbf{A} durch

$$(\mathbf{B}_{zz'}^{ij}) := (\partial_j \eta_{z'}, \partial_i \eta_z)_{\Omega}$$

Listing 2: solveFEM.m

```

1 function [x,A,D1,D2] = solveFEM(coordinates,triangles,elements,f,g,L)
2 % Solve Galerkin Formulation for
3 % Pu = f on Omega,
4 % u = g on Gamma,
5 % with Pu := -div(L*grad(u)).
6
7 % f,g ... function handles R^(nCx2) -> R^(nCx2)
8 % L ... 4x4 matrix
9
10 nT = size(triangles,1);
11 nC = size(coordinates,1);
12 x = zeros(2*nC,1);
13
14 %*** Assembly of stiffness matrix
15 z1 = coordinates(triangles(:,1),:);
16 z2 = coordinates(triangles(:,2),:);
17 z3 = coordinates(triangles(:,3),:);
18 e1 = z3 - z2;
19 e2 = z1 - z3;
20 e3 = z2 - z1;
21 D1 = sparse([1:nT,1:nT,1:nT]',triangles(:),-[e1(:,2),e2(:,2),e3(:,2)],nT,nC);
22 D2 = sparse([1:nT,1:nT,1:nT]',triangles(:), [e1(:,1),e2(:,1),e3(:,1)],nT,nC);
23
24 area4 = 2*(e1(:,1).*e2(:,2) - e1(:,2).*e2(:,1));
25 S = spdiags(1./area4,0,nT,nT);
26
27 B11 = D1'*S*D1;
28 B12 = D1'*S*D2;
29 B22 = D2'*S*D2;
30 B21 = B12';
31
32 A = [L(1,1)*B11 + L(1,2)*B12 + L(2,1)*B21 + L(2,2)*B22, ...
33      L(1,3)*B11 + L(1,4)*B12 + L(2,3)*B21 + L(2,4)*B22; ...
34      L(3,1)*B11 + L(3,2)*B12 + L(4,1)*B21 + L(4,2)*B22, ...
35      L(3,3)*B11 + L(3,4)*B12 + L(4,3)*B21 + L(4,4)*B22];
36
37 %*** Prescribe values at Dirichlet nodes
38 NGamma = [elements(:,1);elements(:,1)+nC];
39 NOmega = setdiff(1:2*nC, NGamma);
40 gh = g(coordinates(elements(:,1),:));
41 x(NGamma) = [gh(:,1);gh(:,2)];
42
43 %*** Assembly of right-hand side
44 Qf = f((z1+z2+z3)/3) .* [area4,area4] / 12;
45 trI = [triangles;triangles+nC];
46 b = accumarray(trI(:),repmat([Qf(:,1);Qf(:,2)],3,1),[2*nC 1]) - A(:,NGamma)*x(NGamma);
47
48 %*** Computation of P1-FEM approximation
49 x(NOmega) = A(NOmega,NOmega)\b(NOmega);
50 end

```

und haben nach obiger Rechnung

$$\mathbf{A}_{zz'}^{kl} = \sum_{i,j} L_{ij}^{kl} \mathbf{B}_{zz'}^{ij}.$$

Das bedeutet, wir können das Aufstellen der Blöcke von \mathbf{A} auf jene von \mathbf{B} zurückführen: Für $\mathbf{A}^{kl} := (\mathbf{A}_{zz'}^{kl})_{z,z' \in \mathcal{N}_\ell}$ und $\mathbf{B}^{ij} := (\mathbf{B}_{zz'}^{ij})_{z,z' \in \mathcal{N}_\ell}$, $i, j, k, l \in \{1, 2\}$ gilt offensichtlich

$$\mathbf{A}^{kl} = \sum_{i,j} L_{ij}^{kl} \mathbf{B}^{ij} \quad (6.20)$$

bzw. (mit „blockweise“ Interpretation des Matrizenproduktes) $\mathbf{A} = L\mathbf{B}$.

Um die Blöcke \mathbf{B}^{ij} zu berechnen, welche für $i = j$ auch z.B. in der Steifigkeitsmatrix für den Laplace-Operator auftreten, gehen wir etwas anders vor als in [FPW11]. Es seien $u, v \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$ eindimensionale diskrete Funktionen und $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{N}_\ell}$ deren Darstellungen als Vektoren bezüglich der Basis $(\eta_z)_{z \in \mathcal{N}_\ell}$. Es gilt dann

$$\mathbf{v}^T \mathbf{B}^{ij} \mathbf{u} = (\partial_j u, \partial_i v)_\Omega. \quad (6.21)$$

Wir können die rechte Seite aber auch wie folgt zusammenbauen: Die Abbildung

$$\partial_i : \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell) \rightarrow \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell), \quad i = 1, 2$$

ist offenbar wohldefiniert und linear und hat eine Matrix-Darstellung $\mathbf{D}_i \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{T}_\ell \times \#\mathcal{N}_\ell}$ mit Einträgen

$$\mathbf{D}_{i,Tz} = (\partial_i \eta_z)|_T.$$

Weiters wird das Skalarprodukt

$$(\cdot, \cdot)_\Omega : \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell) \rightarrow \mathbb{R}$$

durch eine Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{T}_\ell \times \#\mathcal{T}_\ell}$ repräsentiert, sodass

$$\mathbf{S}_{TT'} = (\chi_T, \chi_{T'})_\Omega = \delta_{TT'} |T|.$$

Mit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \simeq u, v \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$ wie oben haben wir dann

$$\mathbf{D}_j \mathbf{u}, \mathbf{D}_i \mathbf{v} \simeq \partial_j u, \partial_i v \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$$

und folglich

$$(\partial_j u, \partial_i v)_\Omega = (\mathbf{D}_i \mathbf{v})^T \mathbf{S} (\mathbf{D}_j \mathbf{u}) = \mathbf{v}^T (\mathbf{D}_i^T \mathbf{S} \mathbf{D}_j) \mathbf{u}.$$

Ein Vergleich mit (6.21) zeigt

$$\mathbf{B}^{ij} = \mathbf{D}_i^T \mathbf{S} \mathbf{D}_j.$$

Wir haben das kompliziertere Problem der Berechnung von $\mathbf{B}_{zz'}^{ij} = (\partial_j \eta_{z'}, \partial_i \eta_z)_\Omega$ also auf das leichtere Problem der Berechnung von $\mathbf{D}_{i,Tz} = (\partial_i \eta_z)|_T$ reduziert.

Um letzteres Problem zu lösen, ein paar Notationen: Jedes Dreieck $T \in \mathcal{T}_\ell$ hat drei Knoten $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{N}_\ell$ von denen wir fordern, dass sie gegen den Uhrzeigersinn angeordnet sind.

Wir definieren dann e_m , $m = 1, 2, 3$ als die Richtungsvektoren der gegenüber von z_m liegenden Kanten, ebenfalls gegen den Uhrzeigersinn zeigend; es sei also $e_1 = z_3 - z_2$ etc. Die aus e_m durch Vierteldrehung gegen den Uhrzeigersinn entstehenden Vektoren schreiben wir als e_m^\perp , also

$$e_m^\perp = \begin{pmatrix} -e_m^2 \\ e_m^1 \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Es zeigt e_m^\perp in dieselbe Richtung wie die Höhe von T auf e_m ; letztere taufen wir h_m . Es lässt sich leicht verifizieren, dass

$$\nabla \eta_{z_m}|_T = \frac{h_m}{|h_m|^2} = \frac{e_m^\perp}{2|T|}.$$

Außerdem bekommen wir $2|T|$ beispielsweise mit der Formel

$$2|T| = \det(e_1, e_2) = e_1^1 e_2^2 - e_1^2 e_2^1.$$

Für die Berechnung von $\mathbf{B}^{ij} = \mathbf{D}_i^T \mathbf{S} \mathbf{D}_j$ bietet es sich an, die modifizierten Matrizen

$$\tilde{\mathbf{D}}_{i,Tz} := 2|T| \mathbf{D}_{i,Tz} = \begin{cases} (e_m^\perp)^i, & z = z_m \in T, \\ 0, & z \notin T \end{cases} \quad (6.23)$$

zu benutzen, sowie $\tilde{\mathbf{S}}_{TT'} := \delta_{TT'} \frac{1}{4|T|}$. Es gilt dann offenbar

$$\mathbf{D}_i^T \mathbf{S} \mathbf{D}_j = \tilde{\mathbf{D}}_i^T (\text{diag}(|T| \frac{1}{2|T|} \frac{1}{2|T|})) \tilde{\mathbf{D}}_j = \tilde{\mathbf{D}}_i^T \tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{D}}_j.$$

Das Assemblieren der Matrizen \mathbf{B}^{ij} und \mathbf{A}^{kl} lässt sich damit leicht in MATLAB realisieren. Der zugehörige Code ist in Listing 2, Zeile 15–35 zu finden:

- In den Zeilen 15–22 werden die Matrizen $\tilde{\mathbf{D}}_1, \tilde{\mathbf{D}}_2$ gemäß Formel (6.23) aufgestellt.
- In den Zeilen 24–25 wird $4|T|$ für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$ berechnet und $\tilde{\mathbf{S}}$ aufgestellt.
- In den Zeilen 27–30 berechnen wir $\mathbf{B}^{ij} = \tilde{\mathbf{D}}_i^T \tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{D}}_j$ für $i, j = 1, 2$.
- In den Zeilen 32–35 wird schlussendlich \mathbf{A} wie in (6.20) bestimmt.

Der nächste Schritt ist es, die rechte Seite von (6.19) aufzustellen, also \mathbf{b} und $\mathbf{A}_\Gamma \mathbf{x}_\Gamma$ zu bestimmen. In Zeile 38–41 werden zu den Rand- bzw. inneren Knoten \mathcal{K}_ℓ und $\mathcal{N}_{\ell,\Omega}$ gehörende Indexmengen bestimmt und für $\mathbf{x}_\Gamma = (\mathbf{g}^l(z'))_{l=1,2, z' \in \mathcal{K}_\ell}$ die rechte Seite \mathbf{g} bei den Randknoten ausgewertet. Für \mathbf{b} sind Integrale zu berechnen:

$$b_{z'}^k = (\mathbf{f}, \eta_{z'} \mathbf{e}_k)_\Omega = \int_{\text{supp} \eta_{z'}} \mathbf{f}^k \nabla \eta_{z'} dx.$$

Hier gehen wir wie in [FPW11] vor und verwenden auf jedem Element $T \subset \text{supp} \eta_{z'}$ eine Ein-Punkt-Quadraturformel

$$\int_T \mathbf{f}^k \nabla \eta_{z'} dx \approx |T| \mathbf{f}^k(s_T) \eta_{z'}(s_T) \quad (6.24)$$

im Schwerpunkt $s_T = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ von T . Es stellt sich heraus, dass $\eta_{z'}(s_T) = \frac{1}{3}$ für alle $T \subset \text{supp}(\eta_{z'})$. Die Berechnung von (6.24) für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$ geschieht in Zeile 43, und Akkumulation dieser Werte auf die Knoten mit $z' \in T$ geschieht in Zeilen 45–46; dort wird auch $\mathbf{A}_\Gamma \mathbf{x}_\Gamma$ abgezogen.

Schlussendlich wird in Zeile 49 die Lösung \mathbf{x} von (6.19) bestimmt, wobei die Matrix und rechte Seite nur bei den inneren Knoten benutzt werden.

6.4.2 A posteriori Fehlerschätzung

Ein a posteriori Fehlerschätzer aus [FPW11] ist gegeben durch die lokalen Beiträge

$$\tau(T)^2 = h_T^2 \|f\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 + \frac{1}{2} \|h_{\ell,E}^{1/2} [\gamma_1 \mathbf{u}_\ell]\|_{\mathbf{L}^2(\partial T \cap \Omega)}^2 \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_\ell.$$

In Listing 3 ist eine MATLAB-Funktion zur Berechnung dieses Fehlerschätzers zu finden. Aufgerufen wird sie mit

```
est = computeEstFEM(coordinates, triangles, elements, f, L, x, D1, D2);
```

Die Eingabeparameter sind dieselben wie für `solveFEM` bzw. werden durch Aufruf von `solveFEM` zur Verfügung gestellt. Ausgegeben wird der Vektor $(\tau(T)^2)_{T \in \mathcal{T}_\ell}$.

Der Sprungterm $[\gamma_1 \mathbf{u}_\ell]$ auf einer Kante $E \subset \partial T \cap \Omega$ ist gegeben durch

$$[\gamma_1 \mathbf{u}_\ell]|_E = (\mathbf{n}_E^-)^T L \nabla \mathbf{u}_\ell^- + (\mathbf{n}_E^+)^T L \nabla \mathbf{u}_\ell^+. \quad (6.25)$$

Hier ist \mathbf{u}_ℓ^- die diskrete Lösung auf dem Element T und \mathbf{u}_ℓ^+ jene auf dem der Kante E gegenüberliegenden Element. Entsprechend sind \mathbf{n}_E^\pm die äußeren Normalvektoren auf diese beiden Elemente entlang von E , insbesondere gilt $\mathbf{n}_E^- = -\mathbf{n}_E^+$, was die Bezeichnung „Sprungterm“ rechtfertigt. Da $[\gamma_1 \mathbf{u}_\ell]|_E \in \mathbb{R}^2$ auf jeder Kante konstant ist, haben wir

$$\|h_{\ell,E}^{1/2} [\gamma_1 \mathbf{u}_\ell]\|_{\mathbf{L}^2(\partial T \cap \Omega)}^2 = \sum_{E \in \partial T \cap \Omega} h_E^2 |[\gamma_1 \mathbf{u}_\ell]|_E|^2. \quad (6.26)$$

Dies wird im Code folgendermaßen realisiert:

- In 16–17 werden die beiden Komponenten der diskreten Lösung $\mathbf{u}_\ell = (u_\ell^1, u_\ell^2)$ ausgelesen, welche als Vektoren bezüglich der Basis (η_z) gegeben sind.
- In 20–29 werden die diskreten partiellen Ableitungen $\tilde{\mathbf{D}}_i$ aus (6.23) assembliert. Sie können optional auch als Eingabeparameter an die Funktion übergeben werden, da sie ja bereits zum Aufstellen der Galerkin-Matrix benötigt wurden.
- In 34–42 bestimmen wir die beiden Komponenten der $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ -Funktion $h_E \mathbf{n}_E \cdot L \nabla \mathbf{u}_\ell$ auf jedem Element T , für jede der drei Kanten $E \subset \partial T$.
- In 45–49 werden die Beiträge von $h_E \mathbf{n}_E \cdot L \nabla \mathbf{u}_\ell|_T$ der an jede Kante E grenzenden Elemente summiert. Nach (6.25) ergibt dies $h_E [\gamma_1 \mathbf{u}_\ell]|_E$ auf den inneren Kanten. Die entstehenden Terme auf den Randkanten werden gleich null gesetzt.
- In 52 werden die Komponenten von $h_E [\gamma_1 \mathbf{u}_\ell]|_E$ jeweils quadriert und von den Kanten auf die zugehörigen Elemente akkumuliert, um (6.26) zu erhalten.

Die Berechnung der Terme $h_T^2 \|f\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2$ in 55–56 geschieht approximativ durch Ein-Punkt-Quadratur im Schwerpunkt und bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Listing 3: computeEstFEM.m

```

1 function est = computeEstFEM(coordinates,triangles,elements,f,L,x,D1,D2)
2 % Residual-based error estimator for
3 % Pu = f on Omega,
4 % u = g on Gamma,
5 % with Pu := -div(L*grad(u)).
6
7 % f ... function handle R^(nCx2) -> R^(nCx2)
8 % L ... 4x4 matrix
9 % x ... discrete solution
10
11 nT = size(triangles,1);
12 nC = size(coordinates,1);
13 [edge2nodes,element2edges,dirichlet2edges,neumann2edges] = ...
14     provideGeometricData(triangles,elements,[]);
15
16 u_1 = x(1:end/2,:);
17 u_2 = x(end/2+1:end,:);
18
19 %*** Assembly of discrete gradient
20 z1 = coordinates(triangles(:,1),:);
21 z2 = coordinates(triangles(:,2),:);
22 z3 = coordinates(triangles(:,3),:);
23 e1 = z3 - z2;
24 e2 = z1 - z3;
25 e3 = z2 - z1;
26 if (nargin < 8)
27     D1 = sparse([1:nT,1:nT,1:nT]',triangles(:),-[e1(:,2),e2(:,2),e3(:,2)],nT,nC);
28     D2 = sparse([1:nT,1:nT,1:nT]',triangles(:), [e1(:,1),e2(:,1),e3(:,1)],nT,nC);
29 end
30
31 area2 = e1(:,1).*e2(:,2) - e1(:,2).*e2(:,1);
32
33 % element-wise L*grad(u)|T
34 Lgradu = ([D1*u_1,D2*u_1,D1*u_2,D2*u_2]* L') ./ repmat(area2,1,4);
35 % first and second rows of L*grad(u)
36 Lgrad_1 = Lgradu(:,1:2);
37 Lgrad_2 = Lgradu(:,3:4);
38 % first and second component of normal derivatives hE*gamma_1(u)
39 % on the 3 edges, stacked on top of each other
40 eT = -[-e3(:,2),e3(:,1);-e1(:,2),e1(:,1);-e2(:,2),e2(:,1)];
41 dudn_1 = sum(eT.*repmat(Lgrad_1,3,1),2);
42 dudn_2 = sum(eT.*repmat(Lgrad_2,3,1),2);
43
44 % Accumulate Jump(du/dn) on edges
45 jump1 = accumarray(element2edges(:),dudn_1,[size(edge2nodes,1) 1]);
46 jump2 = accumarray(element2edges(:),dudn_2,[size(edge2nodes,1) 1]);
47 % Kill Dirichlet contributions
48 jump1(dirichlet2edges) = 0;
49 jump2(dirichlet2edges) = 0;
50
51 % Assemble edge contributions on triangles
52 jump = sum(jump1(element2edges).^2,2) + sum(jump2(element2edges).^2,2);
53
54 % Volume residual
55 Rf = f((z1+z2+z3)/3);
56 Rf = (Rf(:,1).^2 + Rf(:,2).^2) .* (area2/2).^2;
57
58 est = jump/2 + Rf;
59 end

```

6.5 FEM-BEM-Kopplung

Wir erinnern an die Notationen aus Abschnitt 5.3 und unsere dortige diskrete Formulierung der Johnson-Nédélec-Kopplung (5.21)–(5.22). Aus Gründen der Kompatibilität mit HILBERT verwenden wir in der Implementierung eine andere Konvention bezüglich des Sprungs von Spur und Konormalenableitung als bisher, nämlich $[\cdot]_\Gamma := \gamma^{\text{int}} - \gamma^{\text{ext}}$ und $[\gamma_1 \cdot]_\Gamma := \gamma_1^{\text{int}} - \gamma_1^{\text{ext}}$. Dies hat zur Folge, dass im Transmissionsproblem und folglich auch in (5.21)–(5.22) die Daten \mathbf{u}_0 und ϕ_0 durch $-\mathbf{u}_0$ und $-\phi_0$ ersetzt werden müssen. Wir betrachten von nun an also das folgende Problem: Finde $\mathbf{u}_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$ und $\phi_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$, sodass

$$\alpha_L(\mathbf{u}_\ell, \mathbf{v}_\ell) - (\phi_\ell, \mathbf{v}_\ell)_\Gamma = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_\ell)_\Omega + (\phi_0, \mathbf{v}_\ell)_\Gamma, \quad (6.27)$$

$$((\tfrac{1}{2} - K)\mathbf{u}_\ell, \psi_\ell)_\Gamma + (V\phi_\ell, \psi_\ell)_\Gamma = ((\tfrac{1}{2} - K)\mathbf{u}_0, \psi_\ell)_\Gamma \quad (6.28)$$

für alle $\mathbf{v}_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$ und $\psi_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$. Dies übersetzt sich in natürlicher Weise in ein diskretes Gleichungssystem. Wir betrachten die $(2\#\mathcal{N}_\ell + 2\#\mathcal{E}_\ell)^2$ -Block-Matrix

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{M}^T \\ \tfrac{1}{2}\mathbf{M} - \mathbf{K} & \mathbf{V} \end{pmatrix}.$$

Die Teilmatrizen $\mathbf{A}, \mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{V}$ sind bereits aus Abschnitt 6.1 und 6.4 bekannt und repräsentieren (in dieser Reihenfolge) die Bilinearformen

- $\alpha_L(\cdot, \cdot) : \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell) \times \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell) \rightarrow \mathbb{R}$,
- $(\gamma \cdot, \cdot)_\Gamma : \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell) \rightarrow \mathbb{R}$,
- $(K \cdot, \cdot)_\Gamma : \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell) \rightarrow \mathbb{R}$ und
- $(V \cdot, \cdot)_\Gamma : \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell) \rightarrow \mathbb{R}$.

Schreiben wir $\mathbf{u}_\ell = \sum u_{z'}^l \eta_{z'} \mathbf{e}^l$ und $\phi_\ell = \sum \phi_{E'}^l \chi_{E'} \mathbf{e}^l$, so können wir die Unbekannte $(\mathbf{u}_\ell, \phi_\ell)$ mit $\mathbf{x} = ((u_{z'}^l); (\phi_{E'}^l)) \in \mathbb{R}^{2(\#\mathcal{N}_\ell + \#\mathcal{E}_\ell)}$ identifizieren. Ebenso schreiben wir die rechte Seite als

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{b}_{zk}^1 = (\mathbf{f}^k, \eta_z)_\Omega + (\phi_0^k, \eta_z)_\Gamma, \quad \mathbf{b}_{Ek}^2 = (((\tfrac{1}{2} - K)\mathbf{u}_0)^k, \chi_E)_\Gamma.$$

Damit ist (6.27)–(6.28) äquivalent zum Gleichungssystem

$$\mathbf{S}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Zur Vorgangsweise bei der Implementierung ist nicht viel zu sagen: Das Aufstellen der Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{K}, \mathbf{V}$ wurde bereits in Abschnitt 6.2 und 6.4 besprochen, diese müssen nur mehr geeignet zusammengesetzt werden. Auch der Fehlerschätzer (5.23)–(5.26) setzt sich aus Termen zusammen, die bereits bei der BEM- und FEM-Implementierung in ähnlicher Form aufgetreten sind. Zum Aufstellen der rechten Seite \mathbf{b} werden die Daten \mathbf{f} , \mathbf{u}_0 und ϕ_0 diskretisiert, siehe die Funktion `discretizeDataFBJN` weiter unten. Wie bei der BEM rechnen wir also eigentlich ein gestörtes Problem. Ebenso arbeitet der Schätzer mit diskreten Daten.

Wir geben nun einen Überblick der implementierten MATLAB-Funktionen für die FEM-BEM-Kopplung. Zunächst einige allgemeine Konventionen: Die Arrays `coordinates` und `elements` beschreiben das Netz \mathcal{T}_ℓ mit den Knoten \mathcal{N}_ℓ . Für die Randknoten treffen wir die Vereinbarung, dass diese stets *am Ende* von `coordinates` stehen. Im FEM-BEM-Add-On zu HILBERT wird die Funktion `sortMeshFB` zur Verfügung gestellt, welche die Knoten entsprechend sortiert. Das Array `boundary` beschreibt die Randelemente \mathcal{E}_ℓ analog zu `elements`. Will man nur die Randknoten mit den dazugehörigen Elementen verwenden, beispielsweise um den \mathbf{V} -Operator aufzubauen, lässt sich dies mit den folgenden Befehlen durchführen:

```
nC = size(coordinates,1);
nB = size(boundary,1);
boundaryCoordinates = coordinates(nC-nB+(1:nB),:);
boundaryElements = boundary-nC+nB;
V = buildV(boundaryCoordinates,boundaryElements,mu,lambda);
```

Beibehalten wollen wir die Konvention, zweidimensionale diskrete Funktionen als $N \times 2$ -Arrays zu repräsentieren. Gilt also $(\mathbf{u}_\ell, \phi_\ell) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$, dann ist das zugehörige $(\#\mathcal{N}_\ell + \#\mathcal{E}_\ell) \times 2$ -Array \mathbf{x} in MATLAB wie folgt angeordnet:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} (u_{z'}^1) & (u_{z'}^2) \\ (\phi_{E'}^1) & (\phi_{E'}^2) \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

Damit wir weiterhin das Gleichungssystem mit dem Befehl `x(:)=S\b(:)` lösen können, werden \mathbf{S} und \mathbf{b} in der selben Weise angeordnet, also etwa

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^{11} & \mathbf{S}^{12} \\ \mathbf{S}^{21} & \mathbf{S}^{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S}^{kl} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{kl} & -(\mathbf{M}^{lk})^T \\ \frac{1}{2}\mathbf{M}^{kl} - \mathbf{K}^{kl} & \mathbf{V}^{kl} \end{pmatrix}. \quad (6.30)$$

Die inneren bzw. äußeren Lamé-Parameter bezeichnen wir mit `mu_int`, `la_int` bzw. `mu_ext`, `la_ext`.

6.5.1 Funktionen für die Johnson-Nédélec-Kopplung

Die Matrix \mathbf{S} wird durch einen der folgenden Aufrufe zurückgegeben:

```
[S,V,K,M] = buildFBJNLHS(A,coordinates,boundary,mu_ext,la_ext);
S = buildFBJNLHS(A,coordinates,boundary,V,K,M);
```

Beim ersten Aufruf werden auch die Matrizen \mathbf{V} , \mathbf{K} , \mathbf{M} aufgestellt und optional ebenfalls ausgegeben. Beim zweiten Aufruf übergibt man diese Matrizen schon, und \mathbf{S} wird nur mehr zusammengesetzt. Beide Aufrufe haben gemeinsam, dass die Matrix \mathbf{A} übergeben werden muss. Insofern ist die Funktion flexibel, was das Innenraumproblem angeht: Dieses könnte etwa nichtlinear sein, und der Aufruf von `buildFBJNLHS` Teil einer Newton-Iteration.

Um die Matrix \mathbf{A} jedoch für lineare Innenraumprobleme, wie wir sie betrachtet haben, aufzustellen, dient der Befehl

```
A = buildFEM(coordinates,elements,mu_int,la_int);
```

Der Code von `buildFEM` steckt im Wesentlichen schon in der Funktion `solveFEM` aus Listing 2.

Die rechte Seite wird durch den Befehl

```
b = buildFBJNRHS(coordinates,elements,fh,u0h,phi0h,K,M);
```

zur Verfügung gestellt. Sie benötigt ebenfalls die Matrizen \mathbf{K} , \mathbf{M} für die Terme $(\phi_0, \cdot)_\Gamma$ und $((\frac{1}{2} - K)\mathbf{u}_0, \cdot)_\Gamma$. Für den Term $(\mathbf{f}, \cdot)_\Omega$ werden `coordinates` und `elements` benötigt. Die Daten \mathbf{f} , \mathbf{u}_0 und ϕ_0 müssen bereits in diskretisierter Form vorliegen: \mathbf{f} als $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ -Approximation `fh`, \mathbf{u}_0 als $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ -Approximation `u0h` und ϕ_0 als $\mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$ -Approximation `phi0h`.

Um Daten, welche als `function handles` vorliegen, zu diskretisieren, dient der Befehl

```
[fh,u0h,phi0h] = discretizeDataFBJN(coordinates,elements,boundary,...
                                     f,u0,phi0);
```

Hier sind natürlich `f`, `u0` und `phi0` die besagten `function handles`, wobei `f` und `u0` wie immer von der Bauart $\mathbb{R}^{N \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times 2}$ sein müssen. Von `phi0` wird wieder angenommen, dass es von drei Variablen x, a, b abhängt, da `phi0` ja gegebenenfalls aus der Differenz zweier Konormalenableitungen berechnet werden soll und daher den Normalvektor an der Stelle x kennen muss. Die Diskretisierung läuft einfach über Punktauswertung: `fh` ist `f` ausgewertet in den Schwerpunkten der Dreiecke, `u0h` ist `u0` ausgewertet in den Randknoten, und `phi0h` ist `phi0` ausgewertet in den Mittelpunkten der Randelemente. Der Residualschätzer η für die FEM-BEM-Kopplung, siehe (5.23)–(5.26), wird durch den folgenden Aufruf bereitgestellt:

```
[etaV,etaB] = computeEstFBJN(coordinates,elements,boundary,...
                              x,fh,phi0h,u0h,mu_int,lambda_int,mu_ext,lambda_ext);
```

Der Eingabewert `x` repräsentiert die Galerkin-Lösung $(\mathbf{u}_\ell, \phi_\ell)$ wie in (6.29), die Eingabewerte `fh`, `u0h` und `phi0h` sind wieder die diskretisierten Daten. Ausgegeben werden die quadrierten lokalen Schätzerbeiträge im Inneren, `etaV` := $(\eta(T)^2)_{T \in \mathcal{T}_\ell}$, und jene auf dem Rand, `etaB` := $(\eta(E)^2)_{E \in \mathcal{E}_\ell}$.

Ähnlich wie für die schwach singuläre Integralgleichung wollen wir eine verlässliche obere Schranke für den Galerkin-Fehler, falls die exakten Lösungen (\mathbf{u}, ϕ) explizit vorliegen. Diese lautet

$$(\text{err}_\ell^{\text{FB}})^2 := \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|h_{\ell,E}^{1/2}(\phi - \phi_\ell)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2$$

mit lokalen Fehlerbeiträgen

$$\text{err}_\ell^{\text{FB}}(T)^2 := \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathbf{H}^1(T)}^2 \quad \text{und} \quad \text{err}_\ell^{\text{FB}}(E)^2 := h_E \|\phi - \phi_\ell\|_{\mathbf{L}^2(E)}^2$$

für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$, $E \in \mathcal{E}_\ell$. Zur Berechnung von $\text{err}_\ell^{\text{FB}}$ dient der Aufruf

```
[errV,errB] = computeErrFBJN(coordinates,elements,boundary,...
                              x,u,gradu,phi);
```

Listing 4: adaptiveFEMBEM.m

```

1 function x = adaptiveFEMBEM(co,el,bo,f,u0,phi0,Nmax,theta,...
2                               mu_int,la_int,mu_ext,la_ext)
3 % Adaptive Solver for Johnson-Nedelec FEM-BEM coupling.
4
5 [co,el,bo] = sortMeshFB(co,el,bo);
6
7 while(size(el,1) < Nmax)
8
9     % SOLVE
10    A = buildFEM(co,el,mu_int,la_int);
11    [S,~,K,M] = buildFBJNLHS(A,co,bo,mu_ext,la_ext);
12    [fh,u0h,phi0h] = discretizeDataFBJN(co,el,bo,f,u0,phi0);
13    b = buildFBJNRHS(co,el,fh,u0h,phi0h,K,M);
14    x = zeros(size(b));
15    x(:) = S\b(:);
16
17    % ESTIMATE
18    [etaV,etaB] = computeEstFBJN(co,el,bo,x,...
19                                fh,phi0h,u0h,mu_int,la_int,mu_ext,la_ext);
20
21    % MARK
22    [markedV,markedB] = markElements(theta,etaV,etaB);
23
24    % REFINE
25    [co,el,bo] = refineMesh(co,el,bo,markedV,markedB);
26    [co,el,bo] = sortMeshFB(co,el,bo);
27
28 end
29 end

```

Der Eingabewert x repräsentiert die Galerkin-Lösung; u , \mathbf{gradu} und \mathbf{phi} sind function handles für die exakte Lösung \mathbf{u} im Inneren, deren Gradienten $\nabla \mathbf{u}$ sowie für die exakte äußere Konormalenableitung ϕ . Es ist hier zu beachten, dass \mathbf{gradu} von der Bauart $\mathbb{R}^{N \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times 4}$ sein muss, also $\mathbf{gradu} = (\partial_1 \mathbf{u}^1, \partial_2 \mathbf{u}^1, \partial_1 \mathbf{u}^2, \partial_2 \mathbf{u}^2)$, und dass \mathbf{phi} von drei Variablen x, a, b abhängen muss. Ausgegeben werden die lokalen Fehlerbeiträge $\mathbf{errV} := (\mathbf{err}_\ell^{\text{FB}}(T)^2)_{T \in \mathcal{T}_\ell}$ und $\mathbf{errB} := (\mathbf{err}_\ell^{\text{FB}}(E)^2)_{E \in \mathcal{E}_\ell}$. Zur (näherungsweise) Berechnung der $\mathbf{err}_\ell^{\text{FB}}(E)$ wird übrigens die in Abschnitt 6.1 vorgestellte Funktion `computeErrNeumann` aufgerufen, für $\mathbf{err}_\ell^{\text{FB}}(T)$ wird die HILBERT-Funktion `computeErrH1` benutzt.

Schließlich stellen wir wieder zu Demonstrationszwecken eine MATLAB-Funktion vor, die den adaptiven Algorithmus für die FEM-BEM-Kopplung realisiert, siehe Listing 4. Der Aufruf

```

x = adaptiveFEMBEM(co,el,bo,f,u0,phi0,Nmax,theta,...
                  mu_int,la_int,mu_ext,la_ext);

```

führt auf ein vom Schätzer η gesteuertes Verfahren. Die Eingabewerte co , el und bo bestimmen das Start-Gitter mit den dazugehörigen Randknoten; f , $u0$ und $\mathbf{phi0}$ sind function handles für die Daten; $Nmax$ gibt die maximale Anzahl der Dreiecke an, bis zu deren Erreichen verfeinert wird; und $\theta \in (0, 1]$ steht für den Adaptivitätsparameter. Zurückgegeben wird die Galerkin-Lösung auf dem feinsten Gitter.

6.5.2 Exakte Lösungen und die MATLAB Symbolic Toolbox

Will man in akademischen Experimenten die Ergebnisse des adaptiven Algorithmus mit exakten Lösungen vergleichen, so steht man vor der Aufgabe, geeignete Funktionen $\mathbf{u}^{\text{int}}, \mathbf{u}^{\text{ext}}, \mathbf{f}, \mathbf{u}_0, \phi_0$ zu finden, sodass $(\mathbf{u}^{\text{int}}, \mathbf{u}^{\text{ext}})$ das Transmissionsproblem (5.1)–(5.5) mit rechter Seite $(\mathbf{f}, \mathbf{u}_0, \phi_0)$ löst. In Abschnitt 3.2 haben wir bereits eine Klasse von Lösungen der homogenen Lamé-Gleichung $\mathcal{L}'\mathbf{u}^{\text{ext}} = 0$ identifiziert, nämlich solche für die $\overline{\mathbf{u}^{\text{ext}}}$, als komplexwertige Funktion aufgefasst, in Ω' analytisch ist. Für das Transmissionsproblem muss dann noch zusätzlich die Abklingbedingung $\mathbf{u}^{\text{ext}}(x) = O(|x|^{-1})$ erfüllt sein. Da es nach dem Satz von Liouville keine beschränkte (konjugiert) analytische Funktion gibt, die auf ganz \mathbb{R}^2 definiert ist, ist es naheliegend, eine meromorphe Funktion zu nehmen, die alle ihre Singularitäten im Inneren von Ω hat und bei ∞ verschwindet. Ein mögliches Beispiel wäre etwa $\mathbf{u}^{\text{ext}}(z) = (\bar{z} - \bar{z}_0)^{-1}$ für einen beliebigen Punkt $z_0 \in \Omega$. Die Beschränktheit stellt natürlich auch $\mathbf{u}^{\text{ext}} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega')$ sicher.

Für die innere Lösung \mathbf{u}^{int} könnten wir theoretisch auch eine konjugiert analytische Funktion nehmen. Dann hätten wir aber natürlich $\mathbf{f} = 0$, und damit ein eher schlechtes Beispiel, weil es unseren Algorithmus nicht in voller Allgemeinheit testen würde.

Um eine nicht-triviale rechte Seite \mathbf{f} zu erhalten, können wir im Prinzip so vorgehen:

1. Wähle eine „beliebige“ (am besten elementare) Funktion $\mathbf{u}^{\text{int}} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und ein geeignetes \mathbf{u}^{ext} wie oben.
2. Berechne $\mathbf{f} := \mathcal{L}\mathbf{u}^{\text{int}}$ und die Konormalenableitungen $\gamma_1^{\text{int}}\mathbf{u}^{\text{int}}$ und $\gamma_1^{\text{ext}}\mathbf{u}^{\text{ext}}$.
3. Definiere die Sprünge $\mathbf{u}_0 := \mathbf{u}^{\text{int}} - \mathbf{u}^{\text{ext}}$ und $\phi_0 := \gamma_1^{\text{int}}\mathbf{u}^{\text{int}} - \gamma_1^{\text{ext}}\mathbf{u}^{\text{ext}}$ auf Γ .
4. Verwende $(\mathbf{f}, \mathbf{u}_0, \phi_0)$ als Daten und vergleiche die Ergebnisse mit der exakten Lösung $(\mathbf{u}, \phi) := (\mathbf{u}^{\text{int}}, \gamma_1^{\text{ext}}\mathbf{u}^{\text{ext}})$.

Diese Schritte händisch auszuführen, ist jedoch eher mühsam, da man ja für jede der beiden Komponenten $k = 1, 2$ von \mathbf{u}^{int} die fünf Ableitungen $\partial_i(\mathbf{u}^{\text{int}})^k$ und $\partial_{ij}(\mathbf{u}^{\text{int}})^k$, $1 \leq i \leq j \leq 2$ berechnen muss. Dazu kommen noch vier Ableitungen $\partial_i(\mathbf{u}^{\text{ext}})^k$ für $\gamma_1^{\text{ext}}\mathbf{u}^{\text{ext}}$, insgesamt also 14 Ableitungen – sehr viele Beispielfunktionen $\mathbf{u}^{\text{int}}, \mathbf{u}^{\text{ext}}$ wird man auf diese Weise nicht ausprobieren können.

Aus dieser Problematik hat sich die Idee entwickelt, die Symbolic Toolbox von MATLAB zu verwenden, um die Ableitungen symbolisch berechnen zu lassen. Die folgende Funktion ist speziell für diesen Zweck designt:

```
[u, gamma1u, Lu, gradu] = ...
    provideFunctionHandlesComplex(u, mu, lambda);
```

Die Eingabewerte sind eine Funktion \mathbf{u} und Lamé-Parameter μ, λ . Ausgabewerte sind function handles für \mathbf{u} , $\gamma_1\mathbf{u}$ (als Funktion von x, a, b), $\mathcal{L}\mathbf{u}$ und $\nabla\mathbf{u}$. Das ausgegebene \mathbf{u} unterscheidet sich vom eingegebenen:

- Das ausgegebene \mathbf{u} soll mit den MATLAB-Funktionen für die FEM-BEM-Kopplung verträglich sein. Es ist daher ein function handle der Form $\mathbb{R}^{N \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times 2}$ für beliebiges $N \geq 1$, wird also mit $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ aufgerufen.
- Das eingegebene \mathbf{u} soll eine komplexwertige Funktion in zwei (reellen) Variablen beschreiben, also $\mathbf{u}(x, y) \in \mathbb{C}$. Dies ist praktischer, als wenn man beide (reel-

len) Komponenten von \mathbf{u} getrennt angibt, da sich viele elementare analytische Funktionen nicht in elementarer Weise in Real- und Imaginärteil aufspalten lassen. Beispielsweise ist $\mathbf{u}(x, y) = (x + iy)^{1/2}$ eine mögliche Eingabe, aber $\text{Re}\mathbf{u}(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/4} \cos(\frac{1}{2} \arg(x, y))$ enthält die nicht in der Symbolic Toolbox enthaltene Funktion \arg . Es sei angemerkt, dass \mathbf{u} gleich zu Beginn des Programms mit dem Befehl `sym(u)` in einen symbolischen Ausdruck konvertiert wird. Daher muss \mathbf{u} nicht unbedingt ein function handle sein, sondern kann auch ein String (in dem x und y vorkommen) oder sogar eine Zahl sein. Weiters muss erwähnt werden, dass die imaginäre Einheit nur als `i` und nicht als `1i` vorkommen darf, da die Symbolic Toolbox letzteren Ausdruck nicht kennt. Mögliche Eingaben sind beispielsweise:

```
provideFunctionHandlesComplex(@(x,y)(y + i*x)^(1/2),mu,lambda);
provideFunctionHandlesComplex('exp(i*y*x)',mu,lambda);
provideFunctionHandlesComplex(0,mu,lambda);
```

Wir demonstrieren nun, wie sich mit diesem Programm die korrekten Daten $\mathbf{f}, \mathbf{u}_0, \phi_0$ und die exakte Lösung \mathbf{u}, ϕ erhalten lassen, für $\mathbf{u}^{\text{int}} = e^{ixy}$, $\mathbf{u}^{\text{ext}} = \frac{1}{x-iy-0.1}$ und allen Lamé-Parametern gleich 1:

```
uint = 'exp(i*x*y)';
uext = '1/(x-i*y-0.1)';
[u,gammauint,f] = provideFunctionHandlesComplex(uint,1,1);
[uext,phi] = provideFunctionHandlesComplex(uext,1,1);
u0 = @(x) u(x) - uext(x);
phi0 = @(x,a,b) gammauint(x,a,b) - phi(x,a,b);
```

Der Code von `provideFunctionHandlesComplex` befindet sich in Listing 5.

Listing 5: provideFunctionHandlesComplex.m

```

1 function [u,gamma1u,Lu,gradu] = provideFunctionHandlesComplex(u,mu,lambda)
2 % provide function handles for MATLAB solution of Lamé equation
3
4 syms x y real;
5 u = sym(u);
6
7 %*** perform symbolic manipulations
8 d1u = diff(u,x);
9 d2u = diff(u,y);
10 dzu = d1u - 1i*d2u;
11 Lu = -1/2*((lambda+3*mu)*dzu + (lambda+mu)*conj(dzu));
12 Lu = diff(Lu,x) + 1i*diff(Lu,y);
13
14 %*** Create u function handle
15 u = SymToFunctionHandle(u);
16 u = @(x) [real(u(x)), imag(u(x))];
17
18 %*** Create Lu function handle
19 Lu = SymToFunctionHandle(Lu);
20 Lu = @(x) [real(Lu(x)), imag(Lu(x))];
21
22 %*** Create gamma1u function handle
23 d1u = SymToFunctionHandle(d1u);
24 d2u = SymToFunctionHandle(d2u);
25 gradu = @(x) [real(d1u(x)), real(d2u(x)), imag(d1u(x)), imag(d2u(x))];
26 laenge = @(x) sqrt(sum(x.^2,2));
27 normal1 = @(x) x(:,2) ./ laenge(x);
28 normal2 = @(x) -x(:,1) ./ laenge(x);
29 L = lambda*[1 0 0 1]'+[1 0 0 1] + mu*[2 0 0 0; 0 1 1 0; 0 1 1 0; 0 0 0 2];
30 Lgradu11 = @(x) gradu(x) * L(:,1);
31 Lgradu12 = @(x) gradu(x) * L(:,2);
32 Lgradu22 = @(x) gradu(x) * L(:,4);
33 gamma1u = @(x,a,b) [normal1(b-a).*Lgradu11(x) + normal2(b-a).*Lgradu12(x), ...
34                    normal1(b-a).*Lgradu12(x) + normal2(b-a).*Lgradu22(x)];
35 end
36
37 function f = SymToFunctionHandle(f)
38 % creates a function handle from symbolic expression f in x,y
39 % and also covers the case that f(x,y) = constant
40 syms x y;
41 if isempty(findsym(f))
42     if eval(f)==0
43         f = @(x) zeros(size(x,1),1);
44     else
45         f = @(x) eval(f)*ones(size(x,1),1);
46     end
47 else
48     f = matlabFunction(f,'vars',[x,y]);
49 end
50 end

```

7 Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt präsentieren wir verschiedene numerische Beispiele, welche den V - und K -Operator auf verschiedenen Gebieten in der Ebene involvieren. Falls nicht explizit anders angegeben, haben wir dabei immer die Lamé-Parameter $\mu = \lambda = 1$ benutzt.

7.1 Integraloperatoren in Aktion

Bevor wir die numerischen Ergebnisse unserer adaptiven BEM- und FEM-BEM-Algorithmen untersuchen, wollen wir ein paar Bilder betrachten, die mit Hilfe unserer Funktionen für die Punktauswertung der Integraloperatoren \mathcal{V} und \mathcal{K} entstanden sind. Das Ziel ist, etwas Intuition zu erhalten, wie diese Operatoren wirken, und auch experimentell zu verifizieren, dass unsere Implementierung die Abbildungseigenschaften aus Theorem 3.17 widerspiegelt.

Sei $a > 0$ und $I = (-a, a) \times \{0\}$ ein um 0 zentriertes Intervall, eingebettet in den \mathbb{R}^2 . Wir wollen \mathcal{V} und \mathcal{K} auf stückweise konstante Funktionen der Form $\phi := (\chi_I, 0)^T$ anwenden; da die Integraloperatoren nur vom Support des Integranden abhängen, können wir uns Γ hier als eine beliebige eindimensionale Obermenge von I denken und haben $\phi \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ aber $\phi \notin \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$.

In den ersten beiden Abbildungen 7.1 und 7.2 nehmen wir $a = 0.5$ bzw. $a = 0.05$ und betrachten das Einfachschichtpotential $\mathcal{V}\phi$. Um die Größenverhältnisse anzupassen, wurde eine geeignet skalierte Version $c\mathcal{V}\phi$ geplottet. Die Plots auf der linken Seite zeigen die ersten Komponenten ϕ^1 und $(\mathcal{V}\phi)^1$ entlang von $\mathbb{R} \times \{0\}$. Hier wird sowohl die glättende Wirkung von V als auch die Nichtlokalität sehr deutlich: Die Funktion $V\phi$ ist augenscheinlich sogar beliebig glatt, was damit erklärt werden kann, dass $\mathbb{R} \times \{0\}$ keine Ecken hat. Obwohl ϕ eine stark lokalisierte Funktion ist, breitet sich $V\phi$ nur langsam über die ganze reelle Achse aus. Das logarithmische Verhalten für $x \rightarrow \infty$ aus Lemma 5.2 ist klar sichtbar.

Die Plots auf der rechten Seite der Abbildungen 7.1 und 7.2 zeigen wir $\mathcal{V}\phi$ auf einer zweidimensionalen Umgebung von I . Die Eigenschaft $\mathcal{V}\phi \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus I)$ ist hier relativ deutlich zu beobachten; der Sprung der Konormalenableitung entlang von I ist aufgrund der Perspektive der Abbildungen höchstens zu erahnen.

In Abbildung 7.3 betrachten wir wieder $a = 0.5$ und das Doppelschichtpotential $\mathcal{K}\phi$. Dies ist mit unserer Implementierung möglich, indem eine beliebige Triangulierung \mathcal{T}_ℓ des offenen Randstückes I gewählt wird und \mathcal{K} bei der konstanten Funktion $\phi := (1, 0) \in \mathbf{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$ ausgewertet wird. Oben links sehen wir wieder ϕ gegen skalierte Versionen der beiden Komponenten $(\mathcal{K}\phi)^1$ und $(\mathcal{K}\phi)^2$ geplottet. Aufgrund der Symmetrien im Integralkern ist $(\mathcal{K}\phi)^1$ auf $\mathbb{R} \times \{0\}$ konstant Null. Dagegen scheint $(\mathcal{K}\phi)^2$ genau an den Unstetigkeitsstellen von ϕ Singularitäten aufzuweisen.

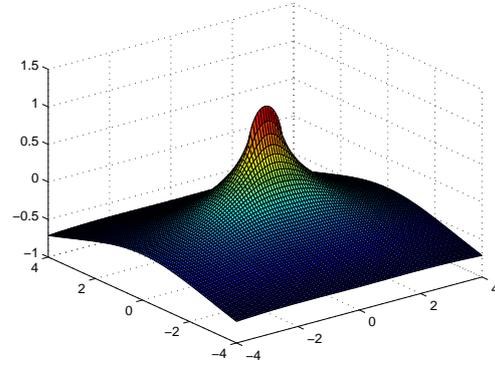
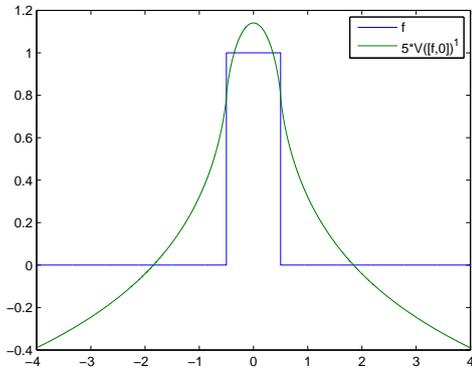


Abbildung 7.1: $V\phi$ für $\phi(x, 0) := (\chi_{(-0.5,0.5)}(x), 0)$. Links: Plot entlang $\mathbb{R} \times \{0\}$.

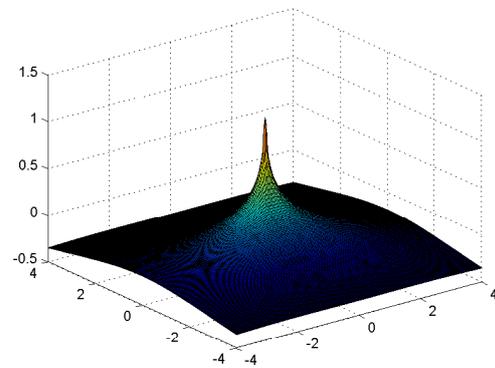
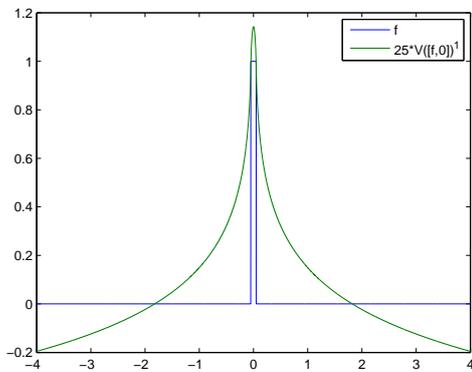


Abbildung 7.2: $V\phi$ für $\phi(x, 0) := (\chi_{(-0.05,0.05)}(x), 0)$. Links: Plot entlang $\mathbb{R} \times \{0\}$.

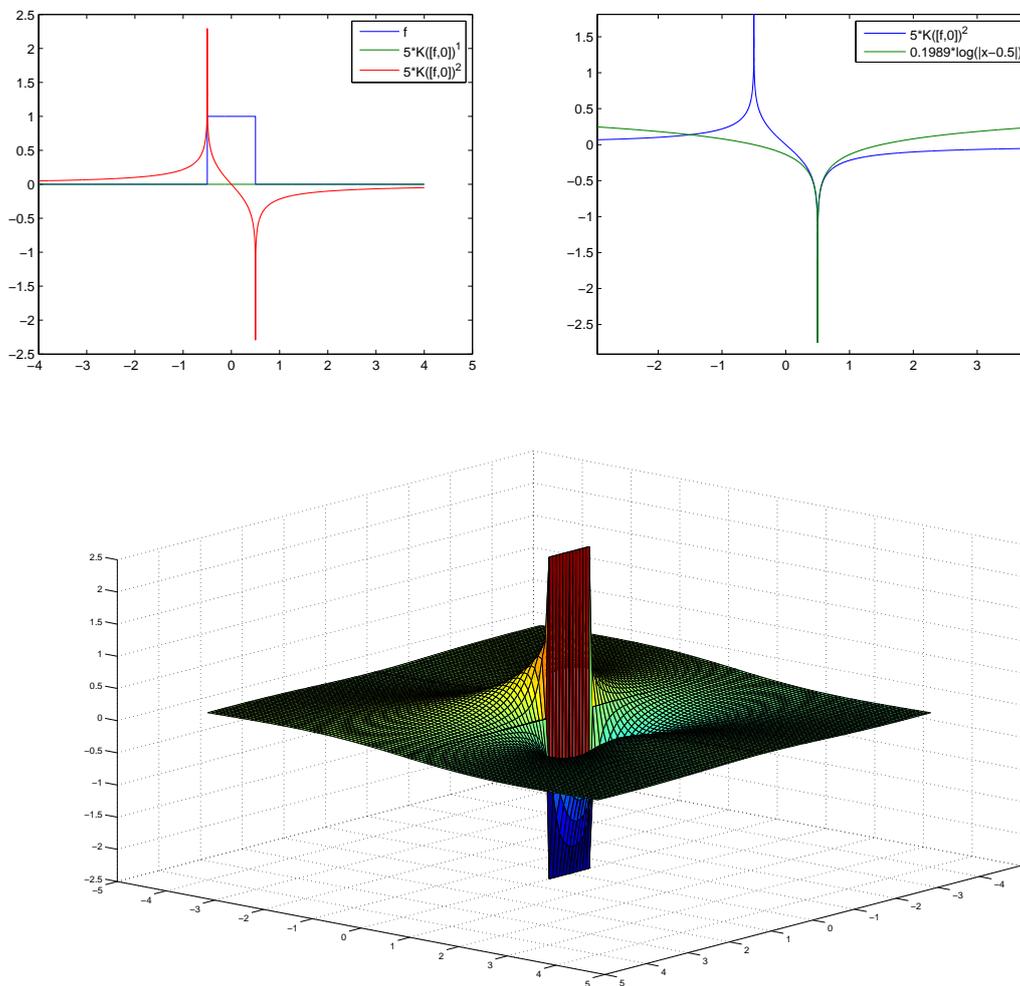


Abbildung 7.3: $K\phi$ für $\phi(x, 0) := (\chi_{(-0.5,0.5)}(x), 0)$. Oben: Plots entlang $\mathbb{R} \times \{0\}$. Unten: $(K\phi)^1$

Durch genauere Untersuchung lässt sich feststellen, dass diese Singularitäten logarithmischer Natur sind. Dies soll im Bild oben rechts in Abbildung 7.3 veranschaulicht werden: asymptotisch für $x \rightarrow 0.5$ ist $(\mathcal{K}\phi)^2(x, 0)$ genau ein Vielfaches von $\log|x - 0.5|$. Wir beobachten hier also empirisch die Abbildungseigenschaft $K: \mathbf{L}^2(\Gamma) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma)$ für einen beliebigen Lipschitz-Rand $\Gamma \supset I$, welche logarithmische Singularitäten von $K\phi$ nicht ausschließt. Andererseits liegt $K\phi$ augenscheinlich *nicht* in $\mathbf{H}^{1/2}(I)$, das heißt wir haben ein Gegenbeispiel für die vermeintliche Abbildungseigenschaft $K: \mathbf{H}^{1/2}(I) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(I)$ im Fall offener Randstücke I .

In Abbildung 7.3 unten sehen wir einen 3D-Plot von $5(\mathcal{K}\phi)^1$. Hier ist eindrucksvoll der Sprung entlang von I zu sehen, welcher aufgrund des Skalierungsfaktors genau 5 beträgt. Außerhalb von I hingegen ist die Funktion glatt. Wegen $(K\phi)^1 \equiv 0$ auf $\mathbb{R} \times \{0\}$ gilt augenscheinlich

$$\begin{aligned} \lim_{y \searrow 0} (\mathcal{K}\phi)^1(x, y) &= -\frac{1}{2}\phi^1(x, 0) = ((K - \frac{1}{2})\phi)^1(x, 0), \\ \lim_{y \nearrow 0} (\mathcal{K}\phi)^1(x, y) &= \frac{1}{2}\phi^1(x, 0) = ((K + \frac{1}{2})\phi)^1(x, 0). \end{aligned}$$

Dies ist genau das erwartete Verhalten des Spuoperators: die Knoten waren im Experiment von links nach rechts angeordnet, also gegen den Uhrzeigersinn, wenn man I als Teilmenge des Randes eines Gebietes in der *oberen* Halbebene betrachtet; in der Implementierung des K -Operators wird Orientierung gegen den Uhrzeigersinn angenommen, um den Normalvektor zu berechnen; folglich muss $\gamma^{\text{int}}\mathcal{K} = K - \frac{1}{2}$ der Limes von oben sein und $\gamma^{\text{ext}}\mathcal{K} = K + \frac{1}{2}$ der Limes von unten.

7.2 Ergebnisse für BEM

7.2.1 L-Shape

Wir wollen nun den adaptiven Algorithmus für die schwach singuläre Integralgleichung $V\phi = (K + \frac{1}{2})\mathbf{g}$ austesten. Wir betrachten das L -förmige Gebiet Ω gegeben durch die Koordinaten der Eckpunkte

$$\mathcal{N}_0 := \{(0, 0), (-1, -1), (0, -2), (1, -1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (-1, 1)\}.$$

Diese Koordinaten werden noch mit dem Faktor 0.3 skaliert, um sicherzustellen, dass der V -Operator elliptisch ist, siehe Theorem 3.18. (Das Theorem gibt zwar keine expliziten Schranken an den Durchmesser von Ω für die Elliptizität, zeigt aber, dass V elliptisch ist wenn dieser nur hinreichend klein ist. Experimentell war der diskrete V -Operator schon für den Skalierungsfaktor 1 elliptisch; um ganz sicherzugehen, haben wir 0.3 benutzt.) Das resultierende Gebiet mit dem Start-Gitter \mathcal{T}_0 und einem typischen verfeinerten Gitter von etwa 100 Elementen ist in Abbildung 7.4 zu sehen.

Als Lösung für das Dirichlet-Problem wählen wir die konjugiert holomorphe Funktion $\mathbf{u}(z) = \bar{z}^{2/3}$. Nach Abschnitt 3.2 ist dies, als Funktion $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ aufgefasst, tatsächlich

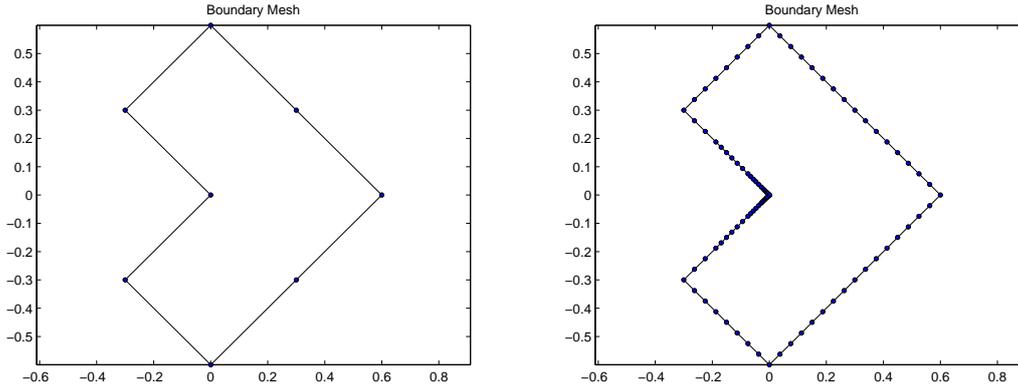


Abbildung 7.4: L-Shape

eine Lösung der homogenen Lamé-Gleichung $\mathcal{L}\mathbf{u} = 0$ in Ω . Als Dirichlet-Randdaten verwenden wir folglich

$$\mathbf{g}(x, y) := \mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(x - iy)^{2/3} \\ \operatorname{Im}(x - iy)^{2/3} \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Wie man sich leicht überlegt, hat die gesuchte Konormalenableitung $\phi = \gamma_1 \mathbf{u}$ bei 0 eine Singularität und ist insbesondere niemals in $\mathbf{H}^1(\mathcal{T}_\ell)$ (d.h., stückweise in $\mathbf{H}^1(T)$ für alle Elemente $T \in \mathcal{T}_\ell$ einer Triangulierung). Wir können daher bei uniformer Verfeinerung nicht mit der optimalen Konvergenzrate $O(h^{3/2})$ rechnen.

Zunächst wollen wir die Ergebnisse des adaptiven Algorithmus mit der „Augenmetrik“ beurteilen. In Abbildung 7.5 sehen wir einige Plots der Galerkin-Lösungen Φ_ℓ entlang der Bogenlängenparametrisierung; zum Vergleich sieht man auch Plots der exakten Lösung ϕ . Als Fehlerschätzer wurde hier der Residualschätzer verwendet.

Oben sehen wir die Komponenten einer groben Lösung auf einem Gitter mit $\#\mathcal{T}_\ell = 21$, in der Mitte eine feinere Lösung mit $\#\mathcal{T}_\ell = 1088$. Da auf letzteren Bildern kaum mehr ein Unterschied zwischen Φ_ℓ und ϕ zu erkennen ist, sehen wir unten dieselben Plots noch einmal stark vergrößert in der Nähe der Singularität von ϕ^1 . Auffällig ist, dass auch die zweite Komponente Φ_ℓ^2 in diesem Bereich starke Oszillationen aufweist, obwohl ϕ^2 dort konstant Null ist.

In der nächsten Abbildung 7.6 vergleichen wir die Performance von uniformer Verfeinerung mit jener des adaptiven Algorithmus, wenn der Residualschätzer zum Markieren benutzt wird. Als Adaptivitätsparameter haben wir die drei Werte $\theta = 0.9, 0.5, 0.1$ verglichen. Gerechnet wurde bis zu einer Elementanzahl von etwa $N := \#\mathcal{T}_\ell = 10000$, dies führt auf vollbesetzte Galerkin-Matrizen mit etwa 400 mio. Einträgen. Wir plotten jeweils

- den (approximierten) Residualschätzer $\rho_\ell = \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma((K + \frac{1}{2})G_\ell - V\Phi_\ell)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)^2}$,
- die obere Schranke für den Fehler $\operatorname{err}_\ell = \|h_\ell^{1/2}(\phi - \Phi_\ell)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$ und
- die Dirichlet-Datenoszillationen $\operatorname{osc}_{D,\ell} = \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma(\mathbf{g} - G_\ell)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)^2}$.

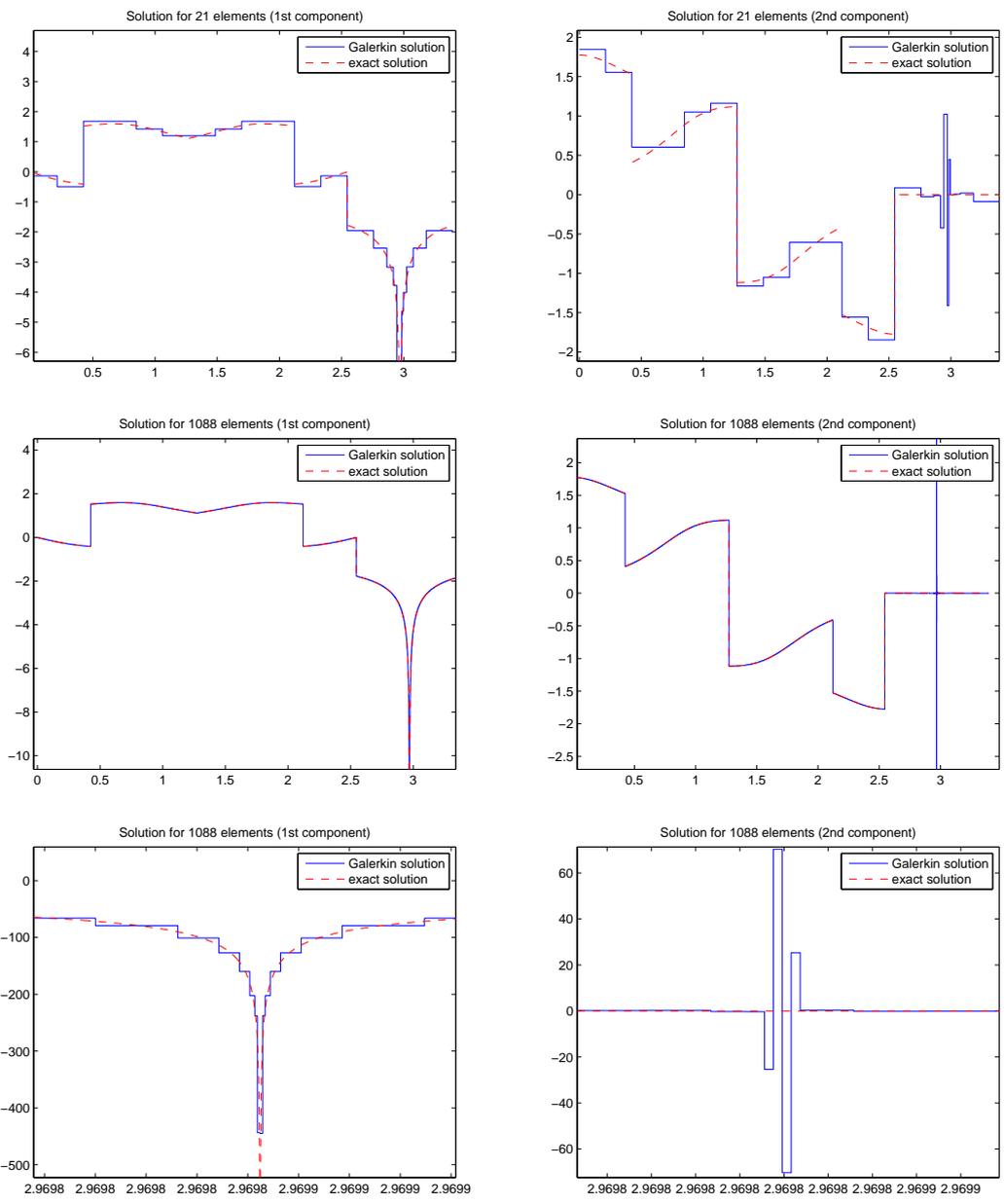


Abbildung 7.5: BEM auf dem L-Shape mit Residualschätzer: Bogenlängen-Plots von Galerkin-Lösung Φ_ℓ und exakter Lösung ϕ .

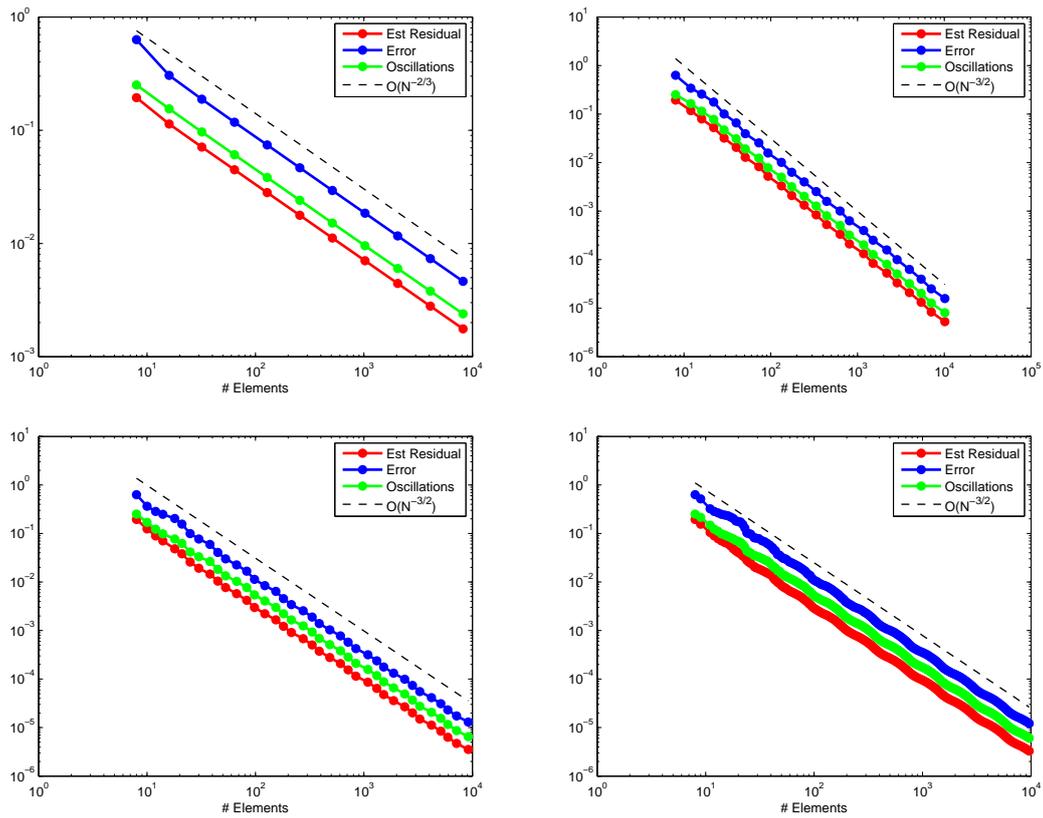


Abbildung 7.6: BEM auf dem L-Shape mit Residualschätzer: Von links oben nach rechts unten: $\theta = 1, 0.9, 0.5, 0.1$

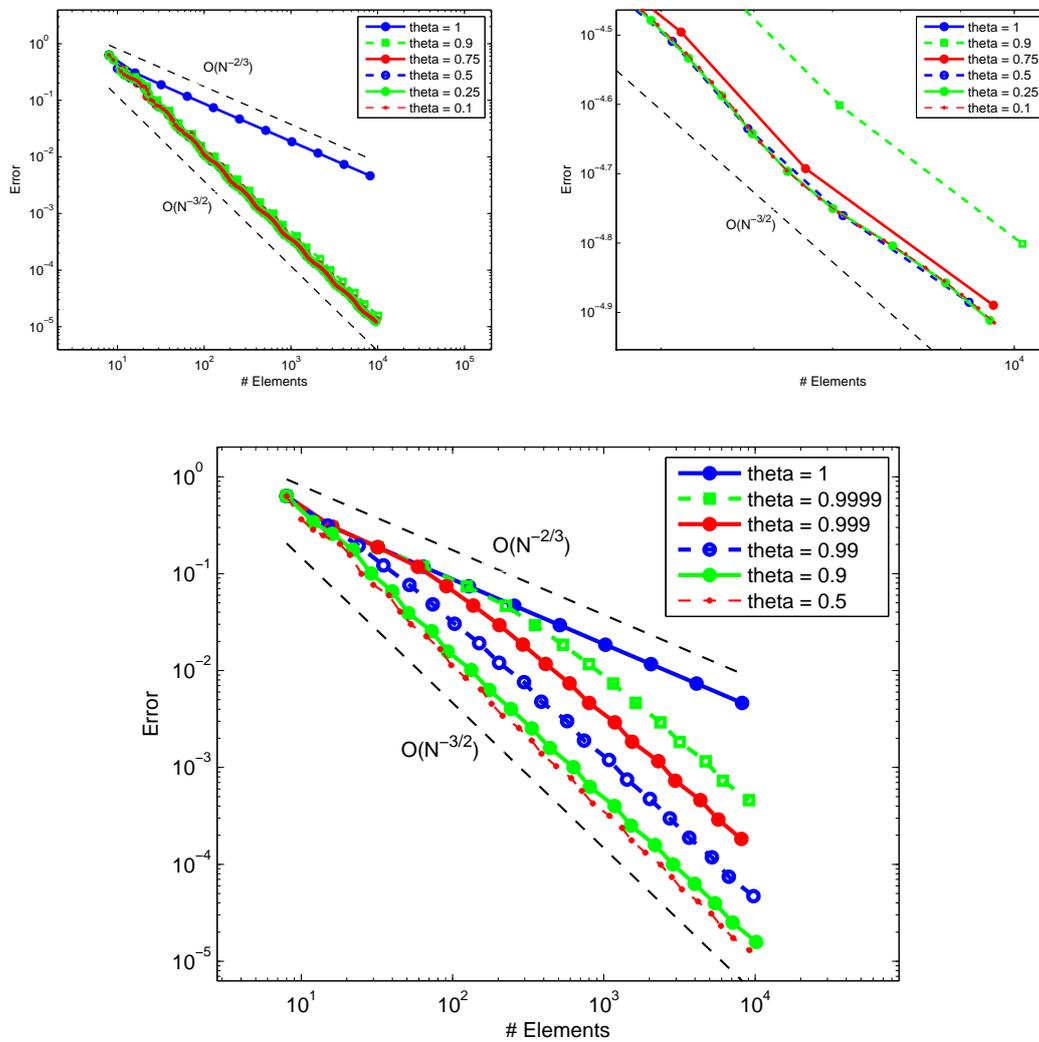


Abbildung 7.7: BEM auf dem L-Shape mit Residualschätzer. Vergleich von err_ℓ für verschiedene Werte von θ .

In Abbildung 7.6 lässt sich klar beobachten, dass uniforme Verfeinerung eine abgeschwächte Konvergenzrate von $O(N^{-2/3})$ liefert, adaptive Verfeinerung hingegen die erwartete optimale Rate $O(N^{-3/2})$, und zwar unabhängig für alle Adaptivitätsparameter $\theta = 0.1, 0.5, 0.9$.

In der darauffolgenden Abbildung 7.7 sieht man nochmal einen direkten Vergleich von verschiedenen θ , wobei wir hier nur die zuverlässige Fehlerschranke err_ℓ geplottet haben. Das Ziel ist nun, herauszufinden, welche Wahl von θ die *beste* ist. Im Bild oben links werden zunächst $\theta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9$ sowie uniforme Verfeinerung (betitelt mit $\theta = 1$) verglichen. Hier ist nur zu erkennen, dass im Verhältnis zu uniformer Verfeinerung alle adaptiven Algorithmen nahezu gleich gut performen. Der Zoom im Bild oben rechts verrät Genaueres:

Erstens scheint – wenig überraschend – der Fehler monoton steigend in θ zu sein: Kleinere Werte von θ liefern tendenziell kleinere Fehler bei gleicher Anzahl Elemente. Dies kann man als empirischen Beweis dafür werten, dass der Residualschätzer nicht nur eine obere Schranke sondern auch tatsächlich ein sehr guter Indikator für die lokalen Beiträge des Fehlers ist.

Zweitens ist aber – für mich überraschend – zumindest für $\theta \leq 0.5$ *überhaupt kein* Unterschied mehr feststellbar: Die verschiedenen Durchläufe des Algorithmus mit $\theta = 0.1, 0.25, 0.5$ scheinen fast dasselbe adaptive Netz generiert zu haben, wenn auch in einer erheblich verschiedenen Anzahl von Schritten. Für $\theta = 0.75$ und $\theta = 0.9$ ist noch ein geringer Unterschied im Fehler feststellbar; doch als Fazit lässt sich sagen, dass aus Effizienzgründen wohl mindestens eine Wahl von $\theta \geq 0.75$ zu empfehlen ist und auch $\theta = 0.9$ sicher keine schlechte Wahl darstellt.

In Abbildung 7.7 gehen wir der sich nun aufdrängenden Frage nach, wie hoch θ *maximal* gewählt werden kann, um noch deutliche Unterschiede zu uniformer Verfeinerung ($\theta = 1$) zu beobachten. Die Antwort ist wieder überraschend und lautet: Sehr hoch! Wir plotten err_ℓ für $\theta = 0.5, 0.9, 0.99, 0.999$ und 0.9999 . Faszinierenderweise kann bei *allen* diesen Werten noch immer klar das Erreichen der optimalen Rate $O(h^{3/2})$ beobachtet werden, wenn auch mit einer gewissen Verzögerung: Bis etwas über 100 Elemente läuft der Algorithmus für $\theta = 0.9999$ noch beinahe synchron mit $\theta = 1$.

7.2.2 Schlitz

Wir betrachten nun den Schlitz $\Gamma := (-0.5, 0.5) \times \{0\}$ und das Dirichlet-Problem auf dem Außenraum $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, siehe Abbildung 7.8 für typische Netze. Da Ω kein Lipschitz-Gebiet ist und im Speziellen keinen äußeren Normalvektor besitzt, ist der K -Operator nicht wohldefiniert. Insbesondere lässt sich das Dirichlet-Problem nicht zur Gleichung $V\phi = (K + \frac{1}{2})\mathbf{g}$ umformulieren. Allerdings können der Spuroperator $\gamma : \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ und daher auch der \mathcal{V} - und V -Operator wie gehabt definiert werden; es gelten dann dieselben Abbildungseigenschaften wie in Theorem 3.17 und Elliptizität wie in Theorem 3.18, mit dem Unterschied, dass der Dualraum von $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ jetzt mit $\widetilde{\mathbf{H}}^{-1/2}(\Gamma)$ bezeichnet wird und nicht mit $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$.

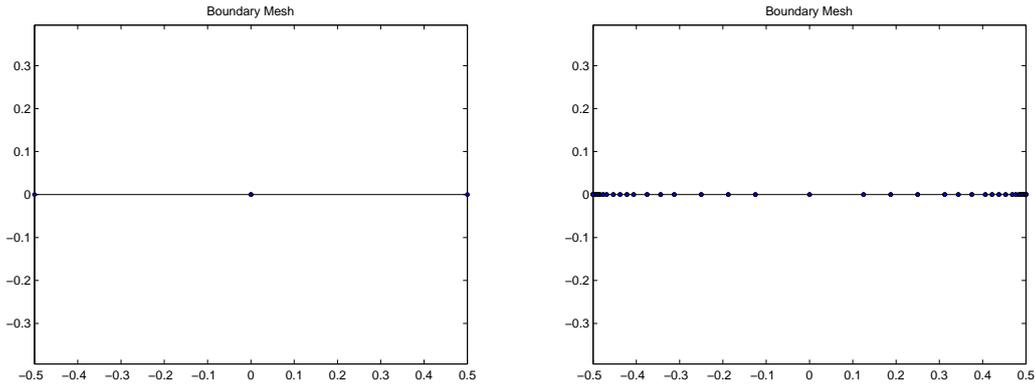


Abbildung 7.8: Schlitz $\Gamma = (-0.5, 0.5) \times \{0\}$. Startgitter und verfeinertes Gitter.

Wir können folglich einen sogenannten „indirekten“ Ansatz machen und eine Lösung des Dirichlet-Problems von der Form $\mathbf{u} = \mathcal{V}\phi$ mit $\phi \in \widetilde{\mathbf{H}}^{-1/2}(\Gamma)$ suchen. Eine Lösung mit $\mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{g}$ für beliebiges $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ liefert dann offensichtlich die Wahl $\phi := V^{-1}\mathbf{g}$, wir müssen also wiederum eine schwach singuläre Integralgleichung lösen, nämlich

$$V\phi = \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma.$$

Es sei angemerkt, dass wir die Gleichung in Kapitel 4 in dieser allgemeineren Form analysiert haben, falls Γ Rand eines Lipschitz-Gebietes ist, und dass sich die Analysis ohne große Änderungen auf offene Randstücke überträgt.

Der Nachteil bei der indirekten Formulierung ist, dass das gesuchte ϕ nun keine natürliche Bedeutung in Zusammenhang mit der ursprünglichen PDE hat. Insbesondere sind wir nicht mehr in der Lage, uns eine Lösung \mathbf{u} vorzugeben und das exakte ϕ einfach als Konormalenableitung von \mathbf{u} zu berechnen. Also geben wir willkürlich eine möglichst einfache Funktion $\mathbf{g}: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ vor:

$$\mathbf{g}(t, 0) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [-0.5, 0.5].$$

Kurioserweise gelang es uns bei dieser Wahl von \mathbf{g} , auf empirischem Weg und durch „Raten“ im Nachhinein eine geschlossene Form der exakten Lösung ϕ zu bestimmen; dies wird der Leser in Kürze nachvollziehen können.

Wir vergleichen wieder uniforme Verfeinerung mit dem adaptiven Algorithmus (mit $\theta = 0.5$, falls nicht anders angegeben). In Abbildung 7.9 sehen wir zunächst eine qualitative Visualisierung unserer Experimente. Da wir die exakte Lösung ϕ (zu diesem Zeitpunkt) nicht kennen, haben wir diesmal stattdessen das Residuum $(V\Phi_{\ell})^1 - 1$ entlang der Bogenlängenparametrisierung geplottet. Die zweite Komponente $(V\Phi_{\ell})^2 - 0$ ist uninteressant, da aufgrund der Wahl von Γ und \mathbf{g} stets $(V\Phi_{\ell})^2 \equiv 0 \equiv \Phi_{\ell}^2$ gilt.

Links in Abbildung 7.9 sehen wir die Ergebnisse von uniformer Verfeinerung nach 32 (links oben) bzw. 512 Elementen (links unten). Rechts sehen wir adaptive Verfeinerung

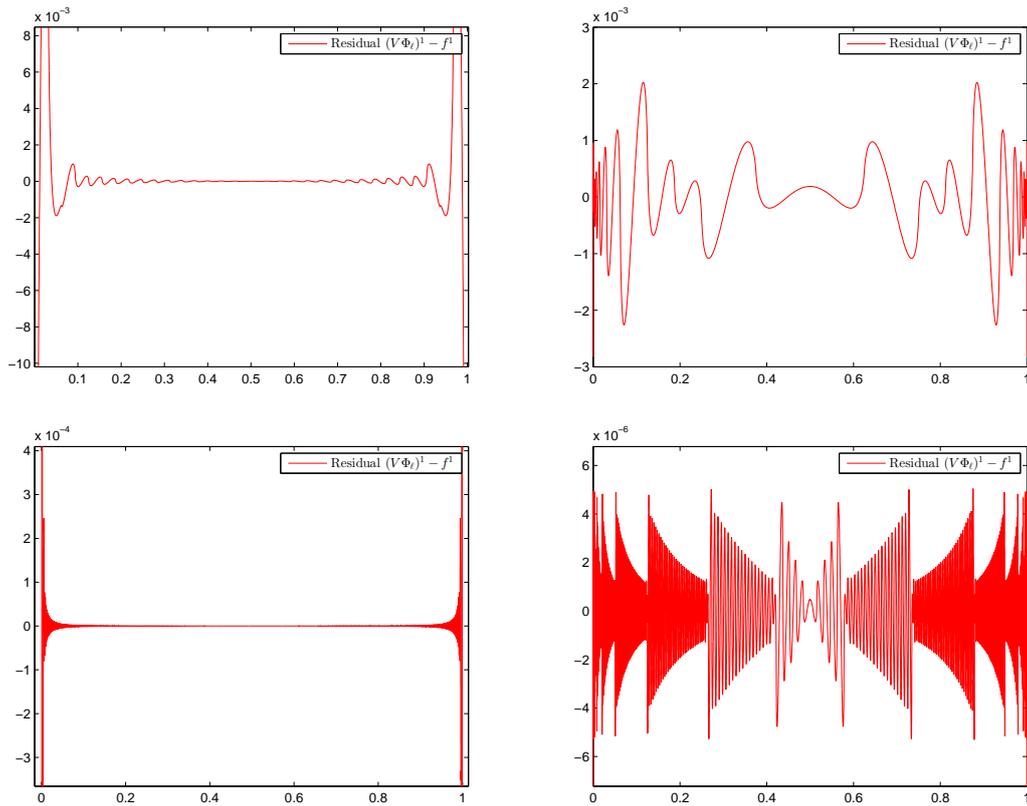


Abbildung 7.9: BEM auf dem Schlitz mit Residualschätzer: Bogenlängen-Plots des Residuums $(V\Phi_\ell)^1 - \mathbf{g}^1$. Links: Uniforme Verfeinerung nach 32 bzw. 512 Elementen. Rechts: Adaptive Verfeinerung ($\theta = 0.1$) nach 32 bzw. 511 Elementen.

nach 32 (rechts oben) bzw. 511 Elementen (rechts unten). Diese Bilder zeigen sehr schön, was bei uniformer Verfeinerung schief läuft: Der Fehler ist am Rand des Intervalls (d.h. in der Nähe der Singularitäten) viel zu groß und in der Mitte unnötig klein. Bei adaptiver Verfeinerung hingegen verteilt sich der Fehler gleichmäßig über das ganze Intervall: Durch schnelles Verfeinern am Rand und langsames Verfeinern in der Mitte werden entstehende Unregelmäßigkeiten sofort wieder ausgeglichen. Besonders im Bild unten rechts ist gut zu beobachten, wie die Abstufung der Netzweite auch eine Abstufung der Oszillationsgeschwindigkeit des Residuums induziert. Dies wird in gewisser Weise durch die Galerkin-Orthogonalität erzwungen, da das Residuum auf jedem Element eine Nullstelle haben muss.

Bei diesem Beispiel meldete MATLAB schon nach einigen hundert Elementen Warnungen, dass die Höhe der Konditionszahl der Galerkin-Matrix \mathbf{V} möglicherweise Ungenauigkeiten in der Lösung zur Folge hätte. In der Folge waren auch gravierende Instabilitäten des Algorithmus ab etwa $\#\mathcal{T}_\ell \geq 4000$ zu beobachten. Um dem entgegenzuwirken, be-

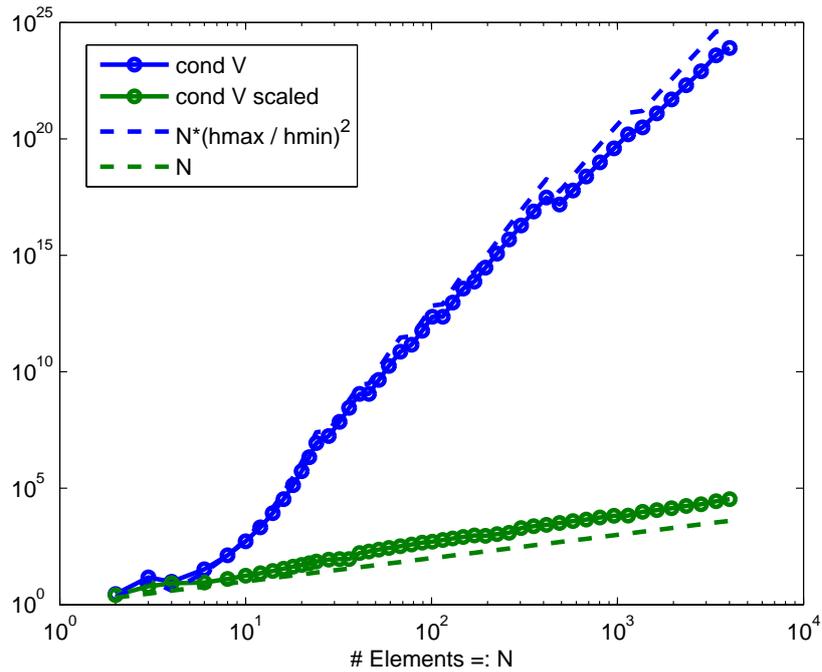


Abbildung 7.10: BEM auf dem Schlitz mit Residualschätzer: Konditionszahl der Galerkin-Matrix, mit und ohne diagonale Skalierung.

nutzen wir diagonale Skalierung; das bedeutet, wir lösen statt $\mathbf{V}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ das äquivalente Gleichungssystem $\mathbf{V}^{\text{scaled}}\mathbf{x}^{\text{scaled}} = \mathbf{b}^{\text{scaled}}$, wobei

$$\mathbf{V}_{ij}^{\text{scaled}} := \frac{\mathbf{V}_{ij}}{\sqrt{\mathbf{V}_{ii}\mathbf{V}_{jj}}}, \quad \mathbf{x}_j^{\text{scaled}} := \sqrt{\mathbf{V}_{jj}}\mathbf{x}_j, \quad \mathbf{b}_i^{\text{scaled}} := \frac{\mathbf{b}_i}{\sqrt{\mathbf{V}_{ii}}}.$$

Die diagonale Skalierung hat eine deutliche Reduktion der Konditionszahl zur Folge. Dies haben wir in Abbildung 7.10 veranschaulicht. Neben den Konditionszahlen $\text{cond}(\mathbf{V})$ und $\text{cond}(\mathbf{V}^{\text{scaled}})$ plotten wir auch Approximationen für diese, nämlich

$$\text{cond}(\mathbf{V}) \approx N \left(\frac{h_{\max}}{h_{\min}} \right)^2 \quad \text{und} \quad \text{cond}(\mathbf{V}^{\text{scaled}}) \approx N.$$

Hier ist $N := \#\mathcal{T}_\ell$ die Anzahl der Elemente und h_{\max} , h_{\min} sind die maximalen bzw. minimalen Netzweiten von \mathcal{T}_ℓ . Die Approximationen stammen aus [AMT99]. Die Autoren beweisen (in einem allgemeineren Setting), dass sie bis auf zusätzliche logarithmische Faktoren tatsächlich verlässliche obere Schranken für die jeweiligen Konditionszahlen bilden. Wie in Abbildung 7.10 zu sehen, beschreiben die Approximationen sehr gut das tatsächliche Verhalten der Konditionszahl.

Durch die diagonale Skalierung wurde zwar erfolgreich die MATLAB-Warnung abgestellt, doch leider hatte dies keine Reduktion der von uns beobachteten Instabilitäten zur Folge.

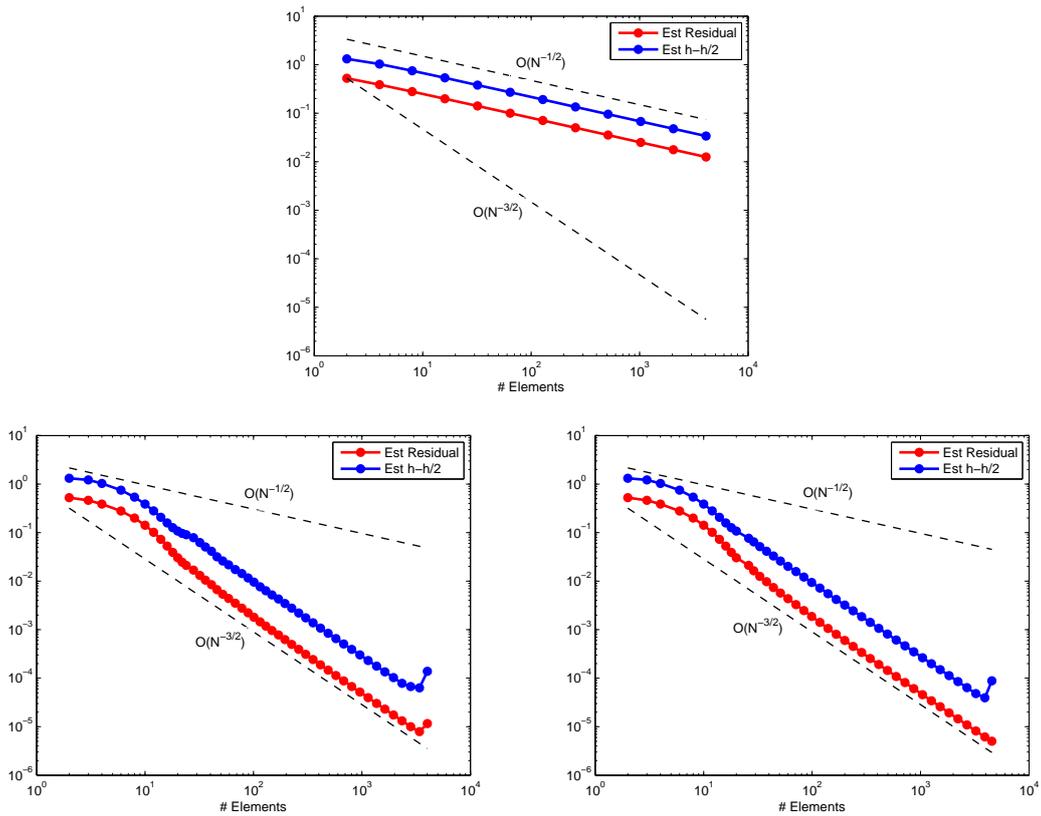


Abbildung 7.11: BEM auf dem Schlitz. Oben: Uniform. Unten links: Markierung mit Residualschätzer. Unten rechts: Markierung mit $h-h/2$ -Schätzer.

Dies deutet darauf hin, dass die Instabilitäten von der Berechnung der Galerkin-Matrix kommen und nicht vom Lösen des Gleichungssystems. Die Performance des adaptiven Algorithmus kann in Abbildung 7.11 nachvollzogen werden. Da wir (bisher) keine Möglichkeit haben, den exakten Fehler zu bestimmen, und da aufgrund unserer Wahl von $\mathbf{g} \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ keine Datenoszillationen existieren, haben wir nur Fehlerschätzer geplottet, den Residualschätzer und den $h-h/2$ -Schätzer. Oben sehen wir die Ergebnisse von uniformer Verfeinerung, unten links den adaptiven Algorithmus mit Markierung durch den Residualschätzer, unten rechts Markierung durch den $h-h/2$ -Schätzer.

Die Konvergenzrate von uniformer Verfeinerung ist noch schlechter als beim L-Shape-Beispiel: Wir beobachten nur $O(N^{-1/2})$ und folgern, dass die Lösung ϕ höchstens in $L^2(\Gamma)$ liegen kann. Im Gegensatz dazu erreicht der adaptive Algorithmus wieder die erwartete optimale Rate $O(N^{-3/2})$, zumindest bis sich die Instabilitäten bemerkbar machen, wo dann die Rate sofort zusammenbricht. Dies ist auf den unteren beiden Bildern im jeweils letzten adaptiven Schritt (bei etwa $N = 4000$) deutlich zu sehen.

Da wir derartige Instabilitäten bei numerischen Experimenten auf anderen Gebieten nicht beobachtet haben, lag es nahe, sich die Singularitäten in der ersten Komponente der

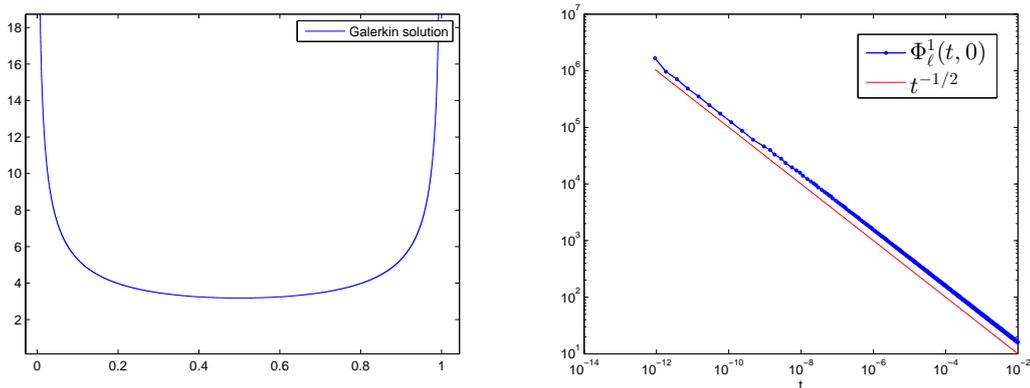


Abbildung 7.12: BEM auf dem Schlitz mit Residualschätzer: Bogenlängen-Plots der Galerkin-Lösung Φ_ℓ^1 nach etwa 2000 Elementen.

Lösung ϕ^1 näher anzuschauen. In Abbildung 7.12 sehen wir zwei Plots einer diskreten Approximation Φ_ℓ^1 entlang der Bogenlänge. Interessant ist vor allem das rechte Bild, welches einen loglog-Plot von Φ_ℓ^1 in der Nähe der Singularität am linken Intervallrand zeigt. Wir haben auch die Ordnung der Singularität bestimmt: Die Lösung verhält sich dort offenbar wie $t^{-1/2}$. Die Übereinstimmung ist in der Tat so gut, dass wir uns gefragt haben, ob die Lösung nicht sogar *genau* von der Form

$$\phi^1(x, 0) = A \frac{1}{\sqrt{0.5^2 - x^2}}, \quad \phi^2(x, 0) = 0 \quad \text{für alle } x \in (-0.5, 0.5) \quad (7.1)$$

mit $A \in \mathbb{R}$ ist. In diesem Fall wäre ϕ nicht einmal in $L^2(\Gamma)$, was vielleicht das frühe Auftreten von Instabilitäten im adaptiven Algorithmus zum Teil erklärt.

Unsere Vermutung ließ sich sehr einfach numerisch untermauern und schlussendlich auch beweisen. Die Aussage inklusive der Bestimmung der Konstanten A ist im folgenden Lemma enthalten.

Lemma 7.1. (i) Für alle $x \in [-1, 1]$ gilt

$$\int_{-1}^1 \frac{\log|x-t|}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log|x - \sin\theta| d\theta \equiv \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log|\sin\theta| d\theta = -\pi \log 2. \quad (7.2)$$

(ii) Sei $a > 0$ und $\Gamma := (-a, a) \times \{0\}$. Sei weiters die Matrix-wertige Funktion $\Phi: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gegeben durch

$$\Phi(x, 0) := \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x, 0) \in \Gamma.$$

Dann gilt

$$(V\Phi)(x, 0) \equiv \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x, 0) \in \Gamma$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{4\mu(\lambda + 2\mu)} \left((\lambda + 3\mu) \log \frac{2}{a} + \lambda + \mu \right), \\ C_2 &= \frac{\lambda + 3\mu}{4\mu(\lambda + 2\mu)} \log \frac{2}{a}. \end{aligned}$$

Beweis. (i) Die erste Gleichheit in (7.2) erhält man durch die Substitution $t = \sin \theta$, $dt = \sqrt{1-t^2} d\theta$ und die simple Beobachtung

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \log |x - \sin \theta| d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log |x - \sin \theta| d\theta.$$

Wegen der Voraussetzung $x \in [-1, 1]$ können wir $x = \sin \varphi$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$ schreiben. Um die zweite Gleichheit zu sehen, verwenden wir die folgende Faktorisierung des Sinus:

$$|\sin \varphi - \sin \theta| = \frac{1}{2} |e^{i(\theta-\varphi)} - 1| |e^{i(\theta+\varphi)} + 1|.$$

Damit haben wir

$$\int_0^{2\pi} \log |x - \sin \theta| d\theta = \int_0^{2\pi} \log |e^{i(\theta-\varphi)} - 1| + \log |e^{i(\theta+\varphi)} + 1| - \log 2 d\theta.$$

Teilen wir das Integral auf und machen die Phasenverschiebungen $\theta \mapsto \theta + \varphi$ bzw. $\theta \mapsto \theta - \varphi$, so eliminieren wir die Abhängigkeit von φ . Die rechte Seite ist also gleich

$$\int_0^{2\pi} \log |e^{i\theta} - 1| + \log |e^{i\theta} + 1| - \log 2 d\theta = \int_0^{2\pi} \log |\sin \theta| d\theta.$$

Letzteres ist ein „klassisches“ Integral, dessen Wert $-2\pi \log 2$ mit verschiedensten Methoden bestimmt werden kann; wir führen dies nicht aus.

(ii) Da die y -Komponente auf $\Gamma = (-a, a) \times \{0\}$ konstant Null ist, gilt dort

$$\frac{1}{|(x, y)|^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit vereinfacht sich die Fundamentallösung (3.25) zu

$$\mathbf{U}(x, 0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)} \left(-(\lambda + 3\mu) \log |x| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Wir schreiben der Kürze halber $B := 4\mu(\lambda + 2\mu)$. Der V -Operator, angewandt auf die oben definierte Funktion Φ , führt also auf das Integral

$$(V\Phi)(x, 0) = \frac{1}{B\pi} \left[-(\lambda + 3\mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \int_{-a}^a \frac{\log |x-t|}{\sqrt{a^2-t^2}} dt + (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}} dt \right].$$

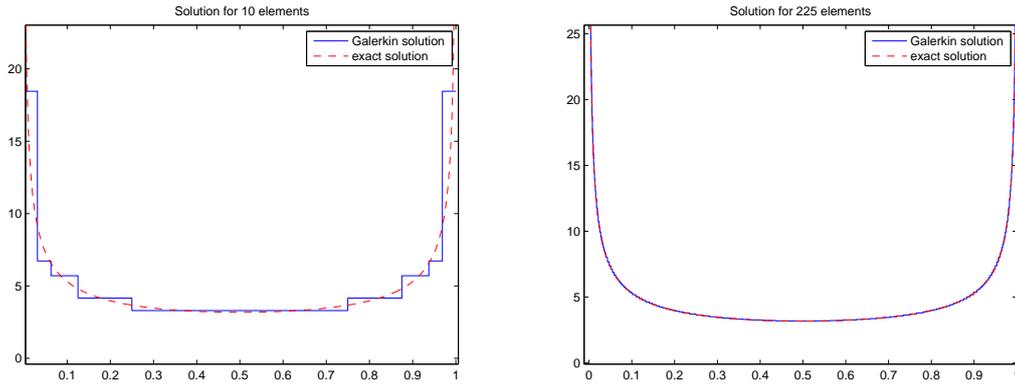


Abbildung 7.13: BEM auf dem Schlitz mit Residualschätzer: Bogenlängen-Plots der Galerkin-Lösung Φ_ℓ^1 und der exakten Lösung ϕ^1 nach 10 (links) und 225 Elementen (rechts).

Mit der Substitution $t = at'$ erhalten wir zunächst

$$\int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - (t')^2}} dt' = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi.$$

Mit derselben Substitution, $x = ax'$ und (i) sehen wir weiters

$$\int_{-a}^a \frac{\log|x-t|}{\sqrt{a^2-t^2}} dt = \int_{-1}^1 \frac{\log a}{\sqrt{1-(t')^2}} dt' + \int_{-1}^1 \frac{\log|x'-t'|}{\sqrt{1-(t')^2}} dt' = \pi \log a - \pi \log 2.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$(V\Phi)(x, 0) = \frac{1}{B\pi} \left[-(\lambda + 3\mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pi \log \frac{a}{2} + (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \pi \right].$$

Da sich π wegekürzt, liefert dies die Behauptung. □

In unserem speziellen Fall mit $\mu = \lambda = 1$ und $a = 0.5$ ist die exakte Lösung von

$$(V\phi)(x, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x, 0) \in \Gamma$$

also tatsächlich durch (7.1) gegeben, mit der Konstanten

$$A = \frac{6}{4 \log 2 + 1}.$$

Zur numerischen Verifikation zeigen wir in Abbildung 7.13 zwei Bogenlängen-Plots, welche ϕ^1 mit der diskreten Approximation Φ_ℓ^1 vergleichen.

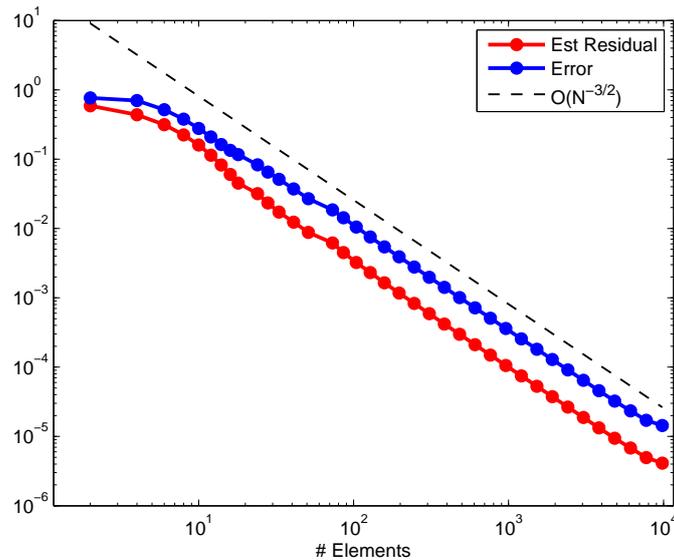


Abbildung 7.14: BEM auf dem Schlitz mit Residualschätzer: Konvergenzplot für $\theta = 0.8$, $\eta = 10^{-7}$

Schlussendlich gelang es uns doch, die in der Aufstellung der Galerkin-Matrix \mathbf{V} involvierten Parameter so einzustellen, dass der adaptive Algorithmus stabil bis knapp $N = 10000$ lief. Der dazugehörige Plot befindet sich in Abbildung 7.14. Den entscheidenden Unterschied hat gemacht, dass wir erstens die Anzahl der benutzten Gauß-Knoten beim semi-analytischen Rechnen von 2 auf 4 erhöht haben, und zweitens den Admissibilitätsparameter η von 10^{-5} auf 10^{-7} verringert haben, also noch mehr Elemente rein analytisch berechnen als bisher.

Das Problem ist damit auch schon relativ gut umkreist: Auf stark adaptierten Netzen liegen Elemente, die einen sehr großen Abstand relativ zu ihrer Größe haben, gegebenfalls trotzdem sehr nah beieinander, was dazu führt, dass die Genauigkeit der Gauß-Quadratur leidet, da sich der Integrand in der Nähe einer Singularität befindet. Eine Möglichkeit, die Stabilität weiter zu verbessern ohne den Rechenaufwand in die Höhe schießen lassen, wäre vermutlich, die Anzahl der Gauß-Knoten dynamisch an die Nähe der beiden Elemente zueinander anzupassen, d.h. die Anzahl für nahe beieinander liegende Elemente deutlich zu steigern.

Den Admissibilitätsparameter noch kleiner zu machen ist leider keine Option, da sich ab $\eta \leq 10^{-8}$ die Rundungsfehler aufgrund von Differenzbildung bemerkbar machen, welche beim rein analytischen Rechnen auftreten. Für $\eta = 10^{-9}$ und allen anderen Parametern genau wie in Abbildung 7.14 lässt sich ein drastischer Zusammenbruch der Stabilität bereits bei $N \approx 1000$ beobachten!

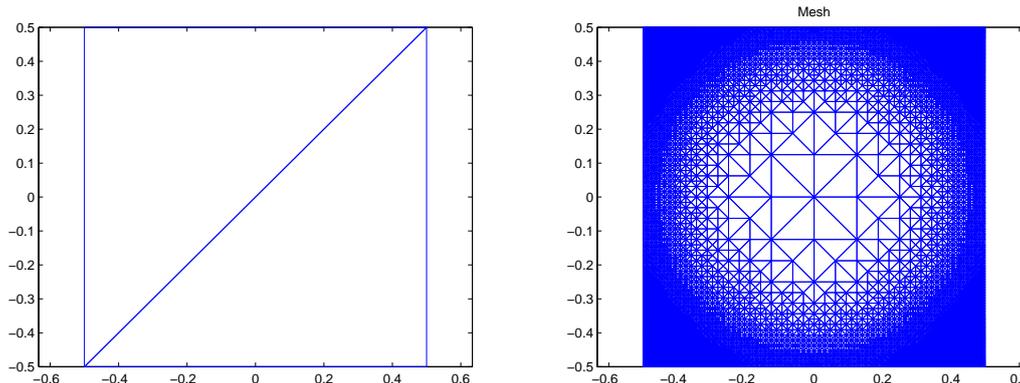


Abbildung 7.15: Quadratisches Gebiet. Links: Startgitter, rechts: verfeinertes Gitter mit etwa 35000 Elementen

7.3 Ergebnisse für FEM-BEM-Kopplung

7.3.1 Glattes Problem auf dem Quadrat

Wir testen nun unsere Implementierung der FEM-BEM-Kopplung. Zum Aufwärmen betrachten wir ein glattes Problem. Als Gebiet wählen wir das Quadrat $\Omega = [-0.5, 0.5]^2$ und als Lösung des Transmissionsproblems

$$\mathbf{u}^{\text{int}}(x, y) = e^{2\pi(x+iy)^8}, \quad \mathbf{u}^{\text{ext}}(x, y) = \frac{1}{x - iy}$$

mit der üblichen Identifikation $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Man beachte, dass \mathbf{u}^{ext} eine konjugiert analytische Funktion auf Ω' ist, die die Abklingbedingung erfüllt. Die Lamé-Parameter wählen wir wieder als $\mu^{\text{int}} = \lambda^{\text{int}} = \mu^{\text{ext}} = \lambda^{\text{ext}} = 1$. Das Gebiet mit dem Start-Gitter und einem adaptiv verfeinerten Gitter ist in Abbildung 7.15 zu sehen. 3D Plots der inneren Lösung $\mathbf{u} := \mathbf{u}^{\text{int}}$ und der rechten Seite $\mathbf{f} = \mathcal{L}\mathbf{u}$ auf einem gleichmäßigen Gitter mit 8192 Elementen zeigt Abbildung 7.16. Optisch sieht \mathbf{f} ähnlich aus wie \mathbf{u} , weist aber wesentlich breiter gestreute Funktionswerte auf.

Wir werfen nun den adaptiven Algorithmus an und sehen uns ein paar Bilder der Galerkin-Lösungen $(\mathbf{u}_\ell, \phi_\ell)$ an. Abbildung 7.17 zeigt \mathbf{u}_ℓ nach 128 (oben) und 1094 (unten) Elementen. Die Konvergenz gegen die exakte Lösung ist relativ gut zu sehen. Die approximative äußere Konormalenableitung ϕ_ℓ zusammen mit dem exakten ϕ ist auf Abbildung 7.18 zu sehen, ebenfalls nach 1094 (Volums-)Elementen. Die Anzahl der Randelemente auf diesem Bild ist 120.

Als nächstes betrachten wir Konvergenzgraphen. In Abbildung 7.19 sehen wir links die Ergebnisse uniformer Verfeinerung und rechts jene des adaptiven Algorithmus mit $\theta = 0.5$. Gerechnet wurde uniform bis zu etwa $N := \#\mathcal{T}_\ell = 524000$, adaptiv bis etwa $N = 407000$.

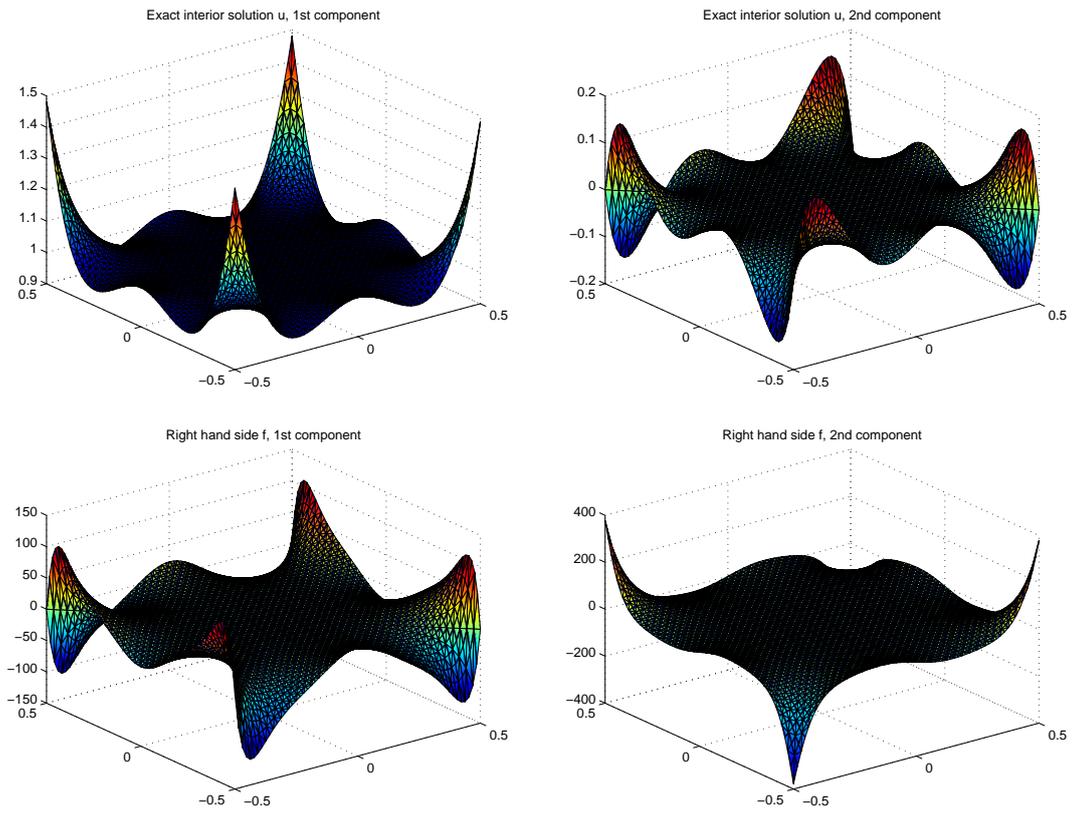


Abbildung 7.16: FEM-BEM-Kopplung auf dem Quadrat $\Omega = [-0.5, 0.5]^2$. Oben: exakte Lösung $\mathbf{u}(x, y) = e^{2\pi(x+iy)^8}$. Unten: $\mathbf{f} = \mathcal{L}\mathbf{u}$

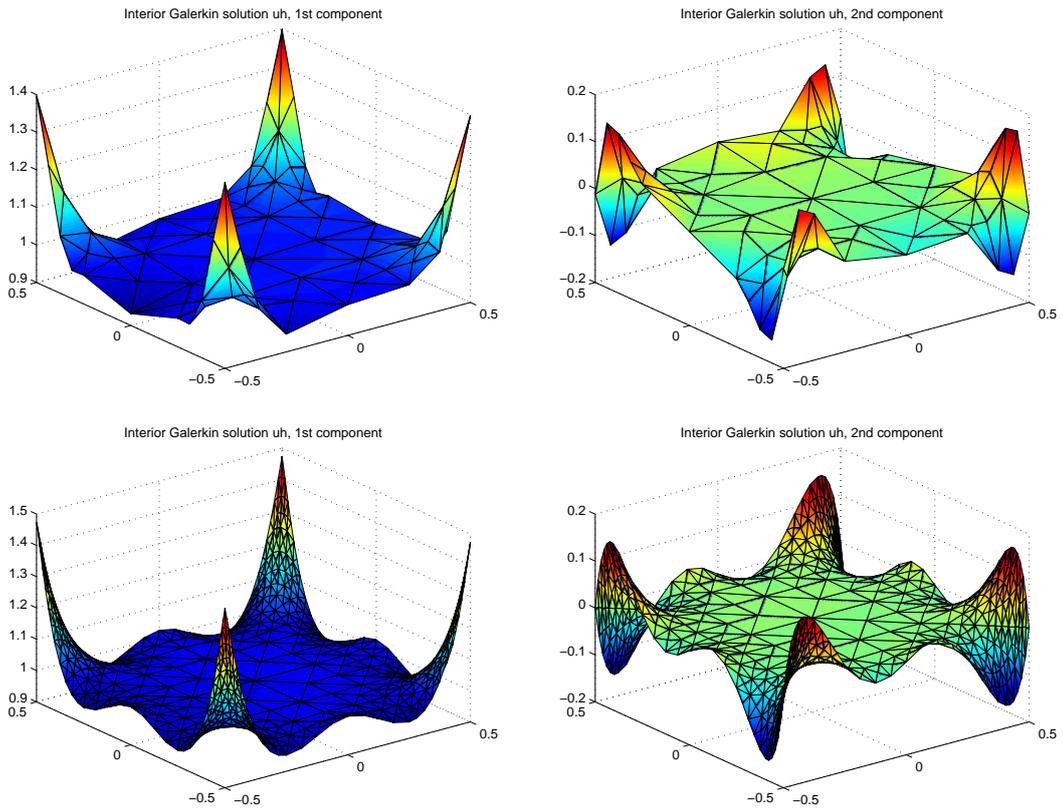


Abbildung 7.17: FEM-BEM-Kopplung auf dem Quadrat $\Omega = [-0.5, 0.5]^2$. Galerkin-Lösung u_ℓ nach 128 Elementen (oben) bzw. 1094 Elementen (unten).

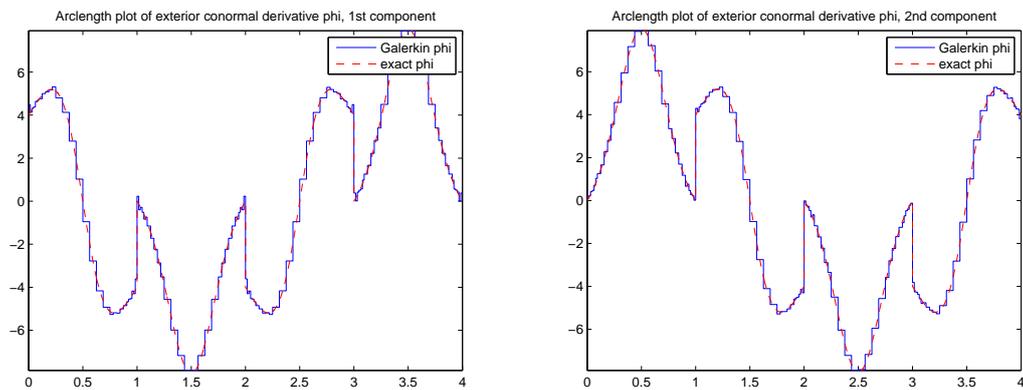


Abbildung 7.18: FEM-BEM-Kopplung auf dem Quadrat. Bogenlängen-Plots von ϕ_ℓ und ϕ nach 120 Randelementen.

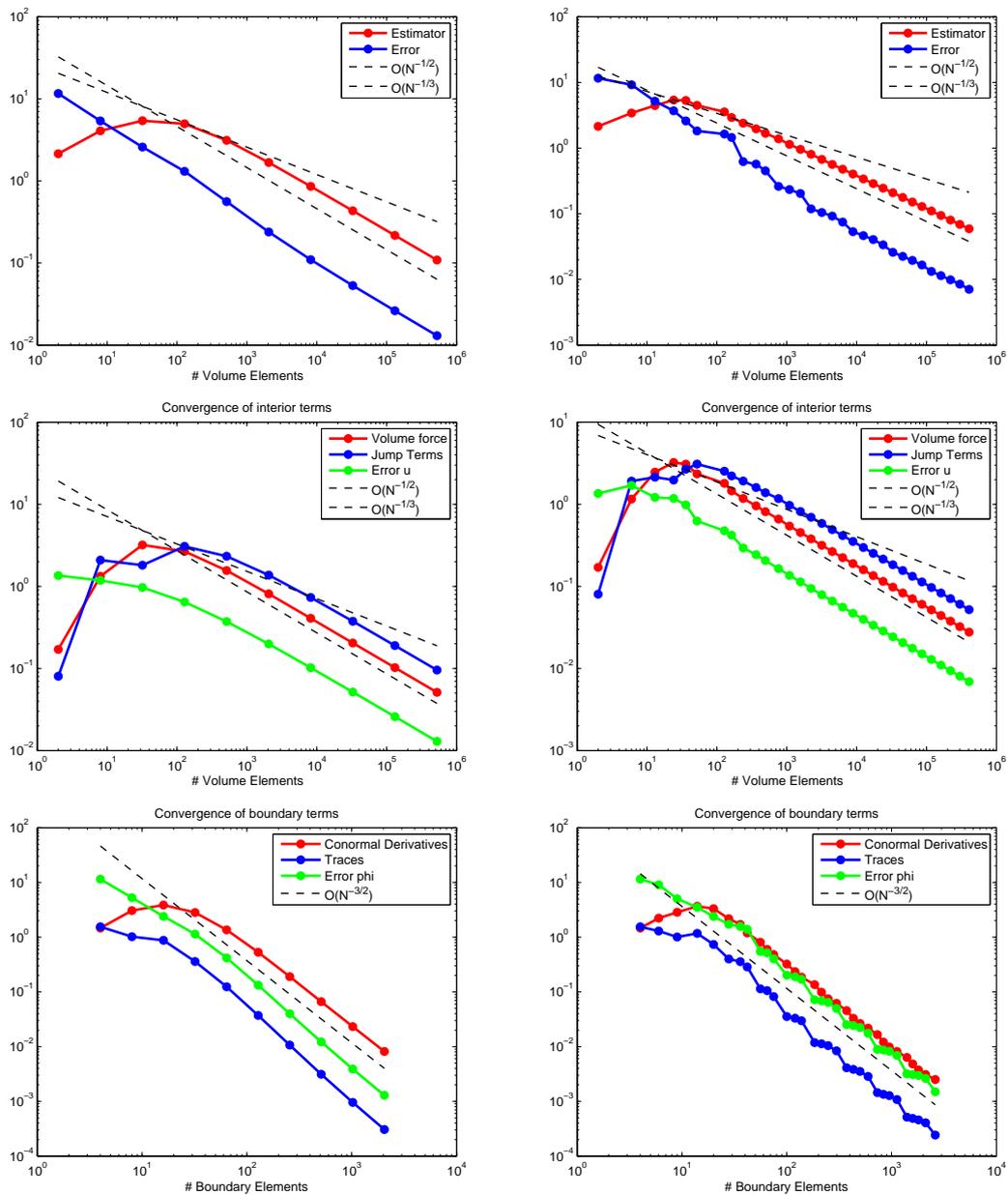


Abbildung 7.19: FEM-BEM-Kopplung auf dem Quadrat, Fehlerschätzer und obere Fehlerschranke. Links: uniform, rechts: adaptiv. Oben: alle Beiträge. Mitte: nur Beiträge im Inneren. Unten: nur Beiträge auf dem Rand.

In der oberen Zeile von Abbildung 7.19 sind zunächst der gesamte Fehlerschätzer $\eta(\mathcal{T}_\ell \cup \mathcal{E}_\ell)$ sowie die obere Fehlerschranke

$$\text{err}_\ell^{\text{FB}} = (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|h_{\ell,E}^{1/2}(\phi - \phi_\ell)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2)^{1/2}$$

eingezeichnet. Wie wir sehen können, erreichen beide Verfahren die Konvergenzrate von $O(N^{-1/2})$, was zu erwarten war, da die vorgegebenen Lösungen des Transmissionsproblems glatt sind. Trotzdem war bei näherem Hinsehen zu beobachten, dass das adaptive Verfahren die Daten deutlich schneller auflöst. Beispielsweise wurde eine Toleranzgrenze von $\text{err}_\ell^{\text{FB}} \leq 0.1$ adaptiv bereits nach etwa 4500 Elementen und 1.6 Sekunden erreicht, uniform erst nach etwa 32800 Elementen und 3.8 Sekunden (obwohl wir für uniform natürlich die Zeit für den Fehlerschätzer und mehrmaliges Lösen nicht mitgerechnet haben). In der mittleren Zeile von Abbildung 7.19 vergleichen wir nur die Beiträge von Fehlerschätzer und Fehlerschranke, welche vom Inneren des Gebietes Ω kommen. Der Fehlerschätzer im Inneren lautet

$$\eta(\mathcal{T}_\ell)^2 = \|h_\ell f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|h_{\ell,E}^{1/2}[\gamma_1 \mathbf{u}_\ell]\|_{\mathbf{L}^2(\cup \mathcal{E}_\ell^\Omega)}^2.$$

Den ersten Term haben wir unter dem Namen „Volume force“ eingezeichnet, den zweiten Term unter dem Namen „Jump Terms“. Wie zu sehen ist, verhalten sich die beiden Terme ähnlich. Ebenfalls zu sehen ist der Fehler der Lösung im Inneren, $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$, eingezeichnet als „Error u“. Es ist auffällig, dass der Fehlerschätzer $\eta(\mathcal{T}_\ell)$ den eigentlichen Fehler hier deutlich überschätzt.

In der untersten Zeile sehen wir nur die Beiträge auf dem Rand, diesmal nicht gegen die Anzahl der Volumenelemente geplottet, sondern gegen die Anzahl der Randelemente $\#\mathcal{E}_\ell$. Der Fehlerschätzer lautet hier

$$\eta(\mathcal{E}_\ell)^2 = \|h_{\ell,E}^{1/2}(\phi_\ell - \gamma_1 \mathbf{u}_\ell + \phi_0)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 + \|h_{\ell,E}^{1/2} \nabla_\Gamma \left(\left(\frac{1}{2} - K\right) \mathbf{u}_\ell + V \phi_\ell - \left(\frac{1}{2} - K\right) \mathbf{u}_0 \right)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2.$$

Den ersten Term haben wir „Conormal Derivatives“ getauft, den zweiten „Traces“. Außerdem wurde die Fehlerschranke für die äußere Konormalenableitung $\|h_{\ell,E}^{1/2}(\phi - \phi_\ell)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$ geplottet, unter dem Namen „Error phi“. Bemerkenswert ist, dass alle drei Randterme mit der schnelleren Konvergenzrate $O(\#\mathcal{E}_\ell^{-3/2})$ fallen, die wir auch schon von den BEM-Experimenten kennen.

7.3.2 L-Shape

Für unser zweites Beispiel betrachten wir wieder das L-förmige Gebiet skaliert mit dem Faktor $\alpha := 0.3$, siehe Abbildung 7.20. Die Lamé-Parameter setzen wir wie zuvor alle gleich 1. Als Lösungen des Transmissionsproblems wählen wir

$$\mathbf{u}^{\text{int}}(x, y) = (x - iy)^{2/3} + x^2 + y^2, \quad \mathbf{u}^{\text{ext}}(x, y) = \frac{1}{5} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + (x - iy)^2}.$$

Den ersten Term $(x - iy)^{2/3}$ von $\mathbf{u} := \mathbf{u}^{\text{int}}$ hatten wir bereits im BEM-Beispiel. Er bewirkt eine Singularität der Lösung bei 0. Der zweite Term $x^2 + y^2$ wurde gewählt, um

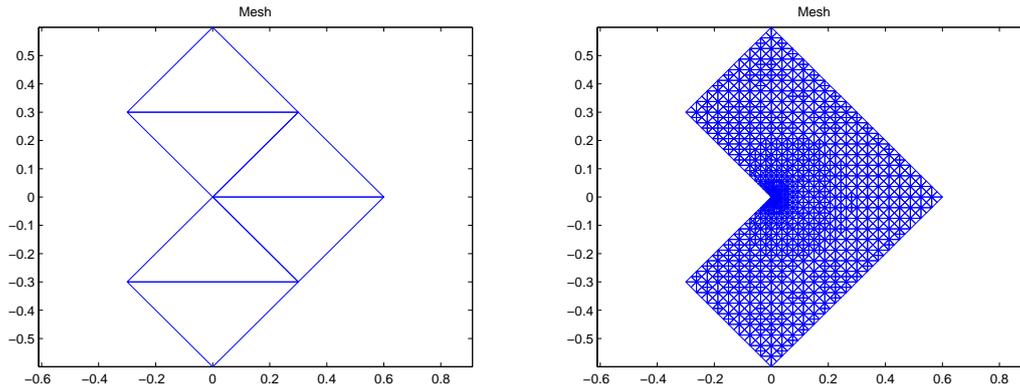


Abbildung 7.20: L-Shape. Links: Startgitter, rechts: verfeinertes Gitter mit etwa 2600 Elementen.

eine nicht-triviale rechte Seite zu erhalten: Es gilt $\mathbf{f} := \mathcal{L}\mathbf{u} = (-8, 0)^T$. Die konjugiert meromorphe Funktion \mathbf{u}^{ext} hat ihre beiden Singularitäten bei $\pm i\alpha \in \Omega$ und ist daher eine Lösung von $\mathcal{L}'\mathbf{u}^{\text{ext}} = 0$ im Außenraum.

Wir verzichten diesmal auf Plots der Lösungen und betrachten nur die Konvergenzraten. Abbildung 7.21 ist genauso angeordnet wie Abbildung 7.19: links uniform, rechts adaptiv, oben alle Terme, in der Mitte nur die Terme im Inneren und unten nur die Randterme. Wir haben wieder bis etwa einer halben Million (Volums-)Elemente gerechnet.

Wie zu erwarten war, kann uniforme Verfeinerung diesmal nicht mithalten: Der Fehler ebenso wie der Fehlerschätzer fallen mit der abgeschwächten Rate $O(N^{-1/3})$. Von den Termen im Inneren fällt nur $\|h_\ell \mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ mit $O(N^{-1/2})$, was klar ist, da \mathbf{f} konstant ist und die Beziehung $h_\ell^2 N \simeq |\Omega|$ gilt. Die Randterme fallen allesamt mit der abgeschwächten Rate $O(\#\mathcal{E}_\ell^{-2/3})$, die wir bereits im BEM-Beispiel auf dem L-Shape beobachtet haben.

Adaptive Verfeinerung mit $\theta = 0.5$ hingegen erreicht auch hier wieder die optimalen Konvergenzraten $O(N^{-1/2})$ bzw. $O(\#\mathcal{E}_\ell^{-3/2})$ auf dem Rand.

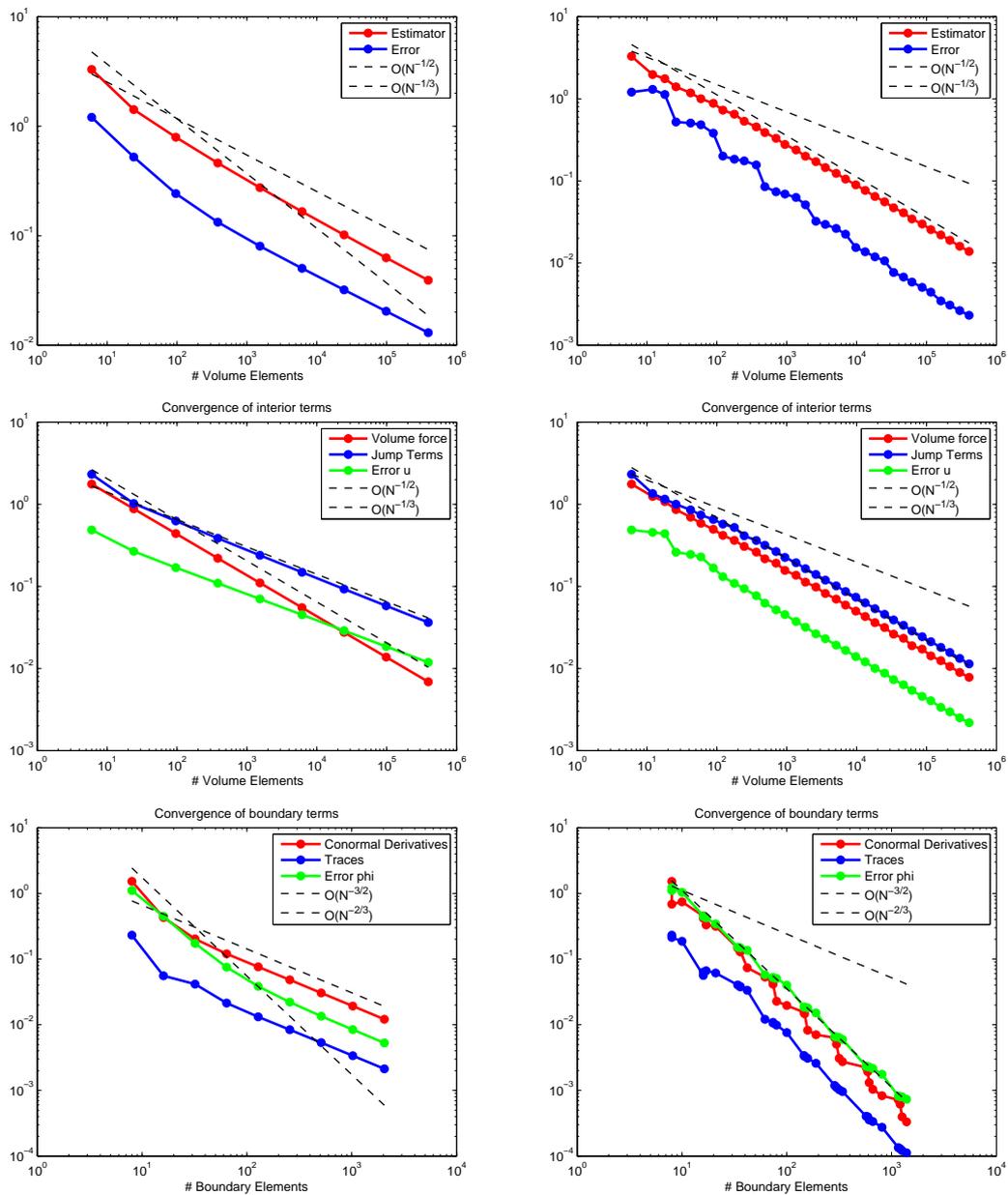


Abbildung 7.21: FEM-BEM-Kopplung auf dem L-Shape, Fehlerschätzer und obere Fehlerschranke. Links: uniform, rechts: adaptiv. Oben: alle Beiträge. Mitte: nur Beiträge im Inneren. Unten: nur Beiträge auf dem Rand.

Literatur

- [ACF99] Jochen Albery, Carsten Carstensen, and Stefan A. Funken, *Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation*, Numer. Algorithms **20** (1999), no. 2-3, 117–137. MR 1709562
- [ACFK02] J. Albery, C. Carstensen, S. A. Funken, and R. Klose, *Matlab implementation of the finite element method in elasticity*, Computing **69** (2002), no. 3, 239–263 (English).
- [AEF⁺13] Markus Aurada, Michael Ebner, Michael Feischl, Samuel Ferraz-Leite, Thomas Führer, Petra Goldenits, Michael Karkulik, Markus Mayr, and Dirk Praetorius, *HILBERT – a MATLAB implementation of adaptive 2D-BEM*, Numerical Algorithms (2013), 1–32 (English).
- [AFF⁺13] Markus Aurada, Michael Feischl, Thomas Führer, Michael Karkulik, Jens Markus Melenk, and Dirk Praetorius, *Classical FEM-BEM coupling methods: nonlinearities, well-posedness, and adaptivity*, Comput. Mech. **51** (2013), no. 4, 399–419. MR 3038165
- [AFKP12] M. Aurada, M. Feischl, M. Karkulik, and D. Praetorius, *A posteriori error estimates for the Johnson-Nédélec FEM-BEM coupling*, Eng. Anal. Bound. Elem. **36** (2012), no. 2, 255–266. MR 2847121
- [AMT99] Mark Ainsworth, William McLean, and Thanh Tran, *The conditioning of boundary element equations on locally refined meshes and preconditioning by diagonal scaling*, SIAM J. Numer. Anal. **36** (1999), no. 6, 1901–1932 (electronic). MR 1712149 (2001d:65063)
- [BG01] Annalisa Buffa and Giuseppe Geymonat, *On traces of functions in $W^{2,p}(\Omega)$ for Lipschitz domains in \mathbb{R}^3* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001), no. 8, 699–704. MR 1843191 (2002d:46031)
- [BL76] Jöran Bergh and Jörgen Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1976, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. MR 0482275 (58 #2349)
- [Bro12] L.E.J. Brouwer, *Beweis der invarianz des n -dimensionalen gebiets.*, Mathematische Annalen **71** (1912), 305–313 (ger).
- [Car97] Carsten Carstensen, *An a posteriori error estimate for a first-kind integral equation*, Math. Comp. **66** (1997), no. 217, 139–155. MR 1372001 (97e:65147)
- [CFPP14] C. Carstensen, M. Feischl, M. Page, and D. Praetorius, *Axioms of adaptivity*, Computers & Mathematics with Applications **67** (2014), no. 6, 1195 – 1253.
- [CFS97] C. Carstensen, S. A. Funken, and E. P. Stephan, *On the adaptive coupling of FEM and BEM in 2-d-elasticity*, Numer. Math. **77** (1997), no. 2, 187–221. MR 1464660 (99d:73087)

- [CMS01] C. Carstensen, M. Maischak, and E. P. Stephan, *A posteriori error estimate and h -adaptive algorithm on surfaces for Symm's integral equation*, Numer. Math. **90** (2001), no. 2, 197–213. MR 1872725 (2002j:65135)
- [CS90] Martin Costabel and Ernst P. Stephan, *Coupling of finite and boundary element methods for an elastoplastic interface problem*, SIAM J. Numer. Anal. **27** (1990), no. 5, 1212–1226. MR 1061127 (92c:65125)
- [EG92] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. MR 1158660 (93f:28001)
- [Eva98] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. MR 1625845 (99e:35001)
- [Fae00] Birgit Faermann, *Localization of the Aronszajn-Slobodeckij norm and application to adaptive boundary element methods. I. The two-dimensional case*, IMA J. Numer. Anal. **20** (2000), no. 2, 203–234. MR 1752263 (2001e:65192)
- [Fae02] ———, *Localization of the Aronszajn-Slobodeckij norm and application to adaptive boundary element methods. II. The three-dimensional case*, Numer. Math. **92** (2002), no. 3, 467–499. MR 1930387 (2003i:65120)
- [Fed69] Herbert Federer, *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. MR 0257325 (41 #1976)
- [Fei10] Michael Feischl, *Different strategies for the adaptive FEM-BEM-coupling*, Bachelorarbeit, Technische Universität Wien, Wien, 2010.
- [FFKP12] Michael Feischl, Thomas Führer, Michael Karkulik, and Dirk Praetorius, *Stability of symmetric and nonsymmetric fem-bem couplings for nonlinear elasticity problems*, ASC Report 52/2012, Vienna University of Technology, Wien, 2012, pp. 1–23.
- [FFME⁺14] Michael Feischl, Thomas Führer, Gregor Mitscha-Eibl, Dirk Praetorius, and Ernst P. Stephan, *Convergence of adaptive BEM and adaptive FEM-BEM coupling for estimators without h -weighting factor*, Comput. Methods Appl. Math. **14** (2014), no. 4, 485–508.
- [FKMP13] M. Feischl, M. Karkulik, J. M. Melenk, and D. Praetorius, *Quasi-optimal convergence rate for an adaptive boundary element method*, SIAM Journal on Numerical Analysis **51** (2013), no. 2, 1327–1348.
- [FLP08] S. Ferraz-Leite and D. Praetorius, *Simple a posteriori error estimators for the h -version of the boundary element method*, Computing **83** (2008), no. 4, 135–162. MR 2529605 (2010e:65226)
- [FPW11] Stefan Funken, Dirk Praetorius, and Philipp Wissgott, *Efficient implementation of adaptive $P1$ -FEM in Matlab*, Comput. Methods Appl. Math. **11** (2011), no. 4, 460–490. MR 2875100
- [GHS05] I. G. Graham, W. Hackbusch, and S. A. Sauter, *Finite elements on dege-*

- nerate meshes: inverse-type inequalities and applications*, IMA J. Numer. Anal. **25** (2005), no. 2, 379–407. MR 2126208 (2006b:65183)
- [GHS12] Gabriel N. Gatica, George C. Hsiao, and Francisco-Javier Sayas, *Relaxing the hypotheses of Bielak-MacCamy's BEM-FEM coupling*, Numer. Math. **120** (2012), no. 3, 465–487. MR 2890297
- [GM08] Fritz Gesztesy and Marius Mitrea, *Generalized Robin boundary conditions, Robin-to-Dirichlet maps, and Krein-type resolvent formulas for Schrödinger operators on bounded Lipschitz domains*, Perspectives in partial differential equations, harmonic analysis and applications, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 79, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 105–173. MR 2500491 (2010k:35087)
- [GMMM11] F. Gesztesy, I. Mitrea, D. Mitrea, and M. Mitrea, *On the nature of the Laplace-Beltrami operator on Lipschitz manifolds*, J. Math. Sci. (N. Y.) **172** (2011), no. 3, 279–346, Problems in mathematical analysis. No. 52. MR 2839866
- [Gri85] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 24, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985. MR 775683 (86m:35044)
- [Heu14] Norbert Heuer, *On the equivalence of fractional-order Sobolev semi-norms*, J. Math. Anal. Appl. **417** (2014), no. 2, 505–518. MR 3194499
- [HMT10] Steve Hofmann, Marius Mitrea, and Michael Taylor, *Singular integrals and elliptic boundary problems on regular Semmes-Kenig-Toro domains*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2010), no. 14, 2567–2865. MR 2669659 (2011h:42021)
- [HW08] George C. Hsiao and Wolfgang L. Wendland, *Boundary integral equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 164, Springer-Verlag, Berlin, 2008. MR 2441884 (2009i:45001)
- [Kar12] Michael Karkulik, *Zur Konvergenz und Quasi-Optimalität adaptiver Rand-elementmethoden*, Dissertation, Technische Universität Wien, Wien, 2012.
- [LL59] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of elasticity*, Course of Theoretical Physics, Vol. 7. Translated by J. B. Sykes and W. H. Reid, Pergamon Press, London-Paris-Frankfurt; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1959. MR 0106584 (21 #5315)
- [McL00] William McLean, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. MR 1742312 (2001a:35051)
- [NH80] Jindrich Necas and Ivan Hlaváček, *Mathematical theory of elastic and elastoplastic bodies: an introduction*, Studies in Applied Mechanics, vol. 3, Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980. MR 600655 (82h:73002)
- [PW60] L. E. Payne and H. F. Weinberger, *An optimal Poincaré inequality for convex domains*, Arch. Rational Mech. Anal. **5** (1960), 286–292 (1960). MR 0117419 (22 #8198)

- [Rud91] Walter Rudin, *Functional analysis*, second ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991. MR 1157815 (92k:46001)
- [Say09] Francisco-Javier Sayas, *The validity of Johnson-Nédélec's BEM-FEM coupling on polygonal interfaces*, SIAM J. Numer. Anal. **47** (2009), no. 5, 3451–3463. MR 2551202 (2010m:65293)
- [Ste08] Olaf Steinbach, *Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems*, Springer, New York, 2008, Finite and boundary elements, Translated from the 2003 German original. MR 2361676 (2008i:65271)
- [Ste13] ———, *On the stability of the non-symmetric BEM/FEM coupling in linear elasticity*, Comput. Mech. **51** (2013), no. 4, 421–430. MR 3038166
- [Tay96] Michael E. Taylor, *Partial differential equations*, Texts in Applied Mathematics, vol. 23, Springer-Verlag, New York, 1996, Basic theory. MR 1395147 (98b:35002a)
- [Tri95] Hans Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, second ed., Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, 1995. MR 1328645 (96f:46001)