Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

Magnesium und eine Finite-Elemente Simulation zum lasergestützten Umformen der Knetlegierung AZ31

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

im Rahmen des Studiums

Wirtschaftsingenieurwesen-Maschinenbau

eingereicht von

Dieter Pflanzer
Matrikelnummer 0326247

an der
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften der Technischen Universität Wien
Institut für Fertigungstechnik und Hochleistungslasertechnik

Betreuung: Ao. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Gerhard Liedl

Wien, im August 2013

(Unterschrift Verfasser) (Unterschrift Betreuung)

Erklärung zur Verfassung der Arbeit

Dieter Pflanzer
Belvederegasse 20, 2000 Stockerau

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst habe, dass ich die verwendeten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben habe und dass ich die Stellen der Arbeit – einschließlich Tabellen und Abbildungen –, die anderen Werken oder dem Internet im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Stockerau, im August 2013

(Dieter Pflanzer)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich einige Personen erwähnen, denen ich besonders zu Dank verpflichtet bin.
Mein größter Dank geht an meine Eltern, Doris und Klaus, die mich während meines ganzen Lebens in jeder Hinsicht unermüdlich unterstützt haben und immer für mich da waren.
Desweiteren möchte ich mich bei meiner Stiefmutter, Susanne, für die Unterstützung in all den letzten Jahren bedanken. Außerdem gilt mein besonderer Dank Andreas, sowohl für die schöne gemeinsame Studienzeit, als auch die hervorragende Zusammenarbeit und gegenseitige Motivation. Weiters danke ich vorallem Christian für die zahlreichen inspirierenden Gespräche und die Unterstützung in allen Lebenslagen, sowie Iris für das Korrekturlesen dieser Arbeit.
Ebenfalls möchte ich mich herzlichst bei Professor Liedl für die hervorragende, stetige Unterstützung während der gesamten Arbeit bedanken. Eine derartig engagierte, sowie fachkundige und unkomplizierte Betreuung kann man sich nur wünschen. Zusätzlich danke ich dem gesamten Team des Instituts für Umform- und Hochleistungslasertechnik für das kooperative und freundliche Arbeitsklima und im Speziellen Robert Bielak und Thomas Schumi für die konstruktiven Anregungen und Ratschläge.

Kurzfassung

Magnesiumlegierungen zählen zu den leichtesten Konstruktionswerkstoffe und weisen gleichzeitig eine hohe Festigkeit auf. Aufgrund des spröden Verhaltens gestaltet sich jedoch eine Umformung schwierig, wodurch der Anwendungsbereich derzeit noch relativ eingeschränkt ist. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher eine effiziente Methode zur Umformung spröder Werkstoff untersucht.
Es wurde eine Finite-Elemente Simulation des laserunterstützten Biegens der Magnesiumknetlegierung AZ31 erstellt. Mit Hilfe der FE-Software *Abaqus* wurde ein realer Versuchsstand, welcher im Labor für Laser- und Umformtechnik der Technischen Universität Wien entwickelt wurde, abgebildet. In dieser 3-Punkt-Biegeanlage wird das Werkstück an der Biegekante mit Diodenlaser erwärmt, um die Umformbarkeit zu erhöhen. Die FE-Analyse beinhaltet somit nicht nur den Umformvorgang an sich, sondern auch das Einbringen einer Wärmeleistung in das Werkstück.
Im Anschluss an eine Literaturrecherche zu Magnesium, in der die Herstellung, sowie die Eigenschaften und Umformbarkeit näher erläutert werden, wird die Simulation bzw. die Programmeinstellungen dokumentiert und die Ergebnisse mit denen einer konventionellen Umformung gegenüber gestellt. Hierzu wurden vier verschiedene Biegewinkel, jeweils mit und ohne Lasererwärmung simuliert. Die Resultate werden hinsichtlich der auftretenden Spannungen und Dehnungen, als auch im Bezug auf das Rückfederungsverhalten verglichen.
Die Ergebnisse zeigen, dass sich der Biegewinkel um rund 30° erhöhen lässt und das Rückfederungsverhalten wesentlich verbessert werden konnte.

Abstract

Magnesium alloys are among the lightest construction metals and exhibit a high strength at the same time. However, its brittleness leads to difficulties in forming, thus, its application area is rather limited. Therefore an efficient method for forming brittle metals is examined within the course of this work.
A finite element simulation for the laser assisted bending of the magnesium alloy AZ31 has been conducted. Based on a real experimental rig, which was developed at the Laser- und Umformtechnik laboratory at the University of Technology, Vienna. Thereby the workpiece is heated at the bending edge, to increase the poor formability. In this 3-point-bending machine heating will be achieved with diode lasers. Hence, the FE-analysis contains not only the forming process but also models the heat capacity which is brought into the workpiece.
Subsequent to a literature research about Magnesium, wherein the production as well as its properties and the formability is explained in more detail, the simulation respectively the program settings are documented and the results are compared to conventional methods of forming. Therefore four different bending angles, each with and without laser assistance were simulated. The results are compared with respect to the occurrent stresses and strains and in matters of the springback behavior.
The results reveal, that the bending angle can be increased by about 30° and the springback behavior improved significantly.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Magnesium und seine Legierungen **3**

2.1 Einleitung . . . 3
2.2 Historie des Werkstoffes Magnesium . . . 4
2.3 Metallurgie des Magnesiums . . . 6
2.3.1 Rohstoffe . . . 7
2.3.2 Gewinnung . . . 9
2.3.2.1 Elektrolyse von geschmolzenen Magnesiumsalzen . . . 9
2.3.2.2 Thermochemische Gewinnung . . . 11
2.3.3 Verarbeitung . . . 13
2.4 Eigenschaften von Magnesium . . . 15
2.4.1 Chemische Eigenschaften . . . 15
2.4.2 Physikalische Eigenschaften . . . 16
2.4.3 Mechanische Eigenschaften . . . 17
2.5 Kristallstruktur . . . 18
2.6 Umformen von Magnesium . . . 20
2.6.1 Verformungsverhalten bei niedrigen Temperaturen ($< 225°$ C) . . . 21
2.6.2 Zwillingsbildung . . . 23
2.6.3 Verformungsverhalten bei hohen Temperaturen ($> 225°$ C) . . . 25
2.6.4 Verformungsverhalten bei punktueller Laser-Wärmeeinwirkung . . . 27
2.6.5 Kristallographische Textur . . . 28
2.7 Magnesiumbasislegierungen . . . 30
2.7.1 Nomenklatur . . . 30
2.7.2 Legierungselemente und deren Einfluss . . . 32
2.7.3 Legierungen in der Praxis . . . 34

3 Finite Elemente Methoden **37**
3.1 Einleitung . . . 37
3.2 Prinzip und Vorgehensweise einer FE-Analyse . . . 38
3.3 Elastizitätstheorie . . . 40
3.3.1 Deformationen . . . 40
3.3.2 Verzerrungen . . . 42
3.3.3 Spannungen . . . 43
3.3.4 Grundgleichungen . . . 46
3.4 Variationsprinzipien . . . 48
3.4.1 Das Prinzip der virtuellen Verschiebung . . . 49
3.4.2 Das Prinzip der virtuellen Arbeit . . . 50
3.4.3 Das Prinzip vom stationären Wert des Potentials . . . 51
3.4.4 Zusammenfassende Bemerkungen . . . 51
3.5 Das Verfahren von Ritz . . . 52
3.6 Das Verfahren von Galerkin . . . 53
3.7 Die Steifigkeitsmatrix . . . 54
3.7.1 Elementsteifigkeitsmatrix . . . 54
3.7.2 Gesamtsteifigkeitsmatrix . . . 55
3.8 Nichtlineare FE-Analyse . . . 57
3.8.1 Ursachen der Nichtlinearität . . . 57
3.8.2 Lösungsmethoden/-unterschiede nichtlinearer Probleme . . . 60
3.9 Thermische FE-Analyse . . . 62
3.10 FE-Analyse in der Praxis . . . 64

4 Versuchsaufbau/FE-Modell **67**
4.1 Realer Versuchsstand . . . 67
4.2 FE-Modell . . . 68
4.2.1 Geometrie & Meshing . . . 68
4.2.2 Simulationsaufbau/Load-Steps . . . 71
4.2.3 Materialdaten . . . 76

5 Simulationsergebnisse **79**
5.1 Temperatur . . . 80
5.1.1 Temperaturverteilung . . . 80

5.1.2 Einfluss der Temperatur auf die Konvergenz der Lösung bei höheren Umformgraden 81
5.2 Spannungen 83
5.2.1 Vergleich zwischen laserunterstütztem und konventionellem Biegen . 83
5.2.2 Spannungsverteilung im Werkstück 88
5.3 Dehnungen 91
5.4 Rückfederung 93

6 Zusammenfassung und Ausblick 95

Abbildungsverzeichnis 97

Tabellenverzeichnis 101

Literaturverzeichnis 103

Kapitel 1

Einleitung

Steigende Energiekosten und verschärfte Emissionsgesetze führen gerade in der Automobilindustrie zum Einsatz immer leichterer Werkstoffe. Dadurch können die bewegten Massen reduziert und der Kraftstoffverbrauch gesenkt werden. Diese Beweggründe führen aber auch in anderen Industriezweigen zum verstärkten Interesse an Leichtbaukonstruktionen, welche einerseits konstruktiv, durch den Einsatz hochfester Stähle und andererseits stofflich, durch die Verwendung von Materialien mit geringeren Dichten, realisiert werden können [Kra08]. Da Magnesium die leichteste Legierungsbasis unter den Metallen darstellt, wird diesem Werkstoff ein besonders hohes Potential für zukünftige Bauteile zugeschrieben [BLM01]. Neben dem geringen spezifischen Gewicht, werden meist jedoch auch hohe Anforderungen an die statische und dynamische Festigkeit gestellt. Diese können vorallem durch die umformtechnisch hergestellten Magnesiumknetlegierungen gut erfüllt werden.
Für die Verarbeitung beziehungsweise den Einsatz solcher Werkstoffe spielt die Umformung eine große Rolle. Aufgrund des spröden Verhaltens, als auch aufgrund des noch vergleichsweise niedrigen Kenntnisstandes stellt dies derzeit jedoch eine große Herausforderung dar. Da Magnesium schlecht umformbar ist, liefern konventionelle Verfahren nur unzufriedenstellende Ergebnisse und führen, selbst bei geringen Biegewinkeln, relativ rasch zu Rissen oder Brüchen im Werkstoff. Das Umformen bei erhöhter Temperatur ergibt wesentlich bessere Resultate, allerdings ist eine großflächige Erwärmung des Werkstückes sehr kostenintensiv und aufwändig und steht somit im Gegensatz zu der Forderung nach effizienten und raschen Fertigungsverfahren. Zusätzlich bringt es möglicherweise auch eine Veränderung der Materialeigenschaften mit sich.
Hier könnte ein innovatives Verfahren Abhilfe verschaffen, bei dem nur an der stark belasteten Zone – der Biegekante – an der die größten Verzerrungen auftreten, erhitzt wird. Im Laber für Laser- und Umformtechnik der Technischen Universität Wien ist hierzu ein spezieller Versuchsstand eingerichtet, bei dem ausschließlich die Biegekante, durch den Einsatz von Diodenlaser, erwärmt wird. Die bisherigen Experimente haben dabei zu sehr guten Ergebnissen geführt. Da die Versuche jedoch zeitintensiv und aufwändig sind, wird im Rahmen dieser Arbeit eine Finite-Elemente Simulation erstellt, um rasch und kosteneffektiv die wichtigsten Umformparameter zu bestimmen und die jeweiligen Ergebnisse zu prognostizieren.

Die vorliegende Abhandlung soll daher einen Beitrag zur Verbesserung zukünftiger Umformverfahren spröder Werkstoffe, im Speziellen Magnesium, liefern. Hierzu wird im ersten Teil der aktuelle Wissensstand über Magnesium und dessen Legierungen, in Bezug auf Gewinnung und Herstellung, sowie Verarbeitung und Eigenschaften – als Ergebnis einer Literaturrecherche – dargelegt. Anschließend wird das Verformungsverhalten bei unterschiedlichen Temperaturen, sowie die mikroskopischen Vorgänge im Rahmen der Umformung näher beleuchtet. Im zweiten Teil werden die theoretischen Ansätze der finiten Elemente und deren praktische Umsetzung, als Basis für die darauffolgende FE-Analyse, beschrieben.
Diese Simulation kann als Grundlage für das Werkstoffverhalten bei mechanischer Umformung unter gleichzeitiger, punktueller Wärmeeinwirkung für verschiedenartiger Materialien herangezogen werden, wird im Konkreten allerdings auf die Magnesiumknetlegierung AZ31 angewandt. In dem analysierten Drei-Punkt-Biegeversuch wird ein Blech mit einer Stärke von 1,6 mm umgeformt.
Im Anschluss an die Dokumentation der Simulationsdurchführung, in der die, in der FE-Software *Abaqus* gewählten Eingaben näher beschrieben werden, werden die Ergebnisse präsentiert und analysiert. Abschließend wird eine Zusammenfassung der Erkenntnisse, sowie ein kurzer Ausblick über mögliche zukünftige Arbeiten beziehungsweise Verbesserungen gegeben.

Kapitel 2

Magnesium und seine Legierungen

2.1 Einleitung

Aufgrund des wachsenden Umweltbewusstseins, hinsichtlich Energieeffizienz und der gebotenen Ressourcenschonung, nimmt der Einsatz von Leichtbaukonstruktionen, wie bereits eingangs erwähnt, stetig zu [Kra08].
In diesem Zusammenhang gewannen Leichtbauwerkstoffe in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung. So ist heute Aluminium, nach Stahl, das am häufigsten verwendete Metall [Drö99].
Magnesium hat mit einer Dichte von 1,7 g/cm^3 einen großen Gewichtsvorteil gegenüber Aluminium (ϱ = 2,7g/cm^3) und insbesondere gegenüber Stahl (ϱ = 7,8g/cm^3) [Drö99]. Vorallem das hohe Festigkeits-Gewichts-Verhältnis, also Dehngrenze $R_{p0,2}$ zu Dichte ϱ (spezifische Festigkeit), – höher als das von Aluminiumlegierungen – beschert den Druckgussanwendungen von Magnesiumlegierungen derzeit jährliche Wachstumsraten von 20% [Kle02],[ea05],[BAB04].
Neben den bereits beschriebenen und in Abb. 2.1 illustrierten Vorteilen ist auch die hervorragende Zerspan- und Schweißbarkeit, sowie gute Dämpfungseigenschaften und vorallem die hohe Verfügbarkeit (2% der Erdrinde) zu nennen. Zusätzlich besitzen Magnesiumlegierungen, im Vergleich zu ähnlich leichten Polymerwerkstoffen, eine höhere thermische und elektrische Leitfähigkeit [BLM01].
Demgegenüber steht die unbefriedigende Umformbarkeit und das derzeit vergleichsweise geringe Know-How in der Verarbeitung. Dies führt dazu, dass trotz des Potentials immer wieder auf „konventionelle“ Werkstoffe zurück gegriffen wird [Kra07],[Kai03b].

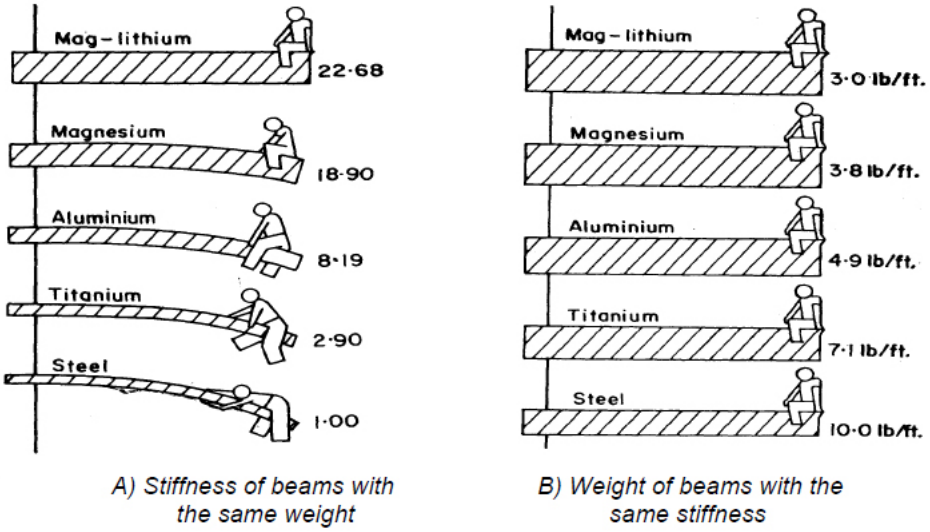


Abb. 2.1: Gegenüberstellung von Balken desselben Gewichtes bzw. derselben Steifigkeit unterschiedlicher Materialien [Bec03]

2.2 Historie des Werkstoffes Magnesium

Über die ursprüngliche Entdeckung des Magnesiums gibt es in der Literatur unterschiedliche Angaben. Beispielsweise schreibt Kainer in [Kai03b] von *„Discovered in 1774 and named after the ancient city Magnesia, ...“*, während laut [uKW71] der Engländer Grew bereits 1695 erkannte, *„dass dem Bittersalz das gleiche Metall zugrunde liegt wie der Magnesia, und hatte deshalb vorgeschlagen, dieses Magnesium zu nennen.“*
Einigkeit herrscht darüber, dass es dem englische Chemiker Sir Humprey Davy (1778-1829) im Jahre 1808 erstmals gelang, reines Magnesium durch Abdestillieren einer Magnesium-Quecksilber Verbindung herzustellen. Bei diesen Versuchen entdeckte er auch andere Metalle, wie Natrium, Kalium, Calcium, Strontium und Barium [Rei08]. Analog zu diesen nannte er das neue Metall Magnium.
Ein weiterer Schritt gelang dem Franzosen Bussy, der am 15. Dezember 1828 der Académie Royale ein aus Magnesiumchlorid, durch Reduktion mit Kalium, hergestelltes Magnesium vorlegen konnte.
1852 wurde von R. Bunsen die Grundlage für die großtechnische Produktion geschaffen, in dem ihm die erste Elektrolyse von $MgCl_2$ gelang. Die breite Öffentlichkeit erfuhr jedoch erst 10 Jahre später auf der Londoner Weltausstellung davon, wo das erste Stück metallischen Magnesiums vorgestellt wurde.
Nach diversen weiteren Verbesserungen des Herstellungsprozesses begann die industrielle Produktion im Jahre 1886 in der Aluminium-Magnesium Fabrik Hemelingen bei Bremen durch Elektrolyse von Carnallit ($KMgCl_3 \cdot 6H_2O$) [Str01].
Ab 1909 wurde das „Elektronmetall“ – unter diesem Namen wurden Legierungen mit

Al, Zn, u.a. vorgestellt – als Konstruktionswerkstoff populär und erlebte in den dreißiger Jahren einen wahren Boom. Besonders die Automobilindustrie setzte schon früh auf den Leichtbau. Beispielsweise wurden 1938 im damaligen KdF-Wagen schon Kurbelgehäuse und Getriebe aus Magnesium gefertigt [Löf08].
Naturgemäß war auch die Luftfahrtindustrie schnell an dem neuen Werkstoff interessiert. So wurde dieses Metall bereits 1919 in dem Luftschiff R34, mit welchem der erste Transatlantik-Flug unternommen wurde, verbaut [Pid46].
Bis zu Beginn des ersten Weltkrieges war Deutschland der einzige großtechnische Produzent von Magnesium. Im Verlauf des Krieges wurde die Produktion weltweit von 350 t auf 3.000 t erhöht, da es für pyrotechnische Zwecke genutzt wurde. In der Zwischenkriegszeit stieg die Produktion weiter an, da Bauxit zur Aluminiumherstellung aus dem Ausland zugekauft werden musste und Magnesium ausreichend vorhanden war. Im zweiten Weltkrieg wurde es verstärkt in der Rüstungstechnik eingesetzt. So wurden beispielsweise die Räder einer Kanone aus Magnesium gegossen, ebenso wie die des Flugzeuges Junkers Ju 52. Aufgrund des intensiven Einsatzes und der extrem stark wachsenden Produktion in den USA lag die Weltkapazität 1943 bei ca. 290.000 t. Zum Vergleich, der Verbrauch im Jahr 1998 lag bei ca. 360.000 t.
Jedoch wurde nach Ende des Krieges, zusätzlich zur stagnierenden Nachfrage, ein Produktionsverbot in Deutschland verhängt, wodurch in den Jahren 1945 bis 1950 nur mehr 20.000 t jährlich erzeugt wurden. In den folgenden Jahren stieg die Nachfrage langsam, sodass 1979 das Nachkriegs-Niveau wieder erreicht wurde.
Wie bereits in der Einleitung erwähnt, gewannen Leichtbaukonstruktionen vorallem in den letzten 10 bis 15 Jahren wieder zunehmend an Bedeutung, sodaß die *International Magnesium Association* 2010 von einer Jahresproduktion von 809.000 t berichtete [Ass11].

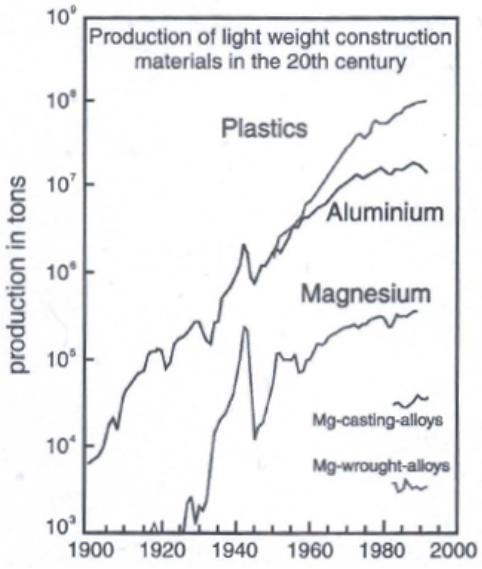


Abb. 2.2: Produktionsentwicklung von Leichtbauwerkstoffen im 20. Jahrhundert [Kai03b]

2.3 Metallurgie des Magnesiums

Die Erdkruste besteht zu 1,95% aus Magnesium – somit ist es das dritt-häufigste Metall (nach Aluminium und Eisen) und insgesamt an achter Stelle [Rei08]. Es ist in der zweiten Hauptgruppe des Periodensystems der Elemente zu finden [IUP11]. Es wird zu den Erdalkalimetallen gezählt und ist demnach sehr reaktionsfähig [Kai03b]. Aus diesem Grund ist es in der Natur nicht als Reinstoff, sondern in Form von Carbonaten, Silikaten, Sulfaten, Halogeniden und seltener als Oxid zu finden [Roo11]. Besonders interessant sind die Vorkommen im Meerwasser (als dritt-häufigstes Mineral – 0,13% [Wah03]) als auch die in natürlichen Solen.

Da die zu verwendenden Ausgangsmaterialien vom jeweils gewählten Produktionsprozess abhängen [Pid46] und eine Vielzahl an unterschiedlichen Rohstoffen verfügbar ist, soll die folgende Abbildung eine Übersicht darüber geben. Es werden die Zusammenhänge der Vorkommen und der Gewinnung von Reinmagnesium schematisch dargestellt.

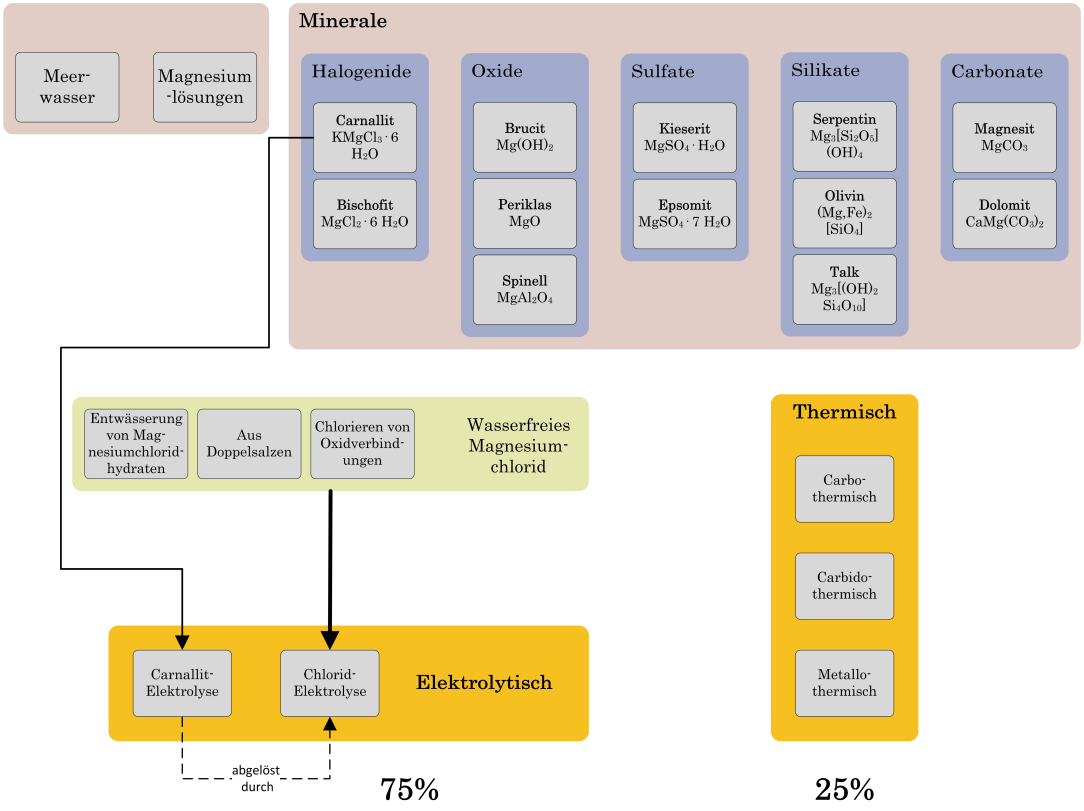


Abb. 2.3: Übersicht über die Rohstoffe und Gewinnung von Reinmagnesium

Abbildung 2.3, sowie die dahinter stehenden Informationen sollen in diesem Abschnitt näher erläutert werden. Dabei wird der Prozess, beginnend von den Rohstoffquellen, über eventuelle Zwischenschritte bis zur eigentlichen Gewinnung des Reinmagnesiums näher beleuchtet. Anschließend wird noch kurz auf die Verarbeitung eingegangen.

2.3.1 Rohstoffe

Wie bereits erwähnt, sind die Rohstoffquellen von Magnesium einerseits Meerwasser und Salzsolen, andererseits diverse Minerale. Diese werden im Folgenden nach der *Systematik der Minerale nach Strunz* [Str01] gegliedert.

Halogenide

Die chemisch als Magnesiumchlorid bezeichneten Minerale *Carnallit* und *Bischofit* kommen in der Natur in Form eines Hexahydrats vor ($6H_2O$). Sie sind in zahlreichen Salzlagerstätten zu finden [uKW71]. *Bischofit* ist für die Magnesiumherstellung bisher nur unwirtschaftlich zu verwerten, wo hingegen dem *Carnallit* (8% Mg), nach *Dolomit* (13% Mg) und *Magnesit* (27% Mg) eine größere Bedeutung zukommt [Kai03b].
Da die Magnesiumchloride für die anschließende elektrolytische Zerlegung zuerst entwässert werden müssen und dies in den Anfängen der Magnesiumproduktion erhebliche Schwierigkeiten bereitete, wurde ein Verfahren für das leichter zu entwässernde Doppelsalz *Carnallit*, nämlich die Carnallit-Elektrolyse, entwickelt (siehe Kap. 2.3.2) [uKW71].

Oxide

Das Mineral *Brucit* tritt in dolomitischen Schiefern und kristallinem Kalkstein auf. Es wird in Lagerstätten in den USA und Kanada abgebaut. Durch hydrothermale Umwandlung bildet es sich vorwiegend aus *Periklas* (MgO), wobei es durch Erhitzen auf etwas mehr als 400° C wieder entwässert und in Magnesiumoxid überführt werden kann.
Der *Spinell*, ein Magnesiumaluminat, welches in Burma und Sri Lanka gefunden werden kann, entsteht unter ähnlichen Bedingungen wie *Periklas*, hat jedoch für die „klassische“ Magnesiumproduktion nur eine untergeordnete Rolle.
Die Oxide bzw. Hydroxide dienen als Ausgangsstoff für die thermischen Verfahren, können aber auch – über den Umweg der Chlorierung – für die Chlorid-Elektrolyse verwendet werden. Dazu laufen in einem Chlorierungsofen zwei Teilreaktionen ab, wobei sich in Summe die chemische Umwandlung

$$MgO + Cl_2 + C = MgCl_2 + CO$$

ergibt und man so wasserfreies Magnesiumdichlorid und Kohlenmonoxid erhält.

Sulfate

Kieserit und *Epsomit* sind Magnesium-haltige Minerale, welche den Sulfaten zugeordnet und in Steinsalzlagerstätten abgebaut werden. Da vorallem das Heptahydrat *Epsomit* als

Rohstoff für die chemische Industrie (Färberei, etc.) sowie für die Düngemittelproduktion eingesetzt wird, wird es hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

Silikate

Serpentin ist ein magnesiumreiches Silikatgestein, welches sich durch Einwirkung CO_2-haltiger Wässer in Magnesiumcarbonat (*Magnesit*) umwandelt. Somit ist es indirekt ein wichtiger Ausgangsstoff für thermische Verfahren. Die anderen zwei in Abb. 2.3 aufgelisteten Minerale *Olivin* und *Talk* sowie Natur-Serpentin spielen in der Magnesiumgewinnung fast keine Rolle. Sie sind zwar in der Natur die am weitest verbreiteten Magnesiumvorkommen, jedoch wurden die Versuchsanlagen in dieser Richtung nie realisiert [Kai03b],[Pid46].

Carbonate

Die zwei Carbonate *Magnesit* und *Dolomit* sind die wichtigsten Minerale der heutigen Magnesiumproduktion. Sie können für beide Produktionsarten verwendet werden, entweder als Vorstoff für die Chlorid-Elektrolyse oder direkt für sämtliche thermische Verfahren [uKW71],[Wah03]. In jedem Fall ist die Calcination die erste chemische Verfahrensstufe, d.h. die Minerale werden erhitzt und spalten sich in Magnesiumoxid und andere chemische Verbindungen auf.
Die Magnesitvorkommen, welche sich in Salzlagern finden, sind schon sehr groß, jedoch die von *Dolomit* schier unerschöpflich. Aus diesem Mineral bilden sich ganze Gebirszüge, z.B. die Dolomiten [Roo11]. Im thermischen Verfahrensweg ist *Dolomit* auch wirtschaftlicher, da die bereits enthaltene Kalkkomponente ausgenutzt werden kann und man so theoretisch eine 100%-ige Ausbeute erreicht [uKW71].
Da sich Magnesiumoxide aus Carbonaten bezüglich der Reaktionsfähigkeit im Chlorierungsofen sehr günstig verhalten und dieser die Vorstufe für die Chlorid-Elektrolyse ist (sofern der Rohstoff nicht schon ein Chlorid ist), eignen sie sich auch für diesen Prozessweg.

Magnesiumlösungen

Seen, in denen die Verdunstung erheblich größer als der Wasserzufluss ist, reichern sich im Laufe der Zeit mit Salzen an. Diese Solen, wie z.B. das Tote Meer oder die Salzseen des nordamerikanischen Great Basin, enthalten etwa 28% gelöste Salze, welche reich an Magnesiumdichlorid ($MgCl_2$) sind [uKW71]. Ähnlich dem Dolomit sind auch hier die Ressourcen nahezu unbegrenzt. Beispielsweise schreibt D. Eliezer in [Fro98] *„..., it has been estimated that at current world use levels there is enough magnesium in the Dead Sea for at least 22.000 years.“*

Meerwasser

Ein in der Metallurgie einzigartiger Prozess ist die Gewinnung eines Metalls aus Meerwasser [Pid46].

Obwohl natürlich hochverdünnt, enthält das Seewasser immerhin rund 0,13% Magnesium [Wah03], d.h. in einem Kubikmeter sind im Durchschnitt 1,27 kg Magnesium in Form eines Dichlorids gelöst [Kam00],[Pid46]. Das für die Elektrolyse notwendige wasserfreie Magnesiumchlorid wird über Magnesiumoxid bzw. -hydroxid erzeugt, um so das Meerwasser, zur späteren Filtration, eindicken zu können [uKW71]. Beispielsweise wird es im sogenannten Dow-Verfahren mit Calciumhydroxid versetzt, wo es unter Bildung von Calciumdichlorid und Magnesiumhydroxid reagiert:

$$MgCl_2 + Ca(OH)_2 = Mg(OH)_2 + CaCl_2$$

Nach der anschließenden Filtration wird das Hydroxid mit wasserfreier Salzsäure in Magnesiumchlorid und Wasser separiert.
Schematische Darstellungen der Herstellungsverfahren zeigen die Abbildungen 2.4 und 2.5 im nächsten Abschnitt.

2.3.2 Gewinnung

Wie in Abb. 2.3 dargestellt, lässt sich die Gewinnung von Reinmagnesium grundsätzlich mit zwei verschiedenen Prozessarten bewerkstelligen – nämlich dem elektrolytischen Verfahren und der thermischen Reduktion. 75% des hergestellten Magnesiums werden heute mit Hilfe der Chlorid-Elektrolyse erzeugt, 25% auf thermischem Verfahrensweg [Kai03b]. In jedem Fall ist der Energieeinsatz, bezogen auf die Masse, relativ hoch – ca. 35 kWH/kg (einschließlich aller Nebenprozesse) [Löf08]. Bezieht man die benötigte Energiemenge allerdings auf das Volumen, so ist diese wesentlich geringer als bei der Aluminium- oder Zink-Herstellung [Kai03b].

2.3.2.1 Elektrolyse von geschmolzenen Magnesiumsalzen

Carnallit-Elektrolyse

Die anfänglichen technischen Schwierigkeiten bei der Herstellung von wasserfreiem Magnesiumchlorid führten zu der Entwicklung einer Carnallit-Elektrolysezelle [uKW71]. Hierbei wurde das leichter zu entwässernde Doppelsalz *Carnallit* verwendet.
Da man aber bereits 1928 so weit war, großtechnisch wasserfreies Magnesiumchlorid zu produzieren, findet dieses Elektrolyseverfahren heute nur noch sehr vereinzelt Anwendung. Für eine genauere Beschreibung wird daher an dieser Stelle auf die einschlägige Literatur, z.B. [uKW71], verwiesen.

Chlorid-Elektrolyse

Der Ausgangsstoff für diesen Produktionsprozess ist wasserfreies Magnesiumchlorid. Dabei stellt genau die Herstellung dieses das größte Problem dar [Fro98]. Die prinzipiellen Möglichkeiten dafür sind in Abb. 2.3 zu sehen. Mit jeweils unterschiedlichen Vorstufen kann wasserfreies Magnesiumchlorid aus fast allen Rohstoffen gewonnen werden – direkt

über Meerwasser und Salzsolen oder bspw. über die Röstung von Dolomit.
In jedem Fall ist das Magnesiumchlorid an sechs Moleküle Wasser gebunden, welche es zu separieren gilt. Die ersten 4,5 Moleküle können durch Erhitzen getrennt werden. Bei einer weiteren Temperaturerhöhung hydrolysieren jedoch die restlichen 1,5 Moleküle. Man erhält Chlorwasserstoff als unerwünschtes Nebenprodukt, jedoch nicht vollständig wasserfreies Magnesiumchlorid [uKW71],[Fro98].
Es lassen sich drei Verfahrenswege – „Dow“, „I.G. Farben“ und „Norsk“ – aufzeigen, welche dieses Problem alle unterschiedlich lösen.
Die I.G. Farben und Norsk-Verfahren gehen über die Zwischenstufe des Magnesiumoxids, während im Dow-Verfahren die Elektrolysezelle direkt mit Magnesiumchlorid gefüllt wird, wobei dieses noch 1,5 Mol Wasser (das sind rund 22%) beinhaltet [uKW71].
Die Arbeitsschemata dieser Prozesse sind in den Abbildungen 2.4 und 2.5 dargestellt.

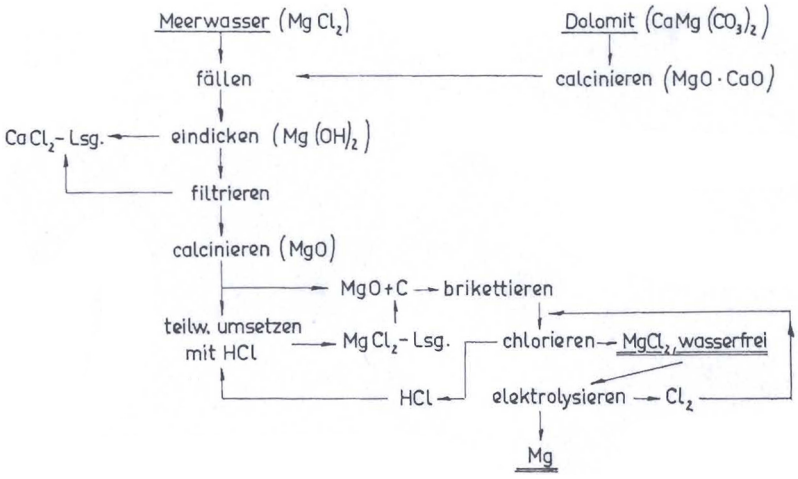


Abb. 2.4: Magnesium aus Meerwasser nach Norsk Hydro [uKW71]

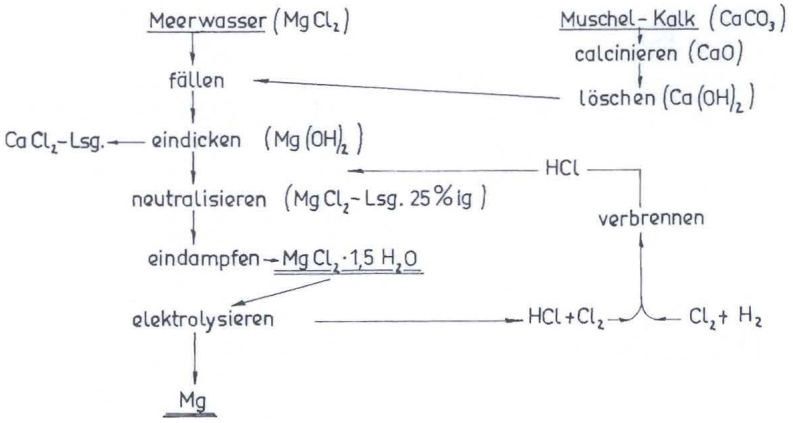
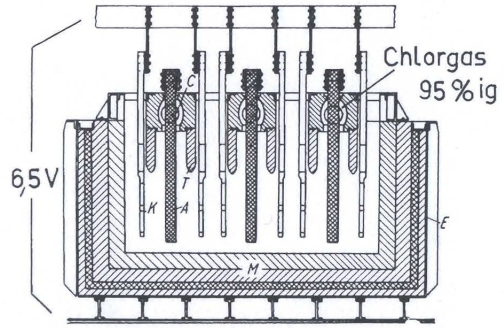


Abb. 2.5: Magnesium aus Meerwasser nach der Dow Chemical Comp. [uKW71]

Die erste Aufbereitung der Rohstoffe für die Chlorid-Elektrolyse – nämlich die Separation der Wasser-Moleküle – wird hier deshalb so ausführlich behandelt, da ca. die Hälfte der Gesamtenergie alleine für diesen Prozess benötigt wird.
Die eigentliche Erzeugung des Reinmagnesiums findet dann in der Elektrolysezelle statt. Hierbei haben sich die Verfahren nach der Dow Chemical Company und I.G. Farbenindustrie AG durchgesetzt. Beide Arbeitsweisen haben ihre Vor- und Nachteile [Fro98].
In der Zelle nach I.G. Farben wird ein Gemisch aus Magnesiumchlorid, Kochsalz und anderen Salzen als Elektrolyt verwendet. Bei einer Arbeitstemperatur von 730° C trennt sich das Metall vom Elektrolyt. Man gewinnt flüssiges Magnesium [uKW71].



A Graphit-Anoden, C Chlorgasaustritt, E äußere Elektrolysewanne, K eiserne Kathode, M Isolation, T Schamotte-Einbauten zur Sammlung des Chlorgases

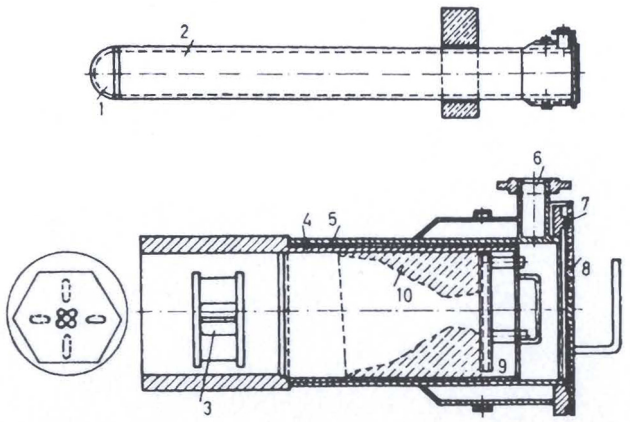
Abb. 2.6: Elektrolysezelle der I.G. Farbenindustrie AG [uKW71]

2.3.2.2 Thermochemische Gewinnung

Neben der elektrolytischen Herstellung wird Magnesium auch zu 25% auf thermochemischem Wege, durch Reduktion von Magnesiumoxid, erzeugt [Kai03b],[Roo11].
Grundsätzlich können die Verfahren, wie Abb. 2.3 zeigt, in carbothermische (die Reduktion mit Kohlenstoff), in carbidothermische (die Reduktion mit Carbid) und in metallothermische (die Reduktion mit Metallen) eingeteilt werden. In der Praxis hat sich jedoch nur die metallothermische Arbeitsweise durchgesetzt.
Für die zwei heute verwendeten Prozesse – *Pidgeon* und *Magnetherm* – wird das Magnesiumoxid in Form von gebranntem Dolomit in Drehrohröfen eingebracht [Roo11],[Fro98].

Pidgeon-Prozess

Bei dieser Arbeitsweise wird der calcinierte Dolomit mit Silizum reduziert [uKW71]. Dies geschieht in einem vakuumierten, extern beheizten Retortenofen aus Cr-Ni-Stahl. Das Magnesium dampft aus und kondensiert am wassergekühlten Ende der Retorte [Fro98].



1,2 Retorte aus Cr-Ni-Stahl, 3 Strahlungsschutz, 4,5 konische Buchse,
6 zur Vakuumpumpe, 7,8 Abschlussdeckel, 9 Alkalisammler, 10 kondensiertes Mg

Abb. 2.7: Retortenofen nach L.M. Pidgeon [uKW71]

Der Vorteil dieses Prozesses liegt in der Erzeugung von hochreinem Magnesium, allerdings ist die Ausbringungsmenge der Retorte mit 28 cm Durchmesser nicht gerade hoch [Fro98]. Beispielsweise liegt die Tageserzeugung eines Ofens, der 40 solcher Retorten beheizt, bei 2-2,5 t [uKW71]. Variationen des Systems mit internen Öfen erlauben größere Chargen.

Magnetherm-Prozess

Der Magnetherm-Prozess arbeitet ähnlich wie der von L.M. Pidgeon, allerdings wird hierbei in einem wesentlich größeren Ofen Dolomit mit Bauxit verarbeitet. Calcinierter Bauxit wirkt als Katalysator, um die Schlacke aus gebranntem Dolomit flüssig zu halten [Fro98].

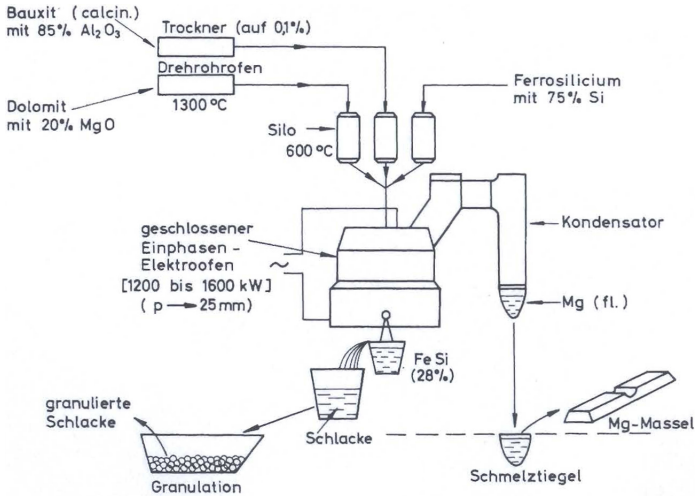


Abb. 2.8: Arbeitsschema des Magnetherm-Prozesses [uKW71]

Egal ob elektrolytisch oder chemothermisch erzeugt – Magnesium wird nach diesem ersten hüttenmännischen Arbeitsgang weiteren Arbeitsschritten unterzogen. Es wird ggf. eine Kornfeinung durchgeführt und anschließend mit den verschiedensten Metallen als Guss- oder Knetlegierung verarbeitet.

2.3.3 Verarbeitung

Reines Magnesium hat als Konstruktionswerkstoff keine Bedeutung, da es nur eine geringe Festigkeit und Härte aufweist [Kam00],[Roo11].
In reiner Form wird es beispielsweise als Reduktionsmittel zur Titanherstellung (Kroll-Prozess) oder zur Stahlentschwefelung genutzt (12%) [Wah03],[Gün06],[Gmb02]. Ebenso wird es, aufgrund des bei der Verbrennung entstehenden sehr hellen Lichts, als Zusatz in Feuerwerkskörpern und Blitzlichter eingesetzt [Kam00]. Sechs Prozent der gesamten Magnesiumproduktion entfallen auf Chemikalien (Dünger, Abführmittel, etc.) und auf Korrosionsschutz für Metalle [Gmb02],[Kam00].
Der Großteil, und zwar 45%, wird als Legierungskomponente in der Aluminium-Industrie verwendet.

Magnesiumbasislegierungen werden in Guss- und Knetlegierungen eingeteilt, wobei den Gusslegierungen derzeit weitaus größere Bedeutung zukommt (90%). Dies liegt daran, dass die Magnesiumschmelze – im Vergleich zu Aluminium – wesentlich dünnflüssiger ist und sich daher sehr gut gießen lässt [Gün06]. Es sind komplizierte, großflächige Gusskörper und Wanddicken unter 2 mm möglich [Löf08], was auch den Einsatz in der Elektronikindustrie, als Schutzschicht für diverse Bauteile, begünstigt [Gün06].
Andererseits zeichnen sich Knetlegierungen durch höhere Festigkeiten und Bruchdehnungen aus, somit steigt deren Nachfrage stetig [Nos03]. Abbildung 2.9 zeigt einen Vergleich der Streckgrenzen von Guss- und Knetlegierungen.

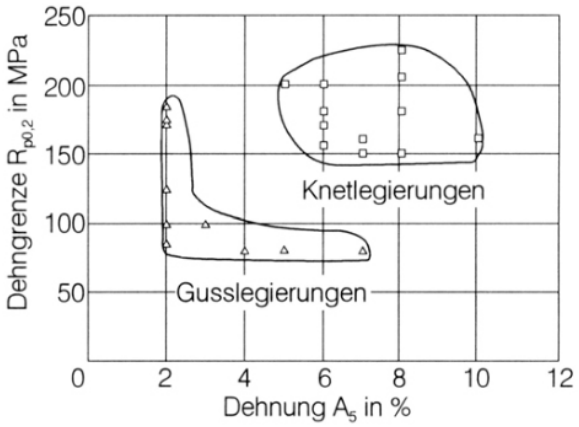


Abb. 2.9: Bruchdehnung und Streckgrenze von gebräuchlichen Magnesiumguss- und -knetlegierungen [Kra08]

Der Großteil der Gussverarbeitung entfällt auf den Druckguss, wobei neben den „klassischen“ Verfahren (Kokillen-, Sand- und Druckguss) auch einige neuere, wie z.B. das Squeeze-Casting, Thixo-Casting und New Rheocasting (NRC) eingesetzt werden [Kam00]. Kokillen- und Sandguss werden überwiegend bei kleineren Losgrößen verwendet. Sie haben z.B. gegenüber dem Vakuum-Druckguss den Nachteil, dass sich Gasporositäten nur schwer vermeiden lassen [Kra08]. Kleine Wandstärken bei gleichzeitig geringer Lunkerbildung und homogenerem Gefüge ermöglichen die moderneren Verfahren wie Squeeze- und Thixo-Casting.
Knetlegierungen werden nach dem Gießen – durch Walzen, Schmieden oder Strangpressen – noch warm umgeformt (Temperaturen zwischen 250 und 430° C). Somit wird das Gefüge feinkörniger, poren- und lunkerfreier als bei normalen Gusslegierungen. Dies bewirkt die bereits erwähnte und in Abb. 2.9 dargestellte Erhöhung der Festigkeitswerte [Kra08],[Nos03].
Eine umfangreiche Darstellung und Erläuterung der einzelnen Verarbeitungsverfahren bietet [Kam00] und [Kai03b].

Die Magnesiumschmelze muss, aufgrund der hohen Reaktivität mit Sauerstoff, abgedeckt werden [Löf08]. Im Gegensatz zu Aluminium schützt alleine der Oxidfilm nicht vor einer weiter Oxidation [Wah03]. Aufgrund der hohen Abbrandneigung kann es oberhalb von 850° C zur spontanen Flammenbildung kommen, weshalb das flüssige Magnesium mit Abdecksalzen (sogenannten Fluxes), Reaktivgasen oder inerten Gasen vor der Umgebung geschützt wird [Kam00]. Mit Hilfe von Argon, Helium oder Schwefelhexafluorid (SF_6) bildet sich ein nicht poröser Schutzfilm von nur einigen Nanometern Dicke. SF_6 wurde allerdings wegen seines extrem hohen Treibhauspotentials (ca. 22.200-mal höher als CO_2) ab 2007 verboten [Löf08].
Die starke Schwindung der Magnesiumschmelze von ca. 4% bei Erstarrung und weiteren 5% bei Abkühlung auf Raumtemperatur sollte bei der Konstruktion der Gussformen nicht unberücksichtigt bleiben. Die mit der Kontraktion einhergehende Mikroporosität kann bei Knetlegierungen ausgeglichen werden [Kle02].

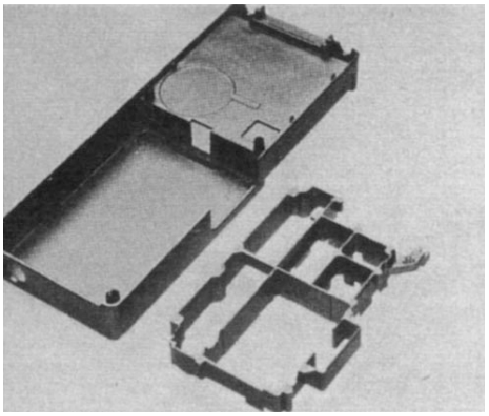


Abb. 2.10: Äußerst dünnwandiges Mobilitelefon-Gehäuse aus Magnesium [Fro98]

Abb. 2.11: Gesenkgeschmiedete Bauteile aus Magnesiumlegierungen [Bec03], sowie Motorblock eines Reihensechszylinders von BMW in Magnesium/ Aluminium-Verbund-Technologie [Wah03]

2.4 Eigenschaften von Magnesium

Im Folgenden sollen die Eigenschafen von Reinmagnesium beschrieben werden, wobei dieses nach DIN EN 12421 [DIN98] aus mindestens 99,0% Magnesium bestehen muss. Der Rest entfällt auf Beimengungen von Aluminium, Kupfer, Eisen, etc. und einem sonstigen Anteil von maximal 0,05%.

2.4.1 Chemische Eigenschaften

Das Nichteisen-Metall Magnesium ist ein chemisches Element mit Hauptquantenzahl drei und 12 Protonen im Atomkern. Es ist in der zweiten Hauptgruppe im Periodensystem der Elemente [IUP11] zu finden und wird nach [IUP97] zu den Erdalkalimetallen gezählt. Da es elektrisch neutral geladen ist, sind ebenfalls 12 Elektronen vorhanden, wobei davon zwei im 1s, zwei im 2s und sechs im 2p Orbital um den Atomkern angeordnet sind. Die verbleibenden zwei Elektronen sind Valenzelektronen, welche sich im 3s Orbital befinden und leicht verloren gehen [Ray59]. Daher ist Magnesium stark elektropositiv – mit einem Standardpotential von -2,37 V – und aufgrund dessen sehr reaktionsfähig [Ray59].

Optisch ist Magnesium kaum von Silber zu unterscheiden, jedoch wird die glänzende Oberfläche durch die eintretende Oxidation schnell matt [Kam00]. Dieser Oxidfilm ist zwar nicht so beständig wie der von Aluminium, schützt es jedoch bei Raumtemperatur [Roo11]. In Seewasseratmosphäre und in Verbindung mit Säuren wird es rasch angegriffen – von Laugen nicht [Gmb02].

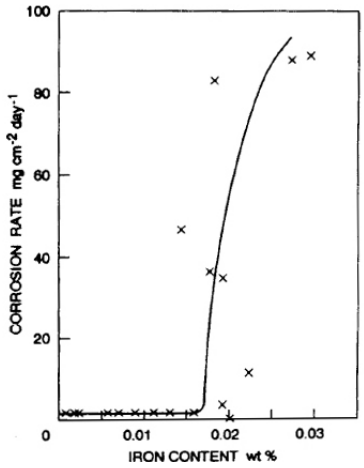


Abb. 2.12: Einfluss des Eisen-Gehaltes auf die Korrosion von reinem Magnesium in 3%-iger NaCl Lösung [Fro98]

Beim Korrosionsverhalten von Magnesium unterscheidet man zwischen atmosphärischer und galvanischer, respektive Kontaktkorrosion.
Das atmosphärisch Korrosionsverhalten ist, aufgrund des bereits erwähnten schützenden Oxidfilms, nicht besonders störend. Es liegt zwischen dem von Stahl und Aluminium [Wah03].
Außerhalb der „normalen“ trockenen Anwendung wird Magnesium bei der Kontaktkorrosion stark angegriffen, da der Oxidfilm in Säuren oder Salzwasser nicht mehr ausreichend schützt. Dies wird vorallem durch die Verunreinigungen mit Eisen und anderen Schwermetallen hervorgerufen [Rei08].
Abbildung 2.12 zeigt die stark zunehmende Korrosion bei höherem Eisen-Anteil.
Abhilfe schaffen sogenannte High Purity (HP)-Legierungen, welche aus hochreinem Magnesium bestehen, wobei eine Potentialtrennung zwischen benachbarten Metallen oder eine Beschichtung wie Chromatieren, Lackieren, etc. die sichereren Varianten darstellen [Rei08], [Gmb02].

2.4.2 Physikalische Eigenschaften

Magnesium kristallisiert in *hexagonal-dichtester (hdp) Kugelpackung* (siehe Abschnitt 2.5). Es bildet mit einer Vielzahl von Legierungselementen ein homogenes Gemisch [Fro98].

Nachfolgende Tabelle zeigt die physikalischen Eigenschaften von Reinmagnesium:

Eigenschaft	Wert	Einheit
Molare Masse	24,305	g/mol
Dichte	1,738*	g/cm^3
Gitterstruktur	hdp	
Gitterparameter	$a = 0,3203$, $c = 0,5199$	nm
Achsenverhältnis c/a	1,624	
Atomvolumen	13,97	cm^3/mol
Hall-Petch-Koeffizient k_y	280	$MPa\sqrt{m}$
E-Modul	44.800	N/mm^2
Schubmodul	16.600	N/mm^2
Querkontraktionszahl	0,35	
Zugfestigkeit R_m	165	N/mm^2
Bruchdehnung	1-12	%
Brinellhärte	37-38	
Schmelzpunkt	650	°C
Siedepunkt	1090	°C
Spezifische Wärmekapazität	1,025*	kJ/kgK
Schmelzwärme	8,954	kJ/mol
Wärmeleitfähigkeit	1,56	W/cmK
Wärmeausdehnungskoeffizient	$24,8 \cdot 10^{-6}$*	K^{-1}
Viskosität der Schmelze	1,25	$mPa \cdot s$
lineare Schwindung 650° C - 20° C	1,8 - 2	%
Volumenabnahme flüssig/fest	3,97 - 4,2	%
elektrische Leitfähigkeit	22,4*	$m/\Omega mm^2$
Standardpotential	-2,37	V

Tab. 2.1: Physikalische Eigenschaften von Reinmagnesium (99,99%) bei 20°C [Kam00], [Gmb02],[Kai03b]

2.4.3 Mechanische Eigenschaften

Reines Magnesium weist eine geringe Zähigkeit und hohe Kerbempfindlichkeit auf, weshalb die Kaltverformbarkeit relativ schlecht ist [Kle02],[Drö99].

*stark temperaturabhängig

Ebenso sind eingeschränkte Hochtemperatureigenschaften (Warmfestigkeit, Kriechbeständigkeit) wie auch der vergleichsweise hohe Wärmeausdehnungskoeffizient, welcher ca. 10% höher als bei vergleichbaren Aluminiumlegierungen liegt, als negativ anzusehen [Pin08],[Kle02].

Demgegenüber stehen aber ausgezeichnete Zerspanungseigenschaften, welche in Tab. 2.2, anhand eines Vergleiches mit anderen Werkstoffen, verdeutlicht werden. Es treten nur geringe Schnittkräfte auf, die den Werkzeugverschleiß reduzieren und so längere Standzeiten ermöglichen [Kam00]. Dabei können bis zu 50% höhere Schnittgeschwindigkeiten gefahren werden. Dennoch ist die resultierende Oberflächengüte hervorragend [Gmb02]. Die bei der Zerspanung entstehenden kurzen Späne sind leicht brennbar und erfordern daher strenge Sicherheitsauflagen [Drö99],[Kle02].

Magnesium (AZ91HP)	Aluminium (AlSi9Cu3)	Stahl (Ck45)
280 $^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2}$	600 $^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2}$	2220 $^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2}$

Tab. 2.2: Vergleich der spezifischen Schnittkraft K_C verschiedener Werkstoffe [Kam00]

Besondere Dämpfungseigenschaften sind für Magnesium ebenso charakteristisch wie die gute Schweißbarkeit. Aufgrund der hohen Reaktivität von Magnesium werden dabei hauptsächlich inerte Gase verwendet [Kam00].

Wie bereits erwähnt, findet reines Magnesium, aufgrund der ungenügenden Festigkeit, keine Anwendung als Konstruktionswerkstoff. Es wird deshalb mit den verschiedensten Metallen legiert (siehe dazu Abschnitt 2.7).

2.5 Kristallstruktur

Magnesium kristallisiert in hexagonal dichtester Kugelpackung [Kam00]. Dieser Gittertyp besteht aus zwei sechseckigen Basisebenen (Ebenen A in Abb. 2.13) mit je sieben Atomen und drei Atomen in der Zwischenebene (Ebene B). Eine Elementarzelle enthält somit sechs Atome im Raumgitter und ist damit unter allen Kristallsystemen die am stärksten besetzte [Roo11].
Die einzelnen Knoten des Gittersystems spannen Ebenen auf, die mit Hilfe der Miller-Bravis'schen Indizes bezeichnet werden. Hierfür wird ein Koordinatensystem in die Hauptachsen der Kristalle gelegt. Im hexagonalen Gitter werden die Koordinatenachsen a_1, a_2 und a_3 in der Basisebene und, orthogonal dazu, die Achse c verwendet, wobei die Achse a_3 über die Beziehung $-a_3 = a_1 + a_2$ mit den anderen der Basisebene verknüpft ist [Nos03].

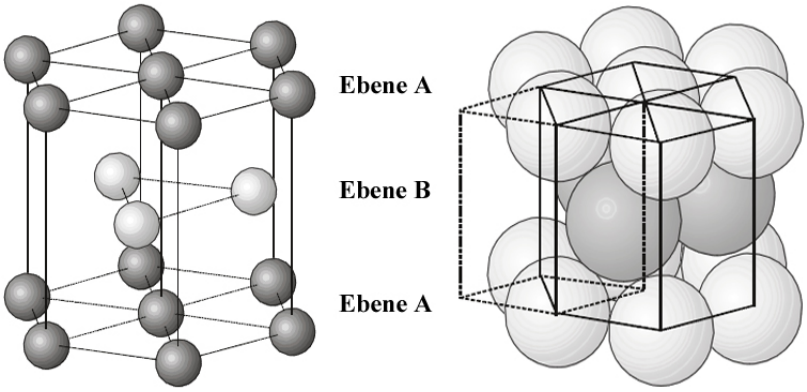


Abb. 2.13: Hexagonales Kristallgitter

Die Bezeichnung der einzelnen Ebenen und Richtungsvektoren werden in der Form $(hjkl)$ angeschrieben, wobei diese Parameter die Skalare in die jeweilige Achsrichtung darstellen. Eine geschwungene Klammer kennzeichnet all die Ebenen, die aus Symmetriegründen gleichwertig sind. Die Richtungsvektoren sind zu der betrachteten Gitterrichtung parallel und werden in eckigen Klammern dargestellt. Analog zu den Ebenen wird die Gesamtheit der gleichwertigen Richtungsvektoren in spitze Klammern gesetzt $\langle hjkl \rangle$ [Roo11].

Das Koordinatensystem in einem hexagonalen Gitter, sowie zwei exemplarische Richtungsvektoren sind in Abb. 2.14 zu erkennen. Detailliertere Erklärungen zu den Miller'schen Indizes finden sich beispielsweise in [Roo11].

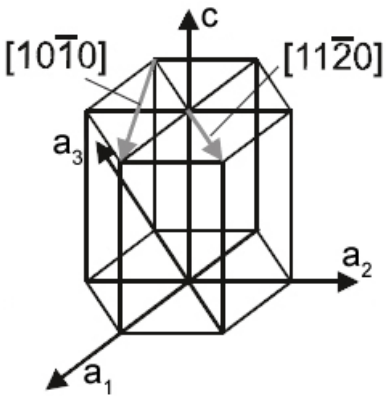


Abb. 2.14: Koordinatensystem im hexagonalen Gitter mit zwei exemplarisch eingezeichneten Richtungsvektoren

Die Verformung von Werkstoffen beruht im Allgemeinen auf Versetzungsbewegungen der Atome. Die Abgleitung erfolgt zuerst immer in den Gleitebenen, das sind diejenigen Ebenen, die am dichtesten besetzt sind [Löf08],[Roo11]. Wie man sich anhand von Abb. 2.13 überlegen kann, kann dies nur die sechseckige Fläche an der Ober- und Unterseite der

Elementarzelle sein, da – bei einem Achsenverhältnis von 1,624 – nur dort sieben Atome in eine Ebene fallen. Somit findet Gleitung immer zuerst in den sogenannten Basalebenen $\{0001\}$, in Richtung des kürzesten Burgersvektors $\langle 11\bar{2}0\rangle$, statt, da dort die geringste Schubspannung zur Versetzungsbewegung benötigt wird [Löf08].

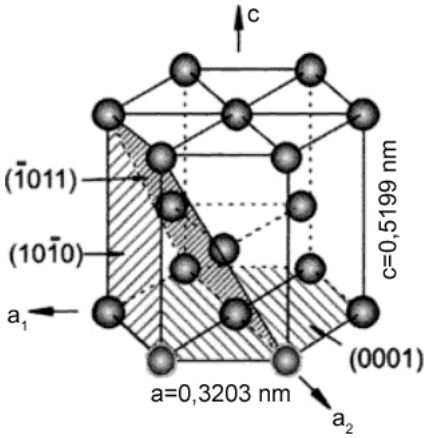


Abb. 2.15: Gitterstruktur der hexagonal dichtest gepackten Elementarzelle von Magnesium mit eingezeichneter Basal-, Prismen- und Pyramidalebene

Die Atomabstände in Magnesium betragen 0,3203 nm in a-Richtung und 0,5199 nm in c-Richtung (siehe Abb. 2.15). Sie führen daher zu dem bereits erwähnten Achsenverhältnis c/a von 1,624, welches dem eines ideal dichtest gepackten hexagonalen Gitters von 1,633 sehr nahe kommt [Kam00]. Somit können die Atome in der Zwischenebene (Ebene B in Abb. 2.13) nicht genau in einer Verbindungsebene der zwei prismatischen Grundflächen liegen, wodurch Gleitung in erster Linie nur in den erwähnten, dichtest besetzten, Basalebenen $\{0001\}$ und $\{0002\}$ stattfindet.

2.6 Umformen von Magnesium

Das Umformen von Werkstoffen hängt von verschiedensten Einflussgrößen ab. Sowohl die Materialeigenschaften, als auch die thermischen und mechanischen Bedingungen beim Umformvorgang selbst, sowie die diversen Umformparameter (Geschwindigkeit, Werkzeuggeometrie, etc.) bestimmen die Verformbarkeit maßgeblich [Spi89].
Zur Verarbeitung von Magnesiumknetlegierungen, mittels umformender Verfahren, sind erst in den letzten Jahren einige Untersuchungsergebnisse bekannt geworden. Eine wesentliche Einflussgröße ist dabei die Temperatur [Kam00], wobei in neuerer Literatur verstärkt von Umformgeschwindigkeit und Korngröße berichtet wird [wTea07],[ea05].
In Abb. 2.16 sind die prinzipiellen Einflussgrößen auf das Umformvermögen bei erhöhter Temperatur nach *Spittel* zu sehen.

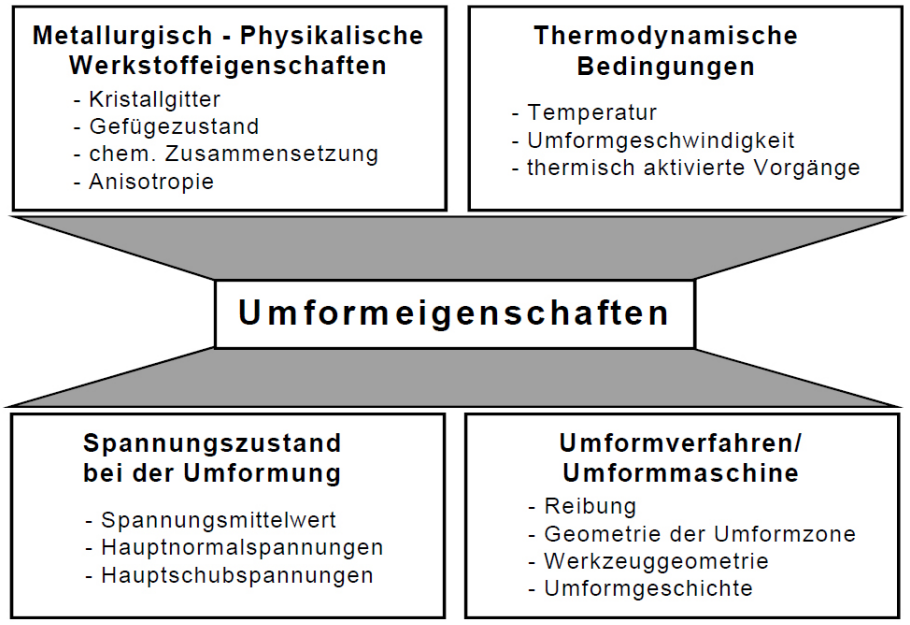


Abb. 2.16: Einflussgrößen beim Warmumformen nach *Spittel* [Spi89]

2.6.1 Verformungsverhalten bei niedrigen Temperaturen (< 225° C)

Wie bereits im vorherigen Abschnitt erwähnt, kristallisiert Magnesium in hexagonal dichtester Kugelpackung. Von allen Kristallsystemen lässt sich dieses am schlechtesten plastisch verformen [ea02]. Dies liegt daran, dass die Verformbarkeit maßgeblich von der Anzahl der Gleitsysteme abhängt und die Magnesium-Elementarzelle – bei Raumtemperatur – nur drei davon besitzt [Nos03],[ea02]. Die in Abschnitt 2.5 beschriebenen Basisebenen {0001} und {0002} sind aufgrund ihrer Parallelität kristallographisch gleichwertig und gelten als eine Gleitebene. Zusammen mit den drei unabhängigen Gleitrichtungen, in Richtung der dichtest gepackten Atomreihen, welche als $\langle 11\bar{2}0\rangle$ zusammengefasst werden, entstehen die drei Gleitsysteme [Nos03],[ea02].
Nach dem Kriterium von von-Mises müssen aber in jedem Korn mindestens fünf voneinander unabhängige Gleitsysteme aktiviert werden, um Dehnungsinkompatibilitäten respektive Rissbildungen an den Korngrenzen zu vermeiden [Löf08],[Kra08]. Dementsprechend zeigt Magnesium ein sehr schlechtes, sprödes Umformverhalten.
Im Rahmen der plastischen Verformung bei Raumtemperatur werden somit, zusätzlich zum primären Gleiten in den {0001}-Basalebenen in Richtung der dichtest besetzten Atomreihen $\langle 11\bar{2}0\rangle$, noch weitere Gleitsysteme, die sogenannte mechanische *Zwillingsbildung*, aktiviert [Ray59].
Dabei ist der Mechanismus der Zwillingsbildung für die, wenn auch nur geringe, Duktilität verantwortlich und somit ein wichtiger Verformungsmechanismus bei Raumtemperatur [ea02],[Bar07a].

Diese zwei Systeme wirken sich allerdings bei Druck, Zug, verschiedenen Korngrößen und Dehnraten unterschiedlich aus. Beispielsweise schreibt *M.R. Barnett* in [Bar07a] über die Ergebnisse seiner Zugversuche, dass sich, aufgrund der mechanischen Zwillingsbildung in der $\{10\bar{1}0\}$-Ebene, eine Verlängerung der c-Achse ergibt und dies eine Steigerung der Dehnung bewirkt. Jedoch ist das Versetzungsgleiten in den Basalgleitsystemen – vorallem in der Magnesiumknetlegierung AZ31 – ebenfalls ein wichtiger Einfluss bei Zugverformung [wTea07].

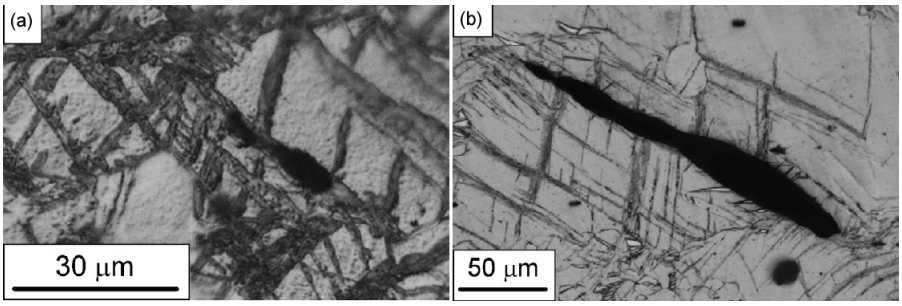


Abb. 2.17: Doppel-Fehlstellen in AZ31 Legierungen, welche bei Raumtemperatur bis zum Bruch belastet wurden, (a) eines stranggepressten Stabes und (b) einer gewalzten und geglühten Platte [Bar07b]

In Druckversuchen hingegen ist die Zwillingsbildung noch wichtiger. Es zeigt sich, dass doppelte Zwillingsbildung in den $\{10\bar{1}1\}$ und $\{10\bar{1}2\}$-Ebenen maßgeblich ist. Dies führt zu einer Verkürzung der c-Achse und zu höheren Kontraktionen, bevor ein Bruch eintritt. Allerdings kann dieser Mechanismus auch zu einem Scherbruch beitragen, da sich hierbei, wie in Abb. 2.17 zu sehen, doppelte Fehlstellen im Material bilden [Bar07b]. Bei geringen Dehnraten ($10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$) ist die Zwillingsbildung für die plastische Deformation verantwortlich, hingegen werden bei hohen Dehnraten ($10^{3}\,\mathrm{s}^{-1}$) zusätzliche Gleitsysteme aktiviert - Zwillinge teilen sich in kleinere Körner auf. Dadurch bilden sich Scherbänder, die zu einer Verfestigung führen, das Abgleiten verhindern und somit die Bruchfestigkeit herabsetzen [wTea07].

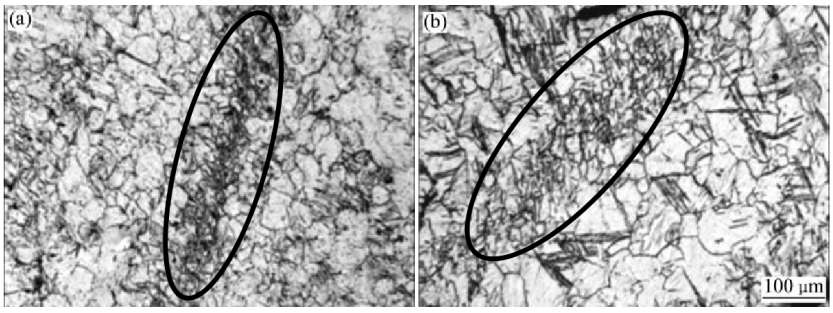


Abb. 2.18: Scherbänder in AZ31 Legierungen nach Dehnung bis zum Bruch mit einer Dehnrate von (a) $2964\,\mathrm{s}^{-1}$ und (b) $1537\,\mathrm{s}^{-1}$ [wTea07]

2.6.2 Zwillingsbildung

Wie bereits in dem vorherigen Abschnitt beschrieben, ist die mechanische Zwillingsbildung ein wesentlicher Verformungsmechanismus im Magnesium-Kristall.
Es handelt sich hierbei um eine Scherverformung, bei der ein Kristallbereich (Zwilling) in eine zur Ausgangslage (Matrix) spiegelsymmetrische Lage überführt wird. Die Spiegelebene wird dabei als Zwillingsebene bezeichnet [Kam00],[Nos03].

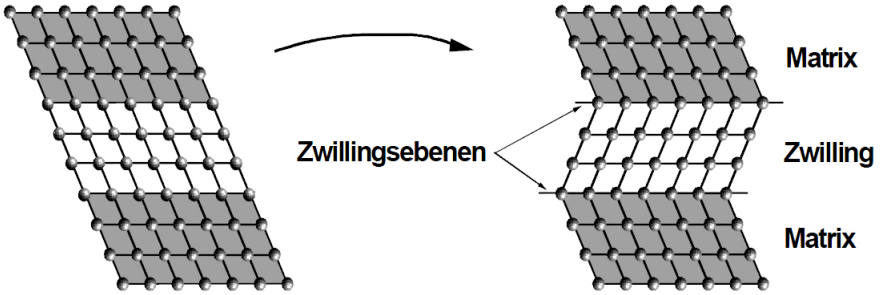


Abb. 2.19: Prinzip der Zwillingsbildung [Drö99]

Bei dieser Scherbewegung bleibt die Kristallstruktur erhalten, allerdings ändert sich die Orientierung – das Gitter des Zwillings dreht sich um 180° um die Normale der Zwillingsebene [Nos03],[Kra08]. Im hexagonalen Kristallsystem klappen sich die Matrixatome in der pyramidalen Zwillingsebene (ZE in Abb. 2.20) vom Typ $\{10\bar{1}2\}$ parallel zur Verschiebungsebene (VE) $\{10\bar{1}2\}$ in die Zwillingsposition um.

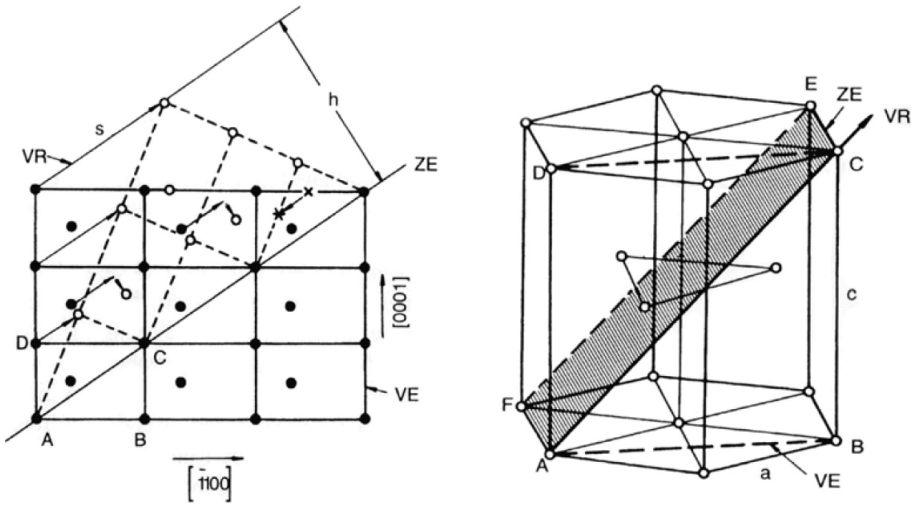


Abb. 2.20: Zwillingsbildung im hexagonalen Kristallgitter [Kra08]

Die Zwillingsebene ist vorwiegend eine Pyramidalebene zweiter Ordnung $\{10\bar{1}2\}$, wobei bei der in Abschnitt 2.6.1 erwähnten doppelten Zwillingsbildung bei Magnesiumlegierungen auch eine Pyramidalebene erster Ordnung vom Typ $\{10\bar{1}1\}$ ausgenützt wird [Bar07b]. Abbildung 2.21 gibt eine Übersicht dieser Ebenen.

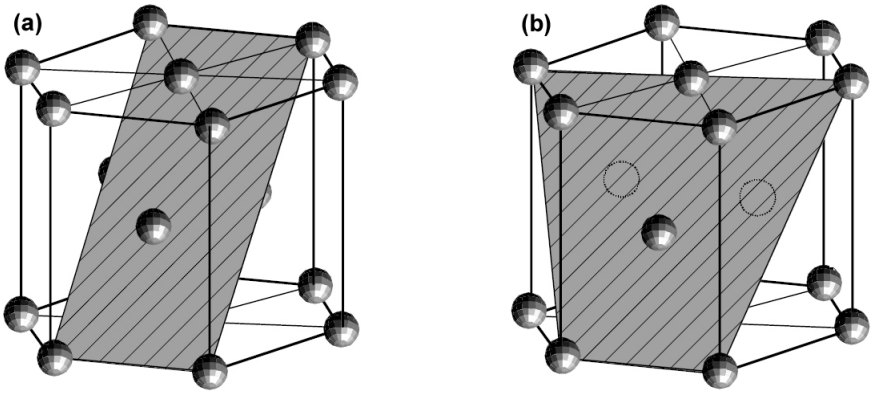


Abb. 2.21: (a) Pyramidalebene 2. Ordnung (Ebenengruppe $\{10\bar{1}2\}$) und (b) 1. Ordnung (Ebenengruppe $\{10\bar{1}1\}$) im hexagonalen Kristall [Drö99]

Wie man sich anhand der Prinzipdarstellung von Abb. 2.19 vorstellen kann, ist dieser Verformungsmechanismus nur unidirektional möglich – die Zwillingsbildung kann also nur in eine Richtung erfolgen.
Da das c/a-Verhältnis des Magnesiums etwas unter dem Idealwert liegt, verlängert sich der Kristall in Richtung der (0001)-Ebene (also senkrecht zu den Basalebenen). Gleichzeitig verkürzt er sich in der anderen Richtung. Dies kann aber nur erfolgen, wenn die Änderungsrichtung des Kristall mit der Orientierung der aufgebrachten Belastung übereinstimmt, da sonst die Versetzungsenergie zu hoch wäre und andere Gleitsysteme zuerst aktiviert würden [Nos03]. Somit ergibt sich eine Anisotropie im Verformungsverhalten – die Zwillingsbildung des reinen Magnesiums kann durch Zugbeanspruchung senkrecht auf die Basalebenen oder durch Druckbeanspruchung parallel zu den Basalebenen ausgelöst werden [Kra08]. Dies führt zu einer ausgeprägten Asymmetrie in den Zug-/Druck-Festigkeiten [Löf08].
Das Umklappen des Kristalls in die Zwillingsposition verläuft mit Schallgeschwindigkeit. Die dabei ausgelösten Schallwellen können bei der Umformung als Knacken und Knistern hörbar werden [Kra08]. Die Zwillingsbildung relaxiert den Werkstoff temporär, mit einer weiteren Zunahme der Totaldehnung steigt jedoch wieder die Spannung und neue Zwillinge bilden sich. Dies führt zu einem welligen Verlauf im Spannungs-Dehnungs-Diagramm. In Abb. 2.22 ist dieses Phänomen gut erkennbar.

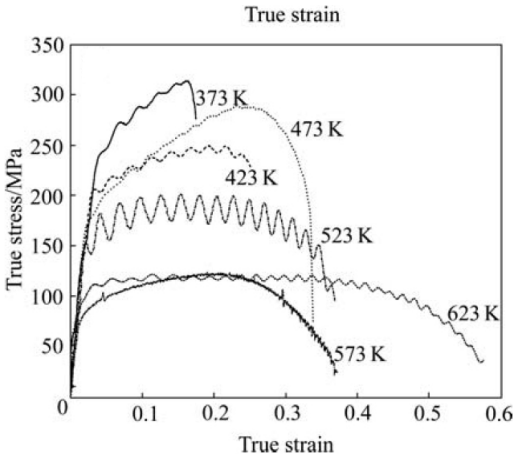


Abb. 2.22: Spannungs-Dehnungs-Diagramm von Zugversuchen mit AZ31 Legierungen bei unterschiedlichen Temperaturen, Dehnrate von $10\,s^{-1}$ [wTea07]

Zwillinge bilden sich meist nur innerhalb eines Kornes. Sie sind parallel zueinander ausgerichtet. Teilweise können sie aber auch über die Korngrenzen wachsen, wie Abb. 2.23 zeigt. Die Korngrenzen sind sehr gut erkennbar, ebenso wie die Zwillinge – anhand der grauen Streifen mit spitz zulaufenden Enden.

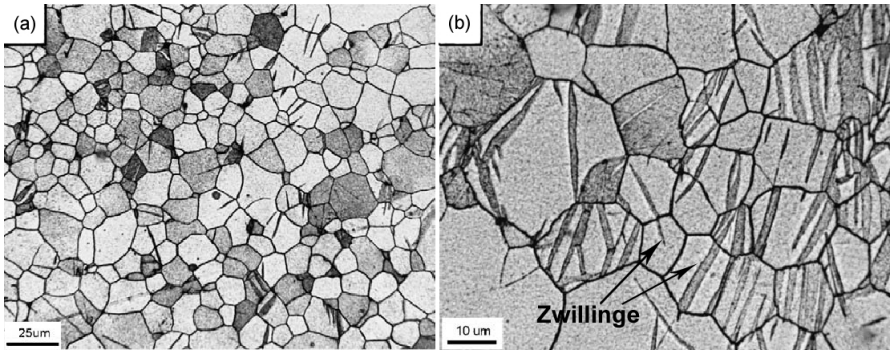


Abb. 2.23: Mikroskopische Aufnahmen einer AZ31 Legierung, zehn Minuten lösungsgeglüht bei 450° C, mit deutlich sichtbarer Zwillingsbildung, (b) in vergrößerter Aufnahme [ea05]

2.6.3 Verformungsverhalten bei hohen Temperaturen (> 225° C)

Bei Temperaturen oberhalb von 225° C steigt die plastische Verformbarkeit sprunghaft an [Kam00],[Löf08]. Dies ist auf die Aktivierung zusätzlicher Gleitsysteme zurückzuführen.

Aufgrund der gestiegenen Beweglichkeit der Atome findet Gleitung auch in den $\{10\bar{1}1\}$ Pyramidal- und in den $\{10\bar{1}0\}$ Prismenebenen in Richtung $\langle 11\bar{2}0\rangle$ statt [Kam00].

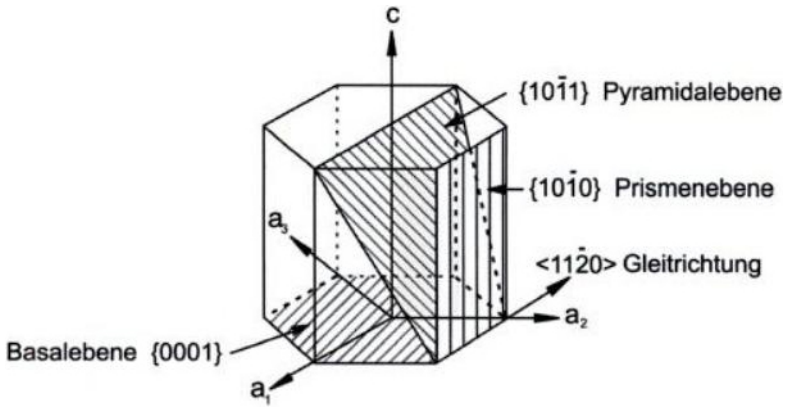


Abb. 2.24: Gleitsysteme im hexagonalen Kristallgitter [ea02]

Bei Temperaturen von ca. 260° C vermutet man ein alternierendes pyramidalisches und prismatisches Gleiten, welches zu welligen Gleitbändern auf der Werkstoffoberfläche führt [ea04].
Ebenso spielt das Einsetzen einer dynamischen Rekristallisation im Temperaturbereich von ca. 235° C bis 280° C eine große Rolle, welches in Abb. 2.25b und c deutlich zu erkennen ist [SJ04].

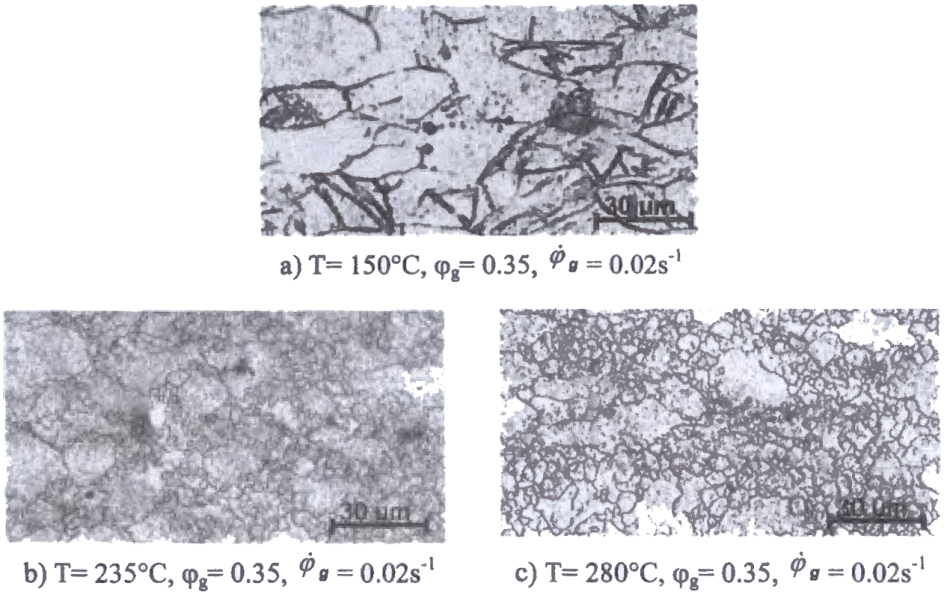


Abb. 2.25: Gefügeausbildung und Einsetzen der Rekristallisation bei verschiedenen Umformtemperaturen und konstanten Dehnungsraten [SJ04]

Zusätzlich zu der Umformtemperatur ist auch die Umformgeschwindigkeit maßgeblich für die Gefügeänderung. Abbildung 2.26 zeigt die steigende Rekristallisationsgeschwindigkeit bei Verringerung der Hauptformänderungsgeschwindigkeit und konstanter Temperatur.
Somit kann die erzielbare Bruchdehnung – und damit auch die Umformbarkeit an sich – mit zunehmender Temperatur und abnehmender Umformgeschwindigkeit gesteigert werden [SJ04].

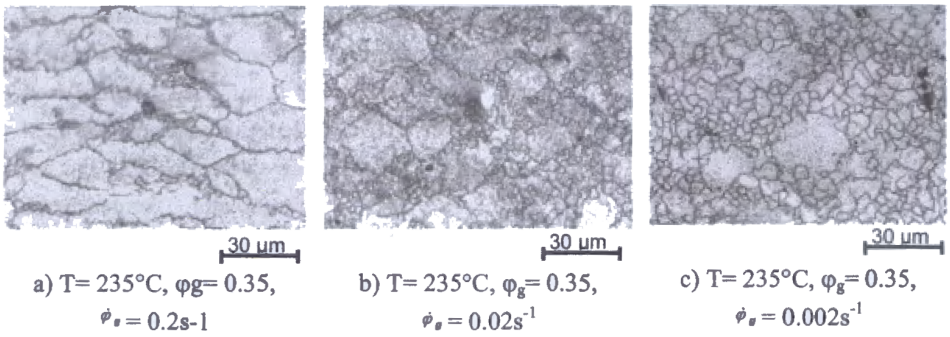


Abb. 2.26: Unterschiedliche Rekristallisationsgeschwindigkeiten bei verschiedenen Dehnungsraten und konstanter Umformtemperatur [SJ04]

2.6.4 Verformungsverhalten bei punktueller Laser-Wärmeeinwirkung

Die in Kapitel 4 beschriebene FE-Simulation basiert auf dem Versuch ein Werkstück punktuell an der Biegekante zu erwärmen. Hierbei gelten grundsätzlich die gleichen Verformungsmechanismen, welche in den vorherigen Abschnitten erläutert wurden, jedoch findet eine Gefügeänderung natürlich nur in der wesentlich kleineren Wärmeeinflusszone statt. Die Wärmeeinwirkung an der Biegekante führt genau dort zu einem Sinken der Fließspannungen und einer thermischen Dehnung [EB98]. Diese Dehnung bringt einen starken Abbau der Zugspannungen an der Biegeaußenkante, wie in Abb. 2.27 dargestellt, mit sich. Die Druckspannungen im unteren, „kalten“ Bereich bleiben hingegen nahezu unbeeinflusst. Sinken die Fließspannungen im erwärmten Bereich bis zu den dort herrschenden Zug- und Druckspannungen ab, so geht der elastische Dehnungszustand in einen plastischen über [EB98]. Somit wird ein Teil der elastischen Verformungsenergie abgebaut und die Rückfederung des Materials geringer.

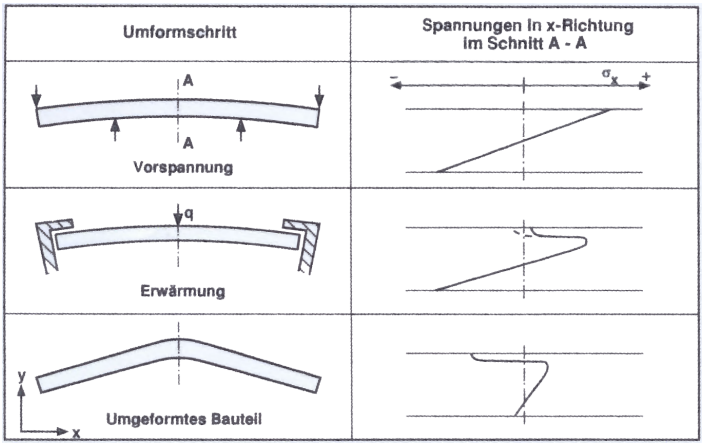


Abb. 2.27: Schematische Darstellung eines Umformvorganges, hervorgerufen durch mechanische und thermische Einwirkung und dessen korrespondierende Spannungsverteilung [EB98]

Die durch den Laser eingebrachte elektronische Energie wird vom Werkstück absorbiert und in Form von Stössen an das Gittersystem abgegeben [Pfl13]. Dieses wird dadurch zu Schwingungen angeregt und wandelt die elektronische in thermische Energie um, welche zu den bereits beschriebenen Werkstoffveränderungen führt [ea91].

2.6.5 Kristallographische Textur

Die gesamten, in den vorigen Abschnitten erläuterten, Gleitsysteme können natürlich erst dann zum Einsatz kommen, wenn die zur Abgleitung notwendige Schubspannung aufgebracht wird. Welche Systeme dann aktiviert werden, hängt von deren Ausrichtung in Bezug auf die makroskopische Belastung ab. Trivialerweise werden sich die Atome in derjenigen Gleitebene zuerst versetzen, in der die Schubspannung maximal, respektive die kritische Schubspannung τ_c überschritten wird.

Das Schmid'sche Schubspannungsgesetz stellt die Winkelbeziehung zwischen Schub- und Normalspannung her:

$$\tau_c = \frac{F}{A} \cdot m_s = \sigma \cdot cos\psi \cdot cos\varphi \tag{2.1}$$

Die Winkel werden in der Prinzipskizze der Abb. 2.28 dargestellt.
Die Stabachse steht unter dem Winkel φ normal zur Gleitebene, die Gleitrichtung im Winkel ψ zur Stabachse. m_s bezeichnet den Orientierungs- bzw. Schmidfaktor [Roo11].

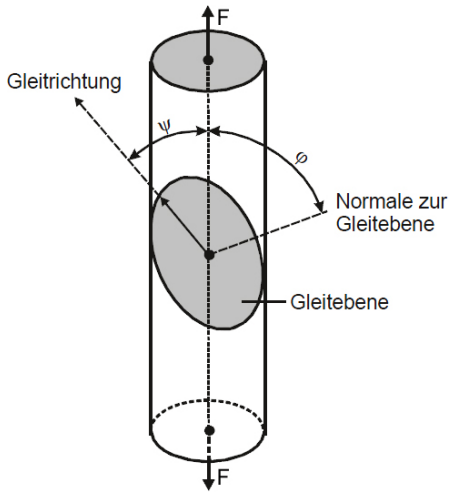


Abb. 2.28: Prinzipskizze zum Schmid'schen Schubspannungsgesetz bei einachsiger Beanspruchung [Roo11]

Die Textur eines Werkstoffes ist maßgeblich für das, je nach Beanspruchungsrichtung, unterschiedliche Umformverhalten, wobei *„Die Gesamtheit der Orientierungen der Kristalle eines vielkristallinen Stückes bezeichnet man als Textur."* [Gre62]. Die Orientierung der einzelnen Elementarzellen innerhalb eines Werkstoffes bestimmt also die jeweils aktivierten Gleitsysteme und somit Festigkeit und Duktilität. Abbildung 2.29 verdeutlicht dies: Liegt die Spannungsrichtung senkrecht zu den Basalebenen (in dem Fall $\alpha = 0°$), so ist die Schubspannung dort minimal, die Aktivierung erfordert eine hohe Spannung und die Zugfestigkeit steigt. Liegt die Spannung jedoch in einem Winkel von 45° an, so ist die Schubspannung maximal ($\tau = 0,5 \cdot \sigma$), die Aktivierungsenergie der Basalgleitsysteme und der Zwillingsbildung ist gering – die Zugfestigkeit sinkt.

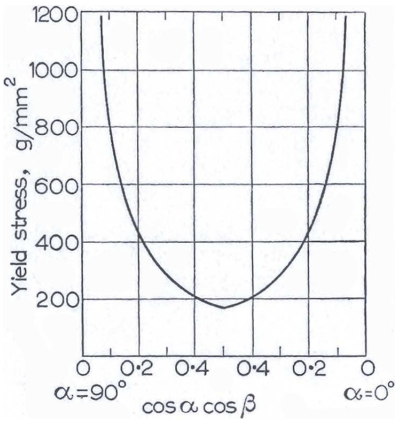


Abb. 2.29: Abhängigkeit der Zugfestigkeit von der Orientierung der Magnesiumkristalle. α ist der Winkel zwischen Zugachse und der Gleitebenen-Normale, β der Winkel zwischen Zugachse und Gleitrichtung [Ray59].

Wird Magnesium, beispielsweise durch Drahtziehen, Walzen, Schmieden, etc., texturiert, so kommt es infolge der hexagonalen Struktur zu einer Asymmetrie unter Zug- und Druckbelastung [Löf08],[Nos03].

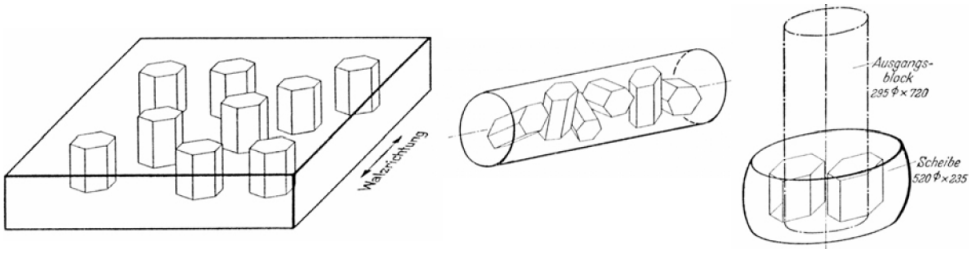


Abb. 2.30: Kristallorientierungen nach Walzen, Strangpressen und unidirektionalem Schmieden [Kra08]

2.7 Magnesiumbasislegierungen

Magnesium weist nur eine geringe Härte und Festigkeit auf. Es findet daher in reiner Form nur wenig Anwendung. Durch das Legieren mit anderen Elementen sowie durch unterschiedliche Herstellbedingungen (Walzen, Strangpressen, etc.) können aber die Eigenschaften stark beeinflusst bzw. verbessert werden [Löf08].

2.7.1 Nomenklatur

Magnesiumlegierungen werden nach ihrem Herstellverfahren in Guss- und Knetlegierungen eingeteilt. Die Bezeichnung der Gusslegierungen sind nach DIN EN 1753 [DIN97], die der Knetlegierungen nach DIN 1729-1 [DIN82] genormt. Für beide Gruppen gibt es auch die Bezeichnung nach ASTM B 275-05 [Int95], wobei dieser die weitaus größere Bedeutung zukommt. Magnesiumwerkstoffe werden fast immer nach dieser Norm gekennzeichnet.

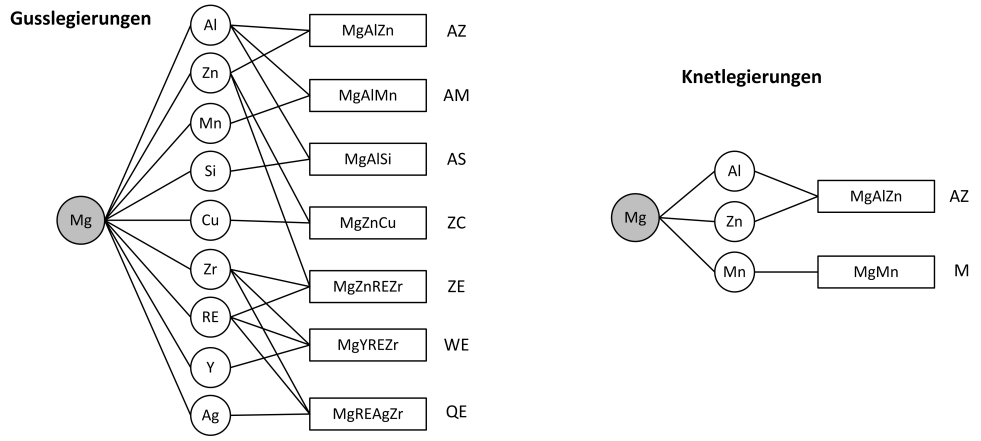


Abb. 2.31: Einteilung der Guss- und Knetlegierungen nach DIN EN 1753 bzw. DIN 1729-1. Nachstehende Buchstabenkennzeichnungen sind gemäß ASTM B 275 [Kam00]

Gemäß des ASTM-Standards setzt sich die Werkstoffbezeichnung aus zwei Großbuchstaben für die Hauptlegierungselemente sowie zwei Ziffern für deren Legierungsgehalt in Masse-Prozent zusammen. Beispielsweise besteht die Legierung AZ31 zu 3% aus Aluminium und zu 1% aus Zink. Eine Null, z.B. AM60, steht für einen Anteil von kleiner 1%. In Tab. 2.3 sind die Bezeichnungen der Legierungselemente angeführt.

Bezeichnung	Element	Bezeichnung	Element
A	Aluminium	N	Nickel
B	Wismuth	P	Blei
C	Kupfer	Q	Silber
D	Cadmium	R	Chrom
E	seltene Erden*	S	Silicium
F	Eisen	T	Zinn
H	Thorium	W	Yttrium
K	Zirconium	Y	Antimon
L	Lithium	Z	Zink
M	Mangan		
*auch SE oder RE bezeichnet, hierzu gehören Cer, Lathan, Neodym, usw.			

Tab. 2.3: Bezeichnung der Legierungselemente nach ASTM B 275 [Kam00]

Für den Werkstoffzustand werden Bezeichnungen gemäß ASTM B 296 [Int67] an die Legierungsbezeichnung angehängt. Zwischen Legierungs- und Werkstoffzustands-Bezeichnung werden teilweise auch Buchstaben angeführt, welche die Entwicklungsstufe der je-

weiligen Legierung kennzeichnen [Kle02]. Beispielsweise steht AZ91 D für eine Magnesiumlegierung mit 9% Aluminium und 1% Zink in der vierten Entwicklungsstufe.

Zustand	Bedeutung
F	Herstellungszustand
O	weichgeglüht, rekristallisiert (nur für Knetprodukte)
Hxx	kaltverfestigt (nur für Knetprodukte), xx steht für Ziffern des genauen Werkstoffzustandes
W	lösungsgeglüht (instabiler Zustand)
Tx	wärmebehandelt, Temperbezeichnungen, um einen stabilen Zustand herzustellen

Tab. 2.4: Zustandsbezeichnungen von Magnesiumguss nach ASTM B 296 (auszugsweise) [Kam00]

2.7.2 Legierungselemente und deren Einfluss

Wie bereits erwähnt, können Legierungselemente die Eigenschaften von Magnesium in vielerlei Hinsicht verbessern. Die Mechanismen zur Steigerung der Festigkeit sind Mischkristall-, Ausscheidungsverfestigung oder Feinkornhärtung [Kle02]. Der Hall-Patch-Effekt – wonach die Streckgrenze mit sinkender Korngröße zunimmt – beschreibt beispielsweise die Wirkung der Kornfeinung zur Steigerung der Festigkeits- und Umformbarkeits-Eigenschaften [Kra08],[Löf08].

Durch das Legieren kann allerdings nicht nur eine Festigkeitssteigerung erzielt, sondern auch andere Eigenschaften wie Korrosionsbeständigkeit, Warmfestigkeit, Schweisseignung und dgl. beeinflusst werden. In der folgenden Tabelle wird die Auswirkung der wichtigsten Legierungselemente zusammengefasst.

Element	Wirkung
Al	Aluminium, als das „klassische“ und meist verwendete Legierungselement, führt zu einer Erhöhung der Zugfestigkeit und Härte. Der Effekt der Festigkeitssteigerung – aufgrund der Ausscheidungshärtung über die intermetallische Phase $Mg_{17}Al_{12}$ – wird nur bis zu einer Temperatur von 120° C beobachtet [Kai03b]. Weiters wird durch Aluminium die Gießbarkeit markant erhöht (eutektisches System bei T_E =437° C), weshalb der Großteil der Gusslegierungen – meistens AZ91 – einen hohen Aluminium-Anteil aufweist. Diese positiven Eigenschaften gehen allerdings zu Lasten einer erhöhten Mikroporosität. Bei zu hohem Al-Anteil (über 13%) werden die Werkstoffe zunehmend spröde und schlechter verformbar [Pid46]. Ein Legierungsanteil von 3-10% ist üblich.
Ag	Silber, in Verbindungen mit den Metallen der Seltenen Erden, führt zu einer starken Erhöhung der Warm- und Kriechfestigkeit, bringt jedoch schlechte Korrosionseigenschaften mit sich.
Ca	Calcium hat einen positiven Effekt auf die Kornfeinung und erhöht die Kriechbeständigkeit. Es neigt jedoch zu einer erhöhten Klebeneigung an Gussformen und fördert die Heißrissbildung.
Li	Lithium bringt eine Verbesserung der Duktilität bei gleichzeitiger Verschlechterung der Korrosionseigenschaften mit sich. Ebenso hat es sehr schlechte Eigenschaften bezüglich der Entflammbarkeit der Schmelze. Aufgrund der geringen Dichte von Lithium sind Legierungen mit diesem Element allerdings besonders leicht.
Mn	Durch Zugabe von Mangan lässt sich eine starke Verbesserung der Korrosionsbeständigkeit sowie der Duktilität herbeiführen. Geringe Mengen von Mangan (unter 1%) ergeben einen hochduktilen Werkstoff [Gün06]. Über 1,5% Mangananteil führt zu einer, wenn auch geringen, Verbesserung der Festigkeit.
SE	Die Seltenen-Erden-Metalle – insbesondere Cer, Neodym und Yttrium – weisen mit Magnesium ein eutektisches Zustandsdiagramm mit begrenzter Löslichkeit auf der Magnesiumseite auf. Dies führt zu einer starken Festigkeitserhöhung durch Ausscheidungshärtung. Hohe Warmfestigkeit und Kriechbeständigkeit ergeben sich durch die stabilen Ausscheidungen.

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung

Element	Wirkung
Si	Silizium erhöht ebenfalls die Warmfestigkeit und Kriechbeständigung, führt jedoch zu schlechten Gießeigenschaften.
Zn	Zink hat ähnliche Legierungseigenschaften wie Aluminium und verbessert daher die Giessbarkeit und Festigkeit. Es ist bis zu 6,5% in Legierungen enthalten, allerdings steigt ab ca. 2% die Heißrissbildung, ähnlich wie bei Calcium. Zudem erhöht sich die Mikroporosität, die Schweißbarkeit verschlechtert sich.
Zr	Zirkonium steigert die Zugfestigkeit, ohne dabei jedoch die Duktilität negativ zu beeinflussen. Da es eine starke Affinität zu Sauerstoff aufweist, bilden sich Zirkonoxide, welche als Kristallisationskeime in der Schmelze wirken und so zu einer sehr effektiven Kornfeinung führen. Dies bewirkt auch eine Verbesserung der Umformbarkeit, allerdings kann Zirkon nicht mit Aluminium oder Silizium legiert werden, da sonst die kornfeinende Wirkung verloren gehen würde.

Tab. 2.5: Wirkung der wichtigsten Legierungselemente [Kam00], [Kai03b], [Wah03], [Drö99]

2.7.3 Legierungen in der Praxis

Magnesium kommt in Form von Guss- und Knetlegierungen zum Einsatz. Bei Gussverfahren werden häufig AZ91, AZ81 und AM60 Legierungen verwendet, da sich – aufgrund des hohen Aluminiumanteils – dünnwandige, komplexe Bauteile im Druckgussverfahren gut herstellen lassen. AZ91 wird als Universallegierung in verschiedenen Anwendungsbereichen bis ca. 120° C besonders häufig verwendet [Rei08]. Die Legierungen mit Mangan werden vorallem dann verwendet, wenn gutes Umformvermögen erwünscht ist [Drö99]. Ebenso bei Anwendungen, in denen es auf hohe Duktilität ankommt, beispielsweise in sicherheitsrelevanten Bereichen wie den Crash-optimierten Türholmen eines PKW's (z.B. mit AM20) [Nos03],[Gün06].
AS41 und AS21 sind kostengünstige, kriechfeste Metalle, die in letzter Zeit allerdings aufgrund der schlechten Gießeigenschaften weniger häufig verwendet wurden [Drö99].
Die Legierungen AE, QE, WE und ZE mit Seltenen-Erden-Metallen zeichnen sich zwar durch ihre Warmfestigkeit aus, sie sind somit für Einsatztemperaturen von über 200° C geeignet, werden jedoch nur in High-Tech Bereichen, wie in der Luft- und Raumfahrtindustrie, eingesetzt, da die Ausgangsmaterialen relativ teuer sind (25 €/kg für WE54, im Vergleich zu 2-3 €/kg für eine AZ oder AM-Legierung [Kai03b]). Somit ist ein Großserieneinsatz, wie z.B. in der PKW-Produktion, nicht möglich. WE-Legierungen lassen sich auch schmieden und strangpressen, somit können sie nicht nur als Guss- sondern auch als Knetlegierung verwendet werden [Kra08],[Drö99].

Legierungen mit Lithium haben zwar, wie zuvor schon erwähnt, schlechte Korrosionseigenschaften, werden aber aufgrund der geringen Dichte (Lithium ist das leichteste Metall) immer interessanter. Die Verbesserung der Duktilität in Verbindung mit dem Trend zum Leichtbau verspricht dieser Legierung gute Zukunftsaussichten [ea05].
Um die Korrosionseigenschaften der Magnesiumlegierungen zu verbessern, werden auch zunehmend High-Purity (HP) Legierungen mit besonders geringen Verunreinigungen an Kupfer, Nickel und Eisen eingesetzt [Kai03b].
In Bereichen, in denen es vorwiegend um hohe Festigkeit und weniger um die Schweißbarkeit geht, kommen bspw. ZK51 und ZK61 Legierungen zum Einsatz [Wah03].
Folgende Tabelle zeigt charakteristische mechanische Eigenschaften gängiger Magnesiumgusslegierungen.

Eigenschaft	Einheit	AZ91	AM60	AM20	AS41	AE42	WE43
Zugfestigkeit	$^{N}/_{mm^2}$	240	225	190	215	230	270
0,2% Dehngrenze	$^{N}/_{mm^2}$	160	130	90	140	145	170
Druckfestigkeit	$^{N}/_{mm^2}$	148	ng*	74	ng	103	ng
Bruchdehnung	%	3	8	12	6	10	2
E-Modul	GPa	45	45	45	45	45	45
Brinellhärte	HBS	70	65	45	60	60	85

Tab. 2.6: Mechanische Eigenschaften ausgewählter Magnesiumgusslegierungen (bei Raumtemperatur) [Rei08]

Neben den zumeist verwendeten Gusslegierungen ist Magnesium auch als Knetlegierung erhältlich. Diese zeichnet sich, bedingt durch die in Abschnitt 2.3.3 beschriebenen Verarbeitungsverfahren, besonders durch hohe Festigkeiten aus. Die durch den Bearbeitungsprozess herrührende Textur führt zu einer Richtungsabhängigkeit der mechanischen Eigenschaften, wobei sich diese gezielt für diverse Anwendungen nutzen lassen [Kra08].

Da die Umformbarkeit relativ schlecht ist und es diesbezüglich noch wenige Untersuchungen gibt, ist die Zahl der am Markt erhätlichen Knetlegierungen noch gering. Die gute Ermüdungs- und Wechselfestigkeit macht sie jedoch für stoßbelastete Teile, z.B. Räder, in letzter Zeit wieder sehr interessant. Ebenso bringt das fehlerfreie Gefüge, gerade in sicherheitsrelevanten Bereichen, wesentliche Vorteile gegenüber konventionellen Gusswerkstoffen [Drö99],[Löf08],[Kle02].
Zu den häufigsten Vertretern zählen die AZ-Legierungen (AZ31, AZ80), wobei auch Legierungen mit Mangan, Zirkonium und Seltenen-Erden produziert werden [Drö99]. ZE42, QE22 oder WE43 Legierungen kommen für Sonderanwendungen, wie hohe Einsatztemperaturen, zur Anwendung [Kam00].
Tabelle 2.7 zeigt charakteristische mechanische Eigenschaften gängiger Magnesiumknetlegierungen.

*nicht gemessen

Eigenschaft	Einheit	AZ31B	AZ61	AZ80A	ZK30A	ZK60A
Zugfestigkeit	N/mm²	260	315	380	309	365
0,2% Dehngrenze	N/mm²	200	230	275	239	305
Druckfestigkeit	N/mm²	105	145	240	213	250
Bruchdehnung	%	15	17	8	18	12

Tab. 2.7: Mechanische Eigenschaften ausgewählter Magnesiumknetlegierungen (stranggepresste Profile bei Raumtemperatur) [Kam00]

Hier sind deren Vorteile in Bezug auf Festigkeit und Bruchdehnung zahlenmäßig klar ersichtlich.
In Abb. 2.32 werden generelle Tendenzen in der Entwicklung von Magnesiumlegierungen dargestellt.

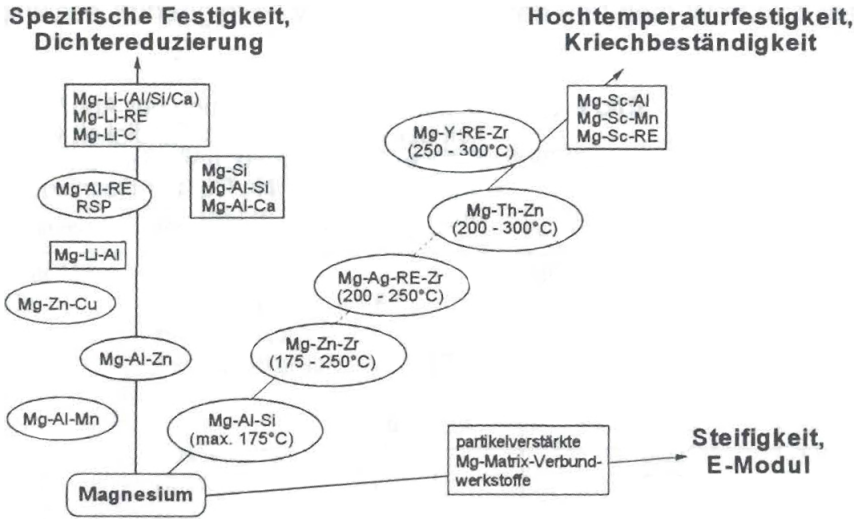


Abb. 2.32: Entwicklungstendenzen bei Magnesiumlegierungen [Kam00]

Kapitel 3

Finite Elemente Methoden

3.1 Einleitung

Die Erstellung und vorallem die Auswertung einer FE-Analyse erfordert ein hohes Maß an theoretischem Wissen, daher sollen in diesem Kapitel die Grundlagen und die Funktionsweise der Finite Elemente Methoden erläutert werden.
Da die FEM (Finite Elemente Methode) ein recht umfassendes und komplexes Thema ist, wird hier nur auf spezifische Themen eingegangen, die für die Simulation, welche im nächsten Kapitel beschrieben wird, benötigt werden.
In den ersten Abschnitten werden die mechanisch/mathematischen Grundlagen erläutert, anschließend auf die Nicht-Linearität (plastisches Materialverhalten, geometrische Nicht-Linearität) und den Einfluss von Temperatur eingegangen. Abschließend soll kurz die praktische, computer-unterstützte Umsetzung mit FEM-Programmen beschrieben werden.

Da die Methode der finiten Elemente für ein äußerst weites Anwendungsspektrum eingesetzt werden kann, ist sie heute das am weitesten verbreitete numerische Berechnungsverfahren in den Ingenieurwissenschaften [Frö95]. Es können damit nicht nur Probleme aus der Mechanik, sondern auch in Gebieten der Strömungslehre, Thermodynamik, Akustik oder der Wettervorhersage gelöst werden [Dan11].
Der Aufwand zur Problemlösung kann teilweise enorm sein, wird jedoch – aufgrund des hohen Formalisierungsgrades – fast vollständig dem Computer übertragen [Dan11]. So können heutzutage auch komplexe Probleme, dank leistungsstarker FEM-Software, mit relativ geringem Aufwand gelöst werden.

3.2 Prinzip und Vorgehensweise einer FE-Analyse

Die Methode der finiten Elemente ist ein Näherungsverfahren, bei dem eine Struktur – ein Kontinuum – in viele kleine Elemente, deren Abmessungen finit, also endlich sind, unterteilt wird [Frö05],[Dan11]. Das physikalische Problem wird dadurch idealisiert und mittels eines mathematischen Modells hergeleitet. Dieses wird dann mithilfe der FEM gelöst [Ger07].
Die Unterteilung einer Struktur in finite Elemente bezeichnet man als Diskretisierung [Frö95]. Hierbei können verschiedenste Elementtypen gewählt werden, welche im Laufe dieses Kapitels kurz vorgestellt werden. Abbildung 3.1 zeigt den prinzipiellen Vorgang der Diskretisierung. Die einzelnen Elemente werden nur an bestimmten Punkten, den sogenannenten *Knoten*, miteinander verbunden [Dan11].

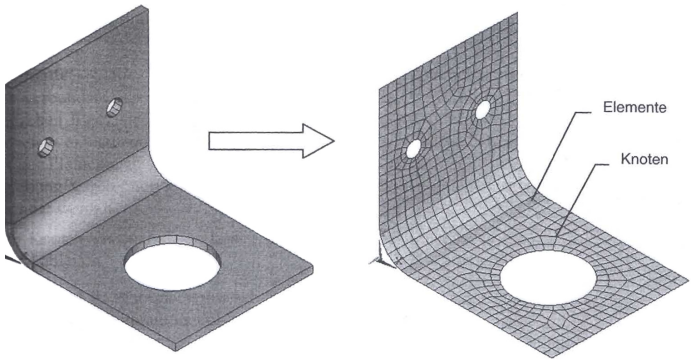


Abb. 3.1: Zerlegung einer Bauteilstruktur in finite Elemente (Diskretisierung - „Vernetzen“) [Frö05]

Die Struktur wird diskretisiert, da sich das (Verformungs-) Verhalten an den einzelnen finiten Elementen wesentlich leichter berechnen lässt als an der Gesamtstruktur [Frö05]. Die Knoten stehen dabei für Verknüpfungsbedingungen zwischen den jeweiligen Teilen. Es ist leicht ersichtlich, dass benachbarte Elemente an diesen Punkten die gleiche Verschiebung und Verdrehung aufweisen müssen [Frö95]. Durch diese Bedingungen kann die Verformung bzw. Verschiebung der Gesamtstruktur näherungsweise berechnet werden. Aus den jeweiligen Knotenverschiebungen lassen sich die Dehnungen und daraus – mit Hilfe der Materialeigenschaften – die Spannungen am Bauteil ableiten [Frö05]. Die äußeren Belastungen, also angreifende Kräfte und Lagerreaktionen, werden dabei nur an den Knoten eingeleitet. Somit müssen sämtliche Lasten und Belastungen (z.B. auch Temperatureinflüsse) auf äquivalente Knotenlasten reduziert werden [Dan11].

Die Vorgehensweise bei einer Finite-Elemente-Analyse ist im Prinzip immer die gleiche - die einzelnen Schritte werden in Abb. 3.2 dargestellt.
Im ersten Schritt – der Modellierung – wird das reale Bauteil idealisiert und diskretisiert. Dabei wird eine passende Form der finiten Elemente gewählt.

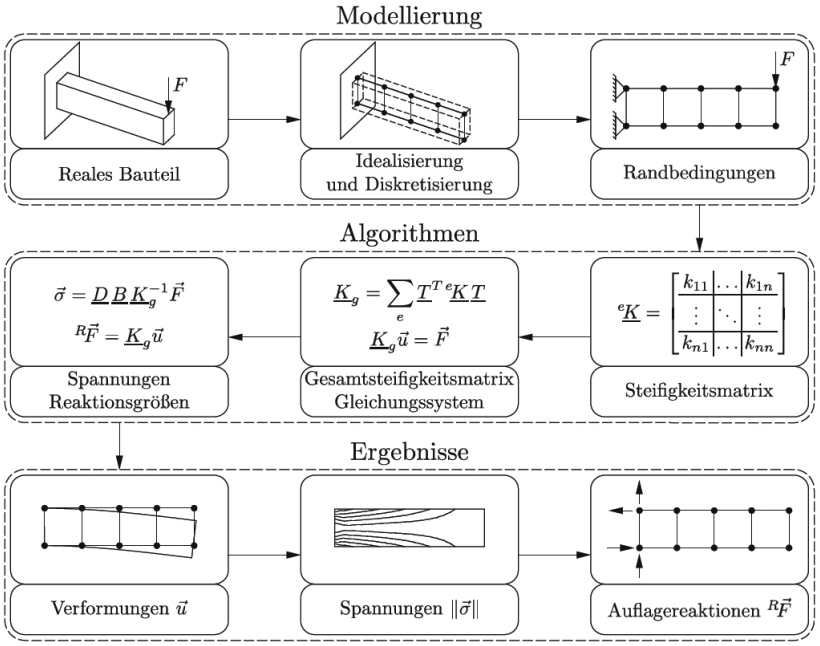


Abb. 3.2: Prinzipieller Ablauf einer Finite-Elemente-Analyse [Ste10]

Meist sind es Drei- oder Vierecke bzw. in drei-dimensionalen Gebilden Tetraeder, Prismen oder Hexaeder [Abe72]. Dies führt auf das sogenannte FE-Netz (siehe auch Kap. 3.10) [Ste10]. Anschließend werden dem Modell die Randbedingungen, also beispielsweise Belastungen, Einspannungen, etc. aufgeprägt und ein Verschiebungsmodell festgelegt. Die Verschiebungen werden in der Regel mit Polynomen angenähert [Abe72]. Die einfachste, aber natürlich auch ungenaueste Form, ist das lineare Polynom, welches in Abb. 3.3 dargestellt ist. Die Änderungen der Verschiebungen zwischen den Eckpunkten/Knoten werden dabei linear angenommen.

Im nächsten Schritt wird die Elementsteifigkeitsmatrix und daraus anschließend die Gesamtsteifigkeitsmatrix anhand der geometrischen und materiellen Eigenschaften aufgestellt. Die Steifigkeitsmatrix setzt die Knotenverschiebungen mit den dort angreifenden Kräften in Beziehung [Abe72]. Das Gleichgewicht zwischen der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$, der Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ und der Kräfte $\boldsymbol{f}$ führt zu einem linearen, algebraischen Gleichungssystem, welches im Allgemeinen in der Form[1]

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \tag{3.1}$$

angeschrieben wird [Abe72].

[1]Die im Folgenden verwendete Notation:

Matrix: $\boldsymbol{A}$
Vektor: $\boldsymbol{a}$

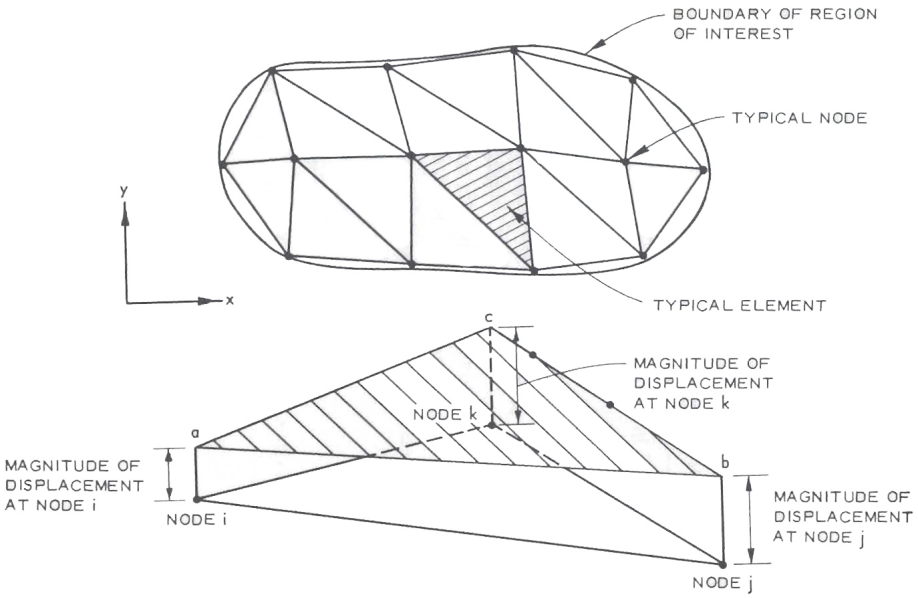


Abb. 3.3: Diskretisierung einer zwei-dimensionalen Struktur mit Dreieckselementen (oben) und isometrische Ansicht eines Elementes mit eingezeichnetem linearen Verschiebungsmodell (unten) [Abe72]

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix stellt eine Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems dar, dessen Lösung auf die unbekannten Verformungen $\boldsymbol{u}$ führt. Zur Lösung dieses Gleichungssystems müssen allerdings die Randbedingungen, also Einspannungen, Lagerungen, etc., mitberücksichtigt werden [Ste10].
Im letzten Schritt werden dann die Spannungen und Auflagerreaktionen – mit Hilfe der Materialeigenschaften – aus den Verformungen berechnet.

3.3 Elastizitätstheorie

Die Methode der finiten Elemente basiert im Wesentlichen auf den Grundlagen der Elastizitätstheorie [Ste92]. Diese liefern – über Verzerrungstensor und Materialgleichungen – die Zusammenhänge zwischen dem Verschiebungsfeld und dem Spannungstensor [Ros10].

3.3.1 Deformationen

Betrachtet man einen Körper zum Zeitpunkt $t = 0$ in seiner Ausgangslage, also im unverformten Zustand, so ist die Verbindung der Körperpunkte P und Q in Abb. 3.4 eine Gerade.

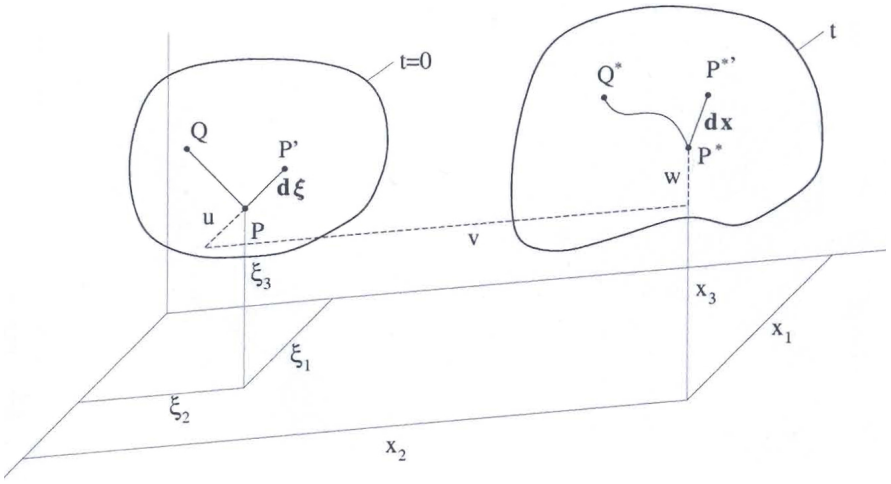


Abb. 3.4: Körperkonfiguration zu den Zeitpunkten t=0 und t [Ros10]

Zur Zeit t ist die Verbindung $\overline{P^*Q^*}$ jedoch gekrümmt – der Körper hat sich also deformiert. Wird ein Teil eines Körpers deformiert, während ein anderer starr bleibt, so spricht man von einer Verzerrung [Ros10].
Die Lage des Körpers bezieht sich auf ein rechtwinkeliges, kartesisches Koordinatensystem, wobei die Koordinaten des beliebigen Körperpunktes P in der Ausgangslage ($t = 0$) ξ_1, ξ_2, ξ_3 seien und als Lagrange oder materielle Koordinaten bezeichnet werden. Zum Zeitpunkt t sei die Lage des Körpers mit x_1, x_2, x_3 beschrieben. Diese werden als Eulersche oder räumliche Koordinaten bezeichnet. Die Bewegung des Punktes kann also als stetige Abbildung in der Form

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3.2}$$

dargestellt werden, wobei auch eine eindeutige Umkehrfunktion

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3, t) \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3.3}$$

vorhanden sein soll.
Betrachtet man nun das differentielle materielle Linienelement $\boldsymbol{d\xi} = \overline{PP'}$ aus Abb. 3.4, so geht es nach der Deformation in das differentielle Linienelement $\boldsymbol{dx} = \overline{P^*P^{*\prime}}$ über. Daher folgt mit Gl. 3.2:

$$dx_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j = \sum_j F_{ij} d\xi_j \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3.4}$$

bzw. in Vektor-/Matrizennotation

$$\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{d\xi}. \tag{3.5}$$

Die Matrix $\boldsymbol{F}$ bezeichnet man als *Deformationsgradiententensor* – er beschreibt die lokale Deformation. Dieser Tensor ist jedoch zur Beschreibung von Verzerrungen physikalisch

unbrauchbar, da er bei Starrkörperbewegungen nicht verschwindet und ebenso nicht invariant bleibt. (Dies müsste jedoch der Fall sein, da starre Körper trivialerweise nicht deformiert werden können und Verzerrungen nicht vom gewählten Koordinatensystem abhängen dürfen.)

3.3.2 Verzerrungen

Als Maß für die Verzerrung führt man daher eine neue Größe $\boldsymbol{G}$, den *Green'schen Verzerrungstensor*, ein. Er beschreibt die Änderungen der Länge des Linienelementes $\boldsymbol{d\xi}$ und wird über die Differenz der Quadrate der Längen des verformten und des unverformten Körpers gebildet. Aus Gl. 3.5 und der Länge dl des differentiellen Bogenelementes $\boldsymbol{dx}$ folgt

$$dl^2 = \boldsymbol{dx}^T \boldsymbol{dx} = (\boldsymbol{F}\boldsymbol{d\xi})^T \boldsymbol{F}\boldsymbol{d\xi} = \boldsymbol{d\xi}^T \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F}\boldsymbol{d\xi} = \boldsymbol{d\xi}^T \boldsymbol{C}\boldsymbol{d\xi}, \tag{3.6}$$

wobei

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F}$$

gesetzt wurde. Im unverformten Zustand ergibt sich die Länge des Bogenelementes zu

$$dl_0^2 = \boldsymbol{d\xi}^T \boldsymbol{d\xi} = \boldsymbol{d\xi}^T \boldsymbol{E}\boldsymbol{d\xi}, \tag{3.7}$$

wobei $\boldsymbol{E}$ die Einheitsmatrix ist. Daraus folgt

$$dl^2 - dl_0^2 = \boldsymbol{d\xi}^T (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{d\xi} = \boldsymbol{d\xi}^T 2\boldsymbol{G}\boldsymbol{d\xi}. \tag{3.8}$$

Die Komponenten des Green'sche Verzerrungstensor $\boldsymbol{G}$ beziehen sich also auf den unverformten Zustand. Sie werden daher in den Lagrange Koordinaten angeschrieben.
Führt man nun den in Abb. 3.4 eingezeichneten Verschiebungsvektor (u, v, w) ein, so ergeben sich die Komponenten des Verzerrungstensors, nach einigen kleinen Umformungen, zu:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \tag{3.9a}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \tag{3.9b}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \tag{3.9c}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{3.10a}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{3.10b}$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{3.10c}$$

Die sechs Größen ε_{ij} sind die *Verzerrungen* eines Körpers, welche im Allgemeinen nicht mit den Längenänderungen – den *Dehnungen* – beziehungsweise den Winkeländerungen – den *Gleitungen* – übereinstimmen. Mit Hilfe einiger geometrischer Überlegungen und Umformungen, welche ausführlich in [Ros10] und [Ger07] dargestellt sind, lässt sich folgender nichtlinearer Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Dehnungen anschreiben:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\varepsilon_{xx}}} - 1 \tag{3.11}$$

Diese Gleichung gilt für ein infinitesimales Bogenelement, welches *nach* der Deformation parallel zur x-Achse liegt. Die Größe ε_x ist die relative Längenänderung, also die Dehnung, in x-Richtung. Analog dazu können auch die anderen Dehnungen durch Einsetzen der jeweiligen Koordinaten-Richtungen ermittelt werden.

Für die Winkeländerungen zufolge der Verzerrungen gilt (ohne Anführung der Zwischenschritte):

$$\sin\gamma_{xy} = 2(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)\varepsilon_{xy} \tag{3.12}$$

Die Größe γ_{xy} steht für die *Abnahme* des Winkels, welcher *nach* der Deformation einen rechten Winkel zwischen den zwei Bogenelementen dx (parallel zur x-Achse) und dy (parallel zur y-Achse) einschließt. Durch Ersetzen der Indizes können wiederum die Winkeländerungen der anderen Flächen berechnet werden.

3.3.3 Spannungen

Die im vorherigen Abschnitt errechneten Verzerrungen werden mittels Materialgleichungen in Spannungen bzw. den Spannungstensor überführt.
Die Materialgleichungen beschreiben also die Abhängigkeit von Spannungs- und Verzerrungszustand in einem Körper. Sie werden, wie der Name schon sagt, abhängig vom Material (-verhalten) definiert.
Es gibt eine Vielzahl unterschiedlicher Materialgesetze, welche großteils in [Ros10] angeführt sind. Im Folgenden soll aber nur auf das Hooke'sche Gesetz für elastische Festkörper eingegangen werden. Hierbei ist der Spannungstensor eine Funktion des Verzerrungstensors beziehungsweise des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors.

Allgemein wird ein elastisches Material als ein solches definiert, in dem die Komponenten des *Cauchy'schen Spannungstensors* $\sigma_{ik}(\boldsymbol{x}, t)$ im Punkt $\boldsymbol{x}$ zur Zeit t nur von den Elementen $F_{ik}(\boldsymbol{x}, t)$ des Deformationsgradiententensors in diesem Punkt zu dieser Zeit abhängen. Mathematisch formuliert:[2]

$$\sigma_{ik}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{f}_{ik}(F_{11}, (\boldsymbol{x}, t), \ldots, F_{33}(\boldsymbol{x}, t)) \tag{3.13}$$

Das Hooke'sche Gesetz ist der einfachste lineare Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen. Die technisch wichtigsten Werkstoffe – die Metalle – gehorchen, im elastischen Bereich, diesem Gesetz [Ros10].

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{3.14}$$

bildet den linearen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen, wobei C_{ijkl} ein Tensor vierter Stufe ist, dessen 81 Komponenten (3×3×3×3) – aufgrund der Symmetrie des Cauchy'schen Spannungs- und des Green'schen Verzerrungstensors – in eine 6×6-Matrix zusammengefasst werden können [Ger07]. Da auch diese Matrix symmetrisch ist, reduziert sich die Zahl der unabhängigen Komponenten auf 21 [Ros10].
Ist der zu betrachtende Körper homogen und isotrop, so reduziert sich die Matrix (wegen der Symmetrie) sogar auf nur mehr zwei Komponenten. Diese sind z.B. das Elastizitätsmodul E und die Querdehnzahl μ oder die Lamé'schen Konstanten λ und G.
Das Elastizitätsmodul E beschreibt den Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen bei Verformungen im linear elastischen Bereich.
Die Querdehn- oder Poissonzahl μ (in der Literatur des Öfteren auch als ν bezeichnet) beschreibt das Verhältnis zwischen Quer- und Längsdehnung, also $\mu = \varepsilon_{\text{quer}}/\varepsilon_{\text{längs}}$. In der Regel unterliegen Werkstoffe nämlich einer Querkontraktion, wenn sie längsseits gedehnt werden.
Mit der Konstanten G wird das Verhältnis zwischen Schubspannungen und den daraus resultierenden Winkeländerungen festgelegt. Daher wird G als Schubmodul bezeichnet.
Die Lamé'sche Konstante λ verbindet Schubmodul und Querdehnzahl.
Die vier Konstanten sind durch die folgenden zwei Gleichungen miteinander verknüpft – es sind daher nur zwei unabhängig voneinander:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{3.15}$$

$$\lambda = \frac{2G\mu}{1-2\mu} \tag{3.16}$$

[2] $\boldsymbol{f}$ ist eine tensorwertige Funktion des Deformationsgradiententensors.
Diese Formulierung des Materialgesetzes setzt Homogenität bezüglich des Materials und der Zeit voraus.

Verwendet man nun diese Konstanten im Hooke'schen Gesetz, so ergeben sich die Spannungskomponenten zu

$$\sigma_{xx} = 2G\left(\varepsilon_{xx} + \frac{\mu}{1-2\mu}e\right), \qquad \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}, \tag{3.17a}$$

$$\sigma_{yy} = 2G\left(\varepsilon_{yy} + \frac{\mu}{1-2\mu}e\right), \qquad \sigma_{yz} = 2G\varepsilon_{yz}, \tag{3.17b}$$

$$\sigma_{zz} = 2G\left(\varepsilon_{zz} + \frac{\mu}{1-2\mu}e\right), \qquad \sigma_{zx} = 2G\varepsilon_{zx}, \tag{3.17c}$$

wobei e die erste Invariante respektive Spur des Verzerrungstensors bezeichnet und als $e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ definiert ist.
In Indexschreibweise wird das Hooke'sche Gesetz als[3]

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \tag{3.18}$$

formuliert – der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen ist somit hergestellt.
Verwendet man noch die Beziehungen zwischen Verzerrung und Dehnung (Gl. 3.11 und 3.12), dann lassen sich Spannungen und Dehnungen direkt miteinander verknüpfen. Bei kleinen Verzerrungen – die ja Voraussetzung für die Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes sind – können die Gleichungen 3.11 und 3.12 linearisiert werden[4] und es gilt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\frac{E}{1+\mu}\begin{bmatrix}\frac{1-\mu}{1-2\mu} & \frac{\mu}{1-2\mu} & \frac{\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\mu}{1-2\mu} & \frac{1-\mu}{1-2\mu} & \frac{\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\mu}{1-2\mu} & \frac{\mu}{1-2\mu} & \frac{1-\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.19}$$

In der Literatur wird die Matrix C auch teilweise mit D symbolisiert und als Materialmatrix oder Elastizitätstensor bezeichnet [Ger07],[Abe72].
Die oben angeführte Gleichung gilt für einen isotropen Körper, das heißt, die Materialeigenschaften sind invariant bezüglich der Orientierung und werden von zwei unabhängigen Konstanten (E und μ) beschrieben.

[3] Nach der Einstein'schen Summationskonvention wird hier über doppelt vorkommende Indizes von 1 bis 3 summiert. δ bezeichnet das Kronecker-Delta.

[4] Gleichung 3.11 geht über in $\varepsilon_{xx} \approx \varepsilon_x$ und Gleichung 3.12 lässt sich zu $\gamma_{xy} \approx 2\varepsilon_{xy}$ linearisieren, wobei $\sin\gamma_{xy} \approx \gamma_{xy}$, $\varepsilon_x \to 0$ und $\varepsilon_y \to 0$ gilt.

Wie in Kapitel 2.6.5 erwähnt, ist die Magnesiumknetlegierung AZ31 jedoch orthotrop, somit sind die Materialeigenschaften je nach Richtung unterschiedlich. Orthotropie ist durch drei Symmetrieebenen im Material gekennzeichnet. Elastizitätsmodul, Schubmodul und Querdehnzahl sind für jede Achse unterschiedlich, weshalb nun neun unabhängige Konstanten zur Materialbeschreibung benötigt werden und sich die Materialmatrix[5] zu

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\mu_{21}}{E_2} & \frac{-\mu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\mu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\mu_{13}}{E_1} & \frac{-\mu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{21}} \end{bmatrix}$$

ändert.

3.3.4 Grundgleichungen

In diesem Kapitel wurden bis jetzt die einzelne Schritte zur Beschreibung elastostatischer Probleme erläutert. Der Weg vom Verschiebungsfeld über die Verzerrungen und Dehnungen hin zur Berechnung der resultierenden Spannungen soll nun abschließend in den Grundgleichungen beziehungsweise Bedingungen zusammengefasst werden:

Formänderung (Beziehung zwischen Verschiebung und Dehnung)

Folgende Gleichung, die *kinematische Beziehung*, verknüpft das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{u}$ mit dem Dehnungsfeld $\boldsymbol{\varepsilon}$. Unter Annahme eines linearisierten Verzerrungs-Dehnungs-Verhältnisses, welches bereits in Gl. 3.19 verwendet wurde, kann in Indexschreibweise

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{3.20}$$

angegeben werden.

Verträglichkeitsbedingung (Beziehung zwischen Verschiebung und Verzerrung)

Mit Hilfe der Gleichungen 3.9 und 3.10 kann das Verzerrungstensorfeld bei bekanntem Verschiebungsfeld berechnet werden. Diese Beziehung muss aber auch umgekehrt hergestellt werden können, das heißt, bei vorgegebenen Verzerrungen auf die passenden Verschiebungen zu kommen. Man hat jedoch sechs Gleichungen für nur drei unbekannte

[5] Der Übersicht halber wird hier die invertierte Matrix angeschrieben.

Verschiebungen – das Problem ist überbestimmt. Die Verzerrungen ε_{ij} müssen daher noch zusätzliche Bedingungen – die sogenannten *Verträglichkeits- oder Kompatibilitätsbedingungen* – erfüllen. Man kann sich dies vorstellen, indem man einen Körper in kleine Teile zerlegt, diese dann verzerrt und wieder zusammensetzt. Werden die einzelnen Teile dabei willkürlich verformt, so können sie nicht mehr lückenlos zu einem Ganzen verbunden werden – die Verzerrungen müssen also zueinander passen [Ros10]. Diese „Teile“ sind in der FE-Analyse die einzelnen finiten Elemente.
Bildet man die dritte Ableitung der Gl. 3.20 und vertauscht die Differentiationsreihenfolge[6], so führt dies auf

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right), \tag{3.21a}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right), \tag{3.21b}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right). \tag{3.21c}$$

Dies sind die Bedingungen, denen die Verzerrungen genügen müssen, um eine eindeutige Beziehung zwischen Verzerrungen und Verschiebungen herzustellen. Da gerade sechs Beziehungen zwischen den sechs Verzerrungen hergestellt werden, können diese nicht mehr voneinander unabhängig sein.

Stoffgesetz (Beziehung zwischen Verzerrung und Spannung)

Wie bereits erwähnt, lassen sich die Verzerrungen, mittels der Material- oder Stoffmatrix, mit den Spannungen verknüpfen.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.22}$$

Im linear-elastischen, isotropen Körper besteht $\boldsymbol{C}$ nur aus Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl μ.

Gleichgewichtsbedingung

Ein Körper kann nur dann im Gleichgewicht sein, wenn die Summe aus Spannungen und Volumenkräften zu null wird. Mathematisch formuliert bedeutet das:

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} \tag{3.23}$$

Hierbei ist $\boldsymbol{k}$ der Vektor der Volumenkräfte und $\boldsymbol{\nabla}$ der Nabla-Operator. Ein elastostatisches Problem muss Gleichgewicht an jedem FE-Knoten garantieren [Dan11].

[6] Ausführlich behandelt in [Ros10].

Randbedingungen

Die Randbedingungen werden in *geometrische/kinematische* und *natürliche/dynamische* unterschieden. Die *geometrischen* sind beispielsweise Einspannungen von Trägern, gestützte Stabenden, etc. Sie werden allgemein als

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{O}} \tag{3.24}$$

geschrieben, wobei $\boldsymbol{u}_{\mathrm{O}}$ den Verschiebungsvektor an der Körperoberfläche bezeichnet.

Die *natürlichen Randbedingungen* beschreiben das Verhältnis zwischen den Spannungen im Körper und denen an der Oberfläche. Sie stellen sich als

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{O}} \tag{3.25}$$

dar. Hierin steht $\boldsymbol{n}$ für den Normalenvektor des Randes und $\boldsymbol{p}_{\mathrm{O}}$ für den Vektor der Randspannungen. Dieser würde beispielsweise im Falle eines einseitig eingespannten und Zugbelasteten Stabes zu F/A werden.

Navier'sche Gleichungen

Setzt man das Stoffgesetz nach Gl. 3.22 und die kinematische Beziehung nach Gl. 3.20 in die Gleichgewichtsbedingung aus Gl. 3.23 ein, so erhält man:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left[\boldsymbol{C} \left(\frac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{\nabla}) \right) \right] + \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} \tag{3.26}$$

Dies sind drei partielle Differentialgleichungen – die sogenannten *verallgemeinerten Navier'schen Gleichungen* – für die drei Verschiebungen u, v, w, welche noch den geometrischen Randbedingungen genügen müssen [Ste10]. Dieses Differentialgleichungssystem ist nur in Sonderfällen lösbar, weshalb es in den meisten Problemstellungen zur Bestimmung des Verschiebungsfeldes $\boldsymbol{u}$ ausscheidet.
Vielmehr wird der Lösungsweg daher über ein Variationsproblem beschritten, welches im folgenden Abschnitt näher erläutert wird.

3.4 Variationsprinzipien

Anstatt eine exakte Lösung auf direktem Wege zu finden (siehe vorherigen Abschnitt), wird in der Variationsrechnung eine Näherungslösung gesucht und diese dann in das gegebene Problem eingesetzt. Von allen möglichen Lösungen, welche die Randbedingungen erfüllen, trifft dann diese zu, für die die gegebene Funktion minimal wird (Extremalaussage) [Abe72].

3.4.1 Das Prinzip der virtuellen Verschiebung

Betrachtet man ein System (z.B. ein finites Element) mit n Freiheitsgraden, so wird dies durch n unabhängige Lagekoordinaten $q_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$ beschrieben. Der Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}$ ist daher eine Funktion

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(q_i(t)) \tag{3.27}$$

der Lagekoordinaten. Die Verschiebung ist somit eine Funktion der Funktion $q_i(t)$ – ein sogenanntes *Funktional*.
Nun erteilt man diesem System eine kleine, *virtuelle* Verschiebung δ. Diese soll folgende Bedingungen erfüllen:

1. Die Verschiebungswege sollen *sehr klein* (infinitesimal klein) sein.

2. Sie soll *geometrisch möglich*, also mit den kinematischen Eigenschaften des Systems *verträglich* (kompatibel) sein. Die Verschiebung muss somit mit den Auflagerungs-, Führungsbedingungen, etc. übereinstimmen.

Die virtuelle Verschiebung $\delta\boldsymbol{u}$ ist mathematisch gesprochen eine Variation des Verschiebungsvektors $\boldsymbol{u}$ und ergibt sich zu

$$\delta\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial q_i} \delta q_i \tag{3.28}$$

Die Variation δ kann als Operator, ähnlich dem Differentialoperator d aufgefasst werden [Abe72], wobei hier nach allen Lagekoordinaten partiell abgeleitet wird.
Für jeden Massepunkt gilt das dynamische Grundgesetz $\boldsymbol{f} - \varrho\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ [Ros10]. Erteilt man diesem Massepunkt eine virtuelle (infinitesimal kleine) Verschiebung und integriert über das Volumen, so erhält man:

$$\int_V (\boldsymbol{f} - \varrho\boldsymbol{a}) \cdot \delta\boldsymbol{u} dV = \boldsymbol{0} \tag{3.29}$$

Diese Gleichung kann man sofort in zwei Teile aufspalten, in die physikalische Interpretation der Arbeit

$$\delta A = \int_V \boldsymbol{f} \cdot \delta\boldsymbol{u} dV \tag{3.30}$$

und in die, am System wirkenden, Trägheitskräfte. Dieser Anteil kann jedoch vernachlässigt werden, da sich das System im Gleichgewicht befinden soll. δA ist die Arbeit, die von allen am System wirkenden Kräften bei der virtuellen Verschiebung geleistet wird. Sie kann in die Arbeit $\delta A^{(i)}$ der inneren und $\delta A^{(a)}$ der äußeren Kräfte aufgeteilt werden.
Da man in der Variationsrechnung, wie eingangs erwähnt, ein Minimum des Funktionals

sucht und der Variationsoperator δ – analog zur herkömmlichen Differentiation – die erste Ableitung liefert, wird diese Null gesetzt.
Das Prinzip der virtuellen Verschiebung lautet dann:

Satz (Prinzip der virtuellen Verschiebung)**.** *Bei einer virtuellen Verschiebung eines Systems aus einer Gleichgewichtslage heraus ist die von den inneren und äußeren Kräften insgesamt geleistete Arbeit gleich Null [Ros10].*

$$\delta A \equiv \delta A^{(i)} + \delta A^{(a)} = 0 \tag{3.31}$$

Für die Arbeit $\delta A^{(i)}$ der inneren Kräfte gilt:

$$\delta A^{(i)} = -\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV \tag{3.32}$$

Da in der Methode der finiten Elemente alle Oberflächen- und Volumskraftdichten auf statisch äquivalente, diskrete Einzelkräfte (Knotenlasten) umgerechnet werden, kann das Prinzip der virtuellen Verschiebung (mit den Gl. 3.30, 3.31 und 3.32) in der Form

$$\boldsymbol{F}^T \delta\boldsymbol{u} = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV \tag{3.33}$$

dargestellt werden, wobei $\boldsymbol{F}$ den Lastvektor (Vektor der Knotenkräfte) und $\boldsymbol{u}$ den Verschiebungsvektor (Vektor der Knotenverschiebungen) kennzeichnet.

3.4.2 Das Prinzip der virtuellen Arbeit

Besitzen die Kräfte des im vorherigen Abschnitt beschriebenen Systems ein Potential – sind also *konservativ* – so kann das Prinzip der virtuellen Verschiebung zu

$$\delta A^{(a)} = \delta U \tag{3.34}$$

umgeschrieben werden.[7] Das mit U bezeichnete Potential wird *Verzerrungsenergie* des Systems genannt.

Satz (Prinzip der virtuellen Arbeit für konservative Systeme im Gleichgewicht)**.** *Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ist gleich der Änderung der Verzerrungsenergie.*

Das Prinzip der virtuellen Arbeit ist also ident mit dem der virtuellen Verschiebung, gilt in obiger Formulierung allerdings nur in konservativen Systemen.

[7] Diese Gleichung folgt aus Gl. 3.31 mit $\delta A^{(i)} = -\delta U$.

3.4.3 Das Prinzip vom stationären Wert des Potentials

Liegt ein *konservatives System* vor, so besitzen die inneren Kräfte ein Potential U und die äußeren Kräfte ein Potential W.
Es gilt:

$$\delta A^{(a)} = -\delta W, \qquad \delta A^{(i)} = -\delta U \tag{3.35}$$

Damit lässt sich das Prinzip der virtuellen Verschiebung (Gl. 3.31) anschreiben als $\delta W + \delta U = 0$. Für einen stationären Wert des Gesamtpotentials V, mit $V = W + U$ folgt somit

$$\delta V = 0 \tag{3.36}$$

Für eine stabile Gleichgewichtslage muss V allerdings nicht nur stationär werden, sondern auch ein Minimum annehmen. Daher muss zusätzlich gelten:

$$\delta^2 V > 0 \tag{3.37}$$

Satz (Kriterium von Dirichlet)**.** *Die diesem stationären Wert des Potentials zugeordnete Gleichgewichtslage ist stabil, falls das Potential im stationären Wert ein Minimum annimmt.*

Aus den vorherigen Gleichungen ist zu erkennen, dass das Prinzip der virtuellen Arbeit – in konservativen Systemen – ident mit dem Prinzip vom stationären Wert des Potentials ist [Ram10a].

3.4.4 Zusammenfassende Bemerkungen

Wie man sich anhand der letzten Abschnitte überzeugen kann, ist die Anwendung der Variationsrechnung ein wesentlich einfacheres Werkzeug zur Lösung von elastostatischen Problemen, als die im Abschnitt *Elastizitätstheorie* beschriebene Vorgehensweise. Die exakte Lösung direkt zu finden ist wesentlich aufwändiger (und teilweise gar nicht möglich), als die Problembeschreibung über ein Funktional zu formulieren, Näherungslösungen zu suchen und das Funktional anschließend zu minimieren.
In jedem Fall müssen aber die grundlegenden Bedingungen (siehe Abschnitt 3.3.4) erfüllt werden. In der Variationsrechnung werden die *kinematischen und Kompatibilitätsbedingungen* durch die Festlegung der Variation δ (Abschnitt 3.4.1) und Gleichung 3.28 berücksichtigt. Dem *Stoffgesetz* wird mit der Definition aus Gleichung 3.32 genüge getan. Die *Gleichgewichtsbedingung* ergibt sich aus der Suche nach dem Minimum des Funktionals.
Werden die Finite-Elemente-Gleichungen auf Basis der Variationsrechnung angeschrieben, so sind die *natürlichen Randbedingungen* automatisch im Formalismus enthalten. Sie müssen – im Gegensatz zur „herkömmlichen“ Vorgehensweise – nicht mehr separat berücksichtigt werden [Abe72].

Mit den Variationsprinzipien[8] wird also eine Lösung (durch Minimierung des Funktionals) aus einem unendlichen Funktionenraum, welcher die Randbedingungen erfüllt, gesucht [Ros10]. Dies kann jedoch mit dem Verfahren nach Ritz oder Galerkin deutlich vereinfacht werden.

3.5 Das Verfahren von Ritz

Ausgangspunkt des Verfahrens von Ritz ist das Funktional des Gesamtpotentials V, dessen Lösung allerdings nicht in einem unendlichen Funktionenraum (wie bei den Variationsprinzipien) gesucht, sondern nur als eine endliche Anzahl von Ansatzfunktionen $f_v(x)$ definiert wird [Ros10],[Ste10].
Für das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{u}(x, y, z)$, bzw. für dessen Komponenten $u(x, y, z, t), v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ wird der Ritz'sche Ansatz in der Form[9]

$$\boldsymbol{u^*(x, y, z, t)} = \sum_{v=1}^{n} q_v(t) f_v(x, y, z) \tag{3.38}$$

eingeführt. Die *verallgemeinerten Lagekoordinaten* $q_v(t)$ repräsentieren die endlich vielen Freiheitsgrade des Systems. Die Ansatzfunktionen $f_v(t)$ sowie deren Anzahl n gibt man sich selbst sinnvoll vor, wobei sie den geometrischen Randbedingungen genügen müssen. Die strenge Lösung des Problems wird im Allgemeinen nicht zur Klasse der Funktionen $\boldsymbol{u^*}$ gehören, jedoch wird die Lösung durch geeignete Wahl und Kombination der Ansatzfunktionen sehr gut approximiert. Ebenso steigt die Genauigkeit mit steigendem n.
Mit dem Ritz'schen Verfahren wird aus dem Funktional V eine Näherung des Gesamtpotentials V^*, die nur mehr eine Funktion der verallgemeinerten Lagekoordinaten $q_v(t)$ ist [Ram10a]. Mit dem Satz von Dirichlet erhält man nun ein Minimum von V^*, indem es als

$$\delta V^* 0 \Leftrightarrow \frac{\partial V^*}{\partial q_v} \delta q_v = 0 \qquad v = 1, \ldots, n \tag{3.39}$$

formuliert wird. Diese Bedingung liefert n lineare Gleichungen für die n gesuchten Koeffizienten $q_v(t)$.

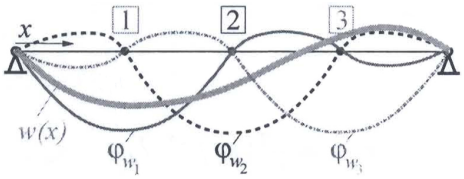


Abb. 3.5: Biegung eines Balkens, angenähert durch drei Ansatzfunktionen in den diskreten Knoten [Ram10a]

[8] Diese wurden hier nur ausschnittsweise erwähnt – es gibt noch einige andere.
[9] Variablen mit * stehen für diskretisierte Variablen.

Wie man anhand des in Abb. 3.5 dargestellten geraden Balkens erkennen kann, werden die Ansatzfunktionen[10] der Durchbiegung $w(x)$ für den gesamten Körper aufgestellt. Sie müssen den *geometrischen Randbedingungen* genügen. Dies bringt hier noch keine großen Schwierigkeiten mit sich, kann allerdings in komplexen oder krummlinigen Bauteilen erhebliche Probleme bereiten. Hier setzt der Übergang zu der Finiten-Elemente-Methode an. Der Körper wird in kleine (finite) Elemente geteilt, die Ansatzfunktionen nur mehr für diese Teilbereiche formuliert. Die Koeffizienten $q_v(t)$ werden durch die Knotengrößen ersetzt. *„Das Verfahren von Ritz kann als Vorstufe der FEM betrachtet werden.“* [Ste10]

3.6 Das Verfahren von Galerkin

Das Verfahren von Galerkin ist ähnlich dem von Ritz, allerdings wesentlich allgemeiner anwendbar, da die Kräfte nicht aus einem Potential herleitbar sein müssen [Ros10]. Eine Folgelast in einem Stabilitätsproblem wäre bspw. eine solche *nicht-konservative* Kraft. Für diesen Fall geht man nun von der Differentialgleichung des Problems aus[11], anstatt den Weg über die Variation des Funktionals (Ritz) zu beschreiten.
Betrachtet man das Beispiel aus Abb. 3.5, so schreibt man die Differentialgleichung für die Durchbiegung $w(x)$ in der Form $D(w) = 0$ an und bildet – analog zu Gleichung 3.29 – die Beziehung

$$\int_V D(w)\delta w dV = 0. \tag{3.40}$$

Die strenge Lösung ist wegen $D(w) = 0$ sicher erfüllt. Die Näherungslösung durch die Ansatzfunktionen (vgl. Gl. 3.38), für die $D(w^*(x)) \neq 0$ ist, wird durch Einsetzen der Variation

$$\delta w^*(x) = \sum_{v=1}^{n} \delta q_v f_v(x) \tag{3.41}$$

in Gleichung 3.40 und

$$\int_V D(w^*) f_v dV = 0 \qquad v = 1, \ldots, n \tag{3.42}$$

ebenfalls erfüllt.
Wie man sieht, sind beide Ansätze relativ ähnlich, allerdings muss man beim Verfahren nach Galerkin die Problemdifferentialgleichung kennen und die Ansatzfunktionen – im Gegensatz zu dem nach Ritz – so wählen, dass *alle* Randbedingungen, also sowohl die *geometrischen*, als auch die *natürlichen*, erfüllt werden [Ros10].

[10] In diesem Fall mit $\varphi_{w1}, \varphi_{w2}, \varphi_{w3}$ symbolisiert.
[11] Diese ist im Allgemeinen nichts anderes als die Bewegungsgleichung des Systems, welche aus dem dynamischen Grundgesetz $\boldsymbol{f} - \varrho\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ folgt.

3.7 Die Steifigkeitsmatrix

Die Verfahren nach Ritz und Galerkin führen zu n Gleichungen für die n unabhängigen Lagekoordinaten $q_v(t)$ respektive Verschiebungen $\boldsymbol{u}$, welche als

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} \tag{3.43}$$

zusammengefasst werden können. Die Ermittlung der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ spielt in der Methode der finiten Elemente, wie schon in Abschnitt 3.2 angedeutet, eine zentrale Rolle. Man unterscheidet in:

- Elementsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K_e}$: Die Steifigkeit eines (finiten) Elements errechnet sich aus den Verschiebungsansätzen, wobei die Stoffgesetze berücksichtigt werden.
- Gesamtsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$: Die Steifigkeit der Gesamtstruktur (z.B. eines Bauteils) ergibt sich erstens durch Transformation der Elementsteifigkeitsmatrizen auf globale Koordinaten und anschließende additive Überlagerung, zweitens durch die Berücksichtigung der Randbedingungen sowie der strukturellen Verknüpfung der Elemente [Pre06].

3.7.1 Elementsteifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrix eines Elementes kann beispielsweise über das Prinzip der virtuellen Verschiebung respektive über ein Potential hergeleitet werden.
Berücksichtigt man das Prinzip der virtuellen Verschiebung aus Abschnitt 3.4.1, so kann man Gl. 3.33 sofort in diskretisierter Form für das Einzelelement e anschreiben:

$$\boldsymbol{F}_e^T \delta \boldsymbol{u}_e = \int_{V_e} \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV \tag{3.44}$$

Die Gleichungen 3.9 und 3.10 können zu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{D}_e \boldsymbol{u}_e \tag{3.45}$$

umgeschrieben werden[12], wobei $\boldsymbol{D}_e$ eine Differentialoperatormatrix mit partiellen Ableitungen nach den Ortskoordinaten bezeichnet.
Diese Beziehung und die aus Gl. 3.19, welche in Vektorschreibweise

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}_e \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.46}$$

lautet, wird in Gl. 3.44 eingesetzt, somit ergibt sich

$$\boldsymbol{F}_e^T \delta \boldsymbol{u}_e = \int_{V_e} \boldsymbol{D}_e \boldsymbol{C}_e^T \boldsymbol{D}_e^T \boldsymbol{u_e}^T \delta \boldsymbol{u_e} dV. \tag{3.47}$$

[12] Die quadratischen Terme in Gl. 3.9 und 3.10 wurden aufgrund der Voraussetzung der Linearität vernachlässigt.

Zieht man $\delta \boldsymbol{u_e}$ und $\boldsymbol{u_e}$ aus dem Integral[13], transponiert die gesamte Gleichung und beachtet dabei, dass die Materialmatrix $\boldsymbol{C}_e$ symmetrisch ist und somit $\boldsymbol{C}_e^T = \boldsymbol{C}_e$ gilt, so folgt

$$\boldsymbol{F}_e = \underbrace{\int_{V_e} \boldsymbol{D}_e^T \boldsymbol{C}_e \boldsymbol{D}_e dV}_{\boldsymbol{K}_e} \cdot \boldsymbol{u}_e \tag{3.48}$$

mit der Elementsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_e$.
Alternativ kann diese auch über ein Potential hergeleitet werden, wobei für die Verzerrungsenergie

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \tag{3.49}$$

gilt. Mit den vorherigen Beziehungen (Gl. 3.45 und 3.46), kann dann

$$U_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{u}_e^T \int_{V_e} \boldsymbol{D}_e^T \boldsymbol{C}_e \boldsymbol{D}_e dV \cdot \boldsymbol{u}_e \tag{3.50}$$

geschrieben werden.
Die Elements-Verzerrungsenergie lässt sich aber auch in quadratischer Form als

$$U_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{u}_e^T \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{u}_e \tag{3.51}$$

darstellen [Ram10a]. Woraus für die Elementsteifigkeitsmatrix, nach Koeffizientenvergleich, folgt:

$$\boldsymbol{K}_e = \int_{V_e} \boldsymbol{D}_e^T \boldsymbol{C}_e \boldsymbol{D}_e^T dV \tag{3.52}$$

3.7.2 Gesamtsteifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrizen der Einzelelemente werden durch Transformation auf globale Koordinaten zu einer Gesamtsteifigkeitsmatrix zusammengesetzt/*assembliert*.
Mit der Transformationsmatrix des Einzelelementes[14] $\boldsymbol{T}_e$ ergibt sich die Beziehung zwischen Element- und Gesamtverschiebung zu

$$\boldsymbol{u}_e = \boldsymbol{T}_e \boldsymbol{u}. \tag{3.53}$$

[13] Die Verschiebung und deren Variation sind unabhängig vom Volumen.
[14] Im Gesamten als Koinzidenztabelle bezeichnet [Ram10a].

Somit lautet der Ausdruck für die Verzerrungsenergie des Einzelementes aus Gl. 3.50

$$U_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{T}_e^T\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{T}_e\boldsymbol{u}, \tag{3.54}$$

woraus sich die Transformation der Elementsteifigkeitsmatrix als

$$\widetilde{\boldsymbol{K}}^e = \boldsymbol{T}_e^T\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{T}_e \tag{3.55}$$

darstellt.
Für das Potential der äußeren Knotenkräfte gilt, gemäß der Gleichungen 3.33 und 3.35,

$$W_e = -\boldsymbol{F}_e^T\boldsymbol{u}_e = -\boldsymbol{F}_e^T\boldsymbol{T}_e\boldsymbol{u}. \tag{3.56}$$

Somit wird das Gesamtpotential $V = U + W$ zu

$$V = \sum_e \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{T}_e^T\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{T}_e\boldsymbol{u} - \boldsymbol{F}_e^T\boldsymbol{T}_e\boldsymbol{u}\right). \tag{3.57}$$

Berücksichtigt man das Prinzip vom stationären Wert des Potentials $\delta V = 0$, so führt dies, unter Verwendung des Ritz'schen Ansatzes, aus Gl. 3.39, zu

$$\sum_e \boldsymbol{T}_e^T\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{T}_e\boldsymbol{u} - \sum_e \boldsymbol{T}_e^T\boldsymbol{F_e} = 0, \tag{3.58}$$

woraus sich für das Gesamtsystem

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} \tag{3.59}$$

schreiben lässt (siehe Gl. 3.43). Hierbei ist

$$\boldsymbol{K} = \sum_e \boldsymbol{T}_e^T\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{T}_e = \sum_e \widetilde{\boldsymbol{K}}^e \tag{3.60}$$

die Gesamtsteifigkeitsmatrix und

$$\boldsymbol{F} = \sum_e \boldsymbol{T}_e^T\boldsymbol{F}_e = \sum_e \widetilde{\boldsymbol{F}}^e \tag{3.61}$$

der Gesamtlastvektor [Ram10a].
Die Gesamtsteifigkeitsmatrix ist meist sehr groß, jedoch *symmetrisch* und nur dünn besetzt. Daher kann sie zur Optimierung der Rechenzeit als Band- beziehungsweise Sparse-Matrix angeschrieben werden [Ger07],[Pre06].
Aufgrund der Eigenschaften des Differentialoperators für die Verzerrungen ist die Steifigkeitsmatrix *positiv definit*, das heißt, alle Einträge auf der Diagonalen sind > 0. Wäre dies nicht der Fall, so würde dies bedeuten, dass beispielsweise eine Feder bei einer Zugkraft eine zusätzliche Kraft in Zugrichtung liefert und der Lösungsalgorithmus eines FE-Programmes würde mit einer Fehlermeldung abbrechen [Ger07],[Pre06].
Die Elementsteifigkeitsmatrix muss *singulär* sein, da sonst ein Element nicht definiert wäre, somit nicht alle Freiheitsgrade gesperrt sind und sich ein Element unabhängig von der restlichen Struktur bewegen könnte [Ger07].

3.8 Nichtlineare FE-Analyse

In diesem Kapitel wurde bisher nur auf die linearen FE-Methoden eingegangen. Da praktische Problemstellungen, wie auch in der nachfolgenden Simulation, oft Nichtlinearitäten aufweisen, soll nun auch dieser Bereich der finiten Elemente überblicksmäßig beleuchtet werden.
Die Betrachtungsweise in den vorherigen Abschnitten ist immer davon ausgegangen, dass

- kleine Deformationen und Verzerrungen,
- kleine Verschiebungen und Verdrehungen und
- linear elastisches Materialverhalten (siehe Stoffgesetz)

vorliegen. Daraus ergeben sich einige Vorteile, wie z.B. die Möglichkeit der Superposition einzelner Lösungen oder die Wegunabhängigkeit der Belastungsfolge [Ram10b], welche im nichtlinearen Bereich wegfallen.

3.8.1 Ursachen der Nichtlinearität

Nichtlineares Systemverhalten lässt sich im Wesentlichen nach folgenden Quellen klassifizieren:

- geometrische Nichtlinearitäten
- nichtlineares Materialverhalten
- nichtlineare Randbedingungen (Kontakt, Reibung)
- Gleichgewichtsverzweigung (Knicken, Beulen, etc.)

Die im nächsten Kapitel durchgeführte Simulation des lasergestützten Umformens wird zeigen, dass die ersten drei Fälle der Nichtlinearität kombiniert vorliegen. Im Folgenden werden die Ursachen kurz behandelt:

Von *geometrischer Nichtlinearität* spricht man, wenn große Deformationen, insbesondere große Verzerrungen, auftreten. Dabei ist allerdings die Struktur des System zu berücksichtigen – denn große Verschiebungen müssen nicht immer zwangsläufig zu großen Verzerrungen führen. Beispielsweise wird in [Ros10] gezeigt, dass die Mittelfläche einer Blattfeder, selbst bei großer Verschiebung der Enden, verzerrungsfrei bleibt. Für die Außenfasern gilt dies aber nicht – *„Treten zb bei einer Platte oder Schale Durchbiegungen auf, welche größer sind als die Dicke, liegt eindeutig eine geometrische Nichtlinearität vor.“* [Deg04]
Die bisher angenomme lineare Beziehung zwischen Last und Verschiebung ist bei großen Verschiebungen nicht mehr gültig, da sich das Material in der Regel ab einem gewissen Punkt verfestigt und eine größere Last dann nicht mehr zu einer proportionalen Verschiebung führt. In Abb. 3.6 ist ein derartiges Beispiel für einen Kragträger dargestellt.

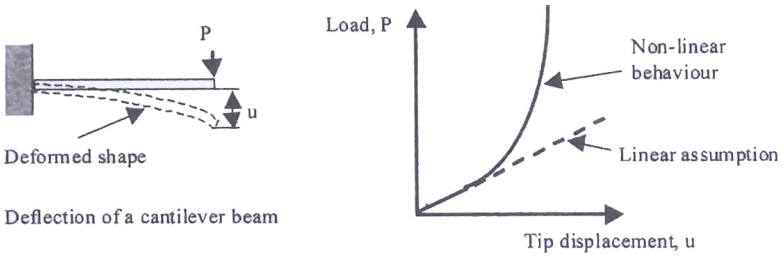


Abb. 3.6: Kragträger unter Belastung mit Materialverfestigung [Bec01b]

Große Verformungen zeigen auch ein weiteres Problem, welches durch die gemachten Vereinfachungen der linearen Theorie entsteht: In den vorherigen Abschnitten wurde die Gleichgewichtsbedingung immer am *unverformten* System angesetzt. Nimmt man wieder das Beispiel des Kragträgers unter großer Verschiebung, so stellt man fest, dass sich das Balkenende – bei linearer Betrachtungsweise – nur vertikal verschieben kann. Dies ist physikalisch natürlich unbrauchbar, da der Balken so länger werden würde. In Abb. 3.7 ist dies illustriert.

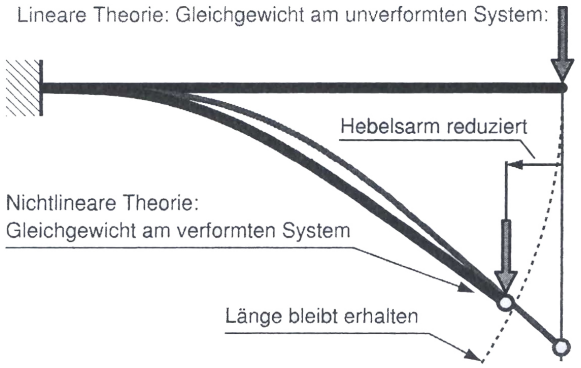


Abb. 3.7: Unterschied zwischen den mit linearer und nichtlinearer Theorie berechneten Biegelinien eines Kragbalkens unter Endlast [Ram10b]

Bei geometrischer Nichtlinearität müssen die Gleichgewichtsbedingungen im *verformten* Zustand angesetzt werden, somit ergeben sich erhebliche Unterschiede in der Formulierung von linearen und nichtlinearen Systemen. Man muss sorgfältig zwischen Ausgangs- und Momentankonfiguration differenzieren (siehe Abb. 3.4) [Tay00].

Liegt *nichtlineares Materialverhalten* vor, so besteht kein linearer Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung. Das Hooke'sche Gesetz aus Gleichung 3.14 verliert seine Gültigkeit.
Ursachen für ein derartiges Verhalten können sein:

- Belastungen, bei denen sich das Material *plastisch* verformt – man spricht hier von *zeitunabhängigem* Verhalten respektive *Plastizität*
- Das *Kriechen* von Metallen bei Belastung unter hoher Temperatur, also *zeitabhängig*
- Kombination aus Plastizität und Kriechen, welche als *Visko-Elastizität/Visko-Plastizität* bezeichnet wird [Mül93],[Bec01b].

Abbildung 3.8 zeigt ein Beispiel für plastisches Materialverhalten. Der Stab wurde bis über die Dehngrenze belastet, sodass er sich plastisch verformt. Der lineare Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung geht ab diesem Punkt verloren.

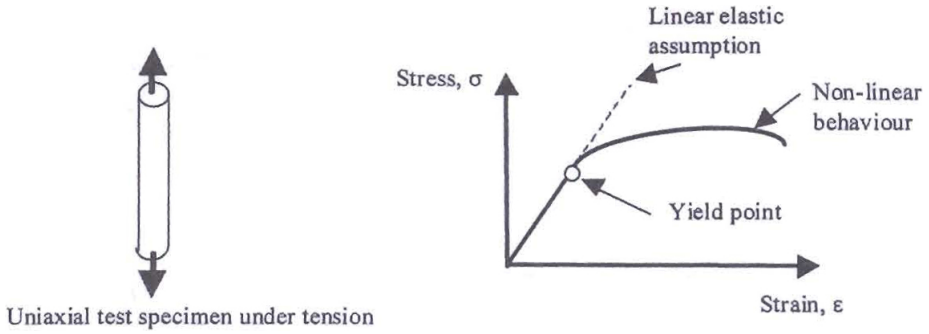


Abb. 3.8: Nichtlineares Materialverhalten eines Stabes bei Zugspannung oberhalb der Dehngrenze [Bec01b]

Um diesem Effekt Rechnung zu tragen, werden spezielle Materialgesetze formuliert, welche die unterschiedlichen Materialeigenschaften, -verfestigungsmechanismen und Fließbedingungen möglichst gut repräsentieren sollen [Mle87]. Hierzu gibt es eine Vielzahl an Modellen, welche in der Literatur (z.B. [Bec01b] und [Tay00]) ausführlich behandelt werden. Sie sind in den Simulationsprogrammen bereits implementiert [Cor09b]. Dennoch ist dieser Bereich noch nicht vollständig erforscht [Tay00].

Nichtlineare Randbedingungen – Kontakt oder Reibung – treten auf, wenn sich zwei Strukturen berühren oder aneinander abgleiten. Wie man sich leicht überlegen kann, muss ein derartiges nichtlineares System weder mit großen Verformungen noch mit plastischem Materialverhalten einhergehen.
Berührt ein Körper einen anderen, so wird die Verschiebung des belasteten Körpers nicht linear zur aufgebrachten Kraft sein. Abbildung 3.9 zeigt dieses typische Beispiel. Die Annahme des linearen Zusammenhangs zwischen Verschiebung und Belastung wird ab dem Zeitpunkt der Berührung nicht mehr zutreffen.

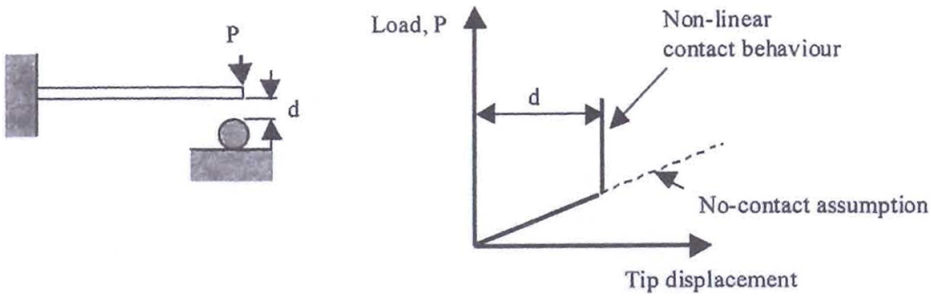


Abb. 3.9: Beispiel eines Kontaktproblems zwischen Balken und starrer Unterlage [Bec01b]

Gleiten zwei Körper aneinander ab, so ist zusätzlich zu dem „normalen“ Kontakt auch noch die Reibung im Kontaktbereich zu berücksichtigen. Die Analyse wird umso komplexer. Ähnlich der materiellen Nichtlinearität gibt es hierfür zahlreiche Modelle, die diese Gegebenheiten in der Berechnung berücksichtigen und in den FE-Programmen ausgewählt werden können [Cor09b],[Cor09a].

3.8.2 Lösungsmethoden/-unterschiede nichtlinearer Probleme

Nichtlineare Probleme unterscheiden sich hinsichtlich der mathematischen Vorgehensweise prinzipiell in zwei Punkten von der linearen Analyse: Einerseits dürfen die Gleichungen für Spannungen, Deformationen, etc. nicht mehr linearisiert werden und müssen den *verformten Zustand* berücksichtigen, andererseits wird die Veränderung der Struktur nicht mehr als Ganzes berechnet, sondern in einzelne Schritte aufgeteilt und diese dann iterativ gelöst [Bec01b].
Im Abschnitt *Elastizitätstheorie* wurden die grundsätzlichen Formulierungen bereits relativ allgemein, also auch für den nichtlinearen Fall angeschrieben, anschließend aber Vereinfachungen durchgeführt. Beispielsweise müssen nun auch die quadratischen Terme des Green'schen Verzerrungstensors (siehe Gl. 3.9 und 3.10) in die Rechnung eingehen und dürfen nicht weggelassen werden. Auf die detaillierten Unterschiede der Vorgehensweise soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden, sondern auf einschlägige Literatur, wie z.B. [Tay00], [Bec01b], [Ram10b] und die folgende, zusammenfassende Tabelle 3.1 verwiesen werden.

Problemtyp	Beschreibung	Typische Formulierung	Spannungstensor, Verzerrungstensor
Nichtlineares Materialgesetz, aber geometrische Linearität	Infinitesimale Verschiebungen und Verzerrungen, Spannungs-Verzerrungs-Beziehung ist nichtlinear	Nur physikalisch (materiell) nichtlineare Formulierung	Klassischer Spannungs- und Verzerrungstensor

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung

Problemtyp	Beschreibung	Typische Formulierung	Spannungstensor, Verzerrungstensor
Große Verschiebungen, große Drehungen aber kleine Verzerrungen	Faserverschiebungen und -drehungen sind groß aber -dehnungen klein, Spannungs-Verzerrungs-Beziehung ist linear oder nichtlinear.	Langrange'sche Formulierung	zweiter Piola-Kirchhoff'-scher Spannungstensor, Green'scher Verzerrungstensor
Große Verschiebungen, Dehnungen und Verzerrungen	Faserdehnungen, -verschiebungen und -verdrehungen sind groß, Spannungs-Verzerrungs-Beziehung kann linear oder nichtlinear sein.	Langrange'sche Formulierung	zweiter Piola-Kirchhoff'-scher Spannungstensor, Green'scher Verzerrungstensor, Verzerrungsgeschwindigkeitstensor

Tab. 3.1: Klassifizierung nichtlinearer Problem nach [Ger07]

Für eine korrekte Lösung eines nichtlinearen Problems darf die Berechnung vom unverformten auf den verformten Zustand nicht mehr in einem Schritt erfolgen, sondern muss in iterative Teilschritte unterteilt werden. Sämtliche Tensoren, Materialeigenschaften, etc. werden dadurch nicht mehr für den Endzustand angegeben, sondern für jeden Teilschritt extra berechnet. Hierzu gibt es einige Verfahren, wobei das von *Newton-Raphson* am gebräuchlichsten ist. Es wird vorwiegend im verwendeten Simulationsprogramm *Abaqus* angewandt [Bec01b],[Cor09b]. Hierbei wird eine erste Lösung „geraten“ und sich dann schrittweise tangential an die tatsächliche angenähert.

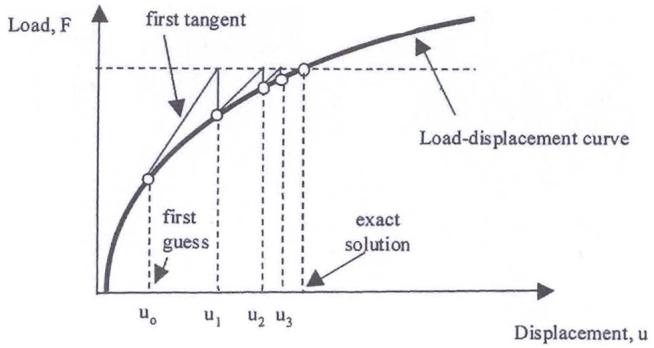


Abb. 3.10: Schematische Darstellung des iterativen Newton-Raphson Verfahrens [Bec01b]

Um eine Konvergenz der Lösung zu gewährleisten, darf die erste Lösung jedoch nicht zu weit von der tatsächlichen entfernt sein. Von *Konvergenz einer Lösung* spricht man, wenn ein Gleichgewichtszustand erreicht wurde, also z.B. keine zusätzlichen Kräfte, welche das *Equilibrium* stören, vorhanden sind [Bec01b]. In der Praxis wird Konvergenz hergestellt, wenn die Residuen an den Knoten vernachlässigt werden können oder eine vom Benutzer festgelegte Anzahl an Iterationsschritten n erreicht wurde [Cor09a].

Neben dem Newton-Raphson Verfahren gibt es eine Vielzahl an iterativen Methoden (z.B. modifiziertes Newton-Verfahren, Sekanten-Methode, Cholesky-Zerlegung, Last-, Verschiebungssteigerung, etc.), die alle gewisse Vor- und Nachteile mit sich bringen. Diese werden je nach Anforderungen an Rechenaufwand, Konvergenzgeschwindigkeit oder generelle Konvergenz – abhängig von der Problemstellung – eingesetzt und meist auch in Kombination verwendet [Cor09b],[Ram10b].

3.9 Thermische FE-Analyse

Die Methode der finiten Elemente kann nicht nur für die bisher beschriebenen mechanischen Problemstellungen, sondern unter anderem auch für thermische Anwendungen eingesetzt werden. Es können Aufgaben der Wärmeleitung, -strahlung, Konvektion, etc. behandelt werden, wobei sich große Analogien zwischen thermischen und mechanischen FE-Berechnungen ergeben [Deg04],[Abe72]. In Tab. 3.2 sind diese Ähnlichkeiten dargestellt. Die thermischen Zusammenhänge werden anschließend näher erläutert.

Problemtyp	Wärmeleitung	dreidimensionales Kontinuum
Feldvariablen	T ... Temperatur	$\boldsymbol{u}$... Verschiebungen
abgeleitete Grössen	$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\xi}}$ ... Temperaturgradient $\dot{\boldsymbol{q}}$ ... Wärmestromdichte	$\boldsymbol{\varepsilon}$ ... Verzerrungen $\boldsymbol{\sigma}$... Spannungen
Operatoren und Matrizen	$\boldsymbol{\Lambda}$ ... Wärmeleitungsmatrix c ... spezifische Wärmekapazität	$\boldsymbol{K}$... Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{C}$... Materialmatrix $\boldsymbol{D}$... Elastizitätsmatrix
Randbedingungen wesentliche/geometrische	$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T_O}$	$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_O}$
natürliche/dynamische	$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q_O}$	$\boldsymbol{n\sigma} = \boldsymbol{p_O}$

Tab. 3.2: Analogien zwischen thermischer und mechanischer FE-Berechnung [Deg04],[Abe72]

Die grundlegende Aussage des ersten Satzes der Thermodynamik ist die Erhaltung der Energie eines Systems. Somit bewirkt die Zufuhr von Arbeit, Wärme und anderem Energietransport eine Änderung der Energie innerhalb des Systems.

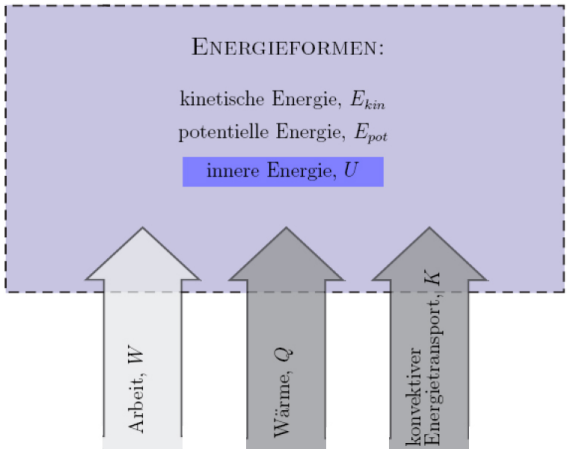


Abb. 3.11: Schematische Darstellung der Energiebilanz eines thermodynamischen Systems [Kau07]

Betrachtet man die thermischen Vorgänge separat von den mechanischen, vernachlässigt also die am System verrichtete Arbeit W und die Änderung der kinetischen und potentiellen Energie, so ergibt sich der Satz über die Energieerhaltung von *Green und Naghdi* zu

$$\int_V \varrho \dot{U} dV = \int_S \dot{\boldsymbol{q}} dS + \int_V \dot{\boldsymbol{r}} dV. \tag{3.62}$$

Dabei ist $\dot{U}$ die Änderung der inneren Energie, $\dot{\boldsymbol{q}}$ die Wärmestromdichte und $\dot{\boldsymbol{r}}$ der extern eingebrachte Energiestrom. V und S sind Volumen bzw. Oberfläche des Körpers [Cor09b].

Die spezifische Wärmekapazität, welche zahlenmäßig für fast alle Materialien experimentell ermittelt wurde, kann bei rein thermischer Problemstellung als

$$c(T) = \frac{dU}{dT} \tag{3.63}$$

formuliert werden. Das Fourier'sche Wärmeleitgesetz kann als

$$\dot{\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{\Lambda} \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\xi}} \tag{3.64}$$

angeschrieben werden [Cor09b]. Die Wärmestromdichte $\dot{\boldsymbol{q}}$ ist demnach die negative Matrix der Wärmeleitzahl λ, multipliziert mit dem Temperaturgradienten, wobei sich die Positionskoordinaten auf das Referenzsystem beziehen (siehe Abb. 3.4).
Zur Lösung eines thermischen Problems mit der Methode der finiten Elemente wird dieses diskretisiert und die Variationsprinzipien aus Abschnitt 3.4 angewandt [Abe72]. Setzt man

das Fourier'sche Wärmeleitgesetz in Gl. 3.62 ein und variiert diese mit dem Verfahren von Galerkin, so folgt nach [Cor09b]:[15]

$$\int_V \varrho \dot{U} \delta T dV + \int_V \frac{\partial \delta T}{\partial \xi} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial \xi} = \int_V \delta T \dot{\boldsymbol{k}} dV + \int_S \delta T \dot{\boldsymbol{q}} dS \tag{3.65}$$

Hierbei ist δT die Variation der Temperatur, welche den Randbedingungen (siehe Tab. 3.2) genügen muss.
Für die gesuchte Temperatur T wird die Näherungslösung, analog zu Gl. 3.41 des Galerkin'schen Verfahrens, mit Ansatzfunktionen beschrieben und diese variiert:

$$T = N_n(\boldsymbol{\xi}) \cdot T_n \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{3.66a}$$

$$\delta N = N_n \cdot \delta T_n \tag{3.66b}$$

Die Ansatzfunktionen N sind meist Polynome ersten oder zweiten Grades [Cor09b]. Der Index n symbolisiert den n-ten Knoten in einem FE-System.
Wie man also erkennen kann, wird die Temperatur an jedem Knoten berechnet, weshalb an den einzelnen Elementen der zusätzliche Freiheitsgrad der Temperatur vorhanden ist bzw. sein muss.
Die Berechnung der Temperatur wird, ähnlich der nichtlinearen Verfahren, schrittweise iterativ, beispielsweise nach der *Newton-Raphson* Methode, durchgeführt. Für eine weiterführende Beschreibung sei an dieser Stelle auf [Cor09b] verwiesen.

Möchte man eine kombinierte FE-Analyse aus thermischer und mechanischer Beanspruchung durchführen, so müssen die vorherigen Gleichungen nicht nur erweitert werden, sondern auch der Einfluss der Temperatur in den Verzerrungen und Spannungen berücksichtigt werden (u.a. mit dem Wärmeausdehnungskoeffizienten α). Ebenso müssen die Stoffgesetze, beispielsweise mit temperaturabhängigen Elastizitätsmoduln, angepasst werden. Hierzu sei auf [Ros10], [Cor09a] und [Cor09b] verwiesen.

3.10 FE-Analyse in der Praxis

Die mathematischen Formulierungen in den letzten Abschnitten bilden die Grundlage für die Methode der finiten Elemente, müssen aber keineswegs händisch ausgearbeitet werden. Selbst bei der Modellierung einfacher Probleme entstehen mehrere Tausend Freiheitsgrade und dementsprechend große Matrizen. Daher werden für die Berechnung derar-

[15] Hier wurde der externe Energiestrom $\dot{\boldsymbol{r}}$ aus Gl. 3.62 aufgeteilt in den Term der Konvektion $\dot{\boldsymbol{k}} = \alpha(T - T_O)$ mit der Wärmeübergangszahl α und in den Energietransport durch Wärmestrahlung $\dot{\boldsymbol{q}} = \varepsilon\sigma(T^4 - T_O^4)$, wobei ε den Emissiongrad (0 bis 1) und σ die *Stefan-Boltzmann-Konstante* bezeichnet.

tiger Gleichungssysteme spezielle FE-Programme eingesetzt, welche dies vollautomatisch durchführen. Es werden dazu einige Programmpakete angeboten, die prinzipiell alle gleich aufgebaut sind.

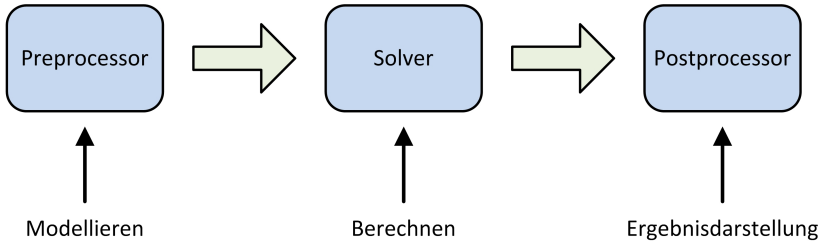


Abb. 3.12: Aufbau/Module eines FE-Programms

Der *Preprocessor* ist ein Programmteil/Modul, in dem das FE-Modell erstellt wird [Frö95]. Hier wird die Struktur durch den Anwender interaktiv grafisch modelliert. Die Geometrie und sämtliche Randbedingungen wie Einspannungen, Auflagerungen, Temperatureinfluss, etc. werden festgelegt und die Materialdaten eingegeben. In den meisten Fällen werden nur grundsätzliche Werkstoffdaten wie E-Modul, Querdehnzahl, Dichte und Festigkeit angegeben. Möchte man thermische Analysen durchführen, müssen diese Daten selbstverständlich auch temperaturabhängig implementiert werden. Für komplexere Eingaben gibt hierzu eigene Unterprogramme, sogenannte *Subroutines*.
Nun werden noch die Belastungen bzw. Lastfolgen festgesetzt und die Struktur diskretisiert, also in die finiten Elemente unterteilt. Dies geschieht mit den *Netzgeneratoren* in der Regel vollautomatisch, wobei die einzelnen Elementtypen gewählt werden können. Hierzu gibt es eine große Auswahl, passend für die jeweilige Struktur oder Analysemethode. In Abb. 3.13 werden diese grundlegend dargestellt.
Wie man sieht, müssen die Elementtypen an die jeweilige Struktur angepasst sein und die gewünschten Freiheitsgrade aufweisen. Beispielsweise wird man für eine dünne Platte ein Flächenelement, welches nur Freiheitsgrade in der Scheibenebene besitzt, wählen und kein Volumen- oder Stabelement. Aus den diversen Elementen auszuwählen, setzt jedoch gewisse Kenntnisse des Anwenders voraus und kann zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Mit der Wahl des Elementes wird auch die Höhe der Ansatzfunktion (siehe Verfahren von Ritz und Galerkin) festgelegt. Je höher diese ist, desto genauer wird die Berechnung sein. Allerdings bedarf dies teilweise auch einer erheblichen Verlängerung der Rechenzeit [Frö95].
Die Feinheit des Netzes/*mesh* bestimmt ebenfalls die Qualität der Näherungslösung. In Bereichen mit starken Spannungsgradienten (Kerben, Absätzen, etc.) sollte dieses natürlich feiner sein. Hierzu gibt es aber bereits einige Automatismen, sogenannte *adaptive mesh*-Generatoren, welche in den Programmen implementiert sind.

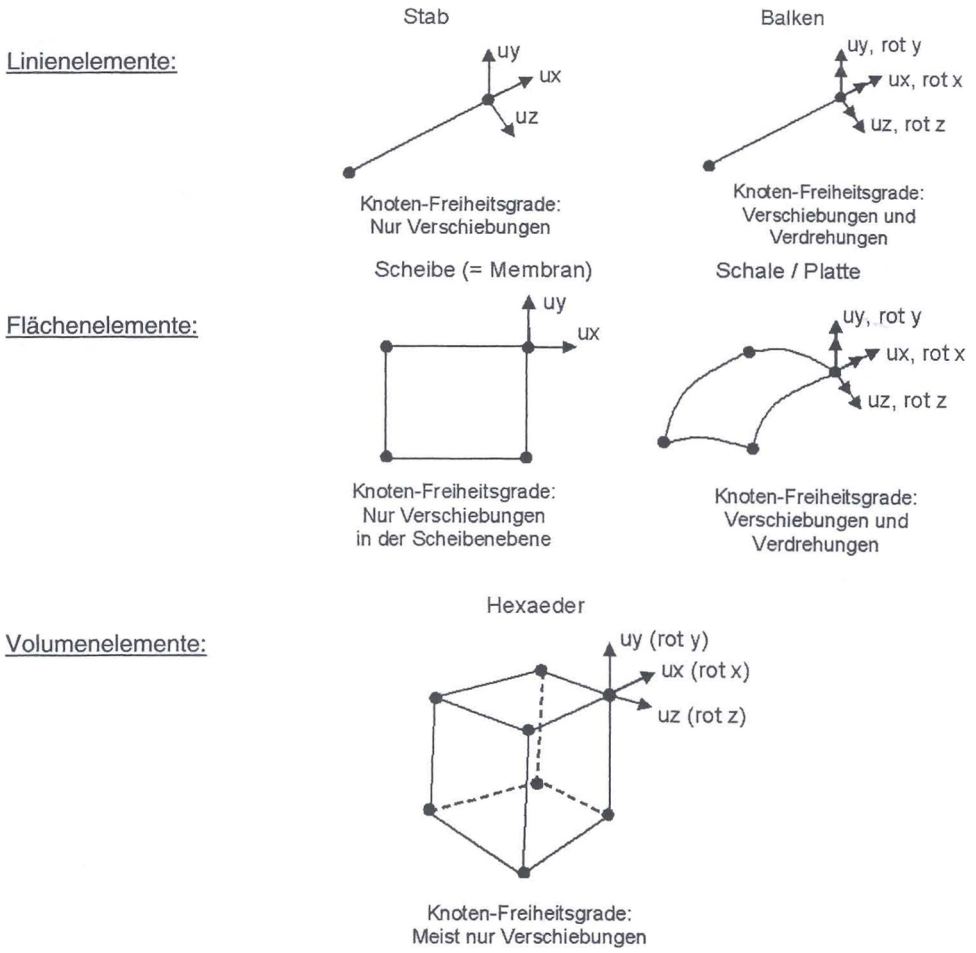


Abb. 3.13: Elementgruppen und Elementtypen für die Strukturanalyse [Frö05]

Im *Solver* wird das Gleichungssystem, welches vorher im *Preprocessor* aufbereitet wurde, gelöst. Dies basiert auf den Verfahren, die in den vorherigen Abschnitten erläutert wurden. Die unterschiedlichen Lösungsmöglichkeiten/-verfahren werden dabei selbstständig vom Programm ausgewählt. Die dafür verwendeten Algorithmen sind hocheffizient und äußerst zuverlässig.

Der *Postprocessor* stellt die Lösung anschließend grafisch oder in Zahlenwerten dar. Es können verschiedene Anzeigemodi gewählt werden, beispielsweise kann die Verformung des Systems angezeigt oder die Spannungsverläufe farblich gekennzeichnet werden. Da sämtliche Werte (Spannung, Verschiebung, Temperatur, etc.) für jeden Knoten berechnet werden, können die Daten auch für einzelne Bereiche ausgegeben werden.

Kapitel 4

Versuchsaufbau/FE-Modell

In diesem Kapitel sollen die in der FE-Software *Abaqus* gewählten Programmeinstellungen dokumentiert werden. Die Geometrie der einzelnen Bauteile, die speziellen Eingaben in Bezug auf die finite Elemente Analyse (Meshing, etc.), sowie die verwendeten Materialdaten werden beschrieben. Ebenso wird auf den zeitlichen Ablauf – die einzelnen Steps – und die Modellierung des Laserstrahles eingegangen.
Da die Simulation an einen realen Versuchsstand angelehnt ist, soll dieser anfangs näher erläutert werden.

4.1 Realer Versuchsstand

Am Institut für Fertigungstechnik der Technischen Universität Wien ist ein Versuchsstand für das laserunterstützte Biegen eingerichtet. Die Umformbedingungen dieser Anlage galt es virtuell nachzubilden bzw. den Umformvorgang zu simulieren. Abbildung 4.1 zeigt den Versuchsaufbau.
Es handelt sich hierbei um eine 3-Punkt-Biegeanlage, in dessen Unterwerkzeug fünf Diodenlaser, parallel zur Biegekante, eingebaut sind. Die Laser haben jeweils eine Leistung von 200 Watt und erwärmen das zu biegende Werkstück direkt und ausschließlich an der Biegekante. Die Fokussierung auf eine Strahlbreite von ca. 2 mm gewährleistet dabei eine hohe Leistungsdichte.
Beim Umformvorgang wird der Stempel, je nach gewünschtem Biegewinkel, mehr oder weniger weit in das Unterwerkzeug abgesenkt.

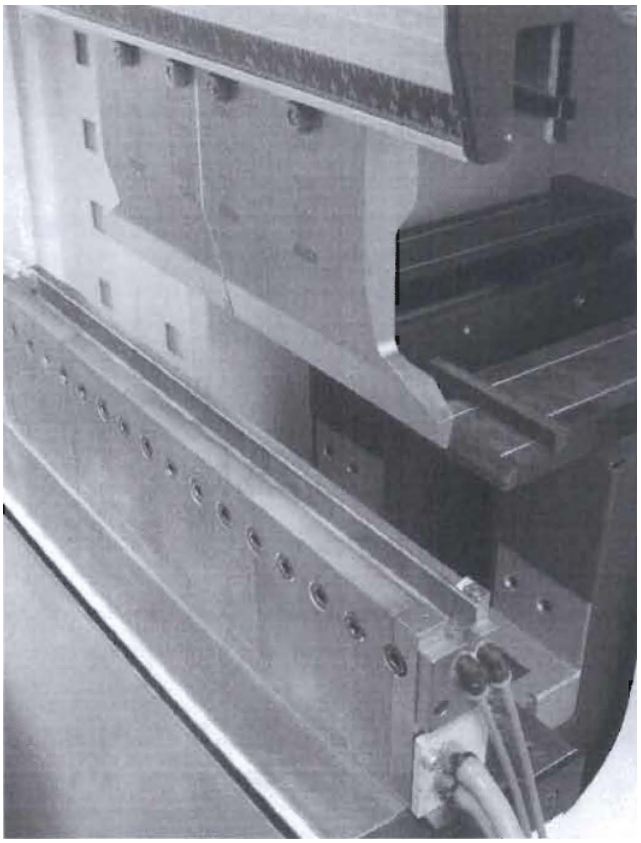


Abb. 4.1: Foto der Versuchsanlage zum laserunterstützten Biegen der TU Wien [Bie11]

4.2 FE-Modell

4.2.1 Geometrie & Meshing

Die Werkzeugabmessungen wurden aus vorhandenen Konstruktionszeichnungen übernommen. Der Übersicht halber wurde die gesamte Simulation zweidimensional erstellt und – aufgrund der Symmetrie um die vertikale Y-Achse – jeweils nur eine Hälfte der Bauteile gezeichnet. In Abb. 4.2 ist dies für den Stempel dargestellt.
Um eine Konsistenz der verwendeten Einheiten[1] zu gewährleisten, wurden sämtliche Abmessungen in Meter angegeben. Abbildung 4.3 zeigt die Skizze des Unterwerkzeuges.

[1] In dem Programmpaket *Abaqus* werden Einheiten immer in den SI-Basiseinheiten angegeben.

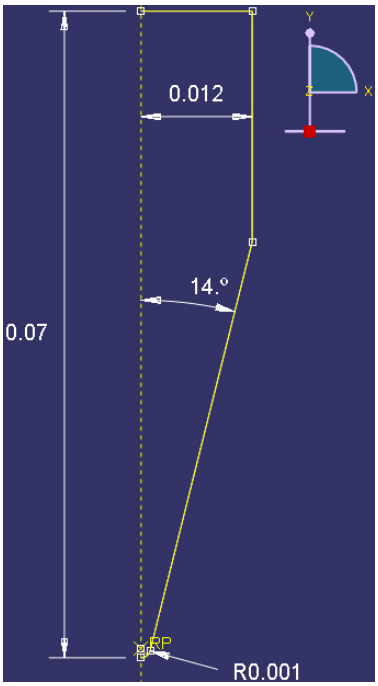


Abb. 4.2: Konstruktionszeichnung des Pressen-Stempels (eine Symmetriehälfte)

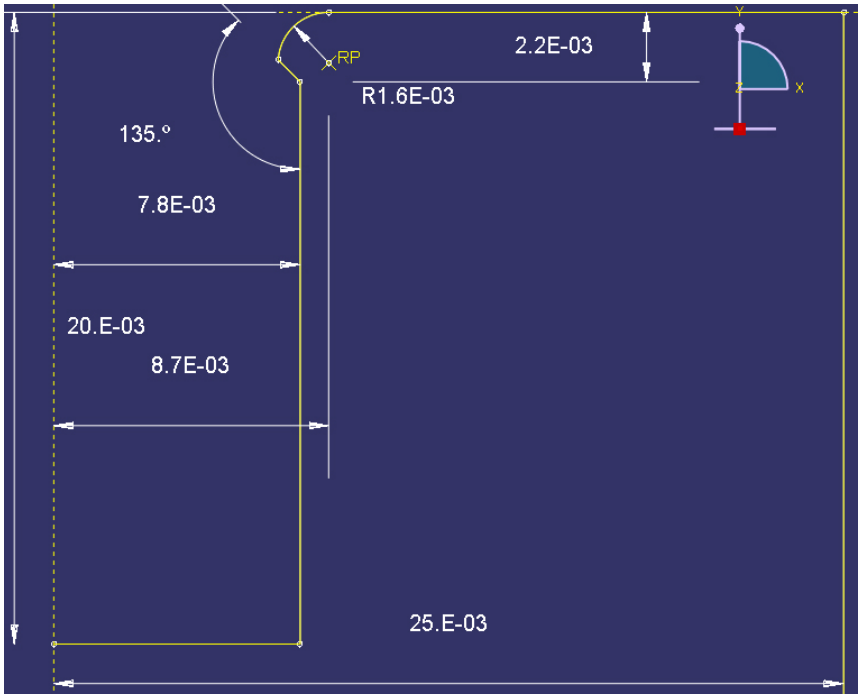


Abb. 4.3: Konstruktionszeichnung des Unterwerkzeuges (eine Symmetriehälfte)

Die Magnesiumplatte wurde mit einer Gesamtlänge von 50 mm und einer Dicke von 1,6 mm dimensioniert. Dies entspricht den Werkstückproben, welche üblicherweise in diesem Versuchsstand getestet werden.

Die Werkzeuge wurden als *rigid*, also als nicht-deformierbare Festkörper definiert - die Platte als zweidimensionales *shell*. Dieses muss anschließend diskretisiert, also in finite Elemente unterteilt werden. Hierzu wurde ein Netz aus sogenannten CPS4RT-Elementen verwendet. Dies sind quadratische Elemente von linearer Ordnung und besitzen somit jeweils vier Knotenpunkte. Sie sind für die kombinierte Beanspruchung aus Verschiebung und Temperatureinfluss vorgesehen, werden als *plane stress*-Elemente analysiert und reduziert integriert.
Dieser lineare, quadratische Elementtyp mit reduzierter Integration wurde gewählt, da die Ergebnisse – vorallem bei höheren Umformgraden – wesentlich präziser sind bzw. die Näherunglösung schon bei einer geringeren Anzahl an Elementen (gröbere Vernetzung) gegen die exakte konvergiert, als die anderer Elementtypen [Web11]. Ebenso wird in der Literatur, z.B. in [Web11], geschrieben, dass diese Art von Elementen für eine derartige Simulation am besten geeignet sind.
Die Analyse wird als *plane stress* behandelt, da ein ebener Spannungszustand vorliegt. Die Platte kann sich beim Umformvorgang ungehindert in der z-Richtung – in der Breitseite – bewegen, somit treten Spannungen nur in der x-y-Ebene auf.
In Abb. 4.4 ist die rechte Symmetriehälfte des fertig vernetzten Bauteils zu sehen. Man kann erkennen, dass das Netz im Bereich der Biegekante sehr fein wird. Ein Abschnitt von 1,5 mm wurde mit besonders kleinen Elementen versehen, da hier naturgemäß die größten Verzerrungen auftreten werden. Abbildung 4.5 zeigt dies im Detail. Mit insgesamt 899 Elementen und 993 Knoten wurde ein sehr engmaschiges Netz erstellt.

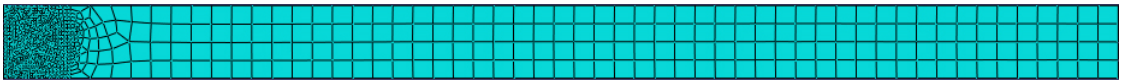


Abb. 4.4: Platte mit eingezeichnetem FE-Netz (rechte Symmetriehälfte)

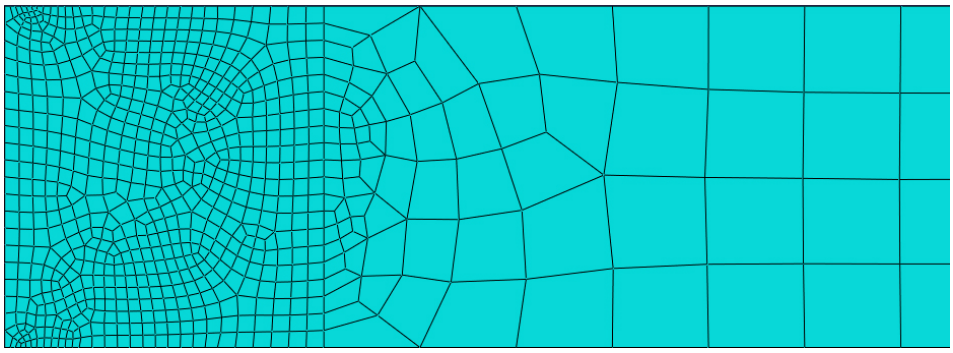


Abb. 4.5: Detailansicht der Vernetzung an der Biegekante der Platte

4.2.2 Simulationsaufbau/Load-Steps

Die Simulation wurde, analog zum tatsächlichen Versuchsstand, in vier Teilschritte unterteilt.
In der Ausgangskonfiguration liegt die Platte auf dem Unterwerkzeug und der Stempel befindet sich 1 mm oberhalb der Platte.

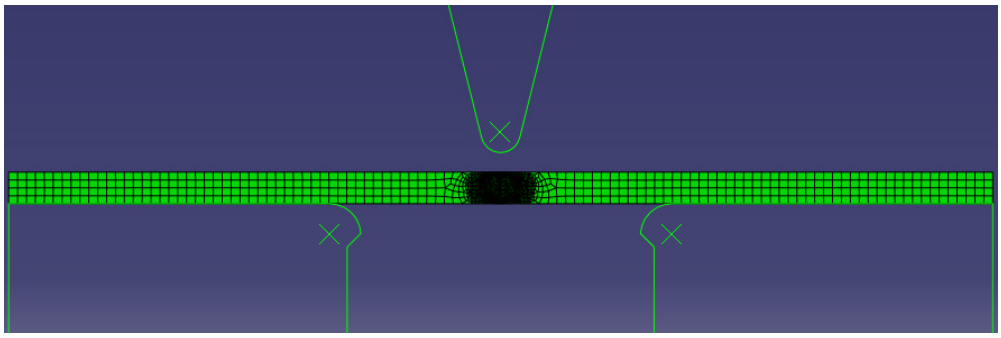


Abb. 4.6: Ausgangskonfiguration der Simulation zum Zeitpunkt t=0

Vorspannen

Im ersten Schritt fährt der Stempel 1,2 mm hinunter und drückt die Platte somit 0,2 mm ein, um diese zu fixieren. Die Step-Time liegt bei zwei Sekunden. Abbildung 4.7 zeigt die eingespannte Platte nach Ablauf des ersten Steps.

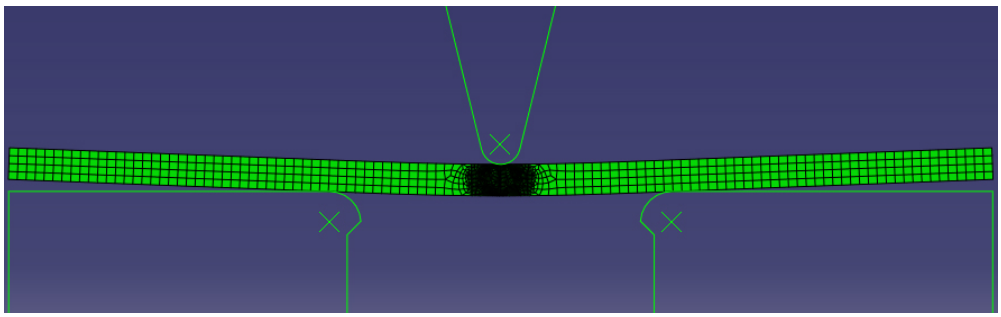


Abb. 4.7: vorgespannte Platte nach Ende des ersten Teilschrittes zum Zeitpunkt t=2

Aufheizen

Nachdem das Magnesiumblech fixiert wurde, verharrt der Stempel in dieser Position

und die Erwärmung der Platte beginnt. Das Erwärmen des Materials durch die Diodenlaser wurde mit einem sogenannten *surface heat flux* realisiert.
Die Laser sind auf eine Strahlbreite von 2 mm fokussiert, wobei die Intensitätsverteilung nach einer Gauß'schen Glockenkurve verläuft. Diese wurde zunächst mit Hilfe der Funktion

$$y(x) = \frac{1}{0,399\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x}{0,35}\right)^2} \tag{4.1}$$

abgebildet und anschließend durch einige Intensitätsstufen diskretisiert. In Abb. 4.8 sind diese Abstufung dargestellt.

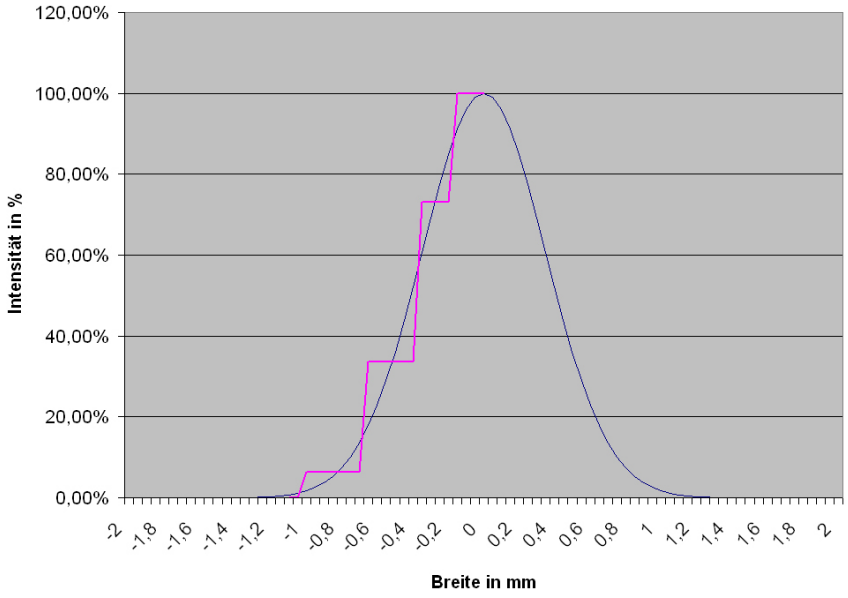


Abb. 4.8: Gauß'sche Intensitätsverteilung der Diodenlaser mit einer Strahlbreite von 2 mm und angenäherten Abstufungen

Bei einer Gesamtleistung von 1.000 Watt (fünf Laser à 200 Watt), einer Strahlbreite von 2 mm und einer beleuchteten Länge von 50 mm ergibt sich eine Intensität von 10.000.000 W/m^2. Da, laut [Bec01a], rund 70% der einfallenden Laserleistung – bei einer Wellenlänge von knapp 1 μm – von Magnesium reflektiert wird, ergeben sich folgende Abstufungen:

Strecke $[mm]$	Intensität $[W]$
0,00 - 0,15	3.000.000
0,15 - 0,35	2.192.160
0,35 - 0,65	1.008.712
0,65 - 1,00	188.731

Tab. 4.1: Intensitätsverteilung der Laserleistung auf die jeweiligen Flächen

Um den unterschiedlich hohen *surface heat flux* in die Oberfläche der Platte einzubringen, wurde diese in die Streckenabschnitte laut Tab. 4.1 eingeteilt. Die Strecken wurden dabei von der Symmetrieachse gemessen. Dies ist in der folgenden Abbildung, welche das linke Ende der rechten Symmetriehälfte der Platte darstellt, verdeutlicht. Die eindringende Laserleistung und deren Einteilung in die verschiedenen Intensitätsstärken wird durch die Pfeile in Abb. 4.9 symbolisiert.

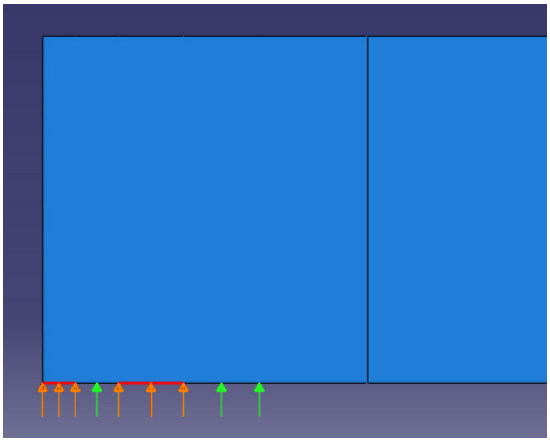


Abb. 4.9: Einwirkung der Laserstrahlung auf die Platte - die einzelnen Streckenabschnitte werden durch die verschieden-färbigen Pfeile symbolisiert. Die vertikale Linie liegt bei 1,5 mm.

Um eine ausreichend hohe Oberflächentemperatur zu erzielen wurde die Aufheizzeit auf 18 Sekunden gesetzt. Dies führt zu einer anfänglichen Materialtemperatur von 346 °C. Nach Ablauf der Aufheizzeit wurde der Laser „abgeschaltet“, somit dringt keine weitere Wärmeleistung in das Material.
Um die Wärmeabstrahlung an die Umgebung bzw. die Wärmeleitung in das Werkzeug zu modellieren, wurde ein, über die Platte und die Zeit, konstanter *surface heat flux* von -5000 W/m^2 gewählt. Dieser wurde zu Beginn des Aufheizens – über die gesamte Simulationsdauer – aktiviert.

Die Wahl dieser hohen Wärmeleistung resultiert aus der Tatsache, dass die Flächenleistung von 5000 W/m^2, bei gegebenener Werkstückgeometrie, lediglich eine Abstrahlung von 0,8 Watt ergibt. Durch Festlegung der austretenden Wärme wird somit der natürlichen Abkühlung des Werkstückes – nach Abschalten der Laserleistung – genüge getan.
In Abb. 4.10 wird der Temperaturverlauf desjenigen Knotens dargestellt, welcher auf der Plattenunterseite in der Symmetrieebene liegt.
Dieser Verlauf konnte auch durch eine analytische Nachrechnung, mit Hilfe des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik, prinzipiell bestätigt werden.

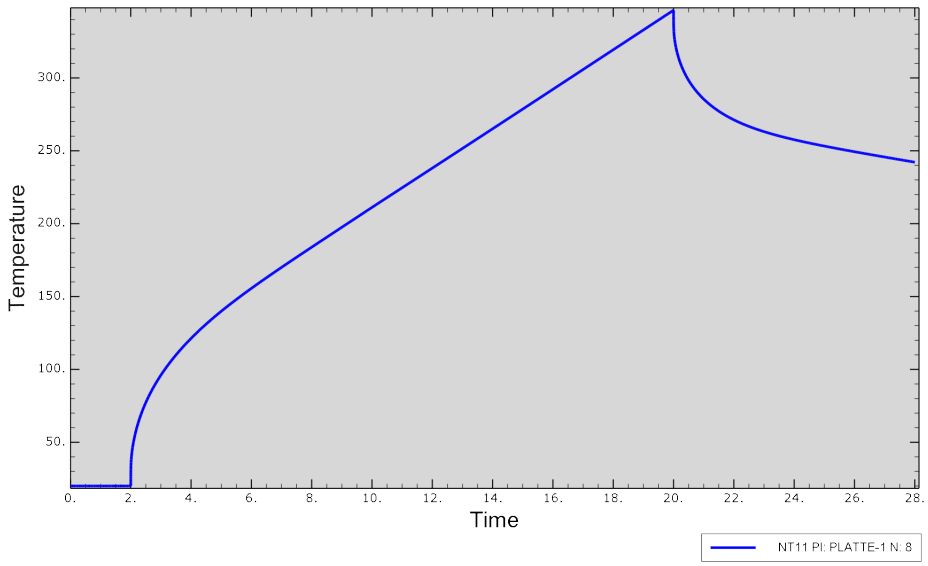


Abb. 4.10: Temperaturverlauf des unteren, direkt angestrahlten Knotens der Symmetrieebene bei einem Umformwinkel von 15°

Biegen

In diesem Schritt erfolgt die eigentliche Umformung. Dabei wird der Biegewinkel durch den Verfahrweg des Stempels bestimmt.
Aufgrund der Geometrie des Unterwerkzeuges ergibt sich, bei einem vordefinierten Verfahrweg in die negative y-Richtung, ein bestimmter Biegewinkel. Es wurden vier verschiedene Biegewinkel simuliert, wobei die Step-Time so angepasst wurde, dass die Umformgeschwindigkeit immer gleich – bei 0,13 mm/s – blieb. Dies liegt vorallem daran, dass die für die Fließspannung verwendeten Materialdaten (aus [Kai03a]) genau mit dieser Geschwindigkeit experimentell ermittelt wurden (siehe Abschnitt 4.2.3). Nachfolgende Tabelle zeigt die unterschiedlichen Parameter.

Biegewinkel	Verfahrweg $[mm]$	Step-Time $[s]$
15°	1,1	8
30°	2,3	16
45°	3,6	27
60°	5,0	38

Tab. 4.2: Verfahrweg des Stempels zur Erreichung gewisser Biegewinkel und die dazugehörige Step-Time

Der Biegewinkel α wurde so festgelegt, dass ein zahlmäßig größerer Biegewinkel einem höheren Umformgrad entspricht. Abbildung 4.11 verdeutlicht die gewählte Notation.

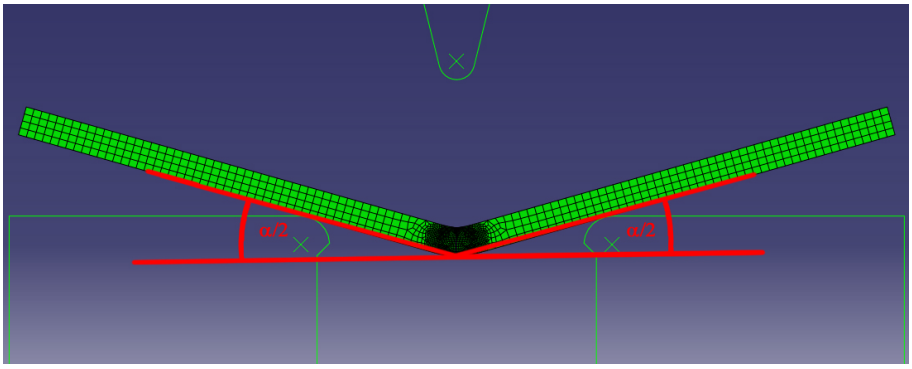


Abb. 4.11: Skizze zur Notation des Biegewinkels α

Bei den einzelnen Biegewinkeln ist allerdings zu beachten, dass es sich hierbei um den maximalen Winkel des Werkstückes handelt und nicht um den endgültigen. Dieser fällt aufgrund der Rückfederung des Materials etwas geringer aus. Näheres dazu wird im folgenden Kapitel gezeigt.

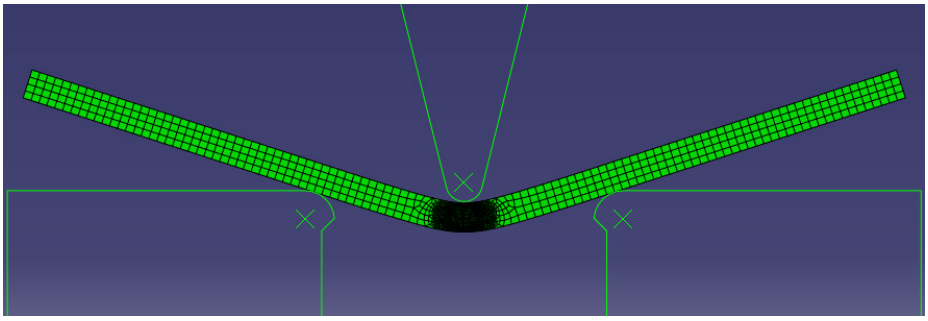


Abb. 4.12: Werkzeugkonfiguration am Ende des Biegevorganges – Biegewinkel von 30°

Stempel hinauf

Nach Erreichen des Verfahrweges zur Umformung bewegt sich der Stempel – im letzten Simulationsschritt – wieder zurück in die Ausgangsposition. Hierbei löst sich die Verbindung zwischen Stempel und Platte, das Werkstück relaxiert geringfügig und liegt abschließend am Unterwerkzeug auf. Die Step-Time wurde auf 2 Sekunden gesetzt.

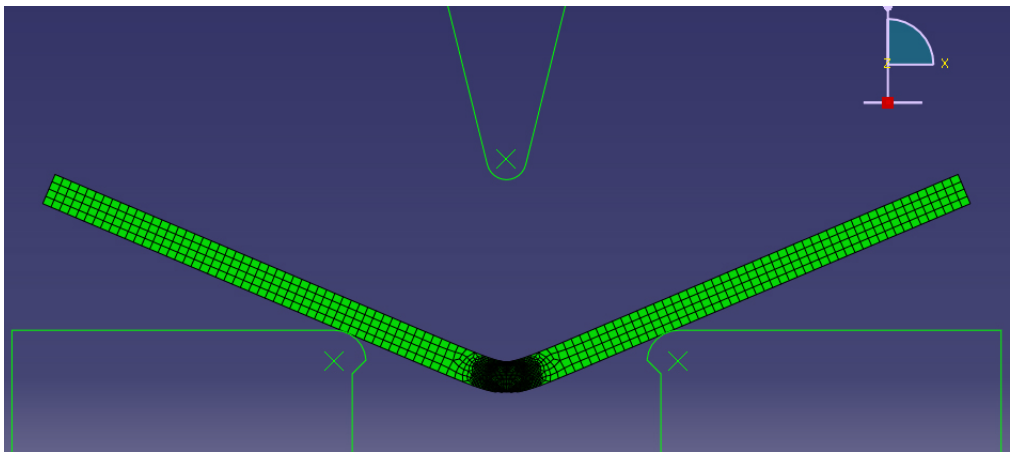


Abb. 4.13: Werkzeugkonfiguration zu Simulationsende

4.2.3 Materialdaten

Für ein korrektes Simulationsergebnis müssen möglichst genaue und detaillierte, temperaturabhängige Materialdaten eingegeben werden.
In der Literatur konnten für die Magnesiumknetlegierung AZ31 nur relativ wenige und meist sehr unterschiedliche Werkstoffdaten gefunden werden. Die verwendeten Zahlenwerte sind daher aus verschiedenen Publikationen, die sich entweder mit sehr ähnlichen Simulationen beschäftigt oder eine Werkstoffgröße gezielt experimentell ermittelt haben.

Für die Dichte ϱ wurde ein Wert von 1780 kg/m^3 gesetzt. Die Querdehnzahl μ wurde mit 0,33 angenommen. Beide Werte stammen aus [Zha10] und werden in anderen Quellen nahezu ident angeführt.

Die Werte der spezifischen Wärmekapazität c_p, sowie die der thermischen Leitfähigkeit λ wurden aus [Kwo11] entnommen. Sie wurden im Rahmen dieser Publikation experimentell ermittelt und dürften somit von hoher Genauigkeit sein. In Tab. 4.3 werden diese temperaturabhängig aufgelistet.

Der Wärmeausdehnungskoeffizient α, sowie die temperaturabhängigen E-Moduln der Magnesiumlegierung AZ31 wurden wiederum von [Zha10] übernommen. Die jeweiligen Werte sind in den folgenden Tabellen aufgelistet.

Temperatur $[°C]$	spezifische Wärmekapazität $[J/kgK]$	Wärmeleitfähigkeit $[W/mK]$
25	1005,9	84,7
100	1031,9	90,5
200	1049,3	95,8
300	1068,9	98,4
400	1091,9	98,6

Tab. 4.3: Thermophysikalische Eigenschaften von Magnesium AZ31 [Kwo11]

Temperatur $[°C]$	Wärmeausdehnungskoeffizient $[1/°C]$
100	$2,64 \cdot 10^{-5}$
200	$2,70 \cdot 10^{-5}$
300	$2,79 \cdot 10^{-5}$

Tab. 4.4: Wärmeausdehnungskoeffizient in Abhängigkeit der Temperatur von Magnesium AZ31 [Zha10]

Temperatur $[°C]$	E-Modul $[GPa]$
20	40,2
75	37,3
100	34,3
125	30,9
150	30,4
200	29,4
250	27,5

Tab. 4.5: temperaturabhängige E-Moduln von Magnesium AZ31 [Zha10]

Die Werte der Fließspannung σ wurden aus [Kai03a] entnommen. In der Literatur findet man einige wenige Spannungs-Dehnungs-Diagramme von Magnesium AZ31, jedoch

wurden diese nur selten für unterschiedliche Temperaturen ermittelt und wenn, dann meist ohne Angabe der Umformgeschwindigkeit. Da die Spannungswerte in [Kai03a] experimentell ermittelt wurden und die Versuchsbedingungen (Blechdicke und -breite) weitgehend übereinstimmen, wurden diese Daten herangezogen.

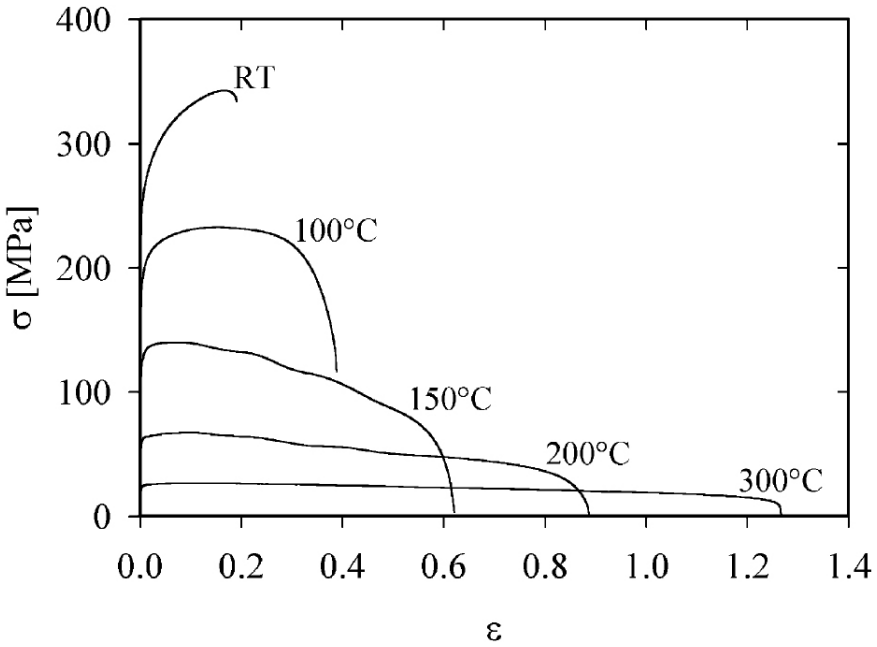


Abb. 4.14: Spannungs-Dehnungs-Diagramm von Magnesium AZ31 bei unterschiedlichen Temperaturen, Versuchsergebnisse aus [Kai03a]

Die Fließspannungen sind, im Vergleich zu anderen Publikationen, relativ niedrig, da die Umformgeschwindigkeit bei nur 0,13 mm/s liegt. Diese wurde natürlich auch in der Simulation berücksichtigt, was zu längeren Step-Zeiten im Biegevorgang führte. Ein weiterer Grund ist die Orientierung des Werkstückes – die Dehnungsversuche wurden parallel zur Walzrichtung ausgeführt. Wie bereits in Abschnitt 2.6.5 erwähnt sind hierbei die Zugspannungen geringer. In Abb. 4.14 ist das Spannungs-Dehnungs-Diagramm aus [Kai03a] dargestellt. Diese Werte wurden abgelesen und in die Simulation implementiert.

Zwischen der Blechplatte und dem Stempel sowie dem Unterwerkzeug wurde der Reibungskoeffizient μ – nach [Bie11] – auf 0,01 gesetzt.

Die Ausgangstemperatur der Platte lag bei 20 °C.

Kapitel 5

Simulationsergebnisse

Im Folgenden werden die wichtigsten Ergebnisse der durchgeführten Simulationen präsentiert und analysiert.
Zu Beginn wird auf die Temperaturverteilung zufolge der Lasererwärmung eingegangen, anschließend werden die vorherrschenden Spannungen dargestellt und mit denen einer konventionellen Umformung verglichen. Im Weiteren werden die auftretenden Dehnungen näher beleuchtet und abschließend das Rückfederungsverhalten analysiert.

Es wurden vier verschiedene Umformwinkel und zwar 15°, 30°, 45° und 60° simuliert. Um den Einfluss der Werkstofferwärmung auf das Umformverhalten zu verdeutlichen, wurden die vier Umformungen zusätzlich auch noch ohne Lasererwärmung simuliert.

Sämtliche der folgenden Ergebnisse beziehen sich auf die Werte von bestimmten FE-Knoten. Es wurden zwei Knotenpunkte in der Symmetrieebene der Platte gewählt, einer auf der Unterseite, einer auf der Oberseite. Abbildung 5.1 zeigt die Lage dieser Punkte.

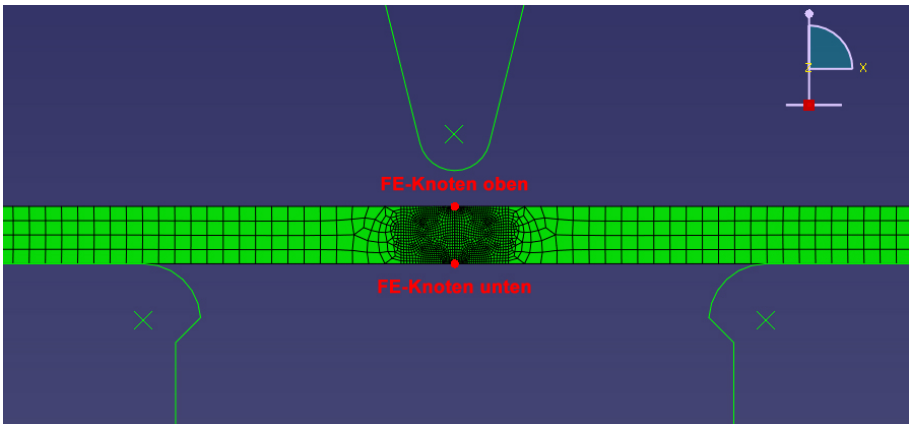


Abb. 5.1: Lage und Notation der im Folgenden verwendeten FE-Knoten

5.1 Temperatur

5.1.1 Temperaturverteilung

Zufolge der Erwärmung durch die Laserstrahlung werden die Bereiche, welche der höchsten Strahlungsintensität ausgesetzt sind – also die Plattenunterseite in der Symmetrieebene – innerhalb von 18 Sekunden auf 346 °C erhitzt. Die gleichzeitig auftretende Wärmeabfuhr flacht die Heizkurve etwas ab und führt zu einem erheblichen Temperaturabfall nach Deaktivierung der Laserleistung. Abbildung 5.2 illustriert diesen Vorgang.

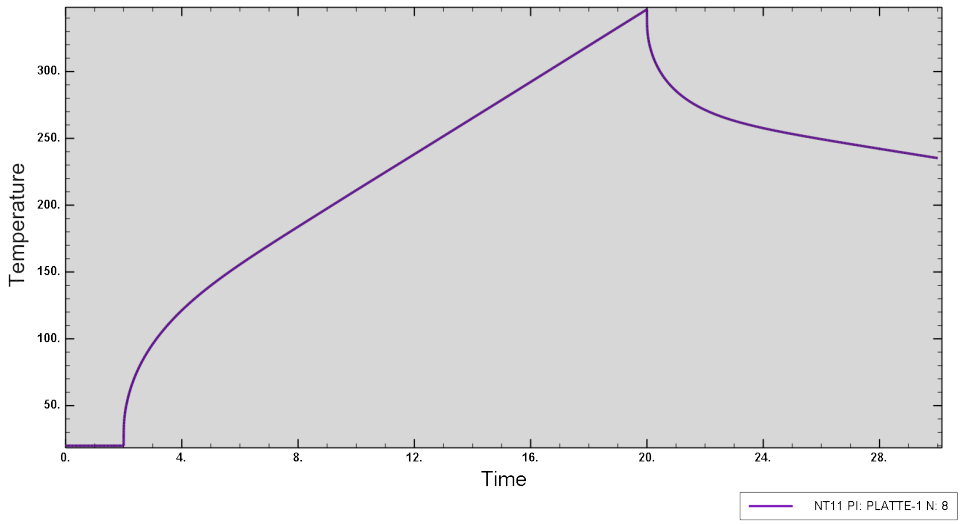


Abb. 5.2: Temperaturkurve des unteren Knotens während der gesamten Simulationsdauer, Biegewinkel 15°, Aufheizzeit 18 Sekunden

Die einzelnen Werte wurden nicht mit praktischen Versuchen verifiziert, jedoch kann der Verlauf der Kurve als plausibel und der Realität entsprechend angenommen werden.

In Abb. 5.3 sind die Temperaturverläufe aufgrund der Wärmeleitung, sowohl über den Querschnitt, als auch längs entlang der Platte dargestellt. Die Temperaturkurven wurden dabei jeweils am Ende der Aufheizzeit, also zum Zeitpunkt der maximalen Temperatur, ermittelt. In Abb. 5.3 c) ist der glockenförmige Verlauf im Bereich der Symmetrieebene respektive Biegekante zu erkennen, welcher der Strahlform entspricht.

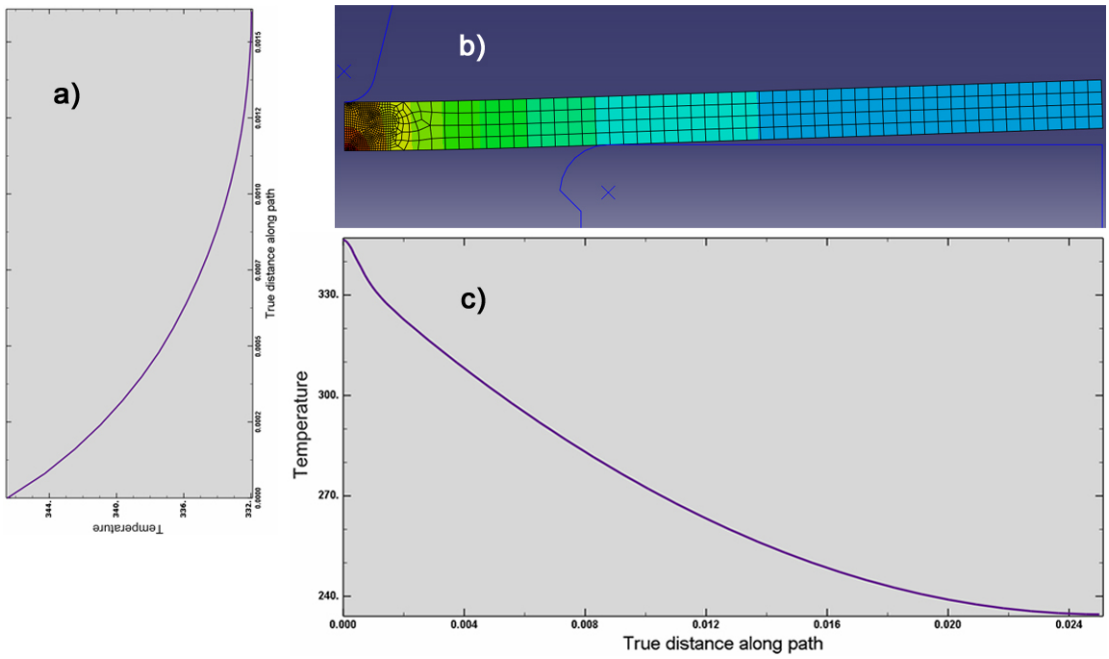


Abb. 5.3: Temperaturverlauf der Platte a) über den Querschnitt, b) innerhalb und c) entlang der Unterseite der Platte. a) und c) am Ende der Aufheizzeit und b) nach 0,6 s.

5.1.2 Einfluss der Temperatur auf die Konvergenz der Lösung bei höheren Umformgraden

Die Wahl der richtigen Temperatur bzw. der entsprechenden Aufheizzeit ist, vorallem bei höheren Umformgraden (Biegewinkel von 45° und 60°), entscheidend für die Konvergenz der Lösung.
Es hat sich gezeigt, dass die Aufheizzeit bei einem Biegewinkel von 45°, von 18 auf 24 Sekunden erhöht werden musste. Erst bei der sich dann einstellenden Temperatur von 427 °C war ein kompletter Simulationslauf möglich. Wurde eine kürzere Aufheizzeit gewählt, so brach *Abaqus* die Analyse kurz vor Ende ab, da die Lösung nicht mehr konvergierte. Die Laufzeit der Simulation wird von *Abaqus* selbstständig in passende, sogenannte *Increments*, eingeteilt. Kann in einem dieser Teilschritte nach 16 Iterationen kein Gleichgewicht an jedem FE-Knoten ermittelt werden, so wird dieses Inkrement auf 25% der ursprünglichen Größe reduziert und neu berechnet [Cor09a]. Wird nach fünf solcher *Cut-Backs* keine Konvergenz erreicht, so wird die Berechnung abgebrochen [Web11]. Im konkreten Fall lag die Größe des letzten Iterationsschrittes bei $0{,}3 \cdot 10^{-19}$ Sekunden.
Ähnliches zeigte sich bei einem Biegewinkel von 30°, wobei hier eine Temperatur von 325 °C nicht unterschritten werden durfte.

Der Biegewinkel von 60° konnte überhaupt nicht vollständig dargestellt werden, da die Ergebnisse ab einem Winkel von ca. 47° nicht mehr konvergierten.
Mehrere Simulationsdurchgänge mit unterschiedlichen Temperaturniveaus machten deutlich, dass die für die FE-Analyse „optimalste“ Temperatur zwischen 482 °C und 509 °C lag - hierbei konnte der größte Biegewinkel erreicht werden. Diese Temperaturen führen jedoch zu einer starken Gefügeveränderung bzw. Erweichung des Materials, da der Schmelzpunkt der Magnesiumlegierung AZ31 bei 630 °C liegt [oM90].

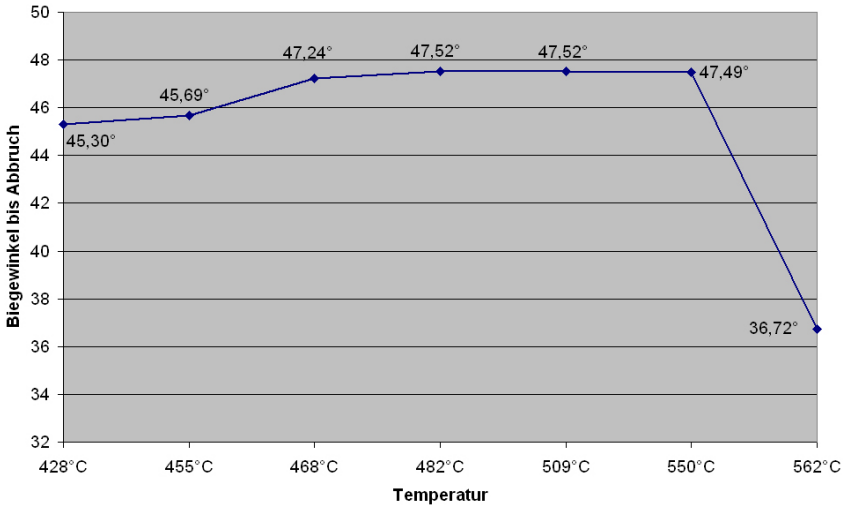


Abb. 5.4: maximal erreichbare Biegewinkel bis zum Simulationsabbruch bei unterschiedlichen Temperaturen

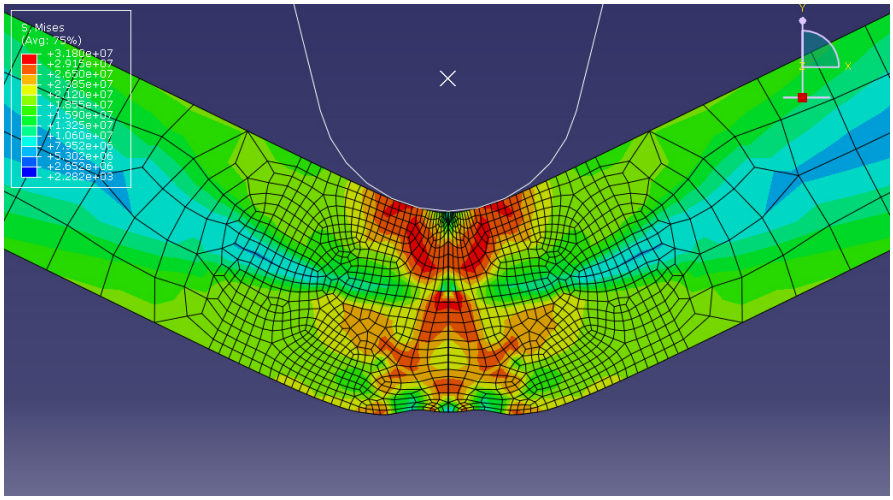


Abb. 5.5: verformte Platte bei Simulation mit Lasererwärmung und einem Biegewinkel von 60° bei Abbruch der Simulation (Biegewinkel ca. 47°)

Ein möglicher Grund für den Programmabbruch könnte sein, dass die Verzerrungen der finiten Elemente auf der Plattenunterseite sehr groß werden und diese regelrecht "aufgerissen" wird. Abbildung 5.5 verdeutlicht dies.
Interessanterweise konnten allerdings, ohne Werkstofferwärmung, Biegewinkel von 60° vollständig simuliert werden. Es entstehen dabei auch große Verformungen an der Plattenunterseite, allerdings weisen diese ein etwas anderes Profil auf. In den Abbildungen 5.9 und 5.10 ist dieses Phänomen auch anhand eines Abfallens der Spannungskurve sichtbar.
Beim Vergleich der Abbildungen 5.5 und 5.6 wird jedoch sehr deutlich, dass die Spannungen bei Erwärmung wesentlich geringer ausfallen.

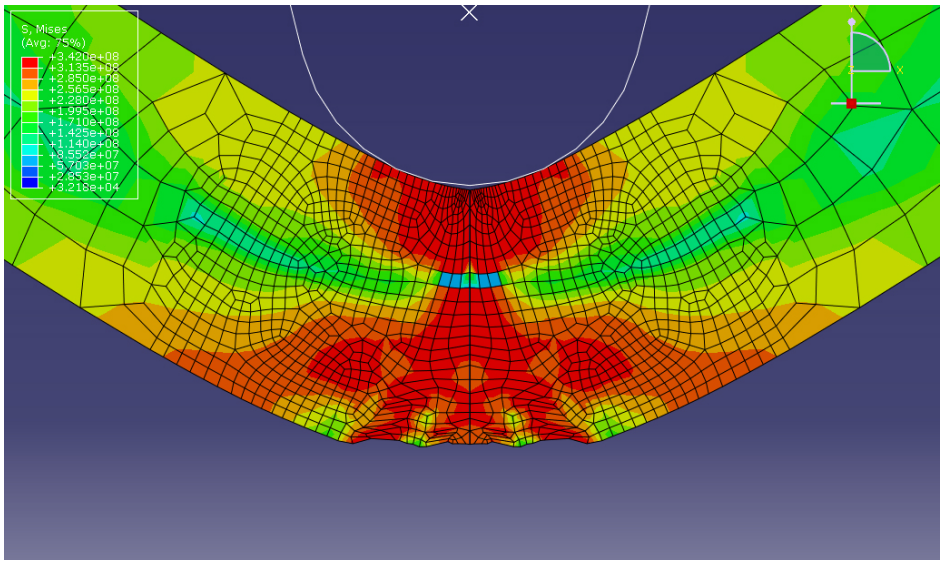


Abb. 5.6: verformte Platte bei Simulation ohne Lasererwärmung und einem Biegewinkel von 60°

5.2 Spannungen

5.2.1 Vergleich zwischen laserunterstütztem und konventionellem Biegen

Wie im Vorfeld bereits erwartet, sind die Spannungen im Werkstück beim laserunterstützten Biegen deutlich geringer als die ohne Erwärmung. Die von Mises Spannungen differieren zwischen den beiden Verfahren um mehr als eine Potenz.
Während der Erwärmung ist ein deutlicher Abfall der Spannung zu erkennen - der Werkstoff relaxiert offensichtlich aufgrund der Wärmeeinwirkung. Selbst im Verlauf des Biege-

vorganges steigen die Spannungen nur geringfügig an.
Die folgenden Diagramme zeigen die Spannungsverläufe mit und ohne Lasererwärmung, jeweils für einen Biegewinkel. Die Werte stammen von dem bereits beschriebenen unteren FE-Knoten.
Um die Spannungswerte mit den jeweiligen Temperaturen besser vergleichen zu können, wurde zusätzlich die Knotentemperatur in die Diagramme eingefügt.
Da in den Biegesimulationen ohne Erwärmung natürlich die Aufheizzeit fehlt, enden deren Verläufe dementsprechend früher.

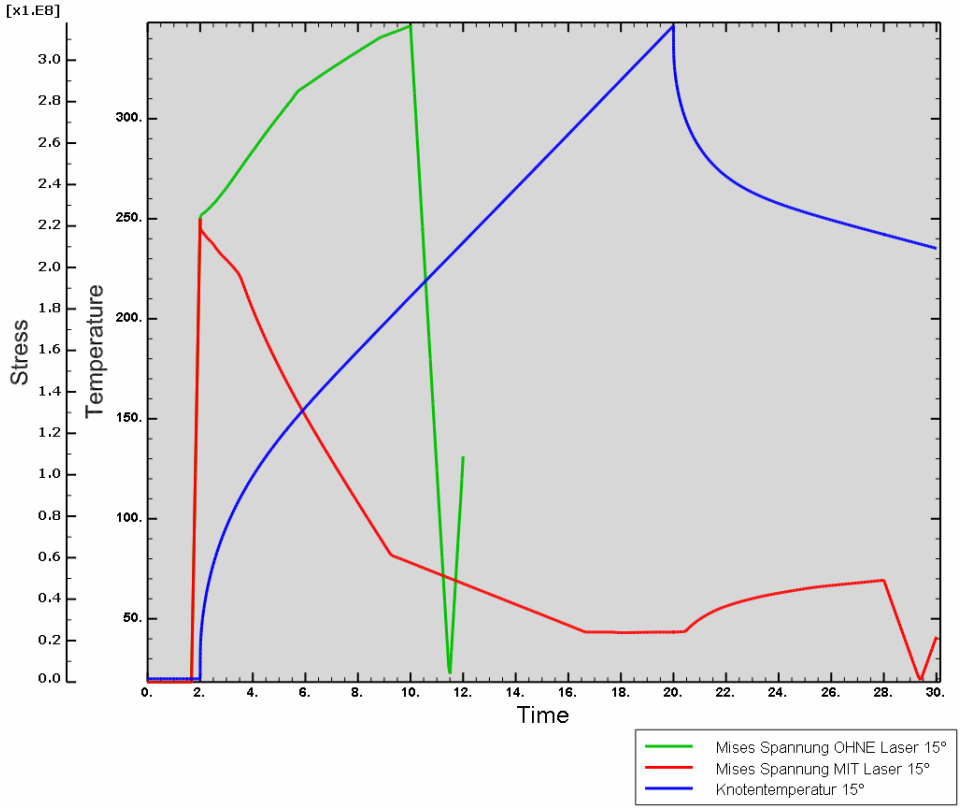


Abb. 5.7: Spannungsverläufe der von Mises Spannung des laserunterstützten und konventionellen Biegens, Biegewinkel 15°

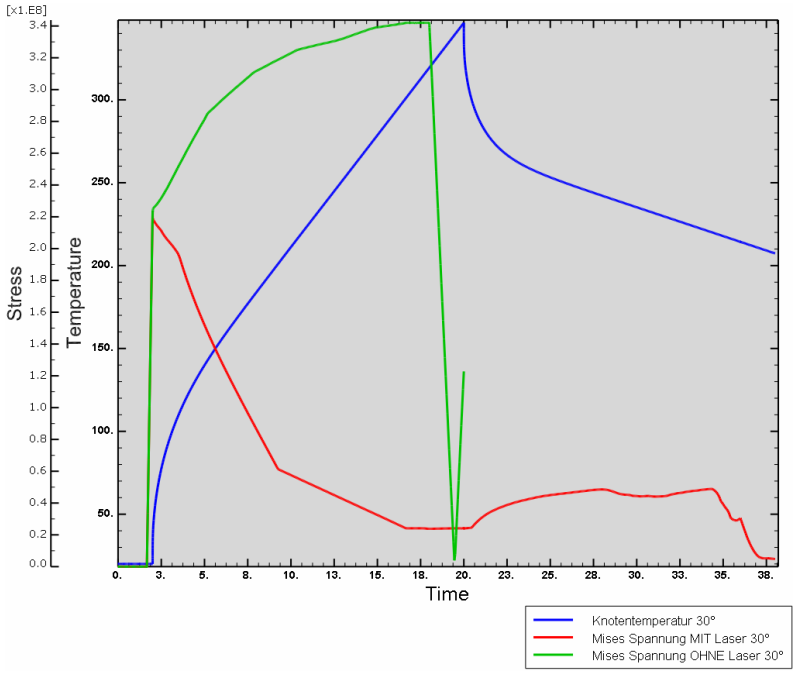


Abb. 5.8: Spannungsverläufe der von Mises Spannung des laserunterstützten und konventionellen Biegens, Biegewinkel 30°

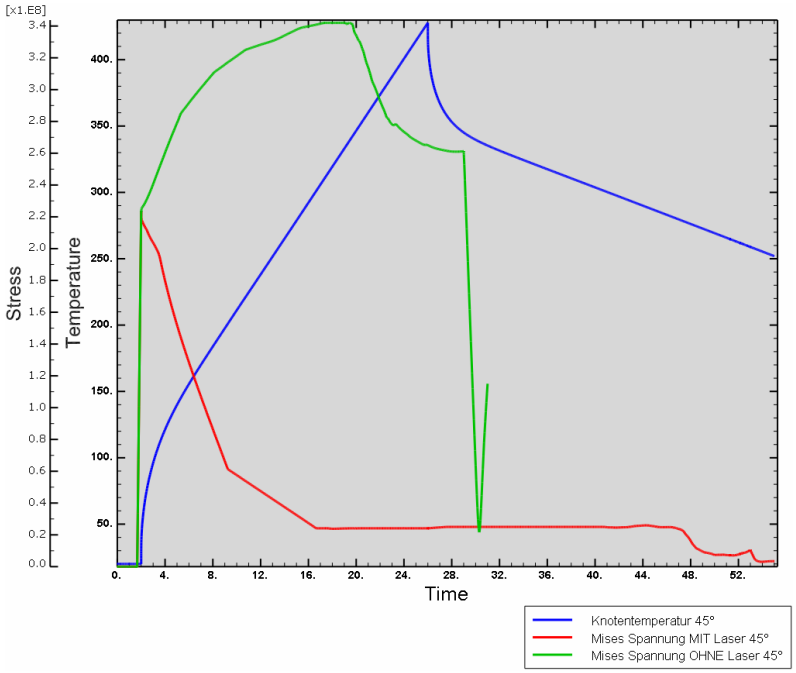


Abb. 5.9: Spannungsverläufe der von Mises Spannung des laserunterstützten und konventionellen Biegens, Biegewinkel 45°

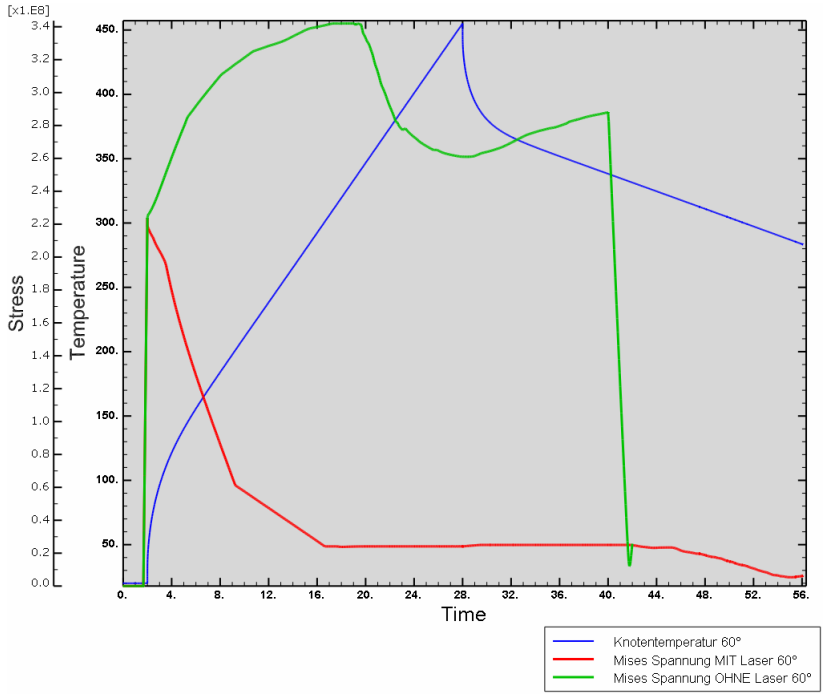


Abb. 5.10: Spannungsverläufe der von Mises Spannung des laserunterstützten und konventionellen Biegens, Biegewinkel 60°

Der starke Spannungsanstieg in der zweiten Sekunde liegt an der Vorspannung des Werkstückes und wird mit dem Einsetzen der Erwärmung rasch abgebaut.

Bei allen Biegewinkeln zeigen sich im Verlauf des Aufheizens drei Knicke in der Spannungskurve. Ein Abfall zu Beginn des Erwärmens, eine Abflachung im ersten Drittel und eine weitere Abflachung im zweiten Drittel, wobei diese bei höheren Biegewinkeln „optisch“ früher stattfindet, da hier länger erwärmt wird. Somit dürften diese Knicke von den Werkstoffdaten abhängen, da sie jeweils bei gleichen Temperaturen einsetzen.
Nach dem letzten Knick ist bei allen Umformwinkeln eine Spannungssenke – mit einer von Mises Spannung von etwas über $0{,}2 \cdot 10^8$ Pa – zu beobachten, welche naturgemäß zu Beginn des Umformvorganges endet. Interessanterweise ist der anschließende Spannungsanstieg bei den kleineren Biegewinkeln (15° und 30°) wesentlich ausgeprägter, als der bei höheren Umformgraden. Dies kann allerdings nur an der erhöhten Temperatur und der damit verbundenen geringeren Fließspannung (siehe Abb. 4.14) liegen, da bei 45° und 60° länger erwärmt wird.

Nach Beendigung des Biegens steigen die Spannungen, vorallem beim Umformen ohne Laserunterstützung, wieder an. Hierbei handelt es sich offensichtlich um die Rückfederung des Werkstückes, wobei der stärkere Anstieg ohne Erwärmung mit den unterschiedlichen Rückfederungsverhalten, welche in Abschnitt 5.4 näher erläutert werden, korreliert.

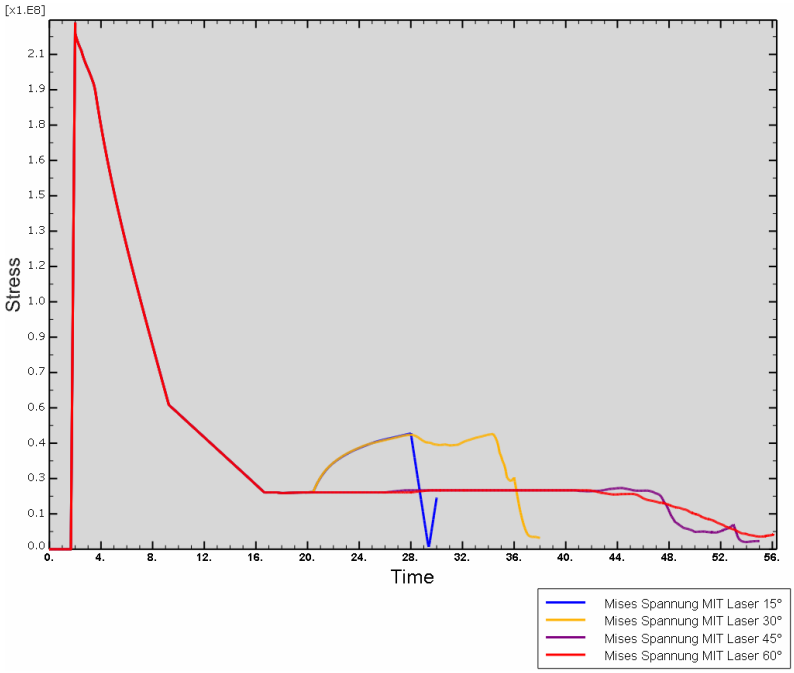


Abb. 5.11: Spannungsverläufe der von Mises Spannung des FE-Knotens auf der Plattenunterseite, laserunterstütztes Biegen, unterschiedliche Biegewinkel

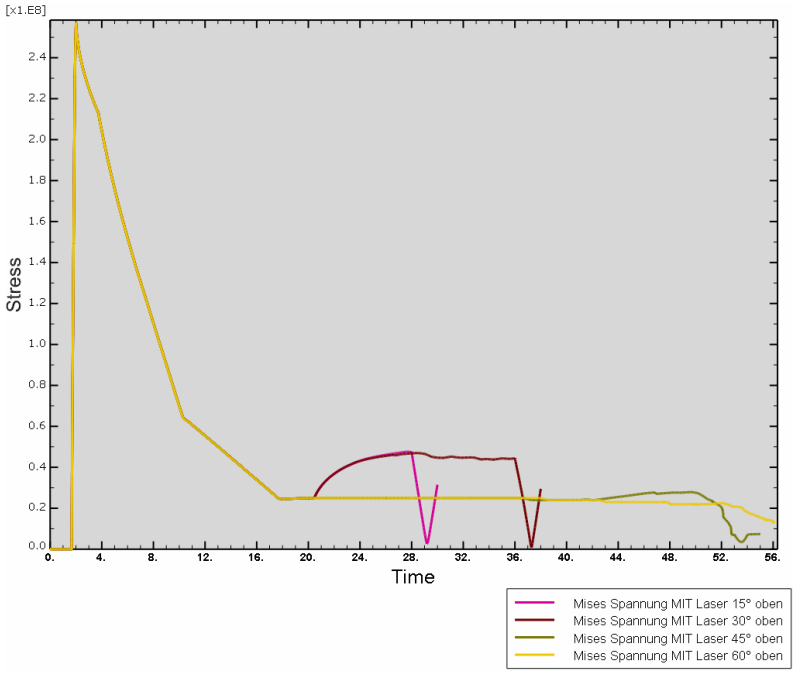


Abb. 5.12: Spannungsverläufe der von Mises Spannung des FE-Knotens auf der Plattenoberseite, laserunterstütztes Biegen, unterschiedliche Biegewinkel

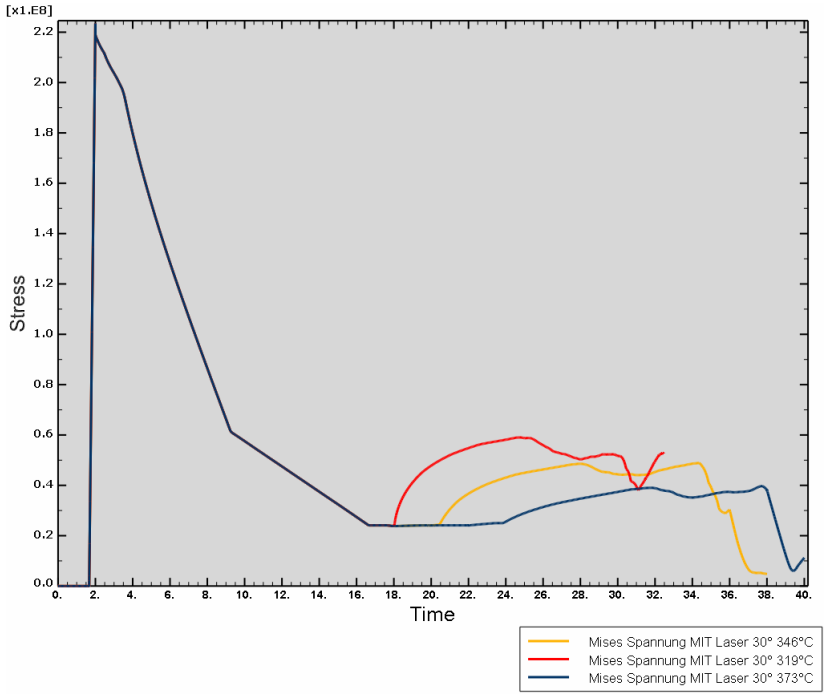


Abb. 5.13: Spannungsverläufe der von Mises Spannung des FE-Knotens auf der Plattenunterseite, Biegewinkel von 30° und unterschiedliche Aufheizzeiten

Die Abbildungen 5.11 und 5.12 zeigen die von Mises Spannungen der einzelnen Biegewinkel des oberen bzw. unteren FE-Knotens.
Die Spannungskurve der 30°-Biegung ist, bis zum Erreichen eines Winkels von 15°, ident mit der der 15°-Biegung, da hier die gleiche Temperatur simuliert wurde.

Die Spannungen gleicher Biegewinkel, bei unterschiedlich starken Erwärmungen, verdeutlichen den Einfluss des Aufheizens nochmals. In Abb. 5.13 ist dies für einen Biegewinkel von 30° und drei verschiedenen Temperaturniveaus dargestellt.

5.2.2 Spannungsverteilung im Werkstück

Untersucht man die Spannungen innerhalb der Magnesiumplatte, so stellt man fest, dass diese ohne Erwärmung wiederum um eine Potenz höher sind, als die mit Laserunterstützung. Ebenso differieren auch die Spannungsverläufe und Biegeradien. Abbildung 5.14 zeigt die Spannungsverteilung der zwei Verfahren. Neben den wesentlich höheren Spannungen bei konventioneller Umformung, ist auch der größere Biegeradius gut erkennbar. Allerdings führt die Werkstückerwärmung in der Simulation zu einer leichten Abflachung der Plattenunterseite. Dies könnte an der höheren Fließfähigkeit liegen.

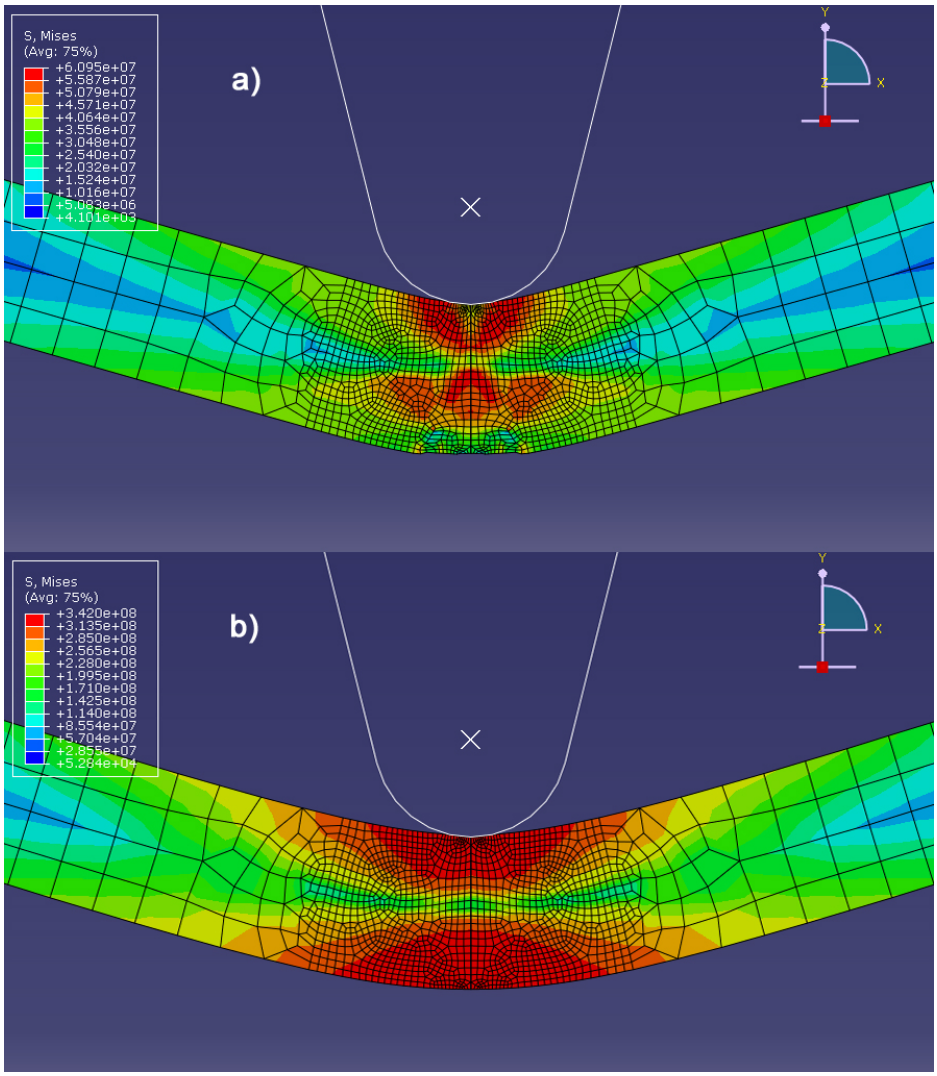


Abb. 5.14: Spannungsverteilung des a) laserunterstützten und b) konventionellen Biegens, Biegewinkel 30°

Trägt man die von Mises Spannung über den Querschnitt der Platte auf, so erkennt man beim lasergestützten Verfahren nur eine relativ geringe Spannungssenke in der mittleren Faser. Hingegen weist das Umformen bei Raumtemperatur einen sehr starken Abfall im mittleren Bereich des Querschnittes auf. Bei beiden Verfahren ist jedoch zu beobachten, dass sich die Spannungssenke bei zunehmenden Biegewinkeln nach innen, also in Richtung des Stempels, verschiebt. Die folgenden Abbildungen zeigen die beschriebenen Phänomene. Auf der x-Achse ist der Querschnitt in Meter aufgetragen, wobei von der Plattenunterseite gemessen wurde.

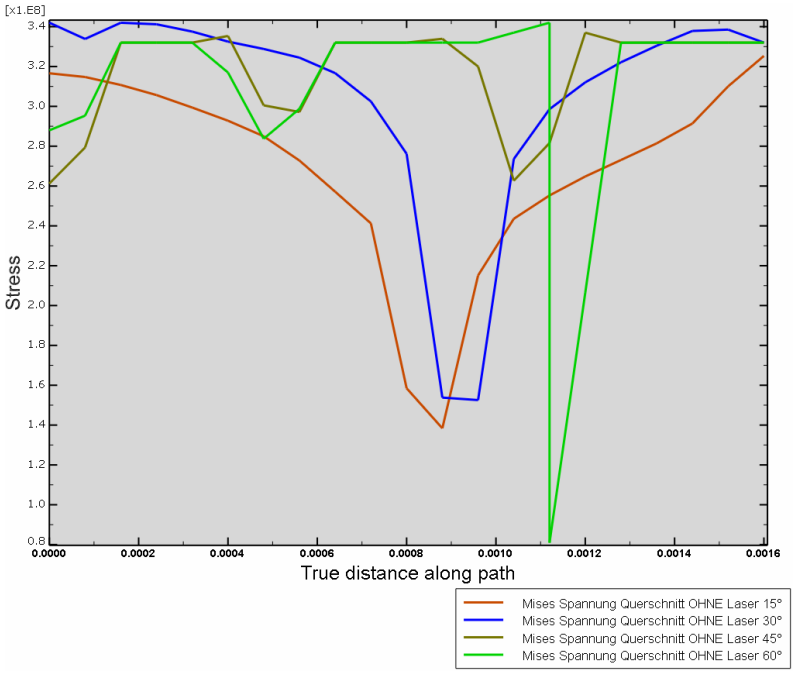


Abb. 5.15: Spannungsverläufe im Querschnitt der Symmetrieebene, ohne Lasererwärmung, unterschiedliche Biegewinkel

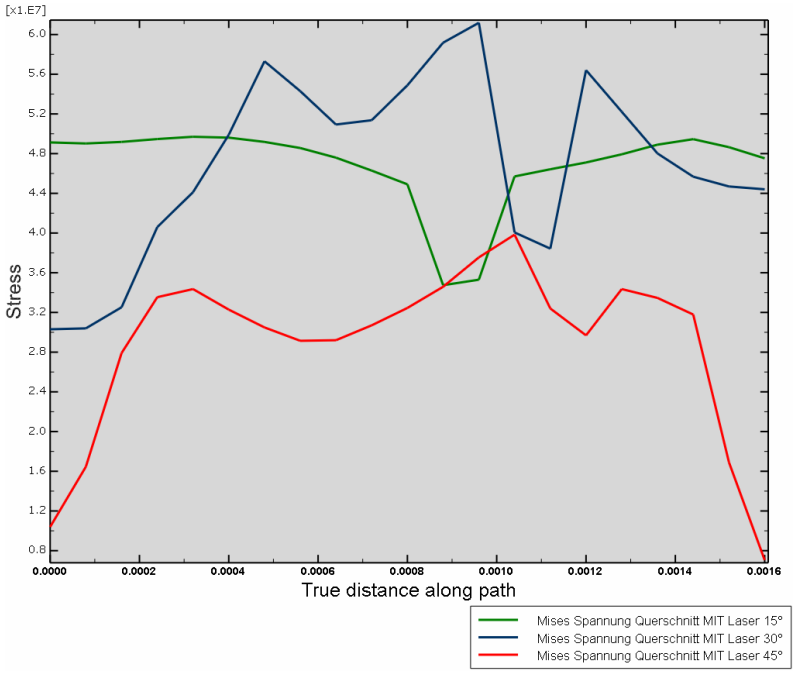


Abb. 5.16: Spannungsverläufe im Querschnitt der Symmetrieebene, mit Lasererwärmung, unterschiedliche Biegewinkel

5.3 Dehnungen

In den folgenden Diagrammen werden die Werte des *Equivalent Plastic Strain* dargestellt. Dieser ist für die klassische von Mises Plastizität, laut Abaqus' Notation, definiert als [Cor09a]:

$$\varepsilon^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{pl}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{pl}}} \tag{5.1}$$

Vergleicht man die Dehnungen von unterschiedlichen Biegewinkeln, so erkennt man, dass diese trivialweiser mit zunehmendem Umformgrad steigen werden.

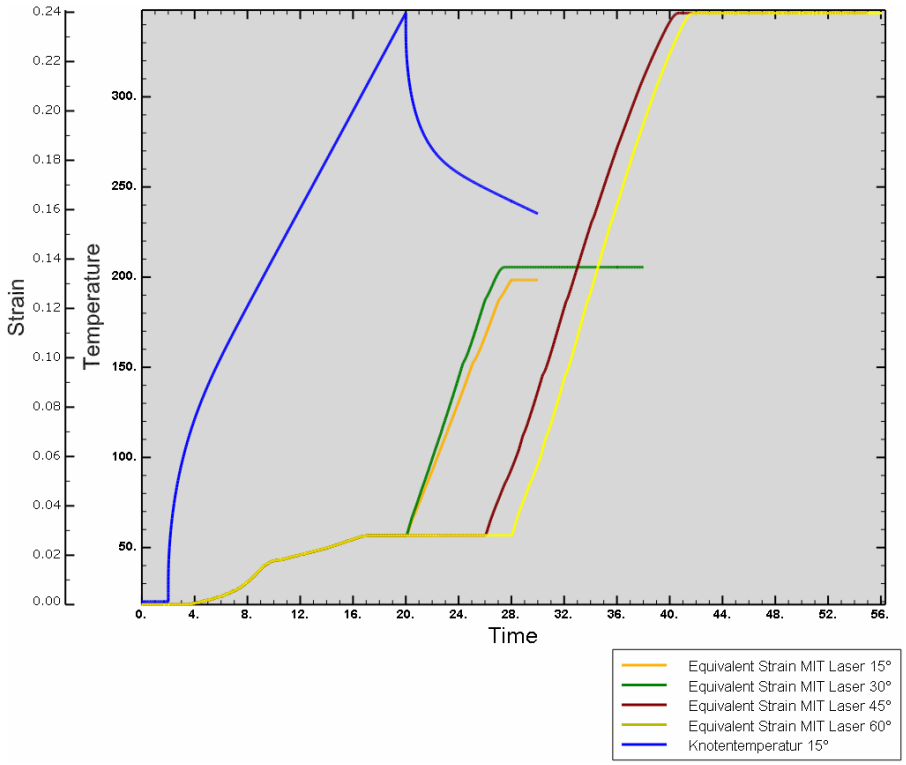


Abb. 5.17: Dehnungsverläufe des unteren FE-Knotens, unterschiedlicher Biegewinkel mit Lasererwärmung

In Abb. 5.17 ist jedoch auch erkennbar, dass die Dehnung schon vor dem Biegen – während des Aufheizvorganges – steigt. Dies dürfte daran liegen, dass der Werkstoff erwärmt wird und sich, aufgrund der Implementierung des Wärmeausdehnungskoeffizienten α, ausdehnt.

Abbildung 5.18 stellt die Dehnungen des oberen und unteren FE-Knotens gegenüber.

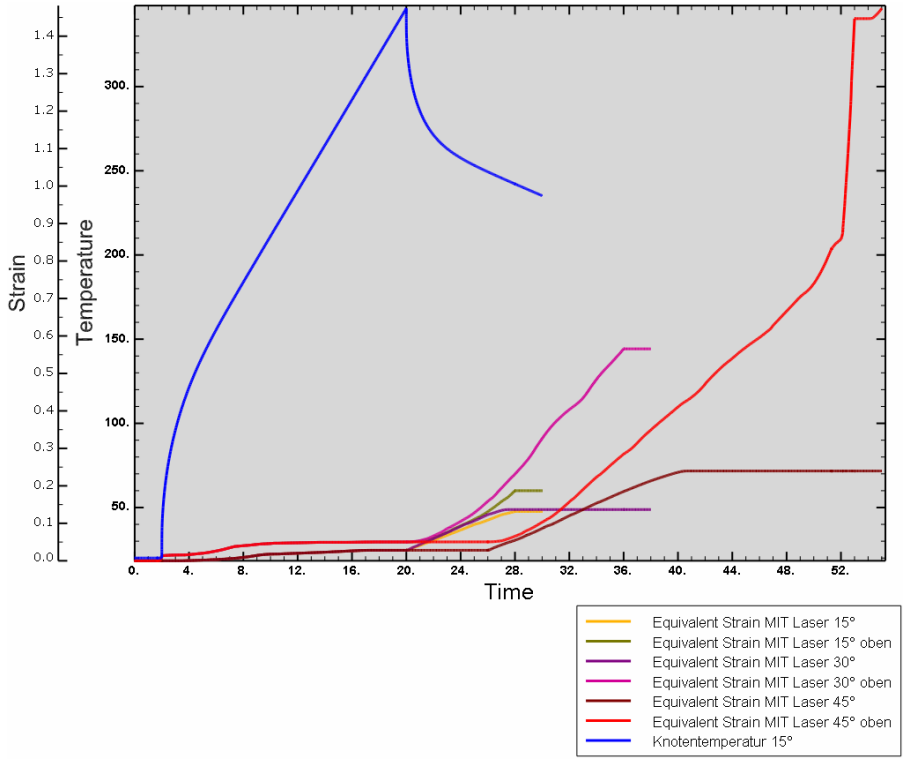


Abb. 5.18: Dehnungsverläufe des oberen und unteren FE-Knotens, unterschiedlicher Biegewinkel, mit Lasererwärmung

Hier ist klar zu erkennen, dass die Dehnungen bzw. Stauchungen des oberen Knotens wesentlich höher sind, als die des unteren. Mit zunehmender Umformung divergieren die Verläufe immer stärker. Dies dürfte daran liegen, dass das Formen größerer Biegewinkel das bereits beschriebene Aufreißen der Werkstückunterseite bewirkt und die Dehnungen der einzelnen Elemente somit nicht mehr anwachsen. Diese Möglichkeit besteht hingegen nicht auf der Plattenoberseite.
Der obere FE-Knoten wird bei einem Biegewinkel von 45° bereits um über 140% gestaucht. Auf die Darstellung der 60°-Umformung wurde an dieser Stelle verzichtet, da die Dehnung des oberen Knotens derartig groß wurde, sodass die anderen Verläufe nur mehr sehr unübersichtlich dargestellt werden könnten.

5.4 Rückfederung

Wie in der Praxis zu beobachten, zeigte sich auch in der Simulation, dass das Werkstück, nach Beendigung des Umformens, einen gewissen elastischen Anteil aufweist und etwas rückfedert. Diese Abnahme des Biegewinkels ist sowohl vom Umformgrad, als auch vorallem vom verwendeten Verfahren abhängig. Die FE-Analyse ergab, dass die Rückfederung beim laserunterstützten Biegen mit zunehmendem Biegewinkel leicht abnahm, während das Gegenteil beim konventionellen Umformen auftrat.

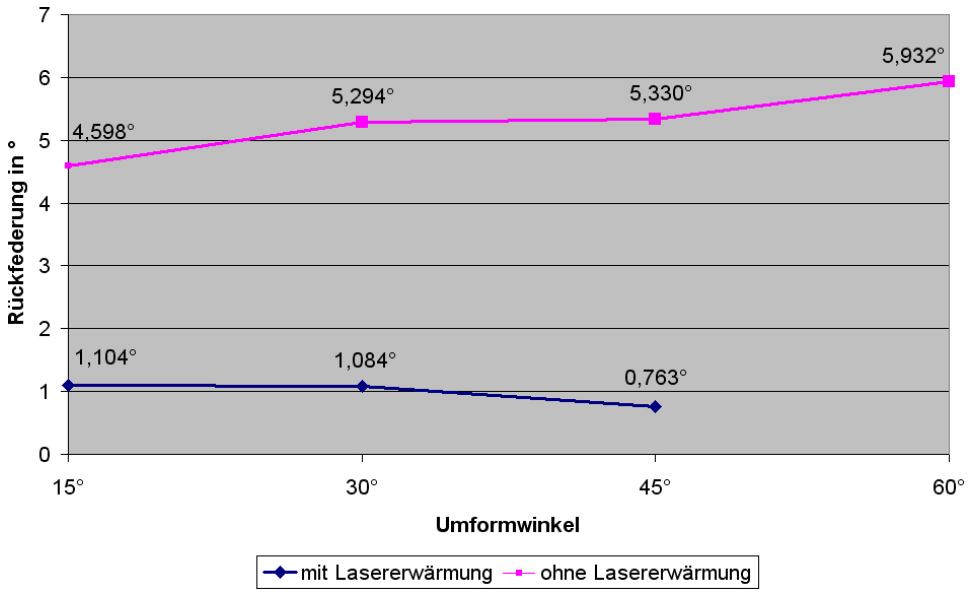


Abb. 5.19: Rückfederung der Magnesiumplatte in Abhängigkeit des Umformwinkels, mit und ohne Lasererwärmung

Der Unterschied innerhalb eines Verfahrens war vernachlässigbar gering, zwischen den einzelnen Methoden traten jedoch Differenzen von bis zu 5° auf. Dies kann damit erklärt werden, dass es durch die Erwärmung zu der in den Abschnitten 2.6.3 und 2.6.4 erläuterten „Entspannung“ des Werkstückes und somit zu einer Abnahme der elastischen Dehnung kommt. Dies erklärt auch die geringste Rückfederung bei 45° Biegewinkel, da hier am längsten erwärmt wurde.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Programm zur Simulation eines laserunterstützten Biegevorganges an einer 3-Punkt-Biegeanlage, mit Hilfe der Finite-Elemente Software *Abaqus*, erstellt. Diese Simulation bildet einen realen Versuchsstand, welcher sich im Labor für Laser- und Umformtechnik der Technischen Universität Wien befindet, ab. Die FE-Analyse soll die Ergebnisse des praktischen Versuches möglichst annähern respektive vorhersagen. Der Schwerpunkt lag dabei, neben einer Literaturrecherche zum Werkstoff Magnesium und der Theorie der finiten Elemente, in der programmtechnischen Umsetzung der Werkstückerwärmung mittels Diodenlaser und anschließender Abkühlung durch die Wärmeleitung in die Werkzeuge und Abstrahlung an die Umgebung.
Ebenso sollten bzw. konnten die Vorteile des laserunterstützten Biegens zum Umformen eines spröden Werkstoffes zahlenmäßig – anhand der resultierenden Spannungen – nachgewiesen werden.
Der Vergleich zum konventionellen Biegen zeigte, dass die auftretenden Spannungen, unabhängig vom Biegewinkel, um mehr als eine Potenz geringer sind und sich somit auch schlecht zu formende Werkstoffe biegen lassen.
Zusätzlich zur Erhöhung des Umformgrades konnte auch ein kleinerer Biegeradius, also eine schärfere Kantenbildung in der FE-Analyse prognostiziert werden.
Die zahlreichen Screenshots der Simulation, sowie etliche Diagramme zeigen eindeutig den positiven Einfluss – beziehungsweise die Notwendigkeit – erhöhter Temperatur auf das Umformverhalten eines spröden Werkstoffes. Während das Werkstück beim konventionellen Biegen bereits bei einem Biegewinkel von 15° beschädigt werden würde (betrachtet man die Spannungswerte der Simulation und vergleicht sie mit den Festigkeitswerten aus [oM90]), so könnten mit Lasererwärmung – laut FE-Simulation – Biegungen von bis zu 45° durchgeführt werden. Außerdem ist ein weitaus verbessertes Rückfederungsverhalten feststellbar.

Obwohl die Ergebnisse mit den Erfahrungen aus den Versuchen grundsätzlich übereinstimmen, konnten noch keine exakten Vergleiche zur Verifikation der Simulation erstellt werden. Da temperaturabhängige Materialdaten für die Magnesiumknetlegierung AZ31

sehr rar und die verwendeten Werte relativ grob bezüglich der Temperatur abgestuft sind, sollten diese zukünftig experimentell, am tatsächlichen Versuchsstand, ermittelt werden. Hierbei könnte auch die Wärmeleitung/-abfuhr gemessen und so gegebenenfalls die in der Simulation angenomme angepasst werden. Dies würde zu noch zuverlässigeren Ergebnissen führen.
Die Implementierung einer adaptiven FE-Vernetzung, sowie einer räumlich unterschiedlichen Wärmeabfuhr (die Wärmeleitung in die Werkzeuge wird von der an die Umgebung etwas differieren) stellt einen hohen Entwicklungsaufwand dar, würde jedoch stark zu einer weiteren Erhöhung der Genauigkeit beitragen. Die im ersten Kapitel dargelegten Informationen beziehungsweise Vorteile des Werkstoffes Magnesium rechtfertigen diesen Aufwand jedoch, da dadurch das große Potential dieses Materials weiter ausgeschöpft werden könnte und neue Anwendungen ermöglicht würden.

Abbildungsverzeichnis

Abb. 2.1 Gegenüberstellung von Balken desselben Gewichtes bzw. derselben Steifigkeit unterschiedlicher Materialien [Bec03] 4

Abb. 2.2 Produktionsentwicklung von Leichtbauwerkstoffen im 20. Jahrhundert [Kai03b] 5

Abb. 2.3 Übersicht über die Rohstoffe und Gewinnung von Reinmagnesium 6

Abb. 2.4 Magnesium aus Meerwasser nach Norsk Hydro [uKW71] 10

Abb. 2.5 Magnesium aus Meerwasser nach der Dow Chemical Comp. [uKW71] . . 10

Abb. 2.6 Elektrolysezelle der I.G. Farbenindustrie AG [uKW71] 11

Abb. 2.7 Retortenofen nach L.M. Pidgeon [uKW71] 12

Abb. 2.8 Arbeitsschema des Magnetherm-Prozesses [uKW71] 12

Abb. 2.9 Bruchdehnung und Streckgrenze von gebräuchlichen Magnesiumguss- und -knetlegierungen [Kra08] 13

Abb. 2.10 Äußerst dünnwandiges Mobilitelefon-Gehäuse aus Magnesium [Fro98] . . 14

Abb. 2.11 Gesenkgeschmiedete Bauteile aus Magnesiumlegierungen [Bec03], sowie Motorblock eines Reihensechszylinders von BMW in Magnesium/ Aluminium-Verbund-Technologie [Wah03] 15

Abb. 2.12 Einfluss des Eisen-Gehaltes auf die Korrosion von reinem Magnesium in 3%-iger NaCl Lösung [Fro98] 16

Abb. 2.13 Hexagonales Kristallgitter 19

Abb. 2.14 Koordinatensystem im hexagonalen Gitter mit zwei exemplarisch eingezeichneten Richtungsvektoren 19

Abb. 2.15 Gitterstruktur der hexagonal dichtest gepackten Elementarzelle von Magnesium mit eingezeichneter Basal-, Prismen- und Pyramidalebene . . . 20

Abb. 2.16 Einflussgrößen beim Warmumformen nach *Spittel* [Spi89] 21

Abb. 2.17 Doppel-Fehlstellen in AZ31 Legierungen, welche bei Raumtemperatur bis zum Bruch belastet wurden, (a) eines stranggepressten Stabes und (b) einer gewalzten und geglühten Platte [Bar07b] 22

Abb. 2.18 Scherbänder in AZ31 Legierungen nach Dehnung bis zum Bruch mit einer Dehnrate von (a) $2964\,s^{-1}$ und (b) $1537\,s^{-1}$ [wTea07] 22

Abb. 2.19 Prinzip der Zwillingsbildung [Drö99] 23
Abb. 2.20 Zwillingsbildung im hexagonalen Kristallgitter [Kra08] 23
Abb. 2.21 (a) Pyramidalebene 2. Ordnung (Ebenengruppe $\{10\bar{1}2\}$) und (b) 1. Ordnung (Ebenengruppe $\{10\bar{1}1\}$) im hexagonalen Kristall [Drö99] 24
Abb. 2.22 Spannungs-Dehnungs-Diagramm von Zugversuchen mit AZ31 Legierungen bei unterschiedlichen Temperaturen, Dehnrate von $10\,s^{-1}$ [wTea07] . 25
Abb. 2.23 Mikroskopische Aufnahmen einer AZ31 Legierung, zehn Minuten lösungsgeglüht bei 450° C, mit deutlich sichtbarer Zwillingsbildung, (b) in vergrößerter Aufnahme [ea05] 25
Abb. 2.24 Gleitsysteme im hexagonalen Kristallgitter [ea02] 26
Abb. 2.25 Gefügeausbildung und Einsetzen der Rekristallisation bei verschiedenen Umformtemperaturen und konstanten Dehnungsraten [SJ04] 26
Abb. 2.26 Unterschiedliche Rekristallisationsgeschwindigkeiten bei verschiedenen Dehnungsraten und konstanter Umformtemperatur [SJ04] 27
Abb. 2.27 Schematische Darstellung eines Umformvorganges, hervorgerufen durch mechanische und thermische Einwirkung und dessen korrespondierende Spannungsverteilung [EB98] 28
Abb. 2.28 Prinzipskizze zum Schmid'schen Schubspannungsgesetz bei einachsiger Beanspruchung [Roo11] 29
Abb. 2.29 Abhängigkeit der Zugfestigkeit von der Orientierung der Magnesiumkristalle. α ist der Winkel zwischen Zugachse und der Gleitebenen-Normale, β der Winkel zwischen Zugachse und Gleitrichtung [Ray59]. 29
Abb. 2.30 Kristallorientierungen nach Walzen, Strangpressen und unidirektionalem Schmieden [Kra08] 30
Abb. 2.31 Einteilung der Guss- und Knetlegierungen nach DIN EN 1753 bzw. DIN 1729-1. Nachstehende Buchstabenkennzeichnungen sind gemäß ASTM B 275 [Kam00] 31
Abb. 2.32 Entwicklungstendenzen bei Magnesiumlegierungen [Kam00] 36

Abb. 3.1 Zerlegung einer Bauteilstruktur in finite Elemente (Diskretisierung - „Vernetzen“) [Frö05] 38
Abb. 3.2 Prinzipieller Ablauf einer Finite-Elemente-Analyse [Ste10] 39
Abb. 3.3 Diskretisierung einer zwei-dimensionalen Struktur mit Dreieckselementen (oben) und isometrische Ansicht eines Elementes mit eingezeichnetem linearen Verschiebungsmodell (unten) [Abe72] 40
Abb. 3.4 Körperkonfiguration zu den Zeitpunkten t=0 und t [Ros10] 41
Abb. 3.5 Biegung eines Balkens, angenähert durch drei Ansatzfunktionen in den diskreten Knoten [Ram10a] 52

Abb. 3.6 Kragträger unter Belastung mit Materialverfestigung [Bec01b] 58
Abb. 3.7 Unterschied zwischen den mit linearer und nichtlinearer Theorie berechneten Biegelinien eines Kragbalkens unter Endlast [Ram10b] 58
Abb. 3.8 Nichtlineares Materialverhalten eines Stabes bei Zugspannung oberhalb der Dehngrenze [Bec01b] 59
Abb. 3.9 Beispiel eines Kontaktproblems zwischen Balken und starrer Unterlage [Bec01b] 60
Abb. 3.10 Schematische Darstellung des iterativen Newton-Raphson Verfahrens [Bec01b] 61
Abb. 3.11 Schematische Darstellung der Energiebilanz eines thermodynamischen Systems [Kau07] 63
Abb. 3.12 Aufbau/Module eines FE-Programms 65
Abb. 3.13 Elementgruppen und Elementtypen für die Strukturanalyse [Frö05] . . . 66

Abb. 4.1 Foto der Versuchsanlage zum laserunterstützten Biegen der TU Wien [Bie11] 68
Abb. 4.2 Konstruktionszeichnung des Pressen-Stempels (eine Symmetriehälfte) . . 69
Abb. 4.3 Konstruktionszeichnung des Unterwerkzeuges (eine Symmetriehälfte) . . 69
Abb. 4.4 Platte mit eingezeichnetem FE-Netz (rechte Symmetriehälfte) 70
Abb. 4.5 Detailansicht der Vernetzung an der Biegekante der Platte 70
Abb. 4.6 Ausgangskonfiguration der Simulation zum Zeitpunkt t=0 71
Abb. 4.7 vorgespannte Platte nach Ende des ersten Teilschrittes zum Zeitpunkt t=2 71
Abb. 4.8 Gauß'sche Intensitätsverteilung der Diodenlaser mit einer Strahlbreite von 2 mm und angenäherten Abstufungen 72
Abb. 4.9 Einwirkung der Laserstrahlung auf die Platte - die einzelnen Streckenabschnitte werden durch die verschieden-färbigen Pfeile symbolisiert. Die vertikale Linie liegt bei 1,5 mm. 73
Abb. 4.10 Temperaturverlauf des unteren, direkt angestrahlten Knotens der Symmetrieebene bei einem Umformwinkel von 15° 74
Abb. 4.11 Skizze zur Notation des Biegewinkels α 75
Abb. 4.12 Werkzeugkonfiguration am Ende des Biegevorganges – Biegewinkel von 30° 75
Abb. 4.13 Werkzeugkonfiguration zu Simulationsende 76
Abb. 4.14 Spannungs-Dehnungs-Diagramm von Magnesium AZ31 bei unterschiedlichen Temperaturen, Versuchsergebnisse aus [Kai03a] 78

Abb. 5.1 Lage und Notation der im Folgenden verwendeten FE-Knoten 79
Abb. 5.2 Temperaturkurve des unteren Knotens während der gesamten Simulationsdauer, Biegewinkel 15°, Aufheizzeit 18 Sekunden 80
Abb. 5.3 Temperaturverlauf der Platte a) über den Querschnitt, b) innerhalb und c) entlang der Unterseite der Platte. a) und c) am Ende der Aufheizzeit und b) nach 0,6 s. 81
Abb. 5.4 maximal erreichbare Biegewinkel bis zum Simulationsabbruch bei unterschiedlichen Temperaturen 82
Abb. 5.5 verformte Platte bei Simulation mit Lasererwärmung und einem Biegewinkel von 60° bei Abbruch der Simulation (Biegewinkel ca. 47°) 82
Abb. 5.6 verformte Platte bei Simulation ohne Lasererwärmung und einem Biegewinkel von 60° 83
Abb. 5.7 Spannungsverläufe der von Mises Spannung des laserunterstützten und konventionellen Biegens, Biegewinkel 15° 84
Abb. 5.8 Spannungsverläufe der von Mises Spannung des laserunterstützten und konventionellen Biegens, Biegewinkel 30° 85
Abb. 5.9 Spannungsverläufe der von Mises Spannung des laserunterstützten und konventionellen Biegens, Biegewinkel 45° 85
Abb. 5.10 Spannungsverläufe der von Mises Spannung des laserunterstützten und konventionellen Biegens, Biegewinkel 60° 86
Abb. 5.11 Spannungsverläufe der von Mises Spannung des FE-Knotens auf der Plattenunterseite, laserunterstütztes Biegen, unterschiedliche Biegewinkel 87
Abb. 5.12 Spannungsverläufe der von Mises Spannung des FE-Knotens auf der Plattenoberseite, laserunterstütztes Biegen, unterschiedliche Biegewinkel 87
Abb. 5.13 Spannungsverläufe der von Mises Spannung des FE-Knotens auf der Plattenunterseite, Biegewinkel von 30° und unterschiedliche Aufheizzeiten 88
Abb. 5.14 Spannungsverteilung des a) laserunterstützten und b) konventionellen Biegens, Biegewinkel 30° 89
Abb. 5.15 Spannungsverläufe im Querschnitt der Symmetrieebene, ohne Lasererwärmung, unterschiedliche Biegewinkel 90
Abb. 5.16 Spannungsverläufe im Querschnitt der Symmetrieebene, mit Lasererwärmung, unterschiedliche Biegewinkel 90
Abb. 5.17 Dehnungsverläufe des unteren FE-Knotens, unterschiedlicher Biegewinkel mit Lasererwärmung 91
Abb. 5.18 Dehnungsverläufe des oberen und unteren FE-Knotens, unterschiedlicher Biegewinkel, mit Lasererwärmung 92
Abb. 5.19 Rückfederung der Magnesiumplatte in Abhängigkeit des Umformwinkels, mit und ohne Lasererwärmung 93

Tabellenverzeichnis

Tab. 2.1 Physikalische Eigenschaften von Reinmagnesium (99,99%) bei 20°C [Kam00], [Gmb02],[Kai03b] 17

Tab. 2.2 Vergleich der spezifischen Schnittkraft K_C verschiedener Werkstoffe [Kam00] 18

Tab. 2.3 Bezeichnung der Legierungselemente nach ASTM B 275 [Kam00] . . . 31

Tab. 2.4 Zustandsbezeichnungen von Magnesiumguss nach ASTM B 296 (auszugsweise) [Kam00] 32

Tab. 2.5 Wirkung der wichtigsten Legierungselemente [Kam00], [Kai03b], [Wah03], [Drö99] 34

Tab. 2.6 Mechanische Eigenschaften ausgewählter Magnesiumgusslegierungen (bei Raumtemperatur) [Rei08] 35

Tab. 2.7 Mechanische Eigenschaften ausgewählter Magnesiumknetlegierungen (stranggepresste Profile bei Raumtemperatur) [Kam00] 36

Tab. 3.1 Klassifizierung nichtlinearer Problem nach [Ger07] 61

Tab. 3.2 Analogien zwischen thermischer und mechanischer FE-Berechnung [Deg04],[Abe72] 62

Tab. 4.1 Intensitätsverteilung der Laserleistung auf die jeweiligen Flächen . . . 73

Tab. 4.2 Verfahrweg des Stempels zur Erreichung gewisser Biegewinkel und die dazugehörige Step-Time 75

Tab. 4.3 Thermophysikalische Eigenschaften von Magnesium AZ31 [Kwo11] . . 77

Tab. 4.4 Wärmeausdehnungskoeffizient in Abhängigkeit der Temperatur von Magnesium AZ31 [Zha10] 77

Tab. 4.5 temperaturabhängige E-Moduln von Magnesium AZ31 [Zha10] 77

Literaturverzeichnis

[Abe72] Chandrakant Desai, John Abel. *Introduction to the Finite Element Method: A numerical Method for Engineering Analysis.* VNR Verlag, 1972.

[Ass11] International Magnesium Association. *Year Ending 2010 Statistics.* http://www.intlmag.org/statistics.html, 2011.

[BAB04] Sven Hübner, Bernd-Arno Behrens, Gerrit Kurz. *Beheiztes hydromechanisches Tiefziehen von Magnesiumblechen (Heated Hydro-Mechanical Deep Drawing of Magnesium sheet Metal).* Neuere Entwicklungen in der Blechumformung, Herausgegeben von Klaus Siegert, S. 391-410, 2004.

[Bar07a] M. R. Barnett. *Twinning and the ductility of magnesium alloys Part I: „Tension“ twins.* Materials Science & Engineering A464, S. 1-7, 2007.

[Bar07b] M. R. Barnett. *Twinning and the ductility of magnesium alloys Part II: „Contraction“ twins.* Materials Science & Engineering A464, S. 8-16, 2007.

[Bec01a] Adolf Beck. *Magnesium und seine Legierungen.* Springer Verlag, 2001.

[Bec01b] A.A. Becker. *Understanding Non-Linear Finite Element Analysis through illustrative Benchmarks.* NAFEMS, 2001.

[Bec03] Joachim Becker. *Manufacture and Properties of Extruded and Forged Components in Magnesium Wrought Alloys.* Otto Fuchs KG Germany, 2003.

[Bie11] Robert Bielak. *Laser assisted bending - Handout Abaqus Workshop.* Institut für Fertigungstechnik und Hochleistungslasertechnik - TU Wien, 2011.

[BLM01] T. Ebert B. L. Mordike. *Magnesium properties – applications – potential.* Materials Science and Engineering A302, S. 37-45, 2001.

[Cor09a] Dassault Systèmes Simulia Corp. *Abaqus Analysis User's Manual - Abaqus 6.9.* http://abaqus.civil.uwa.edu.au:2080/v6.9/books/usb/default.htm, 2009.

[Cor09b] Dassault Systèmes Simulia Corp. *Abaqus Theory Manual - Abaqus 6.9.* http://abaqus.civil.uwa.edu.au:2080/v6.9/books/stm/default.htm, 2009.

[Dan11] Jürgen Dankert. *Numerische Methoden.* Vorlesungsskript - FH Hamburg, http://www.rzbt.haw-hamburg.de/dankert/numet.html, 2011.

[Deg04] Yasar Deger. *Die Methode der Finiten Elemente - Grundlagen und Einsatz in der Praxis.* Expert Verlag, Band 551, 2004.

[DIN82] Normenausschuß Nichteisenmetalle (FNNE), DIN. *Deutsche Norm DIN 1729-1, Magnesiumlegierungen - Knetlegierungen.* 1982.

[DIN97] Normenausschuß Nichteisenmetalle (FNNE), DIN. *Europäische Norm DIN EN 1753, Magnesium und Magnesiumlegierungen - Blockmetalle und Gußstücke aus Magnesiumlegierungen.* 1997.

[DIN98] Normenausschuß Nichteisenmetalle (FNNE), DIN. *Europäische Norm DIN EN 12421 - Reinmagnesium.* 1998.

[Drö99] Klaus Georg Dröder. *Untersuchungen zum Umformen von Feinblechen aus Magnesiumknetlegierungen.* Dissertation. Universität Hannover, Fachbereich Maschinenbau, 1999.

[ea91] Dieter Bimberg et al. *Materialbearbeitung mit Lasern: Grundlagen und Anwendungen.* Expert Verlag, 1991.

[ea02] Manfred Peters et al. *Titan und Titanlegierungen.* Manfred Peters, 2002.

[ea04] F. W. Bach et al. *Makroskopische Werkstoffschädigung durch die Bildung von Scherbändern beim Walzen und Tiefziehen von Magnesiumblechen.* Zeitschrift Metall, 58. Jahrgang, Ausgabe 6, 2004.

[ea05] Manuel Marya et al. *Microstructural effects of AZ31 magnesium alloy on its tensile deformation and failure behaviors.* Materials Science & Engineering, A418 (2006) S. 341-356, 2005.

[EB98] K. Wissenbach, E. Beyer. *Oberflächenbehandlung mit Laserstrahlung.* Laser in Technik und Forschung - Springer Verlag, 1998.

[Frö95] Peter Fröhlich. *FEM-Leitfaden.* Springer Verlag, 1995.

[Frö05] Peter Fröhlich. *FEM-Anwendungspraxis: Einstieg in die Finite Elemente Analyse.* Vieweg Verlag, 2005.

[Fro98] D. Eliezer, E. Aghion, F. H. Froes. *Magnesium Science, Technology and Applications.* Advanced Performance Materials 5, Band 5, S. 201-212, 1998.

[Ger07] Johannes Gerstmayr. *Computergestützte Methoden der technischen Mechanik II (nichtlineare Probleme und Finite Elemente).* Institut für Technische Mechanik, Johannes Kepler Universität Linz, http://www.tmech.mechatronik.uni-linz.ac.at/staff/gerstmayr.en.html, 2007.

[Gmb02] Häuselmann Metall GmbH. *Magnesium-Halbzeug, Leitfaden für die Applikation.* Häuselmann Metall, 2002.

[Gün06] S. Güney. *Zweiter Anlauf - Fachartikel 7295.* Maschinenmarkt - http://www.maschinenmarkt.vogel.de/themenkanaele /produktion /giessenundschmieden/articles/7295/, 2006.

[Gre62] G. Wassermann, J. Grewen. *Texturen Metallischer Werkstoffe.* Springer Verlag, 1962.

[Int67] ASTM International - American Society for Testing and Materials. *B296-67 - Standard Practice for Temper Designations of Magnesium Alloys, Cast and Shape.* 1967.

[Int95] ASTM International - American Society for Testing and Materials. *B275-05 - Standard Practice for Codification of Certain Nonferrous Metals and Alloys, Cast and Wrought.* 1995.

[IUP97] IUPAC - International Union of Pure and Applied Chemistry. *Compendium of Chemical Terminology.* A. D. McNaught, A. Wilkinson, 2nd edition, 1997.

[IUP11] IUPAC - International Union of Pure and Applied Chemistry. *Periodic Table of Elements.* IUPAC, 2011.

[Kai03a] A. Jäger, K. U. Kainer. *Tensile properties of hot rolled AZ31 Mg alloy sheets at elevated temperatures.* Journal of Alloys and Compounds 378, S. 184-187, 2003.

[Kai03b] K. U. Kainer. *Magnesium - Alloys and Technologies.* Wiley-VCH, 2003.

[Kam00] Catrin Kammer. *Magnesium-Taschenbuch.* Aluminium-Verlag, 2000.

[Kau07] Heinz Herwig, Christian Kautz. *Technische Thermodynamik.* Pearson Studium, 2007.

[Kle02] S. Kleiner. *Magnesium und seine Legierungen.* Feinstbearbeitung technischer Oberflächen - 6. Internationales IWF-Kolloquium, 2002.

[Kra07] Martin Krauß. *Zwillingsbildung bei der thermischen Ermüdung der Mg- Basislegierung AZ31.* Materialwissenschaft und Werkstofftechnik, Volume 38, No. 10, 2007.

[Kra08] Martin Krauß. *Zur thermischen Ermüdung der Magnesiumbasislegierungen AZ31 und AZ91.* Forschungsberichte aus dem Institut für Werkstofftechnik Metallischer Werkstoffe der Universität Kassel, Band 8, 2008.

[Kwo11] Sanghyun Lee, Hye Jeong Ham, Su Yong Kwon. *Thermal Conductivity of Magnesium Alloys in the Temperature Range from -125°C to 400°C.* International Journal of Thermophysics, Springer Online, 2011.

[Löf08] Andreas Löffler. *Charakterisierung des Umformverhaltens von Magnesium-Knetlegierungen für geschmiedete Fahrzeugräder.* Dissertation. Technische Universität Hamburg-Harburg, 2008.

[Mül93] Gerhard Müller. *Die Finite-Element-Methode in der Baustatik.* 1993.

[Mle87] John H. Argyris, Hans-Peter Mlejnek. *Die Methode der Finiten Elemente - Band II.* Vieweg Verlag, 1987.

[Nos03] Ulf Noster. *Zum Verformungsverhalten der Magnesiumbasislegierungen AZ31 und AZ91 bei zyklischen und quasi-statischen Beanspruchungen im Temperaturbereich 20-300°C.* Dissertation. Universität Kassel, Fachbereich Maschinenbau, 2003.

[oM90] ASM Handbook of Metals. *Properties and Selection: Nonferrous Alloys and Special-Purpose Materials.* Metals Handbook, Vol. 2, 10th Edition, 1990.

[Pfl13] Dieter Pflanzer. *Experiments on the change of reflectivity due to lighting by an unfocussed Fibre Laser.* Bachelorarbeit - Institut für Fertigungstechnik und Umformtechnik, Technische Universität Wien, 2013.

[Pid46] Lloyd M. Pidgeon. *Magnesium.* Lloyd M. Pidgeon, 1946.

[Pin08] Gustavo Alves Pinheiro. *Local Reinforcement of Magnesium Components by Friction Processing: Determination of Bonding Mechanisms and Assessment of Joint Proper.* Dissertation. Technische Universität Hamburg-Harburg, 2008.

[Pre06] T. Preußler. *Finite-Elemente Methoden (FEM) - Präsentationsunterlagen Vorlesung.* Fachhochschule Trier - Umwelt-Campus Birkenfeld, 2006.

[Ram10a] F.G. Rammerstorfer. *Einführung in die Finite Elemente Methoden - Vorlesungsbehelf.* Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik - Technische Universität Wien, 2010.

[Ram10b] T. Daxner, F.G. Rammerstorfer. *Nichlineare Finite Elemente Methoden - Vorlesungsbehelf.* Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik - Technische Universität Wien, 2010.

[Ray59] G. V. Raynor. *Metal Physics and Physical Metallurgy.* International Series of Monographs, Pergamon Press Ltd., 1959.

[Rei08] Andreas Reichert. *Übertragbarkeit der Lebensdauer von ungekerbten Proben auf gekerbte Proben aus der Magnesium-Legierung AZ91.* Dissertation. Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen der Universtität Stuttgart, 2008.

[Roo11] Karl Maile, Eberhard Roos. *Werkstoffkunde für Ingenieure.* Springer Verlag, 2011.

[Ros10] Hans Peter Rossmanith. *Mechanik 3 - Skriptum zur Vorlesung.* Institut für Mechanik und Mechatronik - Technische Universität Wien, 2010.

[SJ04] K. Siegert S. Jäger. *Umformen von Magnesiumblechen. Neuere Entwicklungen in der Blechumformung, Herausgegeben von Klaus Siegert*, S. 411–426, 2004.

[Spi89] T. Spittel. *Mathematische Modellierung verfahrensunabhängiger Kenngrößen der Umformtechnik.* Neue Hütte, Band 1, 1989.

[Ste92] Peter Steinke. *Finite-Element-Methode: Theorie und Anwendungen.* Cornelsen Girardet, 1992.

[Ste10] Peter Steinke. *Finite-Element-Methode: Rechnergestützte Einführung.* Springer Verlag, 3. Auflage, 2010.

[Str01] Hugo Strunz. *Strunz Mineralogical Tables, Volume 9.* Ernest H. Nickel, 2001.

[Tay00] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *The Finite Element Method: Solid Mechanics, Volume 2, Band 5.* Butterworth-Heinemann, 2000.

[uKW71] Hans Ginsberg und Karl Wefers. *Aluminium und Magnesium, Volume 15.* Ferdinand Enke Verlag Stuttgart, 1971.

[Wah03] Arne Wahlen. *Magnesium & Titan.* Präsentationsfolien „Metalle II“ ETH Zürich, 2003.

[Web11] Paul Weber. *Einführung in Abaqus 6.11 - Handout zum Vortrag.* Karlsruher Institut für Technologie - Steinbuch Centre for Computing, 2011.

[wTea07] Cheng wen Tan et al. *Deformation behavior of AZ31 magnesium alloy at different strain rates and temperatures.* Transactions of Nonferrous Metals Society of China, Volume 17, S. 347-352, 2007.

[Zha10] He Yang, Liang Huang, Mei Zhan. *Hot Forming Characteristics of Magnesium Alloy AZ31 and Three-Dimension FE Modeling and Simulation of the Hot Splitting Spinning Process.* School of Materials Science and Engineering, Northwestern Polytechnical University China, 2010.