TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

D I P L O M A R B E I T

Soziale Normen und Fertilität

Ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ. Prof. Dipl.- Ing. Dr. techn. Alexia Fürnkranz-Prskawetz

durch
Verena Wieser
Borschkegasse 5/19
1090 Wien

Wien, Dezember 2013

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen Menschen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Diplomarbeit unterstützt haben.

Herzlicher Dank gilt Univ. Prof. Dipl.- Ing. Dr. techn. Alexia Fürnkranz-Prskawetz für die Betreuung meiner Diplomarbeit. Ihre fachliche Kompetenz sowie kritischen Anmerkungen waren äußerst hilfreich für das Entstehen dieser Arbeit.

Ein ganz besonderer Dank gilt meiner Mutter Elisabeth Wieser- Fuchsberger für die finanzielle und emotionale Unterstützung während meines Studiums. Sie ist mir stets mit Rat und Tat zur Seite gestanden und dafür möchte ich mich bedanken.

Ein großer Dank gebührt meinem Freund Benno Grottenegg für den Rückhalt während der Diplomarbeitsphase.

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken als solche kenntlich gemacht habe.

Die Diplomarbeit habe ich bisher keinem anderen Prüfungsamt in gleicher oder vergleichbarer Form vorgelegt. Sie wurde bisher auch nicht veröffentlicht.

Wien, Dezember 2013

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Wie in vielen anderen Ländern der Erde ist das Thema Fertilität auch in Österreich eine aktuelle und stark diskutierte Problematik. Es betrifft nicht nur die einzelne Familie für sich, sondern ebenso gesamtwirtschaftlich betrachtet spielt die Entwicklung der Geburtenrate eine große Rolle. Angefangen bei der gesellschaftlichen Entwicklung der Bevölkerung, dem Wirtschaftswachstum, hin bis zur Diskussion über die Pensionsvorsorge ist die Frage nach der Fertilität essentiell. Wichtige Entscheidungen in Politik und Wirtschaft werden auf Basis der prognostizierten Geburtenrate beschlossen.

Ökonomen haben hierzu verschiedene Modelle aufgestellt, welche das Fertilitätsverhalten der Menschen erklären sollen. Dafür gibt es unterschiedliche Herangehensweisen: Becker (1960) stellte Modelle auf, die den Einfluss von Einkommen, Kosten und Konsum, sowie die Theorie der Zeitallokation, der Haushaltsproduktion und der Humankapitalinvestition auf das Fertiliätsverhalten der Individuen untersuchten. Ebenfalls Becker (1960) und später auch Hotz, Klerman und Willis (1997) betrachten ein Modell, in welchem nicht nur Quantität sonder auch Qualität der Kinder Bedeutung hat.

Seit längerer Zeit ist klar, dass sich nicht nur harte Fakten wie Einkommen, Konsum und Kosten auf die Entscheidungen der Individuen auswirken, sondern dass sehr wohl auch soziale Normen und relativer Status in der Gesellschaft Einfluss auf den Nutzen der Individuen haben. Menschen sind nicht nur am absoluten Status in der Gesellschaft interessiert, sie orientieren sich ebenfalls an der Handlungsweise ihrer Kohorte und nehmen den relativen sozialen Status in der Gesellschaft wahr und wollen ihn wenn möglich verbessern. Durch die Berücksichtigung von sozialen Normen und sozialem Status entstehen Externalitäten, die entweder einen positiven oder negativen Effekt auf das System haben.

In dieser Diplomarbeit sollen die Auswirkungen von sozialen Normen und sozialem Status auf das Fertiliätsverhalten der Individuen untersucht werden.

In Kapitel zwei möchte ich empirische Untersuchungen nach Skirbekk (2008) erläutern, der den Zusammenhang von Fertilität und dem sozialen Status der Individuen beschreibt.

Im dritten Kapitel wird ein überlappendes Generationenmodell mit endogener Geburtenziffer und Humankapitalakkumulation nach Palivos (2000) vorgestellt. Der Nutzen der Individuen wird über die gewählte Geburtenrate, die Kindererziehungszeit, das Humankapital und den Konsum der Individuen maximiert. Dieses Modell berücksichtigt Interaktionen zwischen den Agenten, die durch die Einführung sozialer Normen entstehen. Diese sozialen Normen werden mittels der durchschnittlichen Geburtenrate modelliert.

Das vierte Kapitel ist eine Erweiterung des Modells von Palivos (2000). Goto (2008) ergänzt das bereits bestehende Modell durch das Level an Humankapital der Individuen. Es werden die Auswirkungen von einer Umverteilung des Humankapitals auf durchschnittliche Fertilität und Humankapital untersucht.

Kapitel fünf erklärt den demographischen Übergang, in Hinblick auf die Senkung der Kindersterblichkeitsrate, von einer relativ hohen Geburtenziffer hin zu einer niedrigen Geburtenziffer. Die Autoren Bhattacharya und Chakraborty (2011) betrachten dazu Individuen als Konformisten. Individuen lassen sich in ihrer Entscheidung durch eine von der Norm vorgegebenen Geburtenrate beeinflussen. Unterschied zu den vorhergehenden Modellen ist, dass Agenten nicht automatisch die durchschnittliche Geburtenrate wählen, sondern den Abstand zu dieser minimieren wollen. In diesem Modell werden identische Haushalte betrachtet, die ihren Nutzen über das Level an Konsum und die Anzahl an Kindern maximieren wollen.

Im sechsten Kapitel werden Kinder als Konsumgut betrachtet. In den ersten beiden Abschnitten wird ein endogenes Wachstumsmodell mit homogenen Individuen nach Tournemaine und Tsoukis (2008) vorgestellt, in dem die individuelle Nutzenfunktion abhängig von Konsum, Arbeit und Vermögen maximiert wird. Weiters berücksichtigt das Modell den Einfluss von Statusdenken bezüglich Vermögen und Konsum. Die Autoren unterscheiden zwischen zwei Definitionen von Statusdenken. Einmal definiert sich die gesellschaftliche Position des Individuums über den eigenen Konsum relativ zum durchschnittlichen Konsum, und zum anderen fließt das individuelle Level an Vermögen in Relation zum durchschnittlichen Vermögen ein. Der Effekt des Statusdenkens führt zu Externalitäten, die sich auf das Wirtschaftswachstum der Ökonomie auswirken. Im zweiten Abschnitt wird das bereits vorgestellte Modell für heterogene Individuen berechnet. Tournemaine und Tsoukis (2009) untersuchen den Einfluss des Statusmotives in Bezug auf Konsum und die Auswirkungen der Heterogenität auf das Wachstum der Ökonomie.

Das siebente Kapitel ist eine Zusammenfassung der in dieser Diplomarbeit vorgestellten Modelle. Die verschiedenen Herangehensweisen und Resultate werden verglichen und analysiert.

Kapitel 2

Empirische Untersuchungen zu Status und Fertilität

Die folgenden Ausführungen in Kapitel zwei beruhen auf den Untersuchungen von Vegard Skirbekk(2008).

Das Fertilitätsverhalten der Menschen hat sich über die Zeit deutlich verändert. Es gibt einen demographischen Übergang, der den Trend von einer relativ hohen Geburtenziffer hin zu einer relativ niedrigen Geburtenziffer beschreibt. Vegard Skirbekk (2008) beschreibt diesen Umschwung in Hinblick auf den sozialen Status eines Individuums, genauer gesagt, den Zusammenhang zwischen dem Status der Individuen und deren Fertilitätsverhalten im Laufe der demographischen Transition. Hierzu verwendet er Daten, welche die Beziehung von Fertilität und sozialem Status in unterschiedlichen Regionen mittels verschiedener Kennzahlen über einige Jahrzehnte hinweg beschreiben. Es wird dabei zwischen den folgenden sozialen Maßstäben unterschieden: Bildung, beruflicher/ sozialer Rang in einer sozialen Hierarchie und Einkommen/ Reichtum.

Die empirischen Studien zeigen, dass eine fallende Geburtenrate eine Änderung der bislang positiven Korrelation zwischen sozialem Status und Fertilität zu einem negativen oder neutralen Zusammenhang mit sich bringt. Vor dem Rückgang der Geburtenrate war es üblich, dass Familien mit höherem sozialen Status mehr Kinder hatten als ärmere Familien. Mit gesunkener Geburtenrate ändert sich diese Beziehung und gut gestellte Familien haben im Vergleich weniger Kinder als schlechter gestellte Familien. Interessant ist nun, bis zu welchem Level das Sinken der allgemeinen Fertilität auf das Verhalten der sozial gut gestellten Individuen zurückzuführen ist, und daher inwiefern die niedriger gestellten Individuen das Verhaltensmuster der „Elite“ imitierten.

2.1 Der Zusammenhang von sozialem Status und Fertilität

Zunächst wird die Beziehung von sozialem Status und Fertilität im Laufe der Geschichte beschrieben. Ein Grund, warum die Geburtenziffer mit dem Status und speziell dem sozialen Rang eines Mannes positiv korrelierte, ist, dass mit höherem Status/ Rang auch die Anzahl der Sexualpartner und Ehefrauen stieg. Dies wurde in einigen Völkern und Stämmen wie zum Beispiel den Kelten, Persern, Ägyptern oder einigen deutschen Stämmen beobachtet. Die meisten Völker erlaubten und erwarteten sogar, dass Führer und sozial hochgestellte Männer mehrere Ehefrauen hatten. Ein Beispiel dafür ist China, wo das Oberhaupt der Ch'i- Dynastie Zugang zu mehreren tausend Frauen in seinem Palast hatte und unter den Yoruba in Afrika, wo die Land- und Kriegsherren mit mehreren Frauen, einige sogar mit Hunderten liiert waren. DNA- Untersuchungen bestätigen, dass in bestimmten Regionen der Welt eine hohe Anzahl an Menschen mit gemeinsamer Abstammung leben. Studien ergeben, dass $0,5\%$ der männlichen Weltpopulation ein bestimmtes Y- Chromosom teilt und somit vom selben Ahnen abstammt. Im 12.- 13. Jahrhundert zeugte dieser eine große Anzahl an Kindern in Eurasien. Genauso wurden in China und Nord- West- Irland vermehrte DNA- Strukturen sichergestellt, welche auf ein und denselben Ahnen hinweisen.

Der positive Zusammenhang von männlicher Fertilität und Status besteht, wenn der Status eines Mannes mit seiner Anzahl an Sexualpartnern positiv korreliert. Eigenschaften von sozial hochgestellten Individuen, egal ob positiv oder negativ, werden von der restlichen Bevölkerung imitiert. Dies betrifft auch die Größe der Familie, also die durchschnittliche Geburtenrate, was wiederum bei sinkender Fertilität in sozial gut gestellten Familien auch eine Reduktion der Fertilität der unteren Schicht bedeutet.

Das ist jedoch nicht der einzige einfließende Faktor. Das Fertilitätsverhalten in Europa wurde durch ein niedriges Level an außerehelichen Kindern und späten Hochzeiten geprägt. Es gab Unterschiede in den sozialen Schichten, betreffend das Heiratsalter und der Zeugung von Kindern. Auch diese sozialen Normen sind ein Grund, warum Menschen aus der niedrigen Schicht vor dem Umschwung der Fertilität im Vergleich zur hohen sozialen Schicht eine relativ geringe Geburtenrate aufwiesen.

2.2 Fertilitätsreduktion

Um zu verstehen, warum es einen Rückgang der Geburtenrate gab und warum es zuerst speziell die Oberschicht der Bevölkerung betraf, ist es hilfreich einige Faktoren zu untersuchen, die zunächst nur die Oberschicht der Population beeinflussten.

Ein wichtiger Punkt in Hinblick auf Fertilitätsreduktion war die Geburtenkontrolle. Zu Beginn hatten nur gebildete Individuen mit hohem sozialen Status Zugang zu traditionellen Verhütungsmitteln. Dieser medizinische Durchbruch bewirkte einen Rückgang der Fertilität. Eine weitere Methode der Geburtenkontrolle war die Kindestötung. Diese grausame Form der Familienplanung war in der gut gestellten Gesellschaft Nordindiens bis in die 80er Jahre des vorigen Jahrhunderts existent. Da die Verwendung von Geburtenkontrolle positiv mit Bildung und Einkommen korrelierte, setzte der Geburtenrückgang zuerst bei der sozial höheren Schicht ein.

In vergangen Zeiten war die Mortalität durch schlechte Lebensbedingungen in jeder Schicht gleichermaßen vorhanden. Verbesserte Hygiene, bessere Ernährung und effizientere medizinische Behandlungen senkten die Kindersterblichkeit jedoch zunächst in der oberen Schicht, da diese auch die finanziellen Möglichkeiten dafür hatte.

Kinder waren für Menschen eine gute Vorsorgemaßnahme für das Alter. Besonders in unsicheren Zeiten dienten sie als Versicherung. Bei Einführung der effektiven Sozialversicherung, welche sich zunächst auch nur reiche Menschen leisten konnten, ergab sich somit eine merkliche Reduktion der Fertilität.

Der Anstieg der Frauenerwerbsquote brachte einen kulturellen Übergang mit sich, welcher sich negativ auf die Geburtenrate auswirkte. Es gab eine Erhöhung der materiellen Ansprüche, es war eine Zeit der Individualisierung und der Änderung der Geschlechterrollen. Dieses Umdenken fand dessen Ursprung in der gebildeten, reichen Schicht. Veränderte Einstellungen zu religiösen Vorgaben, Verweltlichung und liberale Interpretationen spielten ebenfalls eine wichtige Rolle unter der gebildeten Oberschicht und senkten das Fertilitätsverhalten.

In früheren Gesellschaften war die Möglichkeit der sozialen Mobilität und des zukünftigen Einkommens der Kinder weitgehend durch den sozialen Status der Eltern bestimmt. Durch neue Technik und Modernisierung gab es diesbezüglich einen großen Wandel. Der soziale Rang wird für Menschen in den zeitgenössischen Gesellschaften immer wichtiger. Es ist weniger von Wert, aus welchen Familienverhältnissen man stammt, Priorität haben persönliche Leistungen und Erfolge. Dieses Bestreben bringt eine Änderung des Zeitmanagements mit sich. Individuen wenden viel Zeit für Bildung, Konsum, Job, Karriere, Auto, Eigenheim, Partner und finanzielle Absicherungen auf und es bleibt weniger Zeit für Kinder. Um sich einen hohen sozialen Status aufzubauen braucht es einige Jahre, welche man weniger in Nachkommen investiert und somit die Reduktion der Fertilität begünstigt. Bildung ist in diesem Zusammenhang unumgänglich. Zum einen ist sie Bedingung für den sozialen Rang in der Gesellschaft und zum anderen garantiert sie eine Verbesserung des eigenen sozialen Status bezüglich Reichtum und Macht. Bildung hat somit starken Einfluss auf die Geburtenziffer, Auswirkungen auf das Zeitmanagement der Menschen, das Einkommen, sie steigert die Unabhängigkeit der Frauen, den Gebrauch von Verhütungsmitteln und erhöht die Opportunitätskosten der Kinder.

Durch die Wichtigkeit des sozialen Status in der Gesellschaft ergibt sich die Herausforderung einen Trade- Off zwischen Quantität und Qualität der Kinder zu finden, dies wirkt sich wiederum negativ auf die Fertilität aus. Die niedrige Fertilität in den Jahren 1500- 1924 ist auf die Furcht der Mensch vor Minderung des Einkommens und des sozialen Status zurückzuführen. Eine Studie während der demographischen Transition über eine ländliche belgische Bevölkerung ergab einen direkten proportionalen Zusammenhang zwischen geringer Kinderanzahl und hohem sozialem Status.

Ein weiterer Gesichtspunkt in der Fertilitätsentscheidung der Population war, dass sich durch steigende Fertilität der Druck auf die Umwelt vergrößerte und sich dadurch negativ auf die Wirtschaft auswirkte. Ein Bericht der holländischen Regierung (van de Kaa und van der Windt 1979) besagt: "We recommend the government to aim for an end to natural population growth as fast as possible."Diese neue Denkweise entwickelte sich in Universitätskreisen und bewirkte vorerst in der gebildeten Schicht einen Rückgang der Geburtenziffer.

Die in diesem Abschnitt beschriebene Fertilitätsreduktion veranschaulicht Vegard Skirbekk in einer Grafik, die ich an dieser Stelle präsentieren möchte.

In Abbildung 2.1 wird der Zusammenhang von Status und sozialen Maßstäben wie Bildung, Beruf und Einkommen/ Vermögen veranschaulicht. Es werden Daten aller Länder zwischen dem 13. und 20. Jahrhundert verwendet und zwischen den verschiedenen Maßstäben wird nicht einzeln unterschieden. Die Grafik ist so zu verstehen, dass die Werte auf der y- Achse den relativen Prozentsatz der Fertilität von hohem Status zu niedrigem Status wiedergeben $((\text{Fertilität}_{\text{hoher Status}} - \text{Fertilität}_{\text{niedriger Status}})/\text{Fertilität}_{\text{niedriger Status}})$ und die x- Achse repräsentiert den Zeitverlauf. Das bedeutet für Abbildung 2.1, dass zum Beispiel im 14. Jahrhundert Individuen mit hohem Status in etwa 50% mehr Fertilität hatten als jene mit niedrigem Status. Ein Wandel von positiver zu negativer Korrelation im Laufe der Zeit ist eindeutig erkennbar.

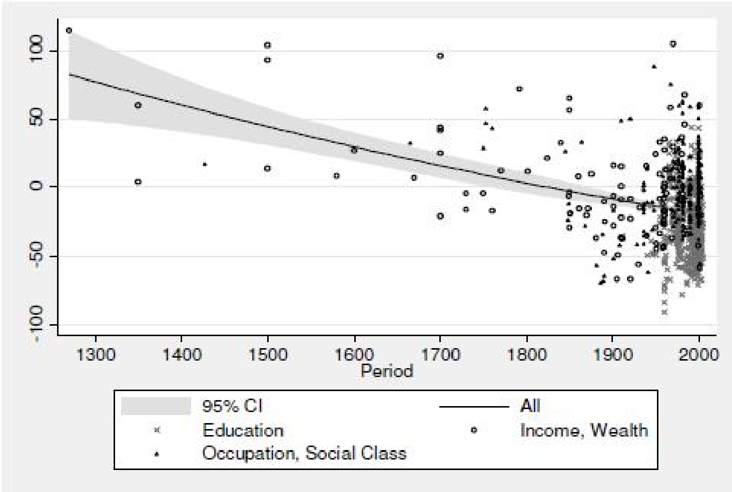

Abbildung 2.1: Fertilitätsunterschiede zwischen hohem und niedrigem Status aller Länder. $R^2(adj) = 0.09$
(Quelle: Skirbekk (2008), S. 153, Fig. 1)

Vegard Skirbekk (2008) zeigt in seinem Artikel, dass es einen Zusammenhang zwischen sozialem Status und dem Fertilitätsverhalten der Menschen gibt. Diese, auch durch weitere Literatur, erworbene Erkenntnis liefert eine wichtige Grundlage für ökonomische Modelle, welche das Fertilitätsverhalten in der Gesellschaft beschreiben.

Ebenso wie der Begriff des sozialen Status, als Position in der Gesellschaft, hängen soziale Normen, als Vorschriften und Regeln bezüglich des Sozialverhaltens durch welche sich der Status definiert, eng mit der Fertilitätsentscheidung der Individuen zusammen. Viele Ökonomen, wie zum Beispiel Gary Becker und Kevin Murphy (2000) vertreten den Standpunkt, dass soziale Normen und das Verhalten anderer sehr wohl einen Effekt auf individuelles Handeln und somit einen entscheidenden Einfluss auf die Nutzenoptimierung haben.

In den folgenden, in der Diplomarbeit präsentierten, ökonomischen Modellen fließen diese Annahmen ein.

Kapitel 3

Theodore Palivos (2000)

Der Artikel von Palivos beschreibt ein überlappendes Generationenmodell. Motiviert durch diverse empirische Studien, welche den Zusammenhang von Einkommensrate, Bildung, Heiratsalter und Fertilität veranschaulichen, arbeitet Palivos mit einer endogenen Geburtenziffer und endogener Humankapitalakkumulation. Das Modell zeigt, dass durch Einfluss von sozialen Normen unterschiedliche Gleichgewichte auftreten können.

Im ersten Abschnitt wird das Modell von Palivos vorgestellt. Im Unterschied zu vielen anderen Modellen werden in diesem Modell Interaktionen zwischen den Individuen berücksichtigt. Diese manifestieren sich durch soziale Normen, welche die Familiengröße vorgeben. Somit beeinflusst die Handlung und Entscheidung eines einzelnen Agenten die Handlungen aller anderen. Individuen verhalten sich so, wie sie es von den anderen Agenten erwarten würden.

Der zweite Abschnitt berechnet und erläutert die Ergebnisse des Modells. Es treten 3 unterschiedliche Gleichgewichte auf. Zu welchem Zustand die Bevölkerung konvergiert, hängt sowohl von den Anfangsbedingungen, den sozialen Werten im System und auch den intertemporalen Externalitäten, welche in der Humankapitalakkumulation auftreten, ab.

Der letzte Abschnitt erläutert die in den ersten beiden Teilen erarbeitete Theorie für zwei konkrete Beispiele. Zum einen wird eine Reaktionsfunktion mit positiven Externalitäten und zum anderen eine Funktion mit negativen Externalitäten betrachtet. Zur besseren Analyse habe ich die numerischen Beispiele graphisch durch plotten der Funktionen veranschaulicht.

3.1 Das Modell

Das überlappende Generationenmodell hat folgende Eigenschaften: Individuen leben für 2 Perioden. In der ersten Periode sind die Individuen jung und nutzen ihre

Zeit entweder für die Verbesserung ihres Humankapitals durch Bildung oder für das Aufziehen von Kindern. Ziel ist es einen Trade- Off zwischen der Zeit, welche in Humankapital und der, welche in Kindererziehung investiert wird, zu finden. In der zweiten Periode sind die Individuen alt und wenden ihre Zeit für den Konsum eines Gutes und die Nutzung ihrer in den jungen Jahren angeeigneten Fähigkeiten auf. Der Level an Humankapital bestimmt nun natürlich, wie produktiv die Individuen beim Arbeiten sind und wirkt sich somit auf den Lohn und den damit bestimmten Konsum aus.

Der Level an Humankapital hängt von der in Bildung investierten Zeit und der gesellschaftlichen Humankapitalausstattung ab. Umso mehr Zeit in Bildung und somit weniger in Kinder investiert wird, umso besser ist es für das Humankapital der Agenten. Individuen erhalten bei einer Investition von $e_t \in [0,1]$ ihrer gesamten Zeit in Bildung einen Level an Humankapital h_{t+1}. Wobei auch das durchschnittliche Humankapital $\overline{h}_t$ der Generation einfließt. Somit ergibt sich die Gleichung

$$h_{t+1} = B\overline{h}_t^\gamma e_t, \tag{3.1.1}$$

wobei $\gamma \in [0,1]$ und $B > 0$ konstante Parameter sind. Es wird ebenfalls angenommen, dass jedes „alte“ Individuum aus der zweiten Periode zumindest ein Humankapital von $h_0 > 0$ aufweist. Durch Berücksichtigung des durchschnittlichen Humankapitals einer Generation soll der positive wie auch eventuell negative Effekt, den der durchschnittliche Level an Bildung in der Gesellschaft auf einzelne Individuen hat, modelliert werden.

Die restliche Zeit der Individuen wird der Erziehung von Kindern gewidmet. Die Fertilitätsrate $n_t \in [0,\delta]$ wird durch folgende Gleichung beschrieben

$$n_t = \delta(1 - e_t), \tag{3.1.2}$$

wobei $1/\delta > 0$ den Anteil der Zeit beschreibt, welcher für die Erziehung eines Kindes benötigt wird.

In der zweiten Periode bieten Individuen unelastisch Arbeit an und erhalten einen Lohn w_{t+1} pro Einheit an Humankapital. Die Budgetbeschränkung sieht somit folgendermaßen aus

$$c_{t+1} = w_{t+1}h_{t+1}. \tag{3.1.3}$$

Je mehr Humankapital zu Verfügung steht, umso größer ist c_{t+1}, und umso mehr können die Individuen konsumieren.

Bis dato wurden Eigenschaften der Individuen wie Level an Humankapital, Fertilitätsrate und Konsumvariable beschrieben. Nun folgt noch der Input der Produktion der Firmen. Die Technologie ist durch folgende Produktionsfunktion gegeben

$$y_{t+1} = Ah_{t+1}. \tag{3.1.4}$$

Dabei handelt es sich um eine Funktion mit konstanten Skalenerträgen, wobei A ein positiver Parameter ist. Das heißt, bei einer proportionalen Änderung der Inputvariablen um einen Faktor ändert sich auch der Output um den gleichen Faktor. Firmen wählen effektive Arbeit h_{t+1} um ihre Profite zu maximieren. Der Lohn w_{t+1} wird als gegeben angenommen.

Die Präferenzen bezüglich der Anzahl an Kindern in der ersten Periode und dem Konsum in der zweiten Periode sind für alle Individuen gleich und können durch folgende Nutzenfunktion

$$U_t = u(n_t, \overline{n}_t) + \beta \ln(c_{t+1}), \tag{3.1.5}$$

beschrieben werden. Dabei bezeichnet U_t den Nutzen eines Individuums zum Zeitpunkt t und die Funktion $u(\cdot,\cdot)$ muss mindestens zweimal differenzierbar sein. Ansatzpunkt des Artikels von Palivos ist, dass Handlungen der Individuen nicht nur von ökonomischen Bedingungen wie Preisen und Einkommen beeinflusst werden, sondern auch soziale Normen wie gesellschaftliche Regeln, welche Verhaltensmuster vorgeben, mitwirken. Die Entscheidung über Fertilität von einzelnen Individuen hängt von der Fertilitätsrate ihrer Kohorte ab und fließt durch die durchschnittliche Geburtenrate $\overline{n}_t$ der Ökonomie in das Modell ein.

Ziel der Individuen ist es, die oben genannte Nutzenfunktion zu maximieren, in anderen Worten, den optimalen individuellen Nutzen zu generieren. Hierfür wählen die Agenten $\{n_t, e_t, h_{t+1}, c_{t+1}\}$. Daraus lässt sich folgendes Optimierungssystem formulieren:

$$\max U_t \tag{3.1.6}$$

unter (3.1.1)- (3.1.3).

3.2 Berechnung und Analyse der Gleichgewichte

Die Gleichgewichte werden durch das Maximum des Nutzens der Individuen und des Profits der Firmen bestimmt. Ebenso zeichnen sie sich durch eine Übereinstimmung von Angebot und Nachfrage aus. Für den Arbeitsmarkt gilt, dass die Löhne gleich der Technologie sind und somit Arbeitsangebot gleich Arbeitsnachfrage ist. Analog gilt für den Gütermarkt, Güterangebot gleich Güternachfrage, und daher entspricht der Output der Firma auch dem Konsum. Weitere Gleichgewichtsbedingungen sind $\overline{h}_t = h_t$ und $\overline{n}_t = n_t$.

Daraus ergibt sich folgende Definition eines Nashgleichgewichtes.

Definition 3.2.1. *Sei* $h_0 > 0$*. Eine Sequenz von* $\{n_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{e_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{h_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, $\{c_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, $\{y_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, $\{w_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$*, sodass für alle* $t = 0, 1, 2, ...$*, (i) die Nutzenfunktion maximiert wird, (ii) der Profit jeder Firma maximiert wird, (iii)* $w_{t+1} = A$*, die*

Räumung des Arbeitsmarktes existiert, (iv) $y_{t+1} = c_{t+1}$, die Räumung des Gütermarktes existiert, (v) $\overline{h}_t = h_t$ und (vi) $\overline{n}_t = n_t$ gilt, nennt man Nashgleichgewicht der Ökonomie. (Palivos (2000), S. 1926, Definition 1)

Um das Gleichgewicht zu berechnen, verwendet Palivos die Methode von Lagrange. Es ergibt sich folgende Langrangefunktion:

$$L = u(n_t, \overline{n_t}) + \beta \ln(c_{t+1}) - \lambda_{1t}(h_{t+1} - B\overline{h_t}^{\gamma} e_t) - \lambda_{2t}(n_t - \delta(1-e_t)) - \lambda_{3t}(c_{t+1} - w_{t+1}h_{t+1}) \tag{3.2.1}$$

Die Bedingungen erster Ordnung des Optimierungssystems (3.1.6) sind gegeben durch:

$$\frac{\partial L}{\partial n_t} = 0 \Rightarrow u_1(n_t, \overline{n}_t) = \lambda_{2t}, \tag{3.2.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial e_t} = 0 \Rightarrow \lambda_{1t} B\overline{h}_t^{\gamma} = \lambda_{2t}\delta, \tag{3.2.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{t+1}} = 0 \Rightarrow \frac{\beta}{c_{t+1}} = \lambda_{3t}, \tag{3.2.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial h_{t+1}} = 0 \Rightarrow \lambda_{1t} = \lambda_{3t} w_{t+1}, \tag{3.2.5}$$

sowie die Gleichungen (3.1.1)- (3.1.3), welche durch Ableiten der Lagrangefunktion nach den Parametern λ_{it} entstehen. $\lambda_{it}, i = 1, 2, 3$ sind dabei die Lagrangenoperatoren für die Bedingungen erster Ordnung. Die Gleichungen (3.2.2) – (3.2.5) kann man so interpretieren, dass im Optimum die Grenzkosten einer Aktivität genau dem Grenzgewinn entsprechen.

Um sicher zu gehen, dass ein inneres Gleichgewicht existiert, erfüllt die Funktion $u(\cdot,\cdot)$ folgende Eigenschaften:

Definition 3.2.2. *(i) $u_1(n_t, n_t) > 0$, (ii) $u_{11}(n_t, n_t) \leq 0$, für alle $n_t > 0$, (iii) $lim_{n_t \to 0} u_1(n_t, n_t) = \Omega$, wobei $\beta/\delta \leq \Omega \leq \infty$ und $lim_{n_t \to \delta} u_1(n_t, n_t) < \infty$. (Palivos (2000), S. 1926, Assumption 1)*

Punkt (i) garantiert dabei positiven Grenznutzen, das heißt mit steigendem Input erhöht sich auch der Level an Nutzen. Noch wichtiger ist Bedingung (ii), welche eine Aussage über den Grenznutzen der Geburtenrate macht. Mit steigender Geburtenrate verringert sich der zusätzlich erlangte Nutzen mehr und mehr. Das heißt jedes weitere Kind bringt immer weniger zusätzlichen Nutzen mit sich.

Um die Gleichgewichte zu erhalten, muss das durch (3.1.1)-(3.1.3) und (3.2.2)-(3.2.5) entstandene Gleichungssystem gelöst werden. Unter Verwendung der Definition 3.2.1 eines Nashgleichgewichtes, ergeben sich folgende Umformungen:

Ausgegangen wird von $u_1(n_t, n_t) = \lambda_{2t}$ der FOC. Durch Umformen der Gleichung (3.2.3) nach λ_{2t} und Einsetzen von λ_{1t} und λ_{3t} aus (3.2.4) und (3.2.5) erhalten wir

$$u_1(n_t, n_t) = \frac{1}{\delta} \frac{\beta w_{t+1}}{c_{t+1}} B\overline{h_t}^{\gamma}.$$

Der Ausdruck $B\overline{h_t}^{\gamma}$ kann nun mittels (3.1.1) und (3.1.2) ersetzt werden und es ergibt sich

$$u_1(n_t, n_t) = \frac{1}{\delta} \frac{\beta w_{t+1}}{w_{t+1} h_{t+1}} h_{t+1} \frac{\delta}{\delta - n_t}.$$

Durch Kürzen erhält man

$$u_1(n_t, n_t) = \frac{\beta}{\delta - n_t}.$$

Umformung der Gleichung (3.1.2) nach e_t und Einsetzen in (3.1.1) ergibt

$$h_{t+1} = B h_t^{\gamma} \frac{\delta - n_t}{\delta}$$

Es ergibt sich somit nachstehendes rekursive System zur Berechnung von n und h

$$u_1(n_t, n_t) = \frac{\beta}{\delta - n_t} \tag{3.2.6}$$

$$h_{t+1} = B h_t^{\gamma} \frac{\delta - n_t}{\delta} \tag{3.2.7}$$

Anhand dieser Gleichungen und der Verwendung von (3.1.2),(3.1.3) und (3.1.4), können alle Variablen h, e, y und c für den Gleichgewichtspfad ermittelt werden. Die Variablen n und e sind im Gleichgewicht konstant.

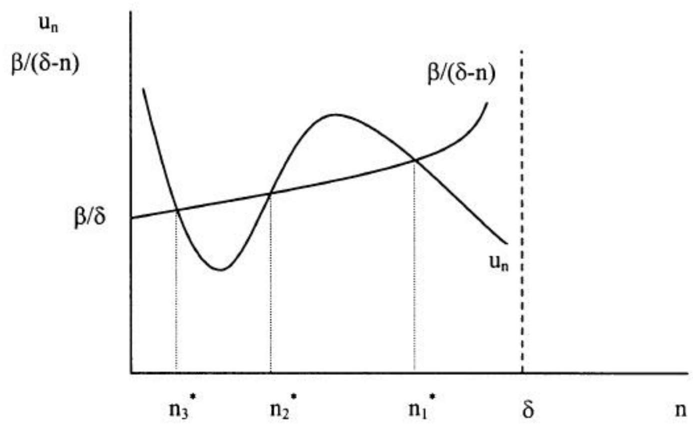

Abbildung 3.1: Multiple Gleichgewichte
(Quelle: Palivos (2000), S. 1927, Fig. 1)

Abbildung 3.1 veranschaulicht die Gleichgewichtsbedingung (3.2.6) graphisch. Dabei gilt für die Funktion u_n in der Abbildung, dass $u_n = u_1(n_t, n_t)$ aus der Gleichgewichtsbedingung (3.2.6). Wie aus der Abbildung erkennbar, treten 3 verschiedene Gleichgewichte auf. Grund für das Auftreten von multiplen Gleichgewichten sind strategische Komplemente, welche wie folgt definiert sind.

Definition 3.2.3. *Wenn $u_{12}(n_t, \overline{n_t}) > (<)0$, dann inkludiert das System strategische Komplemente(Substitute). (Palivos (2000), S. 1926, Definition 3)*

Das bedeutet im ersten Fall $u_{12}(n_t, \overline{n_t}) > 0$, dass eine Erhöhung der durchschnittlichen Geburtenziffer auch eine Erhöhung des Wertes eines zusätzlichen Kindes mit sich bringt. Man spricht von strategischen Komplementen. Betrachtet man hingegen $u_{12}(n_t, \overline{n_t}) < 0$, so folgt aus einer Erhöhung der durchschnittlichen Anzahl an Geburten eine Minderung des Wertes eines zusätzlichen Kindes, es treten strategische Substitute auf.

Proposition 3.2.1. *Die Existenz von strategischen Komplementen ist eine notwendige Bedingung für multiple Gleichgewichte. (Palivos (2000), S. 1927, Proposition 1)*

Beweis. Wir betrachten zunächst die Bedingung für ein Gleichgewicht $u_1(n_t, n_t) = \frac{\beta}{\delta - n_t}$. Da die Funktion auf der rechten Seite in n_t steigt, muss auch $u_1(n_t, n_t)$ in einem gewissen Bereich steigen. Dies kann durch eine Steigung der Funktion im ersten Argument oder im zweiten Argument auftreten. Aus der Definition 3.2.2 (ii) ist bekannt, dass $u_{11}(n_t, n_t) \leq 0 \ \forall n_t > 0$, und somit fällt die Funktion bezüglich dem ersten Argument. Daraus folgt aber, dass die Funktion $u_1(n_t, n_t)$ in einem bestimmten Intervall bezüglich dem zweiten Argument steigen muss und damit gilt $u_{12}(n_t, n_t) > 0$ (siehe Abbildung 3.1). (Palivos (2000), S. 1927, Proof of Proposition 1)

□

Ökonomisch betrachtet sind lediglich zwei der drei Gleichgewichte interessant. Im mittleren Gleichgewicht n_2^* wird die Kurve des Grenznutzens $u_1(n_t, n_t)$ von oben geschnitten, das bedeutet, dass sich die Grenzkosten zunächst über dem Grenznutzen befinden. Dieses instabile Gleichgewicht wird in der Analyse ignoriert.

Durch die in diesem Modell berücksichtigte Interaktion zwischen den Individuen, hängt die individuell gewählte Anzahl an Kindern von der Geburtenziffer vom Rest der Bevölkerung ab.

Ableiten der Gleichung (3.2.6) nach $\overline{n}_t$ und umformen nach $\frac{dn_t}{d\overline{n}_t}$ ergibt

$$\frac{dn_t}{d\overline{n}_t} = -\frac{u_{12}}{[u_{11} - \beta/(\delta - n_t)^2]} > 0,$$

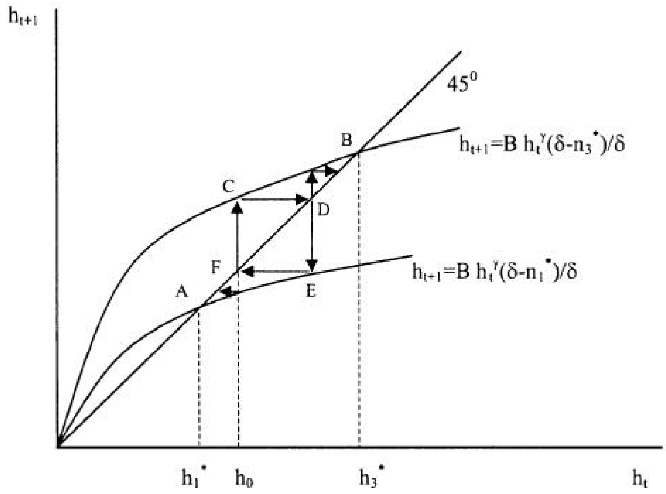

Abbildung 3.2: Gleichgewichtspfad
(Quelle: Palivos (2000), S. 1928, Fig. 2)

unter der Bedingung, dass $u_{12} > 0$ ist. Das bedeutet, die Anzahl an Kindern steigt mit der durchschnittlichen Geburtenrate der Ökonomie. Wenn nun ein Agent von den anderen Individuen erwartet, dass sie im Optimum $n_1^*(n_3^*)$ für ihre Geburtenziffer wählen, dann wird dieser Agent wiederum gleich handeln und ebenfalls $n_1^*(n_3^*)$ wählen.

Nun wird das gleichgewichtige Humankapital betrachtet. In Abbildung 3.2 wird das Level an Humankapital der ersten Periode h_t gegen das Level an Humankapital der zweiten Periode h_{t+1} geplottet. Es ergeben sich 2 stabile Gleichgewichte mit $h_t = h_{t+1}$. Abhängig von der gewählten Fertilitätsrate n_1^* oder n_3^*, konvergiert die Ökonomie bei einer Anfangsbedingung von h_0, gegen das niedrige- oder hohe- Gleichgewicht (siehe Abbildung 3.2, Punkte A und B). Der Gleichgewichtspfad ist damit unbestimmt. Entscheiden sich Individuen nicht für eine der beiden gleichgewichtigen Fertilitätsraten, sondern in der einen Periode für die niedrige Fertiliätsrate und in der nächsten wiederum für die hohe Fertiliätsrate, sowie es ihnen die durchschnittliche Geburtenrate eben vorgibt, so tritt ein endogener 2-Perioden- Zyklus auf (siehe Pfad CDEF in Abbildung 3.2).

Die Präferenz bezüglich der gleichgewichtigen Geburtenrate der Agenten hängt von der Reaktionsfunktion $u(\cdot,\cdot)$ und den damit verbundenen Externalitäten im Modell ab.

Definition 3.2.4. *Wenn $u_2(n_t,\overline{n}_t) > (<)0$, dann existieren positive (negative) Effekte im Modell. (Palivos (2000), S. 1926, Definition 2)*

Im ersten Fall bedeutet dies, dass eine Erhöhung der durchschnittlichen Geburtenziffer einen Anstieg des Wertes der Reaktionsfunktion zur Folge hat. Dies nennt man einen positiven Effekt. Im Falle eines negativen Effektes wirkt sich eine Erhöhung der durchschnittliche Geburtenrate negativ auf den Wert der Reaktionsfunktion aus.

Für die Analyse der Gleichgewichte ergibt sich folgende Proposition:

Proposition 3.2.2. *(a) Bei Auftreten von negativen Externalitäten wird von den Agenten ein Gleichgewicht mit niedriger Fertilitätsrate bevorzugt. (b) Bei Auftreten von positiven Externalitäten können verschiedene Gleichgewichte im Allgemeinen nicht gereiht werden. (Palivos (2000), S. 1928, Proposition 2)*

Beweis. Sei nun U_t^* der optimale Nutzen der in der Periode t geborenen Generation mit $U_t^* = u(n^*, n^*) + \beta \ln(c_{t+1}^*)$,
wobei $c_{t+1} = w_{t+1}h_{t+1} = Ah_{t+1} = A(h_0^\gamma)^{t+1} \prod_{s=0}^{t} [B(\delta - n^*)/\delta]^{\gamma^s}$. Die zweite Gleichheit existiert auf Grund der Definition 3.2.1. (iii) eines Nashgleichgewichtes.
Durch Differenzieren von U_t ergibt sich

$$\frac{dU_t^*}{dn^*} = u_2(n^*, n^*) + u_1(n^*, n^*) + \beta \frac{\frac{dc_{t+1}^*}{dn^*}}{c_{t+1}^*} \tag{3.2.8}$$

Berechnen wir uns zunächst die Ableitung im dritten Teil der Summe unter Anwendung der Produktregel.

$$\frac{dc_{t+1}^*}{dn^*} = -A(h_0^\gamma)^{t+1} \sum_{s=0}^{t} [(\frac{B}{\delta})^{\gamma^s} \gamma^s (\delta - n^*)^{\gamma^s - 1}] \prod_{j \neq s, j=0}^{t} [B(\delta - n^*)/\delta]^{\gamma^j} \tag{3.2.9}$$

$$\frac{dc_{t+1}^*}{dn^*} = -A(h_0^\gamma)^{t+1} \sum_{s=0}^{t} [[B(\delta - n^*)/\delta]^{\gamma^s} \gamma^s (\delta - n^*)^{-1}] \prod_{j \neq s, j=0}^{t} [B(\delta - n^*)/\delta]^{\gamma^j} \tag{3.2.10}$$

$$\frac{dc_{t+1}^*}{dn^*} = -A(h_0^\gamma)^{t+1} \sum_{s=0}^{t} [\gamma^s (\delta - n^*)^{-1}] \prod_{s=0}^{t} [B(\delta - n^*)/\delta]^{\gamma^s} \tag{3.2.11}$$

Es ergibt sich somit

$$\frac{dc_{t+1}^*}{dn^*} = -c_{t+1}^* \sum_{s=0}^{t} [\gamma^s (\delta - n^*)^{-1}] \tag{3.2.12}$$

Durch Einsetzen von (3.2.12) in (3.2.8) und Kürzen von c_{t+1} ergibt sich

$$\frac{dU_t^*}{dn^*} = u_2(n^*, n^*) + u_1(n^*, n^*) - \sum_{s=0}^{t} \gamma^s \frac{\beta}{\delta - n^*}. \tag{3.2.13}$$

Durch Substituieren von (3.2.6) erhält man

$$\frac{dU_t^*}{dn^*} = u_2(n^*, n^*) + \frac{\beta}{\delta - n^*} - \sum_{s=0}^{t} \gamma^s \frac{\beta}{\delta - n^*}. \tag{3.2.14}$$

Der erste Term der Summe für $s = 0$ fällt somit weg und es ergibt sich

$$\frac{dU_t^*}{dn^*} = u_2(n^*, n^*) - \sum_{s=1}^{t} \gamma^s \frac{\beta}{\delta - n^*}. \tag{3.2.15}$$

Wir betrachten 2 Fälle:
(a) Wenn $u_2 < 0$, also negative externe Effekte existieren, dann gilt $dU_t^*/dn^* < 0$. Daraus schließt sich, dass die Individuen das Gleichgewicht mit niedriger Fertilitätsrate bevorzugen.
(b) Wenn nun positive Externalitäten aufkommen, daher $u_2 > 0$, kann keine Aussage über den bevorzugten Level der Fertilität getroffen werden. In dem speziellen Fall $\gamma < 1$, gilt nach der Berechnung der endlichen Partialsumme $\frac{dU_t^*}{dn^*} = u_2(n^*, n^*) - \frac{\gamma(1-\gamma^t)}{1-\gamma} \frac{\beta}{\delta - n^*}$. Das Vorzeichen von dU_t^*/dn^* hängt von den Parametern γ und β und auch der Zeit t ab. Bei niedrigen (hohen) Parametern γ, β und t ist die Ableitung der Funktion U_t^* nach n^* positiv (negativ). Bei unbeschränktem Wachstum $\gamma = 1$, gilt $\frac{dU_t^*}{dn^*} = u_2(n^*, n^*) - t\frac{\beta}{\delta - n^*}$. Daraus folgt, dass dU_t^*/dn^* positiv (negativ) ist für niedrige (hohe) Werte von t und β. (Palivos (2000), S. 1928, Proof of Proposition 2)

□

Interpretieren des Modells liefert folgende Erkenntnisse: Eine Änderung der gleichgewichtigen Geburtenziffer hat zwei verschiedene Effekte. Zum einen wirkt sich eine Steigerung der Geburtenrate auf den Nutzen aller Agenten aus, bei positiven (negativen) Externalitäten, ist auch die Wirkung auf den Nutzen positiv (negativ). Zum anderen hat eine Steigerung der Geburtenrate einen negativen Effekt auf die Zeit, welche in Bildung investiert wird, und somit auf das Humankapital und den Konsum. Unterscheidet man nun die beiden Fälle von positiven und negativen Externalitäten, so erhält man folgendes Resultat: im ersten Fall existiert auf der einen Seite ein positiver Effekt auf den Nutzen, auf der anderen Seite jedoch ein negativer Effekt auf das Level an Humankapital. Die beiden externen Effekte widersprechen sich, und welcher sich schlussendlich durchsetzt, hängt vom Modell und den Parametern β, γ und δ so wie dem gewählten Zeithorizont ab. Betrachtet man nun eine Steigerung der Geburtenrate bei negativen Externalitäten so ergeben sich zwei negative Effekte. Einerseits senkt sich der Level an Nutzen und andrerseits ergibt sich wiederum der negative Effekt auf das Humankapital. Aus dieser Tatsache lässt sich schließen, dass die Agenten das niedrige Gleichgewicht, das heißt eine niedrige Geburtenrate, bevorzugen.

In Proposition 3.2.2 wurde gezeigt, dass es zu Koordinationsfehlern kommen kann, in welchen die Ökonomie in einem nicht effizienten Gleichgewicht landet.

3.3 Beispiele

Beispiel 1 Das erste Beispiel demonstriert den Fall von negativen Externalitäten, es gilt somit $u_2(n_t, \overline{n}_t) < 0$. Das bedeutet, dass sich eine Steigerung der durchschnittlichen Geburtenrate $\overline{n}_t$ negativ auswirkt, siehe Definition 3.2.3. Sei $u(n_t, \overline{n}_t) = \alpha_1 \ln(n_t) - \alpha_2 exp(-\alpha_3 n_t)\overline{n}_t$ mit den Parametern $\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 1.5$, $\alpha_3 = 0.28$, $\beta = 16.936$ und $\delta = 29.016$ gegeben. Die Bedingung des Gleichgewichtes ist durch (3.2.6) definiert. Plotten der beiden Funktionen $u_1(n_t, n_t) = \frac{\alpha_1}{n_t} + \alpha_2 e^{-\alpha_3 n_t} n_t \alpha_3$ und $u_1(n_t, n_t) = \frac{\beta}{\delta - n_t}$ ergibt Abbildung 3.3. Die Graphik wird folgendermaßen gelesen: Auf der x-Achse wird die Geburtenziffer zum Zeitpunkt t und auf der y-Achse die entsprechenden Werte der ersten Ableitung der Reaktionsfunktion $u(\cdot, \cdot)$ abgetragen. Die Gleichgewichte sind durch die Schnittpunkte der beiden Funktionen erkennbar. Aus Abbildung 3.3 ergeben sich folgende 3 Gleichgewichte: ein niedriges Gleichgewicht mit $n_1^* = 2.7$ und $e_1^* = 0.907$, ein mittleres Gleichgewicht mit $n_2^* = 1.7$ und $e_2^* = 0.941$ und ein hohes Gleichgewicht mit $n_3^* = 1.25$ und $e_3^* = 0.957$.

Abbildung 3.4 zeigt den entsprechenden Gleichgewichtspfad für die Humankapitalakkumulation. Für das gleichgewichtige Humankapital gilt $h_{t+1} = h_t$. Die Gleichgewichte ergeben sich somit aus den Schnittpunkten der h_{t+1} Funktionen und der 45- Grad Linie. Wie zu erwarten, bringt das hohe Gleichgewicht auch am meisten Humankapital mit sich, da mehr Zeit in Bildung investiert wird und weniger Zeit in Kinder. Umgekehrt erhält man beim niedrigen Gleichgewicht, also bei einer relativ hohen Anzahl an Kindern, weniger Humankapital. Der Grund dafür ist, dass bei mehreren Kindern weniger Zeit für Bildung bleibt.

Einsetzen der Werte in die Nutzenfunktion (3.1.5) liefert $U_{3t}^* > U_{1t}^*$. Damit ist der Nutzen für $n^* = 1.25$ am höchsten und alle Agenten bevorzugen das Gleichgewicht mit der niedrigeren Geburtenrate.

Beispiel 2 Nun wird der Fall von positiven Externalitäten betrachtet, es gilt $u_2(n_t, \overline{n}_t) > 0$. Das heißt eine Steigerung im zweiten Argument bringt einen positiven Effekt mit sich. Sei $u(n_t, \overline{n}_t) = \alpha_4 \ln(n_t) exp(\alpha_5 \overline{n}_t)$ mit den Parametern $\alpha_4 = 0.1$ $\alpha_5 = 3$, $\beta = 3.704$ und $\delta = 2.8437$ gegeben. Analog wie in Beispiel 1 werden beide Funktionen geplottet und daraus die Schnittpunkte bestimmt. Um eine gute Leserlichkeit zu gewährleisten wird der Plot in zwei Graphiken aufgeteilt. Abbildung 3.5 veranschaulicht die Funktionen im Intervall $[0, 1.5]$ und Abbildung 3.6 bildet die Funktionen im Intervall $[1.5, 2.84]$ ab. Es ergeben sich drei Gleichgewichte $n_1^* = 2.822$ mit $e_1^* = 0.00774$(siehe Abbildung 3.6), $n_2^* = 1$ mit $e_2^* = 0.648$ und $n_3^* = 0.1$ mit $e_3^* = 0.965$ (siehe Abbildung 3.5).

In diesem Beispiel können verschiedene Gleichgewichte Pareto- optimal sein. Abbildung 3.7 zeigt den entsprechenden Gleichgewichtspfad für die Humankapitalakkumulation für den Fall $\gamma < 0.964$. Das gleichgewichtige Humankapital ist durch die Schnittpunkte der Funktionen h_{t+1} und der 45- Grad Linie erkennbar. Es ergeben sich zwei Gleichgewichte: $h_{1t}^* = 0.00006$ und $h_{3t}^* = 0.93$. Durch Einsetzen in die Nutzenfunktion resultiert wiederum $U_{1t}^* > U_{3t}^*$. Im Gegensatz dazu liefert $\gamma = 1$ und ein großer Zeithorizont, dass $U_{1t}^* < U_{3t}^*$. Wie im Beweis von Proposition 3.2.2 gezeigt, hat die Erhöhung der Geburtenziffer für hohe Werte von t und β einen negativen Einfluss auf den Nutzen der Individuen und somit würden sie ein Gleichgewicht mit niedriger Geburtenrate wählen.

Theodore Palivos untersucht mit seinem überlappenden Generationen Modell den Einfluss von sozialen Normen auf das Fertilitätsverhalten der Individuen. Unter der Voraussetzung von strategischen Komplementen treten multiple Gleichgewichte auf. Zu welchem Zustand die Individuen konvergieren hängt von der durch die soziale Norm vorgegebenen Geburtenziffer ab. Dieses Verhalten kann zu Ineffizienz führen, da Individuen nicht die für sie optimale Rate wählen, sonder die durch die Norm vorgelebte.

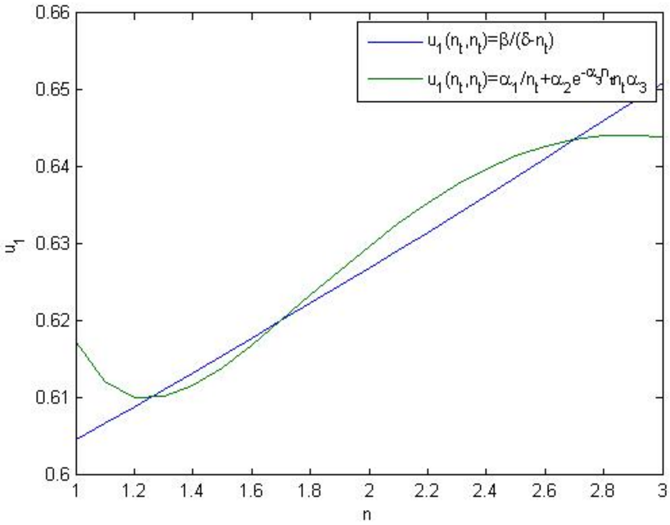

Abbildung 3.3: Multiple Gleichgewichte
(Quelle: Beispiel 1 nach Palivos (2000), S. 1930)

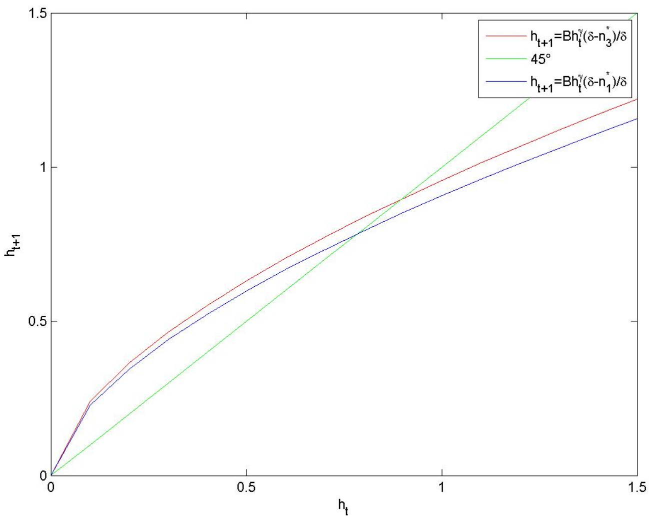

Abbildung 3.4: Gleichgewichtspfad
(Quelle: Beispiel 1 nach Palivos (2000), S. 1930)

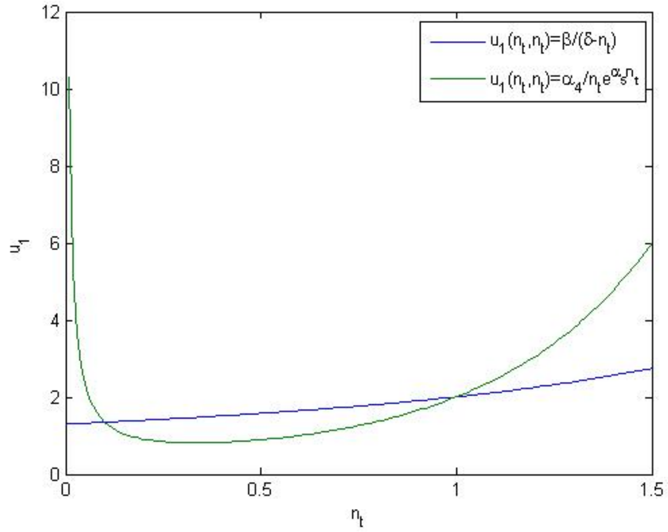

Abbildung 3.5: Multiple Gleichgewichte
(Quelle: Beispiel 2 nach Palivos (2000), S. 1930)

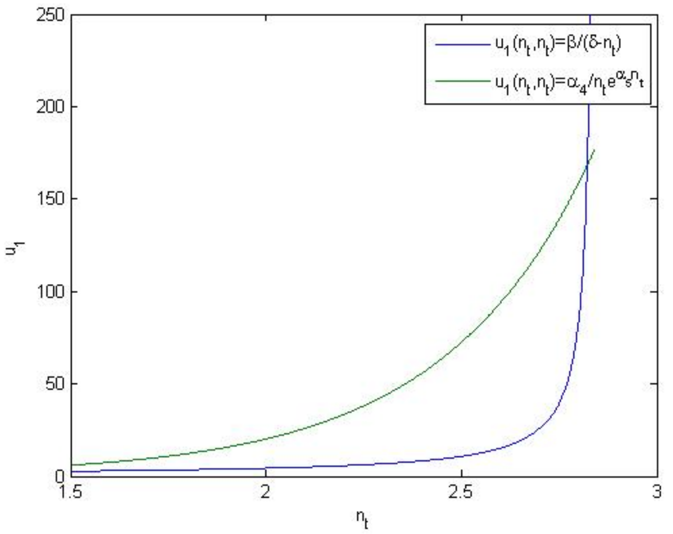

Abbildung 3.6: Multiple Gleichgewichte
(Quelle: Beispiel 2 nach Palivos (2000), S. 1930)

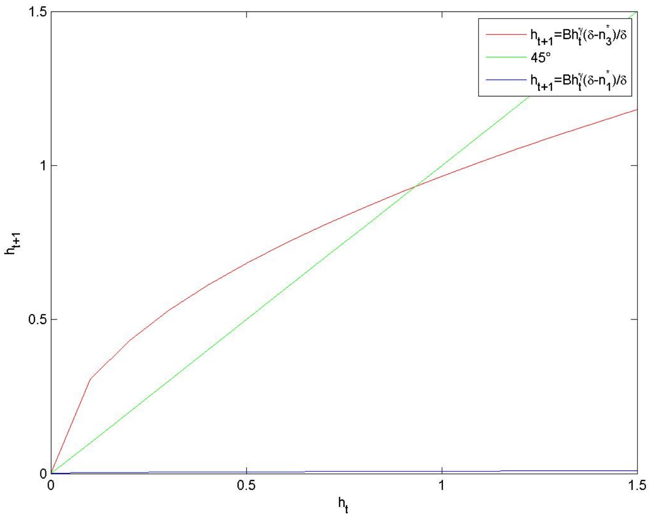

Abbildung 3.7: Gleichgewichtspfad für $\gamma < 0.964$
(Quelle: nach Beispiel 2 Palivos (2000), S. 1930)

Kapitel 4

Hideaki Goto (2008)

In diesem Kapitel betrachten wir eine Erweiterung des Modells von Palivos (2000) aus Kapitel drei. Hinzu kommen die Auswirkungen von Ungleichheit im Humankapital auf das durchschnittliche Level an Fertilität und Humankapital der Individuen. Wie im bereits beschriebenen Modell wird die individuelle Entscheidung über die Fertilität durch soziale Normen beeinflusst.

4.1 Das Modell

Hideaki Goto wählt, wie Palivos, ein überlappendes Generationenmodell für seine Untersuchungen. Individuen leben für zwei Perioden und es steht ihnen jeweils eine Einheit an Zeit pro Periode zur Verfügung. In der ersten Periode sind sie jung und investieren die Zeit in Bildung oder in Kinder. In der zweiten Periode sind die Individuen alt und wenden die Zeit zum Arbeiten auf. Konsum findet ausschließlich in der zweiten Periode statt und wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$c_{t+1} = w_{t+1} h_{t+1}. \tag{4.1.1}$$

Das Level an Konsum c_{t+1} hängt vom bestehenden Humankapital h_{t+1} ab, welches wiederum auf der in jungen Jahren aufgebrachten Zeit in Bildung basiert. w_{t+1} ist der Lohn zum Zeitpunkt $t+1$ und wird als fix angenommen.

Investieren junge Individuen nun $e_t \in [0,1]$ der Zeit in Bildung, erhalten sie in der nächsten Periode ein Humankapital von

$$h_{t+1} = B(\theta + e_t h_t)^{\gamma}, \tag{4.1.2}$$

wobei $B, \theta > 0$ und $\gamma \in (0,1)$. Der Parameter θ modelliert die Anfangsausstattung an Humankapital, beschreibt also den Fall, dass keine Zeit in Bildung investiert wird und h_t gibt den Level an Humankapital der Eltern an.

Die Anzahl der Kinder ist durch

$$n_t = \delta(1 - e_t) \tag{4.1.3}$$

gegeben. $1/\delta$ Stunden verlangt das Aufziehen eines Kindes und e_t ist die für Bildung aufgewendete Zeit.

Der Nutzen eines Individuums zum Zeitpunkt t setzt sich, gleich wie in Palivos (2000), durch den über Kinder generierten Nutzen und den Konsum in der zweiten Periode zusammen:

$$U_t = u(n_t, \overline{n}_t) + \beta ln(c_{t+1}). \tag{4.1.4}$$

Der Nutzen der Individuen ist durch die individuelle Anzahl an Kindern, n_t, und dem durchschnittlichen Level an Fertilität in der Gesellschaft, $\overline{n}_t$, definiert. Die Nutzenfunktion erfüllt folgende Bedingungen:

$$u_1 \equiv \partial u/\partial n_t > 0 \text{ und } u_2 \equiv \partial u/\partial \overline{n}_t > 0,$$

das bedeutet, dass die Nutzenfunktion in n_t und $\overline{n}_t$ steigt. Mehr Kinder, sowohl individuelle Anzahl an Kindern als auch durchschnittliche Anzahl an Kindern, bedeutet größeren Nutzen für die Individuen. Weiters gilt

$$u_{11} \equiv \partial^2 u/\partial^2 n_t \leq 0,$$

was bedeutet, dass der Grenznutzen mit steigender Anzahl an Kindern sinkt. Mit wachsender Quantität der Kinder verringert sich der Nutzen immer mehr. Und schließlich gilt noch

$$u_{12} \equiv \partial^2 u/\partial \overline{n}_t \partial n_t \geq 0.$$

Diese Gleichung besagt, dass der Grenznutzen bezüglich der durchschnittlichen Geburtenrate mit steigender Anzahl an Kindern steigt.

Die Produktion einer repräsentativen Firma ist durch

$$y_{t+1} = Ah_{t+1} \tag{4.1.5}$$

gegeben. Dabei handelt es sich um eine Funktion mit konstanten Skalenerträgen und $A > 0$.

Das Humankapital der erwachsenen Individuen wird durch die Verteilungsfunktion $F_t(h_t)$ angegeben und liegt zwischen h_t^{min} und h_t^{max}. Die totale Bevölkerung P_t folgt der Dynamik

$$P_{t+1} = P_t \underbrace{\int_{h_t^{min}}^{h_t^{max}} n_t \, dF_t(h_t)}_{n}. \tag{4.1.6}$$

Die Geburtenrate n_t ist von der Humankapitalausstattung h_t der Individuen abhängig, welche wiederum durch die Verteilungsfunktion $F_t(h_t)$ gegeben ist. Die Dichtefunktion von h_t errechnet die Anzahl der Individuen die ein Humankapital h_t besitzen und somit die Anzahl der Individuen die die Geburtenrate n_t wählen. Die beiden Faktoren multipliziert ergibt die Anzahl der Kinder n. Da das Humankapital zwischen h^{min} und h^{max} verteilt ist, wird über diese Grenzen integriert. Um die Bevölkerung der zweiten Periode zu errechnen, wird das so erhaltene Ergebnis noch mit der Bevölkerung der ersten Periode P_t multipliziert ($P_{t+1} = P_t * n$).

Die Verteilung des Humankapitals $F_t(h_t)$ entwickelt sich aus

$$F_{t+1}(h) = \frac{P_t}{P_{t+1}} \int_{h_t^{min}}^{h_t^{max}} n_t I(h_{t+1} \leq h) \, dF_t(h_t), \tag{4.1.7}$$

wobei $I(\cdot)$ eine Indikatorfunktion ist und n_t sowie h_{t+1} Funktionen von h_t sind. Die Indikatorfunktion ermöglicht die Berechnung der Verteilungsfunktion und somit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Individuum in der zweiten Periode eine Humankapitalausstattung von mindestens h besitzt. Ist $h_{t+1} \leq h$ so ist der Wert der Funktion $I(\cdot) = 1$, gilt hingegen $h_{t+1} > h$ so ist der Funktionswert $I(\cdot) = 0$. Es werden nur Individuen gezählt, welche die Bedingung $h_{t+1} \leq h$ erfüllen und das Humankapital von h nicht überschreiten. Dividieren durch P_{t+1} ergibt eine Verteilung im Intervall $[0, 1]$ und normiert somit die Funktion.

Das durchschnittliche Humankapital ist durch

$$\hat{h}_t = \int_{h_t^{min}}^{h_t^{max}} h_t \, dF_t(h_t) \tag{4.1.8}$$

gegeben.

4.2 Das Gleichgewicht

Die Nutzenoptimierung der Individuen erfolgt durch Maximierung der Funktion (4.1.4) unter (4.1.1)-(4.1.3), wobei $\overline{n}_t$ als gegeben angenommen wird.

Die Lagrangefunktion des Systems lautet:

$$L = u(n_t, \overline{n}_t) + \beta ln(c_{t+1}) - \lambda_{1t}(c_{t+1} - w_{t+1}h_{t+1}) - \lambda_{2t}(h_{t+1} - B(\theta + e_t h_t)^\gamma) - \lambda_{3t}(n_t - \delta(1 - e_t)) \tag{4.2.1}$$

Das Gleichgewicht ergibt sich aus folgender Definition:

Definition 4.2.1. *Sei $F_0(h_0)$ eine am Anfang vorgegebene Verteilung an Humankapital und P_0 die Bevölkerung. Ein Gleichgewicht ist eine Sequenz von $\{n_t\}_{t=0}^{\infty}$,*

$\{e_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{h_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, $\{c_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, $\{y_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, $\{w_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, $\{P_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, $\{F_{t+1}(h_{t+1})\}_{t=0}^{\infty}$, *sodass (i) die individuelle Nutzenfunktion maximiert wird, (ii) sich die Bevölkerung nach (4.1.6) berechnet, (iii) sich die Verteilung des Humankapitals nach (4.1.7) ergibt, (iv)* $w_{t+1} = A$*, die Räumung des Arbeitsmarktes existiert, (v)* $y_{t+1} = c_{t+1}$*, die Räumung des Gütermarktes existiert, und (vi) sich die erwartete durchschnittliche Geburtenziffer* $\overline{n}_t$ *mit der resultierenden durchschnittlichen Geburtenrate deckt:*

$$\overline{n}_t = \int_{h_t^{min}}^{h_t^{max}} n_t(h_t, \overline{n}_t)\, dF(h_t). \tag{4.2.2}$$

(Goto (2008), S. 3)

Gleichung (4.2.2) besagt, dass im Gleichgewicht die durchschnittliche Geburtenrate dem Erwartungswert der Geburtenziffer entspricht.

In Abbildung 4.1 wird die gleichgewichtige Geburtenrate geplottet. Auf der x-Achse ist die durchschnittliche Geburtenrate $\overline{n}_t$ der Periode t abgetragen, und die y- Achse liefert die Werte der Funktion auf der rechten Seite der Gleichung (4.2.2). Hideaki Goto bezeichnet diese Funktion mit $RHS(\overline{n}_t)$. In den Gleichgewichten gilt (4.2.2) und es ergeben sich drei Gleichgewichte $\overline{n}_{t,1}^*, \overline{n}_{t,2}^*$ und $\overline{n}_{t,3}^*$. In diesen Schnittpunkten ist die durchschnittliche Geburtenrate gleich dem Erwartungswert der Geburtenziffer. Das Modell konzentriert sich ausschließlich auf die stabilen Gleichgewichte des Systems. Aus diesem Grund wird für die Funktion der rechten Seite der Gleichung (4.2.2) im Gleichgewicht eine Ableitung < 1 gefordert und es ergeben sich zwei stabile Gleichgewichte $\overline{n}_{t,1}^*$ und $\overline{n}_{t,3}^*$.

Aus den Berechnungen im Appendix (A.1) ergibt sich folgende Bedingung erster Ordnung:

$$\delta u_1(\delta(1-e_t), \overline{n}_t) = \frac{\beta\gamma h_t}{\theta + e_t h_t} \tag{4.2.3}$$

mit $\underline{h}_t \leq h_t \leq \overline{h}_t$, wobei sich $\underline{h}_t$ und $\overline{h}_t$ aus den Gleichungen

$$\delta u_1(\delta, \overline{n}_t) = \frac{\beta\gamma \underline{h}_t}{\theta} \tag{4.2.4}$$

und

$$\delta u_1(0, \overline{n}_t) = \frac{\beta\gamma \overline{h}_t}{\theta + \overline{h}_t} \tag{4.2.5}$$

ergeben. Erstere der beiden Gleichungen modelliert den Fall, wenn Individuen ihre ganze verfügbare Zeit in Kinder investieren und daher $e_t = 0$ ist. Letztere behandelt das gegenteilige Extrem, wenn wiederum nur Zeit in Bildung investiert wird und auf das Erziehen von Kindern verzichtet wird.

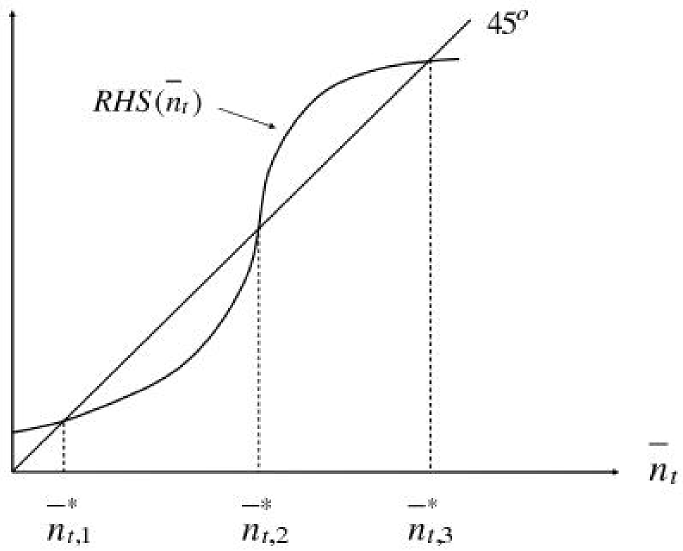

Abbildung 4.1: Gleichgewichtige Geburtenrate
(Quelle: Goto (2008), S. 10, Fig. 1)

Die Funktionen $\underline{h}_t$ und $\overline{h}_t$ steigen in $\overline{n}_t$, da aus (4.2.4) und (4.2.5) folgt, dass

$$\underline{h}_t = \frac{\theta\delta u_1(\delta, \overline{n}_t)}{\beta\gamma} \Rightarrow \frac{\partial \underline{h}_t}{\partial \overline{n}_t} = \frac{\delta\theta}{\beta\gamma} u_{12}(\delta, \overline{n}_t) \geq 0, \text{ da } u_{12} \geq 0,$$

und

$$\overline{h}_t = \frac{\theta\delta u_1(0, \overline{n}_t)}{\beta\gamma - \delta u_1(0, \overline{n}_t)} \Rightarrow \frac{\partial \overline{h}_t}{\partial \overline{n}_t} = \frac{\delta u_{12}(0, \overline{n}_t)\theta\beta\gamma}{(\beta\gamma - \delta u_1(0, \overline{n}_t))^2} \geq 0, \text{ da } u_{12} \geq 0.$$

Ist der Anteil des Humankapitals kleiner als die untere Schranke $\underline{h}_t$, so wird die ganze verfügbare Zeit in Humankapital investiert und es wird auf das Erziehen von Kindern verzichtet. Im Gegensatz dazu wird bei einem hohen Anteil an Humankapital, größer der oberen Schranke $\overline{h}_t$, die Zeit vollständig in Kinder aufgewendet und es wird gänzlich auf zusätzliches Humankapital verzichtet. Es resultiert folgende Fallunterscheidung

$$e_t(h_t, \overline{n}_t) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } h_t^{min} \leq h_t \leq \underline{h}_t \\ 1, \text{ wenn } \overline{h}_t \leq h_t \leq h_t^{max} \end{cases}. \tag{4.2.6}$$

Ableiten laut Appendix (A.2) der Gleichung (4.2.3) nach h_t ergibt

$$\frac{\partial e_t}{\partial h_t} = \frac{\beta\gamma\theta}{\beta\gamma h_t^2 - \delta^2 u_{11}(\delta(1-e_t), \overline{n}_t)(\theta + e_t h_t)^2} > 0. \tag{4.2.7}$$

Bei steigendem Humankapital der Eltern h_t steigt auch e_t und damit die Investition in Bildung. Mit anderen Worten wollen gut gebildete Individuen auch gut ausgebildeten Nachwuchs.

Betrachtet man nun die Änderung von e_t in Hinblick auf Änderung der durchschnittlichen Geburtenrate $\overline{n}_t$, so ergibt sich

$$\frac{\partial e_t}{\partial \overline{n}_t} = \frac{-\delta u_{12}(\delta(1-e_t), \overline{n}_t)(\theta + e_t h_t)^2}{\beta\gamma h_t^2 - \delta^2 u_{11}(\delta(1-e_t), \overline{n}_t)(\theta + e_t h_t)^2} \leq 0. \tag{4.2.8}$$

Berechnungen sind dem Appendix (A.3) zu entnehmen. Eine Erhöhung der durchschnittlichen Geburtenrate wirkt sich somit negativ auf die in Bildung investierte Zeit aus. Mehr Kinder bedeutet weniger Ausbildung.

Die Geburtenrate der Individuen hängt sowohl von dem Level an Humankapital, als auch von der durchschnittlichen Geburtenrate ab. Aus (4.1.3) und $e_t(h_t, \overline{n}_t)$ in (4.2.6) ergibt sich:

$$n_t(h_t, \overline{n}_t) = \begin{cases} \delta, \text{ wenn } h_t^{min} \leq h_t \leq \underline{h}_t \\ \delta(1 - e_t(h_t, \overline{n}_t)), \text{ wenn } \underline{h}_t \leq h_t \leq \overline{h}_t \\ 0, \text{ wenn } \overline{h}_t \leq h_t \leq h_t^{max} \end{cases}. \tag{4.2.9}$$

Ableiten dieser Funktion nach h_t ergibt auf Grund von (4.1.3) und (4.2.7),

$$\frac{\partial n_t}{\partial h_t} < 0. \tag{4.2.10}$$

Das heißt mit steigendem Humankapital der Eltern verringert sich die Anzahl an Kindern. Gut gebildete Individuen haben somit weniger Kinder als schlechter gebildete Individuen.

Das Humankapital in der Periode $t+1$ berechnet sich aus (4.1.2) und $e_t(h_t, \overline{n}_t)$:

$$h_{t+1}(h_t, \overline{n}_t) = \begin{cases} B\theta^\gamma, \text{ wenn } h_t^{min} \leq h_t \leq \underline{h}_t \\ B(\theta + e_t(h_t, \overline{n}_t)h_t)^\gamma, \text{ wenn } \underline{h}_t \leq h_t \leq \overline{h}_t \\ B(\theta + h_t)^\gamma, \text{ wenn } \overline{h}_t \leq h_t \leq h_t^{max}. \end{cases} \tag{4.2.11}$$

Es ist ersichtlich, dass h_{t+1} im ersten und letzten Fall unabhängig von $\overline{n}_t$ ist, $\underline{h}_t$ und $\overline{h}_t$ jedoch Funktionen von $\overline{n}_t$ sind.

Abbildung 4.2 veranschaulicht das Level an Humankapital der Periode $t+1$ graphisch. Abhängig vom erworbenen Humankapital in der ersten Periode, ergibt sich ein entsprechendes Humankapital in der zweiten Periode.

Wenn nun h_t klein genug ist, sodass

$$\delta u_1(\delta, \delta) \geq \frac{\beta\gamma h_t^{max}}{\theta}, \tag{4.2.12}$$

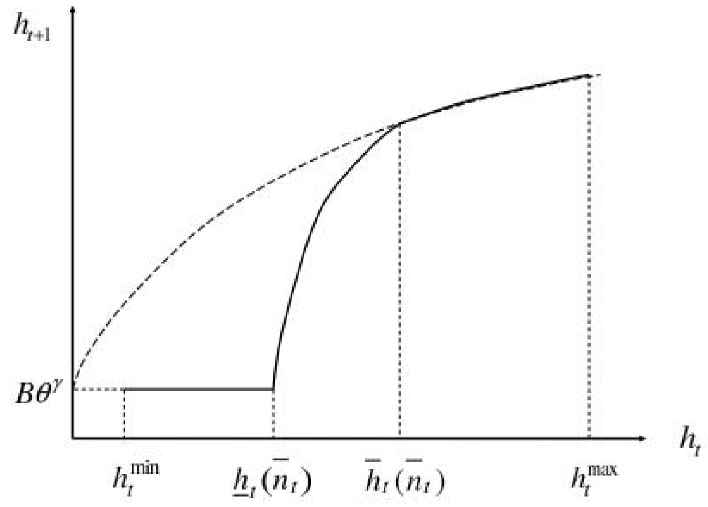

Abbildung 4.2: Verteilung des Humankapitals
(Quelle: Goto (2008), S. 10, Fig. 2)

dann haben Individuen genug Humankapital und investieren ihre ganze Zeit in Kinder.

Wenn auf der anderen Seite h_t groß genug ist um die Ungleichung

$$\delta u_1(0,0) \leq \frac{\beta\gamma h_t^{min}}{\theta + h_t^{min}} \tag{4.2.13}$$

zu erfüllen, dann investieren Individuen ausschließlich in Bildung und verzichten auf das Erziehen von Kindern.

4.3 Umverteilung und Fertilität

Hideaki Goto untersucht darüber hinaus den Effekt der Umverteilung von Humankapital auf das gleichgewichtige Fertilitätsverhalten der Individuen. Dazu wird zwischen kurzfristigem und langfristigem Effekt unterschieden. Der kurzfristige Effekt beschreibt dabei die kurzfristigen Auswirkungen einer Änderung der Verteilung des Humankapitals. Wie ändert sich die durchschnittliche Fertilität und das durchschnittliche Humankapital bei einer Umverteilung des Humankapitals der Individuen. Durch Studieren des langfristigen Effektes ergibt sich das Verhalten der Gleichgewichte für zukünftige Perioden. Zu welchem stabilen Gleichgewicht werden die Individuen konvergieren und inwiefern ändert sich dieses bei einer Änderung der Verteilungsfunktion des Humankapitals.

4.3.1 Kurzfristiger Effekt

Zuerst wird eine Änderung, nach dem Prinzip der stochastischen Dominanz erster Ordnung, des Humankapitals in der ersten Periode t untersucht. Diese ist nach Schmid und Trede (2006) folgend definiert: Eine Zufallsvariable X ist mindestens so gut wie Y, wenn gilt

$$F_1(x) \leq F_2(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dabei ist F_1 die Verteilungsfunktion von X und F_2 die Verteilungsfunktion von Y. Man schreibt $X \geq_{FSD} Y$ und es gilt

$$1 - F_1(x) = \mathbb{P}(X > x) \geq \mathbb{P}(Y > x) = 1 - F_2(x).$$

Mit anderen Worten ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert größer als x annimmt mindestens so groß ist wie die Wahrscheinlichkeit, dass Y einen Wert größer als x annimmt. Im Falle von F_1 ist die Wahrscheinlichkeit für größere Zustände höher als für kleinere Zustände, und der Erwartungswert ist ebenfalls höher. Auf das Humankapital bezogen heißt das, dass der Erwartungswert nach der Änderung höher ist als davor, und Individuen einen höheren Level an Humankapital haben.

Es ergibt sich folgende Proposition:

Proposition 4.3.1. *Eine Umverteilung des Humankapitals in der Periode t, nach dem Konzept der stochastischen Dominanz erster Ordnung, führt zu einer Senkung der durchschnittlichen Geburtenrate in der Periode t und einem Anstieg des Humankapitals in der Periode $t + 1$. (Goto (2008), S. 4, Proposition 1)*

Beweis. Siehe Appendix (A.4). □

Proposition 4.3.1 könnte folgendermaßen interpretiert werden: Durch eine Umverteilung nach dem Prinzip der stochastischen Dominanz erster Ordnung, erhöht sich das Humankapital der Individuen. Diese Steigerung wirkt sich jedoch negativ auf die durchschnittliche Geburtenrate aus (siehe 4.2.10). Eine Erklärung dafür könnte sein, dass gut gebildete Eltern für ihre Nachkommen eine ebenso gute Ausbildung garantieren möchten, und daraus folgt ein Wandel von Quantität der Kinder zu Qualität der Kinder.

Im Falle von gleich verteiltem Humankapital ergibt sich laut Hideaki Goto folgende Proposition:

Proposition 4.3.2. *Es wird angenommen, dass h_t im Intervall $[m - k, m + k]$ gleichmäßig verteilt ist. m sei dabei das durchschnittliche Level an Humankapital und $k \in (0, m]$ beschreibt das Ausmaß der Ungleichheit. Mit steigendem k*
(i) fällt die gleichgewichtige Geburtenrate für $\overline{n}_t > \frac{\delta}{2}$,

(ii) steigt die gleichgewichtige Geburtenrate für $\overline{n}_t < \frac{\delta}{2}$. (Goto (2008), S. 5, Proposition 2)

Beweis. Siehe Appendix (A.5). □

Wie in Proposition (4.3.2) (i) gezeigt, hat eine Erhöhung von k und damit eine Steigung der Ungleichheit bezüglich des Humankapitals, bei einer gewissen Höhe der durchschnittlichen Geburtenrate, einen negativen Effekt auf die zukünftige Geburtenrate. Mit anderen Worten fällt die durchschnittliche Geburtenrate mit steigender Ungleichheit unter der Voraussetzung, dass die durchschnittliche Geburtenrate zu diesem Zeitpunkt größer als $\frac{\delta}{2}$ ist.

Die intuitive Herangehensweise ist folgende: Betrachtet man $\overline{n}_t$ als konstant und sei $f(h_t,k) = \frac{1}{2k}$ die Dichtefunktion des gleich verteilten Humankapitals. Es ist ersichtlich, dass aus einer Steigung von k eine Abnahme des Wertes der Dichtefunktion $f(h_t,k) = \frac{1}{2k}$ folgt. Damit sinkt natürlich auch die Geburtenrate für $h_t \in [\underline{h}_t, \overline{h}_t]$, da $\overline{n}_t = \frac{1}{2k}\int_{\underline{h}_t(\overline{n}_t(k))}^{\overline{h}_t(\overline{n}_t(k))} n_t(h_t,\overline{n}_t)dh_t$.

Nun bleibt noch zu zeigen inwiefern sich die durchschnittliche Geburtenrate für $h_t \in [m-k, \underline{h}_t]$ und $h_t \in [\overline{h}_t, m+k]$ ändert.

Es gilt $\overline{n}_t > \frac{\delta}{2}$. Daraus folgt

$$\frac{\delta}{2} < \overline{n}_t = \frac{1}{2k}\left[\delta\left[\underline{h}_t(\overline{n}_t(k)) - (m-k)\right] + \int_{\underline{h}_t(\overline{n}_t(k))}^{\overline{h}_t(\overline{n}_t(k))} n_t(h_t,\overline{n}_t)dh_t\right].$$

Der erste Term in der eckigen Klammer multipliziert mit $\frac{1}{2k}$ ergibt die durchschnittliche Geburtenrate für $h_t \in [m-k, \underline{h}_t]$ und der zweite Term berechnet die durchschnittliche Geburtenrate für ein Humankapital $h_t \in [\underline{h}_t, \overline{h}_t]$. Der letzte Term für das Humankapital $h_t \in [\overline{h}_t, m+k]$ fällt weg, da die Geburtenrate für dieses Intervall Null ist.

Durch Umformen der Ungleichung erhält man

$$\delta(m - \underline{h}_t) < \int_{\underline{h}_t(\overline{n}_t(k))}^{\overline{h}_t(\overline{n}_t(k))} n_t(h_t,\overline{n}_t)dh_t. \tag{4.3.1}$$

Es können nun zwei Fälle auftreten: Wenn $\underline{h}_t > m$ ist, dann sinkt die gleichgewichtige Geburtenrate für $h_t \in [m-k, \underline{h}_t]$ ebenfalls. Die Geburtenrate errechnet sich aus $F_t(\underline{h}_t, k) = \frac{\delta}{2k}(\underline{h}_t - (m-k))$ und es gilt

$$F_t(\underline{h}_t, k) = \frac{(\underline{h}_t - m)\delta}{2k} + \frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{\partial F_t}{\partial k} = \frac{-(\underline{h}_t - m)\delta}{2k^2} < 0,$$

für $\underline{h}_t > m$. Daher sinkt die Fertilität mit steigendem k für $h_t \in [m-k, \underline{h}_t]$ und $\underline{h}_t > m$.

Gilt nun auf der anderen Seite $\underline{h}_t < m$, so ändert sich die gleichgewichtige Geburtenrate bei Änderung von k im Intervall $[m-k, \underline{h}_t]$ um

$$F_t(\underline{h}_t, k) = \frac{(\underline{h}_t - m)\delta}{2k} + \frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{\partial F_t(\underline{h}_t, k)}{\partial k} = \frac{-(\underline{h}_t - m)\delta}{2k^2} > 0,$$

für $\underline{h}_t < m$. Dies würde eine Steigung der durchschnittlichen Geburtenrate für $h_t \in [m-k, \underline{h}_t]$ bedeuten. Betrachtet man $\overline{n}_t$ für $h_t \in [\underline{h}_t, \overline{h}_t]$, so erhält man bei einer Steigung in k eine Änderung um

$$\frac{\partial F_t(h_t, k)}{\partial k} = -\frac{1}{2k^2} \int_{\underline{h}_t(\overline{n}_t(k))}^{\overline{h}_t(\overline{n}_t(k))} n_t(h_t, \overline{n}_t) dh_t,$$

was wiederum eine Senkung der Fertilität in diesem Intervall bedeutet. Auf Grund der Ungleichung (4.3.1) überwiegt der negative Term und es ergibt sich bei steigendem k eine Senkung der durchschnittlichen Fertilität.

Dementsprechend bringt eine Vergrößerung der Ungleichheit bezüglich Humankapital eine Senkung der Fertilität mit sich, so fern bereits eine bestimmte Höhe der Geburtenrate existiert.

Nach diesem speziellen Fall betrachtet Goto eine allgemeine Verteilung des Humankapitals mit der Verteilungsfunktion $F(h_t, k)$. Das Resultat lässt sich in folgender Proposition zusammenfassen:

Proposition 4.3.3. *Sei $F(h_t, k)$ die Verteilungsfunktion des Humankapitals, wobei k ein Parameter ist, der die Streuung des Humankapitals beschreibt. Der Mittelwert bleibt bei einer Änderung von k unverändert. Wenn nun $\acute{k} > k$ ist, ist $F(h_t, \acute{k})$ eine den Mittelwert erhaltende Streuung von $F(h_t, k)$. Bei einer Steigung in k*
(i) sinkt die durchschnittliche Geburtenrate, wenn $\partial F(h_t, k)/\partial k < 0$ für $h_t \in (\underline{h}_t, \overline{h}_t)$,
(ii) wächst die durchschnittliche Geburtenrate, wenn $\partial F(h_t, k)/\partial k > 0$ für $h_t \in (\underline{h}_t, \overline{h}_t)$. (Goto (2008), S. 5- 6, Proposition 3)

Beweis. Substituiert man im Beweis von Proposition (4.3.1) s durch k, so ergibt sich Proposition (4.3.3). (Goto (2008), S. 6, Proof of Proposition 3) □

4.3.2 Langfristiger Effekt

In diesem Abschnitt wird der langfristige Effekt von Umverteilung auf gleichgewichtiges Fertilitätsverhalten und Level an Humankapital untersucht. Es werden somit Gleichgewichte bezüglich Humankapital und Fertilität zukünftiger Perioden studiert.

Es können insgesamt 4 unterschiedliche Fälle auftreten. Wie schon in Abschnitt 4.2 beschrieben, veranschaulicht Abbildung 4.2 die Humankapitalfunktion graphisch. Interessant ist nun das gleichgewichtige Level an Humankapital, für welches $h_t = h_{t+1}$ gilt. Um dieses zu erhalten, schneidet man die Funktion $h_{t+1}(h_t, \overline{n}_t)$ mit der 45- Grad Linie, für welche alle Punkte $h_t = h_{t+1}$ erfüllen. Die Schnittpunkte dieser Funktionen beschreiben das jeweilige gleichgewichtige Humankapital der Individuen. Um bessere Verständnis zu gewährleisten habe ich die verschiedenen Fälle bildlich veranschaulicht.

Kreuzt die Funktion $h_{t+1} = h_{t+1}(h_t, \overline{n}_t)$ die 45- Grad Linie genau in einem Punkt, so ergeben sich laut Hideaki Goto, abhängig von der Lage des Schnittpunktes, 3 verschiedene Fälle:

Fall 1:
Der erste Fall ergibt sich durch einen Schnittpunkt der Funktion $h_{t+1}(h_t, \overline{n}_t)$ mit der 45- Grad Linie im Intervall $[\min(h_t^{min}, B\theta^\gamma), \underline{h}_t]$. In Abbildung 4.3 werden die beiden Funktionen dargestellt. Auf der x- Achse werden dabei alle möglichen Zustände an Humankapital in der Periode t abgetragen, $h_t \in [h_t^{min}, h_t^{max}]$, und auf der y- Achse das Humankapital in der Periode $t+1$. Es ergibt sich ein Schnittpunkt $h^* \in [\min(h_t^{min}, B\theta^\gamma), \underline{h}_t]$. In der Graphik ist erkennbar, dass sich die Funktion $h_{t+1}(h_t, \overline{n}_t)$ vor dem Gleichgewicht h^* oberhalb der 45- Grad Linie befindet $(\forall h_t \in [h_t^{min}, h^*])$ und nach h^* darunter $(\forall h_t \in [h^*, h_t^{max}])$. Für die Notation gilt $\underline{h}_{t+1} = \underline{h}_t(\overline{n}_t)$ und $\overline{h}_{t+1} = \overline{h}_t(\overline{n}_t)$. Die Punkte $h_{t+1}(\underline{h}_t)$ und $h_{t+1}(\overline{h}_t)$ modellieren das entsprechende Humankapital der Periode $t+1$ für ein Humankapital $\underline{h}_t$ (untere Schranke) und $\overline{h}_t$ (obere Schranke) der ersten Periode. Diese Notation ist äquivalent für alle noch folgenden Abbildungen.

Fall 1 lässt sich folgendermaßen formulieren: Es existiere ein $\acute{t}$, sodass für alle zukünftige Perioden $t \geq \acute{t}$ gilt: (i) der Schnittpunkt der Funktionen $h_{t+1}(h_t, \overline{n}_t)$ und der 45- Grad Linie liegt im Intervall $[\min(h_t^{min}, B\theta^\gamma), \underline{h}_t]$, (ii) $h_{t+1}(\underline{h}_t) < \underline{h}_{t+1}$, und (iii) $h_{t+1}(\overline{h}_t) < \overline{h}_{t+1}$ (siehe Abbildung 4.3).

Es gibt somit ein eindeutiges stabiles Gleichgewicht, das durch $h^* = B\theta^\gamma$ gegeben ist (siehe Gleichung (4.2.11) Fall 1). Die entsprechende gleichgewichtige Geburtenrate ergibt sich aus Gleichung (4.2.9) Fall 1 und lautet $n^* = \delta$. In diesem Fall sind die gleichgewichtigen Größen unabhängig von einer Umverteilung des Humankapitals unter der Voraussetzung, dass die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllt sind.

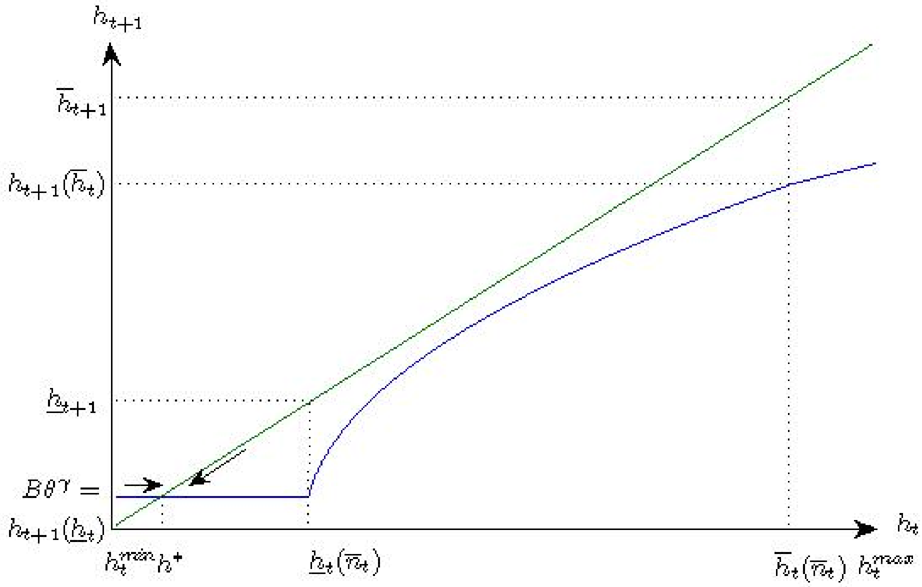

Abbildung 4.3: Gleichgewichtiger Wachstumspfad für $h_{t+1}(\underline{h}_t) < \underline{h}_{t+1}$ und $h_{t+1}(\overline{h}_t) < \overline{h}_{t+1}$
(Quelle: nach Goto (2008), S. 10, Fig. 3)

Fall 2:
In diesem Fall schneiden sich die beiden Funktionen im Intervall $\left[\underline{h}_t, \overline{h}_t\right]$. Abbildung 4.4 zeigt, dass sich die Funktion $h_{t+1}(h_t, \overline{n}_t)$ im Intervall $[h_t^{min}, h^*]$ oberhalb der 45- Grad Linie befindet und für alle h_t größer dem Gleichgewicht darunter. Das Humankapital aller Individuen konvergiert somit gegen das Gleichgewicht h^*.

Formell ergibt sich folgender Fall: Es existiere ein $\acute{t}$, sodass für alle $t \geq \acute{t}$ gilt: (i) die h_{t+1} und die 45- Grad Linie schneiden sich in einem Punkt $h_t \in \left[\underline{h}_t, \overline{h}_t\right]$, (ii) $h_{t+1}(\underline{h}_t) > \underline{h}_{t+1}$ und (iii) $h_{t+1}(\overline{h}_t) < \overline{h}_{t+1}$.

Das gleichgewichtige Level an Humankapital ist durch $h^* = B(\theta + e_t(h^*, n^*))^\gamma$ (siehe Gleichung (4.2.11) Fall 2) und die Geburtenrate durch $n^* = \delta(1 - e_t(h^*, n^*))$ (siehe (4.2.9) Fall 2) gegeben. Abhängig von der Änderung der Verteilungsfunktion kann sich dabei eine Umverteilung auf die Funktion $e_t(\cdot, \cdot)$ auswirken.

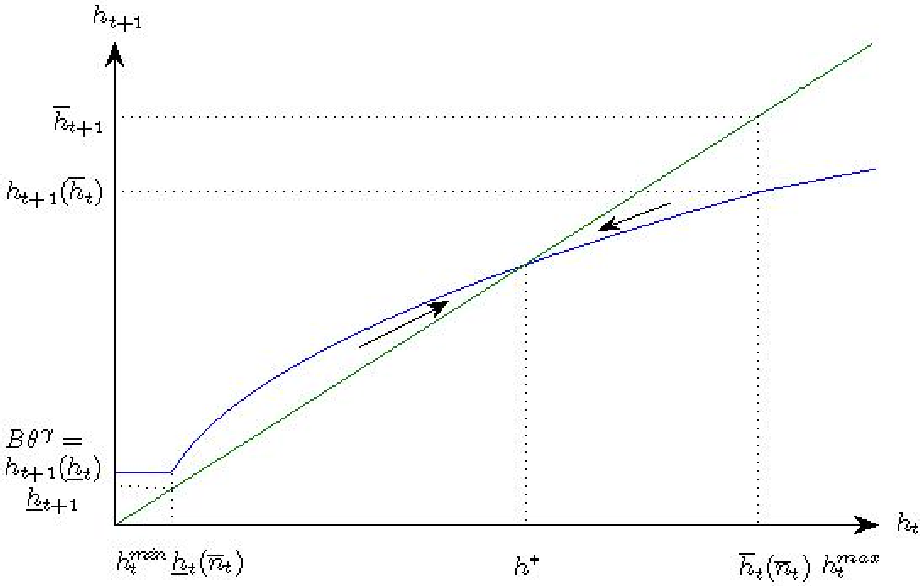

Abbildung 4.4: Gleichgewichtiger Wachstumspfad für $h_{t+1}(\underline{h}_t) > \underline{h}_{t+1}$ und $h_{t+1}(\overline{h}_t) < \overline{h}_{t+1}$
(Quelle: nach Goto (2008), S. 6, Case 3)

Fall 3:
Es existiere ein $\acute{t}$, sodass für alle $t \geq \acute{t}$ gilt: (i) die $h_{t+1}(h_t, \overline{n}_t)$ und die 45- Grad Linie schneiden sich in einem Punkt $h_t \geq \overline{h}_t$, (ii) $h_{t+1}(\underline{h}_t) > \underline{h}_{t+1}$, und (iii) $h_{t+1}(\overline{h}_t) > \overline{h}_{t+1}$. Die Funktionen schneiden sich in einem Punkt, und es ergibt sich ein eindeutiges stabiles Gleichgewicht (siehe Abbildung 4.5).

Das Humankapital der Individuen strebt gegen das gleichgewichtige Level an Humankapital $h^* = B(\theta + h^*)^\gamma$ (siehe (4.2.11) Fall 3), und aus Gleichung (4.2.9) Fall 3 ergibt sich die Geburtenrate $n^* = 0$. Auch in diesem Fall, analog zu Fall 1, sind die Gleichgewichte unabhängig von einer Umverteilung des Humankapitals vorausgesetzt, dass die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllt sind.

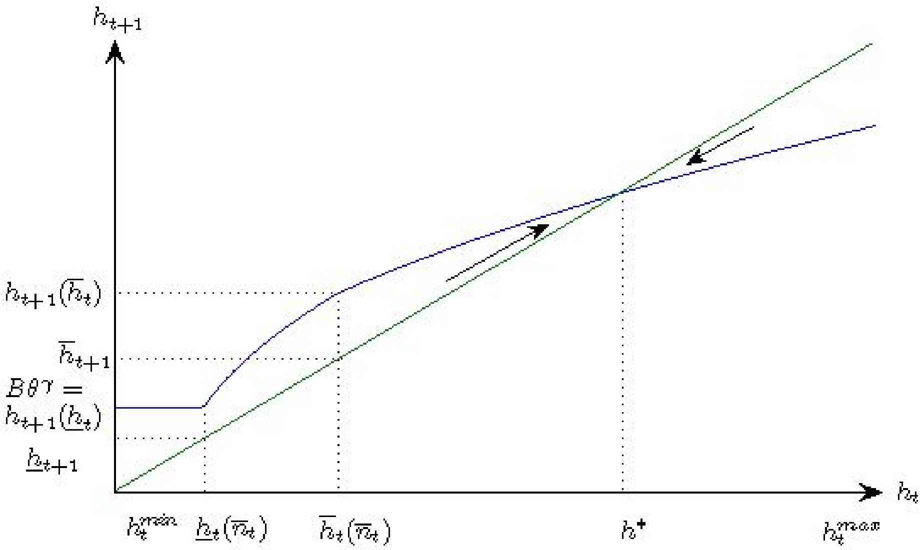

Abbildung 4.5: Gleichgewichtiger Wachstumspfad für $h_{t+1}(\underline{h}_t) > \underline{h}_{t+1}$ und $h_{t+1}(\overline{h}_t) > \overline{h}_{t+1}$
(Quelle: nach Goto (2008), S. 6, Case 2)

Fall 4:
Es existiert ein $\acute{t}$, sodass für alle $t \geq \acute{t}$ gilt $\overline{n}_t = n^*$. Die 45- Grad Linie wird in den Punkten $h_1^* \in [B\theta^\gamma, \underline{h}(n^*)]$, $h_2^* \in (\underline{h}_t(n^*), \overline{h}_t(n^*))$ und $h_3^* \geq \overline{h}_t(n^*)$ geschnitten (siehe Abbildung 4.4). Dabei sind h_1^* und h_3^* stabile Gleichgewichte, die Ableitung der Funktion an diesen Stellen ist kleiner als 1, und h_2^* ein instabiles Gleichgewicht.

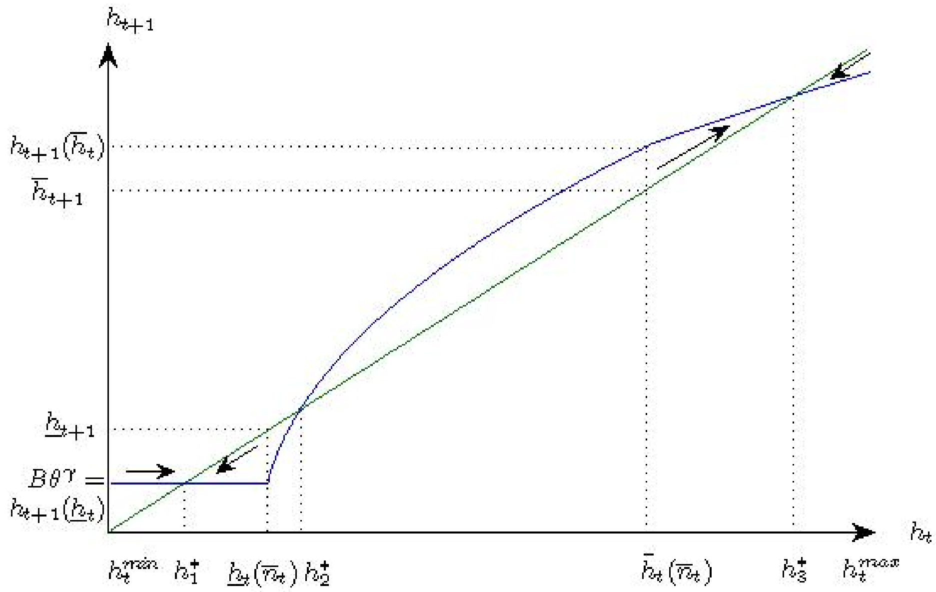

Abbildung 4.6: Gleichgewichtiger Wachstumspfad für $h_{t+1}(\underline{h}_t) < \underline{h}_{t+1}$ und $h_{t+1}(\overline{h}_t) > \overline{h}_{t+1}$
(Quelle: nach Goto (2008), S. 10, Fig. 4)

Wie in Abbildung 4.6 ersichtlich konvergiert das Humankapital der Periode $t+1$ für Werte unter h_2^* gegen das niedrige Gleichgewicht $h_1^* = B\theta^\gamma$ und für Werte über dem instabilen Gleichgewicht gegen das hohe Gleichgewicht h_3^*.

Das durchschnittliche Humankapital der Individuen berechnet sich durch

$$\hat{h}^* = B\theta^\gamma F_{\acute{t}}(h_2^*) + h_3^*(1 - F_{\acute{t}}(h_2^*)).$$

Der erste Term modelliert das durchschnittliche Humankapital für alle $h_t \leq h_2^*$ und der zweite Termin für alle Zustände größer h_2^*. $F_{\acute{t}}(h_2^*)$ ist dabei die Verteilungsfunktion des Humankapitals der Periode $\acute{t}$. Abhängig vom Vorzeichen der Ableitung $F_{\acute{t}}(h_{\acute{t}}, k)$ nach k, ergibt sich bei einer Steigung in k eine positive oder negative Änderung von $\hat{h}^*$. $\partial F_{\acute{t}}(h_{\acute{t}}, k)/\partial k > 0$ ergibt einen Rückgang des Humankapitals und $\partial F_{\acute{t}}(h_{\acute{t}}, k)/\partial k < 0$ eine Steigung des durchschnittlichen Humankapitals für $h_{\acute{t}} \in (\underline{h}(n^*), \overline{h}(n^*))$.

Gilt nun $\partial F_{\acute{t}}(h_{\acute{t}}, k)/\partial k > 0$ für $h_{\acute{t}} < \hat{h}^*$ und $\partial F_{\acute{t}}(h_{\acute{t}}, k)/\partial k < 0$ für $h_{\acute{t}} > \hat{h}^*$ analog wie in Proposition (4.3.2) bezüglich der Geburtenziffer, so folgt eine Abnahme des Humankapitals für $h_2^* < \hat{h}^*$ und eine Erhöhung des Humankapitals für $h_2^* > \hat{h}^*$.

Die gleichgewichtige Geburtenrate ist durch

$$n^* = \delta F_{\acute{t}}(h_2^*)$$

gegeben (siehe Gleichung (4.2.2) und (4.2.9)). Dabei bewirkt $\partial F_{\acute{t}}(h_{\acute{t}}, k)/\partial k > 0$ ($\partial F_{\acute{t}}(h_{\acute{t}}, k)/\partial k < 0$) eine Erhöhung (Senkung) der durchschnittlichen Geburtenrate für $h_{\acute{t}} \in (\underline{h}(n^*), \overline{h}(n^*))$. Infolgedessen ergibt sich auch für die langfristige Beobachtung Proposition 4.3.3.

Dieser Fall zeigt somit, dass Humankapital und Fertilität sehr wohl auch von einer Änderung der Verteilungsfunktion betroffen sein können. Gibt es also eine Umverteilung des Humankapitals, so kann es unter gewissen Voraussetzungen zu einer Verschiebung der Gleichgewichte kommen.

Das Modell von Goto (2008) zeigt, dass sich eine Änderung der Verteilung des Humankapitals, abhängig von der Höhe der Geburtenrate, positiv oder negativ auf die durchschnittliche Geburtenrate auswirken kann. Diese Erkenntnis gilt sowohl im kurzfristigen Fall, als auch im langfristigen Fall. Im kurzfristigen Fall wurde gezeigt, dass eine Erhöhung des Humankapitals in der ersten Periode zu einer Abnahme der gleichgewichtigen durchschnittlichen Geburtenrate führt und zu einer Zunahme des Humankapitals in der zweiten Periode. Ist das Humankapital gleich verteilt, dann ist der Effekt von steigender Ungleichheit, abhängig von der Höhe der durchschnittlichen Geburtenrate, positiv oder negativ. Untersuchungen des langfristigen Effektes ergeben, dass sich abhängig von der Verteilungsfunktion sowie den Eigenschaften der Humankapitalfunktion h_{t+1}, eine Umverteilung positiv, negativ oder überhaupt nicht auf die gleichgewichtigen Größen auswirkt.

Kapitel 5

Joydeep Bhattacharya, Shankha Chakraborty (2011)

In einigen empirischen Studien, wie zum Beispiel Vegard Skirbekk (2008) aus Kapitel zwei, wurde ein demographischer Übergang von einer relativ hohen Geburtenrate hin zu einer niedrigen Geburtenrate untersucht. Die Autoren Bhattacharya und Chakraborty erklären durch ihr Modell die demographische Transition in Hinblick auf den Rückgang der Kindersterblichkeitsrate. Problem der bereits existierenden Modelle bei der Modellierung dieses Effektes war, dass sich die Abnahme der Mortalität lediglich auf die totale Geburtenrate, nicht jedoch auf die Nettogeburtenrate auswirkte. Die totale Geburtenrate ist dabei die durchschnittliche Anzahl der geborenen Kinder pro Frau im gebärfähigem Alter und die Nettogeburtenrate ist die durchschnittliche Anzahl der überlebenden Kinder pro Frau im gebärfähigem Alter. Studien beweisen den Einfluss vom Rückgang der Sterblichkeitsrate auf die totale Geburtenrate und Nettogeburtenrate und liefern dadurch eine Erklärung für den Wandel hin zu Familien mit weniger Kinder. Abhilfe schafft das Einführen von sozialen Normen bezüglich der Familiengröße in das Modell. Individuen richten sich bei der Entscheidung über die gewünschte Anzahl ihrer Kinder zusätzlich zum Aspekt des ökonomischen Trade- Offs nach der vorgegebenen sozialen Norm.

5.1 Das Modell

Bhattacharya und Chakraborty betrachten in ihrem Modell identische Haushalte, welche ihren Nutzen maximieren wollen. Individuen werden als Konformisten gesehen. Sie lassen sich in ihrem Handeln durch soziale Normen beeinflussen und passen sich der vorgegebenen Norm an. In dem vorliegenden Modell betrifft dies die Kinderplanung der Individuen. Neben der ökonomischen Sichtweise spielen soziale Normen bezüglich der Familiengröße eine wichtige Rolle für die Entscheidung der Eltern über die Anzahl ihrer Kinder. Individuen versuchen somit den Unterschied zwischen der individuell gewählten Geburtenrate und der über die soziale Norm definierten Geburtenrate zu minimieren. Sei nun n die individuell gewählte Geburtenrate und n_s die durch die Norm definierte Geburtenrate. $d_n \equiv |n - n_s|$ sei dann der eben genannte Unterschied zwischen den Geburtenziffern.

Für die Haushalte ergibt sich folgendes Optimierungssystem:

$$
\begin{aligned}
&max_{c,n}\ \beta u(c) + (1-\beta)v(\phi n) - \gamma\omega(d_n)\\
&\text{unter}\\
&c + p_n n = y,\\
&\text{wobei } c \geq 0,\ \ n \geq 0.
\end{aligned}
$$

Haushalte maximieren über ihren Level an Konsum, c, und ihre gewählte Anzahl an Kindern, n. An die Funktionen und Parameter im oben genannten Optimierungssystem werden folgende Forderungen gestellt: u und v sind steigende und strikt konkave Funktionen. ω ist eine steigende und (schwach) konvexe Funktion, und für die Parameter gilt $\beta, \gamma \in (0,1)$. Eltern interessieren sich in diesem Modell ausschließlich für die Rate an überlebenden Kindern ϕ. Die erwartenden Kosten für ein Kind ergeben sich durch $p_n \equiv \phi\delta$, wobei δ den Anteil an Ressourcen beschreibt, welcher in ein Kind investiert wurde. Die obere Grenze der Geburtenrate ist durch $\frac{y}{p_n}$ gegeben.

Es werden folgende Funktionen spezifiziert:

$$
\begin{aligned}
&u(c) = ln\ c\\
&v(\phi n) = ln(\phi n) = ln\ \phi + ln\ n\\
&\omega(d_n) = |n - n_s|\,.
\end{aligned}
$$

Durch Wahl der Betragsfunktion werden zu viele Kinder und zu wenige Kinder im Vergleich zur Norm gleichermaßen bestraft.

5.2 Gleichgewicht ohne Berücksichtigung sozialer Normen

Bevor wir die gleichgewichtige Fertilitätsrate unter Einfluss von sozialen Normen berechnen, betrachten wir den bereits bekannten Fall ohne Berücksichtigung sozialer Normen, wenn $\gamma = 0$ ist.

$$\max_{n\in[0,\frac{y}{p_n}]} V(n) \equiv \beta ln(y - p_n n) + (1-\beta) ln(\phi n). \tag{5.2.1}$$

Die Bedingungen erster Ordnung sind durch folgende Gleichung gegeben:

$$\frac{\partial V(n)}{\partial n} = -\frac{\beta p_n}{y - p_n n} + \frac{1-\beta}{n} = 0. \tag{5.2.2}$$

Umformen nach n ergibt nachstehende gleichgewichtige totale Geburtenrate

$$n^* = \frac{(1-\beta)y}{\phi\delta}. \tag{5.2.3}$$

Da

$$\frac{\partial n^*}{\partial \phi} = -\frac{(1-\beta)\delta y}{p_n^2} < 0, \tag{5.2.4}$$

wirkt sich eine positive Änderung der Überlebenswahrscheinlichkeit von Kindern negativ auf die Fertilitätsrate aus. Grund dafür ist, dass eine Steigerung der Überlebenswahrscheinlichkeit, auch die erwarteten Kosten eines Kindes erhöht, was wiederum zu einer Senkung der Fertilität führt. Interessant ist nun, inwiefern sich diese Änderung auf die netto Geburtenrate, $q = \phi n$, auswirkt. Da $q = \phi n^* = (1-\beta)y/\delta$ und dadurch unabhängig von der Überlebenswahrscheinlichkeit ϕ ist, gibt es keinen Effekt auf die Nettogeburtenrate. Das ist eine sehr erstaunliche Erkenntnis. Obwohl eine positive Änderung der Überlebenswahrscheinlichkeit einen negativen Effekt auf die Geburtenrate hat und damit die Geburtenziffer senkt, gleicht sich die Geburtenziffer aufgrund der erhöhten Überlebenswahrscheinlichkeit ϕ wiederum aus. Die beiden netto Geburtenraten sind somit äquivalent. Dies war auch das Problem von bereits bestehenden Modellen bei der Klärung, warum eine Senkung der Mortalität auch eine Senkung der Nettogeburtenrate bewirkt.

5.3 Gleichgewichte unter Berücksichtigung sozialer Normen

Abhilfe schafft das Einführen von sozialen Normen in das Modell. Der Einfluss von sozialen Normen liefert einen weiteren Anstoß die Geburtenrate zu senken und bringt schließlich die Abnahme der Nettogeburtenrate mit sich. Für $\gamma > 0$ ergeben sich folgende Straffunktionen

$$\omega(d_n) = \begin{cases} (n - n_s), \text{wenn } n \geq n_s \\ (n_s - n)\text{wenn } n < n_s. \end{cases} \tag{5.3.1}$$

Es wird, verglichen zur Norm, zwischen zu vielen und zu wenigen Kindern unterschieden. Somit ergeben sich zwei Nutzenfunktionen: $U_1(n)$, für den Fall $n \geq n_s$ und $U_2(n)$, für $n < n_s$.

$$U_1(n) \equiv V(n) - \gamma(n - n_s) = \beta ln(y - p_n n) + (1-\beta) ln(\phi n) - \gamma(n - n_s)$$
$$U_2(n) \equiv V(n) - \gamma(n_s - n) = \beta ln(y - p_n n) + (1-\beta) ln(\phi n) - \gamma(n_s - n)$$

Darüber hinaus gilt $U_1(n_s) = U_2(n_s)$.

Sei $n_1^* = \arg\max\ U_1(n)$ und $n_2^* = \arg\max\ U_2(n)$. Ableiten der Funktionen nach der Variablen n ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1(n)}{\partial n} &= -\beta \frac{p_n}{y - p_n} + \frac{(1-\beta)}{n} - \gamma \\ &= -\beta p_n n + (1-\beta)(y - p_n n) - \gamma(y - p_n n)n \\ &= \gamma p_n n^2 - (\gamma y + p_n)n + (1-\beta),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_2(n)}{\partial n} &= -\beta \frac{p_n}{y - p_n} + \frac{(1-\beta)}{n} + \gamma \\ &= \gamma p_n n^2 - (\gamma y - p_n)n + (1-\beta).\end{aligned}$$

Durch Nullsetzen der Gleichungen und Anwenden der quadratischen Lösungsformel, ergeben sich die gleichgewichtigen Geburtenraten:

$$\begin{aligned}n_1^* &= \frac{(\gamma y + p_n) - \sqrt{(\gamma y + p_n)^2 - 4(1-\beta)\gamma p_n y}}{2\gamma p_n}, \\ n_2^* &= \frac{(\gamma y - p_n) - \sqrt{(\gamma y - p_n)^2 + 4(1-\beta)\gamma p_n y}}{2\gamma p_n}.\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $n_1^* < n^* < n_2^*$, wobei n^* die gleichgewichtige Geburtenrate ohne Einfluss sozialer Normen ist, siehe Gleichung (5.2.3). Betrachten der Nutzenfunktionen liefert den Beweis. In $U_1(n)$ sinkt der Wert der Bestrafungsfunktion mit fallender Fertilität (n fließt negativ ein). Grund dafür ist, dass Individuen nach der sozialen Norm streben und dadurch ihre Geburtenrate möglichst an diese anpassen wollen und somit senken. Im Gegensatz dazu fällt die Bestrafung in $U_2(n)$ umso geringer aus, desto größer die Geburtenrate ist (n fließt positiv ein). In diesem Fall gilt das gleiche Argument und Individuen steigern die Fertilität um nahe an die soziale Norm zu kommen. Daraus folgt, dass die gleichgewichtige Geburtenrate einmal exzessiv kleiner und einmal exzessiv höher ist als die gleichgewichtige Geburtenrate ohne Norm. Damit n_1^* einen gültigen optimalen Wert für das Optimierungssystem garantiert, muss $n_1^* \geq n_s$ gelten. Wäre dies nicht der Fall, so würde sich eine Abweichung der Norm positiv auf die Nutzenfunktion auswirken, da $n_1^* - n_s < 0$, und das sollte doch insbesondere bestraft werden. Analoge Bedingung wird an n_2^* gestellt und es muss $n_2^* \leq n_s$ gelten.

Haushalte entscheiden sich somit nach folgender Fallunterscheidung:

$$n_i = f(n_s) = \begin{cases} n_1^*, \text{ wenn } n_s \leq n_1^* \\ n_s, \text{ wenn } n_s \in [n_1^*, n_2^*] \\ n_2^*, \text{ wenn } n_s \geq n_2^*. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

Die Zielfunktion der Haushalte ist durch $U(n) = \min \{U_1(n), U_2(n)\}$ gegeben. Es treten 3 Fälle auf: Im ersten Fall gilt $n_s < n_1^* < n_2^*$. Laut der in (5.3.1) definierten Straffunktion ist n_1^* der einzige zulässige optimale Wert, welcher $U(n)$ maximiert. Für alle $n_s \leq n_1^*$ wird n_1^* gewählt. Dies wird in Abbildung 5.1 gezeigt. Es ist ersichtlich, dass n_1^* näher an n_s liegt und weil die Agenten den Abstand zur Norm minimieren wollen, die optimale Wahl ist.

Im zweiten Fall gilt $n_1^* < n_s < n_2^*$, und die Nutzenfunktion wird durch n_s maximiert. Abbildung 5.2 veranschaulicht dies deutlich.

Im dritten Fall gilt $n_1^* < n_2^* < n_s$, und es ergibt sich aus (5.3.1), dass n_2^* der einzige zulässige und optimale Wert für alle $n_s \geq n_2^*$ ist (siehe Abbildung 5.2).

Durch die Einführung von sozialen Normen agieren Haushalte als Konformisten und vergessen ihre eigene Präferenz bezüglich der Fertilitätsrate. Sie handeln wie ihre Kohorte und die gleichgewichtige Fertilitätsrate entfernt sich von der Gleichgewichtsrate ohne Berücksichtigung sozialer Normen. Ausnahme ist der spezielle Fall $n_s = n^*$.

Integriert man nun die in Palivos (2000) definierten sozialen Normen durch die durchschnittliche Geburtenrate der Haushalte, gilt somit $n_s = \overline{n}$, erhält man folgende modifizierte Fallunterscheidung:

$$n_i = f(\overline{n}) = \begin{cases} n_1^*, \text{ wenn } \overline{n} \leq n_1^* \\ \overline{n}, \text{ wenn } \overline{n} \in [n_1^*, n_2^*] \\ n_2^*, \text{ wenn } \overline{n} \geq n_2^*. \end{cases} \tag{5.3.3}$$

5.3.1 Allgemeines Gleichgewicht

Wie in Abschnitt 5.3 besprochen gibt es Interaktionen unter den Haushalten, welche die Entscheidung über die individuelle Fertilität maßgeblich beeinflussen. Welche Geburtenrate von den individuellen Haushalten gewählt wird, hängt von den sozialen Normen im System ab, die durch die durchschnittliche Geburtenrate gegeben sind. Genauso wie in Palivos (2000) betrachten wir ein symmetrisches Nashgleichgewicht $n_i = \overline{n}\ \forall i$. Die allgemeine gleichgewichtige Geburtenrate ist durch

$\overline{n} = f(\overline{n})$ gegeben. Der Funktionswert $f(\overline{n})$ folgt aus (5.3.3). n_2^* ist die hohe und n_1^* die niedrige Fertilitätsrate. Da die gewählte Geburtenrate von der durchschnittlichen Geburtenrate abhängt, ist die Entscheidung eines Konformisten unbestimmt und liegt im Intervall $[n_1^*, n_2^*]$. Welche Geburtenrate schlussendlich gewählt wird, ergibt sich aus der sozialen Norm, die wiederum von der geschichtlichen Vergangenheit der Ökonomie abhängt. Waren Völker in der vorindustriellen Zeit schon vom Aussterben bedroht, so war eine hohe Geburtenrate notwendig, um das schlimmste zu verhindern. Darüber hinaus war auch der ökonomische Wert der Kinderarbeit von Bedeutung. Daraus lässt sich schließen, dass die Bevölkerung eine hohe Geburtenrate anstrebt und dies durch die soziale Norm vorgibt. Es würde somit eine Tendenz zur hohen Fertilitätsrate n_2^* geben.

5.3.2 Überlebensrate und Nettogeburtenrate

Im hohen Gleichgewicht wählen Haushalte im Vergleich zu der durch die soziale Norm definierten Geburtenrate eine geringere Anzahl an Kindern. Dies wird durch Abbildung 5.3 illustriert. Individuen wollen nicht weniger Kinder haben als ihre Kohorte, und das führt zu exzessiver Geburtenziffer im Vergleich zur Geburtenrate n^*, welche sich ohne Einfluss von sozialen Normen ergibt. Unter sonst gleichen Bedingungen reduzieren Familien ihre Fertilität bei Rückgang der Mortalität. Darüber hinaus sinkt natürlich auch die soziale Norm im Zuge der Erhöhung der Überlebenswahrscheinlichkeit. Dies liefert für die Individuen einen weiteren Anstoß die Fertilität zu reduzieren, da sie die von der Norm vorgegebene Geburtenrate anstreben. Das bedeutet, dass es im hohen Gleichgewicht zwei Anreize gibt die Geburtenrate zu senken: Zum einen durch den Anstieg der Überlebenswahrscheinlichkeit der Kinder und zum anderen durch die gesunkene soziale Norm. Durch den letzteren Ansporn, welcher nur im hohen Gleichgewicht auftritt, ist es möglich einen Zusammenhang von sinkender Mortalität und fallender Fertilität zu erklären.

Betrachten der Nutzenfunktion $U_2(n)$ für $n_2^* > n^* = (1-\beta)y/(\phi\delta)$ und Berechnung der Bedingung- erster- Ordnung ergibt

$$-\frac{\beta\phi\delta}{y-\delta q} + \frac{(1-\beta)\phi}{q} = -\gamma. \tag{5.3.4}$$

Dabei ist $q = \phi n$ die Nettogeburtenrate. Durch totales Differenzieren erhält man

$$\left[-\frac{\beta\delta}{y-\delta q} + \frac{1-\beta}{q}\right] d\phi - \left[\frac{\beta\phi\delta^2}{(y-\delta q)^2} + \frac{(1-\beta)\phi}{q^2}\right] dq = 0.$$

Von Interesse ist nun, unter welchen Bedingungen sich eine Änderung der Überlebensrate negativ auf die Nettogeburtenrate auswirkt und somit $dq/d\phi < 0$ ist.

Dafür muss $-\frac{\beta\delta}{y-\delta q}+\frac{1-\beta}{q}<0$ sein. Da der zweite Term immer positive ist, $\beta \in [0,1]$, muss

$$\frac{1-\beta}{q} < \frac{\beta\delta}{y-\delta q} \tag{5.3.5}$$

gelten. Diese Ungleichung existiert für n_2^*. Daraus folgt, dass sich im hohen Gleichgewicht, ein Rückgang der Mortalität nicht nur auf die totale Geburtenrate auswirkt, sondern auch die Nettogeburtenrate senkt. Damit kann ein Umschwung zu kleinerer Familiengröße erklärt werden, unter der Voraussetzung, dass soziale Normen in das System einfließen.

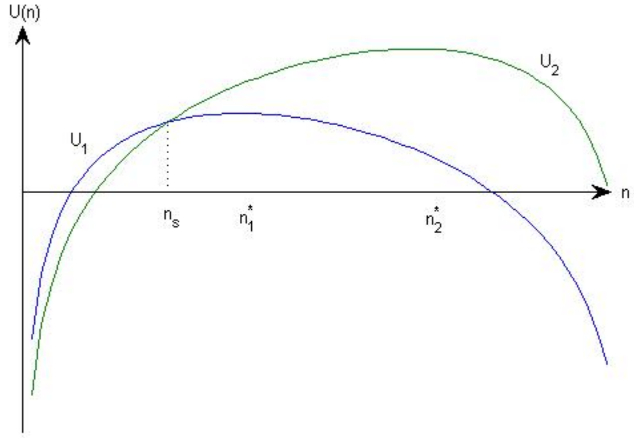

Abbildung 5.1: Gleichgewichtige Fertilität für $n_s \leq n_1^*$
(Quelle: nach Bhattacharya, Chakraborty (2011), S. 340, Fig. 1)

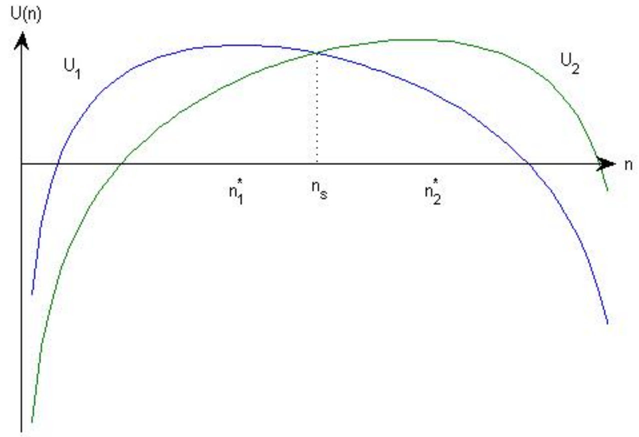

Abbildung 5.2: Gleichgewichtige Fertilität für $n_1^* < n_s < n_2^*$
(Quelle: nach Bhattacharya, Chakraborty (2011), S. 340, Fig. 1)

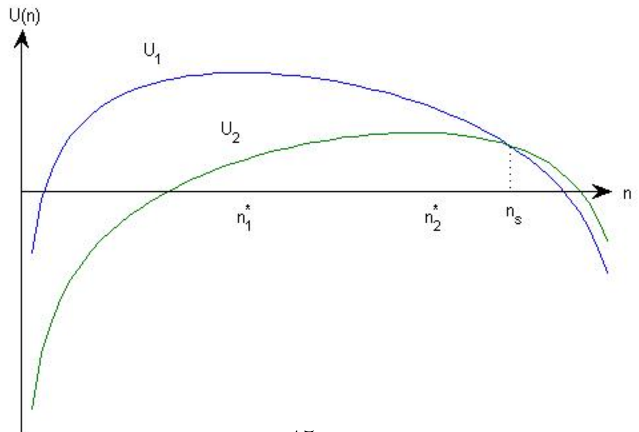

Abbildung 5.3: Gleichgewichtige Fertilität für $n_s \geq n_2^*$
(Quelle: nach Bhattacharya, Chakraborty (2011), S. 340, Fig. 1)

Kapitel 6

Frederic Tournemaine, Christopher Tsoukis (2008) und (2009)

Lange Zeit wurde der ökonomische Nutzen der Individuen nur über Konsum und Kapital berechnet. Die Idee auch die relative Position in der Gesellschaft miteinzubeziehen besteht mittlerweile schon länger, wirft jedoch noch einige Unklarheiten auf. Adam Smith (1982) schreibt in „The Theory of Moral Sentiments“, dass soziale Mechanismen der Kompensation, wie Bewunderung und Ächtung, mehr Einfluss auf das ökonomische Verhalten der Menschen haben, als das Streben nach Verbesserung der Lebensbedingungen. Von Interesse ist, inwiefern sich dieses soziale Denken auf das Wirtschaftswachstum der Gesellschaft auswirkt.

Tournemaine und Tsoukis unterscheiden in ihrem Modell zwischen zwei aus bereits bestehender Literatur entnommenen Definitionen von Statusdenken: zum einen vergleichen sie den Status in Bezug auf den Vermögensanteil des Individuums in Relation zum durchschnittlichen Vermögen der restlichen Gesellschaft und zum anderen den Status als Relation von Konsum und durchschnittlichem Konsum. Die Analyse des Gleichgewichtes und der Wachstumsrate ergibt sehr unterschiedliche Resultate bezüglich der beiden verschiedenen Definitionen von Statusdenken. Betrachtet man die Stellung eines Individuums in der Gesellschaft in Hinblick auf das individuelle Vermögen im Verhältnis zum Durchschnittsvermögen, so wurde gezeigt, dass Aktivitäten, welche zu einer Verbesserung des sozialen Status führen, auch das Wirtschaftswachstum steigern. Im Gegensatz dazu hat die durch letztere Definition erforderte Erhöhung des Konsums lediglich einen Einfluss auf die Dynamik nicht jedoch auf das Gleichgewicht der dezentralen Wirtschaft. Bei Änderung zu endogenem Angebot an Arbeitskräften bringt das Streben nach höherem Status jedoch auch den Anreiz mehr Zeit in Arbeit zu investieren und damit auch eine Erhöhung des marginalen Produktes und der Wachstumsrate mit sich.

Gegenwärtig existieren noch wenige Untersuchungen über die Interaktion der beiden unterschiedlichen Definitionen von Statusvergleich. Frederic Tournemaine und Christopher Tsoukis (2008) haben ein Modell aufgestellt, welches beide Definitionen von sozialem Statusvergleich berücksichtigt. Dieses Statusdenken beeinflusst das gegenwärtige und zukünftige Konsumverhalten der Individuen. Der Artikel soll zeigen, dass sich diese intertemporalen Präferenzen auf das Wachstum auswirken.

6.1 Das Modell

Die Autoren Tournemaine und Tsoukis wählen ein endogenes Wachstumsmodell nach Romer (1986). Es wird ein repräsentatives Unternehmen betrachtet, dessen Produktion zum Zeitpunkt $t \in [0, \infty]$ durch folgende Cobb Douglas Produktionsfunktion beschrieben wird

$$y_t = A(k_t)^{\alpha}(B_t l_t)^{1-\alpha}. \tag{6.1.1}$$

Der damit produzierte Output y_t wird entweder konsumiert, c_t, oder investiert. Im Falle der Investition wird neues Kapital k_t für das Unternehmen generiert. Die Variable l_t entspricht der Quantität der verrichteten Arbeit. Weiters gilt für die Substitutionselastizität $0 < \alpha < 1$ und den Parameter $A > 0$. Der zur Verfügung stehende Wissensstand des Unternehmens wird mit $B_t \equiv k_t$ bezeichnet, da Investition von Kapital zu Weiterentwicklung des Know-hows führt.

Eine Menge von unendlich lebenden Individuen $[0, 1]$ haben eine Anfangsausstattung von $k_0 > 0$ Einheiten an Kapital und eine Einheit an Zeit, welche sich in $1 - l_t$ Freizeit und l_t Arbeit gliedert. Der Nutzen der Individuen setzt sich aus dem Level an Konsum, Arbeit und Vermögen sowie dem sozialen Status des Individuums zusammen. Der soziale Status eines Individuums wird über das Verhältnis des individuellen Vermögens k_t zum durchschnittlichen Vermögen $\overline{k_t}$ und über das Verhältnis des individuellen Konsums c_t zum durchschnittlichen Konsum $\overline{c_t}$ gemessen. Die Präferenzen zum Zeitpunkt t sind durch folgende Funktion gegeben

$$U = \int_0^{\infty} \frac{\left[(c_t)\,\Psi\left(\frac{k_t}{\overline{k_t}}\right)^{\delta}\Omega\left(\frac{c_t}{\overline{c_t}}\right)^{\gamma}\right]^{1-\sigma} exp\left[-(1-\sigma)f\left(l_t\right)^{\phi}\right]}{1-\sigma} e^{-\rho t}dt, \tag{6.1.2}$$

wobei $\delta > 0, \gamma > 0, \phi > 0, \rho > 0$ die Diskontierungsfaktoren sind, und $\sigma > 1$ die Inverse der Substitutionselastizität ist. Das individuelle Statusdenken fließt durch die streng monoton steigenden Funktionen $\Psi(\frac{k_t}{\overline{k_t}})$ und $\Omega\left(\frac{c_t}{\overline{c_t}}\right)$ ein. Umso größer der jeweilige Ausdruck ist, desto größer ist die Präferenz des Individuums bezüglich seines Status. Die Exponentialfunktion $exp\left[-(1-\sigma)f(l_t)^{\phi}\right]$ beschreibt den Nutzenverlust des Individuums abhängig von der investierten Arbeitszeit l_t. Wird sehr viel gearbeitet, wirkt sich dies auch negativ auf den individuellen Nutzen der Individuen aus, der auch vom Level an Freizeit abhängt. Für $f(\cdot)$ wird somit eine streng monoton steigend und streng konvexe Funktion gewählt. Diese Funktion schließt ebenfalls das Auftreten des Substitutions- und Einkommenseffektes bei einer Änderung des Reallohnes aus. Ferner kann im Gleichgewicht ein konstantes Arbeitsangebot gewählt werden.

Die Nutzenfunktion (6.1.2) umfasst sowohl den speziellen Fall von konsum- und vermögensabhängigen Statusdenken als auch die bereits existierende Funktion, in welcher jeweils nur einer der zwei Parameter einfließt. Bei $\gamma = 0$ hängt der soziale Status ausschließlich vom Konsum ab, und bei $\delta = 0$ fließt umgekehrt lediglich das Vermögen des Individuums ein.

Das Optimierungssystem unterliegt folgender Restriktion:

$$y_t = c_t + \dot{k}_t. \tag{6.1.3}$$

Der Output der Firma wird konsumiert oder investiert und dadurch neues Kapital generiert.

6.2 Nutzenmaximierung und Gleichgewichte für homogene Individuen

Ziel der Individuen ist es den optimalen Nutzen zu generieren. Hierfür wird die Funktion (6.1.2) unter (6.1.3) maximiert, indem individuell Konsum, Arbeit und Vermögen gewählt werden. Um das dynamische Optimierungssystem zu lösen wird das Pontryagin'sches Maximumprinzip angewendet. Es existieren zwei Kontrollvariablen Konsum, c_t, und Arbeit, l_t, und eine Zustandsvariable Kapital, k_t. Die "current value„ Hamiltonfunktion lautet

$$\hat{H} = \frac{\left[(c_t)\, \Psi \left(\frac{k_t}{\overline{k}_t} \right)^{\delta} \Omega \left(\frac{c_t}{\overline{c}_t} \right)^{\gamma} \right]^{1-\sigma} exp \left[-(1-\sigma) f\left(l_t\right)^{\phi} \right]}{1-\sigma} + \lambda_t \left[A \left(k_t\right)^{\alpha} \left(B_t l_t\right)^{1-\alpha} - c_t \right],$$

wobei λ_t die Kozustandsvariable zu (6.1.3) ist.

Das System enthält drei Arten von externen Effekten. Zum einen ergeben sich 2 Externalitäten durch den Einfluss des Statusdenkens durch Vergleich von Konsum und Vermögen, und zum anderen liefert das durch Investition lukrierte Kapital einen Zuwachs an Wissen, der sich natürlich positiv auswirkt, aber nicht im Modell internalisiert wird.

Auf Grund der Eigenschaft der Symmetrie der Individuen gilt $k_t = \overline{k}_t$ und $c_t = \overline{c}_t$, sowie $B_t \equiv k_t$ zu jedem Zeitpunkt im Gleichgewicht. Daraus folgt $\Psi(\frac{k_t}{\overline{k}_t}) = \Psi(1)$

und $\Omega(\frac{c_t}{\bar{c}_t}) = \Omega(1)$. Weiters werden die Formulierungen $\psi = \frac{\Psi'(1)}{\Psi(1)}$ und $\omega = \frac{\Omega'(1)}{\Omega(1)}$ verwendet, wobei $\Psi' = \frac{d\Psi}{dk_t}$ und $\Omega' = \frac{d\Omega}{dc_t}$. Die Funktionswerte von ψ und ω geben das Statusdenken der Individuen wider, umso größer der Wert ist, desto wichtiger ist die relative Position in der Gesellschaft.

Laut den Berechnungen in Appendix B.1.1 ergeben sich für die Bedingungen erster Ordnung folgende Gleichungen:

$$\frac{\left[(c_t)\,\Psi\,(1)^{\delta}\,\Omega\,(1)^{\gamma}\right]^{1-\sigma} exp\left[-(1-\sigma)f\,(l_t)^{\phi}\right](1+\gamma\omega)}{c_t} = \lambda_t \tag{6.2.1}$$

$$\phi f'(l_t) = \frac{Ak_t(1-\alpha)l_t^{-\alpha}(1+\gamma\omega)}{c_t f(l_t)^{\phi-1}}, \tag{6.2.2}$$

$$A\alpha l_t^{1-\alpha} - [\rho - \frac{c_t}{k_t}\frac{\delta\psi}{1+\gamma\omega}] = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}, \tag{6.2.3}$$

und die Transversalitätsbedingung $lim_{\lambda_t \longrightarrow \infty}\lambda_t k_t e^{-\rho t}{=}0$.

Das durch (6.1.3), (6.2.1)-(6.2.3) aufgestellte Gleichungssystem wird in Appendix B.1.2 gelöst und ergibt folgende Proposition:

Proposition 6.2.1. *Das Gleichgewicht wird durch ein konstantes Arbeitsangebot l_t^* definiert, welches nachstehende Gleichung erfüllt:*

$$\frac{(1-\alpha)A(l_t^*)^{-\alpha}}{\phi f'(l_t^*)f(l_t^*)^{1-\phi}}[\sigma(1+\gamma\omega)+\delta\psi] = (\sigma-\alpha)A(l_t^*)^{1-\alpha}+\rho. \tag{6.2.4}$$

Die entsprechende Wachstumsrate lautet

$$g^* = \frac{(1-\alpha)A(l_t^*)^{-\alpha}\delta\gamma[\phi f'(l_t^*)f(l_t^*)^{\phi-1}]^{-1} + \alpha A(l_t^*)^{1-\alpha} - \rho}{\sigma}. \tag{6.2.5}$$

(Tournemaine, Tsoukis (2008), S. 315, Proposition 1)

Durch Gleichung (6.2.4) ist ersichtlich, dass erhöhte Statusmotive bezüglich Konsum, ω, und Vermögen, ψ, eine positive Wirkung auf das Arbeitsangebot haben. Wenn mehr gearbeitet wird, wird auch mehr Output produziert, und Individuen können mehr konsumieren oder investieren. Durch erhöhten Konsum oder Investition verbessert sich wiederum der individuelle Status.

Um die Effekte von sozialem Status auf das Wachstum zu verstehen, wird zwischen endogenem und exogenem Arbeitsangebot unterschieden. Zunächst betrachten wir den speziellen Fall von festem Arbeitsangebot.

Proposition 6.2.2. *Unter der Annahme von festem Arbeitsangebot ergibt sich folgende Wachstumsrate:*

$$g = \frac{A[\delta\psi + \alpha(1+\gamma\omega)] - \rho(1+\gamma\omega)}{\sigma(1+\gamma\omega) + \delta\psi}. \tag{6.2.6}$$

(Tournemaine, Tsoukis (2008), S. 315, Proposition 2)

Die Berechnungen sind dem Appendix B.1.3 zu entnehmen.

Interessant ist nun, inwiefern sich das Statusdenken der Individuen auf die Wachstumsrate auswirkt. Dazu werden nach Futugami und Shibata (1998) Parameter $\theta = \delta\psi$ und $\epsilon = \gamma\omega$ definiert, welche die Stärke der Statuspräferenz angeben. Somit ergibt sich

$$g = \frac{A[\theta + \alpha(1+\epsilon)] - \rho(1+\epsilon)}{\sigma(1+\epsilon) + \theta}. \tag{6.2.7}$$

Wird zwischen den beiden Fällen $\epsilon = 0$ und $\theta = 0$ unterschieden, ergeben sich folgende Resultate: Unter der Voraussetzung, dass nur das vermögensabhängige Statusdenken einwirkt, also $\epsilon = 0$ ist, ergibt sich für die Wachstumsrate

$$g = \frac{A(\theta + \alpha) - \rho}{\sigma + \theta}.$$

Damit folgt

$$\frac{dg}{d\theta} = \frac{A(\sigma + \theta) - [A(\theta + \alpha) - \rho]}{(\sigma + \theta)^2} > 0$$

für die am Anfang definierten Parameter $\sigma > 1$ und $0 < \alpha < 1$. Das heißt, das soziale Statusdenken der Individuen bezüglich ihrem Vermögen wirkt sich auf das Wachstum positiv aus und um so stärker die Statuspräferenz ist, desto höher ist das Wachstum der Ökonomie.

Fließt andererseits ausschließlich das konsumorientierte Statusdenken in die Berechnungen ein, gilt demnach $\theta = 0$, so folgt für die Wachstumsrate

$$g = \frac{A\alpha - \rho}{\sigma}.$$

Betrachtet man die Wachstumsrate bezüglich einer Änderung des Parameters ϵ

$$\frac{dg}{d\epsilon} = 0.$$

Daraus folgt, dass in diesem Fall das vom Konsum abhängige Statusdenken keinen Einfluss auf das Wachstum hat.

Tournemaine und Tsoukis (2008) fassen diese Erkenntnisse in nachstehender Proposition zusammen.

Korollar 6.2.1. *(a.) Hängt das Statusdenken lediglich vom Vermögen der Individuen, nicht jedoch vom Konsum ($\gamma = 0$) ab, wird das Wachstum gesteigert.*
(b.) Hängt das Statusdenken lediglich vom Konsum der Individuen, nicht jedoch vom Vermögen ($\delta = 0$) ab, wird das Wachstum nicht beeinflusst.
(c.) Im Falle der Existenz von beiden Arten des Statusdenkens, senkt das konsumabhängige Statusdenken das Wachstum. (Tournemaine, Tsoukis (2008), S. 315, Korollar 1)

Wie bereits erwähnt, sind die ersten beiden Punkte Standard und wurden schon in bestehenden Artikeln diskutiert. Zum Beispiel beschreiben Futugami und Shibata (1998) die Auswirkungen der sozialen Position eines Individuums bezüglich des relativen Vermögens auf den Nutzen der Individuen. Ergebnis ihrer Untersuchungen wie auch in jenem Artikel ist, dass mit steigender Präferenz bezüglich dem Vermögensstatus auch die ökonomische Wachstumsrate steigt. Ebenso wurde in einem Artikel von Alonso-Carrera et al. (2004) der Einfluss des sozialen Denkens bezüglich des individuellen Konsums auf den Nutzen erforscht. Im Gegensatz zu dem Modell von Tournemaine und Tsoukis (2008) unterscheiden diese Autoren noch zusätzlich zwischen dem individuellen vergangenen Konsum und dem vergangenen durchschnittlichen Konsum als Referenzparameter.

Um Korollar 6.2.1 nun besser zu verstehen hilft es Gleichung (6.2.3) zu betrachten. Zunächst wird zwischen den oben genannten Fällen unterschieden: Fließt nur das konsumabhängige Statusdenken in die Nutzenfunktion ein, gilt demnach $\delta = 0$, so verschwindet der letzte Term in $\rho - \frac{c_t}{k_t} \frac{\delta\psi}{1+\gamma\omega}$. Es gibt somit keinen Einfluss des konsumabhängigen Statusdenkens auf die Ertragsrate des Konsums (siehe Gleichung (6.2.3), sehr wohl aber auf den marginalen Nutzen von Konsum und somit auf den Preis relativ zum marginalen Nutzen von Vermögen, siehe λ_t aus Gleichung (6.2.1). Daraus folgt Punkt (b.) aus dem oben genannten Korollar. Umgekehrt hat das vermögensabhängige Statusdenken, $\delta > 0$, einen Einfluss auf das Wachstum des Gleichgewichtes. Der Statusvergleich in Hinblick auf Vermögen und Konsum beeinflusst das Entscheidungsverhalten der Individuen bezüglich ihrem gegenwärtigen und zukünftigen Konsumverhalten. Betrachtet man wiederum Gleichung (6.2.3), so ist ersichtlich, dass erhöhter Einfluss durch die vermögensabhängige Variable die Individuen in ihrem Konsumverhalten „geduldig“ macht. Das heißt es wird nicht gleich alles konsumiert und Vermögen angehäuft. Dies führt zu einer Steigerung des Wachstums (siehe Korollar 6.2.1 (a.)). Im Gegensatz dazu macht ein erhöhter Einfluss des Statusvergleichs bezüglich Konsum die Individuen „ungeduldig“ in ihrem Konsumverhalten und veranlasst sie gegenwärtig zu konsumieren, siehe Korollar 6.2.1 (c.). Punkt (c.) spiegelt die Interaktion zwischen konsum- und vermögensabghängigem Statusdenken wieder und bringt somit eine interessante neue Erkenntnis mit sich. In Präsenz von beiden Formen des Statusdenkens wirkt sich der konsumabhängige Statusvergleich negativ auf das Wachstum aus.

Nun wird der Fall von flexiblem Arbeitsangebot untersucht. Individuen können eigenständig über ihr Arbeitspensum entscheiden. Unter dieser Endogenisierung des Arbeitsangebotes, bringt das Statusdenken 2 Effekte mit sich: Erstens werden die intertemporalen Präferenzen der Individuen beeinflusst. Das heißt es wirkt sich auf das gegenwärtige und zukünftige Konsumverhalten der Individuen aus. Zweitens gibt es natürlich einen Effekt auf das Arbeitsangebot. Mit steigendem Statusdenken erhöht sich auch das Arbeitspensum der Individuen. Tournemaine und Tsoukis folgern nachstehende Proposition:

Proposition 6.2.3. *(a.) Erhöhtes Statusdenken bezüglich des relativen Vermögens der Individuen hat einen positiven Effekt auf das Wachstum. Sowohl der Effekt auf die intertemporalen Präferenzen, als auch der Effekt auf das Arbeitsangebot sind positiv.*
(b.) Erhöhtes Statusdenken bezüglich des relativen Konsums bringt auf der einen Seite einen negativen Effekt auf die intertemporalen Präferenzen, Individuen werden „ungeduldig“, auf der anderen Seite wird das Arbeitsangebot erhöht und wirkt sich somit positiv aus. (Tournemaine, Tsoukis (2008), S. 316, Proposition 3)

Der Einfluss von sozialem Status auf den Nutzen der Individuen, Unterscheidung von gegenwärtigem und zukünftigen Konsum und endogenes Arbeitsangebot ergeben folgendes Ergebnis: Statusmotive im Konsum erhöhen den gegenwärtigen Konsum, es gibt somit einen negativen Effekt auf die intertemporalen Präferenzen, wobei Statusmotive in Vermögen den zukünftigen Konsum verstärken und somit das Wirtschaftswachstum begünstigen. Beide Motive haben positiven Einfluss auf das Arbeitspensum der Individuen.

Betrachtet man nun Kinder als Konsumgut, so lässt sich folgern, dass Statusvergleich in Bezug auf den durchschnittlichen Konsum und somit auch hinsichtlich Kinder alleine das Wirtschaftswachstum nicht beeinflusst, sofern exogenes Arbeitsangebot angenommen wird. Im Falle von endogenem Arbeitsangebot ist es davon abhängig, ob der durch Einfluss sozialer Normen entstehende negative Effekt auf die Wachstumsrate oder der positive Effekt durch steigendes Arbeitsangebot überwiegt. Existiert nun Statusvergleich durch Vermögen und Konsum, wirkt sich der Zweite negativ auf das Wachstum aus.

6.2.1 Beispiel

In den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels, wurde ein Modell für homogene Individuen vorgestellt, welches ich nun mittels konkreter Funktionen illustrieren möchte. Die Statusfunktionen seien durch

$$\Psi(k_t, \overline{k}_t) = k_t^{1-\delta} \left(\frac{k_t}{\overline{k}_t}\right)^{\delta} = k_t \overline{k}_t^{-\delta} \tag{6.2.8}$$

und

$$\Omega(c_t, \overline{c}_t) = c_t^{1-\gamma} \left(\frac{c_t}{\overline{c}_t}\right)^{\gamma} = c_t \overline{c}_t^{-\gamma} \tag{6.2.9}$$

gegeben. Diese Funktionen wurden aus dem Artikel von Fisher (2003) entnommen. Der Parameter γ beschreibt dabei den „Grad der Bewusstheit“. $\gamma = 0$ bedeutet, dass sich Individuen nicht mit dem Durchschnitt vergleichen und nur das individuelle Vermögen (Konsum) von Bedeutung ist, und $\gamma = 1$ heißt, dass Individuen ausschließlich am Status interessiert sind.

Weiters gilt : $f(l_t) = l_t$.

Die Nutzenfunktion dieses Systems lautet

$$U = \int_0^{\infty} \frac{\left[(c_t)\left(k_t \overline{k}_t^{-\delta}\right)\left(c_t \overline{c}_t^{-\gamma}\right)\right]^{1-\sigma} exp\left[-(1-\sigma) l_t^{\phi}\right]}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt, \tag{6.2.10}$$

und daraus ergibt sich folgende “current value„ Hamiltonfunktion

$$\hat{H} = \frac{\left[(c_t)\left(k_t \overline{k}_t^{-\delta}\right)\left(c_t \overline{c}_t^{-\gamma}\right)\right]^{1-\sigma} exp\left[-(1-\sigma) l_t^{\phi}\right]}{1-\sigma} + \lambda_t \left[A\left(k_t\right)^{\alpha}\left(B_t l_t\right)^{1-\alpha} - c_t\right],$$

Budgetbeschränkung und Produktionsgleichung sind analog wie in Abschnitt 6.1 und 6.2 (siehe Gleichung (6.1.1) und (6.1.3)). Nun soll der Nutzen der Individuen maximiert werden und es ergibt sich ein Optimierungssystem: (6.2.9) unter (6.1.3), das wiederum mittels dem Pontryagin'sches Maximumprinzip berechnet werden kann. Berechnungen sind dem Appendix B.1.4 zu entnehmen. Es resultieren folgende Bedingungen erster Ordnung

$$k_t^{(1-\delta)(1-\sigma)} 2 c_t^{(2-\gamma)(1-\sigma)-1} exp\left[-(1-\sigma) l_t^{\phi}\right] = \lambda_t, \tag{6.2.11}$$

$$\frac{\phi l_t^{\phi-1} c_t}{2} = A k_t (1-\alpha) l_t^{-\alpha}, \tag{6.2.12}$$

$$\frac{c_t}{2k_t} + A\alpha l_t^{1-\alpha} = \rho - \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda}, \tag{6.2.13}$$

und die Transversalitätsbedingung $lim_{\lambda_t \longrightarrow \infty} \lambda_t k_t e^{-\rho t}{=}0$. Dabei gelten die Eigenschaften der Symmetrie: $k_t = \overline{k}_t$ und $c_t = \overline{c}_t$, sowie $B_t \equiv k_t$ zu jedem Zeitpunkt im Gleichgewicht.

Das durch (6.2.10)- (6.2.12) und (6.1.3) entstandene Gleichungssystem wird in Appendix B.1.5 gelöst und es ergibt sich nachstehendes Gleichgewicht.

$$-(5-2\delta-2\gamma-\frac{2}{(1-\sigma)})\frac{A(1-\alpha)(l^*)^{-\alpha}}{\phi(l^*)^{\phi-1}} = -(3-\delta-\gamma-\frac{1}{(1-\sigma)}-\alpha)A(l^*)^{1-\alpha}+\rho. \tag{6.2.14}$$

Wie wirken sich nun Statusmotive auf das Arbeitsangebot der Individuen aus? Durch Ableiten des Gleichgewichtes nach den Parametern δ und γ erhält man

$$\left[\underbrace{(-5+2\delta+2\gamma+\frac{2}{1-\sigma})}_{<0}\frac{A(1-\alpha)}{\phi}(1-\phi-\alpha)(l^*)^{-\phi-\alpha}+\underbrace{(3-\delta-\gamma-\frac{1}{1-\sigma}-\alpha)}_{>0}A(1-\alpha)(l^*)^{-\alpha}\right]$$
$$\times\frac{\partial l^*}{\partial\delta(\gamma)} = A(l^*)^{1-\alpha}-\frac{2A(1-\alpha)(l^*)^{1-\phi-\alpha}}{\phi}.$$

Unter der Bedingung, dass $1-\alpha<\phi$ und $\frac{1-\alpha}{\phi(l^*)^{\phi}}<0.5$ folgt $\frac{\partial l^*}{\partial\delta(\gamma)}>0$. Was bedeutet, dass mit steigendem Statusmotiv auch das Arbeitsangebot steigt.

Die Wachstumsrate gemäß Appendix B.1.6 lautet

$$\frac{(1-\sigma)(A(1-\alpha)(l^*)^{-\alpha}+A\alpha(l^*)^{-\alpha+\phi}\phi-\rho\phi(l^*)^{\phi-1})}{((1-\sigma)(-3+\delta+\gamma)+1)\,\phi(l^*)^{\phi-1}} = g. \tag{6.2.15}$$

Die Ableitung der Wachstumsrate nach den Parametern $\delta(\gamma)$ ergibt kein eindeutiges Ergebnis (siehe Appendix B.1.6). Abhängig von den Parameterwerten kann sich eine Steigerung des Statusmotives positiv oder negativ auf das Wachstum auswirken.

Betrachten der Wachstumsrate bei fixem Arbeitsangebot $l_t=1$ ergibt

$$\frac{(1-\sigma)(A+2A\alpha-2\rho)}{2(-2.5+\delta+\gamma)(1-\sigma)+2} = g. \tag{6.2.16}$$

Durch Ableiten dieser Funktion erhält man

$$\frac{-(1-\sigma)(A+2A\alpha-2\rho)2(1-\sigma)}{[2(-2.5+\delta+\gamma)(1-\sigma)+2]^2} = \frac{\partial g}{\partial\delta(\gamma)}. \tag{6.2.17}$$

Die Berechnungen dieser Gleichungen sind dem Appendix B.1.6 zu entnehmen. Unter der Voraussetzung, dass $A(1-2\alpha)<2\rho$ ergibt sich ein positiver Zusammenhang von Wachstumsrate und Statusmotiv.

6.3 Nutzenmaximierung und Gleichgewichte für heterogene Individuen

In diesem Abschnitt möchte ich das bereits vorgestellte Modell für heterogene Agenten erweitern und betrachte dazu Tournemaine und Tsoukis (2009). Die Autoren untersuchen in diesem Artikel den Einfluss von sozialem Status bezüglich dem relativen Konsum eines Individuums. Unterschied zu den bisherigen Modellen ist die Heterogenität der Individuen und, dass sich Individuen nicht unbedingt nur am durchschnittlichen Konsum der Gesellschaft messen, sondern an einem bestimmten Referenzwert, der einen differenzierten Statuseffekt mit sich bringt. Eine Änderung im relativen Status beeinflusst die Individuen nun unterschiedlich. Abhängig von der sozialen Position in der Gesellschaft ($\frac{c_{it}}{\bar{c}_{it}}$) steigt der Nutzen der Individuen schneller als der relative Status oder langsamer.

Das Modell ist ähnlich wie in Abschnitt 6.1 dieses Kapitels, wobei lediglich das Statusdenken bezüglich Konsum einfließt. Es wird außerdem zwischen zwei Gruppen von Individuen unterschieden: Gruppe 1 ist besser gebildet als Gruppe 2. Dies wurde durch eine höhere Technologie, $A_1 \geq A_2$, modelliert und garantiert Einkommensungleichheit in dem Modell. Jedes Individuum ist mit $k_{i0} > 0$ Kapital und T Einheiten an Arbeit ausgestattet.

Die modifizierte Produktionsfunktion lautet

$$y_{it} = A_i(k_{it})^{\alpha}(k_t l_{it})^{1-\alpha}, \tag{6.3.1}$$

wobei $0 < \alpha < 1$ und $A_i > 0$. Dieser Output kann wiederum konsumiert, c_{it}, oder investiert und damit neues Kapital, k_{it}, generiert werden. $k_t \equiv \beta k_{1t} + (1-\beta)k_{2t}$ beschreibt die Grundausstattung an Kapital, dabei entspricht β der Größe der Gruppe 1 und $1-\beta$ ist die Größe der Gruppe 2. l_{it} modelliert die verübte Arbeit eines Individuums in Gruppe i.

Die Budgetbeschränkung ist durch

$$y_{it} = c_{it} + \dot{k}_{it} \tag{6.3.2}$$

gegeben.

Um die Berechnungen ein wenig zu vereinfachen, verwenden Tournemaine und Tsoukis (2009) die logarithmierte Nutzenfunktion und erhalten

$$U_i = \int_0^{\infty} [lnc_{it} + ln(\Psi(c_{it}/\overline{c_{it}})) + \delta(T - l_{it})]e^{-\rho t}dt, \tag{6.3.3}$$

wobei $\delta > 0$ und $\rho > 0$ die Diskontierungsfaktoren sind. Durch die Funktion $\Psi(\cdot)$ fließt das individuelle Statusdenken der Individuen ein. Eigenschaft der Heterogenität ist unter anderem auch differenziertes Statusdenken. Individuen messen sich nicht unbedingt nur mehr am Durchschnitt der Ökonomie (siehe Abschnitt 6.2), der Referenzwert ist nun durch

$$\overline{c_{it}} = (c_{1t})^{\gamma_i}(c_{2t})^{1-\gamma_i}, \tag{6.3.4}$$

gegeben, wobei $0 \leq \gamma_i \leq 1$ ist. Abhängig von dem Parameter γ_i ist der individuelle Ehrgeiz bezüglich Konsum hoch oder gering. Für niedrige Werte von γ_1 ist die Ambition der gut gebildeten Individuen der Gruppe 1 niedrig, da sie sich vorwiegend mit den schlechter gebildeten Individuen vergleichen und dies keinen Ansporn für sie bringt. Messen sich hingegen Individuen der Gruppe 2 hauptsächlich mit jenen der Gruppe 1, das ist für hohe Werte von γ_2 der Fall, so gibt es einen Großen individuellen Anreiz.

Die Statusfunktion ist folgendermaßen definiert:

$$\Psi(\frac{c_{it}}{\overline{c_{it}}}) = (\frac{c_{it}}{\overline{c_{it}}})^{1+\frac{\phi}{2}ln(c_{it}/\overline{c_{it}})}. \tag{6.3.5}$$

$\phi < 1$ ist ein konstanter Parameter, welcher die Konkavität der Funktionen gewährleistet. Höherer Status $(\frac{c_{it}}{\overline{c_{it}}})$ der Individuen soll mit größerem Nutzen belohnt werden und darum gilt $1 + \frac{\phi}{2}ln(c_{it}/\overline{c_{it}}) > 0$.

Es wird zwischen $\phi < 0$ (konkave Statusfunktion) und $\phi > 0$ (konvexe Statusfunktion) unterschieden, wobei A_1 und A_2 nahe beieinander liegen. Ist $\phi > 0$, so steigt der Nutzen der Individuen umso schneller, je mehr der individuelle Konsum den Referenzwert übersteigt. Das heißt umso mehr Status erlangt wird, desto besser ist es für die Individuen und desto schneller steigt der Nutzen bezüglich dem relativen Status. In diesem Fall steigt die Nutzenfunktion schneller als die relative Position bezüglich Konsum in der Gesellschaft, und Individuen erhalten „Gewinn durch Status„. Im Gegensatz dazu wirkt sich eine Erhöhung des Status für $\phi < 0$, für Werte unter dem Referenzwert, stärker auf den Nutzen aus. Mit anderen Worten, steigt die Nutzenfunktion für Werte unter 1 schneller als für Werte über 1, und Status wird schneller verloren als relative soziale Stellung des Individuums gewonnen. Die Autoren nennen dies auch den „Schmerz durch den Verlust des Status“ und durch empirische Studien motiviert, wird vorwiegend dieser wahrscheinlichere Fall der Statusfunktion betrachtet. In Abbildung 6.1 werden diese Fälle dargestellt. $\phi > 0$ liefert eine konvexe und $\phi < 0$ eine konkave Nutzenfunktion.

Im Falle von heterogenen Individuen, $c_{1t} \neq c_{2t}$, gibt es somit einen differenzierten Statuseffekt. Abhängig vom relativen Konsum der Individuen, wirkt sich eine Änderung des Status positiv oder negativ auf den Nutzen aus.

Betrachtet man nun den Einfluss von Statusdenken wenn $\phi = 0$, so ergibt sich $\Psi(\frac{c_{it}}{\overline{c_{it}}}) = \frac{c_{it}}{\overline{c_{it}}}$. Ändert sich nun der relative Status, dann wirkt sich dies auf den Nutzen aller Individuen gleichermaßen aus, egal welche gesellschaftliche Position sie zu diesem Zeitpunkt haben.

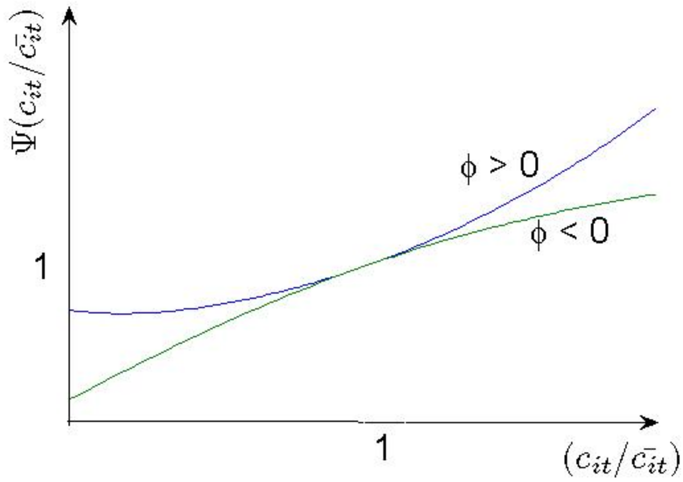

Abbildung 6.1: Statusfunktion
(Quelle: nach Tournemaine, Tsoukis (2009), S. 288, Fig. 1)

Die speziellen Fälle $A_1 = A_2$ und $\gamma_1 = \gamma_2$, was bedeutet, dass Individuen identisch sind, oder $\gamma_1 = 1$ und $\gamma_2 = 0$, das heißt Individuen vergleichen sich nur innerhalb der eigenen Gruppe, wurden bereits in Abschnitt 6.2 diskutiert.

Das durch (6.3.1)- (6.3.3) entstehende Optimierungssystem lässt sich mit der Methode von Hamilton lösen.

Die „current value" Hamiltonfunktion für das System lautet

$$H = lnc_{it} + ln(\Psi(c_{it}/\overline{c_{it}})) + \delta(T - l_{it}) + \lambda_{it}[A_i(k_{it})^{\alpha}(k_t l_{it})^{1-\alpha} - c_{it}]. \quad (6.3.6)$$

Die Bedingungen Erster Ordnung ergeben sich laut den Berechnungen aus Appendix B.2.1:

$$\lambda_{it} = \frac{1}{c_{it}}(1 + \psi_i), \quad (6.3.7)$$

$$\delta = \frac{(1-\alpha)(1+\psi_1)y_{it}}{l_{it}c_{it}}, \quad (6.3.8)$$

$$\rho = \frac{\alpha y_{it}}{k_{it}} + \frac{\dot{\lambda}_{it}}{\lambda_{it}}, \quad (6.3.9)$$

und der Transversalitätsbedingung $lim_{\lambda_t \longrightarrow \infty} \lambda_{it} k_{it} e^{-\rho t}{=}0$.

Für die Berechnungen gilt folgende Substitution

$$\psi_i = \frac{c_{it}}{\overline{c}_{it}} \frac{\partial \Psi(c_{it}/\overline{c}_{it})/\partial(c_{it}/\overline{c}_{it})}{\Psi(c_{it}/\overline{c}_{it})} \tag{6.3.10}$$

$$= 1 + \phi ln(\frac{c_{it}}{\overline{c}_{it}}). \tag{6.3.11}$$

Diese Elastizität der Statusfunktion misst den Grad des Statusdenkens der Individuen. Ist der Funktionswert hoch, so ist auch das Statusmotiv sehr stark, ist der Wert hingegen gering, so interessieren sich die Individuen auch nur geringfügig für ihren sozialen Status in der Gesellschaft.

Eigenschaft des stabilen Gleichgewichtes ist, dass die Wachstumsrate für alle Variablen der beiden Gruppen gleich sind. Sei nun g die Wachstumsrate von Kapital, Konsum und Output.

Durch Logarithmieren und Ableiten der Gleichung (6.3.7) nach der Zeit t erhält man

$$-\frac{\dot{c}_t}{c_t} = -g = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}.$$

Der relative Konsum und somit auch die Elastizität ψ_i, sowie das Arbeitsangebot l_{it} sind konstant im Gleichgewicht.

Umformen der Gleichung (6.3.9) ergibt

$$\frac{y_{it}}{k_{it}} = \frac{g + \rho}{\alpha}. \tag{6.3.12}$$

Unter der Verwendung der Budgetbeschränkung (6.3.2) und dividieren durch k_{it} und anschließendem Kombinieren mit (6.3.12) erhält man

$$\frac{c_{it}}{k_{it}} = \frac{(1-\alpha)g + \rho}{\alpha}. \tag{6.3.13}$$

Kombinieren von (6.3.12) und (6.3.13) ergibt

$$\frac{y_{it}}{c_{it}} = \frac{g + \rho}{(1-\alpha)g + \rho}. \tag{6.3.14}$$

Einsetzen dieser Gleichung in die Bedingung Erster Ordnung (6.3.8) ergibt

$$l_i = \frac{(1-\alpha)(g+\rho)(1+\psi_i)}{\delta[(1-\alpha)g + \rho]} \tag{6.3.15}$$

für das Arbeitsangebot. Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass Statusdenken das Arbeitsangebot positiv beeinflusst (siehe Term $1 + \psi_i$) und, dass dies auch der einzige Effekt der Heterogenität auf das Arbeitspensum ist. Dieses Resultat hat

Auswirkungen auf das relative Kapital in beiden Gruppen. Aus den Gleichungen (6.3.1) und (6.3.12) entsteht folgende Gleichung für das relative Kapital

$$A_i \left(\frac{k_{it}}{k_t}\right)^{\alpha-1} (l_i)^{1-\alpha} = \frac{g+\rho}{\alpha}. \tag{6.3.16}$$

Durch Einsetzen von (6.3.15) in (6.3.16) resultiert

$$A_i \left(\frac{k_{it}}{k_t}\right)^{\alpha-1} \left[\frac{(1-\alpha)(g+\rho)}{\delta[(1-\alpha)g+\rho]}\right]^{1-\alpha} (1+\psi_i)^{1-\alpha} = \frac{g+\rho}{\alpha}. \tag{6.3.17}$$

Das relative Kapital der Individuen wird durch die individuellen Fähigkeiten A_i und dem Arbeitsangebot l_i beeinflusst. Die Heterogenität wirkt sich somit direkt durch die Technologie, A_i, und indirekt durch das Statusdenken, ψ_i, aus.

Die Autoren Tournemaine und Tsoukis definieren folgende Proposition um das Gleichgewicht zu definieren. Die Berechnungen sind dem Appendix B.2.2 zu entnehmen.

Proposition 6.3.1. *Das eindeutige Gleichgewicht ist durch einen konstanten Anteil an Kapital der Individuen aus der Gruppe 1 und 2, einer konstanten Wachstumsrate g und einem Arbeitsangebot l_1 und l_2 charakterisiert und ist anhand folgender Gleichungen*

$$\frac{k_{1t}}{k_t} = \Omega(g) A_1^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{(1-\gamma_1)\phi}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}} \tag{6.3.18}$$

und

$$\frac{k_{2t}}{k_t} = \Omega(g) A_2^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{-\gamma_2\phi}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}} \tag{6.3.19}$$

gegeben. Es gilt

$$1 = \beta\frac{k_{1t}}{k_t} + (1-\beta)\frac{k_{2t}}{k_t} \tag{6.3.20}$$

und

$$\Omega(g) = \left[\frac{(1-\alpha)(g+\rho)}{\delta[(1-\alpha)g+\rho]}\right] \left(\frac{g+\rho}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}} exp(1) \tag{6.3.21}$$

ist eine streng monoton fallende und streng konvexe Funktion. Das Arbeitsangebot eines Individuums, $i = 1, 2$, für die Produktion ist durch

$$l_i = \frac{(1-\alpha)(g+\rho)(1+\psi_i)}{\delta[(1-\alpha)g+\rho]} \tag{6.3.22}$$

gegeben. (Tournemaine, Tsoukis (2009), S. 289, Proposition 1)

Um die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu gewährleisten, muss $(1-\gamma_1)\phi - \gamma_2\phi < 1$ sein.

Proposition 6.3.1 kann nun folgendermaßen interpretiert werden. Betrachtet man Gleichung (6.3.18) und (6.3.19), so sind zwei Effekte, welche den Anteil von Kapital der beiden Gruppen steuern, erkennbar. Einerseits ergibt sich der schon aus vorherigen Kapiteln bekannte Effekt des durchschnittlichen Statusdenkens. Der Anteil des Kapitals der Individuen ist proportional zu ihren Fähigkeiten A_i. Je höher die Technologie, desto größer der jeweilige Anteil. Dieser betrifft alle Individuen gleichermaßen. Andrerseits erhält man den differenzierten Statuseffekt, bei dem der Nutzen sehr wohl auf den relativen Status des Individuums und der Eigenschaft der Statusfunktion ($\phi < 0$ oder $\phi > 0$) ankommt. Abhängig vom Vorzeichen und der verschiedenen Statuselastizität reagieren Individuen der beiden Gruppen unterschiedlich auf eine Änderung im relativen Status. Zwei Fälle sind zu unterscheiden: Ist $\phi = 0$, so wirkt sich ausschließlich der durchschnittliche Statuseffekt aus, der letzte Term der Gleichungen wird 1. Steigert sich die Technologie einer Gruppe, so gibt es eine direkte Auswirkung auf das Kapital, da mehr Vermögen angehäuft werden kann. Der interessante Fall ist nun $\phi \neq 0$. Dabei spielt der letzte Term eine wichtige Rolle ($\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{(1-\gamma_1)\phi}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}}$ und $\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{-\gamma_2\phi}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}}$). Das Vorzeichen von ϕ bestimmt, ob sich das Statusdenken der Individuen positiv oder negativ auf das Kapital auswirkt. Der Anteil des Kapitals eines Individuums k_{it}/k_t kann dabei positiv oder negativ mit A_1/A_2 korrelieren. Weiters hängt das Ausmaß des differenzierten Effektes vom Grad der Ambition γ_1 und γ_2 ab.

6.3.1 Auswirkungen der Ungleichheit

Die Autoren Tournemaine und Tsoukis (2009) untersuchen in ihrem Artikel darüber hinaus die Auswirkungen des Statusdenkens auf die Ungleichheit und das Wachstum im System. Nach der Umformung von (6.3.12)- (6.3.14) nach $\frac{c_{1t}}{c_{2t}}$, $\frac{k_{1t}}{k_{2t}}$ und $\frac{y_{1t}}{y_{2t}}$ und der Verwendung von (6.3.18) und (6.3.19) resultiert nachstehende Gleichung

$$\frac{c_{1t}}{c_{2t}} = \frac{k_{1t}}{k_{2t}} = \frac{y_{1t}}{y_{2t}} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}}. \tag{6.3.23}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich ein intuitiver Rückschluss ziehen. Unter der Voraussetzung $A_1 = A_2$ sind Konsum, Kapital und Produktion für beide Gruppen gleich, unabhängig von den Werten der Parameter γ_1 und γ_2. Die Einkommensungleichheit verschwindet und damit ist der Referenzwert für beide Gruppen äquivalent. Eine Steigerung des Statusmotives in Konsum (ψ_i) hat jedoch einen Einfluss auf die Arbeit der Individuen und auf das Wachstum. Die Autoren kommen somit auf das gleiche Ergebnis wie in Kapitel 6.2 dieser Arbeit und zwar, dass sich erhöhtes Statusdenken positiv auf das Arbeitspensum der Individuen auswirkt.

Des weiteren wird das Ergebnis unter der Bedingung $A_1 > A_2$ analysiert. Der Nenner des Exponenten in Gleichung (6.3.23) zeigt, dass uneingeschränkt von der Wahl der Parameter γ_1, γ_2 und auch ϕ, Konsum, Kapital und Produktion der Individuen differenzieren. Selbst wenn $\gamma_1 = \gamma_2$, das heißt der Anreiz beider Gruppen gleich ist, berechnet sich für den Exponenten $(1-\alpha)(1-\phi)$. In diesem Fall vergleichen sich Individuen der Gruppe 1 mit dem gleichen Referenzwert wie der Gruppe 2. Trotzdem ergibt sich eine Heterogenität durch unterschiedliche Fähigkeiten $A_1 > A_2$.

Ist $\phi = 0$, so verschwindet der differenzierte Statuseffekt, die Ungleichheit bezüglich der Technologie bleibt jedoch erhalten.

Im Gegensatz dazu modelliert $\phi \neq 0$ den differenzierten Statuseffekt, und es wird zwischen positivem und negativem Parameter unterschieden: Gilt $\phi < 0$ so steht der Schmerz vom Verlust des Status im Vordergrund. Der Nutzen des Status sinkt schneller als der relative Status. Es gilt $\psi_1 < \psi_2$, schlechter gebildete Individuen der Gruppe 2 sorgen sich mehr um ihren sozialen Status als Individuen der Gruppe 1. Dies äußert sich durch härtere Arbeit von Seiten der Gruppe 2 und es gilt $l_1 < l_2$, wodurch Individuen der Gruppe 2 den Unterschied $(A_1 > A_2)$ zu Gruppe 1 verringern können.

Aus Gleichung (6.3.11) erhält man

$$\psi_1 = 1 + \phi ln(\frac{c_{1t}}{\bar{c}_{1t}})$$

und

$$\psi_2 = 1 + \phi ln(\frac{c_{2t}}{\bar{c}_{2t}}).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\psi_2}{\psi_1} = \frac{1 - \phi\gamma_2 ln\left(\frac{c_{1t}}{c_{2t}}\right)}{1 + \phi(1-\gamma_1) ln\left(\frac{c_{1t}}{c_{2t}}\right)} = \frac{1 - \phi\gamma_2 \frac{1}{[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]} ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)}}}{1 + \phi(1-\gamma_1)\frac{1}{[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]} ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)}}}, \quad (6.3.24)$$

als relative Statuselastizität der beiden Gruppen.

Ableiten dieser Funktion nach ϕ bringt

$$\frac{d\frac{\psi_2}{\psi_1}}{d\phi} = \frac{-(1-\gamma_1+\gamma_2)ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)}}}{\left[[1-(1-\gamma_1+\gamma_2)\phi]+\phi(1-\gamma_1)ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\right]^2} \leq 0. \tag{6.3.25}$$

Das bedeutet, steigende Negativität des Parameters ϕ wirkt sich positiv auf die Statusfunktion ψ_2 in Relation zur Statusfunktion ψ_2 aus. Was wiederum zu mehr Ambition in Hinblick auf Arbeit von Seiten der Gruppe 2 führt.

Interessant ist ebenfalls, wie sich eine Änderung des differenzierten Statuseffektes auf das Kapital auswirkt. Durch Ableiten der Gleichung (6.3.23) nach dem Parameter ϕ erhält man

$$\frac{d\frac{k_{1t}}{k_{2t}}}{d\phi} = \frac{1-\gamma_1+\gamma_2}{[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2]^2}\frac{k_{1t}}{k_{2t}}ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \geq 0. \tag{6.3.26}$$

Daraus lässt sich folgern, dass sich für größere negative Werte von ϕ der Unterschied zwischen Kapital der Gruppe 1 und 2 verringert. Mit anderen Worten, je größer der „Schmerz des Verlustes des Status“ ist, desto kleiner ist die Ungleichheit zwischen den beiden Gruppen, da Individuen der Gruppe 2 härter arbeiten und den Unterschied verringern.

Ist hingegen $\phi > 0$ so wächst die Statusfunktion umso schneller, je höher der Status $c_{it}/\bar{c}_{it}$ der Individuen ist. Mit höherem relativen Konsum gewinnen Individuen mehr Status. Damit gilt $\psi_1 > \psi_2$. Aus Gleichung (6.3.25) lässt sich schließen, dass eine Erhöhung des differenzierten Statusdenkens positive Auswirkungen auf die Statuselastizität der gebildeteren Gruppe 1 hat. Die Individuen der Gruppe 1 haben große Ambition den Status zu erhöhen, da sie dadurch viel Nutzen erreichen können. Es folgt hohes Arbeitsangebot der Gruppe 1 und Senkung der Motivation der Gruppe 2. Die Ungleichheit der Gruppen verstärkt sich.

Schließlich bleibt noch zu untersuchen, inwiefern sich eine Präferenz hin zum Vergleich mit besser gestellten Individuen auswirkt. Was passiert, wenn sich Individuen hauptsächlich mit der Gruppe 1 vergleichen?

$$\begin{aligned}\frac{d^2\left(\frac{k_{1t}}{k_{2t}}\right)}{d\phi d\gamma_1} &= \frac{\overbrace{-[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]^2}^{-1}-\overbrace{(1-\gamma_1+\gamma_2)\phi}^{0}}{\underbrace{[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]^4}_{1}}\frac{k_{1t}}{k_{2t}}ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &= -\frac{k_{1t}}{k_{2t}}ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} < 0,\end{aligned} \tag{6.3.27}$$

für $\gamma_1 = 1$ und $\gamma_2 = 0$. Somit wird der differenzierte Statuseffekt durch ϕ reduziert. Vergleichen sich die Individuen vorzugsweise mit der anderen Gruppe (Individuen der Gruppe 1 mit jenen aus der Gruppe 2 und umgekehrt), so wird der differenzierte Statuseffekt begünstigt.

Jene Resultate werden von Tournemaine und Tsoukis (2009) in folgender Proposition formuliert:

Proposition 6.3.2. *Sei $A_1 > A_2$ und $\phi(1-\gamma_1) + \phi\gamma_2 < 1$:*
(a.) Ungleichheiten in Einkommen, Vermögen und Konsum sind positiv korreliert mit differenziertem Statuseffekt ϕ;
(b.) $\phi < 0$, motiviert schlechter gebildeten Individuen (Gruppe 2) härter zu Arbeiten, unterdessen bewirkt $\phi > 0$ eine Steigerung des Arbeitslevels der gut gebildeten Individuen (Gruppe 1). Erster Fall vermindert damit Ungleichheiten und Letzterer steigert Ungleichheiten.
(c.) Ungleichheiten korrelieren positiv oder negativ mit dem Grad an Statusvergleich γ_1 und γ_2, abhängig davon ob ϕ positiv oder negativ ist.
(Tournemaine, Tsoukis (2009), S. 291, Proposition 4)

Es liegt in der menschlichen Natur, dass Individuen nach immer mehr Vermögen und Status streben. Somit macht es Sinn, sich mit besser gestellten Individuen zu vergleichen und nicht mit jenen, die weniger haben als man selbst. Die Parameter γ_1 und γ_2 geben den Grad des Vergleichs mit der Gruppe 1 an. Damit gilt $\gamma_1 > \gamma_2$ und noch konkreter $\gamma_1 > 1-\gamma_1$ und $\gamma_2 > 1-\gamma_2$. Das bedeutet, dass sich der Großteil der Individuen mit der Gruppe 1 misst. Bereits existierende Studien besagen sogar, dass sich reiche Individuen nie mit den armen Individuen vergleichen würden, sondern nur mit denen die mehr besitzen als sie selbst. Die Autoren resultieren $\gamma_1 = 1$ und $\gamma_2 > 1/2$. Mit anderen Worten, vergleichen sich Agenten aus der Gruppe 1 ausschließlich mit der eigenen Kohorte und auch die Mehrheit der Agenten aus der Gruppe 2 mit Individuen aus der Gruppe 1, die besser gestellt sind als sie. Das aggregierte Arbeitsangebot ist $l = \beta l_1 + (1-\beta) l_2$. Einsetzen von l_1 und l_2 laut (6.3.22) aus Proposition 6.3.1 in diese Gleichung und Verwenden der Elastizität der Statusfunktion ψ_i ergibt

$$l = \frac{(1-\alpha)(g+\rho)}{\delta[(1-\alpha)g+\rho]}[2 - \phi(1-\beta)\gamma_2 ln\left(\frac{c_{1t}}{c_{2t}}\right)]. \tag{6.3.28}$$

Der zweite Term des Produktes zeigt, dass Arbeitsangebot mit der Einkommensungleichheit korreliert. Abhängig von dem negativen Vorzeichen des Parameters ϕ steigt das Arbeitsangebot um so größer der Unterschied zwischen den Gruppen ist. Individuen der zweiten Gruppe sind durch den Ansporn der Gruppe 1 motiviert mehr zu arbeiten um den Status auszugleichen und aus Angst Status zu verlieren ($\phi < 0$).

Als Nächstes wird noch der allgemeinere Fall betrachtet, in dem sich gut gebildete Individuen nicht ausschließlich mit Gleichgesinnten vergleichen, sondern auch die Möglichkeit des Vergleiches mit schlechter Gebildeten besteht. Analog wie zuvor, geht aus Gleichung (6.3.22) nachstehende Arbeitsgleichung hervor

$$l = \frac{(1-\alpha)(g+\rho)}{\delta[(1-\alpha)g+\rho]}[2 - \phi[-\beta(1-\gamma_1) + (1-\beta)\gamma_2]ln\left(\frac{c_{1t}}{c_{2t}}\right)]. \tag{6.3.29}$$

In diesem Punkt ist es schon etwas schwieriger eine allgemeine Aussage zu treffen. Die Parameter $1-\gamma_1$ und γ_2 sind durch die Größen der beiden Gruppen gewichtet. Dabei entspricht $(1-\gamma_1)$ dem Grad des Vergleichs der Gruppe 1 mit der Gruppe 2, welcher negativ einfließt, und γ_2 entspricht dem Ausmaß der schlechter Gebildeten sich mit den gut Gebildeten der Gruppe 1 zu vergleichen. Nun bleibt es zu unterscheiden ob $-\beta(1-\gamma_1) + (1-\beta)\gamma_2 > 0$ oder $-\beta(1-\gamma_1) + (1-\beta)\gamma_2 < 0$ ist. Die erste Ungleichung besagt, dass sich Individuen eher mit besser Gestellten vergleichen, als mit Individuen, die weniger haben als sie selbst. Diese Definition macht auch intuitiv mehr Sinn und bringt im Falle $\phi < 0$ eine positive Korrelation bezüglich Ungleichheit mit sich. Die Ambition sich mit gut gebildeten Individuen zu vergleichen plus dem „Schmerz vor dem Verlust von Status“ führt zu härterem Arbeiten. Ist jedoch $\phi > 0$ so sinkt das Arbeitsangebot mit steigender Ungleichheit. Betrachten der Gleichung (6.3.29) für $-\beta(1-\gamma_1) + (1-\beta)\gamma_2 < 0$ lässt sich folgendermaßen interpretieren: In dieser Gesellschaft würde die Größe der Gruppe 1 überwiegen und das Streben nach Höherem eher gering sein (gemessen durch γ_1, γ_2). In diesem Fall fällt das Arbeitsangebot bei negativem ϕ und steigt für positives ϕ.

Tournemaine und Tsoukis (2009) formulieren diese Erkenntnisse in einer abschließenden Proposition.

Proposition 6.3.3. *(a.) Das Arbeitsangebot steigt mit wachsender Ungleichheit für $\phi < 0$ und $-\beta(1-\gamma_1) + (1-\beta)\gamma_2 > 0$. Weniger gebildete Individuen sind, auf Grund von „Schmerz vor Verlust von Status“, motiviert härter zu arbeiten.*
(b.) Entweder bringt Angst vor Verlust von Status $\phi < 0$ und Ambition oder Gewinn durch Status $\phi > 0$ und keine Ambition, eine positive Korrelation des Arbeitsangebotes und der Ungleichheit mit sich.
(c.) Steigende Ambition und Angst vor Verlust von Status steigern das Arbeitsangebot. (Tournemaine, Tsoukis (2009), S. 291- 292, Proposition 5)

6.3.2 Ungleichheit und Wachstum

Im letzten Abschnitt des Artikels von Tournemaine und Tsoukis (2009) wird der Einfluss von Ungleichheit auf das Wachstum der Ökonomie untersucht.

Einsetzen von (6.3.18) und (6.3.19) in (6.3.20) ergibt folgen Gleichung für das Wachstum

$$1 = \Omega(g)(\tilde{A})^{\frac{1}{1-\alpha}}\hat{\sigma_A^2}. \tag{6.3.30}$$

Um die Gleichung besser interpretieren zu können und Zusammenhänge deutlicher werden, verwenden die Autoren folgende Substitutionen:

$$\tilde{A} \equiv (A_1)^{\beta}(A_2)^{1-\beta} \tag{6.3.31}$$

beschreibt das durchschnittliche Level an Technologie und

$$\hat{\sigma_A^2} \equiv \beta\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{(1-\beta)(1-\gamma_2\phi)+\beta(1-\gamma_1)\phi}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}} + (1-\beta)\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{-\frac{\beta[1-(1-\gamma_1)\phi]+(1-\beta)\gamma_2\phi}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}} \tag{6.3.32}$$

modelliert die Streuung der Fähigkeiten der beiden Gruppen 1 und 2, wobei die verschiedenen Effekte der Heterogenität bezüglich Status mitwirken. Die relative Technologie $\frac{A_1}{A_2}$ wird durch die Gruppengröße $(\beta, (1-\beta))$, des differenzierten Statuseffektes (ϕ) und des Grades an Ambition (γ_1, γ_2) gewichtet.

Gleichung (6.3.30) kann somit in verschiedene Teile aufgespalten werden. So liefert $\tilde{A}$ den Beitrag des Effektes der durchschnittlichen Technologie und $\hat{\sigma_A^2}$ repräsentiert den differenzierten Statuseffekt.

Aus Gleichung (6.3.30) ist ersichtlich, dass Wachstum und durchschnittliche Technologie positiv korrelieren, da $\Omega(g)$ eine streng monoton fallende Funktion ist. Der Effekt von Ungleichheit in Technologie ist jedoch nicht eindeutig.

Ableiten der Gleichung (6.3.32) ergibt

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\sigma_A^2}}{d(A_1/A_2)} &= \frac{\beta(1-\beta)(1-\gamma_2\phi)+\beta^2(1-\gamma_1)\phi}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{(1-\beta)(1-\gamma_2\phi)+\beta(1-\gamma_1)\phi}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}-1} \\ &\quad - \frac{\beta(1-\beta)[1-(1-\gamma_1)\phi]+(1-\beta)^2\gamma_2\phi}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{-\frac{\beta[1-(1-\gamma_1)\phi]+(1-\beta)\gamma_2\phi}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}-1}.\end{aligned} \tag{6.3.33}$$

Unter der Voraussetzung, dass $(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi] > 0$ ist, kann keine eindeutige Aussage darüber gemacht werden, ob steigende Heterogenität einen positiven Effekt auf das Wachstum der Ökonomie hat. Zumindest kann die Reaktion von $\hat{\sigma_A^2}$ in Hinblick auf konkrete Voraussetzungen $\phi < 0$, $\gamma_1 = 1$ und $\beta = 0$ untersucht werden. Das heißt, die Gruppe 1 der Individuen ist sehr klein und sie vergleichen sich ausschließlich mit Ihresgleichen. Durch Einsetzen dieser Werte in (6.3.33) folgt

$$\frac{d\hat{\sigma_A^2}}{d(A_1/A_2)} = -\frac{\gamma_2\phi}{(1-\alpha)[1-\gamma_2\phi]}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{-\frac{\gamma_2\phi}{(1-\alpha)(1-\gamma_2\phi)}-1} > 0. \tag{6.3.34}$$

Die Gruppe der gut gebildeten Individuen ergibt somit einen perfekten Referenzwert für die schlechter Gebildeten und vergleicht sich selbst nur untereinander. Gilt nun $\phi < 0$, so lässt sich schließen, dass Wachstum positiv mit Heterogenität korreliert, da schlechter gestellte Individuen härter arbeiten.

Die Parameter γ_1 und γ_2 haben große Auswirkungen auf das Arbeitsangebot und die Ungleichheit in der Ökonomie. Inwiefern wirkt sich nun eine Steigerung der Parameter auf $\hat{\sigma_A^2}$ aus. Um dies besser untersuchen zu können, verwenden die Autoren folgende Schreibweise:

$$\hat{\sigma_A^2} \equiv \left[\beta\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}} + (1-\beta)\right]\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{-\frac{\beta}{1-\alpha}-\frac{\gamma_2\phi}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}}, \tag{6.3.35}$$

und

$$\hat{\sigma_A^2} \equiv \left[\beta + (1-\beta)\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{-\frac{1}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}}\right]\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}+\frac{(1-\gamma_1)\phi}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}}. \tag{6.3.36}$$

Ableiten der Funktionen nach γ_1 (siehe Gleichung (6.3.35)) beziehungsweise γ_2 (siehe Gleichung (6.3.36)) ergibt

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\sigma_A^2}}{d\gamma_1} =& \beta\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}} \frac{-(1-\alpha)\phi}{[(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]]^2} ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right)\\ &\times\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{-\frac{\beta}{1-\alpha}-\frac{\gamma_2\phi}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}} + \left[\beta\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}} + (1-\beta)\right]\\ &\times\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{-\frac{\beta}{1-\alpha}-\frac{\gamma_2\phi}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}} \frac{\gamma_2(1-\alpha)\phi^2}{[(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]]^2} ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) > 0\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{\sigma_A^2}}{d\gamma_2} =&(1-\beta)\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{-\frac{1}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}} \frac{-(1-\alpha)\phi}{[(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]]^2} ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right)\\
&\times\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}+\frac{(1-\gamma_1)\phi}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}}\\
&+\left[\beta+(1-\beta)\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{-\frac{1}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}}\right]\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}+\frac{(1-\gamma_1)\phi}{(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]}}\\
&\times\frac{(1-\gamma_1)(1-\alpha)\phi^2}{[(1-\alpha)[1-(1-\gamma_1)\phi-\gamma_2\phi]]^2} ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) > 0
\end{aligned}
$$

für $\phi < 0$. Das bedeutet ein höherer Anreiz (γ_1, γ_2) für beide Gruppen, steigert das Wachstum der Ökonomie. Grund dafür ist, dass Individuen durch ein stärkeres Statusmotiv mehr Arbeit leisten.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass unter der Voraussetzung der besprochenen Bedingungen Ungleichheiten in Einkommen, Vermögen und Konsum positiv mit der Heterogenität der Technologien korrelieren. Dieses Ergebnis ist intuitiv zu verstehen, da größere Ungleichheit der Fähigkeiten, Einkommensungleichheit und somit Unterschiede in Vermögen und Konsum mit sich bringen. Genauso gibt es einen positiven Zusammenhang von Ungleichheit in Einkommen, Vermögen und Konsum und differenzierten Statuseffekt. Abhängig von der Statusfunktion werden entweder Individuen der Gruppe 1 motiviert viel zu arbeiten um hohen Nutzen zu erzielen, was wiederum die Ungleichheit steigert, oder Individuen der Gruppe 2 erhalten den Anreiz ihr Arbeitsangebot zu erhöhen und reduzieren somit die Ungleichheit.

Der Grad der Ambition wirkt sich ebenfalls abhängig von der Statusfunktion positiv oder negativ auf den differenzierten Statuseffekt aus.

Inwiefern sich das Arbeitsangebot der Individuen ändert, hängt von der Statusfunktion und dem Grad der Ambition an. Im wahrscheinlicherem Fall, dass Individuen „Schmerz durch Verlust von Status“ erhalten und zudem viel Ambition haben, was bedeutet, dass sie sich hauptsächlich mit besser Gestellten vergleichen, so sind Individuen der Gruppe 2 motiviert hart zu arbeiten um ihren Status zu halten. Das Arbeitsangebot steigt.

Darüber hinaus ergeben die Untersuchungen, dass Wachstum eindeutig mit den durchschnittlichen Technologien wächst. Es kann keine allgemeine Aussage über die Abhängigkeit von Wachstumsrate und Heterogenität in Technologie beziehungsweise Grad der Ambition und Wachstum getroffen werden. Abhängig von der Wahl der Statusfunktion, kann die Wachstumsrate mit der Heterogenität in Technologie positiv $(\phi < 0)$ oder negativ korrelieren. Genauso kann keine allgemeine Aussage über den Zusammenhang von Ambition (γ_1, γ_2) und Wachstum getroffen werden. Abhängig von der Statusfunktion ϕ ist dieser positiv (für $\phi < 0$) oder negativ.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In der Diplomarbeit wurden verschiedene Modelle zur Untersuchung des Fertilitätsverhaltens der Individuen vorgestellt. Gemeinsamkeiten dieser Modelle sind soziale Normen und sozialer Status, welche sich auf die Nutzenoptimierung der Agenten auswirken. Durch den Einfluss dieser Faktoren entstehen Externalitäten, die entweder negative oder positive Effekte im System haben.

In dem überlappenden Generationenmodell von Palivos (2000) können auf Grund von strategischen Komplementen, welche durch den Einfluss von sozialen Normen entstehen, multiple Gleichgewichte auftreten. Agenten orientieren sich in ihrer Entscheidung bezüglich dem Fertilitätsverhalten an ihrer Kohorte und wählen die vom Durchschnitt vorgegebene Geburtenziffer. Dieses Verhalten kann zu ineffizienten Gleichgewichten führen, da Individuen nicht die optimale Wahl treffen, sondern die von der Gesellschaft vorgegebene Geburtenrate.

Das zweite in der Diplomarbeit präsentierte Modell von Goto (2008) erweitert das Modell von Palivos (2008) durch Einfließen der Ungleichheit in Humankapital. Der Autor untersucht dabei die Auswirkungen der Umverteilung in Hinblick auf die durchschnittliche Fertilität und das durchschnittliche Humankapital. Dabei wird zwischen kurzfristigen und langfristigen Effekten unterschieden. Betrachtet man im kurzfristigen Fall eine Änderung der Ungleichheit bei allgemein verteiltem Humankapital, so ergibt sich bei steigendem (sinkendem) Humankapital eine Abnahme (Zunahme) der durchschnittlichen Fertilität. Dabei ist zu beachten, dass dies nur in einem bestimmten Intervall passiert, wenn die Geburtenrate positiv, aber unter dem maximalen Wert liegt. Der kurzfristige Effekt bei gleich verteiltem Humankapital ist so zu beschreiben, dass sich eine Erhöhung der Ungleichheit bei bestehender hoher (niedriger) durchschnittlicher Geburtenrate, negativ (positiv) auswirkt. Die langfristige Untersuchung ergibt, dass unter gewissen Voraussetzungen die Gleichgewichte von Humankapital und Fertilität unabhängig von einer Umverteilung des Humankapitals sind. Besteht jedoch eine Abhängigkeit, so ergibt eine Zunahme (Abnahme) des Humankapitals eine Senkung (Steigerung) der

Fertilität.

Ein Modell, welches den demographischen Übergang von einer relativ hohen Geburtenrate hin zu einer niedrigen Geburtenrate beschreibt, wird im fünften Kapitel der Diplomarbeit vorgestellt. Bhattacharya und Chakraborty (2011) erklären diese Transition durch die Auswirkung sinkender Mortalität und Einfluss sozialer Normen. Analog wie bei Palivos (2000) ergeben sich multiple Gleichgewichte. Ergebnis ihres Modells ist, dass sich im hohen Gleichgewicht eine Steigerung der Überlebensrate der Kinder negativ auf die Geburtenrate auswirkt und die Fertilität sinkt.

Das sechste Kapitel dieser Arbeit umfasst zwei endogene Wachstumsmodelle nach Tournemaine und Tsoukis (2008, 2009). Dabei wird zwischen homogenen und heterogenen Individuen differenziert, welche sich durch den Status bezüglich Vermögen und Konsum in ihren ökonomischen Entscheidungen beeinflussen lassen. Die Autoren studieren die Auswirkungen des Statusdenkens auf die Wachstumsrate der Ökonomie. In dieser Arbeit werden dabei Kinder als Konsumgut betrachtet. Das Modell zeigt somit, inwiefern sich Statusdenken auf das Konsumverhalten und folglich auf die Anzahl an Kindern auswirkt und welche Auswirkungen dies auf das Wachstum der Ökonomie hat. Resultat ihrer Untersuchungen ist, dass sich Statusdenken homogener Agenten, abhängig von Art (Vermögen, Konsum) und Arbeitsangebot (exogen, endogen), unterschiedlich auf das Wachstum auswirkt. Besteht exogenes Arbeitsangebot, so wirkt sich im Falle der Existenz beider Arten des Statusdenkens, das konsumabhängige Statusdenken negativ auf das Wachstum der Ökonomie aus. Bei endogenem Arbeitsangebot hat ein erhöhtes Statusdenken bezüglich Vermögen, einen positiven Effekt auf die Wachstumsrate im Modell. Sowohl Vermögen wird angehäuft als auch das Arbeitsangebot wird erhöht. Der Einfluss von konsumabhängigen Statusdenken ist nicht eindeutig. Auf der einen Seite wirken sich starke Statusmotive positiv auf das Arbeitspensum der Individuen aus, auf der anderen Seite wird weniger Vermögen angehäuft und mehr konsumiert.

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels wird ein weiteres Wachstumsmodell präsentiert, wobei nun heterogene Individuen untersucht werden und lediglich konsumorientiertes Statusdenken einfließt. Wichtige Eigenschaft dieses Modells ist, dass Individuen unterschiedliche Fähigkeiten (Technologien) haben. Auf Grund dessen, existiert ein differenzierter Statuseffekt. Abhängig von Statusfunktion (konkav, konvex) wirkt sich eine Änderung im relativen Status positiv oder negativ auf den Nutzen aus. Es wird zwischen "Gewinn durch Status„ (konvexe Nutzenfunktion) und "Schmerz durch Verlust von Status„ (konkave Nutzenfunktion) unterschieden. Die Autoren Tournemaine und Tsoukis (2009) analysieren die Reaktion einer Änderung der Verteilung und somit Ungleichheit in Hinblick der Technologie auf das Wachstum der Ökonomie. Ein interessantes Ergebnis ist, dass unter Berücksichtigung der besprochenen Voraussetzungen steigende Ungleichheit in der Technologie positiv mit Einkommen, Vermögen, Konsum und differenzierten Statuseffekt korrelieren. Im Gegensatz dazu enden Individuen mit gleicher Technologie, unabhängig von Grad der Ambition und Statusfunktion, mit dem gleichen Anteil an Konsum, Vermögen und Einkommen. Entscheidend in diesem Modell ist die Unterscheidung der Reaktionen zwischen gut gebildeten und schlecht gebildeten Individuen auf das Statusdenken. Erhalten Individuen "Gewinn durch Status„, so sind gut gebildete Individuen sehr motiviert hart zu arbeiten und viel Nutzen zu generieren und somit verstärkt sich die Ungleichheit noch zusätzlich. Demgegenüber stehen schlechter gebildete Individuen, welche durch den Anreiz von "Schmerz durch Verlust von Status„ angeregt werden, ihr Arbeitspensum zu erhöhen und die Ungleichheit zu reduzieren.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass sich soziale Normen und Statusdenken nicht immer positiv auf den Nutzen der Individuen auswirken, jedoch immer das Arbeitsangebot steigern. Das Fertilitätsverhalten der Individuen kann durch soziale Normen kontrolliert werden und eine Reduktion von hoher Geburtenrate hin zu niedriger Geburtenrate kann modelliert werden. Auch die Verteilung von Humankapital hat maßgebliche Auswirkungen auf die Geburtenziffer der Individuen.

Literaturverzeichnis

[1] Alonso-Carrera Jaime , Caballé Jordi und Raurich Xavier, 2004: *Growth, habit formation, and catching-up with the Joneses*. European Economic Review 49 (2005), S. 1665 – 1691.

[2] Bhattacharya Joydeep, Chakraborty Shankha, 2011: *Fertility choice under child mortality and social norms*. Economic Letters 115 (2012), S. 338- 341.

[3] Becker Gary, 1960: *An Economic Analysis of Fertility*. Demographic and Economic Change in Developed Countries, S. 209- 240.

[4] Becker Gary und Murphy Kevin, 2000: *Social economics/ Market behavior in a social evironment*.

[5] Fisher, Walter H., 2003: *Status Preference and World Economic Dynamics*. Mimeo. Institute for Advanced Studies, Vienna.

[6] Futagami Koichi und Shibata Akihisa, 1998: *Keeping one step ahead of the Joneses: Status, the distribution of wealth, and long run growth*. Journal of Economic Behavior & Organization Vol. 36 (1998), S. 109- 126.

[7] Goto Hideaki, 2008: *Social norms, inequality and fertility*. Economics Bulletin, Vol. 10, No. 13 S. 1-9.

[8] Hotz V. J., Klerman J. A. und Willis R. J., 1997: *The economics of fertility in developed Countries*. M.R. Rosenzweig und O. Stark (eds.) Handbook of Population and Family Econonomics, Elsevier, S. 276- 347.

[9] Palivos Theodore, 2000: *Social norms, fertility and economic development*. Journal of Economic Dynamics & Control 25 (2001), S. 1919- 1934.

[10] Schmid Friedrich, Trede Mark, 2006: *Finanzmarktstatistik*. Springer Berlin Heidelberg, S. 239- 252.

[11] Smith Adam, 1982: *The theory of moral sentiments*. (Liberty Fund, Indianapolis).

[12] Tournemaine Frederic und Christopher Tsoukis, 2008: *Relative consumption, relative wealth and growth.* Economic Letters 100 (2008), S. 314- 316.

[13] Tournemaine Frederic und Christopher Tsoukis, 2009: *Gain versus pain from status and ambition: Effects on grwoth and inequality.* The Journal of Socio-Economics 39 (2010), S. 286- 294.

[14] Van de Kaa, Van der Windt, 1979: *Minder Mensen, Meer Welzijn [Fewer People, More Welfare].* Utrecht: Het Spektrum B.V.

[15] Vegard Skirbekk, 2008: *Fertility trends by social status.* Demographic Research, Volume 18, Article 5, S. 145-180.

Anhang A

Kapitel 4

A.1 Bedingungen erster Ordnung

Sei $L(n_t, c_{t+1}, h_{t+1}, e_t)$ die Langragefunktion zum gegebenen Optimierungssystems

$$L = u(n_t, \overline{n}_t) + \beta ln(c_{t+1}) - \lambda_{1t}(c_{t+1} - w_{t+1}h_{t+1}) - \lambda_{2t}(h_{t+1} - B(\theta + e_t h_t)^\gamma) - \lambda_{3t}(n_t - \delta(1 - e_t)). \tag{A.1.1}$$

Die Bedingungen erster Ordnung sind gegeben durch

$$\frac{\partial L}{\partial n_t} = u_1(n_t, \overline{n}_t) - \lambda_{3t} = 0 \Rightarrow \lambda_{3t} = u_1(n_t, \overline{n}_t) \tag{A.1.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{t+1}} = \frac{\beta}{c_{t+1}} - \lambda_{1t} = 0 \Rightarrow \lambda_{1t} = \frac{\beta}{c_{t+1}} \tag{A.1.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial h_{t+1}} = \lambda_{1t}w_{t+1} - \lambda_{2t} = 0 \Rightarrow \lambda_{2t} = \lambda_{1t}w_{t+1} \tag{A.1.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial e_t} = \lambda_{2t}B\gamma(\theta + e_t h_t)^{\gamma - 1}h_t - \lambda_{3t}\delta = 0 \tag{A.1.5}$$

Kombinieren von (A.1.3), (A.1.4) und Gleichung (4.1.1) ergibt

$$\lambda_{2t} = \beta\frac{w_{t+1}}{c_{t+1}} = \frac{\beta}{h_{t+1}}. \tag{A.1.6}$$

Einsetzen von λ_{2t} und λ_{3t} aus (4.1.2) in (A.1.5) und Umformen ergibt

$$\delta u_1(n_t, \overline{n}_t) = \frac{\beta B\gamma(\theta + e_t h_t)^{\gamma - 1}h_t}{h_{t+1}}. \tag{A.1.7}$$

Durch Verwendung der Gleichung (4.1.2) erhält man folgende Gleichgewichtsbedingung

$$\delta u_1(n_t, \overline{n}_t) = \frac{\beta\gamma h_t}{\theta + e_t h_t}. \tag{A.1.8}$$

A.2 Änderung von e_t in Bezug auf Humankapital

Ableiten der Funktion (4.2.3) nach h_t ergibt

$$-\delta^2 u_{11}(\delta(1-e_t), \overline{n}_t)\frac{\partial e_t}{\partial h_t} = \frac{\beta\gamma(\theta + e_t h_t) - \beta\gamma h_t \left(e_t + h_t \frac{\partial e_t}{\partial h_t}\right)}{(\theta + e_t h_t)^2} \tag{A.2.1}$$

Umformen nach $\frac{\partial e_t}{\partial h_t}$ ergibt

$$\frac{\partial e_t}{\partial h_t} = \frac{\beta\gamma\theta}{\beta\gamma h_t^2 - \delta^2 u_{11}(\delta(1-e_t), \overline{n}_t)(\theta + e_t h_t)^2}. \tag{A.2.2}$$

Auf Grund der Bedingungen der Nutzenfunktion $u_{11} \equiv \partial^2 u/\partial^2 n_t \leq 0$ gilt $\frac{\partial e_t}{\partial h_t} > 0$.

A.3 Änderung von e_t in Bezug auf durchschnittliche Geburtenrate

Differenzieren der Gleichung (4.2.3) nach $\overline{n}_t$ ergibt

$$-\delta^2 u_{11}(\delta(1-e_t), \overline{n}_t)\frac{\partial e_t}{\partial \overline{n}_t} + \delta u_{12}(\delta(1-e_t), \overline{n}_t) = -\frac{\beta\gamma h_t^2 \frac{\partial e_t}{\partial \overline{n}_t}}{(\theta + e_t h_t)^2} \tag{A.3.1}$$

Umformen dieser Gleichung nach $\frac{\partial e_t}{\partial \overline{n}_t}$ ergibt

$$\frac{\partial e_t}{\partial \overline{n}_t} = \frac{-\delta u_{12}(\delta(1-e_t), \overline{n}_t)(\theta + e_t h_t)^2}{\beta\gamma h_t^2 - \delta^2 u_{11}(\delta(1-e_t), \overline{n}_t)(\theta + e_t h_t)^2}. \tag{A.3.2}$$

Da nun $u_{11}(\delta(1-e_t), \overline{n}_t) \leq 0$ und $u_{12}(\delta(1-e_t), \overline{n}_t) \geq 0$ folgt $\frac{\partial e_t}{\partial \overline{n}_t} \leq 0$.

A.4 Beweis von Proposition (4.3.1)

(Hideaki Goto (2008), S. 7- 8, Appendix: Proof of Proposition 1)

Beweis. Die durchschnittliche Geburtenrate wird laut (4.2.2) und (4.2.9) durch

$$\overline{n}_t(s) = \delta F(\underline{h}_t(\overline{n}_t(s)), s) + \int_{\underline{h}_t(\overline{n}_t(s))}^{\overline{h}_t(\overline{n}_t(s))} n_t(h_t, \overline{n}_t(s)) dF(h_t, s) \qquad \text{(A.4.1)}$$

berechnet. Der erste Term der Summe beschreibt die Geburtenziffer für $h_t \in (h_t^{min}, \underline{h}_t)$. Dazu wird das $\overline{n}_t$, welches nach dem ersten Fall in (4.2.9) zu berechnen ist, in (4.2.2) eingesetzt. Der zweite Term ergibt $\overline{n}_t$ für $h_t \in (\underline{h}_t, \overline{h}_t)$. Da $n_t(h_t, \overline{n}_t) = 0$ für $h_t \in (\overline{h}_t, h_t^{max})$ wird der restliche Term 0. Die Variablen hängen nun zusätzlich von s ab, wobei $\partial F/\partial s \leq 0$, das heißt F mit höherem Grad an s dominiert jene mit niedrigerem. Laut der Definition des Prinzips der stochastischen Dominanz erster Ordnung gilt somit, dass bei steigendem s der Erwartungswert des Humankapitals der Individuen höher ist wie vor der Änderung. Daraus folgt, dass bei steigendem s, das Humankapital aller Individuen steigt.

Ableiten der Gleichung (A.4.1) ergibt

$$\frac{\partial \overline{n}_t}{\partial s} = -\frac{\int_{\underline{h}_t}^{\overline{h}_t} \frac{\partial n_t(h_t, \overline{n}_t)}{\partial h_t} \frac{\partial F(h_t, s)}{\partial s} dh_t}{1 - \int_{\underline{h}_t}^{\overline{h}_t} \frac{\partial n_t(h_t, \overline{n}_t)}{\partial \overline{n}_t} f(h_t, s) dh_t}. \qquad \text{(A.4.2)}$$

Laut Definition gilt

$$\int_{\underline{h}_t}^{\overline{h}_t} \frac{\partial n_t(h_t, \overline{n}_t)}{\partial \overline{n}_t} f(h_t, s) dh_t < \int_{h_t^{min}}^{h_t^{max}} \frac{\partial n_t(h_t, \overline{n}_t)}{\partial \overline{n}_t} f(h_t, s) dh_t.$$

Auf Grund des Eigenschaft des stabilen Gleichgewichts erhält man

$$\int_{h_t^{min}}^{h_t^{max}} \frac{\partial n_t(h_t, \overline{n}_t)}{\partial \overline{n}_t} f(h_t, s) dh_t < 1,$$

somit ist der Nenner positiv. Daraus lässt sich schließen, dass das Vorzeichen der Ableitung in (A.4.2) lediglich vom Zähler des Bruches abhängt. Da $\partial n_t/\partial h_t < 0$ und $\partial F/\partial s \leq 0$ ergibt sich $\partial \overline{n}_t/\partial s \leq 0$ und die durchschnittliche Geburtenrate sinkt.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass $\partial \hat{h}_{t+1}/\partial s \geq 0$. Dazu betrachten wir das durchschnittliche Humankapital in der Periode $t+1$, welches sich aus den Gleichungen (4.1.8) und (4.2.11) ergibt:

$$\hat{h}_{t+1} = B\theta^{\gamma} F(\underline{h}_t, s) + \int_{\underline{h}_t}^{h^{max}} h_{t+1}(h_t, \overline{n}_t) dF(h_t, s). \qquad \text{(A.4.3)}$$

Ableiten der Funktion nach s ergibt:

$$\frac{\partial \hat{h}_{t+1}}{\partial s} = \int_{\underline{h}_t}^{h^{max}} \frac{\partial h_{t+1}}{\partial \overline{n}_t} \frac{\partial \overline{n}_t}{\partial s} f(h_t, s) dh_t - \int_{\underline{h}_t}^{h^{max}} \frac{\partial h_{t+1}}{\partial h_t} \frac{\partial F}{\partial s} dh_t. \tag{A.4.4}$$

Dabei ist $\partial h_{t+1}/\partial \overline{n}_t \leq 0$, laut (4.2.11) und $\partial e_t/\partial \overline{n}_t \leq 0$(siehe (4.2.8)). Es gilt $\partial h_{t+1}/\partial h_t \geq 0$, da das Humankapital der Periode $t+1$ positiv vom Humankapital der Eltern in der ersten Periode t abhängt. Daraus folgt $\partial \hat{h}_{t+1}/\partial s \geq 0$.

□

A.5 Beweis von Proposition (4.3.2)

(Hideaki Goto (2008), S. 5, Proof of Proposition 2)

Beweis. Die durchschnittliche Geburtenrate berechnet sich aus

$$\overline{n}_t(k) = \frac{1}{2k} \left[\delta \left[\underline{h}_t(\overline{n}_t(k)) - (m-k) \right] + \int_{\underline{h}_t(\overline{n}_t(k))}^{\overline{h}_t(\overline{n}_t(k))} n_t(h_t, \overline{n}_t) dh_t \right] \tag{A.5.1}$$

Differenzieren durch Anwenden der Produkt- und Leibnitzregel ergibt

$$\frac{\partial \overline{n}_t(k)}{\partial k} = -\frac{1}{2k^2} 2k\overline{n}_t(k) + \frac{1}{2k} \left[\delta \left(\frac{\partial \underline{h}_t}{\partial \overline{n}_t} \frac{\partial \overline{n}_t}{\partial k} + 1 \right) \right] + \frac{1}{2k} \left[\int_{\underline{h}_t}^{\overline{h}_t} \frac{\partial n_t}{\partial \overline{n}_t} \frac{\partial \overline{n}_t}{\partial k} dh_t + 0 - \delta \frac{\partial \underline{h}_t}{\partial \overline{n}_t} \frac{\partial \overline{n}_t}{\partial k} \right]$$

und somit

$$\frac{\partial \overline{n}_t(k)}{\partial k} = -\frac{\overline{n}_t}{k} + \frac{\delta}{2k} + \frac{1}{2k} \int_{\underline{h}_t}^{\overline{h}_t} \frac{\partial n_t}{\partial \overline{n}_t} \frac{\partial \overline{n}_t}{\partial k} dh_t.$$

Umformen nach $\frac{\partial \overline{n}_t}{\partial k}$ ergibt

$$\frac{\partial \overline{n}_t}{\partial k} = \frac{-\frac{1}{k}(\overline{n}_t - \frac{\delta}{2})}{1 - \frac{1}{2k} \int_{\underline{h}_t}^{\overline{h}_t} \frac{\partial n_t}{\partial \overline{n}_t} dh_t}. \tag{A.5.2}$$

Im stabilen Gleichgewicht gilt $\partial RS/\partial \overline{n}_t = \frac{1}{2k} \int_{m-k}^{m+k} \frac{\partial n_t}{\partial \overline{n}_t} dh_t < 1$. Da $\frac{1}{2k} \int_{\underline{h}_t}^{\overline{h}_t} \frac{\partial n_t}{\partial \overline{n}_t} dh_t \leq \frac{1}{2k} \int_{m-k}^{m+k} \frac{\partial n_t}{\partial \overline{n}_t} dh_t$, ist der Nenner von (A.5.2) positiv und daraus folgt das Ergebnis.

□

Anhang B

Kapiel 6

B.1 Nutzenmaximierung für homogene Individuen

B.1.1 Bedingungen Erster Ordnung

Es soll die Nutzenfunktion

$$U = \int_0^\infty \frac{\left[(c_t)\, \Psi \left(\frac{k_t}{\bar{k}_t} \right)^\delta \Omega \left(\frac{c_t}{\bar{c}_t} \right)^\gamma \right]^{1-\sigma} exp\left[-(1-\sigma) f\,(l_t)^\phi \right]}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt \tag{B.1.1}$$

unter der Nebenbedingung

$$y_t = c_t + \dot{k}_t \tag{B.1.2}$$

maximiert werden.
Die “current value„ Hamiltonfunktion des Systems lautet

$$\hat{H} = \frac{\left[(c_t)\, \Psi \left(\frac{k_t}{\bar{k}_t} \right)^\delta \Omega \left(\frac{c_t}{\bar{c}_t} \right)^\gamma \right]^{1-\sigma} exp\left[-(1-\sigma) f\,(l_t)^\phi \right]}{1-\sigma} + \lambda_t \left[A\,(k_t)^\alpha\,(B_t l_t)^{1-\alpha} - c_t \right]. \tag{B.1.3}$$

Die Bedingungen erster Ordnung einer Hamiltonfunktion sind gegeben durch

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial c_t} = 0, \tag{B.1.4}$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial l_t} = 0, \tag{B.1.5}$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial k_t} = \rho \lambda_t - \dot{\lambda}_t. \tag{B.1.6}$$

Durch Ableiten der Hamiltonfunktion nach c_t erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{H}}{\partial c_t} &= \frac{(1-\sigma)c_t^{-\sigma}\left[\Psi(\frac{k_t}{\overline{k_t}})^{\delta}\Omega(\frac{c_t}{\overline{c_t}})^{\gamma}\right]^{1-\sigma} exp[-(1-\sigma)f(l_t)^{\phi}]}{1-\sigma} \\ &+ \frac{[(c_t)\Psi(\frac{k_t}{\overline{k_t}})^{\delta}]^{1-\sigma}\gamma(1-\sigma)\Omega(\frac{c_t}{\overline{c_t}})^{\gamma(1-\sigma)-1}\Omega'(\frac{c_t}{\overline{c_t}})\frac{1}{\overline{c_t}}}{1-\sigma} \\ &\times exp[-(1-\sigma)]f(l_t)^{\phi} - \lambda_t = 0.\end{aligned} \tag{B.1.7}$$

Durch kürzen von $(1-\sigma)$ und umformen nach λ_t erhalten wir

$$\begin{aligned}\lambda_t &= c_t^{-\sigma}\left[\Psi(\frac{k_t}{\overline{k_t}})^{\delta}\Omega(\frac{c_t}{\overline{c_t}})^{\gamma}\right]^{1-\sigma} exp[-(1-\sigma)f(l_t)^{\phi}] \\ &+ [(c_t)\Psi(\frac{k_t}{\overline{k_t}})^{\delta}]^{1-\sigma}\gamma\,\Omega(\frac{c_t}{\overline{c_t}})^{\gamma(1-\sigma)-1}\,\Omega'(\frac{c_t}{\overline{c_t}})\frac{1}{\overline{c_t}} \\ &\times exp[-(1-\sigma)]f(l_t)^{\phi}.\end{aligned} \tag{B.1.8}$$

Auf Grund der Eigenschaft der Symmetrie der Individuen gilt $k_t = \overline{k_t}$ und $c_t = \overline{c_t}$, sowie $B_t \equiv k_t$ zu jedem Zeitpunkt im Gleichgewicht. Darüber hinaus werden die Formulierungen $\psi = \frac{\Psi'(1)}{\Psi(1)}$ und $\omega = \frac{\Omega'(1)}{\Omega(1)}$ verwendet. Durch die Funktionen ψ und ω wird gemessen wie wichtig Individuen ihr sozialer Status ist. Durch Herausheben von $\frac{1}{c_t}$ und $(1+\gamma\omega)$ ergibt sich folgende Gleichung

$$\frac{\left[(c_t)\,\Psi\,(1)^{\delta}\,\Omega\,(1)^{\gamma}\right]^{1-\sigma} exp\left[-(1-\sigma)f\,(l_t)^{\phi}\right](1+\gamma\omega)}{c_t} = \lambda_t. \tag{B.1.9}$$

Gleichung (B.1.5) errechnet sich durch Ableiten der Hamiltonfunktion nach der Kontrollvariablen l_t.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{H}}{\partial l_t} &= \frac{\left[(c_t)\,\Psi\,(1)^{\delta}\,\Omega\,(1)^{\gamma}\right]^{1-\sigma} exp\left[-(1-\sigma)f\,(l_t)^{\phi}\right](-(1-\sigma)\phi f(l_t)^{\phi-1}f'(l_t))}{1-\sigma} \\ &+ \lambda_t[A(k_t)^{\alpha}(B_t)^{1-\alpha}(1-\alpha)l_t^{-\alpha}] = 0.\end{aligned} \tag{B.1.10}$$

Dabei gilt $f'(l_t) = \frac{df}{dl_t}$.
Durch Kürzen von $(1-\sigma)$ und Anwendung der Eigenschaft $B_t \equiv k_t$, erhält man

$$[(c_t)\Psi\,(1)^{\delta}\,\Omega\,(1)^{\gamma}]^{1-\sigma} exp\left[-(1-\sigma)f\,(l_t)^{\phi}\right](-\phi f(l_t)^{\phi-1}f'(l_t)) + \lambda_t[A(k_t)(1-\alpha)l_t^{-\alpha}] = 0. \tag{B.1.11}$$

Durch Umformen ergibt sich

$$\underbrace{\left[(c_t)\Psi\left(1\right)^{\delta}\Omega\left(1\right)^{\gamma}\right]^{1-\sigma} exp\left[-(1-\sigma)f\left(l_t\right)^{\phi}\right]}_{\frac{\lambda_t c_t}{1+\gamma\omega}}(\phi f(l_t)^{\phi-1}f'(l_t)) = \lambda_t[A(k_t)(1-\alpha)l_t^{-\alpha}]. \tag{B.1.12}$$

Durch Einsetzen von λ_t aus (B.1.9) und Kürzen ergibt sich

$$\frac{c_t\phi f(l_t)^{\phi-1}f'(l_t)}{1+\gamma\omega} = Ak_t(1-\alpha)l_t^{-\alpha}. \tag{B.1.13}$$

Umformen nach $\phi f'(l_t)$ ergibt

$$\phi f'(l_t) = \frac{Ak_t(1-\alpha)l_t^{-\alpha}(1+\gamma\omega)}{c_t f(l_t)^{\phi-1}}. \tag{B.1.14}$$

Nun fehlt noch die dritte Bedingung erster Ordnung (B.1.6). Zunächst wird die Hamiltonfunktion nach der Zustandsvariable k_t abgeleitet. Anwenden der Symmetrieeigenschaften vereinfacht den Ausdruck.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{H}}{\partial k} = &\frac{[c_t\Omega(1)^{\gamma}]^{1-\sigma}\,\delta(1-\sigma)\Psi(1)^{\delta(1-\sigma)-1}\Psi'(1)\frac{1}{k_t}exp[-(1-\sigma)f(l_t)^{\phi}]}{1-\sigma}\\ &+\lambda_t[A\alpha k_t^{\alpha-1}B_t^{1-\alpha}l_t^{1-\alpha}].\end{aligned} \tag{B.1.15}$$

Die Verwendung von $B_t \equiv k_t$ und Kürzen von $(1-\sigma)$ ergibt die Gleichung

$$\frac{\partial\hat{H}}{\partial k} = [c_t\Omega(1)^{\gamma}]^{1-\sigma}\,\delta\Psi(1)^{\delta(1-\sigma)-1}\Psi'(1)\frac{1}{k_t}exp[-(1-\sigma)f(l_t)^{\phi}] + \lambda_t[A\alpha l_t^{1-\alpha}]. \tag{B.1.16}$$

Substituieren durch λ_t (B.1.9) und Kürzen und anschließendem Einsetzen des Ergebnisses $\hat{H}_k$ in (B.1.6) ergibt

$$\dot{\lambda}_t = \lambda_t\rho - \lambda_t[\frac{c_t\delta\psi}{k_t(1+\gamma\omega)} + A\alpha l_t^{1-\alpha}]. \tag{B.1.17}$$

Durch Umformen erhält man

$$A\alpha l_t^{1-\alpha} - [\rho - \frac{c_t}{k_t}\frac{\delta\psi}{1+\gamma\omega}] = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}. \tag{B.1.18}$$

B.1.2 Gleichgewicht

Für die Berechnung des Gleichgewichtes wird zunächst Gleichung (B.1.9.) nach der Zeit t abgeleitet. Anwendung der Produkt- und Quotientenregel ergibt schließlich

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_t = & \frac{\left[(1-\sigma)c_t^{-\sigma}\dot{c}_t\left[\Psi(1)^\delta\Omega(1)^\gamma\right]^{1-\sigma} exp[-(1-\sigma)f(l_t)^\phi](1+\gamma\omega)\right]c_t}{c_t^2} \\ & + \frac{\left[\left[c_t\Psi(1)^\delta\Omega(1)^\gamma\right]^{1-\sigma} exp\left[-(1-\sigma)f(l_t)^\phi\right](-(1-\sigma))\phi f(l_t)^{\phi-1}f'(l_t)\dot{l}_t(1+\gamma\omega)\right]c_t}{c_t^2} \\ & - \frac{[\left[(c_t)\,\Psi\,(1)^\delta\,\Omega\,(1)^\gamma\right]^{1-\sigma} exp\left[-(1-\sigma)f\,(l_t)^\phi\right](1+\gamma\omega)]\dot{c}_t}{c_t^2}.\end{aligned} \tag{B.1.19}$$

Herausheben von $\lambda_t c_t$ ergibt

$$\begin{aligned}&\left[(c_t)\,\Psi\,(1)^\delta\,\Omega\,(1)^\gamma\right]^{1-\sigma} exp\left[-(1-\sigma)f\,(l_t)^\phi\right](1+\gamma\omega) \\ &\times\frac{\left[[(1-\sigma)\frac{\dot{c}_t}{c_t}-(1-\sigma)\phi f(l_t)^{\phi-1}f'(l_t)\dot{l}_t]c_t-\dot{c}_t\right]}{c_t^2}=\dot{\lambda}_t,\end{aligned} \tag{B.1.20}$$

beziehungsweise

$$\frac{\lambda_t c_t\left[\dot{c}_t(-\sigma)-(1-\sigma)\phi f(l_t)^{\phi-1}f'(l_t)\dot{l}_t c_t\right]}{c_t^2}=\dot{\lambda}_t. \tag{B.1.21}$$

Durch Kürzen und Umformen ergibt sich

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}=\frac{\dot{c}_t(-\sigma)-(1-\sigma)\phi f(l_t)^{\phi-1}f'(l_t)\dot{l}_t c_t}{c_t}. \tag{B.1.22}$$

Sei $g=\frac{\dot{y}}{y}=\frac{\dot{c}}{c}=\frac{\dot{k}}{k}$ die Wachstumsrate für Output, Konsum und Kapital und l_t konstant ($\dot{l}_t=0$). Daraus folgt

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}=\frac{(-\sigma)\dot{c}_t}{c_t}=(-\sigma)g. \tag{B.1.23}$$

Gleichung (6.1.3) und (6.1.1) und Verwendung der Symmetrieeigenschaft $B_t\equiv k_t$ liefert

$$g = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{y_t}{k_t} - \frac{c_t}{k_t} = Al_t^{1-\alpha} - \frac{c_t}{k_t}. \tag{B.1.24}$$

Kombinieren von (B.1.23) und (B.1.24) und einsetzen in Gleichung (B.1.18) liefert

$$A\alpha l_t^{1-\alpha} - [\rho - \frac{c_t}{k_t}\frac{\delta\psi}{1+\gamma\omega}] = \sigma(Al_t^{1-\alpha} - \frac{c_t}{k_t}). \tag{B.1.25}$$

Umformen der Gleichung (B.1.14) nach $\frac{c_t}{k_t}$ und Einsetzen ergibt

$$A\alpha l_t^{1-\alpha} - [\rho - \frac{(1+\gamma\omega)(1-\alpha)A(l_t)^{-\alpha}}{\phi f'(l_t)f(l_t)^{1-\phi}}\frac{\delta\psi}{1+\gamma\omega}] = \sigma(Al_t^{1-\alpha} - \frac{(1+\gamma\omega)(1-\alpha)A(l_t)^{-\alpha}}{\phi f'(l_t)f(l_t)^{1-\phi}}). \tag{B.1.26}$$

Durch Umformen von (B.1.26) ist das Gleichgewicht durch

$$\frac{(1-\alpha)A(l_t^*)^{-\alpha}}{\phi f'(l_t^*)f(l_t^*)^{1-\phi}}[\sigma(1+\gamma\omega)+\delta\psi] = (\sigma-\alpha)A(l_t^*)^{1-\alpha} + \rho \tag{B.1.27}$$

gegeben, wobei konstantes Arbeitsangebot l_t^* existiert.

B.1.3 Wachstumsraten

Für die entsprechende Wachstumsrate im Gleichgewicht gilt $g^* = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{k}}{k}$. Umformen der Gleichung (B.1.21) und Einsetzen von (B.1.18) ergibt

$$\dot{c}_t = \frac{[A\alpha l_t^{1-\alpha} - [\rho - \frac{(1+\gamma\omega)(1-\alpha)A(l_t)^{-\alpha}}{\phi f'(l_t)f(l_t)^{1-\phi}}\frac{\delta\psi}{1+\gamma\omega}]]c_t + (1-\sigma)\phi f(l_t)^{\phi-1}f'(l_t)\dot{l}_t c_t}{\sigma} \tag{B.1.28}$$

beziehungsweise

$$\dot{c}_t = \frac{[A\alpha l_t^{1-\alpha} - [\rho - \frac{(1-\alpha)A(l_t)^{-\alpha}}{\phi f'(l_t)f(l_t)^{1-\phi}}\delta\psi]]c_t + (1-\sigma)\phi f(l_t)^{\phi-1}f'(l_t)\dot{l}_t c_t}{\sigma}. \tag{B.1.29}$$

Durch Einsetzen der Gleichgewichtseigenschaft $\dot{l}_t = 0$ und Umformen erhält man folgende Wachstumsrate

$$g^* = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{(1-\alpha)A(l_t^*)^{-\alpha}\delta\gamma[\phi f'(l_t^*)f(l_t^*)^{\phi-1}]^{-1} + \alpha A(l_t^*)^{1-\alpha} - \rho}{\sigma}. \tag{B.1.30}$$

Um den Fall von fixem Arbeitsangebot zu untersuchen, gilt $l_t = 1$ und o.B.d.A. $f(l_t) = 1$. Die Bedingungen erster Ordnung sind durch die folgenden Gleichungen gegeben

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial c_t} = 0 \Rightarrow \frac{\left[(c_t)\,\Psi\,(1)^{\delta}\,\Omega\,(1)^{\gamma}\right]^{1-\sigma} exp[-(1-\sigma)]\,(1+\gamma\omega)}{c_t} = \lambda_t, \tag{B.1.31}$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial k_t} = \rho\lambda_t - \dot{\lambda}_t \Rightarrow A\alpha - [\rho - \frac{c_t}{k_t}\frac{\delta\psi}{1+\gamma\omega}] = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}. \tag{B.1.32}$$

Ableiten der Gleichung (B.1.31) nach der Zeit t und substituieren von λ_t aus (B.1.31) ergibt

$$(-\sigma)\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}. \tag{B.1.33}$$

Umformen der Gleichung (6.1.3) nach $\dot{k}_t$ ergibt

$$\begin{aligned} \dot{k}_t &= y_t - c_t \\ &= A(k_t)^{\alpha}(B_t l_t)^{1-\alpha} - c_t \\ &= Ak_t - c_t. \end{aligned} \tag{B.1.34}$$

Für einen Balance Growth Path mit Wachstumsrate g gilt laut Definition

$$g = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t}. \tag{B.1.35}$$

Verwendung von (B.1.34) und (B.1.35) ergibt

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = A - \frac{c_t}{k_t} \Rightarrow \frac{c_t}{k_t} = A - g. \tag{B.1.36}$$

Einsetzen von (B.1.32) in (B.1.33) und substituieren von (B.1.35) und (B.1.36) liefert

$$\begin{aligned}
\alpha A - [\rho - (A-g)\frac{\delta\psi}{1+\gamma\omega}] &= \sigma g \\
\alpha A - \rho + \frac{A\delta\psi - g\delta\psi}{1+\gamma\omega} &= \sigma g \\
\alpha A - \rho + \frac{A\delta\psi}{1+\gamma\omega} - \frac{g\delta\psi}{1+\gamma\omega} &= \sigma g \\
\alpha A - \rho + \frac{A\delta\psi}{1+\gamma\omega} &= \sigma g + \frac{g\delta\psi}{1+\gamma\omega} \\
\alpha A - \rho + \frac{A\delta\psi}{1+\gamma\omega} &= g(\sigma + \frac{\delta\psi}{1+\gamma\omega}) \\
\alpha A - \rho + \frac{A\delta\psi}{1+\gamma\omega} &= g(\frac{\sigma(1+\gamma\omega)+\delta\psi}{1+\gamma\omega}) \\
\frac{\alpha A(1+\gamma\omega)}{\sigma(1+\gamma\omega)+\delta\psi} - \frac{\rho(1+\gamma\omega)}{\sigma(1+\gamma\omega)+\delta\psi} + \frac{A\delta\psi}{\sigma(1+\gamma\omega)+\delta\psi} &= g.
\end{aligned}$$

Im Falle von fixem Arbeitsangebot ergibt sich folgende Wachstumsrate

$$g = \frac{A[\delta\psi + \alpha(1+\gamma\omega)] - \rho(1+\gamma\omega)}{\sigma(1+\gamma\omega)+\delta\psi}. \tag{B.1.37}$$

B.1.4 Bedingungen Erster Ordnung für konkrete Statusfunktionen

Die Hamiltonfunktion des Systems lautet

$$\hat{H} = \frac{\left[(c_t)\left(k_t\overline{k}_t^{-\delta}\right)\left(c_t\overline{c}_t^{-\gamma}\right)\right]^{1-\sigma} exp\left[-(1-\sigma)l_t^{\phi}\right]}{1-\sigma} + \lambda_t\left[A\left(k_t\right)^{\alpha}\left(B_t l_t\right)^{1-\alpha} - c_t\right]. \tag{B.1.38}$$

Die Bedingungen Erster Ordnung berechnen sich analog zu (B.1.4)- (B.1.6).

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial c_t} = \frac{\left(k_t\overline{k}_t^{-\delta}\right)^{1-\sigma} 2(1-\sigma)c_t^{2(1-\sigma)-1}\overline{c}_t^{-\gamma(1-\sigma)} exp\left[-(1-\sigma)l_t^{\phi}\right]}{1-\sigma} - \lambda_t = 0 \tag{B.1.39}$$

Daraus folgt auf Grund der Eigenschaften der Symmetrie: $k_t = \overline{k}_t$ und $c_t = \overline{c}_t$, sowie $B_t \equiv k_t$, dass

$$k_t^{(1-\delta)(1-\sigma)} 2c_t^{(2-\gamma)(1-\sigma)-1} exp\left[-(1-\sigma l_t^{\phi})\right] = \lambda_t. \tag{B.1.40}$$

Als Nächstes wird die Hamiltonfunktion nach der Kontrollvariablen l_t abgeleitet, es ergibt sich

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial l_t} = \underbrace{\frac{\left[(c_t)\left(k_t \overline{k}_t^{-\delta}\right)\left(c_t \overline{c}_t^{-\gamma}\right)\right]^{1-\sigma} exp\left[-(1-\sigma)l_t^{\phi}\right]\left(-(1-\sigma)\phi l_t^{\phi-1}\right)}{1-\sigma}}_{\frac{\lambda_t c_t \phi l_t^{\phi-1}}{2} \text{ im Gleichgewicht}} + \lambda_t A k_t^{\alpha} B^{1-\alpha}(1-\alpha) l_t^{-\alpha} = 0 \tag{B.1.41}$$

Daraus ergibt sich wiederum

$$\frac{\phi l_t^{\phi-1} c_t}{2} = A k_t (1-\alpha) l_t^{-\alpha}. \tag{B.1.42}$$

Schlussendlich wird noch nach der Zustandsvariablen k_t differenziert und es gilt

$$\underbrace{\frac{(1-\sigma)k_t^{-\sigma}\overline{k}_t^{-\delta(1-\sigma)}(c_t^2 \overline{c}_t^{-\gamma})^{1-\sigma} exp\left[-(1-\sigma)l_t^{\phi}\right]}{1-\sigma}}_{\frac{\lambda_t c_t}{2k_t} \text{ im Gleichgewicht}} + \lambda_t A \alpha k_t^{\alpha-1} B^{1-\alpha} l_t^{1-\alpha} = \rho \lambda_t - \dot{\lambda}_t \tag{B.1.43}$$

Durch Kürzen und Umformen, ergibt sich

$$\frac{c_t}{2k_t} + A\alpha l_t^{1-\alpha} = \rho - \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda}. \tag{B.1.44}$$

B.1.5 Gleichgewicht für konkrete Statusfunktionen

Ableiten der Gleichung (B.1.40) nach t ergibt

$$\frac{(1-\delta)(1-\sigma)k_t^{(1-\delta)(1-\sigma)-1}\dot{k}_t 2 c_t^{(2-\gamma)(1-\sigma)-1} exp\left[-(1-\sigma)l_t^{\phi}\right]}{1-\sigma} \tag{B.1.45}$$

$$+\frac{k_t^{(1-\delta)(1-\sigma)} 2\left[(2-\gamma)(1-\sigma)-1\right] c_t^{(2-\gamma)(1-\sigma)-2}\dot{c}_t exp\left[-(1-\sigma)l_t^{\phi}\right]}{1-\sigma} \tag{B.1.46}$$

$$+\frac{k_t^{(1-\delta)(1-\sigma)} 2 c_t^{(2-\gamma)(1-\sigma)-1} exp\left[-(1-\sigma)l_t^{\phi}\right]\left(-(1-\sigma)\phi l_t^{\phi-1}\dot{l}_t\right)}{1-\sigma} = \dot{\lambda}_t \tag{B.1.47}$$

Durch Kürzen und Verwendung der Gleichgewichtseigenschaft $\dot{l}_t = 0$ folgt

$$\frac{(1-\delta)\dot{k}_t}{k_t}\lambda_t + \frac{[(2-\gamma)(1-\sigma)-1]\,\dot{c}_t}{(1-\sigma)c_t}\lambda_t = \dot{\lambda}_t. \tag{B.1.48}$$

Dividieren durch λ_t und Substituieren der Wachstumsrate $g = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{\dot{c}_t}{c_t}$ ergibt

$$(1-\delta)g + (2-\gamma)g - \frac{g}{(1-\sigma)} = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}. \tag{B.1.49}$$

Einsetzen in (B.1.44) liefert

$$\frac{c_t}{2k_t} + A\alpha l_t^{1-\alpha} = \rho - \left[(1-\delta)g + (2-\gamma)g - \frac{g}{(1-\sigma)}\right]. \tag{B.1.50}$$

Ausdrücken von $\frac{c_t}{k_t}$ aus (B.1.42) und Einsetzen ergibt

$$\frac{A(1-\alpha)l_t^{-\alpha}}{\phi l_t^{\phi-1}} + A\alpha l_t^{1-\alpha} = \rho - \left[(3-\delta-\gamma-\frac{1}{(1-\sigma)}\right] g. \tag{B.1.51}$$

Die Wachstumsrate g berechnet sich laut (B.1.36) und (B.1.42):

$$g = A l_t^{1-\alpha} - \frac{2A(1-\alpha)l_t^{-\alpha}}{\phi l_t^{\phi-1}}. \tag{B.1.52}$$

Durch Einsetzen in (B.1.51) resultiert

$$\frac{A(1-\alpha)l_t^{-\alpha}}{\phi l_t^{\phi-1}} + A\alpha l_t^{1-\alpha} = \rho - \left[(3-\delta-\gamma-\frac{1}{(1-\sigma)}\right]\left(A l_t^{1-\alpha} - \frac{2A(1-\alpha)l_t^{-\alpha}}{\phi l_t^{\phi-1}}\right). \tag{B.1.53}$$

Umformen ergibt folgendes Gleichgewicht

$$-(5-2\delta-2\gamma-\frac{2}{(1-\sigma)})\frac{A(1-\alpha)(l^*)^{-\alpha}}{\phi(l^*)^{\phi-1}} = -(3-\delta-\gamma-\frac{1}{(1-\sigma)}-\alpha)A(l^*)^{1-\alpha}+\rho \tag{B.1.54}$$

B.1.6 Wachstumsrate für konkrete Statusfunktionen

Umformen von (B.1.51) nach g ergibt

$$\frac{(1-\sigma)(A(1-\alpha)(l^*)^{-\alpha} + A\alpha(l^*)^{-\alpha+\phi}\phi - \rho\phi(l^*)^{\phi-1})}{((1-\sigma)(-3+\delta+\gamma)+1)\,\phi(l^*)^{\phi-1}} = g \tag{B.1.55}$$

Ableiten dieser Funktion nach $\delta(\gamma)$ ergibt

$$\frac{(1-\sigma)[A(1-\alpha)(-\alpha)(l^*)^{-\alpha-1}\frac{\partial l^*}{\partial\delta(\gamma)} + A\alpha(-\alpha+\phi)(l^*)^{-\alpha+\phi-1}\phi\frac{\partial l^*}{\partial\delta(\gamma)} - \rho(\phi-1)\phi(l^*)^{\phi-2}\frac{\partial l^*}{\partial\delta(\gamma)}]}{[((1-\sigma)(-3+\delta+\gamma)+1)\,\phi(l^*)^{\phi-1}]^2}$$
$$-\frac{(1-\sigma)(A(1-\alpha)(l^*)^{-\alpha} + A\alpha(l^*)^{-\alpha+\phi}\phi - \rho\phi(l^*)^{\phi-1})}{[((1-\sigma)(-3+\delta+\gamma)+1)\,\phi(l^*)^{\phi-1}]^2}$$
$$\times\,[(1-\sigma)\phi l^{*\phi-1} + ((1-\sigma)(-3+\delta+\gamma)+1)\phi(\phi-1)(l^*)^{\phi-2}\frac{\partial l^*}{\partial\delta(\gamma)}] = \frac{\partial g}{\partial\delta(\gamma)*}.$$

Im Falle von fixem Arbeitsangebot $l_t = 1$, erhält man nachstehende Bedingungen erster Ordnung:

$$k_t^{(1-\delta)(1-\sigma)2c_t^{(2-\gamma)(1-\sigma)-1}exp[-(1-\sigma)]} = \lambda_t \tag{B.1.56}$$

und

$$\frac{c_t}{2k_t} + A\alpha = \rho - \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}. \tag{B.1.57}$$

Kombinieren dieser Bedingungen und Anwenden von (B.1.36) ergibt

$$\frac{A-g}{2} + A\alpha = \rho - (3-\delta-\gamma-\frac{1}{1-\sigma})g \tag{B.1.58}$$

und daraus folgt

$$\frac{(1-\sigma)(A+2A\alpha-2\rho)}{2(-2.5+\delta+\gamma)(1-\sigma)+2} = g. \tag{B.1.59}$$

Ableiten dieser Gleichung nach $\delta(\gamma)$ ergibt

$$\frac{-(1-\sigma)(A+2A\alpha-2\rho)2(1-\sigma)}{[2(-2.5+\delta+\gamma)(1-\sigma)+2]^2} = \frac{\partial g}{\partial\delta(\gamma)}. \tag{B.1.60}$$

B.2 Nutzenmaximierung für heterogene Individuen

B.2.1 Bedingungen Erster Ordnung

Die current- value- Hamiltonfunktion des Optimierungssystems lautet

$$H = lnc_{it} + ln(\Psi(c_{it}/\bar{c}_{it})) + \delta(T-l_{it}) + \lambda_{it}[A_i(k_{it})^{\alpha}(k_t l_{it})^{1-\alpha} - c_{it}]. \tag{B.2.1}$$

Die Bedingungen Erster Ordnung berechnen sich aus

$$\frac{\partial H}{\partial c_{it}} = 0, \tag{B.2.2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial l_{it}} = 0, \tag{B.2.3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_{it}} = \rho\lambda_{it} - \dot{\lambda}_{it}. \tag{B.2.4}$$

Ableiten der Funktion nach der Kontrollvariablen c_{it} und Nullsetzen ergibt

$$\frac{1}{c_{it}} + \frac{\frac{\partial\Psi(\cdot)}{\partial(c_{it}/\overline{c}_{it})}\frac{1}{\overline{c}_{it}}}{\Psi(\cdot)} - \lambda_{it} = 0. \tag{B.2.5}$$

Berechnung der Ableitung der Statusfunktion durch Exponentieren und Logarithmieren ergibt

$$\frac{\partial\Psi(\cdot)}{\partial(c_{it}/\overline{c}_{it})} = \Psi(\cdot)(1 + \phi ln(\frac{c_{it}}{\overline{c}_{it}}))\frac{\overline{c}_{it}}{c_{it}}. \tag{B.2.6}$$

Für die Vereinfachung des Ausdruckes nutzen Tournemaine und Tsoukis folgende Substitution

$$\psi_i = \frac{c_{it}}{\overline{c}_{it}}\frac{\partial\Psi(c_{it}/\overline{c}_{it})/\partial(c_{it}/\overline{c}_{it})}{\Psi(c_{it}/\overline{c}_{it})} \tag{B.2.7}$$

$$= 1 + \phi ln(\frac{c_{it}}{\overline{c}_{it}}). \tag{B.2.8}$$

Durch Einsetzen in (B.2.5) erhält man

$$\lambda_{it} = \frac{1}{c_{it}}(1 + \psi_i). \tag{B.2.9}$$

Gleichung (B.2.3) ergibt sich aus

$$\frac{\partial H}{\partial l_{it}} = -\delta + \lambda_{it}A_i(k_{it})^{\alpha}(k_t)^{1-\alpha}(1-\alpha)(l_{it})^{-\alpha} = 0, \tag{B.2.10}$$

weiteres Umformen und Verwendung von (6.3.1) und (B.2.7) ergibt

$$\delta = \frac{(1-\alpha)(1+\psi_i)y_{it}}{l_{it}c_{it}}. \tag{B.2.11}$$

Durch Ableiten der Hamiltonfunktion nach der Zustandvariablen k_{it} erhält man

$$\frac{\partial H}{\partial k_{it}} = \lambda_{it}[A_i \alpha (k_{it})^{\alpha-1}(k_t l_{it})^{1-\alpha}]. \tag{B.2.12}$$

Einsetzen in (B.2.4) und Verwendung von (6.3.1) ergibt

$$\rho = \frac{\alpha y_{it}}{k_{it}} + \frac{\dot{\lambda}_{it}}{\lambda_{it}}. \tag{B.2.13}$$

B.2.2 Gleichgewicht

Umformen der Gleichung (6.3.13) nach c_{it} und dividieren durch $\bar{c}_{it}$, wobei laut Definition $\overline{c_{it}} = (c_{1t})^{\gamma_i}(c_{2t})^{1-\gamma_i}$, ergibt

$$\frac{c_{it}}{\bar{c}_{it}} = \frac{[(1-\alpha)g + \rho]k_{it}/\alpha}{(k_{1t})^{\gamma_i}(k_{2t})^{1-\gamma_i}[(1-\alpha)g + \rho]/\alpha} = \frac{k_{it}}{\overline{k}_{it}}. \tag{B.2.14}$$

Dabei wird $\overline{k}_{it} = (k_{1t})^{\gamma_i}(k_{2t})^{1-\gamma_i}$ definiert. Für die Berechnung des relativen Kapitals der Individuen unter Verwendung der Elastizität der Statusfunktion, approximiert man $ln(1+\psi_i) \approx \psi_i$ nahe der Symmetrie der Individuen. Aus (6.3.17) folgt

$$A_i \left(\frac{k_{it}}{k_t}\right)^{\alpha-1} \left[\frac{(1-\alpha)(g+\rho)}{\delta[(1-\alpha)g+\rho]}\right]^{1-\alpha} exp((1-\alpha)\underbrace{ln[1+\psi_i]}_{\psi_i}) = \left(\frac{g+\rho}{\alpha}\right). \tag{B.2.15}$$

Durch Einsetzen von ψ_i aus (6.3.11) in (B.2.15) und Substituieren durch (B.2.14), resultiert

$$A_i \left(\frac{k_{it}}{k_t}\right)^{\alpha-1} \left[\frac{(1-\alpha)(g+\rho)}{\delta[(1-\alpha)g+\rho]}\right]^{1-\alpha} exp(1-\alpha) \left(\frac{k_{it}}{\overline{k}_{it}}\right)^{\phi(1-\alpha)} = \left(\frac{g+\rho}{\alpha}\right). \tag{B.2.16}$$

Verwendung von $\overline{k}_{it} = (k_{1t})^{\gamma_i}(k_{2t})^{1-\gamma_i}$ und Umformen liefert für die Gruppe 1

$$\left(\frac{k_{1t}}{k_t}\right)^{1-(1-\gamma_1)\phi} = \Omega(g) A_1^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{k_{2t}}{k_t}\right)^{-(1-\gamma_1)\phi} \tag{B.2.17}$$

und für die Gruppe 2

$$\left(\frac{k_{2t}}{k_t}\right)^{(1-\gamma_2\phi)} = \Omega(g) A_2^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{k_{1t}}{k_t}\right)^{-\gamma_2\phi}. \tag{B.2.18}$$

Einsetzen der Gleichung (B.2.17) in (B.2.18) und umgekehrt ergibt schließlich (6.3.18) und (6.3.19). Wobei

$$\Omega(g) = \left[\frac{(1-\alpha)(g+\rho)}{\delta[(1-\alpha)g+\rho]}\right] \left(\frac{g+\rho}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}} exp(1).$$