



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Die Mathematik in der Vermessungskunde Anwendung im Schulunterricht

Ausgeführt am

Institut für Analysis und Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Frau Ao.Univ.Prof. Mag. Dr. Gabriela SCHRANZ-KIRLINGER

durch

Dipl.-Ing. Christa Sartorius

Wien, am 10. Februar 2014

Kurzzusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit mathematischen Prinzipien der Vermessungskunde und ihrer Anwendungen in Berufs- und Schulleben. Dabei wurden zusätzlich die historische Entwicklung des Vermessungswesens, ihre Arbeitsmethoden und ihre Überlegungen zu Messfehlern beleuchtet, um einen besseren Einblick in die Welt der Geodäsie zu erhalten. Schwerpunkt dieser Ausarbeitung liegt auf zwei Methoden der Vermessungskunde: Einschneideverfahren und trigonometrische Höhenbestimmung. Die einzelnen mathematischen Schritte werden dabei genau erläutert und mit Beispielen verdeutlicht. Zusätzlich wird eine mögliche Umsetzung im Schulunterricht aufgezeigt, da sich diese Verfahren auch im fächerübergreifenden und praxisnahen Unterricht gut einsetzen lassen. Mathematik erhält in diesem Fall eine anschauliche Umsetzung im Alltag.

Summary

This diploma thesis discusses mathematical principals of geodesy and its use in professional and school life. The first part gives a description of the historical progress, the working methods and the consequences of errors developing during a measurement. The main emphasis of this treatise lies on two principles of geodesy. The methods of intersection and resection as well as trigonometric altitude measurement are explained step by step and combined with examples. Another point of view discusses the possibility of practicing the principles of geodesy in school. The purpose is not only the theoretical realisation in lessons but also the practical and interdisciplinary involvement.

Vorwort

Das Thema dieser Arbeit entstand während eines Gesprächs mit Frau Ao. Univ. Prof. Mag. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger nach Absolvierung einer Prüfung. Da ich mehrmals ein Ferialpraktikum in einem Vermessungsbüro machen durfte, mich diese Arbeit stark prägte und meine Betreuerin unter anderem Vorlesungen für Studierende des Vermessungswesens abhält, beschloss ich meine Abschlussarbeit der Mathematik der Vermessung zu widmen. Als angehende Lehrerin der Fächer Mathematik und Geographie und Wirtschaftskunde wählte ich die bearbeiteten Gebiete aus dem Vermessungswesen so aus, dass auch eine Beleuchtung unter dem Fokus praxisbezogener Unterricht möglich war. Eine detaillierte Ausarbeitung von didaktischen Rastern oder Stundenbildern wurden im Vorfeld mit Frau Ao. Univ. Prof. Mag. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger als nicht notwendig erachtet.

Für die Recherche wurden die Universitätsbibliotheken der Technischen Universität und der Universität Wien herangezogen. Außerdem erwiesen sich einige Internetseiten als nützliche Quellen.

An dieser Stelle möchte ich vor allem meiner Familie und meinen Freunden danken, die mir immer unterstützend zur Seite standen. Weiters möchte ich Herrn Oberstudienrat Dipl.-Ing. Herbert Egger explizit erwähnen, der mir die Faszination des Vermessungswesens näher brachte.

Inhalt

1	EINLEITUNG	7
2	ALLGEMEINES ZUR VERMESSUNGSKUNDE	9
2.1	KURZE GESCHICHTLICHE ENTWICKLUNG DES VERMESSUNGSWESENS	9
2.2	FUNKTIONSWEISE VON THEODOLIT BZW. TACHYMETER	12
3	MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER VERMESSUNGSKUNDE	16
3.1	GEOMETRISCHE GRUNDLAGEN.....	16
3.1.1	<i>Ebene Geometrie</i>	16
3.1.2	<i>Trigonometrie</i>	20
3.2	KOORDINATENSYSTEME UND WINKELBEZEICHNUNG IM VERMESSUNGSWESEN.....	21
3.2.1	<i>Rechtwinkelige Koordinatensysteme und Polarkoordinaten</i>	22
3.2.2	<i>Weitere Koordinatensysteme</i>	25
3.2.3	<i>Winkelmaße</i>	26
3.3	HAUPTAUFGABEN DER KOORDINATENBERECHNUNG IM VERMESSUNGSWESEN	26
3.3.1	<i>1. Hauptaufgabe</i>	26
3.3.2	<i>2. Hauptaufgabe</i>	28
3.4	EBENE KOORDINATENTRANSFORMATION	30
3.5	BEISPIELE	33
3.5.1	<i>Beispiel 1 – 1. Hauptaufgabe der Vermessungskunde</i>	33
3.5.2	<i>Beispiel 2 – 2. Hauptaufgabe der Vermessungskunde</i>	34
3.5.3	<i>Beispiel 3 – 2. Hauptaufgabe der Vermessungskunde</i>	35
3.5.4	<i>Beispiel 4 – Ebene Koordinatentransformation</i>	35
4	GENAUIGKEITSÜBERLEGUNGEN - FEHLERFORTPFLANZUNG	38
4.1	FEHLERARTEN	38
4.1.1	<i>Grobe Fehler</i>	38
4.1.2	<i>Systematische Fehler / Modellfehler</i>	39
4.1.3	<i>Zufällige Fehler</i>	39
4.2	STATISTISCHE KENNGRÖßEN UND METHODEN DER FEHLERRECHNUNG	39
4.2.1	<i>Auswertung von Messergebnissen: Mittelwert, Standardabweichung oder Variationskoeffizient</i>	42
4.3	FEHLERFORTPFLANZUNGSGESETZ	44

4.4	EINFACHE AUSGLEICHSRECHNUNG	45
4.5	BEISPIELE	46
4.5.1	<i>Beispiel 1</i>	46
4.5.2	<i>Beispiel 2</i>	47
5	EINSCHNEIDEVERFAHREN	48
5.1	VORWÄRTSEINSCHNEIDEN.....	48
5.1.1	<i>Vorwärtseinschnitt mit Gegensicht</i>	49
5.1.2	<i>Vorwärtseinschnitt ohne Gegensicht</i>	50
5.2	RÜCKWÄRTSEINSCHNEIDEN	52
5.3	BOGENSCHNITT	58
5.4	FEHLERZEIGENDE FIGUREN	60
5.5	BEISPIELE	65
5.5.1	<i>Beispiel 1 – Vorwärtseinschneiden</i>	65
5.5.2	<i>Beispiel 2 – Vorwärtseinschneiden</i>	66
5.5.3	<i>Beispiel 3 – Rückwärtseinschneiden</i>	68
5.5.4	<i>Beispiel 4 – Bogenschnitt</i>	70
6	TRIGONOMETRISCHE HÖHENMESSUNG	72
6.1	GEOMETRISCHES NIVELLEMENT.....	75
6.2	TRIGONOMETRISCHES NIVELLEMENT.....	76
6.3	TURMHÖHENBESTIMMUNG	77
6.3.1	<i>Turmhöhenbestimmung mittels vertikalem Hilfsdreieck</i>	77
6.3.2	<i>Turmhöhenbestimmung mittels horizontalem Hilfsdreieck</i>	80
6.4	BEISPIELE	82
6.4.1	<i>Beispiel 1 – Trigonometrisches Nivellement</i>	82
6.4.2	<i>Beispiel 2 – Vertikales Hilfsdreieck</i>	83
6.4.3	<i>Beispiel 3 – Horizontales Hilfsdreieck</i>	84
7	UMSETZUNG IM UNTERRICHT	86
7.1	LEHRPLANBEZUG.....	88
7.1.1	<i>Grundkompetenzkatalog des BIFIE</i>	90
7.2	SCHULUNTERRICHT UND VERMESSUNGSKUNDE.....	91
7.2.1	<i>Möglicher Aufbau im Mathematik-Unterricht</i>	94
7.2.2	<i>Genauigkeitsüberlegungen im Unterricht</i>	99

7.2.3	<i>Fächerübergreifende Aspekte</i>	101
7.3	ANWENDUNG DES GELERTEN IN DER NATUR	102
7.4	AUFARBEITEN DER PROJEKTTAGE BZW. DER EXKURSION.....	103
8	ZUSAMMENFASSUNG	105
9	LITERATURVERZEICHNIS	107
10	ABBILDUNGS- UND TABELLENVERZEICHNIS	110
11	ANHANG	113
11.1	ANHANG 1	114
11.2	ANHANG 2	115

1 EINLEITUNG

Bei einem Spaziergang durch den Heimatort werden Gebäude, Wahrzeichen, Plätze oder Parks wahrgenommen, meist auch Lokale und Geschäfte, schon seltener Risse an älteren Häuserfassaden oder Spurrinnen in der Straße.

Wenigen Menschen ist bewusst, dass sich in ihrer Umgebung für das Vermessungswesen Relevantes befindet. Geht man mit fokussiertem Blick durch die Straßen oder beobachtet eine Vermessung mit Theodolit und Reflektor aus der Ferne, werden plötzlich in Gehsteig geschlagene Silbernägel mit Aufschrift oder Gabelpunkte an Häuserkanten sichtbar. Diese Punkte wurden angebracht, um Messungen durchführen zu können. Sie helfen Grenzen zwischen einzelnen Grundstücken festzulegen oder eine Baugrube für die Errichtung eines Einfamilienhauses abzustecken.

Was bedeutet nun eigentlich **Vermessungswesen**? „Als *Vermessungskunde oder Geodäsie* [...] bezeichnet man die Lehre von der Ausmessung der Erdoberfläche mit ihren Veränderungen und ihrer Darstellung in Verzeichnissen, Karten und Plänen.“ (WITTE 1991, S. 1)

Bei Vermessungen im Freien wird oftmals mit Maßband, Nivelliergerät und Reflektoren gearbeitet. Während des Vorgangs werden von manchen Vermessungstechniker/innen Skizzen angefertigt, die das Prozedere protokollieren und bei der Erstellung des Plans am Computer helfen können.

Heutzutage sind bereits viele amtliche Festpunkte im Gelände beim Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen gemeldet, auf die man sich bei neuen Messungen beziehen kann. Die Messpunkte sind oft Kirchturmspitzen, da diese auch von sehr großen Entfernungen sichtbar sind, können aber auch Gabelpunkte¹ an Gebäudeecken oder Ähnliches sein. Unter **Festpunkt** wird ein stabiler Vermessungspunkt verstanden, der aus vorhergehenden Vermessungen koordinatenmäßig bekannt ist und somit für weitere Messungen herangezogen werden kann. Er kann auch vermarktet und somit markiert sein (vgl. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Festpunkt> - 16.1.2014). Das großmaschige Festpunkte-Netz wird von lokalen Vermessungsbüros noch durch **Polygonpunkte** ergänzt, die nur für die gerade anstehende Vermessung benutzt werden oder für ein Gebiet in der näheren Umgebung, da das Festpunkt-Netz im Normalfall nicht ausreicht, um einen gesuchten Punkt anzuvisieren. Dabei wird aber darauf geachtet, die gemachte Messung an einem in der Nähe befindlichen Festpunkt anzuschließen, um ein Einbetten in das vorhandene österreichweite Koordinatensystem zu gewährleisten.

In dieser Arbeit soll der Frage nachgegangen werden, welche Bereiche des Vermessungswesens im Mathematikunterricht Anwendungen finden könnten, welches Vorwissen dafür notwendig ist und in welchem Rahmen dies geschehen kann. Das Vermessungswesen ist eigentlich im Mathematik-Unterricht der Oberstufe in allen Schultypen bereits vertreten. Trigonometrische Beispiele sind vielen aus dem eigenen Unterricht bekannt, nicht aber ihre genauere Bedeutung im Alltag.

¹ Gabelpunkt: Zwei Ringbolzen werden in einer Mauer befestigt. In diese können zwei gleichlange Metallstangen eingehängt werden und bestimmen durch das sich so ergebende gleichschenkelige Dreieck einen Festpunkt. Diese Methode wird im verbauten Gebiet angewendet (vgl. EGGGER 2000, S.14).

Um einen Einblick in die Welt der Vermessung zu schaffen, werden in dieser Arbeit anfänglich Informationen zur historischen Entwicklung und zur Funktionsweise des Theodoliten, dem heute gebräuchlichsten Vermessungsgerät, gegeben. Außerdem wird Grundlegendes aus dem Bereich der Mathematik und der Vermessung in kompakter Form zusammengefasst. Allgemeines zur ebenen Geometrie ist hier ebenso zu finden wie Informationen zu im Vermessungswesen verwendeten Koordinatensystemen. Fehlerquellen, die bei Vermessungen auftreten können, und ihre Minimierung bzw. Eliminierung werden in einem eigenen Kapitel behandelt. Dieses Thema findet sich jedoch in jedem Kapitel in einer anderen Ausprägung wieder, da Messungenauigkeiten zum Alltag des Vermessungswesens gehören.

Im Anschluss werden zwei mögliche für den Schulunterricht umsetzbare Prinzipien des Vermessungswesens näher beleuchtet. Im Kapitel Einschnideverfahren werden verschiedene Methoden vorgestellt und am Ende mit Beispielen veranschaulicht. Außerdem werden hier Maßnahmen gezeigt, wie bereits im Vorfeld Messvorgänge geplant werden könnten, um bei der tatsächlichen Durchführung eine minimale Abweichung zu erhalten. Das Kapitel der trigonometrischen Höhenmessung stellt zwei Vorgangsweisen und ihre Genauigkeitskriterien vor. Auch hier folgen Beispiele zum besseren Verständnis.

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit einer möglichen Umsetzung im Unterricht. Das im Lehrplan (vgl. Lehrplan AHS Mathematik Oberstufe, S. 2) geforderte Anliegen, den Schüler/innen einen möglichst praxisorientierten Unterricht zu bieten, der idealerweise Anwendungsorientierung und fächerübergreifendes Arbeiten vereint, wurde aufgegriffen und Vorschläge zur vertiefenden Auseinandersetzung gebracht. Auch eine kurze Auseinandersetzung mit der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung ist in diesem Kapitel zu finden.

2 ALLGEMEINES ZUR VERMESSUNGSKUNDE

2.1 Kurze geschichtliche Entwicklung des Vermessungswesens

Vermessungen wurden schon in frühester Zeit durchgeführt, um beispielsweise Dörfer anzulegen oder Äcker einzuteilen, nachdem die Menschen sesshaft geworden waren. Von den alten Ägyptern, Assyrern und Babyloniern weiß man, dass eigene Fachleute für die Errichtung der großen Städte, Tempelanlagen und Entwässerungssysteme eingesetzt wurden. Ein Feldplan aus dem Jahre 3000 vor Christi Geburt zeigt eine Parzelleneinteilung aus dem alten Babylon, wobei hier auch Dreiecke, Trapeze oder Rechtecke zur Flächenbestimmung eingezeichnet waren. Flächen und Strecken wurden bereits damals doppelt bestimmt, um eine höhere Genauigkeit zu erzielen. Laut Überlieferung von Herodot gab es bereits 1700 vor Christus einen Kataster in Ägypten (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 19). Seile zur Distanzmessung, Lote oder Schattenstäbe wurden damals als Messinstrumente eingesetzt (vgl. FISCHER 2007, S. 36).

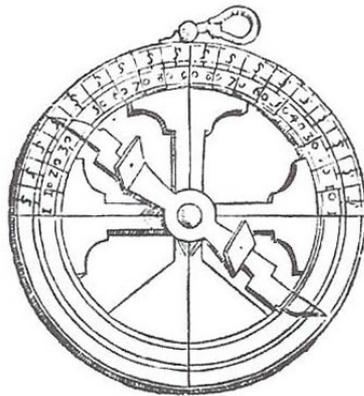
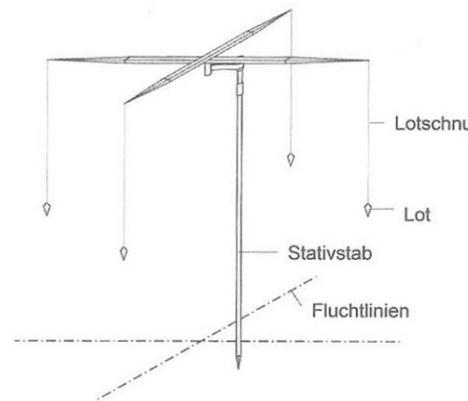
Das Vermessungswesen ist unter anderem auf mathematische, physikalische, geographische und astronomische Grundlagen aufgebaut. (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 21).

Ab circa 500 vor Christus trugen Griechen wie Thales von Milet, Pythagoras von Samos mit seinen Anhängern oder Aristoteles viel zur heutigen Mathematik und Vermessung bei. Thales beispielsweise entwickelte den ersten **Entfernungsmesser** und konnte mittels Dreiecksberechnungen die Höhe der Pyramiden bestimmen. Aristoteles setzte sich stark für die Anerkennung der **Erde als Kugel** ein.

In der alexandrinischen Periode ab 200 vor Christi Geburt sind besonders Heron und Eratosthenes hervorzuheben. Heron entwickelte unter anderem die **Heron'sche Flächenformel** für das Dreieck – diese wird noch heute bei der Flächenbestimmung von Vielecken angewendet. Eratosthenes konnte mit seinen Berechnungen erstmals den **Radius der Erdkugel** bestimmen, wobei die Abweichungen zum heute vorliegenden Ergebnis als minimal anzusehen sind, wenn man seine Versuchsanordnung betrachtet: Er wusste, dass in Syene ein Brunnen steht, in welchem die Sonne an einem bestimmten Tag gegen Mittag im Zenit einfällt und keinen Schatten erzeugt. Da er davon überzeugt war, dass Syene und Alexandria am gleichen Meridian liegen, wollte er zur gleichen Zeit in Alexandria die Schattenlänge an einem Obelisk messen. Davor musste noch die Entfernung zwischen den beiden Städten ermittelt werden. Bei den Messungen ergab sich eine Entfernung von 5000 Stadien (1 Stadion entspricht circa 148,5 m). Mit Hilfe des einfallenden Schattens beim Obelisk konnte er den Zenitstand der Sonne berechnen: Der Winkel betrug $\frac{1}{50}$ eines Kreises. Somit war Eratosthenes der Ansicht, dass der Erdumfang das 50-fache der momentan gemessenen Distanz Syene-Alexandria ausmacht und erhielt ein Ergebnis von 250 000 Stadien, was umgerechnet etwa 37 125 km entspricht und somit einen Erdradius von 5909 km ergeben würde (vgl. SCHÜTZE 2007, S: 20f und WITTE 1991, S. 3f).

Auch Ptolemäus hat eine wichtige Stellung in der Geschichte der Geodäsie. Das Ptolemäische oder **geozentrische Weltbild** war über 1800 Jahre anerkannt, bis es vom Kopernikanischen bzw. **heliozentrischen Weltbild** abgelöst wurde. Die Projektionen von Ptolemäus zur Kartenherstellung haben bis heute Bedeutung (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 21).

Vermessungstechnische Hilfsmittel wurden bereits in der Antike entwickelt. Der Grieche Hippach soll bereits einen Vorläufer des Theodoliten entwickelt haben, auch „**Astrolabium**“ genannt, der aus einer Kreisscheibe (Radius 5-10 cm) mit Gradeinteilung bestand (siehe Abb. 1). Aber auch das **Feldmesserkreuz** „**Groma**“ (siehe Abb. 2), welches von den Römern zur besseren Zieleinrichtung entwickelt wurde, ist bis heute bekannt (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 21f).

Abb. 1: Astrolabium²Abb. 2: Groma³

Gefundene Karten aus dem 13. Jahrhundert überraschen mit ihrer hohen Genauigkeit. Auch die „bayrische Landtafel“ von Philipp Appianus (1531-1589) gilt als sehr gutes Kartenwerk, welches mittels Triangulation und anschließender örtlicher Messungen entstand (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 22).

1598 wurde das erste deutsche Vermessungslehrbuch „Methodus Geometrica“ von Paul Pfinzing herausgegeben, welches Informationen zu Längen- und Flächenmaßen, Richtungswinkeln oder aber zur Kartenherstellung beinhaltet (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 23).

Die Ermittlung des Erdradius war nach Eratosthenes Berechnung aber für die Wissenschaft noch nicht abgeschlossen. 1615 entwickelte der Niederländer Willebrord Snellius das so genannte **Triangulationsverfahren**, welches die nächsten 350 Jahre als weltweite Grundlage für trigonometrische Festpunktnetze und Gradmessungen herangezogen wurde (vgl. FISCHER 2007, S. 38). Er nahm dafür, wie auch in seinem Buch „Eratosthenes Batavus“ beschrieben, 33 aneinander folgende Dreiecke zwischen den niederländischen Orten Bergen op Zoom und Alkmaar an und maß „in der Mitte zwei Grundlinien mit Holzplatten [...]. Die Länge einer Dreiecksseite wurde aus je einer Grundlinie über ein Basisvergrößerungsnetz bestimmt, so daß der Maßstab des Netzes durch die unabhängige Doppelmessung kontrolliert war.“ (SECK 1981, S.118f) Die Dreieckswinkel und Polhöhen der Endpunkte wurden mittels Kupferquadranten gemessen. In weiterer Folge konnte aufgrund der erhaltenen Größen Rückschlüsse auf den Erdradius gezogen werden. Das Ergebnis wich nur 3% vom heute bekannten Wert ab, was sehr großer Bedeutung beigemessen wurde bei der damaligen Versuchsanordnung (vgl. SECK 1981, S. 118f).

Sir Isaac Newton war überzeugt, dass aufgrund seiner Gravitationstheorie die Form der Erde einem Art „Kürbis“ zu entsprechen hatte. Andere wiederum waren der Ansicht, dass die Erde

² SCHÜTZE 2007, S. 21 Abb. 1.3-3

³ SCHÜTZE 2007, S. 22 Abb. 1.3-4

eher eine so genannte Zitronenform besitzen würde. Um den Spekulationen ein Ende zu setzen, wurden zwischen 1735 und 1741 zwei französische Expeditionen nach Lappland, welches in Polnähe liegt, und nach Peru, das in der Nähe des Äquators liegt, geschickt. Bei den Messungen wurde Newtons Vermutung, dass die Pole abgeplattet sind, bestätigt (vgl. FISCHER 2007, S. 39).

Johannes Kepler ist durch die Erfindung des **Fernrohrs** im 16. Jahrhundert ein wichtiger Schritt zur Weiterentwicklung der Vermessungskunde gelungen. Ergänzt wurde das Fernrohr durch ein **Fadenkreuz** von William Gascoigne. Um 1660 wurde von Jean de Thévenot eine Röhrenlibelle gebaut, sowie von Jonathan Sisson gegen 1730 ein erster **Theodolit**, welcher von Short, Adams und Ramsden weiterentwickelt wurde. Zur gleichen Zeit wurden auch ein Winkelspiegel und ein Winkelprisma gebaut. Georg Friedrich von Reichenbach arbeitete an der Entwicklung eines Repetitionstheodoliten (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 23).

Im 17. und 18. Jahrhundert wurden viele Gradmessungen und Triangulationen in Europa durchgeführt. Vor allem Frankreich war hier federführend. Nach einer Messung zwischen Dünkirchen und Barcelona wurde die **Einheit Meter**, welche als zehnmillionster Teil des durch Paris verlaufenden Meridianquadranten angesehen werden kann, eingeführt (vgl. FISCHER 2007, S. 39).

Weitere wichtige Vertreter des Vermessungswesens sind Carl Friedrich Gauß (1777-1855) und Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846). Gauß hat unter anderem die Methode der kleinsten Quadrate bei der Ausgleichsrechnung oder auch das nach ihm benannte Koordinatensystem entwickelt. Auch von Bessel ist bis heute ein Ellipsoid zur Erddarstellung bekannt (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 24).

Der Nullmeridian in Greenwich löste 1883 den bis dato geltenden geographischen Bezugspunkt Hierro auf den Kanaren ab. Weiters wurden Astronomie und Geodäsie nun als eigenständige Wissenschaften angesehen (vgl. FISCHER 2007, S. 40 und SCHÜTZE 2007, S. 24).

Seit dem 18. Jahrhundert entwickelten sich die Optik und die Feinmechanik weiter und erlaubten es, mechanisch-optische Theodoliten zur Katastervermessung standardmäßig zu verwenden (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 24).

Drei Entwicklungen Mitte des 20. Jahrhunderts gelten als bahnbrechend, wobei sie ursprünglich nur für spezielle Bereiche gedacht waren, innerhalb kürzester Zeit aber auch für tägliche Vermessungsarbeiten interessant wurden.

1935 startete Konrad Zuse mit der Entwicklung einer elektrischen Rechenanlage, um seine statistischen Berechnungen nicht händisch vornehmen zu müssen. Somit konnte 1941 der erste **Rechenautomat** vorgestellt werden. Dieses Gerät war für die Geodäsie interessant, wurde aber erst Anfang der 70er Jahre wirklich brauchbar, da nun Taschenrechner mit Winkelfunktionen auf den Markt kamen und in manchen Tachymetern bereits geräteintern Berechnungen vollzogen werden konnten. Durch die Erfindung des **Mikrocomputers** wurde die Arbeit auch in der Geodäsie stark vereinfacht. Nicht nur Rechenleistung wurde übernommen, sondern auch Zeichenarbeit mit Hilfe von speziellen CAD-Programmen erleichtert.

1947 entwickelte der Schwede Bergstrand ein Gerät, welches zur Lichtgeschwindigkeitsbestimmung eingesetzt werden sollte. Die Weiterentwicklung dieses Geodimeters machte es möglich Entfernungen elektronisch zu messen. Anfangs ein sehr großer Apparat und somit nur bei speziellen Messungen im Einsatz, konnte durch Verkleinerung der elektronischen Baugruppen ein Gerät geschaffen werden, das heute Standardwerkzeug im Vermessungs-

wesen ist.

1957 konnten durch den ersten Satelliten „Sputnik“ im Weltall neue Informationen bezüglich der Form der Erde gefunden werden. Außerdem entstand die Idee, eigens für die Geodäsie entwickelte Flugkörper in den Weltraum zu schicken, um für Aufgaben der Erd- und Landesvermessung zur Verfügung zu stehen. Mitte der 70er Jahre wurden tatsächlich viele Satelliten ins All geschickt, allerdings hauptsächlich zu militärischen Zwecken. Die Geodäsie konnte trotzdem einige Verfahren entwickeln und Testmessungen vornehmen. Heute wird das anfangs nur für militärische Zwecke vorgesehene Navigationssystem, kurz GPS für **Global Positioning System**, sowohl von Einzelpersonen als auch im Vermessungswesen verwendet (vgl. FISCHER 2007, S. 42ff).

Bis ins 21. Jahrhundert gab es viele Entwicklungen im Bereich der Technik. Trotzdem ist es immer noch wichtig für eine optimale Ausübung des Berufes als Vermessungstechniker/in die mathematischen Grundlagen zu kennen und Hintergrundwissen zu besitzen. Denn wenn man sich einmal in einer atypischen Situation befindet, kann man vielleicht durch diese Informationen doch noch zu den gesuchten Messergebnissen kommen.

2.2 Funktionsweise von Theodolit bzw. Tachymeter

Heute werden für Vermessungsaufgaben verschiedene Geräte eingesetzt. **Nivelliergeräte** finden im Bauwesen Anwendung. Dabei werden Höhenunterschiede mittels Messlatten ermittelt. Im Vermessungswesen weit verbreitet ist der Theodolit, der sehr universell eingesetzt werden kann.

Theodoliten sind präzise Messinstrumente, die zur Ermittlung von Horizontal- und Vertikalwinkel, sowie zur Distanzmessung und Höhenbestimmung verwendet werden (siehe Abb. 3). Absteckungen im Bauwesen oder Aufnahmen, die ins Grundbuch eingetragen werden, sind typische Einsatzbereiche. Die optimale Messdistanz liegt zwischen 200 und 15 000 m. Eine Genauigkeit bis zu $0,15 \text{ mgon}^4$ (Milligon) kann dabei erreicht werden (vgl. BURLET 2003, S.29f). Generell wird zwischen optischen und elektronischen Theodoliten unterschieden.



Abb. 3: Theodolit⁵

Ein Theodolit kann nach WITTE (1991, S. 260) in einen **Ober- und Unterbau** eingeteilt werden. Der Unterbau besteht aus dem Stativ bzw. Dreifuß, dem Achssystem der Stehachse und einem Horizontalkreis, der für spezielle Messungen Hilfestellung gibt. Der Oberbau kann in Fernrohrträger, Fernrohr, Ablesevorrichtung für Horizontalwinkel, Libelle(n) und eine Einrichtung für das Messen von Vertikalwinkeln unterteilt werden.

Es gilt anfangs den Unterbau richtig aufzustellen. Der **Dreifuß** muss so eingestellt werden, dass das Gerät direkt über dem gekennzeichneten Polygonpunkt steht. Außerdem sind die Instrumentenachsen horizontal und vertikal auszurichten. Zur Horizontierung werden verschiedene Arten von **Libellen** verwendet, die laienhaft betrachtet im weitesten Sinn als „Wasserwaagen“ interpretiert werden

⁴ 1000 mgon = 1 gon, Gon wird in der Geodäsie als Winkelbezeichnung herangezogen: 1 Vollwinkel=400 gon –siehe Kap.3

⁵ URL: <http://www.duden.de/rechtschreibung/Theodolit> - 16.1.2014

können. Die Dosenlibelle dient der groben Einstellung, die Röhrenlibelle ist für die Feineinstellung zuständig (siehe Abb. 4). Libellen werden leider durch Umwelteinflüsse wie starke Sonneneinstrahlung oder Erschütterungen stark beeinflusst. Da das Einstellen mitunter sehr zeitaufwändig ist, wurde die Libelle um optisch-mechanische Bauteile ergänzt, auch Kompensatoren genannt. Diese nehmen nach einer ersten Positionseinstellung, die mittels Dosenlibelle erfolgt, die Feinausrichtung selbständig vor (vgl. MATTHEWS 2003, S. 105).

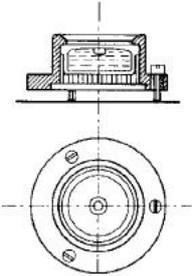
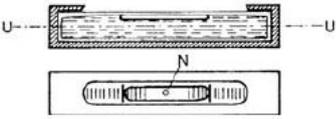
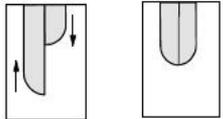
Typen		
Dosenlibelle Genauigkeit: mittel Anwendung: Grobhorizontierung	Röhrenlibelle Genauigkeit: gross Anwendung: Feinhorizontierung	Koinzidenzlibelle Genauigkeit: sehr gross Anwendung: Feinhorizontierung
		

Abb. 4: Verschiedene Libellenarten⁶

Wie bereits erwähnt ist darauf zu achten, dass gewisse Achsen des Theodoliten richtig zueinander stehen, da sonst beim Messen Ungenauigkeiten entstehen können (siehe Abb. 5). Um einen **Stehachsenfehler** zu vermeiden, müssen Stehachse und Achse der Dosenlibelle parallel aufeinander, aber Stehachse und Achse der Röhrenlibelle normal aufeinander sein. Um den **Zielachsenfehler** minimal zu halten, gilt es die Zielachse im rechten Winkel zur Kippachse auszurichten. Auch Kipp- und Stehachse haben aufeinander normal zu stehen, um den **Kippachsenfehler** zu vermeiden (vgl. PETRAHN 2011, S. 59).

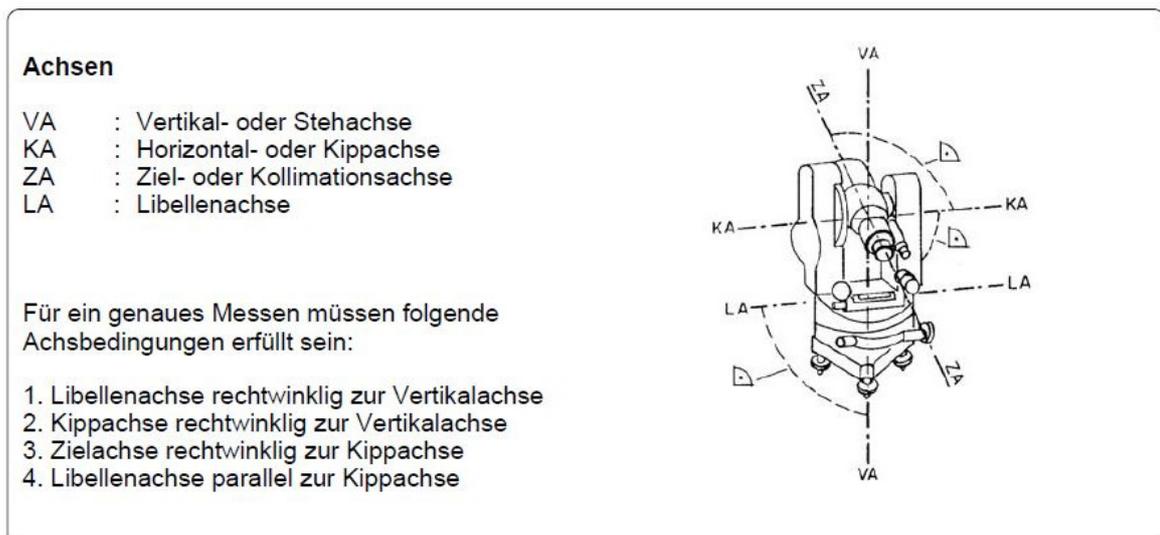


Abb. 5: Achsen des Theodoliten⁷

⁶ BURLET 2003, S. 28

Deshalb wird beim Aufstellen zumeist ein bestimmtes Prozedere angewendet, um mögliche Fehler ausschalten zu können. Stark gekürzt erfolgt zuerst beim Aufstellen des Gerätes eine Grobzentrierung mit Hilfe eines Schnurlots oder eines optischen Lots (siehe Abb. 6). Danach wird eine grobe Horizontierung unter Zuhilfenahme der Dosenlibelle und den Stativbeinen vorgenommen. Erst danach findet eine Feinzentrierung und Feinhorizontierung statt. Am Ende wird die Zentrierung noch kontrolliert bevor mit den Messungen gestartet werden kann (vgl. NAVRATIL 2007, VO 2, Folie 50).

Um Messpunkte anvisieren zu können, müssen diese im weitesten Sinn markiert sein. Dies kann durch Reflektoren, Farbpunkte und ähnlichem erfolgen.

Nach einer ersten Grob- und späteren Feinanpeilung eines Zielpunktes ermöglicht eine Fokussiereinrichtung ein Scharfstellen des anvisierten Zielpunktes. Die dabei gemessenen Richtungen sind zu protokollieren (vgl. FISCHER 2007, S. 89).

In der Praxis wird mittlerweile zur Messung fast immer ein **Tachymeter** (siehe Abb. 7) eingesetzt. Dieses Gerät kann im Gegensatz zum Theodoliten auch Schrägdistanzen messen und nicht nur Horizontal- und Vertikalrichtungen. Es können dabei gleichzeitig Strecke und Winkel gemessen werden, weshalb das Gerät auch „Schnellmesser“ genannt wird. Neuere Geräte haben einen Infrarotsender integriert, der den Laserstrahl nach Kontakt mit dem Reflektor zurückschickt. Im täglichen Sprachgebrauch wird der Tachymeter oft auch als Theodolit bezeichnet.

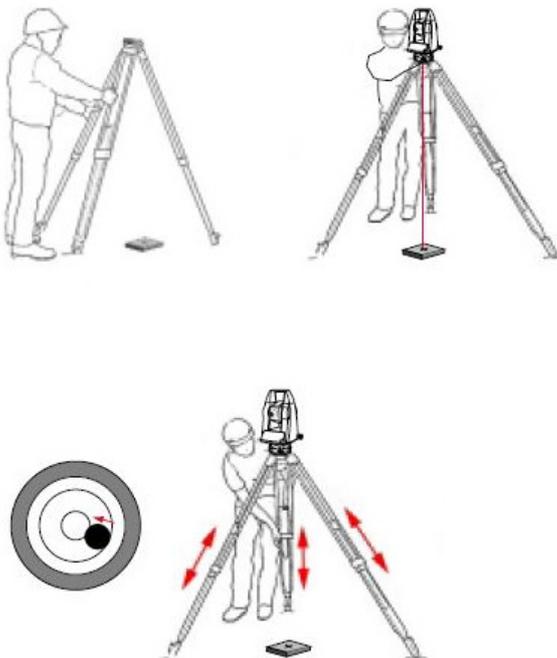


Abb. 6: Aufstellen des Stativs und Einpassen des Tachymeters⁸



Abb. 7: Tachymeter⁹

⁷ BURLET 2003, S. 30

⁸ ZEISKE 2000, S. 9

⁹ URL: <http://www.sead.de/uploads/pics/tachymeter.jpg> - 16.12.2013

Mittels elektronischer Berechnungen (Phasenvergleich) wird die gesuchte Größe angegeben. Daten können am Tachymeter auch gespeichert und im Anschluss auf den Computer übertragen werden (vgl. URL: <http://www.elkage.de/src/public/showterms.php?id=2710> – 16.12.2013).

Die heutigen Geräte besitzen einen so genannten **elektro-optischen Distanzmesser** (kurz EDM) und einen elektronischen Winkelabgriff, um die Teilung von Horizontal- und Vertikalreis elektronisch abtasten zu können. *„Dadurch werden Winkel und Distanzen digital angezeigt, Horizontaldistanz, Höhenunterschied und Koordinaten werden automatisch berechnet und alle Messwerte und Zusatzinformationen können registriert werden.“* (ZEISKE 2000, S.5)

Zusätzlich zu immer besseren Geräten, die auf den Markt kommen, wird heute als Ergänzung auch mit dem **Global Positioning System**, kurz GPS, gearbeitet. Die Erde wird von 24 GPS-Satelliten umkreist - seit 2011 von 27 Satelliten - die sich in einer Höhe von 20 000 km auf sechs verschiedenen Laufbahnen bewegen und ständig Signale mit ihrer Position und Uhrzeit an die mittlerweile 12 Bodenstationen schicken. Somit sollte es theoretisch möglich sein, an jedem Punkt der Erde zumindest von vier Satelliten ein Signal zu erhalten und seine Position bestimmen zu können (vgl. URL: <http://www.schriever.af.mil/news/story.asp?id=123260251> - 20.1.2013).

Durch einen speziellen Aufsatz werden Tachymeter ebenfalls mit der GPS-Funktion versorgt, was zur Folge hat, dass nicht nur die Positionsbestimmung schneller erfolgen kann, sondern bei neuen Geräten, die weitere Funktionen besitzen, im Gelände weniger Arbeitsschritte zu erledigen sind (vgl. URL: http://www.leica-geosystems.at/de/Leica-Viva-SmartStation_86610.htm - 16.12.2013).

3 MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER VERMESSUNGSKUNDE

In diesem Kapitel werden Grundlagen der Vermessungskunde aufbereitet, die zum besseren Verständnis der späteren Kapitel und vor allem der Berechnungen dienen.

3.1 Geometrische Grundlagen

Bevor mit speziell im Vermessungswesen verwendeten mathematischen Inhalten begonnen wird, sollen noch in aller Kürze jene Bereiche angeführt werden, die aus dem Mathematik-Unterricht bekannt sind und an die im Wesentlichen angeknüpft wird.

Generell ist eine gewisse Kenntnis über die ebene Geometrie notwendig. Dies schließt Informationen zu allgemeinen Dreiecken, Vielecken und Kreisen, zu Kongruenz- und Strahlensätzen, sowie zu Ähnlichkeiten mit ein. Ebenso ist ein grundlegendes trigonometrisches Wissen, insbesondere über die Winkelfunktionen im rechtwinkligen und allgemeinen Dreieck, wichtig. Auch Polarkoordinaten kommen zur Anwendung.

3.1.1 Ebene Geometrie

3.1.1.1 Dreieck¹⁰

In einem beliebigen Dreieck gelten folgende Aussagen:

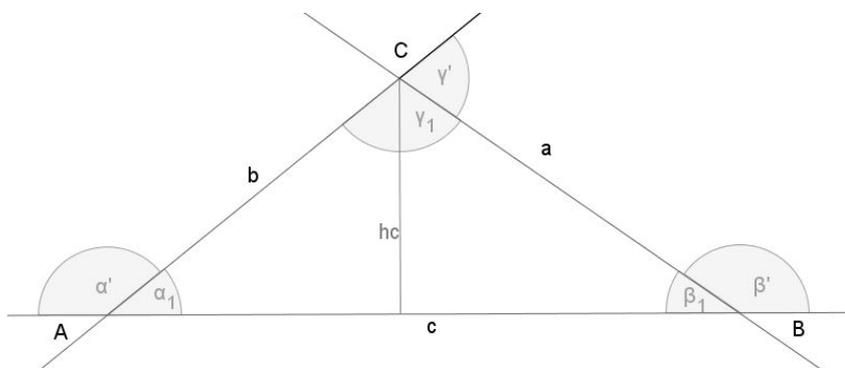


Abb. 8: Allgemeines Dreieck

Für die Summe der Innenwinkel gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Für die Summe der Außenwinkel gilt: $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$

Weiters gilt: $\alpha + \alpha' = 180^\circ$; $\beta + \beta' = 180^\circ$; $\gamma + \gamma' = 180^\circ$

Flächeninhalt: $A = \frac{c \cdot h_c}{2}$ oder

$$A = \frac{1}{2} a b \sin \gamma \quad \text{oder}$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{mit } s = \frac{a+b+c}{2} \quad (\text{Heron'sche Flächenformel})$$

Umfang: $u = a + b + c$

¹⁰ PETRAHN 2011, S. 20f

In einem rechtwinkligen Dreieck gilt außerdem:

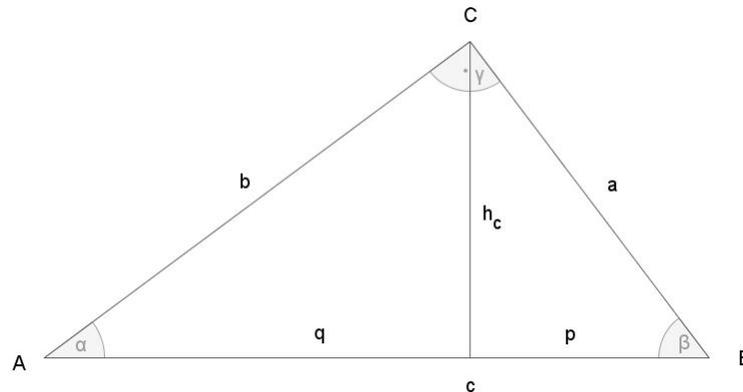


Abb. 9: Rechtwinkliges Dreieck

Satz des Pythagoras: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats, d.h. $a^2 + b^2 = c^2$

Kathetensatz: In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich zum Rechteck aus Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt, d.h. $b^2 = q c$ und $a^2 = p c$

Höhensatz: In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe flächengleich zum Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten, d.h. $h^2 = p q$

Flächeninhalt im rechtwinkligen Dreieck: $A = \frac{1}{2} a b$

3.1.1.2 Kongruenzsätze¹¹

Dreiecke sind kongruent (deckungsgleich), wenn sie übereinstimmen in

- (i) drei Seiten (SSS)
- (ii) zwei Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel (SWS)
- (iii) zwei Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite (SSW)
- (iv) einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln (WSW)

¹¹ GRUBER 2011, S. 16

3.1.1.3 Ähnlichkeit¹²

Die Figuren F_1 und F_2 sind zueinander ähnlich ($F_1 \sim F_2$), wenn

- es eine umkehrbar eindeutige Abbildung gibt, die jedem Punkt von Figur F_1 einen Punkt von Figur F_2 zuordnet
- entsprechende Winkel gleich sind: $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$
entsprechende Seiten zueinander proportional sind: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
(Aussagen beziehen sich auf Abb. 10)

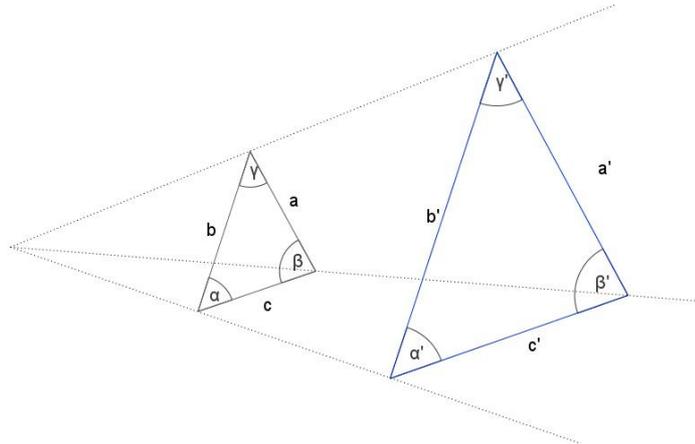


Abb. 10: Ähnliche Figuren F_1 und F_2 ¹³

Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie

- (i) in zwei Winkeln übereinstimmen
- (ii) in einem Winkel übereinstimmen und die anliegenden Seiten gleiche Verhältnisse bilden
- (iii) mit den drei zueinander entsprechenden Seiten ein gleiches Verhältnis bilden
- (iv) mit zwei zueinander entsprechenden Seiten ein gleiches Verhältnis bilden und mit dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

3.1.1.4 Strahlensatz¹⁴

- (i) Die Abschnitte auf einem Strahl verhalten sich zueinander wie die gleichliegenden Abschnitte auf einem anderen Strahl.

$$\overline{SB_1} : \overline{SB_2} = \overline{SA_1} : \overline{SA_2}$$

$$\overline{SA} : \overline{SA_1} = \overline{SB} : \overline{SB_1}$$

$$\overline{SB_1} : \overline{B_1B_2} = \overline{SA_1} : \overline{A_1A_2}$$

- (ii) Gleiche Parallelstücke verhalten sich zueinander wie die zugehörigen Strahlenabschnitte auf ein und demselben Strahl.

¹² PETRAHN 2011, S. 19

¹³ eigene Zeichnung, nach PETRAHN 2011, S. 18

¹⁴ PETRAHN 2011, S. 19

$$\overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_2B_2} = \overline{SA_1} \cdot \overline{SA_2}$$

$$\overline{AB} : \overline{A_1B_1} = \overline{SA} : \overline{SA_1}$$

- (iii) *Parallelschnitte auf einer Parallelen verhalten sich zueinander wie die zugehörigen Parallelschnitte auf einer anderen Parallele.*

$$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{A_1B_1} : \overline{AB}$$

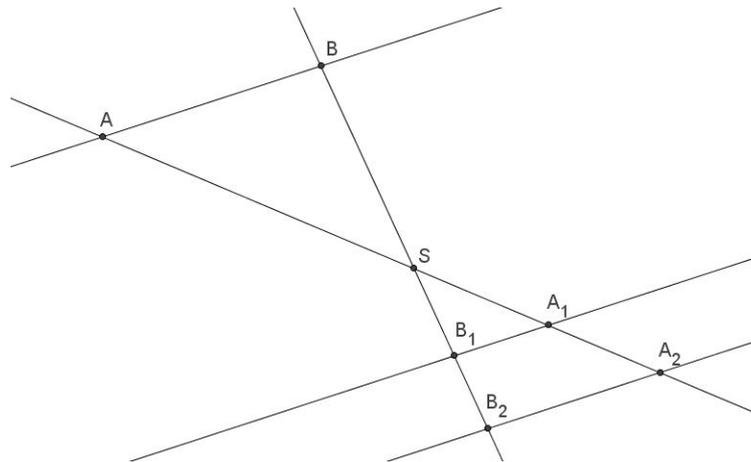
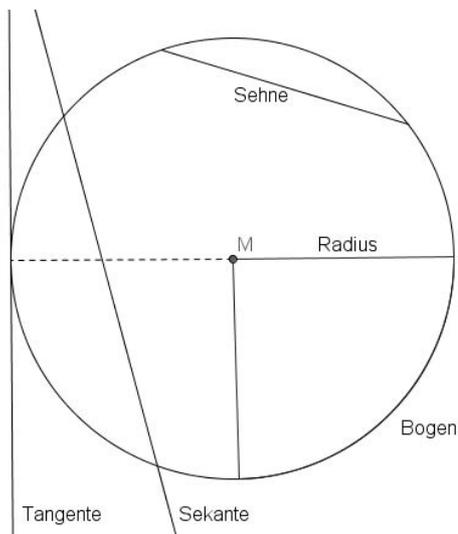


Abb. 11: Strahlensätze¹⁵

3.1.1.5 Kreis und Winkel¹⁶

Gewisse Bezeichnungen am Kreis sind wichtig für das spätere Verständnis:



Umfang: in sich geschlossene Kreislinie

Bogen: Teil des Umfangs

Radius: Verbindungsstrecke Kreispunkt – Mittelpunkt

Sehne: Strecke, deren Endpunkte auf dem Kreis liegen

Sekante: Gerade, die den Kreis in zwei Punkten schneidet

Tangente: Gerade, die den Kreis in einem Punkt berührt

Abb. 12: Allgemeine Bezeichnungen am Kreis¹⁷

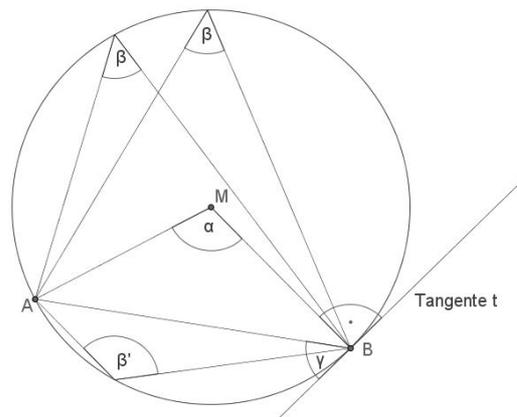
¹⁵ eigene Zeichnung, nach PETRAHN 2011, S. 19

¹⁶ vgl. GRUBER 2011, S. 22, 24 und PETRAHN 2011, S. 24

¹⁷ eigene Zeichnung, nach GRUBER 2011, S. 22

α ... Zentriwinkel oder Mittelpunktswinkel
 β ... Peripheriewinkel oder Umfangswinkel
 γ ... Sehnentangentenwinkel

- (i) Alle Peripheriewinkel über demselben Bogen (hier: \widehat{AB}) sind gleich groß.
- (ii) weiters gilt: $\alpha = 2\beta$
 $\beta = \gamma$
- (iii) Für β über \widehat{AB} und β' über \widehat{BA} gilt:
 $\beta + \beta' = 180^\circ$
- (iv) Der Peripheriewinkel β über dem Durchmesser eines Kreises ist ein rechter Winkel (Satz von Thales).

Abb. 13: Winkel im Kreis¹⁸

3.1.2 Trigonometrie

Im rechtwinkligen und allgemeinen Dreieck wird sehr oft mit Hilfe der Winkelfunktionen gearbeitet. Diese werden im Folgenden noch einmal angeführt:

3.1.2.1 Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck¹⁹

Sinusfunktion:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

Cosinusfunktion:

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

Tangensfunktion:

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

Kotangensfunktion:

$$\cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a}$$

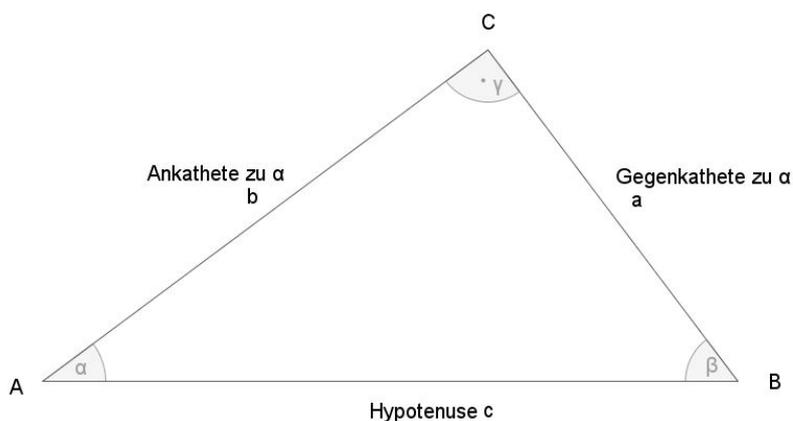


Abb. 14: Rechtwinkliges Dreieck

Weiters gilt:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

¹⁸ eigene Zeichnung, nach PETRAHN 2011, S. 24

¹⁹ GRUBER 2011, S. 25

3.1.2.2 Winkelfunktionen im allgemeinen Dreieck²⁰

Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r \quad r \dots \text{Umkreisradius}$$

oder $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$

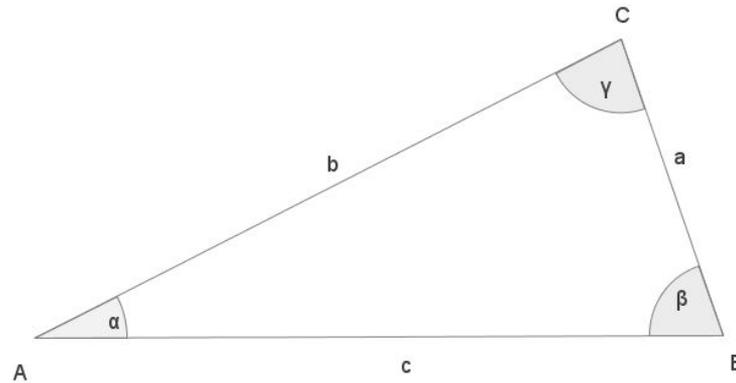


Abb. 15: Allgemeines Dreieck

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

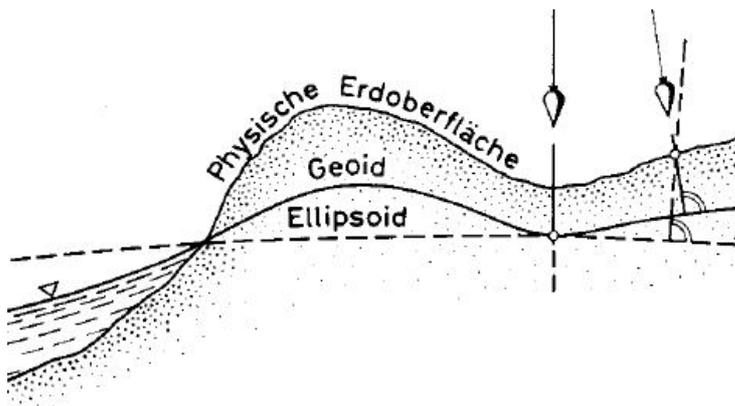
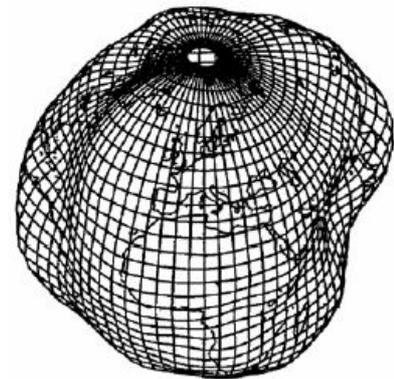
$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

3.2 Koordinatensysteme und Winkelbezeichnung im Vermessungswesen

„Die Lage eines Punktes auf einer Fläche läßt sich durch ein Zahlenpaar, Koordinaten genannt, festlegen. Die Koordinaten sind jeweils bezogen auf ein Ellipsoid, eine Kugel oder eine Ebene, d.h. auf die für Lagemessungen definierten Ersatzflächen der Erdoberfläche.“ (WITTE 1991, S. 17)

In der Geodäsie werden sehr viele Koordinatensysteme verwendet, die jeweils in unterschiedlichsten Bereichen zum Einsatz kommen können. Da die Erde im weitesten Sinn als Kugel angesehen werden kann, sind spezielle Systeme entwickelt worden, die versuchen alle Punkte der Erde mit möglichst geringen Längen- und Winkelabweichungen abzubilden.

²⁰ GRUBER 2011, S. 27

Abb. 16: Grafische Darstellung von Erdoberfläche, Geoid und Ellipsoid²¹Abb. 17: Geoid²²

Rein physikalisch gesehen ist die Erde als **Geoid** zu betrachten, bei dem man sich eine „ruhige, unter dem Festland verlängerte Meeresoberfläche“ vorstellen kann, „auf die das Lot immer senkrecht steht“ (EGGER 2000, S. 7). Dies ist in Abb. 16 sichtbar. Umgangssprachlich wird das Geoid auch als Kartoffel bezeichnet (siehe Abb. 17).

Für gewisse Berechnungen hat sich das **Rotationsellipsoid** bewährt, da hier die geometrischen Flächen besser definiert sind. Da es allerdings sehr aufwändig ist damit zu rechnen wird sehr oft eine Kugel als Näherung herangezogen mit einem Radius von 6380 km, sofern es die Genauigkeitsanforderungen zulassen. Dies ist unter normalen Umständen bei Lagemessungen der Fall. Für Höhenmessungen muss jedoch das Geoid als Grundlage verwendet werden, da sonst zu große Ungenauigkeiten drohen (vgl. MATTHEWS 2003, S. 3).

Häufig reicht es bei Anwendungen der Vermessungskunde eine horizontale Ebene in Meereshöhe anzudenken, wenn die Entfernungen klein genug gewählt sind (10 km x 10 km), denn dann kann die Erdkrümmung vernachlässigt werden (vgl. EGGER 2000, S. 7f). Man kann also ein „örtliches, auf die spezielle Aufgabe abgestimmtes rechtwinkliges Koordinatensystem benutzen“ (WITTE 1991, S. 20).

Es werden nun ebene Koordinatensysteme wie rechtwinkelige Koordinaten und Polarkoordinaten etwas ausführlicher behandelt, da diese für spätere Berechnungen von Bedeutung sind. Dreidimensionale Systeme werden nur kurz angesprochen.

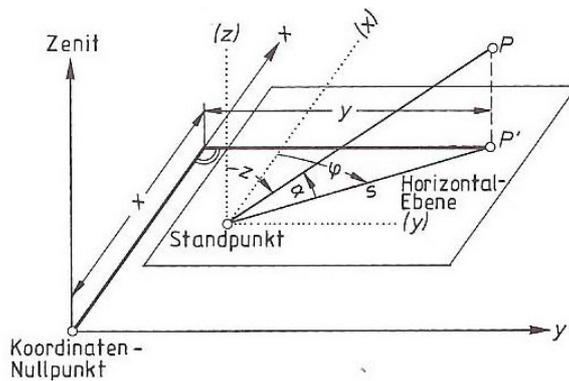
Wichtig zu wissen ist, dass in der Natur aufgenommene Maße nicht nur lokal von Interesse sind. Deshalb werden Messergebnisse im Normalfall mit einer Bezugsfläche in Zusammenhang gebracht, damit später Vergleiche vorgenommen werden können.

3.2.1 Rechtwinkelige Koordinatensysteme und Polarkoordinaten

„Ein Punkt P [...] ist lagemäßig durch seine rechtwinkligen Koordinaten x und y oder durch den Polarwinkel φ und die Strecke s , höhenmäßig durch den Höhenwinkel α bzw. den Zenitwinkel z und die Strecke s bestimmt.“ (MATTHEWS 2003, S. 3) Es wird also oftmals nur in einer Ebene gearbeitet, allerdings kann dies entweder die Horizontal- oder Vertikalebene betreffen. Dies wird versucht in Abb. 18 darzustellen.

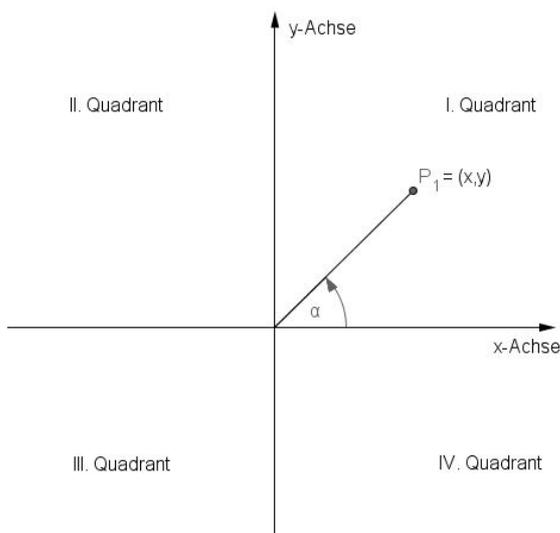
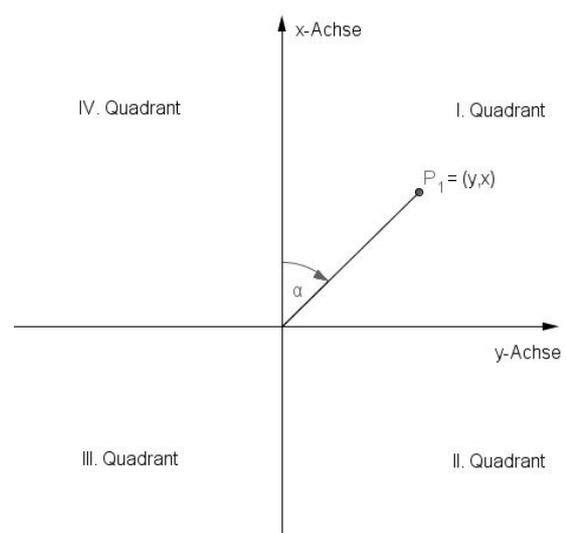
²¹ LEHMANN 2011, S. 5

²² LEHMANN 2011, S. 5

Abb. 18: Darstellung von rechtwinkligen Koordinaten und Polarkoordinaten²³

In der Ebene wird ein **kartesisches Koordinatensystem** herangezogen, wobei in der Vermessungskunde die x- und y-Achse vertauscht sind im Vergleich zur analytischen Geometrie, das heißt die x-Werte werden auf der senkrechten Achse abgetragen, die y-Werte auf der horizontalen Achse. Die Quadranten sind im Vermessungswesen im Uhrzeigersinn angeordnet, in der Mathematik gegen den Uhrzeigersinn (siehe Abb. 19 und Abb. 20). Diese von der Mathematik abweichende Anordnung der Quadranten und der x- und y-Achse ist aus der Astronomie entstanden, da bei Beobachtungen in früherer Zeit erkannt wurde, dass sich die Gestirne von Nord über Ost und Süd bis West bewegen. Somit wurde das Winkelmessen ebenfalls in dieser Laufrichtung, dem Uhrzeigersinn, durchgeführt, was zum bis heute in der Vermessung üblichen Koordinatensystem führte (vgl. FISCHER 2007, S. 21).

Es sei noch erwähnt, dass der Winkel α im mathematischen System von der x-Achse ausgehend Richtung y-Achse abgetragen wird, im Koordinatensystem des Vermessungswesens wird genauso vorgegangen, nur sind hier die Koordinatenachsen vertauscht (siehe Abb. 19 und Abb. 20).

Abb. 19: Mathematisches Koordinatensystem²⁴Abb. 20: Geodätisches Koordinatensystem²⁵

²³ MATTHEWS 2003, S. 3, Abb. 1.3

²⁴ eigene Zeichnung, nach SCHÜTZE 2007, S. 45

Im rechtwinkligen Koordinatensystem wird die Lage eines Punktes durch den horizontalen oder vertikalen Abstand zum Nullpunkt, welcher dem Schnittpunkt von x- und y-Achse entspricht, angegeben. Es ergibt sich ein Koordinatenpaar (x,y) oder (y,x) (vgl. MATTHEWS 2003, S.3f).

Bei den **Polarkoordinaten** (siehe Abb. 21) ist ein Punkt durch den Polarwinkel α und die Strecke s eindeutig festgelegt. Die Strecke wird vom Bezugspunkt aus angegeben. Das heißt auch hier entsteht ein Koordinatenpaar (α,s) .

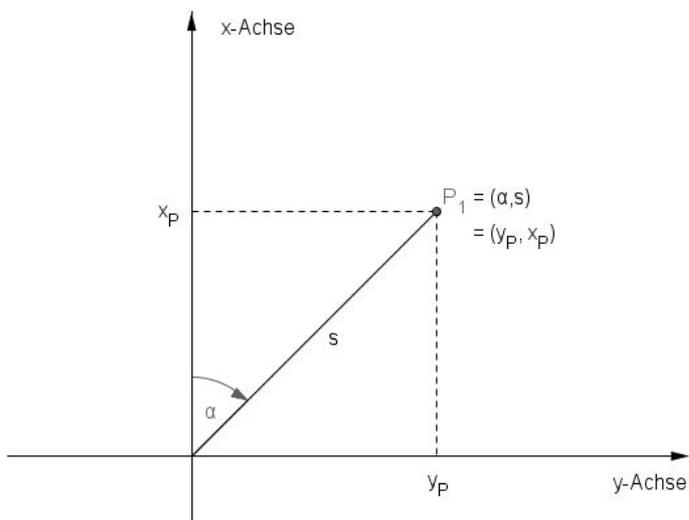


Abb. 21: Polarkoordinaten im Vermessungswesen²⁶

Umrechnungen zwischen den beiden Systemen können folgendermaßen erfolgen:²⁷

$$y_P = s \cdot \sin \varphi \quad x_P = s \cdot \cos \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{y_P}{x_P} \quad s = \sqrt{y_P^2 + x_P^2}$$

(vgl. MATTHEWS 2003, S. 3f)

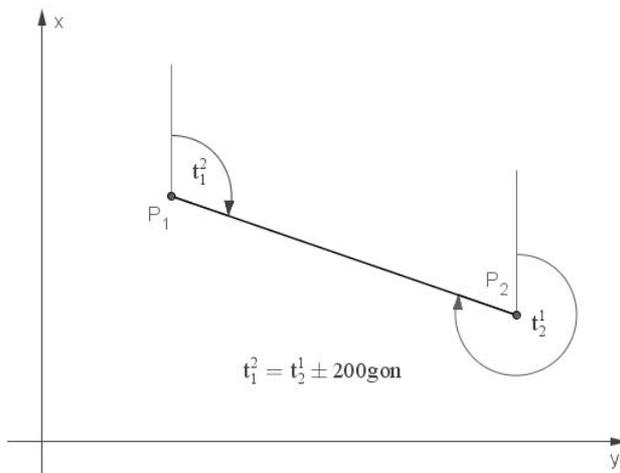
Wichtig ist in weiterer Folge auch der **Richtungswinkel** t . EGGER (2000, S. 70) beschreibt damit „jenen Winkel, um den man eine Parallele zur positiven Richtung der x-Achse durch den Endpunkt einer Strecke im Uhrzeigersinn drehen muss, bis sie mit der Strecke zusammenfällt“.

Der Winkelname $t_{1,2}$ bzw. t_1^2 gibt an, dass der Winkel vom Punkt P_1 zum Zielpunkt P_2 verläuft wie in Abb. 22 dargestellt (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 46).

²⁵ eigene Zeichnung, nach SCHÜTZE 2007, S. 45

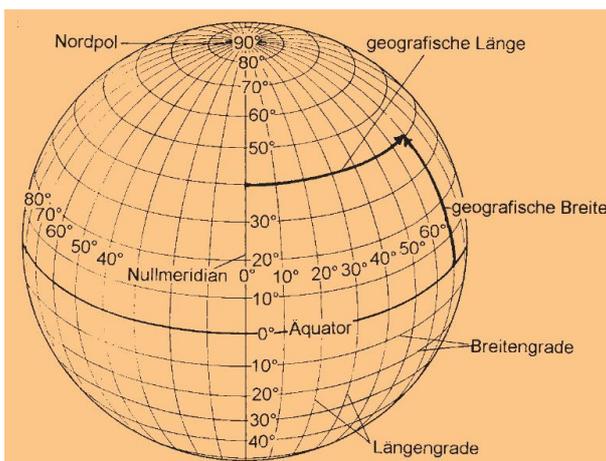
²⁶ eigene Zeichnung, nach MATTHEWS 2003, S. 4

²⁷ MATTHEWS 2003, S. 4

Abb. 22: Richtungs winkel²⁸

3.2.2 Weitere Koordinatensysteme

In der Vermessungskunde werden vor allem zum Erstellen von Karten und zum Arbeiten mit GPS-Geräten noch andere Systeme verwendet, die in dieser Arbeit aber vernachlässigt werden, da sie nicht Basis für das Verstehen der mathematischen Inhalte sind. Der Vollständigkeit halber werden aber ein paar dieser Systeme genannt: Prinzipiell kann zusätzlich zu den rechtwinkligen und polaren Koordinaten zwischen geographischen und geodätischen Koordinaten unterschieden werden. In Abb. 23 wird beispielsweise das geographische Koordinatensystem dargestellt. Weitere Systeme wie das **Gauß-Krüger-** oder das **UTM-Koordinatensystem** werden v.a. in Bereich der Kartographie zur Kartenerstellung verwendet. Dabei wird besonderes Augenmerk darauf gelegt, die rasch zunehmenden Abbildungsverzerrungen, die mit größer werdender Entfernung vom Bezugspunkt bei einfachen Koordinatensystemen entstehen können, zu minimieren (vgl. WITTE 1991, S. 21).

Abb. 23: Geographisches Gradnetz²⁹

²⁸ eigene Zeichnung, nach SCHÜTZE 2007, S. 46 / Gon ist das Winkelmaß im Vermessungswesen – Näheres auf S. 26

²⁹ SCHIRMER 1999, S. 13 Abb. 4 (aus Berg & Steigen 2/1999)

3.2.3 Winkelmaße³⁰

Ein Kreis weist vier rechte Winkel auf, die als Vollwinkel 2π (rad) ergeben. Dieser Vollwinkel wird auch mit 360° (Grad) oder mit 400 gon bezeichnet.

Im Vermessungswesen wird seit 1937 die Einteilung nach Gon (Vollwinkel = 400 gon) verwendet, da sich einige Vorteile in Folge der Dezimalteilung ergeben haben. Die Umrechnung von Grad in Gon erfolgt mit der Multiplikation des Wertes mit 10/9, um Gon in Grad umzurechnen ist der gegebene Wert mit 9/10 zu multiplizieren (vgl. MATTHEWS 2003, S.14,15).

Die Einheit des Winkels ist der Radiant (kurz: rad).

$$1 \text{ Vollwinkel} = 2\pi \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{200 \text{ gon}}{\pi} \text{ mit } \pi \sim 3,141592654$$

Sexagesimalteilung:

$$1 \text{ Vollwinkel} = 360^\circ \text{ (Grad)}$$

$$1^\circ = 60' \text{ (Minuten)}$$

$$1' = 60'' \text{ (Sekunden)}$$

Zentesimalteilung:

$$1 \text{ Vollwinkel} = 400 \text{ gon (Gon)}$$

$$1 \text{ gon} = 100 \text{ cgon (Zentigon)}$$

$$1 \text{ cgon} = 10 \text{ mgon (Milligon)}$$

Vermessungstechnisches Sonderzeichen ρ :

ρ steht für den Winkel, dem die Bogenlänge 1 des Einheitskreises entspricht.³¹

$$\frac{4 \text{ } \triangleleft}{2\pi} = \frac{2 \text{ } \triangleleft}{\pi} = \frac{200 \text{ gon}}{\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\rho^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = 57,295779 \dots \text{ bzw. } \rho \text{ (gon)} = \frac{200 \text{ gon}}{\pi} = 63,661977 \dots$$

3.3 Hauptaufgaben der Koordinatenberechnung im Vermessungswesen

Unter den beiden Hauptaufgaben im Vermessungswesen werden „die Projektionen zwischen einem Polarkoordinatensystem und einem rechtwinkligen Koordinatensystem“ verstanden (EGGER 2000, S. 70).

3.3.1 1. Hauptaufgabe³²

Bei der ersten Grundaufgabe wird eine Umwandlung von Polarkoordinaten in rechtwinklige Koordinaten vollzogen. Dabei sind die Koordinaten eines Punktes A, der Richtungswinkel t_A^B und die Strecke s_{AB} bekannt. Gesucht werden die Koordinaten des zweiten Punktes B. Diese Art der Koordinatenberechnung wird auch als **polares Anhängen** bezeichnet (vgl. MATTHEWS 1997, S. 54). Anhand einer Skizze (siehe Abb. 24) soll der angegebene Rechenweg verdeutlicht werden.

³⁰ GRUBER 2011, S. 6 außer es wird auf andere Quellen verwiesen

³¹ vgl. URL: http://kugel.bv.tu-berlin.de/typo3-igg/fileadmin/Daten_FGA/Bauing/VL_Skript.pdf, S. 11 -14.12.2013

³² vgl. SCHÜTZE 2007, S. 54f

gegeben: Punkt $A=(y_A, x_A)$

Richtungswinkel t_A^B

Strecke s_{AB}

gesucht: Koordinaten von Punkt $B=(y_B, x_B)$

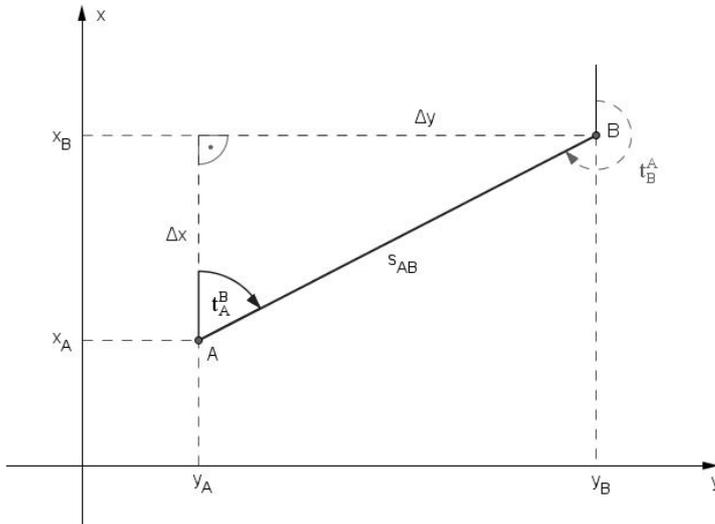


Abb. 24: Skizze zur 1. Hauptaufgabe³³

Der Richtungswinkel sowie die Strecke können als Polarkoordinaten verstanden werden. Um nun die Koordinaten des Punktes B zu erhalten, ist es notwendig die Koordinatenunterschiede zwischen A und B – also Δx und Δy – zu berechnen.

1.) Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\begin{aligned} \sin t_A^B &= \frac{\Delta y}{s_{AB}} & \cos t_A^B &= \frac{\Delta x}{s_{AB}} \\ \Delta y &= s_{AB} \cdot \sin t_A^B & \Delta x &= s_{AB} \cdot \cos t_A^B \end{aligned}$$

2.) Sobald die Differenz Δy bzw. Δx berechnet wurde, kann diese zu den Koordinaten des bekannten Punktes A addiert werden und schon erhält man die Punktkoordinaten von B:

$$\begin{aligned} y_B &= y_A + \Delta y = y_A + s_{AB} \cdot \sin t_A^B \\ x_B &= x_A + \Delta x = x_A + s_{AB} \cdot \cos t_A^B \end{aligned}$$

3.) Zur Überprüfung kann noch folgender Zusammenhang herangezogen werden:

$$s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

Außerdem gilt: $t_B^A = t_A^B \pm 200 \text{ gon}$

³³ eigene Zeichnung, nach SCHÜTZE 2007, S. 55

3.3.2 2. Hauptaufgabe³⁴

Bei der zweiten Grundaufgabe sind die beiden Punkte A und B über ihre Koordinaten bekannt, allerdings werden zum Abstecken der Richtungswinkel t_A^B und die Strecke s_{AB} benötigt. Somit wird hier ein Verfahren angewandt, welches rechtwinkelige Koordinaten in Polarkoordinaten umwandelt (vgl. EGGGER 2000, S. 71). Auch hier steht eine Skizze (siehe Abb. 25) zum besseren Verständnis zur Verfügung.

gegeben: Punkt A=(y_A , x_A)

Punkt B=(y_B , x_B)

gesucht: Richtungswinkel t_A^B

Strecke s_{AB}

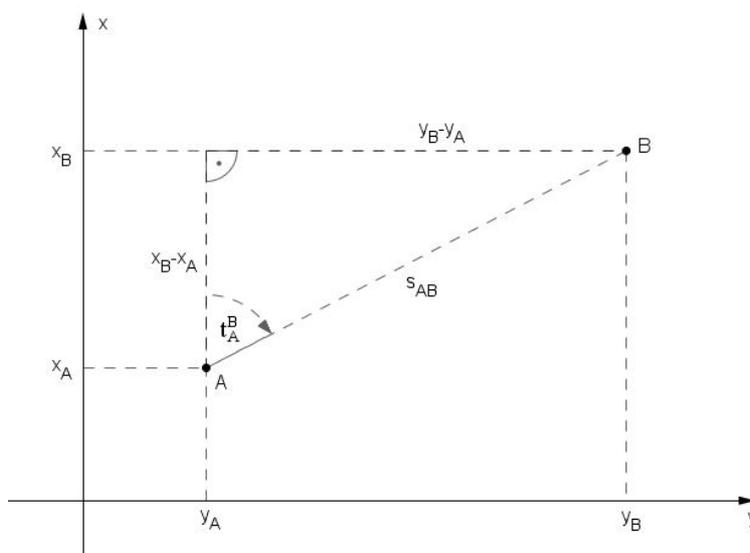


Abb. 25: Skizze zur 2. Hauptaufgabe³⁵

- 1.) Die Koordinatenunterschiede Δy bzw. Δx werden nun mittels Differenzbildung der beiden Koordinaten bestimmt. Unter **Koordinatendifferenz** wird die „gerichtete Strecke zwischen zwei Koordinatenwerten“ verstanden (EGGER 2000, S. 70).

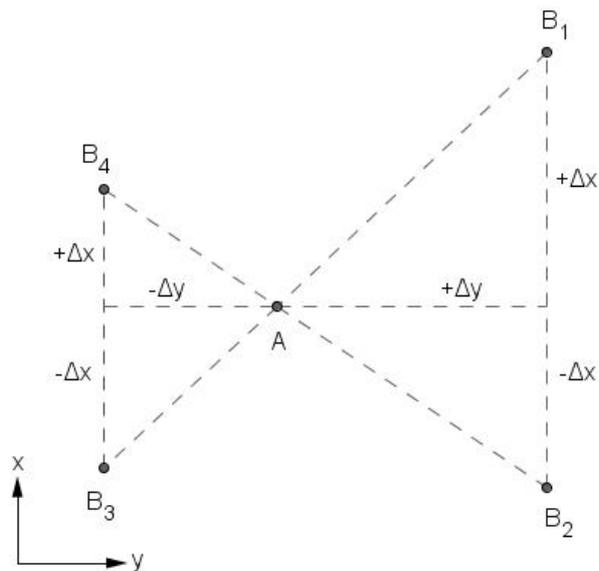
$$\Delta y = y_B - y_A$$

$$\Delta x = x_B - x_A$$

Hierbei ist aber darauf zu achten, ob bei dieser Differenzbildung ein negativer oder positiver Wert entsteht, da sich dadurch eine Aussage über den Quadranten des Richtungswinkels ergibt. Darum ist es auch wichtig, dass immer „Ende-Anfang“ gerechnet wird, wobei als Anfangspunkt jener gilt, „an dem der Richtungswinkel eingezeichnet ist“ (SCHÜTZE 2007, S. 57).

³⁴ vgl. SCHÜTZE 2007, S. 55f, außer es wird auf eine andere Quelle verwiesen

³⁵ eigene Zeichnung, nach SCHÜTZE 2007, S. 55 und EGGGER 2000, S. 71

Abb. 26: Auswirkungen der Koordinatendifferenzen auf den Richtungswinkel-Quadranten³⁶

- 2.) Sobald die Koordinatenunterschiede bekannt sind, sind Richtungswinkel t_A^B und Strecke s_{AB} sofort berechenbar:

$$\tan t_A^B = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$t_A^B = \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$s_{AB} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Bei der Richtungswinkel-Berechnung ist noch zu beachten, dass zumeist beim Taschenrechner eine Korrektur vorzunehmen ist, um den richtigen Quadranten zu erhalten (siehe Abb. 27).

Quadrant	t (kann vom Taschenrechner abhängig variieren)	Δy	Δx	Funktion auf Taschenrechner $\arctan = \tan^{-1}$
I	t (+400 gon)	+	+	+ arc tan
II	t (+200 gon)	+	-	- arc tan
III	t (+200 gon)	-	-	+ arc tan
IV	t (+400 gon)	-	+	- arc tan

Abb. 27: Richtungswinkel – Quadranteneinteilung³⁷

³⁶ eigene Zeichnung, nach SCHÜTZE 2007, S. 56

³⁷ SCHÜTZE 2007, S. 57, Tab. 2.5-1

Abhilfe kann eine schnelle Lageskizze schaffen, bei der die Koordinaten von A und B in ihrer gegenseitigen Lage eine Rolle spielen.

Oder aber man merkt sich folgende Regel: Bei negativem Δx werden zum Ergebnis des Rechners noch 200 gon hinzugerechnet, bei positivem Δx noch 400 gon (vgl. MATTHEWS 1997, S. 55).

Bei EGGER (2000, S. 71) und bei MATTHEWS (1997, S.55) wird zur Berechnung der Strecke s_{AB} ein anderer Zusammenhang verwendet:

$$s_{AB} = \frac{|\Delta x|}{|\cos t_A^B|} \quad \text{bzw.} \quad s_{AB} = \frac{|\Delta y|}{|\sin t_A^B|}$$

Es ist dabei aber darauf zu achten jenen Ausdruck auszuwählen, bei dem der Betrag der Koordinatendifferenz, d.h. $|\Delta x|$ bzw. $|\Delta y|$, größer ist.

3.4 Ebene Koordinatentransformation

Koordinatentransformationen können mittels fest vorgegebenem Umrechnungsprinzip (z.B.: $y = a \cdot y' + b \cdot x' + c$ und $x = b \cdot y' + a \cdot x' + d$) oder aber mittels **Passpunkten**, deren Koordinaten in beiden Systemen bekannt sind, durchgeführt werden (vgl. FISCHER 2007, S. 61).

In dieser Arbeit wird die Koordinatentransformation von einem ebenen Koordinatensystem in ein anderes ebenes Koordinatensystem behandelt. Um diese Umrechnung durchführen zu können, müssen mindestens zwei Punkte je System bekannt sein.

Die ebene Transformation über diese zwei Passpunkte ist nicht immer gleich gut anwendbar, da durch bestimmte Lage-Konstellationen die Genauigkeit stark in Mitleidenschaft gezogen sein kann. Ideal ist es, wenn die zu transformierenden Punkte nahe der Passpunkte liegen. Generell gilt, dass mehrere Passpunkte zu einer höheren Genauigkeit führen können, allerdings wird dann auch eine andere Berechnung angewendet. Ein anderer Punkt, der Einfluss auf die Genauigkeit hat ist der Maßstabsfaktor. Dieser wird bei der beschriebenen Transformationsrechnung aus nur einer Streckendifferenz gebildet, was zu hinterfragen ist, da bei diesen aus beiden Systemen bekannten Punktkoordinaten auch ein Messfehler vorhanden sein könnte, der dann in weiterer Folge bei weiteren Berechnungen mitgeschleppt wird (vgl. FISCHER 2007, S. 63f).

Es gibt in den herangezogenen Quellen unterschiedliche Methoden, um eine Transformation mit zwei identen Punkten durchzuführen. Es wird nun jene Variante erklärt, die in FISCHER und SCHÜTZE beschrieben wird, da die Autorin dieser Arbeit der Meinung ist, dass dieser mathematische Rechenweg für Schüler/innen leichter verständlich ist als jener von MATTHEWS (1997, S. 59f), GRUBER (2011, S. 100f) und PETRAHN (2011, S. 103f), auch wenn dieser zweite Zugang in der Praxis relevanter scheint als der gewählte.

Zur besseren Vorstellung soll mit einer grafischen Lösung begonnen werden:

Von zwei Punkten A und E kennt man die Koordinaten des ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems (y, x) und jene des ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems (y', x') . Die zwei Systeme sind zueinander verschoben, verdreht und unterschiedlich skaliert. Von einem Punkt P_i kennt man nur die Koordinaten des Systems (y', x') , nicht aber jene von (y, x) . Mit Hilfe eines Transparentpapiers kann nun versucht werden, die fehlenden Koordinaten zu erhalten:

Man zeichne die Koordinaten der Punkte A und E nach dem System (y, x) auf ein Blatt Papier, die Koordinaten der Punkte A' , E' und P_i' nach dem zweiten Koordinatensystem werden auf ein Transparentpapier übertragen. Nun wird versucht, das durchscheinende Papier so auf das Blatt Papier zu legen, dass A und A' übereinanderliegen. Das bedeutet, dass hier bereits eine Verschiebung in y - und x -Richtung stattgefunden hat. Um nun die Strecke $\overline{A'E'}$ genau über die Strecke \overline{AE} zu legen, muss das transparente Blatt noch etwas gedreht werden. Um eine endgültige Übereinstimmung der Positionen von A' und A bzw. E' und E zu erhalten, kann es notwendig sein, eine Dehnung oder Stauchung der Strecke vornehmen zu müssen – dies erweist sich mit dem Transparentpapier etwas schwierig, trotzdem können letztendlich durch diesen Schritt die Koordinaten von P_i ermittelt werden (vgl. FISCHER 2007, S. 62).

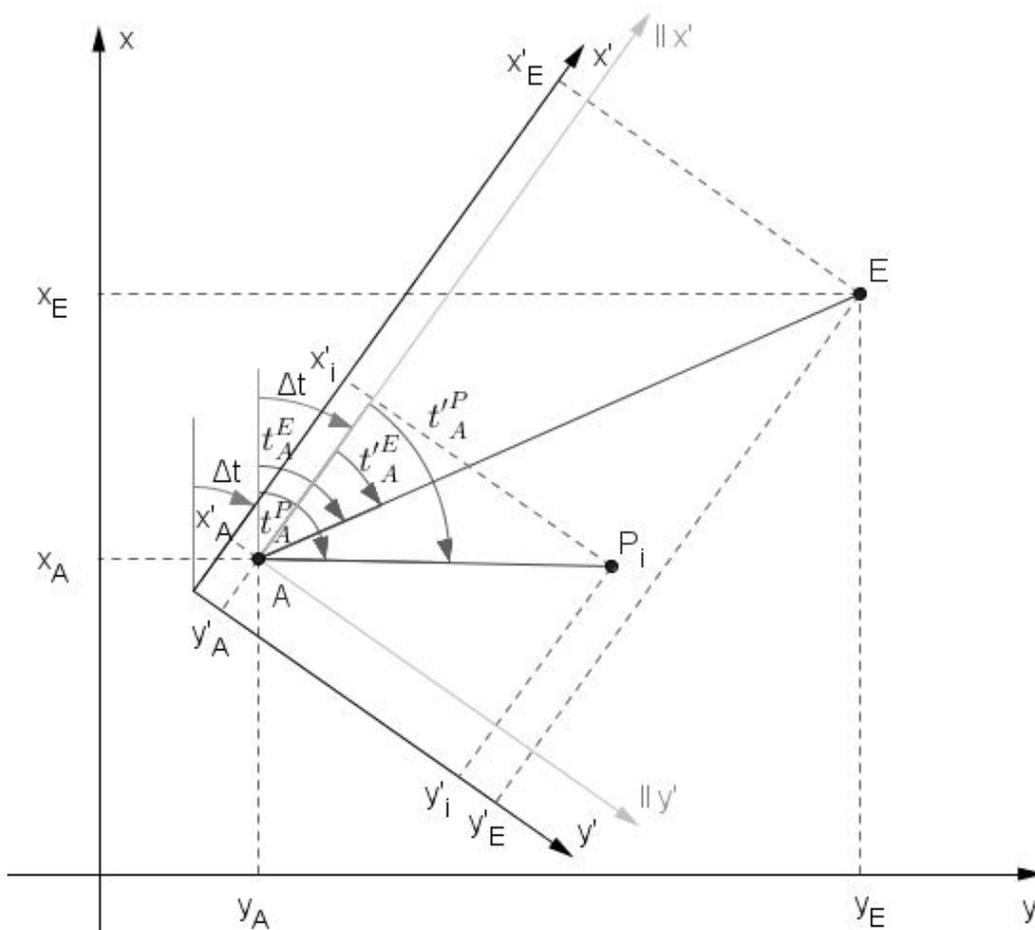


Abb. 28: Ebene Koordinatentransformation über zwei idente Punkte A und E ³⁸

³⁸ eigene Zeichnung, nach FISCHER 2007, S. 62 und SCHÜTZE 2007, S. 390

Rechenweg.³⁹

gegeben im Koordinatensystem I:

$$\text{Punkt } A'=(y'_A, x'_A)$$

$$\text{Punkt } E'=(y'_E, x'_E)$$

$$\text{Punkt } P'_i=(y'_i, x'_i)$$

gegeben im Koordinatensystem II:

$$\text{Punkt } A=(y_A, x_A)$$

$$\text{Punkt } E=(y_E, x_E)$$

gesucht: Koordinaten von Punkt $P_i=(y_i, x_i)$ im System II

- 1.) Als erster Schritt können im Koordinatensystem I (y', x') und im Koordinatensystem II (y, x) durch die gegebenen Passpunkte A und E die Strecken s'_{AE} und s_{AE} , sowie die Richtungswinkel t'^E_A und t^E_A berechnet werden.

SYSTEM I:

$$t'^E_A = \arctan \frac{y'_E - y'_A}{x'_E - x'_A}$$

$$s'_{AE} = \sqrt{(x'_E - x'_A)^2 + (y'_E - y'_A)^2}$$

SYSTEM II:

$$t^E_A = \arctan \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A}$$

$$s_{AE} = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2}$$

- 2.) Die Differenz der Richtungswinkel t und t' ist immer gleich groß, was bedeutet, dass das Koordinatensystem II eine Drehung um den Winkel $\Delta t = t - t'$ im Vergleich zum Koordinatensystem I gemacht hat. Diese Größe kann sofort angegeben werden, da sowohl t^E_A als auch t'^E_A aus dem ersten Rechenschritt bekannt sind.

$$\Delta t = t^E_A - t'^E_A$$

- 3.) Da auch beide Streckenlängen s_{AE} und s'_{AE} bereits ermittelt wurden, kann man durch Quotientenbildung den so genannten Maßstabsfaktor q erhalten. Dieser gibt die Größenveränderung zwischen den beiden Systemen an:

$$q = \frac{s_{AE}}{s'_{AE}}$$

- 4.) Mittels erster Grundaufgabe können im System I der Richtungswinkel $t'^{P_i}_A$ und die Strecke s'_{AP_i} berechnet werden, da für dieses Koordinatensystem die Koordinaten des Punktes P_i vorliegen:

³⁹ vgl. FISCHER 2007, S. 63 und SCHÜTZE 2007, S. 390ff

$$t'_A{}^P = \arctan \frac{y'_i - y'_A}{x'_i - x'_A}$$

$$s'_{AP} = \sqrt{(x'_i - x'_A)^2 + (y'_i - y'_A)^2}$$

- 5.) Als nächster Schritt können, durch die bereits bekannten Größen des Drehwinkels Δt und des Maßstabfaktors q , der Drehwinkel t_A^P und die Strecke s_{AP} im Koordinatensystem II ermittelt werden:

$$t_A^P = t'_A{}^P + \Delta t$$

$$s_{AP} = q \cdot s'_{AP}$$

- 6.) Als letzter Schritt werden nun die Koordinaten des Punktes P_i berechnet:

$$\begin{aligned} y_i &= y_A + \Delta y = y_A + s_{AP} \cdot \sin t_A^P \\ x_i &= x_A + \Delta x = x_A + s_{AP} \cdot \cos t_A^P \end{aligned}$$

- 7.) Kontrollberechnungen werden mittels zweier beliebiger Transformationspunkte durchgeführt. Dabei werden Richtungswinkel und Strecke im Koordinatensystem I berechnet, mittels Maßstabfaktor q und Drehwinkel Δt in das System II eingespeist und die so erhaltenen Koordinaten verglichen.

$$t'_P{}^{P+1} = \arctan \frac{y'_{i+1} - y'_i}{x'_{i+1} - x'_i}$$

$$s'_{PP+1} = \sqrt{(x'_{i+1} - x'_i)^2 + (y'_{i+1} - y'_i)^2}$$

$$t_P{}^{P+1} = t'_P{}^{P+1} + \Delta t$$

$$s_{PP+1} = q \cdot s'_{PP+1}$$

$$y_{i+1} = y_P + \Delta y = y_P + s_{PP+1} \cdot \sin t_P{}^{P+1}$$

$$x_{i+1} = x_P + \Delta x = x_P + s_{PP+1} \cdot \cos t_P{}^{P+1}$$

3.5 Beispiele

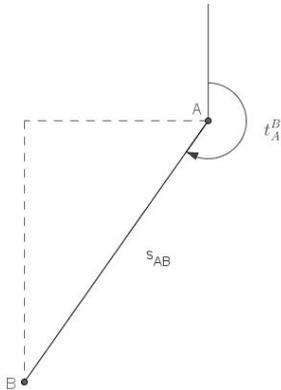
3.5.1 Beispiel 1 – 1. Hauptaufgabe der Vermessungskunde⁴⁰

Es sind die Koordinaten des Punktes A gegeben, ebenso der Richtungswinkel und die Strecke. Gesucht sind die Koordinaten des Punktes B und eine Skizze.

$$x_A = 1\,433,25 \text{ m} \quad y_A = 2\,515,70 \text{ m} \quad t_A^B = 235,6840 \text{ gon} \quad s_{AB} = 98,97 \text{ m}$$

⁴⁰ Angabe des Beispiels von SCHÜTZE 2007, S. 58

- 1.) Als erster Schritt nach Zeichnen der Skizze kann man sich mit Hilfe des sich bildenden rechtwinkligen Dreiecks die Koordinatendifferenz ausrechnen. Im Anschluss ist dieses Ergebnis noch zur y- bzw. x-Koordinate zu addieren und schon erhält man die gesuchten Koordinaten.



$$\Delta y = s_{AB} \cdot \sin t_A^B = 98,97 \cdot \sin 235,6840 = -52,61534 \dots$$

$$\Delta x = s_{AB} \cdot \cos t_A^B = 98,97 \cdot \cos 235,6840 = -83,82533 \dots$$

$$y_B = y_A + \Delta y = y_A + s_{AB} \cdot \sin t_A^B = 2515,7 - 52,61534 = 2463,08465 \dots$$

$$x_B = x_A + \Delta x = y_A + s_{AB} \cdot \cos t_A^B = 1433,25 - 83,82533 = 1349,42466 \dots$$

$$\mathbf{B = (2\ 463,08; 1\ 349,42)}$$

- 2.) Als Kontrolle dient der Satz des Pythagoras: $s^2 = \Delta y^2 + \Delta x^2$
 $98,97^2 = (-52,61534)^2 + (-83,82533)^2$

3.5.2 Beispiel 2 – 2. Hauptaufgabe der Vermessungskunde⁴¹

Zwei Punkte A und B sind mit ihren Koordinaten angegeben. Es wird nach dem Richtungswinkel und der Strecke zwischen A und B gesucht.

$$x_A = 619,17\ m \quad y_A = 450,66\ m \quad x_B = 807,08\ m \quad y_B = 307,16\ m$$

- 1.) Da beide Punkte mit ihren Koordinaten gegeben sind, kann die Koordinatendifferenz Δy und Δx sehr leicht festgestellt werden. Im Anschluss daran kann in die bereits bekannten Formeln für Richtungswinkel und Strecke eingesetzt werden.

$$\Delta x = x_B - x_A = 807,08 - 619,17 = 187,91\ m$$

$$\Delta y = y_B - y_A = 307,16 - 450,66 = -143,5\ m$$

$$\tan t_A^B = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$t_A^B = \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-143,5}{187,91} = 358,48038 \dots \approx \mathbf{358,480\ gon}$$

$$s_{AB} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(-143,5)^2 + (187,91)^2} = 236,43692 \dots \approx \mathbf{236,44\ m}$$

⁴¹ Angabe des Beispiels von SCHÜTZE 2007, S. 58

3.5.3 Beispiel 3 – 2. Hauptaufgabe der Vermessungskunde⁴²

gegeben: nach dem Gauß-Krüger-System⁴³ Punkt $P_1 = (4\ 522\ 798,15; 5\ 982\ 244,30)$
 $P_2 = (4\ 522\ 835,76; 5\ 982\ 173,25)$

gesucht: Richtungswinkel t_2^1 und Strecke s_{12}

$$t_2^1 = \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x} = \arctan \frac{4522835,76 - 4522798,15}{5982173,25 - 5982244,30} = \arctan \frac{37,61}{-71,05} = 169,00632 \dots$$

$$\approx \mathbf{169,006\ gon}$$

$$s_{12} = \sqrt{\Delta y_{12}^2 + \Delta x_{12}^2} = \sqrt{37,61^2 + (-71,05)^2} = \mathbf{80,39\ m}$$

3.5.4 Beispiel 4 – Ebene Koordinatentransformation⁴⁴

Die Koordinaten der Passpunkte (Punkt P_A und Punkt P_E) sind in beiden Systemen gegeben, auch die Koordinaten der Punkte P_1 , P_2 und P_3 im alten System sind bekannt. Gesucht werden die Koordinaten der Punkte P_1 , P_2 und P_3 im neuen System.

Pkt. Nr.	Altes Koordinatensystem I		Neues Koordinatensystem II	
	y' [m]	x' [m]	y [m]	x [m]
P_A	²⁵ 73 030,99	⁵⁶ 88 361,29	³³ 63 952,19	⁵⁶ 89 649,62
P_E	72 178,59	90 491,93	63 187,56	91 813,42
P_1	73 573,28	88 916,69	?	?
P_2	72 878,21	89 037,46	?	?
P_3	71 543,12	89 920,71	?	?

- 1.) Es wird versucht den Drehwinkel und den Maßstabsfaktor herauszufinden. Dafür ist es notwendig zuerst im jeweiligen Koordinatensystem die Strecken und Richtungswinkel zu berechnen:

Bei den Richtungswinkeln ist auf die Quadrantenlage zu achten und je nach Taschenrechner zum erhaltenen Ergebnis noch 200 oder 400 gon zu addieren (siehe Abb. 27 auf Seite 29)!

⁴² Beispiel nachgerechnet nach MATTHEWS 1997, S. 56

⁴³ Gauß-Krüger-System: Bei diesem winkeltreuen Koordinatensystem werden Punkte auf der Erde mit Hoch- und Rechtwert angegeben. Damit keine negativen Werte zustande kommen, werden zu jedem Ordinatenwert 500 000 m addiert. Eine Unterteilung der Erde in 3° Meridianstreifen hilft Streckenverzerrungen möglichst gering zu halten (vgl. RIEDL 2011, S. 70 und MATTHEWS 2003, S. 7).

⁴⁴ Beispiel nachgerechnet nach WITTE 1991, S. 213f

SYSTEM I:

$$\begin{aligned}
 t'_A{}^E &= \arctan \frac{y'_E - y'_A}{x'_E - x'_A} = \\
 &= \arctan \frac{72\,178,59 - 73\,030,99}{90\,491,93 - 88\,361,29} = \\
 &= \arctan \frac{-852,40}{2130,64} = 375,77250 \text{ gon}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s'_{AE} &= \sqrt{(x'_E - x'_A)^2 + (y'_E - y'_A)^2} = \\
 &= \sqrt{(2130,64)^2 + (-852,4)^2} = \\
 &= 2294,82299 \text{ m}
 \end{aligned}$$

SYSTEM II:

$$\begin{aligned}
 t_A{}^E &= \arctan \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \\
 &= \arctan \frac{63\,187,56 - 63\,952,19}{91\,813,42 - 89\,649,62} = \\
 &= \arctan \frac{-764,63}{2163,80} = 378,37548 \text{ gon}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{AE} &= \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2} = \\
 &= \sqrt{(2163,80)^2 + (-764,63)^2} = \\
 &= 2294,9269 \text{ m}
 \end{aligned}$$

2.) Nun kann der vorherrschende Drehwinkel Δt und der Maßstabsfaktor q berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 \Delta t &= t_A{}^E - t'_A{}^E = 378,37548 - 375,77250 = 2,60298 \text{ gon} \\
 q &= \frac{s_{AE}}{s'_{AE}} = \frac{2294,9269}{2294,82299} = 1,00004528
 \end{aligned}$$

3.) Im alten Koordinatensystem werden jetzt die jeweiligen Richtungswinkel und Strecken berechnet (1. Hauptaufgabe) und mittels Drehwinkel und Maßstabsfaktor in das neue System eingebunden.

Berechnung von P_1 :

$$t'_A{}^{P_1} = \arctan \frac{y'_1 - y'_A}{x'_1 - x'_A} = \arctan \frac{73\,573,28 - 73\,030,99}{88\,916,69 - 88\,361,29} = \arctan \frac{542,29}{555,4} = 49,2397 \text{ gon}$$

$$s'_{AP_1} = \sqrt{(x'_1 - x'_A)^2 + (y'_1 - y'_A)^2} = \sqrt{555,4^2 + 542,29^2} = 776,2394 \text{ m}$$

$$t_A{}^{P_1} = t'_A{}^{P_1} + \Delta t = 49,2397 + 2,690298 = 51,84268 \text{ gon}$$

$$s_{AP_1} = q \cdot s'_{AP_1} = 1,00004528 \cdot 776,2394 = 776,2745 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
 y_{P_1} &= y_A + \Delta y = y_A + s_{AP_1} \cdot \sin t_A{}^{P_1} = 63\,952,19 + 776,2745 \cdot \sin 51,84268 = \\
 &= \mathbf{64\,516,75 \text{ m}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{P_1} &= x_A + \Delta x = x_A + s_{AP_1} \cdot \cos t_A{}^{P_1} = 89\,649,62 + 776,2745 \cdot \cos 51,84268 = \\
 &= \mathbf{90\,182,41 \text{ m}}
 \end{aligned}$$

Berechnung von P_2 :

$$\begin{aligned}
 t'_A{}^{P_2} &= \arctan \frac{y'_2 - y'_A}{x'_2 - x'_A} = \arctan \frac{75\,878,21 - 73\,030,99}{89\,037,46 - 88\,361,29} = \arctan \frac{-152,78}{676,17} \\
 &= 385,85319 \text{ gon}
 \end{aligned}$$

$$s'_{AP_2} = \sqrt{(x'_2 - x'_A)^2 + (y'_2 - y'_A)^2} = \sqrt{676,17^2 + (-152,78)^2} = 693,2154 \text{ m}$$

$$t_A^{P_2} = t'^{P_2}_A + \Delta t = 385,85319 + 2,690298 = 388,54348 \text{ gon}$$

$$s_{AP_2} = q \cdot s'_{AP_2} = 1,00004528 \cdot 693,2154 = 693,24679 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} y_{P_2} &= y_A + \Delta y = y_A + s_{AP_2} \cdot \sin t_A^{P_2} = 63\,952,19 + 693,24679 \cdot \sin 388,54348 = \\ &= \mathbf{63\,828,11 \text{ m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{P_2} &= x_A + \Delta x = x_A + s_{AP_2} \cdot \cos t_A^{P_2} = 89\,649,62 + 693,24679 \cdot \cos 388,54348 = \\ &= \mathbf{90\,331,67 \text{ m}} \end{aligned}$$

Berechnung von P₃:

$$\begin{aligned} t_A^{P_3} &= \arctan \frac{y'_3 - y'_A}{x'_3 - x'_A} = \arctan \frac{71\,543,12 - 73\,030,99}{89\,920,71 - 88\,361,29} = \arctan \frac{-1487,87}{1559,42} \\ &= 351,49450 \text{ gon} \end{aligned}$$

$$s'_{AP_3} = \sqrt{(x'_3 - x'_A)^2 + (y'_3 - y'_A)^2} = \sqrt{1559,42^2 + (-1487,87)^2} = 2155,3533 \text{ m}$$

$$t_A^{P_3} = t'^{P_3}_A + \Delta t = 151,49450 + 2,690298 = 354,1848 \text{ gon}$$

$$s_{AP_3} = q \cdot s'_{AP_3} = 1,00004528 \cdot 2155,3533 = 2155,45089 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} y_{P_3} &= y_A + \Delta y = y_A + s_{AP_3} \cdot \sin t_A^{P_3} = 63\,952,19 + 2155,45089 \cdot \sin 354,1848 = \\ &= \mathbf{62\,531,46 \text{ m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{P_3} &= x_A + \Delta x = x_A + s_{AP_3} \cdot \cos t_A^{P_3} = 89\,649,62 + 2155,45089 \cdot \cos 354,1848 = \\ &= \mathbf{91\,270,58 \text{ m}} \end{aligned}$$

Pkt. Nr.	Altes Koordinatensystem I		Neues Koordinatensystem II	
	y' [m]	x' [m]	y [m]	x [m]
P _A	²⁵ 73 030,99	⁵⁶ 88 361,29	³³ 63 952,19	⁵⁶ 89 649,62
P _E	72 178,59	90 491,93	63 187,56	91 813,42
P ₁	73 573,28	88 916,69	64 516,75	90 182,41
P ₂	72 878,21	89 037,46	63 828,11	90 331,67
P ₃	71 543,12	89 920,71	62 531,46	91 270,58

4 GENAUIGKEITSÜBERLEGUNGEN - FEHLERFORTPFLANZUNG

„Jedes Meßergebnis wird verfälscht durch die Unvollkommenheit des Meßgegenstandes, der Meßgeräte und der Meßverfahren, außerdem durch Einflüsse der Umwelt (wie z.B. Temperatur, Luftdruck, Feuchte, Spannung, Frequenz und fremde elektrische und magnetische Felder) oder durch persönliche, von den Eigenschaften und Fähigkeiten der Beobachter abhängige Einflüsse (wie z.B. Aufmerksamkeit, Übung, Sehschärfe, Schätzvermögen). Daher bietet eine einzige Messung keinerlei Sicherung gegen Irrtum und keine Möglichkeit der Genauigkeitsabschätzung.“ (WITTE 1991, S. 37)

In diesem Kapitel wird versucht darzulegen, dass Messungen keine exakten Lösungen bringen können sondern im Allgemeinen fehlerbehaftet sind. Im Vermessungswesen wird von Anfang an versucht mögliche Fehlerquellen zu minimieren. Es sind dabei gewisse Toleranzgrenzen der Fehlergröße festgeschrieben, die bei verschiedenen Vermessungsaufgaben einzuhalten sind. Unter anderem wird hier beispielsweise unterschieden, ob es sich um eine Grenzabsteckung zwischen landwirtschaftlichen Flächen handelt oder um eine Feinabsteckung zur Errichtung eines Gebäudes.

In diesem Kapitel werden Fehlerarten, die Möglichkeit der Fehlerfortpflanzung, die Feststellung von Abweichungen, aber auch Ausgleichsmöglichkeiten beschrieben. Dabei handelt es sich nur um einen kurzen Abriss. Genauere Ausführungen können in WITTE (1991, S. 37ff) oder in NIEMEIER (2008) nachgelesen werden.

4.1 Fehlerarten

Grobe Fehler im Bereich der Längenmessung können sich im Vermessungswesen etwa durch falsches Ablesen ergeben, was durch Doppelmessungen oder gestaffelten Messungen (bei der zweiten Messung wird von einem anderen Fluchtpunkt aus gemessen) umgangen werden kann. Systematische Fehler werden im Normalfall durch Zugabe von Korrekturgrößen am Ende der Berechnungen ausgeschaltet. Aber auch auf die Veränderung des Messbandes bei sehr heißen Außentemperaturen oder auf das mögliche Durchhängen des Bandes beim Messen ist zu achten. In Österreich sind Fehlergrenzen und Punktgenauigkeiten vorgegeben (vgl. EGGER 2000, S. 28, 30).

Nach der Fehlertheorie beschreibt der Begriff **Fehler** die Differenz zwischen gemessener Größe und dem wahren Wert. Da oftmals die wahre Größe nicht bekannt ist, wird mit dem „**wahrscheinlichsten Wert**“ gerechnet. Dieser steht bei einfachen Messungen für das arithmetische Mittel, wobei hierfür mehrere Messungen für ein und denselben Punkt vorzunehmen sind, um das Mittel bilden zu können (vgl. EGGER 2000, S. 15).

Es können Fehler nach verschiedenen Arten klassifiziert werden:

4.1.1 Grobe Fehler

Wie eingangs bereits erwähnt, kann es sich bei groben Fehlern um Abweichungen handeln, welche direkt bei der Außenaufnahme entstanden sind und die weit über der tolerierten Fehlergrenze liegen. Eine falsche Bedienung des Gerätes, ein Schreibfehler und Ähnliches be-

dingen solche großen Abweichungen. Oftmals können diese Fehler nur durch eine neuerliche Messung eliminiert werden. In manchen Ausnahmefällen, bei denen mehr Messungen gemacht wurden als notwendig, ist es möglich, den Fehler ausfindig zu machen und zu korrigieren (vgl. FISCHER 2007, S. 95).

4.1.2 Systematische Fehler / Modellfehler

Zumeist stimmen angenommene mathematische oder physikalische Modelle nicht gänzlich mit dem realen Zustand überein, wodurch Abweichungen entstehen können. Diese sind sehr schwer zu lokalisieren und zu eliminieren. Eine gänzliche Ausschaltung dieses Modellfehlers kann kaum erfolgen, aber eine starke Reduzierung auf ein akzeptables Maß ist möglich (vgl. FISCHER 2007, S. 95).

Eichfehler an Längenmessgeräten, wodurch Distanzen immer zu lang oder zu kurz ermittelt werden, können als systematische Fehler bezeichnet werden. Oftmals entdeckt man diese nur, wenn verschiedene Messgeräte bei der Aufnahme verwendet wurden, welche diese Abweichungen aufzeigen (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 69).

Zur Aufdeckung dieser Ungenauigkeiten braucht es also eine sehr sorgfältige Analyse, die versucht, alle beeinflussenden Faktoren herauszufiltern. Im Vermessungswesen kann dies wie bereits weiter oben erwähnt eine schlechte Kalibrierung des Gerätes sein oder aber das Unterschätzen der Auswirkungen von Erdkrümmung und Refraktion⁴⁵. Bei der Durchführung von GPS-Messungen muss man sich der so genannten „Multipath-Effekte“ bewusst sein (vgl. NIEMEIER 2008, S. 11). Dieser Effekt kann auftreten, wenn die vom Satelliten gesendeten Signale an glatten Flächen reflektiert werden und nicht direkt den Empfänger erreichen. Auch eine Abschattung des Signals durch Felsen oder Gebäude kann die Genauigkeit des Ergebnisses beeinflussen.

4.1.3 Zufällige Fehler

Zufällige Fehler entstehen vielfach durch die Unvollkommenheit der Geräte, des Menschen sowie durch Wettereinflüsse. Somit wird bei mehreren Messungen nacheinander nicht immer der exakt gleiche Wert erhalten. Dies kann durch ein unterschiedliches Anvisieren des Ziels mit dem Gerät entstehen oder aber durch ein minimal durchhängendes oder nicht gänzlich horizontal gehaltenes Maßband. Durch Bildung des Mittelwerts kann der zufällige Fehler dieser Messungen verkleinert werden (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 70).

4.2 Statistische Kenngrößen und Methoden der Fehlerrechnung

Die erhaltenen Messergebnisse werden oft für eine weitere, fachspezifische Analyse herangezogen. Daher ist es wichtig, die vorhandenen Abweichungen zu klassifizieren, um beispielsweise Vergleiche mit anderen Messdaten vornehmen zu können. Die so erhaltenen Qualitätsmerkmale sollten interdisziplinär verständlich sein. Deshalb werden statistische Kenngrößen und Verfahren angewendet.

Messergebnisse werden zumeist durch zwei Kenngrößen angeben: Einerseits durch den Mit-

⁴⁵ Unter Refraktion wird die Ablenkung des Mess-Strahls verstanden, da dieser durch verschiedene Luftschichten wandert und dabei gebrochen wird. - weitere Erklärungen finden sich auf Seite 72ff

telwert und andererseits durch die Streuung der Werte, was die Qualität der Messung aufzeigt (vgl. NIEMEIER 2008, S. 1).

Bevor diese Kenngrößen näher beleuchtet werden, werden davor ein paar ebenfalls in der Statistik verwendete Begriffe näher erläutert:

Als **Zufallsvariable** wird eine Größe verstanden, der bestimmte Messwerte x_i , die bei der Durchführung von Experimenten zustande gekommen sind, zugeordnet werden (vgl. NIEMEIER 2008, S. 1). Wenn eine Messung n -mal wiederholt wurde, dann liegen die erhaltenen Messwerte x_i ($i=1, 2, \dots, n$) in einer „aus der Grundgesamtheit entnommene(n) **Stichprobe vom Umfang n** “ (WITTE 1991, S. 51). Diese Stichprobe soll die Eigenschaften der **Grundgesamtheit** möglichst gut wiedergeben.

Wie bereits erwähnt wurde, versteht man unter dem „**wahren Wert \tilde{x}** “ eine „*tatsächliche Größe X im Augenblick der Beobachtung unter den gegebenen Bedingungen*“ (SCHÜTZE 2007, S. 7). Leider ist dieser Wert nicht wirklich bekannt, sondern nur jener Wert, der mit Hilfe vieler möglichst genauer Messungen entstanden ist. Dieser wird auch „**wahrscheinlichster Wert**“ genannt (vgl. EGGER 2000, S. 15).

Der Erwartungswert einer Größe, wie beispielsweise die Winkelsumme in einem Dreieck, kann dem wahren Wert entsprechen (vgl. GRÜNDIG 2004, S. 57).

Um den bestmöglichen Wert aus einer Menge von Messwerten zu erhalten, gibt es verschiedene mathematische Vorgehensweisen, wobei die gebräuchlichste jene des **arithmetischen Mittels \bar{x}** ist. Dieser Lageparameter wird in der Statistik auch als „optimale Schätzung“ angesehen, wobei nur zufällige Fehler in der Datenmenge vorliegen dürfen:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{vgl. NIEMEIER 2008, S. 3})$$

„Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert das arithmetische Mittel \bar{x} zum **Erwartungswert μ_x** der Zufallsvariablen X :

$$\mu_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) = E(x) \quad (\text{NIEMEIER 2008, S. 21})$$

Das heißt, dass der Erwartungswert mathematisch gesehen jenen Durchschnittswert beschreibt, der sich aus den verschiedenen erhaltenen Werten einer Zufallsgröße bei vorgegebener Wahrscheinlichkeit ergibt. (NIEMEIER 2008, S. 18).

Je mehr Werte bekannt sind, desto besser fällt die Annäherung zwischen Erwartungswert μ_x und wahren Wert \tilde{x} aus. Eine gewisse Abweichung $\delta = \mu_x - \tilde{x}$, auch **Nichtzentralitätsparemeter** genannt, kann bestehen bleiben aufgrund von systematischen Fehlern, welche idealerweise auszuräumen wären, bevor weitere Betrachtungen durchgeführt werden (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 72).

Es wurde ein von Carl Friedrich Gauß entwickeltes Genauigkeitsmaß eingeführt, um vorhandene Abweichungen besser klassifizieren zu können. Es wird unter anderem als Kenngröße für zufällige Messabweichungen verwendet (vgl. NIEMEIER 2008, S. 10), wobei bei der Berechnung folgendermaßen vorgegangen wird:

Als erstes wird die Differenz zwischen einem fehlerbehafteten Messwert und dem wahrscheinlichsten Wert gebildet. Das daraus erhaltene Ergebnis wird als Fehler bezeichnet. Da eine ganze Messreihe vorliegt, ist für alle diese Werte der jeweilige Fehler zu bilden. Die ein-

zelen Zwischenergebnisse werden im Anschluss quadriert und aufsummiert und durch die Anzahl der Messwerte dividiert. Der so erhaltene Wert wird mit **Varianz σ^2** bezeichnet:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})^2$$

Carl Friedrich Gauß zog noch die Quadratwurzel und bezeichnete dieses Maß als der „mittlere zu fürchtende Fehler“, der heute unter dem Ausdruck **Standardabweichung σ** bekannt ist (vgl. FISCHER 2007, S. 97).

Laut Schütze (2007, S. 73) wird bei unendlich vielen Messwerten die Varianz mit σ^2 bezeichnet, sofern das Maß der Streuung gemeint ist. Wenn die Standardabweichung, die als Genauigkeitsmaß gilt, mittels Messwerten aus einer Stichprobe berechnet wird, wird sie statt mit σ mit s bezeichnet.

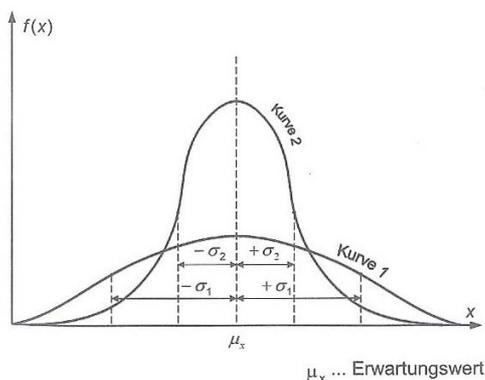


Abb. 29: Gauß'sche Glockenkurve – durch zwei Verteilungskurven dargestellt⁴⁶

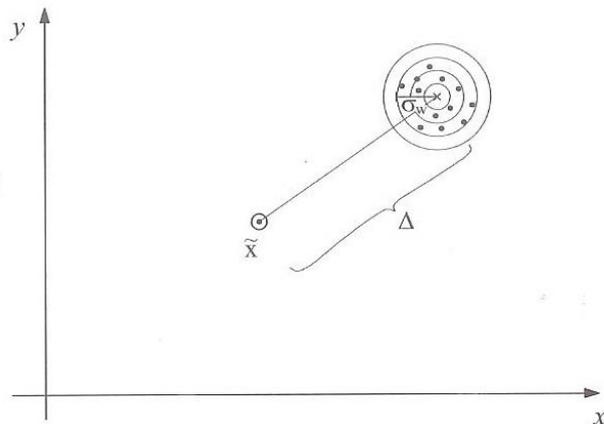
Die Werte von sehr vielen Messungen, die unter gleichen Bedingungen durchgeführt wurden, nähern sich nach dem **zentralen Grenzwertsatz von Cramér** der so genannten **Normalverteilung**, welche durch die Gauß'sche Glockenkurve (siehe Abb. 29) dargestellt werden kann. Bei der Normalverteilung kommen als Parameter der Mittelwert μ_x und die Varianz σ^2 zum Einsatz. Je größer die Streuung bzw. Standardabweichung σ rund um den Mittelwert bzw. Erwartungswert ist, desto flacher ist die Verteilungskurve, wie in Abb. 29 zu sehen ist (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 72). Trotzdem ist die Fläche zwischen der x-Achse und der Kurve immer 1. Im Prinzip ist in der obenstehenden Grafik die so genannte Dichtefunktion $f(x)$ zu sehen, die bereits von Gauß folgendermaßen definiert wurde und symmetrisch ist:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit } -\infty < x < +\infty$$

(vgl. NIEMEIER 2008, S. 37).

Um eine bessere Vorstellung zu erhalten, wie arithmetisches Mittel und Standardabweichung in der Vermessung zum Einsatz kommen, wird folgende Grafik gezeigt:

⁴⁶ SCHÜTZE 2007, S. 71 Abb. 2.8-2

Abb. 30: Zufällige und systematische Messfehler⁴⁷

In dieser Abbildung (Abb. 30) wird dargestellt, wie sich ein systematischer Fehler auswirken kann. Der wahre, aber an sich unbekannte Wert \tilde{x} ist etwas abseits platziert, die schwarzen Punkte stellen die erhaltenen Messwerte, in deren Mitte das errechnete arithmetische Mittel \bar{x} liegt, dar. Die Streuung der Werte rund um den Mittelwert wird mittels Standardabweichung σ angegeben. Dieser Wert kann als Genauigkeitsmaß der durchgeführten Messungen angesehen werden. Nun kann sich, wie in der Abbildung zu sehen ist, zwischen dem wahren Wert \tilde{x} und dem erhaltenen Mittelwert \bar{x} eine Abweichung Δ ergeben, die aus systematischen Gründen entstanden ist (vgl. NIEMEIER 2008, S. 11). Diese gilt es zu finden und zu eliminieren.

4.2.1 Auswertung von Messergebnissen: Mittelwert, Standardabweichung oder Variationskoeffizient

Geht man davon aus, dass n Werte x_i ($i=1,2,\dots,n$) einer Messreihe sowie der Erwartungswert μ_x vorliegen, dann kann in weiterer Folge die empirische Varianz s^2 sowie die Standardabweichung s mit einer geeigneten Formel ermittelt werden. Auch die Standardabweichung des arithmetischen Mittels \bar{s} ergibt sich einfach wie in Tabelle 1 dargestellt.

	allgemeine mathematische Schreibweise
Empirische Varianz	$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2$
Standardabweichung	$s = +\sqrt{s^2}$
Standardabweichung des arithmetischen Mittels	$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}}$

Tab. 1: Empirische Varianz und Standardabweichung bei bekanntem Erwartungswert⁴⁸

⁴⁷ NIEMEIER 2008, S. 11 Abb. 1.2-2

Wenn der Erwartungswert bekannt ist, würde im Grunde ein Messwert genügen, um die Genauigkeit zu erhalten. Sind mehrere Messwerte vorhanden, spricht man auch von überschüssigen Messungen oder vom **Freiheitsgrad** f .⁴⁹

$$f = n - u$$

mit n ... Anzahl der Messungen

u ... Anzahl der Unbekannten

f ... Anzahl der Freiheitsgrade

Je höher der Freiheitsgrad, das heißt je höher die Überbestimmung, desto sicherer kann die Messung eingestuft werden. Hier kann in weiterer Folge ein **Vertrauensbereich** ermittelt werden, der mit 95%-iger oder 99%-iger Sicherheit den Messwert beinhaltet. Dieses Intervall kann mittels der Formel $x \pm t \cdot s$ berechnet werden, wobei x für die ermittelte Größe und s für die Standardabweichung steht. Die Variable t ist abhängig von der Höhe der Freiheitsgrade und der Sicherheit – die Werte von t sind vorgegeben und können einer Tabelle entnommen werden (vgl. MATTHEWS 2003, S. 21).

Liegt bei einer Messreihe mit n Werten x_i ($i=1,2,\dots,n$) noch kein Erwartungswert vor, wird stattdessen das arithmetische Mittel \bar{x} als Schätzwert herangezogen, um Varianz s^2 und Standardabweichung s berechnen zu können. Dabei geht allerdings ein Freiheitsgrad verloren, was sich in der Formel der empirischen Varianz durch den Nenner ($n-1$) bemerkbar macht (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 74). Die Standardabweichung für das arithmetische Mittel \bar{s} wird dann wieder wie zuvor berechnet.

	allgemeine mathematische Schreibweise
Arithmetisches Mittel	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
Empirische Varianz	$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
Standardabweichung	$s = +\sqrt{s^2}$
Standardabweichung des arithmetischen Mittels	$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}}$

Tab. 2: Empirische Varianz und Standardabweichung bei unbekanntem Erwartungswert⁵⁰

⁴⁸ SCHÜTZE 2007, S. 74

⁴⁹ vgl. SCHÜTZE 2007, S. 74

⁵⁰ SCHÜTZE 2007, S. 75

Ein anderes Genauigkeitsmaß ist der **empirische Variationskoeffizient** v , welcher die relative Genauigkeit einer Messung angibt:⁵¹

$$v = \frac{\text{Standardabweichung}}{\text{arithmetisches Mittel}} = \frac{s}{\bar{x}}$$

Der Variationskoeffizient kann zu Vergleichszwecken zwischen verschiedenen Stichproben einer Grundgesamtheit herangezogen werden. Dieses Maß ist dimensionslos und hat nur eine Aussagekraft, wenn das arithmetische Mittel von Null verschieden ist und auch nicht zu nahe bei Null liegt (vgl. LEHMANN 2011, S. 85).

4.3 Fehlerfortpflanzungsgesetz

Messwerte unterliegen Ungenauigkeiten, die nicht gänzlich ausgeschaltet werden können, wie bereits zu Beginn erwähnt wurde. Wenn nun mit fehlerbehafteten Werten weitergerechnet wird, kann sich das auf das Ergebnis stark auswirken. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz gibt dieses Ausmaß an (vgl. FISCHER 2007, S. 99).

Man betrachtet den mittleren Fehler m einer Beobachtung L , die für die Berechnung einer Funktion F herangezogen wird. Den daraus entstehenden Fehlereinfluss nennt man M . Die Bestimmung von M kann mittels verschiedener Verfahren erfolgen, wobei hier nur eine sehr einfache Variante gezeigt werden soll, damit sich ein erstes Verständnis für die Wichtigkeit dieses Gesetzes erzeugen lässt:

Zuerst wird die Zielgröße F aus den gegebenen Beobachtungen berechnet. Im Anschluss wird jeweils bei einer der Beobachtungen der mittlere Fehler m hinzugenommen und F neu ermittelt. Die so entstandene Differenz zwischen F_{alt} und F_{neu} ergibt den Fehlereinfluss M . Die gleiche Vorgehensweise wird bei allen Beobachtungen, die einen mittleren Fehler m aufweisen, gemacht. Am Ende kann mittels der unten genannten Formel der Fehlereinfluss M_F berechnet werden (vgl. FISCHER 2007, S. 99f). Da prinzipiell jede Beobachtung L_i einen eigenen Fehlereinfluss M_i hat, ergibt sich somit ein Gesamtfehler M_F .⁵²

$$M_F = \pm \sqrt{(M_1)^2 + (M_2)^2 + \dots + (M_n)^2}$$

Zum besseren Verständnis wird am Ende dieses Kapitels ein Beispiel angeführt (siehe Seite 46).

Das Fehlerfortpflanzungs- oder auch Varianzfortpflanzungsgesetz kann auch in anderer Schreibweise angegeben werden:⁵³

Gegeben ist eine Funktion $F=F(L_1, L_2, \dots, L_n)$ mit ihren unabhängigen Messwerten oder Beobachtungen L_1, L_2, \dots, L_n und deren Standardabweichungen s_1, s_2, \dots, s_n . Die Standardabweichung der Funktion F ergibt sich aus den partiellen Ableitungen der Funktion der Einzelwerte und dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$s_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial L_1} \cdot s_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L_2} \cdot s_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial L_n} \cdot s_n\right)^2}$$

⁵¹ vgl. SCHÜTZE 2007, S. 75

⁵² FISCHER 2007, S. 99f

⁵³ LEHMANN 2011, S. 98

Fehler müssen nicht immer unentdeckt bleiben. Eine mögliche Kontrolle ist unter anderem mittels Überbestimmung möglich, denn dann fallen im Normalfall die Abweichungen durch das Anwenden dieser zusätzlichen Größe in einer Rechenprobe auf (vgl. EGGER 2000, S. 16). Hier gibt es verschiedene Ansätze:

Laut FISCHER (2007, S. 102) können die überbestimmten Werte bei Bedarf rein zur Kontrolle benutzt und nicht in die Rechnung an sich eingebunden werden. Liegt die erhaltene Abweichung innerhalb einer vorgegebenen Toleranzgrenze ist alles in Ordnung.

Eine andere Methode liegt darin, den vorhandenen nachgewiesenen Fehler gleichmäßig zu verteilen. Als Beispiel dient die Winkelsumme im Dreieck, die bei 200 gon liegen sollte. Etwaige Abweichungen werden auf alle drei Innenwinkel in gleichem Maße aufgeteilt.

Weiters existieren eigene Näherungsverfahren, die helfen sollen die Fehlerverteilung zu erleichtern, wobei die „*Genauigkeitsansprüche nicht zu hoch angesetzt*“ sein sollten (FISCHER 2007, S. 102).

4.4 Einfache Ausgleichsrechnung

Gauß entwickelte das Verfahren der einfachen Ausgleichsrechnung, welches auch strengen Toleranzgrenzen standhält. Dabei wird ein lineares Gleichungssystem gebildet, bei dem versucht wird, unter Einbezug aller Messwerte die „*wahrscheinlichsten Werte für die gesuchten Größen zu bestimmen und Genauigkeitsmaße für alle in die Berechnung eingehenden Messwerte anzugeben.*“ (LEHMANN 2011, S. 94) Wichtig dabei ist, dass eine Überbestimmung vorliegt. Das bedeutet, dass mehr Beobachtungen n vorliegen müssen als Unbekannte u . Liegen nämlich gleich viele Beobachtungen und Unbekannte vor, kann das lineare Gleichungssystem eindeutig bestimmt werden. Um die „wahrscheinlichsten Werte“ für die Unbekannten zu erhalten muss die Bedingung gelten, dass die Summe der Quadrate der Fehler minimal wird (vgl. FUCHS 2013, S. 68).

Heute werden diese Berechnungen von Computerprogrammen übernommen (vgl. FISCHER 2007, S. 102ff).

Genauere Ausführungen zur einfachen Ausgleichsrechnung finden sich beispielsweise in NIEMEIER (2008, S. 129ff).

4.5 Beispiele

4.5.1 Beispiel 1⁵⁴

gegeben: Rechteck mit Seiten a und b , wobei $a = 20,00 \text{ m} \pm 1 \text{ cm}$ und $b = 400,00 \text{ m} \pm 5 \text{ cm}$
 gesucht: Fläche A

- 1.) Berechnung des Flächeninhalts A ohne Maßtoleranzen:

$$A = a \cdot b = 20,00 \cdot 400,00 = 8000 \text{ m}^2$$

- 2.) Berechnung der Flächeninhalte A_1 und A_2 mit jeweils einer veränderten Größe:

$$m_a = 1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m} \rightarrow A_1 = (a + m_a) \cdot b = 20,01 \cdot 400,00 = 8004 \text{ m}^2$$

$$m_b = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m} \rightarrow A_2 = a \cdot (b + m_b) = 20,00 \cdot 400,05 = 8001 \text{ m}^2$$

- 3.) Der Fehlereinfluss M ergibt sich aus der Differenz aus (1) und (2):

$$M_a = A - A_1 = -4 \text{ m}^2$$

$$M_b = A - A_2 = -1 \text{ m}^2$$

- 4.) Gesamtfehler $m_A = \pm \sqrt{(M_a)^2 + (M_b)^2} = \pm \sqrt{(-4 \text{ m}^2)^2 + (-1 \text{ m}^2)^2} = \pm 4,123 \approx \pm 4 \text{ m}^2$

Sichtbar wurde in diesem Fall, dass sich der Fehlereinfluss M_a bzw. M_b unterschiedlich stark bemerkbar machen kann – je nach geometrischen Verhältnissen.

Nun wird ein ähnliches Beispiel zur Berechnung der Standardabweichung der Rechtecksfläche mittels partieller Ableitung herangezogen (vgl. WITTE 1991, S. 67f).

Ein Rechteck mit den Seiten a und b , wobei $a = 20,00 \text{ m}$ und $b = 400,00 \text{ m}$ sind, sowie die Standardabweichungen $\sigma_a = 1 \text{ cm}$, und $\sigma_b = 5 \text{ cm}$ sind gegeben.

gesucht: Standardabweichung der Fläche

1a.) $A = a \cdot b = 20,00 \cdot 400,00 = 8000 \text{ m}^2$

- 2a.) Nun werden die partiellen Ableitungen gebildet:

$$\frac{\partial A}{\partial a} = b = 400,00 \text{ m} \qquad \frac{\partial A}{\partial b} = a = 20,00 \text{ m}$$

- 3a.) Daraus ergibt sich die Varianz und die Standardabweichung der Fläche:

$$\sigma_A^2 = b^2 \cdot \sigma_a^2 + a^2 \cdot \sigma_b^2 = 400,00^2 \cdot 0,01^2 + 20,00^2 \cdot 0,05^2 = 17 \text{ [m}^2\text{]}^2$$

$$\sigma_A = 4,123 \text{ m}^2$$

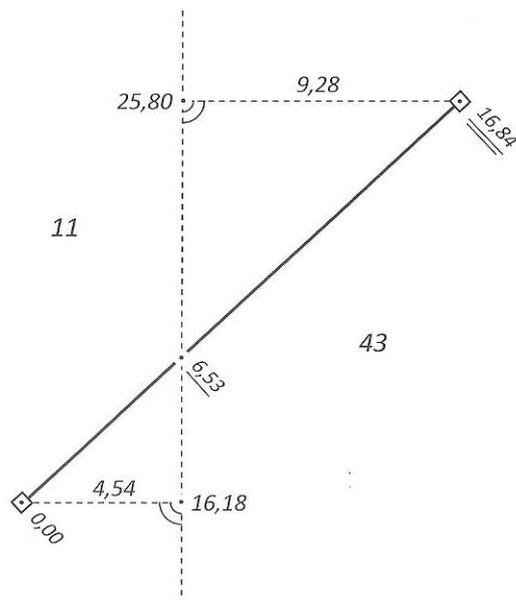
Hier wird deutlich, dass es keinen Unterschied macht, welche Methode herangezogen wird.

⁵⁴ Beispiel nachgerechnet nach FISCHER 2007, S. 100

4.5.2 Beispiel 2⁵⁵

gegeben: Skizze

gesucht: Das Maß „6,53m“ ist durch Rechnung zu überprüfen.



Die Berechnung erfolgt mit dem Prinzip der Ähnlichkeit!

$$x: 16,84 = 4,54: (4,54 + 9,28)$$

$$x = \frac{16,84 \cdot 4,54}{(4,54 + 9,28)} = 5,53209 \dots \sim \mathbf{5,53 \text{ m}}$$

Das angegebene Maß von 6,53 m weist einen Fehler von genau einem Meter auf!

Abb. 31: Angabe zum Beispiel⁵⁶

⁵⁵ Angabe des Beispiels von SIELAND 2011, S. 134

⁵⁶ SIELAND 2011, S. 134

5 EINSCHNEIDEVERFAHREN

Zur Koordinatenbestimmung von Punkten werden Einschneideverfahren verwendet. Die Basis bildet ein Festpunktsystem, welches bereits vorhanden sein sollte. Bei der Suche nach ein bis zwei neuen Punkten, auch **Neupunkte** genannt, kann die trigonometrische Punktbestimmung herangezogen werden, bei mehreren Neupunkten muss eine Überbestimmung erfolgen sowie ein Ausgleichsverfahren angewendet werden, um die geforderte Genauigkeit einhalten zu können (vgl. EGGER 2000, S. 71).

Es kann zwischen drei Einschneidemethoden unterschieden werden:

Das **Vorwärtseinschneiden** wird dann verwendet, wenn Festpunkte bestimmt werden oder eine Detailaufnahme gemacht werden soll. Im Gelände ist diese Art sehr aufwändig, da alle gegebenen Punkte begangen werden müssen, um von dort eine Richtungsmessung vorzunehmen.

Beim **Rückwärtseinschneiden** werden vom Neupunkt die Richtungen zu den bereits bekannten Punkten gemessen. Dies wird zur Bestimmung neuer Festpunkte eingesetzt.

Das **Bogenschnittverfahren** wird ebenfalls für Detailaufnahmen und die Festlegung von Festpunkten eingesetzt. Dabei müssen alle Punkte begangen werden um alle Seiten messen zu können (vgl. EGGER 2000, S. 71).

Der rechnerische Aufwand spielt heutzutage selten eine entscheidende Rolle, da die vorhandenen elektronischen Hilfsmittel die Rechenarbeit übernehmen und deswegen eher der im Gelände betriebene Aufwand herangezogen wird für die Auswahl der Methode (vgl. EGGER 2000, S. 71f).

Auch wenn die mathematischen Rechenschritte heute vielleicht nicht mehr jene Bedeutung haben wie früher, so spielt doch die Methode des Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden etwa beim Bergsteigen eine wichtige Rolle. Zu Orientierungszwecken mit Karte und Kompass wird das gleiche Grundprinzip eingesetzt. Wenn man selbst nicht mehr weiß, wo man sich befindet, aber mindestens zwei Ziele in der näheren Umgebung kennt, dann wird das Rückwärtseinschneiden verwendet, um den eigenen Standort auf der Karte bestimmen zu können. Ist einem die eigene Position bekannt, nicht aber ein Punkt aus der Umgebung, kann man mittels Vorwärtseinschneiden herausfinden, worum es sich beim unbekanntem anvisierten Ziel handelt (vgl. WÜRTEL 2002; S. 31). Nähere Erklärungen zu den einzelnen Schritten können dem Artikel „292° WNW – Praxis mit Kompass - die hohe Kunst. Teil 2“ entnommen werden.

5.1 Vorwärtseinschneiden

Wie erwähnt ist dieses Verfahren im Gelände sehr aufwändig, da alle gegebenen Punkte abgegangen werden müssen, um von dort aus Richtungsmessungen vornehmen zu können. Weiters ist bei der Wahl der Punkte darauf zu achten ein möglichst gleichschenkelig-rechtwinkeliges Dreieck zu generieren, da hier die höchste Genauigkeit erzielt wird (vgl. EGGER 2000, S. 71). „Der Schnittwinkel im Neupunkt soll zwischen 30° und 150° liegen.“ (EGGER 2000, S. 71)

„Beim Vorwärtsschnitt werden auf zwei koordinatenmäßig bekannten Punkten Horizontalwinkel zu einem Neupunkt gemessen.“ (SCHÜTZE 2007, S. 333)

Dieses dadurch gebildete Dreieck hat manchmal die Eigenheit, keinen Blickkontakt zwischen den gegebenen Punkten durch Gebäude, Bäume, etc. zuzulassen. Deshalb wurde eine weitere Methode des Vorwärtsschnitts eingeführt, die hier Abhilfe leistet.

5.1.1 Vorwärtseinschnitt mit Gegensicht⁵⁷

Unter Vorwärtseinschnitt mit Gegensicht wird verstanden, dass zwischen den beiden gegebenen Standorten Sichtkontakt möglich ist.

Die Standorte A und B sind koordinatenmäßig bekannt. Von ihnen werden im Gelände die Richtungswinkel zum gesuchten Punkt N aufgenommen. Im Anschluss kann, aufgrund der erhaltenen Ergebnisse, die Koordinatenberechnung des Standpunkts N beginnen, die mittels Dreiecksauflösung sehr schnell abgehandelt wird (vgl. WITTE 1991, S. 390). Dabei ist zu beachten, falls im Gelände auch der dritte Dreieckswinkel gemessen wurde, die Winkelsumme zu kontrollieren. Da bei Messergebnissen die Summe der Dreieckswinkel zumeist nicht genau 200 gon beträgt, ist die vorhandene Ungenauigkeit auf alle drei Winkel gleichmäßig aufzuteilen und somit eine Korrektur vorzunehmen, bevor ein Weiterrechnen erfolgt (vgl. MATTHEWS 1997, S. 62).

Nun folgt der Rechenweg mit einer Angabe in Stichworten und einer Skizze:

gegeben: $A=(y_A, x_A)$

$B=(y_B, x_B)$

gemessen: Horizontalwinkel α und β

gesucht: Koordinaten von $N=(y_N, x_N)$

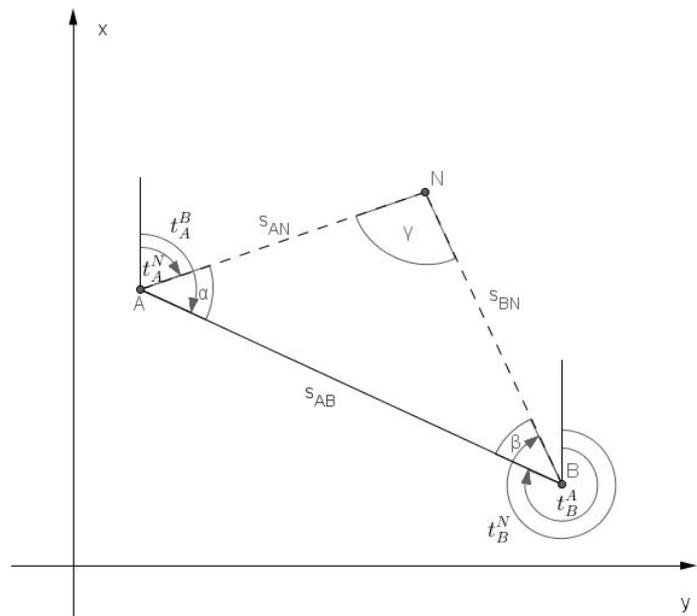


Abb. 32: Vorwärtsschnitt mit Sicht⁵⁸

- 1.) Die Richtungswinkel t_A^B und t_B^A sind mit Hilfe der bekannten Punkte A und B zu berechnen, ebenso die Strecke s_{AB} .

$$s_{AB} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad \text{mit } \Delta y = y_B - y_A, \quad \Delta x = x_B - x_A$$

⁵⁷ vgl. SCHÜTZE 2007, S. 334f, außer es wird auf eine andere Quelle verwiesen

⁵⁸ eigene Zeichnung, nach SCHÜTZE 2007, S. 334

$$t_A^B = \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad t_B^A = t_A^B \pm 200 \text{ gon}$$

- 2.) Da zwei der drei Winkel bereits gemessen wurden, ergibt sich der Winkel γ aus der Winkelsumme des Dreiecks: $\gamma = 200 \text{ gon} - (\alpha + \beta)$
- 3.) Mit Hilfe des Sinussatzes können die fehlenden Strecken s_{AN} und s_{BN} ermittelt werden:

$$\frac{s_{AN}}{\sin \beta} = \frac{s_{BN}}{\sin \alpha} = \frac{s_{AB}}{\sin \gamma}$$

$$s_{AN} = \frac{\sin \beta \cdot s_{AB}}{\sin \gamma} \quad \text{bzw.} \quad s_{BN} = \frac{\sin \alpha \cdot s_{AB}}{\sin \gamma}$$

- 4.) Im Anschluss werden noch die Richtungswinkel t_A^N und t_B^N benötigt, um mittels erster Grundaufgabe (polares Anhängen) die Koordinaten des Neupunktes zu bestimmen:

$$t_A^N = t_A^B - \alpha \quad t_B^N = t_B^A + \beta$$

Nun erfolgt noch das polare Anhängen der Koordinaten:

$y_N = y_A + s_{AN} \cdot \sin t_A^N$ $x_N = x_A + s_{AN} \cdot \cos t_A^N$

- 5.) Als Kontrolle kann die Berechnung der Neupunkt-Koordinaten N kann über den bekannten Punkt B erfolgen:

$$y_N = y_B + s_{BN} \cdot \sin t_B^N$$

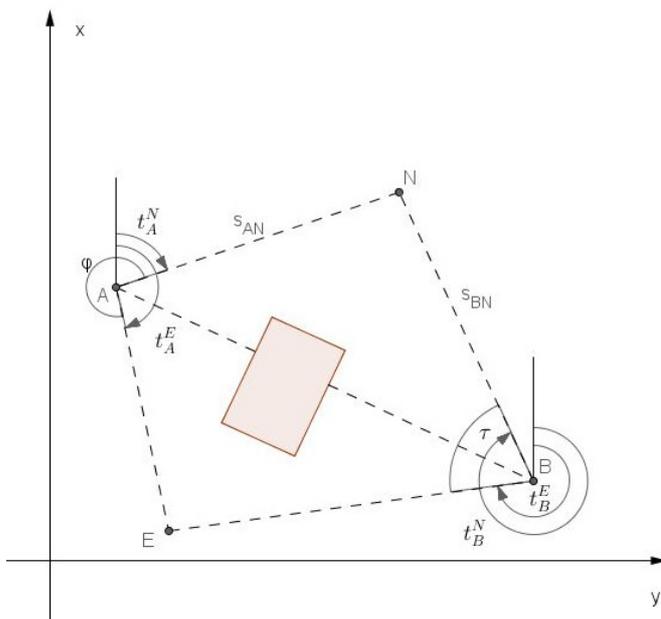
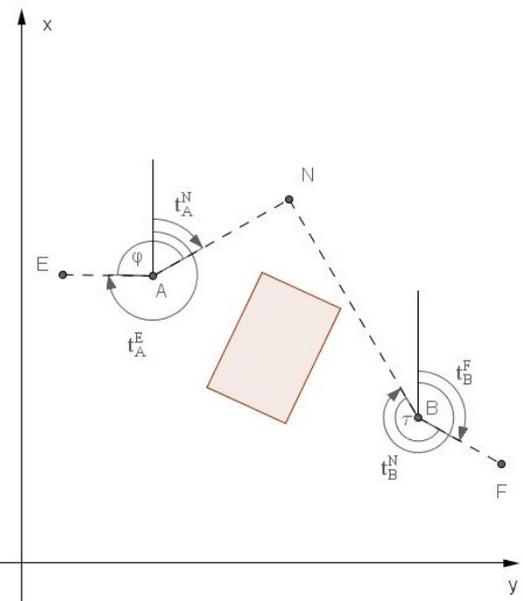
$$x_N = x_B + s_{BN} \cdot \cos t_B^N$$

5.1.2 Vorwärtseinschnitt ohne Gegensicht⁵⁹

Das Verfahren des Vorwärtseinschnitts kann auch dann angewendet werden, wenn kein Blickkontakt zwischen den gegebenen Punkten A und B besteht. Jedoch muss mindestens ein weiterer Punkt bekannt sein (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 336) wie in den folgenden Abbildungen dargestellt (siehe Abb. 33 und Abb. 34).

Im skizzierten Rechenweg sind zwei weitere Punkte E und F bekannt (wie in Abb. 34 dargestellt). Am Anfang sind ein paar zusätzliche Rechenschritte notwendig, bis der unter Punkt 5.1.1. erklärte Rechenweg (ab Aufzählungspunkt 3, S. 50) wiederholt zur Anwendung kommt.

⁵⁹ vgl. SCHÜTZE 2007, S. 336f

Abb. 33: Vorwärtsschnitt ohne Sicht – ein zusätzlicher Punkt E⁶⁰Abb. 34: Vorwärtsschnitt ohne Sicht – zwei zusätzliche Punkte E und F⁶¹

gegeben: $A=(y_A, x_A)$, $B=(y_B, x_B)$, $E=(y_E, x_E)$, $F=(y_F, x_F)$

gemessen: Winkel τ und φ

gesucht: Koordinaten von $N=(y_N, x_N)$

- 1.) Die für weitere Berechnungen notwendigen Richtungswinkel t_A^E und t_B^F können sofort beziffert werden. Für spätere Schritte können der Richtungswinkel t_A^B und die Strecke s_{AB} vorbereitet werden:

$$t_A^E = \arctan \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} \quad t_B^F = \arctan \frac{y_F - y_B}{x_F - x_B}$$

$$t_A^B = \arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad t_B^A = t_A^B \pm 200 \text{ gon}$$

$$s_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- 2.) Die Richtungswinkel zum Neupunkt lauten folgendermaßen (siehe Abb. 34):

$$t_A^N = t_A^E + \varphi \quad t_B^N = t_B^F + \tau$$

⁶⁰ eigene Zeichnung, nach SCHÜTZE 2007, S. 336

⁶¹ eigene Zeichnung, nach SCHÜTZE 2007, S. 336

- 3.) Nun müssen noch die Dreieckswinkel unter Zuhilfenahme der Richtungswinkel berechnet werden:

$$\alpha = t_A^B - t_A^N \quad \beta = t_B^N - t_B^A$$

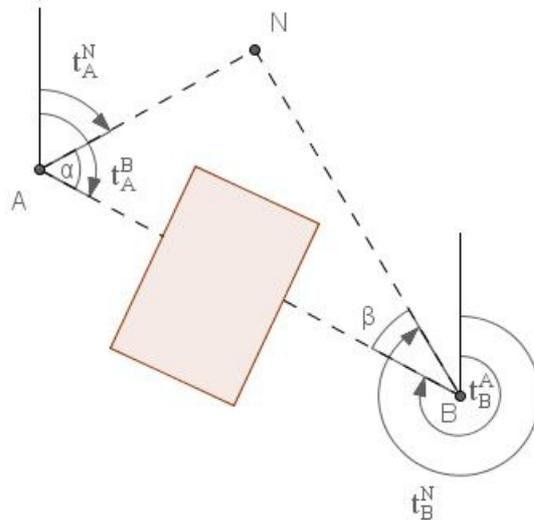


Abb. 35: Dreieckswinkel und Richtungswinkel⁶²

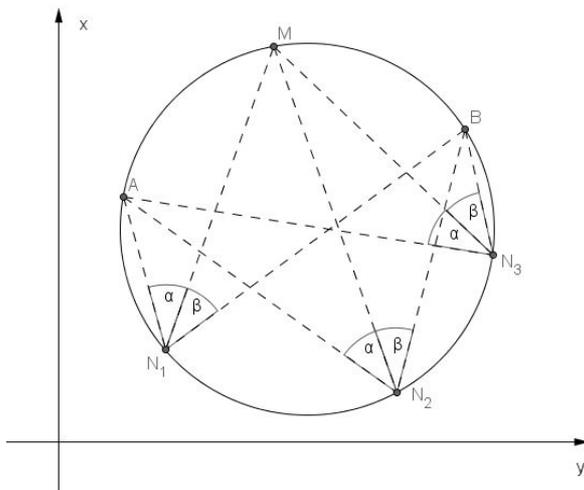
- 4.) Der weitere Rechenweg entspricht den bereits beschriebenen Berechnungen zum Vorwärtseinschneiden mit Gegenstand ab Punkt 3 im Kapitel 5.1.1.

5.2 Rückwärtseinschneiden

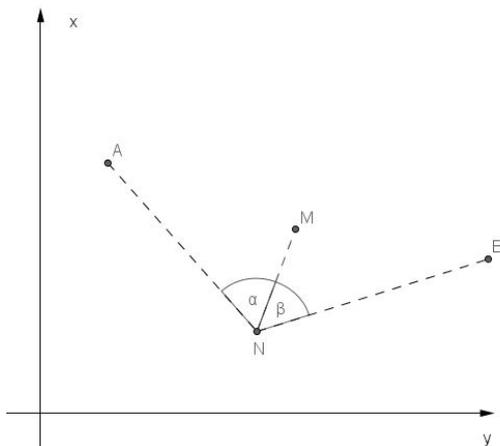
Rückwärtseinschneiden würde eigentlich in der heutigen Praxis fast nicht mehr angewendet werden. Da jedoch immer mehr das Globale Navigationssatellitensystem (GNSS) als Unterstützung bei Vermessungen im Gelände eingesetzt wird, ist dieses Prinzip statt in der Ebene nun im drei- bzw. vierdimensionalen Raum in Verwendung und wieder aktueller denn je. Die folgenden Beschreibungen beschränken sich auf die Ebene.

Bei diesem Verfahren werden vom Neupunkt aus die Richtungen der gegebenen Punkte anvisiert und gemessen. Die so erhaltenen Winkel sollten bei ca. 90° liegen, um eine hohe Genauigkeit zu erhalten. Außerdem ist darauf zu achten, dass die herangezogenen vier Punkte möglichst nicht am „gefährlichen Kreis“ liegen (vgl. EGGGER 2000, S. 71). Denn wenn alle vier Punkte A, B, M und der Neupunkt N auf einem Kreis liegen, gibt es keine eindeutige Lösung. Die vom Neupunkt gemessenen Winkel α und β bilden dann die Peripheriewinkel, wodurch alle Punkte des Kreises als Lösung in Frage kommen.

⁶² eigene Zeichnung, nach SCHÜTZE 2007, S. 337

Abb. 36: Gefährlicher Kreis⁶³

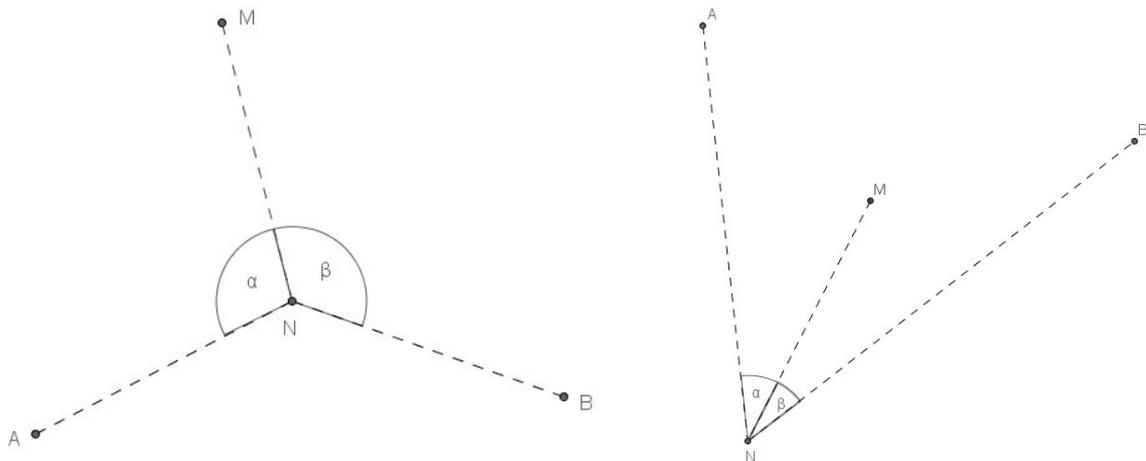
In Abb. 36 wird dies verdeutlicht, da die Richtungswinkel von N_1 , N_2 und N_3 zu den Standorten A und B immer gleich groß sind. Auch wenn die Punkte nur in der Nähe des Kreises liegen, kann es zu Schwierigkeiten bei der Neupunktbestimmung kommen bzw. die Genauigkeit darunter leiden. Dieser „gefährliche Kreis“ ergibt sich nur, wenn die vier Punkte ein konvexes Viereck bilden. Sobald ein Punkt innerhalb der drei anderen vorgesehen ist und somit ein konkaves Viereck gebildet wird (siehe Abb. 37, Abb. 38f) besteht keine Gefahr mehr (vgl. EGGGER 2000, S. 73).

Abb. 37: Mögliche Messanordnung⁶⁴

Gute Werte werden insbesondere erhalten, wenn sich entweder der Neupunkt oder einer der verwendeten Festpunkte im Schwerpunkt eines Dreiecks, welches von den anderen Punkten gebildet wird, befindet (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 353). Dies wird in den folgenden zwei Abbildungen dargestellt.

⁶³ eigene Zeichnung, nach SCHÜTZE 2007, S. 353

⁶⁴ eigene Zeichnung, nach SCHÜTZE 2007, S. 352

Abb. 38 und Abb. 39: Günstige Punktanordnung⁶⁵

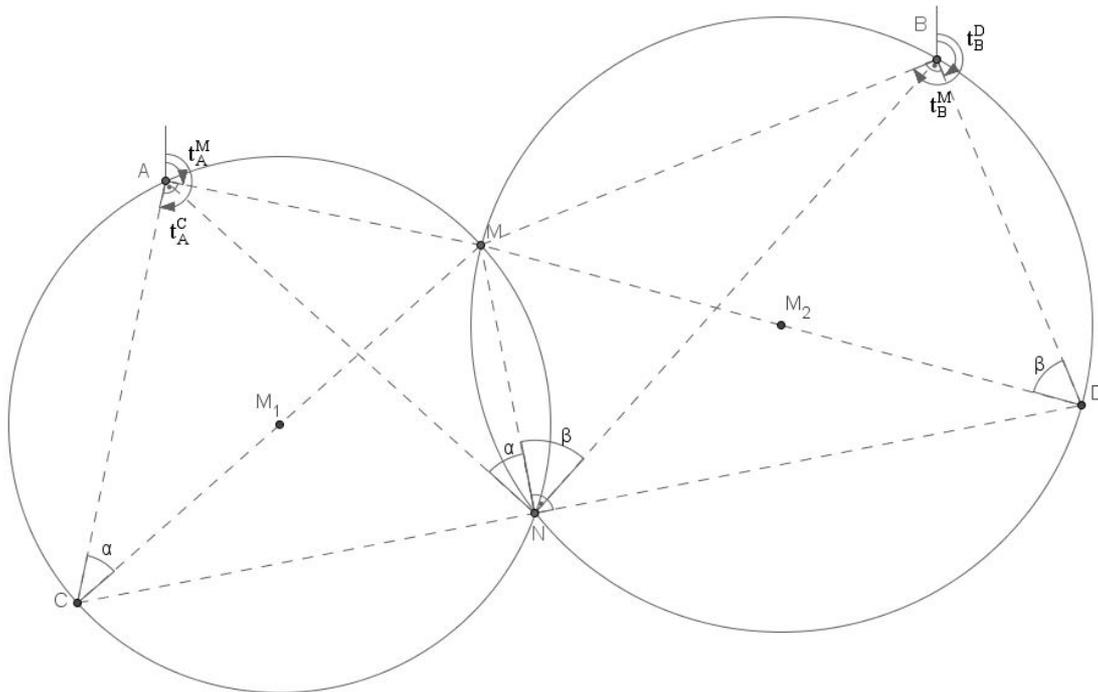
Es gibt mehrere Lösungsvarianten zum Rückwärtseinschneiden, wobei in der Literatur zwischen jener von COLLINS und jener von CASSINI unterschieden wird. In den neueren Formelsammlungen der Vermessungstechnik ist nur mehr jene von Cassini angeführt, obwohl vom Rechenaufwand die Methode nach Collins kürzer scheint und eventuell im Schulunterricht besser geeignet wäre (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 359f).

Im Folgenden wird die Methode nach CASSINI näher beleuchtet, wobei vorab zum besseren Verständnis mit Hilfe einer Skizze eine kurze geometrische Erklärung erfolgt, bevor der Rechenweg explizit vorgestellt wird:

gegeben: $A=(y_A, x_A)$, $B=(y_B, x_B)$, $M=(y_M, x_M)$
 gemessen: Winkel α und β vom Punkt N aus
 gesucht: Koordinaten von $N=(y_N, x_N)$

Geometrisch kann man sich folgende Situation vorstellen (vgl. Abb. 40): Als erster Schritt wird eine Streckensymmetrale über \overline{AM} , \overline{BM} und \overline{MN} eingezeichnet, wodurch sich als Schnittpunkte die späteren Kreismittelpunkte M_1 und M_2 ergeben. Werden die Strecken $\overline{MM_1}$ und $\overline{MM_2}$ verlängert, erhält man die Hilfspunkte C und D an der Peripherie der Kreise. Da die Winkel $\sphericalangle CNM = \sphericalangle MND = 90^\circ = 100 \text{ gon}$ liegen die Punkte C, N und D auf einer Geraden. Bei den Berechnungen werden zusätzlich noch die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ACM$ und $\triangle MDB$ betrachtet (vgl. MATTHEWS 1997, S. 65).

⁶⁵ eigene Zeichnung, nach SCHÜTZE 2007, S. 353

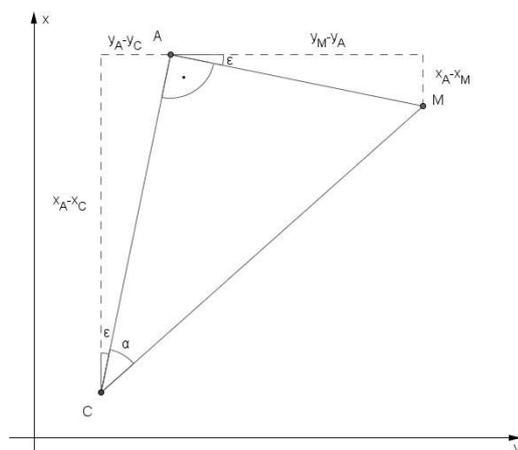
Abb. 40: Rückwärtsschnitt nach Cassini – geometrische Deutung⁶⁶Rechenweg:⁶⁷1.) Betrachtet wird zuerst das $\triangle ACM$:

Zunächst wird versucht, die Länge der Strecke \overline{AC} auszudrücken. Der Richtungswinkel t_A^M kann sogleich berechnet werden, auch wenn er erst zu einem späteren Zeitpunkt benötigt wird. Eine wichtige Voraussetzung hilft bei der Berechnung der Hilfspunkte C und D: Die Koordinatendreiecke (siehe Abb. 41) sind zueinander ähnlich. Dies gilt auch im Dreieck $\triangle MDB$:

$$\tan \alpha = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}}$$

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AM}}{\tan \alpha} = \overline{AM} \cdot \cot \alpha$$

$$t_A^M = \arctan \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$$

Abb. 41: Koordinatendifferenzen beim rechtwinkligen Dreieck $\triangle ACM$ ⁶⁸⁶⁶ eigene Zeichnung, nach MATTHEWS 1997, S. 65⁶⁷ vgl. SCHÜTZE 2007, S. 355f⁶⁸ eigene Zeichnung, nach SCHÜTZE 2007, S. 355

$$\frac{x_A - x_C}{AC} = \frac{y_M - y_A}{AM}$$

$$\frac{y_A - y_C}{AC} = \frac{x_A - x_M}{AM}$$

$$\frac{x_A - x_C}{AM \cdot \cot \alpha} = \frac{y_M - y_A}{AM}$$

$$\frac{y_A - y_C}{AM \cdot \cot \alpha} = \frac{x_A - x_M}{AM}$$

$$x_A - x_C = (y_M - y_A) \cdot \cot \alpha$$

$$y_A - y_C = (x_A - x_M) \cdot \cot \alpha$$

$$\text{es gilt: } (x_A - x_M) = -(x_M - x_A)$$

$$\text{d. h.: } y_A - y_C = -(x_M - x_A) \cdot \cot \alpha$$

$$x_C = x_A - (y_M - y_A) \cdot \cot \alpha$$

$$y_C = y_A + (x_M - x_A) \cdot \cot \alpha$$

Koordinaten des Punktes C:

$$\begin{aligned} y_C &= y_A + (x_M - x_A) \cdot \cot \alpha \\ x_C &= x_A - (y_M - y_A) \cdot \cot \alpha \end{aligned}$$

Koordinaten des Punktes D:

$$\begin{aligned} y_D &= y_B + (x_B - x_M) \cdot \cot \beta \\ x_D &= x_B - (y_B - y_M) \cdot \cot \beta \end{aligned}$$

- 2.) Die Richtungswinkel $t_C^D (= t_N^D = t_C^N)$ und t_M^N können nun berechnet werden. Die beiden stehen aufeinander normal!

$$t_C^D = \arctan \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = t_N^D = t_C^N$$

$$t_M^N = t_C^D + 100 \text{ gon}$$

- 3.) Da die zwei Winkel normal aufeinander sind und für die spätere Anwendung eine möglichst einfache Formel für die Koordinaten des Neupunktes gesucht wird, die ohne viele Zwischenschritte eingesetzt werden kann, wird der Winkel t_M^N durch t_C^D ausgedrückt.

$$\tan t_M^N = \tan(t_C^D + 100 \text{ gon})$$

$$\tan t_M^N = \frac{-1}{\tan t_C^D}$$

$$\tan t_M^N = -\cot t_C^D$$

- 4.) Nun sind alle Größen bekannt, die für die Koordinatengleichung des Neupunktes N benötigt werden:

$$y_N = y_M + (x_M - x_N) \cdot \cot t_C^D$$

$$x_N = \frac{y_M - y_C + x_C \cdot \tan t_C^D + x_M \cdot \cot t_C^D}{\tan t_C^D + \cot t_C^D}$$

- 5.) Zur Kontrolle können noch die Richtungswinkel t_N^A , t_N^M und t_N^B berechnet werden, da man bei Differenzbildung von t_N^M und t_N^A den Winkel α und bei Differenzbildung von t_N^B und t_N^M den Winkel β erhalten sollte:

$$t_N^A = \arctan \frac{y_A - y_N}{x_A - x_N} \quad t_N^M = \arctan \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} \quad t_N^B = \arctan \frac{y_B - y_N}{x_B - x_N}$$

$$\alpha = t_N^M - t_N^A \quad \beta = t_N^M - t_N^B$$

MATTHEWS (1997, S. 66) verfährt etwas anders bei der Koordinatenberechnung von N:

- 1a.) Das Ausdrücken der Strecke \overline{AC} und die Berechnung des Richtungswinkels t_A^M erfolgt wie bei SCHÜTZE, zusätzlich wird die Strecke \overline{AM} berechnet:

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AM}}{\tan \alpha} = \overline{AM} \cdot \cot \alpha$$

$$t_A^M = \arctan \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$$

$$\overline{AM} = \sqrt{(y_M - y_A)^2 + (x_M - x_A)^2}$$

- 2a.) Um die Koordinaten des Hilfspunktes C zu erhalten, wird folgender Zusammenhang im rechtwinkligen Dreieck ACM betrachtet:

$$y_M - y_A = \overline{AM} \cdot \sin t_A^M$$

$$x_M - x_A = \overline{AM} \cdot \cos t_A^M$$

$$\begin{aligned} y_C &= y_A + \overline{AC} \cdot \sin(t_A^M + 100gon) = \\ &= y_A + \overline{AC} \cdot \cos t_A^M = \\ &= y_A + \overline{AM} \cdot \cot \alpha \cdot \cos t_A^M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_C &= x_A + \overline{AC} \cdot \cos(t_A^M + 100gon) = \\ &= x_A - \overline{AC} \cdot \sin t_A^M = \\ &= x_A - \overline{AM} \cdot \cot \alpha \cdot \sin t_A^M \end{aligned}$$

$$y_C = y_A + (x_M - x_A) \cdot \cot \alpha$$

$$x_C = x_A - (y_M - y_A) \cdot \cot \alpha$$

Koordinaten des Punktes C:

$$y_C = y_A + (x_M - x_A) \cdot \cot \alpha$$

$$x_C = x_A - (y_M - y_A) \cdot \cot \alpha$$

Die Koordinaten des Punktes D werden durch Betrachten des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle MDB$ erhalten:

$$\begin{aligned} y_D &= y_B - (x_M - x_B) \cdot \cot \beta \\ x_D &= x_B + (y_M - y_B) \cdot \cot \beta \end{aligned}$$

3a.) Nun wird versucht mittels Geradenschnitt –in diesem Fall werden die Strecken \overline{CD} und \overline{NM} herangezogen– den Schnittpunkt N zu erhalten. Dafür wird als erster Schritt der Richtungskoeffizient m benötigt, der sich folgendermaßen bestimmen lässt:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \tan t_C^D \\ m_2 &= -\frac{1}{m_1} = \tan t_N^M \end{aligned}$$

Im Anschluss werden die Achsenabschnitte b_1 und b_2 berechnet. Dabei werden die beiden Geraden so lange verlängert, bis sie die y-Achse schneiden. Die so erhaltene y-Koordinate gibt den Achsenabschnitt b an.

$$\begin{aligned} b_1 &= y_C - m_1 \cdot x_C = y_D - m_1 \cdot x_D \\ b_2 &= y_M - m_2 \cdot x_M \end{aligned}$$

„Die Koordinaten y_N und x_N sind die einzigen Werte, die die Gleichungen der beiden Geraden erfüllen“.⁶⁹

$$y_N = m_1 \cdot x_N + b_1 = m_2 \cdot x_N + b_2$$

Daraus lassen sich die Koordinaten von N ableiten:

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \\ y_N &= \frac{m_1 \cdot b_2 - m_2 \cdot b_1}{m_1 - m_2} \end{aligned}$$

5.3 Bogenschnitt

Ein gesuchter Punkt N kann auch mittels Bogenschnitt ermittelt werden. Dabei sind die Koordinaten der Punkte A und B bekannt. An diesen Positionen werden die Horizontalentfernungen zum Neupunkt – im unteren Beispiel s_{AN} und s_{BN} - gemessen. Auch Rückmessungen vom Punkt N sind üblich. Somit müssen alle Punkte begangen werden.

Der Neupunkt N ist also als Schnittpunkt zweier Kreisbögen mit den Radien s_{AN} bzw. s_{BN} zu verstehen. Da sich hier zwei Schnittpunkte ergeben können ist eine Lageskizze hilfreich oder aber es wird von einem dritten Punkt ebenfalls die Distanz gemessen.

⁶⁹ MATTHEWS 2003, S. 72

Die gesuchten Koordinaten von N können mit Hilfe des Kosinussatzes und dem polaren Anhängen ermittelt werden (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 362f).

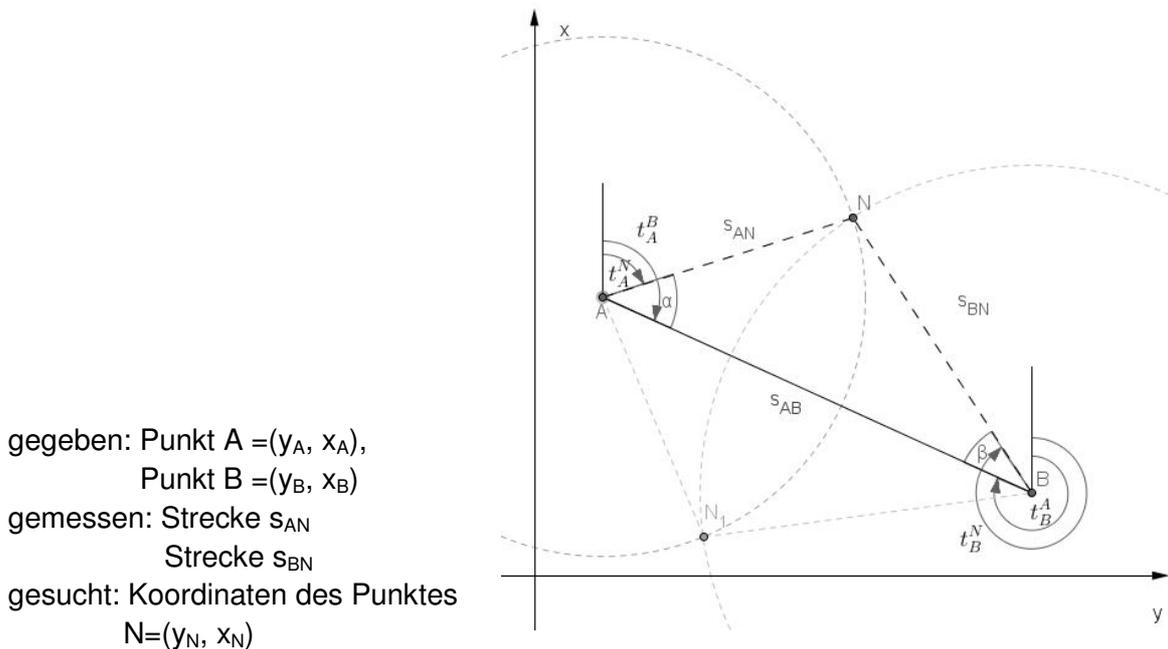


Abb. 42: Bogenschnitt⁷⁰

Rechenweg:⁷¹

- 1.) Aus den bekannten Koordinaten der Punkte A und B kann die Strecke s'_{AB} berechnet werden, ebenso wie die Richtungswinkel t_A^B und t_B^A . Da die Strecke aus den gegebenen Koordinaten berechnet wird und nicht gemessen wurde, wird sie mit s'_{AB} bezeichnet.

$$s'_{AB} = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

$$t_A^B = \arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$t_B^A = t_A^B \pm 200 \text{ gon}$$

- 2.) Da nun alle drei Seiten des Dreiecks ΔABN bekannt sind, kann mittels Cosinussatz der jeweilige eingeschlossene Dreieckswinkel berechnet werden. Die Richtungswinkel t_A^N bzw. t_B^N erhält man ebenfalls:

$$\cos \alpha = \frac{s_{AN}^2 + s_{AB}^2 - s_{BN}^2}{2 \cdot s_{AN} \cdot s_{AB}}$$

$$\cos \beta = \frac{s_{BN}^2 + s_{AB}^2 - s_{AN}^2}{2 \cdot s_{BN} \cdot s_{AB}}$$

⁷⁰ eigene Zeichnung, nach SCHÜTZE 2007, S. 364

⁷¹ vgl. MATTHEWS 1997, S. 68f

$$t_A^N = t_A^B - \alpha \quad t_B^N = t_A^B + \beta$$

Zu beachten ist: Sollte N auf der anderen Seite von s_{AB} liegen, dann sind die Vorzeichen von α und β auszutauschen.

- 3.) Die Koordinaten des Neupunktes N können mittels polarem Anhängen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} y_N &= y_A + s_{AN} \cdot \sin t_A^N \\ x_N &= x_A + s_{AN} \cdot \cos t_A^N \end{aligned}$$

- 4.) Zur Kontrolle können die Koordinaten auch über den Punkt B bestimmt werden:

$$\begin{aligned} y_N &= y_B + s_{BN} \cdot \sin t_B^N \\ x_N &= x_B + s_{BN} \cdot \cos t_B^N \end{aligned}$$

- 5.) Sollte im Gelände auch die Strecke s_{AB} gemessen worden sein, dann kann der Maßstabsfaktor q berechnet werden, der dann für die Koordinatenberechnung von N herangezogen wird.

$$\begin{aligned} q &= \frac{s'_{AB}}{s_{AB}} \\ y_N &= y_A + q \cdot s_{AN} \cdot \sin t_A^N \\ x_N &= x_A + q \cdot s_{AN} \cdot \cos t_A^N \end{aligned}$$

5.4 Fehlerzeigende Figuren⁷²

Die sich in der Praxis ergebenden Dreiecksformen bei Messanordnungen oder die Größe der Schnittwinkel können einen großen Einfluss auf die Genauigkeit der gesuchten Punktkoordinaten haben. Mit Hilfe der so genannten „fehlerzeigenden Figur“ können die zu erwarteten Ungenauigkeiten vorab bestimmt werden (vgl. EGGGER 2000, S. 72).

Bei der Distanzmessung geht man von einer festen Streckenlänge aus, die jedoch auf Grund von Ableseungenauigkeiten, schlechter Zentrierung des Gerätes und anderen Faktoren nicht immer ganz genau erhalten werden kann. Man beachte im Winter das Zusammenziehen des Maßbandes, was zu einem größeren Messergebnis führt. Die somit mögliche Abweichung vom wahrscheinlichsten Wert kann mit Δs_1 bezeichnet werden. Alle Punkte, die vom Standort A genau die Entfernung s_1 besitzen, liegen auf einem Kreis. Möchte man sich nun den Bereich rund um den anvisierten Punkt B genauer anschauen und zoomt sich via Fernglas nur diesen Ausschnitt heran, so wirkt der eigentliche Kreisbogen wie eine Tangente an die Strecke s_1 . Wird nun davon ausgegangen, dass Abweichungen auftreten, so kann man sich vorstellen, dass diese Distanz Δs_1 nun die Strecke entweder verkürzt oder verlängert – somit ergeben sich weitere Kreise bzw. Tangenten rund um den „wahrscheinlichsten Wert“ (siehe Abb. 43 und Abb. 44).

Wird nun von einem zweiten Festpunkt C ebenfalls eine Distanzmessung mit einer mögli-

⁷² Informationen aus EGGGER 2000, S. 72 und aus einem Gespräch mit Herrn DI Egger (13.1.2014)

chen Abweichung Δs_2 vorgenommen, ergeben sich auch hier Bereiche rund um den anvisierten Punkt B, die sich bei starker Vergrößerung als Tangenten an die Strecke s_2 entpuppen. Werden nun alle vier Tangenten betrachtet, so bilden diese ein Viereck, in diesem Fall ein Parallelogramm, in dem der anvisierte Punkt zu finden ist (siehe Abb. 45 und Abb. 46).

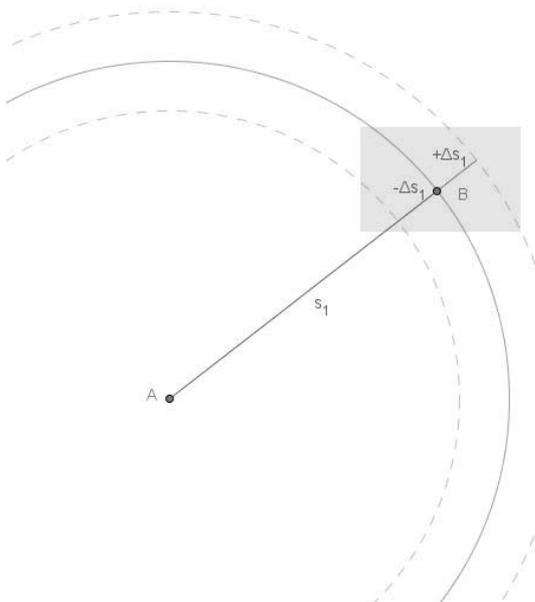
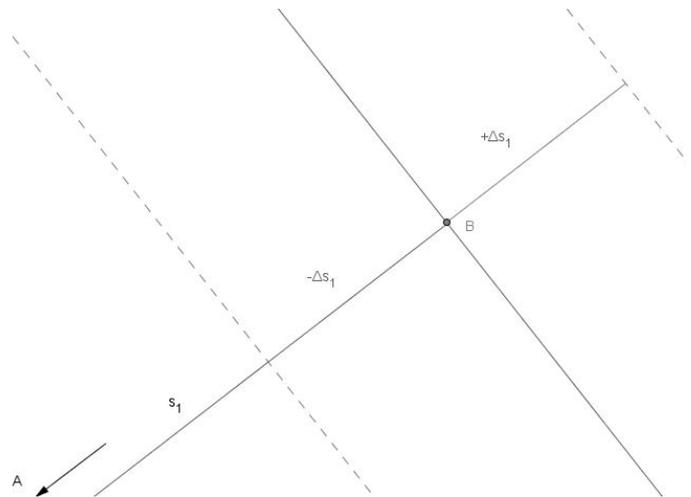
Abb. 43: Distanzmessung mit Abweichungen Δs_1 

Abb. 44: Abweichungen der Distanzmessung als Tangenten betrachtet

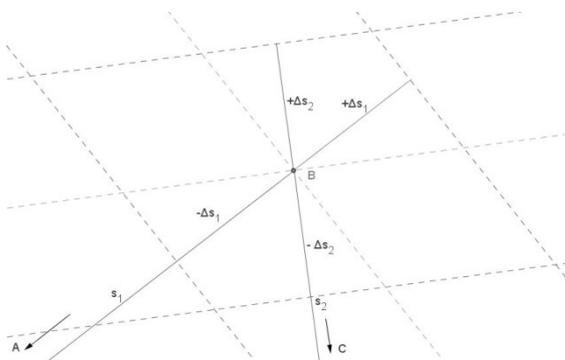


Abb. 45: Abweichungen bei zwei Distanzmessungen

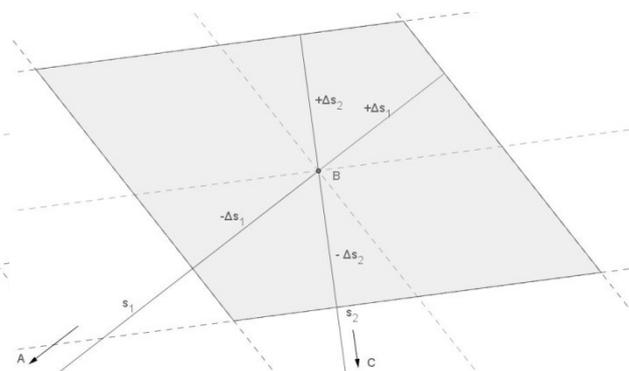


Abb. 46: Fehlerzeigende Figur der Längenmessung

Die Idee dieser fehlerzeigenden Figur ist es nun, die sich ergebende Fläche im Vorhinein festzustellen und diese möglichst zu minimieren. Idealerweise erreicht man dies durch Festpunkte, die ein rechtwinkeliges, gleichschenkeliges Dreieck ergeben. Die fehlerzeigende Figur würde hier ein Quadrat bilden, bei dem die maximal mögliche Abweichung die Diagonalen sind. In der Praxis sind solche ideale Punkte nicht immer vorhanden, daher kann mittels eines dritten Festpunkts versucht werden die fehlerzeigende Figur zu minimieren. Dieser Punkt D liegt am besten in der Verlängerung der längeren Diagonale des Parallelogramms. Dadurch kann dieses Viereck nämlich verkleinert werden (siehe Abb. 47).

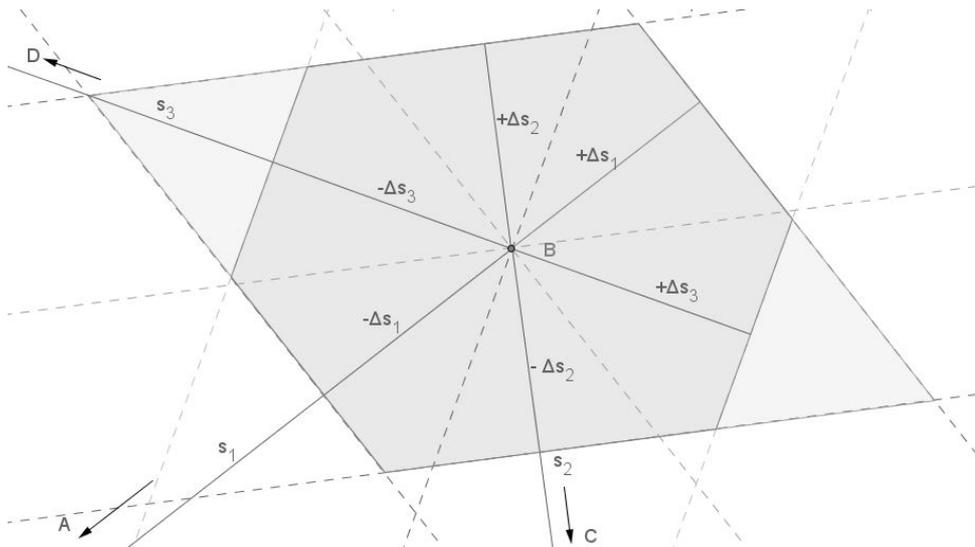


Abb. 47: Minimieren der fehlerzeigenden Figur durch einen dritten Festpunkt

Dabei ist davon auszugehen, dass die Standpunkte A, C und D bei dieser Beschreibung fehlerfrei sind, da sonst auch diese Positionen nicht eindeutig darstellbar wären.

Betrachtet man nun die fehlerzeigende Figur einer Winkelmessung, dann ist ein ähnliches Vorgehen zu bemerken. Von einem Festpunkt A wird ein Punkt B mit der Länge s_1 unter dem Richtungswinkel α anvisiert. Wird beim Winkelmessen ein Fehler $\Delta\alpha$ eintreten, so würde sich links und rechts der vorhandenen Strecke ein neuer Strahl ergeben, in dessen Bereich der Punkt B liegen kann. Wenn man nun nur den Bereich rund um den Standort B vergrößert, können die abweichenden Strahlen als Parallele zur Strecke s_1 wahrgenommen werden mit einem Abstand p_i , auch Perpendikel genannt. Das Perpendikel ist gleichbedeutend mit dem $\Delta\alpha$ im Bogenmaß. Auch bei der Winkelmessung wird von einem zweiten Standort aus die Position von B angepeilt. Beachtet man die möglichen Abweichungen so ergibt sich hier auch wieder eine fehlerzeigende Figur, die sich aus je zwei Parallelen zu den Strecken bildet. Möchte man dieses Viereck möglichst klein werden lassen, sollte der dritte Punkt so gewählt werden, dass die anvisierte Richtung orthogonal auf die erste Strecke ist (siehe Abb. 48 bis Abb. 51). Besser wäre es, wenn der zweite Punkt gleich so gewählt wird, dass sich ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck ergibt.

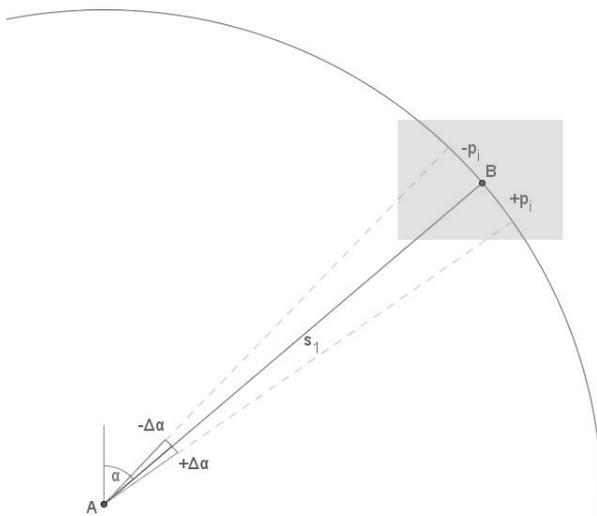


Abb. 48: Mögliche Abweichungen bei der Winkelmessung

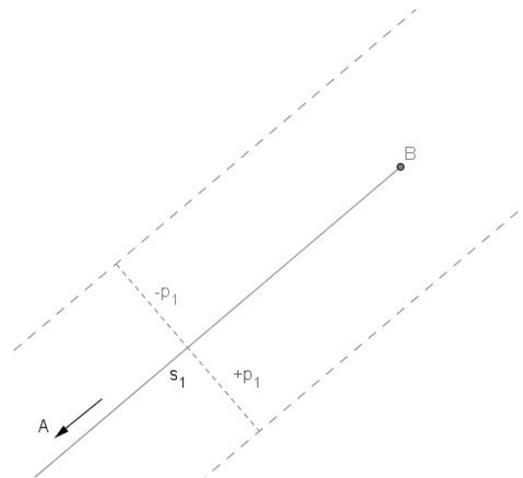


Abb. 49: Abweichungen können als Parallele zur Strecke s_1 wahrgenommen werden

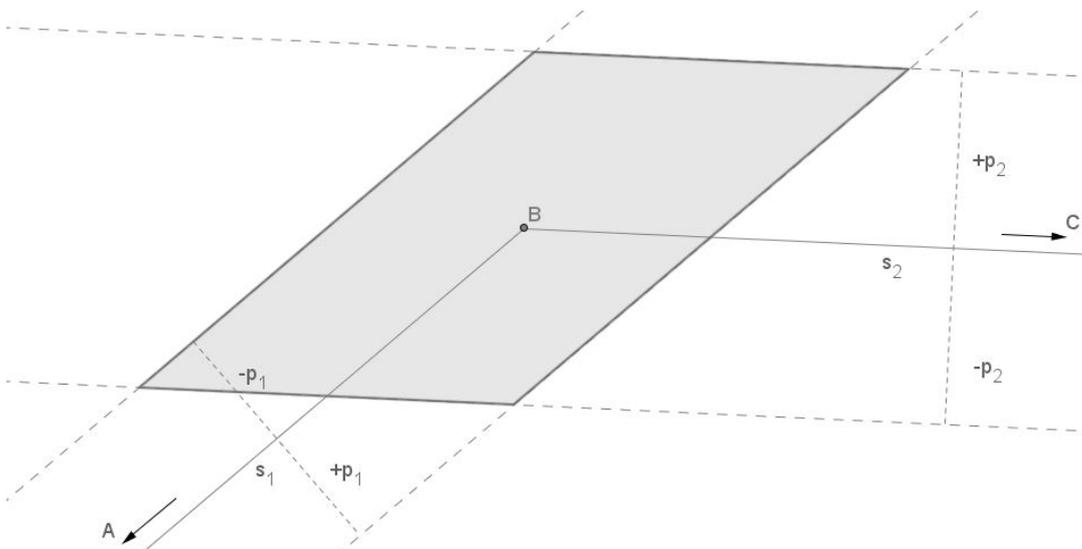


Abb. 50: Fehlerzeigende Figur der Winkelmessung

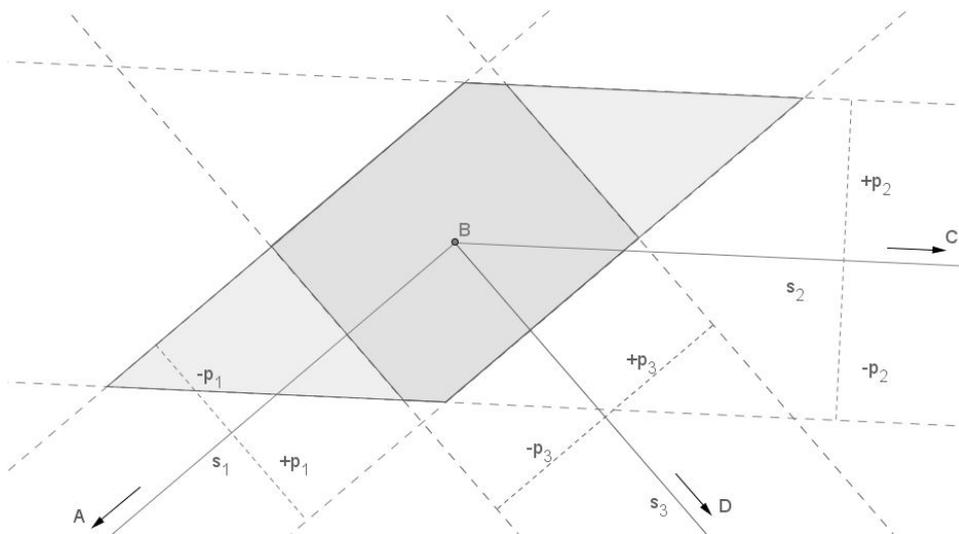


Abb. 51: Verkleinern der fehlerzeigenden Figur durch einen dritten Punkt

Die Bandbreiten können auch vorab berechnet werden, wenn die Größe der Fehler in etwa bekannt ist: „Die Perpendikel p_i sind von den Ungenauigkeiten der Richtungs- und Längenmessung sowie den Entfernungen abhängig (f_w, f_s, s) und ergeben die Bandbreiten“ (EGGER 2000, S. 72).

$$p_i = \frac{f w_i \text{ mgon}}{\rho \text{ mgon}} S_i$$

mit $f w_i$... Fehler im Winkel, S_i Streckenlänge, $\rho = \frac{2\pi}{400} = \frac{\pi}{200}$, mgon ... Milligon

Da fehlerzeigende Figuren besser am Papier oder Bildschirm bestimmt werden können ist es notwendig sich im Vorhinein Gedanken zu machen, welche Festpunkte rund um den angepeilten Punkt eventuell noch helfen können den Fehler zu minimieren. Diese Zusatzinformationen sollten dann für das Messvorhaben im Freien mitgenommen werden.

5.5 Beispiele

5.5.1 Beispiel 1 – Vorwärtseinschneiden⁷³

gegeben: Punkt $P_1 = (+4\ 327,86; +5\ 426,48)$

Punkt $P_2 = (+4\ 786,27; +5\ 514,33)$

gemessen: $\alpha = 353,1253\ \text{gon}$; $\beta = 75,1728\ \text{gon}$

gesucht: Koordinaten des Punktes $P_0 = (y_0, x_0)$

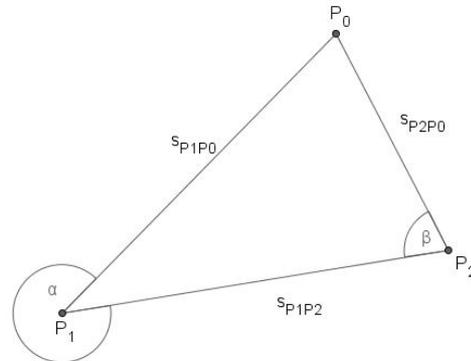


Abb. 52: Beispiel-Skizze

- 1.) Mit Hilfe der zweiten Hauptaufgabe kann der Richtungswinkel $t_{P_1}^{P_2}$ sowie die Strecke $s_{P_1P_2}$ berechnet werden:

$$\Delta y = y_{P_2} - y_{P_1} = 4786,27 - 4327,86 = 458,41$$

$$\Delta x = x_{P_2} - x_{P_1} = 5514,33 - 5426,48 = 87,85$$

$$t_{P_1}^{P_2} = \arctan \frac{y_{P_2} - y_{P_1}}{x_{P_2} - x_{P_1}} = \arctan \frac{458,41}{87,85} = \arctan(5,2180990) = 87,94592\ \text{gon}$$

$$s_{P_1P_2} = \sqrt{(x_{P_2} - x_{P_1})^2 + (y_{P_2} - y_{P_1})^2} = \sqrt{87,85^2 + 458,41^2} = 466,7519\ \text{m}$$

- 2.) Nun werden die Dreieckswinkel des Dreieckes $\Delta P_1P_2P_0$ berechnet, um im Anschluss mittels Sinussatzes die fehlenden Strecken $s_{P_1P_0}$ und $s_{P_2P_0}$ berechnen zu können.

$$\alpha' = 400 - 353,1253 = 46,8747\ \text{gon}$$

$$\beta = \beta' = 75,1728\ \text{gon}$$

$$\gamma' = 200 - (\alpha' + \beta') = 77,9525\ \text{gon}$$

$$\frac{s_{P_1P_0}}{\sin \beta'} = \frac{s_{P_2P_0}}{\sin \alpha'} = \frac{s_{P_1P_2}}{\sin \gamma'}$$

$$s_{P_1P_0} = \frac{\sin \beta' \cdot s_{P_1P_2}}{\sin \gamma'} = \frac{\sin 75,1728 \cdot 466,7519}{\sin 77,9525} = 458,9549\ \text{m}$$

$$s_{P_2P_0} = \frac{\sin \alpha' \cdot s_{P_1P_2}}{\sin \gamma'} = \frac{\sin 46,8747 \cdot 466,7519}{\sin 77,9525} = 333,2347\ \text{m}$$

- 3.) Um in einem späteren Rechenschritt die Koordinaten von P_0 zu erhalten, sind davor noch die Richtungswinkel $t_{P_1}^{P_0}$ und $t_{P_2}^{P_0}$ zu bestimmen:

$$t_{P_1}^{P_0} = t_{P_1}^{P_2} + \alpha = 87,94592 + 353,1253 = 441,07122\ \text{gon} = 41,07122\ \text{gon}$$

⁷³ Beispiel nachgerechnet nach EGGGER 2000, S. 157

$$t_{P_2}^{P_0} = t_{P_2}^{P_1} + \beta = t_{P_1}^{P_2} \pm 200 \text{ gon} + \beta = 87,94592 + 75,1728 + 200 = 363,11872 \text{ gon}$$

4.) Laut erster Hauptaufgabe gilt:

$$y_{P_0} = y_{P_1} + s_{P_1P_0} \cdot \sin t_{P_1}^{P_0} \quad \text{oder} \quad y_{P_0} = y_{P_2} + s_{P_2P_0} \cdot \sin t_{P_2}^{P_0}$$

$$x_{P_0} = x_{P_1} + s_{P_1P_0} \cdot \cos t_{P_1}^{P_0} \quad \text{oder} \quad x_{P_0} = x_{P_2} + s_{P_2P_0} \cdot \cos t_{P_2}^{P_0}$$

$$y_{P_0} = y_{P_1} + s_{P_1P_0} \cdot \sin t_{P_1}^{P_0} = 4327,86 + 458,9549 \cdot \sin 41,07122 = 4\,603,8362 \text{ m}$$

$$x_{P_0} = x_{P_1} + s_{P_1P_0} \cdot \cos t_{P_1}^{P_0} = 5426,48 + 458,9549 \cdot \cos 41,07122 = 5\,793,1907 \text{ m}$$

zur Kontrolle:

$$y_{P_0} = y_{P_2} + s_{P_2P_0} \cdot \sin t_{P_2}^{P_0} = 4786,27 + 333,2347 \cdot \sin 363,11872 = 4\,603,8362 \text{ m}$$

$$x_{P_0} = x_{P_2} + s_{P_2P_0} \cdot \cos t_{P_2}^{P_0} = 5514,33 + 333,2347 \cdot \cos 363,11872 = 5\,793,1907 \text{ m}$$

⇒ Der Punkt P_0 weist die Koordinaten auf:

$$P_0 = (+4\,603,84; +5\,793,19)$$

5.5.2 Beispiel 2 – Vorwärtseinschneiden⁷⁴

gegeben: Punkt A = (3 214,12; 1 557,10)

B = (3 288,20; 1 542,74)

E = (3 003,36; 1 614,22)

F = (3 504,78; 1 700,12)

gemessen: Winkel $\tau = 303,7950 \text{ gon}$

$\varphi = 124,2642 \text{ gon}$

gesucht: Koordinaten des Punktes N

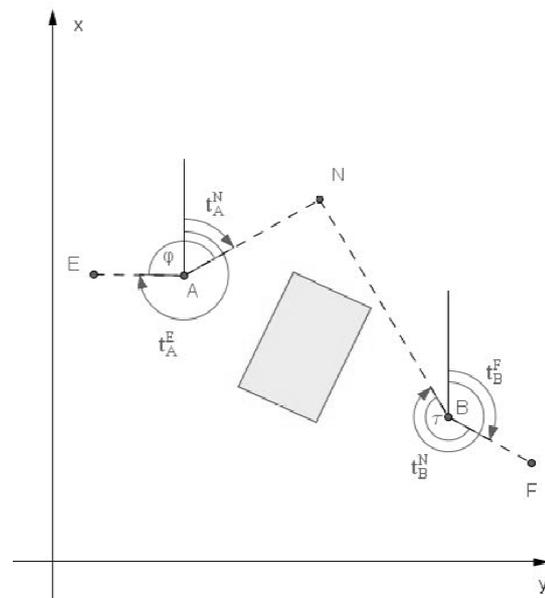


Abb. 53: Beispiel-Skizze

- 1.) Als erstes können die Richtungswinkel t_A^E und t_B^F berechnet werden. Für spätere Schritte können auch schon der Richtungswinkel t_A^B und die Strecke s_{AB} ermittelt werden:

$$t_A^E = \arctan \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \arctan \frac{3\,003,36 - 3\,214,12}{1\,614,22 - 1\,557,10} = \arctan \frac{-210,76}{57,12} =$$

⁷⁴ Angabe des Beispiels von SCHÜTZE 2007, S. 367

$$\begin{aligned}
 &= 316,84887 \dots \text{ gon} \\
 t_B^F &= \arctan \frac{y_F - y_B}{x_F - x_B} = \arctan \frac{3\,504,78 - 3\,288,20}{1\,700,12 - 1\,542,74} = \arctan \frac{216,58}{157,38} = \\
 &= 59,995109 \dots \text{ gon} \\
 t_A^B &= \arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \arctan \frac{3\,288,20 - 3\,214,12}{1\,542,74 - 1\,557,10} = \arctan \frac{74,08}{-14,36} = \\
 &= 112,18934 \dots \text{ gon} \\
 t_B^A &= t_A^B + 200 \text{ gon} = 312,18934 \dots \text{ gon} \\
 s_{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-14,36)^2 + 74,08^2} = 75,4589 \dots \text{ m}
 \end{aligned}$$

2.) Die Richtungswinkel zum Neupunkt lauten folgendermaßen (siehe Abb. 53):

$$\begin{aligned}
 t_A^N &= t_A^E + \varphi = 316,84887 \dots + 124,2642 = 441,11307 \dots \text{ gon} \equiv 41,11307 \dots \text{ gon} \\
 t_B^N &= t_B^F + \tau = 59,995109 \dots + 303,7950 = 363,790109 \dots \text{ gon}
 \end{aligned}$$

3.) Als nächsten werden die Dreieckswinkel unter Zuhilfenahme der Richtungswinkel berechnet:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= t_A^B - t_A^N = 112,18934 \dots - 41,11307 \dots = 71,07627 \dots \text{ gon} \\
 \beta &= t_B^N - t_B^A = 363,790109 \dots - 312,18934 \dots = 51,60076 \dots \text{ gon}
 \end{aligned}$$

Den dritten Winkel erhält man über die Winkelsumme:

$$\gamma = 200 - (\alpha + \beta) = 77,32296 \dots \text{ gon}$$

4.) Mit Hilfe des Sinussatzes können die fehlenden Strecken s_{AN} und s_{BN} berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 s_{AN} &= \frac{s_{AB} \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{75,4589 \cdot \sin 51,6007 \dots}{\sin 77,3229 \dots} = 58,3447 \dots \text{ m} \\
 s_{BN} &= \frac{s_{AB} \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{75,4589 \cdot \sin 71,0762 \dots}{\sin 77,3229 \dots} = 72,3454 \dots \text{ m}
 \end{aligned}$$

5.) Da nun alle benötigten Größen berechnet wurden können die fehlenden Koordinaten des Punktes N mittels polarem Anhängen erhalten werden:

$$\begin{aligned}
 x_N &= x_B + s_{BN} \cdot \cos t_B^N = 1\,542,74 + 72,3454 \dots \cdot \cos 363,790109 \dots = 1\,603,6951 \dots \text{ m} \\
 y_N &= y_B + s_{BN} \cdot \sin t_B^N = 3\,288,20 + 72,3454 \dots \cdot \sin 363,790109 \dots = 3\,249,2342 \dots \text{ m}
 \end{aligned}$$

Als Kontrolle kann die Berechnung über den Punkt A erfolgen:

$$\begin{aligned}
 x_N &= x_A + s_{AN} \cdot \cos t_A^N = 1\,557,10 + 58,3447 \dots \cdot \cos 41,11307 \dots = 1\,603,6951 \dots \text{ m} \\
 y_N &= y_A + s_{AN} \cdot \sin t_A^N = 3\,214,12 + 58,3447 \dots \cdot \sin 41,11307 \dots = 3\,249,2342 \dots \text{ m}
 \end{aligned}$$

⇒ Der Punkt N weist die Koordinaten auf:

$$\mathbf{N = (3\,249,23; 1\,603,69)}$$

5.5.3 Beispiel 3 – Rückwärtseinschneiden⁷⁵

gegeben: Punkt $P_1=(+2\ 213,24; +4\ 627,43)$

Punkt $P_2=(+2\ 324,48; +4\ 446,23)$

Punkt $P_3=(+2\ 547,13; +4\ 514,41)$

gemessen: $\alpha=29,6713$ gon; $\beta=34,1226$ gon

gesucht: Koordinaten des Punktes $P_0=(y_0, x_0)$

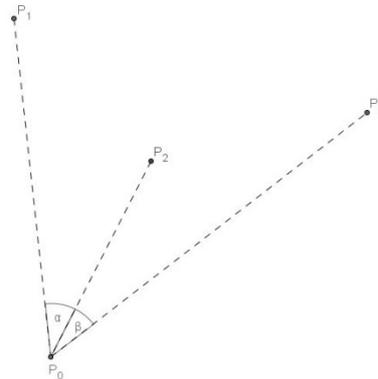


Abb. 54: Beispiel-Skizze

Die geometrische Lösung und die Herleitung wurden bereits angegeben. Bei der Anwendung müsste eigentlich nur mehr in die jeweiligen Endformeln eingesetzt werden, um das Ergebnis zu erhalten. Da dies aber teilweise unverständlich sein könnte werden in diesem Beispiel etwas mehr Rechenschritte angegeben als eigentlich notwendig.

- 1.) Als erster Schritt stelle man sich die Rechenmethode nach Cassini geometrisch vor. Bei dieser Methode werden zwei Hilfspunkte C und D verwendet, die rechtwinkelige Dreiecke ΔP_1CP_2 und ΔP_2DP_3 bilden. Man betrachte nun ein Dreieck ΔP_1CP_2 , welches zwei ähnliche Koordinatendreiecke aufweist!

$$\tan \alpha = \frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_1C}} \rightarrow \overline{P_1C} = \overline{P_1P_2} \cdot \cot \alpha$$

$$t_{P_1}^{P_2} = \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \arctan \frac{2324,48 - 2213,24}{4446,23 - 4627,43} = \arctan \frac{111,24}{-181,2} = 164,94881 \text{ gon}$$

Man stelle sich nun vor, dass vom Punkt P_1 ausgehend die Strecke $\overline{P_1P_2}$ so projiziert wird, dass sie auf der Strecke $\overline{P_1C}$ zu liegen kommt. Dadurch ist es möglich die Koordinaten des Hilfspunktes C zu erhalten.

$$y_C = y_1 + (x_2 - x_1) \cdot \cot \alpha = 2\ 213,24 + (-181,2) \cdot \cot 29,6713 = 1\ 853,0292 \text{ m}$$

$$x_C = x_1 - (y_2 - y_1) \cdot \cot \alpha = 4\ 627,43 + (111,24) \cdot \cot 29,6713 = 4\ 406,2939 \text{ m}$$

Für den Hilfspunkt D gelten die gleichen Voraussetzungen:

$$y_D = y_3 + (x_3 - x_2) \cdot \cot \beta = 2\ 547,13 + (4\ 514,41 - 4\ 446,23) \cdot \cot 34,1226 = 2\ 661,9110 \text{ m}$$

$$x_D = x_3 - (y_3 - y_2) \cdot \cot \beta = 4\ 514,41 - (2\ 547,13 - 2\ 324,48) \cdot \cot 34,1226 = 4\ 139,5787 \text{ m}$$

⁷⁵ Angabe des Beispiels von EGGGER 2000, S. 158

- 2.) Da die Strecken \overline{CD} und $\overline{P_0P_2}$ normal aufeinander stehen, kann man sich mittels Geradenschnitt den Richtungskoeffizienten m berechnen:

$$m_1 = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \tan t_C^D \quad m_1 = \frac{2661,9110 - 1853,0292}{4139,5787 - 4406,2939} = -3,03275479$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = \tan t_N^M \quad m_2 = -\frac{1}{-0,3275479} = 0,329733219$$

Nun folgen die Achsenabstände b_1 und b_2 :

$$b_1 = y_C - m_1 \cdot x_C = 1853,0292 + 3,03275479 \cdot 4406,2939 = 15\,216,23835$$

$$b_2 = y_2 - m_2 \cdot x_2 = 2\,324,48 - 0,329733219 \cdot 4446,23 = 858,410269$$

- 3.) „Die Koordinaten y_N und x_N sind die einzigen Werte, die die Gleichungen der beiden Geraden erfüllen“.⁷⁶ Diese Bedingung führt nun zur Berechnung der Koordinaten von P_0 .

$$y_N = m_1 \cdot x_N + b_1 = m_2 \cdot x_N + b_2$$

$$x_0 = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} = \frac{858,410269 - 15\,216,23835}{-3,03275479 - 0,329733219} = 4\,270,00127 \text{ m}$$

$$y_0 = \frac{m_1 \cdot b_2 - m_2 \cdot b_1}{m_1 - m_2} = \frac{-3,03275479 \cdot 858,410269 - 0,329733219 \cdot 15\,216,23835}{-3,03275479 - 0,329733219} = 2\,266,3715 \text{ m}$$

⇒ Der Punkt P_0 weist die Koordinaten auf:

$$\mathbf{P_0 = (2\,266,37; 4\,270,00)}$$

- 4.) Als Kontrolle dient die Differenzbildung der Richtungswinkel t_0^3 und t_0^2 und der Richtungswinkel t_0^3 und t_0^2 , denn dabei sollen die Winkel α und β erhalten werden.

$$t_0^1 = \arctan \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \arctan \frac{2\,213,24 - 2\,266,37}{4\,623,43 - 4\,270,00} = 390,60579 \text{ gon}$$

$$t_0^2 = \arctan \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \arctan \frac{2\,324,48 - 2\,266,37}{4\,446,23 - 4\,270,00} = 20,27714 \text{ gon}$$

$$t_0^3 = \arctan \frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0} = \arctan \frac{2\,547,13 - 2\,266,37}{4\,514,41 - 4\,270,00} = 54,39939 \text{ gon}$$

$$\alpha = t_0^2 - t_0^1 \quad \beta = t_0^3 - t_0^2$$

$$\alpha = 20,27714 - 390,60579 = -370,32865 \text{ gon} = 29,6719 \text{ gon}$$

$$\beta = 54,39939 - 20,27714 = 34,1222 \text{ gon}$$

⁷⁶ MATTHEWS 2003, S. 72

5.5.4 Beispiel 4 – Bogenschnitt⁷⁷

gegeben: Punkt A = (38 164,522; -23 364,073)
 Punkt B = (38 263,445; -23 472,939)
 gemessen: Strecke s_{AN} = 79,290 m
 Strecke s_{BN} = 78,310 m
 gesucht: Koordinaten des Punktes N = (y_N , x_N)

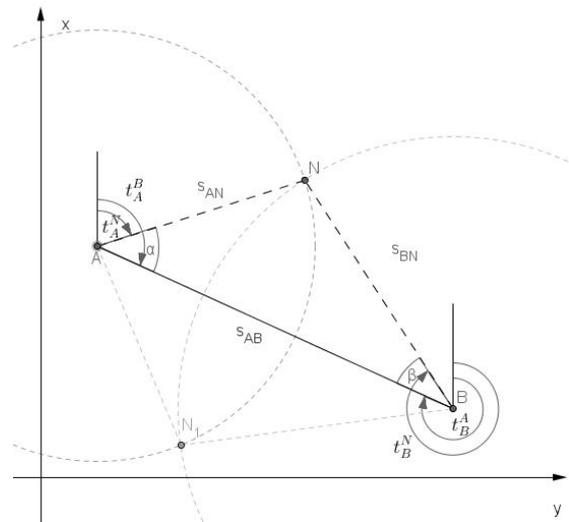


Abb. 55: Skizze

- 1.) Als erster Schritt werden die Strecke s'_{AB} und die Richtungswinkel t_A^B und t_B^A mit Hilfe der Angabe berechnet.

$$s'_{AB} = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(38\,263,445 - 38\,164,522)^2 + (-23\,472,939 + 23\,364,073)^2} = 147,097 \dots m$$

$$t_A^B = \arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \arctan \frac{98,923}{-108,866} = 153,043994 \dots gon$$

$$t_B^A = t_A^B \pm 200 gon = 157,73959 \dots + 200 = 353,043994 \dots gon$$

- 2.) Es sind alle drei Seiten des Dreiecks ΔABN bekannt. Die Dreieckswinkel können nun berechnet werden mittels Cosinussatz. Die Richtungswinkel t_A^N bzw. t_B^N ergeben sich in weiterer Folge (siehe Skizze):

$$\cos \alpha = \frac{s_{AN}^2 + s_{AB}^2 - s_{BN}^2}{2 \cdot s_{AN} \cdot s_{AB}} = \frac{79,290^2 + 147,097^2 - 78,310^2}{2 \cdot 79,290 \cdot 147,097}$$

$$\alpha = 23,22129 \dots gon$$

$$\cos \beta = \frac{s_{BN}^2 + s_{AB}^2 - s_{AN}^2}{2 \cdot s_{BN} \cdot s_{AB}} = \frac{78,310^2 + 147,097^2 - 79,290^2}{2 \cdot 78,310 \cdot 147,097}$$

$$\beta = 23,52578 \dots gon$$

$$t_A^N = t_A^B - \alpha = 153,043994 \dots - 23,2212 \dots = 129,82270 \dots gon$$

⁷⁷ Beispiel nachgerechnet nach SCHÜTZE 2007, S. 366

$$t_B^N = t_A^B + \beta = 353,0439 \dots + 23,5257 \dots = 376,56977 \dots \text{ gon}$$

3.) Polares Anhängen über den Punkt A oder den Punkt B führt zum Ergebnis:

$$y_N = y_A + s_{AN} \cdot \sin t_A^N = 38\,164,522 + 79,290 \cdot \sin 129,8227 = 38\,235,2698 \dots m$$

$$x_N = x_A + s_{AN} \cdot \cos t_A^N = -23\,364,073 + 79,290 \cdot \cos 129,8227 = -23\,399,8730 \dots m$$

oder:

$$y_N = y_B + s_{BN} \cdot \sin t_B^N = 38\,263,445 + 78,310 \cdot \sin 376,5698 = 38\,235,2699 \dots m$$

$$x_N = x_B + s_{BN} \cdot \cos t_B^N = -23\,472,939 + 78,310 \cdot \cos 376,5698 = -23\,399,8731 \dots m$$

⇒ Der Punkt N weist die Koordinaten auf:

$$\mathbf{N = (38\,235,270; -23\,399,873)}$$

6 TRIGONOMETRISCHE HÖHENMESSUNG

Oft werden Höhenmessungen in der Vermessung vorgenommen. Um bei den Ergebnissen möglichst geringe Abweichungen zu erzielen, wird die Form der Erde als ein Geoid angenommen. Weiters werden die ermittelten Höhen immer auf eine Referenzgröße bezogen, um die Werte über die Grenzen hinaus vergleichbar zu machen (vgl. EGGGER 2000, S. 56).

Im Bereich der Vermessungskunde liegen verschiedene Definitionen für den Begriff Höhe vor:

„Die **Seehöhe** (Orthometrische Höhe) ist der in der Lotlinie gemessene Abstand von der Niveaufläche, die durch den gewählten Höhenbezugsnullpunkt hindurchgeht.“

„Die **Dynamische Höhe** (Arbeitshöhe) hat als Grundlage eine rein physikalische Definition. Der Höhenunterschied ist von der Potentialdifferenz abhängig. Punkte, die auf gleicher Niveaufläche liegen, haben daher auch die gleiche dynamische Höhe.“ (EGGER 2000, S. 56)

Die in Österreich verwendete Gebrauchshöhe bezieht sich auf den Adriapegel im Triester Hafen (Molo Sartorio) von 1875, wobei die orthometrische Höhe auf den Pegel von Amsterdam zurückgreift (vgl. EGGGER 2000, S. 56). Die heute oftmals mit GPS-Geräten ermittelten Gebrauchshöhen von Festpunkten weichen bis zu 0,5 m von den Bezugshöhen ab. Um dies ausbessern zu können, muss eine lokale Transformation vorgenommen werden (vgl. URL: http://www.bev.gv.at/portal/page?_dad=portal&_pageid=713,1882219&_schema=PORTAL – 28.11.2013). Lokale Systeme sind in vielen Ländern üblich, auch in Österreich gibt es unter anderem die „**Wiener Null**“, welcher einer Höhe von 156,680 m über der Adria entspricht (vgl. EGGGER 2000, S. 56).

Generell kann zwischen verschiedenen Methoden der Höhenmessung unterschieden werden:

Bei der direkten oder **geometrischen Höhenmessung** liegt eine horizontale Zielebene vor, bei der die vertikalen Abstände zu den Punkten mit einem Maßband oder einer Latte gemessen werden (vgl. EGGGER 2000, S. 57). Das Verfahren ist sehr einfach und besitzt eine hohe Genauigkeit. Bei einer Strecke von 500 m und einem Zenitwinkel von 90 gon kann der Höhenunterschied bis auf 3 mm genau angegeben werden (vgl. GELHAUS 1991, S. 131).

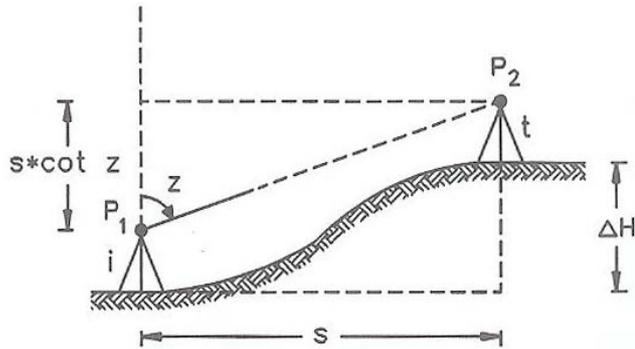
Einen Sonderfall der Höhenmessung stellt die **barometrische Methode** dar. Hier wird der Luftdruck an verschiedenen Standorten gemessen, um mittels geeigneter Formeln die Höhe des gesuchten Punktes zu erhalten.

Bei der indirekten oder **trigonometrischen Methode** der Höhenmessung können mittlerweile mittels elektronischer Distanzmessung relativ genaue Werte erhalten werden: Sie liegen meist unter 10 mm/km. Die Entfernungsmessung erfolgt schräg oder mittels Koordinatenberechnung von vorhandenen Punkten (vgl. EGGGER 2000, S. 66).

Um zwischen zwei Punkten die Höhendifferenz benennen zu können, stellt man den Theodolit auf einen Punkt P_1 und misst von dort den Zenitwinkel z und die Horizontalentfernung s zum zweiten Punkt P_2 . Dadurch ergibt sich folgende Formel zur Berechnung der Höhendifferenz:

$$\Delta H = s \cdot \cot z + i - t$$

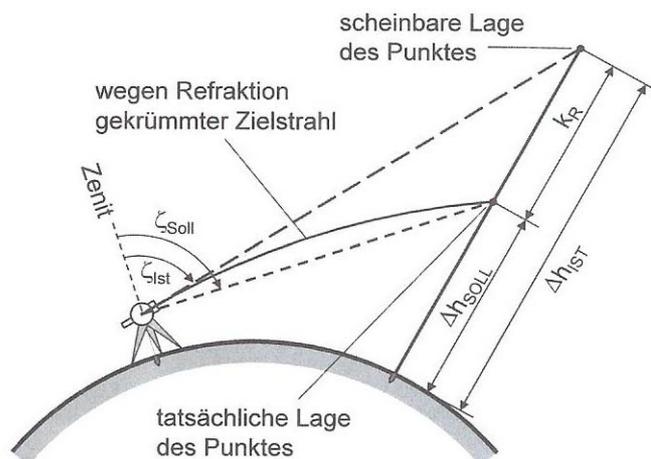
mit s ... Horizontalentfernung zwischen den beiden Punkten, z ... Zenitwinkel, i ... Instrumentenhöhe über Punkt P_1 , t ... Zielhöhe über Punkt P_2 (vgl. GELHAUS 1991, S. 131)

Abb. 56: Trigonometrische Höhenübertragung⁷⁸

Es ist bei Anwendung der trigonometrischen Höhenmessung darauf zu achten, dass ab einer Messung zu einem mehr als 200 m entfernten Zielpunkt sowohl die Erdkrümmung als auch die Refraktion Auswirkungen auf das Ergebnis haben (vgl. EGGER 2000, S. 66).

Unter **Refraktion** wird eine Ablenkung des Zielstrahls verstanden, denn der Meßstrahl wird in den verschiedenen Luftschichten, die er durchwandert, gebrochen. Die Refraktion wirkt der Erdkrümmung entgegen und kann als flacher Kreisbogen mit einem achtfachen Erdradius verstanden werden. Der Refraktionskoeffizient k wird in Österreich mit $k = 0,13 \pm 25\%$ angegeben (vgl. EGGER 2000, S. 66f). Eine nun folgende Tabelle gibt Aufschluss über die Auswirkungen der Refraktion ($k=0,13$) bei steigender Entfernung des Zielpunktes:

Entfernung s	100 m	200 m	400 m	600 m	800 m	1000 m
Korrektur wegen Refraktion k_R	-0,1 mm	-0,4 mm	-1,6 mm	-3,7 mm	-6,5 mm	-10,2 mm

Tab. 3: Korrekturen durch Refraktion⁷⁹Abb. 57: Auswirkungen der Refraktion⁸⁰

⁷⁸ GELHAUS 1991, S. 131

⁷⁹ SCHÜTZE 2007, S. 271 Tab. 5.4-2

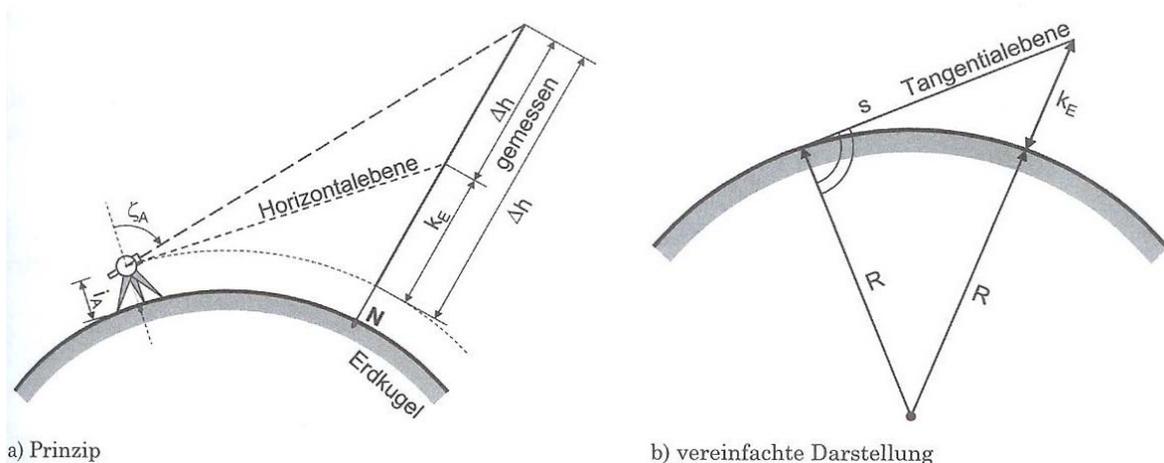
⁸⁰ SCHÜTZE 2007, S. 272 Abb. 5.4-3

Entfernung s	100 m	200 m	400m	600 m	800 m	1000 m
Korrektur wegen der Erdkrümmung k_E	0,8 mm	3,1 mm	12,6 mm	28,3 mm	50,2 mm	78,5 mm

Tab. 4: Korrekturen aufgrund der Erdkrümmung⁸¹

Bei kleineren Entfernungen spielt die Erdkrümmung noch eine relativ geringe Rolle, wie aber in Tab. 4 zu sehen ist, wird die Auswirkung bei größeren Distanzen sehr wohl spürbar. Dadurch muss die berechnete Höhe mit folgender Formel korrigiert werden:⁸²

$$k_E = \frac{S^2}{2 \cdot R} \quad \text{mit } S \dots \text{horizontale Distanz, } R \dots \text{Erdradius} = 6370 \text{ km}$$

Abb. 58: Korrektur wegen Erdkrümmung⁸³

In der Praxis wird versucht durch Hin- und Rückmessung des Höhenunterschieds und anschließender Mittelbildung den Einfluss der Erdkrümmung und der Refraktion auszuschalten (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 272).

Bei der trigonometrischen Höhenmessung wird sehr oft eine so genannte „Ingenieursformel“ angewendet:⁸⁴

$$H_B = H_A + D \cdot \cos v + \frac{(D \cdot \sin v)^2}{2 \cdot R} \cdot (1 - k) + I - Z \quad \text{mit } \frac{1 - k}{2 \cdot R} = 6,82 \cdot 10^{-8} \text{ und}$$

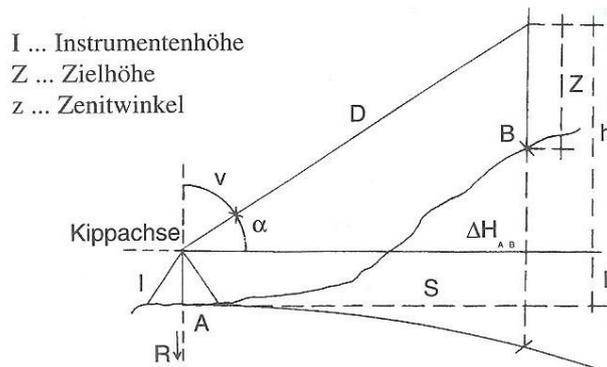
H_B ... Höhe des Punktes B, H_A ... Höhe des Standpunktes A, D ... Schrägstrecke, v ... Zenitwinkel, k ... Refraktionskoeffizient, I ... Instrumentenhöhe, Z ... Zielhöhe über Punkt B, R ... Erdradius = 6370 km

⁸¹ SCHÜTZE 2007, S. 271 Tab. 5.4-1

⁸² vgl. SCHÜTZE 2007, S. 271

⁸³ SCHÜTZE 2007, S. 271 Abb. 5.4-2

⁸⁴ vgl. EGGER 2000, S. 66f

Abb. 59: Trigonometrische Höhenmessung (inkl. Erdkrümmung)⁸⁵

Auch eine vereinfachte Ingenieurformel ist in Verwendung, wenn die Genauigkeitsanforderungen nicht ganz so hoch angesetzt sind:⁸⁶

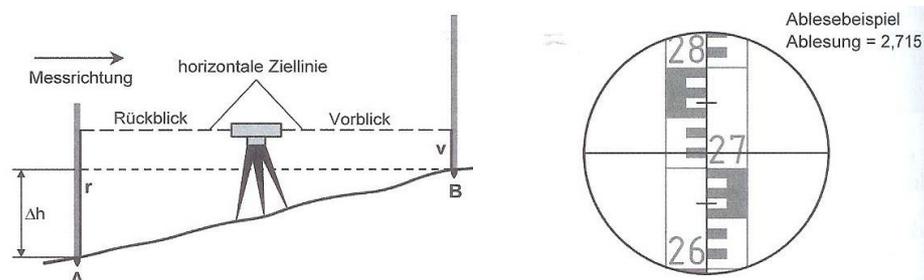
$$H_B = H_A + D \cdot \cos v + I - Z$$

mit H_B ... Höhe des Punkts B, H_A ... Höhe des Standpunkts A, D ... Schrägstrecke, v ... Zenitwinkel, I ... Instrumentenhöhe, Z ... Zielhöhe von Punkt B

6.1 Geometrisches Nivellement

Beim geometrischen Nivellement wird der Höhenunterschied zwischen zwei Punkten mittels einfachster Messungen erhalten. Dazu benötigt wird ein Nivelliergerät und zwei Messlatten. Das Gerät wird genau in der Mitte der beiden Punkte positioniert. Nun wird einerseits eine Messung Richtung Anfangspunkt, was dem Rückblick entspricht, und andererseits eine Messung Richtung Endpunkt, was dem Vorblick entspricht, gemacht. Bei den Messungen wird das Gerät nur gedreht und verändert seine Höhe oder Lage nicht. Somit werden hinten und vorne Höhen von den Messlatten abgelesen und protokolliert. In der folgenden Abbildung (Abb. 60) sind das die Höhen v und r . Der Höhenunterschied zwischen den beiden Punkten ergibt sich aus der Differenz der abgelesenen Werte. Diese Methode kann nur für Distanzen zwischen 30 und 50 m durchgeführt werden (vgl. GRUBER 2011, S. 124).

$$\Delta h = r - v$$

Abb. 60: Geometrisches Nivellement und möglicher Blick durch die Linse⁸⁷

⁸⁵ EGGER 2000, S. 66

⁸⁶ vgl. EGGER 2000, S. 67

⁸⁷ SCHÜTZE 2007, S. 252 Abb. 5.3-2a und Abb. 5.3-2b

Es sollte darauf geachtet werden, Anfangs- und Endpunkt nicht zu vertauschen, da sonst der Höhenunterschied Δh nicht mehr vorzeichenrichtig angegeben wird. Diese Methode kann auch über größere Entfernungen angewendet werden, indem mehrere Punkte aneinandergereiht werden – dies nennt sich dann Streckennivellement und ist in Abb. 61 dargestellt (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 252).

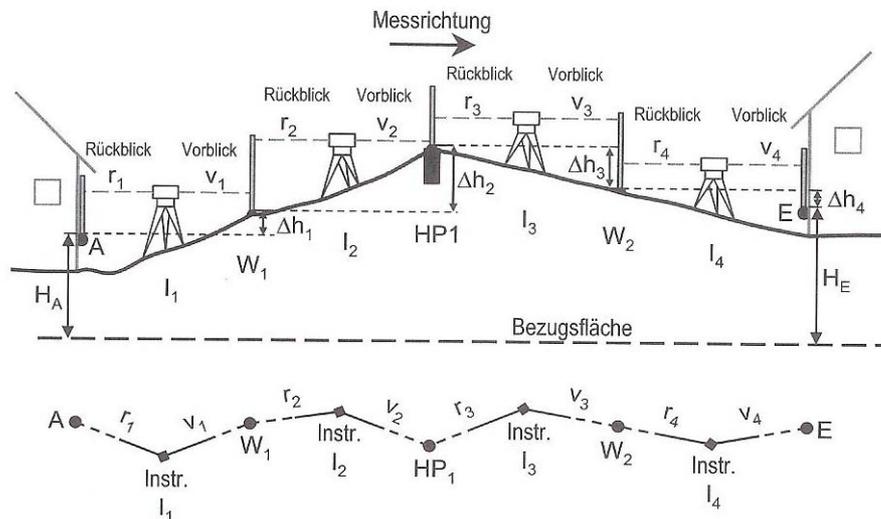


Abb. 61: Streckennivellement – Darstellung des Prinzips⁸⁸

6.2 Trigonometrisches Nivellement

Beim trigonometrischen Nivellement wird die Höhenbestimmung eines neuen Punktes aus einzelnen Höhenunterschieden zusammengesetzt. Dafür werden von jedem Gerätestandort Streckenlängen und Zenitwinkel zu einem hinter dem Standort und zu einem vor dem Standort liegenden Punkt gemessen (siehe Abb. 62). Daraus kann dann in weiterer Folge die Höhendifferenz zwischen diesen zwei Punkten angegeben werden.⁸⁹

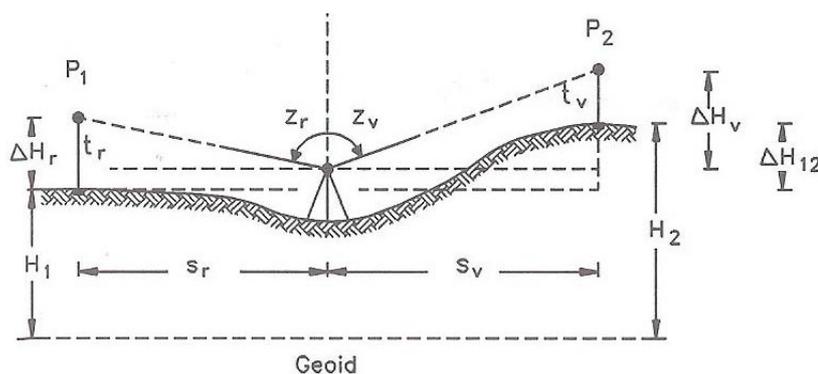


Abb. 62: Trigonometrisches Nivellement⁹⁰

⁸⁸ SCHÜTZE 2007, S. 253 Abb. 5.3-3

⁸⁹ vgl. GELHAUS 1991, S. 134

⁹⁰ GELHAUS 1991, S. 134

$$\begin{aligned}\tan z_r &= \frac{s_r}{\Delta H_r} & \tan z_v &= \frac{s_v}{\Delta H_v} \\ \Delta H_r &= \frac{s_r}{\tan z_r} = s_r \cdot \cot z_r & \Delta H_v &= \frac{s_v}{\tan z_v} = s_v \cdot \cot z_v\end{aligned}$$

$$\Delta H = (t_r - \Delta H_r) - (t_v - \Delta H_v) = \Delta H_v - \Delta H_r + t_r - t_v$$

Im idealen Fall werden für die Zielhöhen t_r und t_v gleich hohe Nivellierlatten oder Reflektoren verwendet, denn dann vereinfacht sich die Formel:⁹¹

$$\Delta H = \Delta H_v - \Delta H_r = s_v \cdot \cot z_v - s_r \cdot \cot z_r$$

6.3 Turmhöhenbestimmung

Es ist leider nicht immer möglich direkte Messungen zu bzw. von Turmspitzen, Schornsteinen, etc. durchzuführen. Darum wird als Hilfestellung eine Basis eingeführt, von der aus man den Zenitwinkel zur Turmspitze messen kann. Wichtig ist es weiters, dass die Messung höhenmäßig an das vorherrschende Referenzsystem angeschlossen wird, um eine vergleichbare Höhe zu erhalten (vgl. MATTHEWS 1997, S. 91f).

6.3.1 Turmhöhenbestimmung mittels vertikalem Hilfsdreieck

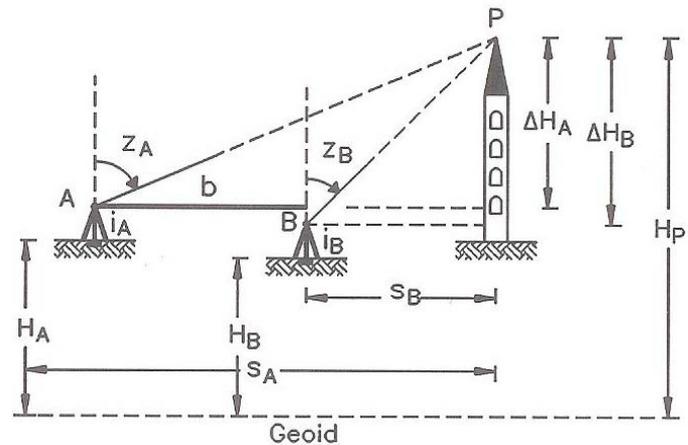
Als Basis werden hier zwei Punkte gewählt, die mit dem Zielpunkt in einer Flucht liegen. Dadurch entsteht gemeinsam mit der anvisierten Turmspitze ein vertikales Dreieck. Nachdem die beiden Hilfspunkte markiert wurden, kann als erstes der Abstand zwischen diesen beiden mittels Maßband oder Distanzmessung am Theodolit ermittelt werden – eine Hin- und Rückmessung ist sinnvoll, um Fehlerquellen zu vermeiden. In weiterer Folge wird von je einem Hilfspunkt der Zenitwinkel in mehreren Sätzen gemessen, auch die Standpunkthöhen über den Punkten A und B müssen bestimmt werden (siehe Abb. 63). Wenn dies alles bekannt ist, wird noch die horizontale Strecke zwischen Turm und den Hilfspunkten berechnet, bevor man die gewünschte Zielpunkthöhe erhält (vgl. GELHAUS 1991, S. 138).

Nun folgt der Rechenweg.⁹²

⁹¹ vgl. MATTHEWS 1997, S. 91

⁹² vgl. MATTHEWS 1997, S. 93 und GELHAUS 1991, S. 138

gegeben: H_A ... Höhe des Punkts A
 H_B ... Höhe des Punkts B
 gemessen: Zenitwinkel z_A und z_B
 Horizontalstrecke b
 Instrumentenhöhen i_A und i_B



gesucht: H_P ... Höhe des Punkts P

Abb. 63: Turmhöhenbestimmung mittels vertikalem Hilfsdreieck⁹³

- Da man an den Standorten A und B nicht vom Boden direkt die Winkelmessungen vornimmt, sondern vom etwas erhöht stehenden Theodolit, müssen die neuen Höhen erst noch berechnet werden:

$$I_A = H_A + i_A \quad I_B = H_B + i_B$$

- Die Höhe H_P des Zielpunktes kann entweder über den Punkt A oder den Punkt B erhalten werden. Die sich dabei ergebenden Gleichungen können gleichgesetzt und nach s_B umgeformt werden. Somit kann diese noch unbekannte Größe ermittelt werden.

$$s_A = b + s_B$$

$$H_P = I_A + s_A \cdot \cot z_A \quad \text{bzw.} \quad H_P = I_B + s_B \cdot \cot z_B$$

$$I_A + (b + s_B) \cdot \cot z_A = I_B + s_B \cdot \cot z_B$$

$$s_B = \frac{I_A - I_B + b \cdot \cot z_A}{\cot z_B - \cot z_A}$$

- Zum Abschluss kann die gerade erhaltene Formel in eine der Gleichungen von H_P eingesetzt werden, um sich bei späteren Aufgaben den Zwischenschritt (2) zu ersparen. Außerdem kann man zur Vereinfachung der Formel noch Zähler und Nenner mit $\cot z_A \cdot \cot z_B$ erweitern.

$$H_P = I_B + s_B \cdot \cot z_B =$$

$$= I_B + \frac{I_A - I_B + b \cdot \cot z_A}{\cot z_B - \cot z_A} \cdot \cot z_B =$$

⁹³ GELHAUS 1991, S. 137 Abb. 9.6

$$= \frac{I_A \cdot \cot z_B - I_B \cdot \cot z_A + b \cdot \cot z_A \cdot \cot z_B}{\cot z_B - \cot z_A} =$$

$$H_P = \frac{I_A \cdot \tan z_A - I_B \cdot \tan z_B + b}{\tan z_A - \tan z_B}$$

Wenn die andere Gleichung mit Hilfspunkt A herangezogen wird, sollte das gleiche Ergebnis erhalten werden.

Diese Art der Berechnung kommt eher im urbanen Umfeld zur Anwendung, da beispielsweise in Städten oftmals zu wenig Platz für die Bildung eines horizontalen Hilfsdreiecks vorhanden ist (vgl. SCHÜTZE 2007, S. 283). Die Genauigkeit dieser Methode kann stark beeinträchtigt werden, wenn die Anvisierung unter kleinen Winkeln erfolgt. Darum ist es wichtig gewisse Parameter einzuhalten: Die Entfernung zwischen dem Hilfspunkt A und dem Turm sollte in etwa der Turmhöhe entsprechen. Die Distanz zwischen Turm und zweitem Hilfspunkt B hat eine dreifachen Turmhöhe aufzuweisen. Dadurch ergeben sich nämlich Zenitwinkel im Bereich zwischen 50 gon und 80 gon, was als günstiger Schnittwinkel angesehen werden kann (vgl. GELHAUS 1991, S. 138). Weiters ist es wichtig, dass der Abstand zwischen den beiden Hilfspunkten sehr genau, d.h. im Millimeterbereich, ermittelt wird, da sich eine Abweichung dieser Größe stark auf das Endergebnis auswirken kann. Eine Hin- und Rückmessung könnte hier für eine verbesserte Genauigkeit eingesetzt werden. Auch die von den Hilfspunkten gemessenen Zenitwinkel sollten mehrfach aufgenommen werden (vgl. MATTHEWS 1997, S. 91f).

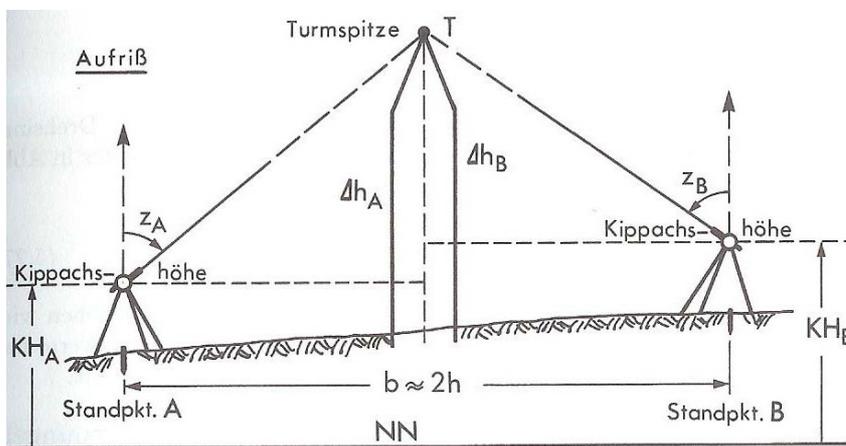


Abb. 64: Turmhöhenbestimmung – vertikales Dreieck mit Hilfspunkten A und B auf beiden Seiten des Turms⁹⁴

Ein schleifender Schnitt kann auch dann umgangen werden, wenn es möglich ist die beiden Hilfspunkte links und rechts vom Turm zu positionieren (siehe Abb. 64). Dadurch ändert sich beim oben angeführten Rechenweg der Zusammenhang zwischen den Strecken s_A und s_B , da jetzt die Distanz zwischen A und B bereits die Gesamtlänge darstellt (vgl. GRUBER 2011, S. 137).

⁹⁴ WITTE 1991, S. 355 Abb. 5.3-6

- 2.) Mittels Sinussatz können im horizontalen Dreieck die fehlenden Größen s_A und s_B berechnet werden:

$$\gamma = 200 - (\alpha + \beta)$$

$$\frac{s_A}{\sin \beta} = \frac{s_B}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \gamma}$$

es gilt außerdem: $\sin(200 - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$

$$s_A = \frac{b \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$s_B = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

- 3.) Für die Berechnung der Zielpunkthöhe stehen nun wieder zwei Gleichungen zur Verfügung:

$$H_P = I_A + s_A \cdot \cot z_A \quad \text{bzw.} \quad H_P = I_B + s_B \cdot \cot z_B$$

Laut SCHÜTZE (2007, S. 279) ist das Endergebnis das Mittel der beiden erhaltenen Werte, auch wenn die Werte unter normalen Umständen nur um einzelne Zentimeter voneinander abweichen sollen. Als Kontrolle wird normalerweise eine zweite Messung unter einem leicht abgeänderten Hilfsdreieck durchgeführt. Meist wird hier einer der Hilfspunkte minimal durch eine Drehung abgeändert (siehe Abb. 66).

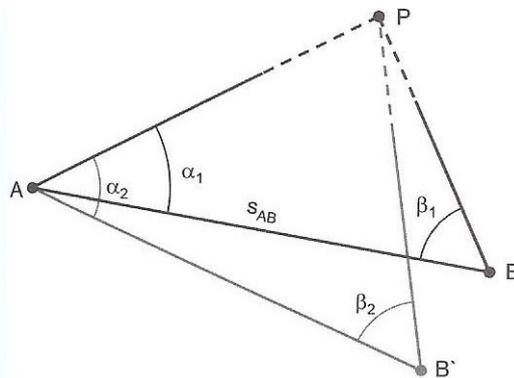


Abb. 66: Kontrolle mittels leicht abgeänderter Strecke \overline{AB} ⁹⁷

⁹⁷ SCHÜTZE 2007, S. 279 Abb. 5.4-7

6.4 Beispiele

6.4.1 Beispiel 1 – Trigonometrisches Nivellement⁹⁸

„Für eine Baustelle ist für die Bauausführung ein Höhenbezugspunkt (HHP) zu bestimmen. Die Höhenbestimmung erfolgt trigonometrisch! Berechnen Sie die Höhe des HHP!“

gegeben: Höhe des Mauerbolzens (MB12) $H_{MB\ 12}=134,152\text{ m ü. HN}$ ⁹⁹

gemessen zum MB 12: $s_{MB\ 12}=50,27\text{ m}$

$t_{MB\ 12}=1,40\text{ m}$

$Z_{MB\ 12}=95,8849\text{ gon}$

zum HHP: $s_{HHP}=67,13\text{ m}$

$t_{HHP}=1,50\text{ m}$

$Z_{HHP}=94,1310\text{ gon}$

gesucht: Skizze und Punkthöhe H_{HHP}

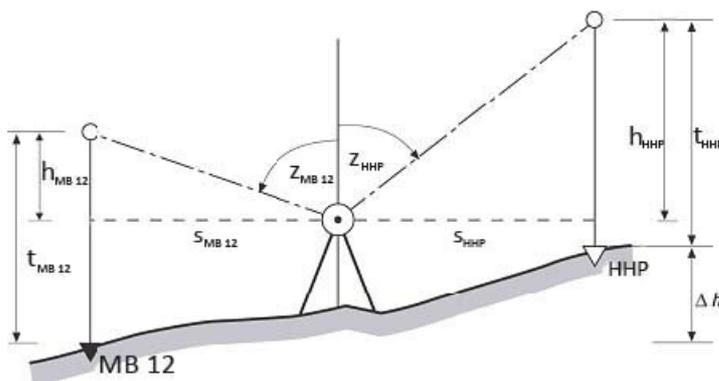


Abb. 67: Skizze zum Beispiel¹⁰⁰

1.) Aus der Skizze wird folgendes ersichtlich:

$$\begin{aligned}\Delta h &= (t_{MB\ 12} - h_{MB\ 12}) - (t_{HHP} - h_{HHP}) = \\ &= h_{HHP} - h_{MB\ 12} + t_{MB\ 12} - t_{HHP} = \\ &= s_{HHP} \cdot \cot Z_{HHP} - s_{MB\ 12} \cdot \cot Z_{MB\ 12} + t_{MB\ 12} - t_{HHP} = \\ &= 67,13 \cdot \cot 94,1310 - 50,27 \cdot \cot 95,8819 + 1,40 - 1,50 = \\ \Delta h &= 2,8523 \dots \approx 2,852\text{ m}\end{aligned}$$

2.) Der Punkt HHP liegt also 2,85 m über der Höhe des Mauerbolzens. Die gesuchte Höhe beträgt:

$$H_{HHP} = H_{MB\ 12} + \Delta h = 134,152 + 2,852 = 137,0043$$

$$\mathbf{H_{HHP} \approx 137,004\text{ m ü. HN}}$$

⁹⁸ Angabe von SCHÜTZE 2007, S. 286

⁹⁹ Die Abkürzung HN steht für Höhennull, ein Mess-System, welches in der DDR zwischen 1954 und 1956 angewendet wurde (vgl. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/H%C3%B6hennull#SNN56> – 26.12.2013)

¹⁰⁰ URL: http://www.geodsz.com/deu/d/images/2140_trigonometrische_hoehenbestimmung.png - 23.12.2013, bearbeitet v. C.S.

6.4.2 Beispiel 2 – Vertikales Hilfsdreieck¹⁰¹

gegeben: Punkthöhe $H_A = 151,63$ m ü. NN¹⁰²

$$H_B = 152,87 \text{ m ü. NN}$$

gemessen: Zenitwinkel $z_A = 79,9273$ gon

$$z_B = 52,3395 \text{ gon}$$

Instrumentenhöhe $i_A = 1,554$ m

$$i_B = 1,589 \text{ m}$$

Basislänge $b = 65,41$ m

gesucht: Strecken s_A und s_B , Punkthöhe H_P

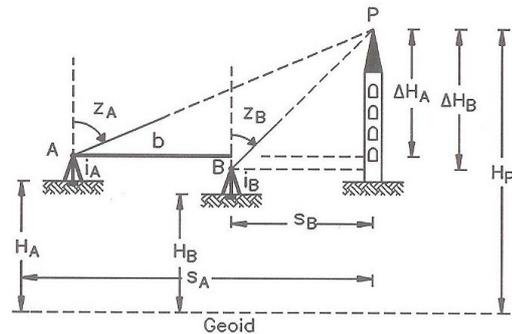


Abb. 68: Beispiel-Skizze¹⁰³

- 1.) Als erste Zwischenrechnung kann die Höhe des etwas erhöht stehenden Messgerät berechnet werden:

$$I_A = H_A + i_A = 151,63 + 1,554 = 153,184 \text{ m}$$

$$I_B = H_B + i_B = 152,87 + 1,589 = 154,459 \text{ m}$$

- 2.) Nun werden die Strecken s_A und s_B ermittelt, um im Anschluss die Punkthöhe von P zu erhalten.

$$H_P = I_A + s_A \cdot \cot z_A \quad \text{bzw.} \quad H_P = I_B + s_B \cdot \cot z_B$$

$$s_A = b + s_B$$

$$s_B = \frac{I_A - I_B + b \cdot \cot z_A}{\cot z_B - \cot z_A} = \frac{153,184 - 154,459 + 65,41 \cdot \cot 79,9273}{\cot 52,3395 - \cot 79,9273} = 33,27385 \dots \text{m}$$

$$s_A = b + s_B = 65,41 + 33,27985 = 98,68385 \dots \text{m}$$

$$s_A \approx 98,69 \text{ m} \quad s_B \approx 33,27 \text{ m}$$

- 3.) Da bei diesem Beispiel die Strecken s_A und s_B explizit berechnet wurden, kann in die einfache Formel $H_P = I_A + s_A \cdot \cot z_A$ bzw. $H_P = I_B + s_B \cdot \cot z_B$ eingesetzt werden. Sollten die Strecken nicht verlangt sein, kann Schritt (2) auch ausgelassen werden und in die Endformel eingesetzt werden.

$$H_P = I_A + s_A \cdot \cot z_A = 153,184 + 98,68385 \cdot \cot 79,9273 = 185,371935 \dots \text{m}$$

$$\text{oder} \quad H_P = \frac{I_A \cdot \tan z_A - I_B \cdot \tan z_B + b}{\tan z_A - \tan z_B} =$$

¹⁰¹ Angabe des Beispiels von SCHÜTZE 2007, S. 285

¹⁰² NN steht für Normalnull. Bis 1992 wurde dieses System mit festgelegtem Nullniveau in Deutschland angewendet, bevor ein neues eingesetzt wurde, welches nun europaweit verwendet wird (vgl. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Normalnull> - 26.12.2013).

¹⁰³ GELHAUS 1991, S. 137 Abb. 9.6

$$= \frac{153,184 \cdot \tan 79,9273 - 154,459 \cdot \tan 52,3395 + 65,41}{\tan 79,9273 - \tan 52,3395} = 185,372964 \dots m$$

- 4.) Als Kontrolle kann die zweite Gleichung, die mittels Hilfspunkt B aufgestellt wurde, berechnet werden.

$$H_P = I_B + s_B \cdot \cot z_B = 154,459 + 33,27385 \cdot \cot 52,3395 = 185,37293 \dots m$$

⇒ Der Punkt P weist folgende Höhe auf:

$$H_P = 185,37 \text{ m ü. NN}$$

6.4.3 Beispiel 3 – Horizontales Hilfsdreieck¹⁰⁴

gegeben: Punkthöhe $H_A = 114,28 \text{ m ü. NHN}$ ¹⁰⁵

$$H_B = 115,47 \text{ m ü. NHN}$$

gemessen: Zenitwinkel $z_A = 81,4750 \text{ gon}$

$$z_B = 80,8384 \text{ gon}$$

$$\text{Horizontalwinkel } \alpha = 45,8820 \text{ gon}$$

$$\beta = 55,1730 \text{ gon}$$

$$\text{Instrumentenhöhe } i_A = 1,470 \text{ m}$$

$$i_B = 1,530 \text{ m}$$

$$\text{Basislänge } b = 63,47 \text{ m}$$

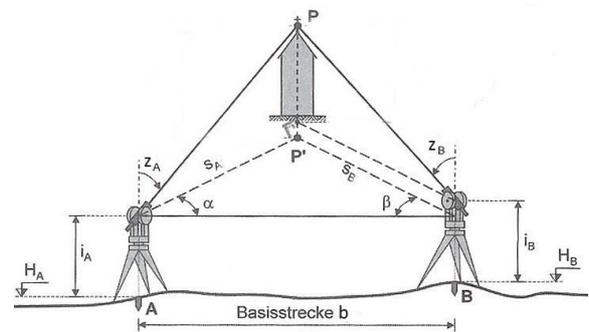


Abb. 69: Beispiel-Skizze¹⁰⁶

gesucht: Punkthöhe H_P

- 1.) Als erster Schritt wird die Höhe des Messgeräts berechnet:

$$I_A = H_A + i_A = 114,28 + 1,554 = 115,834 \text{ m}$$

$$I_B = H_B + i_B = 115,47 + 1,589 = 117,059 \text{ m}$$

- 2.) Die fehlenden Größen s_A und s_B werden durch Einsatz des Sinussatzes im horizontalen Hilfsdreieck erhalten:

$$\gamma = 200 - (\alpha + \beta) = 200 - (45,8820 + 55,1730) = 98,9450 \text{ gon}$$

$$\frac{s_A}{\sin \beta} = \frac{s_B}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \gamma}$$

¹⁰⁴ Angabe des Beispiels von SCHÜTZE 2007, S. 286

¹⁰⁵ In Deutschland wird seit 1993 ein neues System zur Höhenmessung eingesetzt, welches europaweit Gültigkeit besitzt. Die damit ermittelten Höhen werden mit der Abkürzung NHN, was für Normalhöhennull steht, bezeichnet (vgl. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Normalnull> - 26.12.2013).

¹⁰⁶ SCHÜTZE 2007, S. 278 Abb. 5.4-6, bearbeitet v. C.S.

$$s_A = \frac{b \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{53,47 \cdot \sin 55,1730}{\sin 98,9450} = 40,7587204 \dots m$$

$$s_B = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{53,47 \cdot \sin 45,8820}{\sin 98,9450} = 35,2907879 \dots m$$

- 3.) Für die Berechnung der Zielpunkthöhe stehen nun wieder zwei Gleichungen zur Verfügung, deren Ergebnis noch gemittelt wird:

$$H_{P_A} = I_A + s_A \cdot \cot z_A = 115,75 + 40,7587 \cdot \cot 81,4750 = 127,95688 \dots m$$

$$H_{P_B} = I_B + s_B \cdot \cot z_B = 117,00 + 35,2908 \cdot \cot 80,8384 = 127,95500 \dots m$$

$$H_P = \frac{H_{P_A} + H_{P_B}}{2} = 127,9559408 \dots m \approx 127,96 m$$

⇒ Der Punkt P weist folgende Höhe auf:

H_P = 127,96 m ü. NHN

7 UMSETZUNG IM UNTERRICHT

„Ein Beobachter sieht die Spitze eines h Meter hohen Turmes unter dem Höhenwinkel α und den Fuß des Turmes unter dem Tiefenwinkel β . Wie weit vom Turm entfernt und wie viel Meter höher als der Fuß des Turmes befindet sich der Beobachter?“ (BÜRGER 2000, S. 43 Bsp. 2.43)

„Von der Spitze eines $h=20$ m hohen Turms sieht man den Geländepunkt A unter dem Tiefenwinkel $\alpha=51^\circ$ und nach Schwenken des Fernrohres um den Horizontalwinkel $\varphi=46^\circ$ den Geländepunkt B unter dem Tiefenwinkel $\beta=55^\circ$. Die Punkte A , B und der Fußpunkt des Turms liegen in einer Horizontalebene. Ermittle die Entfernung von A zu B !“ (MALLE 2010, S. 119 Bsp. 6.95)

Trigonometrische Beispiele wie diese sind sehr vielen ehemaligen Schüler/innen der Allgemeinbildenden Höheren Schulen, kurz AHS genannt, noch bekannt. Trotzdem kann meist kein besseres Verständnis für die Mathematik und diesem Anwendungsgebiet aus dem Bereich der Vermessung geschaffen werden. Es ist nicht immer leicht, an die Lernenden praxisbezogene Beispiele der Mathematik weiterzugeben. Doch gerade die Vermessungskunde ermöglicht ein tieferes Verständnis für mathematische Begriffe. Dabei sind zwar mehr Unterrichtseinheiten und ein verstärkter Einsatz der Lehrkraft notwendig, doch wird so ein Anwenden mit zusätzlichem Einbezug von Vermessungstechniker/innen den Schüler/innen ein Leben lang in Erinnerung bleiben.

In manchen Schultypen, wie in der Höheren Technischen Lehranstalt für Bautechnik mit Schwerpunkt Hochbau ist Vermessungswesen ein eigenes Unterrichtsfach, welches im dritten Schuljahr drei Stunden pro Woche unterrichtet wird. Beim Schwerpunkt Tiefbau sind es sogar vier Wochenstunden. Dabei werden nicht nur theoretische Grundlagen vermittelt, sondern ein Arbeiten im Gelände ist laut Lehrplan vorgesehen (vgl. Lehrplan HTL Bautechnik, S. 14). Auch Schüler/innen der AHS sollte ein Einblick in diese Welt gewährt werden.

Da das Vermessungswesen unter anderem im Bereich der Kartenherstellung eine wesentliche Rolle spielt, ist ein fächerübergreifendes Arbeiten zwischen den Disziplinen Mathematik und Geographie und Wirtschaftskunde in einer AHS in Form eines Projektes oder einer Exkursion anzustreben.

Eine Exkursion kann dabei als methodische Großform des Unterrichts angesehen werden. Hier wird der „räumlichen Wirklichkeit außerhalb des Klassenzimmers“¹⁰⁷ nachgegangen, wodurch es Schüler/innen möglich ist, selbsttätig Erfahrungen zu sammeln um mit der Wirklichkeit konfrontiert zu werden. Sie können mit Hilfe von vorgegebenen Aufgabenstellungen geographische [und mathematische] Arbeitsmethoden üben und diese in Kleingruppen oder Partnerarbeiten anwenden. Schüler/innen können eigenständig Informationen sammeln und nehmen dadurch den Lebensraum verstärkt wahr. Für ein vertiefendes Verständnis sind der Praxisbezug und die Erkenntnis, dass gewisse gelernte Dinge in der Realität tatsächlich angewendet werden, wichtig (vgl. RINSCHÉDE 2003, S. 235ff).

Im Lehrplan der Geographie und Wirtschaftskunde für die Oberstufe ist zudem vermerkt, dass „Fallstudien und projektartigen Unterrichtsverfahren bzw. fächerübergreifenden Projek-

¹⁰⁷ RINSCHÉDE 2003, S. 235

ten und didaktischen Spielen in jeder Klasse besondere Bedeutung zu[kommt].“ (GWK-Lehrplan AHS Oberstufe, S. 2) Die Veranstaltung von Projekttagen oder Projektwochen mit Aktivitäten bereits vor Start der Exkursion entspricht genau diesem didaktischen Grundsatz. Des Weiteren wird sowohl im Unterricht als auch bei der Abhaltung der Projekttage angestrebt, die im Lehrplan geforderten Kompetenzen wie Methodenvielfalt, Orientierungssinn, Umweltbewusstsein, gesellschaftliches und wirtschaftliches Denken und Handeln zu fördern und deren Verknüpfung anzustreben.

Orientierung im Gelände mit Karte, Kompass oder GPS-Geräten oder die Aufnahme von Geländepunkten mittels Theodoliten sind nur einige Möglichkeiten, Mathematik und Vermessung zu verbinden - auch außerhalb des Schulgebäudes. Dabei werden eigentlich keine Berechnungen während des Tuns im Freien notwendig, da diese von Geräten übernommen oder durch Handlungen (entspricht in etwa dem Konstruieren am Papier) ersetzt werden. Zum besseren Verständnis wäre es jedoch ratsam, als Hintergrundwissen die mathematischen Grundlagen in aller Kürze an die Lernenden weiterzugeben.

Nach einem Blick in den allgemeinen Teil des Lehrplans der AHS sowie in die fachspezifischen Lehrpläne in Mathematik und Geographie werden Ideen zur Umsetzung genannt. Diese beziehen sich unter anderem auf das Einsetzen von vermessungstechnischer Fachsprache und Notationen im Unterricht. Kombiniert man die Theorie mit Lehrausgängen, Projekttagen oder ähnlichem wird ein Anwenden des neuen Wissens bei den Schüler/innen geschaffen.

„Schau während der Schulstunden / fleißig aus dem Fenster, Kind, / lerne die Lektionen des Kastanienbaums im Schulhof, / durch seine Äste hindurch / erfährst du vom / Wesen der Wolken.“

Dieser Auszug des Gedichts „Lektionen“ stammt von Eveline Hasler¹⁰⁸, welches in einer Lehrveranstaltung des Studiums gebracht wurde. Dabei schreibt sie den Fenstern im Klassenzimmer eine sehr wichtige Funktion zu. Sie mögen wohl tatsächlich jene Ausstattung des Klassenzimmers darstellen, auf die man nicht verzichten kann. Vielmehr aber muss man sich doch überlegen, ob man nicht das Klassenzimmer verlassen sollte, um bestimmte Sachverhalte kennenzulernen und zu erfahren. Denn es kommt nicht selten vor, dass Dinge, die sich im Leben außerhalb des Schulhauses abspielen von Lehrer/innen und Schüler/innen gleichermaßen nicht genutzt werden, um eine Beziehung zur Realität herzustellen.

Bei der Literaturrecherche zum Thema dieser Arbeit wurde deutlich, dass bereits vereinzelt an Schulen Vermessungen in der Natur durch Schüler/innen mit den verschiedensten Schwerpunkten vorgenommen werden. Herr Mag. Dr. Müller beschreibt in einem Skript zur Fortbildung von Lehrer/innen aus dem Jahre 1995, dass er mit einzelnen Schüler/innen des Wahlpflichtfaches Mathematik Vermessungen rund um die Schulumgebung mit einem alten Theodoliten vorgenommen hat und auch Berechnungen dazu im Unterricht vollzog (EGGER 1995; S. 11 – Abschnitt von Dr. Müller).

Auch Frau Mag. Sator widmete ihre Diplomarbeit der Anwendung der Trigonometrie mit anschließendem Projekttag, bei dem der Resselpark in Wien vermessen wurde. Die mathematische Grundlage bildeten hier die Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck. Außerdem

¹⁰⁸ Das gesamte Gedicht findet sich im Anhang auf Seite 114.

werden in ihrer Arbeit weitere Projekte kurz angeführt, die sie bei ihren Recherchen gefunden hat (vgl. SATOR 2009, S. 135ff).

Die Sozialformen und das Stundenausmaß werden bei den folgenden Erklärungen nicht näher erläutert, da der Fokus dieser Arbeit nicht rein didaktischer Natur ist. Es werden lediglich Möglichkeiten aufgezeigt, wie zu mathematischen Beispielen, die der Vermessungskunde gewidmet sind, wirklicher Realitätsbezug geschaffen werden kann. Im Unterricht wäre eine Durchmischung aller Sozialformen wünschenswert: Einzelarbeit, Partner- und Gruppenarbeit sowie Übungen im Klassenverband sollten sich dabei die Waage halten. Das Stundenausmaß, welches für diesen Schwerpunkt aufgewendet wird, kann stark variieren, da auch nur kleinere Ausschnitte der Vermessungskunde bearbeitet werden können. Auch bei nicht so intensiven theoretischen Auseinandersetzungen kann ein Ausflug, der sich dem selben Thema widmet, viel bewirken.

7.1 Lehrplanbezug

Im Allgemeinen Teil des Lehrplans¹⁰⁹ wird unter anderem folgendes gefordert:

- *„Die allgemein bildende höhere Schule hat im Sinne des § 2 des Schulorganisationsgesetzes an der Heranbildung der jungen Menschen mitzuwirken, nämlich beim Erwerb von Wissen, bei der Entwicklung von Kompetenzen und bei der Vermittlung von Werten. Dabei ist die Bereitschaft zum selbstständigen Denken und zur kritischen Reflexion besonders zu fördern. Die Schülerinnen und Schüler sind in ihrem Entwicklungsprozess zu einer sozial orientierten und positiven Lebensgestaltung zu unterstützen.“* (Lehrplan AHS Allgemeiner Teil, S. 1)
- *„Die Natur als Grundlage des menschlichen Lebens tritt in vielfältiger, auch technisch veränderter Gestalt in Erscheinung. Die Kenntnisse über die Wirkungszusammenhänge der Natur sind als Voraussetzung für einen bewussten Umgang und die Nutzung mit Hilfe der modernen Technik darzustellen. Verständnis für Phänomene, Fragen und Problemstellungen aus den Bereichen Mathematik, Naturwissenschaft und Technik bilden die Grundlage für die Orientierung in der modernen, von Technologien geprägten Gesellschaft. Der Unterricht hat daher grundlegendes Wissen, Entscheidungsfähigkeit und Handlungskompetenz zu vermitteln. Die Schülerinnen und Schüler sind zu befähigen, sich mit Wertvorstellungen und ethischen Fragen im Zusammenhang mit Natur und Technik sowie Mensch und Umwelt auseinander zu setzen. Als für die Analyse und Lösung von Problemen wesentliche Voraussetzungen sind Formalisierung, Modellbildung, Abstraktions- und Raumvorstellungsvermögen zu vermitteln.“* (Lehrplan AHS Allgemeiner Teil, S. 4)
- *„Die Erstellung eigenständiger Arbeiten mit Mitteln der Informationstechnologie ist anzuregen. Dazu zählen: Recherche und Verarbeitung von Informationen mit einer Textverarbeitung oder einem Präsentationsprogramm, Erstellung von Kalkulationsmodellen, Durchführung und Auswertung von Befragungen und Experimenten, Gestaltung von Medien, dokumentierte Kommunikation und Kooperation auch in einer*

¹⁰⁹ vgl. URL: <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11668/11668.pdf> - 24.6.2013

Fremdsprache, Dokumentation und Präsentation von Projektarbeiten, Modellierung und Simulation, Fachbereichsarbeiten.“ (Lehrplan AHS Allgemeiner Teil, S. 7)

Zieht man nun den Mathematik-Lehrplan für Unter- und Oberstufe der Allgemeinbildenden Höheren Schulen heran, so wird deutlich, dass dem anwendungsorientierten Unterricht ein sehr großes Augenmerk zukommt:

- *„Die Schülerinnen und Schüler sollen praxisorientierte Aufgaben unter dem Aspekt der Modellbildung möglichst oft rechnerisch, geometrisch und graphisch darstellen, lösen und kritisch betrachten können.“* (Lehrplan AHS Mathematik Unterstufe, S. 4)
- *„Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. Vernetzungen der Inhalte innerhalb der Mathematik und durch geeignete fächerübergreifende Unterrichtssequenzen sind anzustreben.“* (Lehrplan AHS Mathematik Oberstufe, S. 2)

Weiters wird gefordert, dass bereits bekannte Verfahren in neuen Situationen und Zusammenhängen eingesetzt werden (vgl. Lehrplan AHS Mathematik Unterstufe, S. 1). Selbsttätiges Arbeiten soll stattfinden, um mitzuhelfen allgemeine Zusammenhänge zu erkennen und Einsichten zu gewinnen. Dadurch erhofft man sich *„mathematische Begriffe und Methoden in ihr Wissenssystem ein[zuzubauen.“* (Lehrplan AHS Mathematik Oberstufe, S. 2)

Als Lernorganisation werden im Lehrplan Einzel-, Partner- und Gruppenarbeiten vorgeschlagen sowie Projekte und Hausübungen (vgl. Lehrplan AHS Mathematik Oberstufe, S. 2)

Wird nun explizit auf den in dieser Arbeit gelegten Schwerpunkt der Vermessung und Trigonometrie geachtet, wird deutlich, dass bereits in der Unterstufe der Allgemeinbildenden Höheren Schulen der Grundstein dazu gelegt wird. In der ersten Klasse bzw. fünften Schulstufe werden Gradeinteilungen von Winkeln im Unterricht durchgenommen. In der zweiten Klasse werden unter anderem Dreiecke und Vierecke konstruiert und der Begriff der Kongruenz eingeführt. Der Lehrsatz des Pythagoras wird in der dritten Klasse bzw. siebten Schulstufe ebenso angewendet wie die Ähnlichkeit von Figuren. In der darauffolgenden Klasse wird die Aussage des Pythagoras auch auf Körper übertragen und angewendet. Auch das Durchführen von Berechnungen mit Variablen im geometrischen Bereich wird vermittelt (vgl. Lehrplan AHS Mathematik Unterstufe, S. 5-8).

Trigonometrie als Schwerpunkt wird in der 9. Schulstufe unterrichtet, wie der Auszug aus dem Mathematiklehrplan der AHS-Oberstufe zeigt:

„Trigonometrie:

- *Definieren von $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ und $\tan \alpha$ für $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$*
- *Durchführen von Berechnungen an rechtwinkligen und allgemeinen Dreiecken, an Figuren und Körpern (auch mittels Sinus- und Kosinussatz)*
- *Kennenlernen von Polarkoordinaten“* (Lehrplan AHS Mathematik Oberstufe, S. 4)

In der sechsten Klasse der AHS bzw. der zehnten Schulstufe werden Trigonometrie und Elementargeometrie nochmals zum Lösen von geometrischen Aufgaben herangezogen. *„Umfassendes Wiederholen, Vertiefen und Vernetzen von Stoffgebieten“* (Lehrplan AHS Mathematik Oberstufe, S. 6) ist explizit in der Abschlussklasse nochmals angegeben.

Der Lehrplan für Geographie und Wirtschaftskunde in der AHS Unterstufe fordert, dass „in Lehrausgängen, Wanderungen, Betriebserkundungen und ähnlichem [...] die Schülerinnen und Schüler unmittelbar an der Wirklichkeit räumliche und wirtschaftliche Situationen erleben.[...] Besonders zu fördern sind Unterrichtsprojekte, da sie eine ganzheitliche Auseinandersetzung mit komplexen Fragestellungen ermöglichen.“ (Lehrplan AHS GWK Unterstufe, S.2) Außerdem wird gerade in der Oberstufe stark an die Selbständigkeit der Schüler/innen appelliert, um sich einerseits mit der Realität auseinanderzusetzen und um andererseits einen schüler/innen-orientierten Unterricht zu führen (vgl. Lehrplan AHS GWK Oberstufe, S. 2).

Der Umgang mit Karten oder Atlanten ist bereits in der ersten Klasse der AHS bzw. der fünften Schulstufe im Lehrplan verankert. Auch in der dritten Klasse bzw. siebten Schulstufe wird versucht mittels unterschiedlichsten Materialien Karten betreffend die österreichische Landschaft zu erfassen. Hierzu werden unter anderem Satelliten- oder Luftbilder zusätzlich zu topographischen Karten verwendet. In diesem Schuljahr ist auch ein Einblick in die Berufswelt vorgesehen (vgl. Lehrplan AHS GWK Unterstufe, S. 3f). In der Oberstufe wird im Lehrplan nicht mehr dezidiert auf Arbeiten mit Karten oder Atlanten verwiesen – diese geographischen Arbeitsmethoden werden als fixer Bestandteil angesehen, wenn es um die Erarbeitung der einzelnen vorgesehenen Schwerpunkte geht. Weiters wird darauf verwiesen heute verwendete technische Hilfsmittel in den Unterricht einzubauen (vgl. Lehrplan AHS GWK Oberstufe, S. 2).

Um von den Schüler/innen eigenständiges und reflektierendes Denken einfordern zu können, wie im Lehrplan immer wieder verlangt wird, muss ihnen im Vorfeld gezeigt worden sein, wie man sich Informationen beschaffen kann, um diese dann zu verwerten. Den Schüler/innen ist dabei auch näherzubringen, dass nicht alle gefundenen Materialien und Informationen geeignet sind. Hilfestellungen durch die Lehrkraft bei Recherchearbeiten in der schulinternen Bibliothek oder bei einer Internetsuche sind ratsam. Auch die Aufarbeitung der letztendlich getroffenen Auswahl (Erstellung von Diagrammen zur besseren Vorstellung, Kurzfassungen mit den wichtigsten Inhalten, ...) und die Protokollierung bzw. Präsentation will gelernt sein.

7.1.1 Grundkompetenzkatalog des BIFIE

Das Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens, kurz BIFIE genannt, hatte in den letzten Jahren unter anderem die Aufgabe, einen Grundkompetenzkatalog zu entwickeln, auf den die in Zukunft eingesetzte standardisierte Reifeprüfung, in späterer Folge auch mit Zentralmatura bezeichnet, aufgebaut ist. Hierfür wurde in verschiedenen Themenbereichen eine Untergliederung vorgenommen, um die einzelnen Inhalte besser wiedergeben zu können. Das in dieser Arbeit behandelte Thema der Trigonometrie findet sich in der Gruppe „Algebra und Geometrie“ als vierter Unterpunkt wieder. Leider fällt hier auf, dass die Winkelfunktionen nur mehr im rechtwinkligen Dreieck angewendet werden sollen. Nicht mehr vorgesehen wären somit Berechnungen im allgemeinen Dreieck, was auch ein Wegfallen von Sinus- und Kosinussatz bei der standardisierten Reifeprüfung bedeutet (siehe Tab. 5). Die Anwendung von Vermessungsaufgaben würde sich somit nur mehr in der mündlichen Prüfung wiederfinden, wenn sie eines der 24 Themen, die dafür schulintern angegeben werden, darstellt. Oder aber der praxisbezogene mathema-

tische Umgang aus diesem Bereich wird den Schüler/innen zwar vermittelt, aber nicht mehr zur Leistungsbeurteilung herangezogen.

AG 4	Trigonometrie	5. Kl.	6. Kl.	7. Kl.	8. Kl.
AG 4.1	Definitionen von Sinus, Cosinus, Tangens im rechtwinkligen Dreieck kennen und zur Auflösung rechtwinkliger Dreiecke einsetzen können	✓	✓	✓	✓
AG 4.2	Definitionen von Sinus, Cosinus für Winkel größer als 90° kennen und einsetzen können	✓	✓	✓	✓
Anmerkung: Die Kontexte beschränken sich auf einfache Fälle in der Ebene und im Raum, komplexe (Vermessungs-)Aufgaben sind hier nicht gemeint; Sinus- und Cosinussatz werden dabei nicht benötigt.					

Tab. 5: Grundkompetenzen bei der standardisierten Reifeprüfung zum Themenbereich Trigonometrie¹¹⁰

Weiters versucht das Institut durch die Umstrukturierung der Matura und somit auch des Unterrichts den Lehrenden Hilfestellung zu geben, um ihnen den Umstieg auf das Kompetenzmodell zu erleichtern. Unter anderem plädiert das BIFIE, kein stereotypes Üben mehr einzusetzen, damit bessere Transferleistungen entstehen können. „Um Problemlösefähigkeit zu entwickeln und tragfähiges Wissen zu erwerben, ist es notwendig, die Schüler/innen immer wieder auch mit ungewohnten Fragestellungen zu konfrontieren. Die regelmäßige Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen unterschiedlichen Anspruchsniveaus fördert problemlösendes, eigenständiges Denken.[...]“ (BIFIE 2013, S. 37).

7.2 Schulunterricht und Vermessungskunde

In den Schulbüchern der fünften Klasse bzw. der neunten Schulstufe des Unterrichtsfaches Mathematik finden sich Vermessungsaufgaben, die nach der Einführung der Winkelfunktionen im rechtwinkligen und allgemeinen Dreieck zur Anwendung kommen. In vielen Büchern sind zusätzlich am Anfang oder am Ende des Kapitels allgemeine oder historische Informationen zum Vermessungswesen und seinen Anwendungsgebieten vorhanden, die auf ein oder zwei Seiten zusammengefasst sind. Die Beispiele selbst entstammen oftmals entweder der ebenen Vermessung, die sich mit Umfang und Flächeninhalt von allgemeinen Vielecken beschäftigt, oder entsprechen dem Prinzip der trigonometrischen Höhenbestimmung mittels vertikalem oder horizontalem Hilfsdreieck:

„In Taipei, der Hauptstadt Taiwans, steht einer der höchsten Wolkenkratzer der Welt, das Taipei Financial Center, das wegen seiner 101 Stockwerke den Kurznamen Taipei 101 trägt.

Von einer 120 m langen Standlinie AB aus, deren Verlängerung durch den Fußpunkt F der Spitze S des Wolkenkratzers verläuft, werden zwei Höhenwinkel gemessen: $\alpha = \sphericalangle FAS = 63^\circ$ und $\beta = \sphericalangle FBS = 75^\circ$. Wie hoch ist der Taipei 101 ungefähr?“ (BRAND 2009, S. 168 Bsp. 971)

¹¹⁰ BIFIE 2013, S. 6

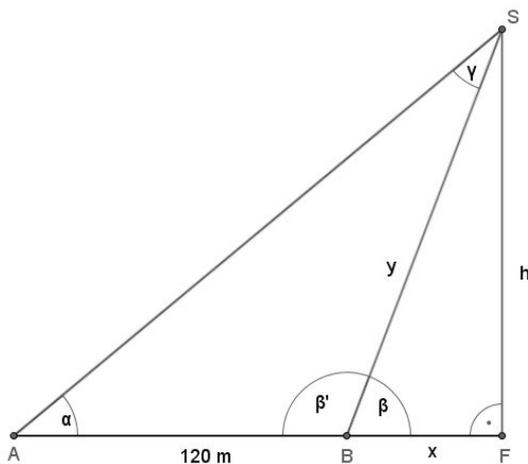


Abb. 70: Beispiel-Skizze Schulbuch

Rechenweg:

1.) Als erstes werden die fehlenden Winkel berechnet:

$$\beta' = 180^\circ - \beta = 105^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta') = 12^\circ$$

2.) Die Schrägdistanz y erhält man mittels Sinussatz:

$$\frac{120}{\sin 12^\circ} = \frac{y}{\sin 63^\circ}$$

$$y = \frac{120 \cdot \sin 63^\circ}{\sin 12^\circ} = 514,2605 \dots m$$

3.) Die gesuchte Höhe kann durch die Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck ermittelt werden:

$$\sin \beta = \frac{h}{y}$$

$$h = y \cdot \sin \beta = 514,2605 \dots \cdot \sin 75^\circ = 496,7375 \dots m$$

Der Turm ist rund 500 m hoch.

„Vom Fußpunkt eines Leuchtturmes mit der Höhe $h=37,5$ m, der direkt an der Küste steht, sieht man die beiden Schiffe A und B unter einem Winkel von 166° . Vom Schiff A aus sieht man die Spitze des Turmes unter dem Höhenwinkel von $27,6^\circ$; vom Schiff B aus unter dem Höhenwinkel von $36,5^\circ$. Wie weit sind die Schiffe voneinander entfernt? Beachte, dass der Fußpunkt des Turmes und die Schiffe in einer Horizontalebene liegen.“ (BLEIER 2009, S. 190 Bsp. 680)

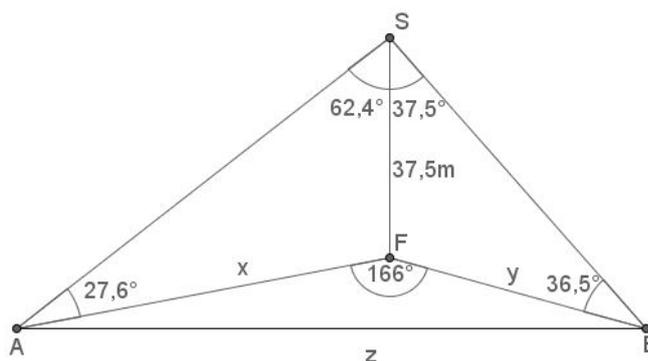


Abb. 71: Beispiel-Skizze Schulbuch

Rechenweg:

1.) In den Dreiecken $\triangle AFS$ und $\triangle BFS$ können die horizontalen Entfernungen x und y mittels Sinussatzes ermittelt werden:

$$\frac{37,5}{\sin 27,6^\circ} = \frac{x}{\sin 62,4^\circ} \quad x = \frac{37,5 \cdot \sin 62,4^\circ}{\sin 27,6^\circ} = 71,73088 \dots m$$

$$\frac{37,5}{\sin 36,5^\circ} = \frac{y}{\sin 53,5^\circ} \quad y = \frac{37,5 \cdot \sin 53,5^\circ}{\sin 36,5^\circ} = 50,6783 \dots m$$

2.) Mit Hilfe des Cosinussatzes kann im horizontalen Dreieck $\triangle ABF$ die gesuchte Entfernung z berechnet werden:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 166^\circ = 121,5237 \dots m$$

Die Entfernung zwischen den Punkten A und B beträgt circa 122 m.

Oftmals sind Beispiele so formuliert wie das oben genannte Beispiel. Dabei soll angemerkt werden, dass beim Ursprungsprinzip im Vermessungswesen die Höhe des Turms gesucht ist und nicht der horizontale Abstand zwischen den Geländepunkten. Dieser wird im Vermessungswesen selbst gewählt, um eine gute Messanordnung zu gewährleisten.

In den seltensten Fällen wird bei solchen Beispielen auf mögliche Ungenauigkeiten hingewiesen, die aufgrund des gewählten Mess-Verfahrens entstehen können. Dadurch bleibt der Schüler/die Schülerin oftmals im Glauben das ermittelte Ergebnis würde bis auf zwei Nachkommastellen genau mit der Wirklichkeit übereinstimmen. Dabei wissen die Schüler/innen aus eigener Erfahrung, dass sich beim Messen mit Geodreieck im Heft oder mit dem Maßband im Klassenzimmer Ungenauigkeiten ergeben können.

Das Buch „Mathematik 5“ von GÖTZ/REICHEL (2010) befasst sich sehr wohl mit Messfehlern und ihrer möglichen Fortpflanzung bei weiteren Berechnungen. Auch enthält es im Gegensatz zu anderen Schulbüchern der 5. Klasse AHS die Verfahren des Vorwärts- und Rückwärtseinschneidens, die als Vertiefung im Unterricht vorgeschlagen werden (vgl. GÖTZ 2010, S. 216ff). Das Prinzip des Vorwärtseinschneidens wird oftmals durchgeführt, ohne dass dieses im Speziellen bekannt ist, da hier rein der Sinussatzes zur Anwendung kommt. Das Rückwärtseinschneiden ist etwas komplizierter aufgebaut und wird ohne davon Kenntnis zu besitzen nicht ohne Weiteres verwendet. Im erwähnten Beispiel in „Mathematik 5“ (GÖTZ 2010, S. 218 Beispiel V) werden im Gegensatz zu konventionellen Aufgaben im Vermessungswesen die Entfernungen zwischen den einzelnen Punkten berechnet, nicht aber die Koordinaten des Neupunktes. Es wird im Buch darauf hingewiesen, dass „*Aufgaben dieser Art*“ zu einem Rechnen im Koordinatensystem führen oder mittels Konstruktion zu lösen sind (vgl. GÖTZ 2010, S. 218).

Es fällt auf, dass in Schulbüchern von Höhen-, Tiefen- und Sehwinkel die Rede ist. In der Vermessungskunde werden diese Bezeichnungen nicht verwendet. Dort sind Begriffe wie Horizontal-, Vertikal-, Zenit- oder Schrägwinkel gebräuchlich. Auch werden wie im dritten Kapitel beschrieben als Winkeleinheiten Gon verwendet anstelle der in der Mathematik üblichen Grad. Weiters sind die x- und y-Achse im Koordinatensystem in der Geodäsie vertauscht.

Es ist gut, dass Anwendungsbeispiele der Vermessung im Mathematik-Unterricht Einsatz finden. Trotzdem könnte, um wirklich praxisnahen Unterricht zu gestalten, vom Lehrenden ein Schwerpunkt gesetzt werden, indem beispielsweise die **Sprache und Vorgehensweise der Geodäsie** stärker eingebracht wird. Dies erfordert natürlich Eigenengagement der Lehrperson, da man sich selbst als Mathematiker/in erst in die gebräuchlichen Notationen und

Rechenvorgänge einlesen muss. Außerdem ist eine Vertiefung bzw. Konkretisierung der Vermessungsaufgaben auch mit einem Mehraufwand an Unterrichtsstunden verbunden, die dafür benötigt werden. Dies könnte im Mathematik-Wahlpflichtfach geschehen, falls im Regelunterricht die Zeit nicht vorhanden ist. Denn auch von Schüler/innenseite ist ein Interesse mitzubringen, damit eine Vertiefung sinnvoll ist.

7.2.1 Möglicher Aufbau im Mathematik-Unterricht

Als erstes Bekanntmachen mit der Materie könnten Schüler/innen versuchen, mögliche Hilfsmittel des Vermessers in ihrer Umgebung zu finden. Gemeint sind dabei Kirchturmspitzen, die anvisiert werden können, Vermarkungspunkte in der Straße oder am Gehsteig, oder amtliche Festpunkte an Häuserecken, die markiert sind. Speziell dann, wenn Schüler/innen einmal auf diese Dinge aufmerksam gemacht wurden, nehmen sie diese verstärkt wahr. Hier könnten beispielsweise als Zusatz Angaben zu Festpunkten, wie sie vom Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen ausgeschrieben werden, hergezeigt werden (siehe Anhang 2). Die Schüler/innen könnten ebenfalls überlegen, was bei Aufnahmen im Gelände alles erfasst werden kann.



Abb. 73: Vermessungsnagel am Gehsteig



Abb. 74: Knauf eines Kirchturms als Referenzpunkt

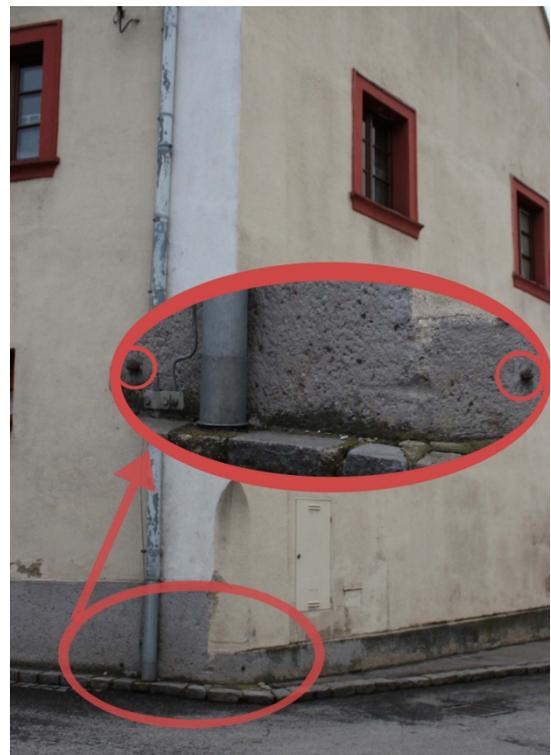


Abb. 72: Gabelpunkt an der Häuserecke

(eigene Aufnahmen)

Bei vorhandenem Interesse bei Lehrenden als auch Lernenden kann im Unterricht damit begonnen werden gegebene Koordinatenpunkte in das **Koordinatensystem der Vermessungskunde** einzuzichnen und **Winkelberechnungen in Gon** durchzuführen. Es kann anfänglich zu einiger Verwirrung führen, wenn x- und y-Achse vertauscht werden. Bei diesen Übungen sollen auch die Winkelbezeichnungen wie Zenit-, Horizontal- oder Schrägwinkel



Abb. 75: Expert/innen des Vermessungswesens in der Schule¹¹¹

der Vermessung arbeitet, mittels eines Lehrausgangs oder bei einem schulinternen Expertengespräch an Kinder und Jugendliche weitergegeben werden. Dabei sollte dann nicht nur theoretisches Wissen vermittelt werden, sondern das eigene Ausprobieren im Mittelpunkt stehen. Denn wenn theoretisch angeeignetes Wissen in der Praxis umgesetzt wurde, bleibt es vielleicht doch länger im Gedächtnis und wurde besser verstanden.

Im Unterricht würde es sich außerdem anbieten, das Thema der **Polarkoordinaten**, das im Lehrplan verankert ist, bei diesem gesetzten Schwerpunkt mit einzubinden. Die beiden Hauptaufgaben der Vermessungskunde, die sich auf das Umrechnen zwischen Polarkoordinaten und rechtwinkligen Koordinaten konzentrieren, könnten hier zum Einsatz kommen wie im Kapitel „Mathematische Grundlagen“ erläutert (siehe Seite 26ff). **Bogenschnitte** werden bereits in der 6. Schulstufe im Mathematik-Unterricht durchgeführt bei der Konstruktion eines allgemeinen Dreiecks, bei dem alle drei Seitenlängen gegeben sind. Berechnungen erfolgen erst in der Oberstufe, wenn ein Rechnen mit Winkelfunktionen eingeführt wurde.

Die nun beschriebenen Vorinformationen würden schon ausreichen, um gemeinsam ein **im Vermessungswesen übliches Beispiel zur trigonometrischen Höhenbestimmung mittels horizontalem Hilfsdreieck** zu lösen:

„Berechnen Sie die Höhen der Punkte P_1 bis P_3 mit Hilfe eines horizontalen Hilfsdreieckes!

*gegeben: $H_A = 185,23$ m ü. NHN
gemessen: Standpunkt A
 $\alpha = 60,4320$ gon
 $i_A = 1,630$ m
 $z_A = 77,4430$ gon*

*$H_B = 190,87$ m ü. NHN
Standpunkt B
 $\beta = 45,7480$ gon
 $i_B = 1,570$ m
 $z_B = 86,0880$ gon*

$s_{AB} = 88,15$ m

¹¹¹ URL: <http://www.proffiti.de/system/html/lehrer-dd98f360.jpg> - 25.1.2014

gesucht: Höhe des Punktes P' (SCHÜTZE 2007, S. 286)

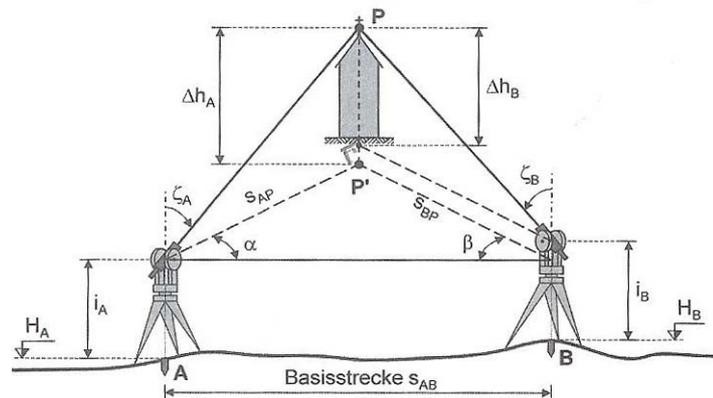


Abb. 76: Beispiel-Skizze¹¹²

Rechenweg:

1.) Nach einer Skizze an der Tafel und im Heft, die alle gegebenen Informationen eingetragen haben, und einer kurzen Besprechung, wie diese Vermessung im Freien durchgeführt wurde, kann damit begonnen werden die Höhe des Messgerätes zu ermitteln:

$$I_A = H_A + i_A = 185,23 + 1,630 = 186,86 \text{ m}$$

$$I_B = H_B + i_B = 190,87 + 1,570 = 192,44 \text{ m}$$

3.) Der folgende Schritt ist den Schüler/innen bereits aus Schulbeispielen zur Vermessung bekannt: Mit Hilfe des Sinussatzes können die fehlenden Größen s_{AP} und s_{BP} im horizontalen Dreieck ermittelt werden:

$$\gamma = 200 - (\alpha + \beta) = 200 - (60,4320 + 45,748) = 93,820 \text{ gon}$$

$$\frac{s_A}{\sin \beta} = \frac{s_B}{\sin \alpha} = \frac{s_{AB}}{\sin \gamma}$$

$$s_{AP} = \frac{s_{AB} \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{88,15 \cdot \sin 45,7480}{\sin 93,820} = 58,30696 \dots \text{ m}$$

$$s_{BP} = \frac{s_{AB} \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{88,15 \cdot \sin 60,4320}{\sin 93,820} = 71,75429 \dots \text{ m}$$

4.) Nun folgt ein an sich bekanntes Verfahren zur Berechnung der Turmhöhe, nur wird es im Schulunterricht zumeist mit der Anwendung des Tangens im rechtwinkligen Dreieck gelöst. Es kann die Formel, auch in Hinblick auf die Nutzung des Taschenrechners, aber leicht umgeschrieben werden. Neu wird für die Lernenden sein, dass zwei Lösungen erhalten werden – eine über das Dreieck $\Delta AP'P$ und eine über das Dreieck $\Delta BP'P$. Diese sind noch zu mitteln, um einen möglichst präzisen Wert als Lösung zu bekommen.

¹¹² SCHÜTZE 2007, S. 278 Abb. 5.4-6

$$H_{P_A} = I_A + s_{AP} \cdot \cot z_A = I_A + s_{AP} \cdot \frac{1}{\tan z_A} = 186,86 + 58,30 \dots \cdot \frac{1}{\tan 77,4430} =$$

$$= 208,42990 \dots m$$

$$H_{P_B} = I_B + s_{BP} \cdot \cot z_B = I_B + s_{BP} \cdot \frac{1}{\tan z_B} = 192,44 + 71,75 \dots \cdot \frac{1}{\tan 86,0880} =$$

$$= 208,37487 \dots m$$

$$H_P = \frac{H_{P_A} + H_{P_B}}{2} = 208,40238 \dots m \approx \mathbf{208,41 m}$$

Eine weitere Möglichkeit die Vermessungskunde in den Unterricht einzubeziehen liegt beim **Prinzip des Vorwärtseinschneidens** vor. Die Angaben aus der Geodäsie sind hier sehr oft kurz und prägnant gehalten, wodurch kein Herauslesen der Informationen notwendig ist. Trotzdem sollte als erster Schritt neben einer Skizze besprochen werden, wie hier im Gelände vorgegangen wurde, um sich ein besseres Bild von der Situation machen zu können:

gegeben¹¹³: Punkt A=(54 715,48; 23 434,87) → $y_A = 54\,715,48$ $x_A = 23\,434,87$

Punkt B=(54 937,21, 22 534,01) → $y_B = 54\,937,21$ $x_B = 22\,534,01$

gemessen: Dreieckswinkel $\alpha = 59,7645$ gon, $\beta = 70,8419$ gon, $\gamma = 69,3948$ gon

gesucht: Koordinaten des Punktes C=(y_C , x_C)

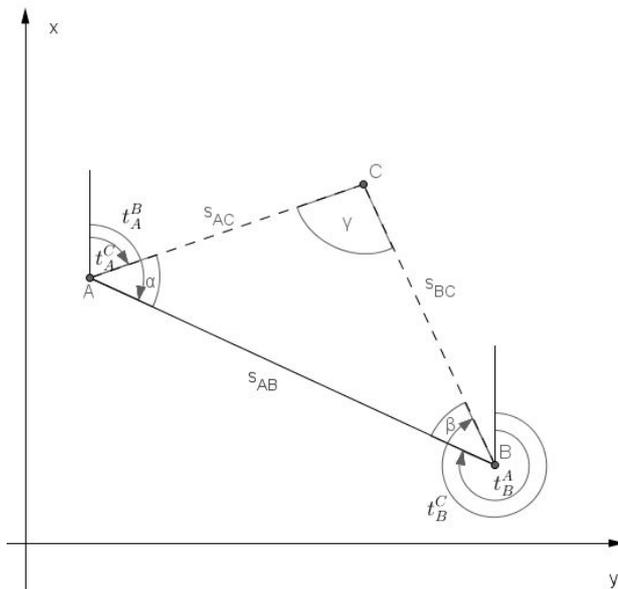


Abb. 77: Beispiel-Skizze

- 1.) Nach einer Skizze kann als zweiter Schritt überprüft werden, ob die Messungen der Dreieckswinkel genau durchgeführt wurden. Dafür wird die Summe der Messwerte gebildet und allenfalls Korrekturen vorgenommen, da die Winkelsumme im Dreieck stets 200 gon beträgt.

$$\alpha + \beta + \gamma = 200,0012 \text{ gon}$$

Der vorhandene Fehler von 0,0012 gon wird auf alle drei Winkel in gleichem Maße aufgeteilt. Somit ergeben sich folgende Werte für die weiteren Berechnungen:

¹¹³ Beispiel nachgerechnet nach MATTHEWS 1997, S. 63

$$\alpha' = 59,7641 \text{ gon}, \quad \beta' = 70,8415 \text{ gon}, \quad \gamma' = 69,3944 \text{ gon}$$

- 2.) Als nächstes werden der Richtungswinkel t_A^B und die Strecke s_{AB} berechnet. Die Distanz zwischen zwei Punkten zu berechnen sollte den Schüler/innen geläufig sein. Zur Ermittlung des Richtungswinkels bietet es sich an eine separate Skizze zu machen, wobei die Situation an die erste Hauptaufgabe erinnert.

$$s_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-900,86)^2 + 221,73^2} = 927,746157 \dots m$$

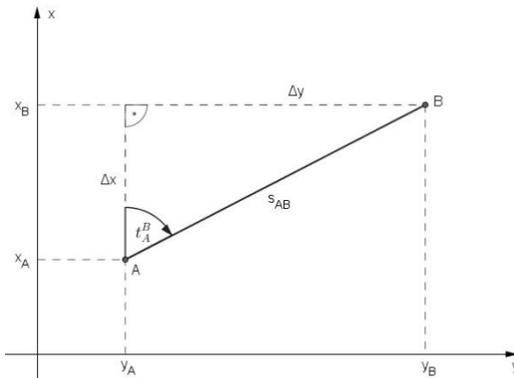


Abb. 78: Skizze zur Richtungswinkel -Berechnung

Um als Ergebnis keinen negativen Winkel zu erhalten, muss das Ergebnis noch mit 200 gon (entspricht einer halben Drehung) erweitert werden. Nähere Erläuterungen über die Lage des Richtungswinkels wie in Abb. 27 auf Seite 29 gehen vielleicht zu sehr ins Detail, würden aber den Sachverhalt vollständig darlegen.

$$t_A^B = \arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \arctan \frac{221,73}{-900,86} = \arctan(-0,24613147) = 184,636175 \text{ gon}$$

- 3.) Die fehlenden Strecken s_{AC} und s_{BC} können mit Hilfe des Sinussatzes ermittelt werden:

$$s_{AC} = \frac{\sin \beta \cdot s_{AB}}{\sin \gamma} = \frac{\sin 70,8415 \cdot 927,746 \dots}{\sin 69,3944} = 938,50464 \text{ m}$$

$$s_{BC} = \frac{\sin \alpha \cdot s_{AB}}{\sin \gamma} = \frac{\sin 59,7641 \cdot 927,746 \dots}{\sin 69,3944} = 844,23237 \text{ m}$$

- 4.) Die Richtungswinkel t_A^C und t_B^C werden noch benötigt, um mit Hilfe der ersten Grundaufgabe (polares Anhängen) die Koordinaten des Neupunktes C bestimmen zu können. Hilfreich ist dabei ein Blick auf die Beispiel-Skizze.

$$t_A^C = t_A^B - \alpha = 184,636175 - 59,7641 = 124,87208 \text{ gon}$$

$$t_B^C = t_B^A + \beta = t_A^B + \beta \pm 200 \text{ gon} = 184,636175 + 70,8415 - 200 = 55,47768 \text{ gon}$$

Nun erfolgt noch das polare Anhängen der Koordinaten:

$$y_C = y_A + s_{AC} \cdot \sin t_A^C = 54\,715,48 + 938,50464 \cdot \sin 124,87208 = 55\,583,265 \text{ m}$$

$$x_C = x_A + s_{AC} \cdot \cos t_A^C = 23\,434,87 + 938,50464 \cdot \cos 124,87208 = 23\,077,463 \text{ m}$$

- 5.) Zur Kontrolle kann die Koordinatenberechnung von C auch über den Punkt B gemacht werden:

$$y_C = y_B + s_{BC} \cdot \sin t_B^C = 54\,937,21 + 844,23237 \cdot \sin 55,47768 = 55\,583,265 \text{ m}$$

$$x_C = x_B + s_{BC} \cdot \cos t_B^C = 22\,534,01 + 844,23237 \cdot \cos 55,47768 = 23\,077,463 \text{ m}$$

⇒ Der Punkt C weist die Koordinaten auf:

$$\mathbf{C} = (55\,583,26; 23\,077,46)$$

Hier wird deutlich, dass das Rechnen mit Koordinaten etwas langwieriger, aber nicht unbedingt schwieriger ist als das reine Rechnen mit Distanzen. Auch an die eigene Schreibweise der verschiedenen Größen muss man sich erst gewöhnen. Trotzdem sollten die Schüler/innen keine Scheu davor haben.

Richtig interessant wird es für die Schüler/innen, wenn sie selbst Distanzen und Winkel im Gelände messen, um im Anschluss die gesuchten Koordinaten aus eigenen Aufzeichnungen heraus zu berechnen.

Weitere Beispiele, die auch im Unterricht eingebaut werden könnten, wurden in dieser Arbeit in den Kapiteln Genauigkeitsüberlegungen (siehe Seite 46ff), Einschneiderverfahren (siehe Seite 65ff) und trigonometrische Höhenbestimmung (siehe Seite 82ff) beschrieben.

7.2.2 Genauigkeitsüberlegungen im Unterricht

Bei Berechnungen von Vermessungsaufgaben ist nicht allein das Ergebnis interessant, sondern die gesamte Messanordnung wird untersucht. Bei schlechter Position der Standorte können nämlich die Messtoleranzen Größen annehmen, die nicht mehr akzeptiert werden. Im Idealfall wird dies den Schüler/innen bewusst, wenn sie eigene Messungen im Freien aus den verschiedensten Positionen vornehmen können und die Ergebnisse im Anschluss miteinander vergleichen. Berechnungen wie Mittelwert und Standardabweichung können hier wiederholt eingesetzt und gut erläutert werden.

Ein gemeinsames Durchbesprechen der zu beachtenden Regeln kann ebenfalls zu einem verbesserten Verständnis beitragen. Diese sind keinesfalls auswendig zu lernen, könnten aber beispielsweise von den Schüler/innen zusammengefasst und bei weiteren Berechnungen oder Messungen im Freien herangezogen und beachtet werden.

Um den Schüler/innen ein erstes Gefühl zu geben, wie **Messungsgenauigkeiten** entstehen können und inwieweit diese noch akzeptabel sind, kann im Klassenzimmer ausprobiert und besprochen werden. Fünf Schüler/innen, die nacheinander in den Klassenraum kommen, werden **mit** einem **Maßband** ausgestattet und gebeten, einmal die lichte Breite des Fensters und einmal die Breite des Klassenzimmers auszumessen und die erhaltenen Messwerte auf ein Blatt zu schreiben. Zusätzlich kann auch ein digitales **Distanzmessgerät** zum Einsatz kommen, mit dem die Höhe des Raumes oder die Diagonale gemessen werden kann. Die Ergebnisse werden gesammelt und der Klasse vorgestellt: Hier werden im Normalfall Abweichungen auftreten, die sich durch ungenaues Anlegen des Messbandes oder durch schlammiges Ablesen ergeben haben. Auch werden manche Schüler/innen nur Werte im Zentimeter-, andere auch im Millimeterbereich angeben. Beim Distanzmesser werden ebenfalls nicht genau die gleichen Ergebnisse zu erwarten sein. Hierbei soll verdeutlicht werden, dass auch mit technischen Geräten Abweichungen bis zu einem gewissen Grad zu erwarten sind.

Um die erhaltenen Abweichungen besser klassifizieren zu können, wäre ein **Berechnen des Mittelwertes und der Standardabweichung** wie folgt möglich:

Messwerte für die Fensterbreite (in cm):	110,0	109,4	110,5	108,8	109,5
Messwerte für die Klassenbreite (in cm):	523,0	519,2	521,0	524,7	519,7

1.) Nun wird für jedes Beispiel der Mittelwert und die Standardabweichung ermittelt:

Fensterbreite	Klassenbreite
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i =$ $= \frac{110 + 109,4 + 110,5 + 108,8 + 109,5}{5} =$ $= 109,64 \text{ cm}$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ $= \frac{523 + 519,2 + 521 + 524,7 + 519,7}{5} =$ $= 521,52 \text{ cm}$
$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 =$ $= \frac{1}{5-1} [(110 - 109,64)^2 + (109,4 - 109,64)^2$ $+ \dots + (109,5 - 109,64)^2]$ $= 0,413$ $s = \sqrt{s^2} = 0,6426 \dots \approx 0,65 \text{ cm}$	$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 =$ $= \frac{1}{5-1} [(523 - 521,52)^2 + (519,2 - 521,52)^2$ $+ \dots + (519,7 - 521,52)^2] =$ $= 5,317$ $s = \sqrt{s^2} = 2,3058 \dots \approx 2,31 \text{ cm}$

2.) In weiterer Folge sind die Ergebnisse der Berechnungen zu interpretieren: Was bedeuten diese Werte eigentlich? Warum ist die Standardabweichung bei der Klassenbreite größer ausgefallen? Woraus kann das resultieren? Etc.

Es würde auch genügen, alle Schüler/innen einer Klasse das gleiche Dreieck auf Transparentpapier zeichnen zu lassen, um Ungenauigkeiten aufzuzeigen. Denn beim Übereinanderlegen dieser Blätter werden auch hier Abweichungen vorkommen. Ziel dieser Übung soll sein, Messungen nicht als absolut korrekt anzusehen, sondern Schlüsse aus den Ergebnissen zu ziehen und eventuell die Versuchsanordnung abzuändern, um entstehende Fehler zu minimieren. Weiters soll verstanden werden, dass gewisse Abweichungen toleriert werden, wobei immer zu unterscheiden ist, worum es sich handelt – der neue Grenzstein zwischen zwei Feldern wird eine größeren Fehler erlauben als die abgesteckten Eckpunkte für die Errichtung eines Fertigteilhauses. Diese Maßtoleranzen können nicht willkürlich gewählt werden, sondern sind in einer Norm festgeschrieben.

Eine weitere Aufgabe aus dem Vermessungswesen beschäftigt sich mit fehlerzeigenden Figuren. Wenn am Tag der Messung das Maßband durch Hitze ausgedehnt wird, kann man davon ausgehen, dass alle gemachten Messungen zu kurz sind. Ist es wiederum sehr kalt und das Maßband zieht sich zusammen, dann werden die Messungen alle länger ausfallen. Dies ist nur eine Möglichkeit der Fehlerentstehung. Nun kann man aber allein durch die Position der Festpunkte, von denen aus gemessen werden soll, den Bereich, in dem der gesuchte Punkt liegt, sehr klein halten. Mittels Skizzen, die einen Messvorgang im Freien suggerieren, soll die Idee der fehlerzeigenden Figuren vermittelt werden (vgl. Abbildungen in Kapitel 5.4 auf Seite 60ff). Solche Vorinformationen sind insbesondere wichtig, um schließlich im

Gelände möglichst genaue Daten zu erhalten. Dies kann bei der Umsetzung im Freien von den Schüler/innen ausprobiert werden.

7.2.3 Fächerübergreifende Aspekte

Die Prinzipien des **Vorwärts- und Rückwärtseinschneidens** könnten im Mathematikunterricht eingebaut werden, wie in Kapitel 7.2.1 angeführt, um dann im Unterrichtsfach Geographie und Wirtschaftskunde aufgegriffen zu werden. Denn beim Wandern werden diese Verfahren auch zur Standortbestimmung verwendet, wenn kein GPS-Gerät benutzt wurde. Ein erstes Kennenlernen der Handhabung von **Karte und Kompass** im Klassenzimmer ist sinnvoll, da hier keine äußeren Faktoren wie Wind, grelles Sonnenlicht oder Lärm aus der Umgebung anfallen. Auch der Umgang dem **GPS-Gerät** kann hier in Ruhe geübt werden.

Zuerst ist den Schüler/innen der Umgang mit dem Kompass näher zu bringen. Dafür sind beispielsweise die gebräuchlichen Fachbegriffe zu erklären (siehe Abb. 79) und mögliche erste Übungen wie beispielsweise das Anvisieren einer Diagonale des Klassenzimmers mit anschließender Übertragung auf einen Klassenplan. Da das Anvisieren und die Übertragung auf eine Karte sehr komplexe Vorgänge sind, ist eine so einfache Aufgabenstellung ausreichend.

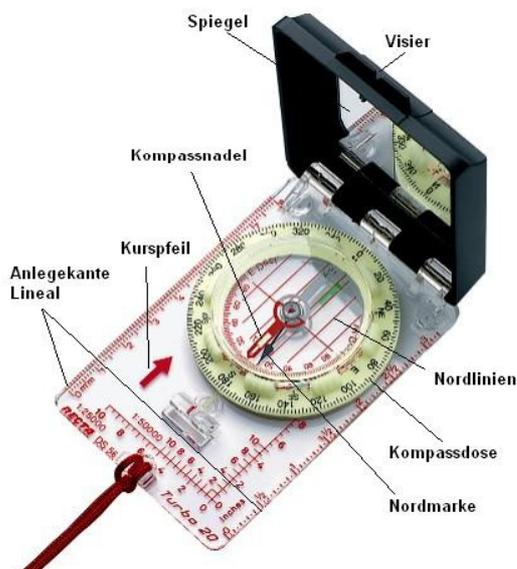


Abb. 79: Spiegelkompass¹¹⁴



Abb. 80: Weiterdrehen des Kompasses bis die Nordstriche parallel zu den Gitterlinien der Karten stehen¹¹⁵

Das gesamte Prinzip des Vorwärtseinschneidens mit Karte und Kompass ist relativ komplex zu beschreiben, wenn kein gleichzeitiges Mitmachen möglich ist. Trotzdem wird nun versucht, eine Idee davon zu vermitteln:

Dieses Prinzip wird angewendet, wenn der eigene Standort bekannt ist, aber ein beliebiger Punkt aus der Umgebung nicht zugeordnet werden kann. Als erster Schritt wird der Rich-

¹¹⁴ URL: <http://www.660er.de/Tenere/Bilder/spiegelkompass.jpg> - 23.1.2014

¹¹⁵ URL: http://www.auf-tour.info/wp-content/uploads/2012/01/Karte_Kompass-e1326479900888.jpg - 23.1.2014

tungswinkel bestimmt. Dafür wird der Kompass in Augenhöhe gehalten und Richtung Ziel gehalten. Nun wird die Kompassdose so lange gedreht, bis die Nordspitze der Nadel mit der Nordmarke der Dose zusammenfällt. Der Winkel kann nun abgelesen werden und soll als nächster Schritt in die Karte übertragen werden. Dazu wird am Kompass an der Ablesemarke der ermittelte Winkel eingestellt und das Gerät mit einem Eckpunkt an den eigenen Standort auf der Karte angelegt. Nun wird das Gehäuse so lange gedreht bis die Nordstriche der Bussole parallel zu den Gitterlinien der Karte stehen. In Verlängerung der Anlegekante befindet sich der gesuchte Punkt (vgl. WÜRTL 2002, S. 30).

Auch das Rückwärtseinschneiden kann im Klassenzimmer geübt werden, bevor es im Freien angewendet wird. GPS-Geräte als Unterstützung können hinzugezogen oder weggelassen werden.

7.3 Anwendung des Gelernten in der Natur

Wie bereits erwähnt ist eine Umsetzung der vermessungstechnischen Inhalte in Form von Projekttagen oder einer Exkursion anzustreben.

Im Gelände unterwegs zu sein und die Kinder und Jugendlichen eigenständig arbeiten zu lassen, ist als sehr positiv zu werten. Arbeitsmethoden werden geübt, forschendes Lernen angewendet und soziale Interaktion gefördert. All diese Punkte können zu einem erhöhten Lernerfolg führen (vgl. SITTE 2001, S. 149). Außerdem wird den Schüler/innen eine tatsächliche Anwendung der mathematischen Prinzipien gezeigt.

Sinnvoll wäre, wenn eine externe Person bei solchen Schwerpunkttagen herangezogen wird, da vermutlich nicht alle aufkommenden Fragen vom Lehrenden beantwortet werden können. Außerdem sind Schüler/innen oftmals motivierter bei der Sache. Einer außenstehenden Person gelingt es durch ihre Expertise die Schüler/innen in besonderem Maße für ihr Fachgebiet zu interessieren. Sie verfügt auch über Informationen aus dem praktischen Umfeld, die sich eine Lehrperson selbst bei bester Vorbereitung nicht aneignen kann.



Abb. 81 und Abb. 82: Schüler/innen beim Vermessen¹¹⁶

Zuerst werden die Lernenden in den Aufbau des Theodoliten, die Bedienung des Gerätes und in das richtige Halten von Reflektoren eingewiesen bevor sie die Geräte selbstständig ausprobieren dürfen. Bei Vermessungen werden oftmals Grenzpunkte in die Natur übertragen und vermarktet, aber auch die Punkte, auf denen das Gerät aufgestellt ist, werden mit einem Nagel markiert. Diese Standpunktmarkierungen stehen einerseits für eine spätere Korrekturmessung zur

Verfügung und andererseits können diese Positionen für folgende Messvorhaben in der nä-

¹¹⁶ SATOR 2009, S. 126

heren Umgebung wiederverwendet werden. Auch diese Arbeitsweise sollte den Schüler/innen näher gebracht werden. Die Schüler/innen haben idealerweise im Unterricht bereits die vermessungstechnischen Fachbegriffe verwendet und sind sich der Prinzipien von Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden oder von trigonometrischen Höhenmessungen bewusst. Diese Fertigkeiten werden unter anderem nun in Kleingruppen angewendet, sodass jeder Schüler/jede Schülerin die Chance erhält selbsttätig Messungen vorzunehmen und die Ergebnisse einzutragen.

Wie bereits erwähnt werden beim Wandern oder Skitourengehen die Methoden des Vorwärts- und Rückwärtseinschneidens angewendet. Benötigt werden dazu Karte und Kompass. Auch wenn heutzutage gerne mit GPS-Geräten navigiert wird, werden sie oft nicht allein eingesetzt, da einerseits die Akkulaufzeit des Gerätes zu gering ist, um während der gesamten Tour eingeschaltet zu bleiben und da andererseits der Kartenausschnitt doch eher klein und unübersichtlich ist. GPS-Geräte können aber sehr gut in Kombination mit Karte und Kompass eingesetzt werden. Diese Praktiken könnten nun gemeinsam vom Geographie- und Mathematik-Lehrenden an die Schüler/innen weitergegeben werden bei einem der Projekttag oder dem Wandertag.

Auch im Zuge von Sport- und Sprachwochen lässt sich ein fächerübergreifender Unterricht praktizieren. Orientieren im Gelände spielt sowohl beim Skifahren als auch beim Wandern oder Segeln eine wichtige Rolle. Dabei das Arbeiten mit Karte und Kompass einzubauen wäre in jedem Fall sinnvoll.

Eine ganz neue Erfahrung wäre es sowohl für Schüler/innen als auch Lehrer/innen, wenn sie bei ihrer Sprachwoche einen Tag mit einer Person aus der lokalen Bevölkerung verbringen würden, die im Vermessungswesen tätig ist. Möglicherweise könnten die Lernenden bei diesem Ausflug mit einer Schule vor Ort zusammenarbeiten. Somit rücken vermessungstechnische Aufgaben in der Natur, soziale Interaktion und Anwendung einer Fremdsprache in den Fokus.

7.4 Aufarbeiten der Projekttag bzw. der Exkursion

Wurden nun Messungen vorgenommen, so sollten diese dokumentiert werden und in einer Folgeinheit in der Schule eingebunden werden: Eine Berechnung des Vorwärtseinschneidens mit Hilfe der eigenen Messwerte bietet sich hier an. Das so erhaltene Ergebnis kann mit jenem vom Tachymeter verglichen werden und eventuell entstandene Abweichungen zu erklären versucht werden.

8 ZUSAMMENFASSUNG

Diese Arbeit hat sich mit der Vermessung, der Mathematik in der Vermessung und möglichen Anwendungen im Schulunterricht beschäftigt.

In der heutigen Zeit werden viele Bereiche des Lebens durch technische Geräte erleichtert, was auch auf das Vermessungswesen zutrifft. Seit Mitte des 20. Jahrhunderts hat sich hier sehr viel verändert. Als ein Beispiel ist die heute sehr verbreitete GPS-Funktion zu nennen, die sowohl der Vermessungstechnik als auch im täglichen Leben als Hilfsmittel zur Verfügung steht. Zur Orientierung in der Stadt wird somit kein Stadtplan mehr benötigt, denn ein modernes Mobiltelefon hat diesen bereits integriert und zeigt zusätzlich den eigenen Standort via GPS an. Durch die technischen Neuerungen werden auch die im Vermessungswesen eingesetzten Geräte immer genauer. Trotzdem kann in dieser Wissenschaft das Auftreten von Fehlern nicht völlig verhindert werden. Es wird jedoch versucht, gewisse Richtlinien einzuhalten, um die Größe der Messabweichungen in einem vorgegebenen Toleranzbereich zu halten. Fehlerzeigende Figuren, die vor einem Messvorgang angelegt werden, unterstützen das Vorhaben einen minimalen Fehler zu erhalten. Diese zeigen etwa, dass bei Einschneideverfahren ein rechtwinkeliges gleichschenkeliges Dreieck gebildet werden sollte, um die Messgenauigkeit zu vergrößern.

In den Erklärungen zu den Einschneideverfahren und der trigonometrischen Höhenmessung wurde besonderer Wert auf die einzelnen mathematischen Schritte gelegt und das Aufnehmen der Messdaten im Gelände eher vernachlässigt. Auf diesen Bereich wird später im Kapitel Umsetzung im Schulunterricht genauer eingegangen, da hier das Verknüpfen von Theorie und Praxis im Vordergrund steht.

Mathematische Voraussetzungen für das Anwenden der in dieser Arbeit beschriebenen Prinzipien der Vermessung sind nach Einführung der Winkelfunktionen im allgemeinen Dreieck in der Oberstufe gegeben. Dabei werden die vermessungstechnischen Besonderheiten wie eigene Notation, Messung der Winkel in Gon oder Vertauschung der Koordinatenachsen ausgeblendet. Die Methode des Rückwärtseinschneidens ist etwas komplexer aufgebaut, was eine Berechnung ohne spezielle Vorkenntnisse aus dem Bereich der Vermessung schwierig macht.

Neu für Schüler/innen im Zusammenhang mit den Winkelfunktionen ist das Arbeiten und Ermitteln von Koordinaten, da im Normalfall bei trigonometrischen Aufgaben nur Strecken- und Winkelberechnungen ohne Einbettung in ein Koordinatensystem durchzuführen sind. Trotzdem sollten Schüler/innen die Möglichkeit erhalten, Verfahren der Vermessungskunde in ihrer unverfälschten Art und Weise durchzuführen, um die verschiedenen Facetten der Mathematik zu sehen und um eine realitätsgetreue Anwendung kennen zu lernen.

Da vermessungstechnische Prinzipien in weiterer Folge auch im Gelände erprobt und von den Schüler/innen selbst durchgeführt werden, wird theoretisch Gelerntes in der Praxis angewendet, was einem optimalen Lernvorgang entspricht. Auch ein fächerübergreifendes Arbeiten ist hier gut möglich, da die Einschneideprinzipien etwa beim Wandern, Skitourengehen oder Segeln verwendet werden und somit gut kombinierbar mit den Unterrichtsfächern Geographie und Wirtschaftskunde sowie Bewegung und Sport sind.

Voraussetzung für eine möglichst umfassende Umsetzung ist die vorhandene Motivation von Lehrperson als auch von den Lernenden. Ohne Eigeninitiative lässt sich dieser vermes-

sungstechnische Schwerpunkt nicht umsetzen. Weiters spielt es eine Rolle, ob von Seiten des Kollegiums oder der Eltern Unterstützung für eine solche Vertiefung gegeben ist. Denn Ausflüge, Sportwochen oder Projektstage gelingen am besten, wenn alle an einem Strang ziehen. Den Lernerfolg verstärken kann auch eine schulfremde Person aus dem Vermessungswesen, die bei der praktischen Umsetzung maßgeblich beteiligt ist.

Wie im Lehrplan gefordert, braucht der Mathematik-Unterricht vielfach eine praktische Umsetzung. Damit gemeint ist nicht nur eine Umsetzung in Form von Anwendungsbeispielen, sondern auch das Kennenlernen der Mathematik außerhalb des Schulgebäudes. Die Vermessungskunde liefert eine dieser Anwendungsmöglichkeiten und sollte als Chance wahrgenommen werden, den Schüler/innen Mathematik im Alltag näher zu bringen.

9 LITERATURVERZEICHNIS

BIFIE - Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens (Hrsg.) (2013): Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe. Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung Teil 2.

Online-Ressource: https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_praxishandbuch_mathematik_teil2_2013-12-23.pdf - 8.1.2014

BURLET Edouard: Vermessung. Vorlesungsunterlagen Februar 2003. ETH Zürich (Forstliches Ingenieurwesen).

Online-Ressource: <http://www.lue.ethz.ch/docs/Skripte/vermessung.pdf> - 16.11.2013

EGGER Herbert / WALTER Gerhard / MÜLLER Thomas (1995): Beiträge zum Seminar des PI/AHS Vermessungswesen im Mathematikunterricht (privat, wurde nicht veröffentlicht)

EGGER Herbert / ETTL Helmut / GUGGENBERGER Walter / LEXE Ernst (2000): Vermessungskunde. - Veritas Verlag, Linz.

FISCHER Edwin (2007): Etwas vermessen. Vermessungstechnik leicht verständlich. – Wißner Verlag, Augsburg.

FUCHS Helmut / KOKAL Tatjana (2013): Vorlesungsunterlagen - Vermessungskunde für Forstwirte. Universität für Bodenkultur Wien.

Online-Ressource: http://www.rali.boku.ac.at/fileadmin/_/H85/H857/skripten/857142/Vermessungskunde-FW.pdf - 17.12.2013

GELHAUS Rolf / KOLOUCH Dieter (1991): Vermessungskunde für Architekten und Bauingenieure mit baupraktischen Anwendungen. – Werner-Verlag GmbH, Düsseldorf.

GRÜNDIG Lothar (2004): Vermessungskunde und Photogrammetrie für Bauingenieure. Vorlesungsskript WS 2004/05. Technische Universität Berlin (Fachgebiet Geodäsie und Ausgleichsrechnung).

Online-Ressource: http://kugel.bv.tu-berlin.de/typo3-igg/fileadmin/Daten_FGA/Bauing/VL_Skript.pdf - 14.12.13

LEHMANN Bernd (2011): Vermessung 1. Skript zur Vorlesung. Fachhochschule Trier (Fachrichtung Bauingenieurwesen).

MATTHEWS Volker (1997): Vermessungskunde Teil 2. Fachgebiete Architektur – Bauingenieurwesen - Vermessungswesen. – B.G. Teubner, Stuttgart.

MATTHEWS Volker (2003): Vermessungskunde 1. Lage-, Höhen- und Winkelmessungen. – B.G. Teubner, Wiesbaden.

NAVRATIL Gerhard / TWAROCH Florian: Vermessungstechnische Grundlagen. Vorlesungsunterlagen für SS 2007 (Präsentationsfolien). Technische Universität Wien.

URL: <ftp://ftp.geoinfo.tuwien.ac.at/twaroch/rplvtg/> - 16.11.2013

NIEMEIER Wolfgang (2008): Ausgleichsrechnung. Statistische Auswertemethoden. – Walter de Gruyter GmbH & Co KG, Berlin.

PETRAHN Günther (2011): Formelsammlung. Vermessungstechnik – Grundlagen. – Cornelsen Verlag, Berlin.

RIEDL Andreas / RIEDL Doris / MITTERMAIER Roland: Einführung in die Geoinformation (EGI). Vorlesungsunterlagen für WS 2010/11, SS 2011. Universität Wien.

RINSCHÉDE Gisbert (2003): Geographiedidaktik. – Ferdinand Schöningh Verlag, Paderborn.

SCHIRMER Herbert (1999): Karten, GPS und Projektionen. – In: Berg & Steigen 2/1999, S.10-13
Online-Ressource: <http://www.bergundsteigen.at/file.php/archiv/1999/2/10-13%20%28karten%2C%20gps%26projektionen%29.pdf> – 20.1.2013

SATOR Katharina (2009): Die Vermessung der Welt – Eine Realisierung im Trigonometrieunterricht. – Diplomarbeit an der Universität Wien.

SECK Friedrich (1981): Wissenschaftsgeschichte um Wilhelm Schickard. – J.C.B. Mohr (Paul Siebeck). Tübingen. (via GoogleBooks)
Online-Ressource: http://books.google.at/books?id=F-idGOW1OqoC&pg=PA118&lpg=PA118&dq=snellius+basisvergr%C3%B6%C3%9Fferungsnetz&source=bl&ots=TVsjOjGB5&sig=kYCMYTt1Axdq-B-_n19lvV_f6Rg&hl=de&sa=X&ei=IBCwUsi4MeiY4gSW6YCgDQ&ved=0CC8Q6AEwAA#v=onepage&q=snellius%20basisvergr%C3%B6%C3%9Fferungsnetz&f=false - 17.12.2013

SIELAND André (2011): Vermessungstechnisches Rechnen. Sammlung vermessungstechnischer Aufgaben mit ausführlichen Lösungen.- VDV Schriftenreihe, Band 27.- Verlag Chmielorz GmbH. Wiesbaden.

SITTE Wolfgang / WOHLSCHLÄGL Helmut (Hrsg.) (2001): Beiträge zur Didaktik des „Geographie und Wirtschaftskunde“-Unterrichts. – Institut für Geographie und Regionalforschung der Universität Wien.

SCHÜTZE Bettina / ENGLER Andreas / WEBER Harald (2007): Lehrbuch Vermessung. Grundwissen. - Schütze-Engler-Weber-VerlagGbr. Dresden.

WITTE Bertold / SCHMIDT Hubert (1991): Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen. – Verlag Konrad Wittwer GmbH. Stuttgart.

WÜRTL Walter (2002): 292° WNW. Teil 2: Praxis mit Kompass – die hohe Kunst. – In: Berg & Steigen 2/2002, S. 28-32
Online-Ressource: <http://www.univie.ac.at/cartography/lehre/hgex/literatur/28-32%20WNW,%20teil%202.pdf> – 19.12.2013

ZEISKE Karl (2000): Vermessen leicht gemacht. - Leica Geosystems AG, Heerbrugg.
Online-Ressource: <http://cms.uni-kassel.de/unicms/uploads/media/Vermessen-leicht-gemacht.pdf> - 9.12.2013

LEHRPLÄNE:

Allgemeiner Lehrplan der AHS

URL: vgl. URL: <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11668/11668.pdf> - 24.6.2013

Lehrplan für Mathematik der AHS Unterstufe

URL: <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf> - 8.1.2014

Lehrplan für Mathematik der AHS Oberstufe

URL: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf - 8.1.2014

Lehrplan für Geographie und Wirtschaftskunde der AHS Oberstufe

http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11858/lp_neu_ahs_06.pdf - 8.1.2014

Lehrplan für Geographie und Wirtschaftskunde der AHS Unterstufe

<http://www.bmukk.gv.at/medienpool/784/ahs9.pdf> - 8.1.2014

Lehrplan der Höheren Lehranstalt für Bautechnik

URL: <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/1004/htlbaut.doc> - 8.1.2014

SCHULBÜCHER:

BLEIER G. / LINDENBERG J. / LINDNER A. / STEPANCIK E. (2009): Dimensionen Mathematik 5. – Verlag E. Dörner GmbH. Wien.

BRAND C. / DORFMAYR A. / MISTLBACHER A. / NUSSBAUMER A. (2009): Thema Mathematik 5. – Veritas-Verlag. Linz.

BÜRGER H. / FISCHER R. / MALLE G. / KRONFELLNER M. / MÜHLGASSNER T. / SCHLÖGLHOFER F. (2000): Mathematik Oberstufe 2. – öbv *et* hpt Verlagsgesellschaft mbH & Co. Wien.

GÖTZ S. / REICHEL H.-C. / MÜLLER R. / HANISCH G. (2010): Mathematik 5. – Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. Wien.

MALLE G. / KOTH M. / WOSCHITZ H. / MALLE S. / SALZGER B. / ULOVEC A. (2010): Mathematik verstehen 5. – Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. Wien.

Sonstige Internetquellen:

URL: <http://www.duden.de/rechtschreibung/Theodolit> - 16.1.2014

URL: <http://www.sead.de/uploads/pics/tachymeter.jpg> - 16.12.2013

URL: <http://www.elkage.de/src/public/showterms.php?id=2710> – 16.12.2013

URL: <http://www.schriever.af.mil/news/story.asp?id=123260251> - 20.1.2013

URL: http://www.leica-geosystems.at/de/Leica-Viva-SmartStation_86610.htm - 16.12.2013

URL: http://kugel.bv.tu-berlin.de/typo3-igg/fileadmin/Daten_FGA/Bauing/VL_Skript.pdf, S. 11 -14.12.2013

URL: http://www.bev.gv.at/portal/page?_dad=portal&_pageid=713,1882219&_schema=PORTAL – 28.11.2013

URL: http://www.geodz.com/deu/d/images/2140_trigonometrische_hoehenbestimmung.png - 23.12.2013

URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Normalnull> - 26.12.2013

URL: <http://www.brooks-muenster-city-run.de/2011/06/vermessung-im-baustellenbereich/> - 19.1.2014

URL: <http://www.660er.de/Tenere/Bilder/spiegelkompass.jpg> - 23.1.2014

URL: http://www.auf-tour.info/wp-content/uploads/2012/01/Karte_Kompass-e1326479900888.jpg - 23.1.2014

URL:

http://www.bev.gv.at/pls/portal/docs/PAGE/BEV_PORTAL_CONTENT_ALLGEMEIN/0200_PRODUKTE/PDF/Punkt_karte_Lagefestpunkt_MGI_Skizze-Koordinate_A4_Einschaltpunkt.pdf - 19.1.2014

URL:

http://www.bev.gv.at/pls/portal/docs/PAGE/BEV_PORTAL_CONTENT_ALLGEMEIN/0200_PRODUKTE/PDF/Punkt_karte_Lagefestpunkt_MGI_Skizze-Koordinate_A4_Triangulierungspunkt.pdf - 19.1.2014

10 Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Astrolabium	10
Abb. 2: Groma	10
Abb. 3: Theodolit	12
Abb. 4: Verschiedene Libellenarten	13
Abb. 5: Achsen des Theodoliten	13
Abb. 6: Aufstellen des Stativs und Einpassen des Tachymeters	14
Abb. 7: Tachymeter	14
Abb. 8: Allgemeines Dreieck	16
Abb. 9: Rechtwinkeliges Dreieck.....	17
Abb. 10: Ähnliche Figuren F_1 und F_2	18
Abb. 11: Strahlensätze	19
Abb. 12: Allgemeine Bezeichnungen am Kreis.....	19
Abb. 13: Winkel im Kreis	20
Abb. 14: Rechtwinkeliges Dreieck.....	20
Abb. 15: Allgemeines Dreieck	21
Abb. 16: Grafische Darstellung von Erdoberfläche, Geoid und Ellipsoid.....	22
Abb. 17: Geoid.....	22
Abb. 18: Darstellung von rechtwinkligen Koordinaten und Polarkoordinaten	23
Abb. 19: Mathematisches Koordinatensystem.....	23
Abb. 20: Geodätisches Koordinatensystem	23
Abb. 21: Polarkoordinaten im Vermessungswesen	24
Abb. 22: Richtungswinkel	25
Abb. 23: Geographisches Gradnetz	25
Abb. 24: Skizze zur 1. Hauptaufgabe.....	27
Abb. 25: Skizze zur 2. Hauptaufgabe.....	28
Abb. 26: Auswirkungen der Koordinatendifferenzen auf den Richtungswinkel-Quadranten	29
Abb. 27: Richtungswinkel – Quadranteneinteilung	29
Abb. 28: Ebene Koordinatentransformation über zwei idente Punkte A und E	31
Abb. 29: Gauß'sche Glockenkurve – durch zwei Verteilungskurven dargestellt	41
Abb. 30: Zufällige und systematische Messfehler.....	42

Abb. 31: Angabe zum Beispiel	47
Abb. 32: Vorwärtsschnitt mit Sicht.....	49
Abb. 33: Vorwärtsschnitt ohne Sicht – ein zusätzlicher Punkt E.....	51
Abb. 34: Vorwärtsschnitt ohne Sicht – zwei zusätzliche Punkte E und F	51
Abb. 35: Dreieckswinkel und Richtungswinkel.....	52
Abb. 36: Gefährlicher Kreis	53
Abb. 37: Mögliche Messanordnung.....	53
Abb. 38 und Abb. 39: Günstige Punktanordnung.....	54
Abb. 40: Rückwärtsschnitt nach Cassini – geometrische Deutung.....	55
Abb. 41: Koordinatendifferenzen beim rechtwinkligen Dreieck ΔACM	55
Abb. 42: Bogenschnitt	59
Abb. 43: Distanzmessung mit Abweichungen Δs_1	61
Abb. 44: Abweichungen der Distanzmessung als Tangenten betrachtet	61
Abb. 45: Abweichungen bei zwei Distanzmessungen	61
Abb. 46: Fehlerzeigende Figur der Längenmessung	61
Abb. 47: Minimieren der fehlerzeigenden Figur durch einen dritten Festpunkt	62
Abb. 48: Mögliche Abweichungen bei der Winkelmessung	63
Abb. 49: Abweichungen können als Parallele zur Strecke s_1 wahrgenommen werden	63
Abb. 50: Fehlerzeigende Figur der Winkelmessung	63
Abb. 51: Verkleinern der fehlerzeigenden Figur durch einen dritten Punkt	64
Abb. 52: Beispiel-Skizze.....	65
Abb. 53: Beispiel-Skizze.....	66
Abb. 54: Beispiel-Skizze.....	68
Abb. 55: Skizze.....	70
Abb. 56: Trigonometrische Höhenübertragung.....	73
Abb. 57: Auswirkungen der Refraktion.....	73
Abb. 58: Korrektion wegen Erdkrümmung	74
Abb. 59: Trigonometrische Höhenmessung (inkl. Erdkrümmung)	75
Abb. 60: Geometrisches Nivellement und möglicher Blick durch die Linse	75
Abb. 61: Streckennivellement – Darstellung des Prinzips	76
Abb. 62: Trigonometrisches Nivellement	76
Abb. 63: Turmhöhenbestimmung mittels vertikalem Hilfsdreieck	78

Abb. 64: Turmhöhenbestimmung – vertikales Dreieck mit Hilfspunkten A und B auf beiden Seiten des Turms.....	79
Abb. 65: Turmhöhenbestimmung – horizontales Hilfsdreieck.....	80
Abb. 66: Kontrolle mittels leicht abgeänderter Strecke AB'	81
Abb. 67: Skizze zum Beispiel	82
Abb. 68: Beispiel-Skizze.....	83
Abb. 69: Beispiel-Skizze.....	84
Abb. 70: Beispiel-Skizze Schulbuch.....	92
Abb. 71: Beispiel-Skizze Schulbuch.....	92
Abb. 72: Gabelpunkt an der Häuserecke	94
Abb. 73: Vermessungsnagel am Gehsteig.....	94
Abb. 74: Knauf eines Kirchturms als Referenzpunkt.....	94
Abb. 75: Expert/innen des Vermessungswesens in der Schule	95
Abb. 76: Beispiel-Skizze.....	96
Abb. 77: Beispiel-Skizze.....	97
Abb. 78: Skizze zur Richtungswinkel -Berechnung.....	98
Abb. 79: Spiegelkompass.....	101
Abb. 80: Weiterdrehen des Kompasses bis die Nordstriche parallel zu den Gitterlinien der Karten stehen	101
Abb. 81 und Abb. 82: Schüler/innen beim Vermessen	102
Abb. 83: Mögliche Aufzeichnung einer Vermessungsanordnung	104

Tabellenverzeichnis

Tab. 1: Empirische Varianz und Standardabweichung bei bekanntem Erwartungswert	42
Tab. 2: Empirische Varianz und Standardabweichung bei unbekanntem Erwartungswert	43
Tab. 3: Korrekturen durch Refraktion	73
Tab. 4: Korrekturen aufgrund der Erdkrümmung	74
Tab. 5: Grundkompetenzen bei der standardisierten Reifeprüfung zum Themenbereich Trigonometrie	91

11 Anhang

11.1 Anhang 1

Lektionen – von Eveline Hasler

Schau während der Schulstunden
fleißig aus dem Fenster, Kind,
lerne die Lektionen des Kastanienbaums im Schulhof,
durch seine Äste hindurch
erfährst du vom Wesen der Wolken.
Merk dir die Lektion
der unscheinbaren
nach Brotsamen pickenden Vögel,
die mit einem Flügelschlag
über Mauern und Gittern sind.
Lerne
von den Dornen,
versteckt unter den Blättern der Hecke.
Merke: Die Fenster
sind das Wichtigste
in einem Schulzimmer!
Widerstehe der Versuchung
die Wirklichkeit deinem
Kopf anzupassen!

Quelle: Folien der LVA „Einführung in die Praxis des GW-Unterrichts“ bei Dobler Karin /Pichler Herbert (SS 2010)

11.2 Anhang 2

BEV - Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen



Bestelldokumentation

Punktkarte Höhenfestpunkt

Bestelldatum 01.08.2011

Bestellnummer 0000461786

Kundendaten BEV_KSK BEV_KSK
BEV_KSK
Schiffamtsgasse 1-3
1020 Wien
Österreich

Benutzer michaela.katzinger@bev.gv.at

Email michaela.katzinger@bev.gv.at

Kundennummer BEV_KSK

Auswahl Festpunkt Höhe 1 Objekt

Übersicht



© BEV 2011 Dieser Ausdruck ist gesetzlich geschützt. Die Vervielfältigung und Weitergabe unterliegen den Nutzungsbedingungen des BEV. Als Vervielfältigung gelten z.B. Ausdruck, Fotokopie, Mikroverfilmung, Digitalisierung und Speicherung auf Datenträger. DVR 0037028

See you: www.bev.gv.at

Abgabedatum: 01.08.2011, Bestellnr: 0000461786

Quelle:

http://www.bev.gv.at/pls/portal/docs/PAGE/BEV_PORTAL_CONTENT_ALLGEMEIN/0200_PRODUKTE/PDF/Punktkarte_Lagefestpunkt_MGI_Skizze-Koordinate_A4_Einschaltpunkt.pdf - 19.1.2014

Punktkarte
Präzisionsnivellement P 47599

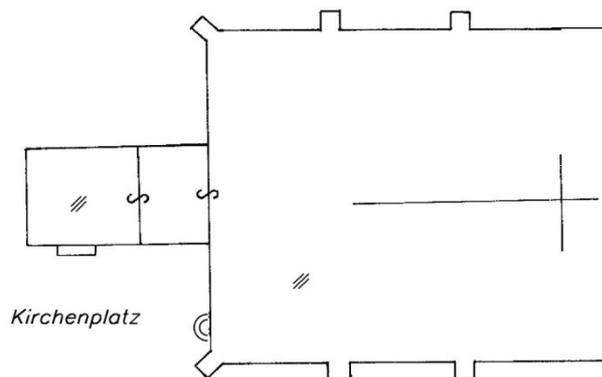
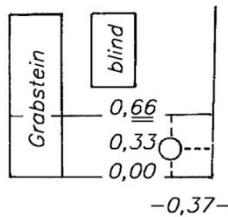


Liniennummer: P 896
 Auflage der Punktkarte: 2a
 Meridian: 31
 Bundesland: Kärnten
 Politische Gemeinde: Villach
 Gerichtsbezirk: Villach
 Vermessungsbezirk: Villach
 Letzte Begehung: 1979



h [m]	Stabilisierungsart		Höhenbezug	Op.Höhe	Messjahr	y _{GK} [m]	x _{GK} [m]	LKoord.	
501,424	Höhenbolzen horizontal		Scheitel		1979	39275,60	5163883,81	+/- 0,1 m	
Früh. PktNr.	Id. TP/EP	Id. ÖSGN	Sonst. Id.	ÖK50	KG-Nr.	KG-Name	Gst.Nr.	D2001	Mbl.
P 22737A	TP12-201H1			201	75454	Villach	.124	1969	4917-56/1
Messweg (Punkt Entfernung [m]):		P 47600 373							
Beschreibung:									

Lage- und Wegbeschreibung: Stadtpfarrkirche Villach



Bestelldokumentation

Punktkarte Lagefestpunkt MGI

Bestelldatum 01.08.2011

Bestellnummer 0000461830

Kundendaten BEV_KSK BEV_KSK
BEV_KSK
Schiffamtsgasse 1-3
1020 Wien
Österreich

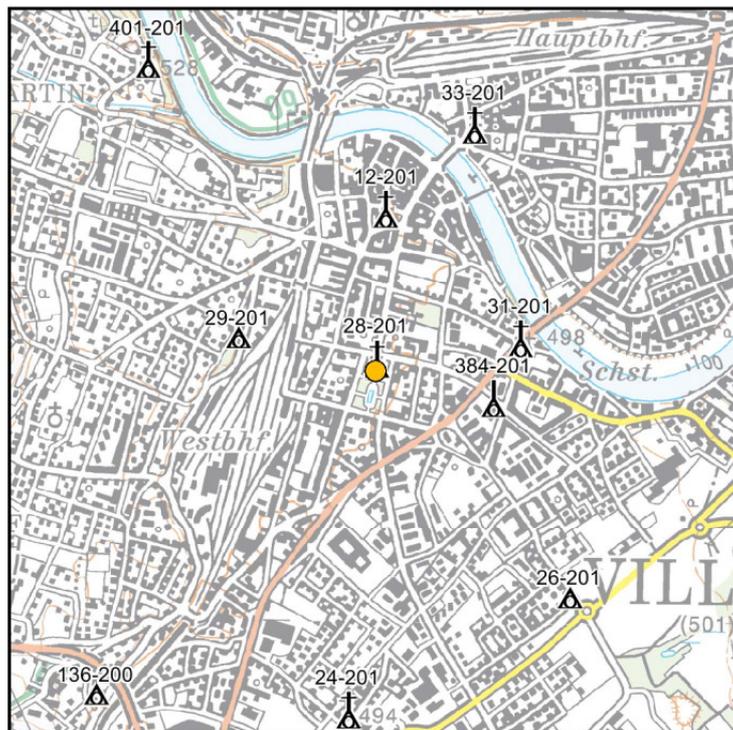
Benutzer michaela.katzinger@bev.gv.at

Email michaela.katzinger@bev.gv.at

Kundennummer BEV_KSK

Auswahl Triangulierungspunkt 1 Objekt

Übersicht



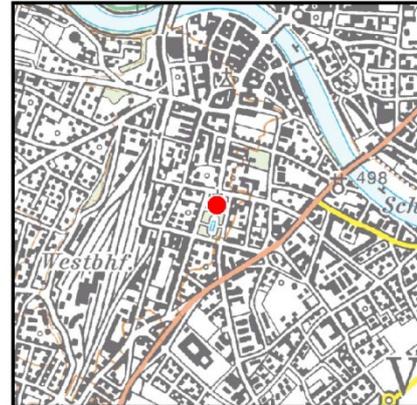
Quelle:

http://www.bev.gv.at/pls/portal/docs/PAGE/BEV_PORTAL_CONTENT_ALLGEMEIN/0200_PRODUKTE/PDF/Punktkarte_Lagefestpunkt_MGI_Skizze-Koordinate_A4_Triangulierungspunkt.pdf - 19.1.2014

Punktkarte Triangulierungspunkt 28-201



Punktname: VILLACH, EVANGELISCHE KIRCHE
 Ordnung: 5
 Auflage der Punktkarte: 11
 Meridian: 31
 Bundesland: Kärnten
 Politische Gemeinde: Villach
 Gerichtsbezirk: Villach
 Vermessungsbezirk: Villach
 Punkthinweis: EGH
 Letzte Begehung: 16.04.2008



KZ	Stabilisierung, Bezug	J.Lage	y _{GK} [m]	x _{GK} [m]	OP.Lage	h [m]	Op.Höhe	SHW	
A1	KT-STEIN/STEIN OBERFLÄCHE	1987	39239,56	5163349,82	K/1987	501,76	K/2005		
B2	VERS.-BOLZEN/2/OBERFLÄCHE	1952	39258,49	5163403,16	K/34	502,14	K/2005		
H1	HB/41998/SCHEITEL	1952	39244,21	5163348,42	K/34	502,28	K/2005		
T1	KNAUF/ROSETTE	1986	39241,54	5163345,25	K/1986	545,36	K/2005		
KZ	KG-Nr.	KG-Name				KG-Nr. Gst.Nr.	Mbl.		
A1	75454	Villach				75454 361/14	4917-56/3		
B2	75454	Villach				75454 374/2	4917-56/3		
H1	75454	Villach				75454 361/14	4917-56/3		
T1	75454	Villach				75454 .642	4917-56/3		
Orientierungspunkte	Punktname	Pkt.Art	KZ	Stab.Art	AL	Jahr	SHW		
12-201	VILLACH, PFARRKIRCHE ST.JAKOB	TP	T1	KNAUF/MITTE	10	1986			

Lage- und Wegbeschreibung: Vom Autobahnhof in südl. Richtung bis zur Pestalozzistraße, diese in östl. Richtung weiter bis zum Punkt

Teil 1 / 1

