Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (http://www.ub.tuwien.ac.at).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/).

Diplomarbeit

Anwendung der Duration im Asset-Liability-Management eines Lebensversicherungsunternehmens

ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien
unter Anleitung von

Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold und
Mag. Christoph Krischanitz

durch

Susanne Schallhart
0625254, 066405
Salzburgerstraße 21b
5230 Mattighofen

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Die wichtigsten Formen der Lebensversicherung **3**
2.1 Kapitalversicherung 3
2.2 Leibrente 3

3 Risiken des Lebensversicherungsunternehmens **4**

4 Die Duration **5**
4.1 Herleitung und Definition der Duration 5
4.2 Duration einer Anleihe in Abhängigkeit ihrer Faktoren 12
4.2.1 Zusammenhang zwischen der Duration und dem aktuellen Zinssatz 13
4.2.2 Zusammenhang zwischen der Duration und der Höhe der Kuponzahlungen 13
4.2.3 Zusammenhang zwischen der Duration und der Häufigkeit der Kuponzahlungen 14
4.2.4 Zusammenhang zwischen der Duration und der Laufzeit 14

5 Zinsimmunisierung mittels Duration **16**

6 Voraussetzungen für die Macaulay-Duration **18**
6.1 Eine flache Zinskurve 18
6.2 Zinsänderung zum Zeitpunkt $t = 0^+$ 19
6.3 Einmalige Zinsänderung 20
6.4 Parallel Verschiebung der Zinskurve 21
6.5 Reinvestition der Zahlungen 21

7 Die Duration eines Anleihenportfolios **21**

8 Erweiterung des Duration-Konzepts **23**
8.1 Modifizierte Duration 23

9 Herleitung und Definition der Convexity **26**
9.1 Interpretationsmöglichkeit der Convexity 29
9.2 Convexity einer Anleihe in Abhängigkeit ihrer Faktoren . . . 29
9.2.1 Der Zusammenhang zwischen Convexity und Duration 30
9.2.2 Der Zusammenhang zwischen Convexity und der Verteilung der Kuponzahlungen 31

10 Immunisierung unter Berücksichtigung der Convexity **32**

11 Zwei Berechnungsmethoden des Durationmismatches 34
11.1 erste Methode 34
11.2 zweite Methode 34

12 Immunisierung mittels Nullkuponanleihen 35
12.1 Immunisierung einer Erlebensfallversicherung 35
12.1.1 Immunisierung von M_1 mittels Nullkuponanleihen . . 36
12.1.2 Immunisierung von M_2 mittels Nullkuponanleihen . . 36
12.2 Immunisierung einer Todesfallversicherung 38
12.2.1 Immunisierung von M_1 mittels Nullkuponanleihen . . 39
12.2.2 Immunisierung von M_2 mittels Nullkuponanleihen . . 40

13 Immunisierung mittels Anleihen 41
13.1 Immunisierung einer Erlebensfallversicherung 41
13.1.1 Immunisierung von M_1 mittels Anleihen 42
13.1.2 Immunisierung von M_2 mittels Anleihen 45
13.2 Immunisierung einer Todesfallversicherung 48
13.2.1 Immunisierung von M_1 mittels Anleihen 48
13.2.2 Immunisierung von M_2 mittels Anleihen 50

14 Vergleich der Strategien 52
14.1 Vergleich bei einer Erlebensfallversicherung 52
14.1.1 Immunisierung von M_1 54
14.1.2 Immunisierung von M_2 55
14.2 Vergleich bei einer Todesfallversicherung 56
14.2.1 Immunisierung von M_1 58
14.2.2 Immunisierung von M_2 59

15 Vergleich bei verschiedenen Zinsszenarien 60
15.1 Erlebensfallversicherung 61
15.1.1 steigende Zinsen 61
15.1.2 fallende Zinsen 63
15.1.3 variierende Zinsen 66
15.2 Fazit des Vergleiches 72

LiteraturLiteraturverzeichnis 73

1 Einleitung

Die momentane Niedrigzinsperiode stellt für viele Lebensversicherungsunternehmen ein großes Problem dar. Für Lebensversicherungsunternehmen wird es besonders in diesen Niedrigzinsperioden schwierig, die garantierten Versicherungsleistungen am Markt zu erwirtschaften, da der garantierte Rechnungszins älterer Verträge über dem aktuellen Zinsniveau steht.

Eine wesentliche Aufgabe des Asset-Liability-Managements eines Lebensversicherungsunternehmens ist es demnach, eine geeignete Anlagestrategie zu finden, um die dauernde Erfüllbarkeit der Verpflichtungen aus den Versicherungsverträgen zu gewährleisten.

Zu Beginn dieser Arbeit werden die wichtigsten Lebensversichungsformen sowie die wesentlichen Risiken eines Lebensversicherungsunternehmens dargestellt. Eine dieser Risiken ist das Zinsänderungsrisiko. Um dieses Risiko besser handhaben zu können, gibt es das Konzept der Duration, welches von Frederic Macaulay entwickelt wurde. Die Herleitung wird in Kapitel 3 behandelt. In Anlehnung an [13] werden in Kapitel 4 die Abhängigkeiten der Duration besprochen.

In Kapitel 5 wird gezeigt, wie man mittels der Duration eine Zahlung gegen eine Zinsänderung absichern, also immunisieren kann.
Die Bedingungen für die Verwendung der Macaulay-Duration werden in Anlehnung an [12] in Kapitel 6 diskutiert.
Da Lebensversicherungsunternehmen in der Regel nicht nur in eine, sondern in viele verschiedene Anleihen investieren, ist es notwendig, die Duration eines gesamten Anleihenportfolios bestimmen zu können. Die Berechnung davon wird in Kapitel 7 dargestellt, welches in Anlehnung an [13] erstellt wurde.

John Hicks entwickelte Mitte der 40-er Jahre das Konzept der modifizierten Duration. Dieses wird in Kapitel 8 behandelt. Mittels der modifizierten Duration lässt sich der Wert einer Anleihe nach einer kleinen Zinsänderung relativ gut vorhersagen.
Um jedoch den zukünftigen Wert einer Anleihe besser als nur mit der modifzierten Duration vorhersagen zu können, bedarf es einem weiteren Konzept, und zwar der Convexity. Dieses wird in Kapitel 9 besprochen. In Anlehnung an [12] wird auch eine Interpretationsmöglichkeit der Convexity sowie die Convexity in Abhängigkeit ihrer Faktoren dargestellt.
In Kapitel 10 wird in Anlehung an [13] ihre Anwendung bei der Immunisierung eines Portfolios besprochen.

Bei Lebensversicherungsunternehmen kommt es zu einem Durationmismatch,

da im Allgemeinen die Duration der Prämienzahlung von der Duration der Verpflichtungen verschieden ist. In Kapitel 11 werden zwei unterschiedliche Berechnungsmethoden dieses Mismatch dargestellt.
In den folgenden Kapitel wird versucht, durch geeignete Anlage in verschiedene Anleihen den Mismatch zu korrigieren. In Kapitel 12 wird versucht den Mismatch mittels Nullkuponanleihen, in Kapitel 13 mittels normaler Anleihen zu minimiern.
In den letzten beiden Kapitel wird überprüft, welche der beiden Berechnungsmethoden des Mismatch und die daraus resultierende Anlagestrategie der anderen überlegen ist.

2 Die wichtigsten Formen der Lebensversicherung

Wie aus dem Jahresbericht 2010 des Versicherungsverbandes Österreichs hervorgeht, bildet die Lebensversicherung mit einem Anteil von 45,1% die größte Position an der gesamten Versicherungswirtschaft.[1] Damit zählt die Lebensversicherung zu einem der wichtigsten Versicherungstypen.
Wie bei jeder Versicherungsform übernimmt das Versicherungsunternehmen gegen Bezahlung einer Prämie oder eines Einmalerlages ein Risiko des Versicherungsnehmers. Bei der Lebensversicherung handelt es sich um das Risiko der Tragung der Kosten im Falle des Erlebens eines bestimmten Zeitpunktes oder des Todesfalles vor einem bestimmten Zeitpunkt. Die Lebensversicherung bietet eine Vielzahl an verschiedenen Produkten an. Nachfolgend sind ein paar dieser Produkte angeführt.

2.1 Kapitalversicherung

- Erlebensfallversicherung
  Bei dieser Versicherungsform erhält der Versicherungsnehmer die Versicherungssumme, sofern er den im Vorhinein festgelegten Zeitpunkt erlebt.

- Todesfallversicherung
  Bei der Todesfallversicherung zahlt das Versicherungsunternehmen im Todesfall des Versicherungsnehmers vor einem, zu Beginn der Versicherung festgelegten Zeitpunkt, die Todesfallsumme an die Erben des Versicherungsnehmers aus.

- gemischte Versicherung
  Hierbei handelt es sich um eine Kombination der Er- und Ablebensversicherung. Das heißt, stirbt der Versicherungsnehmer vor dem festgelegten Zeitpunkt, so erhalten seine Erben die Todesfallsumme, erlebt der Versicherungsnehmer jedoch diesen Zeitpunkt, so erhält er die Erlebensfallsumme. Im einfachsten Fall sind Todes- und Erlebensfallsumme ident.

2.2 Leibrente

Bei der Leibrente erhält der Versicherungsnehmer ab einem vertraglich festgelegten Zeitpunkt periodische Zahlungen bis der Vertrag endet oder der Versicherungsnehmer stirbt. Beginnen diese Zahlungen nicht mit dem Versicherungsbeginn spricht man von einer aufgeschobenen Leibrente. Die periodischen Zahlungen sind entweder vorschüssig (also zu Beginn der Periode) oder nachschüssig (also am Ende der Periode).

[1] vlg. [15]

3 Risiken des Lebensversicherungsunternehmens

Lebensversicherungsunternehmen müssen sich einigen Risiken stellen. Die wesentlichen Risiken sind:

- das biometrische Risiko
  Das Sterblichkeits- bzw. Langlebigkeitsrisiko der Versicherungsnehmer ist durch die Verwendung guter Sterbetabellen relativ gut kalkulierbar. Auch durch die aufsichtsrechtlich verbindliche Verwendung von Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung ist dieses Risiko gut abgesichert.

- das Stornorisiko
  Wie sich die Versicherungsnehmer verhalten ist von vielen verschiedenen Faktoren abhängig und daher auch nicht leicht kalkulierbar. Stornowahrscheinlichkeiten beruhen auf Erfahrungswerten der Versicherungsunternehmen und werden in Abhängigkeit von dem Alter, der Versicherungsdauer bzw. der bisherigen Versicherungsdauer und dem Zins angegeben.[2] Der Grund warum bei dem Stornorisiko auch der Zins eine Rolle spielt, ist folgender: Bei rasch ansteigenden Marktzinsen kann der Versicherungsnehmer durch die Anlage des Rückkaufswertes seiner Versicherung am Markt höhere Erträge erzielen, als er durch die Gewinnbeteiligung und den niedrigeren Garantiezins des Versicherungsunternehmens erwirtschaften könnte. Sinkt jedoch der Marktzins, so ist es für den Versicherungsnehmer vorteilhafter die garantierte, höhere Verzinsung und die Gewinnbeteiligung des Versicherungsunternehmens dem niedrigeren Marktzins vorzuziehen und somit seine Versicherung nicht zu stornieren.

- das Kapitalanlagerisiko [3]
  Versicherungsunternehmen müssen zur Wahrung der Interessen der Versicherungsnehmer über genügend Kapital verfügen. Dieses Kapital ist dem Deckungsstock zugewiesen.
  Somit ist das Kapitanlagerisiko, das Risiko, nicht über ausreichende Mittel zu den erforderlichen Zeitpunkten zu verfügen. Unter das Kapitalanlagerisiko fallen unter anderem:

  - Kreditrisiko
  - Konzentrationsrisiko
  - Liquiditätsrisiko
  - Aktienkursrisiko
  - Währungsrisiko

[2] vgl. http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/stornorisiko.html
[3] vgl. [7]

– das Zinsänderungsrisiko
Dieses Risiko ist für das Lebensversicherungsunternehmen wohl das relevanteste, vor allem in Zeiten eines niedrigen Zinsniveaus. Beim Zinsänderungsrisiko handelt es sich um das Risiko, die Garantieverzinsung nicht erwirtschaften zu können. Da es sich bei Lebensversicherungsverträgen um sehr langfristige Verträge handelt, müssen relativ langfristige Prognosen über die Zinsentwicklung getroffen werden, die natürlich sehr fehleranfällig sind. Der Garantiezins darf aber auch nicht zu niedrig sein, damit die Lebensversicherung für den Versicherungsnehmer noch rentabel bleibt.

§78 Versicherungsaufsichtsgesetz über geeignete Vermögenswerte besagt:
§ 78. (1) Zur Bedeckung der versicherungstechnischen Rückstellungen sind Vermögenswerte, die zu folgenden Kategorien gehören, innerhalb der in Art. 22 Abs. 1 und 4 der Richtlinie 92/49/EWG (ABl. Nr. L 228 vom 11. August 1992, S. 1) und in Art. 24 Abs. 1 und 4 der Richtlinie 2002/83/EG angeführten Grenzen geeignet:

- Schuldverschreibungen und andere Geld- und Kapitalmarktpapiere,
- Aktien und andere Anteile mit schwankendem Ertrag,
- Anteile an Organismen für gemeinsame Anlagen in Wertpapieren und anderen gemeinschaftlichen Kapitalanlagen,
- Darlehen und Kredite,
- Grundstücke und grundstücksgleiche Rechte,
- Guthaben bei Kreditinstituten und Kassenbestände.

Aus dem Jahresbericht des Versicherungsvereines Österreichs geht weiters hervor, dass 2010 Schuldverschreibungen 46,5% der Kapitalanlagen österreichischer Versicherungsunternehmen bildeten. Das Zinsänderungsrisiko wirkt sich vor allem auf diese festverzinslichen Wertpapiere aus. Daher wird auch ersichtlich, dass das Zinsänderungsrisiko eine zentrale Stellung in dem Asset-Liability-Managemten von Lebensversicherungsunternehmen haben sollte.

4 Die Duration

4.1 Herleitung und Definition der Duration

Der Begriff der Duration wurde 1938 von Frederic Macaulay geprägt und 1939 von John Hicks (1939) weiterentwickelt. Die Duration ist eine Größe

zur Beurteilung der Auswirkung des Zinsänderungsrisikos auf festverzinsliche Wertpapiere wie zum Beispiel Anleihen.

Auf Anleihen wirkt sich eine Änderung des Marktzinses folgendermaßen aus:

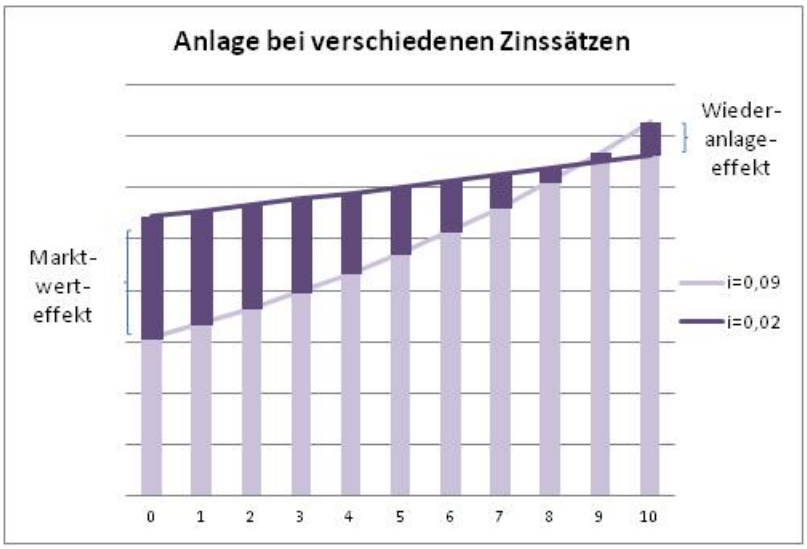
1. der Marktwert/Kurs der Anleihe ändert sich
2. der Wiederveranlagungswert der Kuponzahlungen ändert sich

Die noch ausstehenden Zahlungen einer Anleihe werden mit dem Marktzins diskontiert. Wenn der Marktzins steigt, werden die restlichen Zahlungen der Anleihe stärker diskontiert und folglich sinkt dessen Marktwert. Sinkt jedoch der Marktzins, so werden diese Zahlungen weniger stark diskontiert und man erhält einen höheren Marktwert.

Die Kuponzahlungen der Anleihe werden zum jeweiligen Zahlungszeitpunkt zu dem dann aktuellen Marktzins angelegt. Demzufolge steigt bei einer Marktzinserhöhung auch der Wiederanlagewert und vice versa.

Zusammengefasst bedeutet das, dass bei einer Marktzinserhöhung der Marktwert sinkt, jedoch der Wiederanlagewert steigt. Bei sinkendem Marktzins steigt der Marktwert und der Wiederanlagewert sinkt.

Die Duration ist nun jener Zeitpunkt, zu welchem sich diese gegenläufigen Veränderungen des Marktwertes und des Wiederanlagewertes kompensieren.[4]



[4] vgl. [8]

Um sich diesen Sachverhalt besser veranschaulichen zu können, folgt nun ein Beispiel:[5]
Der Present Value PV zum Zeitpunkt 0 einer Anleihe mit einer Laufzeit von n Jahren, und Kuponzahlungen C_t zu den Zeitpunkten t ist:

$$PV_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t}$$

wobei i der Marktzins ist.
Der Present Value zum Zeitpunkt m ist definiert durch:

$$PV_m = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^{(t-m)}}$$

Verändert sich dieser Marktzins nun um δ zu $i+\delta$ ergibt sich als neuer Present Value zum Zeitpunkt 0:

$$PV_0^* = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i+\delta)^t}.$$

Der Present Value zum Zeitpunkt m ist definiert durch:

$$PV_m^* = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i+\delta)^{(t-m)}}.$$

Aus obigen Überlegungen muss es nun einen Zeitpunkt D geben, zu welchem die Werte PV_D und PV_D^* ident sind. Für diesen Zeitpunkt $D(\delta)$ muss also gelten:

$$PV_{D(\delta)} = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^{(t-D(\delta))}} = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i+\delta)^{(t-D(\delta))}} = PV^*_{D(\delta)}$$

Herausheben von $(1+i)^{D(\delta)}$ bzw. $(1+i+\delta)^{D(\delta)}$ sowie umformen und anschließendes logarithmieren führt zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(1+i)^{D(\delta)} * \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t} &= (1+i+\delta) * \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i+\delta)^t} \\
\left(\frac{1+i}{1+i+\delta}\right)^{D(\delta)} &= \frac{\sum_{t=1}^{n} C_t/(1+i+\delta)^t}{\sum_{t=1}^{n} C_t/(1+i)^t} \\
D(\delta) &= \ln\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} C_t/(1+i+\delta)^t}{\sum_{t=1}^{n} C_t/(1+i)^t}\right) * \frac{1}{\ln\left(\frac{1+i}{1+i+\delta}\right)} \\
D(\delta) &= \frac{\ln(PV_0^*/PV_0)}{\ln((1+i)/(1+i+\delta))}
\end{aligned}$$

[5] vgl. [13]

Bei einer 10-jährigen Anleihe mit jährlichen Kuponzahlungen der Höhe 3, und einem Nennwert von 100 ergeben sich somit bei einem Zinssatz von $i = 2\%$ und Zinserhöhungen von $\delta = \{-1\%; +1\%; +5\%; +7\%\}$ folgende Durations:

δ	Zeitpunkt $D(\delta)$
-1%	$8,876$
$+1\%$	$8,817$
$+5\%$	$8,689$
$+7\%$	$8,621$

Dieses Beispiel zeigt, je größer die Zinserhöhung, desto früher tritt der Zeitpunkt ein, bei welchem sich der Marktwerteffekt und der Wiederveranlagungseffekt aufheben. Jetzt stellt sich die Frage zu welchem Zeitpunkt der Anleger nun gegen eine beliebige Zinsveränderung geschützt ist beziehungsweise ob es einen Zeitpunkt gibt, zu welchem der Wert der Anleihe trotz Zinsänderung mindestens dem Wert der Anleihe entspricht, wenn es keine Zinsänderung gegeben hätte?

Betrachten wir nun die Werte der Anleihe zu den Zeitpunkten $D(\delta = \{-1\%; +1\%; +5\%; +7\%\})$, wenn sich der Zinssatz zu Beginn auf $i = \{1\%; 2\%; 3\%; 7\%; 9\%\}$ ändert:

Zeitpunkt $D(\delta)$	$i = 1\%$	$i = 2\%$	$i = 3\%$	$i = 7\%$	$i = 9\%$
8,876	129,9254	**129,9249**	130,0000	131,0912	132,1389
8,817	129,8491	**129,7731**	129,7734	126,5673	131,4688
8,689	129,6838	**129,4446**	129,2834	129,4431	130,0265
8,621	129,5961	**129,2704**	129,0238	128,8489	129,2668

Die dick geschriebene Spalte bezieht sich auf den zu Beginn aktuellen Zinssatz von 2%. Man sieht, dass bei dem Zeitpunkt $D(\delta) = 8,876$ nur der Anleihenwert bei 1% also $\delta = -1\%$ unter dem von 2% liegt. Im nächsten Zeitpunkt $D = 8,817$ sind die Anleihenwerte bei $1\%, 3\%, 5\%$ und 9% alle über dem Anleihenwert bei 2%. Das bedeutet, dass sich der ideale Zeitpunkt zwischen diesen beiden Werten befinden muss. Um diesen Wert erhalten zu können muss nun der Grenzwert $D = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln(PV_0^*/PV_0)}{\ln((1+i)/(1+i+\delta))}$ berechnet werden:

$$D = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln(PV_0^*/PV_0)}{\ln((1+i)/(1+i+\delta))}$$

Für $\delta = 0$ ergibt sich die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Um den Grenzwert für die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ berechnen zu können, benutzen wir die Regel von de l'Hospital, da sowohl der Nenner als auch der Zähler differenzierbar sind.

$$\begin{aligned} D &= \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln(PV_0^*/PV_0)}{\ln((1+i)/(1+i+\delta))} \\ &= \lim_{\delta \to 0} \frac{(\ln(PV_0^*/PV_0)'}{(\ln((1+i)/(1+i+\delta))'} \\ &= \lim_{\delta \to 0} \frac{(PV_0/PV_0^*) * (PV_0^*)'/PV_0}{(1+i+\delta)/(1+i) * ((1+i)/(1+i+\delta))'} \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $'$ die erste Ableitung. Die Ableitungen berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} (PV_0^*)' &= (\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i+\delta)^t})' \\ &= \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i+\delta)^t} * \frac{-t}{1+i+\delta} \\ \left(\frac{1+i}{1+i+\delta}\right)' &= -\frac{1+i}{(1+i+\delta)^2} \end{aligned}$$

Setzt man diese Ergebnisse nun in obige Gleichung ein, erhält man:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{(PV_0/PV_0^*) * \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i+\delta)^t} * \frac{-t}{1+i+\delta}/PV_0}{(1+i+\delta)/(1+i) * \left(-\frac{1+i}{(1+i+\delta)^2}\right)}$$

Nach kürzen von PV_0, $-1/(1+i+\delta)$ und einsetzten der Formel von PV_0^* erhalten wir:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t*C_t}{(1+i+\delta)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i+\delta)^t}}$$

Bilden des Limes ergibt:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t*C_t}{(1+i)^t}}{PV_0}$$

Nun lässt sich für das obige Beispiel der Zeitpunkt D bestimmen:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{10} \frac{t*C_t}{(1+2\%)^t}}{PV_0}$$

Wobei $C_t = 3$ für alle $t = \{1, 2, ..., 9\}$ und $C_{10} = 103$.

$$\begin{aligned} PV_0 &= \sum_{t=1}^{10} \frac{C_t}{(1+2\%)^t} = 108,98 \\ D &= 8,847 \end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $D = 8,847$ würden sich bei einer Zinsänderung von $\delta = \{-1\%; +1\%; +5\%; +7\%\}$ im Zeitpunkt $t = 0^+$ folgende Werte für die Anleihe ergeben:

Zeitpunkt	$i = 1\%$	$i = 2\%$	$i = 3\%$	$i = 7\%$	$i = 9\%$
D =8,847	129,8878	**129,8501**	129,8883	130,8336	131,8083

Das bedeutet, wenn man den Zeitpunkt D ermittelt hat, so kennt man den minimalen Wert der Anleihe zu diesem Zeitpunkt, sofern nur eine Zinsänderung im Zeitpunkt $t = 0^+$ eintritt.
Dass im Zeitpunkt D bei einem aktuellen Zinssatz von i wirklich ein Minimum erreicht wird, kann folgendermaßen gezeigt werden:
Es bezeichne wie weiter oben bereits erwähnt PV_m den Barwert zum Zeitpunkt m bei einem Zins von i. Um zu zeigen, dass diese Funktion PV_m ein Minimum besitzt, muss gezeigt werden, dass für die zweite Ableitung gilt $(PV_m)'' > 0$.

$$\begin{aligned} PV_m &= \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^{(t-m)}} \\ \frac{\partial PV_m}{\partial(1+i)} &= \sum_{t=1}^{n} \frac{(m-t) * C_t}{(1+i)^{(t-m+1)}} \\ \frac{\partial^2 PV_m}{\partial(1+i)^2} &= \sum_{t=1}^{n} \frac{(m-t) * (m-t-1) * C_t}{(1+i)^{(t-m+2)}} \end{aligned}$$

Jetzt ist zu zeigen, dass der Ausdruck $\frac{\partial^2 PV_m}{\partial(1+i)^2}$ größer als 0 ist:

- $\frac{C_t}{(1+i)^{(t-m+2)}}$ ist für $C_t > 0$ immer größer als 0.
- Ist $m \neq t$ und $m \neq t+1$ so ist $(m-t) * (m-t-1) > 0$, da entweder beide Klammern größer bzw. kleiner Null sind und somit das Produkt größer 0 ist.
- Ist $m = t$ oder $m = t+1$ so ist $(m-t) * (m-t-1) = 0$. Für den Fall, dass obige Summe nur aus einer einzigen Zahlung besteht, welche zum Zeitpunkt $m = t$ bzw. $m = t+1$ stattfindet, so gibt es nur genau diesen Zeitpunkt, zu welchem ein Extremwert existieren kann. Und somit gilt für diese beiden Fälle, dass $D = m = t$ bzw. $D = m = t+1$. Setzt man diesen Zahlungsstrom bestehend aus einer einzigen Zahlung zum Zeitpunkt m in obige Formel für die Duration ein ergibt sich ebenfalls $D = m$.

Für alle übrigen Fälle ist somit die zweite Ableitung größer als 0. Um nun den Zeitpunkt des Minimums berechnen zu können, muss die erste Ablei-

tung gleich 0 gesetzt und nach m aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial PV_m}{\partial(1+i)} &= \sum_{t=1}^{n} \frac{(m-t)*C_t}{(1+i)^{(t-m+1)}} = 0 \\ m*(1+i)^{m-1}*\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{(1+i)^t} &= (1+i)^{m-1}\sum_{t=1}^{n}\frac{t*C_t}{(1+i)^t} \end{aligned}$$

Kürzen durch $(1+i)^{m-1}$ und einsetzten von $PV_0 = \sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{(1+i)^t}$ liefert:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{t*C_t}{(1+i)^t}}{PV_0} \\ \Rightarrow m &= D \end{aligned}$$

Somit wird im Zeitpunkt D das Minimum erreicht.
Eine andere Überlegung um den Zeitpunkt D zu ermitteln ist folgende[6]: Zum Zeitpunkt D zeigt der Present Value PV_D keine Reaktion auf eine Zinsänderung. Folglich muss $\frac{\partial PV_D}{\partial(1+i)} = 0$ gelten. Setzt man nun für $PV_D = PV_0 * (1+i)^D$ ein, so erhält man:

$$\frac{\partial PV_D}{\partial(1+i)} = \frac{\partial\left(PV_0*(1+i)^D\right)}{\partial(1+i)} = \frac{\partial PV_0}{\partial(1+i)}*(1+i) + PV_0*D*(1+i)^{D-1}$$

Daraus folgt für den Zeitpunkt D:

$$D = -\frac{\partial PV_0}{\partial(1+i)} * \frac{(1+i)}{PV_0}$$

Die Ableitung berechnet sich folgendermaßen:

$$\frac{\partial PV_0}{\partial(1+i)} = \frac{\partial\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{(1+i)^t}}{\partial(1+i)} = \frac{-1}{1+i}\sum_{t=1}^{n}\frac{t*C_t}{(1+i)^t}$$

Setzt man dieses Ergebnis nun in obiger Gleichung ein erhält man:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{t*C_t}{(1+i)^t}}{PV_0}$$

[6] vgl. [5]

Eine andere Bezeichnung für die Duration ist die Bruttozinselastizität des Barwertes. Dass die Duration einer Elastizität entspricht sieht man an der Darstellung $D = -\frac{\partial PV_0}{\partial(1+i)} * \frac{(1+i)}{PV_0}$.

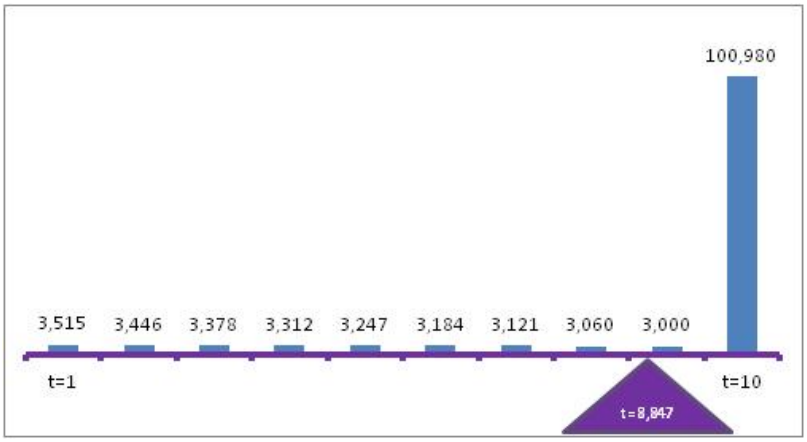
Mittels der Duration lässt sich auch die relative Änderung von PV_0, bei einer Änderung des Zinssatzes approximieren. Da folgende Beziehung gilt:

$$D = -\frac{\partial PV_0}{\partial(1+i)} * \frac{(1+i)}{PV_0} \approx -\frac{\partial PV_0/PV_0}{\partial(1+i)/(1+i)}$$

und somit:

$$\frac{\partial PV_0}{PV_0} \approx -D * \frac{\partial(1+i)}{(1+i)}$$

Manchmal wird die Duration auch als mittlere Kapitalbindungsdauer oder mittlere Restbindungsdauer bezeichnet. Zinst man alle Zahlungen vor der Duration bis zum Zeitpunkt der Duration auf, so entspricht das dem diskontierten Wert aller Zahlungen nach der Duration. Somit ist bis zum Zeitpunkt der Duration die Hälfte aller Zahlungen bereits zurückgeflossen. Um das zu veranschaulichen wird die Duration gerne als Unterstützungspunkt einer Waage dargestellt:



4.2 Duration einer Anleihe in Abhängigkeit ihrer Faktoren

Die Duration einer Anleihe ist abhängig von:[7]

- dem aktuellen Zinssatz i
- der Höhe der Kuponzahlungen
- der Häufigkeit der Kuponzahlungen und
- der Laufzeit.

[7] vgl. [13]

4.2.1 Zusammenhang zwischen der Duration und dem aktuellen Zinssatz

Um den Zusammenhang zwischen dem Zinssatz i und der Duration D zu sehen, ist in folgender Tabelle die Duration der 10-jährigen Anleihe mit jährlichen Kuponzahlungen C_t der Höhe 3 und einem Nennwert von 100, bei verschiedenen aktuellen Zinssätzen i dargestellt.

i	1%	2%	3%	5%	10%	15%	20%	30%
D	8,9054	8,8469	8,7861	8,6573	8,2939	7,8738	7,4055	6,3814

Folglich ist der Zeitpunkt der Duration umso früher, je höher der aktuelle Zinssatz ist. Dies lässt sich auch beweisen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial i} &= \frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{t*C_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{(1+i)^t}}\right) \\
&= \frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{-1}{1+i}*\frac{t^2*C_t}{(1+i)^t}*\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{(1+i)^t} - \sum_{t=1}^{n}\frac{-1}{1+i}*\frac{t*C_t}{(1+i)^t}*\sum_{t=1}^{n}\frac{t*C_t}{(1+i)^t}}{\left(\sum_{t=1}^{n}C_t/(1+i)^t\right)^2} \\
&= \frac{1}{(1+i)*PV_0^2}\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{-t^2*C_t}{(1+i)^t}*\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{(1+i)^t} + \left(\sum_{t=1}^{n}\frac{t*C_t}{(1+i)^t}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Sind alle Kuponzahlungen C_t, alle Zeitpunkte t und der Zinssatz i positiv, so ist der Ausdruck in obiger Klammer negativ. Somit ist $\frac{\partial D}{\partial i} < 0$. Daraus folgt, je höher der Zinssatz i ist, desto früher ist der Zeitpunkt der Duration.

Bei einem höheren Zinssatz werden die später anfallenden Zahlungen stärker diskontiert und die bisherigen Zahlungen werden stärker aufgezinst, dadurch verschiebt sich, wenn man sich die Duration wieder als Unterstützungspunkt einer Waage vorstellt, der Unterstützungspunkt, also die Duration, nach links und tritt somit früher ein, als bei einem niedrigeren Zinssatz.

4.2.2 Zusammenhang zwischen der Duration und der Höhe der Kuponzahlungen

Verändert man bei obiger 10-jährigen Anleihe zum Nennwert 100 die Höhe der Kuponzahlungen C_t bei einem Zinssatz von 2% so ergeben sich folgende Werte für die Duration D:

C_t	1	3	5	7	10	15	20	30
D	9,5398	8,8469	8,3502	7,9766	7,5627	7,1015	6,7986	6,4250

Das bedeutet, je höher die Kuponzahlungen, desto früher ist der Zeitpunkt der Duration. Dies lässt sich dadurch erklären, dass bei höheren Kuponzahlungen der Unterschied zwischen der Summe der Kuponzahlungen und der

Zahlung des Nominalbetrages kleiner wird. Dadurch fällt die Zahlung des Nominalbetrages nicht mehr so stark ins Gewicht und folglich ist die Duration, also der Unterstützungspunkt der Waage, bei höheren Kuponzahlungen früher als bei niedrigeren.

4.2.3 Zusammenhang zwischen der Duration und der Häufigkeit der Kuponzahlungen

Treten die Kuponzahlungen nicht einmal, sondern s-mal pro Jahr ein, so verändert sich die Duration der Beispielanleihe folgendermaßen:

Kuponhöhe	$s=1$	$s=2$	$s=4$	$s=6$
3	8,847	8,046	7,129	6,620
$3/s$	8,847	8,780	8,747	8,736
$3/(\sum_{t=0}^{s-1}(1+i)^{t/s})$	8,847	8,785	8,754	8,744

Daraus ist abzulesen, dass bei häufigeren Kuponzahlungen die Duration sinkt. Stellt man sich wieder die Waage vor, so bedeuten häufigere Kuponzahlungen, dass Teile der „Kupongewichte“ weiter nach links gegeben werden, da diese Teile ja zeitlich früher zur Auszahlung gelangen, und somit der Unterstützungspunkt demnach auch weiter nach links rücken muss um die Waage im Lot zu halten.

4.2.4 Zusammenhang zwischen der Duration und der Laufzeit

Verändert man bei der Anleihe mit Kuponhöhe 3 und Nominalwert 100 bei einem Zins von 2% die Laufzeit n, so ergeben sich folgende Werte für die Duration D.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1,00	1,97	2,91	3,83	4,72	5,59	6,44	7,26	8,06	8,85

Hier ist ersichtlich, dass eine längere Laufzeit eine höhere Duration zur Folge hat. Außerdem zeigt sich, dass, wenn sich die Laufzeit um 1 Jahr erhöht, sich die Duration um weniger als 1 Jahr erhöht.
Zwischen zwei Kuponzahlungsterminen nimmt die Duration linear ab, da folgendes gilt:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t*C_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t}}$$

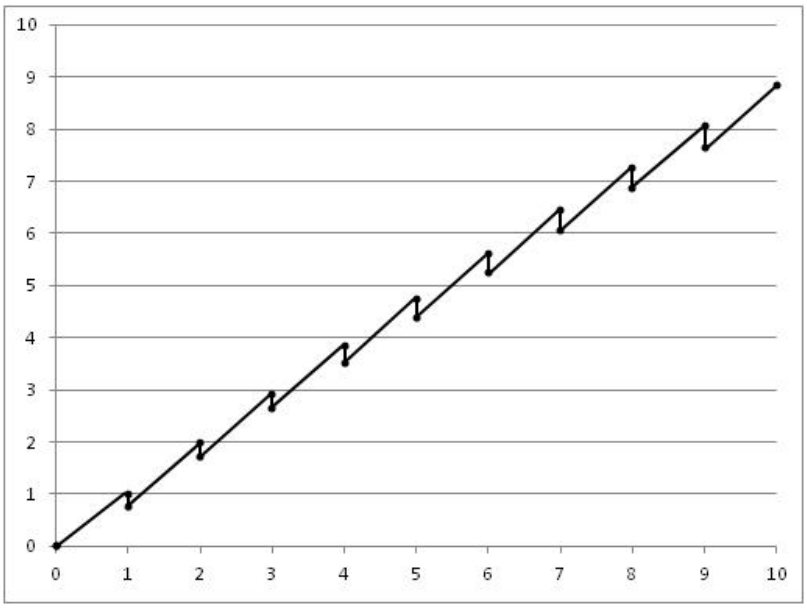
Nach einer Zeitspanne von $s < 1$ ergibt sich für die Duration D_s zur Zeit s:

$$D_s = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{(t-s)*C_t}{(1+i)^{t-s}}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^{t-s}}}$$

Kürzen durch $(1+i)^s$ ergibt

$$\begin{aligned} D_s &= \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{(t-s)*C_t}{(1+i)^{t}}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^{t}}} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t*C_t}{(1+i)^{t}}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^{t}}} - s * \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^{t}}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^{t}}} \\ D_s &= D - s \end{aligned}$$

Das heißt, dass sich kurz vor dem Kuponzahlungstermin die Duration auf rund $D-1$ verringert. Zum Kuponzahlungstermin fällt die Kuponzahlung weg. Somit sinkt der Barwert sprungartig, was sich in einer Erhöhung des Wertes der Duration zu diesem Zeitpunkt äußert. Trotz dieser Erhöhung bleibt der Wert der Duration kleiner als zum Zeitpunkt der letzten Kuponzahlung. Folgende Graphik veranschaulicht diesen Zusammenhang zwischen Duration und Laufzeit.



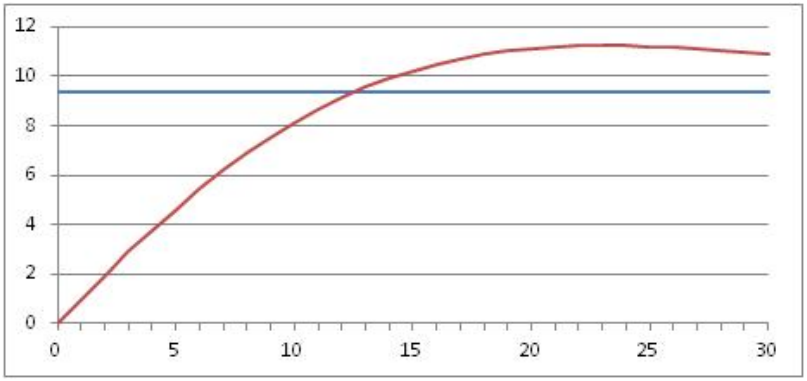
Was passiert, wenn die Restlaufzeit gegen 0 oder gegen ∞ strebt?
Strebt die Restlaufzeit gegen 0, so gilt:

$$\lim_{n\to 0} D = \lim_{n\to 0} \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t*C_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t}} = 0$$

Strebt die Restlaufzeit gegen ∞, so gilt:

$$\lim_{n\to \infty} D = \lim_{n\to \infty} \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t*C_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t}} = \frac{1+i}{i}$$

Somit ist die Duration im Regelfall zwischen 0 und $(1+i)/i$. Ausnahmen sind beispielsweise Nullkuponanleihen, deren Duration immer der Restlaufzeit entspricht und im Falle von sehr niedrigen Kuponzahlungen bei einem höheren Zinsniveau steigt der Wert der Duration bei steigender Restlaufzeit über den Wert von $(1+i)/i$ auf ein Maximum und nähert sich danach dem Grenzwert für $n \to \infty$ von oben an. Als Beispiel sei angenommen, dass der aktuelle Zins $i = 12\%$ und die Kuponzahlungen $C_t = 3$ seien. Dann ergibt sich bei wachsender Restlaufzeit der Verlauf der Duration folgendermaßen:



5 Zinsimmunisierung mittels Duration

Mittels der Duration kennt man zum Zeitpunkt D den minimalen Wert eines Zahlungsstromes. Durch diese Erkenntnis lässt sich ein Zahlungsstrom gegen eine Zinsänderung absichern, also immunisieren.

Dadurch lässt sich zum Beispiel beim Kauf einer Anleihe zumindest der beim Kauf aktuelle Zins erwirtschaften, egal ob der Zins kurz nach dem Kauf sinkt oder steigt. Aber auch für Unternehmen beziehungsweise Investoren ist die Duration ein wichtiges Hilfsmittel um das Zinsänderungsrisiko minimieren zu können. Angenommen ein Unternehmen hat eine Verbindlichkeit zu einem zukünftigen exakt definierten Zeitpunkt zu leisten und möchte sie, egal

ob der Zins sinkt oder steigt, durch die Bildung eines Portfolios sicher tilgen können.

Würde das Unternehmen einfach den Barwert der Verbindlichkeit anlegen, wobei der Barwert mit dem aktuellen Zinssatz berechnet wird, so könnte eine Zinssenkung dazu führen, dass nicht genügend Kapital erwirtschaftet wird um die Verbindlichkeit vollständig begleichen zu können. Bleibt jedoch der Zinssatz unverändert oder steigt dieser, so kann bei einem Anstieg des Zinssatzes ein Überschuss erzielt werden und bei konstantem Zins kann zumindest die Verbindlichkeit bezahlt werden.

Um auch bei einer Zinssenkung über genügend Kapital zu verfügen kann man die Feststellungen der Duration nutzen. Wählt das Unternehmen nun sein Portfolio so, dass die Duration des Portfolios genau der Zeit bis zur Tilgung der Verbindlichkeit entspricht, so ist das Unternehmen selbst bei einer sofortigen Zinssenkung vor Zahlungsschwierigkeiten der Verbindlichkeit geschützt. Zum Zeitpunkt der Zahlung der Verbindlichkeit hat das Unternehmen bei dieser Anlagestrategie mindestens das erforderliche Kapital, da ja zum Zeitpunkt der Duration zumindest dieser Wert erreicht wird, egal wie sich der Zinssatz entwickelt. Somit ist das Unternehmen gegen eine Zinsänderung immunisiert. In diesem Fall ist die Duration des Portfolios gleich der Duration der Verbindlichkeit, welche wie eine Nullkuponanleihe genau der Laufzeit entspricht, also genau der Zeit bis zur Fälligkeit der Zahlung der Verbindlichkeit.

Entspricht die Duration des Portfolios nicht der Duration der Verbindlichkeit, kommt es also zu einem Durationmismatch, so ist das Unternehmen nicht mehr oder nur in geringerem Ausmaß gegen eine Zinsänderung geschützt. Ist die Duration des Portfolios größer als die Duration der Verbindlichkeit, so fällt bei einer Zinserhöhung die Verringerung des Marktwertes des Portfolios stärker ins Gewicht, als es die bessere Wiederveranlagungsmöglichkeit ausgleichen könnte. Somit kann in diesem Fall das Unternehmen die Verbindlichkeit nicht abbezahlen. Bei einer Zinssenkung überwiegt die Zunahme des Marktwertes des Portfolios den Verlust durch die schlechteren Wiederveranlagungsbedingungen. Folglich kann das Unternehmen im Falle einer Zinssenkung sogar einen Überschuss erwirtschaften.

Ist die Duration des Portfolios jedoch kleiner als die der Verbindlichkeit, so ist bei einer Zinssenkung die Erhöhung des Marktwertes des Portfolios nicht groß genug um die schlechteren Wiederveranlagungsbedingungen auszugleichen. Demnach ist das Unternehmen auch in diesem Fall nicht fähig, die Verbindlichkeit vollständig zu tilgen. Bei einer Zinserhöhung ist der Verlust durch den geringeren Marktwert weniger groß als der Gewinn durch die besseren Wiederveranlagungsbedingungen, also kann auch hier unter

Umständen ein Gewinn erzielt werden.

Entspricht die Duration des Portfolios der Duration der Verbindlichkeit, so kann, sofern keine weiteren Zinsänderungen auftreten, zumindest die Verbindlichkeit bezahlt werden.
Das bedeutet nun, dass durch die richtige Anlage, also die Bildung eines Portfolios dessen Duration genau der Duration der Verbindlichkeiten entspricht, ein Unternehmen gegen das Zinsänderungsrisiko geschützt ist. Das Zinsrisiko des Unternehmens ist demnach praktisch null. Stimmen die Duration des Portfolios und der Verbindlichkeiten nicht überein, besteht also ein Durationmismatch so ist das Zinsrisiko größer als null. Das Zinsrisiko wird umso größer, je größer dieser Duration-Mismatch ist.

6 Voraussetzungen für die Macaulay-Duration

Um das Konzept der Macaulay-Duration anwenden zu können, müssen einige Bedingungen erfüllt sein. Diese Voraussetzungen sind:

- eine flache Zinskurve
- die Zinsänderung passiert unmittelbar nach $t = 0$, also zum Zeitpunkt $t = 0^+$
- es findet nur eine Zinsänderung statt
- die Zinsänderung ist eine Parallelverschiebung der Zinskurve
- alle Zahlungen werden bis zum Zeitpunkt der Duration, also bis $t = D$, reinvestiert

6.1 Eine flache Zinskurve

Aus der Darstellung der Macaulay-Duration $D = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t*C_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t}}$ ist ersichtlich, dass der Zinssatz i unabhängig von den Zeitpunkten t ist. Es wird somit unterstellt, dass $i = i_t$ für alle t.

Da die Zinskurve in der Realität nicht immer flach ist, wurde das Konzept der Duration weiterentwickelt. Diese Weiterentwicklung der Macaulay-Duration heißt effektive Duration, welche etwas später behandelt wird.

Der Zinssatz beziehungsweise die Zinskurve wird in der Macaulay-Duration als Diskontierungsprozess eingesetzt. Damit die Macaulay-Duration als ein geeignetes Maß zur Messung des Basisrisikos verwendet werden kann, müssen

sich die Zinssätze von Anleihen mit verschiedenen Durations um denselben Wert verändern. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn es sich um eine Parallelverschiebung der Zinskurve handelt. Es kann gezeigt werden, dass dieser Fall nur eintreten kann, wenn es sich um eine flache Zinskurve handelt.
Verwendet man anstatt diskreter Verzinsung eine stetige, so kann der Present Value einer zweijährigen Anleihe geschrieben werden als

$$PV_0 = \sum_{t=1}^{2} C_t * e^{-n_t * t} = \sum_{t=1}^{2} C_t * e^{-y * t}$$

Wobei
n_t = stetiger Zins einer Nullkuponanleihe mit Laufzeit t und
y = stetiger Zins der Anleihe.
Der Zusammenhang zwischen diskretem Zins $h(0,t)$ und stetigem Zins $H(0,t)$ über das Intervall 0 bis t ist folgender:

$$H(0,t) = \ln\left(1 + h(0,t)\right)$$

Angenommen es würde sich nicht um eine flache Zinskurve handeln. Es gelte also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n_1 < y < n_2$. Kommt es nun zu einer Zinsänderung der Größe $dn_1 = dy = dn_2$, so ändert sich der Wert V der Anleihe wie folgt:

$$dV = -\sum_{t=1}^{2} C_t * t * e^{-n_t * t} dn_t = -\sum_{t=1}^{2} C_t * t * e^{-y * t} dy$$

Durch umformen erhält man:

$$PV_0 + \frac{dV}{dy} = C_2 * e^{-2 * n_t} = C_2 * e^{-2 * y}$$

Da diese Gleichung von der Barwertgleichung abgeleitet wurde, muss $n_2 = y$ gelten, was aber im Widerspruch zu $y < n_2$, also einer nicht flachen Zinsstruktur, steht. Damit die Macaulay-Duration als ein geeignetes Maß verwendet werden kann, muss also von einer flachen Zinskurve ausgegangen werden. Ansonsten wäre eine Veränderung des Diskontierungszinssatzes nur teilweise abhängig oder gar unabhängig von der Veränderung des yield to maturity.

6.2 Zinsänderung zum Zeitpunkt $t = 0^+$

Damit ein Portfolio beziehungsweise eine einzelne Anleihe gegen eine Zinsänderung immunisiert ist, muss der Planungszeitraum der Duration des Portfolios

beziehungsweise der Anleihe entsprechen. Würde die Zinsänderung erst zu einem späteren Zeitpunkt als $t = 0^+$ stattfinden, so wäre das Portfolio nicht mehr immunisiert.

Wie weiter oben schon dargestellt wurde, nimmt die Duration eines Portfolios nicht linear mit der Zeit ab, sofern es sich nicht um lauter Nullkuponanleihen handelt. Findet die Zinsänderung nicht sofort zu Beginn statt, so kommt es im nächsten Zeitpunkt zu einem Mismatch.

Nehmen wir wieder die Anleihe mit Kuponzahlungen der Höhe $C_t = 3$, einem Zinssatz von $i = 2\%$ und einem Nominalwert von 100. Wird weiters angenommen, dass sich der Zins zumindest bis zum Zeitpunkt $t = 1$ nicht ändert, so ergibt sich folgende Tabelle:

	$t = 0$	$t = 1$
Duration	8,8469	8,0646
Planungszeitraum	8,8469	7,8469
Mismatch	0	0,2177

Das bedeutet, dass man nicht gegen eine Zinsänderung im Zeitpunkt $t = 1$ immunisiert ist.
Um auch gegen eine Zinsänderung im Zeitpunkt $t = 1$ immunisiert zu sein, müsste der Planungszeitraum der Duration der Anleihe im Zeitpunkt $t = 1$ entsprechen. Will man, dass man immer immunisiert ist, so müsste die Duration stetig berechnet werden und der Planungszeitraum stetig angepasst werden beziehungsweise müsste man stetig neue Anleihen finden, welche die Investition immunisieren. Dadurch fallen natürlich Transaktionskosten an und somit ist die stetige Anpassung nur theoretisch möglich.

6.3 Einmalige Zinsänderung

Mittels der Macaulay-Duration kann man ein Portfolio gegen eine einmalige Zinsänderung zum Zeitpunkt $t = 0^+$ immunisieren. Aus obiger Tabelle erkennt man, dass man gegen eine Zinsänderung zum Zeitpunkt $t = 0^+$ geschützt ist. Kommt es nun zum Beispiel zu einer weiteren Zinsänderung zum Zeitpunkt $t = 1$, dann entspricht zum Zeitpunkt $t = 1$ die Duration der Anleihe nicht mehr dem Planungszeitraum und somit ist man nicht mehr immunisiert. Auch hier müsste eine Anpassung des Portfolios durchgeführt werden um weiterhin immunisiert zu sein. Durch diese Transaktionen fallen wieder Kosten an und daher ist eine häufige Anpassung mitunter nicht wirklich effektiv.

6.4 Parallel Verschiebung der Zinskurve

Ähnlich der Bedingung der flachen Zinskurve wird für die Zinsänderung angenommen, dass $i + \delta = i_t + \delta$ für alle t.
Somit bleibt auch die Voraussetzung der flachen Zinskurve erhalten, da durch eine Parallelverschiebung die Form der Zinskurve erhalten bleibt.
In der Realität kommt es kaum zu einer Parallelverschiebung der Zinskurve, da kurzfristige Zinssätze wesentlich volatiler als langfristige sind. Damit ist die Parallelverschiebung der Zinskurve als stochastischer Prozess des Zinssatzes nicht wirklich realitätsnah.

6.5 Reinvestition der Zahlungen

Würden die Zahlungen nicht bis zum Zeitpunkt $t = D$ wieder veranlagt, so könnte man bei einer Zinserhöhung nicht von den besseren Wiederveranlagungsbedingungen profitieren. Außerdem wird durch die Wiederveranlagung sicher gestellt, dass alle Zahlungen vom selben Zins abhängen.

7 Die Duration eines Anleihenportfolios

Um eine Investition immunisieren zu können ist es notwendig, eine Anleihe zu finden, deren Duration dem Planungshorizont entspricht. Die Suche nach der richtigen Anleihe kann mitunter sehr schwierig sein oder gar unmöglich. Um dennoch die Investition zu immunisieren versucht man durch Portfoliobildung die Duration dem Planungshorizont anzugleichen.

Um die Duration eines Portfolios berechnen zu können, betrachten wir zuerst die Duration eines Portfolios bestehend aus zwei Anleihen A_1 und A_2 mit Zahlungen $C_{1,t}$ und $C_{2,t}$ und Laufzeiten von n und m. Die Barwerte dieser beiden Anleihen sind somit:

$$PV_{1;0} = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_{1,t}}{(1+i)^t} \qquad \text{und} \qquad PV_{2;0} = \sum_{t=1}^{m} \frac{C_{2,t}}{(1+i)^t}$$

Um den Barwert des Portfolios P zu bestimmen, müssen diese beiden Barwerte lediglich addiert werden. Somit ergibt sich als Barwert des Portfolios:

$$PV_{P,0} = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_{1,t} + C_{2,t}}{(1+i)^t} = PV_{1,0} + PV_{2,0}$$

Die Duration der Anleihe A_1 und der Anleihe A_2 berechnet sich folgendermaßen:

$$D_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t*C_{1,t}}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_{1,t}}{(1+i)^t}} \qquad \text{und}$$

$$D_2 = \frac{\sum_{t=1}^{m} \frac{t*C_{2,t}}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{m} \frac{C_{2,t}}{(1+i)^t}}$$

Die Duration der beiden Anleihen zusammen ist:

$$\begin{aligned} D_P &= \frac{\sum_{t=1}^{\max(n,m)} \frac{t*(C_{1,t}+C_{2,t})}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{\max(n,m)} \frac{(C_{1,t}+C_{2,t})}{(1+i)^t}} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{\max(n,m)} \frac{t*(C_{1,t}+C_{2,t})}{(1+i)^t}}{PV_{P,0}} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t*C_{1,t}}{(1+i)^t}}{PV_{P,0}} + \frac{\sum_{t=1}^{m} \frac{t*C_{2,t}}{(1+i)^t}}{PV_{P,0}} \end{aligned}$$

Erweitern des ersten Terms mit $PV_{1,0}/PV_{1,0}$ und des zweiten Terms mit $PV_{2,0}/PV_{2,0}$ liefert

$$\begin{aligned} D_P &= \frac{PV_{1,0}}{PV_{1,0}} * \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t*C_{1,t}}{(1+i)^t}}{PV_{P,0}} + \frac{PV_{2,0}}{PV_{2,0}} * \frac{\sum_{t=1}^{m} \frac{t*C_{2,t}}{(1+i)^t}}{PV_{P,0}} \\ &= \frac{PV_{1,0}}{PV_{P,0}} * D_1 + \frac{PV_{2,0}}{PV_{P,0}} * D_2 \end{aligned}$$

Die Duration des Portfolios ist somit eine gewichtete Summe der einzelnen Durations der Anleihen. Der jeweilige Gewichtungsfaktor ist der Anteil am gesamten Barwert also in unserem Fall $PV_{1,0}/PV_{P,0}$ beziehungsweise $PV_{2,0}/PV_{P,0}$. Das heißt, dass die Duration des Portfolios eine Linearkombination der einzelnen Durations ist. Dadurch lässt sich, durch die Veränderung des Anteils der Anleihen am gesamten Barwert, die Duration des Portfolios auf jeden Wert zwischen den Durations D_1 und D_2 verändern.

Möchte man, dass die Duration des Portfolios exakt s ist, wobei für s gilt $s \in [D_1, D_2]$, so muss folgende Gleichung gelten:

$$D_P = s = w_1 * D_1 + w_2 * D_2 \qquad \text{mit} \qquad w_1 + w_2 = 1$$

Für w_1 und w_2 ergibt sich folgende Gleichung

$$w_2 = 1 - w_1 \qquad \text{und} \qquad w_1 = \frac{s - D_2}{D_1 - D_2}$$

Besteht das Portfolio aus k Anleihen so gilt:

$$D_P = w_1 * D_1 + w_2 * D_2 + \cdots + w_k * D_k \qquad \text{und}$$

$$\sum_{l=1}^{k} w_l = 1$$

Handelt es sich um mehr als zwei Anleihen, so gibt es in der Regel mehr als nur eine Linearkombination um die gewünschte Duration des Portfolios zu erreichen. Weitere Nebenbedingungen können natürlich zu einer Einschränkung dieser Möglichkeiten führen.

8 Erweiterung des Duration-Konzepts

Mit Hilfe der Macaulay-Duration lässt sich ein Zeitpunkt berechnen, zu welchem man den minimalen Wert der Anleihe kennt. Will man aber ein Maß, welches mehr die Auswirkung des Zinses auf den Bond abbildet, so muss die Macaulay-Duration modifiziert werden. John Hicks entwickelte Mitte der 40er Jahre unabhängig von Macaulay ein solches Maß, nämlich die modifizierte Duration. Er konnte nachweisen, dass sich bei einer gegebenen kleinen, beziehungsweise infinitesimalen Zinsänderung der Wert der Anleihe proportional zu seiner Duration entwickelt.

8.1 Modifizierte Duration

Douglas klassifizierte die modifizierte Duration als ein Maß für die Sensitivität einer Anleihe auf eine Veränderung des Marktzinses.
Die modifizierte Duration D_{mod} kann folgendermaßen hergeleitet werden[8]:

$$PV_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t}$$

$$-\frac{\partial PV_0}{\partial(1+i)} = -\frac{\partial \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t}}{\partial(1+i)} = \frac{1}{1+i} * \sum_{t=1}^{n} \frac{t * C_t}{(1+i)^t}$$

Division durch PV_0 führt zu

$$-\frac{\partial PV_0}{\partial(1+i)} * \frac{1}{PV_0} = \frac{1}{1+i} * \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t*C_t}{(1+i)^t}}{PV_0}$$

[8] vgl. [12, 5]

Die rechte Seite dieser Gleichung ist definiert als die modifizierte Duration D_{mod}.

$$D_{mod} = \frac{1}{1+i} * \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t*C_t}{(1+i)^t}}{PV_0}$$

Man kann erkennen, dass der letzte Bruch gerade der Macaulay-Duration entspricht. Somit lässt sich die modifizierte Duration auch einfach darstellen als $D_{mod} = \frac{D}{1+i}$.
Mittels der modifizierten Duration lässt sich die relative Änderung des Barwertes PV_0 bei einer absoluten Änderung des Zinssatzes berechnen.

Bezeichnen mit Δi und ΔPV_0 die absoluten Änderungen des Zinssatzes i beziehungsweise des Barwertes PV_0, dann gilt näherungsweise:

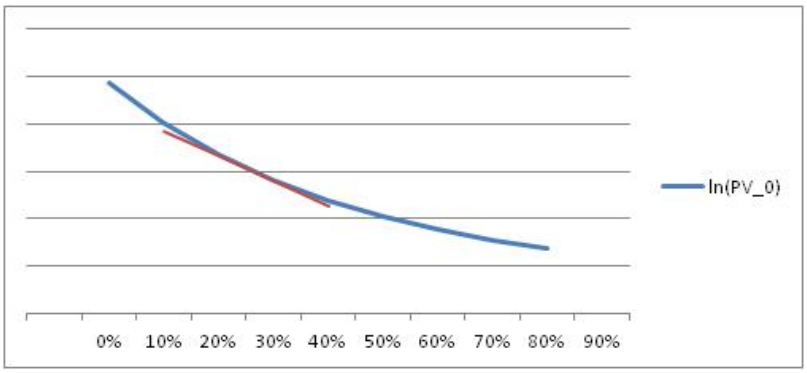
$$\frac{\Delta PV_0}{PV_0} \approx -D_{mod} * \Delta i$$

Man erhält also mittels der modifizierten Duration die prozentuale Veränderung des Barwertes PV_0 bei einer Zinsänderung von Δi.

Meisten wird die Darstellung $D_{mod} = D/(1+i)$ verwendet. Die modifizierte Duration wird nicht wie die Macaulay-Duration in Jahren angegeben, sondern in Prozent. Sie gibt an, um wie viel Prozent sich der Barwert ändert, wenn sich der Zins um einen Prozentpunkt verändert.
Um die modifizierte Duration darzustellen, ist es leichter sie als die negative Ableitung der logarithmierten Barwertfunktion zu sehen:[9]

$$D_{mod} = -\frac{\partial(\ln(PV_0))}{\partial i} = -\frac{1}{PV_0} * \frac{\partial PV_0}{\partial i}$$

Folgende Graphik zeigt diesen Zusammenhang:

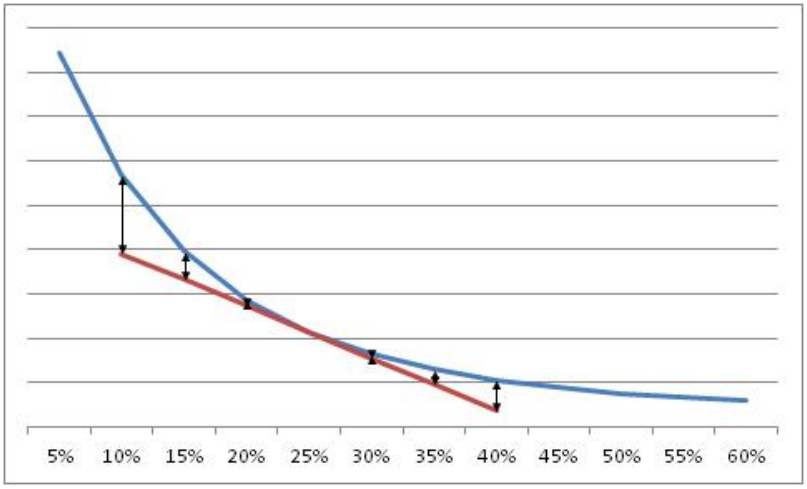


[9] vgl. [8]

Verwendet man wie weiter oben angeführt die Approximation $\frac{\Delta PV_0}{PV_0} \approx -D_{mod} * \Delta i$ zur Bestimmung des Barwertes nach einer Zinsänderung von Δi, so führt dies zu folgendem neuen Barwert:

$$PV(i + \Delta i) \approx (1 - D_{mod} * \Delta i) * PV$$

Verwendet man diese Abschätzung auch bei kleinen Zinsveränderungen, so ist diese Approximation relativ gut. Bei größeren Zinssprüngen hingegen ist diese Approximation nicht sinnvoll. Die nachstehende Graphik verdeutlicht dies:



Dass diese Schätzung nur bedingt zu guten Ergebnissen führt liegt vor allem an der Konvexität der Barwertfunktion. Wegen der hier verwendeten linearen Funktion zur Schätzung einer konvexen Funktion entsteht bei größeren Zinsänderungen ein großer Schätzfehler.

Um einen ersten Eindruck für die Größe dieses Schätzfehlers zu bekommen, sind in folgender Tabelle die mittels der modifizierten Duration berechneten Barwerte bei vorgegebenen Zinsänderungen von -2% bis $+8\%$ sowie die entsprechenden tatsächlichen Barwerte einer zehnjährigen Anleihe mit Kuponzahlungen der Höhe 3%, einem Nominalwert von 100 und einem Zinssatz von 2% angegeben.

Zinsänderung	tatsächlicher Barwert	geschätzter Barwert	Schätzfehler
-2%	130,00	127,89	2,11
-1%	118,94	118,44	0,51
0%	108,98	108,98	0,00
1%	100,00	99,53	0,47
2%	91,89	90,08	1,81
3%	84,56	80,63	3,93
4%	77,92	71,17	6,75
5%	71,91	61,72	10,19
6%	66,45	52,27	14,18
7%	61,49	42,81	18,68
8%	56,99	33,36	23,63

Man sieht, dass bei kleinen Zinsänderungen von $\pm 1\%$ der Schätzfehler relativ klein ist und umso größer wird je größer die Zinsänderung ist. Wegen der Konvexität der Barwertfunktion sind die Schätzfehler bei $+1\%$ und bei -1% nicht gleich groß. Da die geschätzten Werte mittels einer Tangente zum Zinssatz 2% berechnet wurden und die Barwertfunktion konvex ist, liegen die geschätzten Werte unter den tatsächlichen Werten, sofern es sich nicht um eine Anleihe mit sehr kleinen Kuponzahlungen, also einem sogenannten deep discount bond handelt.[10]
Um eine bessere Schätzung des Barwertes bei einer Zinsänderung zu erhalten, braucht man eine weitere Größe, nämlich die Convexity.

9 Herleitung und Definition der Convexity

Die modifizierte Duration wird mittels der ersten Ableitung des Barwertes nach dem Zins berechnet. Das heißt zur Schätzung des Barwertes verwendet man nur die erste Ableitung. Um auch Ableitungen höherer Ordnung einzubeziehen, verwendet man die Reihenentwicklung nach Taylor. Eine allgemeine Darstellung der Taylorreihe ist zum Beispiel:[11]

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) * h + \frac{f''(x) * h^2}{2!} + R_3$$

R_3 ist der Restterm ab dem dritten Glied. Es ist

$$R_3 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x) * h^n}{n!}.$$

[10] vgl. [13]
[11] vgl. [13]

Wendet man die Taylorreihenentwicklung auf $PV_0 + \Delta PV_0$ an erhält man:

$$PV_0 + \Delta PV_0 = PV_0 + \frac{\partial PV_0}{\partial i}(\Delta i) + \frac{\partial^2 PV_0}{\partial i^2} * \frac{1}{2!} * (\Delta i)^2 + R_3$$

Dividiert man beide Seiten durch PV_0 so erhält man die prozentuelle Preisänderung:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta PV_0}{PV_0} &= \frac{\partial PV_0}{\partial i} * \frac{1}{PV_0} * (\Delta i) + \frac{\partial^2 PV_0}{\partial i^2} * \frac{1}{PV_0} * \frac{1}{2!} * (\Delta i)^2 + \frac{R_3}{PV_0} \\ &= -D_{mod} * \Delta i + C * \frac{(\Delta i)^2}{2} + R_3/PV_0\end{aligned}$$

C bezeichnet die Convexity, sie berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}C &= \frac{\partial^2 PV_0}{\partial i^2} * \frac{1}{PV_0} \\ \frac{\partial PV_0}{\partial i} &= -\frac{1}{1+i} * \sum_{t=1}^{n} \frac{t * C_t}{(1+i)^t} \\ \frac{\partial^2 PV_0}{\partial i^2} &= \frac{1}{(1+i)^2} * \sum_{t=1}^{n} \frac{t * (t+1) * C_t}{(1+i)^t} \\ C &= \frac{1}{(1+i)^2} * \sum_{t=1}^{n} \frac{t * (t+1) * C_t}{(1+i)^t} / PV_0\end{aligned}$$

Für die Approximation verwendet man häufig nur die ersten beiden Terme der Taylorreihenentwicklung da Ableitungen höherer Ordnung meist nur einen geringeren Einfluss aufweisen.

Verwendet man für die Approximation der relativen Änderung des Barwertes bei gegebener Zinsänderung zusätzlich zur modifizierten Duration auch noch die Convexity, so lässt sich diese Approximation darstellen als:

$$\frac{\Delta PV_0}{PV_0} \approx -D_{mod} * \Delta i + C * \frac{(\Delta i)^2}{2}$$

Das heißt man verwendet für die Approximation der Barwertfunktion nicht mehr eine lineare, sondern eine quadratische Funktion. Verwendet man nun wieder obige Anleihe und hat man Zinsänderungen von -2% bis $+8\%$ gegeben, so erhält man für die Approximation der Barwerte folgende Tabelle:

Zins-änderung	tatsächlicher Barwert	geschätzt mit D_{mod}	Schätz-fehler	geschätzt mit D_{mod} und C	Schätz-fehler
-2%	130,00	127,89	2,11	129,92	0,08
-1%	118,94	118,44	0,51	118,94	-0,00
0%	108,98	108,98	-0,00	108,98	-0,00
1%	100,00	99,53	0,47	100,04	-0,04
2%	91,89	90,08	1,81	92,11	-0,22
3%	84,56	80,63	3,93	85,20	-0,64
4%	77,92	71,17	6,75	79,30	-1,38
5%	71,91	61,72	10,19	74,42	-2,51
6%	66,45	52,27	14,18	70,55	-4,10
7%	61,49	42,81	18,68	67,70	-6,21
8%	56,99	33,36	23,63	65,86	-8,88

Betrachtet man nun den Einfluss der Convexity $\Delta(C)$ separat, so erhält man:

Δi	-2%	-1%	0%	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%
$\Delta(C)$	2,03	0,51	0,00	0,51	2,03	4,57	8,13	12,70	18,28	24,88

Anhand dieser Tabelle lässt sich erkennen, dass der Einfluss der Convexity symmetrisch ist, da durch den Term $(\Delta i)^2$ die Richtung der Zinsänderung keine Rolle spielt. Dies steht im Widerspruch dazu, dass die Konvexität der Barwertfunktion asymmetrisch ist, das heißt, bei einem fallenden Zinsszenario ist der Effekt der Konvexität größer als bei einem steigenden Zinseffekt.[12] Bei der Approximation der Barwerte mit Hilfe der modifizierten Duration, also $PV(i + \Delta i) \approx (1 - D_{mod} * \Delta i) * PV$, wird im Falle einer Zinssenkung der tatsächliche Marktwertgewinn unterschätzt. Verwendet man nun aber für die Approximation sowohl die modifizierte Duration als auch die Convexity, also $PV(i + \Delta i) \approx (1 - D_{mod} * \Delta i) * PV + C * \frac{(\Delta i)^2}{2} * PV$, so erhöht die Convexity bei einer Zinssenkung den geschätzten Barwert und nähert sich so dem tatsächlichen besser an. Bei einer Zinserhöhung ist der Ausdruck $-D_{mod} * \Delta i$ negativ. Dieser Effekt wird durch den positiven Wert der Convexity etwas abgeschwächt.

Somit wird durch die Convexity bei einer Zinssenkung der Preisanstieg erhöht und bei einer Zinserhöhung der Marktwertverlust vermindert.

Bei der Approximation des Barwertes mit Hilfe der modifizierten Duration und der Convexity werden die Steigung und die Krümmung zum aktuellen Marktzins verwendet. Da die Steigung als auch die Krümmung abhängig vom Marktzins sind, sind die, mittels der Convexity und der modifizierten Duration zum aktuellen Marktzins berechneten Werte, nur bei kleinen

[12] vgl. [12]

Zinsänderungen relativ gut. Möchte man Schätzungen über die Marktwerte bei größeren Zinsänderungen, so wäre es sinnvoll, bei der Taylorreihenapproximation noch weitere Ableitungen höherer Ordnung mit zu berücksichtigen.

9.1 Interpretationsmöglichkeit der Convexity

Gibt es zwei Anleihen mit derselben Duration, so ist es sinnvoll diejenige mit der höheren Convexity zu erwerben. Der Grund dafür ist, dass bei unterschiedlichen Zinsszenarien das Wertpapier mit der höheren Convexity einen besseren Preisverlauf aufweist als das mit der niedrigeren. Der Marktwert der Anleihe mit der höheren Convexity ist sowohl bei einer Zinserhöhung als auch bei einer Zinssenkung höher als der Marktwert der Anleihe mit der niedrigeren Convexity. Bei der Anleihe mit der höheren Convexity kommt es somit bei einer Zinssenkung zu einer größeren Marktwertsteigerung und bei einer Zinssenkung zu einem kleineren Marktwertverlust.

Neben der Duration stellt die Convexity eine wichtige zusätzliche Hilfsgröße für Investoren dar. Erwartet ein Anleger eine sofortige Marktzinssenkung oder eine sofortige Marktzinserhöhung, dann ist für den Anleger vor allem die Aussagekraft der Duration wichtig.
Vermutet der Anleger eine sofortige Zinssenkung, dann ist es für ihn von Vorteil, eine Anleihe mit einer höheren Duration in sein Portfolio aufzunehmen. Glaubt er jedoch an eine sofortige Zinserhöhung, so sollte er eine Anleihe mit einer niedrigeren Duration wählen.

Vermutet der Anleger jedoch, dass sich der Zins sofort ändert, aber hat er keine Erwartung über die Richtung der Zinsänderung, so ist für ihn vor allem die Aussagekraft der Convexity von Bedeutung.
Ist der Anleger davon überzeugt, dass die Volatilität der Zinskurve größer ist als es die allgemeine Erwartungshaltung vermuten lässt, so sollte sich der Anleger für ein Portfolio mit einer großen Convexity entscheiden. Im Falle einer sofortigen Zinsänderung, egal ob es sich nun um eine Zinssenkung oder eine Zinserhöhung handelt, verhält sich das Portfolio mit der höheren Convexity relativ besser, als es ein Portfolio mit geringerer Convexity tun würde.

9.2 Convexity einer Anleihe in Abhängigkeit ihrer Faktoren

Die Convexity einer Anleihe ist vor allem abhängig von:

- der Duration D der Anleihe und
- der Verteilung der Kuponzahlungen.

9.2.1 Der Zusammenhang zwischen Convexity und Duration

Die Formel für die Berechnung der Convexity lautet:
$C = \frac{1}{(1+i)^2} \cdot \sum_{t=1}^{n} \frac{t \cdot (t+1) \cdot C_t}{(1+i)^t} / PV_0$.
Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass die Convexity eine Erweiterung der Macaulay Duration ist. Das bedeutet, dass die Convexity in gleicher Weise wie die Macaulay-Duration von den Faktoren: Zinssatz i, Höhe der Kuponzahlungen, Häufigkeit der Kuponzahlungen und Laufzeit beeinflusst wird.

Die Convexity steht in einer positiven Relation zur Duration. So besitzt eine Anleihe mit einer größeren Duration auch eine höhere Convexity und eine Anleihe mit einer kleineren Duration eine niedrigere Convexity.

Die Beziehung zwischen Duration und Convexity ist nicht-linear. Da die Duration von der Restlaufzeit abhängig ist, ist natürlich auch die Convexity davon abhängig. Das bedeutet, dass eine längere Restlaufzeit nicht nur zu einer größeren Duration, sondern auch zu einer höheren Convexity führt. Diesen Zusammenhang erkennt man auch an der stärkeren Krümmung der Barwertfunktion der Anleihe mit der längeren Restlaufzeit. Anhand der stärkeren Krümmung erkennt man, dass Anleihen mit längerer Laufzeit stärker auf eine Zinsänderung reagieren, als Anleihen mit einer kürzeren Laufzeit.

Nehmen wir wieder eine Anleihe mit Kuponzahlungen der Höhe 3, Nennwert 100 und einem Marktzins von $i = 2\%$. In folgender Tabelle ist der Zusammenhang zwischen Duration und Convexity, sowie Restlaufzeit und Convexity angegeben:

Restlaufzeit	Duration	Convexity	Convexity pro Jahr	Convexity pro Durationsjahr
10	8,847	89,580	8,958	10,125
9	8,065	74,586	8,287	9,249
8	7,262	60,734	7,592	8,363
7	6,438	48,092	6,870	7,469
6	5,593	36,730	6,122	6,567
5	4,725	26,722	5,344	5,656
4	3,832	18,150	4,538	4,736
3	2,915	11,098	3,699	3,807
2	1,971	5,656	2,828	2,869
1	1,000	1,922	1,922	1,922

9.2.2 Der Zusammenhang zwischen Convexity und der Verteilung der Kuponzahlungen

Die Streuung der Kuponzahlungen und die Convexity der Anleihe stehen in folgender Beziehung: Je größer die Streuung der Kuponzahlungen, desto größer ist auch die Convexity der Anleihe. Gibt es zwei Anleihen mit derselben Duration aber unterschiedlichen Streuungen der Kuponzahlungen, so hat die Anleihe mit der geringeren Streuung eine geringere Convexity als die Anleihe mit der größeren Streuung.

Die erste Anleihe sei eine zehnjährigen Anleihe mit Kuponzahlungen der Höhe 3%, einem Nominalwert von 100 und einem Zinssatz von 2%. Diese hat eine Duration von $8,8469$ Jahren und eine Convexity von $89,5795$ Jahre zum Quadrat. Die zweite Anleihe sei eine Nullkuponanleihe mit einer Laufzeit von $8,8469$ Jahren. Somit ist die Duration dieser Nullkuponanleihe genau $8,8469$ Jahre. Die Convexity dieser Nullkuponanleihe ist $83,7323$ Jahre zum Quadrat.

Somit sieht man, dass die Anleihe mit einer höheren Streuung auch eine höhere Convexity aufweist als eine Anleihe mit einer geringeren Streuung, in unserem Fall eine Nullkuponanleihe.

Die Convexity einer Anleihe reflektiert natürlich die Convexities der ihr zugrundeliegenden Zahlungen. Das zeigt wieder, dass eine größere Streuung auch zu einem höheren Convexity-Effekt führt.

Die Begründung für diese Beziehung zwischen Kuponzahlungen und Convexity liegt an der Tatsache, dass längerfristige Zahlungsströme progressiv höhere Convexities aufweisen als kurzfristige. Um dies zu veranschaulichen, wird in folgender Tabelle die Duration, die modifizierte Duration sowie die Convexity und die Convexity pro Durationsjahr von Nullkuponanleihen mit einem Nennwert von 100, einem Marktzins von 2% und verschiedenen Laufzeiten angeführt.

D	D_{mod}	C	Convexity pro Durationsjahr
5	4,9020	28,8351	5,7670
10	9,8039	105,7286	10,5729
15	14,7059	230,6805	15,3787
20	19,6078	403,6909	20,1845
25	24,5098	624,7597	24,9904
30	29,4118	893,8870	29,7962

Die letzte Spalte zeigt noch einmal, dass längerfristige Zahlungen eine höhere Convexity pro Durationsjahr aufweisen als kurzfristige. Wäre die Convexity

pro Durationsjahr für alle Laufzeiten konstant, so hätte die Streuung der Kuponzahlungen keinen Einfluss auf die Convexity.

10 Immunisierung unter Berücksichtigung der Convexity

Die Convexity eines Portfolios C_P wird analog zur Duration eines Portfolios berechnet. Es gilt also:

$$C_P = \sum_{i=1}^{n} C_i * w_i$$

Wobei C_i die Convexity des i-ten Wertpapiers und w_i dessen Anteil im Portfolio bezeichnet.
Weiter oben wurde schon erwähnt, dass die Convexity größer wird, je länger die Restlaufzeit ist. Da der Zusammenhang nicht-linear ist, wächst die Convexity sogar überproportional. F.M. Redington erkannte, dass man diesen Zusammenhang auch für die Immunisierung eines Portfolios nutzen kann. Dazu ging er von einem Versicherungsunternehmen aus, welches Verbindlichkeiten L und Aktiva A besitzt.

Die Verbindlichkeiten bestehen aus mehreren einzelnen Posten welche zu verschiedenen Zeitpunkten t fällig sind, so dass für L gilt:

$$L = \sum_{t=1}^{n} \frac{L_t}{(1+i)^t}.$$

Auch die Aktiva A bestehen aus einigen verschiedenen Posten, so dass sich die Aktiva schreiben lassen als:

$$A = \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{(1+i)^t}.$$

Sind die Verbindlichkeiten gleich hoch wie die Aktiva, so gilt für den Überschuss S des Versicherungsunternehmens:

$$S = A - L = \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{(1+i)^t} - \sum_{t=1}^{n} \frac{L_t}{(1+i)^t} = \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t - L_t}{(1+i)^t} = 0.$$

Natürlich ist das Versicherungsunternehmen daran interessiert, seine Verbindlichkeiten mit seinen eigenen Aktiva begleichen zu können. Somit sollte immer $S \geq 0$ gelten.

Das bedeutet, dass die Aktiva so investiert werden müssen, dass selbst nach einer Zinsänderung immer noch gilt $S \geq 0$. Bezeichnet man die Veränderung des Überschusses mit ΔS dann ist eine Taylorreihenentwicklung bis zum zweiten Glied gegeben durch:

$$\Delta S = \Delta i * \frac{\partial S}{\partial i} + \frac{(\Delta i)^2}{2} * \frac{\partial^2 S}{\partial i^2}$$

Um gewährleisten zu können, dass stets $S \geq 0$ gilt, muss $\Delta S \geq 0$ gelten.
Redingtons erste Forderung ist, dass die erste Ableitung des Überschusses nach dem Zins an der Stelle i gleich null sein muss.

Betrachtet man den Überschuss S und dessen erste Ableitung nach dem Zins so ergibt das:

$$S = \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t - L_t}{(1+i)^t}$$
$$\frac{\partial S}{\partial i} = \frac{1}{1+i} \sum_{t=1}^{n} \frac{(L_t - A_t) * t}{(1+i)^t}$$

Verwendet man für die Darstellung die Duration der Verbindlichkeiten D_l und die Duration der Aktiva D_A, so ergibt das:

$$\frac{\partial S}{\partial i} = \frac{1}{1+i} * (D_L * L - D_A * A)$$

Da davon ausgegangen wurde, dass $S = 0$ und somit $L = A$ ist, gilt $\frac{\partial S}{\partial i} = 0$ wenn die Durations gleich sind, also $D_L = D_A$ gilt.

Damit stets $\delta S \geq 0$ gilt, muss für den zweiten Term gelten: $\frac{\partial^2 S}{\partial i^2} \geq 0$.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial i^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial i^2} - \frac{\partial^2 L}{\partial i^2}$$

Damit $\frac{\partial^2 S}{\partial i^2} \geq 0$ erfüllt ist, muss $\frac{\partial^2 A}{\partial i^2}$ größer als $\frac{\partial^2 L}{\partial i^2}$ sein. Daraus folgt, dass die Convexity der Aktiva C_A größer als die Convexity der Verbindlichkeiten C_L sein muss.
Damit muss für die Veranlagung der Aktiva folgendes gelten:

- Die Duration der Aktiva D_A muss der Duration der Verbindlichkeiten D_L entsprechen, also $D_A = D_L$.

- Die Convexity der Aktiva C_A muss die Convexity der Verbindlichkeiten C_L übersteigen, also $C_A \geq C_L$

Um den ersten Punkt zu erfüllen, muss so investiert werden, dass die Duration des Portfolios der Duration der Verbindlichkeiten entspricht.

Um auch den zweiten Punkt erfüllen zu können, verwendet man oben erwähnte Eigenschaft der Convexity, nämlich den überproportionalen Anstieg bei längerer Restlaufzeit. Das heißt, man muss einen genügend großen Anteil im Portfolio mit Anleihen haben, deren Restlaufzeit die Restlaufzeit der letzten Verbindlichkeit übersteigt. Um den ersten Punkt dennoch erfüllen zu können, muss der restliche Anteil des Portfolios meist in kurzfristige Anleihen investiert werden.

Somit stellt die Convexity neben der Duration für das Asset-Liability-Management eines Versicherungsunternehmens eine weitere wichtige Größe dar. Es wird also die Anlagevariante gewählt, welche eine größere Convexity aufweist, da im Falle einer Zinssenkung damit ein größerer Preisanstieg beziehungsweise bei einer Zinssteigerung ein geringerer Verlust erreicht werden kann.

11 Zwei Berechnungsmethoden des Durationmismatches

Kommt es zu einem Zeitpunkt t zu einem Durationmismatch, ist also $D_{P,t} \neq D_{L,t}$, so kann man diesen Mismatch auf zwei unterschiedliche Arten berechnen.

11.1 erste Methode

Die erste Methode zur Berechnung des Durationmismatch zum Zeitpunkt t lautet folgendermaßen:

$$M_{1,t} = D_{L,t} - D_{P,t}$$

11.2 zweite Methode

Die zweite Methode zur Berechnung des Durationmismatch zum Zeitpunkt t lautet folgendermaßen:

$$M_{2,t} = D_{L-P,t} = \frac{PV_{L,t} * D_{L,t} - PV_{P,t} * D_{P,t}}{PV_{L,t} - PV_{P,t}}$$

12 Immunisierung mittels Nullkuponanleihen

Im folgenden wird versucht, den jeweiligen Mismatch durch eine geeignete Anlagestrategie in ein Portfolio bestehend aus Nullkuponanleihen zu minimeren. Es wird eine Erlebensfallversicherung sowie eine Todesfallversicherung betrachtet.

12.1 Immunisierung einer Erlebensfallversicherung

Gegeben sei eine zehnjährige Erlebensfallversicherung eines Versicherungsnehmers. Es sei weiters angenommen, dass der Rechnungs- sowie der Marktzins 0% entspricht. Die Erlebensfallsumme sei 100 und werde am Ende des letzten Versicherungsjahres ausbezahlt. Die jährliche vorschüssige Prämie betrage 10. Das bedeutet, falls der Versicherungsnehmer die zehn Jahre überlebt kommt es zu folgenden Zahlungen:

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prämie	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Versicherungsleistung	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100

Die Duration der Prämienzahlungen $D_{P,1}$ sowie die Duration der Versicherungsleistung $D_{L,1}$ zu Beginn des ersten Versicherungsjahres berechnen sich folgendermaßen:

$$D_{P,1} = \sum_{t=1}^{9} 10 * t/100 = 4,5$$

$$D_{L,1} = \frac{10 * 100}{100} = 10$$

Für den Verlauf der Durations ergibt sich folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D_{P,t}$	4,5	4	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0
$D_{L,t}$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Um eine Immunisierung erhalten zu können, sollten folgende Gleichungen erfüllt sein:

1. $M_t = D_{A,t}$
2. $V_{L,t} = \sum_{i=1}^{m} w_i * V_{A_i,t}$
3. $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$

Wobei m die Anzahl der verschiedenen Anleihen im Portfolio A bezeichnet.

12.1.1 Immunisierung von M_1 mittels Nullkuponanleihen

Zu Beginn der Versicherungsjahre $t = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$ ergibt sich für den Mismatch M_1 bei einem Marktzins von 0% :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{1,t}$	5,5	5,0	4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0

Für die Immunisierung werde angenommen, dass es genügend Nullkuponanleihen für jede mögliche Laufzeit zwischen 0 und 30 gibt. Es werde weiters angenommen, dass eine Veränderung des Portfolios immer nur zu Beginn jedes Versicherungsjahres möglich ist. Es wird versucht, möglichst wenige Umschichtungen durchzuführen, also eine Investition wenn möglich bis zur Endfälligkeit zu halten. Ebenso wird angenommen, dass keine Transaktionskosten noch sonstige Kosten für die Bildung des Portfolios anfallen.
Dann ergibt sich folgende Tabelle:

		Duration der Nullkuponanleihe in welche die Prämienzahlung investiert wird									
Jahr	Prämie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	2,5	1,5	0,5	1
2	10		5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	2,5	1,5	0,5
3	10			5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	2,5	1,5
4	10				5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	1
5	10					5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5
6	10						5,5	4,5	3,5	2,5	1,5
7	10							2,5	1,5	0,5	1
8	10								2,5	1,5	0,5
9	10									2,5	1,5
10	10										1

$D_{A,t}$	5,5	5,0	4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0
$M_{1,t}$	5,5	5,0	4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0
Mismatch	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Somit lässt sich in diesem speziellen Fall eine vollständige Immunisierung erreichen.

12.1.2 Immunisierung von M_2 mittels Nullkuponanleihen

Zu Beginn der Versicherungsjahre $t = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$ ergibt sich für den Mismatch M_2 bei einem Marktzins von 0% :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{2,t}$	$div/0$	54,00	26,00	16,33	11,25	8,00	5,67	3,86	2,38	1,11

Zu Beginn des ersten Versicherungsjahres ist in diesem Fall der Barwert der Versicherungsleistung gleich dem Barwert der Prämienzahlungen. Wäre jedoch der Barwert der Versicherungsleistung etwas höher als der der Prämienzahlungen, so wäre der Wert von $M_{2,1}$ sehr groß. Als Beispiel sei nun die Versicherungsleistung nicht 100 sondern 101, dann ergibt sich $M_{2,1} = 560$. Um dennoch $M_{2,1}$ einen Wert zuzuordnen, sei $M_{2,1} = 70$.

Für die Immunisierung werde angenommen, dass es genügend Nullkuponanleihen für jede mögliche Laufzeit zwischen 0 und 30 gibt. Es werde weiters angenommen, dass eine Veränderung des Portfolios immer nur zu Beginn jedes Versicherungsjahres möglich ist. Es wird versucht, möglichst wenige Umschichtungen durchzuführen, also eine Investition wenn möglich bis zur Endfälligkeit zu halten. Ebenso wird angenommen, dass keine Transaktionskosten noch sonstige Kosten für die Bildung des Portfolios anfallen.
Dann ergibt sich folgende Tabelle:

		Duration der Nullkuponanleihe in welche die Prämienzahlung investiert wird									
Jahr	Prämie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
2	10		30	29	28	27	26	25	24	23	22
3	10			21	20	19	18	17	16	15	14
4	10				1	1	1	1	1	1	1
5	10					1	1	1	1	1	1
6	10						1	1	1	1	1
7	10							1	1	1	1
8	10								1	1	1
9	10									1	1
10	10										1

$D_{A,t}$	30,00	29,50	26,00	19,00	14,80	12,00	10,00	8,50	7,33	6,40
$M_{2,t}$	70,00	54,00	26,00	16,33	11,25	8,00	5,67	3,86	2,38	1,11
Mismatch	40,00	24,50	0,00	2,67	3,55	4,00	4,33	4,64	4,96	5,29

Da als einschränkende Annahme eine maximale Laufzeit von 30 Jahren angenommen wurde, werden die ersten beiden Prämienzahlungen jeweils in eine Anleihe mit 30 Jahren Laufzeit investiert. Damit zum Zeitpunkt der dritten Prämienzahlung die Duration des Portfolios der Duration des Mismatch entspricht, muss diese in eine Nullkuponanleihe mit einer Laufzeit von 21 Jahren investiert werden.
Zu Beginn des vierten Versicherungsjahres beträgt die Duration des Portfolios $D_{A,4^-}$ vor Investition der vierten Prämienzahlung 25 Jahre. Damit durch die Investition der vierten Prämienzahlung die Duration von $M_{2,4}$, al-

so 16,33 Jahre erreicht werden könnte, müsste für die Duration der vierten Prämienzahlung x folgendes gelten:

$$\begin{aligned} D_{M_2,4} &= \frac{D_{A,4^-} * PV_{A,4^-} + x * P}{(PV_{A,4^-} + P)} \\ 16,33 &= \frac{25 * 30 + x * 10}{30 + 10} \\ \Rightarrow x &= -9,67 \end{aligned}$$

Da eine negative Duration nicht erzielt werden kann und die Prämienzahlung trotzdem investiert werden soll, wird die Prämienzahlung in eine Anleihe mit einer Laufzeit von einem Jahr investiert.

Wie man an der Tabelle erkennen kann, wird ab Beginn des vierten Versicherungsjahres nur mehr in einjährige Anleihen investiert. Dies liegt daran, dass rein rechnerisch, die Prämienzahlungen ab diesem Zeitpunkt in Anleihen mit negativer Duration investiert werden müssten.

In der letzten Zeile obiger Tabelle ist der Mismatch, also der Absolutbetrag von $M_{2,t} - D_{A,t}$ abgebildet. Die ersten beiden hohen Werte sind darauf zurückzuführen, dass das Maximum der angenommenen Laufzeiten von 30 Jahren niedriger ist als der berechnete Mismatch M_2. Der dritte Wert kann genau erreicht werden. Danach ist der Mismatch darauf zurückzuführen, dass man in keine negative Duration investieren kann.

Somit kommt es hier nicht zu einer vollständigen Immunisierung. Die Summe der letzten Zeile beträgt 93,94. Verwendet man für die Summe nur die Werte ab dem dritten Versicherungsjahr, so ergibt sich eine Summe von 29,44.

Würde man annehmen, dass die längste Laufzeit nicht 30 Jahre, sondern nur 12 Jahre entspricht, dann würde die Summe des Mismatch zwar 127,24 betragen, die Summe ohne den ersten beiden Werten wäre jedoch nur mehr 26,74. Somit hätte man ab dem dritten Versicherungsjahr eine bessere Veranlagungsstrategie - die Duration betreffend - gefunden.

12.2 Immunisierung einer Todesfallversicherung

Gegeben sei eine zehnjährige Todesfallversicherung eines Versicherungsnehmers. Es sei weiters angenommen, dass der Rechnungs- sowie der Marktzins 0% entspricht. Die Todesfallsumme sei $903,21$ und werde am Ende des Versicherungsjahres ausbezahlt, in welchem der Versicherungsnehmer verstorben ist. Die jährliche vorschüssige Prämie betrage 10.

Die Sterbewahrscheinlichkeiten q_{x+n}, wobei q_x die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit eines x-jährigen bezeichnet, sind:

n	0	1	2	3	4
q_{x+n}	0,0077607	0,0083568	0,0089745	0,0096238	0,0103254

n	5	6	7	8	9
q_{x+n}	0,0111153	0,0120316	0,0131064	0,0143678	0,0158211

Die Zahlungen in Abhängigkeit der Sterblichkeit ergeben sich zu:

Jahr	1	2	3	4	5
Versicherungsleistung	7,01	7,49	7,98	8,48	9,01

Jahr	6	7	8	9	10
Versicherungsleistung	9,60	10,27	11,05	11,96	12,98

Für den Verlauf der Durations ergibt sich folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D_{P,t}$	4,500	4,000	3,500	3,000	2,500	2,000	1,500	1,000	0,500	0,000
$D_{L,t}$	6,055	5,454	4,864	4,285	3,714	3,151	2,598	2,053	1,520	1,000

12.2.1 Immunisierung von M_1 mittels Nullkuponanleihen

Für den Mismatch M_1 bei einem Marktzins von 0% zu Beginn der Versicherungsjahre $t = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ ergibt sich:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{1,t}$	1,555	1,454	1,364	1,285	1,214	1,151	1,098	1,053	1,020	1,000

Für die Immunisierung werde angenommen, dass es genügend Nullkuponanleihen für jede mögliche Laufzeit zwischen 0 und 30 gibt. Es werde weiters angenommen, dass eine Veränderung des Portfolios immer nur zu Beginn jedes Versicherungsjahres möglich ist. Es wird versucht, möglichst wenige Umschichtungen durchzuführen, also eine Investition wenn möglich bis zur Endfälligkeit zu halten. Ebenso wird angenommen, dass keine Transaktionskosten noch sonstige Kosten für die Bildung des Portfolios anfallen.
Dann ergibt sich folgende Tabelle:

		Duration der Nullkuponanleihe in welche die Prämienzahlung investiert wird									
Jahr	Prämie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	1,56	0,56	1,00	2,02	1,02	0,02	0,47	0,66	0,79	0,91
2	10		2,35	1,35	0,35	1,34	0,34	0,47	0,66	0,79	0,91
3	10			1,74	0,74	1,34	0,34	0,47	0,66	0,79	0,91
4	10				2,02	1,02	0,02	0,47	0,66	0,79	0,91
5	10					1,34	0,34	0,47	0,66	0,79	0,91
6	10						5,84	4,84	3,84	2,84	1,84
7	10							0,47	0,66	0,79	0,91
8	10								0,66	0,79	0,91
9	10									0,79	0,91
10	10										0,91

$D_{A,t}$	1,56	1,45	1,36	1,28	1,21	1,15	1,10	1,05	1,02	1,00
$M_{1,t}$	1,56	1,45	1,36	1,28	1,21	1,18	1,11	1,06	1,02	1,00
Mismatch	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Somit lässt sich in diesem speziellen Fall eine vollständige Immunisierung erreichen.

12.2.2 Immunisierung von M_2 mittels Nullkuponanleihen

Für den Mismatch M_2 bei einem Marktzins von 0% zu Beginn der Versicherungsjahre $t = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ ergibt sich:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_{2,t}$	70,000	20,680	10,852	7,329	5,380	4,064	3,069	2,266	1,588	1,000

Der Wert $M_{2,1}$ wurde auf 70 gesetzt, da hier durch Null dividiert werden müsste.

Für die Immunisierung werde angenommen, dass es genügend Nullkuponanleihen für jede mögliche Laufzeit zwischen 0 und 30 gibt. Es werde weiters angenommen, dass eine Veränderung des Portfolios immer nur zu Beginn jedes Versicherungsjahres möglich ist. Es wird versucht, möglichst wenige Umschichtungen durchzuführen, also eine Investition wenn möglich bis zur Endfälligkeit zu halten. Ebenso wird angenommen, dass keine Transaktionskosten noch sonstige Kosten für die Bildung des Portfolios anfallen.
Dann ergibt sich folgende Tabelle:

		Duration der Nullkuponanleihe in welche die Prämienzahlung investiert wird									
Jahr	Prämie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	30,00	29,00	28,00	27,00	26,00	25,00	24,00	23,00	22,00	21,00
2	10		12,36	11,36	10,36	9,36	8,36	7,36	6,36	5,36	4,36
3	10			1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
4	10				1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
5	10					1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
6	10						1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
7	10								1,00	1,00	1,00
8	10								1,00	1,00	1,00
9	10									1,00	1,00
10	10										1,00

$D_{A,t}$	30,00	20,68	13,45	9,84	7,67	6,23	5,19	4,42	3,82	3,34
$M_{2,t}$	70,00	20,68	10,85	7,33	5,38	4,06	3,07	2,27	1,59	1,00
Mismatch	40,00	0,00	2,60	2,51	2,29	2,16	2,13	2,15	2,23	2,34

Der Mismatch resultiert aus der Tatsache, dass rein rechnerisch in eine Anleihe mit einer negativen Duration investiert werden müsste. Da dies nicht möglich ist und deshalb in eine einjährige Nullkuponanleihe investiert wird, entsteht hier ein Mismatch von $58,41$.

Das bedeutet, dass hier eine Immunisierung nicht möglich ist.

13 Immunisierung mittels Anleihen

Im Folgenden wird versucht, den jeweiligen Mismatch durch eine geeignete Anlagestrategie in ein Portfolio bestehend aus normalen Anleihen zu minimeren. Es wird wiederum eine Erlebensfallversicherung sowie eine Todesfallversicherung betrachtet.

13.1 Immunisierung einer Erlebensfallversicherung

Gegeben sei eine zehnjährige Erlebensfallversicherung eines Versicherungsnehmers. Es sei weiters angenommen, dass der Rechnungszins 2% entspricht. Der Marktzins sei ebenfalls über die gesamte Laufzeit konstant und zwar 2%. Die jährliche vorschüssige Prämie betrage 10. Damit der Barwert der Prämienzahlungen dem Barwert der Versicherungsleistung entspricht, sei die Erlebensfallsumme $111,69$ und werde am Ende des letzten Versicherungsjahres ausbezahlt. Das bedeutet, falls der Versicherungsnehmer die zehn Jahre überlebt kommt es zu folgenden Zahlungen:

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prämie	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Versicherungsleistung	0	0	0	0	0	0	0	0	0	111,69

Für den Verlauf der Durations ergibt sich folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D_{P,t}$	4,34	3,87	3,40	2,92	2,44	1,96	1,48	0,99	0,50	0,00
$D_{L,t}$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Um eine Immunisierung zu erreichen, müssen wiederum folgende Gleichungen erfüllt werden:

1. $M_t = D_{A,t}$
2. $V_{L,t} = \sum_{i=1}^{m} w_i * V_{A_i,t}$
3. $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$

Wobei M für den Mismatch steht und entweder $M = M_1$ oder $M = M_2$ gilt. A steht für das gesamte Portfolio und m für die Anzahl verschiedener Anleihen im Portfolio.

13.1.1 Immunisierung von M_1 mittels Anleihen

Es wird angenommen, dass es drei Anleihen, also $m = 3$, gibt:

Anleihe A_1: dreijährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 2

Anleihe A_2: sechsjährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 3

Anleihe A_3: neunjährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 4

Da die längste Laufzeit der Anleihen neun Jahre und die Versicherungsdauer jedoch zehn Jahre sind, wird im letzten Jahr das gesamte Portfolio in ein Bankkonto zum dann aktuellen Marktzins investiert.

Für die Barwerte der Versicherungsleistung $V_{L,t}$ und der Anleihen $V_{A_1,t}, V_{A_2,t}$ und $V_{A_3,t}$ zu Beginn jedes Versicherungsjahres t ergibt sich bei einem konstanten Zins von 2% folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5
$V_{L,t}$	91,622	93,455	95,324	97,230	99,175
$V_{A_1,t}$	100,000	100,000	100,000	0,000	0,000
$V_{A_2,t}$	105,601	104,713	103,808	102,884	101,942
$V_{A_3,t}$	116,324	114,651	112,944	111,203	109,427

t	6	7	8	9	10
$V_{L,t}$	101,158	103,182	105,245	107,350	109,497
$V_{A_1,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$V_{A_2,t}$	100,980	0,000	0,000	0,000	0,000
$V_{A_3,t}$	107,615	105,768	103,883	101,961	0,000

Für die Immunisierung werde angenommen, dass es genügend der drei Anleihen A_1, A_2 und A_3 gibt. Zudem könne jeder beliebige Betrag investiert werden.
Es werde weiters angenommen, dass eine Veränderung des Portfolios immer nur zu Beginn jedes Versicherungsjahres möglich ist. Es wird versucht, möglichst wenige Umschichtungen durchzuführen, also eine Investition wenn möglich bis zur Endfälligkeit zu halten. Ebenso wird angenommen, dass keine Transaktionskosten noch sonstige Kosten für die Bildung des Portfolios anfallen.

Die Durationwerte des Mismatch M_1 sowie der Anleihen sind in folgender Tabelle aufgelistet:

t	1	2	3	4	5
$M_{1,t}$	5,663	5,132	4,604	4,079	3,558
$D_{A_1,t}$	2,942	1,980	1,000	0,000	0,000
$D_{A_2,t}$	5,593	4,725	3,832	2,915	1,971
$D_{A_3,t}$	7,840	7,079	6,294	5,485	4,649

t	6	7	8	9	10
$M_{1,t}$	3,040	2,525	2,013	1,505	1,000
$D_{A_1,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$D_{A_2,t}$	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$D_{A_3,t}$	3,784	2,889	1,962	1,000	0,000

Berechnet man nun die Anteile w_1, w_2 und w_3 der Anleihen unter Berücksichtigung der oben angeführten Gleichungen für die Immunisierung, so ergibt sich folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5
w_1	0,138	0,013	-0,113	0,000	0,000
w_2	0,667	0,798	0,929	0,547	0,407
w_3	0,194	0,189	0,184	0,453	0,593

t	6	7	8	9	10
w_1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_2	0,267	0,000	0,000	0,000	0,000
w_3	0,733	1,000	1,000	1,000	1,000

Berücksichtig man jedoch, dass die Gewichte w_i nicht negativ sein dürfen und dass die Investition bis zur Endfälligkeit gehalten werden soll, dann ergibt sich folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5
w_1	0,138	0,068	0,045	0,000	0,000
w_2	0,667	0,743	0,589	0,547	0,429
w_3	0,194	0,189	0,365	0,453	0,571

t	6	7	8	9	10
w_1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_2	0,351	0,000	0,000	0,000	0,000
w_3	0,649	1,000	1,000	1,000	1,000

Da sowohl Rechnungszins als auch Marktzins mit einem konstanten Wert von 2% angenommen wurden, ergibt sich als Konsequenz, dass der Endwert des Portfolios genau dem Wert der Versicherungsleistung entspricht, nämlich $111,69$.
Für den Mismatch ergibt sich:

t	1	2	3	4	5
$M_{1,t}$	5,663	5,132	4,604	4,079	3,558
$D_{A,t}$	5,663	4,981	4,604	4,079	3,489
$abs(D_{M_1,t} - D_{A,t})$	0,000	0,151	0,000	0,000	0,058

t	6	7	8	9	10	Summe
$M_{1,t}$	3,040	2,525	2,013	1,505	1,000	
$D_{A,t}$	2,789	2,889	1,962	1,000	1,000	
$abs(D_{M_1,t} - D_{A,t})$	0,232	0,365	0,051	0,505	0,000	1,362

Die Summe des Mismatch berechnet sich in diesem Fall auf $1,362$. Die Gründe für diesen Mismatch liegen zum einen daran, dass die weiter oben berechneten Werte für die Gewichte teilweise negativ waren und deshalb korrigiert werden mussten und zum anderen, dass versucht wurde, die In-

vestition bis zur Endfälligkeit zu halten.

13.1.2 Immunisierung von M_2 mittels Anleihen

Da die Werte von M_2 um einiges höher sind als diejenigen von M_1 werden für die Immunisierung folgende Anleihen verwendet:

Anleihe A_4: fünfjährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 2

Anleihe A_5: zehnjährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 3

Anleihe A_6: zwanzigjährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 4

Für die Barwerte der Versicherungsleistung $V_{L,t}$ und der Anleihen $V_{A_4,t}, V_{A_5,t}$ und $V_{A_6,t}$ zu Beginn jedes Versicherungsjahres t ergibt sich bei einem konstanten Zins von 2% folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5
$V_{L,t}$	91,622	93,455	95,324	97,230	99,175
$V_{A_4,t}$	100,000	100,000	100,000	100,000	100,000
$V_{A_5,t}$	108,983	108,162	107,325	106,472	105,601
$V_{A_6,t}$	132,703	131,357	129,984	128,584	127,155

t	6	7	8	9	10
$V_{L,t}$	101,158	103,182	105,245	107,350	109,497
$V_{A_4,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$V_{A_5,t}$	104,713	103,808	102,884	101,942	100,980
$V_{A_6,t}$	125,699	124,212	122,697	121,151	119,574

Für die Immunisierung werde angenommen, dass es genügend der drei Anleihen A_4, A_5 und A_6 gibt. Zudem könne jeder beliebige Betrag investiert werden.
Es werde weiters angenommen, dass eine Veränderung des Portfolios immer nur zu Beginn jedes Versicherungsjahres möglich ist. Es wird versucht, möglichst wenige Umschichtungen durchzuführen, also eine Investition wenn möglich bis zur Endfälligkeit zu halten. Ebenso wird angenommen, dass keine Transaktionskosten noch sonstige Kosten für die Bildung des Portfolios anfallen.

Die Durationwerte des Mismatch M_2 sowie der Anleihen sind in folgender Tabelle aufgelistet:

t	1	2	3	4	5
$M_{2,t}$	70,000	50,888	24,696	15,626	10,835
$D_{A_4,t}$	4,808	3,884	2,942	1,980	1,000
$D_{A_5,t}$	8,847	8,065	7,262	2,511	5,593
$D_{A_6,t}$	14,994	14,420	13,833	13,232	12,617

t	6	7	8	9	10
$M_{2,t}$	7,753	5,524	3,781	2,340	1,101
$D_{A_4,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$D_{A_5,t}$	4,725	3,832	2,915	1,971	1,000
$D_{A_6,t}$	11,987	11,341	10,678	9,997	9,298

Da zu Beginn der Barwert der Versicherungsleistung gleich dem Barwert der Prämienzahlungen ist, wäre der erste Wert für M_2 eigentlich $div/0$. Um trotzdem einen Wert zu haben, wird der Wert auf 70 gesetzt.

Berechnet man nun die Anteile w_4, w_5 und w_6 der Anleihen unter Berücksichtigung der oben angeführten Gleichungen für die Immunisierung, so ergibt sich folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5
w_4	-14,583	-9,816	-3,735	-1,802	-0,901
w_5	15,217	10,535	4,538	2,632	1,744
w_6	0,366	0,281	0,197	0,170	0,157

t	6	7	8	9	10
w_4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_5	0,583	0,775	0,888	0,954	0,988
w_6	0,417	0,225	0,112	0,046	0,012

Berücksichtig man jedoch, dass die Gewichte w_i nicht negativ sein dürfen und dass die Investition bis zur Endfälligkeit gehalten werden soll, dann ergibt sich folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5
w_4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,217
w_6	1,000	1,000	1,000	1,000	0,783

t	6	7	8	9	10
w_4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_5	0,361	0,464	0,542	0,602	0,650
w_6	0,639	0,536	0,458	0,398	0,350

Da auch in diesem Fall der Rechnungszins dem Marktzins über die gesamte

Laufzeit entspricht, ist der Endwert des Portfolios gleich der Versicherungsleistung, nämlich wiederum 111, 69.
Für den Mismatch ergibt sich folgendes:

t	1	2	3	4	5	
$M_{2,t}$	70,000	50,888	24,696	15,626	10,835	
$D_{A,t}$	14,994	14,420	13,833	13,232	11,094	
$abs(D_{M_2,t} - D_{A,t})$	55,006	36,468	10,863	2,394	0,259	

t	6	7	8	9	10	Summe
$M_{2,t}$	7,753	5,524	3,781	2,340	1,101	
$D_{A,t}$	9,363	7,853	6,472	5,166	3,905	
$abs(D_{M_2,t} - D_{A,t})$	1,610	2,329	2,691	2,826	2,804	117,251

Die Summe des Mismatch berechnet sich hier auf 117, 251. Der Grund für diesen hohen Wert liegt vor allem daran, dass in den ersten fünf Versicherungsjahren der Mismatch M_2 um einiges höher ist, als die Durations der zur Verfügung stehenden Anleihen. Die von null verschiedenen Werte nach dem fünften Versicherungsjahr resultieren wiederum aus der Voraussetzung, dass eine Investition bis zur Endfälligkeit gehalten werden soll und daraus, dass einige Gewichte theoretisch kleiner als null wären.

Berechnet man nur die Summe ab dem fünften Versicherungsjahr, ergibt sich ein Wert von 12,520. Würde man erst ab dem fünften Versicherungsjahr versuchen, den Mismatch zu immunisieren, dann könnte ein niedrigerer Wert erzielt werden. Verfolgt man zum Beispiel folgende Strategie, dass im fünften Versicherungsjahr der Mismatch ca. null ist, und davor so investiert wird, dass im fünften Versicherungsjahr die berechneten Beträge investiert werden können, also:

t	1	2	3	4	5
w_4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_5	0,000	0,000	0,000	0,255	0,413
w_6	1,000	1,000	1,000	0,745	0,587

t	6	7	8	9	10
w_4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_5	0,521	0,599	0,657	0,702	0,738
w_6	0,479	0,401	0,343	0,298	0,262

So ergibt sich der Mismatch über die gesamte Versicherungsdauer von 115, 250, und die Summe des Mismatch ab dem fünften Versicherungsjahr entspricht 8, 789. Es wird also in diesem Beispiel insgesamt ein besseres Ergebnis erzielt.

13.2 Immunisierung einer Todesfallversicherung

Gegeben sei eine zehnjährige Todesfallversicherung eines Versicherungsnehmers. Es sei weiters angenommen, dass der Rechnungszins 2% entspricht. Der Marktzins sei ebenfalls über die gesamte Laufzeit konstant und zwar 2%. Die jährliche vorschüssige Prämie betrage 10. Die Todesfallsumme sei $972,16$ und werde am Ende des Jahres ausbezahlt, in welchem der Todesfall des Versicherungsnehmers eintritt. Die mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten multiplizierten Versicherungsleistungen sind:

Jahr	1	2	3	4	5
Versicherungsleistung	7,54	8,06	8,58	9,12	9,69

Jahr	6	7	8	9	10
Versicherungsleistung	10,33	11,05	11,90	12,87	13,97

Für den Verlauf der Durations ergibt sich folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D_{P,t}$	4,337	3,868	3,396	2,921	2,442	1,960	1,475	0,987	0,495	0,000
$D_{L,t}$	5,893	5,323	4,761	4,206	3,656	3,112	2,573	2,040	1,516	1,000

13.2.1 Immunisierung von M_1 mittels Anleihen

Zur Immunisierung des Mismatch M_1 wird wiederum angenommen, dass es die drei Anleihen A_1, A_2 und A_3 gibt:

Anleihe A_1: dreijährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 2

Anleihe A_2: sechsjährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 3

Anleihe A_3: neunjährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 4

Für die Immunisierung sei wieder angenommen, dass es genügend der drei Anleihen A_1, A_2 und A_3 gibt und jeder Investitionsbetrag möglich ist.
Eine Portfolioveränderung sei immer nur zu Beginn jedes Versicherungsjahres möglich. Investitionen sollen sofern es möglich ist, bis zur Endfälligkeit gehalten werden. Es wird angenommen, dass es keine Transaktionskosten noch sonstige Kosten für die Bildung des Portfolios gibt.

Die Durationwerte des Mismatch M_1 sowie der Anleihen sind in folgender Tabelle aufgelistet:

t	1	2	3	4	5
$M_{1,t}$	1,556	1,455	1,365	1,285	1,214
$D_{A_1,t}$	2,942	1,980	1,000	0,000	0,000
$D_{A_2,t}$	5,593	4,725	3,832	2,915	1,971
$D_{A_3,t}$	7,840	7,079	6,294	5,485	4,649

t	6	7	8	9	10
$M_{1,t}$	1,151	1,098	1,054	1,020	1,000
$D_{A_1,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$D_{A_2,t}$	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$D_{A_3,t}$	3,784	2,889	1,962	1,000	0,000

Da die Gewichte w_i nicht negativ sein dürfen und eine Investition bis zur Endfälligkeit gehalten werden soll, ergibt sich folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5
w_1	1,000	1,000	0,931	0,000	0,000
w_2	0,000	0,000	0,000	0,950	0,961
w_3	0,000	0,000	0,069	0,050	0,039

t	6	7	8	9	10
w_1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_2	0,946	0,000	0,000	0,000	0,000
w_3	0,054	1,000	1,000	1,000	0,000

Für den Mismatch ergibt sich folgendes:

t	1	2	3	4	5
$M_{1,t}$	1,556	1,455	1,365	1,285	1,214
$D_{A,t}$	2,942	1,980	1,365	3,044	2,076
$abs(D_{M_1,t} - D_{A,t})$	1,385	0,526	0,000	1,759	0,862

t	6	7	8	9	10	Summe
$M_{1,t}$	1,151	1,098	1,054	1,020	1,000	
$D_{A,t}$	1,151	2,889	1,962	1,000	1,000	
$abs(D_{M_1,t} - D_{A,t})$	0,000	1,792	0,909	0,020	0,000	7,254

Die Gründe für diesen Mismatch von $7,254$ liegen auch in diesem Fall an den theoretisch negativen Gewichten und dem Versuch, Investitionen bis zur Endfälligkeit zu halten. Der größere Mismatch im siebten Versicherungsjahr liegt daran, dass zu diesem Zeitpunkt nur mehr in eine Anleihe, nämlich A_3,

investiert werden kann. Die Duration der Anleihe A_3 ist jedoch höher als die Duration von M_1.

13.2.2 Immunisierung von M_2 mittels Anleihen

Für die Immunisierung des Mismatch M_2 werden wieder die Anleihen A_3, A_4 und A_5 verwendet:

Anleihe A_4: fünfjährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 2

Anleihe A_5: zehnjährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 3

Anleihe A_6: zwanzigjährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 4

Für die Barwerte der Versicherungsleistung $V_{L,t}$ und der Anleihen $V_{A_4,t}, V_{A_5,t}$ und $V_{A_6,t}$ zu Beginn jedes Versicherungsjahres t ergibt sich bei einem konstanten Zins von 2% folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5
$V_{L,t}$	91,622	85,910	79,567	72,574	64,903
$V_{A_4,t}$	100,000	100,000	100,000	100,000	100,000
$V_{A_5,t}$	108,983	108,162	107,325	106,472	105,601
$V_{A_6,t}$	132,703	131,357	129,984	128,584	127,155

t	6	7	8	9	10
$V_{L,t}$	56,507	47,309	37,200	26,047	13,696
$V_{A_4,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$V_{A_5,t}$	104,713	103,808	102,884	101,942	100,980
$V_{A_6,t}$	125,699	124,212	122,697	121,151	119,574

Auch hier sei wieder angenommen, dass es genügend der drei Anleihen A_4, A_5 und A_6 gibt. Zudem sei auch wieder jeder beliebige Investitionsbetrag möglich.
Die Investitionen finden immer zu Beginn jedes Versicherungsjahres statt. Investitionen sollten bis zur Endfälligkeit gehalten werden. Außerdem gebe es keine Transaktionskosten oder andere Kosten für die Bildung eines Portfolios.

Der Mismatch M_2 sowie die Durations der Anleihen A_4, A_5 und A_6 sind in folgender Tabelle aufgeführt:

t	1	2	3	4	5
$M_{2,t}$	70,000	50,933	25,796	17,135	12,585
$D_{A_4,t}$	4,808	3,884	2,942	1,980	1,000
$D_{A_5,t}$	8,847	8,065	7,262	2,511	5,593
$D_{A_6,t}$	14,994	14,420	13,833	13,232	12,617

t	6	7	8	9	10
$M_{2,t}$	9,679	7,606	6,021	4,753	3,706
$D_{A_4,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$D_{A_5,t}$	4,725	3,832	2,915	1,971	1,000
$D_{A_6,t}$	11,987	11,341	10,678	9,997	9,298

Die Gewichte w_4, w_5 und w_6 berechnen sich zu:

t	1	2	3	4	5
w_4	-14,583	-9,818	-3,974	-2,121	-1,262
w_5	15,217	10,530	4,766	2,939	2,092
w_6	0,366	0,287	0,208	0,182	0,170

t	6	7	8	9	10
w_4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_5	0,318	0,497	0,600	0,653	0,674
w_6	0,682	0,503	0,400	0,347	0,326

Da diese Werte nicht negativ sein dürfen und eine Investition bis zur Endfälligkeit gehalten werden sollte ergeben sich folgende Werte für die Gewichte w_4, w_5 und w_6:

t	1	2	3	4	5
w_4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,005
w_6	1,000	1,000	1,000	1,000	0,995

t	6	7	8	9	10
w_4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_5	0,188	0,319	0,418	0,494	0,555
w_6	0,812	0,681	0,582	0,506	0,445

Der Mismatch in diesem Beispiel ist:

t	1	2	3	4	5
$M_{2,t}$	70,000	50,933	25,796	17,135	12,585
$D_{A,t}$	14,994	14,420	13,833	13,232	12,585
$abs(D_{M_2,t} - D_{A,t})$	55,006	36,513	11,963	3,903	0,000

t	6	7	8	9	10	Summe
$M_{2,t}$	9,679	7,606	6,021	4,753	3,706	
$D_{A,t}$	10,620	8,943	7,436	6,032	4,692	
$abs(D_{M_2,t} - D_{A,t})$	0,941	1,337	1,415	1,279	0,986	113,342

Die hohe Summe des Mismatch entsteht vor allem aus den ersten beiden hohen Werten von M_2 und der Annahme, dass nur die drei Anleihen A_4, A_5 und A_6 mit einer maximalen Duration von $14,994$ zur Anlage verwendet werden können.
Berechnet man die Summe des Mismatch erst ab dem fünften Versicherungsjahr, ab welchem es zumindest theoretisch möglich ist eine Immunisierung zu erreichen, so ergibt sich ein Wert von $5,957$.

14 Vergleich der Strategien

Bei den oben illustrierten Beispielen wurde für die Immunisierung von M_1 andere Anleihen als für die Immunisierung von M_2 verwendet um möglichst gut immunisieren zu können. Nun wird angenommen, dass für beide Strategien nur dieselben Anleihen zur Verfügung stehen.

14.1 Vergleich bei einer Erlebensfallversicherung

Gegeben sei wieder eine zehnjährige Erlebensfallversicherung eines Versicherungsnehmers. Die Prämie der Höhe 10 wird jährlich vorschüssig gezahlt. Die Erlebensfallsumme von $111,69$ wird im Versicherungsfall am Ende des letzten Versicherungsjahres ausbezahlt.
Es sei wieder angenommen, dass sowohl der Markt- als auch der Rechnungszins über die gesamte Versicherungsdauer konstant 2% betrage.

Die Anleihen, welche für die Erlebensfallversicherung zur Verfügung stehen, sind:

Anleihe A_7: vierjährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 2

Anleihe A_8: achtjährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 3

Anleihe A_9: fünfzehnjährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 5

Für die Durationwerte der Prämienzahlung P, der Versicherungsleistung L,

des Mismatch M_1 sowie des Mismatch M_2 zu Beginn jedes Versicherungsjahres ergibt sich folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5
$D_{P,t}$	4,337	3,868	3,396	2,921	2,442
$D_{L,t}$	10,000	9,000	8,000	7,000	6,000
$M_{1,t}$	5,663	5,132	4,604	4,079	3,558
$M_{2,t}$	70,000	50,888	24,696	15,626	10,835

t	6	7	8	9	10
$D_{P,t}$	1,960	1,475	0,987	0,495	0,000
$D_{L,t}$	5,000	4,000	3,000	2,000	1,000
$M_{1,t}$	3,040	2,525	2,013	1,505	1,000
$M_{2,t}$	7,753	5,524	3,781	2,340	1,101

Der Wert $M_{2,1}$ wurde wiederum auf 70 gesetzt, da theoretisch durch null dividiert werden würde.
Die Barwerte der drei Anleihen A_7, A_8 und A_9 sind nachfolgend aufgelistet:

t	1	2	3	4	5
$V_{A_7,t}$	100,000	100,000	100,000	100,000	0,000
$V_{A_8,t}$	107,325	106,472	105,601	104,713	103,808
$V_{A_9,t}$	138,548	136,319	134,045	131,726	129,361

t	6	7	8	9	10
$V_{A_7,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$V_{A_8,t}$	102,884	101,942	100,980	0,000	0,000
$V_{A_9,t}$	126,948	124,487	121,976	119,416	116,804

Die Durationwerte der Anleihen sind:

t	1	2	3	4	5
$D_{A_7,t}$	3,884	2,942	1,980	1,000	0,000
$D_{A_8,t}$	7,262	6,438	5,593	4,725	3,832
$D_{A_9,t}$	11,583	10,971	10,343	9,698	9,034

t	6	7	8	9	10
$D_{A_7,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$D_{A_8,t}$	2,915	1,971	1,000	0,000	0,000
$D_{A_9,t}$	8,350	7,645	6,918	6,166	5,387

14.1.1 Immunisierung von M_1

Nun sei wieder jeder beliebige Investitionsbetrag möglich. Es kann jeweils zu Beginn jedes Versicherungsjahres gehandelt werden. Von Transaktionskosten und sonstigen Kosten für die Bildung eines Portfolios wird abgesehen. Dann ergeben sich für die Immunisierung des Mismacht M_1 folgende Gewichte:

t	1	2	3	4	5
w_7	0,691	0,587	0,484	0,382	0,000
w_8	0,139	0,248	0,356	0,462	1,053
w_9	0,170	0,165	0,160	0,156	-0,053

t	6	7	8	9	10
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,977	0,902	0,829	0,000	0,000
w_9	0,023	0,098	0,171	1,000	1,000

Da die Gewichte nicht negativ sein dürfen und Investitionen bis zur Endfälligkeit gehalten werden sollen, sind die korrigierten Gewichte:

t	1	2	3	4	5
w_7	0,691	0,587	0,484	0,382	0,000
w_8	0,139	0,248	0,356	0,462	0,879
w_9	0,170	0,165	0,160	0,156	0,121

t	6	7	8	9	10
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,902	0,902	0,829	0,000	0,000
w_9	0,098	0,098	0,171	1,000	1,000

Die Durationwerte des Portfolio A und des Mismatch M_1 sowie der Absolutbetrag der Differenz beider Werte sind:

t	1	2	3	4	5
$M_{1,t}$	5,663	5,132	4,604	4,079	3,558
$D_{A,t}$	5,663	5,132	4,604	4,079	4,463
$abs(M_{1,t} - D_{A,t})$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,906

t	6	7	8	9	10
$M_{1,t}$	3,040	2,525	2,013	1,505	1,000
$D_{A,t}$	3,449	2,525	2,013	6,166	5,387
$abs(M_{1,t} - D_{A,t})$	0,409	0,000	0,000	4,661	4,387

Die Summe des Mismatch, also der Differenz zwischen der Durationwerte des Portfolios und M_1 ist $10,362$.

14.1.2 Immunisierung von M_2

Geht man nun wieder davon aus, dass jeder beliebige Investitionsbetrag möglich ist und immer nur zu Beginn jedes Versicherungsjahres gehandelt werden kann und es keine Transaktionskosten noch sonstige Kosten gibt, dann ergeben sich die Gewichte für die Anleihen bei der Immunisierung des Mismatch M_2 folgendermaßen:

t	1	2	3	4	5
w_7	-18,061	-12,324	-5,014	-2,689	0,000
w_8	18,663	13,025	5,806	3,511	-0,346
w_9	0,399	0,299	0,208	0,178	1,346

t	6	7	8	9	10
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,110	0,374	0,530	0,000	0,000
w_9	0,890	0,626	0,470	1,000	1,000

Da die Gewichte nicht negativ sein können und versucht werden sollte, eine Investition bis zur Endfälligkeit zu halten, ergeben sich die korrigierten Gewichte als:

t	1	2	3	4	5
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

t	6	7	8	9	10
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,110	0,259	0,371	0,000	0,000
w_9	0,890	0,741	0,629	1,000	1,000

Die Durationwerte des Portfolio A und des Mismatch M_2 sowie der Absolutbetrag der Differenz beider Werte sind:

t	1	2	3	4	5
$M_{2,t}$	70,000	50,888	24,696	15,626	10,835
$D_{A,t}$	11,583	10,971	10,343	9,698	9,034
$abs(M_{2,t} - D_{A,t})$	58,417	39,917	14,353	5,929	1,801

t	6	7	8	9	10
$M_{2,t}$	7,753	5,524	3,781	2,340	1,101
$D_{A,t}$	7,753	6,174	4,720	6,166	5,387
$abs(M_{2,t} - D_{A,t})$	0,000	0,650	0,939	3,825	4,286

Die Summe des Mismatch, also der Differenz zwischen der Durationwerte des Portfolios und M_2 ist $130,118$. Die Summe ab dem fünften Versicherungsjahr beträgt $11,502$.

Bei diesem Beispiel ist es also einfacher, den Mismatch M_1 als den Mismatch M_2 durch geeignete Anlage in die drei Anleihen zu erreichen. Selbst wenn man die Summe erst ab dem fünften Versicherungsjahr bildet, erkennt man, dass der Mismatch M_1 einfacher zu erreichen ist, als der Mismatch M_2.

Dies liegt vor allem daran, dass der Mismatch M_2 in den ersten Versicherungsjahren weit über der Duration der zur Verfügung stehenden Anleihen liegt. Danach liegt es vor allem daran, dass der Mismatch M_2 schneller fällt, als die Durationwerte der Anleihen.

14.2 Vergleich bei einer Todesfallversicherung

Gegeben sei wieder eine zehnjährige Todesfallversicherung eines Versicherungsnehmers. Die Prämie der Höhe 10 wird jährlich vorschüssig gezahlt. Die Todesfallsumme von $972,16$ wird im Versicherungsfall am Ende des Versicherungsjahres ausbezahlt, in welchem der Versicherungsfall eingetreten ist. Es sei wieder angenommen, dass sowohl der Markt- als auch der Rechnungszins über die gesamte Versicherungsdauer konstant 2% betrage.

Die Anleihen, welche für die Todesfallversicherung zur Verfügung stehen, sind wie auch bei der Erlebensfallversicherung:

Anleihe A_7: vierjährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 2

Anleihe A_8: achtjährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 3

Anleihe A_9: fünfzehnjährige Anleihe mit Nominalwert 100 und Kuponzahlungen der Höhe 5

Die Durationwerte der Prämienzahlung P, der Versicherungsleistung L, des Mismatch M_1 sowie des Mismatch M_2 zu Beginn jedes Versicherungsjahres sind:

t	1	2	3	4	5
$D_{P,t}$	4,337	3,868	3,396	2,921	2,442
$D_{L,t}$	5,893	5,323	4,761	4,206	3,656
$M_{1,t}$	1,556	1,455	1,365	1,285	1,214
$M_{2,t}$	70,000	50,933	25,796	17,135	12,585

t	6	7	8	9	10
$D_{P,t}$	1,960	1,475	0,987	0,495	0,000
$D_{L,t}$	3,112	2,573	2,040	1,516	1,000
$M_{1,t}$	1,151	1,098	1,054	1,020	1,000
$M_{2,t}$	9,679	7,606	6,021	4,753	3,706

Der Wert $M_{2,1}$ wurde auf 70 gesetzt, da theoretisch durch null dividiert werden würde.
Die Barwerte der drei Anleihen A_7, A_8 und A_9 sind nachfolgend aufgelistet:

t	1	2	3	4	5
$V_{A_7,t}$	100,000	100,000	100,000	100,000	0,000
$V_{A_8,t}$	107,325	106,472	105,601	104,713	103,808
$V_{A_9,t}$	138,548	136,319	134,045	131,726	129,361

t	6	7	8	9	10
$V_{A_7,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$V_{A_8,t}$	102,884	101,942	100,980	0,000	0,000
$V_{A_9,t}$	126,948	124,487	121,976	119,416	116,804

t	1	2	3	4	5
$D_{A_7,t}$	3,884	2,942	1,980	1,000	0,000
$D_{A_8,t}$	7,262	6,438	5,593	4,725	3,832
$D_{A_9,t}$	11,583	10,971	10,343	9,698	9,034

t	6	7	8	9	10
$D_{A_7,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$D_{A_8,t}$	2,915	1,971	1,000	0,000	0,000
$D_{A_9,t}$	8,350	7,645	6,918	6,166	5,387

14.2.1 Immunisierung von M_1

Wie auch zuvor sei jeder beliebige Investitionsbetrag möglich. Investitionen finden immer zu Beginn jedes Versicherungsjahres statt. Von Transaktionskosten oder sonstigen Kosten für die Bildung des Portfolios wird abgesehen.

Für die Gewichte w_7, w_8 und w_9 ergibt sich dann folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5
w_7	1,888	1,629	1,379	1,135	0,000
w_8	-1,044	-0,787	-0,537	-0,293	1,503
w_9	0,156	0,157	0,158	0,158	-0,503

t	6	7	8	9	10
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	1,324	1,154	0,991	0,000	0,000
w_9	-0,324	-0,154	0,009	1,000	1,000

Da die Gewichte nicht negativ sein dürfen und Investitionen bis zur Endfälligkeit gehalten werden sollen, ergeben sich die korrigierten Gewichte zu:

t	1	2	3	4	5
w_7	1,000	1,000	1,000	0,967	0,000
w_8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,975
w_9	0,000	0,000	0,000	0,033	0,025

t	6	7	8	9	10
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,979	0,983	0,985	0,000	0,000
w_9	0,021	0,017	0,015	1,000	1,000

Die Durationwerte des Portfolio A und des Mismatch M_1 sowie der Absolutbetrag der Differenz beider Werte sind:

t	1	2	3	4	5
$M_{1,t}$	1,556	1,455	1,365	1,285	1,214
$D_{A,t}$	3,884	2,942	1,980	1,285	3,965
$abs(M_{1,t} - D_{A,t})$	2,328	1,487	0,616	0,000	2,751

t	6	7	8	9	10
$M_{1,t}$	1,151	1,098	1,054	1,020	1,000
$D_{A,t}$	3,027	2,068	1,086	6,166	5,387
$abs(M_{1,t} - D_{A,t})$	1,875	0,971	0,033	5,145	4,387

Die Summe des Mismatch, also der Differenz zwischen der Durationwerte des Portfolios und M_1 ist $19,59$.

14.2.2 Immunisierung von M_2

Auch hier sei jeder beliebige Investitionsbetrag möglich. Investitionen sind immer zu Beginn jedes Versicherungsjahres möglich. Und es gebe wiederum keine Transaktionskosten noch sonstige Kosten.
Für die Gewichte w_7, w_8 und w_9 ergibt sich dann folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5
w_7	-18,061	-12,328	-5,305	-3,079	0,000
w_8	18,663	13,022	6,086	3,889	-0,683
w_9	0,399	0,306	0,219	0,190	1,683

t	6	7	8	9	10
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,007	0,007	0,152	0,000	0,000
w_9	0,993	0,993	0,848	1,000	1,000

Da die Gewichte nicht negativ sein können und versucht werden sollte, eine Investition bis zur Endfälligkeit zu halten, ergeben sich die korrigierten Gewichte als:

t	1	2	3	4	5
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

t	6	7	8	9	10
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,007	0,007	0,152	0,000	0,000
w_9	0,993	0,993	0,848	1,000	1,000

Die Durationwerte des Portfolio A und des Mismatch M_2 sowie der Absolutbetrag der Differenz beider Werte sind:

t	1	2	3	4	5
$M_{2,t}$	70,000	50,933	25,796	17,135	12,585
$D_{A,t}$	11,583	10,971	10,343	9,698	9,034
$abs(M_{2,t} - D_{A,t})$	58,417	39,962	15,453	7,437	3,551

t	6	7	8	9	10
$M_{2,t}$	9,679	7,606	6,021	4,753	3,706
$D_{A,t}$	8,312	7,606	6,021	6,166	5,387
$abs(M_{2,t} - D_{A,t})$	1,367	0,000	0,000	1,413	1,681

Die Summe des Mismatch, also der Differenz zwischen der Durationwerte des Portfolios und M_2 ist $129,28$.

Auch hier zeigt sich, dass der Mismatch M_1 leichter beziehungsweise besser durch die drei zur Verfügung stehenden Anleihen zu fitten ist, als der Mismatch M_2.

Dass der Mismatch M_2 nicht so gut angenähert werden kann liegt auch wieder daran, dass die Werte von M_2 zu Beginn der Versicherung weit über den zur Verfügung stehenden Durationswerten liegen.

15 Vergleich bei verschiedenen Zinsszenarien

Bislang wurde davon ausgegangen, dass sowohl der Rechnungszins als auch der Marktzins über die gesamte Versicherungsdauer konstant 2% beträgt. Versicherungsunternehmen versuchen den Rechnungszins über längere Perioden konstant zu halten. Meist wird auch die Garantieleistung am Ende der Versicherung mit diesem einen Rechnungszins berechnet.

Somit müssen Versicherungsunternehmen versuchen zumindest den Rechnungszins durch Bildung eines geeigneten Portfolios erwirtschaften zu können.

Kommt es jedoch zu Niedrigzinsperioden, wie es zur Zeit der Fall ist, dann steht das Versicherungsunternehmen vor dem Problem, die nötige Verzinsung nicht erreichen zu können und daher Verluste zu erzielen.

Gerade für Lebensversicherungsunternehmen sind Perioden mit niedrigem Zins sehr schwierig. Da die meisten Verträge sehr langfristig sind, müssen Annahmen für die Zinsentwicklung über die gesamte Laufzeit gemacht werden. Je länger die Laufzeit ist, desto fehleranfälliger ist die Prognose für die Zinsentwicklung. Die garantierten Leistungen des Vertrages müssen jedoch eingehalten werden, auch wenn sich der Zins negativ entwickelt. Dadurch können dem Lebensversicherungsunternehmen enorme Verluste entstehen.

Im nachfolgenden Abschnitt wird wieder versucht, die Versicherungsleistung zu immunisieren. Diesmal werden jedoch verschieden Zinsszenarien betrachtet.

15.1 Erlebensfallversicherung

Gegeben ist wieder eine zehnjährige Erlebensfallversicherung. Die Prämie beträgt 10 und wird vorschüssig bezahlt. Die Erlebensfallsumme ist wiederum 111, 69 und wird im Erlebensfall am Ende des letzten Versicherungsjahres ausbezahlt.
Der Rechnungszins ist während der gesamten Versicherungsdauer konstant 2%.

15.1.1 steigende Zinsen

Zunächst wird angenommen, dass der Marktzins jährlich um $0,5\%$ steigt. Das bedeutet, dass sich der Marktzins folgendermaßen entwickelt:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	2,0%	2,5%	3,0%	3,5%	4,0%	4,5%	5,0%	5,5%	6,0%	6,5%

Für die Barwerte der Anleihen ergibt sich demnach:

t	1	2	3	4	5
$V_{A_7,t}$	100,000	98,572	98,087	98,551	0,000
$V_{A_8,t}$	107,325	103,175	100,000	97,742	96,370
$V_{A_9,t}$	138,548	129,227	121,270	114,495	108,760

t	6	7	8	9	10
$V_{A_7,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$V_{A_8,t}$	95,877	96,281	97,630	0,000	0,000
$V_{A_9,t}$	103,956	100,000	96,833	94,418	92,738

Die Durationwerte der Anleihen sind:

t	1	2	3	4	5
$D_{A_7,t}$	3,884	2,941	1,980	1,000	0,000
$D_{A_8,t}$	7,262	6,428	5,580	4,713	3,825
$D_{A_9,t}$	11,583	10,879	10,188	9,507	8,829

t	6	7	8	9	10
$D_{A_7,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$D_{A_8,t}$	2,911	1,970	1,000	0,000	0,000
$D_{A_9,t}$	8,150	7,463	6,764	6,044	5,300

Will man den Mismatch M_1 durch obige Anleihen annähern, dann erhält man folgende korrigierte Gewichte:

t	1	2	3	4	5
w_7	0,691	0,580	0,473	0,368	0,000
w_8	0,139	0,256	0,369	0,479	0,885
w_9	0,170	0,163	0,158	0,153	0,115

t	6	7	8	9	10
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,910	0,899	0,824	0,000	0,000
w_9	0,090	0,101	0,176	1,000	1,000

Die Durationwerte des Portfolio A und des Mismatch M_1 sowie der Absolutbetrag der Differenz beider Werte sind:

t	1	2	3	4	5
$M_{1,t}$	5,663	5,132	4,604	4,079	3,558
$D_{A,t}$	5,663	5,132	4,604	4,079	4,398
$abs(M_{1,t} - D_{A,t})$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,840

t	6	7	8	9	10
$M_{1,t}$	3,040	2,525	2,013	1,505	1,000
$D_{A,t}$	3,382	2,525	2,013	6,044	5,300
$abs(M_{1,t} - D_{A,t})$	0,342	0,000	0,000	4,539	4,300

Die Summe über alle Zeitpunkte t von $abs(M_{1,t} - D_{A,t})$ ist $10,022$. Der Wert des Portfolios am Ende des letzten Versicherungsjahres ist $120,71$.

Will man nun den Mismatch M_2 durch obige Anleihen annähern, dann erhält man folgende korrigierte Gewichte:

t	1	2	3	4	5
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

t	6	7	8	9	10
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,076	0,248	0,377	0,000	0,000
w_9	0,924	0,752	0,623	1,000	1,000

Die Durationwerte des Portfolio A und des Mismatch M_2 sowie der Absolutbetrag der Differenz beider Werte berechnen sich zu:

t	1	2	3	4	5
$M_{2,t}$	70,000	50,888	24,696	15,626	10,835
$D_{A,t}$	11,583	10,879	10,188	9,507	8,829
$abs(M_{2,t} - D_{A,t})$	58,417	40,010	14,508	6,120	2,006

t	6	7	8	9	10
$M_{2,t}$	7,753	5,524	3,781	2,340	1,101
$D_{A,t}$	7,753	6,100	4,589	6,044	5,300
$abs(M_{2,t} - D_{A,t})$	0,000	0,576	0,808	3,704	4,199

Die Summe über alle Zeitpunkte t von $abs(M_{2,t} - D_{A,t})$ beträgt $130,349$. Der Wert des Portfolios am Ende des letzten Versicherungsjahres ist $112,13$.

Auch hier erkennt man, dass der Mismatch M_1 leichter zu fitten ist, als der Mismatch M_2.

15.1.2 fallende Zinsen

Nun wird angenommen, dass der Zins jedes Jahr um $0,1\%$ fällt. Das heißt, dass sich der Marktzins folgendermaßen entwickelt:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	2,0%	1,9%	1,8%	1,7%	1,6%	1,5%	1,4%	1,3%	1,2%	1,1%

Für die Barwerte der Anleihen ergibt sich nun:

t	1	2	3	4	5
$V_{A_7,t}$	100,000	100,289	100,389	100,295	0,000
$V_{A_8,t}$	107,325	107,147	106,767	106,181	105,383
$V_{A_9,t}$	138,548	137,795	136,798	135,550	134,045

t	6	7	8	9	10
$V_{A_7,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$V_{A_8,t}$	104,368	103,134	101,678	0,000	0,000
$V_{A_9,t}$	132,278	130,244	127,941	125,368	122,525

Die Durationwerte der Anleihen berechnen sich nun zu folgenden Werten:

t	1	2	3	4	5
$D_{A_7,t}$	3,884	2,942	1,980	1,000	0,000
$D_{A_8,t}$	7,262	6,441	5,596	4,727	3,834
$D_{A_9,t}$	11,583	10,989	10,373	9,735	9,073

t	6	7	8	9	10
$D_{A_7,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$D_{A_8,t}$	2,915	1,971	1,000	0,000	0,000
$D_{A_9,t}$	8,389	7,680	6,947	6,189	5,403

Will man den Mismatch M_1 durch Investition in die Anleihen A_7, A_8 und A_9 annähern, dann erhält man folgende korrigierte Gewichte:

t	1	2	3	4	5
w_7	0,691	0,589	0,487	0,384	0,000
w_8	0,139	0,246	0,353	0,459	0,877
w_9	0,170	0,165	0,161	0,157	0,123

t	6	7	8	9	10
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,900	0,903	0,830	0,000	0,000
w_9	0,100	0,097	0,170	1,000	1,000

Die Durationwerte des Portfolio A und des Mismatch M_1 sowie der Absolutbetrag der Differenz beider Werte sind nun:

t	1	2	3	4	5
$M_{1,t}$	5,663	5,132	4,604	4,079	3,558
$D_{A,t}$	5,663	5,132	4,604	4,079	4,477
$abs(M_{1,t} - D_{A,t})$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,919

t	6	7	8	9	10
$M_{1,t}$	3,040	2,525	2,013	1,505	1,000
$D_{A,t}$	3,463	2,525	2,013	6,189	5,403
$abs(M_{1,t} - D_{A,t})$	0,424	0,000	0,000	4,684	4,403

Die Summe über alle Zeitpunkte t von $abs(M_{1,t} - D_{A,t})$ ist $10,430$. Der Wert des Portfolios am Ende des letzten Versicherungsjahres ist $110,02$.

Nun wird versucht den Mismatch M_2 durch Investition in obige Anleihen anzunähern. Die korrigierten Gewichte sind:

t	1	2	3	4	5
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

t	6	7	8	9	10
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,116	0,261	0,370	0,000	0,000
w_9	0,884	0,739	0,630	1,000	1,000

Die Durationwerte des Portfolio A und des Mismatch M_2 sowie der Absolutbetrag der Differenz beider Werte berechnen sich zu:

t	1	2	3	4	5
$M_{2,t}$	70,000	50,888	24,696	15,626	10,835
$D_{A,t}$	11,583	10,989	10,373	9,735	9,073
$abs(M_{2,t} - D_{A,t})$	58,417	39,899	14,323	5,892	1,762

t	6	7	8	9	10
$M_{2,t}$	7,753	5,524	3,781	2,340	1,101
$D_{A,t}$	7,753	6,190	4,748	6,189	5,403
$abs(M_{2,t} - D_{A,t})$	0,000	0,666	0,967	3,848	4,303

Die Summe über alle Zeitpunkte t von $abs(M_{2,t} - D_{A,t})$ beträgt $130,076$. Der Wert des Portfolios am Ende des letzten Versicherungsjahres ist $111,79$.

Auch hier ist der Mismatch M_1 leichter zu erreichen, als der Mismatch M_2. Man sieht auch, dass die Strategie für die Immunisierung des Mismatch M_2 wesentlich höhere Durationwerte aufweist und somit zinssensitiver reagiert,

als die Strategie für die Immunisierung von M_1.

15.1.3 variierende Zinsen

Für den Marktzins wird nun folgender Verlauf angenommen:

t	1	2	3	4	5
i	2,00%	1,50%	1,50%	2,25%	4,25%

t	6	7	8	9	10
i	3,75%	3,00%	2,75%	2,75%	3,00%

Für die Barwerte der Anleihen ergibt sich daraus:

t	1	2	3	4	5
$V_{A_7,t}$	100,000	101,456	100,978	99,756	0,000
$V_{A_8,t}$	107,325	109,897	108,546	103,510	95,489
$V_{A_9,t}$	138,548	143,902	141,060	128,641	106,483

t	6	7	8	9	10
$V_{A_7,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$V_{A_8,t}$	97,909	100,000	100,243	0,000	0,000
$V_{A_9,t}$	110,266	115,572	115,962	114,151	110,834

Die Durationwerte der Anleihen sind demnach:

t	1	2	3	4	5
$D_{A_7,t}$	3,884	2,942	1,980	1,000	0,000
$D_{A_8,t}$	7,262	6,449	5,600	4,723	3,824
$D_{A_9,t}$	11,583	11,062	10,418	9,666	8,802

t	6	7	8	9	10
$D_{A_7,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$D_{A_8,t}$	2,912	1,971	1,000	0,000	0,000
$D_{A_9,t}$	8,211	7,586	6,886	6,144	5,368

Um den Mismatch M_1 durch Anlage in die Anleihen A_7, A_8 und A_9 anzunähern, benötigt man folgende korrigierten Gewichte w_7, w_8 und w_9:

t	1	2	3	4	5
w_7	0,691	0,594	0,490	0,379	0,000
w_8	0,139	0,240	0,349	0,465	0,894
w_9	0,170	0,166	0,161	0,155	0,106

t	6	7	8	9	10
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,913	0,901	0,828	0,000	0,000
w_9	0,087	0,099	0,172	1,000	1,000

Die Durationwerte des Portfolio A und des Mismatch M_1 sowie der Absolutbetrag der Differenz beider Werte sind in diesem Fall:

t	1	2	3	4	5
$M_{1,t}$	5,663	5,132	4,604	4,079	3,558
$D_{A,t}$	5,663	5,132	4,604	4,079	4,352
$abs(M_{1,t} - D_{A,t})$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,794

t	6	7	8	9	10
$M_{1,t}$	3,040	2,525	2,013	1,505	1,000
$D_{A,t}$	3,373	2,525	2,013	6,144	5,368
$abs(M_{1,t} - D_{A,t})$	0,334	0,000	0,000	4,639	4,368

Die Summe über alle Zeitpunkte t von $abs(M_{1,t} - D_{A,t})$ ist nun $10,135$. Der Wert des Portfolios am Ende des letzten Versicherungsjahres beträgt $115,15$.

Nun wird versucht den Mismatch M_2 durch Investition in obige Anleihen anzunähern. Die korrigierten Gewichte sind:

t	1	2	3	4	5
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

t	6	7	8	9	10
w_7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
w_8	0,086	0,242	0,355	0,000	0,000
w_9	0,914	0,758	0,645	1,000	1,000

Die Durationwerte des Portfolio A und des Mismatch M_2 sowie der Absolutbetrag der Differenz beider Werte sind nun:

t	1	2	3	4	5
$M_{2,t}$	70,000	50,888	24,696	15,626	10,835
$D_{A,t}$	11,583	11,062	10,418	9,666	8,802
$abs(M_{2,t} - D_{A,t})$	58,417	39,826	14,278	5,960	2,033

t	6	7	8	9	10
$M_{2,t}$	7,753	5,524	3,781	2,340	1,101
$D_{A,t}$	7,753	6,228	4,794	6,144	5,368
$abs(M_{2,t} - D_{A,t})$	0,000	0,704	1,013	3,803	4,267

Die Summe über alle Zeitpunkte t von $abs(M_{2,t} - D_{A,t})$ ist $130,302$. Der Wert des Portfolios am Ende des letzten Versicherungsjahres ist $113,28$.

Geht man nun von einer kurzfristigen Zinsänderung von 1% im Zeitpunkt 0^+ aus. Also ist der Zins im ersten Jahr nicht 2% sondern nur mehr 1%. Dann ergeben sich die Barwerte der Anleihen zu:

t	1	2	3	4	5
$V_{A_7,t}$	103,902	101,456	100,978	99,756	0,000
$V_{A_8,t}$	115,303	109,897	108,546	103,510	95,489
$V_{A_9,t}$	155,460	143,902	141,060	128,641	106,483

t	6	7	8	9	10
$V_{A_7,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$V_{A_8,t}$	97,909	100,000	100,243	0,000	0,000
$V_{A_9,t}$	110,266	115,572	115,962	114,151	110,834

Folgt man dennoch obiger Strategie für die Immunisierung mittels M_1, so ergeben sich die Durationwerte des Portfolio und des Mismacht M_1 sowie der Absolutbetrag der Differenz folgendermaßen:

t	1	2	3	4	5
$M_{1,t}$	5,663	5,132	4,604	4,079	3,558
$D_{A,t}$	5,705	5,132	4,604	4,079	4,352
$abs(M_{1,t} - D_{A,t})$	0,042	0,000	0,000	0,000	0,794

t	6	7	8	9	10
$M_{1,t}$	3,040	2,525	2,013	1,505	1,000
$D_{A,t}$	3,373	2,525	2,013	6,144	5,368
$abs(M_{1,t} - D_{A,t})$	0,334	0,000	0,000	4,639	4,368

Die Summe der Differenzen beträgt $10,177$. Obiger Wert ohne Zinsänderung ist $10,135$. Das heißt, der Wert hat sich nur um $0,042$ verschlechtert.

Folgt man nun obiger Strategie für die Immunisierung mittels M_2, so er-

gibt sich folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5
$M_{2,t}$	70,000	50,888	24,696	15,626	10,835
$D_{A,t}$	11,796	11,062	10,418	9,666	8,802
$abs(M_{2,t} - D_{A,t})$	58,204	39,826	14,278	5,960	2,033

t	6	7	8	9	10
$M_{2,t}$	7,753	5,524	3,781	2,340	1,101
$D_{A,t}$	7,753	6,228	4,794	6,144	5,368
$abs(M_{2,t} - D_{A,t})$	0,000	0,704	1,013	3,803	4,267

Die Summe der letzten Zeilen beträgt $130,089$. Obige Summe ergab $130,302$. Somit hat sich dieser Wert sogar etwas verbessert. Der Grund für diese Verbesserung ist folgender: Hätte man die Chance gehabt, die Strategie umzustellen, hätte sich nichts geändert, da auch bei einem Zins von 1%, alles in die Anleihe A_9 investiert worden wäre.

Geht man nun davon aus, dass sich der Zins nicht auf 1% sondern auf 3% ändert, sind die Barwerte der Anleihen:

t	1	2	3	4	5
$V_{A_7,t}$	96,283	101,456	100,978	99,756	0,000
$V_{A_8,t}$	100,000	109,897	108,546	103,510	95,489
$V_{A_9,t}$	123,876	143,902	141,060	128,641	106,483

t	6	7	8	9	10
$V_{A_7,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$V_{A_8,t}$	97,909	100,000	100,243	0,000	0,000
$V_{A_9,t}$	110,266	115,572	115,962	114,151	110,834

Behält man die Strategie zur Immunisierung von M_1 ohne Zinsänderung bei, ergeben sich folgende Werte:

t	1	2	3	4	5
$M_{1,t}$	5,663	5,132	4,604	4,079	3,558
$D_{A,t}$	5,620	5,132	4,604	4,079	4,352
$abs(M_{1,t} - D_{A,t})$	0,044	0,000	0,000	0,000	0,794

t	6	7	8	9	10
$M_{1,t}$	3,040	2,525	2,013	1,505	1,000
$D_{A,t}$	3,373	2,525	2,013	6,144	5,368
$abs(M_{1,t} - D_{A,t})$	0,334	0,000	0,000	4,639	4,368

Die Summe der Differenz $abs(M_{1,t} - D_{A,t})$ ist $10,178$. Zum Vergleich war die Summe ohne Zinsänderung $10,135$. Somit hat sich dieser Wert wieder

nur um einen geringen Betrag von $0,043$ verändert.

Für die Strategie zur Immunisierung von M_2 ergeben sich folgende Werte:

t	1	2	3	4	5
$M_{2,t}$	70,000	50,888	24,696	15,626	10,835
$D_{A,t}$	11,362	11,062	10,418	9,666	8,802
$abs(M_{2,t} - D_{A,t})$	58,638	39,826	14,278	5,960	2,033

t	6	7	8	9	10
$M_{2,t}$	7,753	5,524	3,781	2,340	1,101
$D_{A,t}$	7,753	6,228	4,794	6,144	5,368
$abs(M_{2,t} - D_{A,t})$	0,000	0,704	1,013	3,803	4,267

Die Summe der letzten Zeile ergibt $130,523$. Ohne Zinsänderung war die Summe $130,302$. Hier hat sich der Wert um $0,22$ verschlechtert.

Somit erkennt man, dass die Strategie für die Immunisierung von M_1 weniger zinssensitiv ist, als die Strategie für die Immunisierung von M_2.

Nun wird von drei Zinsänderungen ausgegangen. Die erste Zinsänderung ist wiederum zu Beginn der Versicherung. Die zweite Zinsänderung ist kurz nach Beginn des fünften Versicherungsjahres und die dritte kurz nach Beginn des siebten Versicherungsjahres. Somit sind die jährlichen Zinsen nicht wie zuvor:

t	1	2	3	4	5
i	2,00%	1,50%	1,50%	2,25%	4,25%

t	6	7	8	9	10
i	3,75%	3,00%	2,75%	2,75%	3,00%

sondern:

t	1	2	3	4	5
i	3,00%	1,50%	1,50%	2,25%	3,50%

t	6	7	8	9	10
i	3,75%	2,75%	2,75%	2,75%	3,00%

Die Barwerte der Anleihen nach dieser Zinsänderung berechnen sich zu:

t	1	2	3	4	5
$V_{A_7,t}$	96,283	101,456	100,978	99,756	0,000
$V_{A_8,t}$	100,000	109,897	108,546	103,510	98,163
$V_{A_9,t}$	123,876	143,902	141,060	128,641	113,502

t	6	7	8	9	10
$V_{A_7,t}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$V_{A_8,t}$	97,909	100,480	100,243	0,000	0,000
$V_{A_9,t}$	110,266	117,725	115,962	114,151	110,834

Behält man die Strategie für die Immunisierung von M_1 ohne Zinsänderung bei, so ergibt sich folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5
$M_{1,t}$	5,663	5,132	4,604	4,079	3,558
$D_{A,t}$	5,620	5,132	4,604	4,079	4,363
$abs(M_{1,t} - D_{A,t})$	0,044	0,000	0,000	0,000	0,805

t	6	7	8	9	10
$M_{1,t}$	3,040	2,525	2,013	1,505	1,000
$D_{A,t}$	3,373	2,526	2,013	6,144	5,368
$abs(M_{1,t} - D_{A,t})$	0,334	0,002	0,000	4,639	4,368

Die Summe der Absolutbeträge der Differenz ist nun $10,191$ und nicht mehr $10,135$. Somit beträgt die Änderung $0,056$.

Behält man die Strategie für die Immunisierung von M_2 ohne Zinsänderung bei, so ergibt sich folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5
$M_{2,t}$	70,000	50,888	24,696	15,626	10,835
$D_{A,t}$	11,362	11,062	10,418	9,666	8,881
$abs(M_{2,t} - D_{A,t})$	58,638	39,826	14,278	5,960	1,954

t	6	7	8	9	10
$M_{2,t}$	7,753	5,524	3,781	2,340	1,101
$D_{A,t}$	7,753	6,240	4,794	6,144	5,368
$abs(M_{2,t} - D_{A,t})$	0,000	0,716	1,013	3,803	4,267

Die Summe der Differenzen ist nun $130,455$ und nicht mehr $130,302$. Somit beträgt die Änderung $0,153$.

Das heißt, dass auch hier wiederum die Änderung im Fall von M_2 größer ist, als bei M_1. Somit führt die Strategie für die Immunisierung von M_2 zu zinssensitiveren Anlagestrategien.

15.2 Fazit des Vergleiches

Für all die obigen Beispiele war es immer einfacher den Mismatch M_1 zu immunisieren als den Mismatch M_2. Vor allem die hohen Werte von M_2 zu Beginn der Versicherung sind in der Praxis durch Anlage in Anleihen nicht zu erreichen.

Folgt man der Anlagestrategie für die Immunisierung von M_2, erhält man eine wesentlich zinssensitivere Strategie als bei der Anlagestrategie für die Immunisierung von M_1. Deshalb ist es wohl für das Asset-Liability-Management eines Versicherungsunternehmens besser, der Anlagestrategie für die Immunisierung von M_1 zu folgen.

Somit ist das Asset-Liability-Management dafür verantwortlich, geeignete Anleihen für die Anlagestrategie, für die Immunisierung von M_1, zu finden. Auch ist es wesentlich, geeignet auf Zinsänderungen zu reagieren.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Anlagestrategie für die Immunisierung von M_2 in der Praxis kaum möglich ist, und durch die höhere Zinssensitivität auch unvorteilhafter als die Anlagestrategie für die Immunisierung von M_1.

Literatur

[1] Achleitner, M.: *Untersuchungen zur Brauchbarkeit der Macaulay-Duration bei Existenz nicht flacher Zinsstrukturen mit Hilfe eines Simulationsprogrammes*. Diplomarbeit, Universität Innsbruck, 1996.

[2] Brealey, R., S. Myers und F. Allen: *Principles of corporate finance*. McGraw-Hill/Irwin, Boston, 9. Aufl., 2008.

[3] Brigo, D. und F. Mercurio: *Interest rate models - theory and practice : with smile, inflation, and credit*. Springer, Berlin, 2. Aufl., 2006.

[4] Fabozzi, F. J.: *The Handbook of Fixed Income Securities*. McGraw-Hill Professional, Messina, Virginia, 6. Aufl., 2001.

[5] Führer, C.: *Asset Liability Management in der Lebensversicherung*. Verlag Versicherungswirtsch., Köln, 1. Aufl., 2010.

[6] Gerber, H. U.: *Life Insurance Mathematics*. Springer, Berlin, 1997.

[7] Grösbrink, M.: *Begrenzung des Duration-Mismatch von Lebensversicherungsunternehmen in Deutschland durch den Einsatz von Finanzinstrumenten - Eine Analyse aus ökonomischer und aufsichtsrechtlicher Sicht sowie mit Blick auf die IFRS-Rechnungslegung*. Verlag Versicherungswirtsch., Köln, 1. Aufl., 2011.

[8] Hans, M.: *Die Duration*. Website: http://www.hans-markus.de/finance/116//duration.

[9] Koller, M.: *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung*. Springer, Berlin, 2. Aufl., 2010.

[10] König, A.: *Ansätze zur Risikoanalyse und Risikobewältigung in der Lebensversicherung - Eine Untersuchung vor dem Hintergrund der Umsetzung der Dritten Lebensversicherungsrichtlinie der Europäischen Union*. Verlag Versicherungswirtsch., Köln, 1997.

[11] Müller, D.: *Duration als Sensitivitätsmaß für Bondportfolios*. GRIN Verlag, München, 1. Aufl., 2004.

[12] Pirker, T. und O. Schober: *Duration and its application in the Asset/Liability-Management of an International Financial Institution*. Diplomarbeit, Universität Innsbruck, 1995.

[13] Unger, G.: *Zinsimmunisierung von Anleihenportfeuilles auf der Basis des Duration-Konzeptes*. Diplomarbeit, Universität Innsbruck, 1993.

[14] Vankat, B.: *Die Anwendung der Duration zur Steuerung des Zinsänderungsrisikos in österreichischen Rentenfonds*. Diplomarbeit, Universität Graz, 1991.

[15] Versicherungsverband-Österreich: *Jahresbericht*. Website: http://www.vvo.at/jahresbericht, 2010.