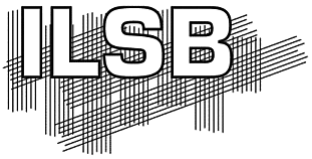
Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (http://www.ub.tuwien.ac.at).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/).



Diplomarbeit

Schädigungs- und Versagensvorhersage von Gewebelaminaten durch mechanismenbasierte Hüllflächen

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung
des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs
unter der Leitung von

Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Heinz Pettermann
Dipl.-Ing. Jakob Gager

Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik (E317)

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

Martin Meindlhumer
e0625498
Am Müllerberg 24
4701 Bad Schallerbach

Bad Schallerbach, Mai 2013

für

Evelyn,
Hanna und Matthias

Kurzfassung

Die Forderung nach immer effizienteren und leichteren Strukturen erhöht kontinuierlich den Einsatz von faserverstärkten Kunststoffen. Um deren gesamtes Potential nutzen zu können sind aussagekräftige Berechnugsmodelle notwendig. Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung eines Konzepts zur Beurteilung der Materialauslastung von Verbundwerkstoffen im Allgemeinen und Faser-Kunststoff-Verbundlaminaten aus biaxialen Geflechten im Speziellen. Es wird die Idee verfolgt, anhand einer Einheitszelle die Spannungen und Verzerrungen aus der linearen Finiten Elemente Analyse einer Struktur zu beurteilen.

Als Grundlage dient die Verwendung der Finiten Elemente Methode. Durch eine aus Schalenelementen modellierte Einheitszelle ist es möglich effizient nichtlineare Effekte in den Faserbündeln und Matrixtaschen zu berücksichtigen. Zum Einsatz kommem Konstitutivgesetze die Schädigung und Plastizieren zulassen. Es werden skalare Größen definiert denen mechanismenbasierte dissipierte Energien zu Grunde liegen. Diese ermöglichen den Grad der Materialauslastung zu beschreiben. Mittels radialer Belastungspfade verteilt im ebenen Spannungsraum erfolgt zum Einen die Erstellung von Hüllflächen, die ein bestimmtes Niveau an Schädigung oder Plastizieren markieren. Zum Anderen wird die Vorhersage der Reihenfolge des Eintretens vordefinierter Ereignisse möglich. Abschließend wird eine Strategie entwickelt um den Grad der Materialauslastung in kritische und nicht kritische Zustände einzuteilen. Dabei bedient man sich der Steigung von Verläufen der dissipierten Energieniveaus.

Als Grundlage dienen kraftgesteuerte Analysen. Wegen des nichtlinearen Verhaltens werden diese von den Ergebnissen aus verschiebungsgesteuerten Analysen abweichen. Zusätzlich ist zu betonen, dass die Verwendung anderer Materialgesetze zu abweichenden Resultaten führen kann. Beides ist in weiterführenden Arbeiten zu prüfen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Faserverstärkte Kunststoffe 2
1.2 Mehrskalenbetrachtung 5
1.3 Verhalten von Laminaten aus FKV 6
1.3.1 Matrixdominiertes Verhalten 7
1.3.2 Verhalten in Faserrichtung 8
1.4 FEM-Modellierung 9
1.4.1 First Ply Failure - Analyse 10
1.4.2 Degradationsanalyse 11
1.5 Abgrenzung der Arbeit 12

2 FEM-Modell **15**

2.1 Konzept des RVE 15
2.1.1 Periodische Einheit des Gewebematerials 16
2.1.2 Periodische Spannungen und Verzerrungen 17
2.1.3 Makroskopische Spannungen und Verzerrungen 18
2.2 Modellieren mit Schalenelementen 18
2.3 Materialgesetz 20
2.3.1 Faserbündel - Abaqus Schädigungsmodell für FKV 21
2.3.2 Matrixtaschen - Drucker-Prager-Fließkriterium 24
2.4 Zusammenfassung 26

3 Generieren von Hüllflächen **27**

3.1 Konzept der dissipierten Energien 27
3.1.1 Herleitung der erforderlichen Energiegrößen 28
3.1.2 Definition relativer Energieniveaus 31

3.2 Scannen des ebenen Spannungsraums 32

4 Analyse der Gewebelage einer 2/2 Köperbindung 37

4.1 Konfiguration des FE-Modells 37

4.1.1 Randbedingungen 38

4.1.2 Materialparameter 39

4.2 Einrichten der Analyse 41

5 Diskussion der Ergebnisse 43

5.1 Mechanismenbasierte Hüllflächen 43

5.2 Reihenfolge des Eintretens der Mechanismen 50

5.3 Strategie zur Definition kritischer Energieniveaus 52

5.3.1 Analyse ausgeprägter Lastpfade 52

5.3.2 Analyse spezieller Lastpfade 57

5.3.3 Schlussfolgerung 59

6 Zusammenfassung und Ausblick 62

A Python-Quelltext: Generieren von Ortsvektoren 64

Abbildungsverzeichnis 66

Tabellenverzeichnis 70

Literatur 71

Kapitel 1

Einleitung

Speziell in der Luft- und Raumfahrt aber ebenso bei Sportgeräten, in der Autoindustrie und vielen weiteren Bereichen kommen vermehrt Leichtbauteile aus Faser-Kunststoff-Verbund (FKV) zum Einsatz. Besonders das geringe spezifische Gewicht von FKV bei gleichzeitig hoher spezifischer Steifigkeit, Festigkeit und gutem Dauerbeanspruchungsverhalten ist von Bedeutung. Nicht nur die guten mechanischen Eigenschaften sondern auch, dass der Werkstoff selbst entsprechend den Belastungen der jeweiligen Bauteile *designed* werden kann, spielt dabei eine wichtige Rolle.

Neben den vielen unterschiedlichen Ausgangsmaterialien kommen speziell für Strukturen die hohen Ansprüchen genügen müssen, häufig Gewebe zur Anwendung. Um deren gesamtes Potential ausschöpfen zu können werden existierende Berechnungsmodelle weiter entwickelt und neue Methoden erforscht. Ziel ist es, Kriterien einzuführen, die zuverlässige Aussagen über den Grad der Materialauslastung ermöglichen. Ein fundiertes Verständnis über das Zusammenwirken der einzelnen Bestandteile und die Kenntnis der Mechanismen, die im Zuge der Belastung ablaufen ist dafür wesentlich.

Die Verwendung der *Finite Elemente Methode* (FEM) stellt ein nützliches Hilfsmittel zur Untersuchung von Strukturen aus FKV im Generellen und Gewebelaminate im Speziellen dar. Jedoch ist die inhomogene Zusammensetzung des Ausgangsmaterials von derart hoher Komplexität, dass zur Verfügung stehende Rechenkapazitäten, bei detaillierter Modellierung, sehr schnell überschritten werden. Daher sind für die Auslegung und Konstruktion von Anwendungen in der Praxis effiziente Modelle notwendig, die eine schnelle und möglichst genaue Vorhersage zulassen. Verwendung finden meistens Kriterien, die von einem linearen Materialverhalten ausgehen und zu konservati-

ven Ergebnissen führen [31]. Auf der anderen Seite wird eine detaillierte Modellierung mit FEM vorgenommen. Dabei wird durch die Nutzung sogenannter repräsentativer Volumenelemente (RVE) versucht Wissen über die Vorgänge im Gewebematerial bei Belastung zu generieren.

Die Anwendung von faserverstärkten Kunststoffen darf keinesfalls mehr als neue Technologie bezeichnet werden [29]. Trotzdem ist die zuletzt beschriebene Thematik, besonders für die Verwendung von Geweben, kaum wissenschaftlich bearbeitet und steht somit im Mittelpunkt aktueller Forschungen. Auch diese Arbeit soll einen Teil dazu beitragen und dabei helfen, unter Berücksichtigung nichtlinearen Verhaltens, Kriterien zur Beurteilung von Ergebnissen aus der linearen Strukturanalyse zu entwickeln.

Bevor jedoch eine genaue Abgrenzung erfolgt, wird zunächst ein grundlegender Überblick über FKV, deren üblichen Betrachtungsweisen in verschiedenen Längenskalen, deren Verhalten unter Belastung und deren Modellierung mittels FEM gegeben.

1.1 Faserverstärkte Kunststoffe

FKV bestehen zumindest aus zwei Bestandteilen. Die Faser, meist aus Kohlenstoff, Glas oder Aramid, wird in eine Matrix, oft aus Epoxid- oder Phenolharz eingebettet. Einzelne Fasern werden üblicherweise zu Bündel (Garne, Rovings) zusammengefasst. Die Verarbeitung kann dann direkt erfolgen, indem unidirektionale Schichten durch Wickeln, Pultrusion oder durch Platzierung von Faserstreifen mittels Verlegerobotern aufgebaut werden. Die Tränkung mit Harz erfolgt während oder nach der genannten Anwendung. Häufiger wird der Aufbau eines Mehrschichtverbundes (MSV), auch Laminat genannt, unter Verwendung von aus Rovings vorgefertigten Halbzeugen durchgeführt. Dabei variiert die Ausrichtung der Fasern von Einzelschicht, oft auch als Lamina oder Lage bezeichnet, zu Einzelschicht entsprechend den vorwiegend ebenen Lastfällen typischer dünnwandiger Leichtbaustrukturen. [33]

Diese hauptsächlich flächigen Halbzeuge können in Form von Geweben, Multiaxialgelegen, Matten und Vliese, 3D-Geweben und Gelegen, Maschenware usw. vorliegen. Ein Überblick sei in Abb. 1.1 gegeben.

Zwei unterschiedliche Arten des Aufbaus eines MSV werden in weiterer Folge betrach-

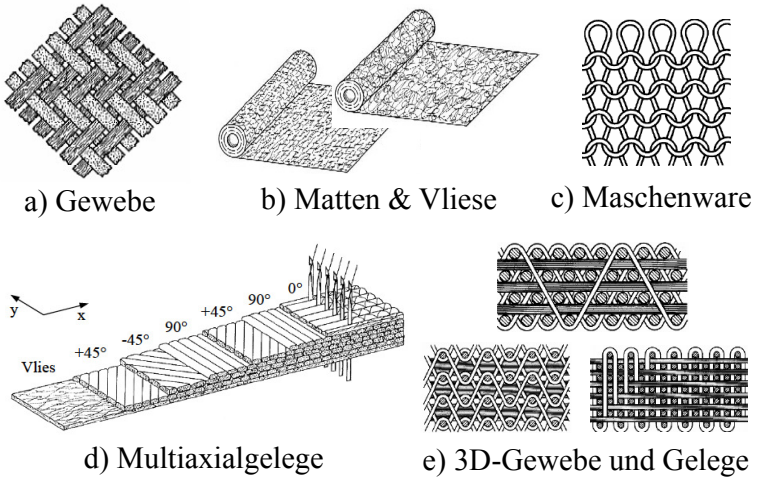


Abbildung 1.1: Übersicht von Faser-Halbzeugen für die Anwendung in der Praxis [33].

tet und zwar die Verwendung von Gewebelagen, auf denen der Fokus dieser Arbeit liegt und Laminateinzelschichten mit unidirektionaler Faserausrichtung. Für letztere wurden eine Vielzahl von Modellen und Bewertungskriterien entwickelt. Sie stellen sehr oft den Ausgangspunkt idealisierter Betrachtungen dar. Zum Beispiel kann auch das Faserbündel eines Gewebes als unidirektionale Einheit betrachtet werden.

Unidirektionale Einzelschicht

Verlaufen alle Fasern in die gleiche Richtung spricht man von einer unidirektionalen Lage (UD-Lage). Obwohl das Verhalten des Materials richtungsabhängig ist, wird es aufgrund von Symmetrieebenen als nicht vollständig anisotrop bezeichnet. Somit besitzt eine Lamina, bei der die Fasern gleichmäßig über den Querschnitt verteilt sind, transversal isotrope Eigenschaften. Die parallele Ausrichtung führt des Weiteren zu einem sehr hohen Faservolumenanteil von bis zu 70%. In Faserrichtung können sehr hohe Festigkeits- und Steifigkeitswerte erzielt werden, während die Eigenschaften quer dazu von der Matrix abhängen und wesentlich niedriger sind. Auch der Widerstand gegen Schubbelastung in Faserrichtung wird wesentlich von der Matrix beeinflusst. Zusätzlich spielt die Faser-Matrix-Verbindung eine wichtige Rolle. Durch die Schichtung von Lagen mit unterschiedlicher Ausrichtung können die Eigenschaften der Belastung angepasst werden. [33]

Der Nachteil solcher Laminate liegt jedoch in den interlaminaren Eigenschaften,

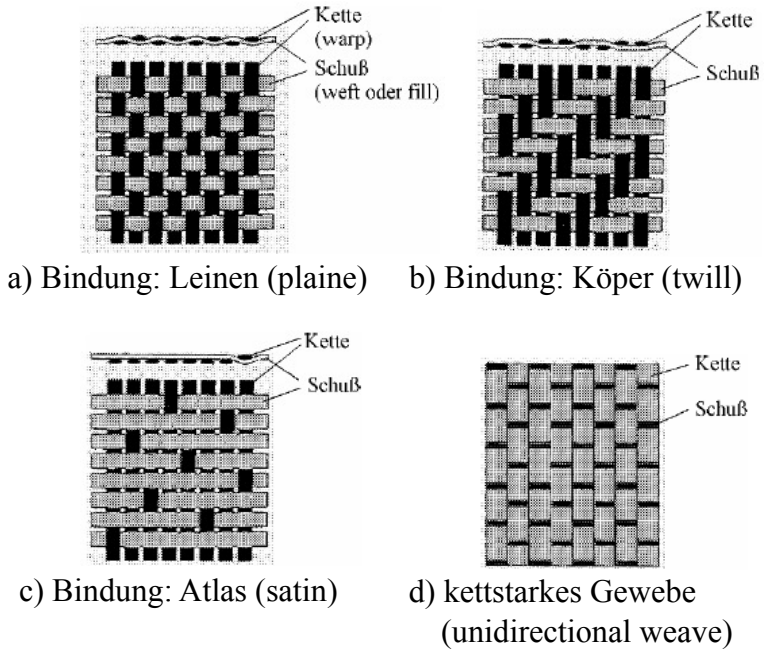


Abbildung 1.2: Darstellung der gebräuchlichsten Gewebekonstruktionen bzw. Webarten. a) Leinenbindung, b) Köperbindung, c) Atlasbindung, d) kettstarkes Gewebe. [33]

da keine Verstärkungen in Dickenrichtung vorliegen. Sie besitzen eine geringere Schlagzähigkeit und Schadenstoleranz als Gewebelaminate. Außerdem sind sie anfälliger für Delaminationen. Die Verwendung von Geweben (Abb. 1.1 a), Multiaxialgelegen (Abb. 1.1 d) oder 3D-Gewebe und Gelege (Abb. 1.1 e) reduzieren diese Neigung, jedoch führen sie auch zu Einbußen bei den Werten in Faserrichtung. [14]

Gewebe aus Faserbündel

Wie in Abb. 1.2 dargestellt, sind verschiedene Webarten möglich. Durch das Verweben entsteht ein Faserbündelverlauf mit vielen Krümmungen. Die Streckung und Stauchung der Fasern bei Belastung führt zu geometrisch nichtlinearem Verhalten und zu lokalen Spannungskonzentrationen [28]. Obwohl die Eigenschaften bei ebener Belastung immer noch sehr gut sind, ist dies der Grund für die geringeren Festigkeits- und Steifigkeitswerte im Vergleich zu UD-Schichten. Auf der anderen Seite weisen sie ein vorteilhafteres interlaminares Verhalten und bessere Kennwerte in Dickenrichtung auf.

Je nach Faserbündelquerschnitt, -abstand, Volumenanteil, Art des Gewebes und Ausrichtung der Einzelschicht können die gewünschten Eigenschaften eingestellt werden.

Es sei zu erwähnen, dass der Volumenanteil der Fasern bei Geweben nicht an denen von unidirektionalen Einzelschichten heran kommt. Der Grund liegt in den Matrixtaschen, die durch das Kreuzen der Rovings entstehen. Während die in Abb. 1.2 a) gezeigte Leinenbindung gute interlaminare Eigenschaften besitzt, nähern sich die Materialkennwerte von kettstarken Geweben (Abb. 1.2 d)) denen von UD-Gelegen an. Zwischen den beiden Extremen befinden sich die Köper- und Atlasbindung (Abb. 1.2 b) und c)). Bei der Köperbindung verlaufen die Schussfäden über und unter zwei oder drei Kettfäden, bei der Atlasbindung über z.B sieben und unter einen Kettfaden. [33]

1.2 Mehrskalenbetrachtung

Aus den vorausgegangen Beschreibungen geht hervor, dass Laminate aus FKV eine bestimmte Reihenfolge in Bezug auf ihren Aufbau einhalten. Die Bestandteile der Faser und der Matrix sind die Ausgangsbasis (Abb. 1.3 c) und werden zur Bildung einer Einzelschicht kombiniert (Abb. 1.3 b). Durch Schichten mehrerer dieser Lagen entsteht ein Laminat, dass schlussendlich der Form und den Anforderungen der gewünschten Struktur entspricht (Abb. 1.3 a). Analog gilt diese Unterscheidung in verschiedene Längenskalen für die Modellbildung. Es erfolgt eine Differenzierung in eine Mikro-, Meso- und Makroskale (Abb. 1.3 f, e und d). [31]

Die Modellierung auf der Mikroebene wird verwendet um das Laminaverhalten voherzusagen und um mikroskopische Spannungsfelder, Verzerrungsfelder und Versagensmechanismen aufzulösen. Die Ergebnisse sind wesentlich von der Interaktion zwischen Faser und Matrix, die häufig nicht bekannt ist, abhängig. Aus diesem Grund werden diese mikromechanische Methoden hauptsächlich genutzt um qualitative Aussagen zu treffen. Bei der Meso-Modellierung hingegen wird eine Lage aus FKV als homogenes Material betrachtet. Mikroskopische Spannungs- und Verzerrungsfelder können dabei nicht aufgelöst werden. Der Vorteil von Meso-Modellen liegt in der einfacheren Anwendung auf dem Level der Makroebene. [31]

Die zentrale Aufgabe der Kontinuummechanik ist es diese Längenskalen zu überbrücken. Dabei erfolgt eine Unterscheidung zwischen *Homogenisieren* und *Lokalisieren*. Ersteres wird genutzt um das Verhalten der Makroskale durch Informationen aus der Mikroskale zu bestimmen. Die wichtigste Anwendung ist die Materialcharakterisierung und die Definition von elastischen Eigenschaften. Beim Lokalisieren geht es

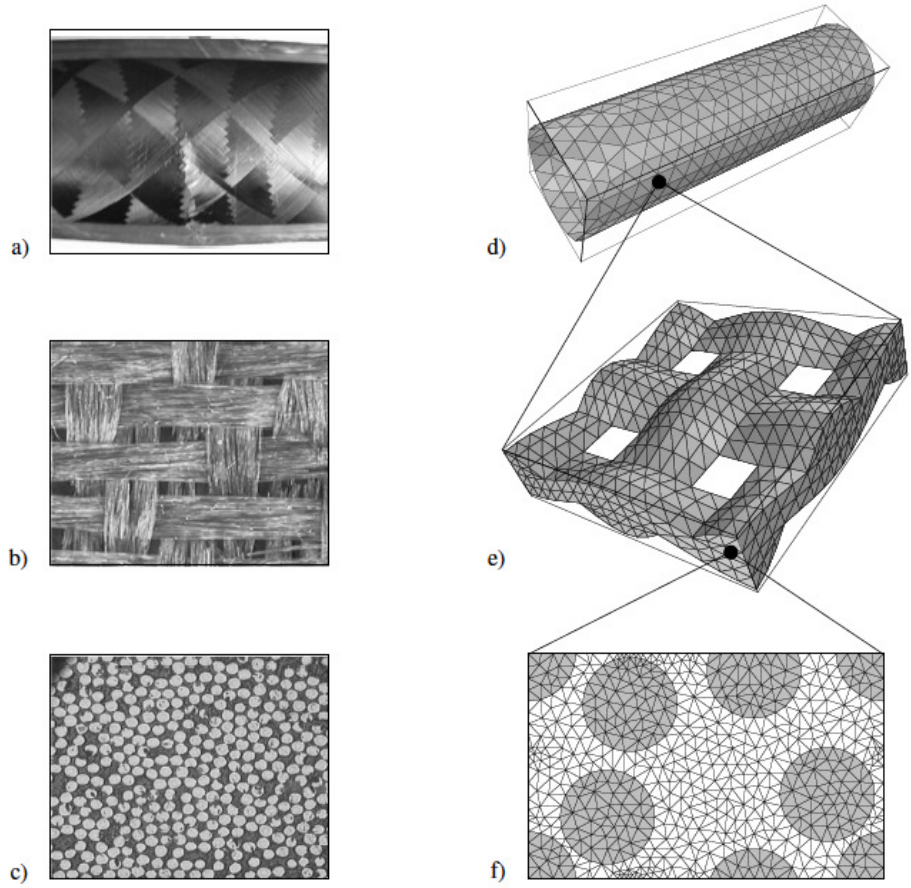


Abbildung 1.3: Mikro-Meso-Makro-Betrachtung des Laminataufbaus eines FKV auf der linken Seite und die entsprechende FEM-Modellierung auf der rechten Seite am Beispiel eines faserverstärkten Zylinders. a) und d) stellen die Makroebene dar, b) und e) die Mesoebene, c) und f) die Mikroebene. [6]

darum, lokales Verhalten infolge globaler Belastung zu bestimmen, also das *Hineinzoomen* von der Makroskale in die Mikroskale. [7]

1.3 Verhalten von Laminaten aus FKV

Um das Verhalten von Strukturen aus faserverstärktem Kunststoff vorhersagen zu können, ist es notwendig die Mechanismen, die während des Belastungsprozesses auftreten, zu kennen. Im Fall von Geweben kann das Faserbündel, bereits ein Verbund aus Fasern und Matrix, als unidirektionale Einzelschicht betrachtet werden. In Längsrichtung dominieren die Eigenschaften der Fasern. Transversal und bei Schubbelastung wird die Eigenschaft wesentlich vom Matrix-Material bestimmt. Dies ermöglicht eine getrennte

Betrachtung in Faserrichtung und quer dazu, wie sie z.B. von Schuecker [31] vorgenommen wird.

1.3.1 Matrixdominiertes Verhalten

Ein großer Teil des nichtlinearen Materialverhaltens kann dem Entstehen von Rissen zugeordnet werden. Sie entwickeln sich in Ebenen parallel zur Faserrichtung in der Einzelschicht. Puck [29] unterscheidet die Ausrichtung der Matrix-Risse abhängig vom anliegenden Spannungszustand. Zu erwähnen ist, dass der Begriff matrixdominierende Schädigung auch die Separation der Faser von der Matrix beinhaltet.

Entsprechend den unterschiedlichen Längenskalen wird zwischen Mikro-, Meso- und Makrorissen unterschieden. In Abb. 1.4 wird das typische Verhalten einer, in einem Laminat eingebetteten, Laminateinzelschicht bei fortschreitender Schädigung durch Matrix-Risse dargestellt. Bei geringer Zug-Belastung verhält sich das Material annähernd linear (Kurve 0-A in Abb. 1.4), was zu der Annahme führt, dass keine (Zunahme der) Schädigung vorliegt. Ausgehend von Punkt A in Abb. 1.4 entstehen zusätzlich zu den bereits bestehenden, produktionsbedingten Fehlstellen neu Risse. Mit steigender Belastung vermehren sich diese, werden größer und wachsen schließlich zusammen bis der erste Riss quer durch die gesamte Einzelschicht vorliegt (Punkt B in Abb. 1.4). Dies wird auch als Versagen einer Lage (First Ply Failure) bezeichnet. Damit einhergehend und bei weiterer Laststeigerung erhöht sich der Grad der Nichtlinearität und die Steifigkeit nimmt ab. Es entstehen mehrer Mesorisse, die in weiterer Folge durch den 3-achsigen Spannungszustand an der Rissspitze zu Delaminationen führen. Schlussendlich erfolgt in Punkt C globales Versagen.

Existieren bereits Risse, z.B durch vorangegangene Belastungszyklen, können sich diese bei Belastung unter Druck wieder schließen. Für diesen und ähnliche Lastfälle führt das zur Wiedererlangung der Normal- und Schubsteifigkeiten vor Rissbildung.

Da die Matrix-Materialien aus z.B. Epoxidharz ein sprödes Bruchverhalten aufweisen, wird der Einfluss von Plastizität in der Literatur oft nicht berücksichtigt. In der Abb. 1.5 sind jedoch die bleibenden Verformungen nach Entlastung ersichtlich. Durch die Prüfanordnung in Abb. 1.5 links wirken hauptsächlich Schubspannungen. Rechts erfolgt eine transversale Druckbelastung. Es ist ersichtlich, dass Plastizität speziell für diese beiden Lastfälle, Schub und Transversal-Druck, eine nicht zu vernachlässigende Rolle

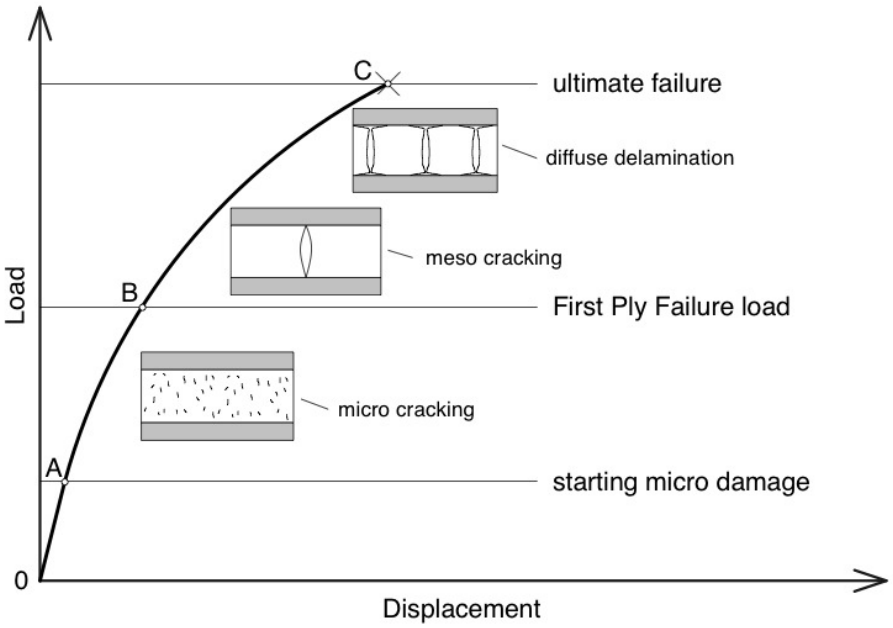


Abbildung 1.4: Schematische Darstellung fortschreitender Matrix-Schädigungsmechanismen und die einhergehende Steifigkeitsabnahme einer Einzelschicht im Mehrschichtverbund. [31]

einnimmt [11].

1.3.2 Verhalten in Faserrichtung

In Längsrichtung der Rovings wird das Materialverhalten hauptsächlich von den Eigenschaften der Fasern beeinflusst. Einachsige Zugversuche in Faserrichtung von UD-Proben zeigen im Wesentlichen elastisches Materialverhalten bis zum Versagen, welches durch Sprödbruch verursacht wird.

Unter Druckbelastung können 2 Schädigungsmechanismen beobachtet werden. Faserverbundwerkstoffe mit sehr spröder Matrix zeigen ein 45°-Scherversagen. In diesem Fall ist die Spannung bei Versagen ähnlich zu der für Zug. Bei Matrix-Material mit höherer Festigkeit aber geringerem E-Modul kommt es zur Instabilität der Fasern. Es bilden sich sogenannte Knickbänder wie in Abb. 1.6 dargestellt aus. Der Schubmodul der Matrix und die Welligkeit der Fasern nehmen einen wesentlichen Einfluss auf das Verhalten.

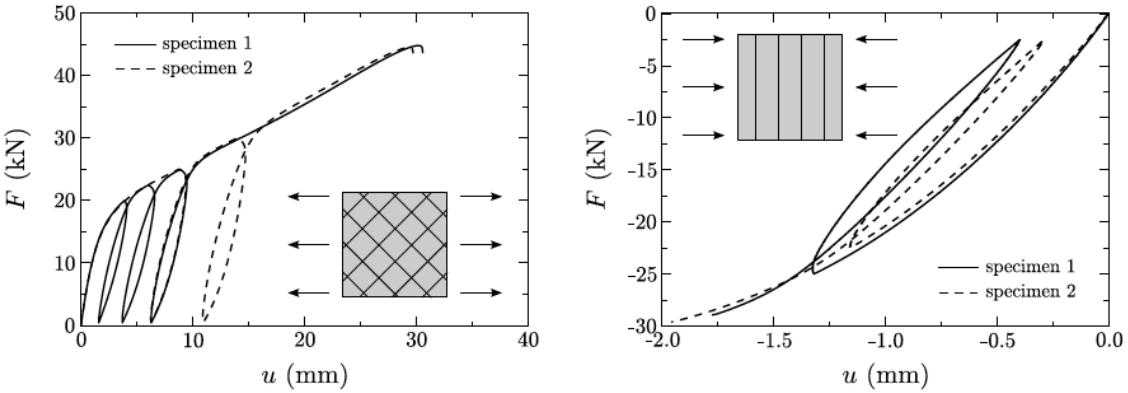


Abbildung 1.5: Belasten, entlasten und wiederbelasten einer $[(\pm 45°)_n]_S$-Probe unter einachsigen Zug (links); Belasten, entlasten und wiederbelasten eines UD-Laminats unter einachsigen transversalen Druck (rechts); Antworten sind über die aufgebrachte Kraft F und den Verschiebungen u angegeben; experimentelle Daten generiert von PCCL. [11]

1.4 FEM-Modellierung

Nachdem nun der Aufbau eines MSV erläutert ist und die Begriffe der Skalenbetrachtung und Schädigungsmechanismen eingeführt sind, erfolgt nun die Betrachtung der FEM-Modellierung. Diese kann aus verschiedenen Blickwinkeln erfolgen. Zum Einen wird je nach Bedarf eine Modellierung auf den unterschiedenen Ebenen der Längenskalen durchgeführt. In der industriellen Anwendung ist die Analyse von kompletten Strukturen von Bedeutung. Auf dieser, der makroskopischen Ebene sind effiziente Modelle wichtig. Es werden das geschichtete FKV-Material und/oder die mit Schalenelementen modellierten Einzelschichten als homogen betrachtet. Auf die Mechanismen und die Interaktion zwischen Faserbündel und Matrixtaschen im mesoskopischen Bereich wird nicht oder kaum eingegangen. Lineare Eigenschaften werden angenommen. Zum Einsatz kommen sogenannte *First Ply Failure*-Kriterien. Um jedoch einfache, aussagekräftige Modelle zur Verfügung stellen zu können, ist eine Betrachtung auf genau dieser, der mesoskopischen Ebene notwendig. Die Möglichkeit der Berücksichtigung von Nichtlinearitäten im Material und/oder zufolge der Geometrie ist gegeben. Schädigungsmodelle lassen sich diesem Bereich zuordnen. Um den Bogen von der einen zur anderen Ebene zu spannen, nutzt man Konzepte wie die Homogenisierung und Lokalisierung (siehe Kap. 1.2). Auf der anderen Seite kann das Verhalten einer Gewebelage über die Modellierung zweier UD-Einzelschichten angenähert werden [28]. Die Schwierigkeit dabei ist jedoch die Wahl der richtigen Materialparameter für

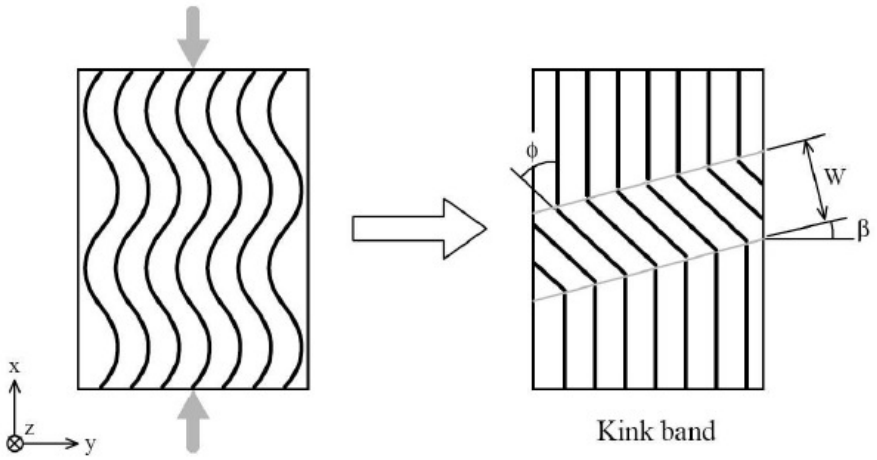


Abbildung 1.6: Darstellung einer UD-Einzelschicht unter Druckbelastung in Faserrichtung. Die Welligkeit der Fasern, eingebettet in eine Matrix mit niedriger Steifigkeit, führt zur Ausbildung von Knickbändern. [31]

das Ersatzmodell, um die Welligkeit der Fasern und den lokal variierenden Faseranteil zu berücksichtigen. Zwar ist eine brauchbare Analyse in Bezug auf Steifigkeiten möglich, die unbekannten Festigkeitswerte des Modells aus UD-Lagen führen jedoch zu Problemen bei einer Versagensanalyse. Zu guter letzt könnte man eine Betrachtung entsprechend der historischen Entwicklung der einzelnen Modelle und Kriterien anstellen. In dieser Arbeit wird eine Unterscheidung zwischen *First Ply Failure Models* und *Damage Models* vorgenommen. Welche Möglichkeiten sie bieten, welche Ziele sie verfolgen und welche Voraussetzungen sie benötigen wird im Anschluss erläutert.

Bei der Lektüre der nächsten zwei Unterkapitel sollte man beachten, dass diese Modelle und Kriterien für unidirektionale Einzelschichten etabliert wurden. Die Abhandlung von Geweben ist in weiterer Folge nur über Umwege möglich. Wie bereits erwähnt, kann das Faserbündel als unidirektionale Einzelschicht betrachtet werden.

1.4.1 First Ply Failure - Analyse

Als *First Ply Failure* (FPF) wird üblicherweise das Auftreten des ersten Risses in der Matrix quer durch eine gesamte Lage oder der Bruch eines Faserbündels bezeichnet. Für laminierte Strukturen aus Faserverbundwerkstoff ist das Auftreten des FPF lange bevor das Versagen der gesamten Struktur eintritt typisch [28].

Zur Vorhersage von FPF wurden verschiedene Kriterien entwickelt. Einen guten

Überblick geben Schuecker und Flatscher in ihren Arbeiten ([31], [11]). Das einfachste, das von keiner Interaktion der Spannungskomponenten in der Lage ausgeht, ist sicherlich jenes der maximalen Spannungen und der maximalen Verzerrungen. Eine weitere Gruppe bilden die, die eine mathematische Anpassung an experimentelle Daten vornehmen. Tsai-Wu [34] oder Tsai-Hill [18] benutzen dafür quadratische Polynome. Puck [29] nimmt eine Anpassung an Versuchsdaten durch Formulierungen, denen unterschiedliche Fehlermechanismen zu Grunde liegen, vor. Seine Arbeit baut auf jene von Hashin [15] auf. Pucks FPF-Kriterium ist zwar das komplexeste, es hat sich jedoch gezeigt, dass es die besten Ergebnisse liefert [17].

Die Vorteile einer FPF-Analyse liegen in ihrem niedrigen Aufwand. Sie benötigen nur geringe rechnerische Ressourcen. Bis zum Eintreten des FPF nehmen diese Kriterien ein lineares Materialverhalten an. Andererseits resultieren die Ergebnisse in konservativen Versagenslasten. FPF-Methoden eignen sich sehr gut für Konstruktions- und Optimierungsprozesse. Sobald man das gesamte Leichtbaupotenzial ausschöpfen möchte, ist das nichtlineare Verhalten durch fortschreitende Schädigung von Interesse [11].

1.4.2 Degradationsanalyse

In vielen Fällen kann die Last nach dem Eintreten des FPF noch signifikant erhöht werden. Um nichtlineares Materialverhalten durch Schädigung von Beginn an zu berücksichtigen und auch den Bereich nach dem Einzelschichtversagen zu untersuchen eignen sich Degradationsmodelle. Hierbei wird Schädigung auf Lagenebene als verschmiert betrachtet. Die Steifigkeit des somit als homogen angenommenen Kontinuums wird mit fortschreitender Schädigung herabgesetzt. Dadurch wird es möglich die Umverteilung der Last von der geschädigten Einzelschicht in benachbarte Lamina des MSV zu berechnen. Diese Art und Weise der Modellierung wird vorwiegend an detaillierten Submodellen durchgeführt. Um den Spannungszustand an einer Rissspitze in die Analyse miteinzubeziehen müsste man sich der Bruchmechanik bedienen. Für eine gesamtstrukturelle Betrachtung wäre das aus Gründen der zur Verfügung stehenden Ressourcen nicht möglich (vergleiche mit [33] und [29]).

Für die Herabsetzung der Steifigkeit des Materials bei fortschreitender Rissbildung ist es notwendig einen Schädigungsparameter und ein Evolutionsgesetz zu definieren. Ersterer ergibt sich zumeist durch Verwendung von Spannungsgrößen. Letzteres basiert auf phenomenologischen Betrachtungen. Verwendete Parameter werden häufig aus Versu-

chen generiert. Im Laufe der Zeit entstanden eine Vielzahl von Schädigungsmodellen. Einen Überblick gibt Flatscher in seiner Arbeit [11]. Es folgt ein Auszug aus dieser:

Kachanov [19] führte ein Modell für isotrope Materialien unter Verwendung von Schädigungsvariablen ein. Dieses wurde unter anderen z.B. von Chaboche [9] für die Anwendung auf anisotrope Materialien erweitert. Der Nachteil ist, dass diese nicht notwendigerweise thermodynamisch konsistent sind. Degradationsmodelle, die auf thermodynamischen Betrachtungen beruhen wurden z. B. in der Arbeitsgruppe von Cachan entwickelt ([5], [20] und [21]). Diese basieren auf Energiepotentialen. Das Modell von Matzenmüller et al. [27] nimmt eine Unterscheidung in verschiedene Schädigungsmechanismen vor. Eine ebenfalls phenomenologische Herangehensweise, die sich Ansätzen der Mikromechanik bedient, wurde von Schuecker und Pettermann ([31] und [32]) vorgestellt. Ein im FEM Programm Abaqus/Standard 6.12 von Dassault Systemes Simulia Corp., Providence, RI, USA implementiertes Modell von Lapczyk und Hurtado [22] wird im nächsten Kapitel genauer behandelt. Darin wird Schädigungsbeginn mit dem Kriterium von Hashin [15] vorhergesagt. Die Bedingungen des Schädigungsfortschritts beruhen auf dissipierten Energien.

1.5 Abgrenzung der Arbeit

Aus den vorangegangenen Kapiteln geht hervor, dass die Vorhersage des Verhaltens von Gewebelaminaten nur unzureichend möglich ist. In der Praxis verwendet man aus Materialprüfungen abgeleitete zulässige Spannungen und Verzerrungen, sowie die elastischen Moduli und Querdehnungszahlen. Unter Verwendung der Moduli, Querdehnungszahlen und den materialspezifischen geometrischen Daten werden Analysen durchgeführt. Durch den Vergleich der Ergebnisse mit den Spannungen und Verzerrungen bei FPF ergibt sich ein Sicherheitsfaktor. Dies entspricht dem Kriterium der maximalen Spannungen und Verzerrungen. Wie bereits erwähnt führt diese Herangehensweise zu konservativen Ergebnissen. Zum Einen wird das Materialverhalten als linear angenommen und zum Anderen werden Lastumlagerungen, infolge von Schädigung in einer Lage zu benachbarten Lagen, nicht berücksichtigt. Diese führen jedoch oft dazu, dass Strukturen bis zum totalen Versagen ein Vielfaches der zulässigen Spannungen und Verzerrungen ertragen können [31]. Der Grad der Materialauslastung wird somit nur unzureichend eingeschätzt.

In dieser Arbeit soll folgende zentrale Frage geklärt werden: Ist es möglich, den Grad der Materialauslastung durch skalare Größen zu beschreiben, die eine Beurteilung über kritische und nicht kritische Zustände zulassen? Dabei wird der Ansatz verfolgt, auf der Mesoebene dissipierte Energien zufolge der Belastung zu nutzen. Unter Berücksichtigung nichtlinearer Effekte, wie der Abbau von Spannungsspitzen, Umlagerung der Spannungen durch lokale Schädigung, etc. sind Hüllflächen im Spannungsraum zu erstellen. Es werden ebene Spannungszustände angenommen und der Spannungsraum besteht aus dessen Komponenten. Die Hüllflächen ergeben sich einerseits aus zu definierenden Niveaus dissipierter Energien. Andererseits werden Simulationen möglichst gleichmäßig im Spannungsraum verteilter Spannungszustände mit einem geeigneten FE-Programm benötigt. Die Annahme radialer Spannungssteigerung wird jedoch keine generelle Gültigkeit besitzen. Über den linearen Bereich hinaus ist zu erwarten, dass die lastgesteuerte Antwort von der verschiebungsgesteuerten abweichen wird. Der Spannungszustand verändert sich entsprechend der zunehmenden Schädigung. Somit wäre die Untersuchung auch verschiebungsgesteuert durchzuführen und die Unterschiede in den Ergebnissen als obere und untere Schranken zu verstehen. Diese Arbeit beschäftigt sich jedoch mit der Erstellung des Konzepts und behandelt deswegen nur den lastgesteuerten Teil.

Anhand eines konkreten Beispiels ist schlussendlich auch zu untersuchen, ob aus dem Verhalten des RVE direkt Kriterien für kritische Zustände/Energieniveaus generiert werden können. Diese Kriterien würden in weiterer Folge die Beurteilung von Ergebnissen aus linearen Strukturanalysen erleichtern.

Das Kapitel 2 beschäftigt sich mit der Wahl eines geeigneten Volumenelementes, der Modellierung des Gewebes, den entsprechenden Bedingungen, die den Kontakt der einzelen Komponenten beschreiben, dem Materialgesetz, welches das nichtlineare Verhalten berücksichtigt und den Randbedingungen, die benötigt werden. Im Kapitel 3 wird das Konzept zur Nutzung von Niveaus dissipierter Energien eingeführt. Dazu erfolgt zunächst die Herleitung der benötigten Energiegrößen. Des Weiteren wird die Verteilung der Spannungszustände im ebenen Spannungsraum erörtert, welche schlussendlich die notwendigen Simulationen zur Erzeugung der Hüllflächen ermöglichen. Das Einrichten eines konkreten Beispiels, die Untersuchung einer 2/2 Köperbindung wird in Kapitel 4 durchgeführt. Die Berechnung erfolgt mit dem FEM-Programm Abaqus/Standard 6.12 von Dassault Systemes Simulia Corp., Providence, RI, USA. Kapitel 5 behandelt die Analyse und Diskussion der erzeugten Hüllflächen und der generierten Daten.

Es erfolgt eine Betrachtung hinsichtlich der Bestimmung des Übergangs zu kritischen Zuständen. Eine Zusammenfassung der Arbeit und einen Ausblick für weiterführende Themen liefert Kapitel 6.

Kapitel 2

FEM-Modell

Um den Grad der Materialauslastung eines Laminats aus Gewebelagen untersuchen zu können, ist eine geeignete Modellierung zu wählen. Diese erfolgt im mesoskopischen Bereich. Auf dieser Ebene ist eine entsprechende Auflösung der im Material ablaufenden Mechanismen möglich, um Daten für die in Kapitel 1.5 genannten Ziele generieren zu können. Die folgenden Unterkapitel skizzieren den Weg zu einem für Analysen geeigneten Modell.

2.1 Konzept des RVE

Zunächst ist ein geeignetes Volumen zu wählen, welches ausreichend groß ist, um alle Informationen zu enthalten, die für die Beschreibung des Gewebmaterials notwendig sind. Dieses wird auch repräsentatives Volumenelement oder Referenzvolumenelement genannt. Es muss im vorliegenden Fall die Bedingung erfüllen, dass die Antwort auf eine gegebene physikalische Belastung unabhängig von der aktuellen Position, der Orientierung und/oder den definierten Randbedingungen des RVE ist. Das heißt es muss groß genug sein um bedeutende mikrostrukturelle Bestandteile (Faserbündel, Matrixtaschen) zu assemblieren und klein genug um makroskopische Gradienten vernachlässigen zu können. [7]

Die Voraussetzung für die Verwendung des Konzepts der RVE kann auch wie folgt beschrieben werden. Es muss eine Makroskale L_{makro} der Struktur, eine Mesoskale L_{meso}, das RVE, und eine Mikroskale L_{mikro} der mikrostrukturellen Komponenten, vorliegen.

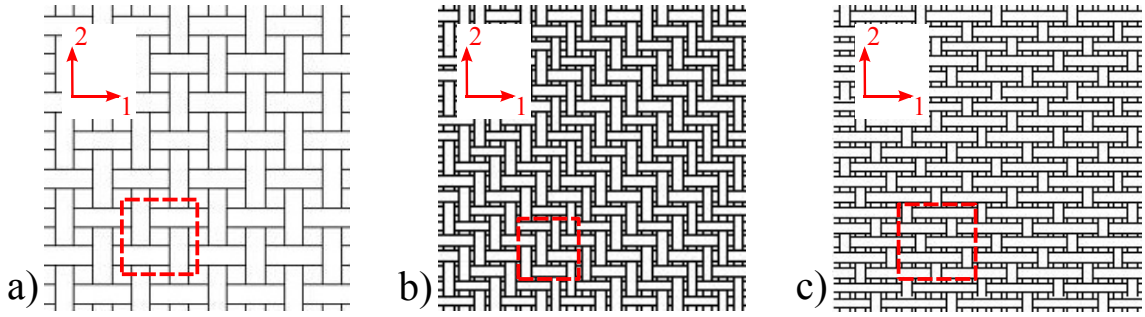


Abbildung 2.1: Darstellung von RVE inklusive Translationsachsen. Leinenbindung a), Köperbindung b), Atlasbindung c).

Um eine statistische Homogenität gewährleisten zu können, hat

$$L_{\text{mikro}} << L_{\text{meso}} << L_{\text{makro}} \tag{2.1}$$

zu gelten. [6]

Speziell in Dickenrichtung einer einzelnen Gewebelage kann die in Gl. (2.1) definierte Bedingung offensichtlich nicht erfüllt werden. Trotzdem ist das Konzept des RVE zur Zeit die vielversprechenste Herangehensweise [31].

2.1.1 Periodische Einheit des Gewebematerials

Für die zu Grunde liegenden Gewebe bietet sich für die Definition des RVE die Ausnutzung der Periodizität an. Somit kann das zumeist zweiphasige Material aus einer Aneinanderreihung der definierten periodischen Einheit entlang der Translationsachsen assembliert werden. Zu Beachten ist, dass obwohl ein zweidimensional periodisches Medium vorliegt, die Einheitszelle dreidimensional modelliert werden muss. Gewebe weisen in Dickenrichtung ein inhomogenes Materialverhalten auf [28]. Translatorisch periodische Einheiten für verschiedene Webarten werden inklusive Translationsachsen exemplarisch in Abb. 2.1 dargestellt.

Auch für Gewebe, die drei Faserrichtungen aufweisen (0°, 60°, 120°) und solche, bei denen die Faserbündel nicht orthogonal verlaufen, besitzen Periodizität. Der Unterschied liegt darin, dass die Tranlationsvektoren nicht mehr normal zueinander stehen und die Einheitszelle somit nicht mehr die Form eines rechteckigen Quaders besitzt.

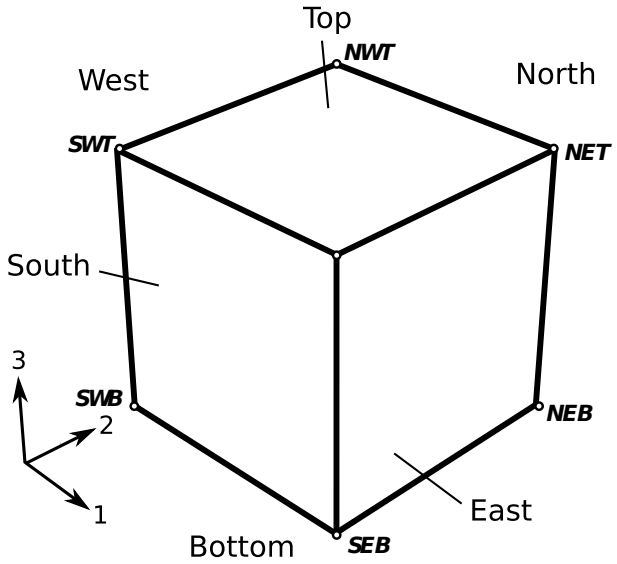


Abbildung 2.2: Notation der Flächen, Kanten und Ecken der Einheitszelle. [7]

2.1.2 Periodische Spannungen und Verzerrungen

Die Periodizität muss nicht nur im unverformten Zustand gegeben sein, sondern auch im deformierten. Unter Belastung dürfen bei aneinander gereihten Einheitszellen keine Spalten, Überlappungen und Sprünge entstehen [7]. Dies ist durch die Definition entsprechendender Randbedingungen zu gewährleisten.

Für deren Beschreibung ist zunächst die Einführung einer einheitlichen Notation für die Flächen, Kanten und Ecken des RVE notwendig. Diese kann den Arbeiten von Böhm [7], Marte [26] und Lobner [24] entnommen werden und ist in Abb. 2.2 dargestellt. Die Buchstaben N, E, S, W stehen für Norden (North), Osten (East), Süden (South), Westen (West), B, und T für die Unter- und Oberseite (bottom and top) der Einheitszelle. Damit ist eine eindeutige Zuordnung der Flächen, Kanten und Ecken möglich.

Um Periodizität zu gewährleisten, ist es notwendig die Knoten der Ost- mit jenen der West-Fläche zu koppeln. Dies gilt ebenso für die Nord- und die Süd-Seite. Die Knoten der Kanten SE, NE und NW sind jeweils zu denen der Kante SW zu beziehen. Die Eckknoten werden mit SWB gekoppelt. Die ausführlichen Gleichungen dazu sind in der Arbeit von Marte [26] und der Arbeit von Lobner [24] zu finden.

Abbildung 2.3: Mikroskopieaufnahme einer Gewebelaminat-Probe. Zu erkennen sind die nachgezeichneten Faserbündelquerschnitte und der Faserbündelverlauf. [26]

2.1.3 Makroskopische Spannungen und Verzerrungen

Die Belastung der Einheitszelle erfolgt indem der makroskopische Spannungs-/Verzerrungszustand in Form von Kräften/Verschiebungen aufgebracht wird. Diese Methode nennt sich das *Master Node*-Konzept und ist in [7] beschrieben.

Im Falle von quaderförmigen Einheitszellen erhält man die Kräfte bzw. Verschiebungen an den *Master Nodes* (NWB, NWT, SEB, SET, SWB, SWT) sehr einfach. Bei kraftgesteuerten Analysen wird die auf eine Seitenfläche wirkende Spannung mit der dazugehörigen Fläche multipliziert. Zusätzlich ist es notwendig Vorkehrungen zu treffen um Starrkörperrotationen zu vermeiden. Um unerwünschte Krümmungsänderungen und Verdrillungen zu verhindern sind gegebenenfalls die Reaktionen auf Momente an den *Master Nodes* zu unterdrüchen. Bei verschiebungsgesteuerten Analysen bekommt man die aufzubringenden Verschiebungen indem die Komponenten des Verzerrungstensors mit der dazugehörigen Kantenlänge des RVE multipliziert werden.

Die Knoten NEB und NET werden zum Aufbringen der Belastung nicht benötigt, da durch die Periodizitätsbedingungen deren Reaktion bereits definiert ist.

2.2 Modellieren mit Schalenelementen

Die Struktur einer Gewebelage in einem ausgehärteten Laminat ist sehr komplex. Die Form, die Verteilung, der Verlauf und die Ausrichtung der Faserbündel unterliegen zwar einer gewissen Regelmäßigkeit, können aber nicht als über einen Bereich völlig gleichmäßig bzw. gleichbleibend betrachtet werden. In Abb. 2.3 wird eine Mikroskopieaufnahme einer Gewebelaminatprobe gezeigt. Für die Modellierung müssen Faserbündelquerschnit, -ondulation und -topologie idealisiert werden. Auch ein entsprechender Elementtyp ist zu wählen. Das Faserbündel wird häufig durch einen Rechtecks-

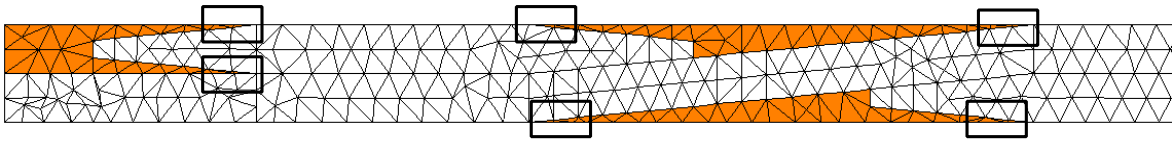


Abbildung 2.4: Schnitt einer Einheitszelle aus Kontinuumselementen einer 2/2 Köperbindung. Rechtecke markieren die spitzen Elemente der Matrixtaschen. [26]

oder Doppeltrapezquerschnitt angenähert [26]. Auch Modelle mit eliptischen [8] und linsenförmigen [14] Querschnitten sind in der Literatur vorhanden.

Für erste Abschätzungen der Steifigkeit in Faserrichtung eignen sich durchaus Balkenelemente. Sehr häufig erfolgt eine Modellierung mittels Kontinuumselemente. Diese ermöglichen detailliertere Untersuchungen und führen zu besseren Ergebnissen ([8] und [26]). Der Nachteil liegt einerseits in der hohen Anzahl von Freiheitsgraden. Die Lösung der FEM-Gleichungen ist somit mit einem hohen Bedarf an Rechnerkapazität verbunden. Andererseits resultiert der Verlauf und Querschnitt der Faserbündel in aufwendige Geometrien der Matrixtaschen. Es entstehen in der Regel spitze Elemente und ein erhöhter Modellierungsaufwand. Abb. 2.4 soll dies untermauern.

Diese Arbeit basiert auf der Strategie des Modellierens mit Schalenelementen von Gager und Pettermann [14]. Die Verwendung solcher Elemente führt zu einer wesentlichen Verringerung der Freiheitsgrade. Durch das geringe Breiten-Dicken-Verhältnis der Faserbündel eines Gewebes ist der Einsatz von Schalenelementen gerechtfertigt.

Beide Konstituenten, Faserbündel und nichtverstärkte Matrixtaschen, werden getrennt mit Schalenelementen modelliert. Das Konzept ist in Abb. 2.5 dargestellt. Die Referenzfläche der Elemente der Faserbündel befindet sich auf deren Mittelfläche. Über die Schalendicke wird ein rechteckiger Querschnitt des Faserbündels modelliert. Die gleiche Vorgehensweise funktioniert auch für andere Querschnittsformen. Die strichlierten Pfeile geben die Schalendicke und die Dickenrichtung an. Die Modellierung der Matrixtaschen erfolgt über zwei Referenzflächen. Eine befindet sich an der Oberseite, die andere an der Unterseite. Um nun die Matrixtaschen zu füllen ist durch die lokale Geometrie die Anwendung einer variablen Elementdicke notwendig. In Abb. 2.5 ist dies mit den durchgezogenen Pfeilen dargestellt.

Die Schalenelemente der Faserbündel und die der Matrixtaschen sind nicht direkt miteinander verbunden. An den Kreuzungsstellen, wo sich die Faserbündel überlappen

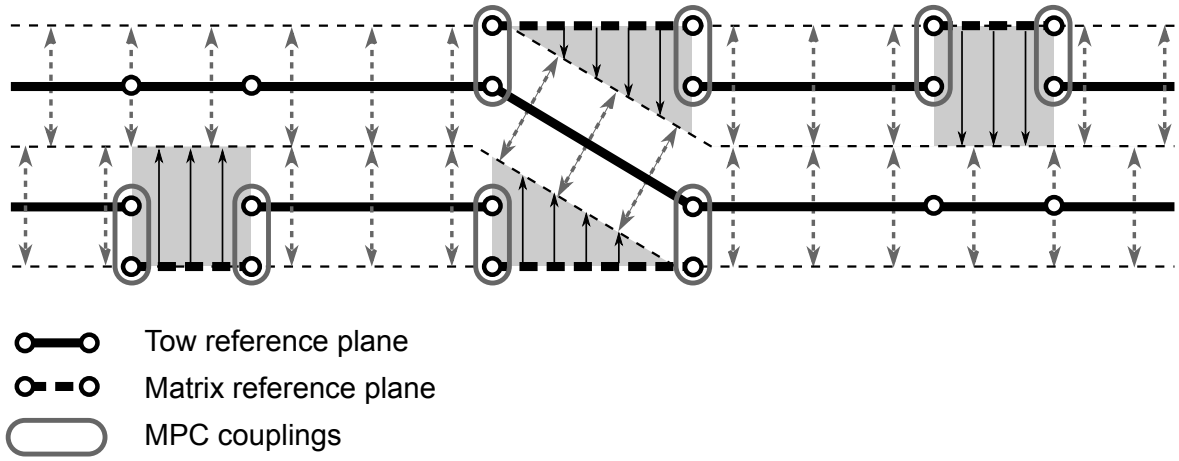


Abbildung 2.5: Konzept der Modellierung mit Schalenelementen. Der Schnitt zeigt die Referenzflächen der Elemente, den Offset und die Dicke der Schalenelemente. [14]

werden die Referenzflächen der Rovings entsprechend gekoppelt. Diese Kopplungen berücksichtigen die Schalendicke und die Kinematik der Schalenelemente. Selbiges wird durchgeführt um Matrixschalen mit den entsprechenden Matrixschalen oder Elementen der Faserbündel zu verbinden. Die Kanten der Matrixelemente werden mit denen der Faserbündel unter Verwendung von *Multiple Point Constraints* verbunden (siehe abgerundete Rechtecke in Abb. 2.5). Diese berücksichtigen wiederum die Kinematik der Schalenelemente und koppeln die Freiheitsgrade der Knoten in Bezug auf Schalendicke und Rotation der Knoten.

2.3 Materialgesetz

In Bezug auf die zu verwendenden Materialmodelle werden die Faserbündel als unidirektionaler FKV behandelt. Sie verhalten sich transversal isotrop und weisen elastisch-spröde Eigenschaften auf. Zur Anwendung kommt das Materialmodell von Lapczyk und Hurtado [22], dass Abaqus/Standard v6.12 zur Verfügung stellt. Dieses basiert auf dem Kriterium von Hashin zur Vorhersage des Beginns der Schädigung [15]. Darauf folgend sorgen entsprechende Formulierungen für die Degradation der Steifigkeit im Zuge des Schädigungsfortschritts.

Das Verhalten der Matrixtaschen wird als elasto-plastisch isotrop angenommen. Zum Einsatz kommt das lineare Drucker Prager Fließkriterium [10].

Die Interaktion aller Berührungsflächen der beiden Konstituenten, Faserbündel-Faserbündel und Faserbündel-Matrixtaschen, wird als ideal betrachtet.

2.3.1 Faserbündel - Abaqus Schädigungsmodell für FKV

Das in Abaqus implementierte Schädigungs- und Versagensmodell für FKV setzt sich aus zwei wesentlichen Bestandteilen zusammen, der Initiierung und dem Forstschreiten der Schädigung. Zu beachten ist, dass wir uns nicht auf der Ebene der Einheitszelle und dessen Koordinatensystem (1-2-3) befinden. Es erfolgt die Einführung eines lokalen Koordinatensystems für die Faserbündel. Dabei wird deren longitudinale Richtung mit l, die transversale Richtung in der Ebene mit q und die transversale Richtung senkrecht zur Faserbündelebene mit r bezeichnet.

Schädigungsinitiierung

Die Initiierung der Schädigung beschreibt den Beginn der Degradation der Steifigkeit. Sie erfolgt durch das Kriterium nach Hashin und Rotem [16] oder Hashin [15]. Voraussetzung dafür ist ein bis dahin linear elastisches Materialverhalten. Diese beiden Kriterien unterscheiden in vier verschiedene Versagensmechanismen:

Zugbelastung in Faserrichtung ($\hat{\sigma}_{ll} \geq 0$):

$$F_{\mathrm{f}}^{\mathrm{t}} = (\frac{\hat{\sigma}_{ll}}{R_{ll}^{\mathrm{t}}})^2 + \alpha(\frac{\hat{\sigma}_{lq}}{R_{lq}})^2 \ . \tag{2.2}$$

Druckbelastung in Faserrichtung ($\hat{\sigma}_{ll} < 0$):

$$F_{\mathrm{f}}^{\mathrm{c}} = (\frac{\hat{\sigma}_{ll}}{R_{ll}^{\mathrm{c}}})^2 \ . \tag{2.3}$$

Zugbelastung quer zur Faserrichtung ($\hat{\sigma}_{qq} \geq 0$):

$$F_{\mathrm{m}}^{\mathrm{t}} = (\frac{\hat{\sigma}_{qq}}{R_{qq}^{\mathrm{t}}})^2 + (\frac{\hat{\sigma}_{lq}}{R_{lq}})^2 \ . \tag{2.4}$$

Druckbelastung quer zur Faserrichtung ($\hat{\sigma}_{qq} < 0$):

$$F_{\mathrm{m}}^{\mathrm{c}} = (\frac{\hat{\sigma}_{qq}}{2S^{\mathrm{T}}})^2 + \left[(\frac{R_{qq}^{\mathrm{c}}}{2S^{\mathrm{T}}})^2 - 1\right] \frac{\hat{\sigma}_{qq}}{R_{qq}^{\mathrm{c}}} + (\frac{\hat{\sigma}_{lq}}{R_{lq}})^2 \ . \tag{2.5}$$

Wobei R_{ll} und R_{qq} für die Festigkeitswerte in Faserrichtung und quer dazu stehen. Die Buchstaben t und c beziehen sich jeweils auf den Zug- oder Druckspannungszustand. R_{lq} bezieht sich auf den Wert der Schubfestigkeit in longitudinaler Richtung. Für α wird der Wert null angenommen und für die transversale Schubfestigkeit S^{T} wird $R_{qq}^{\mathrm{c}}/2$ eingesetzt. Dies entspricht der Arbeit von Hashin und Rotem [16].

$\hat{\sigma}_{ll}$, $\hat{\sigma}_{qq}$ und $\hat{\sigma}_{lq}$ sind die Komponenten des effektiven Spannungstensors $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{tow}}$. Diesen erhält man aus der Gleichung

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{tow}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{tow}}^{\mathbf{tot}} \ . \tag{2.6}$$

Mit $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{tow}}^{\mathbf{tot}}$ werden die wahren Spannungen im Faserbündel bezeichnet. Der Schädigungsoperator $\boldsymbol{M}$ liegt in folgender Form vor:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-d_{\mathrm{f}})} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-d_{\mathrm{m}})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_{\mathrm{s}})} \end{bmatrix} \ . \tag{2.7}$$

Die Variablen d_{f}, d_{m} und d_{s} beschreiben den aktuellen Stand der Faser-, der Matrixschädigung und der Schädigung zufolge einer Schubbelastung. Sind deren Werte gleich 0 ist keine Schädigung vorhanden. Bei 1 liegt totales Versagen vor. Sie resultieren aus den vier Versagensmechanismen und es kann wiederum in $d_{\mathrm{f}}^{\mathrm{t}}$, $d_{\mathrm{f}}^{\mathrm{c}}$, $d_{\mathrm{m}}^{\mathrm{t}}$ und $d_{\mathrm{m}}^{\mathrm{c}}$ unterschieden werden. Für d_{s} gilt

$$d_{\mathrm{s}} = 1 - (1 - d_{\mathrm{f}}^{\mathrm{t}})(1 - d_{\mathrm{f}}^{\mathrm{c}})(1 - d_{\mathrm{m}}^{\mathrm{t}})(1 - d_{\mathrm{m}}^{\mathrm{c}}) \ . \tag{2.8}$$

Das Einführen des Schädigungsoperators in der Gl. (2.6) ist wichtig um eine Verbindung zwischen der Initiierung und dem Fortschreiten der Schädigung herzustellen. So entspricht $\boldsymbol{M}$ der Einheitsmatrix, wenn noch keine Schädigung vorliegt. Das heißt $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{tow}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{tow}}^{\mathbf{tot}}$. Sobald bei einem der Versagensmechanismen Schädigung auftritt ($F_{\mathrm{f}}^{\mathrm{t}} \vee F_{\mathrm{f}}^{\mathrm{c}} \vee F_{\mathrm{m}}^{\mathrm{t}} \vee F_{\mathrm{m}}^{\mathrm{c}} = 1$) und in weiterer Folge fortschreitet, wird $\boldsymbol{M}$ für die Bestimmung der Schädigungsinitiierung der verbleibenden Mechanismen wirksam. Der effektive Spannungstensor $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{tow}}$ ist somit zu verstehen als die Spannung, die in der

unmittelbaren Umgebung des geschädigten Bereichs den internen Kräften entgegen wirkt.

Schädigungsfortschritt

Vor dem Auftreten von Schädigung wurde linear elastisches Materialverhalten angenommen. Nach Schädigungsbeginn wird die Antwort des Materials aus der Gleichung

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{tow}}^{\mathbf{tot}} = \boldsymbol{E}_{\mathbf{d}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{tow}} \ , \tag{2.9}$$

mit $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{tow}}$ für den Vektor der Verzerrungskomponenten und $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{tow}}^{\mathbf{tot}}$ für den Vektor der Spannungskompnenten berechnet. $\boldsymbol{E}_{\mathbf{d}}$ ist die geschädigte Elastizitätsmatrix und hat die Form

$$\boldsymbol{E}_{\mathbf{d}} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} (1-d_{\mathrm{f}})E_l & (1-d_{\mathrm{f}})(1-d_{\mathrm{m}})\nu_{ql}E_l & 0 \\ (1-d_{\mathrm{f}})(1-d_{\mathrm{m}})\nu_{lq}E_q & (1-d_{\mathrm{m}})E_q & 0 \\ 0 & 0 & (1-d_{\mathrm{s}})G_{lq}D \end{bmatrix} , \tag{2.10}$$

mit $D = 1-(1-d_{\mathrm{f}})(1-d_{\mathrm{m}})\nu_{lq}\nu_{ql}$. E_l ist der Elastizitätsmodul in Faserrichtung, E_q jener quer dazu. G_{lq} repräsentiert den Schubmodul, ν_{lq} und ν_{ql} die Querdehnungszahlen.

Der Degradationsfortschritt der Koeffizienten d_{f}, d_{m} und d_{s} wird durch ein Gesetz gesteuert, das auf der spezifischen Bruchenergie, die während des Schädigungsprozesses dissipiert wird, beruht. Die Entwicklung dieser Variablen erfolgt über äquivalente Verschiebungen. Diese werden auf die entsprechenden effektiven Spannungskomponenten, die im Initiierungskriterium Verwendung finden, bezogen. $\delta_{i,\mathrm{eq}}^{0}$ beschreibt die Verschiebung bei Schädigungsbeginn. $\delta_{i,\mathrm{eq}}^{\mathrm{fail}}$ basiert auf der dissipierten Bruchenergiefreisetzungsrate G_c bei Versagen. Die Schädigungsvariablen für jeden Versagensmechanismus ergeben sich somit aus der Gleichung

$$d_i = \frac{\delta_{i,\mathrm{eq}}^{\mathrm{fail}}(\delta_{i,\mathrm{eq}} - \delta_{i,\mathrm{eq}}^{0})}{\delta_{i,\mathrm{eq}}(\delta_{i,\mathrm{eq}}^{\mathrm{fail}} - \delta_{i,\mathrm{eq}}^{0})} \ . \tag{2.11}$$

in der $\delta_{i,\mathrm{eq}}$ die momentane äquivalente Verschiebung darstellt.

Um in vielen Fällen Konvergenz zu gewährleisten wird die in Abaqus integrierte Funktion der viskosen Regularisierung eingesetzt. Es ist darauf zu achten, dass der Anteil der viskosen Regularisierung klein bleibt, um eine nur geringe Verfälschung der Ergebnisse

sicher zu stellen.

Eine detaillierte Beschreibung kann [10] und [23] entnommen werden.

2.3.2 Matrixtaschen - Drucker-Prager-Fließkriterium

Das Drucker-Prager-Modell, wie es in [10] definiert ist, eignet sich für Materialien deren Fließspannung für Druckbelastung höher ist als für Zugbelastung. Polymer-Materialien weisen üblicherweise dieses Verhalten auf. Es erlaubt isotrope Ver- und Entfestigung.

In Abb. 2.6 links ist die Drucker-Prager-Fließfläche des linearen Modells veranschaulicht. Diese nutzt die drei Invarianten des Spannungstensors, welche in modifizierter Form dargestellt werden können als die mittlere Druckspannung

$$p = -\frac{1}{3}\,\mathrm{trace}\,(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{matrix}})\ , \tag{2.12}$$

die dem Mises äquivalente Spannung

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}\,(\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S})} \tag{2.13}$$

und

$$r = (\frac{9}{2}\,\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S} : \boldsymbol{S})^{\frac{1}{3}} \tag{2.14}$$

als die dritte Invariante.

Der Spannungsdeviator $\boldsymbol{S}$ ist definiert mit

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{matrix}} + p\boldsymbol{I}\ , \tag{2.15}$$

wobei $\boldsymbol{I}$ die Einheitsmatrix ist.

Das lineare Drucker-Prager-Modell lässt sich nun durch die drei Invarianten anschreiben mit

$$t - p\,\tan\beta - d = 0\ . \tag{2.16}$$

Eine geometrische Interpretation dieser Gleichung ist in Abb. 2.6 rechts dargestellt.

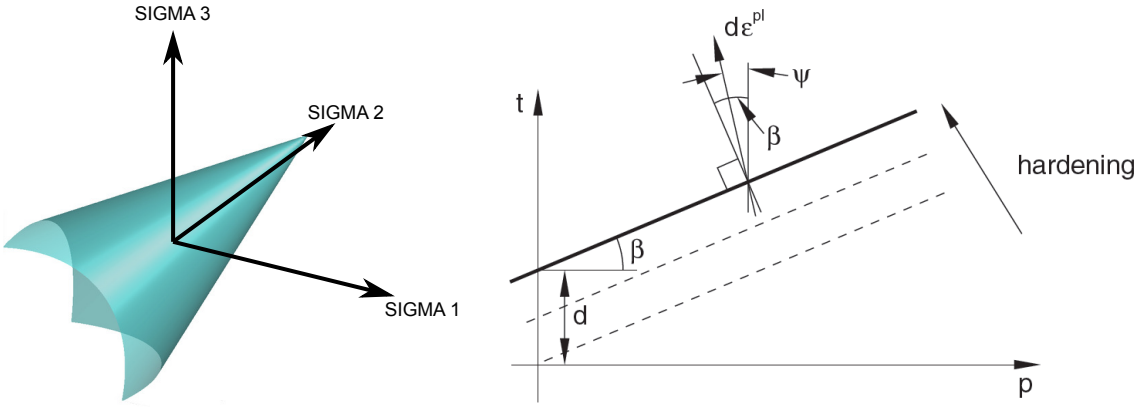


Abbildung 2.6: Schematische Darstellung einer Drucker-Prager-Fließfläche im dreiachsigen Spannungsraum, links. Skizze des linearen Drucker-Prager-Kriteriums [10], rechts.

Die Variable t ist wie folgt definiert:

$$t = \frac{1}{2}\, q \left[1 + \frac{1}{K} - (1 - \frac{1}{K})(\frac{r}{q})^3\right] \ . \tag{2.17}$$

β definiert die Steigung der linearen Fließfläche in der t-p-Spannungsebene und wird als Reibungswinkel des Materials bezeichnet. Die Bindekraft d ist von den Eingabedaten abhängig. Für diese Arbeit ist die Verfestigung über die Fließgrenze für einachsigen Zug (σ_t) mit

$$d = (\frac{1}{K} + \frac{1}{3}\, \tan\beta)\, \sigma_{\mathrm{t,matrix}} \tag{2.18}$$

definiert. K beschreibt das Verhältnis der Fließspannung für dreiachsigen Zug und dreiachsigen Druck und liegt im Bereich von $0,778 \leq K \leq 1,0$. Es wird $K = 1$ gewählt. Damit geht aus Gl. (2.17) $t = q$ hervor, was bedeutet, dass die Form der Fließfläche in der deviatorischen Ebene dem Mieses-Kreis entspricht und zu der kegelförmigen Fläche, wie in Abb. 2.6 links dargestellt führt.

Plastisches Fließen wird mittels dem Fließpotential G beschrieben. Für dieses Modell wurde

$$G = t - p \tan\psi \tag{2.19}$$

gewählt. ψ wird als Dilationswinkel bezeichnet und gibt die Richtung der Verfestigung an. Die graphische Interpretation kann ebenfalls der Abb. 2.6 links entnommen werden. Als Wert für ψ wird $\psi = \beta$ gewählt. Das bedeutet, die Verfestigung erfolgt in einer Richtung normal auf die Fließfläche. Dies entspricht gemeinsam mit $K = 1$ dem

ursprünglichen Drucker-Prager-Modell.

In [10] ist eine detaillierte Beschreibung zu finden.

2.4 Zusammenfassung

Folgt man den in Kapitel 2 beschriebenenen Modellierungsschritten, erhält man ein idealisiertes RVE das der periodischen Einheit einer Gewebelage entspricht. Im Vergleich zu Einheitszellen aus Kontinuumselementen ist diese in Bezug auf die Rechenzeit um vieles effizienter. Dennoch sind die Ergebnisse weitestgehend gleich. Ein Studie diesbezüglich ist in [14] zu finden.

Kapitel 3

Generieren von Hüllflächen

Um Hüllflächen im ebenen Spannungsraum erzeugen zu können sind zwei Teilbereiche zu lösen. Erstens wird der Ansatz verfolgt, über dissipierte Energien relative Energieniveaus zu definieren. Bei pfadabhängiger radialer Belastung im ebenen Spannungsraum markieren diese Niveaus Ereignisse in Bezug auf die Mechanismen der fortschreitenden Schädigung und des Plastizierens. Um schlussendlich Hüllflächen generieren zu können müssen zweitens, Ortsvektoren möglichst gleichmäßig im Spannungsraum verteilt werden. Die Belastung der Einheitszelle wird separat entlang jeden Ortsvektors gesteigert. Der Spannungsraum wird sozusagen *gescannt*.

Somit wird dieses Kapitel in jenen Teil gegliedert, der sich mit der Verteilung der Belastungspfade beschäftigt und jenen, der das Energiekonzept genauer betrachtet.

3.1 Konzept der dissipierten Energien

Die Betrachtung mittels dissipierter Energien erlaubt die Unterscheidung der nichtlinearen Mechanismen wie z.B. Schädigung und Plastizieren. Jedes Phänomen kann separat untersucht werden. *Abaqus* stellt Energie-Ausgabegrößen zur Verfügung, die dies ermöglichen. In der vorliegenden Arbeit wird die Energie betrachtet, die auf die gesamte Einheitszelle bezogen dissipiert wird. Auch eine Ausgabe der Energiedichte bezogen auf das Element wäre vorhanden.

Die gesamte dissipierte Energie im Zuge der Verzerrung der Einheitszelle, E_{tot}, kann in folgende Komponenten zerlegt werden. Die reversible Verzerrungsenergie, E_{rec}, die

aufgrund elastischen Materialverhaltens auftritt. Eine Verzerrungsenergie, welche durch Schädigung dissipiert wird, E_{dam} und eine Energie, dissipiert durch Plastizieren des Materials, E_{pla}.

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{rec}} + E_{\text{dam}} + E_{\text{pla}} \tag{3.1}$$

beschreibt dies in Form einer Gleichung.

Ausgehend von diesen Komponenten können relative Energieniveaus definiert werden, die der Erstellung von Hüllflächen dienen.

3.1.1 Herleitung der erforderlichen Energiegrößen

Die benötigten Energiegrößen werden entsprechend dem Abaqus Manual [10] hergeleitet. Anschließend erfolgt die Definition der Energieniveaus.

Das erste Gesetz der Thermodynamik besagt, dass die Rate der Änderung der kinetischen und inneren Energie eines definierten Grundkörpers gleich der Summe der Rate der Arbeit verrichtet durch Oberflächen- und Volumenkräfte ist. Dies kann durch die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\int_V (\frac{1}{2}\rho\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}} + \rho U)dV = \int_S \vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{t}}dS + \int_V \vec{\boldsymbol{f}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}dV \tag{3.2}$$

ausgedrückt werden. Wobei für diese Arbeit die innere Energie E_{int} und damit der Term

$$E_{\text{int}} = \int_V \rho U\, dV \tag{3.3}$$

aus Gl. (3.2) von Bedeutung ist.

ρ steht für die Dichte, $\vec{\boldsymbol{v}}$ für den Vektor des Geschwindigkeitsfeldes, U für die innere Energie pro spezifischen Gewicht, und $\vec{\boldsymbol{t}}$ ist der Vektor der Volumenkraft.

Um die innere Energie in die gesuchten Größen aufspalten zu können, muss Gl. (3.3) anders dargestellt werden. Dies erfordert Umformschritte der rechten Seite der Gl. (3.2). Unter Verwendung des Gauß-Theorems und der Identität von $\vec{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}$ mit $\vec{\boldsymbol{n}}$ als

Normalvektor auf die Oberfläche S kann der erste Term zu

$$\begin{aligned}\int_S \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{t}} dS &= \int_V (\frac{\partial}{\partial \vec{\boldsymbol{x}}}) \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV \\ &= \int_V \left[(\frac{\partial}{\partial \vec{\boldsymbol{x}}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}}{\partial \vec{\boldsymbol{x}}} : \boldsymbol{\sigma} \right] dV \\ &= \int_V \left[(\frac{\partial}{\partial \vec{\boldsymbol{x}}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\sigma} \right] dV\end{aligned} \tag{3.4}$$

umgeschrieben werden. $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ist der Tensor der Verzerrungsrate. Gl. (3.4) in Gl. (3.2) eingesetzt ergibt

$$\frac{d}{dt} \int_V (\frac{1}{2} \rho \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + \rho U) dV = \int_V \left[(\frac{\partial}{\partial \vec{\boldsymbol{x}}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{\boldsymbol{f}}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right] dV \ . \tag{3.5}$$

Mit der Cauchy'schen Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\boldsymbol{x}}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{\boldsymbol{f}} = \rho \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} \tag{3.6}$$

eingesetzt in Gl. (3.5) erhält man

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_V (\frac{1}{2} \rho \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + \rho U) dV &= \int_V (\rho \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV \\ &= \int_V \left[\frac{d}{dt} (\frac{1}{2} \rho \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}) + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right] dV \ .\end{aligned} \tag{3.7}$$

Bei genauerer Betrachtung bleibt nur

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho U dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \tag{3.8}$$

über. Durch Integration erhält man die neue Gleichung für die innere Energie, welche sich nun mit

$$E_{\text{int}} = \int_V \rho U dV = \int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV dt - U_0 \tag{3.9}$$

anschreiben lässt. U_0 ist die Energie zum Zeitpunkt 0.

Gleichung (3.9) lässt sich nun aufspalten in die dissipierte Energie aufgrund der Verzerrung der Einheitszelle und jene die Abaqus für den Lösungsprozess benötigt. Erstere wird von nun an als die gesuchte totale Verzerrungsenergie, E_{tot} bezeichnet. Sie beinhaltet den Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{tot}}$ der aus dem Materialgesetz für die Faserbündel (Kap. 2.3.1) und dem für die Matrixtaschen (Kap. 2.3.2) generiert wird. Mit letzteren sind

dissipierte Energien gemeint, die mit dem numerischen Lösungsweg einhergehen. Der zugehörige Spannungstensor wird mit $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{num}}$ bezeichnet. Die Gleichung bekommt die Form

$$\begin{aligned} E_{\text{int}} &= E_{\text{tot}} + E_{\text{num}} \\ &= \int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{tot}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV dt + \int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{num}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV dt \ . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Durch das Aufspalten des Tensors der Verzerrungsrate, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{ela}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{pla}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{cre}}$ (elastische Verzerrungsrate und Verzerrungsrate durch Plastizieren und Kriechen) kann die totale Verzerrungsenergie ausgedrückt werden mit

$$E_{\text{tot}} = \int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{tot}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{ela}} dV dt + \int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{tot}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{pla}} dV dt + \int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{tot}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{cre}} dV dt \ . \tag{3.11}$$

Der zweite und dritte Term der Gleichung liefert bereits die Energie dissipiert durch Plastizieren

$$E_{\text{pla}} = \int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{tot}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{pla}} dV dt \tag{3.12}$$

und die Energie dissipiert durch Kriechen

$$E_{\text{cre}} = \int_0^t \int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{tot}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{cre}} dV dt \ . \tag{3.13}$$

Da in den Materialgesetzen kein ratenabhängiges Materialverhalten definiert ist, muss $E_{\text{cre}} = 0$ sein. Jedoch weisen die Simulationen der Einheitszelle Werte für $E_{\text{cre}} > 0$ auf. Es zeigt sich, dass diese Werte der viskosen Regularisierung zur Schädigungsstabilisierung zuzuordnen sind. Daher werden diese in der Betrachtung von E_{tot} nicht weiter berücksichtigt.

Der erste Term der Gl. (3.11) E_{ela} muss weiter zerlegt werden um die beiden noch benötigten Größen, E_{rec} und E_{dam} zu erhalten. Sobald Schädigung im Material auftritt, ist nicht die gesamte elastische Verzerrungsenergie reversibel. Zu jedem Zeitpunkt kann die Spannung $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{tot}}$ durch eine *schädigungsfreie* Spannung $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ und dem Schädigungsparameter d aus dem Materialgesetz ausgedrückt werden mit

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{tot}} = (1 - d)\hat{\boldsymbol{\sigma}} \tag{3.14}$$

(vgl. mit Gl. (2.6) und (2.7)). Die Betrachtung folgt dem Abaqus Manual [10] und wurde aus Gründen der einfacheren Darstellung beibehalten. Es sei jedoch zu beachten, dass für anisotropes Materialverhalten anstatt $(1-d)$ der Schädigungsoperator $\boldsymbol{M}$ Verwendung findet. Bei $d=0$ liegt keine Schädigung vor. Die Schädigung kann sich bis $d=1$ entwickeln, was bedeuten würde, dass das Material total geschädigt ist (siehe dazu auch Kap. 2.3.1).

Somit kann der erste Term der Gl. (3.11) angeschrieben werden als

$$E_{\text{ela}} = \int_0^t \int_V (1-d)\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{ela}} dV dt \; . \tag{3.15}$$

Mit der Annahme, dass der Schädigungsparameter während einer Entlastungsschleife zum Zeitpunkt t konstant bleibt, lässt sich die Gleichung für die elastische Verzerrungsenergie anschreiben mit

$$E_{\text{ela}} = \int_0^t \int_V (1-d_t)\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{ela}} dV dt + \int_0^t \int_V (d_t-d)\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{ela}} dV dt \; , \tag{3.16}$$

$$E_{\text{ela}} = E_{\text{rec}} + E_{\text{dam}} \tag{3.17}$$

und ergibt unter Berücksichtigung von Gl. (3.14) die reversible Verzerrungsenergie

$$E_{\text{rec}} = \int_0^t \int_V \frac{1-d_t}{1-d} \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{tot}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{ela}} dV dt \tag{3.18}$$

und die Energie dissipiert durch Schädigung

$$E_{\text{dam}} = \int_0^t \int_V \frac{d_t-d}{1-d} \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{tot}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{ela}} dV dt \; . \tag{3.19}$$

3.1.2 Definition relativer Energieniveaus

Die Gleichungen (3.1), (3.12), (3.18) und (3.19) liefern nun die Möglichkeit relative Energieniveaus zu definieren. Dies erfolgt über die Bildung des Verhältnisses der Einzelenergien zu der totalen Verzerrungsenergie. So ergibt sich das relative Energieniveau für Schädigung zu

$$p_{\text{dam}}(t) = \frac{E_{\text{dam}}(t)}{E_{\text{tot}}(t)} \tag{3.20}$$

und das relative Energieniveau für Plastizieren zu

$$p_{\mathrm{pla}}(t) = \frac{E_{\mathrm{pla}}(t)}{E_{\mathrm{tot}}(t)} \ . \tag{3.21}$$

Die Definition von Niveaus für markante Ereignisse im Zuge der steigenden Belastung entlang eines vordefinierten Ortsvektors ist vorerst nur für das Auftreten der Mechanismen Schädigung (E_{dam}) und Plastizieren (E_{pla}) möglich. Sie kann wie folgt angegeben werden:

$$p_{\mathrm{dam}}(t) = 0{,}00001 \ , \qquad p_{\mathrm{pla}}(t) = 0{,}00001 \ . \tag{3.22}$$

Die Wahl von kritischen Energieniveaus, ab deren Eintreten ein sicherer Betrieb der Struktur nicht mehr gewährleistet ist, stellt sich als schwierig heraus. Sie erfordert einen detaillierten Vergleich von Ergebnissen numerischer Analysen und Materialprüfungen. Ideen und Ansätze dazu, werden mit Hilfe der Ergebnisse der Analyse einer 2/2 Köperbindung im Kap. 5 präsentiert.

Es ist jedoch sehr wohl möglich die Entwicklung der Materialauslastung zu beobachten indem die relativen Niveaus dissipierter Energien in gewissen Intervallen, wie z.B. 0,5%, 1,0%, 1,5%, etc. untersucht werden.

3.2 Scannen des ebenen Spannungsraums

Nach der Definition der relativen Energieniveaus ist man nun in der Lage Ereignisse im Material, im Zuge einer allgemeinen ebenen Belastung die proportional gesteigert wird, zu bestimmen. Ein Ereignis, sei es ein definiertes Niveau an Schädigung oder Plastizierens, kann im ebenen Spannungsraum als Punkt dargestellt werden. Die proportional gesteigerte Belastung beschreibt den Weg eines Ortsvektors der durch diesen Punkt läuft. Nun ist es notwendig Ortsvektoren möglichst gleichmäßig im Spannungsraum zu verteilen. Entlang jeder dieser Vektoren erfolgt die Belastung der Einheitszelle. Bei Eintritt des gewählten Ereignisses wird ein Punkt gesetzt. Schlussendlich befinden sich eine Vielzahl an Punkten im Spannungsraum, die das gleiche Ereignis beschreiben (z.B. 1% Schädigung, $p_{dam} = 0{,}01$). Diese Punkte werden nun verwendet um eine Hüllfläche im ebenen Spannungsraum zu erzeugen. Eine graphische Darstellung ist in Abb. 3.1 zu

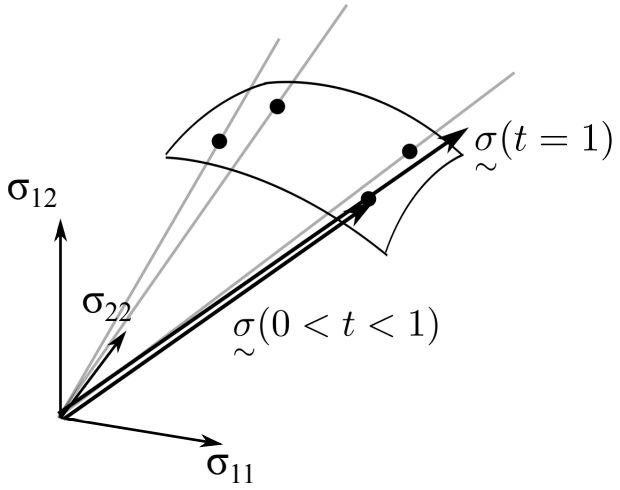


Abbildung 3.1: Darstellung der Strategie zur Erstellung einer Hüllfläche im ebenen Spannungsraum.

finden. Bei $t = 1$ ist die gesamte willkürlich vorgegebene Belastung aufgebracht. Das Auftreten des Ereignisses liegt somit irgendwo zwischen $t = 0$ und $t = 1$. Die Spannung bei $t = 1$ soll so gewählt werden, dass sie während der Analyse nicht erreicht wird und globale Entfestigung bereits vorher auftritt. Der Spaltenvektor $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ beinhaltet die Komponenten des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ und wird in weiterer Folge als Spannungspfad bezeichnet. Beide sind nachfolgend dargestellt:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} . \tag{3.23}$$

Je größer die Anzahl der Punkte und damit die Anzahl der proportionalen Spannungspfade ist und umso gleichmäßiger sie verteilt sind, desto besser wird die Qualität der Hüllfläche.

Für die Generierung von beliebig vielen Ortsvektoren im Spannungsraum bietet sich die Oberfläche der Einheitskugel an. Auch andere Körper, wie Ellipsoide können sich als praktikabel erweisen. Besonders wenn bereits eine Vorstellung der ungefähren Geometrie der Hüllflächen vorliegt, ist es sinnvoll angepasste Flächen zu wählen um große Gradienten zu vermeiden. Im Falle dieser Arbeit wird die Einheitskugel verwendet. Die für die Analysen benötigten Ortsvektoren $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ entsprechen somit den Ortsvektoren von

Punkten $\vec{\boldsymbol{p}}$ auf der Oberfläche der Einheitskugel multipliziert mit einem Skalar s,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma_i}} = s\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i}} \; . \tag{3.24}$$

Wobei i definiert ist mit $i = (1, 2, ..., n)$. n steht für die Anzahl der im Spannungsraum verteilten Vektoren.

Es stellt sich nun die Frage, wie eine gewünschte Anzahl von Punkten möglichst gleichmäßig auf einer Kugeloberfläche verteilt werden kann.

Grundsätzlich wird zwischen zufälligen [25] und deterministischen [30] Verfahren unterschieden. Die zufällige Verteilung der Punkte ist auf den ersten Blick einfacher zu realisieren. Sie hat aber den Nachteil, dass Gebiete mit sehr geringer Dichte und welche, bei denen der Abstand zwischen zwei oder mehreren benachbarten Punkten sehr klein ist, entstehen. Dies führt zu einem unnötigen Bedarf an Rechnerkapazitäten, weil zum Teil Analysen mit sehr ähnlichen Belastungen erfolgen. Des Weiteren ist die Erzeugung von Hüllflächen nur mit erhöhtem Aufwand möglich, da das Abspeichern der Punkte zufällig und ohne Bezüge untereinander erfolgt.

Das führt uns zur Verteilung von Punkten mittels deterministischer Methoden, wobei gleich zu Beginn erwähnt sei, dass eine exakte Verteilung von vielen Punkten auf einer Kugeloberfläche nicht möglich ist. Diese kann nur mittels platonischer Körper wie Tetraeder (4 Punkte), Hexaeder (8 Punkte), Oktaeder (6 Punkte), Dodekaeder (20 Punkte) und Ikosaeder (12 Punkte) [1] realisiert werden. Für eine fundierte Untersuchung liefern sie jedoch zu wenig Ortsvektoren. Um dennoch Punkte möglichst genau zu verteilen gibt es unterschiedliche Ansätze, wie z.B. die spiralförmige oder hexagonale Verteilung [30]. Für die vorliegende Problemstellung bietet sich eine Annäherung der Kugeloberfläche mittels Dreiecken an, die sich den unterschiedlichen Eigenschaften der platonischen Körper bedient.

Das qualitativ beste Ergebnis lässt sich mit einem Ikosaeder erzielen. Dieser hat aber den Nachteil, dass er keine Symmetrieebenen besitzt, welche von Bedeutung sein können. Ist die Antwort der Einheitszelle in eine oder mehrere Richtungen symmetrisch, muss nur ein reduzierter Teil des Spannungsraums *gescannt* werden. Dies führt zu einer erheblichen Ersparnis an Zeit und Rechnerkapazitäten. Der Oktaeder erfüllt die Forderung nach Symmetrieebenen. Das leicht schlechtere Ergebnis der Punkteverteilung kann vernachlässigt werden.

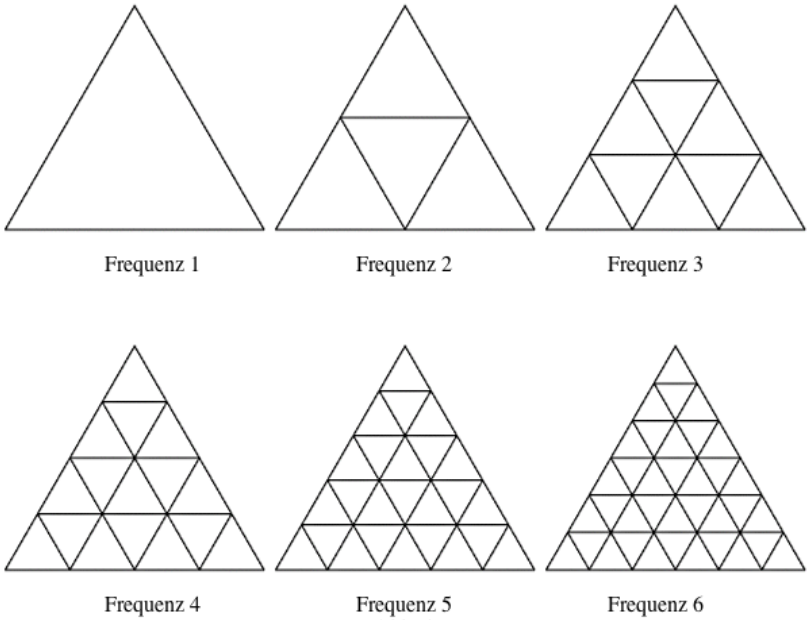


Abbildung 3.2: Darstellung des Teilens der Flächen eines Oktaeders in weitere Dreiecke zur Erzeugung von Punkten auf der Einheitskugel. [3]

Wie bereits erläutert, kann der Oktaeder durch eine Kugel umhüllt werden, so dass sich alle sechs Eckpunkte auf deren Oberfläche befinden und perfekt verteilt sind. Als ersten Schritt zur Erzeugung vieler weiterer Punkte auf der Oberfläche der Kugel wird jede einzelne Dreiecksfläche in gleichviele Dreiecke zerlegt. Wie in Abb. 3.2 dargestellt, wird die Feinheit über die Frequenz gesteuert und beeinflusst die Qualität der Hüllfläche wesentlich. Die Frequenz bezieht sich auf die Teilung der Seitenkanten der Dreiecke des Oktaeders.

Nun erfolgt die Projektion der Eckpunkte der neu erzeugten Dreiecke auf die Oberfläche der Einheitskugel. Das heißt die Ortsvektoren zu den Eckpunkten müssen entlang ihrer Richtung verlängert werden bis deren Betrag den Wert 1 ergibt. Bezeichnet man die Vektoren zu den Eckpunkten als $\vec{r}_i$, so lassen sich die normierten Vektoren $\vec{p}_i$ erechnen mit

$$\vec{p}_i = \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} \ . \tag{3.25}$$

Eine aus den projizierten Punkten erzeugte Fläche liefert eine, an die Einheitskugel angenäherte, Hüllfläche, die in Abb. 3.3 dargestellt ist.

Realsiert wird die Erzeugung der Ortsvektoren über ein Skript, dass die Programmiersprache Python nutzt [4]. Der Hauptkörper der Programmroutine befindet sich im

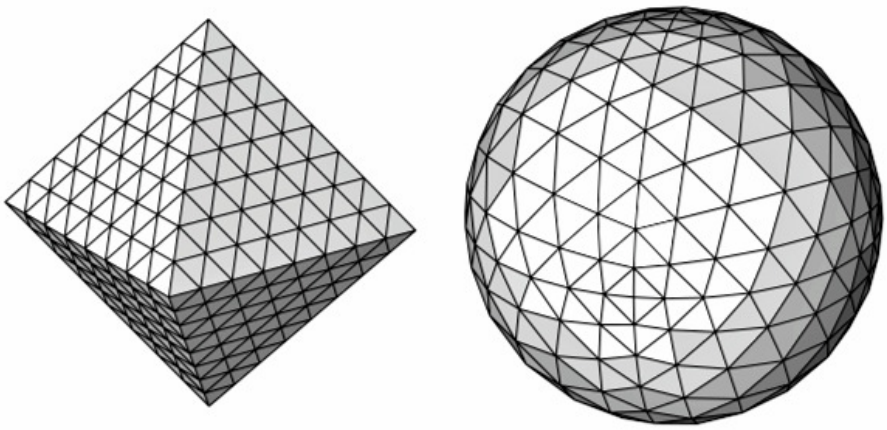


Abbildung 3.3: Darstellung der Einheitskugel angenähert über die Geometrie eines Oktaeders mit 512 Dreiecken. [3]

Anhang A. Wesentlich ist, dass nicht nur die einzelnen Vektoren $\vec{p}_i$ abgespeichert werden, sondern auch deren Zuordnung zu den Dreiecken, die schlussendlich die Hüllfläche bilden.

Kapitel 4

Analyse der Gewebelage einer 2/2 Köperbindung

Das in den vorangegangenen Kapiteln aufgestellte Konzept soll nun an einem konkreten Beispiel angewendet werden. Untersucht wird eine Gewebelage einer 2/2 Köperbindung. Eine zu diesem Material passende Einheitszelle wurde von Gager und Pettermann entwickelt [14]. Auch in den Arbeiten [12] und [13] bedienten sie sich dieser. Für die folgende Analyse bildet diese Einheitszelle die Ausgangsbasis. Die nötige Anpassung in Bezug auf Materialparameter und Randbedingungen erfolgt im nächsten Unterkapitel. Anschließend werden die Einstellungen für die Berechnung vorgenommen. Der zu *scannnende* Bereich im ebenen Spannungsraum, die Anzahl der Belastungspfade $\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{i}}$ und deren Betrag wird festgelegt. Danach folgt die Definition der relativen Niveaus dissipierter Energien.

4.1 Konfiguration des FE-Modells

Die periodische Einheitszelle besteht aus je vier Faserbündel die orthogonal zueinander stehen (siehe Abb. 2.1 b). Der Faserbündelquerschnitt ist rechteckig modelliert. Die Faserbündelondulation verfolgt einen aus geraden Elementen stückweise zusammengesetzten Verlauf. Die Geometrie und die Abmessungen der Einheitszelle sind in Abb. 4.1 dargestellt.

Die Referenzflächen des Modells sind mit vollintegrierten vierknotigen Schalenelemen-

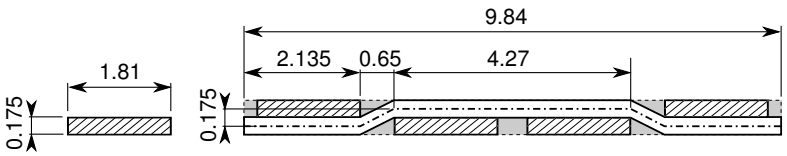


Abbildung 4.1: Schnitt durch die Einheitszelle mit rechteckigen Faserbündelquerschnitt und stückweisen geraden Faserbündelverlauf. Maße in [mm] [14]

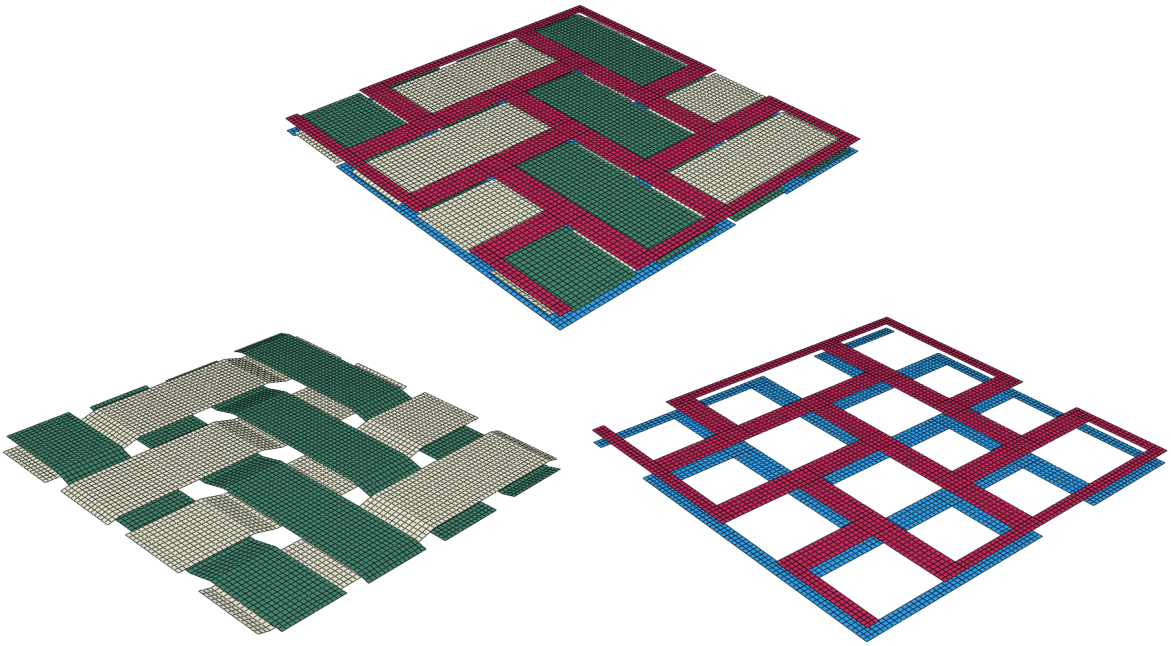


Abbildung 4.2: Darsetellung der vernetzten Einheitszelle, assembliert (oben), Faserbündel (links), Matrixtaschen (rechts).

ten (Elementtyp S4 in Abaqus 6.12/Standard) vernetzt. Die generelle Kantenlänge der Elemente beträgt 1/14 der Faserbündelbreite. Abbildung 4.2 zeigt die vernetzte Einheitszelle getrennt in die Referenzflächen der Faserbündel, der Matrixtaschen und assembliert. Die Referenzfläche der Faserbündel befindet sich in der Mitte deren Querschnittes und die der Matrixtaschen an der Ober- bzw. Unterseite der Einheitszelle.

4.1.1 Randbedingungen

Zum Aufbringen der Belastung erfolgt eine Anpassung der makroskopischen Randbedingungen der Einheitszelle. Abb. 4.3 beschreibt diese in Form einer schematischen Darstellung. Die Freiheitsgrade (FG) der Knoten SWB und SWT sind in Richtung 1 und 2 gesperrt. Um Starrkörperrotationen zu vermeiden sind die Knoten SEB und

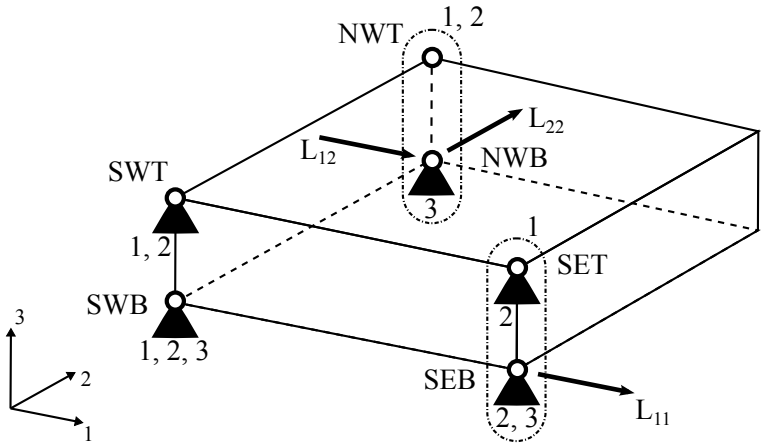


Abbildung 4.3: Darstellung der makroskopischen Randbedingungen der Einheitszelle.

SET in Richtung 2 gesperrt. Globale Verschiebungen in Richtung 3 werden durch das Sperren des dritten FG der Knoten NWB, SEB und SWB verhindert. Das Koppeln von NWB und NWT in Richtung 1 und 2, sowie der Hauptknoten SEB und SET in 1 unterdrückt gemeinsam mit den gesperrten FG die Möglichkeit von globaler Biegung. Das Aufbringen einer beliebigen ebenen Belastung ist über die Kräfte L_{11}, L_{22} und L_{12} möglich.

4.1.2 Materialparameter

In Kapitel 2 wurde das Materialgesetz für die Faserbündel und das für die Matrixtaschen vorgestellt. Für deren Einstellung in *Abaqus6.12/Standard* werden passende Materialparameter benötigt. Diese entsprechen jenen des Materialsystems Cycom977 und sind in [11] und [12] zusammengefasst. Für die Faserbündel gilt bis zur Schädigungsinitiierung linear elastisches Materialverhalten. Die dazugehörigen Daten sind in der Tab. 4.1 zu finden. E_l ist der Elastizitätsmodul in Faserrichtung, E_q und E_r sind jene quer dazu, wobei q in der Ebene liegt und r normal auf die Ebene steht. G_{lq} und G_{lr} repräsentieren Schubmoduli, ν_{lq}, ν_{lr} und ν_{qr} die Querdehnungszahlen. R_{ll} und R_{qq} stehen für die Festigkeitswerte in Faserrichtung und quer dazu. Die Buchstaben t und c beschreiben den Zug- oder Druckspannungszustand. R_{lq} bezieht sich auf den Wert der Schubfestigkeit in longitudinaler Richtung. Tabelle 4.2 enthält die zur Berechnung des Schädigungsfortschritts benötigten Bruchenergiefreisetzungsraten G_c und die Dämpfungsparameter η für die viskose Regularisierung zur Schädigungsstabilisierung.

Die Faser- und Matrixrichtung wird mit f und m bezeichnet, Zug wiederum mit t und Druck mit c. Die Materialdaten für die isotrope Matrix einschließlich der Fließspannung $\sigma_{\mathrm{y}}^{\mathrm{t}}$ und der Verfestigungsparameter β, ψ und K (siehe Kap. 2.3.2) sind in Tab. 4.3 zu finden. Für den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl werden die Variablen E_{matrix} und ν_{matrix} verwendet.

Materialkennwerte für den ungeschädigten Zustand				
E_l	$E_q = E_r$	$\nu_{lq} = \nu_{lr}$	ν_{qr}	$G_{lq} = G_{lr}$
146 GPa	9 GPa	0,34*	0,61*	4,27 GPa*
Festigkeitswerte				
R_{ll}^{t}	R_{ll}^{c}	R_{qq}^{t}	R_{qq}^{c}	R_{lq}
2100 MPa	1407 MPa	82 MPa	249 MPa	110 MPa*

Tabelle 4.1: Linear elastische Materialdaten der Faserbündel mit einem Faservolumenanteil von 60%. Vergleiche mit [12]. (* Annahme)

Werte der Bruchenergiefreisetzungsrate			
G_c^{ft}	G_c^{fc}	G_c^{mt}	G_c^{mc}
89,8 N/mm	78,3 N/mm	0,2 N/mm	0,8 N/mm
Parameter der viskosen Regularisierung			
η^{ft}	η^{fc}	η^{mt}	η^{mc}
0,002*	0,002*	0,004*	0,004*

Tabelle 4.2: Parameter für den Schädigungsfortschritt und der Schädigungsstabilisierung im Faserbündel mit einem Faservolumenanteil von 60%. Vergleiche mit [11]. (* Annahme)

Steifigkeitswerte		Fließspannung	Verfestigung		
E_{matrix}	ν_{matrix}	$\sigma_{\mathrm{y}}^{\mathrm{t}}$	β	ψ	K
3,52 GPa	0,37	81,4 MPa	25°	25°	1

Tabelle 4.3: Materialdaten für die unverstärkte Matrix [12].

4.2 Einrichten der Analyse

In Kapitel 3 wird das Konzept zur Erzeugung von Hüllflächen erläutert. Nun erfolgen die konkreten Einstellungen um eine Lage einer 2/2 Köperbindung zu analysieren.

Aus dem Aufbau geht hervor, dass die Eigenschaften der Einheitszelle in beiden orthogonalen Richtungen gleich sind. Des Weiteren kann man darauf schließen, dass sich die Schubspannung in positiv definierter Richtung gleich zur Schubspannung in negativer Richtung verhält. Dies führt dazu, dass die Antwort der Einheitszelle im ebenen Spannungsraum zwei Symmetrieebenen besitzt. Somit reicht bereits das *scannen* eines viertels des Spannungsraums. Voraussetzung ist die Vernachlässigung geringfügiger Abweichungen aufgrund der Einspannung zur Vermeidung von Starrkörperrotationen. Einen Überblick über die Größenordnung der Abweichungen gibt Abb. 4.4. Es wird das Verhalten in Richtung 1 dem in Richtung 2 für Zug- und Druckbelastung und das Verhalten bei Schub in der Ebene mit positiver dem mit negativer Belastung gegenüber gestellt. Die Symmetrieebene bezüglich der Schubbelastung wird von den Richtungen σ_{11} und σ_{22} aufgespannt. Jene zufolge der orthogonalen Eigenschaften verläuft entlang der Richtung σ_{12} diagonal durch den Spannungsraum. Die Punkte $(-1, -1, 0)$ und $(1, 1, 0)$ liegen auf ihr.

Die zu erzeugenden Hüllflächen werden mit 81 radialen Belastungspfaden angenähert. Dies entspricht einer Frequenz von 3 in der Programmroutine laut Anhang A. Dabei wird die Last in separaten Analysen proportional entlang eines jeden Ortsvektors gesteigert bis die Analyse aufgrund von Konvergenzproblemem abbricht, oder einen Betrag von 600 MPa erreicht. Dies entspricht dem skalaren Faktor $s = 600$ in Gl. (3.24).

Mit den relativen Niveaus dissipierter Energien erfolgt die Erzeugung von Punkten entlang den radialen Laststeigerungspfaden. Diese führen zu den gewünschten Hüllflächen. Untersucht werden soll der Beginn der Schädigung und des Plastizierens. Dafür wird für die relativen Energieniveaus $p_{\mathrm{dam}} = 0{,}00001$ und $p_{\mathrm{pla}} = 0{,}00001$ gewählt. Des Weiteren werden Hüllflächen bei einer Schädigung p_{dam} von 0,5%, 1%, 1,5% und 2% und bei Plastizieren p_{pla} von 0,25%, 0,5%, 0,75% und 1% erzeugt.

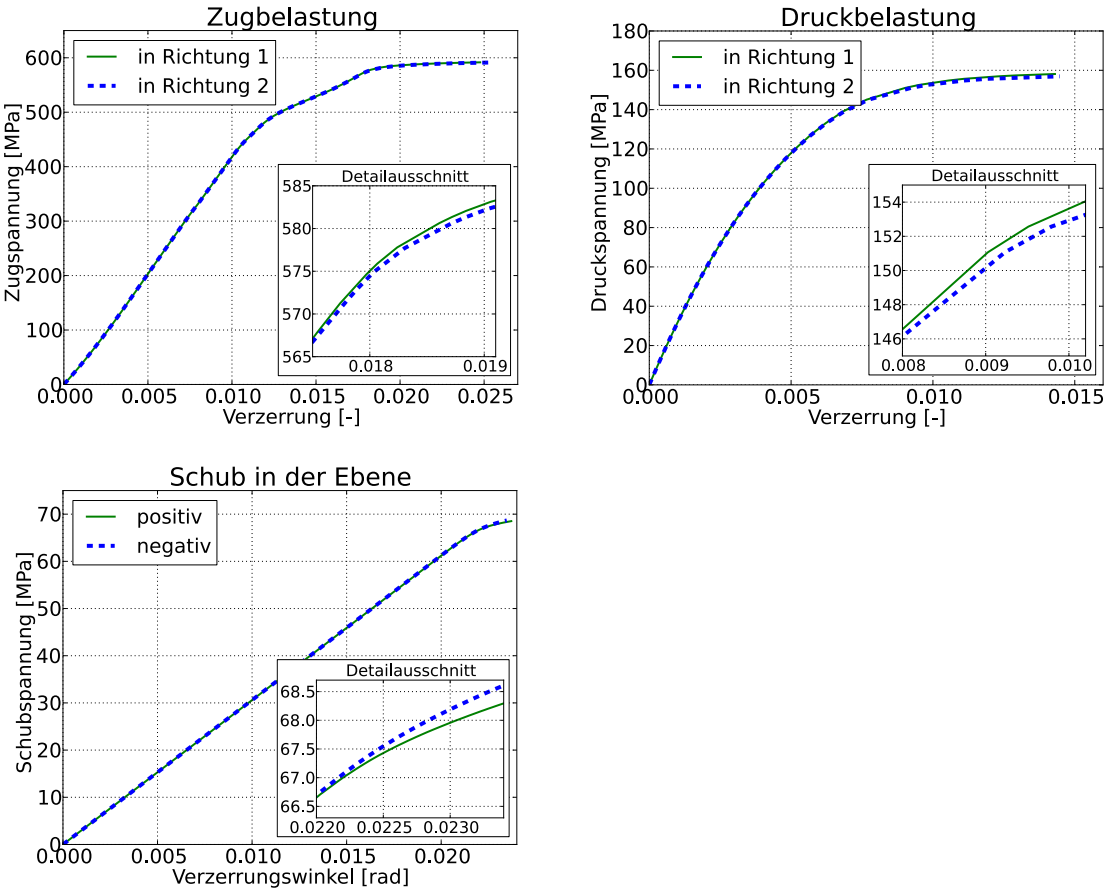


Abbildung 4.4: Vergleich des Verhaltens der Einheitszelle in den orthogonalen Richtungen bei einachsigem Zug und Druck (oben links und rechts). Gegenüberstellung der Antwort bei positiver und negativer Schubbelastung (unten links). Die Randbedingungen der Einheitszelle sind in Abb. 4.3 dargestellt.

Kapitel 5

Diskussion der Ergebnisse

Auf den nächsten Seiten erfolgt die Darstellung der Ergebnisse aus verschiedenen Betrachtungswinkeln. Zunächst werden die generierten Hüllflächen behandelt. Wie entwickeln sich Schädigung und Plastizieren mit zunehmender Last? Sind bereits erste globale Erkenntnisse zu erkennen? Des Weiteren wird die Reihenfolge des Eintretens der verschiedenen Mechanismen untersucht. Anschließend werden ausgeprägte Lastfälle, reiner Zug, Druck und Schub und welche, die eine Kombination daraus darstellen, analysiert. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf dem Auftreten charakteristischer Merkmale zur Definition von kritischen Energieniveaus. Diesbezüglich lassen sich zwar sicher keine quantitativen Aussagen treffen, aber vielleicht ist es möglich Strategien zu entwickeln, die in weiterer Folge zu konkreten Angaben führen.

Es sei zu erwähnen, dass die Ergebnisse die Formulierungen und Annahmen der in Kapitel 2 beschriebenen Materialmodelle widerspiegeln. Die Verwendung alternativer Konstitutivgesetze, wie [11] wird zu abweichenden Ergebnissen führen.

5.1 Mechanismenbasierte Hüllflächen

Eine dreidimensionale Abbildung übereinanderliegender Hüllflächen wäre sehr unübersichtlich. Aus diesem Grund wird nur der Beginn des Schädigens und der Beginn des Plastizierens übereinandergelegt dargestellt. Alle weiteren Hüllflächen werden in Form von Schnitten präsentiert. Als Schnittebenen dienen die Ebenen des Koordinatensystems und die Symmetrieebene aufgrund der orthogonalen Ausrichtung der

Faserbündel.

Schädigungsbeginn, Beginn des Plastizierens

Anhand von Abb. 5.1 ist die unterschiedliche Reihenfolge des Eintretens der Mechanismen zu erkennen. Im Schnitt rechts unten sieht man, dass innerhalb eines ungefähren Bereichs von $\sigma_{11} > 20\,\text{MPa}$ und $\sigma_{22} > 20\,\text{MPa}$ bei einem Schubspannungsanteil von $\sigma_{12} = 0$ zuerst Schädigung eintritt und Plastizieren später beginnt. Ansonsten verhält es sich bei $\sigma_{12} = 0$ umgekehrt. Beim Übergang der Lastfälle zu reinem Schub beginnt Schädigung und Plastizieren beinahe gleichzeitig.

Es ist auch zu sehen, dass die Hüllfläche für Schädigungsbeginn sehr flach ist. Das heißt, Schädigungsbeginn erfolgt bereits bei geringer Schubbelastung. Auffallend ist, dass bei einem geringen Schubanteil ($\sigma_{12} \neq 0$) Schädigung bei einer einachsigen Druckspannung später auftritt, als bei $\sigma_{12} = 0$ (siehe Abb. 5.1 unten rechts). Dies gilt für einen gewissen Bereich mit positiver und negativer Spannung in Querrichtung. Sobald die Druckspannungen σ_{11} und σ_{22} gleich sind, lässt sich dies nicht mehr beobachten.

Beim Beginn des Plastizierens ist die maximale Spannung bei reinem ebenen Schub ungefähr gleich wie beim Schädigungsbeginn. Zusätzlich sieht man, dass bei reinem Zug in σ_{11}- oder σ_{22}-Richtung Plastizieren sehr früh beginnt. Diese Grenze steigt jedoch bei einer Kombination der Komponenten bis hin zum Maximum bei $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ an. Sobald eine Komponente negativ wird, fängt Plastizieren ebenfalls sehr früh an. Bei $\sigma_{11} = \sigma_{22} < 0$ wird das Maximum im negativen Bereich erreicht.

Betrachtet man die Hüllflächen im Hinblick auf die in Kapitel 2 beschriebenen Materialgesetze, kann die grün gefärbte den Faserbündeln und die blaue den Matrixtaschen zugeordnet werden. Der Grund liegt darin, dass beim Faserbündel Plastizieren nicht berücksichtigt wird und bei den Matrixtaschen keine Schädigung definiert ist.

Entwicklung der Schädigung

Die Entwicklung der Schädigung ist in Abb. 5.2 dargestellt. Generell ist das Erscheinungsbild der äußeren Hüllfläche zu klären. Sie ist in den Schnitten teilweise mit durchgezogener roter Linie und teilweise mit roter strichlierter Linie (oben rechts) dargestellt. Die durchgezogene Linie bedeutet, dass die im ebenen Spannungsraum duchgeführten

Analysen abgebrochen wurden. Der Grund liegt im Erreichen des Punktes ab dem globale Entfestigung beginnt. Mit der strichlierten Linie sind die zu Ende geführten Analysen gekennzeichnet. Wobei die maximale Spannug bereits bei einem geringeren Niveau erreicht wurde als es in Abb. 5.2 gezeigt wird. Durch Steigerung des Anteils der viskosen Regularisierung erfolgte eine Fortsetzung der Analysen. Die von der Regularisierung dissipierte Energie nimmt dabei, im Vergleich zur totalen Verzerrungsenergie, unverhältnismäßig hohe Werte an und führt zu einer Verfälschung des globalen Entfestigungbeginns.

Die zu der Spitze gerade verlaufenden Hüllflächen in Abb. 5.2 links und unten resultieren aus der Verteilung der Belastungspfade. Eine höhere Dichte bei geringen σ_{12}-Werten würde zu einer besseren Auflösung führen.

Gut erkennbar ist, dass die Schädigung mit steigendem Schubanteil rasch zunimmt. Bei reinem Schub ist nach Erreichen des Beginns der Schädigung nicht mehr viel Raum zur Laststeigerung bis es zur globalen Entfestigung kommt. Somit tritt bereits nach einer geringen Mehrbelastung, über den Mechanismenbeginn hinaus, Versagen ein.

Wie zu erwarten zeigen die Analysen, dass die beste Belastbarkeit in Richtung der Faserbündel unter Zug vorliegt. So ist das Maximum bei einem Spannungszustand $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ und $\sigma_{12} = 0$. Bei Betrachtung des linken Schnittes in Abb. 5.2 wird das bereits in Abb. 5.1 beobachtete Phänomen noch deutlicher sichtbar. Hier sieht man nicht nur das Verhalten bei Schädigungsbeginn, sondern auch die Entwicklung bis zum Anfang der Entfestigung. Es ist klar erkennbar, dass die Belastbarkeit bei einem geringen Schubanteil ($\sigma_{12} \neq 0$) höher ist als bei $\sigma_{12} = 0$. Der Bereich für den das zutrifft bleibt der gleiche wie bei Schädigungsbeginn.

Zusätzlich sieht man, dass die Reserven in Bezug auf Schädigung nicht nur mit steigendem Schubanteil sehr schnell abnehmen, sondern auch in dem Gebiet, in dem zumindest eine der beiden Komponenten σ_{11} und σ_{22} negativ ist.

Über die unterschiedlichen Energieniveaus, die in Abb. 5.2 dargestellt sind, kann auch eine Aussage über die Entwicklung der Schädigung getroffen werden. Sehr schön ist in Abb. 5.2 zu erkennen, dass der Abstand zwischen den Hüllflächen mit fortschreitender Schädigung geringer wird. Die Schädigungsrate nimmt zu.

Entwicklung des Plastizierens

Die Entwicklung des Plastizierens ist in Abb. 5.3 dargestellt. Das Erscheinungsbild der äußeren Hüllfläche wurde bereits erklärt.

Auch die Eigenschaften im Bezug auf Plastizieren werden massiv von der Schubkomponente beeinflusst. Bei reinem Schub kommt es nach Beginn des Plastizierens sehr schnell zur globalen Entfestigung. Es sind sehr ähnliche Phänomene wie bei der Schädigung zu beobachten. Die besten Werte für den Beginn des Plastizierens werden wiederum im Bereich biaxialer Zugspannung erreicht ($\sigma_{11} \geq 0$, $\sigma_{22} \geq 0$). Bei Betrachtung des linken Schnittes in Abb. 5.3 ist erneut der Hinterschnitt für $\sigma_{22} < 0$ zu erkennen. Ebenfalls nehmen die Reserven beim Plastizieren in dem Gebiet, in dem zumindest eine der beiden Komponenten σ_{11} und σ_{22} negativ ist, sehr schnell ab.

Die unterschiedlichen Energieniveaus in Abb. 5.3 zeigen, dass die Rate des Plastizierens nicht besonders variiert. Davon ausgenommen ist der Schritt vom Beginn des Plastizierens bis zu einem Niveau von 0,25%. Dieser ist von einer wesentlichen Änderung der Geometrie der Hüllflächen gekennzeichnet.

Stellt man die Entwicklung der Schädigung jener des Plastizierens gegenüber, sieht man, dass Schädigung ebenso wie Plastizieren bereits sehr früh in der Belastungsgeschichte beginnt. Jedoch wächst die Schädigung schneller merkbar an. Der Grad des Plastizierens erhöht sich erst später.

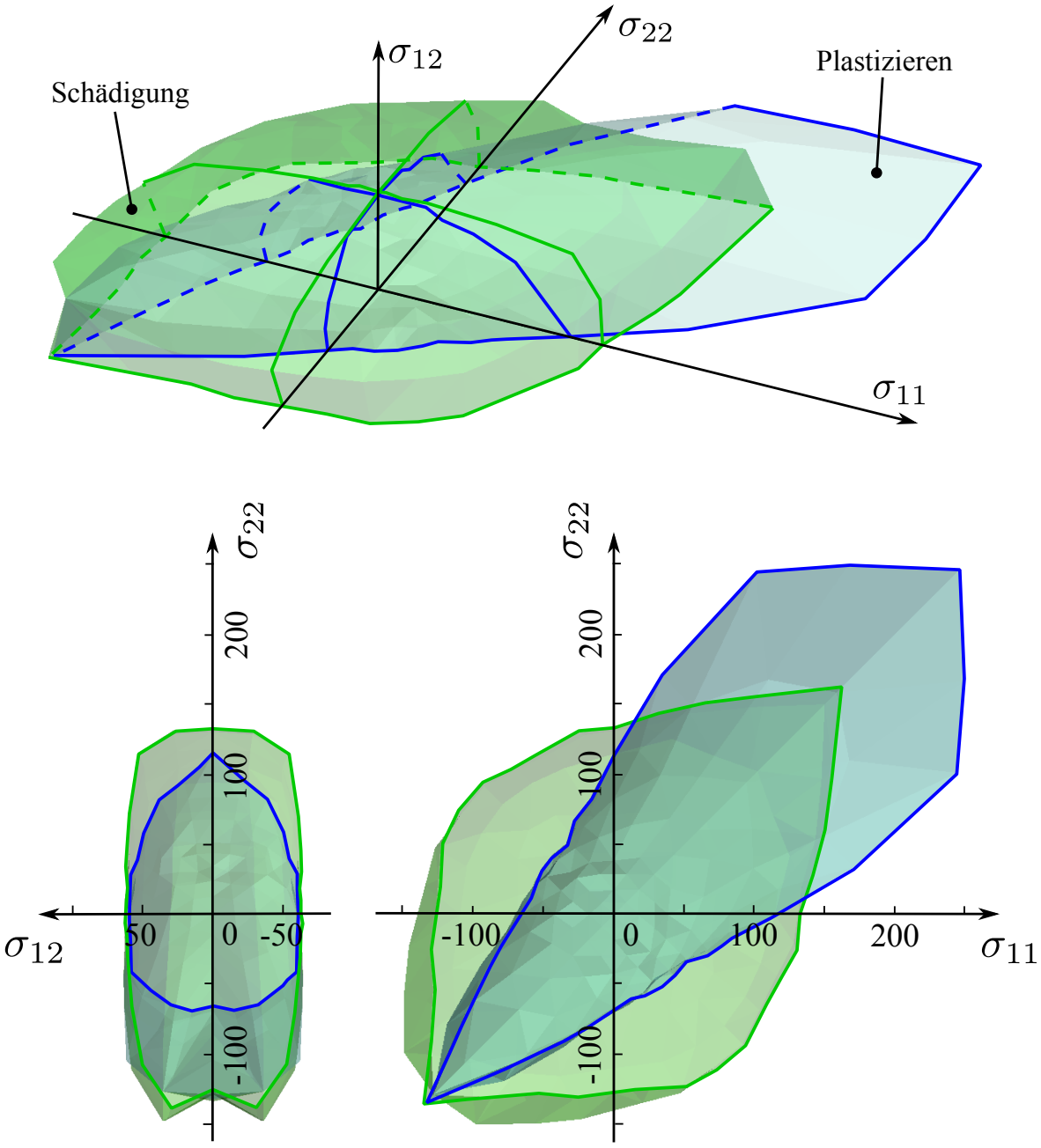


Abbildung 5.1: Hüllflächen für Schädigungsbeginn (grün) und Beginn des Plastizierens (blau) im ebenen Spannungsraum. Dreidimensionale Ansicht der oberen Halbschalen (oben), Schnitt durch die $\sigma_{12}\sigma_{22}$-Ebene (unten links), durch die $\sigma_{11}\sigma_{22}$-Ebene (unten rechts). Angaben in [MPa].

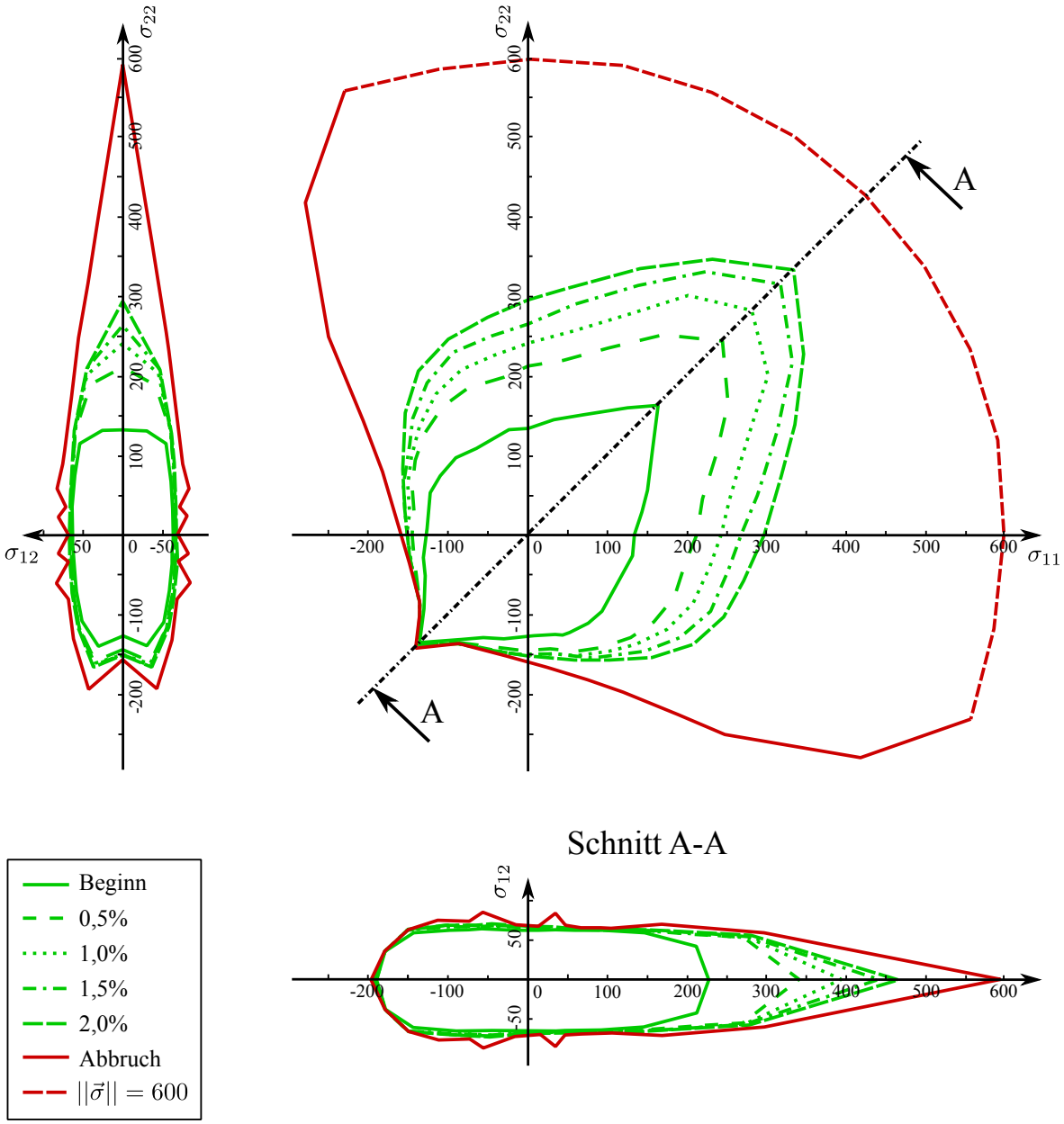


Abbildung 5.2: Schnitte durch Hüllflächen unterschiedlicher Schädigungsniveaus. Schädigung (grün) bei Beginn, einem Niveau von 0,5%, 1%, 1,5%, 2%. Abbruch bzw. Ende der Simulation (rot). Angaben in [MPa].

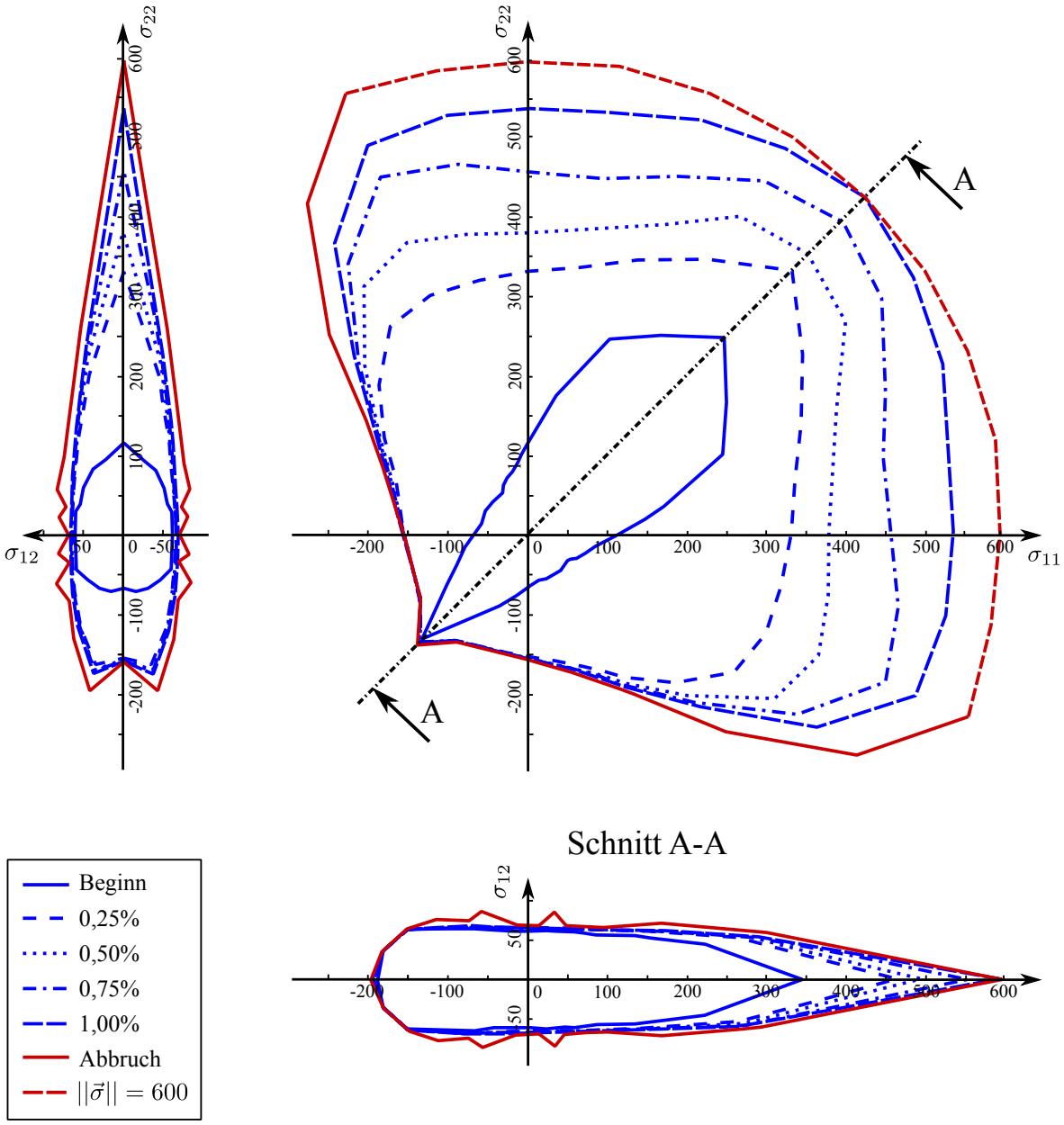


Abbildung 5.3: Schnitte durch Hüllflächen unterschiedlicher Plastizitätsniveaus. Plastizieren (blau) bei Beginn, einem Niveau von 0,25%, 0,5%, 0,75%, 1%. Abbruch bzw. Ende der Simulation (rot). Angaben in [MPa].

5.2 Reihenfolge des Eintretens der Mechanismen

Die Hüllflächen im ebenen Spannungsraum erlauben nun eine Aussage über die Reihenfolge des Eintretens vordefinierter Ereignisse für Schädigung und Plastizieren. Um dies zu demonstrieren werden mit Hilfe der Abb. 5.1 zwei Belastungspfade gewählt, bei denen Schädigung und Plastizieren in unterschiedlicher Reihenfolge auftreten. Dazu eignet sich ein Lastfall der sich zusammensetzt aus einer positiven Belastung in Richtung σ_{11}, σ_{22} und einer geringen Schubbelastung σ_{12} (Fall A). Als zweiter Lastfall wird eine Zusammensetzung mit $\sigma_{11} > 0$, $\sigma_{22} < 0$ und einer kleinen Schubbelastung gewählt (Fall B). Ein kleiner Schubspannungsanteil ermöglicht aussagekräftigere Diagramme. Je höher die Schubspannung, umso schneller tritt Versagen ein. Es werden Analysen untersucht, bei der die proportionale Laststeigerung entsprechend den Spannungstensoren

$$\boldsymbol{\sigma_A} = \begin{pmatrix} 491{,}5 & 119{,}3 \\ 119{,}3 & 322{,}8 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

und

$$\boldsymbol{\sigma_B} = \begin{pmatrix} 491{,}5 & 119{,}3 \\ 119{,}3 & \text{-}322{,}8 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

erfolgte. Die Ergebnisse sind für den Fall A in Abb. 5.4 und für den Fall B in Abb. 5.5 dargestellt. In beiden Abbildungen sind die euklidische Norm des Vektors der Spannungskomponenten $||\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}||$ (grün) und die dissipierten Energieniveaus (blau) über den Laststeigerungsfaktor aufgetragen. Die schwarzen Markierungen kennzeichnen die Ereignisse Schädigungsbeginn, 1% Schädigung, Beginn des Plastizierens und 1% Plastizieren. In Abb. 5.4 erkennt man, dass das Material zuerst zu schädigen und darauf zu plastizieren beginnt. Die selbe Reihenfolge wird bei einem dissipierten Energieniveau von 1% eingehalten. Man sieht, dass diese Punkte sehr nahe am Belastungsende, dem globalen Entfestigungsbeginn liegen, welcher bereits bei sehr niedrigen Werten des Schädigungs- und Plastizitätsniveaus auftritt. Abbildung 5.5 zeigt ein umgekehrtes Verhalten. Hier fängt das Material zuerst zu plastizieren an und anschließend beginnt die Schädigung. Die 1%-Marke wird jedoch wieder als erstes von der Schädigung überschritten. Daraus lässt sich schließen, dass die Rate der Schädigung für den Fall B höher ist als die des Plastizierens. Der Abstand bis zum Anfang der Entfestigung ist größer als beim vorrangegangenen Beispiel.

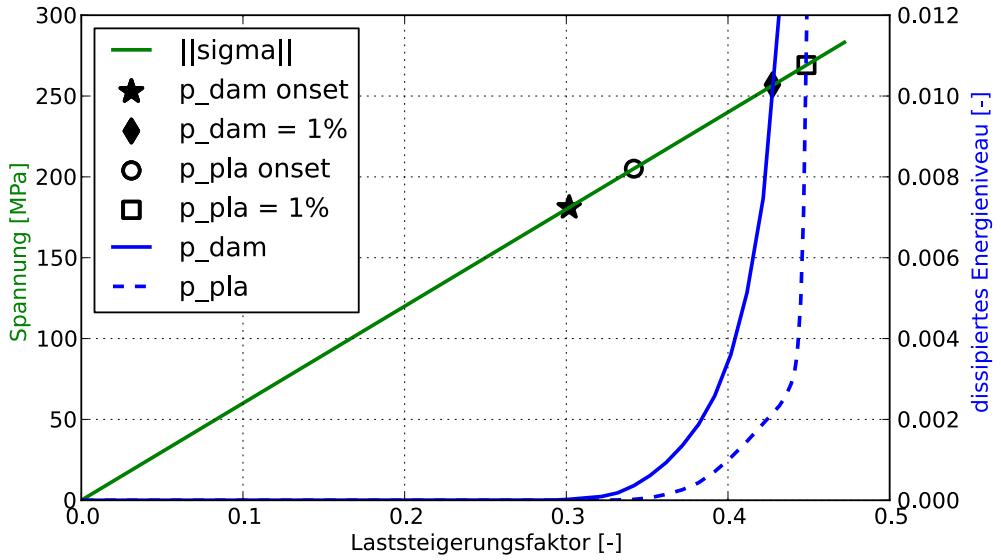


Abbildung 5.4: Reihenfolge des Auftretens der Mechanismen Schädigung und Plastizieren zu Beginn und bei einem dissipierten Energieniveau von 1%. Proportionale Laststeigerung; $||\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{A}}||$ aus Gl. (5.1) (grün); dissipiertes Energieniveau (blau)

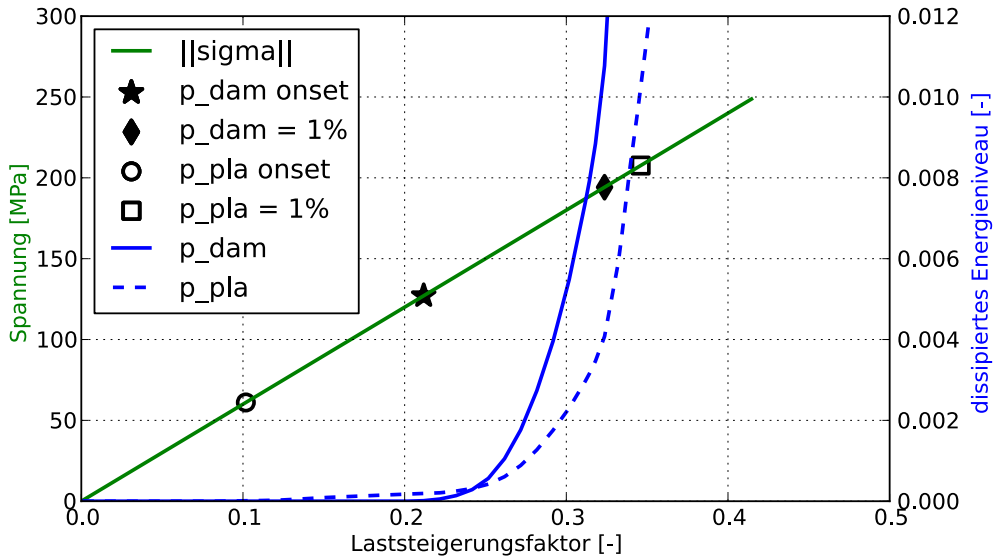


Abbildung 5.5: Reihenfolge des Auftretens der Mechanismen Schädigung und Plastizieren zu Beginn und bei einem dissipierten Energieniveau von 1%. Proportionale Laststeigerung; $||\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{B}}||$ aus Gl. (5.2) (grün); dissipiertes Energieniveau (blau)

5.3 Strategie zur Definition kritischer Energieniveaus

In den Kapiteln 2 und 3 wurde das in der Einleitung vorgestellte Konzept detailliert ausgearbeitet. Daraufhin erfolgte die Anwendung an einem konkreten Beispiel, dessen Modelleinstellungen sind in Kapitel 4 beschrieben. Die Darstellung der daraus resultierenden Ergebnisse beschränkte sich bis jetzt auf die Entwicklung der zu untersuchenden Mechanismen. Nun soll eine Analyse der generierten Daten in Bezug auf die Definition kritischer dissipierte Energieniveaus vorgenommen und eine Strategie um diese festzulegen entwickelt werden. Dazu erfolgt zunächst eine Betrachtung ausgeprägter Lastfälle, einachsiger Zug, Druck und einfacher Schub. Des Weiteren werden Kombinationen genannter Belastungen ausgewählt und genauer untersucht.

5.3.1 Analyse ausgeprägter Lastpfade

In den Abbildungen 5.6, 5.7 und 5.8 erfolgt die Darstellung des Verlaufs der Spannung, der dissipierten Energieniveaus und der dissipierten Energien jeweils aufgetragen über die Verzerrung (oben) und über den Laststeigerungsfaktor (unten). Letztere helfen beim Vergleich mit Diagrammen, erstellt aus beliebigen Lastfällen im ebenen Spannungsraum. Diesen können keine eindeutigen Verzerrungskomponenten zugeordnen werden.

Einachsiger Zug

In Abb. 5.6 ist die Antwort der Einheitszelle auf eine einachsige Zugbelastung dargestellt. Obwohl Plastizieren früher eintritt, ist sehr schön zu erkennen, dass in Faserrichtung das Fortschreiten der Schädigung eine dominierende Rolle einnimmt (vgl. p_{dam} mit p_{pla}). Dieses Ergebniss stimmt mit den Definitionen der Materialmodelle für Faserbündel und Matrixtaschen überein. Das untere Diagramm zeigt, dass sich die Steigung des Schädigungsniveaus einer Vertikalen annähert. Im Spannungs-Verzerrungsdiagramm (oben) entspricht dies der Horizontalen bei globalem Entfestigungsbeginn. Auch beim Plastizieren ist gegen Ende der Analyse ein Auslenken nach oben erkennbar.

Einachsiger Druck

Im Vergleich zu Abb. 5.6 sind die Beträge der Spannung der dissipierten Energieniveaus und der dissipierten Energien in Abb. 5.7 viel kleiner. Es kommt bereits sehr früh zur globalen Entfestigung. Auffällig in Abb. 5.7 sind die Zickzack-Verläufe der energiebasierten Kurven. Diese entstehen durch eine zu große Schrittweite bei der automatischen Wahl der Lastinkremente. Die Voreinstellungen der Schrittweitensteuerung sind für die Analyse sämtlicher Belastungspfade gleich. Um eine bessere Auflösung zu bekommen müsste für diesen Lastfall eine Anpassung vorgenommen werden. Der große Abstand zwischen Beginn des Plastizierens und Schädigungsbeginn resultiert nicht aus dem Schrittweitenproblem, sondern ist auf das matrixdominierende Verhalten bei Druckbelastung zurück zu führen. Trotzdem ist der Anteil an Energie, dissipiert durch Schädigung, größer als jener, dissipiert durch Plastizieren.

Einfacher Schub

Im Falle von einfachem Schub in Faserrichtung in der Ebene der Einheitszelle zeigt sich in Abb. 5.8 ein umgekehrtes Verhalten. Das Niveau an dissipierter Energie durch Plastizieren ist bis kurz vor Beginn der Entfestigung höher, als jenes durch Schädigung. Matrixplastizität ist in diesem Fall die bestimmende Eigenschaft. Gut zu sehen ist, dass der Beginn des Plastizierens und des Schädigens und der Beginn der Entfestigung sehr nahe zusammen liegen. Dies bestätigt die Beobachtungen in den Abb. 5.1, 5.2 und 5.3, in Bezug auf den negativen Einfluss durch eine Schubkomponente.

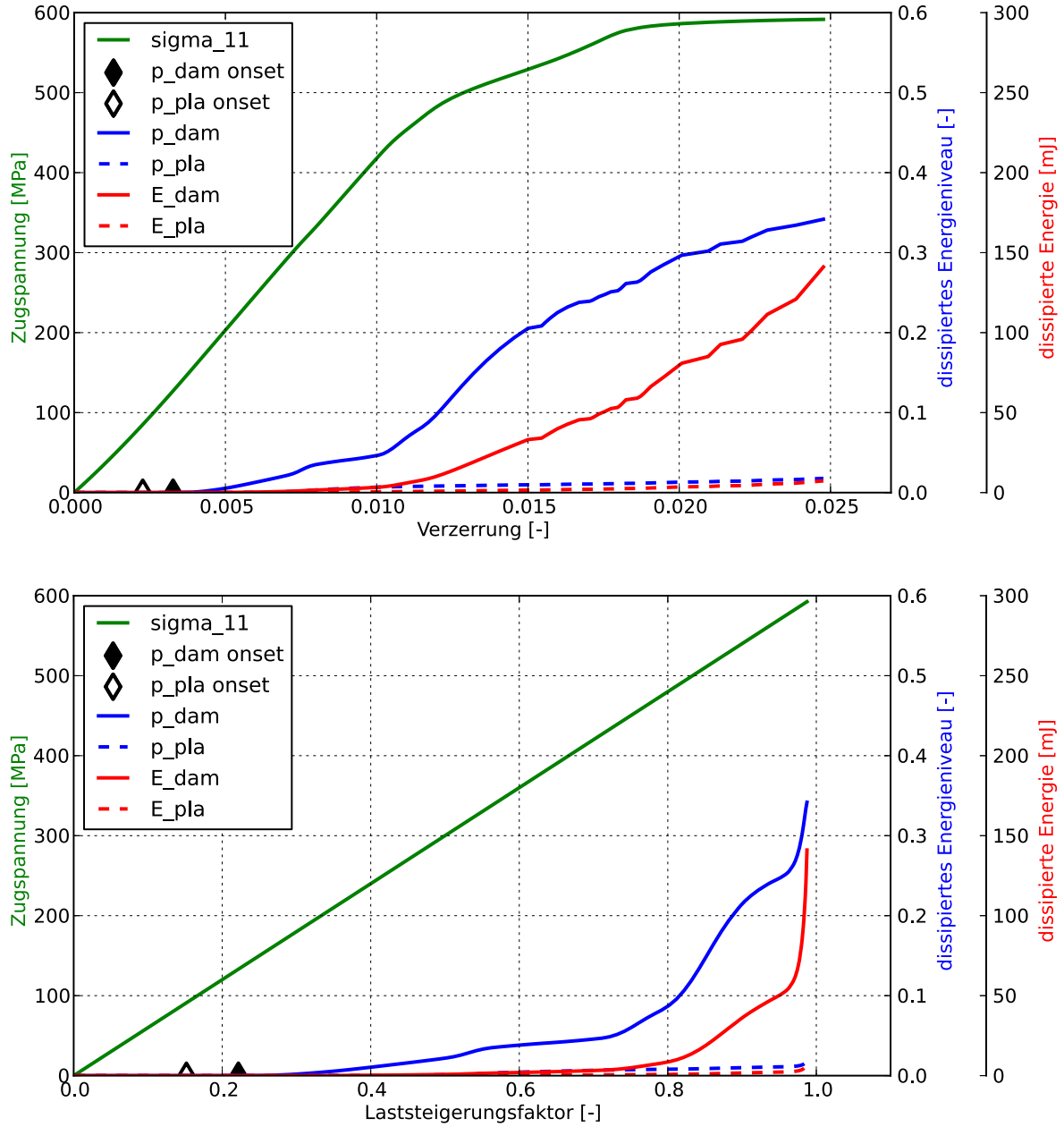


Abbildung 5.6: Antwort der Einheitszelle auf eine einachsige Zugspannung σ_{11} aufgetragen über die Verzerrung ε_{11} (oben) und den Laststeigerungsfaktor (unten). Relative dissipierte Energieniveaus durch Schädigung und Plastizieren (p_{dam}, p_{pla}); durch Schädigung und Plastizieren dissipierte Energien (E_{dam}, E_{pla})

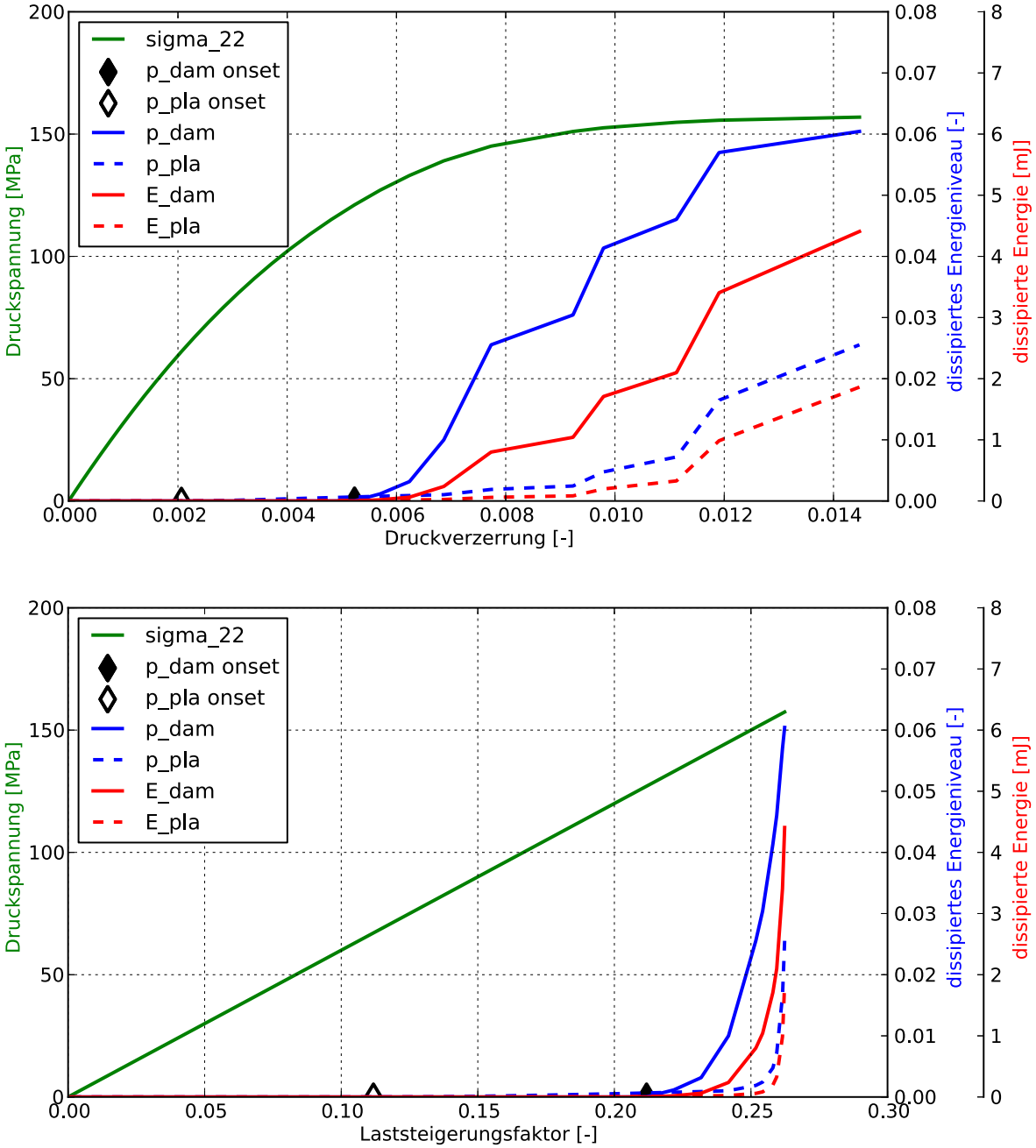


Abbildung 5.7: Antwort der Einheitszelle auf eine einachsige Druckspannung σ_{22} aufgetragen über die Verzerrung ε_{22} (oben) und den Laststeigerungsfaktor (unten). Relative dissipierte Energieniveaus durch Schädigung und Plastizieren (p_{dam}, p_{pla}); durch Schädigung und Plastizieren dissipierte Energien (E_{dam}, E_{pla})

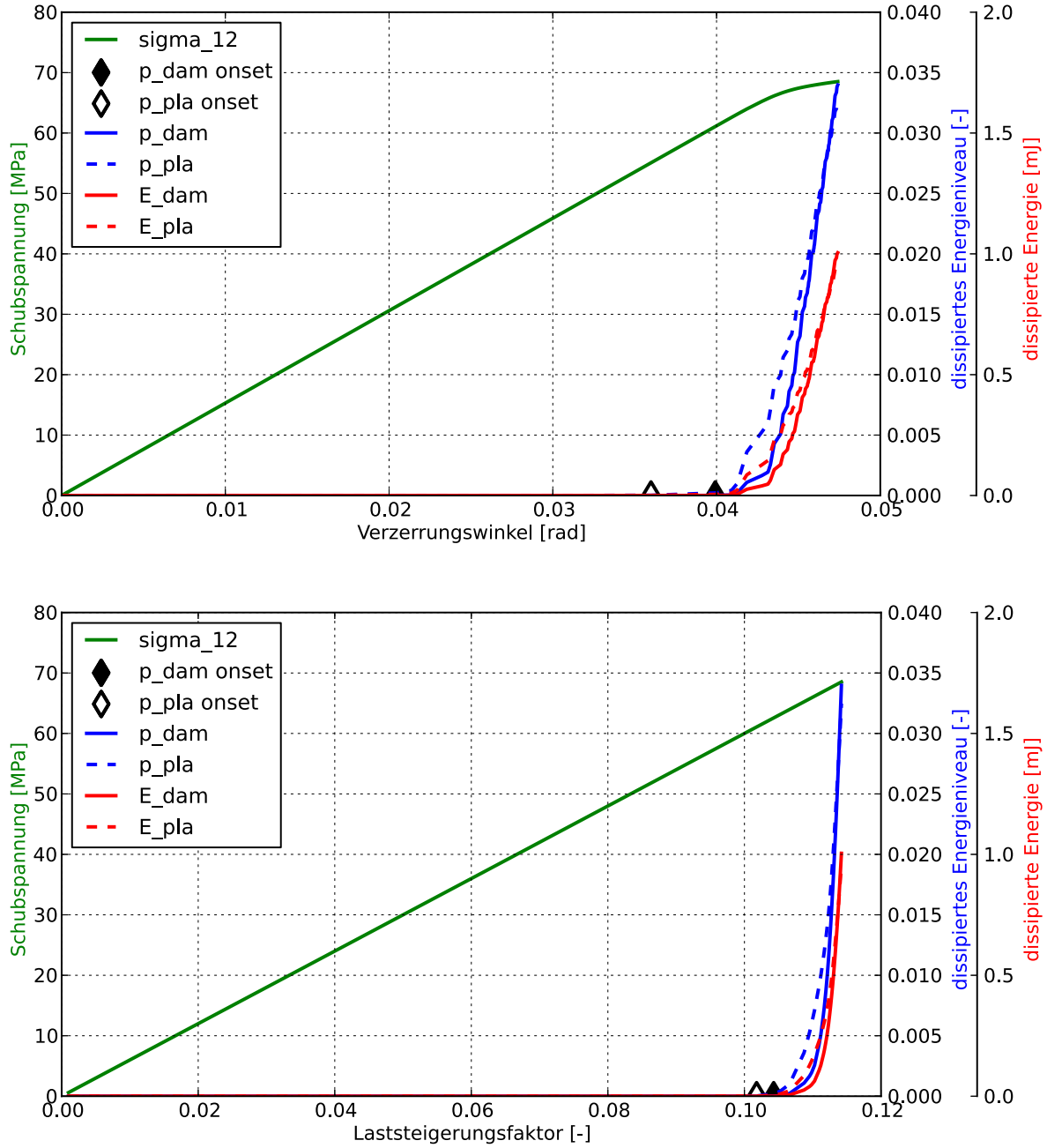


Abbildung 5.8: Antwort der Einheitszelle auf eine ebene Schubspannung σ_{12} aufgetragen über den Verzerrungswinkel γ_{12} (oben) und den Laststeigerungsfaktor (unten). Relative dissipierte Energieniveaus durch Schädigung und Plastizieren (p_{dam}, p_{pla}); durch Schädigung und Plastizieren dissipierte Energien (E_{dam}, E_{pla})

5.3.2 Analyse spezieller Lastpfade

Als spezielle Lastfälle dienen zwei, die auf der vertikalen Symmetrieebene liegen. Das heißt $\sigma_{11} = \sigma_{22}$. Für den ersten Fall wird $\sigma_{12} = 0$ und für den zweiten $\sigma_{12} > 0$ gewählt. Es werden Analysen untersucht bei der die proportionale Laststeigerung entsprechend den Spannungstensoren

$$\boldsymbol{\sigma_C} = \begin{pmatrix} 424{,}3 & 0 \\ 0 & 424{,}3 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

und

$$\boldsymbol{\sigma_D} = \begin{pmatrix} 416{,}1 & 117{,}1 \\ 117{,}1 & 416{,}1 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

erfolgte. Beide werden zu Vergleichszwecken dem Ergebnis bei reiner Schubbelastung gegenübergestellt. Laut Definition liegt dieser Lastfall ebenfalls auf der Symmetrieebene. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.9 dargestellt. Die aufgetragene Spannung entspricht wieder der euklidischen Norm des Vektors der Spannungskomponenten $||\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}||$. Im oberen Diagramm nähern sich die Tangenten der dissipierten Energieniveaus und Energien nicht wie bisher einer Vertikalen an. Der Grund dafür liegt in der viskosen Regularisierung, die den globalen Entfestigungsbeginn verfälscht.

Vergleicht man alle drei Diagramme wird der Einfluss des Schubspannungsanteils verdeutlicht. Je größer dieser ist, umso geringer ist die Spannung bei der Entfestigung eintritt. Auch die Reserven zwischen Mechanismenbeginn und maximaler Spannung werden kleiner. Von den auf der Symmetrieebenen liegenden Belastungspfaden ist der in Abb. 5.9 mitte dargestellte, jener mit der kleinsten Schubspannungskomponente.

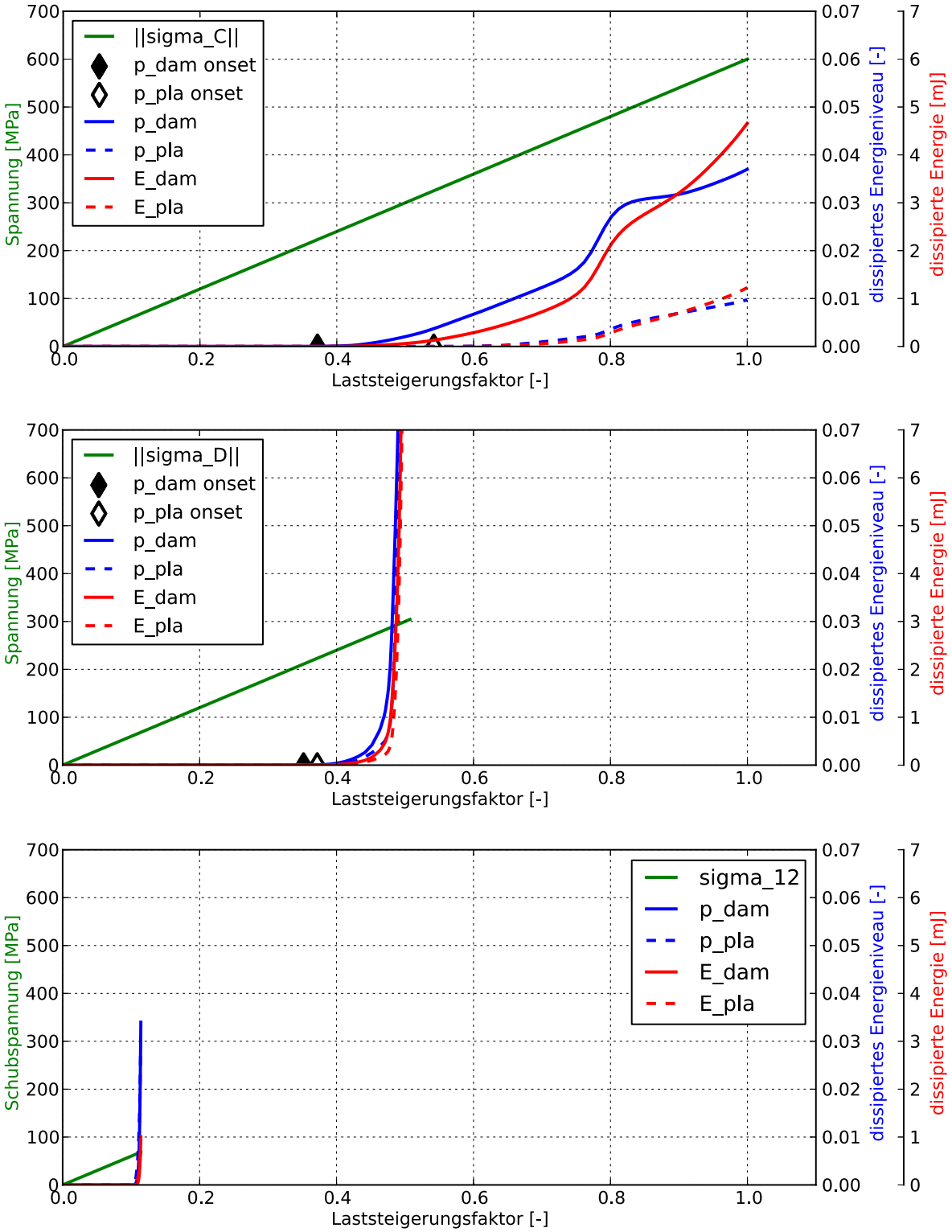


Abbildung 5.9: Antwort der Einheitszelle auf eine ebene Belastung, die proportional bis zu einer Spannung mit den Komponenten $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 424,3$ und $\sigma_{12} = 0$ (oben), $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 416,1$ und $\sigma_{12} = 117,1$ (mitte) und $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ und $\sigma_{12} = 600$ (unten) gesteigert wird. Aufgetragene Spannung entspricht $||\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}||$; relative dissipierte Energieniveaus durch Schädigung und Plastizieren (p_{dam}, p_{pla}); durch Schädigung und Plastizieren dissipierte Energien (E_{dam}, E_{pla})

5.3.3 Schlussfolgerung

Betrachtet man die Verläufe der dissipierten Energieniveaus und Energien in den Abbildungen 5.6 bis 5.9 ist ein Merkmal besonders deutlich erkennbar. Nähert sich die Belastung dem Punkt bei dem Entfestigung beginnt, geht die Steigung der Tangenten der energiebasierten Größen gegen unendlich. Eine Ausnahme bilden Spannungszustände, bei denen $\sigma_{12} = 0$ ist und die Kombinationen von σ_{11} und σ_{22} sich in einem Bereich bewegen, der in Abb. 5.2 und Abb. 5.3 durch die rote strichlierte Linie ($||\vec{\sigma}|| = 600$) markiert ist. In Abb. 5.6 und 5.9 (oben) sind solche dargestellt.

Diese Eigenschaft kann man nutzen, indem der Materialzustand nicht über die Definition kritischer Energieniveaus beurteilt wird, sondern über den Anstieg des Verlaufs der dissipierten Energieniveaus. Die Darstellung der Verläufe über die Inkremente der Laststeigerung ist eventuell nicht sehr schön. Plakativer für den Ingenieur ist der Bezug zu üblichen Größen wie Spannungen oder Verzerrungen. In Abb. 5.10 sind die dissipierten Energieniveaus und die dissipierten Energien über der Spannung aufgetragen. Diese Abbildung ist aus den selben Daten generiert, wie Abb. 5.9 (mitte).

Die Frage ist nun, wie und mit Hilfe welcher Diagramme man Tangentensteigungen der Verläufe der relativen Niveaus dissipierter Energien festlegen kann, die den Grad der Materialauslastung für kritisch deklarieren. Hierbei hilft die Betrachtung der Entwicklung der Schädigung (Abb. 5.2) und der des Plastizierens (Abb. 5.3). Reine Schubbelastung und alle Lastfälle, die die Bedingung $\sigma_{11} \leq 0$ und $\sigma_{22} \leq 0$ erfüllen werden vorerst nicht behandelt. Der Grund liegt darin, dass, sobald Schädigung und Plastizieren beginnt, bei weiterer Laststeigerung sehr schnell Versagen eintritt.

Somit ist für den Rest des ebenen Spannungsraums im Falle von Schädigung reiner Schub (siehe Abb. 5.2) und für plastizieren reiner Schub, Druck in σ_{11}- und σ_{22}-Richtung (siehe Abb. 5.3) als am kritischsten zu betrachten. Die Verläufe der Energiegrößen über die Verzerrung, den Verzerrungswinkel oder über den Laststeigerungsfaktor sind in Abb. 5.7 und 5.8 dargestellt. Für diese Lastfälle ist es einfach kritische Tangentensteigungen des Verlaufes der dissipierten Energieniveaus zu finden. Ein Vergleich mit Ergebnissen aus Materialprüfungen (einachsiger Druck, einfacher Schub) ist möglich. Die somit ermittelte Tangentensteigung wird für die restlichen Lastfälle herangezogen. Bei sehr kritischen Lastfällen wird die gewählte Tangente früher erreicht, bei weniger kritischen Lastfällen später.

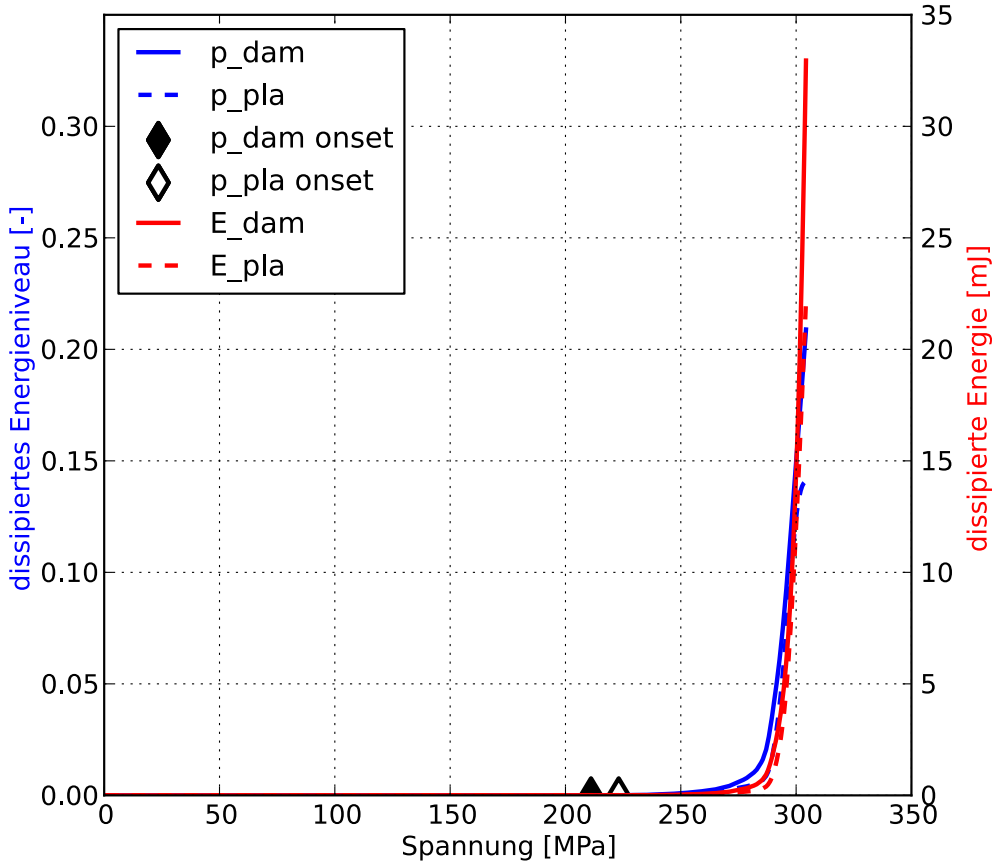


Abbildung 5.10: Antwort der Einheitszelle auf eine ebene Belastung, die proportional bis zu einer Spannung mit den Komponenten $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 416,1$ und $\sigma_{12} = 117,1$ gesteigert wird. Relative dissipierte Energieniveaus durch Schädigung und Plastizieren (p_{dam}, p_{pla}) und durch Schädigung und Plastizieren dissipierte Energien (E_{dam}, E_{pla}) aufgetragen über $||\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}||$

Für den bis jetzt nicht beachteten Bereich $\sigma_{11} \leq 0$ und $\sigma_{22} \leq 0$ ist eine detailliertere Betrachtung notwendig. Wenn kritischere Lastfälle als die genannten vorkommen, können die festgelegten Steigungen nicht zur Beurteilung der Materialauslastung herangezogen werden. Es ist eine separate, für diesen Bereich gültige, Tangentsteigung zu bestimmen. Hierbei könnte das Problem auftreten, dass ein Vergleich zu Materialprüfungen aufgrund von komplexen ebenen Spannungszuständen nicht möglich ist.

Es sind auch noch die Lastfälle zu behandeln, bei denen die Steigung der Energiekurven bei Versagen nicht gegen unendlich tendiert (siehe Abb. 5.9 oben). Das sind jene, die in Abb. 5.2 und 5.3 (oben rechts) zu der roten strichlierten Kurve ($||\vec{\sigma}|| = 600$) führen. Die Ursache liegt in der viskosen Regularisierung. Sie gleicht die in den Faserbündeln bereits eingetretene Entfestigung aus und ermöglicht somit eine fortschreitende Laststeigerung,

was zu falschen Aussagen bzgl. Eintritt der Entfestigung führt.

Zu guter Letzt sei erwähnt, dass nur lastgesteuerte Analysen durchgeführt wurden. Es ist jedoch zu erwarten, dass verschiebungsgesteuerte Analysen zu Abweichungen in den Ergebnissen führen. Der Grund liegt im nichtlinearen Materialverhalten. Es ist notwendig zu überprüfen, ob die kritischen Lastfälle bei verschiebungsgesteuerten Vorgehen auch auf einachsige zurückgeführt werden können und die Anwendung der Tangentensteigung möglich ist. Die Ergebnisse aus der last- und verschiebungsgesteuerten Betrachtung sind als untere und obere Schranke zu verstehen. Es ist auch zu berücksichtigen, dass andere Konstitutivgesetze abweichende Ergebnisse liefern. Daher stellt sich die Frage, ob diese Strategie auch auf andere Matrialdefinitionen anwendbar ist.

In Summe betrachtet wird eine Möglichkeit zur Definition kritischer und nicht kritischer Materialzustände aufgezeigt. Gemeinsam mit anderen Alternativen muss diese jedoch erst auf allgemeine Gültigkeit untersucht werden.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit beschäftigte sich mit der Entwicklung eines Konzepts zur besseren Beurteilung der Materialauslastung von Faser-Kunststoff-Verbundlaminaten aus biaxialen Geflechten. Dabei kamen ein Schädigungsmodell für die Faserbündel und ein Materialgesetz, dass das Plastizieren der Matrix erlaubt, zum Einsatz. Damit konnte das nichtlineare Materialverhalten über den FPF hinaus untersucht werden. FPF tritt in vielen Fällen lange vor Versagen auf. Um den Zustand des Gewebematerials zu beschreiben wurden Hüllflächen im ebenen Spannungsraum generiert. Die Basis für diese bildete das Verhältnis dissipierter Energien, jene dissipiert durch Schädigung oder Plastizieren und der gesamten Verzerrungsenergie. Die gesuchte skalare Größe wird somit von relativen Energieniveaus repräsentiert. Angewendet auf gleichmäßig im Spannungsraum verteilte radiale Belastungspfade führten sie zu den gewünschten Hüllflächen. Durch die Analyse unterschiedlicher Niveaus an Schädigung und Plastizieren wurde die Entwicklung der jeweiligen Mechanismen über den FPF hinaus gezeigt. Es ist auch die Darstellung der Reihenfolge des Auftretens der Mechanismen möglich. Der rasche Anstieg der Energieniveaus, bei Annäherung an den Punkt des Versagens, führte zu der Idee deren Steigung zu nutzen. Dabei soll eine Tangentensteigung, die nicht kritische und kritische Zustände voneinader trennt, definiert werden. Dafür wird die jeweils für Schädigung und Plastizieren ungünstigste Belastung herangezogen. Diese kann über die Entwicklung der Hüllflächen bestimmt und auf alle restlichen Lastfälle angewendet werden.

Um eine Anwendung in der Praxis zu ermöglichen, sind zu diesem Zeitpunkt zwei sehr wesentliche Schritte notwendig. Erstens muss das Ganze auch für den ebenen Verzer-

rungsraum untersucht werden. Diese Ergebnisse werden sich, aufgrund des nichtlinearen Materialverhaltens, von denen in dieser Arbeit unterscheiden. Es ist zu prüfen, ob im Verzerrungsraum dieselben Betrachtungen möglich sind und ob die Idee, Tangentensteigungen für die Beurteilung der Materialauslastung zu nutzen, anwendbar ist. Zweitens wird es erforderlich sein, an den zugrunde liegenden Materialgesetzen zu arbeiten. Wesentlich ist es, jenes der Faserbündel mit der Entwicklung des Plastizierens zu ergänzen, wie z.B. in der Arbeit von Flatscher [11]. Es sind auch Überlegungen anzustellen, in wie weit es sinnvoll ist, im Konstitutivgesetz für die Matrix fortschreitende Schädigung zu berücksichtigen.

Führen die weiteren Forschungsaktivitäten zu positiven Ergebnissen wird eine Nutzung auf zwei unterschiedliche Arten möglich. Zum Einen kann die Entwicklung der Auslastung des Gewebematerials durch Hüllflächen im Spannungs- und Verzerrungsraum beschrieben werden. Dies führt zu einem Überblick in Hinsicht auf Festigkeitsreserven, Sensibilität im Bezug auf bestimmte Lastfälle, Gradienten der Entwicklung der Mechanismen, usw. Zum Anderen ist eine Nutzung der generierten Daten auf eine automatisierte Art und Weise möglich. Dabei werden lokale Spannungszustände aus dem Ergebnis einer linearen FEM-Analyse eines konkreten Bauteils als Eingabegrößen verwendet.

Die Anwendung dieser Idee der Beurteilung der Materialauslastung scheint ohne größere Probleme auf andere Gewebematerialien und auch auf UD-Gelege aus FKV mit ausgeprägtem nichtlinearem Verhalten übertragbarbar zu sein.

Anhang A

Python-Quelltext: Generieren von Ortsvektoren

Programmiersprache: Python 2.7.3

Quelltextbeschreibung:

Der Quelltext liefert Koordinaten von Punkten die sich auf der Oberfläche der Einheitskugel befinden. Diese Punkte sind in Form von Dreiecken angeordnet. Die Zuordnung der Punkte zu den Dreiecken wird ebefalls abgespeichert. Der Kern des Skripts ist [2] entnommen.

Ausgabedateien:

vertices.txt
faces.txt

```
from euclid import *
from numpy import *
import numpy as np
import shutil as sh

###  definition of  octohedra                    ####################

s = math.sqrt(0.5)
verts = [
    [   s,   s, 0.0],  #0
    [  -s,  -s, 0.0],  #1
    [  -s,   s, 0.0],  #2
    [   s,  -s, 0.0],  #3
    [ 0.0, 0.0, 1.0],  #4
    [ 0.0, 0.0,-1.0]   #5
    ]
faces = [
    [4, 0, 2],
    [4, 2, 1],
    [4, 1, 3],
    [4, 3, 0],
    [5, 2, 0],
    [5, 1, 2],
    [5, 3, 1],
    [5, 0, 3]
    ]

###  definition of functions                     ####################

def subdivide(verts, faces):
    """Subdivide each triangle into four triangles, pushing verts to the unit sphere
"""
    triangles = len(faces)
    for faceIndex in xrange(triangles):
        # creates three new verts (midpoints of each edge):
        face = faces[faceIndex]
        a,b,c = (Vector3(*verts[vertIndex]) for vertIndex in face)
        verts.append((a + b).normalized()[:])
        verts.append((b + c).normalized()[:])
        verts.append((a + c).normalized()[:])
        # splits the current triangle into four smaller triangles:
        i = len(verts) - 3
        j, k = i+1, i+2
        faces.append((i, j, k))
        faces.append((face[0], i, k))
        faces.append((i, face[1], j))
        faces[faceIndex] = (k, j, face[2])
    return verts, faces

###  recursive division of icosahedra            ####################

num_subdivisions = 3
for x in xrange(num_subdivisions):
    verts, faces = subdivide(verts, faces)

###  vertices and triangles output               ####################

filename = 'vertices.txt'
f = open(filename, 'w')
f.truncate()
f.close()
savetxt(filename, verts)

Filename = 'faces.txt'
F = open(Filename, 'w')
F.truncate()
F.close()
savetxt(Filename, faces, fmt='%i')
```

Abbildungsverzeichnis

1.1 Übersicht von Faser-Halbzeugen für die Anwendung in der Praxis [33]. . 3
1.2 Darstellung der gebräuchlichsten Gewebekonstruktionen bzw. Webarten. a) Leinenbindung, b) Köperbindung, c) Atlasbindung, d) kettstarkes Gewebe. [33] 4
1.3 Mikro-Meso-Makro-Betrachtung des Laminataufbaus eines FKV auf der linken Seite und die entsprechende FEM-Modellierung auf der rechten Seite am Beispiel eines faserverstärkten Zylinders. a) und d) stellen die Makroebene dar, b) und e) die Mesoebene, c) und f) die Mikroebene. [6] 6
1.4 Schematische Darstellung fortschreitender Matrix-Schädigungsmechanismen und die einhergehende Steifigkeitsabnahme einer Einzelschicht im Mehrschichtverbund. [31] 8
1.5 Belasten, entlasten und wiederbelasten einer $[(\pm 45°)_n]_S$-Probe unter einachsigen Zug (links); Belasten, entlasten und wiederbelasten eines UD-Laminats unter einachsigen transversalen Druck (rechts); Antworten sind über die aufgebrachte Kraft F und den Verschiebungen u angegeben; experimentelle Daten generiert von PCCL. [11] 9
1.6 Darstellung einer UD-Einzelschicht unter Druckbelastung in Faserrichtung. Die Welligkeit der Fasern, eingebettet in eine Matrix mit niedriger Steifigkeit, führt zur Ausbildung von Knickbändern. [31] 10

2.1 Darstellung von RVE inklusive Translationsachsen. Leinenbindung a), Köperbindung b), Atlasbindung c). 16
2.2 Notation der Flächen, Kanten und Ecken der Einheitszelle. [7] 17
2.3 Mikroskopieaufnahme einer Gewebelaminat-Probe. Zu erkennen sind die nachgezeichneten Faserbündelquerschnitte und der Faserbündelverlauf. [26] 18

2.4 Schnitt einer Einheitszelle aus Kontinuumselementen einer 2/2 Köperbindung. Rechtecke markieren die spitzen Elemente der Matrixtaschen. [26] 19
2.5 Konzept der Modellierung mit Schalenelementen. Der Schnitt zeigt die Referenzflächen der Elemente, den Offset und die Dicke der Schalenelemente. [14] 20
2.6 Schematische Darstellung einer Drucker-Prager-Fließfläche im dreiachsigen Spannungsraum, links. Skizze des linearen Drucker-Prager-Kriteriums [10], rechts. 25

3.1 Darstellung der Strategie zur Erstellung einer Hüllfläche im ebenen Spannungsraum. 33
3.2 Darstellung des Teilens der Flächen eines Oktaeders in weitere Dreiecke zur Erzeugung von Punkten auf der Einheitskugel. [3] 35
3.3 Darstellung der Einheitskugel angenähert über die Geometrie eines Oktaeders mit 512 Dreiecken. [3] 36

4.1 Schnitt durch die Einheitszelle mit rechteckigen Faserbündelquerschnitt und stückweisen geraden Faserbündelverlauf. Maße in [mm] [14] 38
4.2 Darsetellung der vernetzten Einheitszelle, assembliert (oben), Faserbündel (links), Matrixtaschen (rechts). 38
4.3 Darstellung der makroskopischen Randbedingungen der Einheitszelle. . 39
4.4 Vergleich des Verhaltens der Einheitszelle in den orthogonalen Richtungen bei einachsigem Zug und Druck (oben links und rechts). Gegenüberstellung der Antwort bei positiver und negativer Schubbelastung (unten links). Die Randbedingungen der Einheitszelle sind in Abb. 4.3 dargestellt. 42

5.1 Hüllflächen für Schädigungsbeginn (grün) und Beginn des Plastizierens (blau) im ebenen Spannungsraum. Dreidimensionale Ansicht der oberen Halbschalen (oben), Schnitt durch die $\sigma_{12}\sigma_{22}$-Ebene (unten links), durch die $\sigma_{11}\sigma_{22}$-Ebene (unten rechts). Angaben in [MPa]. 47
5.2 Schnitte durch Hüllflächen unterschiedlicher Schädigungsniveaus. Schädigung (grün) bei Beginn, einem Niveau von 0,5%, 1%, 1,5%, 2%. Abbruch bzw. Ende der Simulation (rot). Angaben in [MPa]. 48

5.3 Schnitte durch Hüllflächen unterschiedlicher Plastizitätsniveaus. Plastizieren (blau) bei Beginn, einem Niveau von 0,25%, 0,5%, 0,75%, 1%. Abbruch bzw. Ende der Simulation (rot). Angaben in [MPa]. 49
5.4 Reihenfolge des Auftretens der Mechanismen Schädigung und Plastizieren zu Beginn und bei einem dissipierten Energieniveau von 1%. Proportionale Laststeigerung; $||\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{A}}||$ aus Gl. (5.1) (grün); dissipiertes Energieniveau (blau) 51
5.5 Reihenfolge des Auftretens der Mechanismen Schädigung und Plastizieren zu Beginn und bei einem dissipierten Energieniveau von 1%. Proportionale Laststeigerung; $||\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{B}}||$ aus Gl. (5.2) (grün); dissipiertes Energieniveau (blau) 51
5.6 Antwort der Einheitszelle auf eine einachsige Zugspannung σ_{11} aufgetragen über die Verzerrung ε_{11} (oben) und den Laststeigerungsfaktor (unten). Relative dissipierte Energieniveaus durch Schädigung und Plastizieren (p_{dam}, p_{pla}); durch Schädigung und Plastizieren dissipierte Energien (E_{dam}, E_{pla}) 54
5.7 Antwort der Einheitszelle auf eine einachsige Druckspannung σ_{22} aufgetragen über die Verzerrung ε_{22} (oben) und den Laststeigerungsfaktor (unten). Relative dissipierte Energieniveaus durch Schädigung und Plastizieren (p_{dam}, p_{pla}); durch Schädigung und Plastizieren dissipierte Energien (E_{dam}, E_{pla}) 55
5.8 Antwort der Einheitszelle auf eine ebene Schubspannung σ_{12} aufgetragen über den Verzerrungswinkel γ_{12} (oben) und den Laststeigerungsfaktor (unten). Relative dissipierte Energieniveaus durch Schädigung und Plastizieren (p_{dam}, p_{pla}); durch Schädigung und Plastizieren dissipierte Energien (E_{dam}, E_{pla}) 56
5.9 Antwort der Einheitszelle auf eine ebene Belastung, die proportional bis zu einer Spannung mit den Komponenten $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 424,3$ und $\sigma_{12} = 0$ (oben), $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 416,1$ und $\sigma_{12} = 117,1$ (mitte) und $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ und $\sigma_{12} = 600$ (unten) gesteigert wird. Aufgetragene Spannung entspricht $||\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}||$; relative dissipierte Energieniveaus durch Schädigung und Plastizieren (p_{dam}, p_{pla}); durch Schädigung und Plastizieren dissipierte Energien (E_{dam}, E_{pla}) 58

5.10 Antwort der Einheitszelle auf eine ebene Belastung, die proportional bis zu einer Spannung mit den Komponenten $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 416,1$ und $\sigma_{12} = 117,1$ gesteigert wird. Relative dissipierte Energieniveaus durch Schädigung und Plastizieren (p_{dam}, p_{pla}) und durch Schädigung und Plastizieren dissipierte Energien (E_{dam}, E_{pla}) aufgetragen über $||\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}||$ 60

Tabellenverzeichnis

4.1 Linear elastische Materialdaten der Faserbündel mit einem Faservolumenanteil von 60%. Vergleiche mit [12]. (* Annahme) 40
4.2 Parameter für den Schädigungsfortschritt und der Schädigungsstabilisierung im Faserbündel mit einem Faservolumenanteil von 60%. Vergleiche mit [11]. (* Annahme) 40
4.3 Materialdaten für die unverstärkte Matrix [12]. 40

Literatur

[1] http://geometrictools.com/documentation/platonicsolids.pdf (06.12.2013).

[2] http://prideout.net/blog/?p=44 (06.01.2012).

[3] http://www.3d-meier.de/tut12/seite3.html (06.01.2013).

[4] http://www.python.org (06.01.2013).

[5] O. Allix, L. Daudeville, and P. Ladeveze. Delamination and damage mechanics. In D. Baptiste, editor, *Mechanics and Mechanisms of Damage in Composites and Multi-Materials*, pages 143–158. Mechanical Engineering Publications Limited, UK, 1991.

[6] C. Bayreuther. *Mehrskalenmodelle in der Festkörpermechanik und Kopplung von Mehrgittermethoden mit Homogenisierungsverfahren.* PhD thesis, Universität Stuttgart, 2005.

[7] H. J. Böhm. A short introduction to continuum micromechanics. ILSB Report 206, Institute of Lightweight an Structural Biomechanics TU Wien, February 2012.

[8] N. V. D. Carvalho, S. T. Pinho, and P. Robinson. Numerical modelling of woven composites: Biaxial loading. *Composites: Part A*, 43:1326–1337, 2012.

[9] J. L. Chaboche. Continuum damage mechanics, parts i and ii. *ASME Journal of Applied Mechanics*, pages 55–65, 1989.

[10] Dassault Systemes Simulia Corp., Providence, RI, USA. *Abaqus/Standard User's Manual, Version 6.12.*

[11] T. Flatscher. *A Constitutive Model for the Elasto-Plasto-Damage Ply Behavior in Laminated FRP Composites: Its Development, Implementation, and Application in FEM Simulations.* PhD thesis, Vienna Universitiy of Technology, Austria,

March 2010. (also published as: VDI Fortschritt-Berichte VDI Reihe 18 Nr. 326. VDI-Verlag, Düsseldorf).

[12] J. Gager, T. Flatscher, and H. E. Pettermann. Elasto-plasto-damage modeling of frp fabric - a shell unit cell approach. In R. Rolfes and E. Jansen, editors, *3rd ECCOMAS Thematic Conference on the Mechanical Response of Composites*, pages 279–286, Hannover, 2011. Leibniz Universität Hannover.

[13] J. Gager and H. E. Pettermann. Assessing the operation load range of non-linear textile composites by means of stress envelopes. *ECCM15 - 15th European Conference on Composite Materials, Venice, Italy*, 2012.

[14] J. Gager and H. E. Pettermann. Numerical homogenization of textile composites based on shell element discretization. *Composites Science and Technology*, 72:806–812, 2012.

[15] Z. Hashin. Failure criteria for unidirectional fiber composites. *Journal of Applied Mechanics*, 47(2):329–334, 1980.

[16] Z. Hashin and A. Rotem. A fatique criterion for fiber-reinforced materials. *Journal of Composite Materials*, 7:448–464, 1973.

[17] M. J. Hinton, A. S. Kaddour, and P. D. Soden. *Failure Criteria in Fibre Reinforced Polymer Composites: The World-Wide Failure Exercise*. Elsevier Science and Technology Books, 2004.

[18] R. M. Jones. *Mechanics of Composite Materials*. Taylor and Francis Inc., Philadelphia, PA, USA, second edition, 1999.

[19] L. M. Kachanov. On the time to failure under creep conditions. *Izv AN SSSR, Otd Tekhn*, 8:26–31, 1958.

[20] P. Ladeveze. On a damage mechanics approach. In D. Baptiste, editor, *Mechanics and Mechanisms of Damage in Composites and Multi-Materials*, pages 119–142. Mechanical Engineering Publications Limited, London, UK, 1991.

[21] P. Ladeveze. A damage mesomodel of laminate composites. In J. Lemaitre, editor, *Handbook of Materials Behavior Models*, pages 1004–1014. Academic Press, London, UK, 2001.

[22] I. Lapczyk and J. A. Hurtado. Progressive damage modeling in fiber-reinforced

materials. *Composites: Part A*, 38:2333–2341, 2007.

[23] E. R. Lista. Finite element simulations of laminated composites under consideration of nonlinear ply material and delamination. Master's thesis, Vienna Universitiy of Technology, 2012.

[24] A. Lobner. Auswirkungen von Unsicherheiten auf das mechanische Verhalten von Gewebelaminaten. Master's thesis, Technische Universität Wien, 2009.

[25] G. Marsaglia. Choosing a point from the surface of a sphere. *The Annals of Mathematical Statistics*, 43(2):645–646, 1972.

[26] C. Marte. Untersuchung von 2/2-Twill-Gewebe Laminate mit Hilfe von 3D-Finite Elemente Einheitszellen. Master's thesis, Technische Universität Wien, 2004.

[27] A. Matzenmiller, J. Lubliner, and R. L. Taylor. A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites. *Mechanics of Materials*, 20:125–152, 1995.

[28] D. H. Pahr. *Experimental and Numerical Investigations of Perforated FRP-Laminates*. PhD thesis, Vienna Universitiy of Technology, February 2003.

[29] A. Puck. *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten*. Carl Hanser Verlag, München, Wien, Germany, 1996.

[30] E. B. Saff and A. B. J. Kuijlaars. Distributing many points on a sphere. *The Mathematical Intelligencer*, 19(1):5–11, 1997.

[31] C. Schuecker. *Mechanism based modeling of damage and failure in fiber reinforced polymer laminates*. Phd thesis, Vienna Universitiy of Technology, Wien, 2005. (also published as: VDI Fortschritt-Berichte VDI Reihe 18 Nr. 303. VDI-Verlag, Düsseldorf).

[32] C. Schuecker and H. E. Pettermann. Fiber reinforced laminates: Progressive damage modeling based on failure mechanisms. *Arch. Comput. Methods Eng.*, 15:163–184, 2008.

[33] H. Schürmann. *Konstruieren mit Faser-Kunsstoff-Verbunden*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, Deutschland, 2007.

[34] S. W. Tsai and E. M. Wu. A general theory of strength for anisotropic material. *Journal of Composite Materials*, 5:58–80, 1971.