....
Unterschrift des Betreuers

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

D I P L O M A R B E I T

Die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Berücksichtigung im Unterricht

Ausgeführt am Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Mag. Dr. Manfred Kronfellner

durch
Bianca Prosenbauer

Kaiserebersdorferstraße 72/2/8
1110 Wien

....
Datum

....
Unterschrift (StudentIn)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinen Eltern und Großeltern für ihre stetige Unterstützung und Förderung während meiner gesamten Studienzeit bedanken. Ihr habt mich und meinen Berufswunsch nie in Frage gestellt und mir dadurch sehr viel Energie und Ausdauer für mein Studium geschenkt.

Insbesondere danke ich meiner Schwester, Marina, die ohne Unterlass für mich da war, mir mit Rat und Tat zur Seite stand und immer ein offenes Ohr für mich hatte. Du warst während meiner ganzen Studienzeit eine stützende Säule.

Ich möchte auch meinem Freund Stefan danken, der mich immer wieder aufgebaut und mich nie angezweifelt hat. Du stehst hinter allem, was ich tue, und das gibt mir bis heute immer noch sehr viel Kraft.

Ganz besonderer Dank gilt Ao.Univ.Prof. Mag. Dr. Manfred Kronfellner für seine äußerst freundliche und herzliche Betreuung, richtungsweisenden Denkanstöße und interessanten Gespräche rund um meine Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

„Auch der Zufall ist nicht unergründlich, er hat seine Regelmäßigkeit.“
NOVALIS, *Fragmente*

In jedem von uns stecken die Neugierde und der Drang, das Leben und alles was es umgibt zu erfahren und zu hinterfragen. Die einen beschreiben das, was sie erkennen, finden und begreifen, mit Worten, andere wiederum verwenden Zahlen. Nun gibt es aber Ereignisse, die wohl annähernd zu berechnen sind, jedoch das Ergebnis nicht zwingend stimmen muss, weil es immer noch eine wichtige Komponente gibt, die sich Zufall nennt. Jene Berechnungen betitelt man seit der Neuzeit als „Wahrscheinlichkeitsrechnung“.

Schon in der Antike hat man sich mit Wahrscheinlichkeiten und dem Zufall beschäftigt, im Mittelalter spezifischer mit dem Würfelspiel. Nimmt man einen „fairen“ Würfel, so ist es selbst bei diesem relativ unwahrscheinlich, dass bei einer gewissen Anzahl von Würfen genau gleich oft eine der sechs Zahlen geworfen wird. Aber je öfter man den Würfel wirft, umso eher nähert man sich jenem Wert, der sich die Wahrscheinlichkeit für eines dieser sechs Ereignisse nennt, nämlich 1/6. Genauso kann man sich der Wahrscheinlichkeit nähern, dass bei einem Wurf von zwei Würfeln gleichzeitig die Augensumme 5 beträgt. Hierzu kann man einerseits den Versuch selbst sehr oft ausführen und den Näherungswert bestimmen, oder man versucht diese Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der möglichen Kombinationen herzuleiten.

Eine große Frage der Mathematiker der Renaissance war die Verteilung der Einsätze im Glücksspiel, wenn dieses unerwartet unterbrochen wird. Paccioli, Cardano, Tartaglia und später Pascal und Fermat haben sich eingehend damit beschäftigt
(vgl. STEWART 2010: 249, 250).

WUSSING schreibt über die frühen Anfänge:

> *Aus der Vorgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung seien Paccioli, Tartaglia, Cardano und Galilei erwähnt, die spezielle wahrscheinlichkeitstheoretische Aufgaben meist im Zusammenhang mit Glücksspielen behandelten. Der Chevalier de Méré, ein leidenschaftlicher Spieler, der sich aber auch ernsthaft für Wissenschaft interessierte, regte Pascal durch ein konkretes Problem an, sich mit der Wahrscheinlichkeit dieses oder jenes Spielausganges zu beschäftigen. (WUSSING 1979: 213)*

Paccioli, Tartaglia und einige andere Mathematiker werden wir mit ihren Methoden in folgender Arbeit noch näher kennenlernen.

Die Fragestellung, welche sich als roter Faden durch diese Arbeit ziehen soll, ist folgende: Wie hat sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit besonderem Augenmerk auf das 17. Jahrhundert und das frühe 18. Jahrhundert - ausgehend vom Teilungsproblem und dessen Lösung durch Pascal und Fermat – entwickelt?

Um Antworten auf diese Frage zu finden, habe ich ein Buch gewählt, welches ich als Basiswerk anführen möchte, nämlich jenes von Keith J. DEVLIN mit dem Titel „Pascal, Fermat und die Berechnung des Glücks. Eine Reise in die Geschichte der Mathematik“. Viele meiner Zitate und Paraphrasierungen werden aus dieser Schrift entnommen sein, zusätzlich sollen jedoch noch einige andere Werke zum Thema mit einbezogen werden und damit DEVLINS Buch vertiefen und untermauern. Mein besonderes Augenmerk liegt hierbei jedoch nicht auf Formeln und Zahlen, sondern vielmehr auf dem geschichtlichen Hintergrund, dem Leben und den Umständen, welche die Mathematiker dieser Zeit geprägt haben. Ich möchte ergründen, was die Wissenschaftler damals dazu bewegt hat, das Glück zu berechnen.

Anschließend greife ich einige Punkte aus dem theoretischen Teil der vorliegenden Arbeit heraus, um daraus praxisgerechte Arbeitsblätter zur Verwendung im Mathematikunterricht von AHS Klassen zu gestalten.

2. Erste Anfänge

Luca Paccioli, auch genannt Luca di Borgo, wurde um 1440 in Florenz geboren und verstarb 1515 ebendort. Er setzte sich unter anderem mit der Arbeit Fibonaccis auseinander und zählte zu den engsten Freunden Leonardo da Vincis (vgl. OCAGNE 1955: 64). Paccioli war einer der ersten Mathematiker, der sich mit dem Problem der gerechten Aufteilung des Spieleinsatzes nach einem unvorhersehbaren Abbruch vor Spielende auseinandersetzte. Er untersuchte das sogenannte „Teilungsproblem" in seinem Buch „Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità", worin folgende Aufgabe zu finden ist (vgl. KAISER 2006: 280):

> *Zwei Mannschaften spielen ein Ballspiel. Sieger ist, wer zuerst 60 Punkte erreicht. Es wird um einen Preis von 22 Dukaten gespielt. Als das Spiel abgebrochen werden musste, hatte eine Mannschaft 50 Punkte, die andere 30 Punkte. Wie soll das Preisgeld aufgeteilt werden? (KAISER 2006: 281)*

Der Lösungsvorschlag Pacciolis, dass jede Mannschaft jenen Anteil vom Preisgeld bekommt, der im Verhältnis zu den bisher erreichten Punkten steht, wurde später von Cardano in dessen Buch „Practica arithematica generalis" stark angezweifelt (vgl. KAISER 2006: 281).

Einen wichtigen Schritt auf dem Weg zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung machte Tartaglia, noch lange bevor die Wahrscheinlichkeitsrechnung als solche durch Pascal und Fermat aufkam (vgl. ZEUTHEN 1903: 168). Eine interessante Anekdote über ihn erwähnt WUSSING:

> *Eigentlich dürfte er Fontana geheißen haben. Der Name „Tartaglia" (der Stotterer) entstand dadurch, dass der Junge während der Plünderung von Brescia, seinem Geburtsort, durch französische Truppen so verletzt wurde, dass er stottern musste und die Behinderung lebenslang behielt. (WUSSING 2008: 387)*

Tartaglia befasste sich in seiner Abhandlung „Trattato generale di numeri e misure", übersetzt heißt der Titel „Allgemeine Abhandlung der Zahlen und Maße", ebenfalls mit dem Teilungsproblem. Er kritisierte Pacciolis Lösung, bezeichnet sie als „offensichtlich unsinnig" und suchte mittels eines „Gegenbeispiels" die richtige Lösungsmethode (vgl. KAISER 2006: 281).

Tartaglia hatte sich außerdem mit dem Aufsuchen von Differenzreihen[1] auseinandergesetzt und verwendete, während er diese auf Tafeln niederschrieb, schon eine Art Kombinatorik. Diese Tafeln zeigten die Differenzreihen der 1., 2., etc. Ordnung, jedoch beschränkten sie sich bis auf das 6. Glied 1, 6, 21, etc. Tartaglia wollte damit Aussagen über die „Anzahl der wesentlich verschiedenen Würfe 6, 21, ...“ treffen, die mit 1, 2 oder mehreren Würfeln gewürfelt werden können (vgl. ZEUTHEN 1903: 168).

> *Diese Zahl wird, wenn die Anzahl der Würfel r ist, der Summe der 6 ersten Glieder der Differenzenreihe der Ordnung r – 1 oder dem 6. Gliede der Reihe der Ordnung e gleich sein und hat somit den Wert, den wir nach Fermat als* $\frac{6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (6+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot r}$ *oder* $\frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+5)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5}$ *darstellen können.*
> *Die erste Aufstellung des Resultates in Form einer Summe zeigt, daß es durch allmählich wiederholte Hinzufügung je eines Würfels begründet sein muss. (ZEUTHEN 1903: 168)*

Zu Tartaglias Zeiten war der Würfel nicht nur ein Spielinstrument, er hatte auch eine mit dem Orakel vergleichbare Funktion. Tartaglias Tafeln gaben nun Auskunft darüber, wie groß die Zahl der verschiedenen möglichen Antworten der Würfel war. Man sollte jedoch beachten, dass die Wahrscheinlichkeit für jede dieser Antworten nicht gleich groß ist, da ein Würfelergebnis mit denselben Augenzahlen auf jedem Würfel nur auf eine Art zustande kommen kann. Wenn r verschiedene Würfel unterschiedliche Augenzahlen besitzen, so kann ein Wurf mit denselben Augenzahlen genau so oft zu Stande kommen, wie die Anzahl der Permutationen von r Würfeln. Cardano, ein Zeitgenosse Tartaglias, schreibt in seinem „Liber de ludo aleae“ über die Anzahl und die Wahrscheinlichkeit der unterschiedlichen Wurfergebnisse mit 2 oder 3 Würfeln, die unter den generellen Kombinationen geworfen werden können (vgl. ZEUTHEN 1903: 169, siehe auch KAISER 2006: 280).

In Cardanos Werk finden sich zahlreiche Kapitel zum Kartenspiel, so behandelt er beispielweise das mittelalterliche Pokerspiel „Primero“, für das er die Wahrscheinlichkeiten für bestimmte einfache Ausgänge aufzeigt (vgl. HALD 1990: 40).

[1] **Differenzreihe** (Math.), eine Reihe von nach einem gewissen Gesetze fortschreitenden Zahlen, deren jede von der nächstfolgenden abgezogen wird. (ZENO 2013)
Statt der Bezeichnung Differenzreihe verwendet man heute den Begriff arithmetische Reihe, welcher durch die allgemeine Formel $a_{i+1} = a_i + d$ dargestellt werden kann.

Eine der bedeutendsten Errungenschaften von Cardano, erwähnt in seinem „Liber de ludo aleae", ist die Multiplikationsregel, welche beim Berechnen für und gegen das Eintreten eines bestimmten Ereignisses verwendet wurde: Die Anzahl der gleichwahrscheinlichen Ausfälle im Spiel sollen t sein, r die Anzahl der gewünschten Ausgänge, dann sei die Wahrscheinlichkeit dafür r/(t-r).

Nach zahlreichen Versuchen mit verschiedensten Würfeln nennt er bei n Wiederholungen die Formel $r^n/(t^n–r^n)$. Setzt man nun p = r/t, so kommt man auf den Ausdruck $p^n/(1–p^n)$, welcher heute verwendet wird (vgl. HALD 1990: 39). Umgekehrt kann man sagen, dass man statt p in dem Ausdruck r/t schreiben kann und durch Umformung wieder auf die Formel $r^n/(t^n–r^n)$ kommt. Nachdem Cardano seine Formel im „Liber de ludo aleae" niedergeschrieben hatte, wurde sie erst zur Zeit Pascals als elementar angesehen (vgl. HALD 1990: 41).

BELLHOUSE schreibt in seiner Abhandlung „Decoding Cardano's Liber de ludo aleae" folgende Worte in seiner Conclusio:

> *Cardano tried to generalize gambling problems beyond equal stakes. His generalization was limited in that he did not go beyond the calculation of the number of outcomes of an event. (BELLHOUSE 2005: 200)*

Cardano versuchte sich also an dem Problem der gleichen Einsätze (und deren Aufteilung) im Glücksspiel. Er wollte dieses verallgemeinern, war jedoch sofern begrenzt in seiner Methode, da er nicht über die Berechnung der Anzahl der einzelnen Spielausgänge hinaus ging.

DEDRON schreibt über den Beginn der eigentlichen Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass man schon seit jeher die Gewinnwahrscheinlichkeiten von einfachen Glücksspielen zu berechnen versuchte und die Gewinnchancen der Spieler feststellen wollte. Doch vor Pascal und Fermat hat es niemand geschafft, die komplexen Prinzipien ins Kalkül zu ziehen und schwierigere Problemstellungen zu lösen (vgl. DEDRON 1959: 225).

KAISER schreibt diesbezüglich:

> *Bis etwa zur Mitte des siebzehnten Jahrhunderts wurden für einzelne, spezielle Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung immer wieder spezielle Lösungswege angegeben. Der gemeinsame mathematische Hintergrund wurde dabei aber nicht erfasst. (KAISER 2006: 282)*

3. Das Teilungsproblem

3.1. Blaise Pascal

Blaise Pascal lebte von 1623-1662. Er kam in einem kleinen Ort im Zentrum Frankreichs, dem heutigen Clermont-Ferrand, zur Welt. Seine Mutter verstarb, als er drei Jahre alt war, woraufhin sein Vater Etienne, Steuerbeamter und Vizepräsident am Obersteuergericht, mit seiner restlichen Familie nach Paris ging. Blaise wuchs mit zwei Schwestern, Gilberte und Jacqueline, auf. Jacqueline ging später ins Kloster.

Etienne Pascal unterrichtete Blaise gemeinsam mit anderen Hauslehrern, legte einen besonderen Schwerpunkt auf Sprachen und sah zu, dass Blaise Griechisch und Latein konnte (vgl. LÖFFLER 1987: 10-14). Er wollte, dass Blaise erst im Alter von 15 Jahren mit der Mathematik in Kontakt kam und hielt folglich die mathematischen Werke von ihm fern, was seinen Sohn nur noch mehr zur Mathematik hintrieb. Nachdem Blaise sein 12. Lebensjahr erreicht hatte, beschäftigte er sich – von seinem Vater unbemerkt – mit der Geometrie und erkannte, dass die Summe der Winkel innerhalb eines Dreiecks einen gestreckten Winkel ergab. Er war ein Wunderkind. Sein Vater war voller Stolz und Euphorie, als er von der mathematischen Begabung seines Sohnes erfuhr, und erlaubte Blaise den Zugang zu den mathematischen Schriften. Blaise's erstes Werk waren Euklids „Elemente".

Etienne nahm seinen Sohn mit zu den Versammlungen der Académie Mersenne, in der Wissenschaftler und Mathematiker saßen. Der damals 16-jährige Pascal verfasste seine erste Schrift über Kegelschnitte und präsentierte sie der Académie Mersenne (vgl. DEVLIN 2009: 27-29).

> *Als Siebzehnjähriger trat er 1640 mit seiner Erstaunen erregenden Abhandlung „Essay pour les coniques" hervor, die bereits eine projektive Behandlungsweise der Kegelschnitte und eigene Forschungsergebnisse enthält. Dort findet sich der berühmt gewordene Pascalsche Kegelschnittsatz. (WUSSING 2008: 414)*

Père Mersenne, Gründer der „Freien Akademie", hatte stets den Überblick über die Briefwechsel seiner Fachkollegen, darunter Galilei, Huygens, Fermat, Pascal und Descartes.

Zu dieser Zeit setzte sich das heliozentrische Weltbild von Galileo Galilei durch, welches auch Descartes vertrat. Descartes' „Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences" wurde 1637 veröffentlicht (vgl. LÖFFLER 1987: 14). Der Titel von Descartes' Werk lautet übersetzt „Abhandlung über die Methode des richtigen Vernunftgebrauchs und der wissenschaftlichen Wahrheitsforschung". Wie man schon am Titel herauszulesen vermag, handelt es sich um ein philosophisches Werk, welches vor Allem im ersten Teil auch autobiografische Elemente beinhaltet (vgl. DESCARTES 1863).

Im Jahr 1638 hatte sich Pascals Vater Étienne gegen eine Niederlegung der Staatsrenten aufgelehnt und wurde von Minister Richelieu aus der Stadt verbannt, weshalb die Familie in die Auvergne zog (vgl. LÖFFLER 1987: 14). Ein Jahr später übersiedelte man nach Rouen (vgl. DEVLIN 2009: 29). Étienne war dort gut verdienend als Steuereintreiber tätig. Bald nach dem Umzug schrieb Pascal seine Abhandlung über Kegelschnitte, „Essai pour les coniques".

1642 bis 1645 war er mit seiner Rechenmaschine, der „Pascaline", beschäftigt, die zweite je produzierte mechanische Rechenmaschine überhaupt (vgl. DEVLIN 2009: 61,62). Der Wille, den Vater bei seinem Schaffen zu unterstützen und ihm die Arbeit zu erleichtern, spornte ihn zur Entwicklung von „Pascaline" an. Mit ihr konnte man auf einfachem, mechanischem Weg addieren und subtrahieren. Die Produktion der Maschine war jedoch problematischer als von Blaise angenommen, doch durch sein handwerkliches Talent überwand er diese Hürde und die „Pascaline" ging 1645 in Produktion (vgl. LÖFFLER 1987: 17).

Um vor Imitationen gefeit zu sein, erlangte Pascal 1649 das Privileg des Königs, das „Privilège Royal", das ihm die Rechte auf seine Rechenmaschine zusicherte und auch das Nachahmen ähnlicher Geräte für andere untersagte (vgl. LÖFFLER 1987: 52).

Im Erwachsenenalter gab er sich ganz der Mathematik, Religion und den Naturwissenschaften hin und war finanziell auf die Unterstützung seiner Familie angewiesen (vgl. DEVLIN 2009: 29).

Den inneren Kampf gegen den großen Widerspruch, der in Pascal schlummerte, nämlich die Berechnung der Zukunft gegenüber dem Glauben an Gott, beschreiben die Autoren Ellen und Michael KAPLAN folgendermaßen:

> *In Blaise Pascal manifestierten sich die vielfältigen Widersprüche des mittelalterlichen Denkens längs der großen Trennungslinien, die immer noch unser Denken bestimmen: Vernunft gegen Glauben, Strenge gegen Intuition, Kopf gegen Bauch. Jung, erschreckend intelligent, wohlhabend und mit guten Beziehungen gesegnet, sprachgewandt mit einem Sinn fürs Paradoxe, (…) verkörperte Pascal jenen Geist, den besonders die Franzosen pflegen und der am besten mit dem Wort „esprit“ bezeichnet wird. (vgl. KAPLAN 2007: 36)*

Nach einem Sturz seines Vaters, der sich dabei schwer verletzte und von zwei streng gläubigen, in Askese lebenden Brüdern der Jansenisten gepflegt wurde, nahm Blaise ebenso diesen Glauben an und begann ein enthaltsames Leben zu führen (vgl. DEVLIN 2009: 62).

Die Lehre der Jansenisten basierte im Wesentlichen auf dem „Augustinus“ des niederländischen Theologen Cornelius Jansen, Bischof von Ypern. Nach ihm ist, im Widerspruch zur Morallehre der Jesuiten, die Gnade Gottes der alleinige Grund des Seelenheils (vgl. LÖFFLER 1987: 17).

Blaise verzichtete in dieser Phase seines Lebens sogar auf Mathematik und Naturwissenschaften, da sie als „eitler Zeitvertreib“ galten. Seine Abkehr sollte ihn vor dem Teufel retten. Er wurde schwer krank – starke Kopfschmerzen und Lähmungserscheinungen quälten ihn – woraufhin ihm sein Arzt nahelegte, den Glauben der Jansenisten abzulegen und ein normales, einem jungen Mann gebührendes Leben zu führen. Pascal setzte daraufhin seine wissenschaftlichen Recherchen fort (vgl. DEVLIN 2009: 62).

Mit dem Entschluss, seine Leidenschaft für die Naturwissenschaften wieder aufleben zu lassen, gab er sich zunächst der Physik hin. Nach mehreren Versuchen erkannte er, dass der Luftdruck abnimmt je höher man sich befindet, und schloss daraus, dass dieser in der Atmosphäre sogar bis zum Vakuum ausdünnen müsste. 1647 präsentierte er diese Überlegungen René Descartes, der diese jedoch zurückwies.

Im selben Jahr begegneten einander Pascal und Descartes auch persönlich, doch der junge Mathematiker und Descartes hatten keine gemeinsame Gesprächsebene.

Sie waren zu unterschiedlich was ihre Weltanschauung betraf und waren sich auch in Fragen der Physik uneins (vgl. LÖFFLER 1987: 19). 1647 publizierte Pascal seine „Expériences nouvelles touchant le vide“, ein Werk dass Unstimmigkeit mit den Naturwissenschaftlern hervorrief (vgl. DEVLIN 2009: 63).

Als der Dreißigjährige Krieg tobte, verfasste Pascal eine Schrift über das Gleichgewicht von Flüssigkeiten („De l’équilibre des liqueurs“), in der er das Pascal’sche Gesetz zum hydrostatischen Druck aufzeigte. Es folgte dann „Generatio conisectionum“, ein Buch über Kegelschnitte (vgl. DEVLIN 2009: 64). Wegen großer Unruhen in Rouen zog die Familie wieder zurück nach Clermont, wo Pascal seine „Pascaline“ weiterentwickelte (vgl. LÖFFLER 1987: 20).

Wieder nach Paris zurückgezogen, starb Pascals Vater im Jahr 1651. Dies war der Anstoß für sein philosophisches Werk „Pensées“, einer Zusammenfassung seiner Gedanken über das menschliche Leiden, über seinen Glauben und über Gott – doch auch die Mathematik hatte einen kleinen Anteil am Inhalt des Buches. Diese Schrift wurde jedoch erst nach seinem Tod veröffentlicht (vgl. DEVLIN 2009: 63).

In einem Spielsalon traf er auf Chevalier de Méré, einen leidenschaftlichen Spieler, der jedoch mit Hilfe der Mathematik seinem Glück nachzuhelfen versuchte (vgl. DEVLIN 2009: 63). Er fragte Pascal um Rat und die darauffolgende Diskussion bildete letztendlich die Basis für die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das einschneidende Datum diesbezüglich war der 29. Juli 1654, der Tag, an dem Pascal seinen Brief an Fermat schrieb, in dem er das Teilungsproblem schilderte (vgl. LÖFFLER 1987: 22).

Erst 1665 erschien sein „Traité du triangle arithmétique“, das eigentlich schon 1654 geschrieben wurde. In ihm findet man die Erklärung und Darstellung des Pascal’schen Dreiecks. Isaac Newton verwendete es, gemeinsam mit unendlichen Reihen, zur Aufstellung des „Binomischen Lehrsatzes“ und zeigte auch, dass es für alle reellen Zahlen gilt (vgl. DEVLIN 2009: 64).

Pascals „Traité du triangle arithmétique“ ist nicht nur wegen des Pascal’schen Dreiecks ein essentieller Meilenstein in der Geschichte der Mathematik, sondern auch wegen der enthaltenen Kapitel über die Wahrscheinlichkeitsrechnung. In einem

Teil des Werks spricht Pascal auch vom Prinzip der vollständigen Induktion (vgl. STRUIK 1969: 21). In den meisten heutigen Schullehrbüchern findet man das Pascal'sche Dreieck im Kapitel der Potenzfunktionen, wo die Schüler erstmals mit den Binomialkoeffizienten in Berührung kommen. Im Pascal'schen Dreieck kann man $\binom{n}{k}$ für n und k insofern leicht ablesen, wenn es weit genug berechnet vorliegt.

Pascals Essay kann man auch als eine Zusammentragung des damaligen Standes der Wahrscheinlichkeitsrechnung sehen, die jedoch noch nicht unter diesem Titel stand. Pascal sendete Fermat eine Ausgabe dieser Schrift, nachdem Fermat diesen Essay in einem Brief an Pascal erwähnt hatte (vgl. DEVLIN 2009: 66).

Im gleichen Jahr 1654, als der Briefwechsel mit Fermat begann, erkrankte Pascal. Später stellte sich heraus, dass es Magenkrebs war, der letztendlich für seinen Tod verantwortlich war. Pascal schrieb „[…] obgleich ich noch im Bett liege, muss ich Ihnen unbedingt mitteilen, dass ich gestern Abend […] Ihren Brief über das Teilungsproblem erhielt." Nach einem beinahe tödlichen Unfall mit seiner Kutsche erkrankte Pascal psychisch schwer und wandte sich erneut dem Christentum zu. Er besuchte des Öfteren das Kloster Port-Royal des Champs und schrieb anonym Schriften mit religiösem Inhalt, unter Anderem einige Briefe mit dem Titel „Lettres provinciales", welche 1656 und 1657 veröffentlicht wurden (vgl. DEVLIN 2009: 66). Weitere Werke folgten, darunter viele religiöse Schriften, die er teilweise unter Pseudonymen schrieb, und einige mathematische Abhandlungen zur Geometrie (vgl. LÖFFLER 1987: 25-27).

Seine Schmerzen in der Magengegend wurden immer schlimmer, das Interesse an der Wissenschaft verließ ihn (vgl. DEVLIN 2009: 67). Zusätzlich sollte der Jansenismus abgeschafft werden und jeder Bürger von diesem Glauben abschwören. Als Pascal diese Bestimmung unterzeichnen sollte, weigerte er sich und blieb kämpferisch. Die Sorgen um ihren Bruder und dessen Querelen spielten beim Tod der Schwester Jacqueline im Jahr 1661 keine unwichtige Rolle (vgl. LÖFFLER 1987: 27).

Für Pascal war die Mathematik fortan nur mehr Thema in einigen von seinen Briefwechseln. Im letzten Jahr seines Lebens widmete er sich mittels Spenden den

Armen und ging zu diversen Gottesdiensten in Paris. Am 9. August 1662 starb er an den Folgen des Magenkrebs, der seinem Körper stark zugesetzt hatte und sogar bis ins Gehirn vordrang. Die Briefe Fermats und Pascals zählen zu seinen wichtigsten geistigen Hinterlassenschaften (vgl. DEVLIN 2009: 67) und wir verdanken dem Mathematiker das „Pascal'sche Dreieck", welches unter anderem bei der Berechnung der Binomialkoeffizienten des Binoms $(a+b)^n$ eine große Bedeutung hat (vgl. DEVLIN 2009: 30).

Donald Adamson beschreibt in seinem Buch über Pascal den Mathematiker als schmächtig und leicht überheblich. Er hatte eine laute Stimme und war im Erwachsenenalter ständig von starken Schmerzen geplagt. Bereits in der Jugend machte ihm Migräne zu schaffen. Er galt als altklug, zielstrebig, perfektionistisch, rücksichtslos und streitsüchtig, gleichzeitig war er um Demut und Bescheidenheit bemüht (vgl. DEVLIN 2009: 60).

Der Historiker René Taton schrieb über Pascal: „Zugleich ein Physiker, Mathematiker und wortreicher Publizist in den „Provinciales" … wurde Pascal die Überfülle seiner Begabungen zu einem Hemmnis. Es ist behauptet worden, seine Hinwendung an allzu konkrete Gegenstände habe ihn daran gehindert, die Infinitesimalrechnung zu entdecken, während er in einigen „Briefen an einen Freund in der Provinz" die rätselhaften Beziehungen der Menschen zu Gott so abhandelt, als gehe es um Probleme der Geometrie. Diese Vorbehalte treten freilich in den Hintergrund angesichts des Nutzens, den ihm seine vielseitigen Talente bescherten. So verdanken seine religiösen Schriften seinem geübten Umgang mit naturwissenschaftlichen Fragen ihre gedankliche Tiefe" (vgl. DEVLIN 2009: 61).

OCAGNE schreibt über Pascal:

> *Blaise Pascal, génie unique, a conquis une primauté que nul ne songe à lui contester à la fois comme écrivain, comme penseur, comme polémiste, comme physicien, comme mathématicien, comme inventeur. (OCAGNE 1955: 100, 101)*

Übersetzt bedeuten seine Zeilen in etwa: Blaise Pascal, ein einzigartiges Genie, hat eine Position errungen, dass niemand es wagen kann, ihn als Schriftsteller, Denker, Polemiker, Physiker, Mathematiker oder Erfinder anzuzweifeln.

3.2. Pierre de Fermat

Pierre de Fermat kam wahrscheinlich im Zeitraum Ende 1607/Anfang 1608 in Beaumont-de-Lomagne zu Welt (vgl. SINGH 2006: 59, vgl. MAHONEY 1994: 15). Sein Geburtsdatum wurde lange mit 20. August 1601 angegeben, jedoch handelte es sich dabei um eine Verwechslung mit dem Geburtstag des gleichnamigen Halbbruders aus seines Vaters erster Ehe (vgl. DEVLIN 1988: 30). Er war der Sohn von Dominique Fermat, einem reichen Lederverkäufer und zweitem Konsul der Stadt (vgl. MAHONEY 1994: 15), und seiner Frau Claire, geborene de Long. Fermat wuchs mit drei Geschwistern auf: einem Bruder namens Clément und zwei Schwestern, die Louise und Marie hießen (vgl. MAHONEY 1994: 15). Er blieb, so nimmt man an, die gesamte Kindheit in seiner Geburtsstadt. Über seine Schullaufbahn weiß man nicht sehr viel, außer dass er im Franziskanerkloster der Stadt unterrichtet wurde. Sein Studium begann er an der Universität von Toulouse. Er zog dann in den späteren 1620er Jahren nach Bordeaux, wo er erstmalig ernstzunehmende mathematische Forschung betrieb. Einige Zeit später wanderte er nach Orléans aus, um dort Jura zu studieren. Er schloss sein Studium in Zivilrecht ab und erwarb den Posten eines Beraters am königlichen Gerichtshof in Toulouse, wo er bis 1631 arbeitete. Das „de“ in Fermats Nachnamen geht auf diesen Posten im Amtsadel zurück. In Toulouse blieb er und verbrachte sein restliches Leben (vgl. DEVLIN 2009: 74,75).

Im Jahr 1631 begann Fermat sein Schaffen im Parlament, wo er als „conseiller au Parlement“ und „commissaire aux requêtes“ amtierte. Er arbeitete in der „Chambre des Requêtes“ bis 1638 als „commissaire“, anschließend wurde er „conseiller lay“, ein Posten, den er bis 1654 innehatte. Im März dieses Jahres wurde er Präsident des Strafgerichts (vgl. MAHONEY 1994: 18).

Zu Beginn des Jahres 1650 holte die Pest das Land ein und forderte viele Menschenleben. Fermat wurde 1653 selbst Opfer der Seuche, überlebte aber (vgl. DEVLIN 2009: 75, vgl. MAHONEY 1994: 17). Sein Freund Bernard Medon verkündete Fermats Tod an einige seiner Fachkollegen, revidierte dies aber kurze Zeit später in einem Brief an den Holländer Nicholas Heinisius (vgl. SINGH 2006: 60):

> *Ich habe Ihnen vor einiger Zeit mitgeteilt, Fermat sei verstorben. Doch er lebt, und wir fürchten nun nicht mehr um seine Gesundheit, auch wenn wir ihn vor kurzem noch zu den Toten zählten. Die Pest wütet nicht mehr unter uns. (SINGH 2006: 60)*

Fermat wird des Öfteren als „Amateur der Mathematik“ bezeichnet, was einzig und alleine daran liegt, dass er mit der Mathematik nie wirklich Geld verdient hatte und nicht viel publizierte. Er tauschte sich eher mit anderen Fachkollegen in ganz Europa aus. Eines seiner großen Themen war die Zahlentheorie, die von den meisten Mathematikern seiner Zeit als das „Reinste vom Reinen“ gesehen wurde. Erst als die Chiffrierungs- und Codierungsverfahren ab den 1970er Jahren entwickelt wurden, war die Zahlentheorie nicht mehr nur abstrakt sondern erlangte einen gesellschaftlichen und praktischen Nutzen – bis dahin wurde sie von vielen Wissenschaftlern als nutzlos angesehen. (vgl. DEVLIN 2009: 76)

Michael Sean MAHONEY, Autor einer Biografie von Fermat mit dem Titel „Die mathematische Laufbahn von Pierre de Fermat: 1601 – 1665“, beschreibt den Mathematiker als verschlossen und wortkarg, sogar lakonisch. Fermat setzte andere per Brief in Kenntnis, welche Forschungen er gerade betrieb und wie das Ergebnis sei, die Lösungswege und Beweise verschwieg er jedoch. Fast alle seine Theorien stellten sich als stimmig heraus (vgl. DEVLIN 2009: 76).

DEVLIN vertritt die Ansicht, Fermat veröffentlichte so gut wie nichts und zeigte damit, dass ihm die Anerkennung der Leute nichts bedeutete. Da er jedoch einen intensiven Briefwechsel mit seinen Fachkollegen betrieb, kann man davon ausgehen, dass er es schon als wichtig empfand, wenn die Elite der Gleichgesinnten ihn schätzte (vgl. DEVLIN 2009: 77).

Jean ITARD schreibt in seinem Artikel über berühmte französische Mathematiker, dass Pierre de Fermat ein außerordentliches mathematisches Genie war, dessen Manuskripte von Hand zu Hand gingen, er jedoch nie etwas größeres publizierte (vgl. ITARD 1977: 183).

Maurice d’OCAGNE schreibt über Fermat:

> *En algèbre, il a émis des vues exactes sur l’élimination, et il partage avec Pascal l’honneur d’avoir fondé le calcul des probabilités, à l’occasion du problème des paris posé par le chevalier de Méré. (OCAGNE 1955: 98)*

Übersetzt will das heißen: Im Bereich der Algebra hat er seine exakten Ansichten über die Elimination geäußert, und er teilt mit Pascal die Ehre, die

Wahrscheinlichkeitsrechnung gegründet zu haben, aufbauend auf dem Pariser Problem, das von Chevalier de Méré gestellt worden ist.

DEVLIN zitiert Colbert, der über Fermat folgende Worte verfasste:

> *So schrieb Jean-Baptiste Colbert, eine herausragende politische Figur im damaligen Frankreich: „Fermat, ein Mann von großer Gelehrtheit, pflegt überall mit gebildeten Männern Umgang. Aber er ist ziemlich zerstreut, legt seine Fälle eher schlecht dar und ist konfus." (DEVLIN 2009: 77)*

Fermats Briefe an Pascal über das Problem des Spielabbruchs waren immer kürzer als die an seine anderen Fachkollegen, wenngleich einleuchtend und nützlich. Beide Mathematiker erwiesen sich jedoch immer große gegenseitige Anerkennung und dieser Respekt war nicht gespielt (vgl. DEVLIN 2009: 77).

> *In einem Brief an Pierre de Cercavi schrieb Fermat: „Ich bin hocherfreut, Ansichten zu haben, die sich mit denen von Monsieur Pascal decken, denn seinem Genius bringe ich unendlich viel Wertschätzung entgegen." Weniger Hochachtung hatte Fermat dagegen offenbar vor Descartes. (DEVLIN 2009: 77)*

Fermat empfand Descartes „Dioptrique" als „Herumstochern im Nebel", eine Bemerkung, die Descartes verärgerte. Sein Ärger intensivierte sich, als er Fermats Forschung zu Extrema und Tangenten als kritische Abhandlung zu seinem Buch „La Géométrie" verstand. Es entstand eine heftige Streitdiskussion, in die mehrere Fachkollegen wie Roberval, Étienne Pascal und Desargues involviert wurden. Der Streit ging über längere Zeit, Descartes nannte Fermats Weg zur Berechnung der Zykloidentangente falsch und Fermat einen zweitrangigen Mathematiker. Fermat störte sich jedoch nicht an diesen Äußerungen (vgl. DEVLIN 2009: 78).

Seine juristische Tätigkeit und der damit verbundene Stress ließen den Kontakt zu Fermats Fachkollegen elf Jahre lang (1643-1654) ruhen. Hinzu kamen der Bürgerkrieg 1648 und die Pest 1650 (vgl. DEVLIN 2009: 79).

Seine Briefe begann er wieder 1654 zu schreiben, als er von Pascal zum Problem des Spielabbruchs kontaktierte wurde.

Über den Beginn des Briefwechsels mit Blaise Pascal ist bekannt, dass der Chevalier de Méré sich an Pascal wandte, um das Teilungsproblem gelöst zu bekommen.

DEVLIN formuliert den Beginn folgendermaßen:

> *Im Jahr 1654 wandte sich der Chevalier de Méré, so der Adelsname des Spielers Antoine de Gombaud, mit einigen Fragen zu Glücksspielen, darunter zum Problem des Spielabbruchs, an seinen Freund Blaise Pascal. Dieser kam nach einigem Nachdenken auf eine mögliche Lösung, war sich allerdings nicht sicher, ob er wirklich den richtigen Weg eingeschlagen hatte. Deswegen teilte er sie Fermat in einem Brief mit, woraus sich die bekannte Korrespondenz entspann, die – vor allem mit dem hier behandelten Brief – als eine Sternstunde in der Geschichte der Mathematik gilt. (DEVLIN 2009: 33)*

Die beiden Mathematiker haben sich jedoch nie gegenüber gestanden. Einmal kam es fast zu einem Treffen, Pascal sagte jedoch aus gesundheitlichen Gründen ab. Nach diesem intensiven Briefwechsel widmete sich Fermat der Mathematik bis an sein Lebensende. Mit knapp 64 Jahren starb er in Castres am 12. Jänner 1665 (vgl. DEVLIN 2009: 79).

Fermats Interessensfelder waren hauptsächlich die Koordinatengeometrie und die Entstehung der Infinitesimalrechnung. Berühmt wurde er jedoch für seine Entwicklungen betreffend die Zahlentheorie, vor Allem für seine Behauptung, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ keine Lösung habe, wenn die Variablen x, y, z für beliebige ganze Zahlen stehen und die Bedingungen $n \in \mathbb{N}, n > 2$ gelten. Erst nach seinem Ableben fand man im Buch „Arithmetica“ von Diophantus den Hinweis, dass Fermat einen Beweis für diese Behauptung gefunden habe, welchen er aber wegen seiner Komplexität nicht sofort notieren könne. Diese spezielle Gleichung nannte man später „Fermats letzten Satz“, welcher von Andrew Wiles erst im Jahre 1994 (publiziert 1995 mit einem Beitrag von Richard Taylor) auf äußerst umfangreiche Weise mit neuen mathematischen Methoden bewiesen werden konnte (vgl. DEVLIN 2009: 30-32).

3.3. Der Briefwechsel

Bereits vor Fermats und Pascals Zeit machten sich Berufsspieler Gedanken zum Glücksspiel und den jeweiligen Gewinnwahrscheinlichkeiten. Doch erst Pascal begann durch seinen intensiven Briefkontakt mit Fermat, mathematische Gesetze und Regeln für den Spielgewinn aufzustellen. Dreihundert Jahre danach sagte Bertrand Russell dazu (vgl. SINGH 2006: 65):

> *Wie können wir nur von den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit sprechen? Ist Wahrscheinlichkeit nicht die Antithese zu jeglichem Gesetz? (SINGH 2006: 65)*

Der erste Brief an Fermat ist verschwunden, deshalb kann man nur auf Grund des Antwortbriefes von Fermat an Pascal erörtern, was der Inhalt gewesen sein muss. Fermat bezieht sich auf jenen Teil in Pascals Brief, der ihm gedanklich Sorgen bereitete (vgl. DEVLIN 2009: 67). Er schreibt seine Überlegungen zu einem Spiel, in dem es darum geht, eine Sechs in acht Würfen zu würfeln. Der Mitspieler bietet jedoch an, einen Geldbetrag auszuzahlen, wenn man nach drei Würfen noch keine Sechs geworfen hat. Fermat korrigiert Pascals Überlegungen und kommt zu dem Entschluss, dass jeder Wurf dieselbe Wahrscheinlichkeit haben muss und dem Spieler 1/6 des Gesamteinsatzes zustünden. Da sich Fermat jedoch nicht sicher ist, bittet er Pascal um seine Meinung zu dieser Lösung.

> *Wenn ich versuche, die Sechs in acht Würfen zu erhalten, und wenn ich dreimal erfolglose Würfe ausführe und mein Mitspieler mir dann vorschlägt, den vierten Wurf nicht mehr auszuführen, und mir stattdessen meinen gerechten Anteil auszahlen will, dann steht mir 125/1296 des Gesamteinsatzes zu.*
>
> *Dies ist nach meinem Prinzip jedoch nicht richtig. Denn in diesem Fall kann, da die ersten drei Würfe dem, der den Würfel hat, nichts gebracht haben und die Gesamtsumme im Spiel bleibt, derjenige, der den Würfel hat und auf seinen vierten Wurf verzichtet, als Entschädigung 1/6 des Ganzen nehmen.*
>
> *Wenn er nun vier Würfe ausgeführt hätte, ohne die angestrebte Augenzahl zu erzielen, und man übereinkäme, dass er den fünften nicht ausführte, hätte er genauso Anspruch auf 1/6 des Gesamteinsatzes als Entschädigung. Da die ganze Summe im Spiel bleibt, folgt nicht nur aus dem Prinzip, sondern entspricht auch dem gesunden Menschenverstand, dass jeder Wurf den gleichen Vorteil bringen muss.*
>
> *Ich bitte Sie daher, mich wissen zu lassen, ob wir im Prinzip übereinstimmen oder ob wir uns nur in der Anwendung unterscheiden. Ich bin, von ganzem Herzen…*
>
> *Fermat*
> *(DEVLIN 2009: 68)*

In Pascals Antwort (29. Juli 1654) sieht er Fermats Bedenken als gerechtfertigt:

> *1. Die Ungeduld erfasst mich ebenso wie Sie, und obgleich ich noch im Bett liege, muss ich Ihnen unbedingt mitteilen, dass ich gestern Abend von Herrn DE CARCAVI Ihren Brief über das Teilungsproblem erhielt, den ich so sehr bewundere, dass ich es nicht in Worte fassen kann. Ich habe nicht die Zeit, mich weitläufig auszulassen, aber Sie haben – mit einem Wort – die beiden Teilungen beim Würfeln und beim Spielabbruch vollständig richtig gefunden: ich bin damit gänzlich befriedigt; denn ich zweifle nun nicht mehr daran, dass ich auf dem richtigen Weg bin nach der erstaunlichen Übereinstimmung, in der ich mich mit Ihnen befinde. (DEVLIN 2009: 68)*

Fermat hatte den führenden Part dieser Zusammenarbeit inne, da er Pascal stark überlegen war (vgl. DEVLIN 2009: 69).

In Fermats Antwort vom 24. August 1654 ist deutlich erkennbar, dass die Beiden unterschiedlichen Ansätze zur Lösung des Problems hatten. Fermat listete alle eventuellen Kombinationen für den weiteren Spielverlauf auf, Pascal verfolgte eine andere Methode (vgl. DEVLIN 2009: 69).

> *So fürchte ich, daß Sie nicht über meine Methode, sondern nur über die der Kombinationen verfügten, als Sie mir das Teilungsproblem bei mehreren Spielern vorlegten, daß wir über diesen Gegenstand verschiedener Meinung sind.*
>
> *Ich bitte Sie inständig, mir mitzuteilen, wie Sie bei der Lösung dieses Teilungsproblems vorgehen. Ihre Antwort werde ich mit Respekt und Freude aufnehmen, selbst wenn Ihre Meinung meiner widerspricht.*
>
> *Ich bin etc… (DEVLIN 2009: 127)*

So beendet Fermat den wohl bedeutendsten Brief seiner Korrespondenz mit Pascal (DEVLIN 2009: 127).

Fermat hatte ernsthafte Absichten, sich auch persönlich mit seinem Kollegen Pascal zu treffen. In einem Brief verlautbart er diesen Wunsch:

> *Sonntag, den 25. Juli 1660*
>
> *Kaum hatte ich erfahren, dass wir näher denn je beieinander sind, konnte ich nicht widerstehen, einen freundschaftlichen Plan zu fassen, zu dessen Überbringer ich Monsieur de Carcavi auserkoren habe. Mit einem Wort: ich beabsichtige, Sie in die Arme zu schließen und mich einige Tage mit Ihnen zu unterhalten. Da es aber um meine Gesundheit nicht besser bestellt ist als um die Ihre, wage ich zu hoffen, dass Sie mir angesichts der Umstände den Gefallen tun, mir auf halber Strecke entgegenzureisen, und mir die Gunst erweisen, einen Ort zwischen Clermont und Toulouse zu benennen an den ich mich gegen Ende September oder Anfang Oktober unweigerlich begeben werde. Wenn Sie dem nicht zustimmen, laufen Sie Gefahr, dass ich Sie zu Hause aufsuche, sodass sich dort gleich zwei Kranke aufhalten werden, Ich erwarte Ihre Nachricht mit Ungeduld und bin von ganzem Herzen Ihr*
>
> *Fermat (DEVLIN 2009: 159)*

Der Briefwechsel der beiden Franzosen blieb nicht lange ohne Folgen. So schreibt DEVLIN:

> *Vor Pascal und Fermat – und ihrer Lösung für das Problem des abgebrochenen Spiels – wäre es undenkbar gewesen, Risiken zu beziffern und präzise zu berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit bestimmte Ereignisse in der Zukunft eintreten. Dank des geistigen Erbes, den uns ihr Briefwechsel hinterlassen hat, ist dies heute möglich. Auch wenn wir nicht sagen können, was morgen geschieht, können wir mögliche Szenarien entwerfen, deren Wahrscheinlichkeit berechnen und uns auf sie einstellen. (DEVLIN 2009: 183)*

3.4. Was dem Teilungsproblem voranging

Das Würfelproblem schildert eine Überlegung, die von de Méré getätigt wurde. Im Prinzip geht es darum, dass es von Vorteil wäre, auf mindestens eine Sechs zu wetten, wenn man mit einem fairen Würfel vier Mal würfelt. Man kann mathematisch zeigen, dass dies sinnvoll wäre, wenn man die Rechnung für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ausführt: $1 - (5/6)^4 \approx 0{,}5177$ [Anm.: $P(E) = 1 - P(\neg E)$] (vgl. LÖFFLER 1987: 84). Somit haben wir gezeigt, dass bei vier Würfen die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser bei mehr als 50 Prozent liegt. Würde man nur drei Mal hintereinander würfeln und mindestens eine Sechs erwarten, wäre dies nicht so wahrscheinlich, da $1 - (5/6)^3 < 0{,}5$.

Bei zwei Würfeln gibt es 6 x 6 = 36 mögliche Ausgänge. Wettet man nun beim Wurf von zwei Würfeln gleichzeitig auf eine Doppelsechs, so müsste man, wie es fast scheint, das Verhältnis 6 : 4 = 36 : n ansetzen, womit als Lösung n = 24 herauskäme. Dahinter steckt die Idee, die Anzahl der möglichen Ausgänge ins Verhältnis mit der Anzahl der Würfe zu setzen, die man braucht, um theoretisch mit einer mehr als 50 prozentigen Wahrscheinlichkeit einen Sechser zu würfeln. Chevalier de Méré konnte dieses Ergebnis jedoch nicht mit der Erfahrung seiner gespielten Spieldurchgänge vereinen und bat Pascal um einen Lösungsansatz. Er fand letztendlich die richtige Zahl, nämlich n = 25. Tatsächlich ist $1 - (35/36)^{25} \approx 0{,}5055$ und größer als 0,5. Würde man nur 24 Durchgänge spielen, errechnete man ein Ergebnis von 0,494, also eine Wahrscheinlichkeit von weniger als 50%. Diese Lösung enttäuschte de Méré, da seine Theorie der Proportionen damit widerlegt wurde (vgl. LÖFFLER 1987: 84).

In einem Brief an Fermat verkündet Pascal seinen Unmut über de Mérés mathematisches Unverständnis. Übersetzt heißt diese eine Phrase „… obwohl er ein großes Geistestalent besitzt, ist er kein Geometer (Mathematiker)" (LÖFFLER 1987: 85). Es war für Pascal typisch, zwischen den Talenten zu kategorisieren und offensichtliche Unterscheidungen diesbezüglich zu äußern.
Dass in Pascal jedoch durch eine andere Fragestellung ein größeres Interesse geweckt wurde, als für das Würfelproblem de Mérés, erkennt man in folgendem Zitat (vgl. LÖFFLER 1987: 85):

> *„j'admire bien davantage la méthode des partis que celle des dés" [„ich bewundere viel mehr die Methode des Teilungsproblems als jene des Würfelproblems"] (LÖFFLER 1987: 85)*

Da Pascal jedoch Probleme mit der Lösung der Teilungsfrage hatte, wandte er sich an Pierre de Fermat. Beide Mathematiker kamen zu demselben – richtigen – Ergebnis, nur jeder auf seine eigene Weise. Voller Freude schrieb Pascal seinem Fachkollegen (vgl. LÖFFLER 1987: 85):

> *Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris. (PASCAL 1954: 77)*

Übersetzt lautet dieser Ausdruck: „Ich erkenne, dass die Wahrheit in Toulouse und in Paris dieselbe ist."

3.5. Darstellung des Teilungsproblems

Die wohl grundlegendste und bedeutendste Problemstellung, die bereits in Pacciolis Buch 1494 und der „Arithmetik“ von Forestani 1603 beschrieben wurde, ist die Frage der „Punkte“, „Teile“ oder „Teilungen“ – heute genannt das „Teilungsproblem“ (vgl. DIEUDONNÉ 1985: 710,711):

Der Einsatz des Spieles wird mit dem Buchstaben S bezeichnet. Zwei Spieler A und B leisten je einen Einsatz von S = 32 Fr, beide Spieler zusammen haben also 2S = 64 Fr im Pot. Sie vereinbaren folgendes Glücksspiel:

> *Fällt eine symmetrische Münze auf den Kopf, erhält A einen Punkt zugesprochen, andernfalls der Spieler B. Wer zum ersten Mal w = 7 Punkte verzeichnen kann, hat das Spiel gewonnen und erzählt den gesamten Einsatz von 2S = 64 Fr. Aus irgend einem Grunde muß das Spiel unterbrochen werden, im Moment wo A über a = 5 und B über b = 4 Punkte verfügt. In welchem Verhältnis ist der Gesamteinsatz gerechterweise unter die beiden Spieler aufzuteilen? (LÖFFLER 1987, S 79)*

Fermat und Pascal waren nicht die ersten Mathematiker, die sich Gedanken zu dieser Aufgabe gemacht haben. Unter Anderem behandelte Luca Paccioli diese Frage schon früher und dachte, dass der Spieleinsatz so aufzuteilen wäre, dass jeder Spieler genau den Anteil bekommt, den er an Runden schon gewonnen hatte, bevor das Spiel abgebrochen wurde (vgl. ZEUTHEN 1903: 170). Wäre das Spiel also so ausgegangen, dass A fünf Punkte gehabt hätte und B nur vier, hätten sie die 64 Fr im Verhältnis 5 : 4 aufteilen müssen.

Cardano kritisierte an diesem Ansatz, dass die Summe der Einzelspiele, die generell hätte gewonnen werden müssen, somit außer Acht bliebe und merkte ebenso an, dass zu des Rätsels Lösung noch weitere Vorbedingungen benötigt würden. Diese konnte er jedoch nicht genau aufstellen (vgl. ZEUTHEN 1903: 170).

3.6. Lösungsansatz von Pascal

Pascal machte sich folgende Gedanken zur Lösung des Problems: Er sah sich alle Versionen für den Ausgang des Spiels im Falle des Spielabbruchs an. In Pascals Überlegung sollte das Spiel aus fünf Runden bestehen, nach der 3. Runde wird es jedoch abgebrochen. Pascal hat nach der 3. Runde 2:1 gespielt, daraus folgt zwei Mal Kopf, ein Mal Zahl. Die Ergebnisse für die beiden letzten, noch zu spielenden Runden können so aussehen:

KK KZ ZK ZZ

Alle diese Varianten haben dieselbe Wahrscheinlichkeit. Der Gewinner bei den ersten drei Möglichkeiten wäre Pascal, die vierte würde einen Gewinn Fermats in diesem fiktiven Spiel bedeuten. Das heißt, dass in drei von vier Varianten Pascal als Sieger hervorgegangen wäre, deshalb sollte man die Einsätze im Verhältnis 3/4 zu 1/4 aufteilen. Man muss jedoch auch bedenken, dass die Ausgänge KK und KZ das gleiche Ergebnis bringen würden, nämlich, dass Pascal bereits nach vier von fünf Runden als klarer Sieger dastehen würde. Also wären insgesamt nur drei Varianten über:

K (für KK oder KZ) ZK ZZ

So gesehen hätte Pascal mit 2:1 die Oberhand und der Einsatz müsste 2/3 zu 1/3 aufgeteilt werden. Doch die Mathematiker, die Pascal und Fermat zu Rate zogen, um dieses Problem eindeutig zu lösen, kamen alle auf die gleiche Frage: Wie kann man die Zukunft und all ihre möglichen Ereignisse mit der Mathematik sinnvoll beschreiben?

Geht man das Spiel ab dem Zeitpunkt durch, wo einer der beiden Kontrahenten mit 2:1 führt, und beobachtet man nach mehreren Durchgängen die Gewinnquote empirisch, so stellt sich nach vielen Versuchen heraus, dass der führende Spieler in circa 3/4 der Spiele gewinnt (vgl. DEVLIN 2009: 33-35).

> *Aus heutiger Sicht können wir erklären, woran genau die zweite Lösungsmöglichkeit harkt. Man kann für den Spielausgang, sofern man möchte, tatsächlich folgende Möglichkeiten annehmen: K ZK KK. Aber falls man dies tut, muss man auch die jeweilige Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Möglichkeiten mit berücksichtigen. Denn diese ist nicht in allen drei Fällen die gleiche. Bei einer korrekten Rechnung stellt sich heraus, dass das erste Ergebnis K doppelt so häufig auftritt wie die beiden*

anderen. Die verschiedenen Häufigkeiten tauchen im Verhältnis von 2 zu I zu I auf. Zieht man dies mit in Betracht, gelangt man zum gleichen Ergebnis wie beim ersten Ansatz: Blaise gewinnt in drei von vier Fällen.(DEVLIN 2009: 35,36)

Um eine mögliche Lösung für das nach wie vor offene Problem zu finden, probiert Pascal mit einem Würfel, welcher nur zwei unterschiedliche Ziffern zeigt und damit dem Münzwurf gleich kommt. Wirft man nämlich eine Münze vier Mal hintereinander, gibt es 2^4 mögliche Ausgänge, welche Pascal in einer Tabelle mit 16 Spalten niederschreibt. Unter den Spalten notiert er mit der Ziffer I, wenn der erste, mit der Ziffer 2, wenn der zweite Spieler den Durchgang gewonnen hätte (vgl. DEVLIN 2009: 37). Danach musste Pascal nur mehr abzählen und kam zu dem Ergebnis, dass man den Einsatz im Verhältnis 11:5 aufteilen muss. Doch diese Lösung genügte ihm nicht (vgl. DEVLIN 2009: 38).

Pascal verwendete nach seinen Worten die „allgemeine Methode“, die für uns heute als „rekursive Methode“ bekannt ist (vgl. DEVLIN 2009: 70).

Auf der Suche nach einer Lösung für das Teilungsproblem geht Pascal von einer Größe E_A(m,n) aus, die den Gewinn des Spielers A nach dem Spielabbruch bemisst. Dabei beschreibt m die noch zu gewinnenden Runden des ersten Spielers (A), n die des zweiten Spielers B. Falls (0,j), ist Spieler A der Sieger, sollte (i,0) eintreten, so gewinnt Spieler B (vgl. LÖFFLER 1987: 85,86). Sollte beiden Spielern gleich viele gewonnene Runden fehlen, so gilt, dass m gleich n ist und somit $E_A(m,n) = \frac{1}{2} \cdot 2S$ (vgl. DEVLIN 2009: 70).

Pascal überlegte sich folgenden rekursiven Ausdruck:

1) $E_A(m,n) = \frac{1}{2}[E_A(m-1,n) + E_A(m,n-1)]$, also eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung, wobei folgende Randbedingungen wirken:

1a) $E_A(0,j) = 2S$ und

1b) $E_A(i,0) = 0$.

Gleiches ist natürlich auch für Spieler B gültig (E_B). Wir nehmen an, m = 3 und n = 2, also A würden noch 3 Rundensiege fehlen, B nur mehr 2. In die Ausdrücke eingesetzt ergibt das:

2) $E_A(2,3) = \frac{1}{2}[E_A(1,3) + E_A(2,2)]$ und

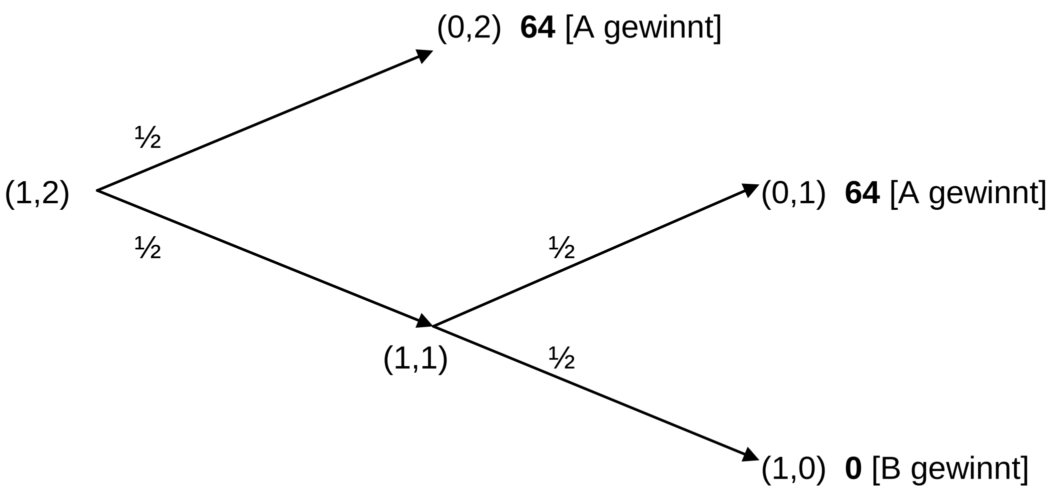
3) $E_A(1,3) = \frac{1}{2}[E_A(0,3) + E_A(1,2)]$.

Nachdem $E_A(0,3) = 2S = 64\,Fr$ und $E_A(2,2) = 32\,Fr$ (weil Gleichstand herrscht und somit der Einsatz fair halbiert wird), bleibt immer noch $E_A(1,2)$ offen, zu welchem sich Pascal folgende Gedanken gemacht hat (vgl. LÖFFLER 1987: 86):

> *Nehmen wir an, Spieler A benötigt noch einen und Spieler B noch zwei Punkte. Wenn nun A im nächsten Spiel einen Punkt gewinnt, dann erhält er den gesamten Einsatz von 64 Fr. Wenn hingegen B einen Punkt erhält, stehen die beiden Spieler gleich und wenn sie dann nicht weiterspielen wollen, so wird jedem Spieler sein ursprünglicher Einsatz von 32 Fr. zukommen. Dem Spieler A wird deshalb in jedem Fall (ob er in der ersten Partie gewinnt oder nicht) 32 Fr. zustehen. Wenn aber die beiden Spieler überhaupt nicht spielen wollen, so kann A wie folgt argumentieren: „ ich bin sicher, 32 Fr. zu gewinnen, auch wenn ich die erste Partie verliere, aber die restlichen 32 Fr. kann ich mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewinnen oder verlieren. Laßt uns folglich diese 32 Fr. halbieren, und geben Sie mir darüber hinaus die 32 Fr., die mir ohnehin sicher sind! (LÖFFLER 1987: 86)*

So löst Pascal: $E_A(1,2) = 32\,Fr + 16\,Fr = 48\,Fr$ und deshalb $E_B(1,2) = 16\,Fr$.

Man kann diese Überlegungen auch mit einem Baumdiagramm verbildlichen:



Die fettgedruckten Zahlen stellen den Gewinn von A dar.

Nach 3) $E_A(1,3) = \frac{1}{2}[64 + 48] = 56$ und 2) $E_A(2,3) = \frac{1}{2}[56 + 32] = 44$ gilt $E_B(2,3) = 20$.

Die 64 Fr sind also in Proportion zu den erwarteten Gewinnen zu bemessen:

$$E_A(2{,}3) : E_B(2{,}3) = 44 : 20 = 11 : 5$$ (vgl. LÖFFLER 1987: 87)

Das große Problem bei Pascals Überlegungen war, dass die Rechnungen kompliziert algebraisch und nur mit Hilfe der Kombinatorik, die er – zusammenhängend mit dem Pascal'schen Dreieck – erstellt hatte, zu lösen waren. Diese von Pascal gefundene Kombinatorik wurde später von den Mathematikern de Moivre, Lagrange, Laplace und anderen wieder aufgegriffen und zur Lösung mannigfaltiger Probleme verwendet (vgl. DEVLIN 2009: 71).

Pascal hat das Spielabbruchproblem mit Hilfe der rekursiven Methode für sich befriedigend gelöst, konnte jedoch Fermats Lösungsvorschlag nicht so richtig verstehen. Dies lag daran, da er sich fragte, ob man zu einem anderen Ergebnis komme, wenn man das Spiel schon vorzeitig beenden würde. Um Fermats Ansatz folgen zu können, stellte er sich das Problem etwas komplizierter und beobachtete dann, was sich damit ändern würde. Er geht also von drei, nicht von zwei, Spielern aus, die mit einem Würfel spielen, der nun drei, anstelle von zwei, gleich wahrscheinliche Ausfälle haben kann. Pascal meint damit einen Würfel, der zwei Seiten mit a, zwei mit b und zwei mit c beschriftet aufweist (vgl. DEVLIN 2009: 82).

> *Es ist leicht zu erkennen, wie viele Kombinationen es insgesamt gibt: Es ist die dritte Potenz von 3, also ihre Kubikzahl 27. Denn wenn man DREI Würfel auf einmal wirft (weil man drei Partien spielen muss), von denen jeder DREI Flächen aufweist (weil es drei Spieler sind), die eine gekennzeichnet mit a, günstig für den ersten, eine andere mit b für den zweiten und eine weitere mit c für den dritten, so können offensichtlich diese drei gleichzeitig geworfenen [und nach der Zugehörigkeit zu den jeweiligen Spielern unterscheidbaren] Würfel 27 verschiedene Lagen einnehmen, nämlich:*

aaa	*aaa*	*aaa*	*bbb*	*bbb*	*bbb*	*ccc*	*ccc*	*ccc*
aaa	*bbb*	*ccc*	*aaa*	*bbb*	*ccc*	*aaa*	*bbb*	*ccc*
abc	*abc*	*abc*	*abc*	*abc*	*abc*	*abc*	*abc*	*abc*
I I I	*I I I*	*I I I*	*I I I*	*I*	*I*	*I I I*	*I*	*I*
	2		*2*	*222*	*2*		*2*	
		3			*3*	*3*	*3*	*333*

*(*DEVLIN 2009: *82, vgl. auch FERMAT 1894: 304)*

Pascal tabelliert alle möglichen Würfelausfälle, kennzeichnet mit I, 2, 3 welcher Spieler das Spiel jeweils gewonnen hat und addiert, wie viele Ausfälle jeden Spieler zum Sieger machen. Dabei begegnet ihm ein zusätzliches Problem, nämlich dass bei ein paar Würfen zwei Spieler zugleich siegen (vgl. DEVLIN 2009: 82,83).

Nun fehlt aber dem ersten nur EINE Partie: also sind alle Lagen [Spalten in der Tabelle] mit [mindestens] einem a für ihn; das sind also 19.

ZWEI Partien fehlen dem zweiten: also sind alle Lagen mit [mindestens] zwei b für ihn; das sind also 7.

ZWEI Partien fehlen dem dritten: also sind alle Lagen mit [mindestens] zwei c für ihn, das sind also 7.

*Wenn man daraus schlösse, dass man jedem [einen Anteil] im Verhältnis von 19,7,7 geben müsste, täuschte man sich gewaltig, und ich kann nicht glauben, dass Sie das so machen würden, denn es gibt einige Würfe wie z.B. abb, die gleichzeitig für den ersten und für den zweiten günstig sind, weil der erste hier das von ihm benötigte a findet und der zweite die ihm noch fehlenden zwei b; desgleichen zählt acc für den ersten und den dritten. (*DEVLIN *2009: 83, vgl auch* FERMAT *1894: 304)*

Im Falle, dass bei einem Spielverlauf zwei Spieler gewinnen, sieht Pascals Lösungsansatz vor, jedem der beiden Spieler nur einen halben Punkt zu vergeben (vgl. DEVLIN 2009: 83).

In seinem Brief an Fermat schreibt er folgende Überlegung:

Es gibt 13 Lagen, die dem ersten den Gesamteinsatz, 6, die ihm den halben Einsatz sichern, und 8, die für ihn nichts wert sind; wenn also der Gesamteinsatz eine Pistole[2] ist, gibt es 13 Würfe, deren jeder für ihn eine Pistole wert ist, 6 Würfe, deren jeder ihm ½ Pistole sichern, und 8, die nichts wert sind. Man muss also im Fall der Teilung bei Spielabbruch multiplizieren

	13	*mit einer Pistole, macht*		*13*
	6	*mit einer halben Pistole, macht*		*3*
	8	*mit null, macht*		*0*
Summe	*27*		*Summe*	*16*

Und die Summe der Werte, 16, durch die Summe der Lagen, 27, dividieren, was den Bruch 16/27 ergibt; das gehört dem ersten im Fall der Teilung bei Spielabbruch, nämlich 16 Pistoles von 27.

Die Anteile des zweiten und des dritten Spielers bei Spielabbruch findet man ebenso.

Es gibt	*4*	*Lagen, die für ihn eine Pistole wert sind: multiplizieren sie*		*4*
Es gibt	*3*	*Lagen, die für ihn ½ Pistole wert sind: multiplizieren sie*		*1 ½*
Und	*20*	*Lagen, die für ihn nichts wert sind*		*0*
Summe	*27*		*Summe*	*5 ½*

Also gehören dem zweiten Spieler 5 Pistoles und eine halbe von 27, und dem dritten ebenso viele, und diese drei Anteile, nämlich 5 ½ , 5 ½ und 16 ergeben zusammen 27.(DEVLIN 2009: *85, vgl auch:* FERMAT *1894: 305)*

Dass diese Lösung nicht korrekt ist, ist Pascal sehr wohl bewusst, doch ihm ist auch nicht wirklich klar, wo das Problem versteckt ist (vgl. DEVLIN 2009: 85).

[2] **Pistole**: historische Geldeinheit.

5. So, scheint mir, muss das Teilungsproblem mithilfe der Kombinationen nach Ihrer Methode gelöst werden, es sei denn, Sie haben etwas anderes für dieses Problem, was ich nicht wissen kann. Wenn ich mich nicht irre, ist aber diese Lösung des Teilungsproblems nicht richtig.

Der Grund dafür ist die falsche Annahme, nämlich, dass man auf jeden Fall DREI Partien spielt, während es die natürliche Regel dieses Spiels ist, dass man nur so lange spielt, bis einer der Spieler die Anzahl der ihm noch fehlenden Gewinnspiele erreicht hat, in welchem Fall das Spiel aufhört.

Es ist nicht so, dass es nicht vorkommen könnte, dass man drei Partien spielt, aber es kann auch vorkommen, dass man nur eine oder zwei spielt und zwangsläufig keine weiter. (DEVLIN 2009: 85, 86 vgl. auch FERMAT 1894: 305)

Er vergleicht mit dem Anfangsproblem, dasjenige mit zwei Spielern:

Aber woher kommt es, fragte man, dass man bei dieser Konstellation nicht dieselbe erkünstelte Voraussetzung zugrunde legen darf wie im Fall von zwei Spielern? Hier ist der Grund:

In der tatsächlichen Spielsituation kann nur einer dieser drei Spieler gewinnen; denn die Regel besagt, dass das Spiel aufhört, sobald einer gewonnen hat. Bei der fingierten Regel aber können zwei die [erforderliche] Anzahl von Gewinnspielen erreichen, dann nämlich, wenn der erste das eine ihm fehlende und einer der beiden anderen die zwei ihm fehlenden gewinnt; denn sie werden nicht eher drei Partien gespielt haben; wohingegen bei zwei Spielern die fingierte und die wahre Regel bezüglich der Gewinnsituation der Spieler gänzlich übereinstimmen. Das macht aber den ungeheuren Unterschied zwischen der fingierten und der wahren Regel aus.

Wenn die Spieler in der angenommenen Situation, d.h., wenn dem ersten EINE Partie, dem zweiten ZWEI und den dritten ZWEI fehlen, sich gütlich darauf einigen, alle DREI Partien zu spielen, und dass jeder, der die ihm fehlende Anzahl erreicht hat, den gesamten Einsatz nimmt, falls er sie als Einziger erreicht hat, oder dass sie zu gleichen Teilen teilen, wenn zwei sie erreicht haben, dann muss IN DIESEM FALL die Teilung so vorgenommen werden, wie ich es eben gemacht habe, dass der erste 16, der zweite 5 ½ und der dritte 5 ½ von 27 Pistoles erhält, und das ist nach obiger Voraussetzung in sich beweiskräftig.

Wenn sie aber einfach nach der Regel spielen, dass man nicht notwendig drei Partien spielt, sondern nur, bis einer von ihnen seine Gewinnspiele gemacht hat, und dass dann das Spiel ohne die Möglichkeit für einen anderen, dahin zu gelangen, aufhört, dann stehen dem ersten 17 Pistoles, dem zweiten 5 und dem dritten 5 von 27 zu.

Das findet man mit meiner allgemeinen Methode, durch die auch festgelegt wird, dass nach obiger Voraussetzung dem ersten 16, dem zweiten 5 ½ und dem dritten 5 ½ zustehen, ohne sich der Kombinationen zu bedienen, denn sie funktioniert überall automatisch und problemlos. (DEVLIN 2009: 86,87, vgl. auch FERMAT 1894: 305,306))

Fermat erkannte den Irrtum Pascals sofort und antwortete ihm rasch. Um nicht unhöflich zu wirken leitete er den Brief mit einem freudigen Thema ein, nämlich dem arithmetischen Dreieck (vgl. DEVLIN 2009: 87).

2. Gleichwohl antworte ich auf Ihre Frage zu den drei Spielern, die zwei Partien spielen. Wenn der erste eine und die beiden anderen keine [gewonnen] haben, ist Ihre erste Lösung die richtige, sodass das Geld im Verhältnis 17:5:5 aufgeteilt werden muss: Der Grund liegt auf der Hand und folgt noch immer demselben Prinzip, zeigen die Kombinationen doch auf Anhieb, dass der erste 17 gleiche Chancen hat, während die [beiden] anderen nur 5 haben.
3. Im Übrigen gibt es nichts, das ich Ihnen in Zukunft nicht freimütig mitteilen würde. (DEVLIN 2009: 88, vgl. auch FERMAT 1894: 309)

Pascal hat mit der rekursiven Methode tatsächlich einen korrekten Lösungsweg gefunden, ohne das Problem bis ins kleinste Detail zu durchblicken (vgl. DEVLIN 2009: 89). Dank ihm und seiner Lösungsmethode hat er einem neuen mathematischen Gebiet, nämlich der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung, den Weg geebnet (vgl. LÖFFLER 1987: 90).

3.7. Lösungsansatz von Fermat

Fermat ist eine der Zentralfiguren der Mathematik des 17. Jahrhunderts, ja, er war vielleicht einer der bedeutendsten Mathematiker überhaupt. Er gehört zu den Schrittmachern der Infinitesimalrechnung und trug wesentlich zur analytischen Geometrie bei. Neben seiner wohl berühmtesten Leistung, Fermats großem Satz (vgl. WUSSING 2008: 407), spielte er eine tragende Rolle in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Obwohl Pascal der strukturiertere Mathematiker von den beiden Franzosen war, ist Fermats Lösung des Teilungsproblems edler als die von Pascal, weshalb Fermats Methode auch eher herangezogen wird. (vgl. DEVLIN 2009: 71)

DEDRON schreibt über Fermats Methode Folgendes:

> *Celle [méthode] de Fermat, fondée sur les combinaisons, s'étend à un nombre quelconque de joueurs. (DEDRON 1959: 225)*

Übersetzt bedeutet das: Diese (Methode) von Fermat, aufbauend auf er Kombinatorik, ist gültig für beliebig viele Glücksspieler.

Er löst die Problemstellung also mittels der kombinatorischen Methode. Sie läuft letztlich auf das arithmetische Dreieck hinaus, aber der Beginn ist der gleiche wie bei Pascal: Spieler A muss noch m = 2 Male, Spieler B n = 3 Male gewinnen. Spätestens nach 4 Spielrunden ist klar, welchem der Beiden der Pot mit den Einsätzen gehört.

Es gibt $2^4 = 16$ mögliche Spielausgänge, die alle dieselbe Wahrscheinlichkeit haben. Zählt man sie auf, so ergibt sich folgende Tabelle, bei der der Buchstabe eine Gewinnrunde für den jeweiligen Spieler angibt.

AAAA	**ABAA**	**BAAA**	**BBAA**
AAAB	**ABAB**	**BAAB**	BBAB
AABA	**ABBA**	**BABA**	BBBA
AABB	ABBB	BABB	BBBB

(vgl. auch FERMAT 1894: 300)

Die fettgedruckten Möglichkeiten stehen für einen Sieg von A, da sie mindestens zwei Mal (m = 2) ein „A“ aufzeigen. Zählt man sie ab, so kommt man auf 11. Möchte man sie berechnen sieht der Ansatz so aus:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11$$

Daraus kann man erkennen, dass A in 11 von 16 Fällen gewinnen müsste, da diese Fälle alle gleichwahrscheinlich sind. Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn von Spieler A wäre demnach $p_A = 11/16$ und die für Spieler B $p_B = 5/16$. Den Gesamteinsatz der Spieler müsste man also im Verhältnis 11:5 aufteilen (vgl. LÖFFLER 1987: 89).

Die Brüche 11/16 und 5/16 stellen nichts anderes dar, als die Wahrscheinlichkeiten für einen Gewinn von A oder B. Man kann sie auch als Quotienten sehen, welche die Division der jeweils günstigen durch die möglichen Fälle umschreiben. Im Prinzip bedeutet dies, dass es damals schon den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ gab, aber er war noch nicht definiert (vgl. ZEUTHEN 1903: 171).

> *Pascals Lösung des Spielabbruchproblems war weitaus komplizierter als die von Fermat vorgeschlagene und erforderte eine anspruchsvolle – und entmutigend komplexe – Algebra. (…) Fermats Ansatz ist zweifellos bodenständiger, muss man bei ihm doch nur sämtliche vorkommende Fälle auflisten und diese dann durchzählen. Und insofern er den Kern des Problems trifft und sich in den Mitteln auf das Notwendige beschränkt, erweist er sich als wirklich genial. (DEVLIN 2009: 71)*

Allgemein gibt man an:

$pA(m,n) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1}\binom{m+n-1}{i}}{2^{m+n-1}}$ und $pB = 1 - pA$

Betrachtet man nun das Pascal’sche Dreieck, so findet man in der fünften Zeile die Zahlen 11 und 5 versteckt wieder:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ \underline{1} & \underline{\quad} & \underline{4} & \underline{\quad} & \underline{6} & & \underline{4} & \underline{\quad} & \underline{1} \\ & & 1+4+6=11 & & & & & 4+1=5 & \end{array}$$

m = 2

n = 3

m + n = 5

(vgl. LÖFFLER 1987: 90)

4. John Graunt

4.1. Biografie

John Graunt kam 1620 in London auf die Welt, wo sein Vater als Kurzwarenhändler tätig war. Bei ihm schloss er auch seine Lehre ab, arbeitete dort und wurde letztendlich selbst Besitzer des Unternehmens. Er war ein geschätzter Mann mit viel Einfluss, hatte eine große Funktion in der Stadtverwaltung, im Stadtrat und in der Draper's Company, einer internationalen Handelsgesellschaft. Seine Freunde waren Gelehrte und kreative Köpfe. 1641 schloss er den Bund der Ehe mit Mary Scott, die ihm einen Sohn und drei Töchter schenkte. Da seine schulische Bildung eher beschränkt war, eignete er sich später noch die Sprachen Latein und Französisch an. Ein nahestehender Freund von ihm, John Aubrey, fasste später Graunts Leben in seinem Buch „Brief Lives", einer Kollektion mehrerer Biografien, zusammen (vgl. DEVLIN 2009: 97).

Nennenswerte Fakten aus Graunts Leben wären noch seine Teilnahme an diversen wissenschaftlichen und kulturellen Kreisen, sowie der Posten eines Professors für Musik am Gresham College (vgl. HALD 1990: 86). Ansonsten führte Graunt ein unspektakuläres Leben, bis auf eine Sache: Die „Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality". In dieser 1662 erschienenen Broschüre befasste er sich mit den Sterberegistern Londons, um König Karl II. und seinem Gefolge bei der Entwicklung eines Warnsystems unter die Arme zu greifen, das die Ausbreitung der Beulenpest in der Stadt hindern sollte. Graunts Veröffentlichung dieser „Bills of Mortality" war die Geburt der modernen Statistik (vgl. DEVLIN 2009: 98).

> *Dank der Methoden, die Graunt bei der Erstellung seiner Broschüre anwendete, zog Pascals und Fermats Wahrscheinlichkeitstheorie, die bisher nur für die Spielsalons Bedeutung gehabt hatte, ins Alltagsleben der Menschen ein. Dies gab den Menschen ein Mittel an die Hand, ihr künftiges Schicksal mit einer Genauigkeit zu planen, die noch weniger Jahre zuvor undenkbar gewesen wäre. (DEVLIN 2009: 98)*

Seine Statistiken verschafften ihm die Aufnahme in die Royal Society [eine private Vereinigung, in der auch die Herren Pascal, Descartes und Fermat Mitglieder waren (vgl. PEIFFER 1994: 31)], nicht zuletzt, weil ihn Karl II. persönlich empfahl (vgl. DEVLIN 2009: 99).

Als in London 1666 der Große Brand ausbrach und dabei auch Graunts Haus und sein Geschäft zerstörte, geriet auch er in finanzielle Schwierigkeiten, von denen er sich Zeit seines Lebens nicht mehr erholen sollte. 1674 starb er an den Folgen einer Gelbsucht (vgl. DEVLIN 2009: 99).

4.2. Bills of Mortality

Der Name John Graunt wird zumeist mit Statistik assoziiert. Das Wort „Statistik“ hat italienischen Ursprung, denn es stammt von „statista“ ab, was übersetzt jemanden beschreibt, der mit staatlichen Angelegenheiten zu tun hat. In diesem Sinne wurde auch das Wort „Statistik“ in Italien bis Anfang des 19. Jahrhunderts verwendet. John Sinclair war der Erste, der den Begriff mit seiner heutigen, modernen Bedeutung in seiner Schrift „The Statistical Account of Scotland drawn up from the communications of the ministers of the different parishes“ (1791-1799) verwendet hatte (vgl. HALD 1990: 82).

DEVLIN schreibt über den Begriff Folgendes:

> *Das Wort Statistik, das die von Graunt eingeführte Methode bezeichnet, geht zufälligerweise auf den italienischen Begriff „stato“ für „Staat“ zurück. Ein oder eine „statista“ beschäftigt sich mit Staatsangelegenheiten. In Deutschland wurde das Wort Statistik schon 1749 von dem Historiker Gottfried Achenwall als eine Lehre von den Daten über den Staat eingeführt. In die englische Sprache hielt der Begriff „statistics“ allerdings erst um 1800 Einzug. Bis dahin brauchten die Engländer den Ausdruck „politische Arithmetik“ nach William Pettys Buch „Political Arithmetic“. Das 1676 verfasste Werk erschien allerdings erst 1690. [Anm.: Obwohl sein Buch die Entwicklung der Statistik förderte, leistete Petty zu dieser Disziplin keinen nennenswerten wissenschaftlichen Beitrag. Seine Rolle beschränkte sich auf die des Verbreiters.] (DEVLIN 2009: 106)*

DESROSIÈRES schreibt diesbezüglich:

> *Wie die Etymologie des Wortes zeigt, hängt die Statistik mit dem Aufbau des Staates, mit dessen Vereinheitlichung und seiner Verwaltung zusammen. All das beinhaltet die Aufstellung von allgemeinen Formen, Äquivalenzklassen und Nomenklaturen, die über die Singularitäten der individuellen Situationen hinausgehen – sei es durch die Kategorien des* Rechts *(juristischer Standpunkt) oder durch* Normen *und* Standards *(Standpunkt der Verwaltungsökonomie und der wirtschaftlichen Effektivität). (DESROSIÈRES 2005: 9)*

John Graunt war der Pionier in Sachen Statistik. Er setzte sich das Ziel, das Wahre in einer Datensammlung zu finden und vermied somit, sich der Grundfrage des Seins und der des Menschen als Unikum zu stellen. Mit der Frage „Wie genau muss man etwas wissen, um handeln zu können?“ umschrieb er das Problem der Unbestimmtheit (vgl. KAPLAN 2007: 9).

Das Hauptaugenmerk in Graunts „Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality“ lag auf den Sterbetafeln, die er von den Londoner Gemeinden zusammentrug. Pfarren sammelten und erhielten Angaben über die Anzahl der Kinder, Todesfälle und -ursachen, welche sie auflisteten. Diese Listen kann man im Grunde als Reaktion der Stadt auf die Pest sehen (vgl. KAPLAN 2007: 164). Die Erstellung dieser „weekly bills of mortality" war eine präventive Maßnahme Londons, denn durch sie konnten Autoritäten der Stadt informiert werden und dementsprechend reagieren. Die Sterbelisten galten als Indikator für die Gesundheit des Volkes und dafür, ob eine Flucht auf das Land angebracht gewesen wäre (vgl. HALD 1990:82,83). Nicht nur die wöchentliche, auch die jährliche Auflistung der Sterbefälle holte sich Graunt von der Gesellschaft der Gemeindeschreiber. Da ein großes Interesse der Öffentlichkeit herrschte, wurden diese sogar gedruckt und ab 1625 für ein paar Schilling verkauft. Das Interesse der Leute war deshalb so groß, da sie wissen wollten, ob Bekannte oder Nachbarn wegen der Pest verstorben sind (vgl. DEVLIN 2009: 100).

Graunt war der Erste, der versuchte, Zahlen auszuwerten und ein System von Tabellen zu erstellen, welches ihm den nötigen Überblick gab. Er stellte gewisse Muster fest, verglich verschiedene Einträge, um fehlende Daten anzugleichen, und kam unter anderem zu der Erkenntnis, dass einige Daten von Pestopfern gar nicht oder falsch notiert worden waren (vgl. DEVLIN 2009: 100-103). Graunt war sehr kreativ was das Herauslesen von Einzelheiten aus seinen Aufzeichnungen betraf. So erkannte er beispielsweise, dass es sich bei der Krankheit Rachitis, die oftmals zum Tod führte, um eine völlig neue Krankheit handelte und nicht um eine, die schon längst kursierte (vgl. DEVLIN 2009: 102). Die Pest beschäftigte ihn jedoch am meisten. So fand er mittels seiner Berechnungstabellen heraus, dass im Jahr 1603 82 Prozent aller Sterbefälle die schwarze Seuche zur Ursache hatten, die Sterberate jedoch gleich groß war wie 22 Jahre später, sie lag nämlich bei 13 Prozent (vgl. HALD 1990: 84).

Als Graunt seine Untersuchungen begann, schätzte man, dass ungefähr 1 Million Menschen in London sesshaft waren. Doch Graunt vermutete, nachdem er sich die Geburts- und Begräbniszahl beziehungsweise die Anzahl der Haushalte ansah, dass es um die 460.000 Einwohner gab, korrigierte dies danach noch auf 403.000. Des Weiteren setzte er die Zahl der Bürger Englands und Wales' auf sechseinhalb Millionen, heute vermutet man um die 5 Millionen in der damaligen Zeit. Er berechnete die durchschnittliche Anzahl von Kindern pro Familie mit 6, was auf Grund der hohen Sterblichkeitsrate durchaus möglich war. Noch dazu fand er als Erster objektiv belegt heraus, dass die Verteilung von Jungen und Mädchen ungefähr bei 50:50 lag (vgl. DEVLIN 2009: 103). Verwunderlich ist jedoch seine Beobachtung, dass es etwa 1/13 mehr Geburten von Jungen als von Mädchen gab. Er spürte, dass sich das gegen die Vermutung „Kinder zu kriegen ist wie eine Münze werfen – eine Chance 1:1“ stellte (vgl. KAPLAN 2007: 165).

Auf der Suche nach Gründen schreibt er Folgendes:

> *So dass obgleich mehr Männer als Weiber eines gewaltsamen Todes sterben, das ist, mehr im Kriege erschlagen werden, durch Unglücksfälle umkommen, auf der See ertrincken und durch den Hencker hingerichtet werden. Über dieses auch mehr Männer neue „Colonien“ zu bewohnen gehen und in weit entlegene Länder reisen; und letztlich mehr Männer als Weiber unverheyrathet bleiben; zum Exempel die Mitglieder der „Collegien“ und Lehrlinge über achtzehn (Jahr) etc. dennoch besagter dreyzehende Theil Überschuss der Sache in solchen Stand setzet, dass jedes Weib einen Ehemann hat ohne dass die „Polygamia“ darff zugelassen werden. (KAPLAN 2007: 166)*

Anders formuliert: Es ist an Gott, dass er den Ausgleich von Mann und Frau so regelt, dass die Christen nicht wie Muslime leben müssen (vgl. KAPLAN 2007: 166).

Bei HALD findet man Graunts Aussage im Original wiedergegeben:

> *[It follows] that the Christian Religion, prohibiting Polygamy, is more agreeable to the Law of Nature [than Islam. Furthermore] it is a Blessing to Mankind, that by the overplus of Males there is this natural Bar to Polygamy; for in such a state Women could not live in that parity and equality of expense with their Husbands as now, and here they do. (HALD 1990: 94)*

Da Graunt aus seinen Aufzeichnungen über London auch herauslas, dass die Geburtenrate stets niedriger war als die Sterberate, folgerte er, dass es eine permanente Zuwanderung von ländlicher Seite in die Großstadt geben müsse. Diese Tendenz gilt auch heute noch (vgl. DEVLIN 2009: 103).

Für die Ämter Londons spielten die Zahlen von kriegstauglichen Männern im Alter von 16 bis 56 Jahre eine große Rolle. Damit Graunt sie berechnen konnte, beobachtete er die Sterblichkeit der männlichen Bewohner in den unterschiedlichen Altersklassen. Mit dieser Berechnungsweise hatte Graunt die

Lebenserwartungstabelle geschaffen, die als Basis für Lebensversicherungen herangezogen wurde (vgl. DEVLIN 2009: 104).

Graunt rechnete so, dass er die Zahl der an Krankheiten verstorbenen, Früh- und Totgeburten zusammenrechnete und durch die Differenz der Gesamtsterbezahl und der Pesttoten dividierte. Aus heutiger Sicht ist diese Methode äußerst ungenau, aber sie ist dennoch ein erster Versuch, mathematische Vorhersagen über die Bevölkerung zu treffen. Seine Berechnungen wurden gleich nach der Veröffentlichung seiner Broschüre in der Medizin, Bevölkerungswissenschaft und Wirtschaft verwendet. Besonders in der Berechnung von Lebensversicherungen und Renten fanden sie Einsatz. Auch in anderen Städten Europas wurden Lebenserwartungstabellen eingeführt und es dauerte nicht lange, bis es die ersten staatlichen statistischen Büros gab (vgl. DEVLIN 2009: 105).

Auf Graunts Sterbetafeln und Statistiken bauten später, am Ende des 17. und im Laufe des 18. Jahrhunderts, weitere Demographen ihre Arbeit auf, so zum Beispiel William und Edmund Petty aus England, Per Wargentin aus Schweden und Johann Peter Süßmilch aus Deutschland (vgl. OWEN 1976: 300). Von Süßmilch wird in Kapitel 7.2. (Seite 61) noch die Rede sein.

5. Christiaan Huygens

5.1. Biografie

Christiaan Huygens lebte zur Zeit der „Wissenschaftlichen Revolution“ (vgl. BOS 1993: 59). Er wurde im Jahr 1629 in den Niederlanden als Kind einer sehr wohlhabenden Familie geboren, die hohe Posten in zivilen und diplomatischen Bereichen innehatte (vgl. HALD 1990: 65). Er wuchs in einer „atmosphère scientifique“ auf (vgl. ITARD 1977: 183), da sein Vater in vielen Fachbereichen sehr bewandert war - unter anderem in Mathematik, Kunst und Poetik. Descartes schätzte ihn sehr. Huygens Familie trug den adeligen Namen van Zulichem, die Männer der Familie waren Mitglieder des Hauses Oranien. Christiaan Huygens und sein Bruder Constantin genossen eine gute und frühe Bildung, teilweise auch durch ihren Vater, der sie viel auf Reisen mitnahm. Huygens war in seiner Jugend sehr an Mechanik, an Konstruktionen und an praktischen Arbeiten interessiert. Mit 16 Jahren ließen die Brüder ihre Familie in Haag zurück und wanderten nach Leyden aus, um dort zu studieren. 1647 gingen sie an die Universität von Breda. Obwohl sich Christiaan Huygens für das Jurastudium entschied, steckte sein Herzblut in der Mathematik. In Leyden wurde er von van Schooten unterrichtet, dem er die Bekanntschaft mit Descartes, Mersenne und einigen anderen Fachkollegen dieser Zeit zu verdanken hatte. Er ging für kurze Zeit auf Reisen und ließ sich schließlich in der Stadt seiner Kindheit, Haag, nieder. Dort begann er sich mit den Fragen der Mathematiker seiner Zeit zu beschäftigen, unter anderem auch mit jenen von Fermat und Pascal. Gerade die Auseinandersetzung mit den beiden Franzosen führte dazu, dass Huygens seine Schrift „De ratiociniis in ludo aleae“ verfasste (vgl. ZEUTHEN 1903: 44, 45).

Neben zahlreichen mathematischen Abhandlungen, erfand Huygens beispielsweise die Pendeluhr und führte mechanische sowie optische Untersuchungen durch. Er verbesserte das Fernrohr und entdeckte Trabanten und den Ring des Saturns.

1663 wurde auch er Mitglied der „Royal Society“ und leitete ab 1666 die „Académie des Sciences“[3] in Paris, wo er zahlreiche Versuche naturwissenschaftlicher Art durchführte. Dort entwickelte er eine Pulvermaschine, die ein ähnliches Prinzip hatte, wie die Gasturbine 200 Jahre später. Er forschte auf dem Gebiet der Physik, stellte die Wellentheorie erstmalig dar und schrieb auch auf diesem Fachgebiet einige Arbeiten (vgl. ZEUTHEN 1903: 46).

Ein weiterer interessanter Fakt aus seinem Leben: Huygens hat Leibniz die Mathematik gelehrt (vgl. DEDRON 1959: 237).

1681 ging Huygens zurück nach Haag. Seine letzten Jahre waren sehr einsam, aber ertragreich. Er hatte viel Zeit, seine Theorien zu Gravitation und Licht zu verfassen, welche er 1690 als „Traité de la lumière“ publizierte. Er verstarb am 8. Juni 1695 (vgl. BOS 1993: 61, 64). Nach seinem Ableben wurden Huygens wichtigste Schriften 1724 in dem Werk „Opera varia“ veröffentlicht (vgl. ZEUTHEN 1903: 47).

[3] Die „**Académie des Sciences**“ wurde 1666 von Colbert in Paris gegründet. Ihr voran ging der von Mersenne gebildete „Jour fixe“, an dem die Herren Pascal, Desargues, Roberval, etc. teilnahmen. Ähnlich der „Académie des Sciences“ in Frankreich bestanden in London die „Royal Society“ und in Rom die „Accademia Nazionale dei Lincei“. (vgl. OCAGNE 1955: 106)

5.2. Erwartungswert

Huygens setzte in seinen Arbeiten jene von Descartes, Fermat und Pascal fort (vgl. HALD: 66). Für die Fortschritte in der Wahrscheinlichkeit wollte er jedoch nie der Federführende sein. So verwies er eindeutig in seiner Schrift über die Berechnung des Glücks auf die Mathematiker, die sich schon vor ihm damit beschäftigt hatten:

> *Man sollte übrigens wissen, daß schon seit einiger Zeit einige von den berühmtesten Mathematikern von ganz Frankreich sich mit dieser Art Rechnung abgegeben haben, damit niemand mir die Ehre der ersten Erfindung, die mir nicht zukommt, zuschreiben möge. Aber obwohl diese Männer sich gegenseitig mit vielen schweren Fragen auf die Probe stellten, haben sie doch ihre Methoden nicht aufgedeckt. (LÖFFLER 1987: 93)*

1657 erschien die von Christiaan Huygens verfasste Abhandlung „De ratiociniis in ludo aleae“ (Über die Berechnung von Glücksspielen), welche ein Jahr nach der Fertigstellung von van Schooten ins Lateinische übersetzt wurde (vgl. HALD 1990: 68). Dabei handelt es sich um einen 16-seitigen Text, der in den folgenden 50 Jahren als Basiswerk der Wahrscheinlichkeitstheorie galt. Huygens nannte darin, basierend auf Axiomen, die grundsätzliche Regel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit und erwähnte, dass er sich auf Fermat und Pascal berufe, die die Vorarbeit dazu geleistet hätten. Das Entscheidende war, dass Huygens weiter ging als die beiden Franzosen: Er übertrug die Wahrscheinlichkeitsrechnung vom Spiel auf das, was außerhalb der Spielsäle passierte (vgl. DEVLIN 2009: 106,107, siehe auch HALD 1990: 67).

Der Oberste der Royal Society schickte eine Kopie von Graunts „Bills of Mortality“ an Huygens, der diese aus Zeitmangel nur kurz überflog. Huygens Bruder bat ihn Jahre später, eine Methode zu finden, mit Graunts Vorarbeit der Lebenserwartungstabellen schlüssige Leibrenten berechnen zu können (vgl. DEVLIN 2009: 111).

Eine Begrifflichkeit, welche in Huygens besonderes Interesse weckte, war der „Erwartungswert“. Bescheiden meint er, er habe nichts selbst gefunden, sondern nur die Arbeit von Pascal und Fermat weitergeführt, eine Anmerkung, die eine starke Untertreibung ist (vgl. DEVLIN 2009: 107).

Huygens setzte so an, dass er die Lebenserwartungstabelle zu einem Glücksspiel mit 100 Losen umfunktionierte. Die Lose hatten verschiedene Werte, die mit den Notizen in der Tabelle übereinstimmten. Damit berechnete er, nach der Grundregel zu Erwartungswerten aus seiner Abhandlung, verschiedene Lebenserwartungen (vgl. DEVLIN 2009: 112).

> *In einer ausgefeilteren Version wird sie auch zur Ermittlung unserer Lebenserwartung herangezogen, wenn wir eine Lebensversicherung abschließen wollen. Während es uns darum geht, unsere Familie gegen unseren Todesfall abzusichern, schließen die Versicherer gewissermaßen eine Wette darauf ab, wie lange wir noch zu leben haben. Und in ihrem Geschäftsinteresse müssen sie ihre Erwartungswerte so kalkulieren, dass ein angemessener Gewinn herausspringt. (vgl. DEVLIN 2009: 112)*

In der 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts fand ein reger Briefwechsel zwischen Christiaan Huygens und seinem Bruder Lodewijk statt. Christiaan schrieb, dass er die Berechnungen von Lodewijk betreffend Lebensalter gerade überprüfe. Er habe seine eigene verloren und müsse sie erneut machen. Um sich dabei zu helfen, zog er die Tabelle John Graunts von 1662 heran. Christiaan zeichnete eine Kurve, auf der er die Lebensdauer eines beliebigen Menschen abmessen konnte und nannte sie „Lebenserwartungskurve“ (vgl. SCHNEIDER 1933: 186, 187). In Christiaan Huygens „Oeuvres“, welche erst 1895, also lange nach seinem Tod, publiziert wurden, findet man die Veröffentlichung dieses Briefwechsels (vgl. HALD 1990: 106).

Huygens fasste in einem anderen Brief an seinen Bruder seine Arbeit zusammen:

> *Es sind dies also zwei verschiedene Dinge: die Lebenserwartung oder der Wert des zukünftigen Alters einer Person und das Alter, für das in gleicher Weise spricht, daß man es erreichen oder nicht erreichen wird. Die erste dient zur Bestimmung der Leibrenten und die andere für die Wetter. (SCHNEIDER 1933: 194, vgl. auch DEVLIN 2009: 113)*

Die Brüder Huygens dehnten in ihrem damaligen regen Briefwechsel die Arbeit Graunts aus und erreichten mit ihrer Fortsetzung eine, heute im Risikomanagement noch sehr bedeutende, abstrakt-mathematische Ebene (vgl. DEVLIN 2009: 113).

In Huygens Werk „De ratiociniis in ludo aleae“ findet man ein Konstrukt, welches wir heute „Erwartungswert“ nennen, auf dem die ganze Arbeit stark mathematisch aufgebaut ist. Er benennt dieses auch die „mathematische Hoffnung“. Huygens erklärt diese folgendermaßen (vgl. LÖFFLER 1987: 93):

Wenn die Anzahl der Fälle, in welchen mir a zufällt, gleich p, und die Anzahl der Fälle, in in welchen mir b zufällt, gleich q ist, wird meine Erwartung unter der Annahme, daß alle Fälle gleich leicht eintreten können, $\frac{pa+qb}{p+q}$ wert sein. (SCHNEIDER 1988: 39, vgl. auch LÖFFLER 1987: 93)

Der Erwartungswert – so wie wir ihn heute verwenden – wurde also erstmals von Huygens definiert. Er schreibt in seiner Arbeit, dass es sich hierbei um eine Zufallsvariable handle, die endlich viele mögliche Werte annehmen könne. Huygens fand mit Hilfe dieses Erwartungswertes Antworten auf diverse numerische Fragestellungen und löste so auch das Teilungsproblem auf seine Art (vgl. DIEUDONNÉ 1985: 711). Huygens meinte, dass es fair sei, bei einem Spielabbruch jedem Spieler den Erwartungswert seines Gewinnes auszuhändigen. Wenn also der eine Spieler mit einer Gewinnwahrscheinlichkeit p_1 den Pot der Einsätze B erlangt, und mit der Wahrscheinlichkeit $p_2 = 1 - p_1$ nichts, so soll er die Summe p_1B ausgezahlt bekommen (vgl. PFANZAGL 1988: 124). Vergleicht man die Lösungsmethode des Teilungsproblems von Blaise Pascal mit der Formel Huygens', erkennt man, dass diese im Grunde nur die allgemein formulierte Version von Pascals Lösung ist (vgl. ZEUTHEN 1903: 173).

Huygens Schrift erlangte internationale Anerkennung und verbreitete sich in Europe, da im Laufe der Zeit „De ratiociniis in ludo aleae" ins Englische, Französische, Italienische und Deutsche übersetzt wurde (vgl. HALD 1990: 74).

Pascal erwähnte schon damals in seinen „Pensées" etwas Vergleichbares mit dem Begriff Erwartungswert:

Gott existiert entweder, oder er existiert nicht. Wenn p für die Wahrscheinlichkeit steht, dass er existiert, dann steht (1-p) für die Wahrscheinlichkeit, dass er nicht existiert. Bei einer frommen Lebensführung winkt das ewige Leben im Himmel, also eine unendlich währende Belohnung. Führt man ein weltliches Leben, fällt die Belohnung X, so Gott existiert, geringer und wahrscheinlich sogar negativ (d. i. als Verlust) aus. (…) Wenn Gott nicht existiert, gibt es kein Leben nach dem Tod, also sind alle Belohnungen von dieser Welt. Vielleicht ist der (weltliche) Gewinn Y beim Führen eines weltlichen Lebens höher als der Gewinn Z durch ein frommes Leben der Hingabe.(…) Wenn man ein weltliches Leben führt, liegt die Erwartung folglich bei $p\,x\,X + (1-p)\,x\,Y$, wenn man ein frommes Leben führt, dagegen bei $p\,x\,\infty + (1-p)\,x\,Z$. (DEVLIN 2009: 109,110)

Pascal folgerte, das es günstiger wäre, den frommen Weg einzuschlagen, da eine weltliche Lebensweise nur vorteilhaft wäre, wenn p Null wäre. Er spielte ein Gedankenspiel mit gar nicht berechenbaren Dingen (vgl. DEVLIN 2009: 111).

DEVLIN schreibt über den Begriff des Erwartungswerts Folgendes:

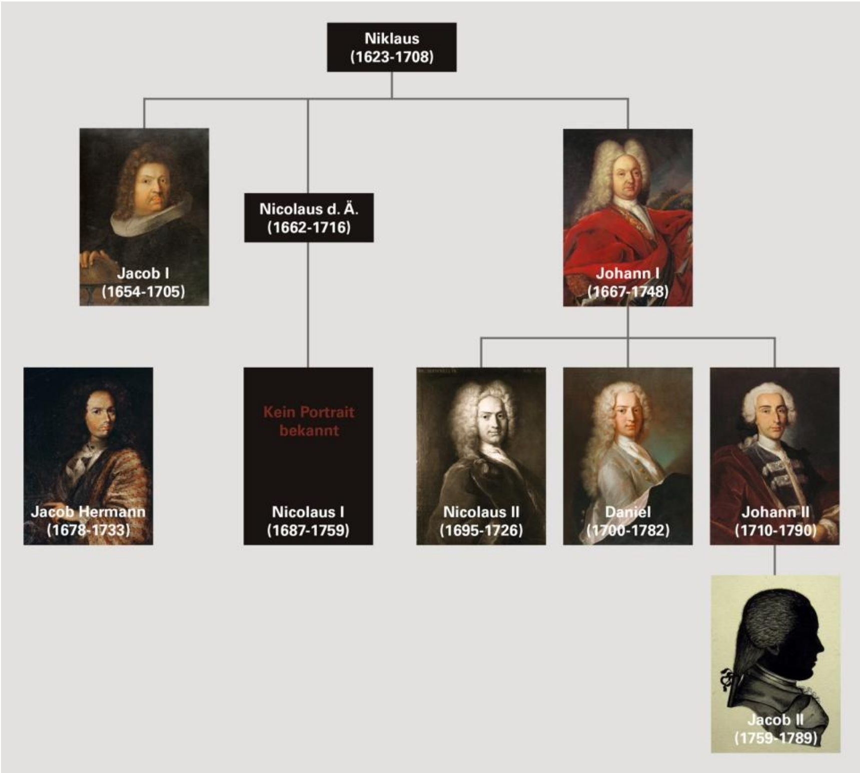
> *Der Erwartungswert gilt allgemein als das richtige objektive Maß (in den meisten Fällen) für den Wert, den ein bestimmter Wetteinsatz für den betreffenden Spieler hat. Um ihn zu berechnen, multipliziert man die Wahrscheinlichkeit eines jeden Ergebnisses mit dem Geldbetrag, der gewonnen (oder, als „negativer Gewinn verloren) wird, und addiert anschließend alle Ergebnisse. (DEVLIN 2009: 109)*

6. Die Bernoullis

6.1. Die Familie Bernoulli

Die Bernoullis (genannt: „Die erstaunlichen Bernoullis“) leisteten bemerkenswerte mathematische Arbeit zu ihren Lebzeiten. Der Vater, Nikolaus Bernoulli (1623-1708), war aus Basel und ein gut verdienender Gewürzhändler. Er hatte vier Söhne: Jakob (1654-1705), Nikolaus (1662-1716), Johann (1667-1748) und Hieronymus (1669-1760). Jakob und Johann waren die beiden begabten Mathematiker der Familie (vgl. DEVLIN 2009: 117). Die Bernoullis hatten allesamt den protestantischen Glauben anerkannt. Die Ahnen der Familie kamen während Religionsverfolgung von Herzog Alba nach Basel, wo der Vater Nikolaus schließlich geboren wurde und später den Posten eines Ratsherrn übernahm (vgl. ZEUTHEN 1903: 77).

STIGLER schreibt über die Bernoullis, dass diese Familie die wohl bekannteste im Bereich der mathematischen Wissenschaften ist. Es ist wahrscheinlich, dass an die zwölf Familienmitglieder in der Mathematik oder Physik tätig waren, fünf dieser zwölf haben sich mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt. Der bekannteste Bernoulli war Jakob (vgl. STIGLER 1986: 63).



Quelle: http://www.ub.unibas.ch/wiki/bernoulli/stammtafel.jpg

6.2. Jakob Bernoulli und das Gesetz der großen Zahlen

Jakob Bernoulli wurde am 27. Dezember 1654 in Basel geboren (vgl. STIGLER 1983: 63). Er studierte auf Wunsch des Vaters erst Theologie, später wandte er sich jedoch heimlich dem Mathematikstudium zu. Als er 1676 eine längere Reise machte, hielt er sich länger in Bordeaux auf, schrieb Sonnenuhrtabellen und verdiente sich sein Zubrot als Hauslehrer. Zurück in Basel verfasste er 1681 eine theoretische Schrift über Kometen. Auf einer Reise in die Niederlande und England, lernte er die dortigen Mathematiker kennen. Als er sich 1684 mit einer Schrift von Leibniz zur Mechanik beschäftigte, schrieb er einen Brief an den Autor, um mehr über seine neuen Methoden zu erfahren. Dieser Brief erreichte jedoch erst 1690 seinen Adressaten. In Basel lehrte er später an der Universität Experimentalphysik, 1687 erlangte er eine Stelle als Professor der Mathematik. Zu Jakobs Schülern gehörten sein Bruder Johann und einer seiner Neffen, Nikolaus. Auch Leonhard Euler besuchte seine Vorlesungen.

Zwischen den Brüdern Johann und Jakob gab es immer wieder Streit, was sogar so weit ging, dass Jakob seinen Bruder in seinen „Acta Eruditorum“ 1695 öffentlich bloßstellte und seine Arbeiten verhöhnte (vgl. ZEUTHEN 1903: 77-79).

Jakob Bernoulli interessierte besonders ein Problem, das bereits Graunt bei seinen Forschungen untergekommen war: Es bestand darin, dass er nur stichprobenartig untersuchen und sein Datenmaterial nie die ganze Stadt widerspiegeln konnte. Graunt ließ sich dadurch aber nicht abhalten, Aussagen weit über diese Daten hinaus zu treffen. Die Frage jedoch war, wie verlässlich diese Aussagen waren, da sie ja nur auf Stichproben beruhten. Und welchen Umfang muss eine Stichprobe haben, damit die Folgerung wirklich aussagekräftig und stimmig ist? Ebendies fragte Bernoulli seinen Freund Gottfried Wilhelm Leibniz per Brief (vgl. DEVLIN 2009: 117-119).

Leibniz war, was aus seinem Antwortbrief an Jakob Bernoulli herauszulesen war, keine Freund der auf das Leben angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung, da die Zukunft nicht zu berechnen sei. Er meinte, dass die Natur deshalb unberechenbar sei, da sich gewisse Ereignisse zwar meistens wiederholten, aber nicht zwingend immer. Er schrieb auch, dass die Aussage über die Sterblichkeit der Menschen keine Berechnung der Zukunft wäre, da immer wieder neue Krankheiten aufkämen, die man nicht vorhersehen konnte (vgl. DEVLIN 2009: 119).

Ein Auszug aus einem Brief von Leibniz an Bernoulli vom 3.12.1703, der seine Zweifel an der Berechnung der Wahrscheinlichkeit ausdrückt:

> *Du schreibst, auch, daß du die Lösung gefunden hast. Das Hauptproblem scheint mit darin zu bestehen, daß* zufällige Ereignisse *bzw. das, was von unendlich vielen Umständen abhängt, nicht durch endlich viele Versuche bestimmt werden kann. Zwar hat die Natur ihre Gewohnheiten, die aus der Wiederkehr der Ursachen erwachsen, aber nur ihm Regelfall. Wer sagt deshalb, ob nicht der nächste Versuch gerade wegen der Veränderlichkeit der Dinge beträchtlich von der Regel aller vorhergehenden abweicht? (SCHNEIDER 1988: 59)*

Jakob Bernoulli erkannte erst später, dass sein Brief an Leibniz außerdem zwei verschiedene Wahrscheinlichkeitsbegriffe beinhaltete: „a priori“ und „a posteriori“. Erstere beschreibt die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit vor dem Eintritt des Ereignisses, der zweite jene, die nach dem Eintritt des Ereignisses festgestellt werden kann. „A priori“ kann man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit bei Glücksspielen für den Spielausgang bestimmen, „a posteriori“ die Sterblichkeitsrate (vgl. DEVLIN 2009: 120). Zur Findung seines fundamentalen Gesetzes hat die Überlegung der Absterbefolge von drei Personen beigetragen. Bernoulli fragte sich, ob man eine bestimmte Reihenfolge für das Ableben von drei Personen mit Hilfe von wiederholten Beobachtungen zumindest näherungsweise errechnen könnte. Um diese Frage mit einem „Ja“ beantworten zu können, musste er zeigen, dass die Sicherheit der relativen Häufigkeit als Ausgangswert für eine Schätzung der gesuchten Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ansteigt, je größer die Anzahl der Beobachtungen ist (vgl. SCHNEIDER 1933: 117).

> *Bernoulli bewies, dass sich mit der Vergrößerung der Probe die Zuverlässigkeit der berechneten Wahrscheinlichkeit auf jeden beliebigen Grad erhöhen lässt. Genauer: Mit der Vergrößerung der Stichprobe kann man die Zuverlässigkeit, dass die für die Stichprobe ermittelte Wahrscheinlichkeit sich* innerhalb jeder festgesetzten Toleranzgrenze *mit der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit deckt, auf jeden beliebigen Grad steigern. Dies besagt das Gesetz der großen Zahlen. (DEVLIN 2009: 121)*

Unter der Annahme, man habe 5000 Murmeln, von denen 3000 rot und 2000 blau sind, zeigte Bernoulli, dass man 25 500 Mal ziehen müsste, um sicher bestimmen zu können, wie viele der Kugeln rot beziehungsweise blau wären. Mit Zählen wäre man weitaus schneller beim richtigen Ergebnis, aber Bernoulli legte theoretisch dar, dass man, mit einer genügend großen Stichprobe, Wahrscheinlichkeiten so berechnen kann, dass man fast eine absolute (aber eben nie die hundertprozentige) Richtigkeit erlangt (vgl. DEVLIN 2009: 121,122).

Jakob Bernoulli schrieb in seiner „Ars conjectandi" (Die Kunst des Mutmaßens):

> *Irgendein Ding vermuten, heißt so viel als seine Wahrscheinlichkeit messen. Deshalb bezeichnen wir als Vermutungs- oder Mutmaßungskunst („ars conjectandi sive stochastice") die Kunst, so genau als möglich die Wahrscheinlichkeiten der Dinge zu messen, und zwar zu dem Zwecke, dass wir bei unseren Urteilen und Handlungen stets das auswählen und befolgen können, was uns besser, trefflicher, sicherer oder ratsamer erscheint. (DEVLIN 2009: 116)*

Auf Jakob Bernoulli geht das „Gesetz der großen Zahlen" zurück – ein wichtiger Meilenstein auf dem Weg der Wahrscheinlichkeitstheorie (vgl. DEVLIN 2009: 117) und ein genialer Brückenschlag zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (LÖFFLER 1987: 93).

DEVLIN findet folgende Worte, um das Gesetz Bernoullis zu umschreiben:

> *Es handelt sich um mathematische Sätze, die in der einfachsten Form die bekannte Tatsache ausdrücken, dass die relative Häufigkeit eines Zufallsergebnisses desto zuverlässiger die Wahrscheinlichkeit von dessen Vorkommen angibt, je häufiger der betreffende Versuch wiederholt wird. (Deswegen befragen die Demoskopen auch lieber gleich mehrere tausend statt nur einige hundert Bürger nach ihren Meinungen.) (DEVLIN 2009: 117)*

DESROSIÈRES schreibt darüber:

> *Die Häufigkeit des Auftretens eines Ereignisses, das eine gegebene Wahrscheinlichkeit hat, strebt gegen diese Wahrscheinlichkeit, wenn man die Anzahl der Versuche erhöht. (DESROSIÈRES 2005: 65)*

„A posteriori" überdenkend, kommt man, parallel zum Problem der Stichprobengröße, auf eine zweite Fragestellung, nämlich: Was heißt das Bestimmen der Wahrscheinlichkeit für das Vorhersagen künftiger Ereignisse? Dazu muss man sich fragen, was das Vergangene für die Zukunft bedeutet, also keine wirklich mathematische Frage (vgl. DEVLIN 2009: 122).

Bernoulli führte seine Arbeit bis zu seinem Tod 1705 fort. Sein Neffe Nikolaus publizierte Jakobs Errungenschaften schließlich in der „Ars conjectandi“, für deren Sammlung, Ordnung und Zusammenstellung er acht Jahre brauchte und welche daher erst 1713 erscheinen konnte (vgl. DEVLIN 2009: 120).

Über den Inhalt des Werkes schreibt SCHNEIDER:

> *(…) darin hat Jakob Bernoulli nicht nur seinen Hauptsatz und das mit ihm begründete Programm, den gesamten Bereich der Anwendungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zum Gegenstand der von ihm geschaffenen „Mutmaßungskunst“ zu machen, als Höhepunkt und Abschluß untergebracht, sondern auch seine Ansichten über subjektive und objektive Gewißheit, Wahrscheinlichkeit und Zufall in einen noch etwas halbherzigen Determinismus eingebettet. (SCHNEIDER 1988, 49)*

In diesem Buch schrieb Bernoulli auch eine Definition der Wahrscheinlichkeit nieder:

> *Die* Wahrscheinlichkeit *ist nämlich ein Grad der Sicherheit und unterscheidet sich von ihr wie der Teil vom Ganzen. Sei z.B. angenommen, die gesamte und absolute Sicherheit, die ich mit dem Buchstaben* a *oder mit der Einheit* 1 *bezeichne, bestehe aus fünf Wahrscheinlichkeiten oder Teilen, von denen drei für die gegenwärtige oder zukünftige Existenz irgendeines Ereignisses stehen, die restlichen dagegen, so soll dieses Ereignis* 3/5a *oder* 3/5 *der Sicherheit besitzen.*
>
> *Deswegen wird das* wahrscheinlicher *als etwas anderes genannt, was einen größeren Anteil an Sicherheit beansprucht, wenn auch umgangssprachlich nur das wirklich als wahrscheinlich bezeichnet wird, dessen* Wahrscheinlichkeit *die Hälfte der Sicherheit beträchtlich übertrifft. (…)*
>
> Moralisch sicher *ist das, dessen Wahrscheinlichkeit die gesagte Sicherheit in einer Weise annähert, daß der Unterschied unmerklich wird. (SCHNEIDER 1988: 63)*

Interessant an dem Werk Bernoullis ist, dass es mit zahlreichen Aufgabenstellungen und deren Lösungen einem Schulbuch gleicht. Eine Aufgabe aus dem dritten Teil des Buches, welcher den Titel „Anwendungen der Combinationslehre auf verschiedene Glücks- und Würfelspiele“ trägt, lautet beispielsweise:

> *XII. Aufgabe.*
>
> *Jemand will mit 6 Würfen die 6 Flächen eines Würfels der Reihe nach werfen, sodass er mit dem ersten Wurfe ein Auge, mit dem zweiten zwei Augen, u.s.w. erzielt. Wie gross ist seine Hoffnung?*
>
> *Lösung: Da die sechs Flächen der Reihe nach obenauf zu liegen kommen sollen, so hat der Spieler bei jedem einzelnen Wurf nur einen ihm günstigen Fall. (…) und die gesuchte Hoffnung ist gleich* $\frac{1}{6^6} = \frac{1}{16\,656}$ *. (BERNOULLI 1899: 21)*

Ebenso interessant ist, dass es ihm fortwährend darum geht, die „Hoffnung“ zu berechnen, welche – mit den heutigen Worten – nichts anderes als die (Gewinn)Wahrscheinlichkeit ist.

Mit Jakob Bernoullis „Ars conjectandi“ war ein anwendungstaugliches Werk geschaffen, dass in den Naturwissenschaften und seit 1945 wegen seiner erwähnten statistischen Methoden auch in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften herangezogen wird (vgl. LÖFFLER 1987: 93).

6.3. Nikolaus Bernoulli – Juristerei und Wahrscheinlichkeit

Da nun Wahrscheinlichkeiten in Zahlen zu fassen waren, fand die Wahrscheinlichkeitsrechnung Einzug in den Gerichtssälen. In der Zeit, als Nikolaus Bernoulli die Skripten seines Onkels Jakob zur „Ars conjectandi“ sortierte und deren Publikation ebnete, forschte er nebenbei. 1709 brachte er ein Buch mit dem Titel „De usu artis conjectandi in jure“ („Vom Gebrauch der Kunst des Mutmaßens in der Rechtssprechung“) heraus. Im 2. Kapitel schreibt er über die Mutmaßung und Berechnung der Lebenserwartung (vgl. DEVLIN 2009: 123). HALD merkt an, dass Nikolas bis zur Veröffentlichung seines Buches die Schrift Graunts nicht gesehen habe, was seltsam ist, da es zu der damaligen Zeit sehr weit verbreitet war und für Nikolaus‘ Buch von großer Wichtigkeit gewesen wäre (HALD 1990: 111).

Nikolaus ließ eine 1686 veröffentlichte Theorie seines Onkels wieder aufleben, nämlich die Wahrscheinlichkeit, dass ein 16 Jahre alter Teenager vor einem 56 Jahre alten Mann sterben würde, läge bei 59 zu 101 (Die Berechnungen heute würden anderes aussagen, nämlich 59/(59+101), also circa 36,9%.). Nikolaus kam später auf dieselbe Zahl, wandte aber die Methoden Huygens zur Wahrscheinlichkeitstheorie auf Graunts Lebenserwartungstabellen an. Er schrieb, dass man die Lebenserwartung eines Menschen nicht „a priori“ bestimmen könne (vgl. DEVLIN 2009: 123).

Nikolaus Bernoulli diskutierte auch das Problem, wie viel Zeit vergehen müsse, damit ein Mensch als juristisch tot gilt – eine Frage, die vor allem bei Erbantritten und Witwenprozessen immer wieder auftauchte. Auch fragte er sich, was es heiße „verschollen“ zu sein, und brachte Zitate von bekannten Rechtsgelehrten zum Thema Toterklärung. Nikolaus meinte, man solle berechnen, „nach welcher Zeit die Wahrscheinlichkeit, dass jemand bereits tot ist, zwei-, drei- oder viermal so hoch ist, als dass er noch lebt“. (DEVLIN 2009: 123,124)

Daraus ergab sich folgende Tabelle (hier mit gerundeten Zahlen):

Alter bei Verschwinden:	*0*	*6*	*16*	*26*	*36*	*46*	*56*	*66*	*76*
Anzahl der Jahre des Wartens:	*21*	*24*	*25*	*25*	*23*	*20*	*15*	*10*	*7*

(DEVLIN 2009: 124)

Daraus zog Nikolaus Bernoulli folgenden Schluss: Falls eine Person beispielsweise zwischen dem zwanzigsten und dreißigsten Lebensjahr verschwindet und für eine

Dauer von 25 Jahren nicht wiederkehrt und man von dieser Person auch nichts gehört hat, so soll der Richter die vermisste Person nach dieser Periode für tot erklären und den Nachlass an die nächsten Verwandten veranlassen (vgl. HALD 1990: 111).

Zur Lebenserwartung stellt er folgendes Lemma auf:

> *Let it be equally likely that a person dies at any moment within a time interval of length a and consider the distribution of b deaths within this interval. The expected lifetime of the longest living within the interval equals ab/(b+1). (HALD 1990: 113)*

Übersetzt bedeutet das also, dass man die Lebenserwartung mit einer Formel $\frac{ab}{b+1}$ berechnen kann, wobei a die Lebensdauer der Person beschreibt und b die Anzahl der Tode in dieser Zeit.

Des Weiteren behandelt Nikolaus die von seinem Onkel bereits erwähnte „a priori"-Wahrscheinlichkeit (vgl. HALD 1990: 112). DEVLIN zitiert Nikolaus' Gedanken dazu:

> *Eine Wahrscheinlichkeit „a priori", die am Spieltisch Gültigkeit hat, hängt von der Symmetrie des Spiels ab, also beispielsweise davon, dass ein Würfel bei einem Wurf mit jeweils gleichen Wahrscheinlichkeiten mit einer Seite nach oben zu liegen kommt. Diese mit dem Spiel verbundene objektive Tatsache ist vom Beobachter unabhängig. (DEVLIN 2009: 125)*

Weiters schreibt DEVLIN über die „a posteriori"-Wahrscheinlichkeit:

> *Etwas völlig anderes ist dagegen die von Bernoulli eingeführte Wahrscheinlichkeit „a posteriori": Sie bildet ein Maß für das Wissen des Beobachters mit Blick auf den Wahrheitsgehalt einer Behauptung - ein bezifferbarer „Grad an Gewissheit". Wenn zwei Personen die Wahrscheinlichkeit „a posteriori" berechnen, nach dem ihr Wissen über dasselbe Ereignis richtig ist, kommen sie möglicherweise zu unterschiedlichen Ergebnissen. Und diese Antwort kann sich auch verändern, wenn sie über das Ereignis zusätzliche Informationen bekommen. (DEVLIN 2009: 125)*

Wenn wir die Zukunft im Alltag vorherzusagen versuchen, dann wenden wir meist die Wahrscheinlichkeit „a posteriori" an. Aber auch das Vorhersagen der Wahrscheinlichkeit des Würfelns kann man als „a posteriori" sehen, da man sein Wissen über den Würfel auf die Wahrscheinlichkeit für den Wurf einer bestimmten Zahl anwendet (vgl. DEVLIN 2009: 125).

Der neue Begriff „a posteriori“ ermöglicht nun also, die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf den Alltag anzuwenden, da die für das Glücksspiel gefundenen Methoden auf die Welt abseits des Spieltisches übertragen werden konnte (vgl. DEVLIN 2009: 126).

Nikolaus Bernoulli war der Meinung, dass man die Welt verbessern könnte, würde man statistische Daten über die Wahrheitsliebe der Menschen erfassen (vgl. KAPLAN 2007: 239).

Damals, zu Zeiten Cardanos, Pascals, Fermats und Huygens, gab es das Wort „Wahrscheinlichkeitstheorie“ als solches noch nicht. War die Rede davon, so sagte man ein Ereignis sei „wahrscheinlich“ oder „unwahrscheinlich“. Nach Bernoullis Errungenschaften und der Veröffentlichung seiner Skripten galt die Wahrscheinlichkeit nun als eine mathematische Methode, mit der man Zukunftsereignisse in Zahlen fassen und Vorhersagen treffen konnte (vgl. DEVLIN 2009: 126)

Nikolaus Bernoulli beschäftigte sich außerdem mit dem St.-Petersburg-Paradoxon. Dieses ist ein interessantes, den Erwartungswert betreffendes, mathematisches Problem. Im Grunde geht es darum, eine Münze solange zu werfen, bis „Kopf“ oben liegt, denn dann ist das Spiel vorbei, und ein Schema von Gewinn und Einsatz, welches relativ simpel ist, kommt zur Anwendung. Nikolaus‘ Gedanken zu der Fragestellung und die genaue Beschreibung des Paradoxons beschreibt DEVLIN:

> *Angenommen, Sie dürfen an einem Glücksspiel teilnehmen, bei dem wiederholt eine Münze geworfen wird. Wenn Sie beim ersten Wurf Kopf werfen, erhalten Sie 2 Euro, und das Spiel ist vorbei. Wenn Sie beim ersten Wurf Zahl und beim zweiten Kopf werfen, bekommen Sie 4 Euro, und das Spiel ist vorbei. Wenn Sie zweimal hintereinander Zahl und dann Kopf werfen, erhalten Sie 8 Euro, und das Spiel ist vorbei. Auf diese Art geht es immer weiter, bis Sie schließlich Kopf werfen. Bei Zahl geht das Spiel mit einem sich jeweils verdoppelnden Gewinn weiter, und bei Kopf endet es.*
>
> *Angenommen, ein Freund kommt vorbei und bietet Ihnen 10 Euro, damit er Ihren Platz im Spiel einnehmen darf. Nehmen Sie das Angebot an, oder lehnen Sie ab? Und wenn Ihnen der Freund 50 Euro anbietet? Oder 100 Euro? Mit anderen Worten: Wie hoch veranschlagen Sie den Wert des Spiels für sich? (DEVLIN 2009: 131,132)*

Genau hier kommt der Erwartungswert ins Spiel. Die Spielverläufe können unendlich viele Kombinationen haben. So zum Beispiel K, ZK, ZZK, ZZZK, ZZZZK …
Die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten liegen bei 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, …

Der zu erwartende Gewinn im vorgenannten Spiel kann also ermittelt werden durch:

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + 16 \cdot \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Somit errechnet sich ein unendlicher Erwartungswert. Theoretisch dürfte man bei so einem riesigen Erwartungswert den Platz gar nicht eintauschen, dennoch würden die meisten Menschen bei 10 oder 20 Euro sofort ihren Platz hergeben (vgl. DEVLIN 2009: 132).

6.4. Daniel Bernoulli und das Gesetz des Nutzens

Daniel Bernoulli war der Sohn Johanns und damit ein weiterer Neffe Jakob Bernoullis (vgl. DEVLIN 2009: 130). KAISER schreibt über dessen Arbeit und Forschung:

> *Daniel Bernoulli beschäftigte sich zum Beispiel mit der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, in einem bestimmten Alter an den Pocken zu sterben, und inwieweit die Inokulation (dies ist die erste primitive Form der Pockenimpfung) diese Wahrscheinlichkeit verringert. Er gelangte zu dem Ergebnis, dass diese Art der Impfung das Leben unter den damaligen Verhältnissen um durchschnittlich drei bis vier Jahre verlängerte. (KAISER 2006: 286)*

Desweiteren befasste er sich mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Hinblick auf die Einschätzung von Risiken. Er verfasste einen Artikel im Jahr 1738 in den „Kommentaren der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg“, der sich mit dieser Fragestellung widmete (vgl. DEVLIN 2009: 130,131).

> *Da der Begriff des Erwartungswertes sowohl die Wahrscheinlichkeiten als auch die möglichen Gewinne mit einschloss, galt er aus Sicht des Einzelnen als ein Maß für die Höhe eines bestimmten Risikos oder einer Gewinnaussicht. Je höher der Erwartungswert, desto attraktiver das Risikospiel. So zumindest die Theorie, die in vielen Fällen hinlänglich gut funktionierte. (DEVLIN 2009: 131)*

Daniel Bernoulli ersetzte den Begriff „Erwartungswert“ durch den des „Nutzens“. Er vertrat die Ansicht, dass der Wert, den jeder einem Ereignis zuteilt, ganz verschiedenen, subjektiven Nutzen entspricht (vgl. DEVLIN 2009: 133). Eine kleine Menge Geld für einen Armen hat einen ganz anderen Wert als dieselbe Summe für einen Reichen (vgl. OWEN 1976: 337). Auf dieser Erkenntnis aufbauend stellte Daniel Bernoulli ein Gesetz auf, nämlich: „Nutzen, der aus einem beliebigen kleinen Zugewinn an Vermögen hervorgeht, verhält sich umgekehrt proportional zu der bereits besessenen Menge an Gütern“ (DEVLIN 2009: 133).

DEVLIN umschreibt Daniel Bernoullis Gedanken dazu und verwendet zur Verdeutlichung die heutige Währung:

> *Nur, wenn wir wenig zu verlieren haben, sind wir in der Mehrheit bereit, uns auf ein großes Spiel einzulassen.*
>
> *Angenommen, Sie haben ein Vermögen von 10000 Euro und werfen eine Münze. Bei Kopf verlieren und bei Zahl gewinnen Sie 5000 Euro. Nach einem Gewinn gehen Sie mit 15000 Euro und nach einem Verlust mit 5000 Euro aus dem Spiel. Da die Chancen für einen Gewinn wie für einen Verlust jeweils ½ betragen, liegt der Erwartungswert bei null. Mit anderen Worten: Nach der Erwartungstheorie macht es keinen Unterschied, ob man sich auf dieses Spiel einlässt oder nicht. Aber die*

> *meisten lassen sich auf so ein Spiel nicht ein, weil ihnen das Risiko als unannehmbar hoch erscheint. (DEVLIN 2009: 133)*

Man kann also allgemein sagen, dass der Verlust der Hälfte des Vermögens als viel tragischer empfunden wird, als der Gewinn der Hälfte des Vermögens (vgl. DEVLIN 2009: 134).

Bernoullis Erkenntnis: „Um die Berechnungen der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Probleme der realen Welt anzuwenden, muss man den Faktor Mensch mit ins Kalkül ziehen." (DEVLIN 2009: 134)

Daniel Bernoulli teilte zusätzlich den Begriff des Erwartungswerts in einen mathematischen und einen moralischen:

> *Dem „mathematischen" Erwartungswert setzt Daniel also einen „moralischen" Erwartungswert entgegen, der sich durch das Produkt der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses mit dessen „Nützlichkeit" (im Sinne der Wirtschaftstheorie) ausdrückt. (DESROSIÈRES 2005: 63)*

PFANZAGL schreibt zu Daniel Bernoulli und den „Begriff des Nutzens" Folgendes und bringt den Logarithmus damit in Verbindung:

> *Nimmt man an, daß sich der Spieler nicht am Erwartungswert des Gewinns, sondern am Erwartungswert des subjektiven Nutzens dieses Gewinns orientiert, dann erhält man einen endlichen Erwartungswert, wenn man beispielsweise annimmt, daß der subjektive Nutzen eines Geldbetrages W gleich logW ist. (PFANZAGL 1988: 134,135)*

Daniel Bernoulli löste das St. Petersburg Paradoxon, indem er sein Gesetz des Nutzens auf dieses Problem anwendete:

> *Nach Bernoullis Gesetz nimmt in diesem Spiel der Nutzen des Weiterspielens ab dem Zeitpunkt ab, an dem der Gewinn erstmalig für den betreffenden Spieler einen SPÜRBAREN Zugewinn darstellt. An ihm bemisst sich der Preis für den man seinen Platz im Spiel verkaufen würde. (DEVLIN 2009: 134)*

Laut Daniel Bernoulli war der eigene Nutzen jedoch schwerwiegender als der mathematische Erwartungswert und DEVLIN stellt fest:

> *Der Begriff des Nutzens verdrängte so den des Erwartungswertes.(DEVLIN 2009: 134)*

Dennoch ist die Frage, ob das Spiel ein gerechtes ist, also die mathematische Erwartung des Gewinns gleich dem Einsatz ist. Die Berechnung des Erwartungswertes ist durch die Formel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1}$ möglich, das Ergebnis wäre unendlich. So müsste der Spieler also unendlich viel Geld als Einsatz leisten und das Spiel wäre eigentlich sinnlos (vgl. KAISER 2006: 286).

7. Folgen

7.1. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung – eine neue Disziplin

Der Begriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung kam nicht zeitgleich mit der Lösung des Teilungsproblems durch Fermat und Pascal auf. Doch die beiden Franzosen waren die Begründer einer neuen mathematischen Disziplin. So schreibt LÖFFLER:

> *Über 200 Jahre hinweg sind bedeutende Mathematiker der Renaissance und des Barocks an der Lösung eines scheinbar einfachen Problems über Glücksspiele gescheitert. […]*
> *Fermat und besonders Pascal haben 1654 mit Hilfe neuer Methoden die „Glücksspielmathematik“ oder die „klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung“ begründet. Die Begriffe „Gewinnwahrscheinlichkeit“ und „erwarteter Gewinn“ bilden – wenn auch nicht explizit definiert – die Grundlage der neuen Disziplin, deren Tragweite für die Zukunft Pascal mit äußerster Klarheit erkannt hat.*
> *(LÖFFLER 1987: 96)*

Fermat und Pascal fanden Gesetze, die in Glücksspielen allgemein gültig sind und Spielern bei ihrem Besuch in Spielsälen durchaus nützlich sein können, vor allem, was Spiel- und Wettstrategien betrifft. Heute werden diese grundlegenden Regeln auch in Bereichen wie Finanzmathematik – beispielsweise Spekulationen an der Börse – oder der Physik – Atomkraftwerksunfälle und Ähnliches – angewandt. Pascal war sogar der Meinung, dass er mit seinen Thesen den Glauben an Gott rechtfertigen könnte (vgl. SINGH: 67).

Die Frage, die sich nun gegen Ende dieser Arbeit stellt, ist, was denn die Wahrscheinlichkeit jetzt genau ist. Blaise Pascal schreibt in seiner „Art de penser“ dass der Begriff „probabilité“ als numerischer Wert zu verstehen sei, der das Verhältnis von Chancen angibt (vgl. DIEUDONNÉ 1985: 712). Problematisch wird es jedoch, wenn man die Wahrscheinlichkeit auf unendliche Mengen anwendet (vgl. STEWART 2010: 253, 254).

Euklid „axiomatisierte“. Er verwendete Axiome, aus denen er geometrische Theoreme ableitete. Doch was ist ein richtiges Axiom? Gibt es Axiome für die Wahrscheinlichkeitstheorie? Wie sehen sie aus? Sucht man die Wahrscheinlichkeiten in endlichen Mengen, so ist dies nicht schwer (vgl. STEWART 2010: 253, 254). Später haben sich unter anderem David Hilbert und Andrej

Kolmogorov mit der Axiomatisierung genauer befasst. Näheres zu diesem Themengebiet wird in Kapitel 7.5. (Seite 69) noch erklärt.

STEWART beschreibt die Wahrscheinlichkeitsrechnung kurz und prägnant: Sie untersucht, wie wahrscheinlich es ist, dass ein zufälliges Ereignis wirklich eintritt (STEWART 2010: 250).

7.2. Das Erbe Graunts

Es passierte in den 1740er Jahren, dass der deutsche Pastor Johann Peter Süßmilch die Arbeit des Londoners John Graunt weiterführte. Er sammelte Zahlen über Geburten, Todesfälle, Hochzeiten aus ganz Deutschland und meinte bei deren Analyse, dass Gott die Stadtbewohner, die gesündigt hatten, eindeutig früher sterben ließ. Des Weiteren zeigte er, dass je größer der Umfang an Daten war, desto genauer konnte man eine Aussage über den jeweiligen sozialen Mechanismus tätigen. Noch dazu beobachtete er, dass die Einwohnerzahl mit der Ackerfläche zusammenhing. Wenn viel fruchtbares Land zur Verfügung stand, gab es früher Hochzeiten und dies bedingte eine größere Anzahl an Nachwuchs (vgl. KAPLAN 2007: 168).

Süßmilch untersuchte auch die Spannweite der einfach zu messenden Merkmale des menschlichen Körpers, weil er erforschen wollte, ob es Überschneidungen in dieser Diversität gab. Er verbildlichte die Häufigkeitsverteilung in einem Histogramm und es war ihm möglich, eine spezielle Form nachzuweisen, welche der „Glockenkurve“ sehr nahe kam. Damals nannte man sie „Fehlerverteilung“ oder „Möglichkeitsverteilung“ (vgl. DESROSIÈRES 2005: 86).

Als britische Akademiker die „Royal Statistical Society“ gründeten, waren sie sich nicht sicher, ob die Statistik eine neue Wissenschaft wäre oder nur ein Hilfsmittel, das andere Wissenschaften unterstützen konnte. Die Methoden der Society wurden rasch weiterentwickelt und gingen bald über das simple Austeilen von Fragebögen hinaus. Die Methoden der Statistik erlaubten den Geschichtswissenschaftlern und Philosophen neue Wege einzuschlagen, was die Entwicklung eines Volkes in sozialer und gesellschaftlicher Hinsicht betraf (vgl. Kaplan 2007: 170).

7.3. Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung heute

Eine wichtige Rolle spielt die Wahrscheinlichkeitsrechnung heutzutage zweifelsohne in der Versicherungssparte. So schreibt zum Beispiel DEVLIN über das frühe Geschäft mit den Leibrenten:

> *Die älteste Form dieses Glücksspiels ist die Leibrente. Ihre Tradition reicht bis mindestens in die Römerzeit zurück. Wer einen Vertrag für eine Rentenversicherung abschließt, ist eigentlich auf der sicheren Seite: Er bezahlt bis zu einem bestimmten Datum festgelegte Beträge und erhält als Gegenleistung lebenslang regelmäßige Zahlungen. In einer anderen Lage sind die staatlichen oder privaten Stellen, die solche Abschlüsse tätigen. Für sie spielt das Glück eine gewaltige Rolle, denn sie schließen gewissermaßen auf die restliche Lebenszeit ihrer Kunden eine Wette ab. (DEVLIN 2009: 142)*

Der größte Aufwand steckte darin, dass man als Versicherungsverkäufer nicht den Eindruck erwecken sollte, man würde aus dem Unglück der Menschen Kapital schlagen. Es war also wichtig, die Höhe der Zahlungsbeträge so anzusetzen, dass man durchschnittlich einen akzeptablen Gewinn machte und sich dennoch keinen Vorwürfen aussetzen musste. Darüber hinaus legten Gesetze generell fest, dass die Erben eine Mindestzahlung bekommen, sollte der Versicherte vor Erhalt seiner Summe versterben (vgl. DEVLIN 2009: 142).

Ulpian, ein römischer Rechtsgelehrter, stellte eine Tabelle zur Umrechnung der lebenslänglichen Rente auf, die Nikolaus Bernoulli in „De usu artis conjectandi in jure“ genauer betrachtete. Die Tabelle findet man in Ulpians Werk „Corpus Iuris Civilis“ in lateinischer Sprache. Sie sah in etwa so aus:

Alter des Rentenempfängers	(in Jahren)	0-19	20-24	25-29	30-34	…	55-59	60-
Dauer der jeweiligen Rente	(in Jahren)	30	28	25	22	…	7	5

(vgl. HALD 1990: 117)

Nikolaus Bernoulli berechnete auf Basis von Graunts Lebenserwartungstabellen selbst so eine Rententabelle, um zu untersuchen, ob die Rentensysteme rechtens und stimmig wären (vgl. DEVLIN 2009: 143). Er kritisierte im Zuge dessen die Auslegungen von manchen Anwälten, die die Natur der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus Ulpians Abhandlung nicht verinnerlicht hatten, und stellte jene Tabelle auf, die die Summen der Leibrenten für eine Dauer von 1 bis 100 Jahre aufzeigt (vgl. *HALD* 1990: 117).

Diese Verbesserung des bisherigen Bestandes an Rententabellen blieb nicht ohne Folgen. So schreibt DEVLIN:

> *Vor allem in Form von Versicherungen konnten jetzt auch Normalsterbliche von dem Potential der Wahrscheinlichkeitstheorie profitieren, Aussagen über die Zukunft zu treffen oder zumindest zu beziffern, was das Morgen bringen könnte. (DEVLIN 2009: 145)*

Der Mensch „setzt“ täglich auf vier Dinge: Leben, Wohlbefinden, Besitz und Erspartes. Vom Kauf und Verkauf von Aktien abgesehen, will man eher die Risiken verringern, als ein Glücksspiel daraus zu machen. Deshalb schließt der Großteil unter uns Versicherungen ab und hat irgendeine Form der Altersvorsorge getätigt. Damit jedoch die Versicherungsgesellschaften Gewinn machen, müssen sie das alles als ein Glücksspiel ansehen und ebenso kalkulieren, dass sie stimmige Versicherungsbeiträge anbieten und die Risiken, die sie der Klientele abnehmen, passend berechnen (vgl. DEVLIN 2009: 141).

Auch in der Industrie hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung ihren fixen Platz gefunden, so zum Beispiel in den Bereichen Lagerhaltung von Maschinenersatzteilen oder Sparsamkeit im Umgang mit elektrischem Strom. Zur Berechnung der optimalen Drehzahl bei Textilmaschinen wird sie ebenso eingesetzt, wie zur Ermittlung der Zuverlässigkeit von Systemen in der Fernmeldetechnik. Bei der Überwachung von Produktionsprozessen verwendet man diverse statistische Methoden zur Qualitätskontrolle und -sicherung. Im Industriesektor hat sich eine Zuverlässigkeitstheorie entwickelt, die sich mit all diesen Problemstellungen eingehend befasst. In den biologischen Wissenschaften hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung ebenfalls Einzug gefunden, beispielsweise in der Planung und Auswertung von Versuchen und Züchtungen. Im Wirtschaftsleben wird ebenfalls viel auf Wahrscheinlichkeiten aufgebaut, so zum Beispiel was Preispolitik, Handel und Ressourcen betrifft. Jànos Neumann (1903 - 1957) entwickelte eine Theorie der strategischen Spiele, die bereits Erscheinungen des Wirtschaftslebens beschreiben kann (vgl. FREUD 1990: 235-244).

7.4. Der Satz von Bayes

Thomas Bayes kam 1702 in London zu Welt. Mit 17 Jahren begann er sein Studium der Logik und Theologie an der Universität von Edinburgh und übernahm 1733 das Amt des Pfarrers in Tunbridge Wells, südöstlich von London. Dort predigte er bis 1752, anschließend leistete er Gemeindearbeit und lebte dort, bis er 1761 starb (vgl. DEVLIN 2009: 148,149).

VON RANDOW schreibt über ihn:

> *Bayes war Priester einer Dissidentensekte und Mathematiker zugleich. (VON RANDOW 1993: 121)*

Während seiner Lebenszeit veröffentlichte Bayes keine selbst erkannten mathematischen Errungenschaften, aber er publizierte 1736 eine Schrift, „An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and a Defence of the Mathematicians Against the Objections of the Author of the Analyst“, die die Infinitesimalrechnung zum Inhalt hatte und ihm den Aufstieg in die Royal Society verschaffte (vgl. DEVLIN 2009: 149).

Nach seinem Tod fand Richard Price, der Erbe seiner Aufzeichnungen und ebenfalls Mathematiker, in seinen Skizzen den „Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances“, in denen von einem ganz neuen Ansatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Rede war (vgl. DEVLIN 2009: 149). Richard Price schien keinen eigenen Nutzen aus der Veröffentlichung der „Doctrine of Chances“ zu ziehen. Es dürfte ihm eher um die Belehrung zum sparsamen Umgang mit Geld und die Hemmung vor dem Glückspiel gegangen sein. Richard Price verdankt man auch das Aufblühen der Versicherungsgesellschaft zu seiner Zeit, wobei man anmerken muss, dass manche Statistiken zur Berechnung der Geburten- und Sterberaten höchst mangelhaft waren (vgl. HOGBEN 1963: 267). [Er verwendete die Taufregister einer Stadt, um die Geburtenziffern festzustellen.]

Das neue an Bayes‘ Methode war, dass die Wahrscheinlichkeitsberechnung nun beinhaltete, was eine Person zu einem bestimmten Ereignis weiß. Er verwendete zwei Ausdrücke, „prior probability“ und „posterior probability“, welche aber nicht mit den beiden Begriffen Bernoullis in Verwechslung gebracht werden sollten. Man muss die beiden Mathematiker und ihre Methoden eindeutig trennen (vgl. DEVLIN 2009: 150,151).

Die eigentliche Frage, die sich Bayes (und später auch Laplace) stellte, war, was man über die Ursachen aussagen konnte, wenn man die Ereignisse beobachtete, also die „inverse Wahrscheinlichkeit“. In der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik sowie in den verschiedenen Wissenschaften besitzt die inverse Wahrscheinlichkeit auch heute noch große Bedeutung. Der Übergang von der „objektivistischen“ Ansicht (die Wissenschaft zeigt die Wirklichkeit auf, vergleichbar mit dem Inhalt einer Urne) zu der „konstruktivistischen“ Ansicht (die Wissenschaft erschafft Modelle durch Anhaltspunkte, Voraussetzungen und mit entsprechenden Hilfsmitteln und stabilisiert diese Modelle) kann ein Diskussionspunkt sein, denn man weiß nicht immer sicher, was Tatsache und was Hypothese ist. Man kann aber, wenn man das Ganze auszulegen versucht, die Aussage treffen, dass jene Ursachen aus der Fragestellung Bayes‘ entweder konstruiert oder aufgedeckt werden (vgl DESROSIÈRES 2005: 65, 66).

FREUD formuliert die Fragestellung Bayes‘ so: Wie kann man auf Grund von Beobachtungsdaten Schlüsse auf unbekannte Wahrscheinlichkeiten, unbekannte Verteilungen ziehen? (FREUD 1990: 223)

DEVLIN schreibt über die Methode Bayes‘ und seine „prior“ und „posterior probability“:

> *Bayes‘ Methode ist kein Ansatz, mit dem sich die Wahrscheinlichkeit berechnen lässt, mit der eine neue Hypothese richtig ist. Sie dient vielmehr der Überprüfung einer Wahrscheinlichkeit im Licht neuer Informationen. Ausgangspunkt ist dabei eine Zahl zur Wahrscheinlichkeit einer Hypothese H. Diese Zahl nannte er „prior probability“ für die Hypothese H. Taucht eine neue Information E auf, ermittelte man rechnerisch eine revidierte Wahrscheinlichkeit für H. Diese neue Zahl nennt Bayes die „posterior probability“. Diese Korrektur wird durch Einsetzen der relevanten Zahlen in eine mathematische Formel ausgeführt, die als die Bayes’sche Formel (oder die Bayes’sche Regel oder das Bayes-Theorem) bekannt ist. (DEVLIN 2009: 151)*

Die Formel von Bayes erklärt DEVLIN mit diesen Worten:

> *P(H) sei die Wahrscheinlichkeit, dass die Hypothese H richtig ist, ohne dass dazu Informationen vorliegen. Dieser Wert bildet den Ausgangspunkt der Berechnung. (..) P(H|E) sei die Wahrscheinlichkeit, dass H richtig ist, wenn E gegeben ist. Dieser Wert ist die zu berechnende revidierte Wahrscheinlichkeit für H. Ein solcher Wert P(H|E) heißt bedingte Wahrscheinlichkeit, dass H eintritt, wenn E schon eingetreten ist.*

P(E|H) sei nun die Wahrscheinlichkeit, dass E eintritt, wenn H richtig wäre. Und $P(E|H_{falsch})$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass E einträte, wenn H falsch wäre. Die Bayes'sche Formel verlangt diese Werte.

Um rechnerisch die neue Schätzung vorzunehmen, muss auch $P(H_{falsch})$, die Wahrscheinlichkeit, dass H falsch ist, berechnet werden. Ein einfaches Unterfangen: Die Wahrscheinlichkeit, dass H falsch ist, beträgt 1-die Wahrscheinlichkeit, dass H richtig ist: $P(H_{falsch}) = 1-P(H)$

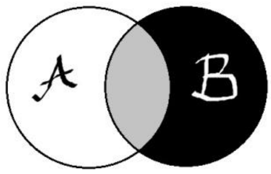
Die Bayes'sche Formel lautet:

$$P(H|E) = \frac{P(H)x\, P(E|H)}{P(H)x\, P(E|H) + P(H_{falsch})x\, P(E|H_{falsch})}$$

(DEVLIN 2009: 152,153)

Wir sehen uns noch genauer die verbildlichte und übersichtlichere Darstellung der Autoren KAPLAN an, die das Bayes'sche Theorem und dessen Herleitung folgendermaßen darstellen:

Wir helfen uns mit einem Mengendiagramm und überlegen:



P(AB) steht für die Wahrscheinlichkeit von A als auch von B. Und es gilt:
P(AB) = P(BA) [zum Beispiel: Es ist Wochenende und es ist sonnig. Es ist sonnig und es ist Wochenende.].
Auch ist ersichtlich, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A gleichzeitig dem Eintreten von B im selben Verhältnis steht, wie AB zu B („bedingte Wahrscheinlichkeit"):

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Wir nehmen an, dass P(AB) = P(BA) und erweitern beide Seiten mit 1.

$$P(AB) \cdot \frac{P(B)}{P(B)} = P(BA)\ x\ \frac{P(A)}{P(A)}$$

Was gleichbedeutend ist mit

$$\frac{P(AB)}{P(B)} \cdot P(B) = \frac{P(BA)}{P(A)}\ x\ P(A)$$

Und nun ersetzen wir:

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) x\, P(A)$$

Dann dividieren wir durch P(B) und das Ergebnis ist das Bayes’sche Theorem:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)x\ P(A)}{P(B)}$$

(vgl. Kaplan 2007: 236, 237)

Von Randow zeigt die Bayes’sche Formel folgendermaßen:

$$\textbf{Wahrscheinlichkeit der Ursache Ai, wenn potentielle Wirkung B beobachtet wurde} = \frac{\text{Wahrsch. der Wirkung B, wenn Ursache Ai vorliegt x Wahrsch. der Ursache Ai unabhängig von irgendeiner Beobachtung}}{\text{Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Entstehungsprozesse von B aus sämtlichen möglichen Ursachen Ai}}$$

(Von Randow 1993: 122,123)

Die Bayes’sche Formel hat die Eigenschaft, die Wahrscheinlichkeit in das menschliche Denken einzugliedern, weil sie das Vorwissen um ein einmaliges Ereignis mit einkalkuliert. Mittels dieser Formel kann man auf eine rechnerische Art Prophezeiungen über die Zukunft treffen. Um jedoch die gesamte Kraft des Bayes’schen Theorems auszuschöpfen, brauchten die Mathematiker noch viele, viele Jahre nach dessen erstmaliger Veröffentlichung (vgl. Devlin 2009: 156,157).

Laplace beschreibt in seiner Schrift „Mémoire sur la probabilité des causes par les événements“ die bedingte Wahrscheinlichkeit mit seinen Worten so:

> *PRINCIPE. - Si un événement peut être produit par un nombre n de causes différentes, les probabilités de l’existence de ces causes prises de l’événement sont entre elles comme les probabilités de l’événement prises de ces causes, et la probabilité de l’existence de chacune d’elles est égale à la probabilité de l’événement prise de cette cause, divisée par la somme de toutes les probabilités de l’événement prises de chacune de ces causes. (Laplace 1891: 29)*

Übersetzt bedeutet dieses Zitat:

PRINZIP. – Wenn ein Ereignis durch eine Anzahl n von verschiedenen Ursachen entsteht, so sind die Wahrscheinlichkeiten der Existenz dieser Ursachen unter sich wie die Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses, welches durch diese Ursachen bedingt ist, und die Wahrscheinlichkeit der Existenz von jeder von ihnen ist gleich der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses von dieser Ursache, dividiert durch die Summe von all den Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses von jeder dieser Ursachen.

DESROSIÈRES zeigt die von Laplace in einem langen Satz formulierte Übertragung auf das Problem der Wahrscheinlichkeit der Ursache H_i (in einer Menge von n sich gegenseitig ausschließenden Ursachen) in seiner modernen Formel:

$$P(H_i|E) = \frac{P(E \cap H_i)}{P(E)} = \frac{P(E|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{j-1}^{n} P(E|H_j) \cdot P(H_j)}$$

(vgl. DESROSIÈRES 2005: 67)

Mit der Formel von Bayes lässt sich beispielsweise berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass man an einer Krankheit leidet, wenn der Test, der nur zu 79% zuverlässig ist, ein positives Ergebnis zeigt, aber nur 1% der Bevölkerung daran erkranken (vgl. DEVLIN 2009: 153).

P (H) = 0,01	(Auftreten dieser Krebsart bei 1% der Bevölkerung)
P (E|H) = 1	(Test bei Krankheit immer positiv)
$P(H_{falsch}) = 0{,}99$	(99% nicht daran erkrankt)
$P(E\|H_{falsch}) = 0{,}21$	(Testsicherheit nur 79%)

In die Formel eingesetzt:

P(H|E) = 0,0481 (vgl. DEVLIN 2009: 154)

Bayes hat einen Meilenstein mit seiner Formel gesetzt, der auch heute noch breite Anwendung findet, vor allem in der Medizin. DESROSIÈRES schreibt darüber:

> *Folglich kann die Kodierung von „Todesursachen" – durch Verarbeitung der medizinischen Meldepflicht auf Totenscheinen – entsprechend der Internationalen Klassifikation der Krankheiten, Verletzungen und Todesursachen als* Bayessches Verfahren *beschrieben werden: sowohl die einzelnen Symptome (*Ereignisse*) als auch der bereits bekannte Verbreitungsgrad einer Krankheit (*A-priori-Wahrscheinlichkeit*) werden berücksichtigt. (DESROSIÈRES 2005: 69)*

7.5. Hilberts 6. Problem

David Hilbert wurde 1862 in der deutschen Stadt Königsberg geboren, wo er auch an der Universität studierte und nach seinen Reisen nach Paris und Leipzig 1886 Privatdozent wurde. Von 1895 bis 1930 hatte war er Professor in Göttingen. Hilbert verstarb im Alter von 81 Jahren (vgl. DIEUDONNÉ 1985: 896).

Berühmt wurde Hilbert unter anderem wegen der sogenannten „Hilbert-Probleme", einem Katalog von 23 mathematischen Fragestellungen, die er anlässlich eines Vortrags in Paris zur Jahrhundertwende präsentierte. In der vorliegenden Arbeit wird jedoch nur das 6. Hilbert-Problem genauer unter die Lupe genommen, welches sich mit der Axiomatik der Physik befasst und auf den Axiomen der Wahrscheinlichkeitsrechnung basiert (vgl. HOCHKIRCHEN 1999: 25,26).

> *Physikalische Probleme – Widersprüche in der kinetischen Gastheorie – bildeten neben den im ausgehenden 19. Jahrhundert diskutierten logischen Problemen mit dem klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff eine zweite Wurzel des sechsten HILBERTschen Problems. (HOCHKIRCHEN 1999: 27)*

Hilbert sagte, dass die – beispielsweise wegen Widersprüchen – nicht mehr auszubauende Basis einer Theorie eine kritische Untersuchung ihrer Untermauerung benötigt, um die Theorie streng logisch und ohne Widerspruch ausbauen zu können (vgl. HOCHKIRCHEN 1999: 25-27).

Hilberts Vorgehensweise für sein „Axiomatisches Denken" basierte auf drei verschiedenen Systemen von Dingen, nämlich Punkte (A, B, C, …), Geraden (a, b, c, …) und Ebenen (α, β, γ, …). Diese drei Systeme stehen in gegenseitigen Wechselwirkungen, die wir mit Worten wie „liegen", „zwischen", „parallel", und ähnlichen Begriffen umschreiben. „Axiome der Geometrie" definieren diese Beziehungen genauer und für mathematische Zwecke. Die „Axiome der Geometrie" teilte Hilbert in weitere fünf Gruppen ein, eine davon bezeichnet die „Axiome der Verknüpfung", die zwischen den genannten Punkten, Geraden und Ebenen eine Verknüpfung herstellen. Exemplarisch dafür wäre die Gerade a, welche die beiden Punkte A und B verbindet. Hilbert nannte auch drei sehr wesentliche Kriterien für Axiomensysteme, nämlich Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit und Vollständigkeit, wobei letztere bedeutet, dass sich alle bereits bestehenden Theoreme des zu axiomatisierenden Bereiches herleiten lassen.

Klar erkennbar sind die formale Art der Beweisketten und die Zusammensetzung der Axiome, aus denen kein Widerspruch ableitbar ist (vgl. HOCHKIRCHEN 1999: 277). Deshalb wird der Begriff „Formalismus“ öfters mit Hilbert in Verbindung gebracht. HOCHKIRCHEN beschreibt das formale Axiomatisierungsprogramm des Wissenschaftlers kurz und übersichtlich in wenigen Punkten (vgl. HOCHKIRCHEN 1999: 31-33).

- *Die Grundbegriffe einer Theorie werden durch die Axiome definiert. Dies geschieht durch die Angabe struktureller Beziehungen zwischen ihnen.*
- *Die Frage nach der mathematischen* Existenz *derartig definierter Begriffe wird zur Frage nach der Widerspruchsfreiheit: entsteht ein Widerspruch durch die entsprechenden Axiome, kann das derartig definierte Objekt nicht existieren. Die Frage nach der* Evidenz *der Axiome wird sinnlos: entscheidend ist lediglich deren Widerspruchslosigkeit.*
- *Der Verzicht auf eine engere Anbindung der Grundbegriffe an die konkrete Erfahrungswelt hat zunächst einmal zur Folge, daß die so entwickelten Theorien ein weiteres Anwendungsfeld haben.*
- *Da die Wahl der Grundbegriffe einer Theorie im obigen Sinne willkürlich ist, ergibt sich eine Art der Beliebigkeit, die vielfach kritisiert wurde.*

(HOCHKIRCHEN 1999: 33, 34)

Zum Teil auf Hilberts sechstem Problem aufbauend entwickelte sich die kinetische Gastheorie, in der man Veränderungen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen beobachtete. Deren stetige stochastische Prozesse wurden später von KOLMOGOROV erweitert betrachtet und in die Wahrscheinlichkeitsrechnung integriert (vgl. HOCHKIRCHEN 1999: 64). Auch andere Mathematiker führten den Gedanken Hilberts zur mathematischen Behandlung der Axiome der Physik fort, so beschäftigte sich Hamel 1903 mit den Axiomen der klassischen Mechanik, Caratheodory 1909 mit der Thermodynamik, Robb 1914 mit der speziellen Relativitätstheorie oder Whightman in den späten 1950er Jahren mit der Quantentheorie (vgl. WUSSING 2009: 361).

7.6. Die Axiome von Kolmogorov

Andrej Nikolajewitsch Kolmogorov erblickte am 25. April 1903 in Tambow, Russland, das Licht der Welt. Seine moderne, unabhängige Tante, die später eine Anhängerin der Oktoberrevolution war, adoptierte ihn nach dem frühen Tod seiner Mutter und zog ihn auf. Kolmogorovs mathematisches Talent wurde früh erkannt und gefördert. 1920 hielt er sich als Bahnschaffner über Wasser und begann dann sein Studium an der Moskauer Universität, wo er Vorlesungen zur Mathematik, zu Ingenieur- und zu Geschichtswissenschaften besuchte. Sein besonderes Interessensgebiet war die Geschichte der Mathematik, markant für seine Arbeiten war der Anwendungsbezug. Auch die Vermittlung der Mathematik beschäftigte ihn, da er schon im Laufe seiner Studienzeit an einer Moskauer Versuchsschule lehrte. Die Stochastik stellte für ihn ein lebenslanges Projekt dar (vgl. HOCHKIRCHEN 1999: 270, 271).

KOLMOGOROV setzte den Gedanken Hilberts zur Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie fort und veröffentlichte 1933 sein Werk „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung".

> *Darin findet man die Erfüllung von Hilberts gestellten Forderungen. Kolmogorov entwickelte beispielsweise Wahrscheinlichkeitsmaße in Funktionenräumen und konnte damit die Theorie der stochastischen Prozesse in sein axiomatisches Gebäude einordnen. (WUSSING 2009: 442)*

Auf der zweiten Seite seines Buches findet man eine Klarstellung KOLMOGOROVS. Er findet es am sinnvollsten, die Begriffe des Zufallsereignisses und seiner Wahrscheinlichkeit zu axiomatisieren:

> *However, if our aim is to achieve the utmost simplicity both in the system of axioms and in the further development of the theory, then the postulational concepts of a random event and its probability seem the most suitable. (KOLMOGOROV 1950: 2)*

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß lässt sich mit den folgenden drei KOLMOGOROV - Axiomen einführen (Ω beschreibt die Ereignismenge):

(1) *Für jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$ ist die Wahrscheinlichkeit eine reelle Zahl zwischen 0 und 1: $0 \leq P(A) \leq 1$.*
(2) *Das sichere Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1: $P(\Omega) = 1$.*

(3) *Die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung abzählbar vieler* inkompatibler *Ereignisse entspricht der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. Inkompatible Ereignisse sind disjunkte Mengen A_1 A_2 ...; es muss gelten*

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

(UNI-PROTOKOLLE 2013)

Die Bezeichnungen sind auf unseren Standard angeglichen. KOLMOGOROV verwendet in seinem Buch statt Ω ein E (vgl. KOLMOGOROV 1950: 2).

7.7. Maßtheorie

Die Wahrscheinlichkeitstheorie entstand, weil der Mensch den Wunsch hatte, zufallsgesteuerte Abläufe mathematisch zu beleuchten beziehungsweise Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und zu beschreiben. Für die Wahrscheinlichkeitstheorie war dieser Anstoß vergleichbar mit der Entwicklung der Geometrie, die von der Feldmessung entstammte. Doch erst seit 1933 kann man sie eine mathematische Theorie nennen, die den gewohnten Anforderungen an Prägnanz im Aufbau und ihren Begriffen entspricht, denn KOLMOGOROV heftete den Begriff des Maßes und die dazugehörige Integrationstheorie an den Wahrscheinlichkeitsbegriff. Von diesem Zeitpunkt an entwickelte sich diese Theorie weiter und verband sich mit anderen Bereichen der Mathematik, wie beispielsweise der Zahlentheorie und der Ergodentheorie. Die einzelnen Bereiche sind wohl auch ohne die Wahrscheinlichkeitstheorie zu verstehen, werden damit aber leichter berechenbar (vgl. BAUER 1991: VII).

Die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Maßtheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie lässt sich einfach beantworten: Im Prinzip liegt jeder wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffsbildung ein normierter Maßraum zu Grunde, welcher im Allgemeinen beliebig vorgegeben ist. Dieser hat die Angabeform (Ω, A, P), wobei Ω für eine Menge steht, A für eine σ-Algebra in Ω und P ein Maß auf A mit der Normierungsbedingung $P(\Omega)$ (vgl. BAUER 1991: 4).

8. Conclusio

Nach reiflicher Auseinandersetzung mit dem Thema der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, ist es nun Zeit, eigene Schlussfolgerungen zu ziehen. Zu Beginn der Arbeit stellte ich mir die Frage, was die Mathematiker damals bewogen hat, die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu entwickeln. Eine Antwort darauf steht noch aus und soll im Folgenden ausgeführt werden.

Blaise Pascal, vielseitiger Mathematiker und ein besonderes Talent im Bereich der Geometrie, war ein durch und durch gläubiger Mann. Betrachtet man den Aspekt, dass die Mathematik etwas sehr Realistisches und Agnostisches ist, so ist es verwunderlich, dass Pascal die Religion damit in Einklang bringen konnte.

Blaise Pascal schrieb also 1654 jenen Brief an Fermat mit bahnbrechendem Inhalt, der die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung erstaunlich vorantrieb. Er fragte Fermat nämlich um Rat zur Lösung des Teilungsproblems. Pascal selbst wurde vom Chevalier de Méré, welcher dem Glücksspiel sehr zugetan war, dazu veranlasst. Pascal fand nicht sofort die Lösung dazu und zog es vor, sich die Hilfe seines geschätzten Fachkollegen Fermat einzuholen. Der daraus resultierende, von Mathematik durchzogene Briefwechsel zeugt von einer innigen Brieffreundschaft, die sich im Laufe der Jahre entwickelte. Es wäre sogar ein persönliches Treffen angestanden, doch fand es nicht statt und die beiden Freunde sind einander nie begegnet. Pierre de Fermat hätte sich vermutlich ebenfalls nie so intensiv mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auseinandergesetzt, hätte er nicht im Jahr 1654 den einen Brief von Blaise Pascal erhalten.

John Graunt war unter den Ersten, die sich mit Statistik im heutigen Sinn befassten. Er sammelte so viele Daten wie möglich über die Londoner Bevölkerung seiner Zeit, stellte Tabellen auf, um die Lebenden und Verstorbenen in gewissen Zeitintervallen zu vergleichen, und befasste sich mit Geburten und Sterberaten. Er interpretierte diese und konnte Aussagen über „gute“ oder „schlechte“ Jahre treffen, vor allem, was Krankheiten und Seuchen anbelangte. Seine Arbeit erleichterte die Pestprävention in London, denn man konnte – sofern eine hohe Sterberate berechnet wurde – den Menschen nahelegen, London zu verlassen, da die Pest immer noch wütete. Eine niedrige Sterberate beruhigte die Bevölkerung, und man konnte annehmen, dass die Gefahr der Seuche momentan geringer sein musste. John Graunt begann also seine Arbeit deshalb, weil in seiner Umgebung die Pest wütete, und erforschte damit ein neues Gebiet der Mathematik, das bis heute von großer Bedeutung ist.

Christiaan Huygens schrieb „De ratiociniis in ludo aleae“ deshalb, weil er sich in Haag eingehend mit den Schriften der Mathematiker seiner Zeit auseinandersetzte. Die Arbeit von Fermat und Pascal schien ihn besonders interessiert zu haben, denn seine 16-seitige Abhandlung war eine Fortsetzung der der Ergebnisse, die seine französischen Mitstreiter gefunden hatten. Die Lorbeeren dafür wollte Huygens aber nicht ernten, da er sehr bescheiden behauptete, er habe all dies nicht „erfunden“. Er beschäftigte sich überdies mit dem Begriff „Erwartungswert“ und zeichnete Lebenserwartungskurven. Seine Abhandlung galt noch 50 Jahre nach seiner Veröffentlichung als Basiswerk und als Handbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Bei den Bernoullis lag die Mathematik in der Familie, und die Begeisterung für die Naturwissenschaften wurde von Generation zu Generation weitergegeben. Jakob war einer der Begründer der fundamentalen Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sein Werk „Ars conjectandi“ war ebenso bedeutsam wie wirkungsvoll, auch die Begriffe „a priori“ und „a posteriori“ wurden von ihm geprägt. In einigen Fachbüchern zum Thema liest man, dass Jakob mit seinem Buch der Menschheit beweisen wollte, dass das Glücksspiel nichts Gewinnbringendes und auch nicht erstrebenswert ist. Es sollte quasi als „Anti-Spieler“-Handbuch gesehen werden. Nikolaus und Daniel, die Generation nach Jakob, führten das Werk ihres Onkels fort. Nikolaus war ein Begeisterter in Sachen Recht und stellte Theorien auf, ab wann ein Mensch für tot erklärt werden soll. Dazu zog er die Wahrscheinlichkeit heran und verfasste Tabellen betreffend Leibrenten. Daniel beschäftigte sich mit dem Begriff Hoffnung und Erwartung und stellte das „Gesetz des Nutzens“ auf. Diese Erkenntnis verdrängte sogar den Begriff des Erwartungswertes, da der Nutzen etwas Subjektives ist und für jede Person einen individuell unterschiedlichen Wert darstellt.

Zusammenfassend kann man also sagen, dass bei den großen Wahrscheinlichkeitstheoretikern aus dem 17. und frühen 18. Jahrhundert der Impuls für die Berechnung des Glücks zumeist durch persönliche Umstände gesetzt wurde. Sei es, weil ein Freund ein mathematisches Rätsel aufgegeben hatte, durch Betroffenheit von einer Seuche, die in der eigenen Stadt wütete oder aus familiären Gründen, weil die Mathematik „im Blut“ lag und man die Arbeit seiner Vorfahren weiterführen und nicht verkümmern lassen wollte.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist also aus den unmittelbaren Problemen und Situationen im Leben der Mathematiker entstanden.

9. Didaktischer Teil

9.1. Arbeitsblatt 1

Anmerkung:

Dieses Arbeitsblatt ist für eine 6. Klasse AHS gedacht, die bereits in die einfache Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt wurde. Im Prinzip ist dieser Übungszettel eine statistische Erhebung, bei der festgehalten wird, wie oft Kopf und Zahl beim Werfen einer Münze vorkommen. Die SchülerInnen sollen eine Strichliste führen, zuerst für 10 Würfe, dann für 20 und dann für 30. Nach dieser Versuchsreihe sollen sie die relativen Häufigkeiten für die ersten 10, die zweiten 20 und die dritten 30 Würfe berechnen. Anschließend sollen sie noch die relative Häufigkeiten von Kopf und Zahl der gesamten Versuchsreihe, also von allen 60 Würfen, berechnen und Beobachtungen daraus notieren.

Ziel des Arbeitsblattes ist, dass die SchülerInnen erkennen, wie die relativen Häufigkeiten umso näher zum Wert ½ streben, je größer die Anzahl der Würfe ist. Wenn sie, oder auch wenn sie nicht, diese Erkenntnis gewonnen haben, sollen sie daraufhin im Internet „Das Gesetz der großen Zahlen“ suchen und den Namen des Mathematikers sowie dessen Gesetz notieren. (Hierbei wird angenommen, dass pro Tisch mindestens ein internetfähiges Smartphone zur Verfügung steht. Falls dies nicht der Fall ist, wird dieser Teil der Übung daheim erledigt, wo die SchülerInnen zumeist einen Computer mit Internet verwenden können.)

Das Lernziel dieser Mathematikeinheit besteht darin, das Gesetz der großen Zahlen nach Jakob Bernoulli kennenzulernen, welches besagt, dass sich bei einem Versuch die relative Häufigkeit für ein Zufallsereignis sich umso besser an die mathematische Wahrscheinlichkeit für dieses Zufallsereignis annähert, je öfter man den Versuch durchführt.

Bezug zum theoretischen Teil der Arbeit:

Der Bezug zum theoretischen Teil der Arbeit ist dadurch gegeben, dass Jakob Bernoulli ein zentrales Thema in der vorliegenden Arbeit darstellt, und in einem eigenen Kapitel (6.2., Seite 47) eingehend besprochen wird. Das Gesetz der großen

Zahlen ist in Bernoullis „Ars conjectandi“ formuliert, welche ebenfalls in der Arbeit erwähnt wird.

KOPF oder ZAHL?

1) **Nimm eine Münze. Wirf sie 10 Mal. Schreibe deine Wurfergebnisse in Form einer Strichliste mit.**

Kopf			Zahl	

2) **Wirf die Münze nun 20 Mal. Schreibe deine Wurfergebnisse auf der Stichliste mit.**

Kopf			Zahl	

3) **Wirf die Münze nun weitere 30 Mal. Notiere die Wurfergebnisse in der Strichliste.**

Kopf			Zahl	

4) **Berechne die relativen Häufigkeiten von Kopf und Zahl für 1), 2) und 3)**

[$\frac{Anzahl\ der\ Striche}{Anzahl\ der\ Versuche}$, zum Beispiel bei 2) 12 Striche bei Kopf, 20 Versuche → $\frac{12}{20} = 0{,}6$]

	relative Häufigkeit KOPF	relative Häufigkeit ZAHL
1)		
2)		
3)		

5) **Berechne nun die relative Häufigkeiten auf die Summe aller Versuche:**

relative Häufigkeit KOPF		relative Häufigkeit ZAHL	

6) **Was fällt dir auf, wenn du die relativen Häufigkeiten betrachtest?**
Überlege dir dabei auch, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, Kopf oder Zahl zu werfen ($\frac{Günstige}{Mögliche}$) und vergleiche mit deinen relativen Häufigkeiten.

7) **Google das „Gesetz der großen Zahlen". Wer hat es aufgestellt und was besagt es? Notiere!**

Name des Mathematikers	
GESETZ DER GROSSEN ZAHLEN	

9.2. Arbeitsblatt 2

Anmerkung:

Dieses Übungsblatt ist für eine 2. Klasse AHS gedacht, in der gerade das Thema „Prozentrechnung“ behandelt wird. Die SchülerInnen sollen die Bevölkerungsstatistik interpretieren und haben dazu Zahlen gegeben, die von der Statistik Austria stammen und aktuelle Erhebungen beinhalten. Sie sollen also mit Zahlen aus der Realität arbeiten, Berechnungen anstellen und diese interpretieren. Erfahrungsgemäß bereitet es den SchülerInnen sehr viel Spaß, Daten zu analysieren, wenn diese einen Bezug zum Leben haben, denn sie sehen eine unmittelbare Anwendung des bereits gelernten Stoffes auf das „echte Leben“.

Der 5. Punkt des Arbeitsblattes soll eine Recherche zu John Graunt sein. Jeder Schüler/jede Schülerin soll sich als Hausübung ein kurzes Referat zu dieser Persönlichkeit ausarbeiten. Dazu sollen die SchülerInnen das Internet nützen. Bei der Besprechung der Hausübung für diese Stunde wird ihnen nochmal erklärt, welchen Umfang dieses Referat haben soll und welche Präsentationsmedien erlaubt bzw. erwünscht sind. Die SchülerInnen sollen in der übernächsten Unterrichtsstunde ihre Handzettel abgeben. Falls manche von ihnen Plakate angefertigt haben, sollen diese im Klassenraum aufgehängt werden. Von jenen, die sich freiwillig melden, werden drei SchülerInnen ausgewählt, die ihre Recherche präsentieren.

Bezug zum theoretischen Teil der Arbeit:

Wie schon im theoretischen Teil im Kapitel 4. (Seite 34) beschrieben, war John Graunt ein Londoner, der im 17. Jahrhundert als einer der Ersten mathematische Berechnungen mit demografischen Zahlen anstellte. Er sammelte Daten der Londoner Bevölkerung, um Aussagen über die Pestseuche anzustellen. Graunt berechnete und interpretierte seine Zahlen. Die SchülerInnen sollen sich nun auf die Spuren Graunts begeben, indem sie selbst Daten zur österreichischen Bevölkerung auswerten und interpretieren. Zusätzlich haben sie den Auftrag, sich mit der Person John Graunt auseinanderzusetzen und sich dessen Lebenswerk anzusehen.

Die Bevölkerungsentwicklung Österreichs

Folgende Statistik zur Bevölkerung Österreichs ist gegeben:

Jahr	Bevölkerung im Jahresdurchschnitt	Gestorbene	Lebendgeborene	Totgeborene
1990	7 677 850	82 952	90 454	325
2011	8 420 900	76 479	78 109	294
Vermutung 2030	9 000 007	84 688	81 088	n.B.

(Quelle: www.statistik.at – Statistik Austria)

1) **Betrachte die oben angeführtem Zahlen über die Gesamtbevölkerung in der Tabelle und beantworte folgende Fragen:**
   a) Um wieviel Prozent hat die Bevölkerung Österreichs von 1990 bis 2011 zugenommen?
   b) Wieviel Prozent wird die Bevölkerung Österreichs von 2011 bis 2030 zunehmen?
   c) Kannst du Gründe für den Bevölkerungszuwachs nennen?

2) **Vergleiche die Zahlen der Gestorbenen:**
   a) Stelle eine Statistik über die Sterberate[1] in den Jahren 1990, 2011 und 2030 auf (relativer Anteil).
   b) Wie kann es sein, dass in den kommenden Jahren die Zahl der Verstorbenen ansteigt? Nenne Gründe dafür!

3) **Berechne die Differenz der Lebendgeborenen und Gestorbenen in den Jahren 1990, 2011 und 2030. Wie kann man die berechneten Zahlen interpretieren? Wofür stehen sie?**

4) **Berechne die prozentuelle Änderung der Totgeborenen von 1990 bis 2011 und stelle deine Vermutung für das Jahr 2030 auf. Begründe!**

5) **Google den Namen „John Graunt“. Er war Londoner. Was hat er damals, als einer der Ersten, geleistet? Bereite eine kleine, 5-minütige Präsentation über diesen Mathematiker vor, gehe dabei auch auf sein Werk und seine mathematischen Leistungen ein. (Hausübung!)**

---

[1] Die **Sterberate** bezeichnet die Anzahl der Todesfälle bezogen auf die Gesamtanzahl der Bevölkerung.

9.3. Arbeitsblatt 3

Anmerkung:

Dieses Arbeitsblatt ist für eine 6. Klasse AHS als zur Einführung in die Kombinatorik gedacht. Die SchülerInnen sollen durch Würfelversuche erfahren, dass

a) die Anzahl der Möglichkeiten, um auf eine bestimmte Augensumme zu kommen, Einfluss hat, wie oft diese Augensumme gewürfelt wird, und
b) die relative Häufigkeit bei oftmaligem Wiederholen für Ergebnisse mit den meisten Kombinationsmöglichkeiten am größten ist.

Bezug zum theoretischen Teil der Arbeit:

Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung waren schon zu erkennen, als Tartaglia und Cardano sich fragten, mit welchen Würfen man auf ein gewisses Wurfergebnis kommen kann. Auch Blaise Pascal hat sich bei der Beschäftigung mit dem Teilungsproblem eingehend mit Augensummen von mehreren Würfeln und deren Wurfmöglichkeiten auseinandergesetzt. Er hat in seinem Brief an Pierre de Fermat vom 24. August 1654 Tabellen mit möglichen Kombinationen für die Wurfausgänge niedergeschrieben.

Das Würfelexperiment

1) Fertige auf einem glatten Papier im Querformat eine **Tabelle** an, die folgendes Schema hat:

Augensumme	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Strich/Wurf											
mögliche Kombinationen	**1+1**	**1+2** **2+1**	**1+3** **…**								

2) Holt euch **zwei Würfel pro Person** und bildet **Gruppen zu vier Personen**.

3) Jeder von euch soll nun **50 Mal mit zwei Würfeln** gleichzeitig **würfeln**. Bevor ihr jedoch damit beginnt, markiert jeder von euch die Augensumme, die er am öftesten zu würfeln glaubt. Dann beginnt ihr zu würfeln. Macht nach jedem Wurf einen **Strich** unter der entsprechenden Augensumme in euren Listen.

4) Anschließend überlegt euch gemeinsam, wie man auf die jeweilige Augensumme kommen kann. Welche **Würfelkombinationen** gibt es? Vervollständigt die Tabelle!
(Hinweis: Bedenke, dass z.B. die Augensumme 3 auf 2 Arten geworfen werden kann: 1. Würfel: 1 und 2. Würfel: 2 oder 1. Würfel: 2 und 2. Würfel: 1)

5) Markiere die Augensumme, die du am **öftesten** und die, die du am **wenigsten oft** geworfen hast. Vergleiche mit deinem Team. Was könnt ihr beobachten? Schreibt eure Ergebnisse auf!

6) Berechnet die **relativen Häufigkeiten** eurer Würfelergebnisse. Wie lauten die Durchschnittswerte?

7) Versucht eure mittleren **Häufigkeiten** zu begründen. Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der möglichen Wurfkombinationen und der Anzahl der Striche in einer Spalte?

9.4. Arbeitsblatt 4

Anmerkung:

Dieses Arbeitsblatt (2-seitig; Seite 2 soll erst nach Lösung der Aufgaben auf Seite 1 ausgehändigt werden) ist für eine Einheit in „Mathematik Wahlpflichtfach" gedacht. Zur Lösung der Aufgaben muss vorausgesetzt sein, dass die SchülerInnen bereits die Kombinatorik gelernt haben. Das bedeutet, diese Übung kann frühestens im 2. Semester der 6. Klasse AHS (nach Absprache mit der Lehrkraft und über den Lehrstoff), beziehungsweise in der 7. Klasse AHS ausgegeben werden.

Ziel dieser Übung ist das Aufzeigen von alten mathematischen Werken und die damalige Formulierung der Mathematiker. Bernoullis Werk wurde zwar ins Deutsche übersetzt, da das Original fremdsprachig war, dennoch kann man die Argumentationsweise des Verfassers sehr gut erkennen. Des Weiteren sollen die SchülerInnen erkennen, dass auch Aufgaben aus dem frühen 18. Jahrhundert mit ihrer bereits gelernten und in heutiger Sprache formulierten Methoden lösbar sind.

Bezug zum theoretischen Teil der Arbeit:

Im Kapitel 6.2. (Seite 47) über Jakob Bernoulli wird sein Werk „Ars conjectandi" und dessen Inhalt zum Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung eingehend behandelt. Durch die Aufbereitung des Werks mit den SchülerInnen ist der Bezug zum theoretischen Teil der Arbeit direkt hergestellt.

Aufgaben aus Jakob Bernoullis „ARS CONJECTANDI“

1) Gegeben sind drei Aufgaben, wie sie Jakob Bernoulli formulierte.
   a) Wofür steht der Begriff „Hoffnung“ im Sinne von Bernoulli?
   b) Versuche, die drei Aufgaben zu lösen.

Aufgabe V: (BERNOULLI 1899: 8)
„A wettet gegen B, dass er aus 40 Spielkarten, von denen je 10 von gleicher Farbe sind, vier verschiedenfarbige Karten ziehen wird. Wie verhalten sich die Hoffnungen Beider zu einander?“

Aufgabe XI: (BERNOULLI 1899: 20, 21)
„Jemand will mit einem gewöhnlichen Würfel auf 6 Würfe erreichen, dass alle sechs Würfelflächen nach oben zu liegen kommen; es soll also jede Augenzahl einmal und keine zweimal erscheinen. Wie gross ist seine Hoffnung?“

Aufgabe XII: (BERNOULLI 1899: 21)
„Jemand will mit 6 Würfen die 6 Flächen eines Würfels der Reihe nach werfen, sodass er mit dem ersten Wurfe ein Auge, mit dem zweiten zwei Augen, usw. erzielt. Wie gross ist seine Hoffnung?“

2) Lies dir die Lösungen von Bernoulli durch. Was fällt dir auf? Vergleiche mit deinen Lösungsansätzen. Was überschneidet sich, was ist gleich?

Lösungsmethode nach J. Bernoulli von Aufgabe V:
(…) Hier wollen wir zeigen, wie dieselbe [Aufgabe] mit der Combinationslehre gelöst werden kann.

Zu diesem Zwecke untersucht man, wie oft aus 40 Spielkarten je vier gezogen werden können, d.h. wieviele Quaternionen sich aus 40 Dingen bilden lassen. Diese Zahl ist (…) gleich $\binom{40}{4}$ *= 81390, und ebensoviele gleich mögliche Fälle des Spiels sind vorhanden. Unter diesen befinden sich aber 10000 Fälle, welche die Spielbedingung erfüllen und aus jeder Farbe ein und nur eine Karte liefern, was sich folgendermaassen zeigen lässt.*

Statt der vier Sorten von Kartenblättern nehme ich vier Würfel an, deren jeder 10 Flächen, entsprechend den 10 Karten jeder Farbe besitzt. Dann sind mit diesen Würfeln ebensoviele verschiedene Würfe möglich, als es Quaternionen von den 40 Karten giebt, welche die gestellte Bedingung erfüllen: denn ebenso, wie von jeder Farbe nur eine Karte gezogen sein soll, zeigt bei jedem Wurfe jeder einzelne Würfel ein und nur eine Fläche oben. Aus der von Huygens *der* Aufgabe X *des ersten Theiles vorangeschickten Untersuchung lässt sich entnehmen, dass mit den vier gleichen Würfeln* 10^4 *= 10 000 Würfe möglich sind.*

Da nun ebensoviele Fälle für A günstig sind, während die übrigen 81390 Fälle für B günstig sind, so verhält sich die Hoffnung des A zu der des B wie 10 000 zu 81390 oder wie 1000 zu 8139.

Lösungsmethode nach Bernoulli von Aufgabe XI:
Für jeden Wurf sind entsprechend den 6 Flächen des Würfels 6 Fälle möglich. Keiner dieser Fälle ist für den Spieler bei den ersten Wurfe ungünstig. Bei dem zweiten Wurfe darf die mit dem ersten Wurfe erreichte Augenzahl nicht wiederkehren; es sind also dem Spieler noch 5 Fälle günstig. Bei dem dritten Wurfe schaden ihm die Augenzahlen, der beiden vorigen Würfe, und es sind nur die übrigen vier noch günstig. Ebenso findet man, dass der Spieler beim vierten, fünften, sechsten Wurfe bez. noch 3, 2, 1 günstige Fälle hat. Die Aufgabe kommt also darauf hinaus, die Hoffnung eines Spielers zu bestimmen, welcher sechsmal hintereinander etwas erreichen will, wenn bei jedem einzelnen Male 6 Fälle überhaupt vorhanden sind, von denen ihm beim ersten Male 6, beim zweiten Male 5, u. s. w. günstig sind. Dafür ist (…) allgemein der Ausdruck $\frac{b\,c\,h\ldots}{a\,d\,g\ldots}$ *gefunden worden; hier haben b, c, h,… bez. Die Werthe 6, 5, 4, … und a, d, g,… sämmtlich den Werth 6. Daraus folgt für die gesuchte Hoffnung:* $\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6^6} = \frac{5}{324}$

Lösungsmethode nach Bernoulli von Aufgabe XII:
Da die sechs Flächen der Reihe nach obenauf zu liegen kommen sollen, so hat der Spieler bei jedem einzelnen Wurf nur einen ihm günstigen Fall. Hier haben also die Buchstaben b, c, h, … sämmtlich den Werth 1, und die gesuchte Hoffnung ist gleich $\frac{1}{6^6} = \frac{1}{16656}$

3) Was denkst du, meint er mit dem Ausdruck $\boldsymbol{\frac{b\,c\,h\ldots}{a\,d\,g\ldots}}$**?**

9.5. Arbeitsblatt 5

Anmerkung:

Dieses Arbeitsblatt ist für die 6. Klasse AHS als Übung zum Thema "Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastik" gedacht. Ziel dieser Arbeit ist, dass die SchülerInnen den Zusammenhang zwischen dem Pascal'schen Dreieck und dem Binomialkoeffizienten selbst erkennen.

Der Binomialkoeffizient ist den SchülerInnen bereits bekannt. Die Formel für die Berechnung des Binomialkoeffizienten kennen die SchülerInnen ebenfalls, da sie diese bereits beim Auspotenzieren von Binomen gelernt haben. Sie lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Die Schüler sollen sehen, dass die Zeile des Pascal'schen Dreiecks (nummeriert von 0 weg) das "n" angibt, das "k" (nummeriert von 0 weg) die Schrägspalten der rechten Seite. Man kann also den Binomialkoeffizienten – natürlich nur bis zu einem bestimmt großen n – im Pascal'schen Dreieck ablesen.

Bezug zum theoretischen Teil der Arbeit:

Blaise Pascal hat großen Raum im theoretischen Teil der vorliegenden Arbeit eingenommen. Er war ein großer Mathematiker, der in ständigem Kontakt mit seinen Fachkollegen stand und neue Erkenntnisse auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung lieferte. Berühmt war er jedoch für seine Forschungen im Bereich der Geometrie. Die SchülerInnen kommen mit Pascal in Kontakt, wenn sie über das "Pascal'sche Dreieck" lernen. Es ist eine Hilfe beim Auspotenzieren von Binomen, dessen Regel lautet:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ \dots + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

Betrachtet man nun das Pascal'sche Dreieck, so kann man leicht den Binomialkoeffizienten ablesen, denn – wie oben erwähnt – befindet sich dieser dort, wo sich die Zeile n und die Schrägspalte k kreuzen. Der Binomialkoeffizient hat auch in der Binomialverteilung seinen fixen Platz. Dort wird er nämlich in folgender Formel verwendet:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Die Binomialverteilung dient zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit der Ereignismengen-Mächtigkeit = 2. Die Versuchsreihe wird immer unter denselben Bedingungen und Voraussetzungen durchgeführt, es handelt sich um eine “Ziehung mit Zurücklegen”.

Der Binomialkoeffizient und das Pascal'sche Dreieck

Aufgabe 1:
Bilde das Pascal'sche Dreieck bis zur 8. Zeile

Aufgabe 2:
Berechne folgende Binomialkoeffizienten. Verwende dazu die bereits gelernte Formel aus dem SÜ-Heft bzw. aus dem Formelheft.

$$\binom{2}{0} = \qquad \binom{2}{1} =$$
$$\binom{4}{1} = \qquad \binom{4}{2} =$$
$$\binom{3}{1} = \qquad \binom{3}{2} =$$
$$\binom{5}{1} = \qquad \binom{5}{2} =$$
$$\binom{8}{1} = \qquad \binom{8}{2} =$$

Aufgabe 3:
Findest du die Ergebnisse aus Aufgabe 2 im Pascal'schen Dreieck? Markiere sie bunt. Kannst du einen Zusammenhang zwischen Zeilen, Schrägspalten, n und k deiner Binomialkoeffizienten erkennen?

Definiere deine Regel in Worten!
Kontrolliere mit dem Buch. (Reichel, Mathematik 6, Seite 92)

9.6. Arbeitsblatt 6

Anmerkung:

Dieses Arbeitsblatt ist ein Ausschnitt aus einem Lernpfad, welcher sich im Internet unter

http://rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/Mathematik_Uploads/Medienvielfalt/Medienvielfalt3/lernpfad_einfuehrung_wahrscheinlichkeitsrechnung/Lernpfad_Wahrscheinlichkeit/

abrufen lässt. Gedacht ist diese Arbeit für SchülerInnen der 6. oder 7. Klasse AHS. Für das Lösen der gestellten Aufgaben brauchen die SchülerInnen kein spezielles Vorwissen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es geht einzig und alleine um Intuition und Diskussion. Durch das Bilden von Kleingruppen von 2 bis 4 Schülern und das Ausprobieren der gestellten Fragen sollen sie ein Gefühl für Wahrscheinlichkeiten, Gewinnmöglichkeiten und Fairness bekommen. Zusätzlich sollen sie versuchen, intuitiv eine Lösung herzuleiten.

Bezug zum theoretischen Teil der Arbeit:

Der Bezug zum theoretischen Teil meiner Arbeit besteht darin, dass einerseits die Problematik von de Méré erwähnt wird und das Teilungsproblem an sich einen großen Part im theoretischen Teil der Arbeit einnimmt. Ohne Chevalier de Méré hätte Pascal wohl nie mit Fermat über das Teilungsproblem diskutiert und dessen Lösung hätte noch ein paar Jahre länger auf sich warten lassen.

Wann entstand die Wahrscheinlichkeitsrechnung?

Als eigentliche Geburtsstunde gilt das Jahr 1654, als sich der Chevalier de Méré, ein Philosoph und Literat am Hof Ludwig XIV., mit zwei Problemen an Blaise Pascal wandte. Ein interessanter Briefwechsel zwischen den Mathematikern Blaise Pascal und Pierre de Fermat folgte.

Fermat

Pascal

Lasst euch in die Zeit des Chevalier de Méré zurückversetzen!

Chevalier de Méré, Philosoph, Literat und begeisterter Spieler, bat den damals berühmten Mathematiker Blaise Pascal, um Hilfe bei der Lösung zweier Probleme, die ihn beschäftigten. Lest euch die beiden Fragen des Chevalier durch und versucht in Partnerarbeit eine Antwort zu finden, die ihr in einer anschließenden Diskussion in der Klasse auch verteidigen sollt.

Frage 1:
Was ist wahrscheinlicher: Bei vier Würfen mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu werfen oder bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs?

Frage 2:
Eine Münze wird wiederholt geworfen. Für jedes Mal "Zahl" erhält A einen Punkt und für jedes Mal "Kopf" erhält B einen Punkt. Wer zuerst 5 Punkte erzielt, gewinnt den Einsatz.

Nach 7 Würfen hat A 4 Punkte und B 3 Punkte. Das Spiel wird abgebrochen.

Welches ist die gerechte Aufteilung des Einsatzes: Nach Maßgabe der gewonnenen Spiele (also 4:3) oder nach Maßgabe der noch fehlenden Spiele (also 2:1) oder überhaupt nach anderen Gesichtspunkten?

Spielen und diskutieren

- Probiert die zwei Spiele in kleinen Gruppen von 2 bis 4 SchülerInnen aus!
- Formuliert einen Lösungsvorschlag.
- Haltet eure Lösungsvorschläge schriftlich fest und überlegt euch gute Argumente dafür, denn eure MitschülerInnen könnten anderer Meinung sein.
- Diskutiert anschließend in einem Diskussionsforum, welcher Lösungsvorschlag die größte Zustimmung findet.

Welche Lösung ist richtig?

Auch die Mathematiker Blaise Pascal und Pierre de Fermat diskutierten diese Fragen in einem heftigen Briefwechsel. Die Briefe sind leider nur noch teilweise erhalten.

Später werden euch die inzwischen gesicherten Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung helfen, den Briefwechsel zu verstehen und weitere Lösungswege zu finden.

Quelle http://rfdz.phnoe.ac.at/fileadmin/Mathematik_Uploads/Medienvielfalt/Medienvielfalt3/lernpfad_einfuehrung_wahrscheinlichkeitsrechnung/Lernpfad_Wahrscheinlichkeit/
Stand: 19.01.2013

9.7. Arbeitsblatt 7

Anmerkung:

Dieses Arbeitsblatt ist als Fortsetzung und Vertiefung des Arbeitsblattes 6 gedacht. Die SchülerInnen kennen bereits die Fragen von de Méré, welche sie auf Arbeitsblatt intuitiv und aus dem Bauch heraus zu lösen versucht haben, und ihnen sagt auch der Briefwechsel von Pascal und Fermat etwas. Nun sollen sie, mit den bereits (und das ist Voraussetzung!) gelernten grundlegenden Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung, also Pfadregeln, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Baumdiagramm, etc., die Fragestellungen von de Méré lösen und sich in Aufgabe 3 mit dem Briefwechsel von Pascal und Fermat im Detail auseinandersetzen. Ziel dieser Arbeit ist das Anwenden des bisher gelernten Stoffes auf zwei berühmte historische Problematiken. Die Lösungen der Fragestellungen de Mérés sehen wie folgt aus:

Lösung von Frage 1:

P(mindestens einmal 6) = ca. 0.52

P(mindestens eine Doppelsechs) = ca. 0.49

Daher ist die Gewinnwahrscheinlichkeit beim Spiel mit einem Würfel höher.

Lösung von Frage 2:

P(A gewinnt) = 3/4

P(B gewinnt) = 1/4

Daraus folgt, dass eine gerechte Aufteilung im Verhältnis 3:1 erfolgen muss.

Den Briefwechsel der beiden französischen Mathematiker sollen sich die SchülerInnen online durchlesen und ihren ersten Eindruck notieren. Ziel ist, dass die SchülerInnen ein ungefähres Bild der damaligen Diskussion bekommen und sehen, wie der Tonfall der Franzosen damals gewesen ist, wie sie geschrieben haben und welche Lösungsansätze die beiden hatten.

Bezug zum theoretischen Teil der Arbeit:

Siehe Arbeitsblatt 6

Die Fragen des Chevalier de Méré

Aufgabe 1:

Was ist wahrscheinlicher: Bei vier Würfen mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu werfen oder bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs?

- Ermittle die Lösung mit Hilfe von Baumdiagrammen.

Aufgabe 2:

Eine Münze wird wiederholt geworfen. Für jedes Mal "Zahl" erhält A einen Punkt und für jedes Mal "Kopf" erhält B einen Punkt. Wer zuerst 5 Punkte erzielt, gewinnt den Einsatz. Nach 7 Würfen hat A 4 Punkte und B 3 Punkte. Das Spiel wird abgebrochen.

- Ermittle die gerechte Aufteilung des Einsatzes, indem du die Gewinnwahrscheinlichkeit für Spieler A bzw. Spieler B berechnest, wenn die Münze noch zweimal geworfen wird. Verwende ein geeignetes Baumdiagramm.

Aufgabe 3:

Rufe im Internet die Seite

http://www.uni-due.de/imperia/md/content/didmath/ag_jahnke/briefe_fp.pdf

auf und lies den Briefwechsel von Fermat und Pascal.

Schreibe deinen ersten Eindruck auf!

Quelle: http://rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/Mathematik_Uploads/Medienvielfalt/Medienvielfalt3/lernpfad_einfuehrung_wahrscheinlichkeitsrechnung/Lernpfad_Wahrscheinlichkeit/
Stand: 19.01.2013

9.8. Arbeitsblatt 8

Anmerkung:

Dieses Arbeitsblatt ist als Arbeit in Zweiergruppen gedacht, passend zum Stoff der 6. Klasse zum Thema Baumdiagramm oder für eine 7. Klasse als Wiederholung des Vorjahresstoffs. Eventuell könnte das Arbeitsblatt eine Einheit in „Mathematik Wahlpflichtfach“ darstellen. Ziel dieser Arbeit ist die mathematische Umsetzung eines praktischen Versuches und die Darstellung des Teilungsproblems auf spielerische Art und Weise. Es wird vorausgesetzt, dass die SchülerInnen bereits gelernt haben, wie man ein Baumdiagramm zeichnet, und dass sie die erste und zweite Pfadregel bereits kennengelernt haben.

Bezug zum theoretischen Teil der Arbeit:

Den SchülerInnen wird mit einer hypothetischen Spielsituation der Mädchen Anna und Marie das Teilungsproblem nähergebracht. Wie schon am Arbeitsblatt erwähnt, ist das Problem des Spielabbruchs und der gerechten Teilung bereits seit dem 15. Jahrhundert ein Thema in der Geschichte der Mathematik. Erst seit Blaise Pascal und Pierre de Fermat und ihrem Briefwechsel zum Thema Teilungsproblem gibt es eine mathematisch fundierte und korrekte Lösung. In der Arbeit wird das Teilungsproblem intensiv behandelt, ebenso wie die Vorgeschichte dazu und der fortlaufende Prozess in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Das Teilungsproblem

Anna und Marie verbringen den Nachmittag bei Marie im Haus. Da es regnet, wollen die beiden ein Würfelspiel machen, bei dem sie selbst die Regeln aufgestellt haben. Anna siegt, wenn sie die Augenzahlen 2, 4 oder 6 würfelt. Marie siegt, wenn sie 1, 3 oder 5 würfelt. Es gibt kein Unentschieden und der Gewinner jeder Runde bekommt einen Punkt. Die Gewinnchance ist für beide gleich, nämlich 1/2. Sieger des Spiels ist der, der zuerst 5 Punkte erreicht hat. Jeder Spieler wirft 5 Euromünzen in den Pot, sodass die Gesamtsumme im Gewinnpot 10 € beträgt.

Als das Spiel 3:2 für Anna steht, werden sie von Maries Mutter zum Essen gerufen und sie können das Spiel nicht zu Ende führen. Die beiden eilen zu Tisch und diskutieren dort heftigst über die Aufteilung der Geldsumme im Pot. Anna ist der Meinung, die 10 € zur Gänze für sich beanspruchen zu können, da sie den Großteil der bisher gespielten Runden gewonnen hat. Marie meint, dass ihr 40 % der Summe zustünden, da sie 2/5 des Spiels gewonnen habe. Laut Marie müsste man also den Gewinn im Verhältnis 3:2 aufteilen.

Geschichtlicher Hintergrund: *Das Problem der gerechten Teilung kam im 15. Jahrhundert auf. Die richtige Lösung wurde jedoch erst im 17. Jahrhundert von Blaise Pascal und Pierre de Fermat gefunden. Sie führten einen intensiven Briefwechsel und korrespondierten hauptsächlich wegen dieses Teilungsproblems, trafen sich jedoch nie persönlich. Ihre Lösung war der Anfang der Wahrscheinlichkeitsrechnung.*

1) **Wie würdest du den Einsatz aufteilen?** Stimmst du mit dem Lösungsansatz von Marie oder Anna überein?

2) Holt euch je zu zweit einen Würfel und **setzt dieses Spiel, ausgehend vom Spielstand 3:2 fort**. Eine/r spielt Anna, eine/r spielt Marie. Macht 10 dieser Durchgänge. Bei „gespielte Runden“ sollt ihr eintragen, wie viele Runden noch nötig waren, bis einer der beiden Spieler 5 Punkte erreicht hat. Wie lauten die Ergebnisse?

Durchgang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gewinner										
gespielte Runden										

Interpretiert eure Ergebnisse!

3) Zeichnet ein **Baumdiagramm** für den möglichen Spielverlauf ab dem Spielstand 3:2 in euer Heft. Berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass Anna gewinnt und die Gewinnwahrscheinlichkeit für Marie.
(Hinweis: Die Summe der gewinnbringenden Pfade für jeden Spieler gibt die Gewinnwahrscheinlichkeit an.)

Gewinnwahrscheinlichkeit von Anna: _________

Gewinnwahrscheinlichkeit von Marie: _________

Bibliografie

BALL, Walter W. Rouse: *A short account of the history of mathematics*. Unabridged and unaltered republ. of the 4. ed. 1908. New York: Dover Publ. 1960

BAUER, Hans: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 4. Aufl. Berlin [u.a.]: de Gruyter 1991

BOS, Henk J. M.: *Lectures in the history of mathematics*. (History of Mathematics Vol. 7) Providence/RI: American Mathematical Society 1993

DEDRON, Pierre (u.a.): *Mathématique et Mathématiciens*. Paris: Magnard 1959

DESROSIÈRES, Alain: *Die Politik der großen Zahlen : eine Geschichte der statistischen Denkweise*. Übersetzt von Manfred Stern. Berlin [u.a.]: Springer 2005

DEVLIN, Keith J.: *Pascal, Fermat und die Berechnung des Glücks : eine Reise in die Geschichte der Mathematik*. München: Beck 2009

DIEUDONNÉ, Jean: *Geschichte der Mathematik 1700 – 1900 – Ein Abriß*. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH 1985

FREUD, Róbert (Hrsg): *Große Augenblicke aus der Geschichte der Mathematik*. Mannheim/Wien/Zürich: BI-Wissenschaftsverlag 1990

HALD, Anders: *A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750*. New York [u.a.]: Wiley 1990

HOCHKIRCHEN, Thomas: *Die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Kontexte*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1999

HOGBEN, Lancelot: *Die Entdeckung der Mathematik – Zahlen formen ein Weltbild*. Stuttgart: Chr. Belser 1963

INEICHEN, Robert: *Würfel und Wahrscheinlichkeit – Stochastisches Denken in der Antike*. Heidelberg/Berlin/Oxford: Spektrum Akad. Verl. 1996

ITARD, Jean: *Les Mathématiciens*. – In: Histoire des Mathématiques. Hrg. v. Jacques Bouveresse, u.a. (Encyclopoche Larousse). Paris: Librairie Larousse 1977, S. 143 – 251

KAISER, Hans [u.a.]: *Geschichte der Mathematik*. 3. Aufl. München: Oldenbourg Schulbuchverlag 2006

KAPLAN, Ellen & Michael: *Eins zu Tausend : die Geschichte der Wahrscheinlichkeits-rechnung*. Frankfurt am Main [u.a.]: Campus-Verl. 2007

KOLMOGOROV, Andrej N.: *Foundations of the Theory of Probability*. New York: Chelsea Publishing Company 1950

LÖFFEL, Hans: *Blaise Pascal : 1623 – 1662*. Basel [u.a.]: Birkhäuser 1987

MAHONEY, Michael Sean: *The mathematical career of Pierre de Fermat: 1601 – 1665*. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press 1994

OCAGNE, Maurice de: *Histoire abrégée des sciences mathématiques*. Ouvrage recueilli et achevé par René Dugas. Paris: Vuibert 1955

OWEN, D.B.: *On the History of Statistics and Probability*. New York/Basel: Marcel Dekker Inc. 1976

PEIFFER, Jeanne [u.a.]: *Wege und Irrwege – Eine Geschichte der Mathematik*. Basel [u.a]: Birkhäuser Verlag 1994

PFANZAGL, Johann: *Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin (u.a): Walter de Gruyter 1988

SCHNEIDER, Ivo: *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933 – Einführungen und Texte*. Darmstadt: Wissenschaftl. Buchges.1988

SINGH, Simon: *Fermats letzter Satz: die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels*. München: Dt. Taschenbuch Verl. 2006

STEWART, Ian: *Meilensteine der Mathematik* – Aus dem Englischen übersetzt von Anna Schleitzer. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl. 2010

STIGLER, Stephen M.: *The History of Statistics – The Measurement of Uncertainty before 1900*. Cambridge [u.a.]: Harvard Univ. Press 1986

STRUIK, D. J.: *A source book in mathematics 1200 – 1800.* Cambridge (u.a.): Harvard University Press 1969

VON RANDOW, Gero: *Das Ziegenproblem – Denken in Wahrscheinlichkeiten*. Reinbeck: Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH 1993

WUSSING, Hans: *6000 Jahre Mathematik : eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 1 Von den Anfängen bis Leibniz und Newton.* Berlin [u.a.]: Springer 2008

WUSSING, Hans: *6000 Jahre Mathematik : eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 2 Von Euler bis zur Gegenwart.* Berlin [u.a.]: Springer 2009

WUSSING, Hans: *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*. Berlin: VEB Deutscher Verl. d. Wissenschaften 1979

ZEUTHEN, Hieronymus G: *1839-1920: Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*. Leipzig: Teubner 1903

Internetquellen

BELLHOUSE, David: *Decoding Cardano's Liber de ludo aleae*. London (u.a.): In: Historia Mathematica Nr. 32 2005 via: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086004000400

BERNOULLI, Jakob: *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Ars conjectandi)*. Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner, Lepizig: Verl. v. Wilhelm Engelmann 1899 http://ia600301.us.archive.org/30/items/wahrscheinlichke03bernuoft/wahrscheinlichke03bernuoft.pdf, Stand: 03.12.2012

DESCARTES, René: *Abhandlung über die Methode des richtigen Vernunftgebrauchs und der wissenschaftlichen Wahrheitsforschung*. 1863. http://www.textlog.de/descartes-methode.html, Stand: 28.12.2012

FERMAT, Pierre de: *Oeuvres de Fermat*. Tome troisième: Correspondances. Paris: Gauthier-Villars et Fils 1894 http://archive.org/details/oeuvresdefermat02ferm, am 11.11.2012

LAPLACE, Pierre-Simon: *Oeuvres complètes*. Tome Huitième: Mémoire sur la probabilité des causes par les événements. Paris: Gauthier-Villars et Fils 1891 http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k77596b/f34.image, am 11.11.2012

PASCAL, Blaise: *Oeuvres complètes*. 1884 http://archive.org/stream/uvrescompltesde02pascgoog#page/n10/mode/2up, am 06.11.2012

ZITANTE: http://www.blog.zitante.de/zitatsuche.php?catid=179, Stand: 03.01.2013

UNI-PROTOKOLLE: http://www.uni-protokolle.de/Lexikon/Kolmogorov-Axiome.html, Stand: 04.01.2013

ZENO-LEXIKON: http://www.zeno.org/Pierer-1857/A/Differenzreihe, Stand: 21.01.2013

Abstract

Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im 17. und frühen 18. Jahrhundert und deren Hintergründe, mit besonderem Schwerpunkt auf den Lebensgeschichten der Mathematiker. Das zentrale Thema dieser Arbeit ist das Teilungsproblem, welches die beiden Franzosen Pascal und Fermat in einem Briefwechsel eingehend diskutierten. Darauf aufbauend wird die Weiterentwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch John Graunt, Christiaan Huygens, der Familie Bernoulli, Thomas Bayes, sowie David Hilbert und Andrej Kolmogorov beschrieben.

Die theoretische Arbeit wird von einem praktischen Teil begleitet, welcher einige themenbezogene Arbeitsblätter für die Verwendung im Schulunterricht beinhaltet.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Bianca Prosenbauer
Geburtsdatum:	28. Juli 1988
Staatsbürgerschaft:	Österreich
Familienstand:	ledig
Anschrift:	Kaiserebersdorferstraße 72/2/8 1110 Wien
Mobiltelefon:	0699/12323224
E-Mail:	bianca@prosenbauer.com

Ausbildung

2006 – 2013	Lehramtsstudium Mathematik und Französisch
1998 – 2006	BG11, Geringergasse 2, 1110 Wien Reifeprüfung mit sehr gutem Erfolg

Sprachkenntnisse

Deutsch	Muttersprache
Französisch	fließend in Wort und Schrift
Englisch	fließend in Wort und Schrift
Spanisch	Grundkenntnisse in Wort, fließend in Schrift

Sprachaufenthalte/Sprachkurse

2008, Juli – Sept.	Nizza, Frankreich
2004, Sept.	Cambridge, Großbritannien

Skikurse

2013, Jänner	als Begleitskilehrerin mit G19 in Hinterglemm, Salzburg

Unterrichtserfahrung

Seit 2012	Sondervertragliche Lehrtätigkeit am G19 Gymnasiumstraße 83, 1190 Wien
2010 – 2012	Lehrkraft für Mathematik an der Maturaschule Schottentor Hörlgasse 9, 1090 Wien
2010 – 2012	Nachhilfelehrerin bei Lernen 8 Josefstädter Straße 75, 1080 Wien
2006 – 2012	Nachhilfelehrerin (privat)

Zusätzliche Qualifikationen

Seminare für Kommunikation, Präsentation und Medien
Cambridge Certificate in Advanced English (ESOL)
Ausbildung zur Begleitperson für Skilauf bei Wintersportwochen (BSPA)

Interessen

Musik (Gitarre, Klavier, Gesang), Katzen, Reisen, Skifahren, französische Kultur, Kochen/Esskultur