



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology

Diplomarbeit

Optimale Investitions-Rückversicherungsstrategie für ein Jump-Diffusion Risikomodell

ausgeführt am

Institut für Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

betreut von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits

Verfasser:

Petra Maria Kernecker, BSc

Matr. Nr. 0725883

Wien, am 6. Juli 2012

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der optimalen Investitions-Rückversicherungsstrategie für ein Jump-Diffusion Risikomodell mit Investment und proportionaler Rückversicherung, in welchem der Schadenprozess als Compound Poisson Prozess modelliert wird und der Investitionsprozess dem CEV-Modell folgt. Von wesentlichem Interesse ist das optimale Investitions-Rückversicherungsproblem der Maximierung des erwarteten exponentiellen Nutzens eines Endvermögens, welches eine wichtige Rolle in der Finanzmathematik als auch in der aktuariellen Praxis spielt. Durch die Verwendung der stochastischen Kontrolltheorie lassen sich explizite Ausdrücke für die optimale Investitions-Rückversicherungsstrategie wie auch für die Wertfunktion herleiten. Des Weiteren sind numerische Analysen angeführt, um die Auswirkung der Modellparameter auf die optimalen Strategien zu verdeutlichen.

Abstract

This thesis is about the optimal reinsurance-investment problem for the jump-diffusion risk model with investment and proportional reinsurance in which the aggregate claim process is a compound Poisson process perturbed by diffusion and the investment process follows the CEV-model. The main focus is on studying the optimal investment-reinsurance problem of maximizing the expected exponential utility of terminal wealth which is an important and commonly-adopted function in the financial mathematics and actuarial practice. Explicit expressions for the optimal strategies and value functions are derived by using techniques of stochastic control theory. Also some numerical analysis are presented to illustrate the impact of some model parameters on the optimal strategies.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel erstellt zu haben.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Wien, 6. Juli 2012 _____
Unterschrift

Danksagung

Ich möchte mich bei Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits für die fachkundige Unterstützung während des Entstehungsprozesses dieser Masterarbeit bedanken und für die Bereitstellung vieler nützlicher Materialien. Insbesondere für die großartige Emailbetreuung, da der Großteil dieser Masterarbeit im Auslandssemester entstanden ist.

Es gibt einige Menschen die mich während meiner Studienzeit unterstützt haben, denen ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen möchte.

Besonderen Dank möchte ich an meinen Freund Gerhard richten, der mich immer geduldig unterstützt hat.

Am meisten jedoch verdanke ich meinen Eltern, denen ich hiermit diese Arbeit widmen möchte. Sie haben über all die Jahre an mich geglaubt und mir meinen Werdegang ermöglicht.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen der stochastischen Analysis	3
2.1	Stochastische Prozesse, Brownsche Bewegung	3
2.2	Itô-Prozess und Itô-Formel	4
2.3	Stochastische Differentialgleichung	5
3	Einführung in die stochastische Kontrolltheorie	7
3.1	Einführung	7
3.2	Das Bellman Prinzip und die Modellierung der Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung	8
3.3	Verifikationstheorem	10
4	Maximierung des erwarteten Nutzens für eine geometrische Brownsche Bewegung als Aktienpreis	11
4.1	Das Nullnutzenprinzip	11
4.2	Portfoliooptimierungsproblem von Merton	12
4.3	Maximierung des erwarteten Endnutzens für eine geometrische Brownsche Bewegung	15
4.3.1	Das Modell	15
4.3.2	Maximierung des exponentiellen Nutzens	17
5	Das CEV-Modell	21
6	Optimale Investitions-Rückversicherungsstrategie für ein Jump-Diffusion Risikomodell	23
6.1	Modellbildung	23
6.2	Optimales Resultat	27
6.3	Numerische Analyse	33
7	Monte Carlo Simulation einer einfachen Strategie im Vergleich zu einer optimalen Strategie	36
7.1	Monte Carlo Simulation einer optimalen Strategie	36

7.2	Monte Carlo Simulation einer einfachen Strategie	40
7.3	Monte Carlo Simulation einer einfachen Strategie im Vergleich zu einer optimalen Strategie	44
A	Programme für das numerische Beispiel	46
B	Programme für die Monte Carlo Simulation	48

Abbildungsverzeichnis

6.1	Der Effekt von β auf die optimale Investitionsstrategie A_t^*	34
6.2	Der Effekt von σs^β auf die optimale Investitionsstrategie A_t^*	35
6.3	Der Effekt von a auf die optimale Investitionsstrategie A_t^*	35
7.1	Simulation eines Surplusverlaufes bei optimaler Strategie für 10 Zeitintervalle der Länge $\Delta t = 0.01$	38
7.2	Einfluss von β auf das Zielfunktional	39
7.3	Einfluss von η auf das Zielfunktional	39
7.4	Einfluss von a auf das Zielfunktional	40
7.5	Simulation eines Surplusverlaufes bei einfacher Strategie für 10 Zeitintervalle der Länge $\Delta t = 0.01$	41
7.6	Einfluss von β auf das Zielfunktional	42
7.7	Einfluss von η auf das Zielfunktional	43
7.8	Einfluss von a auf das Zielfunktional	43
7.9	Simulation des Zielfunktional zum Vergleich einer optimalen Strategie mit einer einfachen Strategie.	44
7.10	Simulation des Zielfunktional zum Vergleich einer optimalen Strategie mit einer einfachen Strategie.	45

Tabellenverzeichnis

7.1	<i>Simulation eines Surplusverlaufes bei optimaler Strategie für 10 Zeitintervalle der Länge $\Delta t = 0.01$.</i>	38
7.2	<i>Simulation eines Surplusverlaufes bei einfacher Strategie für 10 Zeitintervalle der Länge $\Delta t = 0.01$.</i>	41

Kapitel 1

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit liegt darin, das optimale Investitions-Rückversicherungsproblem der Maximierung des erwarteten exponentiellen Nutzens durch die Herleitung expliziter Ausdrücke für die optimalen Strategien und Wertfunktionen zu lösen. Hierfür werden Grundlagen der stochastischen Analysis, der stochastischen Kontrolltheorie und verschiedene Modelle vorausgesetzt, auf welche in den Kapiteln zwei bis fünf näher eingegangen wird.

Kapitel 2 beschäftigt sich mit den Grundlagen der stochastischen Analysis, in welchem die Begriffsdefinitionen eines stochastischen Prozesses als auch einer Brownschen Bewegung angeführt sind. Weiters wird auf das Kernstück der stochastischen Analysis, die Itô-Formel, wie auch auf die Itô-Prozesse näher eingegangen. Ein weiterer Bestandteil dieser Grundlagen stellt die Einführung der stochastischen Differentialgleichung dar und auch die Existenz von Lösungen wird kurz erläutert.

In Kapitel 3 wird eine Einführung in die stochastische Kontrolltheorie vorgenommen und die Begriffe Kontrollprozess, Zustandsprozess, Zielfunktional und Wertfunktion werden eingeführt. Darüber hinaus wird aus dem Bellman Prinzip die Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung hergeleitet, welche in späteren Kapiteln öfters Anwendung finden wird. Diese Gleichung ist eine notwendige Bedingung für die Wertfunktion und führt somit zum Verifikationstheorem.

In Kapitel 4 wird die Maximierung des erwarteten Nutzens für eine geometrische Brownsche Bewegung als Aktienpreis betrachtet. Einführend wird sowohl das Nullnutzenprinzip als auch die Nutzenfunktion vorgestellt. Weiters wird auf eine der frühesten Anwendungen der stochastischen Kontrolltheorie im Bereich der Finanzmathematik eingegangen; das klassische Portfoliooptimierungsproblem von Merton.

Anschließend wird in Kapitel 5 das Modell der konstanten Elastizität der Varianz, oder auch als CEV-Modell (Constant elasticity of Variance Model) bezeichnet, vorgestellt. Dieses bietet eine geeignete Alternative zum Black-Scholes-Modell. Das CEV-Modell trägt zur empirisch be-

legten, negativen Korrelation zwischen Aktienkurs und Volatilität bei und kann entsprechend in die Klasse der stochastischen Volatilitätsmodelle aufgenommen werden.

Das Kapitel 6 ist der optimalen Investitions-Rückversicherungsstrategie für ein Jump-Diffusion Risikomodell gewidmet. Zuerst erfolgt die Modellbildung und Erläuterung der verschiedenen Modellparameter und anschließend werden im Unterkapitel Optimale Resultate explizite Ausdrücke für die optimalen Strategien und Wertfunktionen durch Verwendung der stochastischen Kontrolltheorie hergeleitet. Durch numerische Analysen soll der Einfluss der Modellparameter auf die optimalen Strategien verdeutlicht werden.

In Kapitel 7 wird eine Monte Carlo Simulation durchgeführt, um den Vergleich einer optimalen Strategie mit einer einfachen Strategie zu veranschaulichen.

Die verwendeten Programme für die numerischen Analysen in Kapitel 6.3 und für die Monte Carlo Simulation in Kapitel 7 werden im Anhang vorgestellt.

Kapitel 2

Grundlagen der stochastischen Analysis

2.1 Stochastische Prozesse, Brownsche Bewegung ¹

Ein zufälliger Vorgang, welcher mit der Zeit abläuft, soll durch einen stochastischen Prozess modelliert werden. Unter solch einem Vorgang versteht man zum Beispiel den Zerfall einer radioaktiven Probe, einen Aktienkurs als auch die Schwerpunktsbewegung eines Fahrzeuges auf unebenem Untergrund. Für weitere Beispiele siehe [2]. Dies motiviert zur folgenden Begriffsdefinition.

Definition 2.1.1 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(Z, \mathcal{Z})$ ein mit einer σ -Algebra versehener Raum und I eine Indexmenge (zum Beispiel: $I=\mathbb{R}$, $I=\mathbb{N}_0$, $I=[a, b]$). Ein stochastischer Prozess X ist eine Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in I}$ bzw. $X_t : \Omega \rightarrow Z, t \in I$. Als Pfad oder Trajektorie eines Prozesses bezeichnet man für jedes $\omega \in \Omega$ die Abbildung $X(., \omega) : t \mapsto X(t, \omega)$.

Durch die Definition eines stochastischen Prozesses lässt sich nun der Begriff "Brownsche Bewegung" genauer diskutieren, wobei sich diese Arbeit hierbei nur auf die wenigen, für Itô-Integrale relevanten Aspekte beschränkt. Eine Brownsche Bewegung wird häufig auch als Wiener-Prozess bezeichnet, weil Norbert Wiener (1894-1964) als erster (1923) dafür ein mathematisch korrektes Modell schuf. Die Brownsche Bewegung ist eine der wichtigsten stetigen stochastischen Prozesse. Einerseits hat sie interessante mathematische Eigenschaften andererseits ist es möglich viele weitere Prozesse, wie in etwa stetige Martingale und Diffusionsprozesse, durch Brownsche Bewegungen mathematisch auszudrücken. Das Itô-Integral hat in dem Letzteren sogar seinen Ursprung. Mehr dazu siehe [2].

Definition 2.1.2 Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Prozess $(W_t)_{t \in T}$ heißt Brownsche Bewegung, falls für $s \leq t$ gilt:

¹Siehe [3], S. 18 ff

1. *Standard Brownsche Bewegung:* $W_0 = 0$ $\mathcal{P}$ -fast sicher.
2. *Unabhängige Inkremente:* Für alle $s, t \in (0, \infty)$ ist $W_t - W_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$.
3. *Stationäre Inkremente:* Für alle $s, t \in (0, \infty)$ gilt $W_t - W_s \stackrel{d}{=} W_{t-s} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, t-s)$.
4. *Pfade:* $(W_t)_{t \in I}$ hat $\mathcal{P}$ -fast sicher stetige Pfade.

Definition 2.1.3 Der Prozess $X_t = \mu t + \sigma W_t$ heißt lineare Brownsche Bewegung mit Drift μ und Volatilität σ . Als geometrische Brownsche Bewegung bezeichnet man den Prozess $M_t = \exp\{\frac{-2\mu}{\sigma^2} X_t\}$, welcher die Martingaleigenschaften erfüllt.

2.2 Itô-Prozess und Itô-Formel

Das Kernstück der stochastischen Analysis wird gebildet durch die Itô-Formel, welches ihr ein Profil verleiht, das sich deutlich von der reellen Analysis unterscheidet. Sie wird in den folgenden Kapiteln immer wieder benötigt werden. In [1] findet man eine detaillierte Herleitung der Itô-Formel und Erläuterung eines Itô-Prozesses.

Definition 2.2.1 Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $(Z, \mathcal{Z})$ ein Meßraum. Ein Prozess $(X_t)_{t \in T}$ heißt progressiv messbar bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$, falls für alle $t \geq 0$ und $s \leq t$ die Abbildung

$$X : [0, t] \times \Omega \longrightarrow Z, \quad (s, w) \mapsto X(s, w)$$

$\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -messbar ist.

Definition 2.2.2 (Eindimensionaler Itô-Prozess) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(W_t)_{t \geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ und X_0 eine $\mathcal{F}_0$ -messbare Zufallsvariable. $(X_t)_{t \geq 0}$ ist ein Itô-Prozess, falls gilt

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dW_s,$$

wobei u_s und v_s progressiv messbar sind und die Bedingungen $\mathbb{P}(\int_0^t |u_s| ds < \infty) = 1$ und $\mathbb{P}(\int_0^t v_s^2 ds < \infty) = 1$ erfüllen.

Mittels Kurzschreibweise lässt sich ein Itô-Prozess darstellen als $dX_t = u dt + v dW_t$.

Satz 2.2.3 (Eindimensionale Itô-Formel) Es sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Itô-Prozess mit Werten in $U \subseteq \mathbb{R}$ und $f : [0, \infty) \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit Werten in $C^{1,2}$. Dann ist $f(t, X_t)$ ein Itô-Prozess und es gilt

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) u_s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) v_s^2 ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) v_s dW_s.$$

Aber auch die mehrdimensionale Itô-Formel ist für die mathematische Anwendung von großer Bedeutung.

Definition 2.2.4 (Mehrdimensionaler Itô-Prozess) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^n)^\top$ eine n -dimensionale Brownsche Bewegung, falls W_t^i für $i = 1, \dots, n$ unabhängige Brownsche Bewegungen und adaptiert bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ sind. Weiters sei X_0 eine $\mathcal{F}_0$ -messbare Zufallsvariable. Ein n -dimensionaler Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt Itô-Prozess, falls gilt

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t,$$

wobei b_t ein n -dimensionaler Vektor und σ_t eine $n \times m$ -dimensionale Matrix bestehend aus adaptierten Prozessen ist.

Satz 2.2.5 (Mehrdimensionale Itô-Formel) Es sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein n -dimensionaler Itô-Prozess und $f \in C^{1,2}$, sodass für $j, k = 1, \dots, n$ die quadratischen Kovarianzprozesse $\langle X^k, X^j \rangle_t$ existieren und stetig sind. Dann ist $f(t, X_t)$ ein mehrdimensionaler Itô-Prozess und es gilt

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \sum_{k=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial k}(s, X_s) dX_s^k + \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial k \partial j}(s, X_s) d\langle X^k, X^j \rangle_s,$$

mit $\langle X^k, X^j \rangle_t = \int_0^t (\sigma \sigma^\top)_{kj} ds$.

2.3 Stochastische Differentialgleichung ²

Man betrachte eine n -dimensionale Brownsche Bewegung $(W_t)_{t \geq 0}$, eine Drift $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine Diffusion $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, wobei beide Abbildungen messbar sind. Als stochastische Differentialgleichung bezeichnet man eine Gleichung der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \quad (2.1)$$

oder in symbolischer Schreibweise

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t.$$

Eigentlich sind es n Gleichungen der Form $dX_t^i = b^i(t, X_t) dt + \sum_{k=1}^n \sigma^{ik}(t, X_t) dW_t^k$. Lösungen dieser stochastischen Differentialgleichung werden als stochastische Diffusion bezeichnet.

Definition 2.3.1 Ein Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.1), falls gilt:

²Vgl. [3], S. 22 f

- $(X_t)_{t \geq 0}$ erfüllt die stochastische Differentialgleichung,
- $(X_t)_{t \geq 0}$ ist adaptiert,
- $\int_0^t |b^i(s, X_s)| ds < \infty$ $\mathcal{P}$ -fast sicher $\forall i = 1, \dots, n$ und
- $\int_0^t (\sigma^{ij})^2 ds < \infty$ $\mathcal{P}$ -fast sicher $\forall i, j = 1, \dots, n$.

Kapitel 3

Einführung in die stochastische Kontrolltheorie

3.1 Einführung

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, wobei die Filtration die Bedingungen der Stetigkeit und der Vollständigkeit erfüllt. Des Weiteren sei $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^n)^\top$ eine n-dimensionale Brownsche Bewegung. Dies motiviert folgende Begriffsbildung nach [5, S. 5-9]

Der **Kontrollprozess** $(u_t)_{t \in [0, T]}$ ist ein bezüglich der Filtration progressiv messbarer Prozess mit Werten in $U \subset \mathbb{R}^p$ und kann als eine kontrollierbare Variable interpretiert werden. Die Anzahl der Aktien in einem Portfolio entspricht einer solchen kontrollierbaren Variable und auch die Dividendenausschüttung stellt einen Kontrollprozess dar.

Der **Zustandsprozess** $(X_t)_{t \in [0, T]}$ beschreibt den Zustand des Systems durch die stochastische Differentialgleichung

$$d(X_t) = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t, \quad (3.1)$$

wobei für die Komponenten gilt $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ und $t \in [0, T]$. Durch einen Zustandsprozess $(X_t)_{t \in [0, T]}$ kann somit zum Beispiel das Vermögen eines Investors beschrieben werden.

Das **Zielfunktional** ist gegeben durch

$$J(t, x, u_t) = \mathbb{E} \left[\int_t^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + \psi(T, X_T) | X_t = x \right],$$

wobei φ die laufenden Kosten und ψ die Endkosten beschreibt.

Die **zulässigen Kontrollprozesse** $A(t, x)$ sind progressiv messbare Prozesse bezüglich der Filtration, sodass die Differentialgleichung zur Beschreibung des Zustandsprozesses eine eindeutige Lösung aufweist und weiters das Zielfunktional wohldefiniert ist (also $J(t, x, u_t) \neq \pm\infty$).

Die **Wertfunktion** wird beschrieben durch

$$V(t, x) = \sup_{u \in A(t, x)} J(t, x, u_t).$$

Ziel ist es, $V(0, x)$ zu berechnen und die optimale Kontrolle u^* so zu bestimmen, dass die Gleichung $J(0, x, u^*) = V(0, x)$ erfüllt ist.

3.2 Das Bellman Prinzip und die Modellierung der Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung

Man betrachte den Generator, welcher die Änderungen eines Prozesses misst,

$$LF := \lim_{s \searrow t} \frac{\mathbb{E}[f(s, X_s) - f(t, x) | X_t = x]}{s - t}$$

mit dem Definitionsbereich $DL = \{f \text{ sei messbar, sodass der Grenzwert für alle } t \text{ und } x \text{ definiert ist}\}$. Weiters gilt für

$$\mathcal{L} := \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

mit Funktionen aus der Menge $C^{1,2} := \{f | \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \forall i, j = 1, \dots, n \text{ stetig}\}$, dass

$$D\mathcal{L} = C^{1,2}$$

und

$$\mathcal{L}f := \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

oder

$$\mathcal{L}f := \frac{\partial f}{\partial t} + b D_x f(t, x) + \frac{1}{2} \text{tr}(a(t, x) D_{xx} f(t, x)),$$

wobei $D_x f$ den Gradient von f bezeichne, tr die Spur, $D_{xx} f$ die Hesse Matrix und $a(t, x) = \sigma(t, x) \sigma^\top(t, x)$ die Diffusionsmatrix. Siehe [5] für mehr Details.

Somit kann die Itô-Formel folgendermaßen geschrieben werden

$$df(t, X_t) = \mathcal{L}f(t, X_t)dt + D_x f(t, X_t) \sigma(t, X_t) dW_t. \quad (3.2)$$

Das **Bellman Prinzip** (siehe [6]) ist für $t_1 > t$ gegeben durch

$$V(t, x) = \sup_{u \in A(t, x)} \mathbb{E} \left[\int_t^{t_1} \varphi(s, X_s, u_s) ds + V(t_1, X_{t_1}) | X_t = x \right].$$

Falls man sich im Intervall $[t, t_1]$ optimal verhält und auch über den Zeitpunkt t_1 hinaus, so erhält man ein globales Optimum.

Zur Modellierung der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung sei vorausgesetzt, dass die Wertfunktion $V(t, x)$ glatt genug ist, sodass die folgenden Umformungen durchgeführt werden können. Die Vorgangsweise zur Herleitung dieser Gleichung ist analog zu [5, S. 11-12].

Im ersten Schritt wendet man die Itô-Formel (3.2) auf $V(t_1, X_{t_1})$ an und erhält

$$\begin{aligned} V(t_1, X_{t_1}) &= V(t, x) + \int_t^{t_1} \left(\frac{\partial V(s, X_s)}{\partial s} + D_x V(s, X_s) b(s, X_s, u_s) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{tr}(a(s, X_s, u_s) D_{xx} V(s, X_s)) \right) ds + \int_t^{t_1} \sigma(s, X_s) D_x V(s, X_s, u_s) dW_s. \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt stellt man das Bellman Prinzip unter folgender Annahme auf: Die Wertfunktion $V(t, X_t)$ sei so, dass das stochastische Integral ein Martingal ergibt. Somit verschwindet das stochastische Integral unter dem Erwartungswert im Bellman Prinzip.

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \sup_{u \in A(t, x)} \mathbb{E} \left[\int_t^{t_1} \varphi(s, X_s, u_s) ds + V(t, x) + \int_t^{t_1} \left(\frac{\partial V(s, X_s)}{\partial s} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + D_x V(s, X_s) b(s, X_s, u_s) + \frac{1}{2} \text{tr}(a(s, X_s, u_s) D_{xx} V(s, X_s)) \right) ds | X_t = x \right] \end{aligned}$$

Weiters kürzt sich die Wertfunktion aus dem Prinzip heraus. Durch die Division mit dem Faktor $(t_1 - t)$ und der Grenzwertbildung $\lim_{t_1 \rightarrow t}$ vereinfacht sich das Bellman Prinzip zu

$$0 = \sup_{u \in U} \left\{ \varphi(t, x, u) + \underbrace{\frac{\partial V(t, X)}{\partial t} + D_x V(t, X) b(t, X, u) + \frac{1}{2} \text{tr}(a(t, X, u) D_{xx} V(t, X))}_{:= \mathcal{L}^u V(t, x)} \right\},$$

woraus die **Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung** folgt

$$0 = \sup_{u \in U} \{ \varphi(t, x, u) + \mathcal{L}^u V(t, x) \}. \quad (3.3)$$

Unter den bestehenden Bedingungen ist die Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung eine notwendige Bedingung für die Wertfunktion $V(t, x)$. Umgekehrt stellt sich natürlich die Frage: Falls $V(t, x)$ die Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung erfüllt, ist $V(t, x)$ dann eine Wertfunktion? Dies führt somit zum Verifikationstheorem.

3.3 Verifikationstheorem¹

Die zulässigen Kontrollprozesse $A(t, x)$ seien so, dass

1. der Kontrollprozess $(u_t)_{t \in [0, T]}$ ein progressiv messbarer Prozess ist, der $\mathbb{E}[\int_t^T \|u_s\|^2] < \infty$ erfüllt.
2. $\forall (u_t)_{t \in [0, T]} \in A(t, x)$ die stochastische Differentialgleichung in (3.1) eine eindeutige Lösung hat, welche $\mathbb{E}[\sup_{t \leq u \leq T} \|X_u\|^2] < \infty$ erfüllt.
3. das Zielfunktional $J(t, x, u_t)$ wohldefiniert ist.

Satz 3.3.1 (Verifikationstheorem) *Es sei $\varphi(t, x, u)$ so, dass die Bedingungen $|\varphi(t, x, u)| \leq C\varphi(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$, $\|\sigma(t, x, u)\|^2 \leq C\sigma(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$ erfüllt sind.*

1. Falls $\Phi(t, x)$ die folgenden Bedingungen erfüllt

- $\Phi(t, x) \in C^{1,2}$
- $|\Phi(t, x)| \leq C\Phi(1 + \|x\|^2)$
- $\sup_{u \in U} \{\varphi(t, x, u) + \mathcal{L}^u \Phi(t, x)\} = 0,$

dann gilt $\Phi(t, x) \geq V(t, x)$.

2. Falls $(u_t^*)_{t \in [0, T]} \in A(t, x)$, dann gilt $\Phi(t, x,) = V(t, x)$ und u^* ist die optimale Kontrolle.

Für einen Beweis des Verifikationstheorems siehe [5, S. 12-13].

¹Vgl. [5], S. 16 f

Kapitel 4

Maximierung des erwarteten Nutzens für eine geometrische Brownsche Bewegung als Aktienpreis

4.1 Das Nullnutzenprinzip ¹

Ein Versicherungsunternehmen bietet einem Versicherungsnehmer Versicherungsschutz gegen die Bezahlung einer Prämie. Für den Versicherungsnehmer wird somit, durch das Zahlen einer fixen Prämie, das Risiko kalkulierbar. Zur Ermittlung der Prämienhöhe gibt es verschiedene Prämienkalkulationsprinzipien, die als Funktionale auf dem Raum der Schadenvariablen definiert sind.

Eine Möglichkeit zur Bestimmung der Prämie bietet das Nullnutzenprinzip. Hierbei wählt das Versicherungsunternehmen seine Prämie gemäß einer **Nutzenfunktion** $l(\cdot)$, an welche die Anforderungen

- monoton steigend $l'(\cdot) > 0$ und
- konkav $l''(\cdot) \leq 0$

gestellt werden. Eine solche Funktion ordnet jeder Geldmenge $x \geq 0$ den Nutzen $l(x)$ für das Versicherungsunternehmen zu. Für detailliertere Erläuterungen sei auf [8] verwiesen und für weitere Prämienkalkulationsprinzipien auf [7].

Für eine Nutzenfunktion ist die dazugehörige **Risikoaversion** $r(x)$ definiert durch

¹Siehe [7], S. 20 ff

$$r(x) := -\frac{l''(x)}{l'(x)}.$$

Sei nun x der Überschuss des Versicherungsunternehmens vor Übernahme des Risikos, dann ist $x + \mathcal{P} - S$ der Überschuss danach, wobei $\mathcal{P}$ die Prämie modelliert und S die Schäden beschreibt. Dem stehen die Nutzen $l(x)$ und $l(x + \mathcal{P} - S)$ gegenüber, wohingegen der zweite Nutzen eine Zufallsvariable ist, die von S abhängt.

Das Nullnutzenprinzip verlangt nun, dass der Nutzen vor Versicherungsübernahme gleich dem erwarteten Nutzen nach Versicherungsübernahme ist und ist gegeben durch

$$l(x) = \mathbb{E}[l(x + \mathcal{P} - S)].$$

4.2 Portfoliooptimierungsproblem von Merton

Eine der frühesten Anwendungen der stochastischen Kontrolltheorie im Bereich der Finanzmathematik stellt Merton's klassisches Portfoliooptimierungsproblem dar. Das Portfolioproblem befasst sich mit der optimalen Investitions- und Konsumstrategie eines rationalen Investors. Dieser muss Entscheidungen treffen, um eine gewisse Nutzenfunktion zu maximieren. Die Formulierung des Portfolioproblems von Merton erfolgt analog zu [8].

Man betrachte das Portfolio eines Investors, welches aus zwei Assets, einem risikolosen und einem risikoreichen Asset, besteht. Der Preis $p(s)$ eines risikolosen Assets ist entsprechend $dp = prds$, während der Preis $S(s)$ eines risikoreichen Assets durch $dS = S(\mu ds + \sigma dW(s))$ gegeben ist. Die Variablen r, μ, σ sind Konstanten mit $r < \mu$, $\sigma > 0$ und $W(s)$ bezeichnet die Brownsche Bewegung. Es sei $x(s)$ das Vermögen des Investors zum Zeitpunkt s , $\pi(s)$ der Anteil des Vermögens im risikoreichen Asset und $c(s)$ die Konsumrate. An $\pi(s)$ sind keine Bedingungen geknüpft, dafür ist es notwendig, dass $x(s) > 0$ und $c(s) > 0$ sind. Somit ändert sich $x(s)$ entsprechend der stochastischen Differentialgleichung

$$dx = (1 - \pi(s))x(s)rds + \pi(s)x(s)(\mu ds + \sigma dW(s)) - c(s)ds. \quad (4.1)$$

Der Prozess wird gestoppt, falls das Vermögen $x(s)$ Null beträgt (Ruinzeitpunkt). Somit ergibt sich das Zeitintervall $O = (0, \infty)$ für das Vermögen $x(s)$. Der Kontrollprozess ist ein zweidimensionaler Vektor $u(s) = (u_1(s), u_2(s))$ mit $u_1(s) = \pi(s)$ und $u_2(s) = c(s)$, unter der Nebenbedingung $u_2(s) \geq 0$. Entsprechend ist die Menge der zulässigen Kontrollprozesse gegeben durch $A = (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$. Die laufenden Kosten sind angegeben mit $L(x, v_2) = l(v_2)$, wobei $l(c)$ den Nutzen der Konsumrate $c > 0$ bezeichnet und $v = \lim_{s \downarrow t} c(s)$. Es sei angenommen, dass $l(0) = 0$, $l'(0^+) = +\infty$, $l'(c) > 0$, $l''(c) < 0$ für $c > 0$.

Das Problem ist die Maximierung des insgesamt erwarteten Nutzens, diskontiert durch $\beta > 0$,

$$J(x; u_1, u_2) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\tau e^{-\beta s} l(c(s)) ds \right], \quad (4.2)$$

wohingegen $\tau = +\infty$ oder τ für den Ruinzeitpunkt steht und die Notation $\mathbb{E}_x[\cdot]$ gleich der Schreibweise $\mathbb{E}[\cdot | X_0 = x]$ ist.

Für $v = (v_1, v_2) \in A$ ist der Generator $-\mathcal{L}^v$ eines autonomen Markov Prozesses von folgender Form

$$-\mathcal{L}^v \Phi(x) = \frac{\sigma^2 v_1^2 x^2}{2} \Phi_{xx} + (\mu - r) v_1 x \Phi_x + r x \Phi_x - v_2 \Phi_x,$$

wobei $\Phi(x)$ aus dem Verifikationstheorem in Satz 3.3.1. hervorgeht und die partiellen Ableitungen Φ_{xx} und Φ_x stetig sind.

Somit kann die Gleichung (5.8) aus [8, S. 13 Proof of Theorem 5.1.] in die folgende Form gebracht werden

$$\beta \Phi = \max_{v_1} \left[\frac{\sigma^2 v_1^2 x^2}{2} \Phi_{xx} + (\mu - r) v_1 x \Phi_x \right] + r x \Phi_x + \max_{v_2 \geq 0} [l(v_2) - v_2 \Phi_x]. \quad (4.3)$$

Genauer gesagt, falls l ersetzt wird durch $-l$, dann besteht das Problem in der Minimierung von $-J$. Somit muss $-\Phi$ die entsprechende Gleichung (4.3) erfüllen, aber mit min anstelle von max und l muss ersetzt werden durch $-l$. Folglich hat diese die Form von [8, S. 13 Proof of Theorem 5.1. Gleichung (5.8)] und die Wertfunktion $V(t, x)$ sollte anwachsen auf dem Intervall $[0, \infty)$. Zudem hat das Portfolioproblem eine linear-konkave Struktur, was bedeutet, dass $V(t, x)$ konkav ist. Entsprechend ist für $x > 0$ eine Lösung von (4.3) gesucht mit $\Phi_x > 0$, $\Phi_{xx} < 0$ und $\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi_x$.

Durch eine elementare Berechnung erhält man die folgenden Kandidaten für eine optimale Investitions- und Konsumstrategie

$$u_1^*(x) = -\frac{(\mu - r)\Phi_x(x)}{\sigma^2 x \Phi_{xx}(x)}, \quad u_2^* = (l')^{-1}(\Phi_x(x)). \quad (4.4)$$

Nun sei angenommen, dass

$$l(c) = \frac{1}{\gamma} c^\gamma, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (4.5)$$

wohingegen diese Nutzenfunktion vom Typ HARA (hyperbolische absolute Risikoaversion) ist. Eine Vielzahl von Nutzenfunktionen für das Problem von optimalen Investitionsstrategien wurde zum Beispiel von Karatzas in [19] behandelt.

Eine Lösung von (4.3) ist gegeben durch

$$\Phi(x) = K x^\gamma \text{ für eine Konstante } K. \quad (4.6)$$

Entsprechend eingesetzt in (4.4) erhält man

$$u_1^*(x) = \frac{\mu - r}{(1 - \gamma)\sigma^2}, \quad u_2^*(x) = (\gamma K)^{\frac{1}{\gamma-1}} x. \quad (4.7)$$

Es sei bemerkt, dass $u_1^*(x)$ nicht von x abhängt und $u_2^*(x)$ linear in x ist.

Somit erfolgt die Bestimmung der Konstante K durch Substitution der Gleichungen (4.6) und (4.7) in (4.3). Folglich erhält man eine nichtlineare Gleichung für K , welche eine positive Lösung aufweist, vorausgesetzt

$$\beta > \frac{(\mu - r)^2 \gamma}{2\sigma^2(1 - \gamma)} + r\gamma.$$

Nun sei zu prüfen, ob $u_1^*(x)$ und $u_2^*(x)$ tatsächlich optimale Strategien sind und ob $\Phi(x)$ der maximal erwartete diskontierte Nutzen ist. Dies erfolgt direkt durch Überprüfung der Gleichung

$$\Phi(x) = J(x; u_1^*, u_2^*), \quad \text{für alle } x > 0. \quad (4.8)$$

Da $u_1^*(x)$ konstant ist und $u_2^*(x)$ linear in x ist, erfüllt $x^*(s)$ die lineare stochastische Differentialgleichung (4.1), welche explizit gelöst werden kann. Dadurch erhält man, dass $x^*(s) > 0$ für alle $s > 0$. Somit ist $\tau^* = +\infty$. Wie im Beweis von Theorem 5.1 in [8] sei

$$\Phi(x) = \mathbb{E}_x \left[\frac{1}{\gamma} \int_0^{t_1} e^{-\beta s} \left(u_2^*(x^*(s)) \right)^\gamma ds + e^{-\beta t_1} \Phi(x^*(t_1)) \right], \quad \text{für jedes } t_1 > 0.$$

Da $\Phi(x^*(t_1)) \geq 0$ bedeutet das durch (4.7), dass

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\beta s} (x^*(s))^\gamma ds \right] < \infty.$$

Weiters ist $W(x^*(s)) = K(x^*(s))^\gamma$ und somit erhält man (4.8) durch den Grenzübergang $t_1 \rightarrow \infty$, sodass $e^{-\beta t_1} \mathbb{E}_x[x^*(t_1)]^\gamma$ gegen 0 strebt.

Bemerkung: In diesem Modell gibt es keine Möglichkeit, sowohl Vermögen zu erzeugen als auch einen einmaligen Ruin zu erreichen. Das Problem, welches formuliert wurde, ist äquivalent zu einem unter den Nebenbedingungen $x(s) \geq 0$ und $\tau = +\infty$ in (4.2).

Bemerkung: Karatzas-Lehoczky-Sethi-Shreve zeigte in [9], dass das Portfolioproblem von Merton eine explizite Lösung besitzt, selbst wenn $l(c)$ nicht die spezielle HARA Form in (4.5) aufweist.

Falls $u_1(s) > 1$, so ist der Term $(1 - u_1(s))x(s)$ in (4.1) negativ. Dieser Term steht für das Geld, dass sich der Investor ausgeliehen hat. Es wurde implizit angenommen, dass das Geld mit der gleichen Rate r , wie die Rückzahlungsrate für ein risikoloses Asset, zur Verfügung gestellt wird. Falls die Rate des geliehenen Geldes größer ist als r , so existiert keine explizite Lösung $\Phi(x)$. Dieser Fall wurde von Fleming-Zariphopoulou in [10] behandelt.

Eine weitere Vereinfachung im Portfolioproblem ist die Ignorierung der Transaktionskosten. Wenn diese im Modell inkludiert wären, so würde man auf ein stochastisches Problem in der Kontrolltheorie vom singulären Typ stoßen. Mit dieser Thematik setzt sich auch Fleming in [5] auseinander.

4.3 Maximierung des erwarteten Endnutzens für eine geometrische Brownsche Bewegung ²

4.3.1 Das Modell

In diesem Modell wird vorausgesetzt, dass die Standardannahmen für zeitstetige Finanzmodelle gelten. Dies bedeutet, dass

- kontinuierliches Handeln erlaubt ist und
- keine Transaktionskosten inkludiert sind.

Ausgehend davon, dass nur eine risikoreiche Aktie für den Investor existiert, ist der Preis dieser zum Zeitpunkt t gegeben durch P_t . Weiters wird angenommen, dass der Preisprozess der Aktie die stochastische Differentialgleichung

$$dP_t = P_t h dZ_t$$

erfüllt, wobei $(Z_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Drift μ und Diffusion σ ist, sodass gilt

$$dZ_t = \mu dt + \sigma dW_t^{(1)}, \quad (4.9)$$

wohingegen μ und σ Konstante sind und $(W_t^{(1)})_{t \geq 0}$ eine standard Brownsche Bewegung bezeichnet. Somit folgt der riskante Aktienpreis einer geometrischen Brownschen Bewegung.

Des Weiteren sei der Risikoprozess $(Y_t)_{t \geq 0}$ gegeben, welcher eine weitere Brownsche Bewegung mit Drift α und Diffusion β darstellt. Der Prozess $(Y_t)_{t \geq 0}$ erfüllt die stochastische Differentialgleichung

$$dY_t = \alpha dt + \beta dW_t^{(2)}, \quad (4.10)$$

für die Konstanten α und β als auch für die Brownsche Bewegung $(W_t^{(2)})_{t \geq 0}$.

Die Brownschen Bewegungen $(W_t^{(1)})_{t \geq 0}$ und $(W_t^{(2)})_{t \geq 0}$ sind zueinander korreliert und der Korrelationskoeffizient ist gegeben durch ρ , sodass $\mathbb{E}[W_t^{(1)} W_t^{(2)}] = \rho t$ gilt.

²Siehe [11], S. 939 ff

Der Prozess $(Y_t)_{t \geq 0}$ würde zum Beispiel in einer Schaden-Unfall Versicherung einen Schadenprozess (eingenommene Prämien abzüglich der geleisteten Schadenzahlungen) modellieren. In der klassischen Risikothorie lässt sich der Schadenprozess $(\hat{Y}_t)_{t \geq 0}$ darstellen durch

$$\hat{Y}_t = pt - \sum_{i=1}^{N_t} C_i,$$

wobei p die eingenommene Prämie ist, N_t die Schadenanzahl gegeben als Poisson Prozess mit Intensität λ und C_i die Schadenhöhe des i -ten Schadens. Weiters ist C_i für $i = 1, \dots, N_t$ eine Folge von unabhängigen und ident verteilten Zufallsgrößen. Somit wird $\sum_{i=1}^{N_t} C_i$ als Compound Poisson Prozess bezeichnet. Für weitere Informationen bezüglich Risikomodelle siehe [12]. In diesem Fall haben sich schon mehrere Mathematiker mit einer Diffusionsapproximation (mehr dazu in [13] und [14]) des Schadenprozesses befasst und die Parameter in (4.10) lassen sich darstellen durch

$$\alpha = p - \lambda \mathbb{E}[C_1] , \beta^2 = \lambda \mathbb{E}[C_1^2].$$

Somit lässt sich der Parameter α als relativer Sicherheitszuschlag eines Schadenprozesses interpretieren.

Der Investor ist berechtigt zur Investition seines Vermögens in die risikoreiche Aktie. Entsprechend wird die Menge des investierten Geldes zum Zeitpunkt t unter der Investitionsstrategie f als $(f_t)_{t \geq 0}$ bezeichnet, wobei $(f_t)_{t \geq 0}$ ein zulässiger, adaptierter Kontrollprozess ist. Dieser erfüllt für alle T die Bedingung $\int_0^T f_t^2 dt < \infty$.

Weiters beschreibe X_t^f das Vermögen des Investors zum Zeitpunkt t unter der Strategie f mit $X_0 = x$. Dieser Prozess lässt sich entwickeln zu

$$dX_t^f = f_t dZ_t + dY_t , X_0 = x, \quad (4.11)$$

wohingegen Z_t und Y_t zuvor definiert wurden. Die Substitution von (4.9) und (4.10) in (4.11) zeigt, dass der Vermögensprozess der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t^f = (f_t \mu + \alpha) dt + f_t \sigma dW_t^{(1)} + \beta dW_t^{(2)} , X_0 = x$$

folgt. Da $(W_t^{(1)})_{t \geq 0}$ und $(W_t^{(2)})_{t \geq 0}$ korrelierte standard Brownsche Bewegungen sind mit Korrelationskoeffizient ρ , ist die quadratische Variation des Vermögensprozesses gegeben durch

$$d\langle X \rangle_t = (f_t^2 \sigma^2 + \beta^2 + 2\rho\sigma\beta f_t) dt$$

und der Generator (für den Kontrollprozess f_t) ist von der Form

$$\mathcal{L}^f g(t, x) = g_t + (f\mu + \alpha)g_x + \frac{1}{2}(f^2\sigma^2 + \beta^2 + 2\rho\sigma\beta f)g_{xx},$$

wobei die partiellen Ableitungen g_t , g_x und g_{xx} stetig sind.

4.3.2 Maximierung des exponentiellen Nutzens

Es sei angenommen, dass der Investor an der Maximierung des Nutzens seines Endvermögens zum Zeitpunkt T interessiert ist. Die Nutzenfunktion sei gegeben durch $l(x)$, welche die Bedingungen $l' > 0$ und $l'' < 0$ erfüllt. Weiters bezeichne $V(t, x)$ den maximal erreichbaren Nutzen des Investors im Zustand x zum Zeitpunkt t , sodass gilt $V(t, x) = \sup_f \mathbb{E}[l(X_T^f) | X_t^f = x]$ und es sei $(f_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ die optimale Strategie.

Man nehme an, dass die Nutzenfunktion einer exponentiellen Nutzenfunktion der Form

$$l(x) = \lambda - \frac{\gamma}{\theta} e^{-\theta x} \quad (4.12)$$

entspricht, für $\gamma > 0$ und $\theta > 0$. Diese Nutzenfunktion weist einen Risikoparameter θ vom Typ CARA (konstante absolute Risikoaversion) auf, wie aus der Tatsache $-\frac{l''(x)}{l'(x)} = \theta$ ersichtlich ist. Solche Funktionen spielen eine wesentliche Rolle in der Versicherungsmathematik als auch in der aktuariellen Praxis, da diese die einzigen Nutzenfunktionen sind, unter welchen das Nullnutzenprinzip eine faire Prämie ergibt, unabhängig von der Höhe der Reserven eines Versicherungsunternehmens. Dies führt zu folgendem Theorem.

Theorem 4.3.1 *Die optimale Strategie zur Maximierung des erwarteten Nutzens zum Endzeitpunkt T ist die Investition der Konstante*

$$f_t^* = \frac{\mu}{\sigma^2 \theta} - \frac{\rho \beta}{\sigma} \text{ zu jedem Zeitpunkt } t \leq T \quad (4.13)$$

und die optimale Wertfunktion ist gegeben durch

$$V(t, x) = \lambda - \frac{\gamma}{\theta} \exp\{-\theta x + (T - t) \cdot Q(\theta)\}, \quad (4.14)$$

wobei $Q(\cdot)$ eine quadratische Funktion ist definiert durch

$$Q(\theta) = \theta^2 \frac{1}{2} \beta^2 (1 - \rho^2) - \theta \left(\alpha - \frac{\rho \beta \mu}{\sigma} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\sigma} \right)^2. \quad (4.15)$$

Beweis: Für das Maximierungsproblem des Nutzens vom Endvermögen zu einem fixen Endzeitpunkt T sei die Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung für $t < T$ gegeben durch

$$\sup_f \{\mathcal{L}^f V(t, x)\} = 0, \quad V(T, x) = l(x), \quad (4.16)$$

wobei $V(t, x) = \sup_f \mathbb{E}[l(X_T^f) | X_t^f = x]$. In anderen Worten, für jedes (t, x) muss die nichtlineare partielle Differentialgleichung (4.16) gelöst werden und des Weiteren muss der Wert $f_t(x)$

gefunden werden, welcher die Funktion

$$V_t + (f\mu + \alpha)V_x + \frac{1}{2}(f^2\sigma^2 + \beta^2 + 2\rho\sigma\beta f)V_{xx} \quad (4.17)$$

maximiert, wobei die partiellen Ableitungen V_t , V_x und V_{xx} stetig sind.

Es sei angenommen, dass die Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung (4.16) eine klassische Lösung $V(t, x)$ besitzt, die die folgenden Bedingungen $V_x > 0$ und $V_{xx} < 0$ erfüllt. Durch differenzieren von (4.17) bezüglich f erhält man den Optimierer

$$f_t^* = -\frac{\mu}{\sigma^2} \left(\frac{V_x}{V_{xx}} \right) - \frac{\rho\beta}{\sigma}. \quad (4.18)$$

Durch Einsetzen dieser optimalen Strategie in (4.17) ist die Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung für die Wertfunktion $V(t, x)$, nach einigen Vereinfachungen, gegeben durch

$$V_t + \left(\alpha - \frac{\rho\beta\mu}{\sigma} \right) V_x - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\sigma} \right)^2 \frac{V_x^2}{V_{xx}} + \frac{1}{2} \beta^2 (1 - \rho^2) V_{xx} = 0, \text{ für } t < T \quad (4.19)$$

$$V(T, x) = l(x) \quad (4.20)$$

Es sei bemerkt, dass sich die partielle Differentialgleichung (4.19) doch deutlich unterscheidet von der üblichen Form einer Nutzenmaximierung für einen normalen Investor (wenn $\alpha = \beta = \rho = 0$). Diese Thematik wird beispielsweise behandelt in [18] oder auch in [19].

Das Interesse gilt jedoch der exponentiellen Nutzenfunktion $l(x) = \lambda - \frac{\gamma}{\theta} e^{-\theta x}$. Um die partielle Differentialgleichung (4.19) zu lösen, sei eine Lösung der Form

$$V(t, x) = \lambda - \frac{\gamma}{\theta} \exp\{-\theta x + g(T - t)\} \quad (4.21)$$

gesucht, wobei $g(\cdot)$ eine geeignete Funktion ist. Des Weiteren erhält man für diese Lösungsform folgende partielle Ableitungen

$$V_t(t, x) = (V(t, x) - \lambda) \cdot (-g'(T - t)) \quad (4.22)$$

$$V_x(t, x) = (V(t, x) - \lambda) \cdot (-\theta) \quad (4.23)$$

$$V_{xx}(t, x) = (V(t, x) - \lambda) \cdot (\theta^2). \quad (4.24)$$

Die Nebenbedingung $V(T, x) = l(x) = \lambda - \frac{\gamma}{\theta} e^{-\theta x}$ impliziert, dass $g(0) = 0$ gelten muss. Durch Einsetzen von (4.22), (4.23) und (4.24) in (4.19) und nach einigen Vereinfachungen wird vorausgesetzt, dass $g(T - t)$ die Gleichung

$$0 = -g'(T - t) + \frac{1}{2} \beta^2 (1 - \rho^2) \theta^2 - \left(\alpha - \frac{\rho\beta\mu}{\sigma} \right) \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\sigma} \right)^2 \equiv -g'(T - t) + Q(\theta) \quad (4.25)$$

erfüllt. Durch Integration und die Beachtung der Bedingung $g(0) = 0$ erhält man schließlich die Wertfunktion (4.14).

Da nun die Werftfunktion in expliziter Form vorhanden ist, kann die optimale Kontrolle einfach bestimmt werden. Durch Substitution der Werte für $V_x(t, x)$ und $V_{xx}(t, x)$ aus (4.23) und (4.24) in (4.18) erhält man die optimale Kontrolle $(f_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ in (4.13).

Es bleibt noch zu prüfen, ob die Kontrolle $(f_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ und die Wertfunktion $V(t, x)$ tatsächlich optimal sind. Um dies zu zeigen, sei zuerst bemerkt, dass unter der soeben bewiesenen Strategie der resultierende optimale Vermögensprozess $(X_t^{f^*})_{0 \leq t \leq T}$ eine Brownsche Bewegung mit konstanter Drift und Diffusionskoeffizienten der folgenden Form ist

$$dX_t^{f^*} = \left(\frac{\mu^2}{\sigma^2 \theta} + \left(\alpha - \frac{\rho \beta \mu}{\sigma} \right) \right) dt + \sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma \theta} \right)^2 + \beta^2 (1 - \rho^2)} dW_t,$$

wobei $(W_t)_{t \geq 0}$ eine weitere standard Brownsche Bewegung ist. Dies erhält man durch Substitution der Kontrolle (4.13) in die stochastische Differentialgleichung für den Vermögensprozess und nach weiteren Vereinfachungen. Da somit die Wertfunktion zweimal stetig differenzierbar ist, sind alle Bedingungen des Verifikationstheorems erfüllt, was impliziert, dass die Kontrolle $(f_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ in (4.13) und die Wertfunktion $V(t, x)$ in (4.14) optimal sind. $\square$

Bemerkung: Alternativ kann auch das Martingale Optimality Principle (siehe [4]) verwendet werden um zu zeigen, dass unter der Strategie $(f_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ die Wertfunktion $V(t, x)$ in (4.14) ein Martingal ist. Und daraus kann schließlich auf die Optimalität geschlossen werden.

Bemerkung: Ein Argument gegen die Verwendung der exponentiellen Nutzenfunktion in der Praxis ist, dass diese zu einer Strategie führt unter welcher das Vermögen negativ werden kann. Dies ist allerdings ein wichtiger Einwand für einen normalen Investor, infolgedessen gibt es alternative Nutzenfunktionen unter welchen die Ruinwahrscheinlichkeit bei Null liegt. Jedoch kann der Ruin für das hier betrachtete Modell nicht mit Wahrscheinlichkeit Eins vermieden werden (da Y_t eine Brownsche Bewegung ist). Somit ist dieses Argument hier nicht von Bedeutung.

Bemerkung: Hailang Yang und Lihang Zhang haben sich in ihrer Arbeit (siehe [17]) auch mit der Maximierung des exponentiellen Nutzens unter einem fixen Endzeitpunkt befasst. Im Gegensatz zu dem gerade vorgestellten Modell betrachten sie zwei Assets, ein risikoloses Asset und ein risikoreiches Asset. In diesem Modell ist die investierte Geldmenge in dem risikoreichen Asset unabhängig vom Vermögenslevel. Diese Tatsache lässt sich darauf zurückführen, dass die exponentielle Nutzenfunktion eine konstante absolute Risikoaversion aufweist. Falls Ansprüche vorhanden sind, welche vom Versicherer erfüllt werden müssen und die Nutzenfunktion exponentiell ist, so ist die investierte Geldmenge in dem risikoreichen Asset unabhängig vom Vermögen des Investors, wenn nur ein risikoreiches und ein risikoloses Asset am Markt zur Verfügung stehen. Des Weiteren wurde in diesem Paper auch die Problematik des generellen optimalen Kontrollproblems und der Maximierung der Überlebenswahrscheinlichkeit für ein Versicherungsunternehmen behandelt.

Ferguson [16] hat unter der Annahme eines normalen Investors ($\alpha = \beta = 0$) und eines zeitdiskreten Modells herausgefunden, dass die optimale Strategie die Investition einer fixen Konstanten ist, falls man an der Maximierung des Nutzens eines Endvermögens unter einer exponentiellen Nutzenfunktion wie $l(x) = -e^{-\theta x}$ [16, S. 180-181] interessiert ist. Es wurde vermutet, dass sich eine solche Strategie allgemein asymptotisch optimal verhält für das Kriterium der Maximierung der Überlebenswahrscheinlichkeit bzw. bei der Minimierung der Ruinwahrscheinlichkeit für einen Wert von θ .

Kapitel 5

Das CEV-Modell ¹

Das Modell der konstanten Elastizität der Varianz, oder auch als CEV-Modell (Constant Elasticity of Variance-Model) bezeichnet, stellt eine optimale Alternative zum Black-Scholes-Modell dar. In diesem Diffusions Modell geht man davon aus, dass der risikoneutrale Prozess für den Aktienkurs der stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t^\alpha dW_t \quad (5.1)$$

folgt, wobei r den risikolosen Zinssatz bezeichnet, q die Dividendenrate, W eine Brownsche Bewegung, σ einen Volatilitätsparameter und α eine positive Konstante ². Die Volatilität des Aktienkurses ist gegeben durch $\sigma S_t^{\alpha-1}$, welche vom Aktienpreis S_t abhängt.

Somit ergeben sich für die Konstante α die folgenden drei Fälle.

- Für $\alpha < 1$ steigt die Volatilität mit sinkendem Aktienkurs. Somit ergibt sich eine ähnliche Wahrscheinlichkeitsverteilung wie für Aktien mit mehr Wahrscheinlichkeitsmasse im linken Rand der Verteilung und weniger Wahrscheinlichkeitsmasse im rechten Rand.
- Für $\alpha > 1$ steigt die Volatilität mit steigendem Aktienkurs und man erhält eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit mehr Wahrscheinlichkeitsmasse im rechten Rand der Verteilung und weniger Wahrscheinlichkeitsmasse im linken Rand.
- Für $\alpha = 1$ entspricht das CEV-Modell der Annahme eines GBM-Modell (geometrische Brownsche Bewegung).

Dies stimmt mit einem Volatility Smile überein, bei dem die implizite Volatilität eine steigende Funktion des Aktienkurses ist. Somit modifiziert das CEV-Modell die Volatilität durch eine zum Aktienkurs inverse Funktion. Daher trägt das CEV-Modell zur empirisch belegten negativen Korrelation zwischen Aktienkurs und Volatilität bei. Entsprechend kann das CEV-Modell

¹Vgl. [21], S. 675 f

²Siehe [22], S. 145 ff

in die Klasse der stochastischen Volatilitätsmodelle aufgenommen werden, wobei in diesem Fall die Volatilität eine deterministische Funktion der Zufallsvariable S_t ist.

Im Gegensatz zur geometrischen Brownschen Bewegung, kann auch eine negative Lösung der stochastischen Differentialgleichung (5.1) auftreten, sofern keine Einschränkungen erfolgen. Für den Preisprozess einer Aktie ist dies jedoch inakzeptabel, sodass eine absorbierende Barriere bei Null gefordert werden muss. Falls $S_t = 0$ sollte $S_u = 0$ für alle $u > t$ gelten. Es sei bemerkt, dass eine reflektierende Barriere bei Null nicht ausreicht, denn falls der Aktienkurs eines Unternehmens auf Null fällt, so führt dies zum Bankrott der Firma und der Aktienpreis kann nicht mehr positiv werden. Die absorbierende Barriere bietet eine Möglichkeit dieses Problem zu überwinden, da diese übereinstimmt mit dem Konkurs eines Unternehmens.

Kapitel 6

Optimale Investitions- Rückversicherungsstrategie für ein Jump-Diffusion Risikomodell

6.1 Modellbildung

Ausgehend von einem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ wird in diesem Modell vorausgesetzt, dass kontinuierliches Handeln erlaubt ist. Die verfügbare Information zum Zeitpunkt t wird modelliert durch die vollständige Filtration $\{F_t\}$, welche vom Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ generiert wird. Die Investitions-Rückversicherungsstrategie (A, q) sei $\mathcal{F}$ -vorhersehbar und erfülle die Bedingung $\mathbb{E}[\int_0^T A_s^2 S_s^{2\beta} ds] < \infty$ für alle $T < \infty$. Solche Strategien werden als zulässig bezeichnet und die Menge aller zulässigen Strategien sei gegeben durch Π . Weiters bezeichne $C^{1,2}$ den Raum der Funktionen $\phi(t, x, s)$, sodass ϕ und die partiellen Ableitungen $\phi_t, \phi_x, \phi_{xx}, \phi_{xs}, \phi_s$ und ϕ_{ss} stetig sind auf $[0, T] \times R \times R$. Die folgende Modellbildung erfolgt analog zu [24].

In einem klassischen Jump-Diffusion Risikomodell (siehe zum Beispiel [23]) ist der Reserve- bzw. Surplusprozess gegeben durch

$$dX_t = cdt - dC_t + \sigma_0 dB_t,$$

wobei c die Prämienrate bezeichnet, C_t die aggregierten Schäden zum Zeitpunkt t , $\sigma_0 \geq 0$ eine Konstante und $(B_t)_{t \geq 0}$ eine standard Brownsche Bewegung. Es sei angenommen, dass $C_t = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ ein Compound Poisson Prozess ist mit homogenem Poisson Prozess $(N(t))_{t \geq 0}$ und Intensität λ . Des Weiteren sei $(Y_i)_{i \geq 1}$ eine Folge von positiven unabhängigen ident verteilten Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung $F(y)$ und Mittelwert $\mathbb{E}[Y_i] = \mu$. Die momentenerzeugende Funktion von Y_i ist gegeben durch $M_Y(r) = \mathbb{E}[e^{rY_i}]$. Es wird vorausgesetzt, dass die Schadenanzahl $N(t)$ unabhängig ist von der Schadenhöhe Y_i , $i \geq 0$. Der Diffusionsterm $\sigma_0 dB_t$

beschreibt die zusätzlichen Kleinschäden, welche für die Unsicherheit verbunden mit dem Versicherungsmarkt oder dem wirtschaftlichen Umfeld stehen. Es wird zusätzlich angenommen, dass $\mathbb{E}[Ye^{rY}] = M'_Y(r)$ existiert für $0 < r < \zeta$ und $\lim_{r \rightarrow \zeta} \mathbb{E}[Ye^{rY}] = \infty$ für einige $0 < \zeta \leq +\infty$. Außerdem sei die Cramer-Lundberg Gleichung (siehe [12]) erfüllt.

Als wirksames Instrument zur Risikoreduzierung sei dem Versicherungsunternehmen die Rückversicherung eines Bruchteils der Schäden mit der Eigenbehaltsquote $q \in [0, 1]$ erlaubt. Somit ist der Versicherer an einem Schaden der Höhe Y_i mit qY_i beteiligt und der Rückversicherer übernimmt dementsprechend $(1 - q)Y_i$ des Schadens. Weiters sei $\delta(q)$ die Prämie des Rückversicherers für die Aufrechterhaltung des Versicherungsschutzes. Die verbleibende Prämie für den Versicherer ist nun gegeben durch $c - \delta(q)$. In diesem Modell wird angenommen, dass der Versicherer eine dynamische Strategie $q = (q_t)_{t \geq 0}$ wählen kann und dies führt zur kontinuierlichen Anpassung der Eigenbehaltsquote. Des Weiteren wird vorausgesetzt, dass die Rückversicherungsprämie $\delta(q)$ in Abhängigkeit vom Erwartungswert-Prinzip

$$\delta(q) = (1 + \eta)(1 - q)\lambda\mu$$

kalkuliert wird, wobei $\eta > 0$ der Sicherheitszuschlag des Rückversicherers ist. $\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$ entspricht hingegen dem Sicherheitszuschlag des Versicherers. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass $\eta > \theta$ gilt. Damit die Nettogewinnbedingung $c - (1 + \eta)(1 - q)\lambda\mu - q\lambda\mu \geq 0$ erfüllt ist, wird vorausgesetzt, dass

$$q \geq \bar{q} := 1 - \frac{\theta}{\eta}$$

gilt.

Zusätzlich zur Rückversicherung ist es für den Versicherer möglich, das gesamte Surplus in den Finanzmarkt, bestehend aus einem risikolosen Asset (Bond oder Bankkonto) und einem risikoreichen Asset (Aktie oder Investmentfond), zu investieren. Der Preisprozess eines risikofreien Assets ist gegeben durch

$$dR_t = rR_t dt,$$

wobei $r > 0$ die risikofreie Zinsrate ist. Ein häufig verwendetes Modell für den Aktienpreisprozess ist die geometrische Brownsche Bewegung, sodass der Aktienpreisprozess $(S_t)_{t \geq 0}$ die folgende stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = aS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

erfüllt, in welcher $a > r$ und σ positive Konstanten bezeichnen. Diese repräsentieren die erwartete sofortige Rendite des risikoreichen Assets, die Volatilität des risikoreichen Assetpreises und des Weiteren sei $(W_t)_{t \geq 0}$ eine standard Brownsche Bewegung.

In diesem Kapitel wird der CEV Aktienpreisprozess betrachtet, in welchem die Volatilität stochastisch anstatt konstant modelliert wird. Somit folgt der CEV Aktienpreisprozess der stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t = S_t(ad t + \sigma S_t^\beta dW_t),$$

wohingegen β ein konstanter Parameter ist, für welchen die Bedingung $\beta < 0$ gilt. In diesem Modell ist die momentane Volatilität des risikoreichen Assetpreises gegeben durch σS_t^β .

Es bezeichne A_t die totale Geldmenge, welche zum Zeitpunkt t in das risikoreiche Asset unter der Investitionsstrategie A investiert wird. Den Annahmen von Browne in [11] folgend, sei $A_t < 0$ oder auch $A_t > X_t$ erlaubt. Somit ist der Versicherer zu einem Leerverkauf des risikoreichen Assets ($A_t < 0$) befugt als auch zur Entlehnung von Geld um in das risikoreiche Asset ($A_t > X_t$) zu investieren. Des Weiteren sei $(X_t)_{t \geq 0}$ der Surplus Prozess, sodass X_t das Vermögen des Versicherers zum Zeitpunkt t beschreibt, falls die Investitionsstrategie A und die Rückversicherungsstrategie q angenommen werden. Da jede Geldmenge, welche nicht in das risikoreiche Asset investiert wird, im risikolosen Asset gehalten wird, entwickelt sich der Surplusprozess zu

$$\begin{aligned} dX_t &= A_t \frac{dS_t}{S_t} + (X_t - A_t) \frac{dR_t}{R_t} + (c - \delta(q_t))dt - q_t dC_t + q_t \sigma_0 dB_t \\ &= \left(rX_t + (a - r)A_t + (\theta - \eta + (1 + \theta)q_t)\lambda\mu \right)dt + A_t \sigma S_t^\beta dW_t - q_t dC_t + q_t \sigma_0 dB_t. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Zur Vereinfachung sei angenommen, dass die beiden standard Brownschen Bewegungen $(B_t)_{t \geq 0}$ und $(W_t)_{t \geq 0}$ unabhängig sind.

Bemerkung: Wie schon im CEV-Modell in Kapitel 5 angeführt, reduziert sich der Preisprozess des risikoreichen Assets zu einer geometrischen Brownschen Bewegung falls $\beta = 0$ ist. Falls $\beta < 0$, so wächst die momentane Volatilität $\sigma_t = \sigma S_t^\beta$ mit fallendem Aktienpreis und es wird eine Verteilung mit schweren linken Enden generiert. Falls jedoch $\beta > 0$, so ist die Situation umgekehrt und wird unrealistisch für das Modell.

Nun sei angenommen, dass der Versicherer an der Maximierung des erwarteten Nutzens seines Endvermögens zum Zeitpunkt T interessiert ist. Wie üblich wird von der Nutzenfunktion l verlangt, dass diese monoton wachsend ($l' > 0$) und konkav ($l'' < 0$) ist. Das Problem kann nun folgendermaßen formuliert werden

$$\max_{(A,q) \in \Pi} \mathbb{E}[l(X_T)], \quad (6.2)$$

wobei

$$\begin{aligned} dX_t &= A_t \frac{dS_t}{S_t} + (X_t - A_t) \frac{dR_t}{R_t} + (c - \delta(q_t))dt - q_t dC_t + q_t \sigma_0 dB_t \\ dS_t &= S_t(adt + \sigma S_t^\beta dW_t). \end{aligned}$$

Des Weiteren wird angenommen, dass dem Modell die exponentielle Nutzenfunktion

$$l(x) = -\frac{1}{\nu} e^{-\nu x}$$

zu Grunde liegt für $\nu > 0$. Diese Nutzenfunktion weist einen konstanten absoluten Risikoparamter ν (vom Typ CARA) auf.

Die zugehörige Wertfunktion ist gegeben durch

$$V(t, x, s) = \max_{(A, q) \in \Pi} \mathbb{E}[l(X_t) | (X_t, S_t) = (x, s)]. \quad (6.3)$$

Aus Kapitel 3.2 geht hervor, falls die Wertfunktion $V(t, x, s) \in C^{1,2}$, so erfüllt diese die Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung

$$\sup_{(A, q) \in R \times [\bar{q}, 1]} \mathcal{L}^{A, q} V(t, x, s) = 0, \quad t < T \quad (6.4)$$

mit der Nebenbedingung

$$V(T, x, s) = l(x). \quad (6.5)$$

$\mathcal{L}^{A, q}$ bezeichnet den Generator des Surplus Prozesses, welcher von den Kontrollvariablen (A, q) kontrolliert wird. Nach Anwendung der Itô-Formel auf die Wertfunktion erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{A, q} V(t, x, s) &= V_t + \left(rx + (a - r)A + (\theta - \eta + (1 + \eta)q)\lambda\mu \right) V_x + asV_s \\ &\quad + \frac{1}{2} (A^2 \sigma^2 s^{2\beta} + q^2 \sigma_0^2) V_{xx} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2\beta+2} V_{ss} \\ &\quad + \sigma^2 As2\beta + 1V_{xs} + \lambda \mathbb{E}[V(t, x - qY, s) - V(t, x, s)]. \end{aligned}$$

Wird das Verifikationstheorem aus Kapitel 3.3 auf dieses Modell angewendet, ergibt sich folgendes Theorem.

Theorem 6.1.1 *Sei $W \in C^{1,2}$ eine klassische Lösung von (6.4), welche auch (6.5) erfüllt. Somit stimmt die Wertfunktion $V(t, x, s)$ aus (6.3) mit W überein. Weiters sei $(A^*, q^*) \in R \times [\bar{q}, 1]$, sodass die Gleichung*

$$\mathcal{L}^{A^*, q^*} V(t, x, s) = 0$$

für alle $(t, x, s) \in [0, T) \times R \times R$ erfüllt ist. Entsprechend ist die Strategie

$$(A^*(t, X_t^*, S_t), q^*(t, X_t^*, S_t))$$

für das Problem in (6.2) optimal mit $\mathbb{E}[l(X_T^*)|(X_t^*, S_t) = (x, s)] = V(t, x, s)$ und $(X_t^*)_{t \geq 0}$ bezeichnet den Reserve- bzw. Surplusprozess unter dieser optimalen Strategie.

6.2 Optimales Resultat

In diesem Unterkapitel wird die Lösung des Optimierungsproblems in (6.2) durch die Verwendung des Verifikationstheorems 6.1.1 behandelt. Analog zu [11] wird die Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung (6.4) gelöst mittels eines Ansatzes von der Form

$$V(t, x, s) = -\frac{1}{\nu} \exp\{-\nu x e^{r(T-t)} + g(t, s)\}, \quad (6.6)$$

wobei $g(t, s)$ eine geeignete Funktion ist, sodass der Lösungsansatz (6.6) eine Lösung der Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung (6.4) ist. Die Nebenbedingung $V(T, x, s) = l(x)$ impliziert

$$g(T, s) = 0. \quad (6.7)$$

Es seien g_t , g_s und g_{ss} die partiellen Ableitungen von $g(t, s)$. Aus (6.6) erhält man die entsprechenden partiellen Ableitungen

$$\left\{ \begin{array}{l} V_t = V(t, x, s)(\nu x r e^{r(T-t)} + g_t), \\ V_x = V(t, x, s)(-\nu e^{r(T-t)}), \\ V_s = V(t, x, s)g_s, \\ V_{xx} = V(t, x, s)(\nu^2 e^{2r(T-t)}), \\ V_{ss} = V(t, x, s)(g_s^2 + g_{ss}), \\ V_{xs} = V_{sx} = V(t, x, s)(-\nu e^{r(T-t)}g_s), \\ \mathbb{E}[V(t, x - qY, s) - V(t, x, s)] = V(t, x, s)(M_Y(\nu q e^{r(T-t)}) - 1). \end{array} \right. \quad (6.8)$$

Diese partiellen Ableitungen aus (6.8) substituiert in die Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung (6.4) ergeben

$$\begin{aligned} 0 = & g_t + (\eta - \theta)\lambda\mu\nu e^{r(T-t)} + a s g_s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^{2\beta+2}(g_s^2 + g_{ss}) - \lambda \\ & + \inf_A \{f_1(A, t)\} + \inf_q \{f_2(q, t)\}, \end{aligned} \quad t < T \quad (6.9)$$

wobei

$$f_1(A, t) = -(a - r)A\nu e^{r(T-t)} + \frac{1}{2}A^2\sigma^2 s^{2\beta}\nu^2 e^{2r(T-t)} - A\sigma^2 s^{2\beta+1}\nu e^{r(T-t)}g_s \quad (6.10)$$

und

$$f_2(q, t) = -q(1 + \eta)\lambda\mu\nu e^{r(T-t)} + \lambda M_Y(\nu q e^{r(T-t)}) + \frac{1}{2}q^2\sigma_0^2\nu^2 e^{2r(T-t)}. \quad (6.11)$$

Die Ableitung von $f_1(A, t)$ nach A liefert den Minimierer

$$A_t^* = \left(\frac{a-r}{\sigma^2 s^{2\beta}} + s g_s \right) \frac{1}{\nu} e^{-r(T-t)} \quad (6.12)$$

und entsprechend ist der Minimumwert gegeben durch

$$f_1(A_t^*, t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{a-r}{\sigma s^\beta} + \sigma s^{\beta+1} g_s \right)^2.$$

Ähnlich kann durch das Differenzieren von $f_2(q, t)$ bezüglich q gezeigt werden, dass f_2 konvex in q ist und der Minimierer $q_1(t)$ die folgende Gleichung erfüllt

$$\lambda(1+\eta)\mu - \sigma_0^2 n = \lambda M_Y'(n), \quad (6.13)$$

wobei $n = \nu q e^{r(T-t)}$ und $M_Y'(\nu q e^{r(T-t)}) = \mathbb{E}[Y e^{\nu q e^{r(T-t)} Y}]$ gilt. Da (6.13) eine Gleichung für n darstellt, ergibt sich das folgende Lemma.

Lemma 6.2.1 *Die Gleichung (6.13) hat eine eindeutige positive Lösung ρ .*

Für einen Beweis sei auf [24] verwiesen.

Aus diesem Lemma folgt, dass $\nu q_1(t) e^{r(T-t)} = \rho$ gilt und somit

$$q_1(t) = \frac{\rho}{\nu} e^{-r(T-t)}. \quad (6.14)$$

Die Variable ρ ist eine Konstante, welche nur abhängig ist vom Sicherheitszuschlag η , der Schadenshöhenverteilung und dem Parameter σ_0 .

Da für die Eigenbehaltsquote gilt $q \in [\bar{q}, 1]$, werden für die optimale Rückversicherungsstrategie die folgenden drei Fälle betrachtet.

- **Fall 1:** $\eta \leq \frac{\sigma_0^2 \nu}{\lambda \mu}$ oder $\eta > \frac{\sigma_0^2 \nu}{\lambda \mu}$ und $\rho \leq \nu$.

In diesem Fall ist $\frac{\rho}{\nu} \leq 1$ und somit $q_1(t) \leq 1$ für alle $t \in [0, T]$. Sei $t_0 = T - \frac{1}{r} \ln \left((1 - \frac{\theta}{\eta}) \frac{\nu}{\rho} \right)$, so ist die optimale Rückversicherungsstrategie gegeben durch

$$q_t^* = \begin{cases} 1 - \frac{\theta}{\eta}, & 0 \leq t < t_0, \\ \frac{\rho}{\nu} e^{-r(T-t)}, & t_0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (6.15)$$

- **Fall 2:** $\eta > \frac{\sigma_0^2 \nu}{\lambda \mu}$ und $\nu < \rho < \nu e^{rT}$.

Sei $t_1 = T - \frac{1}{r} \ln \frac{\rho}{\nu}$. Daraus folgt $\frac{\rho}{\nu} > 1$ und daher $q_1(t) < 1$ für $t \in [0, t_1)$ bzw. $q_1(t) \geq 1$ für $t \in [t_1, T]$. Wobei nun die optimale Rückversicherungsstrategie gegeben ist durch

$$q_t^* = \begin{cases} 1 - \frac{\theta}{\eta}, & 0 \leq t < t_0, \\ \frac{\rho}{\nu} e^{-r(T-t)}, & t_0 \leq t < t_1, \\ 1, & t_1 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (6.16)$$

- **Fall 3:** $\eta > \frac{\sigma_0^2 \nu}{\lambda \mu}$ und $\rho \geq \nu e^{rT}$.

In diesem Fall erhält man $q_1(t) \geq e^{rt} \geq 1$ für alle $t \in [0, T]$ und daher $q_t^* \equiv 1$.

Bemerkung:

- Falls $\frac{\rho}{\nu} e^{-rT} \geq 1$, so gilt $\bar{q} < \frac{\rho}{\nu} e^{-rT}$ für alle $t \in [0, T]$, welches eine triviale Nettogewinnbedingung impliziert.
- Falls $\frac{\rho}{\nu} e^{-rT} < 1$ und $\bar{q} > \frac{\rho}{\nu}$, so folgt $\bar{q} > q_1(t)$ für alle $t \in [0, T]$ und somit $q_t^* \equiv \bar{q}$.
- Falls $\frac{\rho}{\nu} e^{-rT} < 1$ und $\frac{\rho}{\nu} e^{-rT} \leq \bar{q} \leq \frac{\rho}{\nu}$, so existiert ein t_0 , sodass gilt $q_1(t_0) = \bar{q}$. Deswegen wurde in den Fällen 2 und 3 angenommen, dass die Bedingung $\frac{\rho}{\nu} e^{-rT} \leq \bar{q} \leq \frac{\rho}{\nu}$ gilt.

Nachdem nun die optimale Rückversicherungsstrategie bestimmt ist, ist der Wert von $f_2(q, t)$ für q_t^* gegeben durch

$$f_2(q_t^*, t) = \begin{cases} -\bar{q}(1 + \eta)\lambda\mu m + \lambda M_Y(\bar{q}m) + \frac{1}{2}\bar{q}^2\sigma_0^2 m^2, & q_t^* = \bar{q}, \\ -(1 + \eta)\lambda\mu\rho + \lambda M_Y(\rho) + \frac{1}{2}\sigma_0^2\rho^2, & q_t^* = q_1(t), \\ -(1 + \eta)\lambda\mu m + \lambda M_Y(m) + \frac{1}{2}\sigma_0^2 m^2, & q_t^* = 1, \end{cases} \quad (6.17)$$

wobei $m = \nu e^{-r(T-t)}$. $f_1(A_t^*, t)$ und $f_2(q_t^*, t)$ eingesetzt in die beiden Infima der Gleichung (6.9) ergeben die folgende Differentialgleichung

$$g_t + srg_s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^{2\beta+2} g_{ss} - \frac{(a-r)^2}{2\sigma^2} s^{-2\beta} + M_t = 0, \quad (6.18)$$

wobei

$$M_t = (\eta - \theta)\lambda\mu\nu e^{r(T-t)} - \lambda + f_2(q_t^*, t).$$

Analog zu [25] wird die Gleichung (6.18) gelöst durch Definition einer neuen Funktion $h(t, y) := g(t, s)$ mit $y = s^{-2\beta}$. Durch die Verwendung dieser Transformation ändert sich die Gleichung (6.18) zu

$$h_t - 2r\beta y h_y + 2\sigma^2 \beta^2 y h_{yy} + \sigma^2 \beta(2\beta + 1) h_y - \frac{(a-r)^2}{2\sigma^2} y + M_t = 0. \quad (6.19)$$

Somit ist der Lösungsansatz (6.6) eine Lösung der Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung (6.4) falls $h(t, y)$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (6.19) mit der Nebenbedingung $h(T, y) = 0$ ist.

Um diese Gleichung für h zu lösen, wird analog zu [24] von einer Lösung der Form

$$h(t, y) = J(t)y + K(t) \quad (6.20)$$

ausgegangen und die Nebenbedingung $h(T, y) = 0$ impliziert $J(T) = 0$ und $K(T) = 0$. Durch die Substitution von (6.20) in die partielle Differentialgleichung (6.19) ergibt sich

$$J'(t)y + K'(t) - 2r\beta y J(t) + \sigma^2 \beta(2\beta + 1) J(t) - \frac{(a-r)^2}{2\sigma^2} y + M_t = 0.$$

Durch Koeffizientenanpassung erhält man

$$\begin{cases} J'(t) - 2r\beta J(t) - \frac{(a-r)^2}{2\sigma^2} = 0, \\ K'(t) + \sigma^2\beta(2\beta+1)J(t) + M_t = 0. \end{cases}$$

Falls eine Lösung von

$$\begin{cases} J'(t) - 2r\beta J(t) - \frac{(a-r)^2}{2\sigma^2} = 0, \\ J(T) = 0, \end{cases} \quad (6.21)$$

und eine Lösung von

$$\begin{cases} K'(t) + \sigma^2\beta(2\beta+1)J(t) + M_t = 0, \\ K(T) = 0, \end{cases} \quad (6.22)$$

existiert, so ist (6.20) eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (6.19). Die Lösung der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung (6.21) ist gegeben durch

$$J(t) = \frac{(a-r)^2}{4r\beta\sigma^2}(e^{-2r\beta(T-t)} - 1). \quad (6.23)$$

Aus (6.22) erhält man

$$\begin{aligned} K(t) &= \int_t^T \sigma^2\beta(2\beta+1)J(u) + M_u du \\ &= \int_t^T \frac{(a-r)^2(2\beta+1)}{4r}(e^{-2r\beta(T-u)} - 1) + (\eta - \theta)\lambda\mu\nu e^{r(T-u)} - \lambda + f_2(q_u^*, u) du \\ &= L(t) + \int_t^T f_2(q_u^*, u) du, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} L(t) &= L(t) = \frac{(a-r)^2(2\beta+1)}{8r^2\beta} \left(1 - e^{-2r\beta(T-t)}\right) \\ &\quad + \frac{1}{r}(\eta - \theta)\lambda\mu\nu(e^{r(T-t)} - 1) - \left(\frac{(a-r)^2(2\beta+1)}{4r} + \lambda\right)(T-t), \end{aligned} \quad (6.24)$$

und

$$\int_t^T f_2(q_u^*, u) du = \begin{cases} N_1(t), & q_t^* = \bar{q}, \\ N_2(t), & q_t^* = q_1(t), \\ N_3(t), & q_t^* = 1, \end{cases}$$

mit

$$\begin{cases} N_1(t) &= -\frac{1}{r}\bar{q}(1+\eta)\lambda\mu\nu(e^{r(T-t)} - 1) + \lambda \int_0^{T-t} M_Y(\nu\bar{q}e^{ru}) du \\ &\quad + \frac{1}{4r}\bar{q}^2\sigma_0^2\nu^2(e^{2r(T-t)} - 1), \\ N_2(t) &= (\lambda M_Y(\rho) - (1+\eta)\lambda\mu\rho + \frac{1}{2}\sigma_0^2\rho^2)(T-t), \\ N_3(t) &= \frac{1}{r}(1+\eta)\lambda\mu\nu(e^{r(T-t)} - 1) + \lambda \int_0^{T-t} M_Y(\nu e^{ru}) du \\ &\quad + \frac{1}{4r}\sigma_0^2\nu^2(e^{2r(T-t)} - 1). \end{cases} \quad (6.25)$$

Zusammengefasst hat man nun die folgenden Resultate.

Lemma 6.2.2 *Die Lösung der partiellen Differentialgleichung (6.18) mit der Nebenbedingung (6.7) ist gegeben durch*

$$g(t, s) = J(t)s^{-2\beta} + K(t),$$

wobei $J(t)$ in (6.23) gegeben ist und für $K(t)$ gilt

$$K(t) = \begin{cases} L(t) + N_1(t), & q_t^* = \bar{q}, \\ L(t) + N_2(t), & q_t^* = q_1(t), \\ L(t) + N_3(t), & q_t^* = 1, \end{cases}$$

mit $L(t)$ und $N_i(t)$ für $i = 1, 2, 3$ entsprechend definiert in (6.24) und (6.25).

Nun fehlt nur noch die optimale Investitions-Rückversicherungsstrategie für das Jump-Diffusion Risikomodell, welche sich aber aufgrund der bereits vorhandenen Resultate einfach herleiten lässt.

Theorem 6.2.3 *Es sei angenommen, dass ρ die eindeutige positive Lösung der Gleichung (6.13) ist. Definiere*

$$\begin{cases} g_1(t, s) &= J(t)s^{-2\beta} + L(t) + N_1(t), \\ g_2(t, s) &= J(t)s^{-2\beta} + L(t) + N_2(t), \\ g_3(t, s) &= J(t)s^{-2\beta} + L(t) + N_3(t), \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} k_1 &= g_2(t_0, s) - g_1(t_0, s), \\ k_3 &= g_3(t_1, s) - g_2(t_1, s), \\ k_2 &= g_2(t_0, s) + k_3 - g_1(t_0, s) = k_1 + k_3, \end{cases}$$

wobei $J(t)$, $L(t)$ und $N_i(t)$ für $i = 1, 2, 3$ in (6.23), (6.24) und (6.25) gegeben sind. Sei $t_0 = T - \frac{1}{r} \ln\left((1 - \frac{\theta}{\eta}) \frac{\nu}{\rho}\right)$ und $t_1 = T - \frac{1}{r} \ln(\frac{\rho}{\nu})$.

Somit ist die **optimale Investitionsstrategie** für das Rückversicherungs-Investitionsproblem (6.2) gegeben durch

$$A_t^* = \left(\frac{a-r}{\sigma^2} - 2\beta J(t) \right) s^{-2\beta} \cdot \frac{1}{\nu} e^{-r(T-t)},$$

oder äquivalent

$$A_t^* = \left(1 - \frac{a-r}{2r} (e^{-2r\beta(T-t)} - 1) \right) s^{-2\beta} \cdot \frac{a-r}{\sigma^2 \nu} e^{-r(T-t)}, \quad (6.26)$$

für alle $t \in [0, T]$.

Für die **optimale Rückversicherungsstrategie** ergeben sich die folgenden drei Fälle.

- **Fall 1:** Falls $\eta \leq \frac{\sigma_0^2 \nu}{\lambda_\mu}$ oder $\eta > \frac{\sigma_0^2 \nu}{\lambda_\mu}$ und $\rho \leq \nu$,

so ist die optimale Rückversicherungsstrategie gegeben durch

$$q_t^* = \begin{cases} 1 - \frac{\theta}{\eta}, & 0 \leq t < t_0, \\ \frac{\rho}{\nu} e^{-r(T-t)}, & t_0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

und die entsprechende Wertfunktion ist

$$V(t, x, s) = \begin{cases} -\frac{1}{\nu} \exp\{-\nu x e^{r(T-t)} + g_1(t, s) + k_1\}, & t \in [0, t_0), \\ -\frac{1}{\nu} \exp\{-\nu x e^{r(T-t)} + g_2(t, s)\}, & t \in [t_0, T]. \end{cases}$$

- **Fall 2:** Falls $\eta > \frac{\sigma_0^2 \nu}{\lambda \mu}$ und $\nu < \rho < \nu e^{rT}$,
so ist die optimale Rückversicherungsstrategie gegeben durch

$$q_t^* = \begin{cases} 1 - \frac{\theta}{\eta}, & 0 \leq t < t_0, \\ \frac{\rho}{\nu} e^{-r(T-t)}, & t_0 \leq t < t_1, \\ 1, & t_1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Entsprechend erhält man als Wertfunktion

$$V(t, x, s) = \begin{cases} -\frac{1}{\nu} \exp\{-\nu x e^{r(T-t)} + g_1(t, s) + k_2\}, & t \in [0, t_0), \\ -\frac{1}{\nu} \exp\{-\nu x e^{r(T-t)} + g_2(t, s) + k_3\}, & t \in [t_0, t_1), \\ -\frac{1}{\nu} \exp\{-\nu x e^{r(T-t)} + g_3(t, s)\}, & t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

- **Fall 3:** Falls $\eta > \frac{\sigma_0^2 \nu}{\lambda \mu}$ und $\rho \geq \nu e^{rT}$,
so ist die optimale Rückversicherungsstrategie gegeben durch

$$q_t^* \equiv 1,$$

und die entsprechende Wertfunktion ist

$$V(t, x, s) = -\frac{1}{\nu} \exp\{-\nu x e^{r(T-t)} + g_3(t, s)\}, \quad t \in [0, T].$$

Um zu sehen, dass $V(t, x, s) \in C^{1,2}$, betrachte man folgende Bemerkung.

Bemerkung: Da

$$\begin{cases} g_1(t_0, s) + k_1 &= g_2(t_0, s), \\ g_1(t_0, s) + k_2 &= g_2(t_0, s) + k_3, \\ g_2(t_0, s) + k_3 &= g_3(t_1, s), \end{cases}$$

ist $V(t, x, s)$ eine konstante Funktion für alle $(t, x, s) \in [0, T] \times R \times R$. Außerdem gilt

$$\begin{cases} g_1'(t_0, s) &= J'(t_0) s^{-2\beta} + L'(t_0) + (1 + \eta) \lambda \mu \rho - \lambda M_Y(\rho) - \frac{1}{2} \sigma_0^2 \rho^2 &= g_2'(t_0, s), \\ g_2'(t_1, s) &= J'(t_1) s^{-2\beta} + L'(t_1) + (1 + \eta) \lambda \mu \rho - \lambda M_Y(\rho) - \frac{1}{2} \sigma_0^2 \rho^2 &= g_3'(t_1, s), \end{cases}$$

wobei $g'_i(t, s)$ die erste Ableitung von $g_i(t, s)$ bezüglich t ist. In (6.8) wurde $V(t, x, s) \in C^{1,2}$ gewählt, somit ist diese eine klassische Lösung der Hamilton-Jakobi-Bellman Gleichung (6.4).

In der folgenden Bemerkung wird das Verhalten der optimalen Investitionsstrategie für verschiedene Fälle studiert.

Bemerkung: Sei $g(t) = e^{-2r\beta(T-t)}$, $0 \leq t \leq T$. Dann ist $g(T) = 1 < g(t) < g(0) = e^{-2r\beta T}$ für alle $t \in (0, T)$. Aus der Investitionsstrategie A_t^* in (6.26) ergeben sich folgende zwei Fälle.

- **Fall 1:** Falls $g(0) < 1 + \frac{2r}{a-r}$, so ist $A_t^* > 0$ für alle $t \in [0, T]$.
- **Fall 2:** Falls $g(0) > 1 + \frac{2r}{a-r}$, so existiert ein $t_0 \in [0, T]$, sodass $g(t_0) = 1 + \frac{2r}{a-r}$.
 Wenn $0 \leq t < t_0$, so gilt $g(t) > g(t_0)$ und somit $A_t^* < 0$.
 Falls jedoch $t_0 < t \leq T$, so erhält man $g(t) < g(t_0)$ und dadurch $A_t^* > 0$.
 Entsprechend bei $t = t_0$ ergibt sich $g(t) = g(t_0)$ und daher $A_t^* = 0$.

6.3 Numerische Analyse

Durch eine numerische Analyse erhält man, dass die Lösung der Gleichung (6.13) in Abhängigkeit von η wächst. Dies bedeutet, dass eine teurere Rückversicherungsprämie zu einer höheren optimalen Eigenbehaltsquote führt. Des Weiteren verringert sich die Lösung mit dem Wert von σ_0^2 . Dies ist darauf zurückzuführen, dass eine Verunsicherung hinsichtlich der Schäden zu einem höheren Risikotransfer des Versicherers auf den Rückversicherer führt.

Eine weitere numerische Analyse zeigt, dass die optimale Rückversicherungsstrategie in Abhängigkeit von t wächst. Des Weiteren impliziert ein höherer Wert für η auch einen höheren Wert für q^* . Dies beschreibt die intuitive Beobachtung, dass der Versicherer durch den Kauf eines geringeren Anteils an Rückversicherung einhergehend auch einen höheren Anteil eines jeden Schadens behält falls die Rückversicherungsprämie weniger wird. Wenn $\eta = \theta = 1$, so erhält man $\bar{q} = 0$. Dies bedeutet, dass die Nettogewinnbedingung für jedes $q \in (0, 1]$ erfüllt wird. In diesem Fall wird die optimale Rückversicherungsstrategie q^* im Intervall $(0, 1]$ betrachtet. Mehr dazu siehe [24].

Darauffolgend wird in einem numerischen Beispiel der Effekt verschiedener Modellparameter auf die optimale Investitionsstrategie A_t^* veranschaulicht.

Beispiel: In diesem Beispiel sei angenommen, dass die Schadenhöhe Y_i unabhängig und exponentiell verteilt ist mit dem Parameter $\frac{1}{\mu}$.

Es sei $T = 10$, $r = 0.3$, $\nu = 0.2$ und $\sigma^2 = 1$. Die Resultate sind in den Abbildungen 6.1, 6.2 und 6.3 dargestellt.

In Abbildung 6.1 sei $s = 5$, $a = 0.35$ und A_t^* ist geplottet für $\beta = -0.6, -0.4, -0.2, 0$. Falls $\beta = -0.4, -0.2, 0$ so erhält man

$$g(0) = e^{-2r\beta T} < 1 + \frac{2r}{a-r}$$

und somit $A_t^* > 0$ für alle $t \in [0, 10]$. Wenn $\beta = -0.6$ so ergibt sich entsprechend

$$g(0) = e^{-2r\beta T} > 1 + \frac{2r}{a-r}$$

und es existiert $t_0 = 2.8751$ sodass

$$\begin{cases} A_t^* < 0, & 0 \leq t < 2.8751 \\ A_t^* = 0, & t = 2.8751 \\ A_t^* > 0, & 2.8751 < t \leq 10. \end{cases}$$

Anhand Abbildung 6.1 ist ersichtlich, dass eine größere Investition erwünscht wird, sobald der Zeitpunkt T erreicht wird. Andererseits geht aus der Abbildung 6.1 hervor, dass ein größerer Wert für β (und somit eine höhere Volatilität) nicht unbedingt weniger Investition impliziert, speziell wenn t niedrig ist. Die optimale Investitionsstrategie für das GBM-Modell ($\beta = 0$) ist nicht unbedingt niedriger als jene für das CEV-Modell ($\beta < 0$).

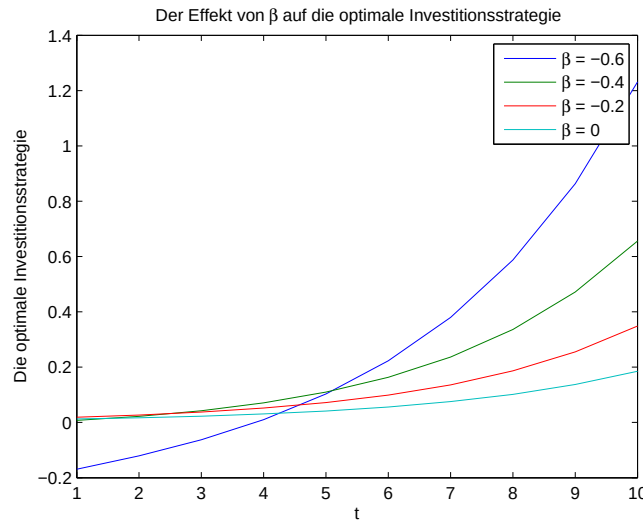


Abbildung 6.1: Der Effekt von β auf die optimale Investitionsstrategie A_t^*

In Abbildung 6.2 sei $\beta = -0.6$, $a = 0.35$ und A_t^* geplottet gegen t für $\sigma s^\beta = 0.2108, 0.3241, 0.5173$. Wie auch in Abbildung 6.1 ist in Abbildung 6.2 ersichtlich, dass eine größere Volatilität σs^β nicht notwendigerweise weniger Investition impliziert.

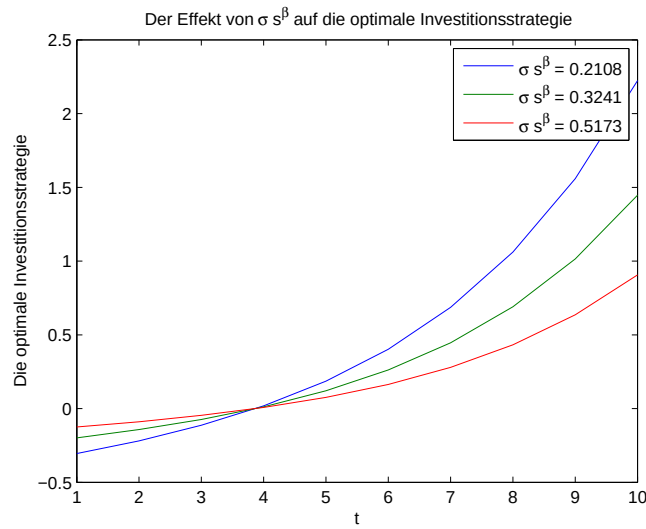


Abbildung 6.2: Der Effekt von σs^β auf die optimale Investitionsstrategie A_t^*

In der Abbildung 6.3 sei $\beta = -0.6$, $s = 5$ und A_t^* geplottet t für $a = 0.35, 0.45, 0.55$. Aus dieser Abbildung geht hervor, dass eine erwartete höhere Rendite a nicht unbedingt mehr Investition voraussetzt.

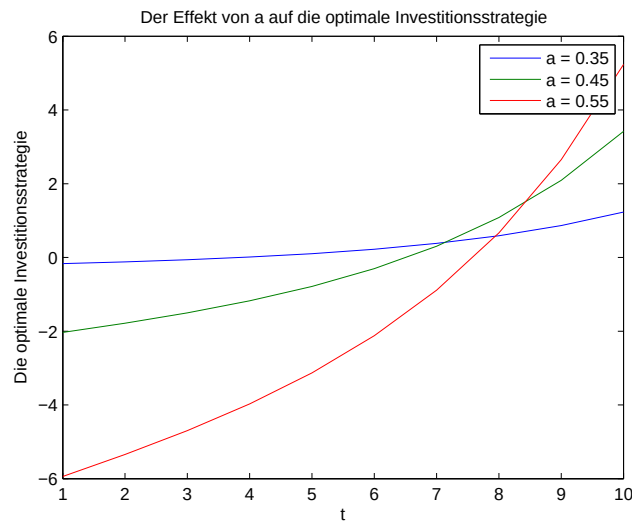


Abbildung 6.3: Der Effekt von a auf die optimale Investitionsstrategie A_t^*

Kapitel 7

Monte Carlo Simulation einer einfachen Strategie im Vergleich zu einer optimalen Strategie

Die Monte Carlo Simulation eines stochastischen Prozesses ist ein Verfahren zur Erzeugung von zufälligen Ergebnissen für den Prozess. In dieser Arbeit wird die Monte Carlo Simulation dafür eingesetzt, um einen besseren Vergleich zwischen einer optimalen und einfachen Strategie zu entwickeln. Des Weiteren ist der Quellcode für die unterschiedlichen Simulationen von Surplus und Zielfunktional bei optimaler bzw. einfacher Strategie im Appendix B angeführt.

7.1 Monte Carlo Simulation einer optimalen Strategie

Angenommen, die erwartete Rendite für eine Aktie beträgt 5% per annum, der anfängliche Aktienkurs liegt bei 100, das anfängliche Vermögen beträgt 100, die Konstante β ist -0.6 und die Standardabweichung der Rendite ist mit 20 % per annum gegeben. Es ist also $a = 0.05$ und $\sigma = 0.20$. Angenommen $\Delta t = 0.01$, dies bedeutet, dass die Änderungen des Aktienpreisprozesses in Zeitintervallen der Länge 0.01 Jahre (also 3,65 Tage) betrachtet werden. Für die weiteren Parameter gelten folgende Annahmen: Sicherheitszuschlag des Versicherers $\theta = 1$, Sicherheitszuschlag des Rückversicherers $\eta = 1.5$, Intensität $\lambda = 3$, Mittelwert $\mu = 1$, konstanter absoluter Risikoparameter $\nu = 0.2$, Zinsrate $r = 0.3$ und $s = 5$.

Der Surplusprozess einer optimalen Strategie (siehe Kapitel 6.1, Gleichung 6.1) wird beschrieben

durch

$$\begin{aligned}
dX_t &= \left(rX_t + (a - r)A_t^* + (\theta - \eta + (1 + \theta)q_t^*)\lambda\mu \right) dt + A_t^* \sigma S_t^\beta dW_t - q_t^* dC_t + q_t^* \sigma_0 dB_t \\
&= \left(0.3X_t + (0.35 - 0.3)A_t^* + (1 - 1.5 + (1 + 1)q_t^*) \cdot 3 \cdot 1 \right) dt \\
&\quad + A_t^* \cdot 1 \cdot S_t^{-0.6} dW_t - q_t^* dC_t + q_t^* dB_t.
\end{aligned}$$

Durch Diskretisierung erhält man folgenden Surplusprozess

$$\begin{aligned}
\Delta X_t &= \left(rX_t + (a - r)A_t^* + (\theta - \eta + (1 + \theta)q_t^*)\lambda\mu \right) \Delta t + A_t^* \sigma S_t^\beta \Delta W_t - q_t^* \Delta C_t + q_t^* \sigma_0 \Delta B_t \\
&= \left(0.3X_t + (0.35 - 0.3)A_t^* + (1 - 1.5 + (1 + 1)q_t^*) \cdot 3 \cdot 1 \right) \Delta t \\
&\quad + A_t^* \cdot S_t^{-0.6} \Delta W_t - q_t^* \Delta C_t + q_t^* \Delta B_t,
\end{aligned}$$

wobei für A_t^* und q_t^* die optimale Investitions-Rückversicherungsstrategie aus Theorem 6.2.3 verwendet wird.

Des Weiteren gilt $\Delta X_t := X_{i+1} - X_i$ für $i = 0, \dots, t - 1$ und sowohl ΔW_t als auch ΔB_t sind zufällige Werte aus der Normalverteilung. Die Schadenhöhe Y_t sei eine positive Zufallsvariable und die Wahrscheinlichkeit für einen Sprung durch $\mathbb{P}(N_{t+1} - N_t) = \lambda \Delta t$ gegeben, wobei $\mathbb{P}(\text{Sprung tritt in } \Delta t \text{ auf}) = \mathbb{P}(U_t \in [0, \lambda \Delta t])$ mit U_t gleichverteilt auf $[0, 1]$.

Der CEV Aktienpreisprozess (siehe Kapitel 6.1) wird beschrieben durch

$$\begin{aligned}
dS_t &= S_t(adt + \sigma S_t^\beta dW_t) \\
&= S_t(0.35dt + S_t^{-0.6}dW_t).
\end{aligned}$$

Bezeichnet S_t den Aktienpreis zu einem bestimmten Zeitpunkt t und ΔS den Anstieg des Aktienkurses innerhalb des nächsten kleinen Zeitintervalls Δt , dann gilt

$$\Delta S_t = S_t(a\Delta t + \sigma S_t^\beta \Delta W_t) \quad (7.1)$$

$$= S_t(0.35\Delta t + S_t^{-0.6}\Delta W_t), \quad (7.2)$$

wobei $\Delta S_t := S_{i+1} - S_i$ für $i = 0, \dots, t - 1$ gilt und ΔW_t ein zufälliger Wert aus der Normalverteilung ist.

Die Ergebnisse aus der Simulation des Surplusprozesses bei optimaler Strategie werden in der Tabelle 7.1 und entsprechend in der Abbildung 7.1 veranschaulicht und zeigen einen möglichen Surplusverlauf bei einer optimalen Strategie, die durch das wiederholte Ziehen eines zufälligen ΔW_t aus $\mathcal{N}(0, \Delta t)$, ΔB_t aus $\mathcal{N}(0, \Delta t)$, U_t aus $\mathcal{U}(0, 1)$ und Y_t entsteht.

Diese Werte entsprechen nur einem möglichen Verlauf, da andere Zufallszahlen zu anderen Surplusbewegungen führen. Somit ist der letzte Surpluswert von 101.9614 als Zufallswert am Ende von zehn Zeitintervallen, also am Ende eines Zehnteljahres, zu interpretieren.

Surplus zu Beginn des Zeitraums	zufälliger Wert von ΔW_t	zufälliger Wert von ΔB_t	zufälliger Wert von Y_t	zufälliger Wert von U_t	Änderung des Surplus während des Zeitraums
100	0.6232	0.7990	35.1660	0.8308	0.2905
100.2905	0.9409	-0.9921	58.5264	0.5497	-0.1157
100.1748	0.2120	0.2379	91.7194	0.2858	0.3791
100.5539	-1.0078	-0.7420	75.7200	0.7537	0.6854
101.2393	1.0823	-0.1315	38.0446	0.5678	-0.0032
101.2361	0.3899	0.0880	7.5854	0.0540	0.2928
101.5289	-0.6355	-0.5596	53.0798	0.7792	0.5755
102.1044	0.4437	-0.9499	93.4011	0.1299	0.1035
102.2078	0.7812	0.0593	56.8824	0.4694	0.1979
102.4058	-0.8217	-0.2656	1.1902	0.3371	0.7858
103.1916					

Tabelle 7.1: *Simulation eines Surplusverlaufes bei optimaler Strategie für 10 Zeitintervalle der Länge $\Delta t = 0.01$.*

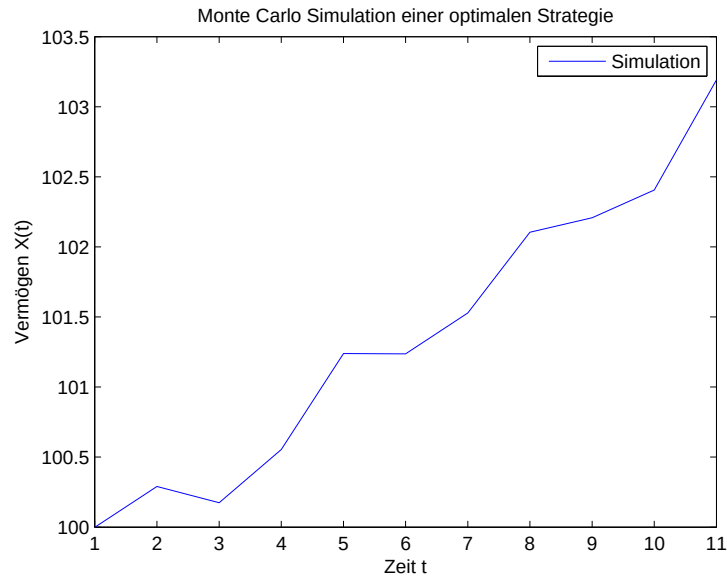


Abbildung 7.1: *Simulation eines Surplusverlaufes bei optimaler Strategie für 10 Zeitintervalle der Länge $\Delta t = 0.01$.*

Für die Veranschaulichung des Zielfunktional wird eine Mittelung über 1000 Monte Carlo Simulationen einer optimalen Strategie für 50 Zeitintervalle, also für ein halbes Jahr, durchgeführt. In den Abbildungen 7.2, 7.3, 7.4 werden die Auswirkungen verschiedener Modellparameter auf

das Zielfunktional verdeutlicht.

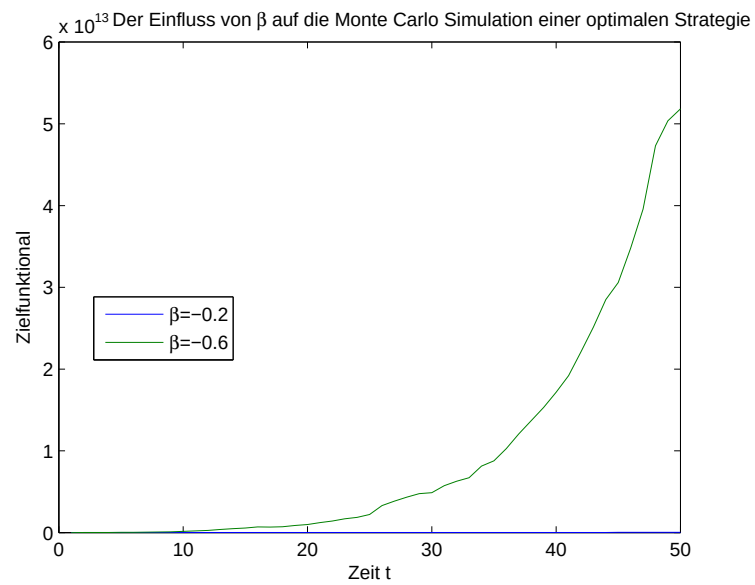


Abbildung 7.2: Einfluss von β auf das Zielfunktional

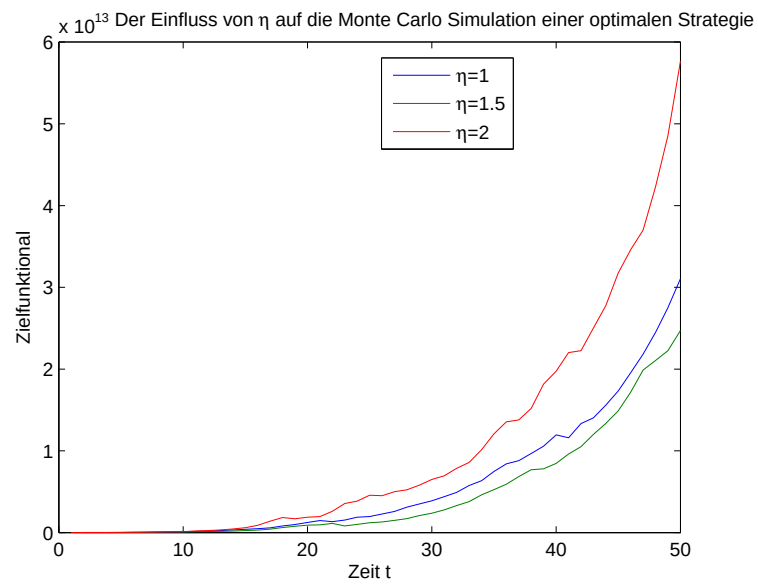


Abbildung 7.3: Einfluss von η auf das Zielfunktional

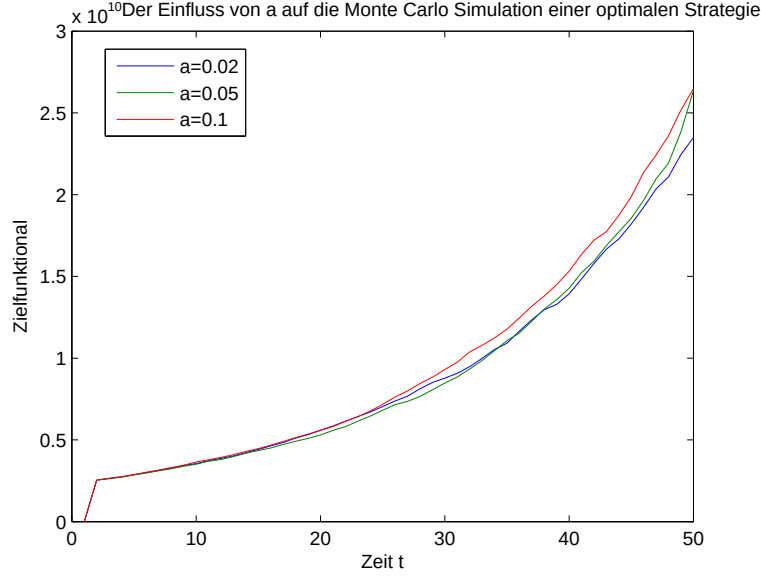


Abbildung 7.4: Einfluss von a auf das Zielfunktional

7.2 Monte Carlo Simulation einer einfachen Strategie

Bei der Monte Carlo Simulation einer einfachen Strategie werden die Inputparameter analog zur optimalen Strategie gewählt und die Eigenbehaltsquote q wird mit 0.8 angenommen. Der Surplusprozess einer einfachen Strategie wird, wie auch bei der optimalen Strategie, beschrieben durch

$$\begin{aligned} \Delta X_t = & \left(0.3X_t + (0.35 - 0.3)A_t + (1 - 1.5 + (1 + 1)q_t) \cdot 3 \cdot 1 \right) \Delta t \\ & + A_t \cdot S_t^{-0.6} \Delta W_t - q_t \Delta C_t + q_t \Delta B_t, \end{aligned}$$

wobei die optimalen Strategien A_t^* und q_t^* durch die einfachen Strategien A_t und q_t ersetzt werden. Für die einfache Investitions-Rückversicherungsstrategie wird ein zeitlicher Mittelwert der optimalen Investitions-Rückversicherungsstrategie verwendet. Des Weiteren gelten die selben Annahmen, welche auch bei der optimalen Strategie getroffen wurden.

Die Ergebnisse aus der Simulation des Surplusprozesses bei einfacher Strategie werden in der Tabelle 7.2 und entsprechend in der Abbildung 7.5 veranschaulicht und zeigen einen möglichen Pfad eines Vermögens, das auf diese Weise erzeugt wird.

Surplus zu Beginn des Zeitraums	zufälliger Wert von ΔW_t	zufälliger Wert von ΔB_t	zufälliger Wert von Y_t	zufälliger Wert von U_t	Änderung des Surplus während des Zeitraums
100	-0.4326	-1.6656	81.4724	0.9058	0.1000
100.1000	0.1253	0.2877	12.6987	0.9134	0.3859
100.4859	-1.1465	1.1909	63.2359	0.0975	0.5929
101.0788	1.1892	-0.0376	27.8498	0.5469	0.2855
101.3642	0.3273	0.1746	95.7507	0.9649	0.3619
101.7261	-0.1867	0.7258	15.7613	0.9706	0.4759
102.2020	-0.5883	2.1832	95.7167	0.4854	0.7299
102.9319	-0.1364	0.1139	80.0280	0.1419	0.3792
103.3111	1.0668	0.0593	42.1761	0.9157	0.3136
103.6247	-0.0956	-0.8323	79.2207	0.9595	0.2279
103.8526					

Tabelle 7.2: *Simulation eines Surplusverlaufes bei einfacher Strategie für 10 Zeitintervalle der Länge $\Delta t = 0.01$.*

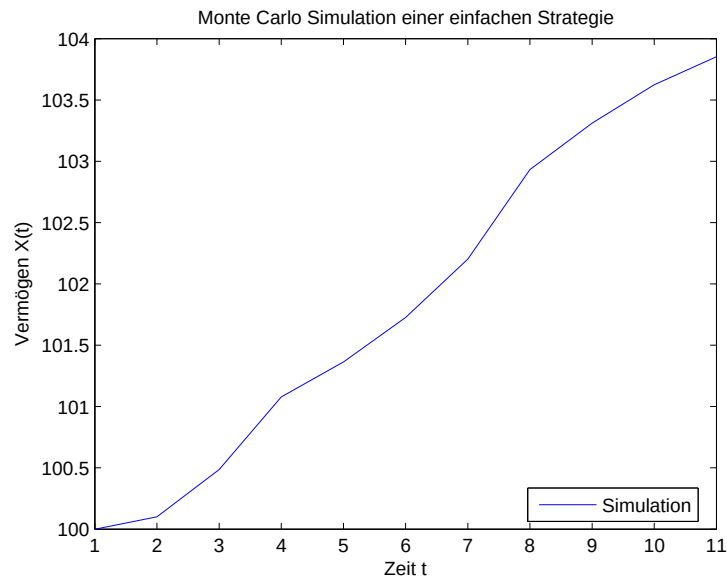


Abbildung 7.5: *Simulation eines Surplusverlaufes bei einfacher Strategie für 10 Zeitintervalle der Länge $\Delta t = 0.01$.*

Es ist wichtig, sich vor Augen zu halten, dass die Tabelle nur einen möglichen Verlauf des Vermögens zeigt. Andere Zufallszahlen würden zu anderen Surplusbewegungen führen. In der Simulation kann jedes kleine Zeitintervall Δt verwendet werden. Mit dem Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ erreicht man die vollständige Beschreibung des Surplusprozesses. Der letzte Surpluswert von

118.3541 in Tabelle 7.2 kann als Zufallswert der Surplusverteilung am Ende von zehn Zeitintervallen, das bedeutet, am Ende eines Zehnteljahres, angesehen werden. Durch wiederholte Simulationen der Surpluswerte, wie in Tabelle 7.2, erhält man eine vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Surplusprozess am Ende dieses Zeitraums.

Für die Berechnung des Zielfunktional wird eine Mittelung über 1000 Monte Carlo Simulationen einer einfachen Strategie für 50 Zeitintervalle, also für ein halbes Jahr, durchgeführt. Die Auswirkungen verschiedener Inputparameter auf das Zielfunktional werden in den Abbildungen 7.6, 7.7, 7.8 veranschaulicht.

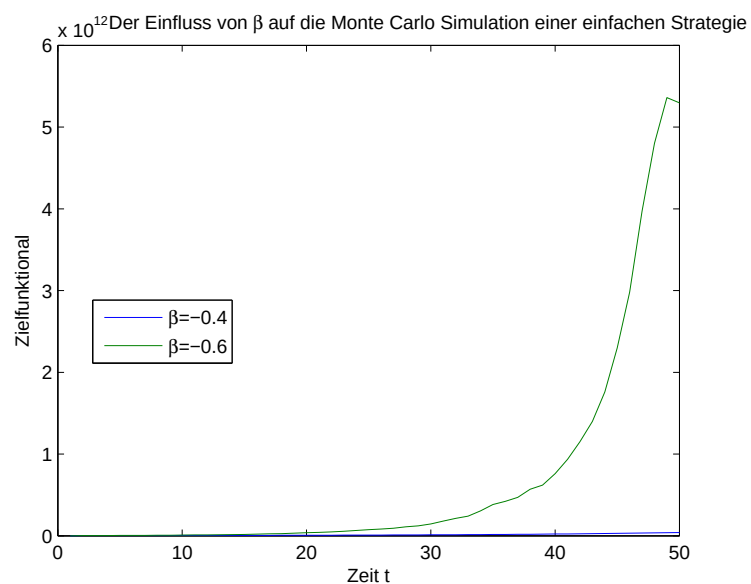


Abbildung 7.6: *Einfluss von β auf das Zielfunktional*

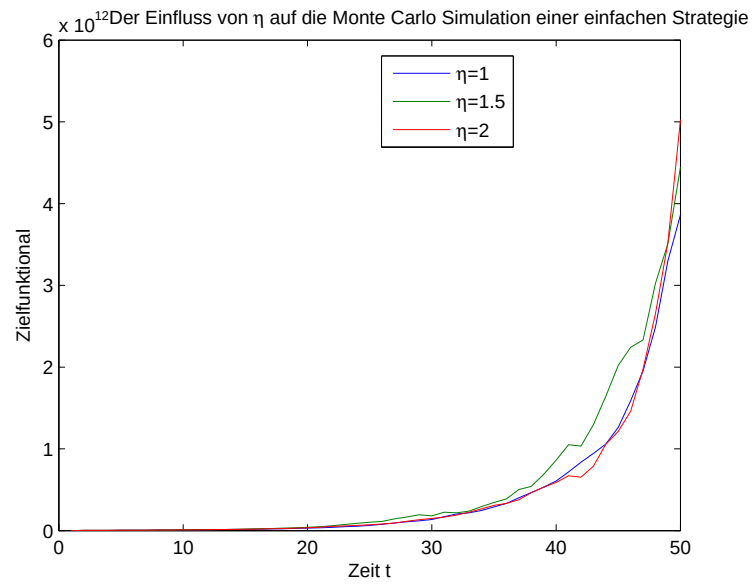


Abbildung 7.7: Einfluss von η auf das Zielfunktional

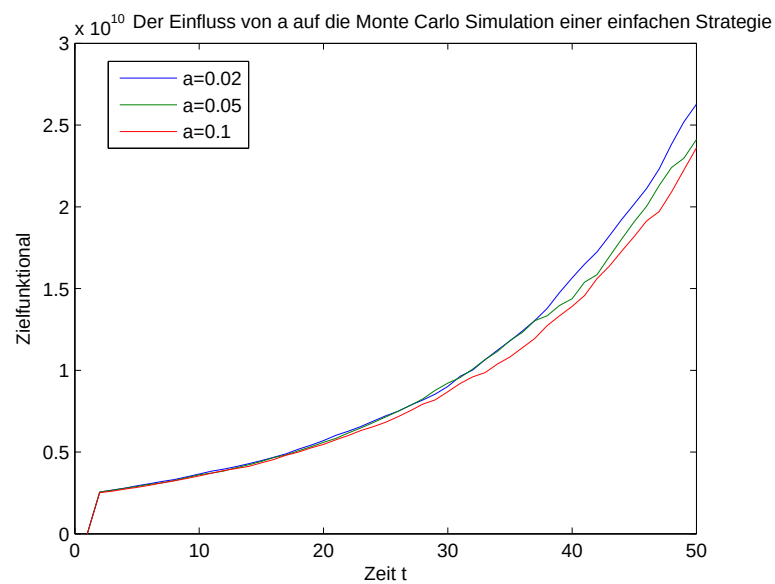


Abbildung 7.8: Einfluss von a auf das Zielfunktional

7.3 Monte Carlo Simulation einer einfachen Strategie im Vergleich zu einer optimalen Strategie

In diesem Unterkapitel wird die optimale Strategie mit einer einfachen Strategie verglichen, indem die beiden Zielfunktionale der Monte Carlo Simulation gegenübergestellt werden. Die Inputparameter werden analog zu den Kapiteln 7.1 und 7.2 angenommen.

Die Zielfunktionale einer möglichen optimalen, als auch einer einfachen Strategie für 100 Zeitintervalle, also für ein Jahr, können sich entsprechend der Abbildung 7.9 entwickeln.

Da andere Zufallszahlen zu anderen Zielfunktionalen führen, könnte der Verlauf des Zielfunktional einer optimalen und einer einfachen Strategie auch wie in Abbildung 7.10 dargestellt, verlaufen.

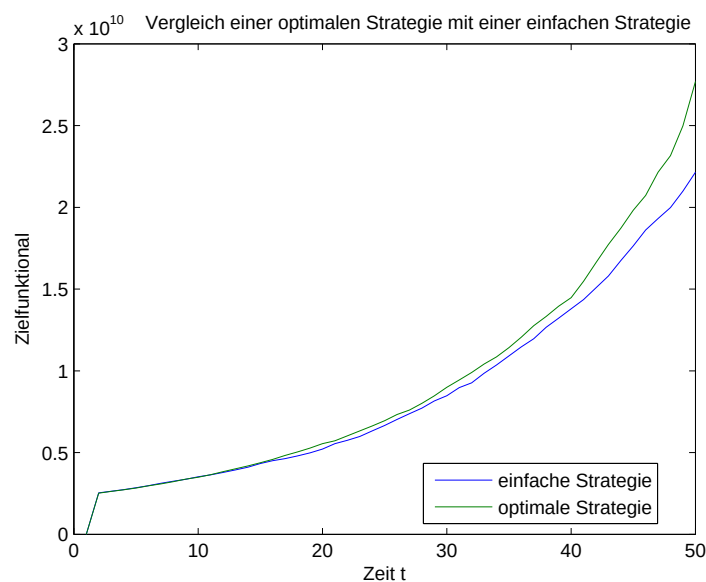


Abbildung 7.9: *Simulation des Zielfunktional zum Vergleich einer optimalen Strategie mit einer einfachen Strategie.*

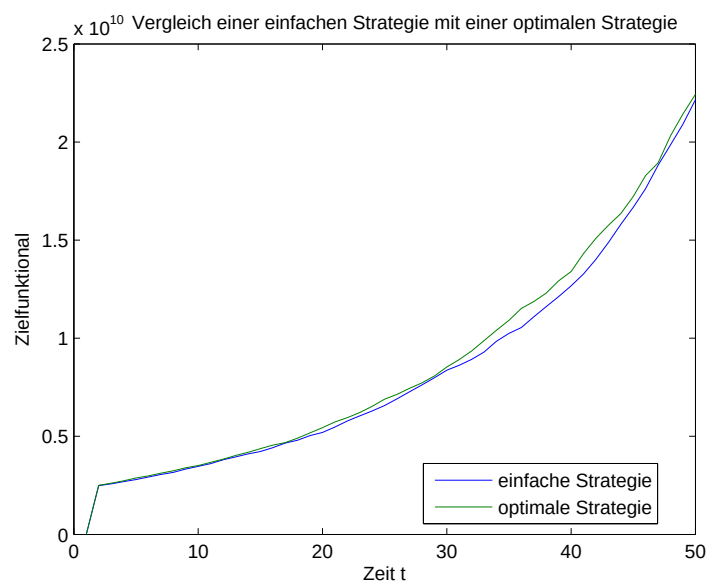


Abbildung 7.10: *Simulation des Zielfunktional zum Vergleich einer optimalen Strategie mit einer einfachen Strategie.*

Anhang A

Programme für das numerische Beispiel

Die Programme zum numerischen Beispiel in Kapitel 6.3 wurden mit MATLAB (Version R2007a) geschrieben. Beispielhaft wird zuerst das Programm für den Effekt von β auf die optimale Investitionsstrategie A_t^* abgebildet, als nächstes das Programm für den Effekt von σs^β auf die optimale Investitionsstrategie A_t^* und zum Schluss das Programm für den Effekt von a auf die optimale Investitionsstrategie A_t^* .

```
Der Effekt von  $\beta$  auf die optimale Investitionsstrategie  $A_t^*$ 
function[var] = beispiel631()
t = [0 : 1 : 9];
T = 10;
r = 0.3;
nu = 0.2;
sigma = 1;
s = 5;
a = 0.35;
beta1 = -0.6;
beta2 = -0.4;
beta3 = -0.2;
beta4 = 0;
A = 0;
B = 0;
C = 0;
D = 0;
for i = 1 : length(t)
A(i) = (1 -  $\frac{a-r}{2r} (e^{-2r \cdot \text{beta1} \cdot (T-t(i))} - 1)$ )  $s^{-2 \cdot \text{beta1}} \frac{a-r}{\text{sigma} \cdot \text{nu}} e^{-r(T-t(i))}$ ;
B(i) = (1 -  $\frac{a-r}{2r} (e^{-2r \cdot \text{beta2} \cdot (T-t(i))} - 1)$ )  $s^{-2 \cdot \text{beta2}} \frac{a-r}{\text{sigma} \cdot \text{nu}} e^{-r(T-t(i))}$ ;
C(i) = (1 -  $\frac{a-r}{2r} (e^{-2r \cdot \text{beta3} \cdot (T-t(i))} - 1)$ )  $s^{-2 \cdot \text{beta3}} \frac{a-r}{\text{sigma} \cdot \text{nu}} e^{-r(T-t(i))}$ ;
D(i) = (1 -  $\frac{a-r}{2r} (e^{-2r \cdot \text{beta4} \cdot (T-t(i))} - 1)$ )  $s^{-2 \cdot \text{beta4}} \frac{a-r}{\text{sigma} \cdot \text{nu}} e^{-r(T-t(i))}$ ;
end
figure(1)
X = 1 : length(t);
plot(X,A,X,B,X,C,X,D);
legend('β = -0.6', 'β = -0.4', 'β = -0.2', 'β = 0');
xlabel('t');
ylabel('Die optimale Investitionsstrategie');
title('Der Effekt von β auf die optimale Investitionsstrategie');

Der Effekt von  $\sigma s^\beta$  auf die optimale Investitionsstrategie  $A_t^*$ 
function[var] = beispiel632()
t = [0 : 1 : 9];
T = 10;
r = 0.3;
```

```

nu = 0.2;
s = 5;
a = 0.35;
beta = -0.6;
sigma1 =  $\frac{0.2108}{s^\beta}$ ;
sigma2 =  $\frac{0.3241}{s^\beta}$ ;
sigma3 =  $\frac{0.5173}{s^\beta}$ ;
A = 0;
B = 0;
C = 0;
for i = 1 : length(t)
A(i) =  $(1 - \frac{a-r}{2r} (e^{-2r \cdot \text{beta} \cdot (T-t(i))} - 1)) s^{-2 \cdot \text{beta}} \frac{a-r}{\text{sigma1} \cdot \text{nu}} e^{-r(T-t(i))}$ ;
B(i) =  $(1 - \frac{a-r}{2r} (e^{-2r \cdot \text{beta} \cdot (T-t(i))} - 1)) s^{-2 \cdot \text{beta}} \frac{a-r}{\text{sigma2} \cdot \text{nu}} e^{-r(T-t(i))}$ ;
C(i) =  $(1 - \frac{a-r}{2r} (e^{-2r \cdot \text{beta} \cdot (T-t(i))} - 1)) s^{-2 \cdot \text{beta}} \frac{a-r}{\text{sigma3} \cdot \text{nu}} e^{-r(T-t(i))}$ ;
end
figure(1)
X = 1 : length(t);
plot(X,A,X,B,X,C);
legend('σsβ = 0.2108', 'σsβ = 0.3241', 'σsβ = 0.5173');
xlabel('t');
ylabel('Die optimale Investitionsstrategie');
title('Der Effekt von σsβ auf die optimale Investitionsstrategie');

```

```

Der Effekt von a auf die optimale Investitionsstrategie At*
function[var] = beispiel633()
t = [0 : 1 : 9];
T = 10;
r = 0.3;
nu = 0.2;
sigma = 1;
s = 5;
beta = -0.6;
a1 = 0.35;
a2 = 0.45;
a3 = 0.55;
A = 0;
B = 0;
C = 0;
for i = 1 : length(t)
A(i) =  $(1 - \frac{a1-r}{2r} (e^{-2r \cdot \text{beta} \cdot (T-t(i))} - 1)) s^{-2 \cdot \text{beta}} \frac{a1-r}{\text{sigma} \cdot \text{nu}} e^{-r(T-t(i))}$ ;
B(i) =  $(1 - \frac{a2-r}{2r} (e^{-2r \cdot \text{beta} \cdot (T-t(i))} - 1)) s^{-2 \cdot \text{beta}} \frac{a2-r}{\text{sigma} \cdot \text{nu}} e^{-r(T-t(i))}$ ;
C(i) =  $(1 - \frac{a3-r}{2r} (e^{-2r \cdot \text{beta} \cdot (T-t(i))} - 1)) s^{-2 \cdot \text{beta}} \frac{a3-r}{\text{sigma} \cdot \text{nu}} e^{-r(T-t(i))}$ ;
end
figure(1)
X = 1 : length(t);
plot(X,A,X,B,X,C);
legend('a = 0.35', 'a = 0.45', 'a = 0.55');
xlabel('t');
ylabel('Die optimale Investitionsstrategie');
title('Der Effekt von a auf die optimale Investitionsstrategie');

```


Anhang B

Programme für die Monte Carlo Simulation

Des Weiteren werden die Programme der Monte Carlo Simulation zum Vergleich von optimalen und einfachen Strategien vorgestellt. Die Programme zur Monte Carlo Simulation in Kapitel 7 wurden mit MATLAB (Version R2007a) geschrieben. Beispielhaft wird zuerst das Programm zur Berechnung des Vermögens bei einer einfachen Strategie angeführt und dann das Programm zur Berechnung des für Surplus bei einer optimalen Strategie. Anschließend wird das Programm zur Berechnung des Zielfunktional einer einfachen Strategie, des Weiteren das Programm zur Berechnung des Zielfunktional einer optimalen Strategie und zum Schluss das Programm für den direkten Vergleich von optimaler und einfacher Strategie präsentiert.

```
Monte Carlo Simulation des Vermögens mittels einfacher Strategie
function[var] = einfacheStrategie(a, b, q, dt)
%a=0.05 b=-0.6 q=0.20 dt=1/100
%Simulation Vermögen
theta = 1;
nue = 0.2;
lambda = 3;
eta = 1.5;
r = 0.3;
T = 101;
e = 0.8; %eigenbehaltsquote
mu = 1;
s = 5;
%Simulation 1
X(1) = 100; %Surplus
S(1) = 100; %Aktienpreis
A(1) = 0; %optimale Investitionsstrategie
q(1) = 0; %optimale Rückversicherungsstrategie
rho(1) = 0; %lösung
alpha(1) = 0;
k = 0;
for o = 1 : 100
A(o) = (1 -  $\frac{a-r}{2r}$  · ( $\exp^{-2 \cdot r \cdot b \cdot (T-o)} - 1$ )) ·  $s^{-2b}$  ·  $\frac{a-r}{c \cdot nue}$  ·  $\exp^{-r \cdot (T-o)}$ ;
rho(o) = nue · e ·  $\exp^{r \cdot (T-o)}$ ;
q(o) =  $\frac{\rho(o)}{nue}$  ·  $\exp^{-r \cdot (T-o)}$ ;
```

```

end
z1 = sum(A(1,:))/100;
z2 = sum(q(1,:))/100;
for m = 1 : 100
    k(m) = m;
    dW(m) = randn();
    dB(m) = randn();
    Y(m) = rand() * 100;
    U(m) = rand();
    if U(m) > 0
        if U(m) < lambda * dt
            alpha(m) = S(m) * (adt + c * S(m)^b * dW(m));
            delta(m) = (r * X(m) + (a - r) * z1 + (theta - eta + (1 + eta) * z2) * lambda * mu) * dt + z1 * c * S(m)^b * dW(m) - z2 * Y(m) + z2 * cdB(m);
            X(m+1) = X(m) + delta(m);
            S(m+1) = alpha(m) + S(m);
        else
            alpha(m) = S(m) * (adt + c * S(m)^b * dW(m));
            delta(m) = (r * X(m) + (a - r) * z1 + (theta - eta + (1 + eta) * z2) * lambda * mu) * dt + z1 * c * S(m)^b * dW(m) + z2 * cdB(m);
            X(m+1) = X(m) + delta(m);
            S(m+1) = alpha(m) + S(m);
        end
    else
        alpha(m) = S(m) * (adt + c * S(m)^b * dW(m));
        delta(m) = (r * X(m) + (a - r) * z1 + (theta - eta + (1 + eta) * z2) * lambda * mu) * dt + z1 * c * S(m)^b * dW(m) + z2 * cdB(m);
        X(m+1) = X(m) + delta(m);
        S(m+1) = alpha(m) + S(m);
    end
end
var = X;
%Plot
figure(1)
Y = 1 : length(k) + 1;
plot(Y, X);
legend('Simulation1');
ylabel('Vermögen X(t)');
xlabel('Zeit t');
title('Monte Carlo Simulation einer einfachen Strategie');

Monte Carlo Simulation des Vermögens mittels einer optimalen Strategie
function[var] = optimaleStrategie(a, b, q, dt)
%a=0.05 b=-0.6 q=0.20 dt=1/100
theta = 1;
nue = 0.2;
lambda = 3;
eta = 1.5;
r = 0.3;
T = 101;
e = 0.8; %eigenbehaltsquote
mu = 1;
s = 5;
%Simulation Vermögen
X(1) = 100; %Surplus
S(1) = 100; %Aktienpreis
A(1) = 0; %optimale Investitionsstrategie
q(1) = 0; %optimale Rückversicherungsstrategie
rho(1) = 0; %lösung
alpha(1) = 0;
k = 0;
for m = 1 : 100
    k(m) = m;
    dW(m) = randn();
    dB(m) = randn();
    Y(m) = rand() * 100;
    U(m) = rand();
    if U(m) > 0
        if U(m) < lambda * dt
            A(m) = (1 -  $\frac{a-r}{2r} \cdot (\exp^{-2 \cdot r \cdot b \cdot (T-m)} - 1)$ ) *  $s^{-2b} \cdot \frac{a-r}{c \cdot nue} \cdot \exp^{-r(T-m)}$ ;
            rho(m) = nue * e *  $\exp^{r(T-m)}$ ;
            q(m) =  $\frac{\rho(m)}{nue} \cdot \exp^{-r(T-m)}$ ;
            alpha(m) = S(m) * (adt + c * S(m)^b * dW(m));
            delta(m) = (r * X(m) + (a - r) * A(m) + (theta - eta + (1 + eta) * q(m)) * lambda * mu) * dt + A(m) * c * S(m)^b * dW(m) - q(m) * Y(m) + q(m) * cdB(m);
            X(m+1) = X(m) + delta(m);
            S(m+1) = alpha(m) + S(m);
        else
            A(m) = (1 -  $\frac{a-r}{2r} \cdot (\exp^{-2 \cdot r \cdot b \cdot (T-m)} - 1)$ ) *  $s^{-2b} \cdot \frac{a-r}{c \cdot nue} \cdot \exp^{-r(T-m)}$ ;
            rho(m) = nue * e *  $\exp^{r(T-m)}$ ;

```

```

q(m) = rho(m) / nue * exp(-r*(T-m));
alpha(m) = S(m) * (adt + c * S(m)^b * dW(m));
delta(m) = (r * X(m) + (a - r) * A(m) + (theta - eta + (1 + eta) * q(m)) * lambda * mu) * dt + A(m) * c * S(m)^b * dW(m) + q(m) * cdB(m);
X(m+1) = X(m) + delta(m);
S(m+1) = alpha(m) + S(m);
end
else
A(m) = (1 - (a-r)/(2r) * (exp(-2*r*b*(T-m)) - 1)) * s^(-2b) * (a-r)/(c*nue) * exp(-r*(T-m));
rho(m) = nue * e * exp(r*(T-m));
q(m) = rho(m) / nue * exp(-r*(T-m));
alpha(m) = S(m) * (adt + c * S(m)^b * dW(m));
delta(m) = (r * X(m) + (a - r) * A(m) + (theta - eta + (1 + eta) * q(m)) * lambda * mu) * dt + A(m) * c * S(m)^b * dW(m) + q(m) * cdB(m);
X(m+1) = X(m) + delta(m);
S(m+1) = alpha(m) + S(m);
end
end
var = X;
%Plot
figure(1)
Y = 1 : length(k) + 1;
plot(Y, X);
legend('Simulation1');
ylabel('Vermögen X(t)');
xlabel('Zeit t');
title('Monte Carlo Simulation des Vermögens mittels einer optimalen Strategie');

Monte Carlo Simulation des Zielfunktionalis mittels einer einfachen Strategie
function[var] = Strategie1(a, b, q, dt)
%a=0.05 b=-0.6 q=0.20 dt=1/100
%für unterschiedliche Werte von beta= -0.4, -0.6
%einfache Strategie
theta = 1;
nue = 0.2;
lambda = 3;
eta = 1.5;
r = 0.3;
c = 1;
T = 50;
e = 0.8; %eigenbehaltsquote
mu = 1;
s = 5;
X(1) = 100; %Surplus
S(1) = 100; %Aktienpreis
A(1) = 0; %optimale Investitionsstrategie
q(1) = 0; %optimale Rückversicherungsstrategie
rho(1) = 0; %lösung
alpha(1) = 0;
k = 0;
b3 = -0.4;
b4 = -0.6;
%für b3
matrix3 = zeros(1000, 50);
ziel3 = zeros(1, 50);
for o = 1 : 50
A(o) = (1 - (a-r)/(2r) * (exp(-2*r*b3*(T-o)) - 1)) * s^(-2b3) * (a-r)/(c*nue) * exp(-r*(T-o));
rho(o) = nue * e * exp(r*(T-o));
q(o) = rho(o) / nue * exp(-r*(T-o));
end
z1 = sum(A(1, :))/50;
z2 = sum(q(1, :))/50;
for i = 1 : 1000
for m = 1 : 50
k(m) = m;
dW(m) = randn();
dB(m) = randn();
Y(m) = rand() * 100;
U(m) = rand();
if U(m) > 0
if U(m) < lambda * dt
alpha(m) = S(m) * (adt + c * S(m)^b * 3dW(m));
delta(m) = (r * X(m) + (a - r) * z1 + (theta - eta + (1 + eta) * z2) * lambda * mu) * dt + z1 * c * S(m)^b * 3dW(m) - z2 * Y(m) + z2 * cdB(m);
X(m+1) = X(m) + delta(m);
l(m+1) = -1/nue * exp(-nue * X(m+1));
S(m+1) = alpha(m) + S(m);
else
alpha(m) = S(m) * (adt + c * S(m)^b * 3dW(m));

```

```

delta(m) = (r · X(m) + (a - r) · z1 + (theta - eta + (1 + eta) · z2) · lambda · mu) · dt + z1 · c · S(m)b3dW(m) + z2 · cdB(m);
X(m + 1) = X(m) + delta(m);
l(m + 1) = - $\frac{1}{nue}$  · exp(-nue · X(m + 1));
S(m + 1) = alpha(m) + S(m);
end
else
alpha(m) = S(m) · (adt + c · S(m)b3dW(m));
delta(m) = (r · X(m) + (a - r) · z1 + (theta - eta + (1 + eta) · z2) · lambda · mu) · dt + z1 · c · S(m)b3dW(m) + z2 · cdB(m);
X(m + 1) = X(m) + delta(m);
l(m + 1) = - $\frac{1}{nue}$  · exp(-nue · X(m + 1));
S(m + 1) = alpha(m) + S(m);
end
end
matrix3(i, :) = l;
end
for n = 1 : 50
z = sum(matrix3(:, n))/1000
ziel3(1, n) = z
end
%für b4
matrix4 = zeros(1000, 50);
ziel4 = zeros(1, 50);
for o = 1 : 50
A(o) = (1 -  $\frac{a-r}{2r}$  · (exp-2·r·b4·(T-o) - 1)) · s-2b4 ·  $\frac{a-r}{c \cdot nue}$  · exp-r·(T-o);
rho(o) = nue · e · expr·(T-o);
q(o) =  $\frac{rho(o)}{nue}$  · exp-r·(T-o);
end
z1 = sum(A(1, :))/50;
z2 = sum(q(1, :))/50;
for i = 1 : 1000
for m = 1 : 50
k(m) = m;
dW(m) = randn();
dB(m) = randn();
Y(m) = rand() · 100;
U(m) = rand();
if U(m) > 0
if U(m) < lambda · dt
alpha(m) = S(m) · (adt + c · S(m)b4dW(m));
delta(m) = (r · X(m) + (a - r) · z1 + (theta - eta + (1 + eta) · z2) · lambda · mu) · dt + z1 · c · S(m)b4dW(m) - z2 · Y(m) + z2 · cdB(m);
X(m + 1) = X(m) + delta(m);
l(m + 1) = - $\frac{1}{nue}$  · exp(-nue · X(m + 1));
S(m + 1) = alpha(m) + S(m);
else
alpha(m) = S(m) · (adt + c · S(m)b4dW(m));
delta(m) = (r · X(m) + (a - r) · z1 + (theta - eta + (1 + eta) · z2) · lambda · mu) · dt + z1 · c · S(m)b4dW(m) + z2 · cdB(m);
X(m + 1) = X(m) + delta(m);
l(m + 1) = - $\frac{1}{nue}$  · exp(-nue · X(m + 1));
S(m + 1) = alpha(m) + S(m);
end
else
alpha(m) = S(m) · (adt + c · S(m)b4dW(m));
delta(m) = (r · X(m) + (a - r) · z1 + (theta - eta + (1 + eta) · z2) · lambda · mu) · dt + z1 · c · S(m)b4dW(m) + z2 · cdB(m);
X(m + 1) = X(m) + delta(m);
l(m + 1) = - $\frac{1}{nue}$  · exp(-nue · X(m + 1));
S(m + 1) = alpha(m) + S(m);
end
end
matrix4(i, :) = l;
end
for n = 1 : 50
z = sum(matrix4(:, n))/1000
ziel4(1, n) = z
end
%Plot
figure(1)
Y = 1 : length(k) + 1;
plot(Y, ziel3, Y, ziel4, );
legend('beta=-0.4', 'beta=-0.6');
ylabel('Zielfunktional');
xlabel('Zeit t');
title('Der Einfluss von beta auf die Monte Carlo Simulation einer einfachen Strategie');

Monte Carlo Simulation des Zielfunktionalen mittels einer optimalen Strategie
%a=0.05 b=-0.6 q=0.20 dt=1/100
function[var] = Strategie(a, b, q, dt)

```

```

%für unterschiedliche Werte von beta= - 0.4, -0.6
%einfache Strategie
theta = 1;
nue = 0.2;
lambda = 3;
eta = 1.5;
r = 0.3;
c = 1;
T = 50;
e = 0.8; %eigenbehaltsquote
mu = 1;
s = 5;
X(1) = 100; %Surplus
S(1) = 100; %Aktienpreis
A(1) = 0; %optimale Investitionsstrategie
q(1) = 0; %optimale Rückversicherungsstrategie
rho(1) = 0; %Lösung
alpha(1) = 0;
k = 0;
b3 = -0.4;
b4 = -0.6;
%für b3
matrix3 = zeros(1000, 50);
ziel3 = zeros(1, 50);
for i = 1 : 1000
for m = 1 : 50
k(m) = m;
dW(m) = randn();
dB(m) = randn();
Y(m) = rand() * 100;
U(m) = rand();
if U(m) > 0
if U(m) < lambda * dt
A(m) = (1 -  $\frac{a-r}{2r} \cdot (\exp^{-2 \cdot r \cdot b3 \cdot (T-m)} - 1)$ ) *  $s^{-2b3} \cdot \frac{a-r}{c \cdot nue} \cdot \exp^{-r(T-m)}$ ;
rho(m) = nue * e *  $\exp^{r(T-m)}$ ;
q(m) =  $\frac{\rho(m)}{nue} \cdot \exp^{-r(T-m)}$ ;
alpha(m) = S(m) * (adt + c * S(m)b3dW(m));
delta(m) = (r * X(m) + (a - r) * A(m) + (theta - eta + (1 + eta) * q(m)) * lambda * mu) * dt + A(m) * c * S(m)b3dW(m) - q(m) * Y(m) + q(m) * cdB(m);
X(m+1) = X(m) + delta(m);
l(m+1) = - $\frac{1}{nue} \cdot \exp(-nue \cdot X(m+1))$ ;
S(m+1) = alpha(m) + S(m);
else
A(m) = (1 -  $\frac{a-r}{2r} \cdot (\exp^{-2 \cdot r \cdot b3 \cdot (T-m)} - 1)$ ) *  $s^{-2b3} \cdot \frac{a-r}{c \cdot nue} \cdot \exp^{-r(T-m)}$ ;
rho(m) = nue * e *  $\exp^{r(T-m)}$ ;
q(m) =  $\frac{\rho(m)}{nue} \cdot \exp^{-r(T-m)}$ ;
alpha(m) = S(m) * (adt + c * S(m)b3dW(m));
delta(m) = (r * X(m) + (a - r) * A(m) + (theta - eta + (1 + eta) * q(m)) * lambda * mu) * dt + A(m) * c * S(m)b3dW(m) + q(m) * cdB(m);
X(m+1) = X(m) + delta(m);
l(m+1) = - $\frac{1}{nue} \cdot \exp(-nue \cdot X(m+1))$ ;
S(m+1) = alpha(m) + S(m);
end
else
A(m) = (1 -  $\frac{a-r}{2r} \cdot (\exp^{-2 \cdot r \cdot b3 \cdot (T-m)} - 1)$ ) *  $s^{-2b3} \cdot \frac{a-r}{c \cdot nue} \cdot \exp^{-r(T-m)}$ ;
rho(m) = nue * e *  $\exp^{r(T-m)}$ ;
q(m) =  $\frac{\rho(m)}{nue} \cdot \exp^{-r(T-m)}$ ;
alpha(m) = S(m) * (adt + c * S(m)b2dW(m));
delta(m) = (r * X(m) + (a - r) * A(m) + (theta - eta + (1 + eta) * q(m)) * lambda * mu) * dt + A(m) * c * S(m)b3dW(m) + q(m) * cdB(m);
X(m+1) = X(m) + delta(m);
l(m+1) = - $\frac{1}{nue} \cdot \exp(-nue \cdot X(m+1))$ ;
S(m+1) = alpha(m) + S(m);
end
end
matrix3(i, :) = l;
end
for n = 1 : 50
z = sum(matrix3(:, n))/1000
ziel3(1, n) = z
end
%für b4
matrix4 = zeros(1000, 50);
ziel4 = zeros(1, 50);
for i = 1 : 1000
for m = 1 : 50
k(m) = m;
dW(m) = randn();

```

```

dB(m) = randn();
Y(m) = rand() * 100;
U(m) = rand();
if U(m) > 0
if U(m) < lambda * dt
A(m) = (1 -  $\frac{a-r}{2r} \cdot (\exp^{-2 \cdot r \cdot b4 \cdot (T-m)} - 1)$ ) *  $s^{-2b4} \cdot \frac{a-r}{c \cdot nue} \cdot \exp^{-r \cdot (T-m)}$ ;
rho(m) = nue * e *  $\exp^{r \cdot (T-m)}$ ;
q(m) =  $\frac{\rho(m)}{nue} \cdot \exp^{-r \cdot (T-m)}$ ;
alpha(m) = S(m) * (adt + c * S(m)b4dW(m));
delta(m) = (r * X(m) + (a - r) * A(m) + (theta - eta + (1 + eta) * q(m)) * lambda * mu) * dt + A(m) * c * S(m)b4dW(m) - q(m) * Y(m) + q(m) * cdB(m);
X(m+1) = X(m) + delta(m);
l(m+1) = - $\frac{1}{nue} \cdot \exp(-nue \cdot X(m+1))$ ;
S(m+1) = alpha(m) + S(m);
else
A(m) = (1 -  $\frac{a-r}{2r} \cdot (\exp^{-2 \cdot r \cdot b4 \cdot (T-m)} - 1)$ ) *  $s^{-2b4} \cdot \frac{a-r}{c \cdot nue} \cdot \exp^{-r \cdot (T-m)}$ ;
rho(m) = nue * e *  $\exp^{r \cdot (T-m)}$ ;
q(m) =  $\frac{\rho(m)}{nue} \cdot \exp^{-r \cdot (T-m)}$ ;
alpha(m) = S(m) * (adt + c * S(m)b4dW(m));
delta(m) = (r * X(m) + (a - r) * A(m) + (theta - eta + (1 + eta) * q(m)) * lambda * mu) * dt + A(m) * c * S(m)b4dW(m) + q(m) * cdB(m);
X(m+1) = X(m) + delta(m);
l(m+1) = - $\frac{1}{nue} \cdot \exp(-nue \cdot X(m+1))$ ;
S(m+1) = alpha(m) + S(m);
end
else
A(m) = (1 -  $\frac{a-r}{2r} \cdot (\exp^{-2 \cdot r \cdot b4 \cdot (T-m)} - 1)$ ) *  $s^{-2b4} \cdot \frac{a-r}{c \cdot nue} \cdot \exp^{-r \cdot (T-m)}$ ;
rho(m) = nue * e *  $\exp^{r \cdot (T-m)}$ ;
q(m) =  $\frac{\rho(m)}{nue} \cdot \exp^{-r \cdot (T-m)}$ ;
alpha(m) = S(m) * (adt + c * S(m)b4dW(m));
delta(m) = (r * X(m) + (a - r) * A(m) + (theta - eta + (1 + eta) * q(m)) * lambda * mu) * dt + A(m) * c * S(m)b4dW(m) + q(m) * cdB(m);
X(m+1) = X(m) + delta(m);
l(m+1) = - $\frac{1}{nue} \cdot \exp(-nue \cdot X(m+1))$ ;
S(m+1) = alpha(m) + S(m);
end
end
matrix4(i,:) = l;
end
for n = 1 : 50
z = sum(matrix4(:,n))/1000
ziel4(1,n) = z
end
%Plot
figure(1)
Y = 1 : length(k) + 1;
plot(Y, ziel3, Y, ziel4, );
legend('beta=-0.4', 'beta=-0.6');
ylabel('Zielfunktional');
xlabel('Zeit t');
title('Der Einfluss von beta auf die Monte Carlo Simulation einer optimalen Strategie');

```

Literaturverzeichnis

- [1] BERNT KARSTEN ØKSENDAL. *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, Heidelberg New York, 2000.
- [2] THOMAS DECK. *Der Itô-Kalkül, Einführung und Anwendungen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2005.
- [3] RÜDIGER U. SEYDEL. *Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [4] L.C.G. ROGERS AND DAVID WILLIAMS. *Diffusion, Markov Processes and Martingales*. Cambridge Mathematical Press, Cambridge, 2000.
- [5] WENDELL H. FLEMING AND HALIL M. SONER. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer-Verlag, USA, 2006.
- [6] RICHARD BELLMAN. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton 1957.
- [7] ERHARD KREMER. *Einführung in die Versicherungsmathematik*. Vandenhoeck & Ruprecht, 1985.
- [8] ROBERT C. MERTON. *Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model*. Journal of Economic Theory, 3:373-413, 1971.
- [9] IOANNIS KARATZAS, JOHN P. LEHOCZKY, SURESH P. SETHI AND STEVEN E. SHREVE. *Explicit Solution of a General Consumption/Investment Problem*. Mathematics of Operations Research, 11:261-294, 1986.
- [10] WENDELL H. FLEMING AND THALEILA ZARIPHOPULOU. *An optimal investment/consumption model with borrowing*. Mathematics of Operations Research, 16:802-822, 1991.
- [11] SID BROWNE. *Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin*. Mathematics of Operations Research, 20:937-958, 1995.

- [12] HANS U. GERBER. *An introduction to mathematical risk theory*. S. S. Huebner Foundation for Insurance Education, Wharton School, University of Pennsylvania, 1979.
- [13] JAN GRANDELL. *Aspects of Risk Theory*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [14] J. MICHAEL HARRISON. *Ruin Problems with Compounding Asset*. Stochastic Processes and their Applications, 5:67-79, 1977.
- [15] IOANNIS KARATZAS AND STEVEN E. SHREVE. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [16] THOMAS S. FERGUSON. *Betting Systems which Minimize the Probability of Ruin*. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 13:795-818, 1965.
- [17] YANG HAILANG AND ZHANG LIHONG. *Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process*. Insurance: Mathematics and Economics, 37:615-634, 2005.
- [18] ROBERT C. MERTON. *Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model*. Journal of Economic Theory, 3:373-413, 1971.
- [19] IOANNIS KARATZAS. *Optimization Problems in the Theory of Continuous Trading*. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 6:1221-1259, 1989.
- [20] J. COX. *Notes on option pricing I: Constant elasticity of variance diffusions*. Journal of Portfolio Management, 22:15-17, 1996.
- [21] JOHN C. HULL. *Optionen, Futures und andere Derivate*. Pearson Studium, 2005.
- [22] JOHN C. COX. *The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes*. Journal of Financial Economics, 3:145-166, 1976.
- [23] FRANCOIS DUFRESNE AND HANS U. GERBER. *Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion*. Insurance: Mathematics and Economics, 10:51-59, 1991.
- [24] LIANG ZHIBIN, YUEN KAM CHUEN UND CHEUNG KA CHUN. *Optimal reinsurance - investment problem in a constant elasticity of variance stock market for jump-diffusion risk model*. Applied Stochastic Models in Business and Industry, John Wiley & Sons, 2011.
- [25] MENGDI GU, YIPENG YANG, SHOUE LI, JINGYI ZHANG. *Constant elasticity of variance model for proportional reinsurance and investment strategies*. Insurance: Mathematics and Economics, 46:580-587, 2010.